

AN INTRODUCTION TO
RELATIVISTIC QUANTUM FIELD THEORY

Silvan S. Schweber
Brandeis University

Row, Peterson and Co • Evanston, Ill., Elmsford, N. Y., 1961

С. Швебер

**ВВЕДЕНИЕ
В РЕЛЯТИВИСТСКУЮ
КВАНТОВУЮ
ТЕОРИЮ ПОЛЯ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1963

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
Б. Н. ВАЛУЕВА, В. И. ОГИВЕЦКОГО,
И. В. ПОЛУБАРИНОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Я. А. СМОРОДИНСКОГО

Редакция литературы по физике

От редактора русского издания

Настоящий курс теории релятивистских квантовых полей Швебера вышел в очень трудное для теории время. Многочисленные попытки целой армии теоретиков найти пути для построения теории сильных взаимодействий, не основанной на теории возмущений, пока не оправдывают надежд, на них возлагавшихся. Однако во время поисков теоретики накопили огромный материал по различным свойствам релятивистских квантовых полей. Тысячи работ посвящены изучению симметрии, тонким электромагнитным эффектам, аксиоматике. Вступающим в науку молодым теоретикам не легко сейчас разобраться в большом числе направлений, возникших в этой области. В первую очередь для таких физиков и предназначена книга Швебера. Эта книга является пособием по квантовой теории поля, позволяющим последовательно изучить эту область физики, причем учебником, находящимся на вполне современном уровне; книга содержит много оригинальных материалов (вместе с библиографией) по самым разным направлениям квантовой теории поля, еще не нашедших отражения в довольно многочисленной монографической литературе. Это прежде всего относится к последней, четвертой части, посвященной перспективам развития теории.

Основная же часть книги содержит систематическое подробное описание аппарата теории и важнейших ее результатов. При этом автор обращает свое внимание главным образом на принципиальные стороны теории, оставляя за конкретными эффектами роль иллюстраций. Это, конечно, было бы недостатком книги, если бы в нашей литературе не существовало книги Берестецкого и Ахиезера¹⁾, в которой свойства эффектов изложены достаточно полно. Курс Швебера, таким образом, должен служить следующей ступенью.

Следует отметить, что автор часто излагает материал не самым экономным путем. Поэтому читателю рекомендуется в неясных местах обращаться все же к оригинальным работам, на которые ссылается автор.

Читателю, который будет искать большие математические подробности следует, конечно, обратиться к монографии Боголюбова и Ширкова²⁾, но и в этом случае окажется полезным предварительное знакомство с книгой Швебера.

Хотя автор и старался осветить все стороны теории, он не затрагивает большой круг идей, ведущих свое начало от работ Гейзенберга (восходящих еще к старой статье Ландау и Пайерлса) и связанных с созданием теории S -матрицы³⁾.

¹⁾ А. И. А х и е з е р, В. Б. Б е р е с т е ц к и й, Квантовая электродинамика, М.—Л., 1959; см. также обзор В. Б. Б е р е с т е ц к о г о, УФН, 86, 25 (1962). Обзор эффектов содержат также книги: В. Г а й т л е р, Квантовая теория излучений, ИЛ, 1956; А. С о к о л о в, Введение в квантовую электродинамику, М.—Л., 1958.

²⁾ Н. Н. Б о г о л ю б о в, Д. В. Ш и р к о в, Введение в квантовую теорию полей, М.—Л., 1957.

³⁾ В. Г е й з е н б е р г, в сб. «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959; в этом сборнике помещен ряд статей по теории S -матрицы и дан обзор старых работ.

Трудности, возникшие в теории поля, привели к мысли, что теория поля может быть построена вообще без аппарата, основанного на изучении лагранжиана взаимодействия, непосредственно в терминах состояний свободных частиц и переходов между ними. Эта точка зрения получила сильную поддержку после работ Ландау и Померанчука¹⁾, которые привели сильные аргументы в пользу того, что последовательное развитие лагранжевой схемы приводит вообще к обращению в нуль всякого взаимодействия (это направление получило название «московского нуля»).

Новое развитие теория S -матрицы²⁾ получила в последнее время благодаря работам Редже³⁾, открывшего важную роль аналитических свойств нерелятивистской амплитуды рассеяния в плоскости комплексных значений орбитального момента.

В работах Грибова, Чу и других эти свойства были перенесены на свойства релятивистской амплитуды; при этом была выяснена глубокая связь с высказанной несколько лет назад теорией Померанчука о поведении полных сечений при очень больших энергиях (равенство сечений для частиц и античастиц). Все эти работы остались вне рамок книги.

Кроме того, изменился взгляд на проблему доказательства представления Менделстама и дисперсионных соотношений — задачи, которые автору кажутся очень важными. По-видимому, эти доказательства вообще не могут быть построены в рамках современного формализма. Аналитические свойства амплитуды рассеяния, по-видимому, не могут быть выведены из физических предположений о системе, а представляют собой далекоидущую математическую экстраполяцию.

Поэтому в современной теории либо вообще отказываются от строгих доказательств, либо же пытаются пересматривать основы теории. Успехи теории S -матрицы, во всяком случае, не могут сделать ненужными те направления, которые описаны в последней гл. 18, в особенности теорию функций Уайтмана⁴⁾.

Так как в оценке перспектив теории и связанного с этим отбора материала автор обращает внимание не на все направления, то читателю будет полезно ознакомиться с цитированной в сносках литературой, без знакомства с которой его представление о современной теории осталось бы существенно неполным.

Я. Сморodinский

¹⁾ См. статью Л. Ландау, в сб. «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, 1958.

²⁾ Обзор нового направления в теории S -матрицы содержится в лекциях Дж. Чу (G. G. Chew, *S-Matrix Theory of Strong Interactions*, New York, 1961); в той же книге помещено несколько основных работ. Много интересного по теории поля можно найти в сборнике памяти В. Паули «Теоретическая физика 20 века», ИЛ, 1962.

³⁾ Работы по полюсам Редже и библиография собраны в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963.

⁴⁾ Полезно ознакомиться с различными точками зрения на пути развития теории в сборнике лекций Семинара по теоретической физике, происходившем в Триесте в июле—августе 1956 г. (*Theoretical Physics, International Atomic Energy Agency, Vienne, 1963*).

Предисловие

Всегда с удивлением видишь, как взрослеют дети, и обнаруживаешь, что они способны сделать то, что их родители уже не в состоянии полностью понять. Эта книга служит тому хорошим примером. Сначала доктор Ф. де Гофман и я представляли ее себе только как короткое введение в достаточной мере примитивные вычисления по π -мезонам во втором томе книги «Мезоны и поля», изданной в 1955 г. Доктор Швебер уже тогда превратил первый том в полный учебник по перенормировкам в теории поля. Теперь он стал обширным трактатом по теории поля вообще.

За шесть лет со времени издания двух томов книги «Мезоны и поля» теория поля успешно развилась. Частично это было стимулировано экспериментом, например открытием несохранения четности в слабых взаимодействиях. Однако в большей степени прогресс обусловлен более глубоким проникновением в основы теории поля при попытках ответить на центральный вопрос релятивистской теории, который Швебер поставил в гл. 18 этой книги: «Существуют ли решения перенормированных уравнений квантовой электродинамики или какой-либо мезонной теории?». Это исследование повело к аксиоматическому подходу в квантовой теории поля, который, вероятно, является сейчас наиболее обещающим и надежным. Он описан в гл. 18.

Около половины настоящей книги посвящено взаимодействию между полями. Эта новая книга содержит исчерпывающее обсуждение теории перенормировок, начиная с общих принципов и кончая количественными результатами в случае электродинамики. Я не знаю какой-либо другой трактовки этого предмета, которая была бы столь же полной и строгой. Физик, интересующийся приложениями теории поля, будет рад хорошему изложению теории рассеяния π -мезонов Cu и Lu , теории, которая оказалась столь успешной в объяснении π -мезонных явлений при низких энергиях и которая вытеснила методы, изложенные во втором томе книги «Мезоны и поля».

В книге подчеркивается значение общих принципов, таких, как симметрия, инвариантность и т. д., и теория изложена на основе этих принципов. Поверхностными объяснениями автор никогда не удовлетворяется. Тот, кто действительно хочет знать и понять теорию поля и работать в этой области, получит большое удовлетворение от этой книги.

Г. Бете

От автора

Настоящая книга представляет собой результат переработки первого тома книги «Мезоны и поля», которая была написана профессорами Бете и Гофманом и мною в 1955 г. Вначале мы хотели пересмотреть лишь часть содержания той книги и включить в новое издание некоторые изменения, происшедшие с 1955 г. К несчастью, другие обязанности помешали Бете и Гофману принять в этом участие. Тем временем я закончил пересмотр, и в итоге получился по существу новый текст. С доброго согласия Бете и Гофмана новая книга публикуется под именем одного автора.

Однако назначение настоящей книги остается тем же, что и того тома монографии «Мезоны и поля», на котором она основана, в частности представить простым и независимым образом современное развитие квантовой теории поля.

Книга предназначается прежде всего в качестве учебника для аспирантского курса. Ее цель — довести изучающего до того момента, когда он сможет обратиться к литературе для изучения последних успехов квантовой теории поля и начать исследование в этой области. Можно также надеяться, что книга будет интересна физикам и других специальностей, особенно занимающимся твердым телом и ядерной физикой, которые захотят изучить методы теории поля.

Желание сделать книгу разумным образом оригинальной привело к тому, что она оказалась объемнее, чем первоначально предполагалось. Тем не менее большую часть материала было решено включить в книгу, поскольку мне хотелось изложить большую часть идей, лежащих в основе современной теории поля.

Чтобы книга все же не переросла приемлемых размеров, я не включил в нее швингеровскую формулировку теории поля, основанную на принципе наименьшего действия. По этой же причине были изложены лишь некоторые стороны быстро растущей теории дисперсионных соотношений. Упоминанием о представлении Манделстама для двухчастичной амплитуды рассеяния и заканчивается книга. Однако некоторые темы,

не затронутые в тексте, упоминаются в разделе «Вопросы и литература для дальнейшего изучения».

Читателю, уже привыкшему к множеству различных обозначений, может быть полезно указание наших обозначений. Операцию комплексного сопряжения мы обозначаем чертой сверху, так что \bar{a} означает величину, комплексно сопряженную к a . Эрмитово сопряжение обозначается звездочкой: $(a^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Наш метрический тензор $g_{\mu\nu}$ таков, что $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$, и мы различаем ковариантные и контравариантные тензоры. Матрицы Дирака удовлетворяют соотношениям $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$. Спинор, сопряженный дираковскому спинору u , обозначается через \tilde{u} , причем $\tilde{u} = u^* \gamma^0$.

Часть первая

**ОДНОЧАСТИЧНЫЕ
УРАВНЕНИЯ**

Квантовая механика и принципы симметрии

§ 1. Квантовомеханический формализм

Обычная формулировка квантовой механики прежде всего основывается на постулате, что вся необходимая для физики информация о физической системе в данный момент времени может быть получена, если известна функция состояния системы. Эта функция состояния представляется лучом в комплексном гильбертовом пространстве. Следовательно, если $|\Psi\rangle$ есть вектор, представляющий физически реализуемое состояние, то это же состояние представляет и вектор $|\Psi\rangle$, помноженный на постоянную. Поэтому обычно для описания состояния из числа векторов, принадлежащих лучу, выбирают один, нормированный на единицу. Условие нормировки такого вектора состояния $|\Psi\rangle$ записывают в виде $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$, обозначая через $\langle\chi|\Psi\rangle = \langle\Psi|\chi\rangle$ скалярное произведение векторов $|\chi\rangle$ и $|\Psi\rangle$ ¹⁾. Если состояние нормировано, то остается неопределенным лишь постоянный множитель, по модулю равный единице. Два вектора, отличающиеся на такой фазовый множитель, представляют одно и то же состояние. Предполагается, что совокупность состояний образует линейное пространство. Это предположение о линейности пространства векторов состояния называют принципом суперпозиции, являющимся, по-видимому, наиболее фундаментальным принципом квантовой механики.

Второй постулат квантовой механики состоит в том, что каждой измеримой (т. е. наблюдаемой) величине α системы соответствует самосопряженный оператор $a = a^*$, обладающий полной системой ортонормированных собственных функций $|a'\rangle$ и собственных значений a' , т. е.

$$a|a'\rangle = a'|a'\rangle, \quad (1.1)$$

$$\langle a'|a''\rangle = \delta_{a'a''}, \quad (1.2)$$

$$\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| = 1. \quad (1.3)$$

Символ $\delta_{a'a''}$ понимается как символ Кронекера, если a' и a'' принадлежат дискретному спектру, и как δ -функция Дирака $\delta(a' - a'')$, если оба они принадлежат непрерывному спектру. Правая часть (1.2) равна нулю, если одно из состояний принадлежит непрерывному, а другое дискретному спектру. Аналогично, суммирование в соотношении пол-

¹⁾ Мы будем также использовать для скалярного произведения обозначение (f, g) ; λ будет обозначать величину, комплексно сопряженную с λ .

ноты (1.3) для непрерывного спектра следует понимать как интегрирование.

Следующий постулат состоит в том, что если произведено измерение для определения значения наблюдаемой α , то вероятность обнаружить у системы, описываемой вектором состояния $|\Psi\rangle$, значение α , равное a' , равно величине $|\langle a' | \Psi \rangle|^2$. Другими словами, $\langle a' | \Psi \rangle$ есть амплитуда вероятности наблюдения значения a' . Наблюдение над системой, вообще говоря, будет возмущать систему и, таким образом, изменять вектор состояния системы. Если в результате измерения над системой мы найдем, что наблюдаемая α имеет значение a' , то вектором (ненормированным), описывающим систему после измерения, будет $|a'\rangle \langle a' | \Psi \rangle$. Поэтому повторное измерение, сделанное сразу же вслед за первым, снова даст значение a' наблюдаемой α . Строго говоря, эти утверждения верны только в случае наблюдаемой с невырожденным дискретным спектром собственных значений. Однако эти правила легко могут быть распространены на более сложные случаи.

Таким образом, измерение величины α вызывает переход системы в одно из состояний, являющихся собственными функциями оператора α . Однако теоретически можно предсказать только вероятность перехода системы из данного состояния $|\Psi\rangle$ в любое из этих собственных состояний. Если действительно имеется физическая система, находящаяся в состоянии $|\Psi\rangle$, то измерение позволяет проверить предсказанные вероятности. Как способ (и, по-видимому, наиболее характерный) приготовления системы в данном состоянии можно рассматривать измерение первого рода, т. е. измерение, которое, будучи повторено немедленно вслед за первым, дает вновь тот же результат.

Обычно для определения состояния системы нужно произвести несколько независимых измерений. В соответствии с этим в квантовой механике предполагается, что всегда возможно сделать полный набор совместимых независимых измерений, т. е. таких, когда измерения одних наблюдаемых не возмущают измеренные уже значения других. Результаты всех возможных совместимых измерений, как доставляющие максимально возможную информацию о системе, могут быть использованы для характеристики состояния системы. Для того чтобы два измерения были совместимы или одновременно выполнимы, необходимо и достаточно, чтобы коммутировали операторы, соответствующие измеряемым величинам. Самая широкая совокупность наблюдаемых, в которой все они коммутируют друг с другом, образует «полный набор коммутирующих операторов» (см. книгу Дирака [181]). Каждой совокупности собственных значений полного набора коммутирующих наблюдаемых соответствует только одно общее собственное состояние.

Таким образом, понятие акта измерения имеет фундаментальное значение для формулировки и интерпретации квантовомеханического формализма. Анализ различных типов физических измерений над микрообъектами показывает, что почти всякое физическое измерение такого рода можно описать как процесс столкновения. Достаточно лишь напомнить, что такие величины, как энергии стационарных состояний или времена жизни возбужденных состояний, могут быть получены с помощью измерения эффективных сечений рассеяния. Признание за процессами столкновения центрального места в квантовой механике имело огромное значение для развития теории поля в последнее время. Отчасти этим же объясняется интенсивное развитие квантовой теории рассеяния в прошедшем десятилетии.

Процесс столкновения состоит в том, что одна частица, падающая, налетает на другую — частицу мишени — и в результате взаимодействия с нею рассеивается. Первоначально налетающая частица находится на большом расстоянии от мишени. Если силы между частицами обладают конечным радиусом действия, что имеет место почти всегда, то налетающая частица первоначально движется как свободная. Точно так же после взаимодействия с мишенью рассеянная частица снова оказывается вне силового поля и поэтому движется к детектору как свободная частица. Эксперимент по рассеянию ставится с налетающими частицами, приготовленными в определенном состоянии. В эксперименте измеряют угловое распределение, энергии и другие коммутирующие наблюдаемые рассеянных частиц, удалившихся на большое расстояние от мишени. Поэтому когда делаются теоретические предсказания, статистическая интерпретация должна привлекаться только для начальных и конечных состояний, состоящих из свободно движущихся частиц или групп частиц, находящихся в стационарных состояниях. В этом и заключается важное значение явлений столкновения с теоретической точки зрения: для таких процессов нет необходимости давать интерпретацию волновой функции системы частиц, находящихся близко друг к другу и сильно взаимодействующих. Из сделанных замечаний следует также вывод о необходимости изучения волновых уравнений, описывающих свободно движущиеся частицы, чему и посвящается часть первая настоящей книги.

Из приведенных постулатов вытекает следствие, что каждому реальному состоянию соответствует только один луч в гильбертовом пространстве. Если бы одному и тому же состоянию соответствовало несколько различных лучей и если $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$ и т. д. — нормированные векторы этих лучей, то из неравенства Шварца $|\langle\Psi_1, \Psi_2\rangle|^2 < 1$, т. е. амплитуда перехода из $|\Psi_1\rangle$ в $|\Psi_2\rangle$ была бы меньше единицы, что невозможно, если оба вектора представляют одно и то же состояние. Поэтому $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$ и т. д. могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем. Однако возможен случай, когда в гильбертовом пространстве существует луч, который не соответствует никакому реальному физическому состоянию. Такое положение возникает в релятивистских теориях поля или во вторично квантованной формулировке квантовой механики. Во всех этих случаях гильбертово пространство может быть разложено на ортогональные подпространства \mathcal{H}_A , \mathcal{H}_B , $\mathcal{H}_C \dots$, такие, что относительная фаза проекции вектора на каждое подпространство произвольна и неизмерима. Другими словами, если мы обозначим через $|A, l\rangle$ базисные векторы, на которые натянута гильбертово пространство \mathcal{H}_A , а через $|B, j\rangle$ — базисные векторы, на которые натянута \mathcal{H}_B и т. д., то нет такого физического измерения, которое позволило бы различить векторы

$$\sum_i a_i |A, l\rangle \oplus \sum_j b_j |B, j\rangle \oplus \dots$$

и

$$\sum_i a_i e^{i\alpha} |A, l\rangle \oplus \sum_j b_j e^{i\beta} |B, j\rangle \oplus \dots,$$

где α , β , ... — произвольные фазы. Закон, ответственный за расщепление гильбертова пространства на несколько некогерентных ортогональных подпространств, называют абсолютным правилом отбора, или правилом суперотбора (см. статьи Вика [847]; Вигнера [860]; Баргманна, Вигнера и Уайтмана [33]). Правило суперотбора связано с существова-

нием оператора, коммутирующего со всеми наблюдаемыми, но не кратного единичному. Если гильбертово пространство состояний \mathcal{H} расщепляется, например, на два ортогональных подпространства \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B , такие, что относительные фазы проекций вектора состояний на оба подпространства совершенно произвольны, то произвольно и среднее значение всякого эрмитова оператора, у которого имеются ненулевые матричные элементы между состояниями обоих подпространств, при условии, что состояние, в котором вычисляется среднее, обладает ненулевыми проекциями на оба подпространства \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B . Но, для того чтобы величина была измеримой, несомненно, она должна обладать определенным средним значением в любом состоянии. Поэтому эрмитов оператор, связывающий два таких ортогональных подпространства, не может быть измерим. Примером подобной ситуации служит гильбертово пространство, состоящее из состояний 1, 2, 3, ..., n , ... частиц с зарядом e у каждой. Ортогональными подпространствами тогда являются системы с определенным полным зарядом, и эрмитов оператор, связывающий подпространства с различными полными зарядами, не может быть наблюдаемым. Правило суперотбора в этом случае есть закон сохранения заряда, или эквивалентная ему калибровочная инвариантность первого рода (см. гл. 7, § 7).

Изложенное выше эквивалентно утверждению, что все лучи, принадлежащие только одному подпространству, реализуемы, а лучи, обладающие проекциями на два или более подпространств, не могут быть реализованы. Если не все лучи реализуемы, то ясно, что нет измерения, которое привело бы к этим нереализуемым состояниям. Поэтому они не могут быть собственными функциями какого-либо эрмитова оператора, соответствующего наблюдаемой величине для данной физической системы. Следовательно, чтобы быть наблюдаемым, эрмитов оператор должен удовлетворять некоторым условиям (правилам суперотбора). В обычной элементарной квантовой механике используется одно когерентное пространство, так что можно различить любые два луча, и все самосопряженные операторы наблюдаемы.

Дальше, в квантовой механике постулируется, что операторы координаты и импульса частицы подчиняются следующим перестановочным соотношениям:

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.4)$$

Существует математическая теорема (см. книгу фон Неймана [813]), согласно которой для частицы без внутренних степеней свободы эти операторы неприводимы, что означает, что полное гильбертово пространство не имеет подпространств, которые бы оставались инвариантными при действии этих операторов. Это свойство эквивалентно утверждению, что любой оператор, коммутирующий с p и q , кратен единичному и что всякий оператор является функцией p и q . Описание системы в терминах наблюдаемых p и q является полным.

Наконец, в квантовой механике постулируется, что динамическое поведение системы описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar\partial_t |\psi; t\rangle = H |\psi; t\rangle, \quad (1.5)$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, а гамильтониан системы H служит генератором преобразования сдвигов по времени. Здесь мы имеем в виду следующее. Предположим, что изменение вектора состояния со временем может быть получено действием

оператора $U(t, t_0)$ на начальное состояние $|t_0\rangle$, т. е.

$$|t\rangle = U(t, t_0)|t_0\rangle, \quad (1.6a)$$

$$U(t_0, t_0) = 1. \quad (1.6b)$$

Для сохранения вероятности требуется, чтобы норма вектора не изменялась со временем

$$\begin{aligned} \langle t|t\rangle &= \langle t_0|t_0\rangle = \\ &= \langle t_0|U^*(t, t_0)U(t, t_0)|t_0\rangle, \end{aligned} \quad (1.7)$$

и, следовательно, чтобы

$$U^*(t, t_0)U(t, t_0) = 1. \quad (1.8a)$$

Однако это условие еще не гарантирует унитарность U . Для унитарности еще нужно, чтобы выполнялось соотношение

$$U(t, t_0)U^*(t, t_0) = 1. \quad (1.8b)$$

Это условие будет удовлетворено, если для U выполняется групповое свойство

$$U(t, t_1)U(t_1, t_0) = U(t, t_0). \quad (1.9)$$

Действительно, если в равенстве (1.9) положить $t = t_0$ и предположить справедливость его при $t_0 < t_1$, то найдем

$$U(t_0, t_1)U(t_1, t_0) = 1, \quad (1.10a)$$

откуда

$$U(t_0, t_1) = U^{-1}(t_1, t_0). \quad (1.10b)$$

Умножая (1.10a) слева на $U^*(t_0, t_1)$ и используя (1.8a), получаем

$$U(t_1, t_0) = U^*(t_0, t_1) = U^{-1}(t_0, t_1). \quad (1.10b)$$

Следовательно, оператор U — унитарный.

Пусть t бесконечно мало отличается от t_0 , и $t - t_0 = \delta t$; тогда с точностью до первого порядка по δt можно написать

$$U(t_0 + \delta t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} H \delta t. \quad (1.11)$$

Для унитарности U оператор H должен быть эрмитовым. Оператор H имеет размерность энергии. Таким образом, при бесконечно малом изменении времени равенство (1.6a) можно переписать в виде

$$|t_0 + \delta t\rangle - |t_0\rangle = -\frac{i}{\hbar} H \delta t |t_0\rangle. \quad (1.12a)$$

В пределе $\delta t \rightarrow 0$ это равенство превращается в уравнение (1.5), так как по определению

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} (\delta t)^{-1} (|t + \delta t\rangle - |t\rangle) = \partial_t |t\rangle. \quad (1.12b)$$

§ 2. Шредингеровская и гейзенберговская картины движения

Выше, приводя сведения по квантовой механике, мы отмечали, что состояние системы в некоторый заданный момент времени t определяется результатами всех возможных экспериментов над системой в этот момент

времени. Вся информация содержится в векторе состояния $|t\rangle_S = |\Psi_S(t)\rangle$. Развитие же системы во времени находит свое выражение в том, что вектор состояния зависит от времени и изменяется по закону, который определяется уравнением Шредингера

$$H_S |\Psi_S(t)\rangle = i\hbar \partial_t |\Psi_S(t)\rangle. \quad (1.13)$$

Операторы, соответствующие физическим наблюдаемым, F_S , от времени не зависят; они одни и те же для всех моментов времени: $\partial_t F_S = 0$. Эти условия служат определением шредингеровской картины движения, принадлежность к которой мы отмечаем индексом S (см. книгу Дирака [181]).

Хотя операторы от времени не зависят, их средние значения в каком-либо состоянии в общем случае зависят от времени. Если обозначим среднее

$$\langle F_S \rangle = \langle \Psi_S(t) | F_S | \Psi_S(t) \rangle, \quad (1.14)$$

то

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle F_S \rangle = \langle \Psi_S(t) | [F_S, H_S] | \Psi_S(t) \rangle. \quad (1.15)$$

В шредингеровской картине можно ввести оператор \dot{F}_S такой, что по определению

$$\langle \dot{F}_S \rangle = \frac{d}{dt} \langle F_S \rangle. \quad (1.16)$$

Преобразуем теперь вектор состояния $|\Psi_S(t)\rangle$ при помощи зависящего от времени унитарного преобразования $V(t)$:

$$|\Phi(t)\rangle = V(t) |\Psi_S(t)\rangle, \quad (1.17a)$$

$$V(t) V^*(t) = V^*(t) V(t) = 1, \quad (1.17b)$$

$$V^*(t) = V^{-1}(t). \quad (1.17b)$$

Воспользовавшись уравнениями (1.13) и (1.17a), найдем, что $|\Phi(t)\rangle$ подчиняется следующему уравнению:

$$i\hbar \partial_t |\Phi(t)\rangle = [i\hbar \partial_t V(t) V^{-1}(t) + V(t) H_S V^{-1}(t)] |\Phi(t)\rangle. \quad (1.18)$$

Если мы выберем зависящий от времени унитарный оператор V , удовлетворяющим уравнению

$$-i\hbar \partial_t V(t) = V(t) H_S V^{-1}(t) \cdot V(t), \quad (1.19)$$

то преобразованное состояние $|\Phi_H\rangle$ окажется независимым от времени, т. е. $\partial_t |\Phi_H\rangle = 0$. С учетом унитарности оператора $V(t)$ среднее значение оператора F_S выражается через состояния $|\Phi_H\rangle$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \langle \Psi_S(t), F_S \Psi_S(t) \rangle = \langle V(t) \Psi_S(t), V(t) F_S \Psi_S(t) \rangle = \\ &= \langle \Phi_H, V(t) F_S V^{-1}(t) \Phi_H \rangle. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Определим теперь оператор $F_H(t)$ согласно

$$F_H(t) = V(t) F_S V^{-1}(t), \quad (1.21)$$

так что $F_H(t)$ будет иметь то же среднее значение в состоянии $|\Phi_H\rangle$, что и оператор F_S в состоянии $|\Psi_S\rangle$. Дифференцируя (1.17b) по времени, получаем соотношение

$$(\partial_t V) V^* + V \partial_t V^* = 0, \quad (1.22)$$

используя которое совместно с уравнением (1.19) и эрмитово сопряженным ему уравнением, можно вывести уравнение, определяющее временную зависимость $F_H(t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t F_H(t) &= (\partial_t V) \cdot V^* F_H(t) + F_H(t) V \partial_t V^* = \\ &= \frac{i}{\hbar} [V H_S V^*, F_H(t)] = \\ &= \frac{i}{\hbar} [H_H, F_H(t)]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Полученное уравнение вместе с условием независимости вектора состояния от времени $\partial_t |\Phi_H\rangle = 0$ и определяют гейзенберговскую картину движения. Вектор состояния в гейзенберговской картине один и тот же для всех моментов времени; напротив, операторы зависят от времени. Вектор состояния системы $|\Phi_H\rangle$ описывает всю историю системы, т. е. результаты всех возможных экспериментов над системой на протяжении ее истории. Однако если выполнить реальный эксперимент над системой, то вектор состояния изменится. Хотя гейзенберговский вектор состояния $|\Phi_H\rangle$ не зависит от времени, он может быть задан по результатам, которые он должен предсказывать для некоторого эксперимента в некоторый фиксированный момент времени. Например, мы можем выбрать вектор состояния так, чтобы он совпадал со значением шредингеровского вектора состояния в момент времени $t=0$, т. е. $|\Phi_H\rangle = |\Psi_S(0)\rangle$.

Для замкнутой системы, у которой гамильтониан H_S от времени не зависит, унитарный оператор, осуществляющий преобразование от шредингеровской картины к гейзенберговской, выражается явно в виде

$$V(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H t\right), \quad (1.24)$$

где сделано предположение о совпадении картин в момент времени $t=0$. Отметим, что для замкнутой системы $H_S = \dot{H}_H = H$.

§ 3. Нерелятивистское уравнение для свободной частицы

Для описания физической системы часто бывает удобным фиксировать систему координат в гильбертовом пространстве, т. е. выбрать представление. Так как предполагается, что любая наблюдаемая имеет полный набор собственных функций, на которые натягивается некоторое подпространство гильбертова пространства векторов состояний, то эти собственные функции можно использовать в качестве базиса в этом подпространстве. Представление, в котором диагонален оператор координаты¹⁾ q , называется координатным, или q -представлением; представление, в котором диагонален оператор импульса p , называется импульсным, или p -представлением. В q -представлении вектор состояния $|\Psi\rangle$ задается своими компонентами, отнесенными к базисным векторам $|q\rangle$, которые являются собственными функциями оператора координаты. Компоненты $\langle q|\Psi\rangle$ имеют прямой физический смысл: $|\langle q|\Psi\rangle|^2 dq$ есть вероятность того, что при измерении координат частица будет найдена между q и $q+dq$. Собственные функции удовлетворяют уравнению

$$q|q'\rangle = q'|q'\rangle, \quad (1.25)$$

¹⁾ Автор употребляет термин «оператор положения». — Прим. ред.

а спектр оператора \mathbf{q} состоит из точек трехмерного евклидова пространства. Собственные функции $|\mathbf{q}'\rangle$ не нормируемы, так как они соответствуют собственным значениям, принадлежащим непрерывному спектру; но их можно нормировать на δ -функцию

$$\langle \mathbf{q}' | \mathbf{q}'' \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{q}''). \quad (1.26)$$

Реальным физическим состояниям соответствуют нормируемые векторы состояния, являющиеся волновыми пакетами. Так, частица, локализованная в окрестности \mathbf{q}_0 , может быть представлена вектором

$$| \rangle = \int d\mathbf{q}' f(\mathbf{q}' - \mathbf{q}_0) |\mathbf{q}'\rangle, \quad (1.27)$$

где функция $f(\mathbf{q}' - \mathbf{q}_0)$ как функция \mathbf{q}' в основном сосредоточена в окрестности \mathbf{q}_0 . Норма вектора $| \rangle$ равна

$$\langle | \rangle = \int d\mathbf{q}' \bar{f}(\mathbf{q}') f(\mathbf{q}'), \quad (1.28)$$

так что состояние $| \rangle$ будет нормируемо, если f квадратично интегрируема. Условие полноты можно записать следующим образом:

$$\int |\mathbf{q}'\rangle d\mathbf{q}' \langle \mathbf{q}'| = 1. \quad (1.29)$$

Вид оператора \mathbf{p} в \mathbf{q} -представлении получается с помощью перестановочных соотношений $[q_l, p_j] = i\hbar \delta_{lj}$. Если от этого коммутатора взять матричный элемент между состояниями $|\mathbf{q}'\rangle$ и $\langle \mathbf{q}''|$ и воспользоваться (1.29), то получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}'' | [q_r, p_s] | \mathbf{q}' \rangle &= i\hbar \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'') = \\ &= (q_r'' - q_r') \langle \mathbf{q}'' | p_s | \mathbf{q}' \rangle, \end{aligned} \quad (1.30)$$

и, следовательно, вспоминая, что $x\delta'(x) = -\delta(x)$, найдем

$$\langle \mathbf{q}'' | p_s | \mathbf{q}' \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_s''} \langle \mathbf{q}'' | \mathbf{q}' \rangle. \quad (1.31)$$

Подобным же образом импульсное представление характеризуется базисом векторов, обладающих следующими свойствами:

$$\mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \mathbf{p}' | \mathbf{p}' \rangle, \quad (1.32)$$

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p}'' \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}''), \quad (1.33)$$

$$\int | \mathbf{p}' \rangle d\mathbf{p}' \langle \mathbf{p}'| = 1. \quad (1.34)$$

Представление же для оператора \mathbf{q} получается в виде

$$\langle \mathbf{p}'' | q_r | \mathbf{p}' \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_r''} \langle \mathbf{p}'' | \mathbf{p}' \rangle. \quad (1.35)$$

Унитарная функция преобразования $\langle \mathbf{q}' | \mathbf{p}' \rangle$ от \mathbf{q} -представления к \mathbf{p} -представлению может быть найдена, если скалярно умножить уравнение (1.32) на $\langle \mathbf{q}' |$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' \langle \mathbf{q}' | \mathbf{p}' \rangle &= \langle \mathbf{q}' | \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \int \langle \mathbf{q}' | \mathbf{p} | \mathbf{q}'' \rangle d\mathbf{q}'' \langle \mathbf{q}'' | \mathbf{p}' \rangle = \\ &= -i\hbar \nabla_{\mathbf{q}'} \langle \mathbf{q}' | \mathbf{p}' \rangle. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Решая это дифференциальное уравнение, получаем

$$\langle \mathbf{q}' | \mathbf{p}' \rangle = \lambda e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' \cdot \mathbf{q}'}, \quad (1.37)$$

где с точностью до постоянного фазового множителя, по модулю равного единице, $\lambda = (2\pi\hbar)^{-3/2}$; это следует из требования, чтобы

$$\int \langle \mathbf{q}' | \mathbf{p}' \rangle d\mathbf{p}' \langle \mathbf{p}' | \mathbf{q}'' \rangle = \langle \mathbf{q}' | \mathbf{q}'' \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{q}''). \quad (1.38)$$

Таким образом, волновая функция $\Psi(\mathbf{q}') = \langle \mathbf{q}' | \Psi \rangle$ в конфигурационном пространстве связана с волновой функцией $\Phi(\mathbf{p}') = \langle \mathbf{p}' | \Psi \rangle$ в импульсном пространстве посредством обычного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{q}') = \langle \mathbf{q}' | \Psi \rangle &= \int d\mathbf{p}' \langle \mathbf{q}' | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \Psi \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\mathbf{p}' e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{q}' \cdot \mathbf{p}'} \Phi(\mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Гамильтонов оператор H для нерелятивистской свободной частицы, в сущности, может быть определен, если потребовать, чтобы он был инвариантным относительно сдвигов и вращений и преобразовывался, как энергия, при преобразованиях Галилея. Инвариантность относительно сдвигов означает, что H не зависит от координаты \mathbf{q} частицы. И поэтому он является функцией только \mathbf{p} , а с учетом инвариантности относительно вращений — функцией только \mathbf{p}^2 . Принцип относительности Галилея тогда требует, чтобы

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (1.40)$$

где m — масса частицы. Собственные функции $|E\rangle$ оператора H определяются уравнением

$$H|E'\rangle = E'|E'\rangle. \quad (1.41)$$

Соотношения полноты и ортонормированности теперь запишутся в виде

$$\int dE' |E'\rangle \langle E'| = 1, \quad (1.42a)$$

$$\langle E' | E'' \rangle = \delta(E' - E''). \quad (1.42b)$$

Явный вид собственных функций оператора энергии легко может быть найден в \mathbf{q} -представлении путем решения уравнения

$$\langle \mathbf{q}' | \frac{\mathbf{p}^2}{2m} | E' \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{q}}^2 \langle \mathbf{q}' | E' \rangle = E' \langle \mathbf{q}' | E' \rangle. \quad (1.43)$$

Так как H и \mathbf{p} коммутируют, то можно найти общие собственные функции этих двух операторов. Легко проверить, что в случае частицы, движущейся в одном измерении, такой собственной функцией, соответствующей собственным значениям E и $p = \sqrt{2mE}$, является

$$\langle q | E, p \rangle = C(E) e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mE} q}. \quad (1.44)$$

Нормировочный множитель $C(E)$, определенный так, чтобы выполнялось условие (1.42b), дается выражением

$$|C(E)|^2 = \sqrt{\frac{m}{8\pi^2\hbar^2 E}}. \quad (1.45)$$

Таким образом,

$$\langle q | E, p \rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{i\sqrt{2mE}q}, \quad (1.46)$$

где опущен постоянный фазовый множитель, равный по модулю единице, и где v является скоростью частицы: $v = \sqrt{2E/m}$. Отметим, что для частицы, описываемой вектором состояния $|E\rangle$, вероятность иметь координату в интервале между q и $q + dq$ равна $|\langle q | E \rangle|^2 dq$, что пропорционально dq/v , т. е. времени, затрачиваемому на отрезок пути dq .

Наконец, в шредингеровской картине эволюция частицы во времени определяется уравнением

$$i\hbar\partial_t |; t\rangle = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 |; t\rangle, \quad (1.47)$$

которое в \mathbf{q} -представлении имеет вид

$$i\hbar\partial_t \Psi(\mathbf{q}; t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{q}}^2 \Psi(\mathbf{q}; t), \quad (1.48)$$

где $\Psi(\mathbf{q}; t) = \langle \mathbf{q} |; t \rangle$.

Этапы, ведущие к уравнению (1.48), можно кратко описать, сказав, что в соотношении, связывающем энергию и импульс свободной нерелятивистской частицы

$$E = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2, \quad (1.49)$$

E заменяется оператором $i\hbar\partial_t$, а \mathbf{p} — оператором градиента, помноженным на $-i\hbar$:

$$E \rightarrow i\hbar\partial_t, \quad (1.50)$$

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla, \quad (1.51)$$

и получающееся операторное равенство применяется к волновой функции $\Psi(\mathbf{q}; t)$, описывающей частицу.

Решение уравнения (1.47) имеет вид

$$|; t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} (t-t_0)} |; t_0\rangle. \quad (1.52)$$

Таким образом, оператором сдвига во времени $U(t, t_0)$ в этом случае является оператор $\exp\left[-\frac{i}{\hbar} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} (t-t_0)\right]$. В \mathbf{q} -представлении можно записать

$$\langle \mathbf{q} |; t\rangle = \int d\mathbf{q}_0 \langle \mathbf{q} | U(t, t_0) | \mathbf{q}_0 \rangle \langle \mathbf{q}_0 |; t_0 \rangle, \quad (1.53)$$

или эквивалентно

$$\Psi(\mathbf{q}; t) = \int d\mathbf{q}_0 K(\mathbf{q}t; \mathbf{q}_0 t_0) \Psi(\mathbf{q}_0; t_0), \quad (1.54)$$

где

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}t; \mathbf{q}_0 t_0) &= \langle \mathbf{q} | U(t, t_0) | \mathbf{q}_0 \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} (t-t_0)}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Из того, что $U(t, t) = 1$, следует условие $K(\mathbf{q}t; \mathbf{q}_0 t) = \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$, которое явно удовлетворяется выражением (1.55) и требуется для того, чтобы (1.54) при $t = t_0$ превращалось в тождество. Далее, выражение (1.52)

определено только при $t \geq t_0$, в связи с чем K также определено лишь при $t \geq t_0$. Удобно принять, что $K = 0$ при $t < t_0$. Это условие можно учесть, записав

$$K(\mathbf{q}t; \mathbf{q}_0t_0) = \theta(t - t_0) \langle \mathbf{q} | U(t, t_0) | \mathbf{q}_0 \rangle, \quad (1.56)$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, определяемая согласно

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 1 \text{ при } t > 0, \\ &= 0 \text{ при } t < 0, \end{aligned} \quad (1.57)$$

так что

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \delta(t). \quad (1.58)$$

Из (1.56) теперь легко вывести дифференциальное уравнение, которому подчиняется K :

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t K(\mathbf{q}t; \mathbf{q}_0t_0) &= i\hbar \delta(t - t_0) \langle \mathbf{q} | U(t, t_0) | \mathbf{q}_0 \rangle + i\hbar \theta(t - t_0) \langle \mathbf{q} | \partial_t U(t, t_0) | \mathbf{q}_0 \rangle = \\ &= i\hbar \delta(t - t_0) \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{q}}^2 K(\mathbf{q}t; \mathbf{q}_0t_0), \end{aligned} \quad (1.59)$$

где учтено, что $U(t, t) = 1$. Здесь K — функция Грина, которая дает решение задачи Коши для нерелятивистского уравнения Шредингера, описывающего движение свободной частицы.

§ 4. Симметрии и квантовая механика

В данном выше «выводе» уравнения Шредингера для свободной частицы существенную роль играло требование инвариантности гамильтониана относительно некоторых преобразований. Сейчас мы несколько более подробно проанализируем роль, которую играют принципы инвариантности в формулировке квантовой механики (см. статьи Баргамана, Вигнера и Уайтмана [33], Вика [850] и особенно Вигнера [859, 862, 863, 864], а также Хагедорна [354] и Уайтмана [855]).

Возможность извлечь законы движения из хаоса окружающих нас явлений основывается на том, что

а) для данной физической системы можно создать поддающуюся регулировке совокупность необходимых начальных условий и, что более существенно,

б) при задании одной и той же совокупности начальных условий результирующее движение системы будет одинаковым независимо от того, где и когда эти условия были осуществлены (по крайней мере в ближайшей к нам части Вселенной).

На языке принципов симметрии второе утверждение означает, что законы природы не зависят от положения наблюдателя или, другими словами, законы движения ковариантны по отношению к смещениям в пространстве и времени, т. е. относительно преобразований

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad (1.60a)$$

$$t \rightarrow t + \tau. \quad (1.60b)$$

Эксперименты также свидетельствуют о том, что пространство является изотропным, так что ориентация события в пространстве есть несуществен-

ное начальное условие. Этот принцип может быть сформулирован в форме утверждения, что законы движения инвариантны относительно пространственных вращений. Далее, закон движения Ньютона утверждает, что состояние движения, пока оно равномерное и прямолинейное, также является несущественным начальным условием. В этом состоит принцип относительности Галилея, гласящий, что законы природы не зависят от скорости наблюдателя или, более точно, что законы движения классической механики инвариантны относительно преобразований Галилея. Эти принципы симметрии обычно формулируются в терминах двух наблюдателей O и O' , находящихся в определенном отношении друг к другу. Например, наблюдатель O может двигаться с постоянной скоростью относительно O' так, что координаты точек пространства и отсчеты времени в соответствующих координатных системах будут связаны уравнениями

$$x' = x - vt \quad (1.61a)$$

и

$$t' = t. \quad (1.61b)$$

Принцип относительности Галилея означает тогда, что «законы природы» одинаковы для обоих наблюдателей, т. е. что для обоих наблюдателей уравнения движения имеют одну и ту же форму. Поэтому уравнения движения должны быть ковариантными относительно преобразований (1.61a) и (1.61b). Если два наблюдателя используют инерциальные системы координат (т. е. такие, в которых законы движения одинаковы), то говорят, что наблюдатели эквивалентны.

Указанные выше принципы инвариантности были установлены экспериментально, однако они могут иметь ограниченную область применимости. Так, принцип относительности Галилея впоследствии заменился лоренц-инвариантностью, а открытие несохранения четности в слабых взаимодействиях лишней раз подчеркнуло, что принципы инвариантности и их следствия должны проверяться экспериментально.

В классической области понятие принципа инвариантности может быть сделано точным и ясным с помощью представления о полном описании физической системы. Описание является полным, когда строго определены траектории всех частиц и все поля во всех точках пространства для всех времен. Тогда уравнения движения позволяют проверить, может ли система в действительности развиваться так, как предусматривается полным описанием. Как установлено Хаагом (неопубликовано, но цитируется у Вигнера [863]), принцип инвариантности требует тогда выполнения следующих трех постулатов:

1. Полное описание физической системы можно преобразовывать из одной системы координат в любую другую эквивалентную систему координат.

2. Преобразование динамически возможного описания снова должно приводить к динамически возможному описанию.

3. Критерии динамической возможности полного описания должны быть тождественны для эквивалентных наблюдателей.

Постулат 2 равносителен утверждению, что движение, возможное для одного наблюдателя, должно быть возможным и для любого другого наблюдателя. Постулат 3 требует инвариантности вида уравнения движения.

В квантовой механике постулат 1 остается неизменным. Это означает, что существует вполне определенная связь между координатами, приписываемыми пространственно-временным точкам каждым наблюдателем,

между векторами, которые каждый наблюдатель сопоставляет данной физической системе, и между наблюдаемыми системы. Постулат 2 обычно формулируют в терминах вероятностей переходов, и он состоит в том, что вероятность перехода не зависит от системы отсчета. Другими словами, различные эквивалентные наблюдатели делают одно и то же предсказание о результате эксперимента, который ставится над системой. Заметим, что эта система находится в различном отношении к каждому из наблюдателей. Наблюдатель O будет приписывать состоянию системы вектор $|\Psi_O\rangle$, в то время как наблюдатель O' будет описывать состояние этой же системы вектором $|\Psi_{O'}\rangle$. Однако мы будем предполагать, что если даны две системы S_O и $S_{O'}$, которые находятся в одинаковом отношении к первому и второму наблюдателям соответственно (т. е. значения наблюдаемых системы S_O , измеренные наблюдателем O , такие же, как значения наблюдаемых $S_{O'}$, измеренных наблюдателем O'), то наблюдатели будут описывать состояние своих систем одним и тем же вектором. Обозначим через $|\Psi_{O'}\rangle$ вектор, полученный преобразованием вектора $|\Psi_O\rangle$. Постулат 2 означает, что если $|\Psi_O\rangle$ и $|\Phi_O\rangle$ суть два состояния, а $|\Psi_{O'}\rangle$ и $|\Phi_{O'}\rangle$ получены путем их преобразования, то

$$|(\Psi_O, \Phi_O)|^2 = |(\Psi_{O'}, \Phi_{O'})|^2. \quad (1.62)$$

Если все лучи в гильбертовом пространстве различимы, то из (1.62) следует (см. статью Вигнера [865]), что соответствие $|\Psi_O\rangle \rightarrow |\Psi_{O'}\rangle$ осуществляется унитарным или антиунитарным¹⁾ оператором $U(O', O)$, т. е.

$$|\Psi_{O'}\rangle = U(O', O)|\Psi_O\rangle, \quad (1.63)$$

где U зависит от систем координат, между которыми он устанавливает соответствие, причем $U(O', O) = I$, если $O' = O$.

Постулат 3 теперь означает, что U может зависеть только от соотношения между двумя координатными системами, а не от внутренних свойств каждой из них. Например, для преобразований Лоренца $U(O', O)$ должно быть тождественно с $U(O'', O'')$, если наблюдатель O'' так относится к O'' , как наблюдатель O' к O , т. е. если O'' получается из O'' тем же преобразованием Лоренца L , которым O' получается из O . Если бы это было не так, то существовало бы внутреннее различие между системами O', O и O'', O'' . С точностью до множителя, равного по модулю единице, оператор U полностью определяется преобразованием L , которое переводит O в O' . Мы пишем

$$|\Psi_{O'}\rangle = U(L)|\Psi_O\rangle, \quad (1.64)$$

где $U(L) = I$, если L — тождественное преобразование, т. е. если O и O' — одна и та же координатная система. Если рассмотреть три эквивалент-

1) Напомним, что оператор U называют унитарным, если для каждой пары векторов Ψ и χ в гильбертовом пространстве \mathcal{H} имеем $(U\Psi, U\chi) = (\Psi, \chi)$ и каждый вектор Φ в \mathcal{H} может быть записан в виде $U\varphi$, где φ принадлежит \mathcal{H} . Из этого определения и свойств скалярного произведения следует, что U является линейным оператором, причем существует обратный оператор U^{-1} , равный эрмитово сопряженному оператору $U^{-1} = U^*$. Оператор U называют антиунитарным, если для каждого Ψ и χ из \mathcal{H} имеем

$$(U\Psi, U\chi) = \overline{(\Psi, \chi)} = (\chi, \Psi).$$

Антиунитарный оператор поэтому антилинеен:

$$U[\alpha|\Psi\rangle + \beta|\chi\rangle] = \bar{\alpha}U|\Psi\rangle + \bar{\beta}U|\chi\rangle.$$

Отметим, что произведение двух антиунитарных операторов унитарно.

ные системы отсчета, то мы должны получить одно и то же состояние, переходя из первой системы отсчета O во вторую $O' = L_1 O$, а затем в третью $O'' = L_2 O'$, или прямо переходя из первой в третью: $O'' = L_3 O$,

$$L_3 = L_2 L_1. \quad (1.65)$$

Поэтому

$$|\Psi_{O''}\rangle = U(L_2)U(L_1)|\Psi_O\rangle = U(L_3)|\Psi_O\rangle, \quad (1.66)$$

откуда следует

$$U(L_3) = \omega(L_2, L_1)U(L_2)U(L_1), \quad (1.67a)$$

$$U(1) = 1, \quad (1.67b)$$

где ω — число, по модулю равное единице, которое может зависеть от L_1 и L_2 и возникает из-за неопределенного множителя с модулем единицы у векторов состояния. О совокупности U , удовлетворяющих (1.67a) и (1.67b), говорят, что они образуют (унитарное или антиунитарное) «представление с точностью до множителя» группы преобразований, относительно которой наблюдатели эквивалентны. Например, в специальной теории относительности такая группа есть группа неоднородных преобразований Лоренца. Таким образом, приходим к математической проблеме нахождения всех представлений (с точностью до множителя) интересующей группы.

Из постулата 2 и из того, что все системы отсчета, которые могут быть получены преобразованием симметрии, эквивалентны для описания системы, следует, что вместе с $|\Psi_O\rangle$ состояние $U(L)|\Psi_O\rangle$ также должно быть возможным состоянием физической системы с точки зрения наблюдателя O . Таким образом, релятивистская инвариантность требует, чтобы пространство векторов, описывающих возможные состояния квантовомеханической системы, было инвариантным относительно всех релятивистских преобразований, т. е. наряду с каждым вектором $|\Psi\rangle$ оно должно содержать все векторы $U(L)|\Psi\rangle$, получающиеся при всех релятивистских преобразованиях L . Такая формулировка дает конструктивное выражение релятивистской инвариантности (см. статью Баргманна, Вигнера и Уайтмана [33]): исходные и преобразованные состояния относятся теперь к одной и той же системе отсчета. Заметим, что для преобразований симметрии, которые могут быть получены непрерывным образом из тождественного (т. е. без отражений), преобразованные состояния могут всегда быть получены из первоначального состояния некоторым реальным физическим воздействием на физическую систему. Рассмотрим, например, преобразование Лоренца вдоль оси x со скоростью v . Состояние, полученное преобразованием из $|\Psi_O\rangle$, есть $U(v)|\Psi_O\rangle$. Это то состояние физической системы, которое видит наблюдатель O' . Однако оно является также возможным состоянием для системы с точки зрения наблюдателя O и может быть реализовано, если придать физической системе скорость $-v$ вдоль оси x . Что касается отражений, например отражения времени, то в общем случае нет такого способа реализации. Инвариантностью теории относительно такого преобразования симметрии фактически постулируется существование преобразованного состояния, но не обязательно дается процедура для его реализации.

Для квантовомеханических приложений важность нахождения всех унитарных представлений релятивистской группы обусловлена тем, что если такое унитарное представление найдено, то оно фактически может заменить волновое уравнение для системы. Так, если гейзенберговский вектор состояния $|\Psi\rangle_H$, использовавшийся выше для описания нашей системы в системе отсчета O , совпадает со значением предингеровского

вектора состояния $|\Psi(0)\rangle_S$ в момент времени $t = 0$, то шредингеровский вектор состояния в момент времени t_0 может быть получен преобразованием к системе отсчета O' , в которой $t' = t - t_0$, а другие координаты не преобразованы. Если L — это преобразование, то

$$|\Psi(t_0)\rangle_S = U(L)|\Psi(0)\rangle_S. \quad (1.68)$$

Таким образом, определение всех унитарных представлений неоднородной группы Лоренца (см. работы Вигнера [857], Баргманна и Вигнера [31], Широкова [726, 727]) эквивалентно нахождению всех возможных релятивистских волновых уравнений.

Чтобы сделать эти идеи ясней, мы рассмотрим в следующем параграфе представления трех- и четырехмерной группы вращений.

§ 5. Вращения и внутренние степени свободы

Связь между координатами точек трехмерного пространства для двух наблюдателей, системы координат которых повернуты друг относительно друга вокруг общего начала, имеет вид

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} \quad (1.69a)$$

или

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 r_{ik}x_k = r_{ik}x_k. \quad (1.69b)$$

(Мы будем придерживаться соглашения о суммировании по парным индексам.) Длина вектора и угол между векторами остаются неизменными при вращениях, т. е.

$$x'_i y'_i = x_i y_i. \quad (1.70)$$

Следовательно,

$$RR^T = R^T R = I, \quad (1.71)$$

т. е. вращения представляются ортогональными матрицами. Из (1.71) следует

$$\det RR^T = \det R^T \det R = (\det R)^2 = 1,$$

так что для матриц, удовлетворяющих (1.71), $\det R = \pm 1$. Преобразования, для которых $\det R = +1$, называют собственными преобразованиями или вращениями, а те, для которых $\det R = -1$, называют несобственными ортогональными преобразованиями. Примером несобственного преобразования является отражение в начале координат, которое представляется матрицей

$$R_- = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.72)$$

причем $(R_-)^2 = +1$. Преобразование R_- соответствует переходу от правой системы координат к левой. Каждое несобственное преобразование R' с $\det R' = -1$ может быть записано в виде $(R'R_-)R_-$, т. е. как отражение R_- , вслед за которым уже выполняется вращение; в самом деле, $\det R'R_- = \det R' \cdot \det R_- = (-1)^2 = +1$. Совокупность всех вращений в евклидовом трехмерном пространстве образует группу — группу вращений. Группа всех вращений вместе с отражениями называется ортогональной группой. Так как каждый элемент группы может быть охарактере-

ризован заданием трех непрерывно изменяющихся параметров (например, направляющих косинусов оси, вокруг которой совершается вращение, и угла поворота), то группа вращений является непрерывной трехпараметрической группой. Число параметров группы называется размерностью группы. Мы хотим определить все представления группы вращений.

Вообще представление какой-либо группы G есть отображение (соответствие), сопоставляющее каждому элементу g из G линейный оператор T_g , действующий в некотором векторном пространстве V , и притом такое, что сохраняется таблица умножения для группы, а единица e группы G отображается тождественным преобразованием I в V^1). Это означает, что если e, g_1, g_2, g_3 и т. д. суть элементы G и если этим элементам сопоставлены линейные операторы $T_e, T_{g_1}, T_{g_2}, T_{g_3}$ и т. д., действующие в V , то эти операторы образуют представление группы G , при условии,

$$T_e = I \quad (1.73a)$$

и

$$T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2}. \quad (1.73б)$$

Если T_g представлены матрицами, то говорят о матричном представлении. В квантовой механике в действительности представляет интерес сопоставление элементу группы целого луча, когда и T_g и $\exp(i\alpha_g) \cdot T_g$, где α_g произвольная вещественная константа, соответствуют одному и тому же элементу группы. В этом случае выражение (1.73б) заменяется на $T_{g_1} T_{g_2} = \omega(g_1, g_2) T_{g_1 g_2}$. Однако Вигнер показал [865], что при помощи подходящей нормировки от сопоставления луча можно прийти к однозначному соответствию. Баргманн [34], кроме того, показал, что для групп, представляющих интерес для физических приложений (группа вращений, группы Галилея и Лоренца) при подходящем выборе T_g (напомним, что T_g и $T_g \exp i\alpha$ представляют один и тот же элемент группы) ω либо равна ± 1 (ограниченная группа Лоренца и группа вращений), либо может быть выражена довольно простым образом (группа Галилея).

Подпространство V_1 пространства V называют инвариантным подпространством относительно представления T_g , если все векторы v в V_1 преобразуются по T_g в векторы v' , снова принадлежащие V_1 , и это справедливо при всех преобразованиях T_g . Если единственными подпространствами V , инвариантными относительно представления $g \rightarrow T_g$, являются все пространство и подпространство, состоящее из одного нулевого вектора, то говорят, что представление является неприводимым.

Существует теорема, которую мы приведем без доказательства (см. работы Гельфанда и Шапиро [300] и Вигнера [865]), что скалярное произведение в V всегда можно определить так, чтобы представление группы вращений в V было унитарным²⁾, т. е. так, чтобы все операторы T_g были унитарными $T_g^* = T_g^{-1} = T_{g^{-1}}$. Далее, изучение таких унитарных пред-

1) Мы всегда будем рассматривать только непрерывные представления, т. е. такие представления T_g , для которых $(v, T_g w)$ является непрерывной функцией g для каждой пары векторов v, w из V . При этом предполагается, что скалярное произведение в векторном пространстве V определено.

2) Возможность введения такого скалярного произведения существенно зависит от конечности объема группы, т. е. от ее компактности, так как скалярное произведение содержит интегрирование по группе. Грубо можно говорить, что группа матриц компактна, если матричные элементы каждого элемента группы (т. е. матрицы, представляющей этот элемент группы) ограничены. Это так в случае группы вращений, но уже не справедливо в случае группы Лоренца [ср. формулы (1.78) и (2.10)].

ставлений компактных групп может быть сведено к изучению неприводимых представлений. Если у V существует подпространство V_1 , инвариантное относительно T_g , то тогда ортогональное дополнение V_1 , V_1^\perp , т. е. совокупность всех векторов, ортогональных к V_1 , также инвариантно относительно T_g .

Доказательство: Если v_1 — элемент V_1 , а w — элемент V_1^\perp , то вследствие унитарности T_g имеем $0 = (v_1, w) = (T_g v_1, T_g w)$. Теперь, по предположению, $T_g v_1 = v'_1$ снова является элементом V_1 , и $(v'_1, T_g w) = 0$ для любого T_g , а значит и для всех T_g . Поэтому совокупность векторов $T_g w$ для всех w из V_1^\perp являются элементами V_1^\perp , и, следовательно, V_1^\perp инвариантно относительно T_g . Таким образом, V разложилось на два инвариантных подпространства. Во многих случаях этот процесс может быть продолжен, пока не останутся только неприводимые представления. Для компактных групп (и поэтому, в частности, для группы вращений) известно (см., например, книгу Понтрягина [648]), что этот индуктивный процесс разложения инвариантных подпространств на инвариантные подпространства имеет предел. Все неприводимые представления являются конечномерными и любое представление есть прямая сумма¹⁾ неприводимых конечномерных представлений. Наконец, следует отметить, что интерес представляют только неэквивалентные неприводимые представления. О двух представлениях T и T' говорят, что они эквивалентны, если существует такое взаимнооднозначное соответствие $v \leftrightarrow v'$ между векторами пространств представлений, что если v соответствует v' , то вектор $T_g v$ соответствует вектору $T'_g v'$ для всех g и для всех пар векторов v и v' . Это взаимно однозначное соответствие может быть представлено (унитарным) оператором M , так что $v' = Mv$ и $v = M^{-1}v'$. Для эквивалентных представлений $MT_g v = T'_g v' = MT_g M^{-1}v'$ для всех v . Таким образом, два представления эквивалентны, если существует такой оператор M , что $T'_g = MT_g M^{-1}$. Два эквивалентных представления могут рассматриваться как реализации одного и того же представления в терминах двух различных базисов в векторном пространстве.

Далее, каждое вращение является вращением вокруг некоторой оси, так что оно может быть характеризовано заданием оси вращения, т. е. оси, вокруг которой осуществляется поворот и величины угла поворота. Таким образом, вращение может быть задано вектором λ , направленным вдоль оси вращения и равным по величине углу поворота. Так, вращение вокруг оси I задается вектором $(\lambda, 0, 0)$, вокруг оси 2 — вектором $(0, \lambda, 0)$ и т. д. Очевидно, что вектор вращения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ имеет $|\lambda| \leq \pi$ и что векторы вращения, описывающие все возможные вращения, заполняют шар радиуса π . Различные точки внутри шара описывают различные вращения, а две диаметрально противоположные точки на поверхности шара — одно и то же вращение, и должны быть отождествлены. Таким образом, элемент группы может рассматриваться как функция λ , т. е. $g = g(\lambda)$, и то же относится к представлению: $T_g = T(\lambda)$. Вектор $\lambda = 0$ соответствует тождественному преобразованию

$$T(0) = I. \quad (1.74)$$

¹⁾ Пусть D, D_1, D_2 — три квадратные матрицы; тогда, если

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

то говорят, что D — прямая сумма D_1 и D_2 , и записывают это в виде $D = D_1 \oplus D_2$.

В дальнейшем фундаментальную роль будут играть бесконечно малые вращения вокруг той или иной оси. Их важность связана с тем, что они порождают однопараметрические подгруппы и что любое конечное вращение может быть построено как последовательность бесконечно малых. Следует также отметить, что бесконечно малые вращения коммутируют друг с другом, тогда как конечные вращения в общем случае не коммутируют. Пусть $R^{(3)}(\theta)$ будет матрицей поворота на угол θ вокруг оси 3, и пусть определена матрица

$$A_3 = \frac{d}{d\theta} R^{(3)}(\theta) \Big|_{\theta=0}. \quad (1.75)$$

Оператор A_3 называют генератором вращений вокруг оси 3. При бесконечно малом ε можно записать

$$R^{(3)}(\varepsilon) = 1 + A_3 \varepsilon + \text{Члены порядка } \varepsilon^2. \quad (1.76)$$

Теперь вращение $R^{(3)}(\theta)$ на угол θ вокруг оси 3 может рассматриваться как результат n поворотов на угол θ/n . Поэтому мы можем написать

$$R^{(3)}(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\theta}{n} A_3 \right)^n = e^{\theta A_3}. \quad (1.77)$$

Аналогичным образом можно определить генераторы вращений вокруг осей 1 и 2. Так как

$$R^{(3)}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.78)$$

то явным видом для A_3 будет

$$A_3 = \frac{d}{d\theta} R^{(3)}(\theta) \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.79a)$$

и аналогично

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.79b)$$

Можно проверить, что генераторы A_i ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[A_i, A_j] = -\varepsilon_{ijk} A_k, \quad (1.80)$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор 3-го ранга с компонентами, равными $+1$, если ijk есть четная перестановка 123, равными -1 , если перестановка нечетная, и равными нулю в остальных случаях. Следует отметить, что оператор отражения R_- (1.72) коммутирует со всеми вращениями

$$[R_-, A_i] = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.81)$$

Вращения вокруг фиксированной оси образуют коммутативную однопараметрическую подгруппу группы вращений. В общем случае однопараметрическая подгруппа $a(t)$ некоторой группы G является «кривой» группы (т. е. непрерывной функцией от вещественной линии в G), такой, что

$$a(t) a(s) = a(t+s). \quad (1.82)$$

Ясно, что $a(0) = e$ — единичный элемент, $a(-t) = [a(t)]^{-1}$ и $a(s)a(t) = a(t)a(s)$. Для групп, которые мы будем рассматривать (группа вращений и группа Лоренца), окрестность единичного элемента (бесконечно малые преобразования) может быть «заполнена» сегментами однопараметрических подгрупп, причем у любой пары таких сегментов общим элементом является только единичный. Под сегментом понимается совокупность элементов $a(t)$, соответствующих значениям $|t|$, меньшим некоторого фиксированного значения. Рассмотрим теперь производную $a(t)$, взятую при $a(t) = e$, т. е. элемент

$$\alpha = \left(\frac{da(t)}{dt} \right)_{t=0}, \quad (1.83)$$

который аналогичен выражению (1.75), приведенному выше. Если кривые $a(t)$ и $b(t)$ имеют соответственно производные α и β , то кривая $c(t) = a(t)b(t)$ обладает производной $\alpha + \beta$. Совокупность производных является векторным пространством относительно сложения и умножения на скаляры. Оно замкнуто относительно скобочной операции, обозначаемой $[\alpha\beta]$ и определяемой согласно

$$[\alpha\beta] = \frac{d^2}{ds dt} (a(s)b(t)a^{-1}(s)b^{-1}(t)) \Big|_{s=0, t=0}. \quad (1.84)$$

Скобочная операция $[\alpha\beta]$ обладает свойствами антисимметрии при перестановке α с β и линейности по каждому множителю, а также удовлетворяет тождеству Якоби

$$[\alpha\beta] = -[\beta\alpha], \quad (1.85a)$$

$$[\alpha(\beta + \gamma)] = [\alpha\beta] + [\alpha\gamma], \quad (1.85b)$$

$$[[\alpha\beta]\gamma] + [[\gamma\alpha]\beta] + [[\beta\gamma]\alpha] = 0. \quad (1.85в)$$

Это векторное пространство с определенной сейчас операцией умножения называется алгеброй Ли группы. Размерность алгебры Ли равна размерности группы. Каждому элементу α алгебры Ли соответствует единственная однопараметрическая группа $a(t) = \exp at$ [ср. формулу (1.77)]. Для групп матриц скобочная операция $[\alpha\beta]$ есть коммутатор α и β , т. е. $[\alpha\beta] = [\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$. Если в этом случае линейно независимую совокупность элементов алгебры Ли размерности n обозначить через α_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то свойство замкнутости выразится соотношением

$$[\alpha_i, \alpha_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \alpha_k, \quad (1.86)$$

где постоянные коэффициенты c_{ij}^k являются так называемыми структурными константами, характерными для группы. Доказательство (1.86), имеющее лишь эвристическое значение, может быть проведено следующим образом: нужно показать, что левая часть (1.86) принадлежит к нашей алгебре Ли и, следовательно, может быть выражена в виде линейной комбинации α_i . Рассмотрим элемент

$$c(s, t) = e^{s\alpha_i} e^{t\alpha_j} e^{-s\alpha_i} e^{-t\alpha_j} \quad (1.87a)$$

(здесь нет суммирования по i и j), который при бесконечно малых s и t принимает вид

$$c(s, t) = 1 + st [\alpha_i, \alpha_j] + \dots \quad (1.87b)$$

Заметим, что элемент $c(s, t)$ однозначно определяется параметрами s и t . При бесконечно малых s и t должно иметь место представление

$$c(s, t) = 1 + s \left(\sum_{k=1}^n d_1^k \alpha_k \right) + t \left(\sum_{k=1}^n d_2^k \alpha_k \right) + st \left(\sum_{k=1}^n d_3^k \alpha_k \right) + \dots \quad (1.88)$$

Так как $c(0, t) = c(s, 0) = 1$, то $d_1^k = d_2^k = 0$ при всех k . Таким образом, сравнивая оба разложения, получаем

$$[a_i, a_j] = \sum_{k=1}^n d_3^k \alpha_k, \quad (1.89)$$

что и доказывает (1.86). Очевидно, что d_3^k зависят от i и j и могут быть записаны как c_{ij}^k .

Представление алгебры Ли есть соответствие $a \rightarrow A(a)$, которое каждому элементу a алгебры сопоставляет линейный оператор $A(a)$, действующий в векторном пространстве V таким образом, что

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta), \quad (1.90a)$$

$$A(c\alpha) = cA(\alpha), \quad (1.90б)$$

$$A([\alpha\beta]) = [A(\alpha), A(\beta)] = A(\alpha)A(\beta) - A(\beta)A(\alpha), \quad (1.90в)$$

т. е. скобочная операция отображается коммутатором, который автоматически удовлетворяет (1.85). Представление алгебры Ли группы однозначно определяет представление самой группы. Проиллюстрируем эти замечания на примере группы вращений.

Алгебра Ли группы вращений состоит из трех линейно независимых операторов A_1, A_2 и A_3 , удовлетворяющих соотношению (1.80); и эти операторы порождают однопараметрические подгруппы вращений вокруг трех пространственных осей. Бесконечно малый поворот вокруг ε на угол $|\varepsilon|$ может быть записан в виде

$$R(\varepsilon) = I + \varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \varepsilon_3 A_3 + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon_i A_i + \dots \quad (1.91)$$

Соответствующий оператор представления запишем

$$T(\varepsilon) = T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = I + \varepsilon_1 M_1 + \varepsilon_2 M_2 + \varepsilon_3 M_3 + O(\varepsilon^2), \quad (1.92)$$

где M_i образуют представление генераторов алгебры Ли и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[M_i, M_j] = -\varepsilon_{ijk} M_k. \quad (1.93)$$

Теперь покажем, что оператор $T(\lambda)$ при произвольном λ полностью определяется генераторами M_1, M_2 и M_3 , а также λ , и выражается через эти величины следующим образом:

$$T(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = e^{\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3}. \quad (1.94)$$

Доказательство: Так как два поворота вокруг одной и той же оси коммутируют, то

$$R(s\lambda)R(t\lambda) = R((s+t)\lambda) \quad (1.95)$$

и, следовательно,

$$T(s\lambda)T(t\lambda) = T((s+t)\lambda). \quad (1.96)$$

Дифференцируя обе части этого равенства по s , заменяя в правой части дифференцирование по s дифференцированием по t и полагая всюду

$s = 0$, получаем, воспользовавшись формулой (1.92),

$$\frac{d}{dt} T(t\lambda) = \frac{d}{ds} T(s\lambda) \cdot T(t\lambda) \Big|_{s=0} = (M_1\lambda_1 + M_2\lambda_2 + M_3\lambda_3) T(t\lambda). \quad (1.97)$$

Уравнение (1.97) есть дифференциальное уравнение, определяющее $T(t\lambda)$. Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (1.74) $T(0) = I$, как раз и дается выражением (1.94).

В унитарных представлениях операторы T унитарны а, следовательно, операторы M_j антиэрмитовы:

$$M_j^* = -M_j. \quad (1.98)$$

Поэтому операторы $J_l = -iM_l$ будут эрмитовыми. Они удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям для операторов момента количества движения

$$[J_l, J_m] = i\epsilon_{lmn} J_n. \quad (1.99)$$

Проблема нахождения всех неприводимых представлений группы вращений эквивалентна нахождению всех возможных совокупностей матриц J_1, J_2, J_3 , удовлетворяющих перестановочным соотношениям (1.99). Ясно, что каждое неприводимое представление непрерывной группы является также представлением в окрестности единичного элемента (бесконечно малые преобразования), хотя обратное необязательно справедливо. Вообще же если мы найдем все неприводимые представления группы G в окрестности единичного элемента, т. е. найдем все представления генераторов, то мы получим все неприводимые представления самой группы, элементами которых будут экспоненты вида (1.94). Однако возможно, что некоторые из полученных этим способом неприводимых представлений группы G непрерывны не на всей группе, а только в окрестности единичного элемента. Эти разрывные представления должны быть отброшены.

В теории представлений групп, осуществляемых комплексными матрицами, фундаментальное значение имеет лемма Шура (см. статью Вигнера [865]), в которой доказывается, что необходимое и достаточное условие для неприводимости представления состоит в том, чтобы единственными матрицами, коммутирующими со всеми матрицами представления, были матрицы, кратные единичной. Предположим, что алгебра Ли группы G содержит элемент A , который коммутирует со всеми другими элементами алгебры Ли. Пусть отображение $g \rightarrow T(g)$ будет представлением G , действующим в векторном пространстве V . Генераторы $\left(\frac{dT(g(s))}{ds}\right)_{s=0} = \alpha$ образуют представление алгебры Ли группы G . Генератор, который в этом представлении соответствует элементу A , коммутирует со всеми другими генераторами α , а значит со всеми операторами $T(g)$. Такие коммутирующие элементы называются инвариантами группы. Тогда на основании леммы Шура представление может быть неприводимым тогда и только тогда, когда векторное пространство, на котором определено представление, натянуто на множество собственных функций, соответствующих одному собственному значению этого коммутирующего оператора. Далее, если мы нашли все независимые инварианты группы, выбрали по одному собственному значению у каждого из инвариантов и построили представление, действующее в пространстве, натянутом на соответствующие собственные функции, то это представление неприводимо, так как каждый

инвариант в этом представлении кратен единичной матрице и, по определению, нет других операторов, которые коммутировали бы со всеми элементами группы. Таким образом, каждому набору собственных значений всех инвариантов соответствует одно и только одно неприводимое представление. Поэтому проблема классификации неприводимых представлений группы сводится к нахождению спектра собственных значений инвариантов группы.

В случае группы вращений со всеми генераторами коммутирует оператор $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, и поэтому он является инвариантом группы. Его собственные значения, как хорошо известно из теории оператора момента количества движения, равны $j(j+1)$, где $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$. Таким образом, каждое неприводимое представление характеризуется положительным целым или полужелым числом j , включая 0. Размерность неприводимого представления равна $2j+1$ при любом весе j , целом или полужелым. Переходя к классификации неприводимых представлений ортогональной группы, заметим, что линейный оператор T_- , соответствующий операции отражения R_- , коммутирует со всеми вращениями. По лемме Шура в каждом неприводимом представлении он должен быть кратен единичному оператору. Таким образом, неприводимые представления ортогональной группы классифицируются парой индексов (j, i) , где второй индекс является собственным значением T_- , соответствующим данному представлению. При целых j имеем $i = \pm 1$ (ибо $T_-^2 = I$), так что существуют два различных неприводимых представления ортогональной группы. В одном из них $T_- = +I$, в другом $T_- = -I$.

При $j = 0$ представление одномерно, каждый элемент группы отображается единичным элементом, а генераторы тождественно равны нулю. Представление, в котором $T_- = +I$, назовем скалярным, а то, в котором $T_- = -I$, — псевдоскалярным.

При $j = \frac{1}{2}$ представление группы вращений двумерно, и генераторы $M_j^{(1/2)}$ могут быть реализованы эрмитовыми матрицами Паули σ_i , умноженными на $\frac{1}{2}i$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.100)$$

Они удовлетворяют соотношению

$$\sigma_l \sigma_j = \delta_{lj} + i \varepsilon_{ljk} \sigma_k. \quad (1.101)$$

Таким образом, в представлении веса $j = \frac{1}{2}$ оператор поворота на угол θ вокруг оси 3 записывается в виде

$$\begin{aligned} T_3^{(1/2)}(\theta) &= T^{(1/2)}(0, 0, \theta) = e^{1/2 i \theta \sigma_3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} i \theta \right)^n \sigma_3^n = \\ &= \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^4 \pm \dots \right] + i \sigma_3 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^5 \pm \dots \right] = \\ &= \cos \frac{\theta}{2} + i \sigma_3 \sin \frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} e^{i \frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.102a)$$

Аналогично, в представлении $j = 1/2$ записываются и операторы поворотов на угол θ вокруг осей 1 и 2:

$$T_1^{(1/2)}(\theta) = T^{(1/2)}(\theta, 0, 0) = e^{1/2 i \theta \sigma_1} = \cos \frac{\theta}{2} + i \sigma_1 \sin \frac{\theta}{2} = \\ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (1.1026)$$

$$T_2^{(1/2)}(\theta) = T^{(1/2)}(0, \theta, 0) = e^{1/2 i \theta \sigma_2} = \cos \frac{\theta}{2} + i \sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} = \\ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.102в)$$

Отметим, что матрицы $T_i^{(1/2)}(\theta)$ ($i = 1, 2, 3$) унитарны и имеют детерминант, равный единице. Отметим также, что поворот на угол 2π вокруг любой оси дает

$$T_i^{(1/2)}(\theta + 2\pi) = -T_i^{(1/2)}(\theta). \quad (1.103)$$

Таким образом, представление двузначно, и соответствие между элементами группы и операторами можно выразить $R(\lambda) \rightarrow \pm T(\lambda)$. Для квантовомеханических приложений представляют интерес представления, определенные с точностью до множителя, поэтому такие двузначные представления вполне допустимы.

При $j = 1$ представление трехмерно, и в качестве матричного представления генераторов $M_i^{(1)}$ можно взять матрицы A_i , определенные выше в виде (1.79а) и (1.79б). Обычное же квантовомеханическое представление для J_i при $j = 1$ имеет вид

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.104)$$

Оно унитарно эквивалентно представлению, полученному для iA_j : J_i соответствуют базису $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy)$, z , $\frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy)$, вместо обычного декартова базиса x , y , z .

Величины ξ , которые при вращении системы координат

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} \quad (1.105)$$

преобразуются по закону

$$\xi' = T^{(j)}(R)\xi, \quad (1.106)$$

называют скалярами при $j = 0$, спинорами 1-го ранга при $j = 1/2$, векторами при $j = 1$ и т. д. При бесконечно малых поворотах на угол ε вокруг l -й оси закон преобразования (1.106) принимает вид

$$\xi' = (1 + \varepsilon M_l^{(j)})\xi. \quad (1.107)$$

Таким образом, скаляр есть однокомпонентная величина, которая при вращениях $x \rightarrow Rx$ преобразуется по закону $\xi \rightarrow \xi' = \xi$. Спинор 1-го ранга является двухкомпонентной величиной

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.108)$$

которая при бесконечно малых поворотах на угол ε вокруг l -й оси

$$x_j \rightarrow x'_j = x_j + \varepsilon \varepsilon_{ljk} x_k \quad (1.109)$$

преобразуется по закону

$$\xi \rightarrow \xi' = \left(1 + \frac{1}{2} i \varepsilon \sigma_l \right) \xi. \quad (1.110)$$

Как было отмечено выше, при вращениях на любой конечный угол спинор 1-го ранга преобразуется при помощи унитарной матрицы размерностью 2×2 и с детерминантом, равным единице. Наконец, вектор является трехкомпонентной величиной

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad (1.111)$$

компоненты которой ξ_i ($i = 1, 2, 3$) при вращении (1.105) преобразуются так же, как сами координаты.

Для свойств тензоров и спиноров при отражениях имеет место следующая классификация. При целых j имеются два типа величин, преобразующихся при отражениях по $T_- = I$ и по $T_- = -I$. Величины, преобразующиеся с помощью $T_-^{(j)} = (-1)^{j+1}$, называют псевдовеличинами. Так, псевдоскаляр — это величина, преобразующаяся при отражениях по закону $\xi \rightarrow \xi' = -\xi$. Аналогично, псевдовектор (или аксиальный вектор) — это величина, которая при отражении (1.72) преобразуется по закону $\xi \rightarrow \xi' = \xi$. Для спиноров мы имеем несколько более запутанную ситуацию. О ней будет сказано после введения понятия сопряженного спинора.

Сопряжение спинора ξ выполняется обычным образом путем транспонирования и комплексного сопряжения. Таким образом, при $j = 1/2$ спинор ξ^* , сопряженный к ξ , имеет вид

$$\xi^* = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2). \quad (1.112)$$

При бесконечно малом повороте вокруг l -й оси он преобразуется по закону

$$\xi^* \rightarrow \xi^{*'} = \xi^* \left(1 - \frac{1}{2} i \varepsilon \sigma_l \right). \quad (1.113)$$

Теперь определим скалярное произведение для спиноров, которое позволит нам строить из спиноров определенные комбинации. Скалярное произведение двух спиноров χ и ξ определяется согласно

$$\chi^* \xi = \sum_{i=1}^2 \bar{\chi}_i \xi_i. \quad (1.114)$$

Из спиноров можно составить новые величины, которые имеют определенные трансформационные свойства при вращениях. Так, величина $\chi^* \xi$ при бесконечно малом повороте (1.109) преобразуется согласно

$$\begin{aligned} \chi^* \xi \rightarrow \chi^{*'} \xi' &= \chi^* \left(1 - \frac{1}{2} i \varepsilon \sigma_l \right) \left(1 + \frac{1}{2} i \varepsilon \sigma_l \right) \xi = \\ &= \chi^* \xi + O(\varepsilon^2) \quad (\text{по } l \text{ суммирования нет}) \end{aligned} \quad (1.115)$$

т. е. как скаляр. Доказательство для конечных поворотов столь же просто: так как $T^{(1/2)}(\lambda)$ при любом λ представляется унитарной матрицей размерности 2×2 , то $\chi^* \xi \rightarrow \chi'^* \xi' = \chi^* T^{(1/2)*} T^{(1/2)} \xi = \chi^* \xi$. Аналогично проверяется, что величина $\chi^* \sigma_j \xi$ при вращении (1.109) преобразуется, как вектор

$$\begin{aligned} \chi^* \sigma_j \xi &\rightarrow \chi'^* \sigma_j \xi' = \chi^* \left(1 - \frac{1}{2} i \varepsilon \sigma_l \right) \sigma_j \left(1 + \frac{1}{2} i \varepsilon \sigma_l \right) \xi = \\ &= \chi^* \sigma_j \xi - \frac{1}{2} i \varepsilon \chi^* [\sigma_l, \sigma_j] \xi = \chi^* \sigma_j \xi + \varepsilon \varepsilon_{ljk} \chi^* \sigma_k \xi. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Последнее выражение и есть закон преобразования вектора. Отметим, что хотя спинорные представления двузначны, величины $\chi^* \xi$ и $\chi^* \sigma_i \xi$ после поворота на угол 2π вокруг любой оси принимают первоначальное значение. Наблюдаемая величина, хотя и не может быть представлена спинором (из-за того, что последний изменяет знак после поворота на угол 2π), может представляться билинейной комбинацией спинорных величин, так как подобная комбинация обладает однозначными трансформационными свойствами при вращениях.

Теперь вернемся к вопросу о свойствах спиноров при отражениях (см. книгу Картана [109]). Для этой цели удобно сперва рассмотреть отражения в плоскости и, в частности, отражения в координатных плоскостях. Рассмотрим отражение

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x'_1 = -x_1, \\ x_2 &\rightarrow x'_2 = x_2, \\ x_3 &\rightarrow x'_3 = x_3 \end{aligned} \quad (1.117a)$$

или

$$\mathbf{x}' = R_{1-} \mathbf{x}, \quad R_{1-} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.117b)$$

причем

$$R_{1-}^2 = 1. \quad (1.118)$$

Легко проверить, что R_{1-} обладает следующими соотношениями коммутации с генераторами вращений:

$$\begin{aligned} [R_{1-}, A_3]_+ &= [R_{1-}, A_2]_+ = 0, \\ [R_{1-}, A_1] &= 0, \end{aligned} \quad (1.119)$$

где $[C, D]_+$ — антикоммутатор C и D , т. е.

$$[C, D]_+ = CD + DC. \quad (1.120)$$

Оператор любого представления, соответствующий R_{1-} , должен удовлетворять таким же правилам коммутации с генераторами того же представления, т. е.

$$\begin{aligned} [T_{1-}, M_2]_+ &= [T_{1-}, M_3]_+ = 0, \\ [T_{1-}, M_1] &= 0. \end{aligned} \quad (1.121)$$

В случае представления веса $j = 1/2$ эти перестановочные соотношения вместе с условием $T_{1-}^2 = 1$ позволяют заключить, что при рассматриваемом отражении спинор ξ преобразуется по закону

$$\xi \rightarrow \xi' = +\sigma_1 \xi, \quad (1.122)$$

где мы произвольным образом выбрали знак «+» перед σ_1 , т. е. приняли, что $T_{1-}^{(1/2)} = +\sigma_1$. В действительности спинор преобразуется по двузначному представлению группы вращений, и, следовательно, $T_{1-}^2 = \pm 1$ (так как мы можем рассматривать два отражения как вращение на угол 2π). Поэтому представлениями оператора отражения могут служить не только $\pm \sigma_1$, но и $\pm i\sigma_1$. Прежде всего мы рассмотрим случай, когда σ_1 умножается на ± 1 (см. в этой связи статью Янга и Тимонно [870]). Можно проверить, что и при отражениях в других координатных плоскостях $T_{i-}^{(1/2)} = \pm \sigma_i$ и что, как следствие этих законов преобразования, спинор при отражении $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ преобразуется по закону

$$\xi \rightarrow \xi' = \pm i\xi \quad (1.123)$$

(знак « \pm » обусловлен двузначностью спинорного представления).

Рассмотрим более общий случай отражения в плоскости P , проходящей через начало координат и перпендикулярной единичному вектору \mathbf{n} . Если мы разложим вектор \mathbf{x} на параллельную и перпендикулярную к \mathbf{n} составляющие

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{x}]], \quad (1.124)$$

то отражению в плоскости P будет соответствовать преобразование

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = -\mathbf{n}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) - [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{x}]] = \mathbf{x} - 2\mathbf{n}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}). \quad (1.125)$$

Вектор \mathbf{x}' является зеркальным отражением вектора \mathbf{x} в плоскости P . При таком отражении спинор ξ преобразуется по закону

$$\xi \rightarrow \xi' = \sigma \cdot \mathbf{n} \xi = N\xi, \quad (1.126a)$$

$$N = \sigma \cdot \mathbf{n}, \quad N^2 = 1, \quad \bar{N} = N^T, \quad (1.126b)$$

где знак у N , взятый в виде $+\sigma \cdot \mathbf{n}$, был выбран произвольным образом. Обозначим преобразованный спинор $N\xi$ через ξ_N , т. е.

$$\xi_N = N\xi. \quad (1.127)$$

Теперь определим матрицу C

$$C = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.128)$$

со свойствами

$$C^2 = -1, \quad (1.129a)$$

$$C\bar{\sigma}_i C = \sigma_i \quad (1.129b)$$

и спинор η

$$\eta = iC\bar{\xi}, \quad (1.130)$$

где $\bar{\xi}$ — столбец с компонентами $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$. При отражении в плоскости P спинор η будет преобразовываться по закону

$$\eta \rightarrow \eta_N = iC\bar{\xi}_N. \quad (1.131)$$

Так как $\bar{\xi}_N = \bar{N}\bar{\xi}$, то, воспользовавшись (1.129a), (1.129b) и (1.130), получаем

$$\eta_N = iC\bar{N}\bar{\xi} = -iC\bar{N}CC\bar{\xi} = -iNC\bar{\xi} = -N\eta. \quad (1.132)$$

Следовательно, закон преобразования спинора типа η при отражениях отличен от закона преобразования спинора типа ξ . Эти оба рода спиноров не могут быть сведены друг к другу, так как нет линейного преобразования, которое могло бы преобразовать спинор типа ξ в спинор типа η . Если бы существовало такое преобразование D , что $\xi = D\eta$ и $\xi_N = D\eta_N$, то матрица D должна была бы антикоммутировать с N , откуда путем соответствующего выбора плоскостей P следует, что D должна была бы антикоммутировать со всеми матрицами σ_i . Но это возможно только при $D=0$. Мы назовем спинор типа ξ спинором первого рода, а спинор типа η — спинором второго рода. Если ξ, ξ' и η, η' являются спинорами первого и второго родов соответственно, то легко проверить, что $\xi'^* \xi$ — скаляр относительно отражений, так же, как и $\eta'^T C \xi$ и $\eta'^* \eta$. (С другой стороны, комбинации $\xi'^* \xi, \eta'^* C \xi \dots$ и т. д. не являются скалярами, так как их значения изменяются при собственных преобразованиях — вращениях.) Комбинации вида $\eta'^T \xi, \eta'^T C \eta, \xi'^T C \xi$ преобразуются при отражениях, как псевдоскаляры. Величины $\xi'^* \sigma \xi, \eta'^* \sigma \eta$ и $\eta'^T C \sigma \xi$ являются псевдовекторами, в то время как $\eta'^* \sigma \xi, \eta'^T C \sigma \eta$ и $\xi'^T C \sigma \xi$ преобразуются при отражениях, как векторы.

Эти понятия легко обобщаются на скалярные, спинорные и векторные поля. Так, скалярным полем $\xi(x)$ (в трехмерном пространстве) называют функцию, которая при вращении $x \rightarrow x' = Rx$ преобразуется по закону

$$\xi(x) \rightarrow \xi'(x') = T^{(0)}(R) \xi(x) = \xi(x), \quad (1.133a)$$

или эквивалентно

$$\xi'(x) = T^{(0)}(R) \xi(R^{-1}x) = \xi(R^{-1}x), \quad (1.133б)$$

т. е. преобразованная величина и первоначальная величина имеют одно и то же (численное) значение в физически одной и той же точке. Аналогично, векторная функция $\xi_i(x)$ преобразуется при вращении $x \rightarrow x' = Rx$ по закону

$$\xi_i(x) \rightarrow \xi'_i(x') = r_{ik} \xi_k(x), \quad (1.134a)$$

или эквивалентно

$$\xi'_i(x) = T^{(0)}(R) \xi_i(R^{-1}x) = R \xi_i(R^{-1}x), \quad (1.134б)$$

$$\xi'_i(x) = r_{ik} \xi_k(R^{-1}x). \quad (1.134в)$$

Для нерелятивистской квантовой механики значение этих представлений состоит в том, что они позволяют включить в общую схему описание спина (собственного момента количества движения) частицы, если предположить, что такая частица со спином должна описываться многокомпонентной волновой функцией, преобразующейся при вращениях по неприводимому представлению трехмерной группы вращений. Бесспиновую частицу описывают волновой функцией, которая при вращениях преобразуется, как скаляр. Нерелятивистская частица со спином $1/2$ со своими двумя степенями свободы — спин вверх и спин вниз — описывается спинорной волновой функцией, а в общем случае частица со спином s описывается $2s + 1$ -компонентной волновой функцией. Остановимся более подробно на частном случае частицы со спином $1/2$, когда волновая функция $\psi(x)$ есть двухкомпонентный спинор:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}. \quad (1.135)$$

В векторном пространстве возможных состояний этой системы можно ввести следующее скалярное произведение:

$$(\psi, \chi) = \sum_{i=1}^2 \int d^3x \langle \psi | x_i \rangle \langle x_i | \chi \rangle = \sum_{i=1}^2 \int d^3x \bar{\psi}_i(x) \chi_i(x). \quad (1.136)$$

При вращении $x' = Rx$ волновая функция $\langle x_i | \psi \rangle = \psi_i(x)$ преобразуется по закону

$$\psi'(x') = T^{(1/2)}(R) \psi(x) \quad (1.137a)$$

или

$$\psi'(x) = T^{(1/2)}(R) \psi(R^{-1}x). \quad (1.137b)$$

Определим линейный оператор $U(R)$, действующий в гильбертовом пространстве, согласно

$$\langle x_i | U(R) | \psi \rangle = \sum_{j=1}^2 T_{ij}^{(1/2)}(R) \psi_j(R^{-1}x), \quad (1.138a)$$

или эквивалентно

$$| \psi' \rangle = U(R) | \psi \rangle. \quad (1.138b)$$

Это соотношение можно рассматривать как связь между двумя векторами состояния, которые приписывают системе два наблюдателя, находящиеся в таких разных системах отсчета, что соответствующие координаты x и x' связаны соотношением $x' = Rx$. Если наблюдатели эквивалентны, а теория предполагается инвариантной относительно вращений, то в соответствии с тем, что говорилось раньше, операторы $U(R)$ будут унитарными. Фактически они образуют определенное с точностью до множителя унитарное представление группы вращений в гильбертовом пространстве состояний со скалярным произведением, определенным согласно (1.136). При бесконечно малых поворотах на угол ε вокруг l -й оси

$$(R(\varepsilon)x)_j = x_j + \varepsilon \varepsilon_{ljk} x_k, \quad (1.139a)$$

$$(R^{-1}(\varepsilon)x)_j = x_j - \varepsilon \varepsilon_{ljk} x_k \quad (1.139b)$$

оператор U может быть записан следующим образом:

$$U = I - \frac{i}{\hbar} \varepsilon D_l, \quad (1.140)$$

где оператор D_l , действующий в гильбертовом пространстве, является самосопряженным и поэтому соответствует некоторой наблюдаемой величине физической системы. Найдем теперь явный вид генераторов D_l в конфигурационном пространстве. С помощью (1.137b), (1.138a), (1.139a) и (1.139b) получаем

$$\psi'(x_j) = \left(I - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \mathcal{D}_l(x) \right) \psi(x_j) \quad (1.141a)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} i \varepsilon \sigma_l \right) \psi(x_j - \varepsilon \varepsilon_{ljk} x_k), \quad (1.141b)$$

где $\mathcal{D}_l(x)$ — матрица, матричные элементы которой $\mathcal{D}_{l,ij}(x)$ определяются правой частью равенства:

$$\langle x_i | D_l | x'j \rangle = \delta^{(3)}(x - x') \mathcal{D}_{l,ij}(x). \quad (1.142)$$

Раскладывая правую часть (1.141б) в ряд Тэйлора по ε вблизи $\varepsilon = 0$ и удерживая только члены первого порядка по ε , находим

$$\psi'(x_j) = \left[1 - i\varepsilon \left(i\varepsilon_{ljk} x_k \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sigma_l \right) + O(\varepsilon^2) \right] \psi(x_j). \quad (1.143)$$

Таким образом, для генератора получаем выражение

$$\mathcal{D}_l(\mathbf{x}) = +i\hbar \varepsilon_{ljk} x_k \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\hbar}{2} \sigma_l. \quad (1.144)$$

Тем самым определена l -я компонента оператора полного момента количества движения частицы. Следовательно, частица, помимо орбитального момента количества движения $[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]_l = -i\hbar \varepsilon_{ljk} x_k \partial_j$, обладает еще и (собственным) моментом количества движения $\frac{\hbar}{2} \sigma$.

Некоторые из методов, развитых для группы вращений, легко могут быть применены для рассмотрения группы пространственных сдвигов

$$x'_i = x_i + a_i. \quad (1.145)$$

Вследствие коммутативности этой группы все ее неприводимые унитарные представления являются одномерными, и если мы запишем

$$|\psi'\rangle = U(\mathbf{a})|\psi\rangle, \quad (1.146)$$

то

$$U(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}}, \quad (1.147)$$

где \mathbf{p} — оператор импульса. В явном виде

$$\psi'(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \psi' \rangle = \int d^3y \langle \mathbf{x} | U(\mathbf{a}) | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y} | \psi \rangle = e^{-\mathbf{a} \cdot \nabla} \psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \quad (1.148)$$

как и следовало ожидать. Таким образом, оператор импульса p_l является генератором сдвигов в направлении l -й оси. Мы уже установили выше, что гамильтониан является генератором временных сдвигов.

Классификацию представлений неоднородной группы вращений, т. е. группы, оставляющей инвариантной квадратичную форму $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2$ (преобразования $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{a}$, состоящие из сдвигов и вращений), читатель найдет в лекциях Паули [633].

§ 6. Четырехмерная группа вращений

Недавно были высказаны предположения, что некоторые свойства симметрии, обнаруживаемые странными частицами, могут быть поняты в рамках систематики, в которой этим частицам приписываются некоторые внутренние степени свободы, а соответствующее «внутреннее пространство» предполагается четырехмерным евклидовым. В связи с этим важно знать представления четырехмерной группы вращений, т. е. группы вещественных линейных преобразований, оставляющих инвариантной квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ (см., например, Паули [633], Клеппнер и Мак-Интosh [458], Рака [659], Роман [670]). В этом случае имеется шесть генераторов, соответствующих вращениям в каждой из

шести координатных плоскостей. Обозначим эрмитов генератор вращений в плоскости $\mu\nu$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$) через $M_{\nu\mu} = -M_{\mu\nu}$ и введем, кроме того, обозначения

$$M_{23} = M_1, \quad M_{31} = M_2, \quad M_{12} = M_3, \quad (1.149a)$$

$$M_{41} = N_1, \quad M_{42} = N_2, \quad M_{43} = N_3. \quad (1.149b)$$

После получения явного матричного представления генераторов для преобразования координат можно проверить, что они удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k, \quad (1.150)$$

$$[M_i, N_j] = [N_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk}N_k, \quad (1.151)$$

$$[N_i, N_j] = i\varepsilon_{ijk}M_k, \quad (1.152)$$

так что если определить операторы

$$K_i = \frac{1}{2}(M_i + N_i), \quad (1.153)$$

$$L_i = \frac{1}{2}(M_i - N_i), \quad (1.154)$$

то для них будет характерно свойство коммутации \mathbf{K} с \mathbf{L}

$$[K_i, L_j] = 0 \quad (1.155)$$

и то, что компоненты \mathbf{K} и \mathbf{L} будут удовлетворять перестановочным соотношениям для оператора момента количества движения

$$[K_i, K_m] = i\varepsilon_{imn}K_n, \quad (1.156)$$

$$[L_j, L_k] = i\varepsilon_{jkm}L_m. \quad (1.157)$$

Теперь имеются два инварианта

$$F = \mathbf{K}^2 + \mathbf{L}^2 \quad (1.158a)$$

и

$$G = \mathbf{K}^2 - \mathbf{L}^2, \quad (1.158b)$$

которые записываются через \mathbf{M} и \mathbf{N} в виде $\frac{1}{2}(\mathbf{M}^2 + \mathbf{N}^2)$ и $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$ и, как легко проверить, коммутируют со всеми генераторами¹⁾. Поэтому мы можем охарактеризовать каждое неприводимое представление парой индексов (k, l) таких, что в этом неприводимом представлении $\mathbf{K}^2 = k(k+1)I$ и $\mathbf{L}^2 = l(l+1)I$. Индексы k и l могут принимать значения $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Унитарное представление $\mathfrak{K}(k, l)$ имеет размерность

¹⁾ Отметим, что генераторы, записанные в виде \mathbf{K} и \mathbf{L} , оказываются расщепленными на две независимые системы, и, таким образом, в окрестности единичного элемента четырехмерная группа вращений может рассматриваться как прямое произведение двух трехмерных групп вращений. Под прямым произведением $G \otimes K$ двух групп с элементами g_1, g_2, \dots и k_1, k_2, \dots понимаем упорядоченную совокупность пар (g_i, k_i) с законом умножения, определенным так, что, например, произведение пар (g_r, k_s) и (g_t, k_u) равно $(g_r g_t, k_s k_u)$.

$(2k+1)(2l+1)$. Представление $(0, 0)$ соответствует скаляру, представления $(0, 1/2)$ и $(1/2, 0)$ — двухкомпонентным спинорам, $(1/2, 1/2)$ — четырехкомпонентному вектору и т. д. Генераторами спинорного представления являются матрицы

$$M_l^{(1/2, 0)} = \frac{1}{2} \sigma_l, \quad M_l^{(0, 1/2)} = \frac{1}{2} \sigma_l, \quad (1.159)$$

$$N_l^{(1/2, 0)} = \frac{1}{2} \sigma_l, \quad N_l^{(0, 1/2)} = -\frac{1}{2} \sigma_l. \quad (1.160)$$

Если ξ и η — спиноры, преобразующиеся соответственно по представлениям $(1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$, то тогда $\xi^* \xi$ и $\eta^* \eta$ являются скалярами, а величина $(\xi^* \eta, \xi^* \sigma_i \eta)$ есть 4-вектор.

Если дополнить группу отражениями, то операторы \mathbf{K} и \mathbf{L} больше не будут независимыми. Так, если в качестве основного отражения мы примем операцию, при которой $x_4 \rightarrow -x_4$ и $x_i \rightarrow -x_i$ ($i = 1, 2, 3$), и если R_- — оператор, соответствующий этому отражению, то легко проверить, что

$$R_- N + N R_- = 0 \quad (1.161a)$$

и

$$R_- M - M R_- = 0, \quad (1.161b)$$

или равносильно

$$R_- \mathbf{K} = \mathbf{L} R_- \quad (1.162a)$$

и

$$R_- \mathbf{L} = \mathbf{K} R_- \quad (1.162b)$$

Перейдем к нахождению неприводимых представлений группы с отражениями. Прежде всего заметим, что $(2k+1)(2l+1)$ базисных функций $|k, m_k; l, m_l\rangle$, на которые натянуто пространство неприводимого представления группы вращений без отражений, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} (K_1 \pm iK_2) |k, m_k; l, m_l\rangle &= \sqrt{(k \mp m_k)(k \pm m_k + 1)} |k, m_k \pm 1; l, m_l\rangle \\ K_3 |k, m_k; l, m_l\rangle &= m_k |k, m_k; l, m_l\rangle \end{aligned} \quad (1.163)$$

и

$$\begin{aligned} (L_1 \pm iL_2) |k, m_k; l, m_l\rangle &= \sqrt{(l \mp m_l)(l \pm m_l + 1)} |k, m_k; l, m_l \pm 1\rangle \\ L_3 |k, m_k; l, m_l\rangle &= m_l |k, m_k; l, m_l\rangle. \quad \square \end{aligned} \quad (1.164)$$

Отсюда и из соотношений (1.162a) и (1.162b) заключаем, что функция $R_- |k, m_k; l, m_l\rangle$ является собственной функцией оператора L_3 с собственным значением m_k и собственной функцией K_3 с собственным значением m_l . Основываясь, кроме того, на аналогичных выводах о действии операторов K_1, K_2 и L_1, L_2 на функцию $R_- |k, m_k; l, m_l\rangle$, можно проверить, что

$$R_- |k, m_k; l, m_l\rangle = \lambda |l, m_l; k, m_k\rangle, \quad (1.165)$$

где λ — постоянная, которая может зависеть от l , m_l , k , m_k . Отсюда следует, что при $k \neq l$ базис пространства, инвариантного относительно R_- , образуют векторы $|k, m_k; l, m_l\rangle$ только вместе с векторами $|l, m_l; k, m_k\rangle$ [размерность базиса $2(2l+1)(2k+1)$]. Следовательно, при $k \neq l$ неприводимым представлением группы с отражениями будет $(k, l) \oplus (l, k)$. В случае спиноров неприводимым представлением теперь будет $(0, 1/2) \oplus (1/2, 0)$, причем следует подчеркнуть, что в рамках расширенной группы спинор является четырехкомпонентным. (Аналогичное удвоение имеет место и в случае однородной группы Лоренца.) Неприводимые представления (k, k) собственной группы являются также неприводимыми представлениями и расширенной группы.

Представления четырехмерной группы вращений имеют интересные приложения к квантовомеханическому описанию движения нерелятивистского электрона в чисто кулоновском поле и к вопросу о происхождении вырождения спектра собственных значений в этом случае. По этому поводу читатель отсылается к статьям Фока [265] и Баргманна [29].

Группа Лоренца

§ 1. Релятивистские обозначения

Кратко остановимся на релятивистских обозначениях, которые будут использованы в книге.

Пространственно-временные координаты будут обозначаться x^μ (4-вектор также будет обозначаться светлой буквой x), причем $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ и $x^3 = z$; $x = \{x^0, \mathbf{x}\}$. Мы будем использовать метрический тензор $g_{\mu\nu}$ с компонентами

$$\begin{aligned} g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = +1, \\ g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{при} \quad \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В связи с этим нужно различать ковариантные и контравариантные векторы. Контравариантный вектор (преобразующийся как координатный вектор x^μ) будет обозначаться v^μ , а ковариантный (преобразующийся как градиент) будет обозначаться v_μ . Аналогичные обозначения будут приняты и для тензоров. Греческие индексы будут применяться для обозначения компонент (0, 1, 2, 3) пространственно-временного тензора, а латинские индексы — только для обозначения пространственных компонент (1, 2, 3). Операции опускания и поднимания индексов с помощью метрического тензора определяются следующим образом:

$$v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu, \quad (2.2a)$$

$$v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu, \quad (2.2b)$$

где предполагается суммирование от 0 до 3 по повторяющимся греческим индексам, т. е.

$$g_{\mu\nu} v^\nu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} v^\nu. \quad (2.3)$$

Тензор $g^{\mu\nu}$ определяется уравнением

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = \delta_\sigma^\nu, \quad (2.4)$$

где δ_σ^ν — символ Кронекера: $\delta_\nu^\mu = 1$, если $\mu = \nu$, и $\delta_\nu^\mu = 0$ в противном случае. Фактически же $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Отметим, что операции опускания и поднимания индексов 4-вектора изменяют знак его пространственных компонент, но оставляют неизменной временную. Лоренц-инвариантное

скалярное произведение двух векторов p_μ и x_μ определяется согласно

$$g^{\mu\nu} p_\mu x_\nu = p_\mu x^\mu = p \cdot x = x_0 p_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = x^0 p^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}. \quad (2.5)$$

Вектор v называется времени-подобным, если $v \cdot v = v^2 > 0$, пространственно-подобным, если $v^2 < 0$, и изотропным вектором, если $v^2 = 0$ ¹⁾. Релятивистское соотношение между энергией и импульсом свободной частицы $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ при помощи времени-подобного 4-вектора энергии и импульса частицы $p = \left\{ \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right\}$ записывается в виде $p^2 = m^2 c^2$. Операторные соотношения $E \rightarrow i\hbar \partial_t$, $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$ могут быть теперь записаны в виде

$$p_\mu \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\hbar \partial_\mu. \quad (2.6)$$

В этой связи следует отметить, что вследствие контравариантности x^μ вектор $\partial/\partial x^\mu = \partial_\mu$ ковариантен, причем

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left\{ \frac{\partial}{\partial ct}, \nabla \right\} \quad (2.7a)$$

и

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left\{ \frac{\partial}{\partial ct}, -\nabla \right\}. \quad (2.7b)$$

Оператор волнового уравнения, или, как его часто называют, оператор Даламбера

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (2.8)$$

может быть записан также в виде $\square = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = \partial^\mu \partial_\mu$.

Нам часто придется использовать разрывные функции $\theta(a)$ и $\varepsilon(a)$, которые определяются согласно

$$\begin{aligned} \varepsilon(a) &= +1 && \text{при } a > 0, \\ &= -1 && \text{при } a < 0, \end{aligned} \quad (2.9a)$$

$$\begin{aligned} \theta(a) &= \frac{1}{2} (1 + \varepsilon(a)) = 1 && \text{при } a > 0, \\ &= 0 && \text{при } a < 0. \end{aligned} \quad (2.9b)$$

Наконец, мы почти всегда будем применять естественную систему единиц, в которой скорость света c и поделенная на 2π постоянная Планка \hbar полагаются равными единице: $\hbar = c = 1$. В этой системе единиц энергия, масса, обратная длина и обратное время имеют одну и ту же размерность.

§ 2. Однородная группа Лоренца

В этом параграфе мы кратко напомним некоторые факты относительно однородных преобразований Лоренца. Если две системы отсчета движутся друг относительно друга в направлении оси x^1 , то связь между

¹⁾ Отметим, что под v^2 мы понимаем $v_0^2 - v^2$.

ними выражает преобразование Лоренца

$$\begin{aligned}x'^0 &= \gamma (x^0 - \beta x^1) = x^0 \operatorname{ch} u - x^1 \operatorname{sh} u, \\x'^1 &= \gamma (x^1 - \beta x^0) = x^1 \operatorname{ch} u - x^0 \operatorname{sh} u, \\x'^2 &= x^2, \\x'^3 &= x^3,\end{aligned}\tag{2.10}$$

где

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \beta = \frac{v}{c},\tag{2.11a}$$

$$\operatorname{th} u = \beta,\tag{2.11b}$$

а v — относительная скорость двух систем отсчета. Это преобразование Лоренца оставляет инвариантной квадратичную форму x^2 . Заметим также, что в момент времени $x_0 = 0$ начала обеих систем координат совпадают. Наиболее общим однородным преобразованием Лоренца, связывающим две системы координат, является любое линейное преобразование

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu\tag{2.12}$$

(в матричном виде $x' = \Lambda x$), которое оставляет инвариантной квадратичную форму $x_\mu x^\mu$, т. е. такое, при котором $x^2 = x'^2$. Все коэффициенты преобразования Λ_ν^μ вещественны. Из требования инвариантности квадратичной формы x^2 следует, что

$$\Lambda_\mu^\nu \Lambda_\lambda^\mu = \Lambda^{\nu\mu} \Lambda_{\lambda\mu} = \delta_\lambda^\nu.\tag{2.13a}$$

Это условие можно записать в виде

$$\Lambda_\nu^\mu g_{\mu\sigma} \Lambda_\sigma^\nu = g_{\nu\sigma}\tag{2.13b}$$

или, в матричной форме,

$$\Lambda^T g \Lambda = g,\tag{2.13в}$$

где индексом T отмечена транспонированная матрица. Из этого условия следует, что $\det \Lambda = \pm 1$ и что, следовательно, для каждого преобразования Лоренца существует обратное преобразование. Так как произведение двух преобразований Лоренца снова является преобразованием Лоренца, то совокупность всех преобразований Лоренца образует группу¹⁾.

Группа преобразований Лоренца содержит подгруппу, изоморфную трехмерной ортогональной группе. Эта подгруппа состоит из всех матриц Λ_μ^ν вида

$$\Lambda(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix},\tag{2.14}$$

где R — матрица размерности 3×3 со свойством $RR^T = R^T R = 1$. Такие матрицы Λ мы будем называть пространственными ортогональными преобразованиями. Любое однородное преобразование Лоренца может быть разложено следующим образом:

$$\Lambda = \Lambda(R_2) \Lambda(l_1) \Lambda(R_1),\tag{2.15}$$

где $\Lambda(R_1)$ и $\Lambda(R_2)$ — пространственные ортогональные преобразования, а $\Lambda(l_1)$ — преобразование Лоренца вдоль оси x^1 .

¹⁾ Эту группу, т. е. группу преобразований, ограниченных условием (2.13), называют *общей группой Лоренца* (см. [891], стр. 163, и [907], стр. 26). — *Прим. ред.*

Если в (2.13б) положить $\sigma = \nu = 0$, то получим

$$(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2 \geq 1, \quad (2.16)$$

так что $\Lambda_0^0 \geq 1$ или $\Lambda_0^0 \leq -1$. Преобразования Лоренца, для которых $\Lambda_0^0 \geq 1$, называются ортохронными преобразованиями Лоренца. Преобразование Лоренца ортохронно тогда и только тогда, если оно преобразует каждый положительный времени-подобный вектор¹⁾ снова в положительный времени-подобный. Совокупность всех ортохронных преобразований Лоренца образует группу — ортохронную²⁾ группу Лоренца. Совокупность всех матриц Λ может быть разбита на 4 компоненты³⁾ в соответствии с тем, будет ли $\det \Lambda$ равен $+1$ или -1 , а Λ_0^0 больше $+1$ или меньше -1 . Совокупность матриц с $\det \Lambda = +1$ и $\Lambda_0^0 \geq 1$ образует группу ограниченных однородных преобразований Лоренца. Ограниченная однородная группа Лоренца является 6-параметрической непрерывной группой. Другие компоненты можно получить из ограниченной группы Лоренца следующими тремя преобразованиями:

1) пространственным отражением: $x_0 \rightarrow x_0, \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$

$$\Lambda(i_s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (2.17)$$

2) временным отражением: $x_0 \rightarrow -x_0, \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}$

$$\Lambda(i_t) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.18)$$

3) пространственно-временным отражением: $x \rightarrow -x$

$$\Lambda(i_{st}) = \Lambda(i_s) \Lambda(i_t) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Компоненты не образуют связного целого и не могут быть соединены друг с другом непрерывным образом.

Как и в случае группы вращений, мы легко находим вид генераторов для преобразований Лоренца. При бесконечно малом преобразовании Лоренца

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \epsilon \lambda_\nu^\mu \quad (2.20)$$

условия (2.13а) и (2.13в) накладывают ограничение

$$\lambda^{\mu\nu} = -\lambda^{\nu\mu}, \quad (2.24)$$

¹⁾ Времени-подобный вектор $\{x_0, \mathbf{x}\}$ называется положительным, если $x_0 > 0$, и отрицательным, если $x_0 < 0$ (см. книгу Наймарка [907], стр. 27). —Прим. ред.

²⁾ Иногда эту группу называют *полной группой Лоренца* (см. [907], стр. 27, и [891], стр. 172). —Прим. ред.

³⁾ Этим термином, взятым из работы [891], стр. 172, мы переводим термин автора «subsets». —Прим. ред.

которое является необходимым и достаточным условием, чтобы генератор $\lambda^{\mu\nu}$ соответствовал бесконечно малому преобразованию Лоренца. Таким образом, бесконечно малым преобразованием, обратным к $\Lambda^{\mu\nu}$, является $\Lambda^{\nu\mu}$.

Явное матричное представление ограниченного однородного преобразования Лоренца вдоль оси x^1 (вращение в плоскости x^0x^1) дает матрица

$$\Lambda(10, u) = \begin{pmatrix} \text{ch } u & -\text{sh } u & 0 & 0 \\ -\text{sh } u & \text{ch } u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Генератор \mathfrak{M}^{10} для этого вращения определяется согласно

$$\mathfrak{M}^{10} = \frac{d}{du} \Lambda(10, u) \Big|_{u=0} \quad (2.23a)$$

и имеет вид

$$\mathfrak{M}^{10} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.23b)$$

Аналогично, генераторы \mathfrak{M}^{20} и \mathfrak{M}^{30} для вращений в плоскостях «20» и «30» имеют вид

$$\mathfrak{M}^{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}^{30} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Генераторами вращений в плоскостях $x^i x^j$, т. е. генераторами пространственных вращений, являются

$$\mathfrak{M}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

$$\mathfrak{M}^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы определяем $\mathfrak{M}^{\mu\nu} = -\mathfrak{M}^{\nu\mu}$. Произвольное бесконечно малое преобразование Лоренца может быть теперь записано в виде

$$\Lambda(\omega) = I + \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \mathfrak{M}_{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

где $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$. Конечные вращения в плоскости $x^\mu x^\nu$ снова выражаются в виде экспоненты

$$\Lambda(\mu\nu; u) = e^{u \mathfrak{M}^{\mu\nu}}. \quad (2.27)$$

Можно проверить, что генераторы $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$ удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[\mathfrak{M}_{\mu\nu}, \mathfrak{M}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}\mathfrak{M}_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}\mathfrak{M}_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma}\mathfrak{M}_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}\mathfrak{M}_{\mu\sigma}, \quad (2.28)$$

Таким образом, если все четыре индекса $\mu\nu\rho\sigma$ различны, то матрицы коммутируют. С другой стороны, если у обеих матриц один индекс общий, скажем $\sigma = \mu$ и по нему подразумевается суммирование, то правая часть пропорциональна матрице с оставшимися индексами $\mathfrak{M}_{\rho\nu}$.

Пусть $D(\Lambda)$ —какое-либо представление ограниченной группы Лоренца. Генераторы этого представления обозначим через $M_{\mu\nu}$. Если Λ имеет вид (2.26), то

$$D(\omega) = I + \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Так как $M_{\mu\nu}$ образуют представление генераторов алгебры Ли, то они удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$, а именно:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}. \quad (2.30)$$

Проблема нахождения представлений ограниченной группы Лоренца эквивалентна проблеме нахождения всех представлений перестановочных соотношений (2.30). В дальнейшем будут использоваться следующие важные свойства представлений ограниченной однородной группы Лоренца (см. Ван дер Варден [809], Баргманн [30], Наймарк [570]). Эта группа имеет конечномерные и бесконечномерные неприводимые представления. Однако единственным конечномерным *унитарным* представлением является тривиальное одномерное представление $\Lambda \rightarrow 1$. Неприводимые конечномерные представления ограниченной группы могут быть перенумерованы двумя дискретными индексами, которые могут принимать положительные целые, полуцелые и нулевые значения. В этом можно убедиться следующим образом. Определим операторы

$$\mathbf{M} = (M_{32}, M_{13}, M_{21}), \quad (2.31)$$

$$\mathbf{N} = (M_{01}, M_{02}, M_{03}). \quad (2.32)$$

Они обладают перестановочными соотношениями

$$[M_i, M_j] = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad (2.33a)$$

$$[N_i, N_j] = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad (2.33b)$$

$$[M_i, N_j] = \varepsilon_{ijk} N_k. \quad (2.33b')$$

Из этих операторов можно построить операторы $M^2 - N^2 = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$ и $\frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}^1$, коммутирующие со всеми генераторами M_i и N_i . Следовательно, они являются инвариантами группы и кратны единичному оператору в любом неприводимом представлении. Таким образом, представления могут быть перенумерованы значениями этих операторов в данном представлении. Чтобы сделать область изменения

1) $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ — полностью антисимметричный тензор четвертого ранга, компоненты которого равны +1, если индексы $\mu\nu\rho\sigma$ образуют четную перестановку чисел 0 1 2 3, равны -1, если $\mu\nu\rho\sigma$ — нечетная перестановка 0 1 2 3, и равны нулю, если хотя бы два из индексов $\mu\nu\rho\sigma$ совпадают.

этих значений более очевидной, введем операторы

$$J_l = \frac{1}{2} i (M_l + iN_l) \quad (2.34)$$

и

$$K_l = \frac{1}{2} i (M_l - iN_l), \quad (2.35)$$

которые удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[J_k, J_l] = i \varepsilon_{klm} J_m, \quad (2.36)$$

$$[K_l, K_m] = i \varepsilon_{lmn} K_n, \quad (2.37)$$

$$[J_l, K_m] = 0. \quad (2.38)$$

Из этих перестановочных соотношений вытекает, что пространство неприводимого конечномерного представления $V^{jj'}$ может быть натянуто на совокупность $(2j+1)(2j'+1)$ базисных векторов $|jm; j'm'\rangle$; где j, m, j', m' — целые или полуцелые числа, $-j \leq m \leq j$, $-j' \leq m' \leq j'$. В терминах этих чисел операторы J и K имеют следующие представления:

$$\begin{aligned} J_{\pm} |j, m; j', m'\rangle &= (J_1 \pm iJ_2) |j, m; j', m'\rangle = \\ &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1; j', m'\rangle \\ J_3 |j, m; j', m'\rangle &= m |j, m; j', m'\rangle \end{aligned} \quad (2.39)$$

и

$$\begin{aligned} K_{\pm} |j, m; j', m'\rangle &= (K_1 \pm iK_2) |j, m; j', m'\rangle = \\ &= \sqrt{(j' \mp m')(j' \pm m' + 1)} |j, m; j', m' \pm 1\rangle \\ K_3 |j, m; j', m'\rangle &= m' |j, m; j', m'\rangle. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Теперь в этом представлении легко получить матрицу $D^{(jj')}(\Lambda)$, представляющую любое частное преобразование Лоренца. Следует подчеркнуть, что, вообще говоря, она не будет унитарной. Все полученные представления конечномерны. В общем же случае неприводимые представления ограниченной группы Лоренца могут быть характеризованы парой индексов (j_0, ν) , где j_0 — целое или полуцелое положительное число, а ν — комплексное число. Если $\nu^2 = (j_0 + n)^2$, где n — целое, то представление будет конечномерным. Если же $\nu^2 \neq (j_0 + n)^2$ ни при каком целом n , то тогда представление будет бесконечномерным. С точки зрения физических приложений нас интересует классификация величин с конечным числом компонент, преобразующихся по конечномерному представлению группы Лоренца. Поэтому мы будем иметь дело с конечномерными представлениями. Однако унитарные бесконечномерные неприводимые представления имеют отношение к классификации неприводимых унитарных представлений неоднородной группы Лоренца (см. § 3). Читатель, интересующийся единым выводом всех неприводимых представлений ограниченной группы Лоренца, отсылается к хорошо написанной обзорной статье Наймарка [570].

Резюмируя, можно сказать, что ограниченная однородная группа Лоренца имеет бесконечное счетное множество неэквивалентных конечномерных (и в общем случае неунитарных) неприводимых представлений. Они могут быть перенумерованы двумя неотрицательными индексами (j, j') ; $j, j' = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Размерность представления равна $(2j+1)(2j'+1)$. Представление $D^{(j, j')}$ однозначно, если $j+j'$ — целое,

и двузначно, если нет. В неприводимом представлении инвариант $^{1/2}(M^2 - N^2)$ равен единичной матрице размерностью $(2j+1)(2j'+1)$, помноженной на $-\{j(j+1) + j'(j'+1)\}$. Второй инвариант также равен единичной матрице, но помноженной на $i\{j(j+1) - j'(j'+1)\}$. Базисные векторы, на которые натянуты пространства представлений $D\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$ и $D\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$, могут быть выбраны так, что матрицы, реализующие $D\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$, будут комплексно сопряжены с матрицами, реализующими $D\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

Величину, преобразующуюся по представлению $D^{(0,0)}$, называют скаляром, а четырехкомпонентную величину, преобразующуюся по $D^{(1/2, 1/2)}$, — 4-вектором. По представлению $(^{1/2}, 0)$ преобразуется двухкомпонентный спинор, а величина, которая преобразуется по представлению $(0, ^{1/2})$, называется сопряженным спинором. Явная матричная реализация генераторов в представлениях $D^{(0, 1/2)}$ и $D^{(1/2, 0)}$ может быть дана при помощи матриц Паули

$$M_j^{(1/2, 0)} = \frac{1}{2}i\sigma_j, \quad M_j^{(0, 1/2)} = \frac{1}{2}i\sigma_j, \quad (2.41a)$$

$$N_j^{(1/2, 0)} = \frac{1}{2}\sigma_j, \quad N_j^{(0, 1/2)} = -\frac{1}{2}\sigma_j. \quad (2.41b)$$

Ясно, что эти представления не эквивалентны, так как не существует 2×2 матрицы, которая бы антикоммутировала со всеми σ_i . Двухкомпонентный спинор ξ при пространственных поворотах преобразуется как спинор трехмерной группы вращений. Например, при бесконечно малом повороте вокруг l -й оси

$$\xi = \xi' = \left(1 + \frac{1}{2}i\epsilon\sigma_l\right)\xi. \quad (2.42)$$

При бесконечно малом преобразовании Лоренца вдоль i -й оси этот спинор преобразуется по закону

$$\xi \rightarrow \xi' = \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon\sigma_i\right)\xi. \quad (2.43)$$

Заметим, однако, что величина $\xi^*\xi$ не есть скаляр. Это — следствие неунитарности представления $D^{(1/2, 0)}$. С другой стороны, если ξ' — спинор, преобразующийся по $D^{(0, 1/2)}$, то можно проверить, что $\xi^*\xi'$ есть скаляр. В общем случае, если представления U и U^{*-1} эквивалентны, то существует матрица B , такая, что $U = B^{-1}U^{*-1}B$. Это в свою очередь означает, что если $|\psi\rangle$ есть вектор, преобразующийся по представлению U , а именно $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle$, то тогда $\langle\psi|B^*|\psi\rangle$ является скаляром. Доказательство выглядит следующим образом:

$$\langle\psi'|B^*|\psi'\rangle = \langle\psi|U^*B^*U|\psi\rangle = \langle\psi|B^*U^{-1}U|\psi\rangle = \langle\psi|B^*|\psi\rangle. \quad (2.44)$$

Верно также и обратное. Очевидно, что для унитарного представления $B = 1$.

Мы не будем рассматривать представлений общей группы Лоренца — группы с отражениями. Полное и простое изложение конечномерных неприводимых представлений общей группы Лоренца можно найти у Гейне [360] (см. также статьи Ватанабе [820, 821] и Широкова [729, 730]). Однако в соответствующих местах мы рассмотрим трансформационные свойства релятивистских волновых функций и операторов свободных частиц при отражениях. Здесь же мы отметим, что перестановочные соотношения операторов отражений I_s, I_t, I_{st} с генераторами имеют вид

$$[I_{st}, M_i] = [I_{ts}, N_i] = 0, \quad (2.45a)$$

$$[I_t, N_i]_* = [I_t, M_i] = 0, \quad (2.45б)$$

$$[I_s, N_i]_* = [I_s, M_i] = 0. \quad (2.45в)$$

В заключение этого параграфа мы укажем совокупность векторов, на которые натягивается неприводимое представление ортохронной группы Лоренца. (Эта группа является несобственной, так как содержит Λ с $\det \Lambda = -1$.) Она получается, если к элементам ограниченной группы присоединить операцию пространственного отражения. Из перестановочных соотношений (2.45в) следует

$$I_s K = J I_s, \quad (2.46a)$$

$$I_s J = K I_s, \quad (2.46б)$$

так что базисные векторы $|jm; j'm'\rangle$ с $j \neq j'$, преобразующиеся при ограниченных преобразованиях Лоренца по представлению $D^{(j, j')}$, не преобразуются друг через друга при операции I_s .

Действительно, на основании (2.46)

$$J_s (I_s |jm; j'm'\rangle) = m' (I_s |jm; j'm'\rangle), \quad (2.47)$$

и, следовательно, вектор $I_s |jm; j'm'\rangle$ ведет себя, как базисный вектор $\lambda |j'm'; jm\rangle$, где λ — постоянная, зависящая от j, j', m, m' . Векторы $|j, m; j', m'\rangle$ и $I_s |j, m; j', m'\rangle$ при ограниченных преобразованиях Лоренца преобразуются по различным неприводимым представлениям и, следовательно, ортогональны друг другу. Поэтому для получения векторного пространства, инвариантного относительно несобственной ортохронной группы, необходимо воспользоваться объединенной совокупностью $2(2j+1)(2j'+1)$ линейно независимых векторов $|jm; j'm'\rangle$ и $|j'm'; jm\rangle$. Таким образом, можно ожидать, что векторное пространство $V^{jj'} \oplus V^{j'j}$ будет неприводимым векторным пространством для представления несобственной ортохронной группы. Это действительно так, когда $j \neq j'$.

§ 3. Неоднородная группа Лоренца

Неоднородные преобразования Лоренца $L = \{a, \Lambda\}$ определяются согласно

$$x'_\mu = (Lx)_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu, \quad (2.48)$$

т. е. как произведение операций сдвига на вещественный вектор a_μ и однородного преобразования Лоренца Λ , причем сдвиг выполняется после однородного преобразования Лоренца. Неоднородное преобразова-

ние удобно записывать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_0^1 & \Lambda_0^2 & \Lambda_0^3 & a^0 \\ \Lambda_1^0 & \Lambda_1^1 & \Lambda_1^2 & \Lambda_1^3 & a^1 \\ \Lambda_2^0 & \Lambda_2^1 & \Lambda_2^2 & \Lambda_2^3 & a^2 \\ \Lambda_3^0 & \Lambda_3^1 & \Lambda_3^2 & \Lambda_3^3 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

где последняя координата 1 не имеет физического смысла и остается инвариантной при преобразовании. Произведение двух неоднородных преобразований Лоренца $\{a_1, \Lambda_1\}$ и $\{a_2, \Lambda_2\}$ равно

$$\{a_1, \Lambda_1\} \{a_2, \Lambda_2\} = \{a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2\}. \quad (2.50)$$

Неоднородные преобразования Лоренца образуют 10-параметрическую непрерывную группу. Генераторами сдвигов являются эрмитовы операторы p_μ , а их перестановочные соотношения с эрмитовыми генераторами¹⁾ «вращений» $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ в плоскости $x^\mu - x^\nu$ суть

$$[M_{\mu\nu}, p_\sigma] = i(g_{\nu\sigma} p_\mu - g_{\mu\sigma} p_\nu). \quad (2.51)$$

Перестановочные соотношения этих генераторов между собой имеют вид

$$[p_\mu, p_\nu] = 0, \quad (2.52)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} M_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma} M_{\rho\mu}). \quad (2.53)$$

Проблема классификации всех неприводимых унитарных представлений неоднородной группы Лоренца (см. статьи Вигнера [857], Баргманна и Вигнера [31] и Широкова [726, 727]) снова может быть сформулирована как проблема нахождения всех представлений перестановочных соотношений (2.51)–(2.53) с помощью самосопряженных операторов. Прежде всего надо найти все инварианты группы. Очевидно, что инвариантами группы могут быть только скалярные операторы, и таким образом мы приходим к задаче построения скалярных величин, коммутирующих с p_μ и $M_{\mu\nu}$. Определим следующие величины:

$$v_{\mu\nu\rho} = p_\mu M_{\nu\rho} + p_\nu M_{\rho\mu} + p_\rho M_{\mu\nu} = M_{\nu\rho} p_\mu + M_{\rho\mu} p_\nu + M_{\mu\nu} p_\rho \quad (2.54)$$

и псевдовектор

$$\omega_\sigma = \frac{1}{2} \varepsilon_{\sigma\mu\nu\lambda} M^{\mu\nu} p^\lambda \quad (2.55)$$

такой, что

$$(\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3) = (v^{321}, v^{230}, v^{310}, v^{120}), \quad (2.56)$$

или в трехмерных векторных обозначениях

$$\omega^0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{M}, \quad (2.57a)$$

$$\mathbf{w} = p_0 \mathbf{M} - [\mathbf{p} \times \mathbf{N}]. \quad (2.57b)$$

Заметим, что

$$\omega_\sigma p^\sigma = 0. \quad (2.58)$$

¹⁾ Мы сделали генераторы эрмитовыми, добавив в прежние определения множитель $-i$.

Перестановочные соотношения для ω_μ имеют вид

$$[M_{\mu\nu}, \omega_\rho] = i(g_{\nu\rho}\omega_\mu - g_{\mu\rho}\omega_\nu), \quad (2.59)$$

$$[\omega_\mu, p_\nu] = 0, \quad (2.60)$$

$$[\omega_\mu, \omega_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\omega^\rho p^\sigma. \quad (2.61)$$

Теперь можно проверить, что скалярные операторы

$$P = p^\mu p_\mu \quad (2.62)$$

и

$$W = \frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \omega_{\mu\nu} \omega_{\rho\sigma} = -\omega^\mu \omega_\mu = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} p_\sigma p^\sigma - M_{\mu\sigma} M^{\nu\sigma} p^\mu p_\nu \quad (2.63)$$

коммутируют со всеми генераторами $M_{\mu\nu}$ и p_μ . Поэтому в каждом неприводимом представлении неоднородной группы Лоренца они кратны единичному оператору, а их собственные значения могут быть использованы для классификации неприводимых представлений.

Для классификации унитарных представлений неоднородной группы Лоренца удобно выбрать определенный базис в векторном пространстве, на котором определены представления. Чтобы определить базис, составим из генераторов группы полный набор коммутирующих операторов. Конечно, можно построить много различных наборов коммутирующих операторов. Различные наборы будут приводить к эквивалентным представлениям. Мы могли бы, например, выбрать в качестве полного набора операторы $M_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}$, M^2 и M_3 , но эти операторы не инвариантны относительно сдвигов. Полный набор коммутирующих операторов, инвариантных относительно сдвигов, состоит из операторов p_μ и одной из компонент ω_μ , скажем w_3 . Этот набор мы и примем для наших дальнейших рассуждений. Спектр собственных значений этих операторов определяет собой область изменения переменных, нумерующих базисные векторы. Кроме того, отметим, что в неприводимом представлении независимы только три из четырех компонент импульса, так как p^2 является инвариантом группы и имеет в неприводимом представлении фиксированное значение. Таким образом, базисные функции пространства, в котором действует неприводимое представление, можно записать $\{p'_0, p'_1, p'_2, p'_3; \xi\}$, причем p'^2 имеет здесь фиксированное значение, а ξ — переменная, соответствующая собственному значению оператора w_3 . Важно отметить, что хотя мы и выбрали полный набор коммутирующих операторов среди операторов группы, этот набор, вообще говоря, не является полным набором коммутирующих *наблюдаемых* физической системы. В общем случае существуют другие инвариантные операторы (например, такие, как операторы полного заряда и барионного заряда), которые коммутируют с операторами группы и собственные значения которых, вместе с p'_μ и ξ , характеризуют *состояние* физической системы. Поэтому более общей записью базисных векторов пространства неприводимого представления будет $\{p'; \xi; \alpha\}$, где через α обозначены некоторые инвариантные параметры, являющиеся в физических приложениях собственными значениями тех операторов, которые должны быть добавлены, чтобы дополнить совокупность операторов (p_μ, w_3) до полного набора наблюдаемых. В дальнейшем мы часто будем опускать индекс α в обозначении базисных векторов $\{p; \xi; \alpha\}$. Отметим, что в выбранном базисе преобразование сдвига является очень простым. Совокупность всех четырехмерных сдвигов является коммутативной подгруппой неоднородной группы Лоренца. Вслед-

ствие коммутативности все неприводимые унитарные представления этой подгруппы одномерны и выражаются через экспоненту. Оператор, соответствующий сдвигу на 4-вектор a_μ , имеет вид

$$U(a) = \exp(-ia_\mu p^\mu). \quad (2.64)$$

Таким образом, в неприводимом представлении преобразованию сдвига на a соответствует умножение всех базисных векторов $|p'; \zeta\rangle$ на $\exp(-ia_\mu p^\mu)$.

Неприводимые представления неоднородной группы Лоренца можно классифицировать в соответствии с тем, является ли вектор p_μ пространственно-подобным, времени-подобным, изотропным или равным нулю. В последнем случае ($p_\mu = 0$) полная система унитарных представлений совпадает с полной системой (бесконечномерных) унитарных представлений однородной группы (см. статьи Баргманна [30] и Наймарка [570]). Они не будут рассматриваться дальше, так как, по-видимому, не соответствуют каким-либо физическим системам, за исключением важного случая тривиального тождественного представления, являющегося одномерным.

Принципиальный интерес для физических приложений имеют те представления, в которых $p^2 = m^2$ — положительная постоянная, а также те, в которых $p^2 = 0$. Сперва рассмотрим случай $p^2 = m^2$. В этом случае знак энергии $p_0 / |p_0|$ коммутирует со всеми генераторами и, следовательно, является инвариантом группы. Таким образом, при любых значениях P и W имеется два неприводимых представления соответственно двум значениям $p_0 / |p_0|$. При $p_0 > 0$ векторное пространство натянуто на базисные векторы, принадлежащие одному и тому же собственному значению m^2 оператора p^2 , причем $p_0 = +\sqrt{p^2 + m^2}$. Поэтому вектор $|p, \zeta\rangle$ можно записывать в виде $|p, \zeta\rangle$.

Для получения спектра w_3 в неприводимом представлении рассмотрим соотношение (2.61) в пространстве, образованном линейными комбинациями векторов $|p', \zeta\rangle$ с фиксированным значением p' . Так как p^μ и w^σ коммутируют, то здесь не возникает каких-либо трудностей или неоднозначностей. Кроме того, удобно совершить преобразование Лоренца в «систему покоя», в которой $p' = 0$, $p'_0 = m$, и

$$\begin{aligned} w^\mu &= m(0, M_{23}, M_{31}, M_{12}) = \\ &= m(0, S_1, S_2, S_3). \end{aligned} \quad (2.65)$$

причем

$$[S_h, S_l] = i\varepsilon_{hlm} S_m. \quad (2.66)$$

Операторы S_i подчиняются перестановочным соотношениям для момента количества движения. Следовательно, собственные значения S^2 суть $s(s+1)$ с $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$, а S_i являются генераторами неприводимого $(2s+1)$ -мерного представления трехмерной группы вращений. Таким образом, в системе покоя оператор w равен оператору полного момента количества движения, помноженному на m . Это верно только при $m \neq 0$, так как только в этом случае можно произвести преобразование Лоренца в систему покоя. Итак, преобразующиеся по неприводимому представлению базисные векторы имеют $2s+1$ компонент, т. е. ζ принимает значения $\zeta = 1, \dots, 2s+1$, или, иными словами, при данном векторе импульса p_μ с $p^2 = m^2$ и $p_0 = +\sqrt{p^2 + m^2} > 0$ существует $2s+1$ независимых состояний.

Теперь определим лоренц-инвариантное скалярное произведение в векторном пространстве как интегрирование по всем значени-

ям p , удовлетворяющим условиям $p^2 = m^2$ и $p_0 = +\sqrt{p^2 + m^2}$, и суммирование по индексу ζ

$$\begin{aligned} (\chi, \psi) &= \sum_{\zeta=1}^{2s+1} \int \frac{d^3p}{p_0} \langle \chi | p, \zeta \rangle \langle p, \zeta | \psi \rangle = \\ &= \sum_{\zeta=1}^{2s+1} \int \frac{d^3p}{p_0} \chi(p, \zeta) \psi(p, \zeta), \end{aligned} \quad (2.67)$$

где d^3p/p_0 — инвариантная мера на гиперboloиде $p^2 = m^2$, а сумма $\sum_{\zeta=1}^{2s+1} \chi(p, \zeta) \psi(p, \zeta)$ должна быть скаляром. Векторное пространство, снабженное этим скалярным произведением, является гильбертовым пространством.

Прежде чем продолжать математический анализ унитарных представлений неоднородной группы Лоренца, остановимся на значении их для физических приложений (см. работы Хаага [347], Вигнера [863], а также Ньютона и Вигнера [576]). С этой целью проанализируем описание элементарной частицы. Конечно, в вопросе о том, что такое элементарная частица, ясности нет, и он представляет собой одну из важнейших проблем теоретической физики сегодняшнего дня. Интуитивно же частицу с массой m и спином s считают элементарной, если для временных интервалов, больших характерной для нее естественной единицы времени \hbar/mc^2 , она может рассматриваться как единое целое, а не как объединение других частиц. Естественно потребовать неразложимость пространства состояний такой системы на лоренц-инвариантные линейные подпространства: должна существовать возможность получения всех состояний системы из какого-либо *одного*, произвольным образом выбранного, действуя линейной комбинацией преобразований Лоренца. Если бы имелись такие лоренц-инвариантные подпространства, то это означало бы, что существует релятивистски инвариантное различие между этими наборами состояний системы, а тогда было бы логично относить различные релятивистски инвариантные подпространства состояний к различным «элементарным системам». И вообще о системе говорят как об «элементарной», если многообразие ее состояний является предельно узким, линейным (чем выражается принцип суперпозиции) и инвариантным относительно преобразований Лоренца. Следовательно, многообразие состояний элементарной системы образует пространство, в котором действует неприводимое представление неоднородной группы Лоренца. Заметим, что в рамки данного определения укладываются и составные системы, такие, как, например, атом гелия в основном состоянии, или α -частица. Однако атом гелия в состоянии, являющемся суперпозицией двух или более возбужденных состояний, не будет элементарной системой в указанном выше смысле, так как в этом случае можно выделить более узкий набор состояний, к которому применим принцип суперпозиции и который является релятивистски инвариантным подпространством. Очевидный интерес представляет вопрос, что следует взять в качестве оператора координаты или в качестве других глобальных наблюдаемых элементарной системы, а также каков их смысл. Ответ состоит в том (см. статью Ньютона и Вигнера [576]), что наблюдаемые, соответствующие этим величинам, могут быть найдены на основе совершенно общих принципов инвариантности. Например, полученные этим путем наблюдаемые координат соответствуют координатам центра масс, а наблюдаемая импульса соответствует полному импульсу системы. Кроме того, оператор

импульса с точностью до вещественного множителя совпадает с генератором смещений.

Итак, элементарная система — это система, обладающая определенными трансформационными свойствами (ее состояния преобразуются по неприводимому представлению неоднородной группы Лоренца) и, более конкретно, трансформационными свойствами, которые обычно приписывают частице. Можно считать такую систему элементарной частицей или нет, зависит от того, полезно ли (или возможно ли) рассматривать ее как бесструктурную, не состоящую из других частиц, или нет. Очевидно, что это обусловлено тем, насколько малые расстояния прощупываются экспериментально, например при рассеянии частиц с большой энергией. Поэтому, следует ли частицу рассматривать как элементарную или как составную, зависит от того, насколько тесно связаны ее составные части. Современные экспериментальные данные, в частности станфордские эксперименты по рассеянию электронов на нуклонах (Хофштадтер [378]), указывают, что даже стабильные фундаментальные частицы (электрон, протон) не являются элементарными в указанном выше смысле бесструктурности. Однако они являются элементарными системами в том смысле, что состояния любой такой изолированной частицы образуют инвариантное многообразие, причем все состояния могут быть получены путем применения линейных комбинаций преобразований Лоренца к какому-либо одному состоянию, выбираемому произвольным образом. Многообразие состояний частицы может быть характеризовано параметром m , массой частицы, параметром s , спином частицы и некоторыми другими инвариантными параметрами, такими, как электрический и барионный заряд. При этом зависимость волновой функции частицы от кинематических переменных определяется (с точностью до преобразования подобия) неприводимым представлением (m, s) . Заметим, однако, что в рамках такого описания ничего не говорится о взаимном расположении составных частей, из которых, возможно, построена наша «элементарная» частица». Теоретико-групповой метод определяет только кинематическое описание изолированной свободной частицы с заданными массой и спином. Но только это и требуется для описания начальных и конечных состояний частиц в эксперименте по рассеянию, поскольку в этих состояниях частицы находятся далеко друг от друга и не взаимодействуют. Первоначально частицы готовятся в состояниях с определенными массой, импульсом, спином и зарядом; детектор снова регистрирует только состояния с определенными массой, импульсом, спином и зарядом. Волновые функции, описывающие такие состояния, как раз те, которые дает теоретико-групповой метод.

Резюмируем сказанное. Было показано, что неприводимое представление типа $p^2 > 0$, $p_0 > 0$ характеризуется двумя индексами (m, s) , причем m — любое положительное число, а s — также положительное целое или полуцелое число. Индекс m характеризует массу элементарной системы, индекс s — момент количества движения в системе покоя, т. е. спин элементарной системы. То, что неприводимое представление бесконечномерно, выражает тот факт, что любая элементарная система способна принимать бесконечно большое число линейно независимых состояний. Для каждой пары (m, s) и данного знака энергии имеется одно и только одно неприводимое представление неоднородной группы Лоренца, если не различать унитарно-эквивалентных представлений. При полуцелом s представление двузначно. Большей частью нас будут интересовать случаи $s = 0, \frac{1}{2}, 1$. При $s = 0$ пространство представления натягивается на

совокупность положительно-частотных решений релятивистски ковариантного уравнения для частиц со спином 0 — уравнения Клейна — Гордона; при $s = \frac{1}{2}$ на положительно-частотные решения уравнения Дирака, а при $s = 1$ — на положительно-частотные решения уравнения Прока.

Все эти уравнения могут быть приведены к определенному каноническому виду (в этой связи см. статью Фолди [270]). При этом основываются на следующих соображениях. Как мы уже отмечали выше, если в шредингеровской картине движения известны операторы сдвигов, то это равносильно тому, что известно уравнение движения системы в этой картине. На самом деле мы уже определили представление этого оператора. Для пространственно-временных сдвигов $x_\mu \rightarrow x_\mu + a_\mu$ он дается формулой (2.64). Следовательно, для элементарной системы с массой m и спином s , множество состояний которой образует векторное пространство неприводимого представления (m, s) , временной сдвиг $a_\mu = (\tau, 0, 0, 0)$ состояния $|\psi\rangle$ приводит к вектору состояния $U(\tau)|\psi\rangle$, так что

$$\begin{aligned} \langle ps | U(\tau) | \psi \rangle &= e^{-ip_0\tau} \psi(\mathbf{p}, s) = \\ &= \psi(\mathbf{p}, s; \tau). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Здесь правая часть соответствует шредингеровскому состоянию в момент времени τ , если $\psi(\mathbf{p}, s)$ соответствует шредингеровскому состоянию при $\tau = 0$ (гейзенберговское состояние). Таким образом, развитие элементарной системы во времени определяется дифференциальным уравнением

$$i\partial_\tau\psi(\mathbf{p}, s; \tau) = p_0\psi(\mathbf{p}, s; \tau) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}\psi(\mathbf{p}, s; \tau). \quad (2.69)$$

Теперь мы обратимся ко второму классу представлений, интересных для физики, а именно к случаю нулевой массы. Если инвариант P равен нулю, $P = 0$, но $p_\mu \neq 0$, что соответствует случаю частиц с нулевой массой, то имеются два различных типа представлений.

Первый соответствует случаю, когда $W = -w_\mu w^\mu = 0$, так что и $P = 0$ и $W = 0$. В этом случае для характеристики представления недостаточно этих двух квантовых чисел. Поскольку же теперь p_μ и w_μ — изотропные векторы и так как, согласно (2.58), $w^\mu p_\mu = 0$, то должно иметь место $w_\mu = \lambda p_\mu$. Для классификации представлений теперь могут быть использованы собственные значения оператора λ , который в сущности является оператором спина частицы. Чтобы оправдать интерпретацию λ как оператора спина частицы, заметим, что из соотношения $w_\mu = \lambda p_\mu$ совместно с определениями (2.57а) и (2.57б) следует

$$\lambda = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}}{p_0}. \quad (2.70)$$

Так как $p_0^2 = \mathbf{p}^2$, то λ есть проекция момента количества движения частицы на направление ее движения, т. е. ее спиральность. Если $\lambda \neq 0$, то при фиксированном значении вектора импульса p_μ имеются два независимых состояния, соответствующих двум возможным состояниям поляризации (спиральности). Если $\lambda = 0$, то существует только одно состояние.

Представления второго типа возникают, когда $W \neq 0$, но равно α^2 , причем α — вещественное число. Тогда при фиксированном значении вектора импульса существует бесконечно много различных состояний поляризации, которые могут быть описаны непрерывной переменной. Мы рассмотрим оба типа представлений одновременно.

Прежде всего отметим, что для частиц без массы не существует какой-либо системы координат, в которой обратились бы в нуль все компоненты

p_μ , кроме одной. Однако существует система, в которой p_μ принимает вид $p_\mu = (p, 0, 0, p)$. Введем в этой системе обозначения

$$\omega_1 + i\omega_2 = \lambda_+, \quad (2.71a)$$

$$\omega_1 - i\omega_2 = \lambda_-, \quad (2.71b)$$

$$\omega_0 = p\lambda, \quad (2.71c)$$

где, согласно уравнению (2.55), $\lambda = M_{12} = M_3$. Замечаем, что W теперь можно записать в виде

$$W = -\omega_\mu \omega^\mu = -(\omega_0^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2) = (\omega_1 + i\omega_2)(\omega_1 - i\omega_2) = \lambda_+ \lambda_-, \quad (2.72)$$

с учетом того, что в этой системе координат $\omega_0 = \omega_3$, а ω_1 и ω_2 коммутируют, $[\omega_1, \omega_2] = 0$. С помощью (2.61) и с учетом того, что $p_\mu = (p, 0, 0, p)$, находим перестановочные соотношения

$$\left. \begin{aligned} [\lambda_+, \lambda] &= -\lambda_+, \\ [\lambda_-, \lambda] &= +\lambda_-, \end{aligned} \right\} \quad (2.73a)$$

$$[\lambda_+, \lambda_-] = 0. \quad (2.73b)$$

Будем обозначать собственные функции λ и W через $|\alpha; \beta\rangle$:

$$W|\alpha, \beta\rangle = \alpha|\alpha, \beta\rangle, \quad (2.74a)$$

$$\lambda|\alpha, \beta\rangle = \beta|\alpha, \beta\rangle. \quad (2.74b)$$

Чтобы найти спектр собственных значений, замечаем на основании (2.73a), что

$$[\lambda_+, \lambda]|\alpha, \beta\rangle = (\beta\lambda_+ - \lambda\lambda_+)|\alpha, \beta\rangle = -\lambda_+|\alpha, \beta\rangle, \quad (2.75)$$

откуда

$$\lambda(\lambda_+|\alpha, \beta\rangle) = (\beta + 1)(\lambda_+|\alpha, \beta\rangle) \quad (2.76)$$

и аналогично

$$\lambda\{\lambda_-|\alpha, \beta\rangle\} = (\beta - 1)\{\lambda_-|\alpha, \beta\rangle\}. \quad (2.77)$$

Следовательно, $\lambda_\pm|\alpha, \beta\rangle$ есть собственные функции оператора λ , соответствующие собственным значениям $\beta \pm 1$. Поэтому спектр собственных значений λ имеет вид

$$\beta = n_0 + n, \quad (2.78)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, а $1 > n_0 \geq 0$. Так как $\lambda = M_3$, то фактически λ есть генератор трехмерных пространственных вращений в гиперплоскости, перпендикулярной к p_μ . Вследствие того, что поворот на угол 2π оставляет неизменными базисные функции однозначного представления и ведет к умножению базисных функций двузначного представления на -1 , то n_0 должно быть равно нулю для однозначных представлений и $1/2$ — для двузначных. Все векторы $|\alpha, \beta\rangle$, преобразующиеся по неприводимому представлению, принадлежат одному и тому же собственному значению α оператора W . Если заменить индекс β индексом n , то в неприводимом представлении получим

$$\langle \alpha, n | \lambda | \alpha, m \rangle = (n_0 + n) \delta_{nm}, \quad (2.79)$$

и аналогично

$$\langle \alpha, n | \lambda_+ | \alpha, m \rangle = a_n \delta_{n, m+1}, \quad (2.80a)$$

$$\langle \alpha, n | \lambda_- | \alpha, m \rangle = b_n \delta_{n, m-1}. \quad (2.80b)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle \alpha, n | W | \alpha, n \rangle = \langle \alpha, n | \lambda_+ \lambda_- | \alpha, n \rangle = \\ &= \langle \alpha, n | \lambda_+ | \alpha, n-1 \rangle \langle \alpha, n-1 | \lambda_- | \alpha, n \rangle = a_n b_n. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Унитарному представлению соответствует эрмитов оператор w_μ , и поэтому $(\lambda_+)^* = \lambda_-$, так что $a_n = \bar{b}_n$ и $\alpha = |a_n|^2 \geq 0$. Если $a_n = b_n = 0$, то $\alpha = 0$ при всех n , поэтому $\lambda_+ = \lambda_- = 0$ и, следовательно, $w_1 = w_2 = 0$ и $w_\mu = \lambda p_\mu$. Заметим, что при $\alpha = 0$ оператор λ коммутирует со всеми генераторами и является, таким образом, дополнительным инвариантом группы. Вследствие этого, пока мы не затрагиваем других квантовых чисел, кроме спина, все представления будут одномерными. При каждом целом или полуцелом значении λ существуют два неприводимых представления (при фиксированном знаке p_0), в одном из которых $w_\mu = \lambda p_\mu$, а в другом $w_\mu = -\lambda p_\mu$. Когда $\lambda = 0$, имеется только одно состояние. Поэтому при любом ненулевом значении спина частица с массой, равной нулю, имеет только два направления поляризации, а не $2s + 1$, как в случае частицы с массой, отличной от нуля, и со спином s^1). Примером может служить фотон. Его спин равен единице, но он имеет только два направления поляризации.

Представления с $W = \alpha^2 > 0$ являются бесконечномерными по спиновой переменной. Поэтому если бы существовали соответствующие частицы, то они обладали бы непрерывным спином. Мы не будем рассматривать эти представления подробнее, так как, по-видимому, они не реализуются в природе. Их свойства были изучены Вигнером [858] и Баргманом и Вигнером [31]. Из представлений с $P = 0$, $W = 0$, $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ в природе реализуется представление с $\lambda = \frac{1}{2}$, соответствующее нейтрину, и представление с $\lambda = 1$, соответствующее фотону. В явном виде все представления с $P = 0$, $W = 0$ и с произвольным значением λ были получены Фронсдейлом [286].

Мы перечислили здесь все неприводимые представления группы Лоренца, за исключением тех, для которых $p^2 < 0$. Представления с $p^2 < 0$ мы не будем рассматривать, ибо пространство, в котором действуют эти представления, натягивается на базисные векторы $|p', \zeta\rangle$ с $p'^2 < 0$. Поэтому энергия p_0 частицы, соответствующей такому представлению, обладала бы тем нефизическим свойством, что с помощью подходящего преобразования Лоренца она могла бы быть сделана сколь угодно большой и отрицательной. Безусловно, это не соответствует свойствам физической частицы. В этой связи нужно отметить, что в представлениях, имеющих отношение к описанию физических частиц, энергетический спектр положителен и снизу ограничен нулевым значением, $p_0 > 0$, как и должно быть для реальной частицы. Кроме того, для этих представлений имеется хорошо определенный нерелятивистский предел. Это последнее свойство отсутствует у представлений с $p^2 < 0$.

¹⁾ Этот факт более подробно обсуждается в гл. 5, § 2.

Уравнение Клейна—Гордона

§ 1. Исторический обзор

Когда Шредингер написал нерелятивистское уравнение, называемое теперь в его честь, он предложил также соответствующее релятивистское уравнение. Позднее такое же уравнение было независимо предложено Гордоном [332, 333], Фоком [260, 261], Клейном [454], Кударом [468] и Де-Дондером и Ван Дунгеном [157]. Это уравнение можно получить из релятивистского соотношения между энергией и импульсом для свободной частицы с массой μ

$$E^2 = c^2 p^2 + \mu^2 c^4, \quad (3.1)$$

если сделать в нем замены $E \rightarrow i\hbar \partial_t$, $p \rightarrow -i\hbar \nabla$. В результате приходим к уравнению

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + \mu^2 c^4) \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (3.2a)$$

Используя естественную систему единиц ($\hbar = c = 1$) и обозначение Дирака $\varphi(x) = \langle x | \varphi \rangle$, можно переписать его в виде

$$(\square + \mu^2) \langle x | \varphi \rangle = 0. \quad (3.2b)$$

Уравнение (3.2a) стало известно как уравнение Клейна—Гордона. Волновая функция $\varphi(x)$ является однокомпонентной скалярной функцией, которая при неоднородных преобразованиях Лоренца $x' = \Lambda x + a$ преобразуется по закону

$$\varphi'(x') = \varphi(x) \quad (3.3a)$$

или

$$\varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}(x - a)). \quad (3.3b)$$

Мы будем говорить, что φ описывает скалярную частицу, если при пространственном отражении $x_0 \rightarrow x_0$, $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, $\varphi \rightarrow \varphi$, и что φ описывает псевдоскалярную частицу, если при пространственном отражении $\varphi \rightarrow -\varphi$ ¹⁾.

Физическую интерпретацию уравнения Клейна—Гордона попытаемся дать по аналогии с тем, как это делается в случае нерелятивистского

¹⁾ Точнее эти преобразования записываются в виде $\varphi'(x') = \varphi(x)$ для скалярной функции и $\varphi'(x') = -\varphi(x)$ для псевдоскалярной ($x'_0 = x_0$, $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$). — Прим. ред.

уравнения. Определим плотность вероятности ρ и ток вероятности \mathbf{j} таким образом, чтобы они удовлетворяли уравнению неразрывности. Можно проверить, что ρ и \mathbf{j} , выбранные в виде

$$\rho = \frac{i\hbar}{2\mu c^2} (\bar{\psi} \partial_t \psi - \partial_t \bar{\psi} \cdot \psi) = \frac{i\hbar}{2\mu c} (\bar{\psi} \partial_0 \psi - \partial_0 \bar{\psi} \cdot \psi), \quad (3.4)$$

$$j_i = \frac{\hbar}{2\mu i} (\bar{\psi} \partial_i \psi - \partial_i \bar{\psi} \cdot \psi) \quad (3.5)$$

с учетом уравнения (3.2а) действительно удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \rho = 0. \quad (3.6)$$

Константы, вошедшие в плотность и ток, введены с таким расчетом, чтобы ρ и \mathbf{j} в нерелятивистском пределе переходили в обычные выражения нерелятивистской теории Шредингера. Если в формуле (3.4) для ρ заменить $i\hbar \partial_t \psi$ на $E\psi$, то получим выражение

$$\rho = \frac{E}{\mu c^2} \bar{\psi} \psi, \quad (3.7)$$

которое при $E \approx \mu c^2$ действительно переходит в плотность вероятности нерелятивистской квантовой механики. Однако нужно отметить что, вообще говоря, ρ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, так как уравнение (3.2а) содержит вторую производную по времени, и поэтому в некоторый момент времени t_0 и ψ и $\partial_t \psi$ могут быть заданы независимо и произвольно. Кроме того, поскольку ψ и $\partial_t \psi$ являются функциями пространственных координат \mathbf{x} , то ρ может быть положительной в одних областях пространства и отрицательной в других. Поэтому трудно интерпретировать ρ как обычную плотность вероятности. Наличие отрицательных значений ρ дискредитировало уравнение Клейна — Гордона в течение примерно семи лет со времени его написания. И только в 1934 г. Паули и Вайскопф реабилитировали это уравнение, дав ему новую интерпретацию как уравнения для поля в том же смысле, как уравнениями Максвелла описывают электромагнитное поле, и показали, как это поле можно квантовать.

§ 2. Свойства решений уравнения Клейна — Гордона

Теперь мы покажем, что в релятивистском случае существуют такие ситуации, когда вероятностная интерпретация все еще применима. Судя по выражению (3.7), этого можно ожидать, когда частица свободна или когда она движется в очень слабом внешнем поле. Для исследования этого вопроса найдем решения уравнения Клейна — Гордона. У него имеются решения в виде плоских волн

$$\psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar} (p^0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}, \quad (3.8)$$

если

$$c p_0 = E = \pm \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + \mu^2 c^4}. \quad (3.9)$$

Выражение (3.8) является решением при любом знаке квадратного корня. Это следствие ковариантности уравнения по отношению ко всем преобразованиям Лоренца, оставляющим инвариантной квадратичную форму.

$p_\mu p^\mu = \mu^2 c^2$. Ясно, что к числу таких преобразований относится и преобразование $p_0 \rightarrow -p_0$. Существование решений с отрицательной энергией не представляет какой-либо трудности в случае свободной частицы. Если частица первоначально находится в состоянии с положительной энергией $E = c \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mu^2 c^2}$, то в отсутствие каких-либо взаимодействий ее энергия всегда будет оставаться положительной. Далее, из формулы (3.7) видно, что для частицы с положительной энергией плотность положительна $\rho > 0$, и в силу уравнения движения она будет оставаться положительно определенной всегда. Таким образом, приходим к выводу, что если в качестве набора реализуемых физических состояний свободной частицы принять многообразие решений с положительной энергией, то можно построить последовательную теорию свободной частицы. Для волновой функции $\varphi(x)$ с положительной энергией можно записать уравнение движения

$$i\hbar \partial_t \varphi(x) = \sqrt{\mu^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \nabla^2} \varphi(x). \quad (3.10)$$

Если определить трехмерный образ Фурье функции $\varphi(x)$ согласно

$$\varphi(x) = \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \chi(\mathbf{k}, x_0), \quad (3.11)$$

то квадратному корню в (3.10) можно придать следующий смысл:

$$\sqrt{\mu^2 c^2 - \hbar^2 \nabla^2} \varphi(x) = \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \sqrt{\mu^2 c^2 + \hbar^2 \mathbf{k}^2} \chi(\mathbf{k}, x_0). \quad (3.12)$$

Отметим, что функция $\chi(\mathbf{k}, x_0)$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \partial_0 \chi(\mathbf{k}, x_0) = \hbar \omega(\mathbf{k}) \chi(\mathbf{k}, x_0),$$

$$\omega(\mathbf{k}) = c \sqrt{\frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} + \mathbf{k}^2}. \quad (3.13)$$

Множество решений с положительной энергией образует неприводимое инвариантное подпространство, поскольку любое такое решение может быть представлено в виде

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 k e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \delta(k^2 - \mu^2) \theta(k_0) \Phi(k), \quad (3.14)$$

где для удобства введены некоторые численные множители и положено $\hbar = c = 1$. Функция $\delta(k^2 - \mu^2)$ обеспечивает, что $\varphi(x)$ является решением уравнения Клейна — Гордона, а функция Хевисайда $\theta(k_0)$ гарантирует, что в нем присутствуют только положительные частоты $k_0 > 0$. Формула (3.14) может быть несколько упрощена, если выполнить интегрирование с помощью соотношения

$$\delta(k^2 - \mu^2) = \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} \{ \delta(k_0 - \omega(\mathbf{k})) + \delta(k_0 + \omega(\mathbf{k})) \}, \quad (3.15)$$

где $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$. Функция $\theta(k_0)$ оставляет в (3.14) только вклад от первого члена, и мы получаем

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2} k_0} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \Phi(k), \quad (3.16)$$

где в правой части $k_0 = \omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$, так что $\Phi(k)$ в действительности является функцией только k^1, k^2, k^3 . Поэтому мы будем писать

$\Phi = \Phi(\mathbf{k})$. Совокупность решений с положительной энергией образует линейное векторное пространство, которое может быть превращено в гильбертово пространство, если определить подходящее скалярное произведение. Мы определим скалярное произведение двух положительно-частотных волновых функций Клейна — Гордона согласно

$$(\varphi, \psi)_t = i \int_V d^3x (\bar{\varphi}(x) \partial_0 \psi(x) - \partial_0 \bar{\varphi}(x) \cdot \psi(x)) \quad (3.17a)$$

$$= i \int_V d^3x \bar{\varphi}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \psi(x). \quad (3.17b)$$

Отметим, что хотя скалярное произведение (3.17a) и содержит производные по времени, но если функции ψ и φ подчиняются уравнению (3.10), то скалярное произведение можно выразить через ψ и φ , определенные только в один момент времени t , как это имеет место в обычной нерелятивистской квантовой механике:

$$(\varphi, \psi)_t = \int_V d^3x \{ \bar{\varphi}(x) \sqrt{\mu^2 - \nabla^2} \psi(x) + \sqrt{\mu^2 - \nabla^2} \bar{\varphi}(x) \cdot \psi(x) \}. \quad (3.17b)$$

Это скалярное произведение сохраняется во времени, при условии, что φ и ψ подчиняются уравнению Клейна — Гордона. Далее, оно обладает всеми свойствами, которые должно иметь скалярное произведение:

$$(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}, \quad (3.18a)$$

$$(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi), \quad (3.18b)$$

$$(\varphi, \varphi) \geq 0. \quad (3.18b)$$

Знак равенства в (3.18b) осуществляется только когда $\varphi \equiv 0$. Положительная определенность (φ, φ) при $\varphi \neq 0$ становится очевидной после перехода в импульсное пространство, где скалярное произведение принимает очень простой вид

$$(\psi, \varphi) = \int_V \frac{d^3k}{k_0} \bar{\Psi}(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}). \quad (3.19)$$

Здесь снова $k_0 = +\omega(\mathbf{k})$. Выражение (3.19) делает также очевидной релятивистскую инвариантность, так как Ψ и Φ , определенные согласно (3.14), — скалярные функции [с учетом того, что $\delta(k^2 - \mu^2)$, $\theta(k_0)$, $k \cdot x$ и d^3k/k_0 — элемент инвариантной меры на гиперболоиде $k^2 = \mu^2$].

В определении скалярного произведения (3.17) интеграл берется по всему пространству в момент времени $ct = x_0$. Это скалярное произведение можно обобщить, представив интегралом по пространственно-подобной поверхности. Такая запись делает явной релятивистскую инвариантность скалярного произведения прямо в конфигурационном пространстве. Пространственно-подобная поверхность σ определяется тем условием, чтобы на ней не было точек, которые можно было бы связать световым сигналом: интервал $(x - y)^2$ между любыми двумя точками x и y на σ всегда пространственно-подобен, т. е. $(x - y)^2 < 0$. Если обозначить через $n^\mu(x)$ единичный вектор нормали к σ в точке x , то тогда $n_\mu(x) n^\mu(x) = +1$ во всех точках x пространственно-подобной поверхности σ . Плоскость $t = \text{const}$ является частным случаем, когда во всех точках x $n^\mu(x) = (1, 0, 0, 0)$. Псевдовекторный элемент поверхности $d\sigma^\mu(x) = n^\mu(x) d\sigma$

для произвольной трехмерной поверхности S в пространстве-времени обладает компонентами $d\sigma^\mu = \{dx^1 dx^2 dx^3, dx^0 dx^2 dx^3, dx^0 dx^1 dx^3, dx^0 dx^1 dx^2\}$.

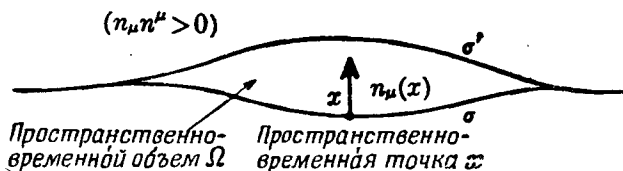
Теорему Гаусса для четырехмерного пространства можно записать в виде

$$\int_V d^4x \partial^\mu F_\mu(x) = \int_S d\sigma^\mu(x) F_\mu(x), \quad (3.20)$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V . Если $G = G(\sigma)$ есть функция пространственно-подобной поверхности σ , то инвариантная операция $\delta/\delta\sigma(x)$ определяется

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} G(\sigma) = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{G(\sigma') - G(\sigma)}{\Omega(x)}, \quad (3.21)$$

где σ' — пространственно-подобная поверхность, отличающаяся от σ на бесконечно малую деформацию в окрестности пространственно-временной



Ф и г. 1.

точки x , а $\Omega(x)$ — четырехмерный объем, заключенный между σ и σ' (фиг. 1), который в пределе сжимается в точку x . Для частного случая

$G(\sigma) = \int_\sigma F_\mu(x') d\sigma^\mu(x')$ имеем

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} G(\sigma) = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\int_{\sigma'} F_\mu d\sigma^\mu - \int_\sigma F_\mu d\sigma^\mu}{\Omega(x)}. \quad (3.22)$$

В числителе, являющемся интегралом по поверхности, ограничивающей $\Omega(x)$, можно применить теорему Гаусса (3.20), так что в пределе объема Ω , сжимающегося в точку x , получаем

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} G(\sigma) = \frac{\partial F_\mu(x)}{\partial x_\mu} = \partial^\mu F_\mu(x). \quad (3.23)$$

Теперь перепишем скалярное произведение (3.17) в инвариантном виде:

$$\begin{aligned} (\varphi, \chi)_\sigma &= i \int_\sigma d\sigma^\mu(x) \{ \bar{\varphi}(x) \partial_\mu \chi(x) - \partial_\mu \bar{\varphi}(x) \cdot \chi(x) \} = \\ &= i \int_\sigma d\sigma^\mu(x) \bar{\varphi}(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \chi(x). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ясно, что это выражение в случае плоской поверхности $t = \text{const}$ сводится к (3.17). То, что скалярное произведение является сохраняющейся во времени величиной, можно теперь проверить, показав, что скалярное произведение (3.24) в действительности не зависит от поверхности σ , если φ и χ удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} (\varphi, \chi)_\sigma &= i\partial^\mu \{\bar{\varphi}(x) \partial_\mu \chi(x) - \partial_\mu \bar{\varphi}(x) \cdot \chi(x)\} = \\ &= i \{\bar{\varphi}(x) (\square + \mu^2) \chi(x) - (\square + \mu^2) \bar{\varphi}(x) \cdot \chi(x)\} = \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Таким образом, скалярное произведение не зависит от частного вида пространственно-подобной поверхности σ , выбранной для его вычисления, при условии, что φ и χ — решения уравнения Клейна — Гордона. В частности, мы можем выбрать поверхность $t = \text{const}$, и тогда (3.24) сведется к (3.17). Из (3.25) также следует, что $(\varphi, \chi)_t = (\varphi, \chi)_{t_0}$. Волновая функция Клейна — Гордона при преобразованиях собственной группы Лоренца преобразуется как скаляр, и поэтому \mathbf{j} и ρ , определенные согласно (3.4) и (3.5), являются компонентами 4-вектора $j^\mu = \{\rho, \mathbf{j}\}$. Норма волновой функции есть квадратный корень из $\int d\sigma^\mu j_\mu$ и поэтому инвариантна.

Нужно отметить, что скалярное произведение (3.17) или (3.24) определено только для решений уравнения Клейна — Гордона, имеющих вид волновых пакетов, т. е. для φ таких, что $(\varphi, \varphi) < \infty$, и только такие векторы составляют гильбертово пространство. Решение в виде плоской волны есть предельный случай волнового пакета и не является элементом гильбертова пространства. Однако для таких решений, принадлежащих непрерывному спектру, можно принять следующее инвариантное условие нормировки:

$$(\varphi_{\mathbf{p}}, \varphi_{\mathbf{p}'}) = p_0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (3.26)$$

При такой нормировке решение в виде плоской волны с импульсом \mathbf{p} и с положительной энергией запишется

$$\varphi_{\mathbf{p}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.27a)$$

где

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mu^2}. \quad (3.27b)$$

Соотношение полноты для этих решений имеет вид

$$\sum_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}}(x) \bar{\varphi}_{\mathbf{p}}(x') = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p_0} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}, \quad (3.28)$$

и нужно отметить, что даже при $x_0 = x'_0$ правая часть (3.28) не сводится к δ -функции.

Гильбертово пространство \mathcal{H}^{KG} положительно-частотных решений уравнения Клейна — Гордона образует пространство, в котором действует неприводимое представление неоднородной группы Лоренца. Это представление реализуется при помощи следующего выбора явного вида генераторов:

$$P_\mu = p_\mu, \quad (3.29a)$$

$$M_{\mu\nu} = i \left(p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu} - p_\nu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right). \quad (3.29b)$$

Можно проверить, что правые части (3.29a) и (3.29b) действительно удовлетворяют перестановочным соотношениям (2.51) — (2.53). При соб-

ственном неоднородном преобразовании Лоренца $x' = \Lambda x + a$ состояние системы $|\varphi\rangle$ преобразуется по закону

$$U^{(\mu, 0)}(\Lambda, a)|\varphi\rangle = |\varphi'\rangle. \quad (3.30)$$

Операторы $U^{(\mu, 0)}$ образуют неприводимое унитарное представление неоднородной группы Лоренца, соответствующее массе μ и спину 0 и действующее в гильбертовом пространстве \mathcal{H}^{KG} . В более явном виде

$$\langle x | U^{(\mu, 0)}(\Lambda, a) | \varphi \rangle = \langle x | \varphi' \rangle = \langle \Lambda^{-1}(x - a) | \varphi \rangle, \quad (3.31a)$$

откуда для волновых функций получается закон преобразования

$$\varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}(x - a)), \quad (3.31b)$$

и в импульсном пространстве

$$\varphi'(k) = e^{ik \cdot a} \varphi(\Lambda^{-1}k). \quad (3.32)$$

Свойство унитарности $U^{(\mu, 0)}(\Lambda, a)$ демонстрируется выкладкой

$$(U\varphi, U\chi) = \int \frac{d^3k}{k_0} e^{ika} \overline{\varphi(\Lambda^{-1}k)} e^{ika} \chi(\Lambda^{-1}k) \quad (3.33a)$$

$$= \int \frac{d^3k'}{k'_0} \overline{\varphi(k')} \chi(k') \quad (3.33b)$$

$$= (\varphi, \chi), \quad (3.33b)$$

где при переходе от (3.33a) к (3.33b) мы явно воспользовались инвариантностью элемента меры $d\Omega(k) = \frac{d^3k}{k_0} = d\Omega(\Lambda^{-1}k)$.

§ 3. Оператор координаты

Тот факт, что многообразие реализуемых состояний содержит только решения с положительной энергией, для которых скалярное произведение определено согласно (3.17) или (3.19), имеет несколько важных следствий, касающихся операторов, представляющих физические наблюдаемые. Так, при скалярном произведении (3.17) оператор $x = i\nabla_p$ не эрмитов, так как

$$(\psi, x\varphi) = i \int \frac{d^3p}{p_0} \overline{\Psi(p)} \nabla_p \Phi(p) \quad (3.34a)$$

$$= \int \frac{d^3p}{p_0} \left[\left(-i\nabla_p + \frac{i\mathbf{p}}{p^2 + \mu^2} \right) \overline{\Psi(p)} \right] \Phi(p) \quad (3.34b)$$

$$\neq (x\psi, \varphi), \quad (3.34b)$$

где при переходе от (3.34a) к (3.34b) был отброшен интеграл по поверхности. Следовательно, оператор x не может быть истолкован как оператор координаты, так как он не самосопряжен и поэтому не соответствует какой-либо измеримой величине для данной системы. Отсюда следует, что волновая функция $\varphi(x)$ Клейна—Гордона не может рассматриваться как амплитуда вероятности найти частицу в точке x в момент времени x_0 . Чтобы ответить на вопрос: какова вероятность найти частицу Клейна—Гордона в некоторой точке y в момент времени y_0 , нужно, во-первых, найти эрмитов оператор, который заслуживает названия оператора координаты, и, во-вторых, найти его собственные функции $\Psi_{y, y_0}(x)$. Если частица находится в состоянии с волновой функцией $\varphi(x)$, то тогда, согласно общим принципам квантовой меха-

ники, амплитуда вероятности найти частицу в точке y в момент времени $y^0 = x^0$ будет равна (Ψ_y, φ) .

Простейший путь для получения оператора координаты — принять, что он равен эрмитовой части оператора $i\nabla_p$:

$$x_{op} = i\nabla_p - \frac{1}{2} \frac{ip}{p^2 + \mu^2}. \quad (3.35)$$

Оказывается, что этот оператор x_{op} и в самом деле приемлем в качестве оператора координаты. Он согласуется с определением координаты центра масс в релятивистской механике (см. работы Папапетроу [619], Прайса [652] и Мёллера [562, 563, 564]). Он также совпадает с оператором координаты, полученным Ньютоном и Вигнером [576], вывод которых основывался на формулировке некоторых естественных требований, которым должны удовлетворять локализованные состояния. Ньютон и Вигнер показали, что оператор координаты для релятивистского случая и его собственные функции («волновые функции локализованного состояния») определяются следующими постулатами:

1) Совокупность всех состояний, локализованных в момент времени $t = 0$ в точке $y = 0$, должна образовывать линейное многообразие, инвариантное относительно пространственных вращений вокруг начала координат и пространственных и временных отражений.

2) Пространственный сдвиг состояния Ψ_y , локализованного в некоторой точке y , должен делать его ортогональным к совокупности состояний, локализованных в точке y .

3) Для состояний, получаемых применением генераторов группы Лоренца к какому-либо состоянию, должно сохраняться свойство нормируемости. Этот постулат есть условие регулярности.

Пусть состояние $\Psi_0(\mathbf{k})$ в момент времени $x_0 = 0$ локализовано в начале координат. Оператор сдвига в импульсном пространстве есть просто множитель $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})$, так что полученное в результате сдвига состояние, локализованное уже в точке y в тот же момент времени $y^0 = 0$, запишется в виде $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) \cdot \Psi_0(\mathbf{k})$. Это преобразованное состояние, согласно постулату 2, должно быть ортогонально к состоянию $\Psi_0(\mathbf{k})$, т. е.

$$\begin{aligned} (\Psi_y, \Psi_0) &= \delta^{(3)}(\mathbf{y}) = \int \frac{d^3k}{k_0} |\Psi_0(\mathbf{k})|^2 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k_0} k_0 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Отсюда $|\Psi_0(\mathbf{k})|^2 = (2\pi)^{-3} k_0$. Если допускаются лишь функции, удовлетворяющие условию регулярности 3, то волновой функцией состояния, локализованного в момент времени $t = 0$ в начале координат, будет

$$\Psi_0(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} k_0^{1/2}. \quad (3.37)$$

Волновая функция состояния, локализованного в y при $y_0 = 0$, запишется в виде

$$\Psi_{y,0}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} k_0^{1/2}. \quad (3.38)$$

Представление в конфигурационном пространстве для волновой функции локализованного состояния $\Psi_{y,0}(\mathbf{x})$ получается подстановкой $\Psi_{y,0}(\mathbf{k})$

в формулу (3.16):

$$\begin{aligned}\psi_{y,0}(x, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{k_0} e^{+ik \cdot (x-y)} k_0^{1/2} = \\ &= \text{const} \cdot \left(\frac{\mu}{r}\right)^{5/4} H_{5/4}^{(1)}(i\mu r); \quad r = |x - y|,\end{aligned}\quad (3.39)$$

где $H_{5/4}^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода порядка $5/4$. Прежде всего отметим, что эта локализованная собственная функция не является δ -функцией, как это имело место в нерелятивистском случае, так как она отлична от нуля при $x \neq y$. Функция $\psi_{y,0}(x)$ размазана по пространственной области с размерами порядка $1/\mu$ (т. е. $\hbar/\mu c$); при больших значениях r , $\psi_{y,0}$ спадает экспоненциально. Это объясняется тем, что гильбертово пространство \mathcal{H}^{KG} содержит только решения с положительными энергиями, а δ -функция не может быть построена только из них. Во-вторых, следует подчеркнуть, что локализованные состояния не лоренц-ковариантны. Они обладают максимальными свойствами симметрии, соответствующими лишь плоскости $t = \text{const}$ пространства-времени.

Теперь можно проверить, что волновая функция локализованного состояния $[\exp(-ik \cdot y)] \cdot k_0^{1/2}$ является собственной функцией оператора (3.35), соответствующей собственному значению y :

$$\begin{aligned}x_{\text{op}} \{e^{-ik \cdot y} k_0^{1/2}\} &= i \left\{ \nabla_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}}{k_0^2} \right\} \{e^{-ik \cdot y} k_0^{1/2}\} = \\ &= y \{e^{-ik \cdot y} k_0^{1/2}\},\end{aligned}\quad (3.40)$$

чем оправдывается понимание оператора x_{op} как оператора координаты. Компоненты оператора координаты $x_{\text{op}} = \mathbf{q}$ коммутируют друг с другом

$$[q_i, q_j] = 0, \quad (3.41)$$

а их перестановочные соотношения с компонентами оператора импульса, как и следовало ожидать, имеют вид

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij}. \quad (3.42)$$

При пространственных вращениях оператор \mathbf{q} преобразуется как вектор, а при пространственных сдвигах на \mathbf{a} он переходит в $\mathbf{q} + \mathbf{a}$. Производная оператора координаты по времени равна

$$\frac{d}{dt} \mathbf{q} = i[H, \mathbf{q}] = i[p_0, \mathbf{q}] = \frac{\mathbf{p}}{P_0}, \quad (3.43)$$

где в правой части мы узнаем оператор скорости частицы. Наконец, если в момент времени $t = 0$ имеется частица в некотором состоянии $\Phi(\mathbf{k})$, то амплитуда вероятности того, что при измерении координаты в момент времени $t = 0$ частица окажется в точке y , равна

$$(\psi_y, \Phi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{k_0} e^{-ik \cdot y} k_0^{1/2} \Phi(\mathbf{k}) \quad (3.44)$$

§ 4. Заряженные частицы

До сих пор мы рассматривали формализм для описания нейтральных частиц со спином, равным нулю. Обладающие электрическим зарядом частицы с нулевым спином описываются в сущности тем же самым формализмом, за исключением того, что волновая функция заряженной частицы характеризуется дополнительной переменной — зарядом частицы e .

Для описания отрицательно заряженной частицы, находящейся в электромагнитном поле, уравнение (3.2а) нужно видоизменить при помощи обычных замен:

$$p \rightarrow p - \frac{e}{c} A, \quad (3.45a)$$

$$p_0 \rightarrow p_0 - \frac{e}{c} A_0. \quad (3.45b)$$

обеспечивающих калибровочную инвариантность, где A и A_0 — векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля. Уравнение Клейна — Гордона тогда принимает вид

$$(i\hbar \partial_t - eA_0(x))^2 \varphi(x) = (-i\hbar c \nabla - eA(x))^2 \varphi(x) + \mu^2 c^4 \varphi(x). \quad (3.46)$$

Плотность вероятности для этого уравнения дается выражением

$$\varrho = \frac{i\hbar}{2\mu c^2} (\bar{\varphi} \partial_t \varphi - \partial_t \bar{\varphi} \cdot \varphi) - \frac{e}{\mu c^2} A_0 \bar{\varphi} \varphi. \quad (3.47)$$

Интерпретация уравнения Клейна — Гордона с учетом внешнего поля уже не является такой простой, как в случае свободной частицы¹⁾. Рассмотрим, например, рассеяние заряженной частицы с нулевым спином на потенциале, отличном от нуля только в течение некоторого конечного интервала времени T . Волновая функция начальной частицы является суперпозицией решений свободного уравнения Клейна — Гордона, так как она описывает реальную частицу с положительной энергией. Однако не исключена возможность, что по прошествии времени T у волновой функции в результате действия потенциала появятся компоненты с отрицательной энергией. Это означает, что станет отличной от нуля вероятность найти частицу в состоянии с отрицательной энергией, а этому факту априори трудно дать какую-либо разумную физическую интерпретацию.

Можно было бы думать, что не зависящее от времени внешнее поле не приводит к таким трудностям, так как в этом случае в уравнении (3.46) переменные x и t разделяются и существуют решения вида

$$\varphi(x, t) = u(x) e^{-iEt/\hbar}, \quad (3.48)$$

причем

$$\varrho(x) = \frac{E - eA_0}{\mu c^2} \bar{u}u, \quad (3.49)$$

так что возможны стационарные состояния. В частности, легко найти решения в кулоновском поле $eA_0 = -(Ze^2/r)$ (см., например, книгу Шиффа [703]). Как и следовало ожидать, имеются решения с $E > 0$ и соответствующие решения с $E < 0$. Частица, первоначально находившаяся в состоянии с $E > 0$, всегда будет оставаться в таком состоянии, если она не испытывает какого-либо внешнего возмущения. Однако даже в этом случае имеются трудности с физической интерпретацией, так как выражение (3.49) для плотности вероятности становится отрицательным при достаточно малых r , где движение существенным образом релятивистское. В этой области одночастичная интерпретация теряет смысл. Релятивистская теория одной частицы полностью последовательна только в свободном случае. Однако хотя и невозможно дать вполне удовлетворительную физическую интерпретацию уравнения Клейна — Гордона (3.46) при наличии

¹⁾ Последующие замечания справедливы также и для нейтральной частицы, находящейся в некотором силовом поле.

внешнего поля, тем не менее решения уравнения (3.46) приобретут физическое значение при интерпретации уравнения в рамках теории поля. Поэтому вкратце рассмотрим некоторые свойства его решений в случае не зависящего от времени магнитного поля $A_0 = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$. Положительно-частотные решения для частицы с зарядом $-e$ можно рассматривать как решения уравнения

$$i\hbar \partial_t \varphi(-e, +) = \sqrt{\mu^2 c^4 + \hbar^2 (-ic\nabla - e\mathbf{A})^2} \varphi(-e, +), \quad (3.50)$$

и аналогично решения с отрицательной энергией удовлетворяют уравнению

$$i\hbar \partial_t \varphi(-e, -) = -\sqrt{\mu^2 c^4 + \hbar^2 (-ic\nabla - e\mathbf{A})^2} \varphi(-e, -). \quad (3.51)$$

В результате операции комплексного сопряжения уравнение (3.51) переходит в уравнение

$$i\hbar \partial_t \overline{\varphi}(-e, -) = \sqrt{\mu^2 c^4 + \hbar^2 (+ic\nabla - e\mathbf{A})^2} \overline{\varphi}(-e, -). \quad (3.52)$$

Это — уравнение для положительно-частотной волновой функции частицы с зарядом $+e$, т. е. $\overline{\varphi}(-e, -) = \text{const} \cdot \varphi(+e, +)$. Итак, волновая функция $\overline{\varphi}(-e, -)$ описывает частицу с положительной энергией и с зарядом $+e$ — «античастицу». Решение $\overline{\varphi}(-e, -)$ называют зарядово-сопряженным решением. Аналогичное положение имеет место и для нейтральных частиц, однако в этом случае имеется возможность отождествить нейтральную частицу с ее античастицей. Следовательно, можно различать два сорта нейтральных частиц: в одном частица и античастица совпадают, а во втором нет. Более подробно эти возможности будут обсуждены при рассмотрении квантованного варианта теории.

Мы закончим эту главу замечанием, что существует другой подход к интерпретации одночастичного уравнения Клейна — Гордона, при котором используется двухкомпонентная волновая функция в двумерном зарядовом пространстве, снабженном индефинитной метрикой (см. работы Сакаги [683], Гайтлера [375], Кейза [112]). Норма вектора состояния равна $+1$ для положительно заряженных частиц и -1 для отрицательно заряженных частиц. Дальнейшие сведения об этом направлении читатель может найти в обзорной статье Фешбаха и Вилларса [247].

Уравнение Дирака

§ 1. Исторический обзор

В 1928 г., пытаясь преодолеть трудности с отрицательными плотностями вероятности в уравнении Клейна — Гордона, Дирак открыл релятивистское уравнение, которое теперь называют в его честь. Долгое время после открытия уравнения Дирака считали, что для частиц с массой это единственно правильное релятивистское волновое уравнение. И только после того, как Паули и Вайскопф в 1934 г. дали новую интерпретацию уравнения Клейна — Гордона как уравнения для поля, это широко распространенное мнение было опровергнуто. Но даже и теперь уравнение Дирака имеет особое значение, так как оно описывает частицы со спином $\frac{1}{2}$, а спин $\frac{1}{2}$ имеют электроны и протоны. Многие другие «элементарные частицы» — нейтрон, μ -мезоны и, вероятно, все известные в настоящее время гипероны (Λ -, Σ - и Ξ -частицы), также обладают спином $\frac{1}{2}$. Открытые в 1947 г. π -мезоны были первыми частицами с конечной массой и иным значением спина, а именно со спином, равным нулю.

Соображения, которые привели Дирака к его уравнению [169], следующие. Для того чтобы предотвратить появление отрицательных вероятностей, нужно, чтобы в выражении для плотности ρ не было производных по времени. Поэтому волновое уравнение должно содержать производные по времени не выше первого порядка. Далее, релятивистская ковариантность требует полной симметрии по всем пространственным и временным координатам. Поэтому нужно, чтобы в волновое уравнение входили производные только первого порядка и по пространственным переменным. Таким образом, волновая функция Дирака должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению первого порядка по всем четырем координатам. Линейность уравнения нужна, чтобы удовлетворить принципу суперпозиции квантовой механики. Наконец, если мы хотим, чтобы волновая функция ψ описывала свободную частицу с массой m , то нужно потребовать, чтобы она подчинялась уравнению

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(x) = 0, \quad (4.1)$$

так как это уравнение означает, что между энергией и импульсом свободной частицы выполняется соотношение $p^2 = m^2 c^2$ и что в согласии с принципом соответствия имеется предельный переход к случаю классической теории относительности.

Аналогичная ситуация встречается в электродинамике, где уравнения Максвелла являются уравнениями первого порядка, связывающими компоненты напряженностей поля. В то же время каждая компонента электрической и магнитной напряженностей подчиняется волновому уравнению. Волновое уравнение в электродинамике является уравнением второго порядка, не содержащим массового члена, что свидетельствует о нулевой массе покоя фотона.

Предположим, что ψ имеет N компонент ψ_l ($l = 1, \dots, N$), причем мы заранее не фиксируем значение N ; в дальнейшем оно окажется равным четырем. Наиболее общим линейным уравнением первого порядка является уравнение, выражающее временную производную одной компоненты в виде линейной комбинации всех компонент и их пространственных производных. Если подставить соответствующие размерные множители, то наиболее общее уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_l}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^N \alpha_{ln}^k \frac{\partial \psi_n}{\partial x^k} + \frac{imc}{\hbar} \sum_{n=1}^N \beta_{ln} \psi_n = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, N). \quad (4.2)$$

На основании предположения об однородности пространства-времени α_{ln}^k и β_{ln} являются безразмерными константами, не зависящими от пространственно-временных координат x^0, x^1, x^2, x^3 . Естественный способ упрощения вида этих уравнений состоит в использовании матричной записи, которая позволяет представить систему уравнений (4.2) в виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \alpha^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + \frac{imc}{\hbar} \beta \psi = 0. \quad (4.3)$$

В этом уравнении ψ есть матрица-столбец с N строками, а $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ и β — матрицы, имеющие по N строк и столбцов. Уравнение (4.3) и известно как уравнение Дирака.

Теперь найдем выражения для плотности и тока, которые соответствуют уравнению (4.3). Так как мы хотим сохранить для ρ привычное определение, то полагаем

$$\rho = \sum_{n=1}^N \bar{\psi}_n \psi_n = \sum_{n=1}^N |\psi_n|^2, \quad (4.4a)$$

или в матричной записи

$$\rho = \psi^* \psi, \quad (4.4b)$$

где ψ^* — величина, эрмитово сопряженная ψ , а следовательно, являющаяся матрицей-строкой, содержащей одну строку и N столбцов. Выражение (4.4) для плотности явно положительно определено и, таким образом, отвечает основным требованиям Дирака. Далее потребуем, чтобы ρ удовлетворяла уравнению неразрывности

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (4.5)$$

где ток \mathbf{j} еще должен быть определен. Можно надеяться, что тогда будет применима обычная вероятностная интерпретация. Величина ψ^* удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} (\alpha^k)^* - \frac{imc}{\hbar} \psi^* \beta^* = 0, \quad (4.6)$$

которое получается эрмитовым сопряжением уравнения (4.3). Как и выше, «*» является знаком эрмитова сопряжения, при котором матрицы α и β транспонируются и комплексно сопрягаются, например

$$(\beta^*)_{ln} = \overline{\beta_{nl}}. \quad (4.7)$$

Перестановка ψ с β в (4.6) необходима потому, что ψ^* — строка, и, следовательно, α^* и β^* должны стоять после нее (а не перед ней).

Уравнение неразрывности типа (4.5) можно теперь вывести из уравнений (4.3) и (4.6), если первое умножить на ψ^* слева, а второе — на ψ справа и сложить получившиеся результаты. Это приводит к уравнению

$$0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} (\alpha^k)^* \psi + \psi^* \alpha^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) + \frac{imc}{\hbar} (\psi^* \beta \psi - \psi^* \beta^* \psi). \quad (4.8)$$

Последний член не содержит производных. Поэтому, если мы хотим отождествить уравнение (4.8) с уравнением (4.5), нужно добиться, чтобы этот член был равен нулю. Этого можно достигнуть, если потребовать, чтобы

$$\beta^* = \beta, \quad (4.9)$$

т. е. чтобы матрица β была эрмитовой. Для отождествления второй группы членов в уравнении (4.8) с дивергенцией мы потребуем далее, чтобы

$$\alpha^{k*} = \alpha^k. \quad (4.10)$$

Другими словами, и α и β должны быть эрмитовыми матрицами. Другой путь, ведущий к тому же результату, — переписать уравнение (4.3) в гамильтоновой форме:

$$i\hbar \partial_t \psi = H \psi = (-ic \alpha \cdot \nabla + \beta mc^2) \psi. \quad (4.11)$$

Ясно, что для эрмитовости H матрицы α и β должны быть эрмитовыми. Сравнивая (4.5) с (4.8), заключаем

$$j^k = c \psi^* \alpha^k \psi. \quad (4.12)$$

Для вывода дальнейших свойств матриц α и β нужно исследовать условия, которые накладывает требование, чтобы функция ψ удовлетворяла уравнению (4.1). С этой целью умножим уравнение (4.3) на оператор

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{k=1}^3 \alpha^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{imc}{\hbar} \beta,$$

который приведет к появлению вторых производных. Члены с ∂_t и со смешанными пространственно-временными производными сокращаются, и мы получаем

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{1}{2} (\alpha^k \alpha^l + \alpha^l \alpha^k) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \beta^2 \psi + \frac{imc}{\hbar} \sum_{k=1}^3 (\alpha^k \beta + \beta \alpha^k) \frac{\partial \psi}{\partial x^k}. \quad (4.13)$$

Мы симметризовали здесь член $\alpha^k \alpha^l$, что можно сделать вследствие коммутации $\partial/\partial x^k$ и $\partial/\partial x^l$. Чтобы уравнение (4.13) согласовывалось с урав-

нением Клейна — Гордона, необходимо его правую часть свести к

$$\nabla^2 \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi.$$

Это накладывает следующие условия:

$$\frac{1}{2} (\alpha^k \alpha^l + \alpha^l \alpha^k) = \delta^{kl}, \quad (4.14)$$

$$\alpha^k \beta + \beta \alpha^k = 0, \quad (4.15)$$

$$(\alpha^k)^2 = \beta^2 = 1 \quad (k = 1, 2, 3), \quad (4.16)$$

т. е. матрицы α должны антикоммутировать между собой и с матрицей β , а квадрат каждой из четырех матриц должен быть равен единице. В практических приложениях нет необходимости использовать явное представление для α и β ; достаточно знать, что они эрмитовы и обладают свойствами (4.14) — (4.16). Более того, при решении задач удобнее обходиться без явного вида матриц. Однако их явное представление легко можно получить. Прежде всего замечаем, что размерность N должна быть четной.

Доказательство: Перепишем соотношение (4.15) в виде

$$\beta \alpha^k = -\alpha^k \beta = (-I) \alpha^k \beta, \quad (4.17)$$

где I — единичная матрица. Взяв детерминант от обеих частей равенства (4.17), получим

$$(\det \beta) (\det \alpha^k) = (-1)^N \det \alpha^k \cdot \det \beta, \quad (4.18)$$

где учтено, что $\det(-I) = (-1)^N$. Отсюда $(-1)^N = 1$, и число N должно быть четным. Теперь мы приведем другое, несколько более сложное, доказательство, при котором попутно будет установлено еще одно важное свойство матриц α и β — равенство нулю их следа. Так как матрицы α и β эрмитовы, то они могут быть приведены к диагональному виду. Отметим, однако, что все матрицы α и β нельзя привести к диагональному виду одновременно, так как они антикоммутируют друг с другом. Выберем представление, в котором диагональна матрица β :

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & b_N \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Так как $\beta^2 = I$, то $b_i^2 = 1$ и $b_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Кроме того, так как $\beta^2 = (\alpha^k)^2 = 1$, то для каждой из этих матриц существует обратная, так что равенство (4.17) можно переписать в виде

$$(\alpha^k)^{-1} \beta \alpha^k = -\beta. \quad (4.20)$$

Вычисляя след от обеих частей этого равенства и используя свойство следа $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$, получаем

$$\text{Sp}((\alpha^k)^{-1} \beta \alpha^k) = \text{Sp}(\beta \alpha^k (\alpha^k)^{-1}) = \text{Sp} \beta = -\text{Sp} \beta. \quad (4.21)$$

Следовательно,

$$\text{Sp} \beta = 0. \quad (4.22)$$

Аналогично,

$$\text{Sp} \alpha^k = 0. \quad (4.23)$$

Пусть теперь в выражении (4.19) имеется m элементов b_i , равных $+1$, и n элементов b_i , равных -1 , причем $m+n=N$ ввиду того, что β имеет размерность N . С другой стороны, свойство $\text{Sp } \beta = 0$ означает, что $m-n=0$, т. е. что $m=n$. Следовательно, $N=2m$, так что размерность α и β должна быть четной. В следующем параграфе мы покажем, что размерность с необходимостью кратна четырем. Если I — единичная 2×2 матрица, а σ^k — матрицы Паули [см. гл. 1, формулу (1.100)], то тогда 4×4 матрицы

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

удовлетворяют всем нашим условиям: они эрмитовы и антикоммутируют друг с другом, что можно показать, используя свойство антикоммутиации матриц σ . Это частное представление удобно для обсуждения уравнения Дирака в нерелятивистском пределе (см. § 4).

Наконец, придадим уравнению Дирака ковариантный вид. В записи (4.3) для уравнения Дирака пространственные производные умножены на матрицы, а временная нет. Чтобы устранить это неравноправие, умножим уравнение (4.3) слева на матрицу β :

$$-i\hbar\beta\partial_0\psi - i\hbar\sum_{k=1}^3\beta\alpha^k\partial_k\psi + mc\psi = 0. \quad (4.25)$$

Уравнение примет более симметричный вид, если ввести матрицы¹⁾

$$\gamma^0 = \beta, \quad (4.26)$$

$$\gamma^k = \beta\alpha^k \quad (k=1, 2, 3). \quad (4.27)$$

Отметим, что при таком определении матрица γ^0 эрмитова и $(\gamma^0)^2 = +1$, а матрицы γ^k — антиэрмитовы, т. е. $(\gamma^k)^* = -\gamma^k$, и $(\gamma^k)^2 = -1$. Отсюда следует, что матрицы γ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I. \quad (4.28)$$

С помощью γ -матриц уравнение (4.25) записывается в виде

$$\left(-i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = \left(-i\gamma\cdot\partial + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0, \quad (4.29)$$

где снова использовано соглашение о суммировании. Уравнение (4.29) и является ковариантной формой уравнения Дирака, в которой пространственные и временные производные входят равноправно. Для дальнейшего упрощения записи уравнения Фейнман [251] ввел так называемое «перечеркнутое» обозначение²⁾. Он обозначил при помощи \not{p} величину

$$\not{p} = \gamma\cdot p = \gamma^\mu p_\mu = \gamma_\mu p^\mu = \gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}, \quad (4.30)$$

где матрицы γ_μ определяются согласно

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu. \quad (4.31)$$

¹⁾ В литературе нет единообразия в определении матриц γ . Вероятно, все же в большей части работ γ^k определяют как $i\beta\alpha^k$. В результате во многих формулах появляется или лишний знак минус, например в (4.28), или i в матрице γ^5 . Читая формулы, надо всегда проверять, с каким определением мы имеем дело. — *Прим. ред.*

²⁾ В литературе перечеркнутый символ часто печатают жирным курсивом.

С помощью этого обозначения и в естественной системе единиц уравнение Дирака записывается в виде

$$(-i \not{\partial} + m)\psi = 0, \quad (4.32)$$

где

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial^0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla. \quad (4.33)$$

Ток и плотность можно записать с помощью матриц γ следующим образом. Умножая равенство (4.27) на матрицу β слева, находим $\beta \gamma^k = \alpha^k$, а поэтому ток (4.12) принимает вид

$$j^k = c\psi^* \beta \gamma^k \psi. \quad (4.34)$$

С помощью «сопряженной» волновой функции $\tilde{\psi}$, определенной согласно

$$\tilde{\psi} = \psi^* \beta = \psi^* \gamma^0, \quad (4.35)$$

выражение для тока записывается в виде

$$j^k = c\tilde{\psi} \gamma^k \psi. \quad (4.36)$$

Аналогично через матрицы γ записывается и плотность

$$j^0 = c\rho = c\tilde{\psi} \gamma^0 \psi = c\tilde{\psi} \psi. \quad (4.37)$$

Уравнение для сопряженной функции $\tilde{\psi} = \psi^* \gamma^0$ получают из уравнения (4.6), вставляя в каждом члене справа от ψ^* множитель $\gamma^0 \gamma^0 = 1$ и используя затем соотношения (4.9), (4.10) и (4.27). В естественной системе единиц это уравнение запишется так:

$$i\partial_\mu \tilde{\psi} \gamma^\mu + m\tilde{\psi} = 0. \quad (4.38)$$

§ 2. Свойства матриц Дирака

Матрицы γ образуют совокупность гиперкомплексных чисел, удовлетворяющих перестановочным соотношениям $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$. При их изучении (см. Паули [624, 625], Гуд [331]) не обязательно предполагать, что они обладают каким-либо определенным свойством относительно эрмитового сопряжения.

Рассмотрим 16 элементов:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & I & & & \\
 & & & i\gamma^1 & i\gamma^2 & i\gamma^3 & \gamma^0 \\
 & & & i\gamma^2\gamma^3 & i\gamma^3\gamma^1 & i\gamma^1\gamma^2 & \gamma^0\gamma^1 & \gamma^0\gamma^2 & \gamma^0\gamma^3 \\
 & & & i\gamma^0\gamma^2\gamma^3 & i\gamma^0\gamma^1\gamma^3 & i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 & \gamma^1\gamma^2\gamma^3 & & \\
 & & & & & & i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 & &
 \end{array}$$

Все другие произведения матриц γ с помощью перестановочных соотношений могут быть сведены к одной из этих шестнадцати. Множитель i вставлен для того, чтобы квадрат каждого элемента был равен $+1$. Обозначим элементы в выписанном порядке при помощи Γ_l ($l=1, 2, \dots, 16$). Замечаем, что с точностью до множителей ± 1 или $\pm i$ произведение любых двух элементов всегда равно третьему. Для каждого элемента Γ_l , за исключением $\Gamma_1 = I$, всегда можно найти такой элемент Γ_j , что $\Gamma_j \Gamma_l \Gamma_j = -\Gamma_l$. Это утверждение мы докажем, непосредственно указав элемент Γ_j для каждого Γ_l . Так, для $l=2, \dots, 5$, т. е. для элементов

второй строки списка, $\Gamma_j = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$; в случае третьей строки, например, элементу $i\gamma^2\gamma^3$ соответствует $\Gamma_j = i\gamma^2$, так как $(i\gamma^2)(i\gamma^2\gamma^3)(i\gamma^2) = -(i\gamma^2\gamma^3)$; для всей четвертой строки $\Gamma_j = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, а для пятой в качестве Γ_j можно выбрать, например, γ^0 . Отсюда следует, что след любой матрицы Γ_i с $i \neq 1$ равен нулю, так как

$$-\text{Sp } \Gamma_i = \text{Sp } \Gamma_j \Gamma_i \Gamma_j = \text{Sp } \Gamma_i \Gamma_j^2 = \text{Sp } \Gamma_i.$$

Шестнадцать элементов $\Gamma_i (i = 1, 2, \dots, 16)$ линейно независимы, другими словами, равенство $\sum_{i=1}^{16} a_i \Gamma_i = 0$ справедливо только тогда, когда все $a_i = 0 (i = 1, 2, \dots, 16)$.

Доказательство: Вычисляя след от $\sum_{i=1}^{16} a_i \Gamma_i = 0$, получим $a_1 = 0$. Аналогично, последовательно умножая уравнение на каждую из Γ_i и вычисляя след, получаем, что $a_i = 0$, что и требовалось доказать. Отсюда мы заключаем, что гиперкомплексные числа нельзя представить матрицами размерности, меньшей 4×4 , так как при меньшей размерности не существует 16 линейно независимых матриц. Обратно, γ можно представить матрицами, размерностью 4×4 , потому что среди этих матриц имеется ровно 16 линейно независимых (так как число элементов 4×4 матрицы равно 16). Это представление (как и все ему эквивалентные) оказывается неприводимым¹⁾. Любое другое представление может быть приведено к виду

$$\Gamma^i = \begin{pmatrix} \gamma^i & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \gamma^i \end{pmatrix},$$

где γ^i — матрицы размерности 4×4 . В дальнейшем всегда будет предполагаться, что γ — неприводимые 4×4 матрицы.

Из линейной независимости Γ_i следует, что всякая 4×4 матрица X может быть записана в виде

$$X = \sum_{i=1}^{16} x_i \Gamma_i, \quad (4.39)$$

где

$$x_i = \frac{1}{4} \text{Sp}(X \Gamma_i). \quad (4.40)$$

Так как γ -матрицы неприводимы, то из леммы Шура следует, что любая 4×4 матрица, коммутирующая со всеми матрицами γ^μ , кратна

1) Совокупность гиперкомплексных чисел, удовлетворяющих соотношению $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$, называется алгеброй Клиффорда. Алгебра Клиффорда существует для любого пространства, снабженного метрикой $g^{\mu\nu}$. Если размерность пространства равна n , то размерность алгебры (т. е. число элементов Γ) равна 2^n . При n четном ($n = 2m$) только единица коммутирует со всеми элементами алгебры, так что если не различать эквивалентных представлений, существует одно и только одно неприводимое представление алгебры. Оно реализуется $r \times r$ матрицами с $r = 2^m$. Кроме того, представление всегда может быть выбрано вещественным. В дираковском случае $n = 4$, $m = 2$ и $r = 2^2 = 4$.

единичной матрице. Алгебраическое доказательство этого утверждения следующее. Пусть X будет матрицей, коммутирующей со всеми матрицами γ^μ , а следовательно, и со всеми Γ_i . Представим X в виде

$$X = x_j \Gamma_j + \sum_{l \neq j} x_l \Gamma_l \quad (\Gamma_j \neq I). \quad (4.41)$$

Пусть Γ_i такая матрица, что $\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_i = -\Gamma_j$. По предположению, $\Gamma_i X \Gamma_i = X$, а поэтому, умножая (4.41) слева и справа на Γ_i , получаем

$$X = -x_j \Gamma_j + \sum_{l \neq j} x_l \Gamma_l \Gamma_i \Gamma_l = -x_j \Gamma_j + \sum_{l \neq j} x_l (\pm 1) \Gamma_l, \quad (4.42)$$

где множители ± 1 возникают в зависимости от того, коммутируют или антикоммутируют Γ_i и Γ_l друг с другом. Умножая (4.41) и (4.42) на Γ_j и вычисляя след, получаем, что $x_j = -x_j = 0$. Так как в качестве Γ_j бралась любая из матриц Γ , за исключением единичной, то единственный отличный от нуля коэффициент разложения (4.41) есть x_1 , что и требовалось доказать.

Основная теорема о матрицах γ , которая многократно будет использоваться в дальнейшем, гласит: если даны две системы 4×4 матриц γ^μ и γ'^μ , удовлетворяющих перестановочным соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (4.43a)$$

$$\gamma'^\mu \gamma'^\nu + \gamma'^\nu \gamma'^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (4.43b)$$

то существует такая неособенная матрица S , что

$$\gamma'^\mu = S \gamma^\mu S^{-1}. \quad (4.44)$$

Явный вид S дается выражением

$$S = \sum_{i=1}^{16} \Gamma_i F \Gamma_i, \quad (4.45)$$

где F — произвольная 4×4 матрица, которая может быть выбрана таким образом, чтобы матрица S была неособенной. Совокупность 16 линейно независимых матриц Γ_i построена из матриц γ'^μ точно так же, как были построены Γ_i из γ^μ . Для доказательства теоремы заметим, что если $\Gamma_i \Gamma_j = \epsilon_{ij} \Gamma_k$, где $\epsilon_{ij} = \pm 1, \pm i$, то тогда $\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_i \Gamma_j = \epsilon_{ij}^2 \Gamma_k^2 = \epsilon_{ij}^2$, так что $\Gamma_j \Gamma_i = \epsilon_{ij}^2 \Gamma_i \Gamma_j = \epsilon_{ij}^2 \Gamma_k$. Отметим, что в штрихованной системе число ϵ_{ij} будет тем же самым, т. е. $\Gamma_i \Gamma_j = \epsilon_{ij} \Gamma_k$, так как его значение определяется только перестановочными соотношениями, а они одинаковы для обеих совокупностей матриц. Так как ϵ_{ij} равно либо ± 1 , либо $\pm i$, то $\epsilon_{ij}^2 = +1$. Воспользовавшись для S представлением (4.45), получаем

$$\Gamma_j S \Gamma_j = \sum_i \Gamma_j \Gamma_i F \Gamma_i \Gamma_j = \sum_i \epsilon_{ij}^2 \Gamma_k F \Gamma_k = \sum_k \Gamma_k F \Gamma_k, \quad (4.46)$$

с учетом того, что при фиксированном j матрица $\Gamma_i \Gamma_j$, находящаяся под знаком суммы по i , пробегает все значения 16 элементов алгебры. Это позволило заменить сумму по i суммой по k . Таким образом, получаем

$$\Gamma_j S \Gamma_j = S. \quad (4.47)$$

Так как матрицы γ неприводимы, то по лемме Шура матрица S является неособенной. Кроме того, с точностью до множителя матрица S опреде-

ляется однозначно. В самом деле, предположим, что таких матриц S имеется две, скажем S_1 и S_2 , так что $\gamma'^\mu = S_1 \gamma^\mu S_1^{-1}$ и $\gamma'^\mu = S_2 \gamma^\mu S_2^{-1}$. Тогда, исключая γ'^μ , получаем $\gamma^\mu = S_2^{-1} S_1 \gamma^\mu (S_2^{-1} S_1^{-1})$, т. е. что матрица $S_2^{-1} S_1$ коммутирует со всеми матрицами γ^μ и, следовательно, кратна единичной матрице. Отсюда $S_2 = c S_1$. Часто бывает удобным наложить условие нормировки $\det S = 1$, которое определяет матрицу S уже только с точностью до множителя $\sqrt{1}$, равного ± 1 или $\pm i$.

Интересен частный случай соотношения (4.45), когда $\gamma'^\mu = \gamma^\mu$. В этом случае $S \gamma^\mu = \gamma^\mu S$, и S есть матрица, кратная единичной: $S = cI$. Тогда матричный элемент соотношения (4.45) с индексами $q\sigma$ равен

$$c \delta_{q\sigma} = \sum_{i=1}^{16} \sum_{q', \sigma'=1}^4 (\Gamma_i)_{qq'} F_{q'\sigma'} (\Gamma_i)_{\sigma\sigma'} \quad (4.48)$$

Так как это тождество верно при любом выборе матрицы F , то из него следует

$$\sum_{i=1}^{16} (\Gamma_i)_{qq'} (\Gamma_i)_{\sigma\sigma'} = b_{q'\sigma'} \delta_{q\sigma}, \quad (4.49)$$

где $b_{q'\sigma'}$ — некоторая постоянная. Для определения этой постоянной свернем индексы q и σ :

$$\sum_{i=1}^{16} \sum_{q=1}^4 (\Gamma_i)_{\sigma'q} (\Gamma_i)_{qq'} = \sum_{i=1}^{16} (\Gamma_i^2)_{\sigma'q'} = 16 \delta_{\sigma'q'} = 4 b_{q'\sigma'}, \quad (4.50)$$

откуда $b_{q'\sigma'} = 4 \delta_{\sigma'q'}$, и, таким образом, приходим к тождеству

$$\sum_{i=1}^{16} (\Gamma_i)_{\sigma q} (\Gamma_i)_{q'\sigma'} = 4 \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{qq'}. \quad (4.51)$$

Мы заключим этот параграф об общих свойствах матриц γ замечанием, что многие их свойства можно было бы вывести, используя то обстоятельство, что Γ_i образуют группу из 32 элементов. Такая конечная группа всегда может быть представлена унитарными матрицами. Матрицы Γ такого унитарного представления, кроме того, эрмитовы, а именно из $\Gamma_i^2 = \Gamma_i^* \Gamma_i = I$ следует, что $\Gamma_i = \Gamma_i^*$.

§ 3. Релятивистская инвариантность

Теперь мы можем провести исследование лоренц-инвариантности уравнения Дирака и установить его связь с представлением неоднородной группы Лоренца, обсуждавшейся в гл. 2.

Физика, выражаемая любым релятивистским уравнением, в том числе и уравнением Дирака, не должна зависеть от выбора лоренцевой системы отсчета. А поэтому, чтобы правильно описывать физические явления, само уравнение должно обнаруживать такую же инвариантность относительно выбора системы координат. Сейчас мы покажем, что уравнение Дирака инвариантно по форме относительно неоднородного преобразования Лоренца $x' = \Lambda x + a$, $\Lambda^T g \Lambda = g$, при условии, что преобразованная волновая функция определяется согласно

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}(x' - a)), \quad (4.52)$$

а матрица $S(\Lambda)$ удовлетворяет определенным требованиям [см. ниже формулу (4.59)]. Эта матрица $S(\Lambda)$ имеет размерность 4×4 и действует на компоненты ψ , т. е. в явном виде равенство (4.52) записывается в виде

$$\psi'_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^4 S_{\alpha\beta}(\Lambda) \psi_\beta(\Lambda^{-1}(x-a)). \quad (4.53)$$

Утверждение об инвариантности уравнения Дирака означает, что в новой системе отсчета волновая функция ψ' подчиняется уравнению

$$(-i\gamma^\mu \partial'_\mu + m)\psi'(x') = 0, \quad (4.54)$$

где $\partial'_\mu = \partial/\partial x'^\mu$. Отметим, что матрицы γ при преобразованиях Лоренца остаются неизменными. Теперь уравнение Дирака

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \quad (4.55)$$

с помощью соотношений (4.52) и

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda_\mu^\nu \partial'_\nu \quad (4.56)$$

может быть переписано в виде

$$-i\Lambda_\mu^\nu \gamma^\mu \frac{\partial S^{-1}\psi'(x')}{\partial x'^\nu} + mS^{-1}\psi'(x') = 0. \quad (4.57)$$

После умножения уравнения (4.57) на S слева получаем

$$-iS(\Lambda_\mu^\nu \gamma^\mu)S^{-1}\partial'_\nu \psi'(x') + m\psi'(x') = 0, \quad (4.58)$$

и, следовательно, уравнение Дирака будет инвариантно по форме относительно преобразований Лоренца при условии, что

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\lambda S(\Lambda) = \Lambda_\mu^\lambda \gamma^\mu. \quad (4.59)$$

Это и есть упомянутое выше условие, которому должна удовлетворять матрица $S(\Lambda)$. С помощью равенства $\Lambda^T g \Lambda = g$ легко проверить, что матрицы $\gamma'^\lambda = \Lambda_\mu^\lambda \gamma^\mu$ подчиняются тем же самым перестановочным соотношениям, что и матрицы γ^μ , т. е. что $\gamma'^\mu \gamma'^\nu + \gamma'^\nu \gamma'^\mu = 2g^{\mu\nu}$. Отсюда следует, что неособенная матрица S , удовлетворяющая уравнению (4.59), существует. В действительности же, как было показано выше, уравнение (4.59) определяет S однозначно с точностью до численного множителя.

Дальнейшее условие, которому должна удовлетворять матрица $S(\Lambda)$, можно найти следующим образом. Эрмитово сопрягая равенство (4.59) и учитывая при этом действительность матричных элементов Λ_ν^μ , эрмитовость γ^0 и антиэрмитовость γ^k , получаем

$$\begin{aligned} (\Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu)^* &= (\Lambda^{\mu 0} \gamma^0 - \sum_{k=1}^3 \Lambda^{\mu k} \gamma^k)^* = \\ &= \Lambda^{\mu 0} \gamma^0 + \sum_{k=1}^3 \Lambda^{\mu k} \gamma^k = \\ &= (S^{-1} \gamma^\mu S)^*. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Свойства γ^0 и γ^k по отношению к эрмитовому сопряжению компактно можно записать в виде соотношения

$$(\gamma^\mu)^* = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (4.61)$$

или, что равносильно, в виде $\gamma^\mu = \gamma^0 \gamma^{\mu*} \gamma^0$. Поэтому если умножить (4.60) на γ^0 слева и справа и учесть, что $(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$, получим

$$\gamma^0 (\Lambda^{\mu 0} \gamma^0 + \sum_{k=1}^3 \Lambda^{\mu k} \gamma^k) \gamma^0 = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu = \gamma^0 (S^{-1} \gamma^\mu S)^* \gamma^0 \quad (4.62a)$$

$$= (\gamma^0 S^* \gamma^0) \gamma^\mu (\gamma^0 S^* \gamma^0)^{-1}. \quad (4.62b)$$

Вторая часть соотношения (4.62a), согласно (4.59), равна $S^{-1} \gamma^\mu S$, поэтому, приравнявая (4.62b) выражению $S^{-1} \gamma^\mu S$, находим

$$(S \gamma^0 S^* \gamma^0) \gamma^\mu (S \gamma^0 S^* \gamma^0)^{-1} = \gamma^\mu. \quad (4.63)$$

Следовательно, матрица $S \gamma^0 S^* \gamma^0$ коммутирует со всеми матрицами γ^μ , а поэтому кратна единичной матрице

$$S \gamma^0 S^* \gamma^0 = bI, \quad (4.64a)$$

или, что равносильно,

$$S \gamma^0 S^* = b \gamma^0, \quad (4.64b)$$

$$S^* \gamma^0 = b \gamma^0 S^{-1}. \quad (4.64в)$$

Здесь b — некоторая постоянная. В силу эрмитовости γ^0 и левой части (4.64b) она должна быть действительной: $b = \bar{b}$. Если принять для S нормировку $\det S = 1$, то получим $b^4 = 1$, и, следовательно, $b = \pm 1$. Выясним теперь, в каком случае b равна $+1$, а в каком -1 . С этой целью рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} S^* S &= S^* \gamma^0 \gamma^0 S = b \gamma^0 S^{-1} \gamma^0 S = \\ &= b \gamma^0 \Lambda_\nu^0 \gamma^\nu = b (\Lambda_0^0 I - \sum_{k=1}^3 \Lambda^{0k} \gamma^0 \gamma^k) = \\ &= b (\Lambda^{00} I - \sum_{k=1}^3 \Lambda^{0k} \alpha^k), \end{aligned} \quad (4.65)$$

в котором использованы соотношения (4.64в) и (4.59). Далее, $S^* S$ является произведением неособенной матрицы и матрицы, эрмитово сопряженной к ней. Так как $S \neq 0$, то отсюда следует, что матрица $S^* S$ положительно определена. Ее собственные значения вещественные (ввиду эрмитовости $S^* S$) и положительные, а поэтому $\text{Sp}(S^* S) > 0$. С учетом того, что $\text{Sp} \alpha^k = 0$, получаем

$$\text{Sp} S^* S = 4b \Lambda^{00} > 0. \quad (4.66)$$

Таким образом, если $\Lambda^{00} \leq -1$, то $b = -1$, а если $\Lambda^{00} \geq 1$, то $b = +1$.

Рассмотрим теперь трансформационные свойства сопряженного спина $\tilde{\psi} = \psi^* \gamma^0$. При преобразовании $\psi' = S \psi$ имеем $(\psi')^* = \psi^* S^*$, и, следовательно, функция $\tilde{\psi}'$, определяемая согласно

$$\tilde{\psi}' = (\psi')^* \gamma^0 \quad (4.67)$$

(γ -матрицы не преобразуются), преобразуется по закону

$$\tilde{\psi}' = \psi^* S^* \gamma^0 = b \psi^* \gamma^0 S^{-1} = b \tilde{\psi} S^{-1}. \quad (4.68)$$

Здесь принято во внимание соотношение (4.64). Таким образом, $\tilde{\psi}' = \tilde{\psi} S^{-1}$ при преобразованиях, которые не изменяют знака времени ($\Lambda_0^0 \geq 1$), и $\tilde{\psi}' = -\tilde{\psi} S^{-1}$ при преобразованиях, содержащих отражение времени ($\Lambda_0^0 \leq -1$).

Смысл соотношения (4.68) становится несколько более ясным, если рассмотреть трансформационные свойства тока

$$j^\mu = \tilde{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (4.69)$$

Так как физические следствия уравнения Дирака должны быть одни и те же во всех лоренцевых системах отсчета, то необходимо, чтобы ток j^μ преобразовывался, как 4-вектор, т. е. по закону

$$j'^\mu = \Lambda_\nu^\mu j^\nu = \Lambda_\nu^\mu \tilde{\psi} \gamma^\nu \psi = \psi^* \gamma^0 S^{-1} \gamma^\mu S \psi. \quad (4.70)$$

Этот же ток можно выразить через волновые функции в штрихованной системе отсчета при неизменных матрицах γ

$$j'^\mu = \psi'^* \gamma^0 \gamma^\mu \psi'. \quad (4.71)$$

Так как $\psi'^* = \psi^* S^*$, то (4.71) можно переписать в виде

$$j'^\mu = \psi^* S^* \gamma^0 \gamma^\mu S \psi. \quad (4.72)$$

Сравнивая (4.70) и (4.72), мы видим, что должно выполняться соотношение $S^* \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$. Это соотношение совпадает с соотношением (4.64) для преобразований Лоренца без отражения времени. Однако соотношения (4.64) и (4.66) свидетельствуют дальше о том, что ток j^μ является псевдовектором по отношению к отражению времени, так как он при таком отражении изменяет знак.

Найдем теперь явный вид S для преобразований Лоренца. Рассмотрим сперва случай собственных ортохронных однородных преобразований Лоренца, для которых $\det \Lambda = +1$, а $\Lambda_0^0 \geq 1$. Достаточно рассмотреть бесконечно малые преобразования, так как конечное преобразование может быть получено в виде соответствующей экспоненты. При бесконечно малом преобразовании Лоренца $\Lambda = I + \varepsilon \lambda$

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \lambda_\nu^\mu x^\nu, \quad (4.73a)$$

$$\lambda^{\mu\nu} = -\lambda^{\nu\mu}, \quad (4.73b)$$

матрицу $S(\Lambda)$ в первом порядке по ε можно записать в виде

$$S(I + \varepsilon \lambda) = I + \varepsilon T \quad (4.74)$$

и

$$S^{-1}(I + \varepsilon \lambda) = I - \varepsilon T. \quad (4.75)$$

Для бесконечно малых преобразований соотношение (4.59) переписывается в виде

$$\begin{aligned} S^{-1} \gamma^\mu S &= (I - \varepsilon T) \gamma^\mu (I + \varepsilon T) = \gamma^\mu + \varepsilon (\gamma^{\mu T} - T \gamma^\mu) = \\ &= \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu = \gamma^\mu + \varepsilon \lambda_\nu^\mu \gamma^\nu, \end{aligned} \quad (4.76)$$

и, следовательно, матрица T должна обладать свойством

$$\gamma^\mu T - T \gamma^\mu = \lambda_\nu^\mu \gamma^\nu. \quad (4.77)$$

Из соотношения (4.77) матрица T определяется однозначно с точностью до аддитивного члена, имеющего вид матрицы, кратной единичной. В самом деле, если бы существовали две такие матрицы T , то из (4.77) следовало бы, что их разность коммутирует со всеми матрицами γ^μ , а поэтому кратна единичной матрице. Нормировка $\det S = 1$ требует, чтобы $\det(I + \varepsilon T) = 1 + \varepsilon \operatorname{Sp} T = 1$, т. е. чтобы $\operatorname{Sp} T = 0$. Добавляя к T матрицу, кратную единичной, всегда можно добиться того, чтобы $\operatorname{Sp} T = 0$, так что это условие определяет T уже однозначно и делает $\det S = 1$. Легко проверить, что матрица

$$T = \frac{1}{8} \lambda^{\mu\nu} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \quad (4.78)$$

удовлетворяет условию (4.77) и требованию равенства нулю ее следа. Это и есть искомая матрица T .

При бесконечно малом повороте на угол ε вокруг оси x^1 имеем $\lambda^{23} = -\lambda^{32} = +1$, а все другие величины $\lambda^{\mu\nu} = 0$. Генератором для такого преобразования согласно (4.78) будет

$$T(R_1) = \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3. \quad (4.79)$$

Если принять для матриц γ представление (4.24), то

$$T(R_1) = -\frac{1}{2} \alpha_2 \alpha_3 = +\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} = +\frac{i}{2} \Sigma_1. \quad (4.80)$$

Следовательно, матрица $S(\theta)$, соответствующая повороту на угол θ вокруг оси x^1 , дается выражением

$$S(R_1) = e^{\theta T(R_1)} = e^{+i \frac{\theta}{2} \Sigma_1} = \cos \frac{\theta}{2} + i \Sigma_1 \sin \frac{\theta}{2}. \quad (4.81)$$

Так как $S(\theta + 2\pi) = -S(\theta)$, то каждому углу θ соответствуют две матрицы S , отличающиеся знаком. Однако отметим, что для вращений $S^* S = +1$.

При бесконечно малом преобразовании Лоренца вдоль оси x^1 $\lambda^{10} = -\lambda^{01} = -1$ и

$$T(L_1) = \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^1 = \frac{1}{2} \alpha^1. \quad (4.82)$$

Конечному преобразованию Лоренца вдоль оси x^1 соответствует матрица

$$S(L_1) = e^{\frac{\omega}{2} \alpha^1} = \operatorname{ch} \frac{\omega}{2} + \alpha_1 \operatorname{sh} \frac{\omega}{2}, \quad (4.83)$$

где $\operatorname{th} \omega = \frac{v}{c}$. В этом случае половинные углы не приводят к неоднозначности в знаке S : Матрица $S(i_s)$ пространственного отражения $x'^k = -x^k, x'^0 = x^0$ должна удовлетворять условиям

$$S^{-1}(i_s) \gamma^0 S(i_s) = \gamma^0, \quad (4.84a)$$

$$S^{-1}(i_s) \gamma^k S(i_s) = -\gamma^k. \quad (4.84b)$$

Поэтому в качестве $S(i_s)$ можно выбрать либо $\pm \gamma^0$, либо $\pm i\gamma^0$. Матрица $S(i_t)$ временного отражения ($x'^k = x^k$, $x'^0 = -x^0$) должна удовлетворять условиям

$$S^{-1}(i_t) \gamma^0 S(i_t) = -\gamma^0, \quad (4.85a)$$

$$S^{-1}(i_t) \gamma^k S(i_t) = \gamma^k, \quad (4.85b)$$

так что она может быть равна $\pm \gamma_5 \gamma^0$ или $\pm i\gamma_5 \gamma^0$, где $\gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$. Ответ на вопрос, какие из этих матриц $S(i_t)$ и $S(i_s)$ следует выбрать на самом деле, мы откладываем до обсуждения понятия зарядового сопряжения.

Вкратце рассмотрим отношение волновой функции Дирака $\psi(x)$ к величинам, преобразующимся по неприводимым представлениям собственной однородной группы Лоренца. В гл. 2 двухкомпонентную величину, преобразующуюся по неприводимому представлению $\{1/2, 0\}$ однородной группы Лоренца, мы называли спинором, а величину, преобразующуюся по представлению $\{0, 1/2\}$, — сопряженным спинором. В частности, рассматривалась реализация, когда генератором M_i вращений вокруг i -й оси в обоих представлениях служила матрица $1/2 \sigma_i$, а генератором N_i преобразований Лоренца вдоль i -й оси были $1/2 i\sigma_i$ для представления $\{1/2, 0\}$ и $-1/2 i\sigma_i$ для представления $\{0, 1/2\}$. Если мы рассматриваем только собственные однородные преобразования Лоренца и не рассматриваем пространственные отражения, то для описания частиц со спином $1/2$ будет достаточно двухкомпонентных спиноров. Однако при пространственном отражении генераторы преобразуются так, что $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$, $\mathbf{N} \rightarrow -\mathbf{N}$. Поэтому двухкомпонентный спинор и спинор, полученный из него при помощи пространственного отражения, по-разному преобразуются при преобразованиях Лоренца. Для того чтобы теория была инвариантна относительно пространственных отражений, необходимо использовать четырехкомпонентные спиноры. Так как отражения переводят спинор, преобразующийся по представлению $\{1/2, 0\}$, в спинор, преобразующийся по представлению $\{0, 1/2\}$, то для инвариантности нужны четырехкомпонентные спиноры, являющиеся прямыми суммами спиноров $\{1/2, 0\}$ и $\{0, 1/2\}$. Наглядную иллюстрацию этих замечаний можно дать, выбирая для матриц γ представление

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.86a)$$

$$\gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (4.86b)$$

При такой реализации матриц γ матрица $S(\Lambda)$, соответствующая ограниченными преобразованиями Лоренца, может быть записана в виде

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} S(\Lambda) & 0 \\ 0 & S'(\Lambda) \end{pmatrix}, \quad (4.87)$$

где S и S' — 2×2 матрицы. Четырехкомпонентный дираковский спинор ψ расщепляется на два двухкомпонентных спинора (ψ_1, ψ_2) и (ψ_3, ψ_4) , которые при преобразованиях Лоренца преобразуются независимо. При отражениях в начале координат спиноры (ψ_1, ψ_2) и (ψ_3, ψ_4) просто переставляются. Систематическая трактовка уравнения Дирака в терминах таких двухкомпонентных спиноров была дана Ван дер Варденом [808]. Деталь-

ное изложение этого подхода читатель найдет в статьях Баде и Йеле [23] и Капа [105].

Изучив трансформационные свойства спиноров Дирака при преобразованиях Лоренца, можно теперь определить трансформационные свойства билинейных комбинаций, построенных из этих спиноров. Так, величина $\tilde{\psi}(x)\psi(x)$ является скаляром, поскольку

$$\tilde{\psi}\psi = \tilde{\psi}S^{-1}S\psi = \tilde{\psi}'\psi'. \quad (4.88)$$

Однако при отражениях времени эта комбинация $\tilde{\psi}\psi$ преобразуется как псевдоскаляр. Выше мы уже установили, что величина $\tilde{\psi}\gamma_\mu\psi$ есть вектор. Если определить матрицу

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = -\sigma^{\nu\mu}, \quad (4.89)$$

то тогда билинейная комбинация $\tilde{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ преобразуется как антисимметричный тензор 2-го ранга, а именно при преобразованиях с $\Lambda_0^0 \geq 1$

$$\tilde{\psi}'\sigma^{\mu\nu}\psi' = \tilde{\psi}S^{-1}\sigma^{\mu\nu}S\psi = \Lambda_0^\mu \Lambda_0^\nu \tilde{\psi}\sigma^{\alpha\beta}\psi. \quad (4.90)$$

Величина $\tilde{\psi}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$ с $\lambda < \mu < \nu$ преобразуется как тензор 3-го ранга, антисимметричный по всем трем индексам, поскольку

$$\tilde{\psi}'\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\psi' = \sum_{\alpha < \sigma < \tau} \begin{vmatrix} \Lambda_0^\lambda & \Lambda_0^\mu & \Lambda_0^\nu \\ \Lambda_0^\alpha & \Lambda_0^\sigma & \Lambda_0^\tau \\ \Lambda_0^\nu & \Lambda_0^\sigma & \Lambda_0^\tau \end{vmatrix} \tilde{\psi}\gamma^\alpha\gamma^\sigma\gamma^\tau\psi. \quad (4.91)$$

Этот тензор имеет четыре отличные от нуля компоненты, которые обычно нумеруют индексом недостающей матрицы γ . Эти компоненты можно также записать в виде $\tilde{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$, где

$$-\gamma^5 = \gamma_5 = \frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\tau = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\tau = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (4.92)$$

— антиэрмитова матрица, антикоммутирующая со всеми матрицами γ^μ и равная в квадрате -1 :

$$\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0, \quad (4.93a)$$

$$(\gamma^5)^2 = -1. \quad (4.93b)$$

С помощью этой матрицы можно записать

$$\gamma^5\gamma^\lambda = -\frac{1}{3!} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma. \quad (4.94)$$

Четыре билинейные комбинации $\tilde{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) во всех отношениях ведут себя, как компоненты 4-вектора, за исключением того, что скалярное произведение этого вектора с истинным 4-вектором (например, с координатным вектором) есть не скаляр, а псевдоскаляр. Поэтому $\tilde{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$ называют псевдовектором.

Наконец, величина $\tilde{\psi}\gamma_5\psi$ преобразуется по закону

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}'\gamma_5\psi' &= b\tilde{\psi}S^{-1}\gamma_5S\psi = \\ &= \frac{1}{4!} b\Lambda_\alpha^\mu\Lambda_\beta^\nu\Lambda_\varepsilon^\rho\Lambda_\delta^\sigma\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{\psi}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\varepsilon\gamma^\delta\psi = \\ &= b(\det\Lambda)\tilde{\psi}\gamma_5\psi,\end{aligned}\quad (4.95)$$

где использовано соотношение

$$(\det\Lambda)\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda_\alpha^\mu\Lambda_\beta^\nu\Lambda_\gamma^\rho\Lambda_\delta^\sigma.\quad (4.96)$$

Таким образом, величина $\tilde{\psi}\gamma_5\psi$ преобразуется как скаляр при собственных преобразованиях Лоренца и как псевдоскаляр при пространственных отражениях.

Зная трансформационные свойства билинейных комбинаций $\tilde{\psi}\Gamma_i\psi$, можно в дальнейшем построить инвариантные величины, описывающие взаимодействие. Например, инварианты получаются при перемножении комбинации $\tilde{\psi}\psi(x)$ со скалярной функцией $\chi(x)$, $\tilde{\psi}\gamma_5\psi(x)$ — с псевдоскалярной функцией $\varphi(x)$, а комбинации $\tilde{\psi}\gamma_\mu\psi(x)$ — с векторной функцией $A^\mu(x)$, которую можно использовать, например, для описания электромагнитного поля. Взаимодействие с электромагнитным полем может также иметь вид $\tilde{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}$, где $F_{\mu\nu}(x)$ — тензор напряженностей электромагнитного поля. Это взаимодействие известно как взаимодействие Паули для магнитного момента.

Теперь мы определим инвариантное скалярное произведение двух дираковских спиноров $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ в момент времени $ct = x_0$:

$$\begin{aligned}(\psi, \varphi)_t &= \int_t d^3x \tilde{\psi}(x) \gamma^0 \varphi(x) = \\ &= \int_t d^3x \sum_{\alpha=1}^4 \bar{\psi}_\alpha(x) \varphi_\alpha(x).\end{aligned}\quad (4.97)$$

Это скалярное произведение можно обобщить на случай произвольных пространственно-подобных поверхностей:

$$(\psi, \varphi)_\sigma = \int_\sigma d\sigma^\mu(x) \tilde{\psi}(x) \gamma_\mu \varphi(x).\quad (4.98)$$

Если ψ и φ подчиняются уравнению Дирака, то такое скалярное произведение не зависит от σ , а поэтому в качестве σ можно взять и плоскость $t = \text{const}$. Доказательство независимости $(\psi, \varphi)_\sigma$ от σ проводится следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} (\psi, \varphi)_\sigma &= \partial^\mu (\tilde{\psi}(x) \gamma_\mu \varphi(x)) = \\ &= (\partial^\mu \tilde{\psi} \gamma_\mu) \varphi + \tilde{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu \varphi) = \\ &= +im(\tilde{\psi}\varphi - \tilde{\psi}\varphi) = 0.\end{aligned}\quad (4.99)$$

Отсюда следует, что скалярное произведение сохраняется во времени. При таком скалярном произведении отображение $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$, соответствующее какому-либо преобразованию Лоренца, не изменяющему знак

времени, осуществляется унитарным оператором

$$U(a, \Lambda) |\psi\rangle = |\psi'\rangle, \quad (4.100)$$

причем

$$\langle x | U(a, \Lambda) | \psi \rangle = \langle x | \psi' \rangle = \mathcal{U}_{(a, \Lambda)} \psi(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}(x-a)). \quad (4.101)$$

Унитарность доказывается тем, что

$$\begin{aligned} (U(a, \Lambda) \psi, U(a, \Lambda) \varphi) &= \\ &= \int_{\sigma} d\sigma^{\mu}(x) \tilde{\psi}(\Lambda^{-1}(x-a)) S^{-1}(\Lambda) \gamma_{\mu} S(\Lambda) \varphi(\Lambda^{-1}(x-a)) = \\ &= \int_{\sigma} d\sigma^{\mu}(x) \tilde{\psi}(\Lambda^{-1}(x-a)) \Lambda_{\mu}^{\nu} \gamma_{\nu} \varphi(\Lambda^{-1}(x-a)) = \\ &= \int_{\sigma} d\sigma^{\nu}(\Lambda^{-1}(x-a)) \tilde{\psi}(\Lambda^{-1}(x-a)) \gamma_{\nu} \varphi(\Lambda^{-1}(x-a)) = \\ &= (\psi, \varphi). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Бесконечно малое преобразование записывается в виде

$$\mathcal{U}_{(a, \Lambda)} = 1 + \frac{i}{\hbar} \varepsilon \mathcal{D}, \quad (4.103)$$

где генератор \mathcal{D} определяется из соотношения (4.101) с помощью (4.73) и (4.74):

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{i}{\hbar} \varepsilon \mathcal{D}\right) \psi(x) &= (I + \varepsilon T) \psi(x - \varepsilon \lambda x) = \\ &= (I + \varepsilon T) \left(\psi(x) - \varepsilon (\lambda x)^{\mu} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^{\mu}} + \dots \right) = \\ &= \psi(x) + \varepsilon (T - \lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \partial_{\mu}) \psi(x) + \dots, \end{aligned} \quad (4.104)$$

так что

$$\mathcal{D} = -i\hbar (T - \lambda_{\sigma}^{\rho} x^{\sigma} \partial_{\rho}). \quad (4.105)$$

При бесконечно малом повороте вокруг оси x^3 оператор $T = 1/2 i \Sigma_3$, и от нуля отличны только $\lambda^{21} = -\lambda^{12} = +1$. Следовательно,

$$\mathcal{D}_3 = \frac{\hbar}{2} \Sigma_3 + [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]_3. \quad (4.106)$$

Этот оператор можно принять в качестве третьей компоненты полного момента количества движения частицы. Таким образом, дираковская частица, кроме своего орбитального момента, имеет еще и собственный момент количества движения $\frac{\hbar}{2} \Sigma$, по величине равный $\frac{\hbar}{2}$. Следует отметить, что оператор спина $1/2 \Sigma$ не является интегралом движения, так как $[H, \Sigma] \neq 0$. Точно так же не является интегралом движения и орбитальный момент количества движения. Однако полный момент $\mathbf{J} = \frac{\hbar}{2} \Sigma + [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$ есть интеграл движения. На самом деле это определение момента количества движения основано на предположении, что оператор \mathbf{r} является оператором координаты дираковской частицы. Ниже мы уви-

дим, что это не так и что при помощи другого оператора координаты можно определить другой оператор момента количества движения, который будет обладать тем свойством, что его орбитальная и спиновая части будут порознь интегралами движения.

§ 4. Решения уравнения Дирака

Уравнение Дирака имеет решения в виде плоских волн:

$$\psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot x} u(p), \quad (4.107)$$

где $u(p)$ — 4-компонентный спинор, удовлетворяющий уравнению

$$(\not{p} - mc)u(p) = 0. \quad (4.108)$$

Скалярное произведение двух спиноров u и u' записывается в виде

$$u^* u' = \sum_{\alpha=1}^4 \bar{u}_\alpha u'_\alpha = \tilde{u} \gamma^0 u'. \quad (4.109)$$

При таком определении скалярного произведения гамильтониан $H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2$ эрмитов:

$$u'^* H u = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \bar{u}'_\alpha H_{\alpha\beta} u_\beta = (H u')^* u \quad (4.110)$$

(здесь учтено, что $\alpha = \alpha^*$ и $\beta = \beta^*$), и поэтому его собственные значения действительные. Уравнение (4.108) является системой четырех линейных однородных уравнений для компонент u_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$). Нетривиальные решения существуют только если $\det(\not{p} - mc) = (p^2 - m^2 c^2)^2 = 0$. Итак, уравнение имеет решения только, когда $p^2 = m^2 c^2$, т. е. $p_0 = \pm \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$. Пусть $u_+(p)$ будет решением, соответствующим $cp_0 = E(p) = +c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$ и, следовательно, удовлетворяющим уравнению

$$(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2) u_+(p) = E(p) u_+(p). \quad (4.111)$$

Если представить решение u_+ в виде $u_+ = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, где u_1 и u_2 имеют по две компоненты, и если принять для матриц $\boldsymbol{\alpha}$ и β представление (4.24), то получим уравнение для u_1 и u_2 :

$$c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_2 + mc^2 u_1 = E(p) u_1, \quad (4.112a)$$

$$c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_1 - mc^2 u_2 = E(p) u_2. \quad (4.112b)$$

С учетом того, что $E(p) + mc^2 \neq 0$, находим из (4.112b)

$$u_2 = c \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E(p) + mc^2} u_1, \quad (4.113)$$

а подставляя это выражение обратно в (4.112a), получаем уравнение

$$\left(\frac{c^2 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{E(p) + mc^2} + mc^2 \right) u_1 = E(p) u_1. \quad (4.114)$$

Однако, поскольку $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = p^2$ и

$$\frac{c^2 p^2}{E(p) + mc^2} = \frac{E^2(p) - m^2 c^4}{E(p) + mc^2} = E(p) - mc^2, \quad (4.115)$$

то мы приходим к заключению, что уравнение (4.112а) удовлетворяется тождественно. Таким образом, при каждом значении импульса \mathbf{p} имеют два линейно независимых решения с положительной энергией, которые соответствуют, например, выбору u_1 в виде $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Это же можно выяснить и несколько иным путем. Оператор Гамильтона $H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2$ коммутирует с эрмитовым оператором

$$s(\mathbf{p}) = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad (4.116)$$

где

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (4.117)$$

Оператор $s(\mathbf{p})$ называют оператором спиральности, или, просто, спиральностью частицы. С физической стороны он соответствует проекции спина частицы на направление движения. Ввиду коммутации H и $s(\mathbf{p})$ в качестве решений можно выбрать общие собственные функции этих операторов. Так как $s^2(\mathbf{p}) = 1$, то собственные значения оператора $s(\mathbf{p})$ равны ± 1 . Решения с заданным импульсом и фиксированным знаком энергии можно классифицировать по собственным значениям оператора $s(\mathbf{p})$. Аналогично можно классифицировать и решения с отрицательной энергией, когда $p_0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}$. В этом случае снова имеются два линейно независимых решения, соответствующих собственным значениям $+1$ и -1 оператора $s(\mathbf{p})$. Итак, при фиксированном импульсе \mathbf{p} уравнение Дирака имеет четыре линейно независимых решения, характеризующихся значениями $p_0 = \pm cE(\mathbf{p})$, $s(\mathbf{p}) = \pm 1$.

Явный вид двух линейно независимых решений уравнения Дирака с импульсом \mathbf{p} и положительной энергией следующий:

$$u_+^{(1)}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E(\mathbf{p}) + mc^2}{2E(\mathbf{p})}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E(\mathbf{p}) + mc^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad (4.118a)$$

$$u_+^{(2)}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E(\mathbf{p}) + mc^2}{2E(\mathbf{p})}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E(\mathbf{p}) + mc^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}. \quad (4.118b)$$

Нормировочные множители здесь определены из условия $u^* u = 1$. Отметим, что эти два решения ортогональны друг другу:

$$u_+^{(r)*}(\mathbf{p}) u_+^{(s)}(\mathbf{p}) = \delta_{rs}, \quad (r, s = 1, 2). \quad (4.119)$$

Выписанные решения не являются собственными функциями оператора $s(\mathbf{p})$. Решения с положительной энергией и с определенной спиральностью можно получить, если принять во внимание, что уравнение $s(\mathbf{p}) u_{\pm}^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \pm u_{\pm}^{(\pm)}(\mathbf{p})$ записывается в виде

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot n u_1^{(\pm)} = \pm u_1^{(\pm)}, \quad (4.120a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot n u_2^{(\pm)} = \pm u_2^{(\pm)}, \quad (4.120b)$$

где $u_1^{(\pm)}$ и $u_2^{(\pm)}$ — верхние и нижние пары компонент спинора $u_{\pm}^{(\pm)}$, а \mathbf{n} — единичный вектор, направленный по \mathbf{p} , $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. Отсюда для нормиро-

ванных величин $u_1^{(\pm)}$ получаем выражения

$$u_1^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}} \begin{pmatrix} n_3+1 \\ n_1+in_2 \end{pmatrix} \quad (4.121a)$$

и

$$u_1^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}} \begin{pmatrix} -n_1+in_2 \\ n_3+1 \end{pmatrix}. \quad (4.121b)$$

Таким образом, нормированная собственная функция со спиральностью $+1$ и с положительной энергией записывается в виде

$$u_+^{(+)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}} \sqrt{\frac{E(\mathbf{p})+mc^2}{2E(\mathbf{p})}} \begin{bmatrix} n_3+1 \\ n_1+in_2 \\ \frac{c|\mathbf{p}|}{E(\mathbf{p})+mc^2} \begin{pmatrix} n_3+1 \\ n_1+in_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}. \quad (4.122)$$

Попутно заметим, что в нерелятивистском пределе компоненты u_2 решения с положительной энергией по порядку величины равны $\frac{v}{c}u_1$ и, следовательно, малы.

Доказательство: В нерелятивистском пределе норма u_2 по порядку величины равна норме u_1 , помноженной на $(v/c)^2$, поскольку

$$u_2^* u_2 = \frac{c^2 p^2}{(E(\mathbf{p})+mc^2)^2} u_1^* u_1 \approx \left(\frac{mv}{2mc}\right)^2 u_1^* u_1 \approx \frac{1}{4} \left(\frac{v}{c}\right)^2 u_1^* u_1. \quad (4.123)$$

В предельном случае покоящейся частицы ($\mathbf{p}=0$) четырьмя линейно независимыми решениями (в этом случае их можно выбрать так, чтобы они были собственными функциями Σ_3) являются

$$\begin{array}{cc} p_0 = mc^2 & p_0 = -mc^2 \\ \Sigma_3 = +1 & \Sigma_3 = -1 & \Sigma_3 = +1 & \Sigma_3 = -1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (4.124)$$

§ 5. Соотношения нормировки и ортогональности. Следы

Для спиноров Дирака удобнее принять условие нормировки $u_+^*(\mathbf{p})u_+(\mathbf{p}) = \frac{E(\mathbf{p})}{mc^2}$, а не $u_+^*(\mathbf{p})u_+(\mathbf{p}) = 1$, так как подобная нормировка инвариантна — обе части условия нормировки преобразуются как четвертая компонента вектора. Это условие очень просто записывается с помощью сопряженного спинора. Умножив уравнение

$$p_0 u = (\alpha \mathbf{p} + \beta mc^2) u \quad (4.125a)$$

на $u^* \beta$ слева и уравнение

$$p_0 u^* = u^* (\alpha \mathbf{p} + \beta mc^2) \quad (4.125b)$$

на βu справа, складывая и учитывая антикоммутацию β и α , находим

$$2p_0 u^* \beta u = 2mc^2 u^* u. \quad (4.126)$$

Отсюда, вспоминая определение $\tilde{u} = u^* \beta$ и используя условие нормировки $u^* u = \frac{|P_0|}{mc^2}$, получаем

$$\tilde{u} u = \frac{P_0}{|P_0|} = \varepsilon(P_0). \quad (4.127)$$

Таким образом, $\tilde{u} u$ равно $+1$ или -1 в зависимости от знака энергии. Обычная краткая запись $\tilde{u} u = \varepsilon$, причем $\varepsilon = +1$ для спиноров с положительной энергией и -1 для спиноров с отрицательной энергией. Побутно выпишем уравнение для сопряженного спинора, для чего уравнение (4.125б) нужно умножить справа на β . В обозначениях, предложенных Фейнманом,

$$\tilde{u} (\not{p} - mc) = 0. \quad (4.128)$$

При помощи техники, аналогичной той, которая использовалась при выводе (4.126), можно получать средние значения операторов Γ_i в состоянии $u(p)$. Так, вычислим, например, величину $\tilde{u}(p) \gamma^\mu u(p)$. Для этого умножим уравнение $(\not{p} - mc)u = 0$ на $\tilde{u} \gamma^\mu$ слева и уравнение (4.128) на γ^μ справа и сложим

$$\begin{aligned} 2m\tilde{u}(p) \gamma^\mu u(p) &= \tilde{u}(p) (\not{p} \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p}) u(p) = \\ &= p_\nu \tilde{u}(p) (\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu) u(p) = \\ &= 2p^\mu \tilde{u}(p) u(p). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Отсюда $\tilde{u}(p) \gamma^\mu u(p) = \varepsilon(p) \frac{p^\mu}{mc}$, если u нормированы условием $\tilde{u}(p) u(p) = \varepsilon(p)$. Подобным же образом легко проверить, что $\tilde{u}(p) \gamma_5 u(p) = 0$. Такая же техника может быть распространена на вычисление матричных элементов Γ_i между различными начальными и конечными состояниями. Например, рассмотрим матричный элемент $\tilde{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1)$. Поступая как и прежде, с той лишь разницей, что теперь используются два уравнения — для $u(p_1)$ и для $\tilde{u}(p_2)$, получаем

$$2m\tilde{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) = \tilde{u}(p_2) (\gamma_5 \not{p}_1 + \not{p}_2 \gamma_5) u(p_1). \quad (4.130)$$

Так как γ_5 антикоммутирует с γ^μ , то правую часть можно переписать в виде

$$\tilde{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) = \frac{1}{2mc} (p_1^\mu - p_2^\mu) \tilde{u}(p_2) \gamma_5 \gamma_{\mu} u(p_1). \quad (4.131)$$

Полагая $p_1 = p_2$, снова выясняем, что такой матричный элемент равен нулю. Если же $u(p_2)$ есть решение с отрицательной энергией, то видно, что результирующий матричный элемент не мал.

Рассмотрим далее соотношение ортогональности для спиноров. Пусть $u_\pm^r(p)$ ($r = 1, 2$) — два решения с положительной энергией, соответствующие импульсу p и спиральностям $+1$ и -1 . Так как решения u_+^1 и u_+^2 соответствуют различным собственным значениям оператора спиральности, то они ортогональны

$$\tilde{u}_+^r(p) u_+^s(p) = \delta_{rs} \quad (r, s = 1, 2). \quad (4.132)$$

Решения $u_-(-\mathbf{p})$ с импульсом $-\mathbf{p}$ и отрицательной энергией также ортогональны к $u_+(\mathbf{p})$. Они удовлетворяют уравнениям

$$(\not{p} + mc)u_-(-\mathbf{p}) = 0 \quad (4.133a)$$

и

$$\tilde{u}_-(-\mathbf{p})(\not{p} + mc) = 0. \quad (4.133b)$$

Поэтому, умножая уравнение $(\not{p} - mc)u_+(\mathbf{p}) = 0$ на $\tilde{u}_-(-\mathbf{p})$ слева, получаем

$$\tilde{u}_-(-\mathbf{p})\not{p}u_+(\mathbf{p}) = mc\tilde{u}_-(-\mathbf{p})u_+(\mathbf{p}), \quad (4.134)$$

а умножая уравнение (4.133b) на $u_+(\mathbf{p})$, получаем

$$\tilde{u}_-(-\mathbf{p})\not{p}u_+(\mathbf{p}) = -mc\tilde{u}_-(-\mathbf{p})u_+(\mathbf{p}) \quad (4.135)$$

и, следовательно, $\tilde{u}_-(-\mathbf{p})u_+(\mathbf{p}) = 0$. Обозначим два линейно независимых и ортогональных решения с отрицательной энергией и с импульсом $-\mathbf{p}$ через $v^s(\mathbf{p})$ ($s = 1, 2$):

$$u_-^s(-\mathbf{p}) = v^s(\mathbf{p}). \quad (4.136)$$

Соотношение ортонормированности этих решений запишется в виде

$$\tilde{v}^r(\mathbf{p})v^s(\mathbf{p}) = -\delta_{rs}. \quad (4.137)$$

Сведем теперь все соотношения ортонормировки вместе:

$$\tilde{u}_+^r(\mathbf{p})u_+^s(\mathbf{p}) = -\tilde{v}^r(\mathbf{p})v^s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}, \quad (4.138a)$$

$$\tilde{v}^r(\mathbf{p})u_+^s(\mathbf{p}) = \tilde{u}_+^r(\mathbf{p})v^s(\mathbf{p}) = 0. \quad (4.138b)$$

На основании соотношений ортогональности и нормировки решения удовлетворяют соотношению

$$\sum_{r=1}^2 \{u_{+\alpha}^r(\mathbf{p})\tilde{u}_{+\beta}^r(\mathbf{p}) - v_{\alpha}^r(\mathbf{p})\tilde{v}_{\beta}^r(\mathbf{p})\} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \quad (4.139)$$

Обратим внимание на порядок множителей: он соответствует прямому произведению u на \tilde{u} , ($u \otimes \tilde{u}$), являющемуся матрицей 4×4 . Подобным же образом условия нормировки (4.138a) и (4.138b) дают

$$\sum_{r=1}^2 \tilde{u}_+^r(\mathbf{p})u_+^r(\mathbf{p}) - \tilde{v}^r(\mathbf{p})v^r(\mathbf{p}) = 4. \quad (4.140)$$

С целью упрощения обозначений введем для спиноров обозначение

$$\omega^r(\mathbf{p}) = u_+^r(\mathbf{p}) \quad (r = 1, 2), \quad (4.141a)$$

$$\omega^{r+2}(\mathbf{p}) = v_+^r(\mathbf{p}) = u_-^r(-\mathbf{p}) \quad (r = 1, 2). \quad (4.141b)$$

После этого соотношения ортогональности (4.138) запишутся в виде

$$\tilde{\omega}^m(\mathbf{p})\omega^n(\mathbf{p}) = \varepsilon^m\delta_{mn} \quad (m, n = 1, 2, 3, 4), \quad (4.142)$$

где $\varepsilon^m = +1$ при $m = 1, 2$ и $\varepsilon^m = -1$ при $m = 3, 4$. Соотношениям (4.139) и (4.140) можно теперь придать вид

$$\sum_{m=1}^4 \varepsilon^m \omega^m(\mathbf{p}) \otimes \tilde{\omega}^m(\mathbf{p}) = I \quad (4.143a)$$

$$\sum_{m=1}^4 \varepsilon^m \tilde{\omega}^m(\mathbf{p}) \omega^m(\mathbf{p}) = 4. \quad (4.143б)$$

При вычислении эффективных сечений для процессов с участием частиц со спином $1/2$ часто бывает необходимо просуммировать по промежуточным спиновым состояниям и, в частности, по промежуточным состояниям, обладающим только положительной энергией, или аналогично только по состояниям с отрицательной энергией. Пусть интересующая нас сумма имеет вид

$$\Omega = \sum_{r=1}^2 (\tilde{f}Q\omega^r) (\tilde{\omega}^r P g) = \sum_{r=1}^2 \sum_{\alpha, \beta=1}^4 (\tilde{f}_\alpha Q_{\alpha\beta} \omega_\beta^r) \left(\sum_{\sigma=1}^4 \tilde{\omega}_\sigma^r P_{\sigma\sigma} g_\sigma \right), \quad (4.144)$$

где Q и P — некоторые операторы (произведения матриц γ); f и g — спиноры, а сумма по r берется только по двум состояниям ω^r с положительной энергией. В случае состояний с отрицательной энергией вычисления выполняются аналогично.

Теперь мы постараемся найти ковариантные операторы проектирования, подстановка которых в правую часть (4.144) позволит распространить суммирование на все четыре состояния $\omega^r(\mathbf{p})$ вместо двух, после чего полученное выражение можно будет упростить с помощью формулы (4.143а). Нужный нам оператор проектирования должен при действии на спинор ω оставлять его неизменным, если ω — состояние с положительной энергией, и обращать в нуль, если ω — состояние с отрицательной энергией. Чтобы построить такой оператор, вспомним уравнение Дирака для спиноров ω (здесь $\hbar = c = 1$):

$$(\not{p} - m)\omega^r(\mathbf{p}) = 0 \quad (r = 1, 2), \quad (4.145а)$$

$$(\not{p} + m)\omega^r(\mathbf{p}) = 0 \quad (r = 3, 4). \quad (4.145б)$$

Эти уравнения наводят на мысль, что оператор проектирования для положительно-частотных состояний с импульсом \mathbf{p} можно записать в виде

$$\Lambda_+(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m}. \quad (4.146)$$

Действительно, в силу (4.145а) и (4.145б) он обладает всеми свойствами, которые должен иметь оператор проектирования:

$$\Lambda_+(\mathbf{p})\omega^r(\mathbf{p}) = \omega^r(\mathbf{p}) \quad (r = 1, 2), \quad (4.147а)$$

$$\Lambda_+(\mathbf{p})\omega^r(\mathbf{p}) = 0 \quad (r = 3, 4) \quad (4.147б)$$

и

$$[\Lambda_+(\mathbf{p})]^2 = \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right)^2 = \frac{p^2 + 2m\not{p} + m^2}{4m^2} = \frac{\not{p} + m}{2m} = \Lambda_+(\mathbf{p}). \quad (4.148)$$

В (4.148) учтено, что для свободной частицы

$$\not{p}^2 = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu = p^2 = m^2. \quad (4.149)$$

С помощью (4.143) и (4.147) легко находим

$$\Lambda_+(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} = \sum_{r=1}^2 \omega^r(\mathbf{p}) \otimes \tilde{\omega}^r(\mathbf{p}). \quad (4.150)$$

Далее отметим, что оператор $\Lambda_+ \varepsilon^r$ имеет те же свойства, что и оператор Λ_+ , так как при действии на состояние с отрицательной энергией, когда $\varepsilon^r = -1$, он дает 0. Это позволяет переписать выражение (4.144) следующим образом:

$$\Omega = \sum_{m=1}^4 (\tilde{f} Q \Lambda_+ \varepsilon^r w^r) (\tilde{w}^r P g). \quad (4.151)$$

С помощью (4.143а) выражение (4.151) приводится к виду

$$\Omega = (\tilde{f} Q \Lambda_+ P g), \quad (4.152)$$

и этим достигается наша цель по вычислению суммы по промежуточным состояниям.

Если нас интересуют состояния лишь с отрицательной энергией, то можно определить аналогичный оператор проектирования

$$\Lambda_- (\mathbf{p}) = \frac{m - \not{p}}{2m} \quad (4.153)$$

со свойствами

$$\Lambda_- (\mathbf{p}) w^r (\mathbf{p}) = w^r (\mathbf{p}) \quad (r = 3, 4), \quad (4.154a)$$

$$\Lambda_- (\mathbf{p}) w^r (\mathbf{p}) = 0 \quad (r = 1, 2), \quad (4.154б)$$

$$(\Lambda_- (\mathbf{p}))^2 = \Lambda_- (\mathbf{p}) = - \sum_{r=3}^4 w^r (\mathbf{p}) \otimes \tilde{w}^r (\mathbf{p}). \quad (4.154в)$$

Полезно отметить, что сумма Λ_+ и Λ_- — единичная матрица

$$\Lambda_+ (\mathbf{p}) + \Lambda_- (\mathbf{p}) = I, \quad (4.155)$$

а также что

$$\Lambda_+ (\mathbf{p}) \Lambda_- (\mathbf{p}) = \Lambda_- (\mathbf{p}) \Lambda_+ (\mathbf{p}) = 0. \quad (4.156)$$

Вероятность какого-либо события пропорциональна квадрату модуля его амплитуды $M = \tilde{w}_f Q w_i$:

$$|M|^2 = M M^* = (\tilde{w}_f Q w_i) (w_i^* Q^* \tilde{w}_f) = (\tilde{w}_f Q w_i) (\tilde{w}_i \gamma^0 Q^* \gamma^0 w_f). \quad (4.157)$$

Здесь Q^* — оператор, эрмитово сопряженный (комплексно сопряженный и транспонированный) к оператору Q . Отметим, что в силу (4.61) произведения матриц γ в Q^* обладают свойством $\gamma^0 (\gamma^\mu \dots \gamma^\nu)^* \gamma^0 = \gamma^\nu \dots \gamma^\mu$, а i заменяется на $-i$ только в нематричных множителях. Обозначим

$$Q' = \gamma^0 Q^* \gamma^0, \quad (4.158)$$

так что

$$|M|^2 = (\tilde{w}_f Q w_i) (\tilde{w}_i Q' w_f). \quad (4.159)$$

Во многих задачах нас не интересует конечное спиновое состояние частицы. Тогда по обоим конечным спиновым состояниям нужно просуммировать. Согласно изложенному здесь методу, суммирование можно выполнить, вставив подходящие операторы проектирования. Пусть начальное и конечное состояния описывают спиноры, $w_i(\mathbf{p})$ и $w_f(\mathbf{p}')$, соответствующие положительной энергии и импульсам \mathbf{p} и \mathbf{p}' . Тогда, суммируя

по конечным спиновым состояниям, получаем

$$\left. \begin{array}{l} \text{Сумма } |M|^2 \text{ по конеч-} \\ \text{ным спиновым со-} \\ \text{стояниям} \end{array} \right\} = \sum_{r=1, 2} (\tilde{\omega}_i Q' \omega_r^i) (\tilde{\omega}_j^r Q \omega_j) = \\ = \sum_{r=1}^4 (\tilde{\omega}_i Q' \Lambda_+(\mathbf{p}') \varepsilon^r \omega_j^r \tilde{\omega}_j^r Q \omega_j) = \tilde{\omega}_i Q' \Lambda_+(\mathbf{p}') Q \omega_j. \quad (4.160)$$

Если начальное состояние также неполяризовано, то по начальным спиновым состояниям нужно усреднить

$$\left. \begin{array}{l} \text{Среднее } |M|^2 \text{ по начальным} \\ \text{и сумма по конечным спи-} \\ \text{новым состояниям} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \tilde{\omega}_i^r Q' \Lambda_+(\mathbf{p}') Q \omega_i^r = \\ = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^4 \sum_{\alpha, \beta=1}^4 (\tilde{\omega}_i^r)_\alpha (Q' \Lambda_+(\mathbf{p}') Q \Lambda_+(\mathbf{p}))_{\alpha\beta} (\omega_i^r)_\beta \varepsilon^r = \\ = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^4 (Q' \Lambda_+(\mathbf{p}') Q \Lambda_+(\mathbf{p}))_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \\ = \frac{1}{2} \text{Sp} (Q' \Lambda_+(\mathbf{p}') Q \Lambda_+(\mathbf{p})). \quad (4.161)$$

Введем обозначение

$$L = Q' \Lambda_+(\mathbf{p}') Q \Lambda_+(\mathbf{p}). \quad (4.162)$$

Матрицу L можно представить в виде линейной комбинации 16 линейно независимых матриц Γ_i , как это обсуждалось выше:

$$L = \sum_{i=1}^{16} a_i \Gamma_i = a_1 I + a_2 \gamma_1 + \dots \quad (4.163)$$

Если вычислить следы от обеих частей (4.163), то вклад даст только член, содержащий единичную матрицу

$$\text{Sp} L = 4a_1. \quad (4.164)$$

Практически оказываются полезными следующие два свойства следов произведения матриц:

1. След произведения нечетного числа матриц γ равен нулю. Для доказательства напомним элементарное свойство следа

$$\text{Sp} (ABC) = \text{Sp} (CAB) \quad (4.165)$$

(это верно и для любой циклической перестановки). Выше мы указывали, что существует матрица γ_5 со свойствами

$$\gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0; \quad (\gamma_5)^2 = -I \quad (4.166a)$$

или

$$\gamma_5 \gamma_\mu (\gamma_5)^{-1} = -\gamma_\mu. \quad (4.166b)$$

Отсюда

$$\gamma_5 \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_n} (\gamma_5)^{-1} = (-1)^n \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_n}. \quad (4.167)$$

Если вычислить след от обеих частей (4.167) и воспользоваться свойством (4.165), то сразу же получим

$$(-1)^n \text{Sp} (\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_n}) = \text{Sp} (\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}), \quad (4.168)$$

и, таким образом, след произведения нечетного числа матриц равен нулю. В частности, отметим, что

$$\text{Sp } \gamma_\mu = 0. \quad (4.169)$$

Аналогично получаем

$$\text{Sp } \gamma_5 = -\text{Sp } [\gamma_\mu \gamma_5 (\gamma_\mu)^{-1}] = -\text{Sp } \gamma_5 = 0. \quad (4.170)$$

2. Если произведение содержит четное число n матриц, то перестановочные соотношения позволяют свести след этого произведения к сумме следов произведений, содержащих только по $n-2$ матрицы. Рассмотрим, например, случай $n=2$. С помощью перестановочных соотношений

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad (4.171)$$

получаем

$$\text{Sp } (\gamma_\mu \gamma_\nu) = \text{Sp } (\gamma_\nu \gamma_\mu) = \frac{1}{2} \text{Sp } (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = g_{\mu\nu} \text{Sp } I = 4g_{\mu\nu}, \quad (4.172)$$

так как $\text{Sp } I = 4$. Аналогично легко получить

$$\text{Sp } (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - 4g_{\sigma\nu} g_{\rho\mu} + 4g_{\sigma\rho} g_{\mu\nu}. \quad (4.173)$$

Из (4.172) и (4.169) следует

$$\text{Sp } (A \not{B}) = 4A \cdot B = 4A_\mu B^\mu, \quad (4.174a)$$

$$\text{Sp } A = 0 \quad (4.174b)$$

и т. д. Другие методы вычисления следов см. в статьях Дэффина [191] и Кайяньелло и Фубини [95].

§ 6. Представление Фолди—Вотхойзена

Хотя мы выяснили многие свойства уравнения Дирака, однако мы еще не дали физической интерпретации входящих в теорию операторов. В той форме, в которой уравнение Дирака было записано выше, трудно дать ему простую интерпретацию. Например, рассмотрим оператор \hat{x}

$$\hat{x} = \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{x}] = \boldsymbol{\alpha}, \quad (4.175)$$

который хотелось бы назвать оператором скорости. Так как $\alpha_i^2 = 1$, то абсолютная величина проекции «скорости» на данное направление всегда была бы равна c , что физически не разумно. Кроме того, поскольку $[\alpha_1, \alpha_2] \neq 0$, то если определена проекция скорости на одно направление, одновременно нельзя определить две другие ее проекции. Но это опровергается тем, что существуют эксперименты по измерению скорости. Можно прийти к заключению, что должно существовать другое представление уравнения Дирака, в котором физическая интерпретация более прозрачна. На мысль, что это должно быть так, наводят также и следующие соображения. У дираковской частицы с положительной энергией имеется два независимых состояния при каждом значении импульса. Они соответствуют двум возможным направлениям спина. Согласно принципам квантовой механики, каждая такая пара физических состояний должна представляться ровно двумя векторами в гильбертовом пространстве. Поэтому

в обычной формулировке теории Дирака при представлении этих векторов имеются излишества, так как соответствующие волновые функции обладают четырьмя компонентами. Следовательно, должна существовать возможность найти такое преобразование, после которого волновые функции свободной дираковской частицы с определенным импульсом имели бы ровно две компоненты, как в нерелятивистской теории Паули [621]. Эта проблема во втором порядке по v^2/c^2 была решена Беккером [39], а точно Фолди и Вотхойзеном [266] (см. также работу Тани [769]¹⁾). Они указали, что главная причина, почему в представлении Дирака решения записываются в виде четырехкомпонентных спиноров, та, что гамильтониан содержит операторы, а именно матрицы α^i , которые в представлении (4.24) имеют матричные элементы, связывающие верхние и нижние компоненты волновой функции. Оператор, который связывает верхние и нижние компоненты волновой функции, будет называться «нечетным». Если бы при помощи канонического преобразования оказалось возможным освободить гамильтониан $H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2$ от нечетных операторов, то тогда можно было бы представить решения двухкомпонентными спинорами. Вместе с Фолди и Вотхойзеном сделаем каноническое преобразование e^{iS} с эрмитовым оператором S :

$$\psi \rightarrow e^{iS} \psi = \psi', \quad (4.176a)$$

$$H \rightarrow e^{iS} H e^{-iS} = H'. \quad (4.176b)$$

Оператор S выберем в виде

$$S = - \left(\frac{i}{2mc} \right) \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \omega \left(\frac{|\mathbf{p}|}{mc} \right), \quad (4.177)$$

где ω — действительная функция, которую следует определить так, чтобы в H' отсутствовали нечетные операторы. Теперь

$$H' = e^{iS} (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2) e^{-iS} = e^{iS} \beta (c\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2) e^{-iS} = e^{iS} \beta e^{-iS} \beta (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2), \quad (4.178)$$

так как S коммутирует с $\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}$. Кроме того, в силу соотношения

$$\beta (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^n = (-1)^n (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^n \beta \quad (4.179)$$

получаем

$$\beta e^{-iS} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2mc} \right)^n (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^n \omega^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{+1}{2mc} \right)^n (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^n \omega^n \beta = e^{iS} \beta, \quad (4.180)$$

так что

$$\begin{aligned} H' &= e^{2iS} (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2) = \\ &= \left[\cos \left(\frac{|\mathbf{p}|}{mc} \omega \right) + \frac{\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \sin \left(\frac{|\mathbf{p}|}{mc} \omega \right) \right] (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2) = \\ &= \beta \left[mc^2 \cos \left(\frac{|\mathbf{p}|}{mc} \omega \right) + c |\mathbf{p}| \sin \left(\frac{|\mathbf{p}|}{mc} \omega \right) \right] + \\ &+ \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \left[|\mathbf{p}| c \cos \left(\frac{|\mathbf{p}|}{mc} \omega \right) - mc^2 \sin \left(\frac{|\mathbf{p}|}{mc} \omega \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.181)$$

¹⁾ Ср. также работу Смородинского [930]. — *Прим. ред.*

Если теперь выбрать ω так, чтобы коэффициент при $\alpha \cdot \mathbf{p}$ обратился в нуль, т. е. если положить

$$\omega = \frac{mc}{|\mathbf{p}|} \operatorname{arctg} \left(\frac{|\mathbf{p}|}{mc} \right), \quad (4.182)$$

то H' освободится от нечетных операторов и примет вид

$$H' = \beta \left[mc^2 \frac{mc}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} + |\mathbf{p}| c \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} \right] = \beta c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} = \beta E(\mathbf{p}). \quad (4.183)$$

В представлении (4.24), в котором β диагональна, у решений уравнения $H'\psi' = E'\psi'$ верхние компоненты соответствуют положительной энергии, а нижние — отрицательной. Если записать

$$\psi' = \psi'_+ + \psi'_-, \quad (4.184)$$

где

$$\psi'_+ = \frac{1}{2} (1 + \beta) \psi', \quad (4.185a)$$

$$\psi'_- = \frac{1}{2} (1 - \beta) \psi', \quad (4.185b)$$

то

$$H' \psi'_+ = E(\mathbf{p}) \psi'_+, \quad (4.186a)$$

$$H' \psi'_- = -E(\mathbf{p}) \psi'_-. \quad (4.186b)$$

Заметим, что решения $\psi'_+(\psi'_-)$ в сущности являются теперь двухкомпонентными волновыми функциями, так как их нижние (верхние) компоненты всегда равны нулю. Это можно также установить, замечая, что при выборе ω в виде (4.182) функция преобразования $\exp iS$ запишется в виде

$$\exp iS = \left[\frac{2E(\mathbf{p})}{E(\mathbf{p}) + mc^2} \right]^{1/2} \frac{1}{2} \left(\frac{c\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + mc^2}{E(\mathbf{p})} + 1 \right). \quad (4.187)$$

Если подействовать ею на спинор с положительной энергией $u_+(\mathbf{p})$ и учесть, что $(c\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + mc^2) u_+(\mathbf{p}) = \beta E(\mathbf{p}) u_+(\mathbf{p})$, то получим

$$\exp iS u_+(\mathbf{p}) = \left[\frac{2E(\mathbf{p})}{E(\mathbf{p}) + mc^2} \right]^{1/2} \frac{1}{2} (1 + \beta) u_+(\mathbf{p}). \quad (4.188)$$

Оператор

$$\frac{1}{2} (1 + \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.189)$$

обращает в нуль нижние компоненты, так что при действии $\exp iS$ на положительно-частотные спиноры (4.118a) и (4.118b) получаются спиноры вида

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.190)$$

Кроме гамильтониана, особый интерес представляет анализ еще двух операторов. Зададимся вопросом, как будет выглядеть оператор X в пред-

ставлении Дирака, если в представлении Фолди — Вотхойзена (Ф. — В.) он имеет вид \mathbf{x} . Получаем

$$\mathbf{X} = e^{-iS} \mathbf{x} e^{iS} = \mathbf{x} + i\hbar c \frac{\beta \boldsymbol{\alpha}}{2E(\mathbf{p})} - i\hbar \frac{\beta(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p} + i[\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}] |\mathbf{p}|}{2E(\mathbf{p})(E(\mathbf{p}) + mc^2) |\mathbf{p}|}. \quad (4.194)$$

Этот оператор обладает свойствами

$$[X_i, X_j] = 0, \quad (4.192)$$

$$[X_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad (4.193)$$

и, кроме того ¹⁾,

$$\frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{X}] = \frac{d}{dt} \mathbf{X} = \frac{\mathbf{p}}{E(\mathbf{p})} \frac{\beta mc^2 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} c}{E(\mathbf{p})}, \quad (4.194)$$

так что в применении к многообразию решений с положительной энергией производная оператора \mathbf{X} по времени есть оператор $\frac{\mathbf{p}}{E(\mathbf{p})}$, который можно отождествить с оператором скорости частицы. Оператор \mathbf{X} совпадает с «оператором координаты» для системы со спином $1/2$, который вывели Ньютон и Вигнер [576]. При вращениях он преобразуется как вектор, а его собственные функции есть «локализованные волновые функции», удовлетворяющие всем требованиям, перечисленным в § 3 гл. 3. Кроме того, при действии оператора \mathbf{X} на положительно-частотную волновую функцию получается снова положительно-частотная волновая функция. Пусть при помощи $\Psi_{y^0}(x)$ обозначается волновая функция состояния, локализованного в момент времени y^0 (явный вид см. в работе [576]), и пусть имеется частица в состоянии с волновой функцией $f(x)$. Тогда амплитуда вероятности найти эту частицу в точке y в момент времени $x^0 = y^0$ равна

$$(\Psi_{y^0}, f) = \int_{x^0} d\sigma^\mu(x) \tilde{\Psi}_{y^0 y}(x) \gamma_\mu f(x). \quad (4.195)$$

Как мы видели, в представлении Дирака орбитальный момент количества движения $[\mathbf{x} \times \mathbf{p}]$ и спиновый момент $1/2 \boldsymbol{\Sigma}$ порознь не являются интегралами движения. Интегралом движения является только их сумма. Однако можно проверить, что оператор $[\mathbf{X} \times \mathbf{p}]$ и оператор

$$\boldsymbol{\Sigma}_M = \boldsymbol{\Sigma} - \frac{i\beta c [\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}]}{E(\mathbf{p})} - \frac{c^2 [\mathbf{p} \times [\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}]]}{E(\mathbf{p})(E(\mathbf{p}) + mc^2)}, \quad (4.196)$$

где

$$e^{iS} \boldsymbol{\Sigma}_M e^{-iS} = \boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{2i} [\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha}], \quad (4.197)$$

являются интегралами движения порознь. Это легко проверяется в представлении Ф. — В., где эти операторы имеют вид соответственно $[\mathbf{x} \times \mathbf{p}]$ и $\boldsymbol{\Sigma}$. В самом деле, они коммутируют с гамильтонианом $H' = \beta E(\mathbf{p})$. Это очевидно из того, что $\boldsymbol{\Sigma}$ коммутирует с β , а $[\mathbf{x} \times \mathbf{p}]$ коммутирует с $E(\mathbf{p})$ [так как $E(\mathbf{p})$ зависит только от p^2 и, следовательно, является трехмерным скаляром]. Фолди и Вотхойзен назвали оператор $\boldsymbol{\Sigma}_M$ «оператором среднего спина».

Представление Ф. — В., в частности, полезно при обсуждении уравнения Дирака в нерелятивистском пределе, так как операторы, предста-

¹⁾ Легче всего получить эти соотношения в представлении Ф. — В., а затем вернуться к представлению Дирака.

влияющие физические величины, находятся во взаимнооднозначном соответствии с операторами теории Паули. Существует другой предел, представляющий значительный интерес, а именно ультрарелятивистский, когда массой частицы можно пренебречь по сравнению с ее кинетической энергией, или равносильно, когда можно пренебречь mc по сравнению с импульсом частицы $|p|$. Соответствующая форма уравнения Дирака получается при выборе ω с таким расчетом, чтобы в (4.181) обратился в нуль коэффициент при β , а член с $\alpha \cdot p$ сохранился. Это достигается, если

$$\omega' = -\frac{mc}{|p|} \operatorname{arctg} \frac{mc}{|p|}, \quad (4.198a)$$

$$e^{\pm iS'} = \frac{E(p) + |p|c \mp \beta \frac{\alpha \cdot p}{|p|} mc^2}{2E(p)}. \quad (4.198b)$$

Гамильтониан в новом представлении имеет вид

$$H'' = \frac{\alpha \cdot p}{|p|} E(p). \quad (4.199)$$

В результате преобразования мы получили такой вид гамильтониана, что состояния с положительной и отрицательной спиральностью описываются независимо при помощи двухкомпонентных уравнений (см. работы Чини и Тушека [135] и Бозе, Гамба и Сударшана [79]).

§ 7. Состояния с отрицательной энергией

Мы уже отмечали, что уравнение Дирака имеет решения с отрицательной энергией. Их физическая интерпретация некоторое время представляла большие трудности; например, частица с отрицательной энергией, если бы она существовала, ускорялась бы в направлении, противоположном направлению действия внешней силы. Существование решений с отрицательной энергией не причиняло бы беспокойства, если бы вероятность перехода из состояний с положительной энергией в состояния с отрицательной была бы равна нулю, так как в этом случае частица с положительной энергией всегда оставалась бы в состоянии с положительной энергией. Но это не так. Уравнение Дирака предопределяет конечную вероятность перехода под влиянием внешнего поля из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной. Однако такие переходы с нарушением закона сохранения энергии никогда не наблюдались. В 1930 г. Дирак [170] преодолел эту трудность, предложив так называемую «теорию дырок», которую он сформулировал следующим образом: «Предположим, что почти все состояния с отрицательной энергией заполнены, причем в каждом состоянии в соответствии с принципом запрета Паули находится по одному электрону». В таком случае принцип запрета делает невозможными переходы электронов с положительными энергиями в состояния с отрицательными энергиями, если последние заняты полностью, и до тех пор, пока они не будут предварительно освобождены каким-либо образом. Такое «незаполненное состояние с отрицательной энергией» проявляет себя как нечто, обладающее положительной энергией, так как, чтобы заставить это состояние исчезнуть, т. е. чтобы заполнить его, нужно добавить к нему электрон с отрицательной энергией». Подобным же образом «дырка» имела бы заряд, противоположный заряду частицы с положительной энергией.

Таким образом, с самого начала одночастичная теория имеет смысл только в отсутствие взаимодействий, т. е. для изолированной свободной частицы. Для интерпретации теории в присутствии взаимодействий мы вынуждены прибегнуть к многочастичной формулировке, в которой число частиц не сохраняется, т. е. к теории поля.

Когда Дирак впервые предложил свою теорию, полагали, что мир состоит только из протонов и электронов, и естественно было надеяться, что «нечто» должно было бы отождествляться с протоном (большую массу протона обосновывали присутствием электронов в состояниях с отрицательной энергией). Вскоре эта возможность была отвергнута Оппенгеймером [605] и Вейлем [840], и было показано, что «нечто» должно иметь массу, равную массе частицы, описываемой решениями с положительной энергией. Так как в 1931 г. позитроны (т. е. частицы с массой электрона, но с зарядом $+|e|$) еще не были обнаружены экспериментально, то Паули в своей статье для *Handbuch der Physik* писал об этом предсказании теории Дирака как о недостатке. Однако в 1932 г. Андерсон [10] открыл позитрон экспериментально, так что теория была реабилитована еще до выхода статьи Паули из печати (в 1933 г.) [622].

В первоначальной формулировке теории дырок Дирак предполагал, что электроны распределены во всем мире с бесконечной плотностью, причем в состоянии абсолютного вакуума все состояния с отрицательной энергией заполнены, а все состояния с положительной энергией свободны. Одна из трудностей, связанных с этим предположением, — чрезвычайно большая плотность заряда, создаваемая состояниями с отрицательной энергией. В современном варианте теории, развитом Гейзенбергом [366, 367], Крамерсом [461] и другими, эта трудность с асимметрией зарядов была преодолена. Действительно, в этой более новой формулировке существует полная симметрия между положительным и отрицательным зарядами, причем и однопозитронные, и одноэлектронные состояния обладают положительной энергией.

Теория дырок Дирака предсказывает возможность рождения пар, если γ -квант (или еще что-либо) обладает энергией, достаточной, чтобы вызвать переход электрона из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией, т. е. если $h\nu > 2mc^2$. В действительности теорией предсказываются электромагнитные эффекты даже тогда, когда $h\nu < 2mc^2$, так как электромагнитное поле все еще будет вызывать перераспределение заряда и, таким образом, приводить к «поляризации вакуума». Такие поляризационные эффекты были обнаружены экспериментально, в частности тонкая структура позитрония в основном состоянии, лэмбовский сдвиг и сдвиги уровней мезоатомов.

Под *позитронием* понимают связанное состояние электрона и позитрона, образованное за счет кулоновских сил. В основном состоянии относительный момент количества движения частиц складывается только из их спиновых моментов. Таким образом, имеются триплетное ($S = 1$) и синглетное ($S = 0$) основные состояния. Согласно теории (см. работы Янга [869] и Вольфенштейна и Равенхолла [866]¹⁾), частицы, находящиеся в синглетном состоянии, могут аннигилировать на два γ -кванта. В триплетном состоянии это невозможно. Однако в триплетном состоянии может происходить аннигиляция на три γ -кванта. Время жизни в этом состоянии примерно в тысячу раз больше, чем в синглетном состоянии. Эти выво-

¹⁾ Указание на другие работы см. в книге Ахиезера и Берестецкого [3].—
Прим. ред.

ды были подтверждены экспериментально Дейчем [163] и Пондом [647]. Уровни энергии обоих состояний различаются примерно на $9 \cdot 10^{-4}$ эв (см. работу Дейча и Дулита [164]), и почти половина этого расщепления обязана виртуальному процессу аннигиляции и рождения электронно-позитронной пары. Этот процесс может происходить только в синглетном состоянии и обратен процессу поляризации вакуума, в котором электронно-позитронная пара сперва рождается, а затем аннигилирует.

Лэмбовский сдвиг также содержит член, обусловленный тем, что электрическое поле протона в присутствии вакуума оказывается слегка искаженным (как это обсуждалось выше). Для основного состояния атома водорода этот член, впервые вычисленный Юлингом [787], равен 27 Мгц. Согласие теории и эксперимента проверено с точностью до $0,1$ Мгц, и это снова свидетельствует о том, что поляризация вакуума является реальным эффектом.

Этот же эффект был в дальнейшем проверен по сдвигам уровней в мезоатомах, т. е. в системах, образованных π^- - или μ^- -мезонами, движущимися по боровской орбите вокруг протона или легкого ядра. Рассмотрим систему $\pi^- - p$. В этом случае, точно так же как и в случае атома водорода, радиационные поправки приводят к сдвигу энергетических уровней относительно уровней, вычисленных при помощи описывающего π -мезон уравнения Клейна — Гордона в кулоновском поле. Значительно меньший вклад вносится конечными размерами ядра, особыми взаимодействиями мезона с ядром и т. д. Электромагнитные радиационные поправки вызваны двумя эффектами: во-первых, разницей собственных энергий связанного и свободного π -мезона и, во-вторых, поляризацией вакуума. В действительности поляризация вакуума в данном случае, как и вообще, связана с возможностью рождения пар противоположно заряженных частиц всех сортов — не только электронно-позитронных пар, но и пар $\pi^+ - \pi^-$, $\mu^+ - \mu^-$. Однако в первом приближении каждый тип частиц (π^\pm , μ^\pm , e^\pm) вносит вклад, обратно пропорциональный квадрату массы частицы, так что фактически к наблюдаемым эффектам приводит только электронно-позитронная поляризация вакуума.

В мезоатомах вклад в сдвиг уровней от поляризации поля ядра много больше вклада от изменения собственной энергии мезона (а именно на три порядка, так как эти вклады относятся как квадраты масс мезона и электрона). Кроме того, в мезоатоме мезон находится в среднем много ближе к ядру, чем в соответствующем электронном атоме, и, следовательно, в этом случае сдвиг уровней за счет поляризации вакуума оказывается значительно большим. Так, сдвиг уровня $1S$ у системы $\pi^- - p$ равен приблизительно -10 эв (в атоме водорода уровень сдвинут приблизительно на -10^{-2} эв), а в атоме $\pi^- - Mg$ уровень ниже приблизительно на $1,4 \cdot 10^3$ эв (сдвиг пропорционален Z^2). То, что поляризация вакуума приводит к понижению уровней, можно понять на основании следующих качественных соображений. «Голое» ядро, взаимодействуя с «фоном», облачается в нейтральную электронно-позитронную «шубу». Некоторые из позитронов уходят на бесконечность, оставляя избыток отрицательного заряда вблизи ядра (в сфере радиуса $\sim \hbar/m_e c$). На больших расстояниях, т. е. превышающих $\hbar/m_e c$, мезон испытывает действие перенормированного заряда Ze , однако на расстояниях, меньших $\hbar/m_e c$, эффективный заряд оказывается большим Ze . Поэтому энергия низко расположенных уровней, соответствующих орбитам с малыми радиусами, понижается. С другой стороны, конечные размеры ядра приводят к повышению уровня $1S$ (практически не изменяя других уровней), и этот сдвиг для легких ядер имеет

примерно один и тот же порядок величины. Сдвиги уровней такого порядка величины действительно имеют место в мезоатомах, о чем свидетельствуют эксперименты Стирнса с сотрудниками и др. (см. обзорные статьи де Бенедетти [155], Стирнса [738] и Веста [838]). Это снова иллюстрирует реальность эффекта поляризации вакуума. Кроме того, результаты экспериментов ясно указали на универсальность взаимодействия электромагнитного поля со всеми найденными в природе заряженными частицами.

При электростатическом взаимодействии заряженных частиц (например, двух протонов) эффект поляризации вакуума означает также, что должно существовать отклонение от чисто кулоновского рассеяния [269].

Приведенные примеры иллюстрируют некоторые явления, предсказанные с помощью теории дырок. Снова нужно подчеркнуть, что теория дырок является теорией многих частиц (фактически теорией бесконечно большого числа частиц) и что одночастичная теория Дирака, в общих чертах изложенная выше, неспособна объяснить указанные явления. Практические вычислительные трудности теории дырок связаны с тем, что волновая функция, описывающая даже один электрон, должна учитывать все заполненные состояния с отрицательной энергией. Поэтому такая волновая функция в конфигурационном пространстве должна представляться бесконечномерным детерминантом. В гл. 8 мы увидим, что методы теории поля позволяют сформулировать теорию компактным и простым образом.

В заключение этого параграфа мы установим связь между описаниями позитрона с помощью положительно-частотных и с помощью незанятых отрицательно-частотных состояний. С этой целью рассмотрим процесс рождения пары двумя фотонами. При описании в терминах электронов и позитронов начальное состояние содержит два фотона, 4-импульсы которых суть $k_{1\mu}$ и $k_{2\mu}$. В конечном состоянии имеется позитрон с 4-импульсом $p_{+\mu}$ и электрон с 4-импульсом $p_{-\mu}$. В силу закона сохранения энергии и импульса

$$p_{+\mu} + p_{-\mu} = k_{1\mu} + k_{2\mu}. \quad (4.200)$$

С другой стороны, согласно теории дырок, начальное состояние содержит два фотона и заполненное состояние с отрицательной энергией q_{μ} . В конечном состоянии это состояние q_{μ} является незанятым, и имеется электрон в состоянии с импульсом $p_{-\mu}$. Закон сохранения энергии теперь гласит:

$$k_{1\mu} + k_{2\mu} + q_{\mu} = p_{-\mu}. \quad (4.201)$$

Сравнивая (4.200) и (4.201), получаем $p_{+\mu} = -q_{\mu}$. Таким образом, позитрон обладает импульсом, противоположным импульсу незанятой «дырки», и энергией $-q_0$, если q_0 — энергия дырки. Так как энергия q_0 отрицательна, то энергия p_{+0} положительна. Аналогично противоположны моменты количества движения дырки и позитрона.

§ 8. Уравнение Дирака во внешнем поле. Зарядовое сопряжение

Мы отмечали, что последовательная одночастичная интерпретация уравнения Дирака может быть дана только в отсутствие взаимодействий. Тем не менее, как мы покажем в дальнейшем, решения уравнения Дирака во внешнем поле играют существенную роль в математической формулировке теории поля. Кроме того, из квантовой теории следует, и это мы покажем, что в нерелятивистском пределе амплитуда (с помощью которой можно вычислить наблюдаемые одночастичной системы в слабом, медленно меняющемся поле) в первом приближении подчиняется уравнению Дирака для частицы в этом внешнем поле.

Пусть внешнее электромагнитное поле описывается 4-вектор-потенциалом $A_\mu(x)$. В калибровке Лоренца он удовлетворяет условию $\partial^\mu A_\mu(x) = 0$. Пусть с этим полем взаимодействует частица со спином $\frac{1}{2}$ и с зарядом $-e$. Тогда уравнение Дирака, описывающее ее движение (в пренебрежении радиационными поправками), получается из уравнения (4.29) при помощи замены

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu,$$

обеспечивающей калибровочную инвариантность. Таким образом, уравнение Дирака с учетом внешнего поля, описываемого классически, запишется в виде

$$\gamma^\mu \left(i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu(x) \right) \psi(x) = mc\psi(x) \quad (4.202a)$$

или

$$\left(\not{p} - \frac{e}{c} \not{A} - mc \right) \psi = 0. \quad (4.202b)$$

Это уравнение можно записать в виде уравнения второго порядка, сходного по форме с уравнением Клейна—Гордона для частицы во внешнем электромагнитном поле. Определим спинор χ согласно

$$\psi = \frac{1}{mc} \left(\not{p} - \frac{e}{c} \not{A} + mc \right) \chi. \quad (4.203)$$

Перепишем уравнение (4.202), как уравнение для спинора χ :

$$\left(\not{p} - \frac{e}{c} \not{A} \right) \left(\not{p} - \frac{e}{c} \not{A} \right) \chi = m^2 c^2 \chi. \quad (4.204)$$

Если вспомнить, что $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu} = \frac{1}{2i} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$, то левую часть этого уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) &= (g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}) \left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) = \\ &= g^{\mu\nu} \left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) - \frac{i}{2} (\sigma^{\mu\nu} - \sigma^{\nu\mu}) \left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) = \\ &= \left(p - \frac{e}{c} A \right)^2 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \left[p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right]. \end{aligned} \quad (4.205)$$

Учитывая при вычислении коммутатора в выражении (4.205), что

$$[p_\mu, A_\nu] = i\hbar \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \quad (4.206)$$

и что тензор электромагнитного поля дается выражением

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (4.207)$$

получаем окончательную запись для уравнения (4.204):

$$\left\{ \left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) + \frac{1}{2} \frac{e\hbar}{c} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \chi = m^2 c^2 \chi. \quad (4.208)$$

Дополнительный член

$$\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}} - i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \quad (4.209)$$

соответствует взаимодействию спинового момента $\frac{1}{2}\hbar\Sigma$ с магнитным полем \mathcal{H} и электрического момента с электрическим полем \mathcal{E} . Таким образом, уравнение Дирака предсказывает, что заряженная частица со спином $\frac{1}{2}$ обладает магнитным моментом, равным по величине одному магнетону Бора. В дальнейшем мы увидим, что к этому значению магнитного момента должны быть добавлены радиационные поправки, учитывающие взаимодействие частицы с флуктуациями вакуума.

Вернемся к уравнению (4.208). Это уравнение второго порядка для четырехкомпонентного спинора χ , и поэтому оно обладает числом решений вдвое большим, чем нужно. Однако уравнение (4.208) содержит только матрицы $\sigma^{\mu\nu}$, коммутирующие с матрицей γ_5 . Следовательно, уравнение (4.208) имеет решения со свойством $i\gamma_5\chi = \lambda\chi$. Так как $(i\gamma_5)^2 = I$, то $\lambda^2 = 1$ и $\lambda = \pm 1$. Если для матриц γ выбрано представление (4.24), то собственные функции $i\gamma_5$, соответствующие собственным значениям $+1$ и -1 , будут иметь вид

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix} \quad (4.210a)$$

и

$$\chi_- = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}. \quad (4.210b)$$

Если ограничиться решениями (4.208), соответствующими какому-либо одному собственному значению $\lambda = +1$ или $\lambda = -1$, то можно установить взаимно однозначное соответствие между этими решениями и решениями уравнения первого порядка (4.202) (уравнения Дирака). Выберем решения, для которых $i\gamma_5\chi_+ = \chi_+$. Существование взаимно однозначного соответствия будет доказано, если показать, что каждой функции ψ соответствует единственная функция χ_+ . Умножая равенство (4.203) на $\frac{1}{2}(1 + i\gamma_5)$ и используя равенство $i\gamma_5\chi_+ = \chi_+$, находим

$$\chi_+ = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_5)\psi, \quad (4.211)$$

что и является искомым соотношением¹⁾. Из (4.210a) видно также, что спинор χ_+ определяется двухкомпонентным спинором v . Заметим, что матрицу σ_{30} можно записать в виде

$$\sigma_{30} = \frac{1}{i}\gamma_3\gamma_0 = i\gamma_1\gamma_2(\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = -i\sigma_{12}\gamma_5. \quad (4.212)$$

Поэтому при действии матрицы σ_{30} на χ_+ ее можно заменить матрицей σ_{12} ; аналогично, при действии матриц σ_{10} и σ_{20} на χ_+ их можно заменить соответственно на σ_{23} и σ_{13} . Отсюда, используя для матриц γ представление (4.24), получаем уравнение для двухкомпонентного спинора:

$$\left[\left(i\hbar\partial - \frac{e}{c}A \right)^2 + \sigma \cdot (\mathcal{H} + i\mathcal{E}) \right] v = m^2c^2v. \quad (4.213)$$

Фейнман и Гелл-Манн [256] предложили описывать электроны и позитроны при помощи двухкомпонентного спинора v , удовлетворяющего уравнению второго порядка (4.213). При этом позитроны снова описываются отрицательно-частотными решениями уравнения (4.213). Можно показать

¹⁾ Обычно этот множитель пишут в форме $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$, что отвечает другому определению матрицы γ_5 . См. примечание 1 на стр. 77.— *Прим. ред.*

(см. статью Брауна [92]), что во всех теориях, в которых электроны и позитроны рождаются или уничтожаются парами, формулировка, использующая двухкомпонентный спинор ν , эквивалентна формулировке, использующей спинор ψ . Однако представляется невозможным дать такое описание в рамках лагранжевой схемы квантовой теории поля (см. статью Киббла и Полкингхорна [443]), хотя оно и пригодно как основа фейнмановского формализма интеграла по путям [250]. Мы не будем более подробно останавливаться на этом подходе к описанию электронов.

На самом деле электромагнитные свойства дираковской частицы лучше всего выясняются при помощи преобразования Ф.—В. При наличии взаимодействия генератор преобразования можно получить только в виде степенного ряда по комптоновской длине волны частицы (см. статью Фолди и Вотхойзена [266]). Поэтому и гамильтониан в представлении Ф.—В. получается в виде ряда по степеням того же параметра. Мы здесь приведем результат, содержащий члены порядка не выше $(\hbar/mc)^2$:

$$\left\{ \beta mc^2 + \frac{\beta}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - eA^0 - \frac{e\hbar}{2mc} \beta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}} + \right. \\ \left. + \frac{e\hbar}{8mc^2} \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \times \boldsymbol{\mathcal{E}} \right] - \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] \right] - \right. \\ \left. - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{E}} + \dots \right\} \psi' = i\hbar \partial_t \psi'. \quad (4.214)$$

Член $\frac{\beta}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - eA^0$ описывает взаимодействие точечного заряда с электромагнитным полем. Член $-\frac{e\hbar}{2mc} \beta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}}$ представляет взаимодействие магнитного момента, равного одному магнетону Бора, с магнитным полем. Член в квадратных скобках соответствует спин-орбитальной связи. Он возникает за счет того, что движение магнитного момента приводит к электрическому моменту, который в свою очередь взаимодействует с электрическим полем. Дарвиновский член $\frac{e^2\hbar^2}{8m^2c^2} \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{E}}$ является поправкой к прямому взаимодействию заряда как точечного. Он вызван тем, что в представлении Ф.—В. частица не сосредоточена в одной точке, а размазана по объему с радиусом, примерно равным \hbar/mc . В приближении, ограничивающемся этими членами, волновая функция положительно частотного состояния в представлении Ф.—В. совпадает с нерелятивистской волновой функцией Паули для частицы со спином $\frac{1}{2}$ (см., например, статью Бете и Солпитера [56]).

Паули [629] показал, что уравнение Дирака во внешнем поле (4.202) можно модифицировать так, чтобы оно описывало частицу с произвольным магнитным моментом. Для этого в него нужно добавить член $\frac{1}{2} \frac{\mu}{\hbar c} \sigma^{qv} F_{qv}$

$$\left\{ \gamma \cdot \left(i\partial - \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\hbar c} \sigma^{qv} F_{qv} \right\} \psi = mc\psi. \quad (4.215a)$$

Это уравнение описывает частицу, имеющую сверх «нормального» момента $\frac{e\hbar}{2mc}$ еще и «аномальный» момент $\mu \frac{e\hbar}{2mc}$. Фолди [268] исследовал вопрос, какие еще члены можно добавить в уравнение (4.202), не нарушая его релятивистскую ковариантность и калибровочную инвариантность и предполагая, что взаимодействие

а) является линейным по электромагнитному полю (предположение о слабости поля);

б) не обращается в нуль в предельном случае, когда импульс дираковской частицы равен нулю, и поэтому не содержит производных волновой функции (предположение о квазистатичности поля);

в) зависит от вектор-потенциала и его производных, взятых только в одной точке x . Он нашел, что наиболее общим уравнением является

$$\left\{ -i\gamma^{\nu} \partial_{\nu} - \frac{mc}{\hbar} \right\} \psi(x) - \frac{1}{\hbar c} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varepsilon_n \square^n \gamma^{\nu} A_{\nu} + \frac{1}{2} \mu_n \sigma^{\nu\lambda} \square^n F_{\nu\lambda} \right] \psi(x) = 0, \quad (4.2156)$$

где \square — оператор Даламбера; коэффициенты ε_n и μ_n — константы, характеризующие взаимодействие (причем ε_0 — заряд частицы, а μ_0 — ее аномальный магнитный момент). Остальные члены выражают прямое взаимодействие дираковской частицы с распределениями внешних зарядов и токов, поскольку $\square A_{\mu} = -j_{\mu}$. Уравнение вида (4.2156), содержащее члены вплоть до $n = 1$, в дальнейшем будет выведено из теории поля при рассмотрении взаимодействия заряженной дираковской частицы со слабым медленно изменяющимся электромагнитным полем. При этом члены с постоянными ε_1 и μ_1 возникнут как проявление электромагнитного взаимодействия «облака» виртуальных квантов, окружающего частицу.

Некоторые задачи с уравнением Дирака (4.202а) могут быть решены точно. Наиболее важными из них являются:

1) частица в кулоновском поле (Дирак [169], Дарвин [153], Гордон [334], Мотт [565], Хиллераас [387]);

2) частица в однородном магнитном поле, заполняющем все пространство (Раби [656], Хафф [383], Заутер [760], Джонсон и Липшман [396]);

3) частица в поле плоской электромагнитной волны (Волков [812]).

Эти задачи рассмотрены многими авторами, и мы отсылаем читателя к обзору Бете и Солпитера [56] в *Handbuch der Physik* или к книге Ахиезера и Берестецкого [3], где можно найти подробные обсуждения.

Кулоновские решения имеют важные приложения, особенно для вычисления энергетических уровней водородоподобных атомов и для расчета спектров рентгеновского K - и L -излучения тяжелых элементов.

Уровни энергии водородоподобного атома $E_{n,j}$ определяются главным квантовым числом n и квантовым числом полного момента количества движения j :

$$E_{n,j} = mc^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{\left(n' + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2 Z^2} \right)^2} \right\}^{1/2},$$

$$n' = 0, 1, 2, \dots; \quad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots; \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \cong \frac{1}{137},$$

$$E_{n,j} \approx mc^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 mc^2 \frac{Z^2}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left(\frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) + \dots \right],$$

$$n = n' + j + \frac{1}{2} = 1, 2, \dots \quad (4.216)$$

Если для матриц Дирака выбрано представление, данное в § 1 настоящей главы, то «большим» компонентам волновой функции ψ_1 и ψ_2 будут соот-

ветствовать орбитальные моменты $l_1 = j + \frac{1}{2}$ (или $l_1 = j - \frac{1}{2}$), а малым компонентам ψ_3 и ψ_4 — орбитальные моменты $l_2 = j - \frac{1}{2}$ (или $l_2 = j + \frac{1}{2}$). Таким образом, большие и малые компоненты имеют противоположные четности. Четность больших компонент $(-1)^{l_1}$ принимают в качестве четности состояния.

Экспериментальные данные по тонкой структуре уровней атома водорода и водородоподобных атомов, в частности He^+ , находятся в хорошем согласии с теорией Дирака. Так, экспериментально подтверждено вырождение уровней по l при одном и том же значении j . Единственное исключение составляют уровни $S_{1/2}$ и $P_{1/2}$. Для этого случая Лэмб [469] нашел, что уровень $2S_{1/2}$ атома водорода расположен на 1058 Мгц выше уровня $2P_{1/2}$. С точностью до $0,1 \text{ Мгц}$ это расщепление было объяснено радиационными поправками к результатам вычислений по простой теории Дирака. (Детальное описание спектра атома водорода и его интерпретацию см. у Серье [725].)

Теория рентгеновских спектров тяжелых элементов еще далека от такого совершенства. Бреннер и Браун [86] указали, что, кроме лэмбовского сдвига и поляризации вакуума, на краю K -поглощения следует учесть еще и другие факторы — например, энергию взаимодействия между двумя K -электронами, энергию взаимодействия K -электрона со всеми внешними электронами. Тщательный учет этих эффектов был сделан Коэном [141, 142], получившим волновые функции при помощи метода релятивистского самосогласованного поля. Наилучшее экспериментальное значение для K -уровня энергии атома ртути равно $6107,7 \pm 0,6 \text{ Ry}$. Расхождение между этой экспериментальной цифрой и теоретическим значением, учитывающим все эффекты порядка amc^2 , за исключением лэмбовского сдвига, приблизительно равно 30 Ry . Браун, Лангер и Шеффер [90] вычислили лэмбовский сдвиг K -уровня ртути без учета поляризации вакуума и получили для него значение 41 Ry . Уичмэн и Кролл [844] вычислили вклад поляризации вакуума и нашли, что он равен -3 Ry , а, следовательно, лэмбовский сдвиг равен 38 Ry . Таким образом, учет лэмбовского сдвига существенно улучшает согласие теории и эксперимента. Теория уровней энергии L -оболочки пока еще не разработана с такой же точностью, так как вычисления лэмбовского сдвига уровней энергии $2s$ -электронов атома ртути чрезвычайно сложны. Предварительный расчет для разности уровней энергии $2s$ и $1s$ (см. работу Коэна [142]) дал значение $5035,2 \text{ Ry}$, в то время как экспериментальное значение равно 5018 Ry .

Теория рассеяния электронов в кулоновском поле первоначально была развита Моттом в 1929 г. [565] (см. также книгу Мотта и Месси [566]). Экспериментальные данные последних лет по рассеянию электронов больших энергий на ядрах служат источником наиболее точной и подробной информации о размерах и форме распределения заряда в ядре. Этому благоприятствуют два обстоятельства. Во-первых, то, что природа взаимодействия электронов с нуклонами и ядрами достаточно хорошо объясняется теоретически (это взаимодействие в основном электромагнитное). Во-вторых, экспериментаторам легко удается получать интенсивные моноэнергетические пучки электронов высоких энергий. Обзор всех методов исследования распределения заряда в ядре и экспериментальных результатов по рассеянию электронов на ядрах, полученных до 1955 г., был дан Фордом и Хиллом [271]. Превосходная обзорная статья Хофштадтера [378] содержит полную сводку результатов теории рассеяния электронов, а также экспериментальные данные по рассеянию электронов высоких

энергий на нуклонах и ядрах с соответствующими теоретическими выводами (см. также работу Равенхолла [660]). Подробно с этим вопросом читатель может ознакомиться по упомянутым статьям.

В заключение этого параграфа мы выведем некоторые соотношения, связывающие решения для заряда $+e$ с решениями для заряда $-e$. С этой целью рассмотрим набор матриц γ_μ^T ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Транспонируя перестановочные соотношения для матриц γ , $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}$, находим, что матрицы γ_μ^T удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям

$$\gamma_\mu^T \gamma_\nu^T + \gamma_\nu^T \gamma_\mu^T = 2g_{\mu\nu}. \quad (4.217)$$

Так как представление γ при помощи 4×4 матриц является неприводимым, то, согласно основной теореме § 2 настоящей главы, существует такая неособенная матрица B , что

$$\gamma^{\mu T} = B^{-1} \gamma^\mu B. \quad (4.218)$$

При этом B может быть выбрана унитарной. Используя соотношение, полученное с помощью транспонирования соотношения (4.218), можно проверить, что матрица $B^T B^{-1}$ коммутирует со всеми матрицами γ^μ , и поэтому $B^T B^{-1} = aI$, где a — некоторая константа. Возводя обе части равенства $B^T B^{-1} = aI$ в минус первую степень, комплексно сопрягая и вспоминая, что B была выбрана унитарной, находим, что $a = \pm 1$ и что, следовательно, $B = \pm B^T$. Чтобы решить вопрос, какой знак (+ или -) правилен, замечаем, что при выборе $B = -B^T$

$$\gamma^\mu B = B B^{-1} \gamma^\mu B = -B^T \gamma^{\mu T} = -(\gamma^\mu B)^T, \quad (4.219a)$$

и аналогично,

$$\gamma^5 B = B B^{-1} \gamma^5 B = -B^T (\gamma^3 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^0)^T = -(\gamma^5 B)^T. \quad (4.219б)$$

Таким образом, шесть матриц B , $B\gamma^\mu$ и $B\gamma^5$ будут антисимметричными. Тем же способом можно проверить, что десять матриц $B\gamma^5\gamma^\mu$ и $B\sigma^{\mu\nu}$ будут симметричными. Наоборот, при выборе $B = +B^T$ десять матриц $B\gamma^5\gamma^\mu$ и $B\sigma^{\mu\nu}$ были бы антисимметричны, а шесть матриц B , $B\gamma^\mu$ и $B\gamma^5$ — симметричны. Однако последний случай невозможен, так как десять матриц $B\gamma^5\gamma^\mu$ и $B\sigma^{\mu\nu}$ линейно независимы, а линейно независимых антисимметричных 4×4 матриц имеется только шесть. Отсюда заключаем, что $B = -B^T$ (см. Паули [624]). Введем матрицу

$$C = -\gamma_5 B. \quad (4.220)$$

Она унитарна

$$C^{-1} = -B^{-1} \gamma_5^{-1} = B^{-1} \gamma_5 = -B^* \gamma_5^* = (-\gamma_5 B)^* = C^* \quad (4.221)$$

и, что следует из (4.219б), антисимметрична

$$C^T = -C. \quad (4.222)$$

Кроме того, при преобразовании подобия при помощи матрицы C матрицы γ^μ переходят в матрицы, транспонированные и взятые со знаком минус:

$$C^{-1} \gamma^\mu C = -B^{-1} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma_5 B = -B^{-1} \gamma^{\mu T} B = -\gamma^{\mu T}. \quad (4.223)$$

Рассмотрим теперь уравнение Дирака при наличии внешнего электромагнитного поля

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = e\gamma^\mu A_\mu \psi, \quad (4.224a)$$

$$(i\partial_\mu \tilde{\psi} \gamma^\mu + m\tilde{\psi}) = -e\tilde{\psi} \gamma^\mu A_\mu. \quad (4.224b)$$

Если уравнение (4.224b) транспонировать и заменить $\gamma^{\mu T}$ на $-C^{-1}\gamma^\mu C$, то получим

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)C\tilde{\psi}^T = -e\gamma^\mu A_\mu C\tilde{\psi}^T. \quad (4.225)$$

Таким образом, если спинор ψ описывает движение частицы с зарядом e и магнитным моментом μ , то спинор $C\tilde{\psi}^T$ описывает движение частицы с зарядом $-e$ и магнитным моментом $-\mu$. Мы будем называть спинор $C\tilde{\psi}^T$ зарядово-сопряженным спинором и введем для него обозначение

$$\psi^c = C\tilde{\psi}^T. \quad (4.226)$$

Нужно заметить, что в рассматриваемой одночастичной теории операция зарядового сопряжения U_c , при которой

$$U_c \psi = \psi^c = C\tilde{\psi}^T, \quad (4.227)$$

антиунитарна. В предположении релятивистской инвариантности операции зарядового сопряжения спиноры ψ^c и ψ должны обладать одинаковыми трансформационными свойствами при преобразованиях Лоренца, т. е.

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x), \quad (4.228a)$$

$$\psi'^c(x') = S(\Lambda)\psi^c(x). \quad (4.228b)$$

Подставляя выражение (4.226) для ψ^c в (4.228b) и вспоминая, что $\tilde{\psi}' = \pm \tilde{\psi} S^{-1}(\Lambda)$ (где плюс берется для $L\uparrow$, а минус $-$ для $L\downarrow$), заключаем, что $\pm (S^{-1})^T \tilde{\psi}^T = S C \tilde{\psi}^T$ или что

$$S^T(\Lambda) = C^{-1} S^{-1}(\Lambda) C \quad \text{при } \Lambda \in L\uparrow \quad (\text{т. е. когда } \Lambda^{00} \geq 1), \quad (4.229a)$$

$$S^T(\Lambda) = -C^{-1} S^{-1}(\Lambda) C \quad \text{при } \Lambda \in L\downarrow \quad (\text{т. е. когда } \Lambda^{00} \leq -1). \quad (4.229b)$$

Условия (4.229a) и (4.229b) позволяют уменьшить число допустимых значений для матриц $S(i_s)$ и $S(i_t)$. Например, если в качестве $S(i_s)$ выбрать матрицу γ^0 , то $\gamma^{0T} = \gamma^0 = (\gamma^0)^{-1}$ и условие (4.229a) не выполнено. Поэтому в качестве $S(i_s)$ можно выбрать лишь $\pm i\gamma^0$ (это показал Рака [657]). Для временных отражений выполнение условия (4.229b) гарантируется выбором $S(i_t) = \pm i\gamma_5 C = \pm iB$.

Наконец, остановимся на свойствах зарядово-сопряженных спиноров в случае свободных частиц. Согласно тому, что говорилось выше, электрон описывается волновой функцией $u(p)$, которая в импульсном представлении подчиняется уравнению

$$(\not{p} - m)u(p) = 0. \quad (4.230)$$

Было установлено также, что волновой функцией позитрона с импульсом $+\mathbf{p}$ служит отрицательно-частотный спинор с импульсом $-\mathbf{p}$, т. е. волновая функция электрона, отсутствию которого (в фоне состояний

с отрицательной энергией) соответствует этот позитрон. Такой спинор удовлетворяет уравнению

$$(-\not{p} - m)v(p) = 0 \quad (4.231a)$$

и

$$\tilde{v}(p)(-\not{p} - m) = 0. \quad (4.231b)$$

Снова применяя операцию транспонирования к уравнению (4.231b) и используя соотношение (4.223), находим, что спинор

$$C\tilde{v}^T(p) = u^c(p) \quad (4.232)$$

удовлетворяет уравнению $(\not{p} - m)u^c(p) = 0$. Таким образом, зарядово-сопряженный спинор описывает частицу с импульсом $+p$. Используя свойства матрицы C , последнее соотношение можно обратить и написать

$$v(p) = C[\tilde{u}^c(p)]^T. \quad (4.233)$$

Уравнения для частиц с массой, равной нулю

В этой главе мы рассмотрим два уравнения для частиц с массой, равной нулю, представляющих наибольший интерес для приложений в физике элементарных частиц: уравнение для нейтрино и уравнение (Максвелла) для фотона. Уравнение для поля тяготения мы рассматривать не будем.

§ 1. Двухкомпонентная теория нейтрино

Впервые эта теория для описания частицы с массой, равной нулю, и со спином $1/2$ была предложена Вейлем в 1929 г. [839]. Она обсуждалась Паули в его статье в *Handbuch der Physik* [622], но была им отвергнута из-за отсутствия в ней инвариантности относительно пространственных отражений. В последнее время были проведены эксперименты, которые показали, что в β -распаде четность не сохраняется. Для объяснения наблюдаемого несохранения четности Ли и Янг [488] (которым принадлежит заслуга самой постановки вопроса о возможном несохранении четности и которые указали пути проверки этой гипотезы), Ландау [475] и Салам [694] предложили описывать нейтрино при помощи уравнения Вейля.

Волновое уравнение, которому подчиняется двухкомпонентная волновая функция $\varphi(x)$, описывающая нейтрино, имеет вид

$$i\hbar\partial_t\varphi(x) = -c\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi(x), \quad (5.1)$$

или, если использовать обозначение $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$,

$$i\hbar\partial_t\varphi = c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\varphi, \quad (5.2)$$

где σ_i представляют собой 2×2 матрицы Паули. Форм-инвариантность уравнения Вейля относительно ограниченных неоднородных преобразований Лоренца можно показать, рассуждая так же, как в случае уравнения Дирака. Удобно ввести матрицу $\sigma_0 = I$ и записать уравнение (5.2) в виде

$$\sigma^\mu p_\mu \varphi = 0. \quad (5.3)$$

Это уравнение будет форм-инвариантно, если функция $\varphi(x)$ при ограниченных неоднородных преобразованиях Лоренца $x' = \Lambda x + a$, $p' = \Lambda^{-1}p$ преобразуется по закону

$$\varphi'(x') = S(\Lambda)\varphi(x), \quad (5.4)$$

где $S(\Lambda)$ есть 2×2 матрица, обладающая свойством

$$S(\Lambda) \sigma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \sigma^\nu. \quad (5.5)$$

Уравнение Вейля в штрихованной системе запишется в виде

$$\sigma^\mu p'_\mu \psi'(x') = 0. \quad (5.6)$$

Вид $S(\Lambda)$ для различных частных случаев преобразований Лоренца можно найти так же, как в дираковском случае. Для преобразования Лоренца вдоль i -й оси

$$S(i, \omega) = e^{-1/2\omega\sigma_i}, \quad \text{th } \omega = \frac{v}{c}, \quad (5.7)$$

а для вращений на угол θ вокруг j -й оси

$$S(j; \theta) = e^{1/2i\theta\sigma_j}. \quad (5.8)$$

Таким образом, спинор ψ при однородных преобразованиях Лоренца преобразуется по неприводимому представлению $D^{(1/2, 0)}$ однородной группы Лоренца. Для описания частицы со спином $1/2$ и с массой, равной нулю, имеется и другое волновое уравнение, которому подчиняется волновая функция ψ , преобразующаяся по представлению $D^{(0, 1/2)}$ однородной группы Лоренца. Оно имеет вид

$$i\hbar\partial_t\psi(x) = +i\hbar c\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\psi(x). \quad (5.9)$$

При однородном преобразовании Лоренца вдоль i -й оси функция ψ преобразуется по закону

$$\psi' = e^{+1/2\omega\sigma_i}\psi. \quad (5.10)$$

Как указывалось раньше, после добавления пространственных отражений представления $D^{(1/2, 0)}$ и $D^{(0, 1/2)}$ уже не являются неприводимыми. При пространственном отражении они переходят друг в друга $D^{(1/2, 0)} \rightleftharpoons D^{(0, 1/2)}$, и только прямая сумма этих представлений $D^{(1/2, 0)} \oplus D^{(0, 1/2)}$ является неприводимой. Поэтому уравнения (5.4) и (5.9) не ковариантны относительно пространственных отражений.

Решения уравнения (5.4) в виде плоской волны записываются в виде

$$\psi(x) = e^{-ip \cdot x} u(p), \quad (5.11)$$

где $u(p)$ — двухкомпонентный спинор, удовлетворяющий уравнению

$$p_0 u = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u. \quad (5.12)$$

Умножая обе части этого уравнения на $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$, получаем

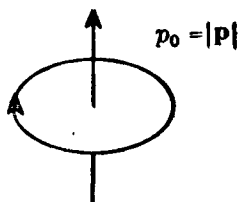
$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2) u = 0, \quad (5.13)$$

и, следовательно, отличные от нуля решения существуют, только когда $p_0 = \pm |\mathbf{p}|$, так что нейтрино движется со скоростью света. Из уравнения (5.12) видно далее, что решения с определенным знаком энергии соответствуют определенной проекции спина на направление движения. Экспериментальные данные по β -распаду указывают, что у нейтрино спин всегда ориентирован антипараллельно направлению движения, и, следовательно, оно описывается уравнением (5.9). Его решения в виде

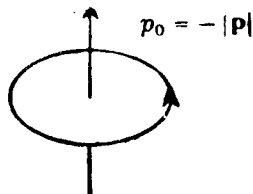
плоских волн записываются $\psi = \exp(-ipx)v(p)$, причем спинор $v(p)$ подчиняется уравнению

$$p_0 v(p) = -\sigma \cdot p v(p). \quad (5.14)$$

Решение этого уравнения с $p_0 = +|p|$ мы будем называть состоянием нейтрино. В этом состоянии спин антипараллелен импульсу p и может быть представлен левым винтом, как это изображено на фиг. 2. Решение с $p_0 = -|p|$ соответствует спину, направленному параллельно импульсу p и представляемому правым винтом (фиг. 3). При интерпретации отрицательно-частотных состояний при помощи теории дырок импульс анти-



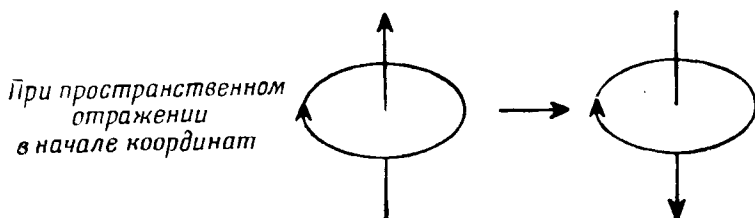
Ф и г. 2.



Ф и г. 3

нейтрино направлен противоположно импульсу незанятого отрицательно-частотного состояния. Поэтому соотношение между направлениями спина и импульса у антинейтрино представляется правым винтом.

Отсутствие в двухкомпонентной теории инвариантности относительно пространственных отражений можно изобразить графически. При операции пространственного отражения ($p \rightarrow -p$, $x \rightarrow -x$, $\sigma \rightarrow \sigma$) состояние с энергией $p_0 = +|p|$, импульсом p и спиральностью $\frac{\sigma \cdot p}{|p|} = +1$ переходит в состояние с энергией $p_0 = +|p|$; импульсом $-p$ и спиральностью -1 ,



Ф и г. 4.

но такое состояние не является состоянием нейтрино (фиг. 4). Отсутствие инвариантности можно показать и иначе. А именно, поскольку p — это полярный вектор, а σ — аксиальный, то произведение $\sigma \cdot p$ ведет себя при пространственных отражениях, как псевдоскаляр.

Двухкомпонентная теория Вейля эквивалентна четырехкомпонентной теории Дирака при условии, что на выбор четырехкомпонентных волновых функций наложено некоторое ограничение. Чтобы найти это ограничение, рассмотрим решения уравнения Дирака для частицы с массой, равной нулю:

$$i\gamma_\mu \partial^\mu \psi(x) = 0. \quad (5.15)$$

В гамильтоновой форме оно запишется в виде

$$i\partial_t \psi(x) = -i\gamma^0 \gamma \cdot \nabla \psi(x). \quad (5.16)$$

В представлении

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = -i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

имеем

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = i\gamma_5 \boldsymbol{\gamma}^0 \boldsymbol{\gamma}, \quad (5.19)$$

так что гамильтониан можно записать в виде

$$H = i\gamma_5 \Sigma \cdot \mathbf{p} = i\gamma_5 |\mathbf{p}| s(\mathbf{p}). \quad (5.20)$$

Поэтому собственные функции операторов H и $s(\mathbf{p})$ будут также собственными функциями оператора $i\gamma_5$. Если ось z направить по импульсу \mathbf{p} , то четыре линейно независимых решения уравнения $Hu = p_0 u$ представятся в виде

Спиральность:

$$\begin{matrix} +1 & -1 & +1 & -1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (5.21)$$

Положительная энергия
Отрицательная энергия

Собственные значения оператора $i\gamma_5$, соответствующие этим решениям, приведены в табл. 1.

Таблица 1

p_0	Спиральность	Собственное значение оператора $i\gamma_5$
+	+1	+1
+	-1	-1
-	+1	-1
-	-1	+1

Таким образом, собственные значения оператора $i\gamma_5$ для решений с положительной энергией совпадают с собственными значениями оператора спиральности, а для решений с отрицательной энергией $i\gamma_5$ отличаются на множитель -1 . Выше мы видели, что нейтрино описывается двухкомпонентным уравнением, причем его решения в виде плоской волны обладают свойством: решение с $p_0 = +|\mathbf{p}|$ имеет спиральность -1 , а решение $p_0 = -|\mathbf{p}|$ имеет спиральность $+1$. Таким же свойством обладают и решения уравнения (5.16) в виде плоской волны, если на них наложено ограничивающее условие

$$\psi = -i\gamma_5 \psi. \quad (5.22)$$

Это условие инвариантно относительно ограниченных преобразований Лоренца. Можно поступить иначе: ввести четырехкомпонентный спинор ψ_n , который выражается через спинор ψ , удовлетворяющий урав-

нению (5.16) согласно

$$\psi_n = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_5)\psi. \quad (5.23)$$

Спинор ψ_n автоматически удовлетворяет условию

$$i\gamma_5\psi_n = -\psi_n. \quad (5.24)$$

В представлении, где

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.25a)$$

$$\gamma_5 = i \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (5.25b)$$

спинор ψ_n в сущности является двухкомпонентным

$$\psi_n = \begin{pmatrix} \psi'_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

так как оператор проектирования $1/2(1 - i\gamma_5)$ обращает в нуль две нижние компоненты. Двухкомпонентный спинор ψ'_n удовлетворяет уравнению

$$-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \psi'_n = p_0 \psi'_n, \quad (5.27)$$

получающемуся в результате умножения уравнения (5.16) на $1/2(1 - i\gamma_5)$.

Можно проверить, что в четырехкомпонентной теории частиц с массой, равной нулю, существует преобразование $\Phi - V$, которое освобождает гамильтониан от нечетных операторов, придавая ему вид

$$H' = \beta c |\mathbf{p}|. \quad (5.28)$$

Это каноническое преобразование записывается в виде

$$e^{iS} = e^{\frac{\pi}{4} \beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right). \quad (5.29)$$

Оператор координаты в дираковском представлении снова может быть определен выражением

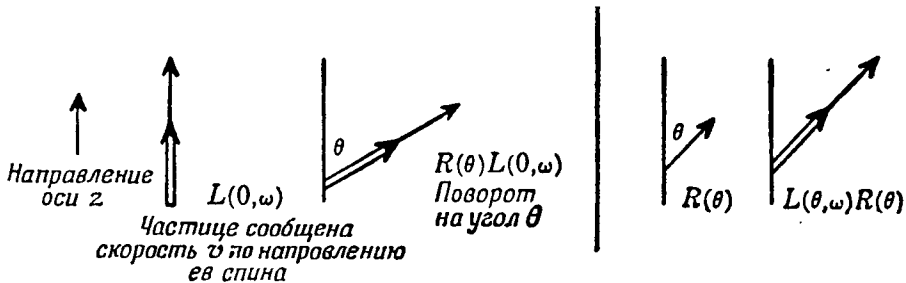
$$X = e^{-iS} x e^{iS}. \quad (5.30)$$

Он обладает желаемыми свойствами: а) при вращениях преобразуется, как вектор; б) $[X_i, X_j] = 0$; в) $[X_i, p_j] = i\delta_{ij}$; г) в применении к положительного-частотным состояниям производная X_i по времени равна $cp_i/|\mathbf{p}|$. С другой стороны, можно показать, что в двухкомпонентной теории не существует оператора координаты, который преобразовывался бы при вращениях как вектор (см., например, работу Фронсдейла [286]).

§ 2. Состояния поляризации частиц с массой, равной нулю

Собственный момент количества движения частицы с массой, равной нулю, ориентирован параллельно направлению ее движения. Если связывать со спином некоторое внутреннее движение, то оно должно совершаться в плоскости, перпендикулярной скорости, и поэтому говорят

о «поперечной поляризации». Для частиц с массой, равной нулю, значение спиральности $s(\mathbf{p}) = \pm 1$ — релятивистски инвариантная величина в отличие от случая частиц с ненулевой массой. У частицы с конечной массой покоя спиновый момент количества движения также может быть параллелен скорости, т. е. для нее также возможны состояния с поперечной поляризацией. Однако эти понятия не лоренц-инвариантны: если скорость и спин параллельны в одной системе отсчета, то они, вообще говоря, не будут параллельны в другой. В частности, очевидно, что в системе отсчета, в которой частица покоится, спиновый момент не параллелен скорости, так как последняя равна нулю. Всякая частица с конечной массой может быть описана в системе координат, в которой она покоится.



Ф и г. 5.

Поэтому для такой частицы утверждение, что ее спин параллелен направлению движения, не может быть верным для всех наблюдателей, и, следовательно, частица должна иметь и другие состояния поляризации. Однако для частицы с массой, равной нулю, движущейся со скоростью света, не существует системы координат, относительно которой бы она покоилась. Этим объясняется различие между частицами с массой, равной нулю, имеющими только два направления поляризации при любом значении их спина, и частицами с конечной массой, которые имеют $2s + 1$ состояние поляризации при спине s . Вигнер [863, 864] проанализировал это различие более подробно. Его анализ состоит в следующем.

Рассмотрим покоящуюся частицу в состоянии с заданным направлением поляризации. Пусть этим направлением будет ось z . Поворот частицы и одновременно сообщение ей скорости v в направлении поляризации приводят к одному и тому же состоянию частицы, независимо от порядка, в каком выполняются эти операции, т. е. сообщается ли частице сперва скорость v в направлении оси z , а затем совершается поворот, или, наоборот, сперва совершается поворот, а затем сообщается скорость в направлении поляризации. Это иллюстрируется фиг. 5 (простая стрелка обозначает спин, двойная — скорость частицы). Сформулированное утверждение проще всего доказать, если сравнить, как выглядит состояние частицы в различных лоренцевых системах отсчета. Если смотреть на одно и то же «стандартное состояние» из различных систем координат, то при этом представляются все возможные состояния физической системы. Для задания стандартного состояния нужно фиксировать какую-либо лоренцеву систему отсчета и потребовать, чтобы состояние, принимаемое в качестве стандартного, имело в этой системе отсчета заданные характеристики. В качестве стандартного состояния выберем состояние, в котором частица покоится, а спин ее ориентирован по оси z . (Понятно, что такое стандартное состояние возможно только для частиц с ненулевой массой покоя.) Если,

например, смотреть на стандартное состояние из системы координат, движущейся вдоль оси z со скоростью $-v$, то увидим частицу, движущуюся вдоль той же оси со скоростью $+v$, причем спин ее будет ориентирован по-прежнему вдоль оси z . Точно так же, если на стандартное состояние смотреть из повернутой системы координат, например из системы, полученной поворотом на угол θ вокруг оси x , то относительно нее спин частицы лежит в плоскости $z'y'$ и составляет угол θ с осью z' . И вообще каждая лоренцева система отсчета определяет некоторое состояние физической системы, а именно то состояние, в котором частица видна из этой системы отсчета. Два состояния физической системы будут тождественны тогда и только тогда, когда совпадают определяющие их лоренцевы системы отсчета. Два состояния будут приближенно одинаковыми, если определяющие их преобразования Лоренца бесконечно мало отличаются друг от друга, а именно на преобразование Лоренца, близкое к тождественному. Подчеркнем, что такое сравнение состояний не зависит от значений массы и спина частицы и определяется только свойствами преобразований Лоренца. Матрица¹⁾

$$L(0, \omega) = \begin{pmatrix} \text{ch } \omega & 0 & \text{sh } \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sh } \omega & 0 & \text{ch } \omega \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

определяет преобразование в лоренцеву систему отсчета, относительно которой частица движется в направлении оси z со скоростью v и имеет спин, ориентированный также по оси z . Новая система отсчета движется вдоль оси z со скоростью $-v$ относительно первоначальной, в которой определено стандартное состояние. При этом, если вспомнить формулу (2.10), $\text{th } \omega = v/c$. Напомним также, что матрица, соответствующая повороту на угол θ в плоскости yz , есть

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Пусть \mathbf{n} — единичный вектор, лежащий в плоскости zy и составляющий угол θ с осью z : $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n} = \cos \theta$. Система координат, движущаяся со скоростью $-v$ в направлении \mathbf{n} , получается при помощи преобразования

$$L(\theta, \omega) = R(\theta) L(0, \omega) R(-\theta). \quad (5.33)$$

Доказательство: Преобразование $R(-\theta)$ поворачивает систему координат так, чтобы ось z' совпала с \mathbf{n} , преобразование $L(0, \omega)$ сообщает ей скорость $-v$ вдоль \mathbf{n} , а преобразование $R(\theta)$ делает оси z и z' снова параллельными. Далее, для получения состояния частицы, движущейся в направлении \mathbf{n} и поляризованной в этом же направлении, мы сначала повернем систему координат на угол $+\theta$ (так чтобы спин частицы составил угол θ с осью z'), а затем сообщим ей скорость $-v$ в направлении \mathbf{n} , т. е. выполним преобразование

$$\begin{aligned} T(\theta, \omega) &= L(\theta, \omega) R(\theta) = R(\theta) L(0, \omega) R(-\theta) R(\theta) = R(\theta) L(0, \omega) = \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch } \omega & 0 & \text{sh } \omega \\ \text{sh } \omega \sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \text{ch } \omega \\ \cos \theta \text{sh } \omega & -\sin \theta & \cos \theta \text{ch } \omega \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

¹⁾ Так как ось x' не играет роли в последующем рассмотрении, то соответствующие величины опущены, и три строки столбца L относятся к осям t, y и z .

которое и определяет упомянутое состояние частицы. Из равенства

$$R(\theta) T(0, \omega) = R(\theta) L(0, \omega) \quad (5.35)$$

вытекает, что то же самое состояние можно получить, сперва сообщая системе координат скорость $-v$ и только затем выполняя поворот. Результирующее состояние оказалось тем же самым, поскольку совпали системы координат, так что относительно обеих частица находится в одном и том же состоянии. Результат (5.34) означает, что утверждение: «Спин частицы ориентирован параллельно или антипараллельно ее скорости» — инвариантно относительно вращений. Ясно также, что оно останется верным и при дальнейшем увеличении скорости вдоль оси z . Снова рассмотрим частицу, движущуюся вдоль оси z со скоростью v и имеющую спин, ориентированный также вдоль оси z . Относительно системы координат l' , движущейся в направлении $-y$ со скоростью $v' = c \operatorname{th} \omega'$, скорость частицы будет направлена между осями y и z , а спин уже не будет параллелен направлению ее движения, если только скорость v не близка к скорости света. С другой стороны, состояния, порождаемые преобразованием $L(0, \omega)$ при больших значениях параметра ω (т. е. при $v \sim c$), таковы, что относительно различных лоренцевых систем отсчета, которые движутся слишком быстро в направлении движения частицы, спин и скорость в этих состояниях почти параллельны. В предельном случае частиц, движущихся со скоростью света, т. е. частиц с массой, равной нулю, утверждение, что спин и скорость параллельны, справедливо во всех лоренцевых системах отсчета.

Состояние, которое видит наблюдатель, находящийся в лоренцевой системе отсчета l' , определяется преобразованием

$$\begin{aligned} L\left(\frac{1}{2}\pi, \omega'\right) L(0, \omega) &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \omega' & \operatorname{sh} \omega' & 0 \\ \operatorname{sh} \omega' & \operatorname{ch} \omega' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \omega & 0 & \operatorname{sh} \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} \omega & 0 & \operatorname{ch} \omega \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \omega' \operatorname{ch} \omega & \operatorname{sh} \omega' & \operatorname{ch} \omega' \operatorname{sh} \omega \\ \operatorname{sh} \omega' \operatorname{ch} \omega & \operatorname{ch} \omega' & \operatorname{sh} \omega' \operatorname{sh} \omega \\ \operatorname{sh} \omega & 0 & \operatorname{ch} \omega \end{pmatrix}. \quad (5.36) \end{aligned}$$

Чтобы привести преобразование (5.36) к виду (5.34), который соответствует движущейся частице со спином, ориентированным параллельно ее скорости, нужно умножить матрицу (5.36) справа на матрицу поворота $R(\varepsilon)$ (т. е. прежде чем сообщать частице какое-либо движение, нужно повернуть ее спин). Угол поворота дается выражением

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{th} \omega'}{\operatorname{th} \omega} = \frac{v'}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}. \quad (5.37)$$

Угол ε называется углом между спином и скоростью. Отсюда видно, что при большой скорости v спин увлекается в направлении движения, так что угол между направлением спина и направлением движения относительно движущей системы координат очень мал. Таким образом, свойство параллельности спина и скорости частицы с массой, равной нулю, сохраняется при всех собственных преобразованиях Лоренца. Если предположить инвариантность относительно пространственных отражений, то у частицы с массой, равной нулю, должны быть два состояния поляризации (а не одно), отличающиеся противоположными значениями спиральности. Если же теория не инвариантна относительно отражений, т. е.

зеркально отраженного состояния не существует, то, как мы видели, у частицы с массой, равной нулю, имеется только одно состояние поляризации. С другой стороны, напомним, что для частицы с конечной массой существование двух состояний поляризации вытекает уже из инвариантности теории относительно *собственных* преобразований Лоренца (см. гл. 2).

§ 3. Уравнение для фотона

В качестве «волновой функции» одиночного фотона можно принять векторную функцию $A_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$), удовлетворяющую уравнению

$$i\hbar c \partial_0 \mathbf{A}(x) = \hbar \sqrt{-\nabla^2} \mathbf{A}(x) \quad (5.38a)$$

и дополнительному условию (закрепляющему калибровку)

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0. \quad (5.38b)$$

Физическая интерпретация функции $\mathbf{A}(x)$ следует из рассмотрения ее фурье-образа $\chi(\mathbf{k})$, определяемого согласно

$$\mathbf{A}(x) = \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{-ik \cdot x} \chi(\mathbf{k}). \quad (5.39)$$

Здесь $k_0 = |\mathbf{k}|$, и поэтому выражение (5.39) является решением уравнения (5.38). Тогда величина $|\chi(\mathbf{k})|^2 d^3k$ пропорциональна вероятности того, что фотон имеет импульс в интервале между \mathbf{k} и $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$. Введем три линейно независимых вектора $\mathbf{e}_1(\mathbf{k})$, $\mathbf{e}_2(\mathbf{k})$ и $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$, причем

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_j(\mathbf{k}) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \quad (5.40a)$$

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (i, j = 1, 2). \quad (5.40b)$$

Тогда условие поперечности (5.38b) означает, что

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{i=1,2} \int \frac{d^3k}{k_0} \chi_i(\mathbf{k}) \mathbf{e}_i(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x}, \quad (5.41)$$

где $\chi_i(\mathbf{k})$ — амплитуда вероятности того, что фотон имеет импульс \mathbf{k} и поляризацию i . Если скалярное произведение имеет вид

$$(\chi, \varphi) = \sum_{i=1}^2 \int \frac{d^3k}{k_0} \bar{\chi}_i(\mathbf{k}) \varphi_i(\mathbf{k}), \quad (5.42)$$

то исследование, подобное тому, которое проводилось в случае спина, равного 0, показывает, что для фотона нельзя построить локализованные состояния [576]. В общих чертах дело заключается в том, что должным образом можно распорядиться только зависимостью от импульсов, лежащих в плоскости, перпендикулярной к «направлению» искомой локализованной (векторной) волновой функции, но невозможно локализовать фотон в направлении его поляризации. По этой же причине только в импульсном представлении функцию \mathbf{A} можно интерпретировать как волновую функцию фотона. Ковариантное описание однофотонных состояний мы откладываем до гл. 9.

Часть вторая

**ВТОРИЧНОЕ
КВАНТОВАНИЕ**

Вторичное квантование. Нерелятивистская теория

В этой главе мы установим, что обычное описание системы n тождественных частиц с помощью волновой механики эквивалентно операторному формализму, который стал известен как «вторичное квантование». Он позволяет проводить вычисления, в которых автоматически учитываются комбинаторные стороны задачи, связанные с конкретной статистикой (Бозе — Эйнштейна или Ферми — Дирака), которой подчиняются рассматриваемые частицы. Далее, этот формализм позволяет обобщить обычную квантовую механику на системы, для которых число частиц уже не является интегралом движения. Такое обобщение необходимо для описания физических явлений в релятивистском случае.

Эквивалентность операторного описания (с помощью вторичного квантования) системы n частиц и описания обычной шредингеровской теории была установлена Иорданом и Клейном [397] для частиц, подчиняющихся статистике Бозе, а для частиц, подчиняющихся статистике Ферми, — Иорданом и Вигнером [399].

Впоследствии операторный формализм был переформулирован в «пространстве Фока» Фоком [263], который обобщил обычную шредингеровскую волновую механику на системы, для которых число частиц не является интегралом движения. Работа Фока основывалась на предыдущих исследованиях Ландау и Пайерлса [471], которые рассмотрели в конфигурационном пространстве квантованное электромагнитное поле, взаимодействующее с веществом. Исследование Ландау и Пайерлса в свою очередь было стимулировано Оппенгеймером, Гейзенбергом и Паули [363], сформулировавшими в общих чертах квантовую теорию поля в конфигурационном пространстве. Наше изложение частично основано на неопубликованных лекциях Баргманна (1951 г.) и на статьях Фока [263] и Пирена [641].

§ 1. Перестановки и транспозиции

В этом параграфе мы кратко напомним некоторые простые свойства перестановок.

Перестановкой называется операция, которая связывает совокупность n упорядоченных объектов (элементов), например x_1, x_2, \dots, x_n , с той же совокупностью объектов, расположенных в другом порядке. Представим операцию, которая переводит x_1 в x_{α_1} , x_2 в x_{α_2} и т. д.

с помощью символа

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

причем $Px_j = x_{\alpha_j}$, а $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, за исключением порядка, та же самая совокупность, что и $\{1, \dots, n\}$. При таком обозначении для P отображение j, α_j , находится под j . Это свойство не зависит от порядка записи столбцов, так что их можно переставлять. Для n различных объектов существует $n!$ перестановок. Если

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \dots \beta_n \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

тогда произведение QP определяется следующим образом:

$$QP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \dots \beta_n \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

причем $QPx_j = x_{\beta_j}$. Тождественная перестановка, которая оставляет порядок элементов неизменным, есть

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots n \\ 1 & 2 & 3 \dots n \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Каждая перестановка P имеет обратную перестановку P^{-1} , такую, что $PP^{-1} = P^{-1}P = E$. Ясно, что обратная к P перестановка есть

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \\ 1 & 2 \dots n \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Совокупность всех перестановок n объектов образует группу, которую обычно называют симметрической группой, подгруппы которой называются группами перестановок. Транспозицией T называется перестановка, при которой переставляются только два элемента:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots k \dots l \dots n \\ 1 & 2 \dots l \dots k \dots n \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Каждая перестановка может быть разбита на произведение транспозиций. Это разбиение не однозначно. Однако четность числа транспозиций, на которые разбивается перестановка, определяется однозначно. Заметим, что перестановка P^{-1} четна или нечетна в соответствии с тем, четна или нечетна P . Таким образом, перестановка может быть охарактеризована ее четностью δ_P , равной $+1$ для четной перестановки, и -1 для нечетной. Если P записать в виде $\prod_i^n T_i$, где T_i — транспозиции, а Q — в виде

$$\prod_j^m T_j', \quad \text{тогда ясно, что } PQ = \prod_{j,i}^{nm} T_i T_j' \text{ и}$$

$$\delta_P \delta_Q = \delta_Q \delta_P = \delta_{QP} = \delta_{PQ}, \quad (6.7)$$

так что произведение двух четных перестановок четно и произведение двух нечетных перестановок четно, в то время как произведение четной и нечетной перестановок нечетно. А поскольку тождественная перестановка четна, то $\delta_P \delta_{P^{-1}} = \delta_{P^{-1}} \delta_P = \delta_E = 1$ и

$$\delta_{P^{-1}} = \delta_P. \quad (6.8)$$

§ 2. Симметричные и антисимметричные волновые функции

В настоящем параграфе мы кратко изложим квантовомеханическое описание системы тождественных, неразличимых частиц. В квантовой механике частицы называются неразличимыми, если среднее значение любой наблюдаемой остается неизменным при замене одной частицы на другую, т. е. если переставить индексы частиц. Хорошо известно, что система тождественных частиц описывается волновой функцией, которая или симметрична (бозе-частицы) или антисимметрична (ферми-частицы) при перестановке двух частиц.

Пусть $|\Psi\rangle$, $|\Phi\rangle$ — векторы состояния, описывающие систему n частиц, Их скалярное произведение в конфигурационном пространстве определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} (\Psi, \Phi) &= \sum_{s_1 s_2 \dots s_n} \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \langle \Psi | x_1 s_1, \dots, x_n s_n \rangle \langle x_1 s_1, \dots, x_n s_n | \Phi \rangle = \\ &= \sum_{s_1 \dots s_n} \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \bar{\Psi}(x_1 s_1, \dots, x_n s_n) \Phi(x_1 s_1, \dots, x_n s_n), \end{aligned} \quad (6.9)$$

где s_i — спиновая переменная i -й частицы. В дальнейшем мы опустим зависимость волновой функции от спиновых переменных и примем, что переменные x_i описывают и спин, если частицы обладают спином. Примем также, что знак интегрирования включает, если нужно, суммирование по спиновым индексам. При перестановке P , $Px_i = x_{\alpha_i}$, волновая функция $\Psi(x) = \langle x | \Psi \rangle = \langle x_1, x_2 \dots x_n | \Psi \rangle$ преобразуется в новую волновую функцию $\Psi'(x) = \Psi(Px)$. Это преобразованное состояние получается с помощью линейной операции U_P

$$U_P |\Psi\rangle = |\Psi'\rangle, \quad (6.10a)$$

такой, что

$$\langle x | U_P |\Psi\rangle = \langle x | \Psi'\rangle = \langle Px | \Psi\rangle. \quad (6.10b)$$

Отсюда

$$\langle x | U_P |x'\rangle = \langle Px | x'\rangle = \delta(Px_1 - x'_1) \dots \delta(Px_n - x'_n). \quad (6.11)$$

Мы иногда будем обозначать символом \mathcal{F} оператор U_P в конфигурационном пространстве и писать

$$\langle Px | \Psi\rangle = \mathcal{F} \langle x | \Psi\rangle = \mathcal{F} \Psi(x) = \Psi(Px). \quad (6.12)$$

Так как якобиан преобразования $x \rightarrow Px$ равен по модулю единице то $\langle \Phi' | \Psi'\rangle = \langle \Phi | \Psi\rangle$, так что U_P является унитарным оператором. Операторы U_P образуют унитарное представление симметрической группы. Если частицы неразличимы, тогда упомянутый выше критерий неразличимости требует, чтобы для любой наблюдаемой O системы n частиц и для любой перестановки P

$$(\Psi, O\Psi) = (\Psi', O\Psi') = (U_P \Psi, O U_P \Psi) = (\Psi, U_P^{-1} O U_P \Psi), \quad (6.13a)$$

т. е. чтобы

$$O = U_P^{-1} O U_P \quad (6.13b)$$

или $[O, U_P] = 0$. Последнее равенство выражает инвариантность O при перестановках индексов частиц. Следовательно, наблюдаемая O должна быть симметричной функцией наблюдаемых отдельных частиц.

Теперь мы можем дать точное определение симметричных и антисимметричных волновых функций. Если T — любая транспозиция, то мы назовем волновую функцию симметричной, если

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n | U_T | \Psi_s \rangle = \langle x_1, x_2, \dots, x_n | \Psi_s \rangle \quad (6.14a)$$

или если¹⁾

$$\mathcal{J}\Psi_s(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Psi_s(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (6.14b)$$

и антисимметричной, если

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n | U_T | \Psi_a \rangle = -\langle x_1, x_2, \dots, x_n | \Psi_a \rangle, \quad (6.15a)$$

$$\mathcal{J}\Psi_a(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\Psi_a(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (6.15b)$$

Вообще, для любой перестановки P симметричная волновая функция обладает тем свойством, что

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n | U_P | \Psi_s \rangle = \langle x_1, \dots, x_n | \Psi_s \rangle, \quad (6.16)$$

в то время как для антисимметричной волновой функции

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n | U_P | \Psi_a \rangle = \delta_P \langle x_1, x_2, \dots, x_n | \Psi_a \rangle, \quad (6.17)$$

где δ_P — четность перестановки P . Из унитарности U_P следует, что пространство симметричных состояний ортогонально пространству антисимметричных состояний, так как $(\Psi_s, \Psi_a) = (U_T \Psi_s, U_T \Psi_a) = -(\Psi_s, \Psi_a) = 0$. Далее, никакое возмущение не может перевести симметричное состояние в антисимметричное, так как для любой наблюдаемой O системы n тождественных частиц $U_P O U_P^{-1} = O$, так что $(\Psi_s, O \Psi_a) = (U_T \Psi_s, U_T O U_T^{-1} U_T \Psi_a) = -(\Psi_s, O \Psi_a) = 0$. Наконец, поскольку гамильтониан инвариантен относительно U_P , т. е. $H = U_P H U_P^{-1}$, характер симметрии состояния сохраняется во времени.

Чтобы построить симметричные и антисимметричные волновые функции из произвольных функций n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , определим следующие операторы:

$$S = \frac{1}{n!} \sum_P U_P, \quad (6.18)$$

$$A = \frac{1}{n!} \sum_P \delta_P U_P, \quad (6.19)$$

где суммирование идет по $n!$ элементам симметрической группы n -го порядка. Оператор S называется *симметризатором*, а A — *антисимметризатором*. Основания для такого названия будут вскоре ясны. Можно объединить обсуждение свойств этих операторов, если ввести оператор

$$\Lambda = \frac{1}{n!} \sum_P \lambda_P U_P. \quad (6.20)$$

Когда $\lambda_P = 1$, $\Lambda = S$, а при $\lambda_P = \delta_P$, $\Lambda = A$. Оператор Λ обладает следующими свойствами:

- а) Λ эрмитов,
- б) $\Lambda U_P = U_P \Lambda$ для любой перестановки,
- в) $\Lambda^2 = \Lambda$, т. е. Λ есть оператор проектирования.

Доказываются эти утверждения совсем просто. Чтобы доказать свойство (а), заметим, что, поскольку U_P образуют унитарное представление

¹⁾ Здесь \mathcal{J} — оператор U_T в конфигурационном пространстве. — Прим. ред.

симметрической группы, $U_P U_{P^{-1}} = U_E = I$, так что $U_{P^{-1}} = [U_P]^{-1}$ и поэтому в силу унитарности U_P) $U_P^* = U_{P^{-1}}$. Используя свойство $\delta_P = \delta_{P^{-1}}$, имеем

$$\Lambda^* = \frac{1}{n!} \sum_P \lambda_{P^{-1}} U_{P^{-1}}. \quad (6.21)$$

Но поскольку совокупность перестановок P образует группу, то можно заменить суммирование по P суммированием по P^{-1} , и, следовательно, $\Lambda^* = \Lambda$. Чтобы доказать свойство (б), заметим, что $\lambda_P^2 = 1$. Используя равенство (6.7), имеем

$$\Lambda U_P = \frac{1}{n!} \sum_Q \lambda_Q U_Q U_P = \frac{1}{n!} \lambda_P^2 \sum_Q \lambda_Q U_{QP} = \frac{1}{n!} \lambda_P \sum_Q \lambda_{QP} U_{QP}. \quad (6.22)$$

Снова в силу группового свойства элементы QP при фиксированном P и при Q , пробегающем всю группу, исчерпывают группу, так что $\sum_Q = \sum_{QP}$ и $\Lambda U_P = \lambda_P \Lambda$. Аналогично проверяется, что $U_P \Lambda = \lambda_P \Lambda$, так что свойство (б) доказано. Наконец, чтобы доказать свойство (в), используем свойство (б):

$$\begin{aligned} \Lambda^2 &= \Lambda \frac{1}{n!} \sum_Q \lambda_Q U_Q = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_Q \lambda_Q^2 \Lambda = \Lambda. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Последнее равенство имеет место, ибо $\sum_Q 1 = n!$. Таким образом, симметризатор и антисимметризатор являются операторами проектирования. При любом векторе $|\Psi\rangle$ гильбертова пространства оператор $S(A)$ проектирует его на подпространство симметричных (антисимметричных) состояний.

Доказательство: Согласно свойству (б), $U_T S|\Psi\rangle = S|\Psi\rangle$. Аналогично, $U_T A|\Psi\rangle = -A|\Psi\rangle$, так как $\delta_T = -1$ для любой транспозиции T .

Эти свойства оператора Λ часто используются, чтобы упростить вычисление нормировочных интегралов и средних значений, наблюдаемых для симметричных или антисимметричных состояний. Так, если $|\Psi\rangle = \Lambda|\Phi\rangle$, где $|\Phi\rangle$ — вектор, не обладающий свойствами симметрии, то среднее значение наблюдаемой O в состоянии $|\Psi\rangle$ есть $(\Psi, O\Psi) = (\Lambda\Phi, O\Lambda\Phi) = (\Phi, O\Lambda^2\Phi) = (\Phi, O\Lambda\Phi)$, так как O и U_P коммутируют. Поэтому при вычислении среднего значения необходимо использовать лишь одну соответствующим образом симметризованную волновую функцию $\Lambda|\Phi\rangle$.

§ 3. Пространство чисел заполнения

Для многих приложений очень полезно характеризовать систему n частиц с помощью одночастичных наблюдаемых. Такое описание заключается в задании амплитуд вероятности n_1 частицам находиться в состоянии $|\lambda'\rangle$, n_2 — частицам в состоянии $|\lambda''\rangle$ и т. д., причем $|\lambda\rangle$ — собственная функция полного набора наблюдаемых одночастичной системы, характеризующаяся собственными значениями λ , и $n_1 + n_2 + n_3 + \dots = n$. Чтобы осуществить такое описание, построим сначала соответствующим образом симметризованные базисные функции. Пусть $|\lambda'\rangle, |\lambda''\rangle \dots$ и т. д. — полная ортонормированная система одночастичных состояний, так что

если $\langle \mathbf{x} | \lambda \rangle = g_\lambda(\mathbf{x})$, то

$$\begin{aligned} \langle \lambda | \lambda' \rangle &= \delta_{\lambda\lambda'} = \\ &= \int \langle \lambda | \mathbf{x} \rangle d\mathbf{x} \langle \mathbf{x} | \lambda' \rangle = \int \bar{g}_\lambda(\mathbf{x}) g_{\lambda'}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Определим теперь функции

$$G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = g_{\lambda_1}(\mathbf{x}_1) g_{\lambda_2}(\mathbf{x}_2) \dots g_{\lambda_n}(\mathbf{x}_n). \quad (6.25)$$

При скалярном произведении (6.9) эти функции ортогональны:

$$(G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}, G_{\lambda'_1 \lambda'_2 \dots \lambda'_n}) = \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{\lambda_2 \lambda'_2} \dots \delta_{\lambda_n \lambda'_n}. \quad (6.26)$$

Система функций G_λ образует полную ортонормированную систему функций n переменных, если система $\{g_\lambda\}$ полная.

Вместо того чтобы определять $G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ совокупностью чисел $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, можно определить G , если задать, какие собственные значения λ' , λ'' , ... встречаются и сколько раз каждое из них повторяется. В этом случае G определяется с помощью бесконечной последовательности целых чисел n_1, n_2, \dots , которые называются числами заполнения, так что n_i — число, которое показывает, сколько раз $g_{\lambda'}$ (с любым аргументом) встречается в $G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$, и вообще n_i — число, которое показывает, сколько раз встречается $g_{\lambda^{(i)}}$. Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n. \quad (6.27)$$

Однако такое определение G неоднозначно, так как $U_P G$, где U_P — произвольная перестановка, имеет те же числа заполнения, что и G . Этот произвол не ведет к каким-либо трудностям, поскольку при физических приложениях представляют интерес лишь выражения с соответствующим образом симметризованными или антисимметризованными функциями, т. е. с функциями \mathcal{G} , которые удовлетворяют условию $\Lambda \mathcal{G} = \mathcal{G}$. Поэтому мы должны образовать такие линейные комбинации функций G , которые имеют нужные свойства симметрии. Обозначим такую симметризованную функцию через $\mathcal{G}_{\{n_1, n_2, n_3, \dots\}}$. Симметризованная функция $\mathcal{G}_{\{n\}}$ может быть получена из любой функции $G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$, соответствующей некоторой последовательности $\{n\} = \{n_1, n_2, \dots\}$, если применить к ней оператор Λ , т. е.

$$\mathcal{G}_{\{n_1, n_2, \dots\}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n | \Lambda | G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} \rangle. \quad (6.28)$$

Последовательность $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ при $n_1 + n_2 + \dots = n$ однозначно определяет симметризованную или антисимметризованную функции $\mathcal{G}_{\{n_1, n_2, \dots\}}$. Однако такая функция $\mathcal{G}_{\{n_1, n_2, \dots\}}$ не нормирована, хотя $(\mathcal{G}_{\{n\}}, \mathcal{G}_{\{n'\}}) = 0$, если не выполнено условие $\{n\} = \{n'\}$, т. е. если не выполнены равенства $n_1 = n'_1, n_2 = n'_2$ и т. д. Обозначим нормированную функцию \mathcal{G} через $\Phi_{\{n_1, n_2, \dots\}}^{(n)}$, т. е.

$$\begin{aligned} \Phi_{\{n_1, n_2, \dots\}}^{(n)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= N_{\{n\}} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n | \Lambda | G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle, \end{aligned} \quad (6.29)$$

где $N_{\{n\}}$ — постоянная нормировки, которая определяется из условия

$$(\Phi_{\{n_1, n_2, \dots\}}^{(n)}, \Phi_{\{n_1, n_2, \dots\}}^{(n)}) = 1 = N_{\{n\}}^2 \left(G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}, \sum_P \frac{1}{n!} \lambda_P U_P G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} \right). \quad (6.30)$$

Эту формулу можно еще упростить, если заметить, что функции $G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}(x_1 \dots x_n)$ являются произведениями волновых функций:

$$\begin{aligned} (U_P G)_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}(x_1 \dots x_n) &= G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) = \\ &= \langle x_{\alpha_1} | \lambda_1 \rangle \dots \langle x_{\alpha_n} | \lambda_n \rangle = \langle x_1 | \lambda_{\beta_1} \rangle \dots \langle x_n | \lambda_{\beta_n} \rangle = \\ &= G_{\lambda_{\beta_1} \lambda_{\beta_2} \dots \lambda_{\beta_n}}(x_1, \dots, x_n) = G_{P^{-1}\{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n\}}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (6.34)$$

где совокупность $\{\lambda_{\beta_1}, \dots, \lambda_{\beta_n}\}$ получается из $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ с помощью перестановки P^{-1} . Поэтому можно переписать (6.30) в виде

$$N_{\{n\}}^{-2} = \frac{1}{n!} \sum_P \lambda_P (G_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}, G_{\lambda_{\beta_1} \lambda_{\beta_2} \dots \lambda_{\beta_n}}), \quad (6.32)$$

где суммирование проводится по всем перестановкам $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$.

§ 4. Случай симметричных волновых функций

До сих пор наше обсуждение было общим и было применимо как для симметричных, так и для антисимметричных функций. Однако теперь вплоть до § 6 мы будем рассматривать только симметричные волновые функции. Для вычисления нормировочного множителя в этом случае заметим, что если функция $G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ такова, что все λ различны, т. е. $n_i \leq 1$, тогда в сумму правой части (6.32) вносит вклад только тождественная перестановка, и постоянная $N_{\{n\}}$ будет равна $\sqrt{n!}$. В общем случае, когда в $G_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ функция g_{λ_i} встречается n_i раз, в равенство (6.32) вносят вклад лишь те перестановки, которые переставляют частицы в одинаковых состояниях. Число таких перестановок $n_1! n_2! \dots$, поэтому

$$N_{\{n_1, n_2, \dots\}} = \sqrt{\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots}}, \quad (6.33)$$

так что

$$\begin{aligned} \Phi_{\{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\}}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \langle x_1, x_2, x_3 \dots | n_1 n_2 \dots n_i \dots \rangle = \\ &= \sqrt{\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}} \frac{1}{n!} \sum_P \mathcal{P}(g_{\lambda_1}(x_1) \dots g_{\lambda_n}(x_n)), \end{aligned} \quad (6.34)$$

где \mathcal{P} — оператор перестановки индексов у x , а суммирование проводится по всем $n!$ перестановкам индексов n . Векторы $|n_1, n_2, \dots\rangle$ для всех возможных последовательностей $\{n\}$ при $\sum_i n_i = n$ образуют базис гильбертова пространства возможных состояний системы n тождественных частиц, подчиняющихся статистике Бозе. Полнота системы выражается соотношением

$$\sum_{\{n\}} |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \langle n_1, n_2, \dots, n_i, \dots| = 1, \quad (6.35)$$

где суммирование проводится по всем последовательностям $\{n_1, n_2, \dots\}$ при $\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n$. Соотношения ортогональности выражаются равенством (6.26) и в настоящих обозначениях имеют вид

$$\langle n_1, n_2, \dots, n_i, \dots | n'_1, n'_2, \dots, n'_i, \dots \rangle = \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2} \dots \delta_{n_i n'_i} \dots \quad (6.36)$$

Произвольный вектор состояния $|\Psi(t)\rangle$, описывающий систему n -частиц, подчиняющихся статистике Бозе, может быть разложен по введенным выше базисным векторам

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{n\}} |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \langle n_1, n_2, \dots, n_i, \dots | \Psi(t)\rangle. \quad (6.37)$$

Коэффициенты разложения $\langle n_1, n_2, \dots, n_i, \dots | \Psi(t)\rangle$ являются амплитудами вероятности найти систему в момент времени t с n_1 частицами в состоянии $|\lambda'\rangle$, n_2 частицами в состоянии $|\lambda''\rangle$, n_i частицами в состоянии $|\lambda^{(i)}\rangle$ и т. д.

Функция преобразования $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n; n | n_1, n_2, \dots \rangle$ является «перманентом», т. е. детерминантом, у которого все перестановки складываются со знаком плюс. Перманент может быть разложен по строке или столбцу аналогично разложению детерминанта. Выпишем формулы разложения, которые позднее окажутся очень полезными:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n_i}{n}} \langle \mathbf{x}_1 | \lambda^{(i)} \rangle \times \\ &\times \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n; n-1 | n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots \rangle \end{aligned} \quad (6.38)$$

и

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle &= \sum_{r=1}^n \frac{1}{\sqrt{n_i n}} \langle \mathbf{x}_r | \lambda^{(i)} \rangle \times \\ &\times \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{r-1}, \mathbf{x}_{r+1}, \dots, \mathbf{x}_n; n-1 | n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots \rangle. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Доказательство равенства (6.38) основано на том, что любая перестановка n элементов может быть представлена в виде $P = QT_m$, где Q — перестановка совокупности $(2, 3 \dots n)$, а T_m — транспозиция 1 и m . Поэтому симметризатор \mathcal{S} может быть записан следующим образом:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{n!} \sum_P \mathcal{P} = \frac{1}{n} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{m, Q} \mathcal{Q} \mathcal{J}_m = \mathcal{S}' \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mathcal{J}_m, \quad (6.40)$$

где \mathcal{S}' — симметризатор совокупности $(2, \dots, n)$. Поскольку G есть произведение волновых функций, то

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_m G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &= G_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{m-1}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{m+1}, \dots, \mathbf{x}_n) = \\ &= G_{\lambda_m \lambda_2 \dots \lambda_{m-1} \lambda_1 \lambda_{m+1} \dots \lambda_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \\ &= \langle \lambda_m | \mathbf{x}_1 \rangle G'_{\lambda_2 \dots \lambda_n}(\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n); \end{aligned} \quad (6.41)$$

здесь G' — функция $n-1$ переменных с числами заполнения $n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots$, если числа заполнения у $G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ были $n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$ и $\lambda_m = \lambda^{(i)}$. Поэтому можно написать

$$\begin{aligned} \Phi_{\{n_1, n_2, \dots\}}^{(n)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= N_{\{n\}} \mathcal{S} G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \\ &= N_{\{n\}} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mathcal{S}'(\langle \lambda_m | \mathbf{x}_1 \rangle G'_{\lambda_2 \dots \lambda_{m-1} \lambda_1 \lambda_{m+1} \dots \lambda_n}(\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n)) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n_i}{n}} \langle \lambda^{(i)} | \mathbf{x}_1 \rangle \Phi_{\{n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots\}}^{(n-1)}(\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Множитель $\sqrt{n_i/n}$ возникает из-за различия нормировочных множителей для функций $\Phi^{(n)}$ и $\Phi^{(n-1)}$

$$N_{\{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\}}^{(n)} = \sqrt{\frac{n}{n_i}} N_{\{n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots\}}^{(n-1)} \quad (6.43)$$

и из-за того, что сумма по m была заменена суммированием по заполненным состояниям $\sum_i n_i$, что эквивалентно \sum_m . Если переписать равенство (6.42) в обозначениях Дирака [см. (6.34)], то получается равенство (6.38). Полностью аналогично доказывается равенство (6.39). Так как $S = QS$ для любой перестановки Q , то $\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{S}'$, где \mathcal{S}' — симметризатор совокупности $(2, \dots, n)$. Принимая, что $|\lambda^{(i)}\rangle$ присутствует в $G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$, т. е. $n_i \neq 0$, можно написать

$$\begin{aligned} \Phi_{\{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\}}^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &= N_{\{n\}} \mathcal{S} G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \\ &= N_{\{n\}} \mathcal{S} (\langle \lambda^{(i)} | \mathbf{x}_1 \rangle G'(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)), \end{aligned} \quad (6.44)$$

где функция G' характеризуется числами заполнения $n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots$. Поэтому, подставляя $\mathcal{S}\mathcal{S}'$ вместо \mathcal{S} , получим

$$\begin{aligned} \Phi_{\{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\}}^{(n)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= \\ &= \sqrt{\frac{n}{n_i}} \mathcal{S} (\langle \lambda^{(i)} | \mathbf{x}_1 \rangle \Phi_{\{n_1 n_2 \dots n_i-1 \dots\}}^{(n-1)}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n)). \end{aligned} \quad (6.45)$$

Используя равенство (6.40), окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{\{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\}}^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &= \sum_{l=1}^n \frac{1}{\sqrt{n_l n}} \langle \lambda^{(l)} | \mathbf{x}_l \rangle \times \\ &\times \Phi_{\{n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots\}}^{(n-1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_{l+1}, \dots, \mathbf{x}_n), \end{aligned} \quad (6.46)$$

что совпадает с равенством (6.39).

§ 5. Операторы рождения и уничтожения

Введем теперь оператор a_i , определенный так, что

$$a_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots\rangle. \quad (6.47)$$

Оператор a_i называется оператором уничтожения, так как он уничтожает частицу в состоянии $|\lambda^{(i)}\rangle$. Матричные элементы этого оператора

$$\begin{aligned} \langle n'_1, n'_2, \dots, n'_i, \dots; n' | a_i | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots; n \rangle &= \\ &= \sqrt{n_i} \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2} \dots \delta_{n_i-1, n'_i} \dots \delta_{n', n-1} \end{aligned} \quad (6.48)$$

равны нулю, если не выполнено равенство $n' = n - 1$. Отметим, что a_i определен в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \dots$, где $\mathcal{H}^{(n)}$ — гильбертово пространство для системы n частиц. Из определения операторов a_i следует, что a_i и a_j коммутируют,¹

$$[a_i, a_j] = 0. \quad (6.49)$$

Введем далее эрмитово сопряженный оператор a_i^* , который определяется равенством

$$(\Psi, a_i \Phi) = (a_i^* \Psi, \Phi), \quad (6.50)$$

так что

$$a_i^* |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots\rangle. \quad (6.51)$$

Оператор a_i^* называется оператором рождения, так как, действуя на n -частичное состояние, он превращает это состояние в состояние с $n + 1$ частицами, увеличивая на единицу число частиц в состоянии $|\lambda^{(i)}\rangle$. Матричные элементы этого оператора

$$\begin{aligned} \langle n'_1, n'_2, \dots, n'_i, \dots; n' | a_i^* | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots; n \rangle = \\ = \sqrt{n_i + 1} \delta_{n', n+1} \delta_{n_1 n'_1} \dots \delta_{n_i+1, n'_i} \dots \end{aligned} \quad (6.52)$$

равны нулю, если не выполнено условие $n' = n + 1$. Заметим далее, что

$$[a_i^*, a_j^*] = 0, \quad (6.53)$$

в то время как перестановочные соотношения для a_i и a_j^* следующие:

$$[a_i, a_j^*] = \delta_{ij}. \quad (6.54)$$

Последнее соотношение проверяется непосредственным вычислением результата действия левой части на произвольное состояние $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle$. Наконец, видно, что эрмитов оператор $N_i = a_i^* a_i$, действуя на состояние $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$, дает $n_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$, т. е. этот оператор показывает, сколько частиц находится в состоянии $|\lambda^{(i)}\rangle$. Оператор

$$N_i = a_i^* a_i \quad (6.55)$$

называется оператором числа частиц в состоянии i , а оператор

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} N_i \quad (6.56)$$

— оператором полного числа частиц, так как при действии на состояние $|n_1, n_2, \dots\rangle$ он дает

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i |n_1, n_2, \dots\rangle = n |n_1, n_2, \dots\rangle.$$

Изложенное до сих пор можно представить несколько более абстрактно с помощью операторов рождения и уничтожения a_i^* и a_i . В силу перестановочных соотношений для a_i^* и a_j операторы числа частиц в различных состояниях коммутируют: $[N_i, N_j] = 0$. Поэтому существует представление, в котором все операторы N_i диагональны. Обозначим базисные векторы этого представления через $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$. Заметим, что перестановочные соотношения для N_i и операторов рождения и уничтожения имеют вид

$$[N_i, a_i^*] = a_i^*, \quad (6.57)$$

$$[N_i, a_i] = -a_i, \quad (6.58)$$

так что

$$\langle \dots n'_i \dots | [N_i, a_i^*] | \dots n_i \dots \rangle = \langle \dots n'_i \dots | a_i^* | \dots n_i \dots \rangle \quad (6.59a)$$

и

$$(n'_i - n - 1) \langle \dots n'_i \dots | a_i^* | \dots n_i \dots \rangle = 0. \quad (6.59b)$$

Отсюда видно, что этот матричный элемент оператора a_i^* равен нулю, если не выполнены условия $n'_i = n_i + 1$ и $n_j = n'_j$ при $j \neq i$. Будем инте-

ресоваться теперь собственными значениями оператора N_i . В силу перестановочных соотношений (6.57), если $|v_i\rangle$ — собственная функция оператора N_i с собственным значением v_i , то $a_i^* |v_i\rangle$ — собственная функция N_i с собственным значением $v_i + 1$.

Доказательство:

$$N_i a_i^* |v_i\rangle = (a_i^* N_i + [N_i, a_i^*]) |v_i\rangle = (v_i + 1) a_i^* |v_i\rangle. \quad (6.60)$$

Используя (6.58), можно проверить, что $a_i |v_i\rangle$ — собственная функция N_i с собственным значением $v_i - 1$. Аналогично, $(a_i)^m |v_i\rangle$ есть собственная функция N_i с собственным значением $v_i - m$ (m — целое положительное число). Таким образом, либо оператор N_i имеет отрицательные собственные значения (поскольку $v_i - m$ может быть сделано отрицательным при достаточно больших m), либо при некотором m вектор $(a_i)^m |v_i\rangle$ должен быть нулевым вектором. Однако оператор N_i неотрицателен (≥ 0), так как он равен произведению некоторого оператора на эрмитово сопряженный к нему, так что собственные значения оператора N_i не могут быть отрицательными. Действительно, для произвольного ненулевого вектора $|\Phi\rangle$, для которого $(\Phi, \Phi) > 0$, имеем

$$(\Phi, N_i \Phi) = (\Phi, a_i^* a_i \Phi) = (a_i \Phi, a_i \Phi) = \|a_i \Phi\|^2 \geq 0 \quad (6.61)$$

по определению скалярного произведения в гильбертовом пространстве. Знак равенства в соотношении (6.61) имеет место только для таких состояний $|\Phi_0\rangle$, для которых $a_i |\Phi_0\rangle = 0$. Ясно, что собственное значение оператора N_i , соответствующее такому состоянию, равно нулю. Следовательно, собственные значения N_i либо целые положительные числа, либо нуль. Состояние $|\Phi_0\rangle = |0\rangle$, для которого $N_i |0\rangle = 0$ для всех i , называется *состоянием без частиц*. Оно определяется равенством

$$a_i |0\rangle = 0 \text{ для всех } i. \quad (6.62)$$

Далее введем операторы

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x | \lambda^{(i)} \rangle a_i \quad (6.63)$$

и

$$\psi^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \lambda^{(i)} | x \rangle a_i^*. \quad (6.64)$$

Они обладают тем свойством, что уже не зависят от базиса $\langle x | \lambda^{(i)} \rangle$, который был выбран для одночастичных состояний. Перестановочные соотношения для этих операторов имеют вид

$$\begin{aligned} [\psi(x), \psi^*(y)] &= \sum_{i,j} \langle x | \lambda^{(i)} \rangle \langle \lambda^{(j)} | y \rangle [a_i, a_j^*] = \\ &= \sum_i \langle x | \lambda^{(i)} \rangle \langle \lambda^{(i)} | y \rangle = \langle x | y \rangle = \\ &= \delta(x - y) \end{aligned} \quad (6.65)$$

и

$$[\psi(x), \psi(y)] = [\psi^*(x), \psi^*(y)] = 0. \quad (6.66)$$

С помощью введенных операторов можно записать оператор полного числа частиц

$$N = \sum_i a_i^* a_i = \sum_{ij} \int \langle \lambda^{(i)} | x \rangle dx \langle x | \lambda^{(j)} \rangle a_j^* a_i = \int dx \psi^*(x) \psi(x). \quad (6.67)$$

Оператор $\psi^*(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$ можно интерпретировать как оператор плотности числа частиц. Заметим далее, что равенство (6.38) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n; n | n_1, n_2, \dots, n_i \dots \rangle = \\ & = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \langle \mathbf{x}_1 | \lambda^{(i)} \rangle \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n; n-1 | a_i | n_1, n_2, \dots, n_i \dots \rangle = \\ & = \frac{1}{\sqrt{n}} \langle \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \dots \mathbf{x}_n; n-1 | \psi(\mathbf{x}_1) | n_1, n_2, \dots, n_i \dots \rangle \end{aligned} \quad (6.68)$$

и по индукции

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n | n_1, n_2, \dots, n_i \dots \rangle = \\ & = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \psi(\mathbf{x}_n) \dots \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) | n_1, n_2, \dots, n_i \dots \rangle. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Из равенства (6.69) следует

$$S | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \dots \psi^*(\mathbf{x}_n) | 0 \rangle. \quad (6.70)$$

Нужно отметить, что поскольку операторы рождения $\psi^*(\mathbf{x}_i)$ коммутируют друг с другом, то состояние в правой части (6.70) симметрично.

Рассмотрим кратко физическую интерпретацию операторов $\psi(\mathbf{x})$ и $\psi^*(\mathbf{x})$. Ясно, что состояние $\psi^*(\mathbf{x})|0\rangle$ является одночастичным, так как оно является собственной функцией N с собственным значением 1.

Доказательство:

$$\begin{aligned} [N, \psi^*(\mathbf{x})] &= \int d\mathbf{x}' \{ \psi^*(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') \psi^*(\mathbf{x}) - \psi^*(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') \} = \\ &= \int d\mathbf{x}' \psi^*(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = \\ &= \psi^*(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (6.71)$$

так что

$$N\psi^*(\mathbf{x})|0\rangle = [N, \psi^*(\mathbf{x})]|0\rangle = 1\psi^*(\mathbf{x})|0\rangle, \quad (6.72)$$

поскольку $N|0\rangle = 0$. Аналогично, можно проверить, что $\psi^*(\mathbf{x}_1)\psi^*(\mathbf{x}_2)|0\rangle$ есть двухчастичное состояние, и т. д. Амплитуда вероятности найти частицу в состоянии $\psi^*(\mathbf{x})|0\rangle$ в точке \mathbf{x}_1 есть

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1 | \psi^*(\mathbf{x}) | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1!}} \langle 0 | \psi(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}) | 0 \rangle = \\ &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \langle 0 | 0 \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1). \end{aligned} \quad (6.73)$$

При получении последнего равенства были использованы равенства (6.70) и (6.65) и было предположено, что состояние без частиц нормируемо: $\langle 0 | 0 \rangle = 1$. Таким образом, оператор $\psi^*(\mathbf{x})$ рождает частицу, локализованную в точке \mathbf{x} . Аналогично, $\psi(\mathbf{x})$ уничтожает частицу, локализованную в точке \mathbf{x} . Вычислим норму вектора $\psi^*(\mathbf{x})|0\rangle$. Квадрат ее равен

$$\langle 0 | \psi(\mathbf{x}) \psi_i^*(\mathbf{x}) | 0 \rangle = \delta(0), \quad (6.74)$$

так что состояние $\psi^*(\mathbf{x})|0\rangle$ ненормируемо и поэтому не является вектором в гильбертовом пространстве. Но этого следовало ожидать, поскольку $\psi^*(\mathbf{x})|0\rangle$ есть собственная функция оператора положения \mathbf{x} , следова-

тельно, ненормируема. Физическое одночастичное состояние соответствует волновому пакету $|\Psi\rangle = \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{x})|0\rangle$, где $f(\mathbf{x})$ — функция с интегрируемым квадратом. Можно проверить, что такое состояние действительно нормируемо и квадрат его нормы равен

$$\begin{aligned} \|\Psi\|^2 = (\Psi, \Psi) &= \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \bar{f}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}') \langle 0 | \psi(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{x}') | 0 \rangle = \\ &= \int d\mathbf{x} |f(\mathbf{x})|^2 < \infty. \end{aligned} \quad (6.75)$$

§ 6. Пространство Фока

Теперь мы получим представление операторов $\psi(\mathbf{x})$ и $\psi^*(\mathbf{x})$ в конфигурационном пространстве. Сначала рассмотрим оператор уничтожения $\psi(\mathbf{x})$. Мы хотим получить явную формулу для матричного элемента $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n | \psi(\mathbf{x}) | \Psi \rangle$, где $|\Psi\rangle$ — произвольный вектор в пространстве $\mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \dots$. Для этого напомним

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; n-1 | \psi(\mathbf{x}) | \Psi \rangle &= \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\{n'\}} \langle \mathbf{x} | \lambda^{(i)} \rangle \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; n-1 | a_i | n'_1, n'_2, \dots, n'_i \dots \rangle \langle n'_1, n'_2, \dots, n'_i \dots | \Psi \rangle = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\{n'\}} \langle \mathbf{x} | \lambda^{(i)} \rangle \sqrt{n_i} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; n-1 | n'_1, n'_2, \dots, n'_i-1 \dots \rangle \times \\ &\quad \times \langle n'_1, n'_2, \dots, n'_i \dots | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (6.76)$$

При получении правой части этого равенства мы использовали равенство (6.47) и полноту базисных векторов $|n'_1, n'_2, \dots, n'_i \dots\rangle$. Хотя в условии полноты подразумевается суммирование по всем последовательностям $\{n'_1, n'_2, \dots\}$ при $\sum_{i=0}^{\infty} n'_i = n' = 0, 1, 2, \dots$, матричный элемент

$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1} | a_i | n'_1, n'_2, \dots, n'_i \dots \rangle$ равен нулю, если $\sum_{i=1}^{\infty} n'_i \neq n$, так что суммирование по $\{n'\}$ сводится к суммированию по таким последовательностям $\{n'_1, n'_2, \dots, n'_i \dots\}$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} n'_i = n$. Далее мы используем полноту одночастичных базисных функций и перепишем равенство (6.38) в виде

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} \langle \lambda^{(i)} | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n; n | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle &= \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n_j}{n}} \int d\mathbf{x} \langle \lambda^{(i)} | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | \lambda^{(j)} \rangle \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n; n-1 | n_1, n_2, \dots, n_i-1 \dots \rangle = \\ &= \sqrt{\frac{n_i}{n}} \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n; n-1 | n_1, n_2, \dots, n_i-1 \dots \rangle \end{aligned} \quad (6.77a)$$

или

$$\begin{aligned} \sqrt{n_i} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; n-1 | n_1, n_2, \dots, n_i-1 \dots \rangle &= \\ &= \sqrt{n} \int d\mathbf{x} \langle \lambda^{(i)} | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; n-1 | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle. \end{aligned} \quad (6.77b)$$

Подставляя последнее выражение в правую часть (6.76), получаем нужную формулу

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; n-1 | \psi(\mathbf{x}) | \Psi \rangle = \\
 & = \sqrt{n} \sum_i \sum_{\{n\}} \int d\mathbf{y} \langle \mathbf{x} | \lambda^{(i)} \rangle \langle \lambda^{(i)} | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; n-1 | n_1, n_2, \dots, n_i \dots \rangle \times \\
 & \quad \times \langle n_1, n_2, \dots, n_i \dots | \Psi \rangle = \\
 & = \sqrt{n} \sum_i \int d\mathbf{y} \langle \mathbf{x} | \lambda^{(i)} \rangle \langle \lambda^{(i)} | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; n | \Psi \rangle = \\
 & = \sqrt{n} \int d\mathbf{y} \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; n | \Psi \rangle = \\
 & \quad = \sqrt{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; n | \Psi \rangle. \quad (6.78)
 \end{aligned}$$

Аналогично, используя разложение (6.39), заключаем, что

$$\langle 0 | \psi^*(\mathbf{x}) | \Psi \rangle = 0, \quad (6.79a)$$

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n+1}; n+1 | \psi^*(\mathbf{x}) | \Psi \rangle = \\
 & = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\{n\}} \sqrt{n_i+1} \langle \lambda^{(i)} | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n+1}; n+1 | n_1, n_2, \dots, n_i+1 \dots \rangle \times \\
 & \quad \times \langle n_1, n_2, \dots, n_i \dots | \Psi \rangle = \\
 & = \sqrt{n} \sum_i \sum_{l=1}^n \sum_{\{n\}} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \langle \mathbf{x}_l | \lambda^{(i)} \rangle \langle \lambda^{(i)} | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_{l+1}, \dots, \mathbf{x}_{n+1}; n | \times \\
 & \quad \times | n_1, n_2, \dots, n_i \dots \rangle \langle n_1, n_2, \dots, n_i, \dots | \Psi \rangle = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{l=1}^n \langle \mathbf{x}_l | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_{l+1}, \dots, \mathbf{x}_{n+1}; n | \Psi \rangle = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{l=0}^n \delta(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}) \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_{l+1}, \dots, \mathbf{x}_{n+1}; n | \Psi \rangle. \quad (6.79b)
 \end{aligned}$$

Поскольку $|\Psi\rangle$ произвольное состояние, то из равенств (6.78) и (6.79b) следует

$$\psi^*(\mathbf{x}) | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; n-1 \rangle = \sqrt{n} | \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; n \rangle, \quad (6.78a)$$

$$\begin{aligned}
 & \psi(\mathbf{x}) | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}; n+1 \rangle = \\
 & \quad = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{l=1}^n \delta(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}) | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_{l+1}, \dots, \mathbf{x}_{n+1}; n \rangle. \quad (6.79b)
 \end{aligned}$$

Физический смысл этих равенств станет более ясным, если принять следующие обозначения. Пусть $|\Psi\rangle$ — вектор в пространстве $\mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \dots$, т. е. он может описывать систему, число частиц которой не является интегралом движения. Согласно физической интерпретации вектора состояния, компонента $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n | \Psi \rangle$ в пространстве $\mathcal{H}^{(n)}$ является амплитудой вероятности найти нашу систему, состоящую из n частиц, находящихся в точках $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$. Можно определить вектор $|\Psi\rangle$, задавая его компоненты в различных подпростран-

ствах, и представить его в виде

$$|\Psi\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} \langle 0 | \Psi \rangle \\ \langle \mathbf{x}_1 | \Psi \rangle \\ \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \Psi \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n | \Psi \rangle \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi^{(0)} \\ \Psi^{(1)}(\mathbf{x}_1) \\ \Psi^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \Psi^{(n)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (6.80)$$

Скалярное произведение двух векторов $|\Psi\rangle$ и $|\Phi\rangle$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \Psi \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{x}_2 \dots \int d\mathbf{x}_n \langle \Phi | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n \rangle \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n | \Psi \rangle = \\ &= \overline{\Phi^{(0)}} \Psi^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mathbf{x}_1 \dots \int d\mathbf{x}_n \overline{\Phi^{(n)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)} \Psi^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n). \end{aligned} \quad (6.81)$$

Равенство (6.78) теперь имеет вид

$$\psi^*(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \Psi^{(0)} \\ \Psi^{(1)}(\mathbf{x}_1) \\ \Psi^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \Psi^{(n)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1} \Psi^{(1)}(\mathbf{x}) \\ \sqrt{2} \Psi^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \\ \sqrt{3} \Psi^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \sqrt{n+1} \Psi^{(n+1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (6.82)$$

а равенство (6.79) гласит:

$$\begin{aligned} \psi^*(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \Psi^{(0)} \\ \Psi^{(1)}(\mathbf{x}_1) \\ \Psi^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \Psi^{(n)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \\ \vdots \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ (1)^{-1/2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \Psi^{(0)} \\ (2)^{-1/2} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \Psi^{(1)}(\mathbf{x}_2) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \Psi^{(1)}(\mathbf{x}_1) \} \\ \vdots \\ (n)^{-1/2} \sum_{l=1}^n \delta(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}) \Psi^{(n-1)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_{l+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \\ \vdots \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Тот факт, что в соотношении (6.83) равна нулю компонента вектора $\psi^*(\mathbf{x})|\Psi\rangle$, соответствующая $n=0$, следует из того, что эта компонента определена как $\langle 0 | \psi^*(\mathbf{x}) | \Psi \rangle$. А этот матричный элемент равен нулю по определению состояния без частиц $0 = \psi(\mathbf{x}) | 0 \rangle$ или, если взять сопряженное равенство, $0 = \langle 0 | \psi^*(\mathbf{x})$.

Описанное выше представление, характеризующееся диагональностью оператора N , известно как описание в пространстве Фока, или в конфигурационном пространстве. Представления (6.82) и (6.83) для операторов $\psi(\mathbf{x})$ и $\psi^*(\mathbf{x})$ наглядно показывают их свойства как операторов рождения и уничтожения. Например, $\psi(\mathbf{x})$ преобразует вектор $|\dots\rangle$, у которого не равна нулю лишь компонента $\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; n | \dots \rangle$, в вектор $\psi(\mathbf{x})|\dots\rangle$, у которого отлична от нуля лишь компонента $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; n-1 | \psi(\mathbf{x})|\dots\rangle$, т. е. $\psi(\mathbf{x})$ преобразует n -частичное состояние в $(n-1)$ -частичное состояние. Отметим также, что в выражениях (6.82), (6.83) свойства симметрии состояний не изменяются: симметричные состояния переходят в симметричные. Далее, можно проверить, что при таком представлении операторов $\psi(\mathbf{x})$ и $\psi^*(\mathbf{x})$ выполняются перестановочные соотношения (6.65) и (6.66).

§ 7. Случай антисимметричных волновых функций

Описание совокупности фермионов совершенно аналогично изложенному в предыдущих параграфах. На самом деле описание фермионов даже проще, поскольку антисимметризованные базисные векторы $\mathcal{G}_{\{n_1, n_2, \dots\}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ таковы, что $n_i \leq 1$, т. е. n_i может быть равно только 0 или 1. Чтобы доказать это утверждение, предположим, что функция $G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$, при действии на которую антисимметризатор \mathcal{A} дает функцию $\mathcal{G}_{\{n_1, n_2, \dots\}}$, такова, что $n_i \geq 2$. Это означает, что $G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)$ имеет вид $\langle \mathbf{x}_1 | \lambda_1 \rangle \dots \langle \mathbf{x}_r | \lambda^{(i)} \rangle \dots \langle \mathbf{x}_s | \lambda^{(i)} \rangle \dots$, т. е. по крайней мере два собственных значения одинаковы, скажем s -е и r -е. Пусть \mathcal{J}_{rs} — транспозиция, переставляющая r -ю и s -ю координаты. Тогда $\mathcal{J}_{rs} G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, откуда

$$\mathcal{G}_{\{n_1, n_2, \dots\}} = \mathcal{A} G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} = \mathcal{A} \mathcal{J}_{rs} G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} = -\mathcal{A} G_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} = 0. \quad (6.84)$$

Мы использовали свойство (б) антисимметризатора (см. § 2, стр. 128), согласно которому для любой транспозиции \mathcal{J} имеем $\mathcal{J}\mathcal{A} = -\mathcal{A}$. Следовательно, $\mathcal{G} = 0$, если не все λ_i различны, т. е. если $n_i \neq 0, 1$. Поэтому постоянная нормировки $N_{\{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\}}^{(n)} = \sqrt{n!}$, и антисимметричные векторы базиса суть

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n | n_1, n_2, \dots, n_i \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_P \delta_{P\mathcal{P}} (g_{\lambda_1}(\mathbf{x}_1) \dots g_{\lambda_n}(\mathbf{x}_n)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_1 | \lambda_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1 | \lambda_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_1 | \lambda_n \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2 | \lambda_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_2 | \lambda_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_2 | \lambda_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{x}_n | \lambda_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_n | \lambda_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_n | \lambda_n \rangle \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Из записи в виде детерминанта очевидно, что никакие две функции g_{λ} не могут быть одинаковыми, так как тогда два столбца были бы одинаковыми и детерминант оказался бы равным нулю.

Формулы разложения, аналогичные формулам (6.38) и (6.39) для случая симметричных функций, являются обычными разложениями детер-

1) Для удобства примем, что $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \leq \lambda_n$.

минанта по строке или столбцу. Если $\lambda_m = \lambda^{(i)}$, они имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n | n_1, n_2, n_3, \dots, n_i, \dots \rangle &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^{m-1} \langle \mathbf{x}_1 | \lambda_m \rangle \times \\ &\times \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n; n-1 | n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{x}_1 | \lambda^{(i)} \rangle n_i (-1)^{s_i} \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n; n-1 | n_1, \dots, n_i-1, \dots \rangle, \end{aligned} \quad (6.86)$$

где

$$s_j = \sum_{k=1}^{j-1} n_k \quad (6.87)$$

равно числу занятых состояний до j -го состояния. Вторая формула разложения есть

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \langle \mathbf{x}_l | \lambda^{(i)} \rangle \times \\ &\times \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_{l+1}, \dots, \mathbf{x}_n; n-1 | n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots \rangle. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Определим теперь оператор уничтожения a_i с помощью равенства

$$a_i | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle = (-1)^{s_i} n_i | n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots \rangle, \quad (6.89)$$

а сопряженный оператор — равенством

$$a_i^* | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle = (-1)^{s_i} (1 - n_i) | n_1, n_2, \dots, n_i+1, \dots \rangle. \quad (6.90)$$

Множитель $(1 - n_i)$ в определении сопряженного оператора гарантирует, что если состояние $|\lambda^{(i)}\rangle$ уже занято, то вторая частица не может быть помещена в это же состояние.

Легко проверить, что перестановочные соотношения для операторов a, a^* имеют вид

$$[a_i, a_j]_+ = [a_i^*, a_j^*]_+ = 0, \quad (6.91a)$$

$$[a_i, a_j^*]_+ = \delta_{ij} \quad (6.91b)$$

($[A, B]_+ = AB + BA$ есть антикоммутатор A и B), поскольку

$$a_i a_i^* | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle = (-1)^{2s_i} (1 - n_i) (n_i + 1) | n_1, \dots, n_i, \dots \rangle, \quad (6.92)$$

$$a_i^* a_i | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle = (-1)^{2s_i} (2 - n_i) n_i | n_1, \dots, n_i, \dots \rangle \quad (6.93)$$

и $n_i^2 = n_i$, так как $n_i = 0, 1$. Отметим равенство $a_i^2 = a_i^{*2} = 0$, которое является операторным выражением того, что ни одно состояние не может иметь число заполнения, большее единицы. Оператор числа частиц в i -ом состоянии опять имеет вид $N_i = a_i^* a_i$. Теперь он дополнительно обладает свойством оператора проектирования, поскольку

$$N_i^2 = a_i^* a_i a_i^* a_i = a_i^* (1 - a_i^* a_i) a_i = a_i^* a_i = N_i, \quad (6.94)$$

так что его собственные значения равны 0 и 1, как и следовало ожидать. Если определить операторы

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_i \langle \mathbf{x} | \lambda^{(i)} \rangle a_i, \quad (6.95a)$$

$$\psi^*(\mathbf{x}) = \sum_i \overline{\langle \mathbf{x} | \lambda^{(i)} \rangle} a_i^*, \quad (6.95b)$$

то они будут удовлетворять следующим перестановочным соотношениям:

$$[\psi(\mathbf{x}), \psi^*(\mathbf{x}')]_{\pm} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (6.96a)$$

$$[\psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{y})]_{\pm} = [\psi^*(\mathbf{x}), \psi^*(\mathbf{y})]_{\pm} = 0. \quad (6.96b)$$

Операторы ψ и ψ^* в пространстве Фока имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n | \psi(\mathbf{x}) | \Psi \rangle &= (\psi(\mathbf{x}) \Psi)^{(n)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \\ &= \sqrt{n+1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; n+1 | \Psi \rangle = \\ &= \sqrt{n+1} \psi^{(n+1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \end{aligned} \quad (6.97)$$

и

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n | \psi^*(\mathbf{x}) | \Psi \rangle &= (\psi^*(\mathbf{x}) \Psi)^{(n)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \Psi^{(n-1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_{l+1}, \dots, \mathbf{x}_n). \end{aligned} \quad (6.98)$$

Наконец, как и в случае симметричных функций, равенство (6.85) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n | n_1, n_2, \dots, n_j, \dots \rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \psi(\mathbf{x}_n) \dots \psi(\mathbf{x}_1) | n_1, n_2, \dots, n_j, \dots \rangle, \end{aligned} \quad (6.99a)$$

откуда

$$A | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \psi^*(\mathbf{x}_n) \dots \psi^*(\mathbf{x}_1) | 0 \rangle. \quad (6.99b)$$

§ 8. Представление операторов

Далее мы получим представление в пространстве чисел заполнения для некоторого оператора F , который не меняет число частиц и вид которого в конфигурационном пространстве известен:

$$\langle \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_n | F | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle = \delta_{nn'} F(n; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1) \dots \delta(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n). \quad (6.100)$$

Используя условие полноты базисных векторов $| \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \rangle$, получаем следующее выражение для оператора F в пространстве чисел заполнения:

$$\begin{aligned} \langle n'_1, n'_2, \dots | F | n_1, n_2, \dots \rangle &= \\ &= \int d\mathbf{x}_1 \dots \int d\mathbf{x}_n \int d\mathbf{x}'_1 \dots \int d\mathbf{x}'_n \langle n'_1, n'_2, \dots | \mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_n \rangle \times \\ &\quad \times \langle \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_n | F | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \rangle \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle = \\ &= \int d\mathbf{x}_1 \dots \int d\mathbf{x}_n \langle n'_1, \dots, n'_i, \dots | \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n \rangle F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; n) \times \\ &\quad \times \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n | n_1, n_2, \dots \rangle = \\ &= \frac{1}{n!} \int d\mathbf{x}_1 \dots \int d\mathbf{x}_n \langle n'_1, \dots, n'_i, \dots | \psi^*(\mathbf{x}_n) \dots \psi^*(\mathbf{x}_1) | 0 \rangle \times \\ &\quad \times F(n; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \langle 0 | \psi(\mathbf{x}_1) \dots \psi(\mathbf{x}_n) | n_1, n_2, \dots \rangle, \end{aligned} \quad (6.101)$$

где $n'_1 + n'_2 + \dots = n_1 + n_2 + \dots = n$. При выводе последнего равенства мы использовали равенство (6.69) или (6.99) в зависимости от того, имеем

ли мы дело с симметричными или антисимметричными функциями. Поскольку у вектора $\psi(x_n) \dots \psi(x_1) |n\rangle$ отлична от нуля лишь проекция на состояние без частиц, то суммирование можно распространить на полные наборы состояний в $\mathcal{H}^{(1)}$, $\mathcal{H}^{(2)}$, ..., и т. д. и переписать (6.101) следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle n'_1, n'_2 \dots | F | n_1, n_2, \dots \rangle &= \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n \times \\ &\times \langle n'_1, n'_2, \dots | \psi^*(x_n) \dots \psi^*(x_1) F(n; x_1, \dots, x_n) \psi(x_1) \dots \psi(x_n) | n_1, n_2, \dots \rangle. \end{aligned} \quad (6.102)$$

Рассмотрим теперь случай, когда F является суммой одночастичных операторов, т. е.

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; n) = \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (6.103)$$

Подставляя это выражение в правую часть (6.102), получаем

$$\begin{aligned} \langle n'_1, n'_2 \dots | F | n_1, n_2, \dots \rangle &= \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n \times \\ &\times \langle n'_1, n'_2 \dots | \psi^*(x_n) \dots \psi^*(x_1) \sum_{i=1}^n f(x_i) \psi(x_1) \dots \psi(x_n) | n_1, n_2, \dots \rangle. \end{aligned} \quad (6.104)$$

Член

$$\int dx_1 \dots \int dx_n \langle n'_1, n'_2 \dots | \psi^*(x_n) \dots \psi^*(x_1) f(x_n) \psi(x_1) \dots \psi(x_n) | n_1, n_2, \dots \rangle, \quad (6.105)$$

можно упростить, так как $\int dx_1$ дает оператор числа частиц N , который при действии на состояние справа от него

$$\psi(x_2) \dots \psi(x_n) | n_1 n_2 \dots n_i \dots \rangle$$

дает это же состояние, поскольку последнее является одночастичным. Аналогично, $\int dx_2$ дает множитель 2, так как соответствующий оператор числа частиц действует уже на двухчастичное состояние. Поэтому, интегрируя по переменным x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , окончательно получаем

$$\int dx_n (n-1)! \langle n_1 n_2 \dots | \psi^*(x_n) f(x_n) \psi(x_n) | n'_1 n'_2 \dots \rangle.$$

Каждый член в сумме может быть приведен к такому виду, если использовать перестановочные соотношения, чтобы операторы $\psi(x_i)$ и $\psi^*(x_i)$, которые необходимо интегрировать вместе с $f(x_i)$, были расположены соответственно справа и слева от других операторов. Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle n'_1, n'_2 \dots | F | n_1, n_2 \dots \rangle &= \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle n_1 n_2 \dots | \int dx_i \psi^*(x_i) f(x_i) \psi(x_i) | n_1 n_2 \dots \rangle = \\ &= \langle n_1 n_2 \dots | \int dx \psi^*(x) f(x) \psi(x) | n_1 n_2 \dots \rangle, \end{aligned} \quad (6.106)$$

так что если оператор F в конфигурационном пространстве n частиц задан равенством (6.103), то в пространстве Фока он имеет вид

$$F = \int dx \psi^*(x) f(x) \psi(x). \quad (6.107)$$

Аналогично, если F — двухчастичный оператор вида

$$F(n; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{i < j} V(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} V(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad (6.108)$$

то легко получить

$$\begin{aligned} \langle n'_1, n'_2 \dots | F | n_1, n_2 \dots \rangle &= \frac{1}{n(n-1)} \langle n'_1, n'_2 \dots | \sum_{i < j} \int dx_i \int dx_j \times \\ &\times \psi^*(\mathbf{x}_i) \psi^*(\mathbf{x}_j) V(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \psi(\mathbf{x}_j) \psi(\mathbf{x}_i) | n_1, n_2 \dots \rangle = \\ &= \langle n'_1, n'_2 \dots | \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x} \psi^*(\mathbf{x}') \psi^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') | n_1, n_2 \dots \rangle, \end{aligned} \quad (6.109a)$$

так что

$$F = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x} \psi^*(\mathbf{x}') \psi^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}'). \quad (6.109b)$$

Обратим внимание на порядок операторов в этом выражении: $\psi^*(\mathbf{x}') \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}')$; такой порядок подразумевает, что в разложении (6.108) нет членов вида $V(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)$ (т. е. нет действия частицы самой на себя). Кроме того, такой порядок обеспечивает эрмитовость оператора F в пространстве Фока.

Таким образом, гамильтониан в пространстве Фока, соответствующий в подпространстве n частиц гамильтониану обычной шредингеровской теории, описывающему систему n частиц с парным двухчастичным взаимодействием, дается выражением

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2m} \int d\mathbf{x} \psi^*(\mathbf{x}) \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \psi^*(\mathbf{x}') \psi^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') = \\ &= H_0 + H_I. \end{aligned} \quad (6.110)$$

Поскольку явная проверка этого утверждения проясняет смысл формализма в пространстве Фока, проведем доказательство для члена H_0 в случае фермионов, т. е. когда ψ и ψ^* удовлетворяют соотношениям антикоммутиации.

Вычислим результат действия H_0 на произвольное состояние $|\Psi\rangle$, которое в пространстве Фока имеет вид

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \Psi^{(0)} \\ \Psi^{(1)}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \Psi^{(n)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (6.111)$$

Используя равенства (6.97) и (6.98), находим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int dx \psi^*(x) \nabla^2 \psi(x) \begin{bmatrix} \Psi^{(0)} \\ \Psi^{(1)}(x_1) \\ \Psi^{(2)}(x_1, x_2) \\ \vdots \\ \Psi^{(n)}(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m_i} \int dx \psi^*(x) \begin{bmatrix} \sqrt{1} \nabla_x^2 \Psi^{(1)}(x) \\ \sqrt{2} \nabla_x^2 \Psi^{(2)}(x, x_1) \\ \sqrt{3} \nabla_x^2 \Psi^{(3)}(x, x_1, x_2) \\ \vdots \\ \sqrt{n} \nabla_x^2 \Psi^{(n)}(x, x_1 \dots x_{n-1}) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.112a)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \int dx \delta(x - x_1) \nabla_x^2 \Psi^{(1)}(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \int dx \{ \delta(x - x_1) \nabla_x^2 \Psi^{(2)}(x, x_2) - \\ \quad - \delta(x - x_2) \nabla_x^2 \Psi^{(2)}(x, x_1) \} \\ \vdots \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \int dx \{ \delta(x - x_1) \nabla_x^2 \Psi^{(n)}(x, x_1 \dots x_{n-1}) \\ - \delta(x - x_2) \nabla_x^2 \Psi^{(n)}(x, x_1, x_3, \dots x_{n-1}) \\ \pm \dots + (-1)^{n-1} \delta(x - x_n) \nabla_x^2 \Psi^{(n)}(x, x_1, \dots x_{n-1}) \} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.112b)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{x_1}^2 \Psi^{(1)}(x_1) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \{ \nabla_{x_1}^2 \Psi^{(2)}(x_1, x_2) - \nabla_{x_2}^2 \Psi^{(2)}(x_2, x_1) \} \\ \vdots \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \{ \nabla_{x_1}^2 \Psi^{(n)}(x_1, x_2, \dots x_n) - \nabla_{x_2}^2 \Psi^{(n)}(x_2, x_1, x_3, \dots x_n) \pm \\ \quad \pm \dots + (-1)^{n-1} \nabla_{x_n}^2 \Psi^{(n)}(x_n, x_1, \dots x_{n-1}) \} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.112B)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{x_1}^2 \Psi^{(1)}(x_1) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^2 \nabla_{x_i}^2 \Psi^{(2)}(x_1, x_2) \\ \vdots \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^n \nabla_{x_i}^2 \Psi^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (6.112\Gamma)$$

При переходе от (6.112в) к (6.112г) мы использовали антисимметрию функции $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, например $\Psi^{(n)}(x_n, x_1, \dots, x_{n-1}) = (-1)^{n-1} \Psi^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$. Аналогичным образом можно проверить, что в подпространстве n частиц уравнение $H|\Psi(t)\rangle = i\hbar\partial_t|\Psi(t)\rangle$ принимает вид

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 + \sum_{i<j} V(x_i, x_j) \right\} \Psi^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; t) = i\hbar\partial_t \Psi^{(n)}(x_1, \dots, x_n; t). \quad (6.113)$$

В каждом подпространстве получается уравнение Шредингера для соответствующего числа частиц. Таким образом, шредингеровскую теорию для n -частиц можно характеризовать как такое решение уравнения

$$H|\Psi\rangle = i\hbar\partial_t|\Psi\rangle, \quad (6.114)$$

для которого $|\Psi\rangle$ является собственным вектором оператора числа частиц N с собственным значением n :

$$N|\Psi\rangle = n|\Psi\rangle. \quad (6.115)$$

Поскольку гамильтониан (6.110) и оператор N коммутируют, то такой вектор можно найти. Другими словами, в рассматриваемой теории число частиц является интегралом движения. Ясно, что вектор состояния в этом случае имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dx_1 \dots \int dx_n \Psi^{(n)}(x_1, \dots, x_n; t) \psi^*(x_n) \dots \psi^*(x_1) |0\rangle. \quad (6.116)$$

Из того, что операторы ψ^* антикоммутируют друг с другом, следует, что амплитуда $\Psi^{(n)}(x_1, \dots, x_n; t)$ является антисимметричной функцией x_1, x_2, \dots, x_n . При этом

$$\Psi^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; t) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \psi(x_1) \dots \psi(x_n) | \Psi(t) \rangle. \quad (6.117)$$

Для $n=2$ последнее равенство можно проверить непосредственно. Используя соотношения антикоммутации (6.96) и то, что $\psi(x)|0\rangle = 0$ для всех x , получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2!} \langle 0 | \psi(x_1) \psi(x_2) | \Psi \rangle = \\
& = \frac{1}{2!} \int dx'_1 \int dx'_2 \langle 0 | \psi(x_1) \psi(x_2) \psi^*(x'_2) \psi^*(x'_1) | 0 \rangle \Psi^{(2)}(x'_1, x'_2) = \\
& = \frac{1}{2!} \int dx'_1 \int dx'_2 \langle 0 | \psi(x_1) (-\psi^*(x'_2) \psi(x_2) + \\
& \quad + \delta(x_2 - x'_2)) \psi^*(x_1) | 0 \rangle \Psi(x'_1, x'_2) = \\
& = \frac{1}{2!} \int dx'_1 \int dx'_2 \{ \delta(x_2 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) - \\
& \quad - \delta(x_1 - x'_2) \delta(x_2 - x'_1) \} \Psi(x'_1, x'_2) = \Psi^{(2)}(x_1, x_2). \quad (6.118)
\end{aligned}$$

Здесь мы снова использовали антисимметричность $\Psi^{(2)}(x_1, x_2)$.

Аналогичную технику можно применить при выводе уравнения движения для вектора состояния $|\Psi\rangle$. Так, например,

$$\begin{aligned}
H_0 |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dx_1 \dots \int dx_n \psi^*(x_n) \dots \psi^*(x_1) |0\rangle \times \\
& \quad \times \sum_{i=1}^n -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 \Psi^{(n)}(x_1 \dots x_n). \quad (6.119)
\end{aligned}$$

Для перемещения оператора $\psi(x)$ из H_0 правее всех операторов рождения $\psi^*(x_n) \dots \psi^*(x_1)$ были использованы перестановочные соотношения. Но поскольку $\psi(x)|0\rangle = 0$, получающийся в результате член не равен нулю, и мы приходим в точности к (6.119). Аналогичную процедуру можно применить и к члену H_I . Скалярное умножение $H|\Psi\rangle$ на вектор $\langle x_1, x_2 \dots x_n |$ ведет тогда к уравнению (6.113).

Хотя мы рассмотрели формализм с гамильтонианом, для которого число частиц есть интеграл движения, должно быть ясно, что этот формализм допускает непосредственное обобщение на гамильтонианы, для которых N уже не является интегралом движения (например, если в H_I входит различное число операторов ψ и ψ^*). Рассмотренный формализм охватывает и такие случаи, когда частицы рождаются и уничтожаются, как, например, в β -распаде или при рождении мезона в нуклон-нуклонных соударениях при большой энергии. В этих случаях вектор состояния $|\Psi\rangle$ имеет вид

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \Psi^{(0)} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{1!}} \int dx_1 \psi^*(x_1) \Psi^{(1)}(x_1) |0\rangle + \dots \\
& \dots + \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dx_1 \dots \int dx_n \psi^*(x_n) \dots \psi^*(x_1) \Psi^{(n)}(x_1 \dots x_n) |0\rangle + \dots \quad (6.120)
\end{aligned}$$

и уравнения движения связывают амплитуды для n частиц $\Psi^{(n)}$ с амплитудами $\Psi^{(m)}$, $m \neq n$. Такой пример будет рассмотрен в § 1 гл. 12.

§ 9. Гейзенберговская картина

До сих пор мы пользовались шредингеровской картиной. Все операторы не зависели от времени, в то время как векторы состояния от времени зависели. Гейзенберговская картина определяется с помощью следующего унитарного преобразования:

$$|\Psi_H\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} H t} |\Psi_S(t)\rangle, \quad (6.124)$$

$$\psi_H(\mathbf{x}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} \psi(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} H t}. \quad (6.122)$$

Это унитарное преобразование таково, что шредингеровская и гейзенберговская картины совпадают при $t=0$. В последующих формулах мы опустим значок H у операторов, поскольку зависимость от t подразумевает, что они являются гейзенберговскими операторами. Одновременные перестановочные соотношения для гейзенберговских операторов суть

$$[\psi(x, t), \psi^*(x', t)]_{\pm} = e^{\frac{i}{\hbar} H t} [\psi(x), \psi^*(x')]_{\pm} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = \delta^{(3)}(x - x'), \quad (6.123a)$$

$$[\psi(x, t), \psi(x', t)]_{\pm} = [\psi^*(x, t), \psi^*(x', t)]_{\pm} = 0. \quad (6.123b)$$

Коммутаторы при неравных временах в общем случае уже не являются c -числами, и вычислить их намного труднее. В частном случае невзаимодействующих частиц, т. е. при $H_I = 0$, для неодновременных коммутаторов можно получить явное выражение (см. § 10).

Уравнение движения для гейзенберговского оператора имеет вид

$$i\hbar \partial_t \psi(x, t) = [\psi(x, t), H]. \quad (6.124)$$

Это уравнение получается, если взять производную по времени от (6.122). В частном случае, когда гамильтониан имеет вид

$$H = \int dx \psi^*(x) \mathcal{H}(x) \psi(x) + \frac{1}{2} \int dx \int dx' \psi^*(x') \psi^*(x) U(x, x') \psi(x) \psi(x'), \quad (6.125a)$$

причем $\mathcal{H}(x)$ не зависит от времени [так, $\mathcal{H}(x) = -(\hbar^2/2m)\nabla^2 + V(x)$, где $V(x)$ — потенциал внешнего поля] и $U(x, x') = U(x', x)$,

$$i\hbar \partial_t \psi(x, t) = \mathcal{H}(x) \psi(x, t) + \int dx' \psi^*(x', t) U(x', x) \psi(x', t) \psi(x, t). \quad (6.126)$$

Для пояснения вывода правой части последнего уравнения рассмотрим второй член, который возникает из $[\psi(x, t), H_I]$. Поскольку гамильтониан не зависит от времени, $H = H(0) = H(t)$, то можно написать

$$H = \int dx \psi^*(x, t) \mathcal{H}(x) \psi(x, t) + \frac{1}{2} \int dx \int dx' \psi^*(x', t) \psi^*(x, t) U(x, x') \psi(x, t) \psi(x', t). \quad (6.125b)$$

Используя перестановочные соотношения (6.123), получаем

$$\left[\psi(y, t), \int dx \int dx' \psi^*(x', t) \psi^*(x, t) U(x, x') \psi(x, t) \psi(x', t) \right] = \int dx \int dx' [\psi(y, t), \psi^*(x', t) \psi^*(x, t)] U(x, x') \psi(x, t) \psi(x', t), \quad (6.127)$$

поскольку $[\psi(y, t), \psi(x, t) \psi(x', t)] = 0$ как для бозе-частиц, так и для ферми-частиц. Далее,

$$\begin{aligned} & [\psi(y, t), \psi^*(x', t) \psi^*(x, t)] = \\ & = \psi(y, t) \psi^*(x', t) \psi^*(x, t) - \psi^*(x', t) \psi^*(x, t) \psi(y, t) = \\ & = \delta(y - x') \psi^*(x, t) \mp \psi^*(x', t) \psi(y, t) \psi^*(x, t) - \psi^*(x', t) \psi^*(x, t) \psi(y, t) = \\ & = \delta(y - x') \psi^*(x, t) \mp \delta(x - y) \psi^*(x', t) \quad \left(\begin{array}{l} - \text{ для поля } \Phi. - \text{ Д.} \\ + \text{ для поля } \text{Б.} - \text{ Э.} \end{array} \right) \quad (6.128) \end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{y}, t), H_I] &= \\ &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \{ \psi^*(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}') U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}', t) \mp \\ &\mp \psi^*(\mathbf{x}', t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}', t) \} = \\ &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' \psi^*(\mathbf{x}', t) (U(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + U(\mathbf{y}, \mathbf{x}')) \psi(\mathbf{x}', t) \psi(\mathbf{y}, t). \end{aligned} \quad (6.129)$$

Учитывая, что по предположению $U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = U(\mathbf{x}', \mathbf{x})$, получаем второй член в равенстве (6.126).

При отсутствии взаимодействия между частицами, т. е. когда $H_I = 0$, уравнение движения для оператора ψ формально совпадает с уравнением Шредингера для одночастичной системы. Однако шредингеровская волновая функция заменяется оператором, который удовлетворяет определенным перестановочным соотношениям. Поскольку само уравнение Шредингера было получено с помощью «первичного квантования», при котором переменные \mathbf{p} и \mathbf{q} в гамильтониане классической теории заменялись операторами, удовлетворяющими перестановочным соотношениям $[q_j, p_i] = i\hbar \delta_{ji}$, то вторичная замена коммутирующей функции (волновой функции) оператором называется «вторичным квантованием». Таково происхождение названия «вторичное квантование» для рассматриваемого формализма.

§ 10. Системы из многих взаимодействующих частиц

В качестве первого примера применения операторного метода опишем с помощью вторичного квантования систему n частиц, которые движутся свободно, не взаимодействуя друг с другом. Гамильтониан такой системы есть

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^*(\mathbf{x}, t) \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (6.130)$$

оператор полного импульса

$$\mathbf{P} = \frac{\hbar}{2i} \int d\mathbf{x} \{ \psi^*(\mathbf{x}, t) \nabla \psi(\mathbf{x}, t) - \nabla \psi^*(\mathbf{x}, t) \cdot \psi(\mathbf{x}, t) \}, \quad (6.131)$$

а оператор числа частиц

$$N = \int \psi^*(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (6.132)$$

Операторы ψ и ψ^* удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{x}, t), \psi^*(\mathbf{x}', t)]_{\pm} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\psi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}', t)]_{\pm} &= [\psi^*(\mathbf{x}, t), \psi^*(\mathbf{x}', t)]_{\pm} = 0 \end{aligned} \quad (6.133)$$

и уравнениям движения

$$i\hbar \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = [\psi(\mathbf{x}, t), H] = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t). \quad (6.134)$$

Поскольку $[H, \mathbf{P}] = 0$, удобно описывать систему с помощью плоских волн, характеризуя каждую из них волновым вектором \mathbf{k} (и, если нужно, индексом поляризации или спиновым индексом). Мы получим такое описание, если введем разложение

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)}, \quad (6.135)$$

причем $\omega_{\mathbf{k}} = \hbar \mathbf{k}^2 / 2m$, так что $\psi(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению (6.134). Предположим, что система находится в большом ящике с объемом $V = L^3$, и потребуем выполнения условия периодичности на границе. Тогда разрешенными значениями k_i будут $k_i = n_i(2\pi/L)$, где $n_i = 0, \pm 1, \pm 2$ и т. д. В пределе при $V \rightarrow \infty$ сумма по дискретным значениям \mathbf{k} заменяется интегралом по $d\mathbf{k}$, причем $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}$. Перестановочные

соотношения для операторов a^* , a суть

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^*] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (6.136a)$$

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^*, a_{\mathbf{k}'}^*] = 0. \quad (6.136b)$$

Для рассматриваемой системы можно выразить перестановочные соотношения и для гейзенберговских операторов с разными временами:

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{x}, t), \psi^*(\mathbf{x}', t')]_{\pm} &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^*] e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega_{\mathbf{k}'} t')} = \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t - t')} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i\omega_{\mathbf{k}}(t - t')}. \end{aligned} \quad (6.137)$$

Наблюдаемые (6.130) — (6.132), выраженные через операторы a , a^* , имеют вид

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar \mathbf{k}^2}{2m} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}, \quad (6.138)$$

$$P = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}, \quad (6.139)$$

$$N = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}. \quad (6.140)$$

Обозначим основное состояние системы n невзаимодействующих фермионов спина $1/2$ посредством $|\Phi_0(n)\rangle$. Это такое состояние, которое получится, если последовательно заполнять каждое одночастичное состояние, начиная с состояния при $\mathbf{k} = 0$, и до тех пор, пока не будут размещены все частицы. Основное состояние характеризуется тем, что $n_{\mathbf{k}} = 1$ при $|\mathbf{k}| \leq k_F$ и $n_{\mathbf{k}} = 0$ при $|\mathbf{k}| > k_F$, где k_F — импульс Ферми, определяемый равенством $\frac{4\pi}{3} \hbar^2 k_F^3 V = n \hbar^3$. Мы примем, что сфера Ферми заполняется сферически симметрично. Тогда получающееся состояние имеет импульс, равный нулю. Поэтому основное состояние можно абстрактно характеризовать как такое состояние, для которого $a_{\mathbf{k}} |\Phi_0(n)\rangle = 0$ при $|\mathbf{k}| > k_F$. Энергия основного состояния есть

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0(n), H \Phi_0(n) \rangle &= 2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq k_F} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} n_{\mathbf{k}} = \\ &= 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d\mathbf{k} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} = 2 \frac{\hbar^2 V}{2m (2\pi)^3} 4\pi \int_0^{k_F} dk k^4 = 2 \frac{\hbar^2 k_F^5}{5 (2\pi)^2 m} V. \end{aligned} \quad (6.141)$$

Множитель 2 появляется из-за учета спиновых состояний частиц. Отметим, что качественно роль статистики Ферми заключается в том, что частицы с относительным импульсом p не могут подойти друг к другу

ближе, чем на расстояние \hbar/p . Действительно, если система состоит из n частиц и допустимый объем есть V , тогда среднее расстояние между частицами приблизительно равно $a \sim \left(\frac{3V}{4\pi n}\right)^{1/3}$, ибо на каждую частицу приходится объем $\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{V}{n}$. Поэтому средний импульс одной частицы $\frac{\hbar}{a} \sim \hbar \left(\frac{3V}{4\pi n}\right)^{-1/3}$, а средняя энергия $\frac{p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{4\pi n}{3V}\right)^{2/3}$, так что полная энергия приблизительно равна $nr^2/2m$, т. е. пропорциональна Vk_F^5 ($\hbar^2/2m$).

В основном состоянии системы невзаимодействующих бозе-частиц все частицы находятся в состоянии с $\mathbf{k}=0$. В этом случае основное состояние характеризуется тем, что $n_0 = n$, а $n_{\mathbf{k}} = 0$, если $\mathbf{k} \neq 0$, так что $a_{\mathbf{k}}|\Phi_0(n)\rangle = 0$, если $\mathbf{k} \neq 0$. Энергия и импульс такого состояния равны нулю.

§ 11. Метод Хартри — Фока

В качестве другого примера применения формализма вторичного квантования рассмотрим приближение Хартри—Фока для системы n электронов во внешнем поле. Основное допущение этого приближенного метода заключается в том, что вектор состояния системы можно аппроксимировать одним антисимметризованным произведением волновых функций. Другими словами, предполагается, что систему можно описать в пространстве чисел заполнения вектором $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$ при

$\sum_i n_i = n$, причем пока мы не конкретизируем вид волновых функций $\varphi_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | i \rangle$, к которым относятся числа n_i , потребуем только, чтобы система функций была полной и чтобы функции были собственными функциями полного набора наблюдаемых для одной частицы. Предполагается, что гамильтониан системы имеет вид

$$H = \int d\mathbf{x} \psi^*(\mathbf{x}) \mathcal{H}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \psi^*(\mathbf{x}') \psi^*(\mathbf{x}) U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') = H_0 + H_I, \quad (6.142)$$

где

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{x}), \quad (6.143)$$

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{e^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (6.144)$$

Здесь $V(\mathbf{x})$ описывает внешнее поле, например кулоновское поле ядра. Если ввести операторы рождения и уничтожения a_i^* , a_i ,

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\mathbf{x}) a_i, \quad (6.145)$$

то с помощью этих операторов можно переписать H следующим образом:

$$H = \sum_{ij} h_{ij} a_i^* a_j + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} a_i^* a_j^* a_k a_l u_{ijkl}, \quad (6.146)$$

где

$$h_{ij} = \int d\mathbf{x} \bar{\varphi}_i(\mathbf{x}) \mathcal{H}(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}), \quad (6.147)$$

$$u_{ijkl} = \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \bar{\varphi}_i(\mathbf{x}) \bar{\varphi}_j(\mathbf{x}') U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varphi_k(\mathbf{x}) \varphi_l(\mathbf{x}'). \quad (6.148)$$

Нетрудно выразить среднее значение гамильтониана в состоянии $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$. Рассмотрим сначала член

$$\langle n_1, n_2, \dots, n_i, \dots | H_0 | n_1, n_2, \dots \rangle = \sum_{ij} \langle n_1, n_2, \dots | a_i^* a_j | n_1, n_2, \dots \rangle h_{ij}. \quad (6.149)$$

Поскольку оператор a_i^* рождает частицу в состоянии i , а оператор a_j уничтожает частицу в состоянии j , то вектор $a_i^* a_j | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots \rangle$ с точностью до фазового множителя равен

$$n_j (1 - n_i) | n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots, n_j - 1, \dots \rangle$$

и, следовательно, ортогонален вектору $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle$, если $i \neq j$. Таким образом, в сумму по j дает вклад лишь член с $j = i$ и'

$$\langle n_1 n_2 \dots | H_0 | n_1 n_2 \dots \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} n_i h_{ii}. \quad (6.150)$$

Замечаем также, что для

$$\langle n_1 n_2 \dots | H_I | n_1 n_2 \dots \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle n_1 n_2 \dots | a_i^* a_j^* a_k a_l | n_1 n_2 \dots \rangle u_{ijkl} \quad (6.151)$$

матричный элемент справа отличен от нуля только при $j = l$ и $i = k$, или когда $i = l$ и $j = k$, так что

$$\begin{aligned} \langle n_1 n_2 \dots | H_I | n_1 n_2 \dots \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \langle n_1 n_2 \dots | a_i^* a_j^* a_i a_j | n_1 n_2 \dots \rangle u_{jijj} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{ij} \langle n_1 n_2 \dots | a_i^* a_j^* a_j a_i | n_1 n_2 \dots \rangle u_{jiji} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \langle n_1 n_2 \dots | a_i^* a_j^* a_i a_j | n_1 n_2 \dots \rangle (u_{jijj} - u_{jiji}), \end{aligned} \quad (6.152)$$

где последний шаг следует из того, что $a_i a_j = -a_j a_i$.

Используя соотношение антикоммутиации, имеем

$$a_i^* a_j^* a_i a_j = -a_i a_i a_j^* a_j + a_i^* a_j \delta_{ij} = -N_i N_j + N_i \delta_{ij}, \quad (6.153)$$

так что окончательно

$$\langle n_1 n_2 \dots | H_I | n_1 n_2 \dots \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ij} n_i n_j (u_{jiji} - u_{jijj}) \quad (6.154)$$

и

$$\langle n_1 n_2 \dots | H | n_1 n_2 \dots \rangle = \sum_i h_{ii} n_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} n_i n_j (u_{jiji} - u_{jijj}). \quad (6.155)$$

Если одночастичные волновые функции обозначить через $\varphi_i(\mathbf{x}, \zeta)$ (теперь мы явно выписали спиновую переменную), то

$$h_{jj} = \sum_{\zeta=1}^2 \int d^3x \bar{\varphi}_j(\mathbf{x}, \zeta) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] \varphi_j(\mathbf{x}, \zeta), \quad (6.156)$$

$$u_{jiji} = \sum_{\zeta, \zeta'} \int d^3x \int d^3x' \bar{\varphi}_j(\mathbf{x}, \zeta) \bar{\varphi}_i(\mathbf{x}', \zeta') U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varphi_j(\mathbf{x}, \zeta) \varphi_i(\mathbf{x}', \zeta'), \quad (6.157)$$

$$u_{jijj} = \sum_{\zeta, \zeta'} \int d^3x \int d^3x' \bar{\varphi}_j(\mathbf{x}, \zeta) \bar{\varphi}_i(\mathbf{x}', \zeta') U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varphi_i(\mathbf{x}, \zeta) \varphi_j(\mathbf{x}', \zeta'). \quad (6.158)$$

Отметим, что $u_{jij} \neq 0$ только в том случае, когда состояния i и j соответствуют состояниям электронов с параллельными спинами. Поскольку кулоновское взаимодействие $U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = e^2/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ не зависит от спина, можно провести суммирование по спиновым переменным ζ, ζ' . Если состояния $|i\rangle$ и $|j\rangle$ таковы, что электроны имеют антипараллельные спины, то эти состояния будут ортогональны по спиновым переменным. Если ввести матрицу плотности

$$\begin{aligned} \varrho_{\zeta\zeta'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \langle n_1 n_2 \dots | \psi_{\zeta}^*(\mathbf{x}) \psi_{\zeta'}(\mathbf{x}') | n_1 n_2 \dots \rangle = \\ &= \sum_i n_i \bar{\varphi}_i(\mathbf{x}, \zeta) \varphi_i(\mathbf{x}', \zeta') = \overline{\varrho_{\zeta'\zeta}(\mathbf{x}', \mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (6.159)$$

то с ее помощью можно выразить обычную плотность заряда

$$\varrho(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_{\zeta} n_i |\varphi_i(\mathbf{x}, \zeta)|^2 = \sum_{\zeta} \varrho_{\zeta\zeta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (6.160)$$

и член с гамильтонианом взаимодействия

$$\begin{aligned} \langle n_1 n_2 \dots | H_I | n_1 n_2 \dots \rangle &= \frac{e^2}{2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\varrho(\mathbf{x}) \varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \\ &- \frac{e^2}{2} \sum_{\zeta\zeta'} \int d^3x \int d^3x' \frac{|\varrho_{\zeta\zeta'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned} \quad (6.161)$$

Получающиеся члены интерпретируются следующим образом. Первый соответствует кулоновскому взаимодействию между заряженными облаками электронов. Отметим, что этот член включает кулоновское самодействие каждого электрона. Второй член (с обменным взаимодействием электронов с параллельными спинами) нейтрализует члены самодействия и дает вклад в энергию взаимодействия. Этот вклад возникает из-за корреляций между частицами в силу принципа Паули.

Метод Хартри — Фока [358, 262, 732] состоит в отыскании таких одноэлектронных волновых функций, что построенная из них функция $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n | n_1 n_2 \dots \rangle$ минимизирует $\langle n_1 n_2 \dots | H | n_1 n_2 \dots \rangle$. Требуется также, чтобы эти одночастичные волновые функции были ортонормированы. Если ввести величины

$$v_{ij} = \sum_{\zeta} \int d^3x \bar{\varphi}_i(\mathbf{x}, \zeta) \varphi_j(\mathbf{x}, \zeta), \quad (6.162)$$

то φ_i определяются требованием, чтобы энергия $\langle n_1 n_2 \dots | H | n_1 n_2 \dots \rangle$ была стационарна по отношению к вариациям функций φ_i при условии (6.162). Пусть λ_{ij} — множители Лагранжа для соответствующих дополнительных условий. Тогда условие стационарности имеет вид

$$\delta \{ \langle n_1 n_2 \dots | H | n_1 n_2 \dots \rangle - \sum_{ij} \lambda_{ij} v_{ij} \} = 0. \quad (6.163)$$

Уравнения для определения функций φ получаются варьированием по φ_j^*

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi_j(\mathbf{x}, \zeta) - V(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}, \zeta) + e^2 \int d^3x' \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \varphi_j(\mathbf{x}, \zeta) - \\ - e^2 \sum_i \int d^3x' \frac{\varrho_{\zeta'\zeta}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}', \zeta')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_i \lambda_{ij} \varphi_i(\mathbf{x}, \zeta). \end{aligned} \quad (6.164)$$

Это уравнения Фока. С помощью линейного унитарного преобразования функций φ всегда можно выбрать решения так, что λ_{jl} будет диагональной матрицей. Поэтому мы рассмотрим лишь λ_{jj} и обозначим их через ϵ_j . Правая часть (6.164) становится равной $\epsilon_j \varphi_j(x, \zeta)$. Теперь нужно решать эти уравнения относительно $\varphi_j(x, \zeta)$ самосогласованным образом. Подробное и очень ясное толкование этих уравнений читатель может найти в работе Слэттера [733].

Существует важная система, для которой уравнения Хартри—Фока можно решить точно для вектора основного состояния. Эта система состоит из электронов, которые движутся в ящике объема V , в котором существует также однородный фон положительных зарядов с плотностью $+en/V$. Проверим, что в данной задаче решения $\varphi_i(x, \zeta)$ являются плоскими волнами. (Сначала рассмотрим случай, когда имеется n_+ электронов со спином, направленным вверх, и n_- электронов со спином, направленным вниз, а затем положим $n_+ = n_- = n/2$.) Мы примем, что фазовое пространство для частиц с обоими направлениями спина заполнено сферически симметрично до поверхности Ферми, которая характеризуется импульсом k_{F+} для частиц со спином, направленным вверх, и импульсом k_{F-} для частиц со спином, направленным вниз:

$$\frac{4}{3} \pi k_{F\pm}^3 V = n_{\pm} (2\pi\hbar)^3 \quad (6.165)$$

(в дальнейшем положим $\hbar = 1$). По предположению, волновые функции имеют вид

$$\varphi_{\mathbf{k}}(x, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \begin{Bmatrix} \alpha(\zeta) \\ \beta(\zeta) \end{Bmatrix}, \quad (6.166)$$

где $k_i = n_i(2\pi/L)$, $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и α, β — обычные спиновые функции, причем α соответствует спину, направленному вверх, а β — спину, направленному вниз. Матрица плотности для электронов со спином, направленным вверх, есть

$$\begin{aligned} \rho_{\zeta\zeta'}^+(x, x') &= \frac{1}{V} \sum_{|\mathbf{k}| < k_{F+}} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \bar{\alpha}(\zeta) \alpha(\zeta') \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F+}} k^2 dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\mu e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \mu} \bar{\alpha}(\zeta) \alpha(\zeta') = \\ &= \frac{n_+}{V} \left(3 \frac{\sin k_{F+} r - k_{F+} r \cos k_{F+} r}{(k_{F+} r)^3} \right) \bar{\alpha}(\zeta) \alpha(\zeta'), \end{aligned} \quad (6.167a)$$

$$= \frac{n_+}{V} Q(\eta_+) \bar{\alpha}(\zeta) \alpha(\zeta'), \quad (6.167b)$$

где $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, $\eta_{\pm} = k_{F\pm} r$, а n_+ — число электронов со спином, направленным вверх. Функция Q определяется равенствами (6.167a) и (6.167b). Аналогично, матрица плотности для электронов со спином, направленным вниз, есть

$$\rho_{\zeta\zeta'}^-(x, x') = \frac{n_-}{V} Q(\eta_-) \bar{\beta}(\zeta) \beta(\zeta'). \quad (6.168)$$

Отметим, что $Q(\eta) = 1$ при $\eta = 0$, т. е. при $r \rightarrow 0$, так что плотность заряда электронов в объеме V однородна.

Рассмотрим теперь электрон в состоянии $\varphi_j(x, \zeta)$, которое соответствует импульсу \mathbf{k} и спину, направленному вверх. Обменный член

в уравнениях Фока становится равным

$$-e^2 \frac{n_+}{V} \int d^3x' \frac{Q(k_{F+}, |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \alpha(\zeta), \quad (6.169)$$

так как в силу ортогональности состояний α и β только Q^+ дает вклад. По ζ' мы просуммировали. Заменяя переменную интегрирования \mathbf{x}' на $\mathbf{x}-\mathbf{x}'$, обменный член можно переписать следующим образом:

$$\left(e^2 \frac{n_+}{V} \int d^3r \frac{Q(k_{F+}, r)}{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \alpha(\zeta). \quad (6.170)$$

Интеграл в равенстве (6.170) можно вычислить и получить

$$\frac{1}{3} \int_0^\infty d\eta Q(\eta) \sin \alpha_+ \eta = \frac{\alpha_+}{2} \left\{ 1 + \frac{1-\alpha_+^2}{2\alpha_+} \ln \left| \frac{1+\alpha_+}{1-\alpha_+} \right| \right\}, \quad (6.171)$$

где $\alpha_\pm = k/k_{F\pm}$. Итак, плоская волна удовлетворяет уравнению Фока. Поскольку члены, описывающие взаимодействие с фоном положительных зарядов, сокращаются с членами, описывающими кулоновское взаимодействие электронов, то уравнение, которому удовлетворяет Φ_k , имеет вид

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Phi_k(\mathbf{x}, \zeta) - \frac{e^2 k_{F+}}{\pi} \left\{ 1 + \frac{1-\alpha_+^2}{2\alpha_+} \ln \left| \frac{1+\alpha_+}{1-\alpha_+} \right| \right\} \Phi_k(\mathbf{x}, \zeta) = \varepsilon_k \Phi_k(\mathbf{x}, \zeta). \quad (6.172)$$

Параметр ε_k определяется выражением

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{e^2 k_{F+}}{2\pi} \left\{ 2 + \frac{1-\alpha_+^2}{\alpha_+} \ln \left| \frac{1+\alpha_+}{1-\alpha_+} \right| \right\}. \quad (6.173)$$

Полная энергия $\langle H \rangle$ для случая $n_+ = n_- = n/2$, $k_{F\pm} = k_F$ вычисляется без труда, так как

$$\langle H_0 \rangle = 2 \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} k^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi \hbar^2}{5m} k_F^5, \quad (6.174)$$

а обменная энергия электронов со спином, направленным вверх, есть

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} e^2 \sum_{\zeta\zeta'} \int d^3x \int d^3x' \frac{Q_{\zeta\zeta'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} &= -2\pi e^2 V \left(\frac{n_+}{V} \right)^2 \frac{1}{k_F^3} \int_0^\infty d\eta \eta |Q(\eta)|^2 = \\ &= -\frac{9}{2} \pi e^2 V \left(\frac{n_+}{V} \right)^2 \frac{1}{k_F^3}. \end{aligned} \quad (6.175)$$

Вся обменная энергия в два раза больше. Следовательно, полная энергия основного состояния дается выражением

$$\langle H \rangle = E = \frac{V}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{4\pi \hbar^2}{5m} k_F^5 - 2e^2 k_F^4 \right\}. \quad (6.176)$$

Если рассматривать валентные электроны в металле как квазисвободные и описывать их как свободные электроны, которые движутся сквозь положительный фон, взаимодействуя друг с другом через кулоновское поле, тогда электронные теплоемкости, вычисленные из формулы (6.176), плохо согласуются с экспериментом. Несколько более тщательное рассмотрение корреляционной энергии [311, 312] улучшает согласие теории с опытом.

Релятивистские методы в пространстве Фока

Формализм в пространстве Фока, который был в общих чертах изложен в предыдущей главе для нерелятивистского случая, можно без труда обобщить, чтобы описать совокупность свободных релятивистских частиц. И снова мы обнаружим, что в формализме вторичного квантования с пространственно-временным описанием связаны операторы «поля», которые подчиняются определенным перестановочным соотношениям и удовлетворяют уравнениям поля. В § 2 мы увидим, как релятивистские законы преобразования амплитуд частиц определяют трансформационные свойства операторов поля. Затем будет изложена эквивалентность формализма вторичного квантования для частиц со спином, равным 0, и формализма «квантования» поля Клейна — Гордона. Глава заканчивается распространением методов вторичного квантования и теории поля на случай заряженных частиц со спином, равным 0.

§ 1. Случай нейтральных бозонов со спином, равным нулю

Рассмотрим систему n свободных нейтральных частиц со спином, равным 0, и массой μ . При отсутствии взаимодействия состояние такой системы может быть определено импульсами $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$ и энергиями частиц $\omega(\mathbf{k}_1), \dots, \omega(\mathbf{k}_n)$, $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$.

Хорошо известно, что совокупность тождественных частиц с целым спином описывается вектором состояния, который должен быть симметричным относительно перестановок частиц. Следовательно, нашу систему можно описать вектором

$$|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle = U_T |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle = S \{ |\mathbf{k}_1\rangle |\mathbf{k}_2\rangle \dots |\mathbf{k}_n\rangle \}, \quad (7.1)$$

где U_T — произвольная транспозиция индексов частиц, а S — симметризатор.

Чтобы получить описание рассматриваемой системы в методе вторичного квантования, можно действовать в полной аналогии с нерелятивистской теорией. В качестве набора одночастичных состояний $\{g_\lambda(x)\}$ выберем совокупность решений уравнения Клейна — Гордона с положительной энергией, так как именно этим состояниям соответствуют физически реализуемые состояния релятивистской частицы со спином, равным 0. Из соображений релятивистской ковариантности временная координата x_0

включена в $g_\lambda(x)$. В частности, примем, что индекс λ определяет энергию и импульс частицы, так что

$$g_\lambda(x) = \langle x | k, \omega(k) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} e^{-ik \cdot x}. \quad (7.2)$$

Эти функции являются собственными функциями непрерывного спектра и потому ненормируемы. С математической точки зрения удобнее оперировать с дискретным набором нормируемых функций. Это диктуется также физическим содержанием встречающихся в действительности задач. Например, начальные состояния частиц в опытах по рассеянию нужно описывать с помощью волновых пакетов, поскольку известно, что частицы локализованы в конечной области пространства. Введем поэтому полный набор $\{f_\alpha(x)\}$ нормируемых решений уравнения Клейна — Гордона с положительной энергией, которые имеют вид волнового пакета:

$$(\square + \mu^2) f_\alpha(x) = 0,$$

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int d^3k \theta(k) \delta(k^2 - \mu^2) e^{-ik \cdot x} \tilde{f}_\alpha(k), \quad (7.3)$$

причем $(f_\alpha, f_\alpha) < \infty$. Примем далее, что при скалярном произведении, определяемом формулой (3.24), эти решения попарно ортогональны

$$(f_\alpha, f_\beta) = i \int d\sigma^\mu(x) \bar{f}_\alpha(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_\beta(x) = \delta_{\alpha\beta}, \quad (7.4)$$

что справедливо для всех времен, если ортогональность имеет место в какой-либо момент времени. В предельном случае плоских волн $\alpha \rightarrow k$, $\beta \rightarrow k'$, $\delta_{\alpha\beta} \rightarrow k_0 \delta^{(3)}(k - k')$. Условие полноты имеет вид

$$\sum_\alpha f_\alpha(x) \bar{f}_\alpha(x') = \sum_\alpha \langle x | \alpha \rangle \langle \alpha | x' \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{-ik(x-x')} \quad (7.5)$$

$$(k_0 = \omega(k) = \sqrt{k^2 + \mu^2}).$$

Состояние n частиц опять можно характеризовать числами заполнения n_1, n_2, \dots , которые определяют числа частиц с квантовыми числами α', α'', \dots . Функция преобразования от пространства чисел заполнения к конфигурационному пространству выражается формулой

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n; n | n_1, n_2, \dots \rangle = \sqrt{\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}} \frac{1}{n!} \sum_P \mathcal{E}^P(f_{\alpha_1}(x_1) \dots f_{\alpha_n}(x_n)). \quad (7.6)$$

Операторы рождения и уничтожения a_β^* и a_β , которые увеличивают и соответственно уменьшают на единицу число частиц в состоянии β , снова можно определить при помощи равенств

$$a_\beta | \dots, n_\beta, \dots \rangle = \sqrt{n_\beta} | \dots, n_\beta - 1, \dots \rangle \quad (7.7a)$$

и

$$a_\beta^* | \dots, n_\beta, \dots \rangle = \sqrt{n_\beta + 1} | \dots, n_\beta + 1, \dots \rangle. \quad (7.7b)$$

Операторы a, a^* удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[a_\alpha, a_\beta^*] = \delta_{\alpha\beta} \quad (7.8a)$$

и

$$[a_\alpha, a_\beta] = [a_\alpha^*, a_\beta^*] = 0. \quad (7.8b)$$

Оператор полного числа частиц есть $\sum_{\alpha} a_{\alpha}^* a_{\alpha}$. Его собственные значения суть целые положительные числа и нуль. Введем теперь операторы

$$\varphi^{(+)}(x) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x) a_{\alpha} \quad (7.9a)$$

и

$$\varphi^{(-)}(x) = \sum_{\alpha} \bar{f}_{\alpha}(x) a_{\alpha}^* = [\varphi^{(+)}(x)]^*, \quad (7.9b)$$

которые уже не зависят от базиса одночастичных функций $\{f_{\alpha}\}$, выбранного вначале для определения пространства чисел заполнения. В силу перестановочных соотношений (7.8) для операторов a перестановочные соотношения для операторов $\varphi^{(+)}$, $\varphi^{(-)}$ имеют вид

$$[\varphi^{(\pm)}(x), \varphi^{(\pm)}(x')] = 0, \quad (7.10a)$$

$$[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(x')] = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x) \bar{f}_{\alpha}(x') = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{-ik(x-x')}. \quad (7.10b)$$

Следует отметить, что правая часть этих соотношений уже не является δ -функцией даже при $x_0 = x'_0$, так как набор одночастичных состояний $\{f_{\alpha}\}$ включает лишь положительно-частотные решения уравнения Клейна — Гордона. Можно было бы получить представление для введенных операторов и, таким образом, завершить рассмотрение в пространстве Фока. Поступим, однако, несколько иначе.

Интуитивно кажется очевидным, что подразумевается под состоянием без частиц, одночастичным и вообще n -частичным состоянием. Одну скалярную частицу мы себе представляем как материальный объект с массой μ и спином, равным 0, обладающий тем свойством, что события, вызываемые им, локализованы в пространстве. Поэтому для отбора одночастичных состояний можно использовать следующий мысленный эксперимент [347]. Возьмем два счетчика Гейгера, находящиеся на расстоянии d друг от друга и соединенные на совпадения с разрешающим временем $\delta t \ll d/c$. Рассмотрим все подобные устройства с любыми положениями, ориентациями и скоростями, а также со всеми d , большими некоторого d_{\min} . Расстояние d_{\min} произвольно, и мы выберем его сколь возможно малым. Одночастичными будут те состояния, которые дадут отрицательный результат во всех экспериментах с описанными устройствами. Аналогично, состояние без частиц можно выделить с помощью эксперимента с одиночными счетчиками, а многочастичные состояния — с помощью более сложных устройств с совпадениями. Введем векторы, соответствующие этим состояниям. Обозначим символом $|0\rangle$ состояние без частиц, или состояние вакуума, которое нормировано так, что

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (7.11)$$

Обозначим через $|k\rangle$ одночастичное состояние с импульсом k и энергией $k_0 = \omega(k)$. Оно нормировано инвариантным образом:

$$\langle k'|k\rangle = k_0 \delta^{(3)}(k - k'). \quad (7.12)$$

В общем случае состояние n частиц с импульсами k_1, \dots, k_n и энергиями $\omega(k_1), \dots, \omega(k_n)$ обозначим посредством $|k_1, k_2, \dots, k_n\rangle$. Это состояние удовлетворяет следующим соотношениям ортогональности и нор-

мировки:

$$\langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2 \dots \mathbf{k}'_m | \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n \rangle = \delta_{nm} \frac{1}{n!} \sum_P k_{10} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{\alpha_1}) \dots k_{n0} \delta(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{\alpha_n}), \quad (7.13)$$

где суммирование проводится по всем перестановкам индексов $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Все множество таких состояний образует полную систему, причем условие полноты имеет вид

$$I = |0\rangle \langle 0| + \int \frac{d^3k}{k_0} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| + \dots + \int \frac{d^3k_1}{k_{10}} \dots \int \frac{d^3k_n}{k_{n0}} |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \dots \mathbf{k}_n\rangle \langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n| + \dots \quad (7.14)$$

Для доказательства этого соотношения покажем, что определенный выше единичный оператор, действуя на любое состояние $|\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \dots, \mathbf{k}'_n\rangle$, дает то же состояние.

Доказательство: Из соотношений (7.13) очевидно

$$|\mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_m\rangle = \int \frac{d^3k_1}{k_{10}} \dots \int \frac{d^3k_n}{k_{n0}} |\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m\rangle \langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_m\rangle = |\mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_m\rangle. \quad (7.15)$$

Определим теперь операторы рождения и уничтожения $a_{\mathbf{k}}^*$ и $a_{\mathbf{k}}$ с помощью соотношений

$$a(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle = a_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}\rangle = |0\rangle, \quad (7.16a)$$

$$a^*(\mathbf{k}) |0\rangle = a_{\mathbf{k}}^* |0\rangle = |\mathbf{k}\rangle; \quad [a_{\mathbf{k}}]^* = a_{\mathbf{k}}^* \quad (7.16b)$$

и в общем случае

$$|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^*(\mathbf{k}_1) a^*(\mathbf{k}_2) \dots a^*(\mathbf{k}_n) |0\rangle. \quad (7.17)$$

Состояние вакуума обладает еще свойством

$$a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0 \quad \text{для всех } \mathbf{k}. \quad (7.18)$$

Симметричность состояния $|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle$ требует, чтобы оператор $a^*(\mathbf{k}_i)$ коммутировал с $a^*(\mathbf{k}_j)$ для всех \mathbf{k}_i и \mathbf{k}_j , следовательно,

$$[a_{\mathbf{k}}^*, a_{\mathbf{k}'}^*] = 0. \quad (7.19)$$

Если взять сопряженное равенство, то получим

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = 0. \quad (7.20)$$

Это соотношение выражает свойство симметричности сопряженных векторов:

$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n | = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | a_{\mathbf{k}_1} \dots a_{\mathbf{k}_n}. \quad (7.21)$$

Из нормировки одночастичных состояний, согласно равенству (7.12), вытекает

$$\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = \langle 0 | a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}^* | 0 \rangle = \langle 0 | [a_{\mathbf{k}'}, a_{\mathbf{k}}^*] | 0 \rangle = k_0 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (7.22)$$

так что если потребовать, чтобы коммутатор a и a^* был c -числом, тогда

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^*] = k_0 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (7.23)$$

Можно проверить, что условия ортонормированности (7.13) действительно удовлетворяются при таких перестановочных соотношениях.

Оператор числа частиц с импульсами в интервале Δ между I и $I + \Delta I$ есть

$$n(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{d^3k}{k_0} a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}), \quad (7.24)$$

ибо при действии на состояние $|k_1, \dots, k_n\rangle$ этот оператор дает то же состояние, причем соответствующее собственное значение равно числу частиц с импульсами, лежащими в интервале Δ .

Доказательство: Коммутации $a_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k}}^*$ и $n(\Delta)$ равны

$$[n(\Delta), a_{\mathbf{k}}] = -a_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} \subset \Delta), \quad (7.25a)$$

$$[n(\Delta), a_{\mathbf{k}}^*] = a_{\mathbf{k}}^* \delta(\mathbf{k} \subset \Delta), \quad (7.25b)$$

где $\delta(\mathbf{k} \subset \Delta)$ равняется $+1$, если \mathbf{k} лежит в интервале Δ , и нулю в противном случае. Полученные соотношения позволяют проверить справедливость интерпретации оператора $n(\Delta)$. В качестве примера рассмотрим двухчастичное состояние

$$|k_1, k_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} a_{k_1}^* a_{k_2}^* |0\rangle. \quad (7.26)$$

Используя перестановочные соотношения (7.23), находим

$$\begin{aligned} n(\Delta) a_{k_1}^* a_{k_2}^* |0\rangle &= [n(\Delta), a_{k_1}^*] a_{k_2}^* |0\rangle + a_{k_1}^* [n(\Delta), a_{k_2}^*] |0\rangle + a_{k_1}^* a_{k_2}^* n(\Delta) |0\rangle = \\ &= [\delta(\mathbf{k}_1 \subset \Delta) + \delta(\mathbf{k}_2 \subset \Delta)] a_{k_1}^* a_{k_2}^* |0\rangle, \end{aligned} \quad (7.27)$$

поскольку $n(\Delta)|0\rangle = 0$. Следовательно, собственное значение оператора $n(\Delta)$ для двухчастичного состояния есть 2, 1 или 0, в зависимости от того, лежат ли оба k_1 и k_2 в Δ , только k_1 или k_2 (но не оба) лежат в Δ или ни k_1 , ни k_2 не лежат в Δ . Оператор полного числа частиц можно определить как

$$N = \int \frac{d^3k}{k_0} a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}). \quad (7.28)$$

Его коммутации с a и a^* суть

$$[N, a_{\mathbf{k}}] = -a_{\mathbf{k}}, \quad (7.29a)$$

$$[N, a_{\mathbf{k}}^*] = +a_{\mathbf{k}}^*. \quad (7.29b)$$

так что

$$N|0\rangle = 0, \quad (7.30a)$$

$$N|k_1, k_2, \dots, k_n\rangle = n|k_1, k_2, \dots, k_n\rangle. \quad (7.30b)$$

Поскольку частицы считаются свободными и не взаимодействующими друг с другом, то полная энергия системы равна сумме энергий отдельных частиц, а полный импульс — сумме импульсов частиц. Поэтому можно написать выражение для оператора полной энергии, умножая оператор числа частиц с импульсом \mathbf{k} , $a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}$, на энергию $\omega_{\mathbf{k}}$ частицы в этом состоянии и суммируя по всем состояниям $\left(\int d\Omega_{\mathbf{k}}\right)$.

Следовательно, оператор энергии

$$H = \int \frac{d^3k}{k_0} \omega(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \quad (7.31)$$

и обладает следующим свойством:

$$H |k_1, k_2, \dots, k_n\rangle = \sum_{j=1}^n \omega(k_j) |k_1, \dots, k_n\rangle. \quad (7.32)$$

Аналогично, оператор полного импульса равен

$$P = \int \frac{d^3k}{k_0} k a_k^* a_k \quad (7.33)$$

и

$$P |k_1, k_2, \dots, k_n\rangle = \sum_{i=1}^n k_i |k_1, \dots, k_n\rangle. \quad (7.34)$$

Отметим, что собственное значение энергии для вакуума равно нулю, так что вакуум есть состояние с наимизшей энергией. Вакуум является также состоянием с нулевым импульсом. Любое другое состояние характеризуется положительной полной энергией. Коммутация H и P с a_k и a_k^* равны

$$[H, a_k] = -\omega_k a_k, \quad [H, a_k^*] = \omega_k a_k^* \quad (7.35)$$

и

$$[P, a_k] = -k a_k, \quad [P, a_k^*] = k a_k^*. \quad (7.36)$$

Из соотношений (7.35) следует, что если $|E\rangle$ есть собственное состояние оператора H с собственным значением E , тогда $a_k |E\rangle$ есть собственное состояние H с энергией $E - \omega_k$.

Доказательство:

$$H a_k |E\rangle = a_k H |E\rangle + [H, a_k] |E\rangle = (E - \omega_k) a_k |E\rangle. \quad (7.37)$$

Аналогично проверяется, что $a_k^* |E\rangle$ есть состояние с энергией $E + \omega_k$. Также можно проверить, что если $|P'\rangle$ есть собственное состояние оператора полного импульса с собственным значением P' , тогда $a_k |P'\rangle$ есть собственное состояние P с импульсом $P' - k$, а $a_k^* |P'\rangle$ — собственное состояние P с импульсом $P' + k$ в соответствии с интерпретацией операторов a_k и a_k^* как операторов рождения и уничтожения частицы с энергией ω_k и импульсом k . Оператор a_k^* (или a_k) действительно добавляет импульс k (или $-k$) и энергию ω_k (или $-\omega_k$) к соответствующим величинам того состояния, на которое он действует.

Операторы a_k и a_k^* , как мы их определили, не зависят от времени и являются шредингеровскими операторами. Поэтому векторы состояния будут зависеть от времени: $|\rangle = |\Phi(t)\rangle$. Используя условие полноты (7.14), произвольное состояние $|\Phi(t)\rangle$ можно разложить по базисным векторам:

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle = & \Phi^{(0)}(t) |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{1!}} \int \frac{d^3k}{k_0} \Phi^{(1)}(k; t) a_k^* |0\rangle + \dots + \\ & + \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \frac{d^3k_1}{k_{10}} \dots \int \frac{d^3k_n}{k_{n0}} \Phi^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n; t) a_{k_1}^* a_{k_2}^* \dots a_{k_n}^* |0\rangle + \dots, \end{aligned} \quad (7.38)$$

где коэффициент разложения

$$\Phi^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n; t) = \langle k_1, k_2, \dots, k_n | \Phi(t) \rangle, \quad (7.39)$$

т. е. компонента вектора $|\Phi(t)\rangle$ в n -частичном подпространстве пространства Фока является симметричной функцией k_1, \dots, k_n . Функция $\Phi^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n; t)$ есть амплитуда вероятности найти n частиц с импуль-

сами $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$ и энергиями $\omega(\mathbf{k}_1), \dots, \omega(\mathbf{k}_n)$ в момент времени t . Для системы свободных частиц вектор состояния $|\Phi(t)\rangle$ удовлетворяет уравнению $i\partial_t |\Phi(t)\rangle = H |\Phi(t)\rangle$, из которого легко получить зависимость амплитуды $\Phi^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t)$ от времени:

$$\begin{aligned} i\partial_t \langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n | \Phi(t) \rangle &= \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n | H | \Phi(t) \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \omega(\mathbf{k}_i) \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n | \Phi(t) \rangle, \end{aligned} \quad (7.40)$$

так что

$$\Phi^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n; t) = e^{-i \sum \omega(\mathbf{k}_i)(t-t_0)} \Phi^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t_0). \quad (7.41)$$

Если $|\Phi(t)\rangle$ есть вектор состояния системы, состоящей из одной свободной частицы, т. е. $N|\Phi\rangle = |\Phi\rangle$, тогда у этого вектора в пространстве Фока отлична от нуля лишь амплитуда $\Phi^{(1)}(\mathbf{k}; t) = \langle \mathbf{k} | \Phi(t) \rangle$. Это амплитуда Клейна—Гордона, подробно рассмотренная в гл. 3, где она обозначалась через $\Phi(\mathbf{k}, t)$.

Представление перестановочных соотношений (7.19), (7.20), (7.23) в пространстве Фока можно легко получить следующим образом. Из определения (7.17) базисных векторов $|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle$ имеем

$$a_{\mathbf{k}}^* |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle = \sqrt{n+1} |\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n\rangle. \quad (7.42)$$

Аналогично, используя перестановочные соотношения (7.23) и определение вакуума $a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$, находим

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1}^* \dots a_{\mathbf{k}_n}^* |0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{i=1}^n k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i) a_{\mathbf{k}_1}^* \dots a_{\mathbf{k}_{i-1}}^* a_{\mathbf{k}_{i+1}}^* \dots a_{\mathbf{k}_n}^* |0\rangle + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{n!}} a_{\mathbf{k}_1}^* \dots a_{\mathbf{k}_n}^* a_{\mathbf{k}} |0\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{i=1}^n k_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i) |\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{i-1}, \mathbf{k}_{i+1}, \dots, \mathbf{k}_n\rangle. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Отметим роль соотношения $a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$ при получении равенства (7.43). Из равенств, сопряженных к (7.42) и (7.43), заключаем, что

$$\langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; n | a_{\mathbf{k}} | \Phi \rangle = \sqrt{n+1} \langle \mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; n+1 | \Phi \rangle, \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n; n | a_{\mathbf{k}}^* | \Phi \rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n k_0 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i) \langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{i-1}, \mathbf{k}_{i+1}, \dots, \mathbf{k}_n; n-1 | \Phi \rangle. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Это представление операторов a и a^* в пространстве Фока. Ясно, что выполнение перестановочных соотношений обеспечено. Говорят, что равенства (7.44) и (7.45) определяют представление перестановочных соотношений (7.19), (7.20) и (7.23) в пространстве $\mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \dots$. Это представление неприводимо, так как a (или a^*), действуя на n -частичное состояние, дает состояние с $n-1$ (или $n+1$) частицами, и, таким образом, нет инвариантных подпространств. Это представление характеризуется тем, что существует состояние без частиц и что можно опре-

делить оператор числа частиц. Помимо указанного выше представления, существует множество (по меньшей мере $\aleph_0!$)¹⁾ других неприводимых представлений [293, 851, 347] (см. также [285]). Ни для одного из других представлений не существует состояния без частиц или оператора числа частиц. Пространство представления в этих случаях натянуто на базисные векторы, которые все соответствуют бесконечному числу частиц.

Существование других представлений является следствием того, что система имеет бесконечное число степеней свободы. Чтобы это выяснить, рассмотрим ряд перестановочных соотношений:

$$[a_\alpha^*, a_\beta^*] = [a_\alpha, a_\beta] = 0, \quad (7.46a)$$

$$[a_\alpha, a_\beta^*] = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N). \quad (7.46b)$$

Для конечного N можно обобщить ранее упоминавшуюся теорему Неймана [813], которая утверждает, что существует только одно неприводимое представление операторов a_α, a_α^* (с точностью до эквивалентных представлений). Обобщение становится совсем ясным, если ввести операторы

$$q_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\alpha + a_\alpha^*) \quad (7.47a)$$

и

$$p_\alpha = \frac{1}{i\sqrt{2}}(a_\alpha - a_\alpha^*), \quad (7.47b)$$

так что q_α и p_α — эрмитовы операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[q_\alpha, q_\beta] = [p_\alpha, p_\beta] = 0, \quad (7.48a)$$

$$[q_\alpha, p_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}. \quad (7.48b)$$

При конечном N векторное пространство, в котором определены эти операторы, может быть натянуто на векторы конфигурационного пространства $|q_1, q_2, \dots, q_N\rangle$. Множество таких векторов \aleph_0^N обладает той же мощностью, что и \aleph_0 , т. е. оно еще счетно. Однако при $N \rightarrow \infty$ пространство натянуто на несчетное множество ($\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1$) таких базисных векторов²⁾. При $N \rightarrow \infty$ все еще существует одно неприводимое представление перестановочных соотношений (7.23) в сепарабельном гильбертовом пространстве. Именно это представление в пространстве Фока мы и использовали. Оно получается, если допустить существование состояния без частиц. Вообще говоря, соотношение $a_k|0\rangle = 0$ при $N \rightarrow \infty$ уже не является следствием перестановочных соотношений, и возможно существование многих неэквивалентных представлений.

§ 2. Лоренц-инвариантность

Для обсуждения лоренцевой ковариантности вторично квантованной теории удобно ввести релятивистские обозначения. Если раньше базисные векторы мы писали в виде $|k_1, k_2, \dots, k_n\rangle$, то теперь мы будем

1) Символом \aleph_0 обычно обозначают мощность счетного множества. Мощность несчетного множества (континуума) далее обозначена через \aleph_1 . — *Прим. ред.*

2) Гильбертово пространство, которое натянуто на несчетный базис, называется сепарабельным гильбертовым пространством, в отличие от сепарабельного гильбертова пространства, натянутого на счетный базис. Гильбертово пространство обычной квантовой механики сепарабельно.

обозначать их через $|k_1, k_2, \dots, k_n\rangle$. В этих обозначениях энергия i -й частицы, k_{0i} , должна считаться положительной и равной $+(k_i^2 + \mu^2)^{1/2}$, как это и подразумевалось в наших прежних обозначениях. Аналогично, мы будем писать $a_k = a(k)$ вместо a_k .

Как мы видели, в шредингеровской картине состояние системы определяется с помощью результатов возможных измерений физических величин в момент времени t . Такое описание выделяет некоторую лоренцеву систему координат и потому нековариантно. С другой стороны, в гейзенберговской картине состояние не изменяется со временем. Поэтому для обсуждения релятивистской инвариантности гейзенберговская картина обладает бесспорными преимуществами.

Рассмотрим совокупность свободных частиц, описываемых гейзенберговским вектором $|\Phi\rangle$. Амплитуды $\langle 0|\Phi\rangle$, $\langle k_1|\Phi\rangle$, \dots , $\langle k_1, k_2, \dots, k_n|\Phi\rangle$ и т. д. являются амплитудами вероятности найти в любое время соответственно 0 частиц, одну частицу с 4-импульсом k_1, \dots, n частиц с импульсами k_1, k_2, \dots, k_n и т. д. При неоднородном преобразовании Лоренца $\{a, \Lambda\}$ вектор $|\Phi\rangle \rightarrow U(a, \Lambda)|\Phi\rangle$, где U — унитарный или антиунитарный оператор, который теперь должен быть определен в пространстве $\mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}^{(m)} \oplus \dots$. В гл. 3 мы видели, что при собственном ортохронном преобразовании Лоренца одночастичная амплитуда преобразуется по правилу

$$\Phi^{(1)}(k) \rightarrow e^{ik \cdot a} \Phi^{(1)}(\Lambda^{-1}k), \quad (7.49a)$$

что эквивалентно равенству

$$\langle k|U(a, \Lambda)|\Phi\rangle = e^{ik \cdot a} \langle \Lambda^{-1}k|\Phi\rangle. \quad (7.49b)$$

Поэтому определим закон преобразования для n -частичной амплитуды следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle k_1, k_2, \dots, k_n|U(a, \Lambda)|\Phi\rangle &= \exp\left(i \sum_l^n k_l \cdot a\right) \langle \Lambda^{-1}k_1, \dots, \Lambda^{-1}k_n|\Phi\rangle = \\ &= \exp\left(i \sum_l^n k_l \cdot a\right) \Phi^{(m)}(\Lambda^{-1}k_1, \dots, \Lambda^{-1}k_n), \end{aligned} \quad (7.50)$$

т. е.

$$\langle k_1, k_2, \dots, k_n|U(a, \Lambda) = \langle \Lambda^{-1}k_1, \dots, \Lambda^{-1}k_n| \exp\left(i \sum_{j=1}^n k_j \cdot a\right). \quad (7.51)$$

Поскольку каждый элемент ограниченной группы Лоренца ($\det \Lambda = 1$, $\Lambda_0^0 \geq 1$) можно записать как квадрат некоторого элемента $\{b, \Lambda'\}$, т. е. $\{a, \Lambda\} = \{b, \Lambda'\}\{b, \Lambda'\}$, а квадрат унитарного и антиунитарного операторов унитарен, то оператор $U(a, \Lambda)$ унитарен, если $\{a, \Lambda\}$ есть элемент ограниченной группы Лоренца. Поэтому для ограниченных преобразований Лоренца

$$U^*(a, \Lambda) = U(a, \Lambda)^{-1} = U(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}), \quad (7.52)$$

и если взять равенство, сопряженное к (7.51), то

$$U(a, \Lambda)|k_1, \dots, k_n\rangle = \exp\left(+i \sum_j^n \Lambda k_j \cdot a\right) |\Lambda k_1, \dots, \Lambda k_n\rangle. \quad (7.53)$$

Таким образом, с конструктивной¹⁾ точки зрения, оператор $U(a, \Lambda)$

¹⁾ Вспомните обсуждение релятивистской инвариантности в гл. 1. — Прим. ред

преобразует одночастичное состояние с импульсом k в состояние с импульсом Λk и после этого сдвигает получившееся состояние на величину a . Этого и следовало ожидать, поскольку при преобразовании Лоренца $x' = \Lambda x + a$ сначала производится однородное преобразование, а затем сдвиг. Такое истолкование равенства (7.53) вытекает из того, что генератором бесконечно малых сдвигов является оператор импульса, так что смещенное на пространственно-временное расстояние a состояние $|\Lambda k\rangle$ получится, если умножить $|\Lambda k\rangle$ на $e^{i\Lambda k \cdot a}$.

Трансформационные свойства вакуума характеризуются условием

$$U(a, \Lambda)|0\rangle = |0\rangle, \quad (7.54)$$

так как вакуум для всех наблюдателей должен быть одинаковым. Таким образом, вакуум инвариантен относительно всех преобразований Лоренца. Это условие непротиворечиво только в том случае, если вакуум есть состояние с равными нулю энергией и импульсом. Приведенных выше свойств амплитуд, которые выражают физические характеристики частиц и вакуума, теперь достаточно для определения трансформационных свойств операторов a_k и a_k^* . Используя представления (7.44), (7.45), замечаем, что

$$\begin{aligned} \langle k_1, k_2, \dots, k_n | U(a, \Lambda) a_k | \Phi \rangle &= \\ &= \langle \Lambda^{-1}k_1, \dots, \Lambda^{-1}k_n | a_k | \Phi \rangle \exp\left(i \sum_j^n k_j \cdot a\right) = \\ &= \sqrt{n+1} \langle k, \Lambda^{-1}k_1, \dots, \Lambda^{-1}k_n | \Phi \rangle \exp\left(i \sum_j^n k_j \cdot a\right) = \\ &= \langle k_1, k_2, \dots, k_n | e^{-i\Lambda k \cdot a} a(\Lambda k) U(a, \Lambda) | \Phi \rangle. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Равенство (7.55) можно переписать по-другому, если в него ввести множитель $UU^{-1} = I$:

$$\begin{aligned} \langle k_1, k_2, \dots, k_n | U(a, \Lambda) a_k U^{-1}(a, \Lambda) U(a, \Lambda) | \Phi \rangle &= \\ &= \langle k_1, k_2, \dots, k_n | e^{-i\Lambda k \cdot a} a(\Lambda k) U(a, \Lambda) | \Phi \rangle. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Так как последнее равенство справедливо при любых $|\Phi\rangle$, то

$$U(a, \Lambda) a_k U(a, \Lambda)^{-1} = e^{-i\Lambda k \cdot a} a(\Lambda k). \quad (7.57)$$

Ранее мы установили, что оператор $U(a, \Lambda)$ унитарен для ортохронных преобразований Лоренца, так что равенство, сопряженное к (7.57), дает закон преобразования a_k^* при ортохронных преобразованиях Лоренца:

$$U(a, \Lambda) a_k^* U(a, \Lambda)^{-1} = e^{i\Lambda k \cdot a} a^*(\Lambda k). \quad (7.58)$$

Это согласуется с равенством (7.53), если вспомнить определение базисных векторов [равенство (7.17)]. В частности, как отмечалось выше, одночастичное состояние $|k\rangle$ преобразуется при однородных ортохронных преобразованиях Лоренца в состояние

$$U(\Lambda) |k\rangle = U(\Lambda) a_k^* |0\rangle = U(\Lambda) a_k^* U(\Lambda)^{-1} |0\rangle = |\Lambda k\rangle, \quad (7.59)$$

и при «чистом» сдвиге

$$U(a) |k\rangle = e^{ik \cdot a} |k\rangle. \quad (7.60)$$

Обсуждение свойств операторов поля при отражениях мы отложим до введения операторов в конфигурационном пространстве.

Можно получить явное представление унитарных операторов, соответствующих сдвигам, если заметить, что для произвольной вещественной функции $f(k) = \bar{f}(k)$ 4-импульса k , ($k_0 = \omega_k$)

$$e^{i \int d\Omega(k) f(k) a_k^* a_k} e^{-i \int d\Omega(k) f(k) a_k^* a_k} = e^{-if(q)} a_q, \quad (7.61)$$

где $d\Omega(k) = d^3k/k_0$.

Доказательство: Рассмотрим оператор

$$A_q(\lambda) = e^{i\lambda \int d\Omega(k) f(k) a_k^* a_k} e^{-i\lambda \int d\Omega(k) f(k) a_k^* a_k}. \quad (7.62)$$

Когда $\lambda = 0$,

$$A_q(0) = a_q. \quad (7.63)$$

Нужно найти $A_q(1)$. Дифференцируя (7.62) по λ , находим, что $A_q(\lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dA_q(\lambda)}{d\lambda} &= e^{i\lambda \int d\Omega(k) f(k) a_k^* a_k} i \lambda \int d\Omega(k) f(k) [a_k^* a_k, a_q] e^{-i\lambda \int d\Omega(k) f(k) a_k^* a_k} = \\ &= -if(q) A_q(\lambda). \end{aligned} \quad (7.64)$$

Решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $A_q(0) = a_q$, есть

$$A_q(\lambda) = e^{-i\lambda f(q)} a_q. \quad (7.65)$$

Полагая $\lambda = 1$, получаем (7.61).

Для вещественной функции f оператор $F = \int d\Omega(k) f(k) a_k^* a_k$ эрмитов, так что e^{iF} — унитарный оператор. Сравнивая (7.61) и законы преобразования операторов a , a^* при сдвигах, находим

$$U(b, I) = e^{i \int \frac{d^3k}{k_0} k_\mu a_k^* a_k b^\mu} = e^{iP_\mu b^\mu}, \quad (7.66)$$

где

$$P_\mu = \int \frac{d^3k}{k_0} k_\mu a_k^* a_k \quad (7.67)$$

есть 4-вектор энергии-импульса поля: $P_\mu = (H, \mathbf{P})$. Легко проверить, что P_μ действительно обладает нужными трансформационными свойствами при однородных преобразованиях Лоренца:

$$\begin{aligned} U(\Lambda) P_\mu U(\Lambda)^{-1} &= \int d\Omega(k) k_\mu a_{\Lambda k}^* a_{\Lambda k} = \\ &= \int d\Omega(\Lambda k) k_\mu a_{\Lambda k}^* a_{\Lambda k} = \int d\Omega(k) (\Lambda^{-1}k)_\mu a_k^* a_k = (\Lambda^{-1})_\mu^\nu P_\nu. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Отметим, наконец, что

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (7.69)$$

так что можно найти представление, в котором все компоненты P_μ диагональны. Итак, операторы энергии-импульса инвариантны относительно сдвигов и являются генераторами бесконечно малых сдвигов в пространстве-времени.

§ 3. Конфигурационное пространство

Далее мы введем гейзенберговский оператор $\varphi^{(+)}(x)$ в конфигурационном пространстве, определив его равенством

$$\varphi^{(+)}(x) = \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} e^{-ik \cdot x} a_k. \quad (7.70)$$

Отметим, что $\varphi^{(+)}(x)$ есть оператор уничтожения частицы. Значок $(+)$ указывает, что $\varphi^{(+)}$ содержит лишь положительные частоты в фурье-разложении по времени, т. е. только множители вида $e^{-ik_0 x_0}$ при $k_0 > 0$. Поскольку $k_0 = +\sqrt{k^2 + \mu^2}$, то $\varphi^{(+)}(x)$ подчиняется уравнению Клейна—Гордона

$$(\square + \mu^2)\varphi^{(+)}(x) = 0. \quad (7.71)$$

Оператор рождения $\varphi^{(-)}(x)$, определяемый равенством

$$\varphi^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{ik \cdot x} a_k^*, \quad (7.72a)$$

$$= [\varphi^{(+)}(x)]^*, \quad (7.72b)$$

содержит только отрицательные частоты [что отмечается значком $(-)$] и также удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона

$$(\square + \mu^2)\varphi^{(-)}(x) = 0. \quad (7.73)$$

Используя (7.19), (7.20) и (7.23), получим перестановочные соотношения для операторов $\varphi^{(+)}(x)$, $\varphi^{(-)}(x)$:

$$[\varphi^{(\pm)}(x), \varphi^{(\pm)}(x')] = 0, \quad (7.74a)$$

$$[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)] = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (7.74b)$$

$$= i\Delta^{(+)}(x-y). \quad (7.74b')$$

Правую часть коммутатора мы обозначили через $\Delta^{(+)}(x-y)$, т. е.

$$\Delta^{(+)}(x) = -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{-ik \cdot x} \quad (7.75a)$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k \theta(k_0) \delta(k^2 - \mu^2) e^{-ik \cdot x}. \quad (7.75b)$$

Аналогично находим

$$[\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)] = -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{ik \cdot (x-y)} \quad (7.76a)$$

$$= i\Delta^{(-)}(x-y), \quad (7.76b)$$

где

$$\Delta^{(-)}(x) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{ik \cdot x} \quad (7.77a)$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \theta(-k_0) \delta(k^2 - \mu^2). \quad (7.77b)$$

Сравнивая (7.75) и (7.77), замечаем, что

$$-\Delta^{(-)}(-x) = \Delta^{(+)}(x). \quad (7.78)$$

Из представлений (7.75б) и (7.77б) видно, что функции $\Delta^{(\pm)}$ инвариантны относительно собственных однородных преобразований Лоренца

$$\Delta^{(\pm)}(\Lambda x) = \Delta^{(\pm)}(x) \quad (7.79)$$

и являются инвариантными решениями уравнения Клейна — Гордона

$$(\square + \mu^2) \Delta^{(\pm)}(x) = 0. \quad (7.80)$$

В последующем изложении мы неоднократно будем использовать следующее свойство функций $\Delta^{(\pm)}$. Если $f^{(+)}(x)$ — некоторое положительно-частотное решение уравнения Клейна — Гордона, тогда значение $f^{(+)}(x)$ в пространственно-временной точке x выражается через начальные значения $\varphi(x)$ решения на некоторой пространственно-подобной поверхности σ , $f^{(+)}(x') = \varphi(x')$ при $x' \in \sigma$, где σ предшествует x , и через значения нормальной производной на этой поверхности $n^\mu \partial_\mu f^{(+)}(x') = n^\mu \partial_\mu \varphi^{(+)}(x')$, а именно:

$$f^{(+)}(x) = \int_{\sigma} d\sigma^\mu(x') \left\{ \frac{\partial \Delta^{(+)}(x-x')}{\partial x'^\mu} \varphi^{(+)}(x') - \Delta^{(+)}(x-x') \frac{\partial \varphi^{(+)}(x-x')}{\partial x'^\mu} \right\}. \quad (7.81)$$

Доказательство: Рассмотрим выражение

$$F(x) = - \int_{\sigma'} d\sigma^\mu(x') \Delta^{(+)}(x-x') \overleftrightarrow{\partial}_\mu f^{(+)}(x'), \quad (7.82)$$

где σ' — некоторая произвольная пространственно-подобная поверхность. Так как и $f^{(+)}$, и $\Delta^{(+)}$ удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона, то, согласно теореме Гаусса, F не зависит от выбора пространственно-подобной поверхности σ' . Выберем поэтому в качестве σ' плоскость $x_0 = x'_0$. Тогда можно вычислить F , если подставить вместо $f^{(+)}$ и $\Delta^{(+)}$ их фурье-разложения. Таким образом, при

$$f^{(+)}(x) = \int \frac{d^3k}{k_0} e^{-ik \cdot x} \tilde{f}^{(+)}(k) \quad (7.83)$$

и с помощью (7.75а) находим

$$F = f^{(+)}(x). \quad (7.84)$$

Если теперь выбрать в качестве σ' поверхность σ , на которой заданы начальные условия, то получим (7.81). Если, в частности, $f^{(+)}(x) = \Delta^{(+)}(x-x')$, тогда равенство (7.81) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta^{(+)}(x-x') = \\ = \int_{\sigma} d\sigma^\mu(x'') \left\{ \frac{\partial \Delta^{(+)}(x-x'')}{\partial x''^\mu} \Delta^{(+)}(x''-x') - \Delta^{(+)}(x-x'') \frac{\partial \Delta^{(+)}(x''-x')}{\partial x''^\mu} \right\}. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Аналогичные выражения справедливы для решений Клейна — Гордона с отрицательной энергией, например

$$f^{(-)}(x) = \int_{\sigma} d\sigma^\mu(x') \left\{ \partial_\mu \Delta^{(-)}(x-x') \cdot f^{(-)}(x') - \Delta^{(-)}(x-x') \partial_\mu f^{(-)}(x') \right\}. \quad (7.86)$$

Отметим, кстати, что поскольку решения уравнения Клейна — Гордона с положительной энергией ортогональны решениям с отрицательной

энергией, то

$$\int_{\sigma} d\sigma^{\mu}(x') \Delta^{(\pm)}(x-x') \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} f^{(\mp)}(x') = 0, \quad (7.87)$$

так что $\Delta^{(+)}$ действует как оператор проектирования, выделяющий решения с положительной энергией, а $\Delta^{(-)}$ — как оператор проектирования для решений с отрицательными энергиями.

Оператор числа частиц в момент x_0 , $N(x_0)$, выражается через операторы $\varphi^{(\pm)}(x)$ следующим образом:

$$N(x_0) = i \int_{x_0} d^3x \left\{ \varphi^{(-)}(x) \frac{\partial \varphi^{(+)}(x)}{\partial x^0} - \frac{\partial \varphi^{(-)}(x)}{\partial x^0} \varphi^{(-)}(x) \right\}. \quad (7.88)$$

Это выражение можно обобщить на случай произвольной пространственно-подобной поверхности:

$$N(\sigma) = i \int_{\sigma} d\sigma^{\mu}(x) \left\{ \varphi^{(-)}(x) \frac{\partial \varphi^{(+)}(x)}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \varphi^{(-)}(x)}{\partial x^{\mu}} \varphi^{(+)}(x) \right\}. \quad (7.89)$$

Так как $\varphi^{(\pm)}(x)$ подчиняются уравнению Клейна — Гордона, то $\delta N(\sigma)/\delta \sigma(x) = 0$, так что оператор $N(\sigma)$ не зависит от поверхности σ и постоянен во времени. Поэтому вместо $N(x_0)$ будем писать просто N . Прямой подстановкой равенств (7.70) и (7.72) в (7.88) можно проверить, что последнее равенство сводится к выражению $\int d\Omega(k) a_k^* a_k = N$. Вакуум $|0\rangle$ можно теперь характеризовать равенством

$$\varphi^{(+)}(x)|0\rangle = 0 \quad \text{при всех } x. \quad (7.90)$$

Состояние $\varphi^{(-)}(x)|0\rangle$ есть одночастичное состояние. Это ясно из выражения $\varphi^{(-)}$ через a_k^* , а можно проверить и непосредственно в конфигурационном пространстве, если использовать перестановочные соотношения для N и $\varphi^{(-)}$:

$$\begin{aligned} [N, \varphi^{(-)}(x)] &= \\ &= i \int_{\sigma} d\sigma_{\mu}(x') \left\{ \varphi^{(-)}(x') \left[\frac{\partial \varphi^{(+)}(x')}{\partial x'_{\mu}}, \varphi^{(-)}(x) \right] - \frac{\partial \varphi^{(-)}(x')}{\partial x'_{\mu}} [\varphi^{(+)}(x'), \varphi^{(-)}(x)] \right\} = \\ &= - \int_{\sigma} d\sigma^{\mu}(x') \left\{ \varphi^{(-)}(x') \frac{\partial \Delta^{(+)}(x'-x)}{\partial x'^{\mu}} - \frac{\partial \varphi^{(-)}(x')}{\partial x'^{\mu}} \Delta^{(+)}(x'-x) \right\} = \\ &= \int_{\sigma} d\sigma^{\mu}(x') \left\{ \frac{\partial \Delta^{(-)}(x-x')}{\partial x'^{\mu}} \varphi^{(-)}(x') - \Delta^{(-)}(x-x') \frac{\partial \varphi^{(-)}(x')}{\partial x'^{\mu}} \right\} = \\ &= \varphi^{(-)}(x). \end{aligned} \quad (7.91)$$

Аналогично,

$$[N, \varphi^{(+)}(x)] = -\varphi^{(+)}(x). \quad (7.92)$$

Поскольку состояние без частиц есть собственное состояние N с собственным значением 0, то

$$N\varphi^{(-)}(x)|0\rangle = [N, \varphi^{(-)}(x)]|0\rangle = \varphi^{(-)}(x)|0\rangle. \quad (7.93)$$

Вообще вектор

$$|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = (n!)^{-1/2} \varphi^{(-)}(x_1) \dots \varphi^{(-)}(x_n)|0\rangle \quad (7.94)$$

есть собственный вектор N с собственным значением n и является n -частичным вектором базиса. Далее, n -частичная амплитуда вектора $|\Phi\rangle$

в пространстве Фока

$$\Phi^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (n!)^{-1/2} \langle 0 | \varphi^{(+)}(x_1) \dots \varphi^{(+)}(x_n) | 0 \rangle \quad (7.95)$$

удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона по каждой из координат $(\square_i + \mu^2) \Phi^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$$= (n!)^{-1/2} \langle 0 | \varphi^{(+)}(x_1) \dots (\square_i + \mu^2) \varphi^{(+)}(x_i) \dots \varphi^{(+)}(x_n) | \Phi \rangle = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots), \quad (7.96)$$

поскольку $\varphi^{(+)}(x_i)$ подчиняется этому же уравнению. Кроме того, $\Phi^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ во временной зависимости от координат $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ содержит только положительные частоты и симметрична при перестановках координат частиц. Эта функция, таким образом, является симметризованным произведением решений уравнения Клейна—Гордона с положительной энергией. Именно такой результат мы могли бы ожидать на основании рассмотрения в начале настоящей главы.

Действительно, используя явный вид функции преобразования $\langle x_1, x_2, \dots, x_n | n_1, n_2, \dots, n_i \dots \rangle$, из равенства (7.6) легко видеть, что амплитуда в пространстве Фока

$$\Phi^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n | \Phi \rangle =$$

$$= \sum_{\substack{n_i \\ \sum_i n_i = n}} \langle x_1, x_2, \dots, x_n | n_1, n_2, \dots, n_i \dots \rangle \langle n_1, n_2, \dots, n_i \dots | \Phi \rangle \quad (7.97)$$

является суммой симметризованных произведений одночастичных функций с положительной энергией. Произвольный гейзенберговский вектор состояния можно разложить по базисным векторам в пространстве Фока

$$|\Phi\rangle = \Phi^{(0)}|0\rangle + i \int_0^{\infty} d\sigma^\mu(x) \left(\frac{\partial \varphi^{(-)}(x)}{\partial x^\mu} - \varphi^{(-)}(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \Phi^{(1)}(x)|0\rangle +$$

$$+ \dots + (i)^n \int_0^{\infty} d\sigma^{\mu_1}(x_1) \dots \int_0^{\infty} d\sigma^{\mu_n}(x_n) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi^{(-)}(x_i)}{\partial x_i^{\mu_i}} - \varphi^{(-)}(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i^{\mu_i}} \right) \Phi^{(n)}(x_1, \dots, x_n)|0\rangle + \dots \quad (7.98)$$

Компонента $\Phi^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ в пространстве Фока при $x_{10} = x_{20} = \dots = x_{n0}$ физически интерпретируется как амплитуда вероятности найти n частиц в момент $x_0 = x_{10} = \dots = x_{n0}$. Но по причинам, уже обсуждавшимся в теории одной частицы Клейна—Гордона, $\Phi^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ не является амплитудой вероятности найти частицы в точках x_1, \dots, x_n в момент времени x^0 . Чтобы ответить на вопрос относительно вероятности найти частицы в определенных положениях, мы на основании наших прежних исследований оператора положения и локализованных волновых функций свободной частицы Клейна—Гордона введем следующий оператор:

$$\Phi_1(q) = \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} (k_0)^{1/2} e^{ik \cdot q} a_k. \quad (7.99)$$

Если $|\Phi^1\rangle$ соответствует состоянию одной частицы с импульсом \mathbf{k} , т. е. $|\Phi^1\rangle = |\mathbf{k}\rangle = a_k^*|0\rangle$, тогда матричный элемент

$$\langle 0 | \Phi_1(q) | \Phi^1 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} (k_0)^{1/2} e^{ik \cdot q} \quad (7.100)$$

есть амплитуда вероятности найти частицу в точке \mathbf{q} в момент q^0 . Поэтому мы интерпретируем состояние $\Phi_1^*(q)|0\rangle$ как состояние одной

частицы, локализованной в точке \mathbf{q} в момент времени q^0 , а состояние $(n!)^{-1/2} \varphi_1^*(q^0, \mathbf{q}_1) \varphi_1^*(q^0, \mathbf{q}_2) \dots \varphi_1^*(q^0, \mathbf{q}_n) |0\rangle$ — как состояние n частиц со спином, равным 0, и массой μ , локализованных в точках $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ в момент q^0 . Одновременной коммутатор операторов φ_1 и φ_1^* равен

$$[\varphi_1(q^0, \mathbf{q}), \varphi_1^*(q^0, \mathbf{q}')] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k_0} \int \frac{d^3l}{l_0} (k_0 l_0)^{1/2} e^{i(k_0 - l_0)q_0} \times \\ \times e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}} e^{i\mathbf{l} \cdot \mathbf{q}'} [a_k, a_l^*] = \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (7.101)$$

Теперь можно определить оператор N_V^{\mp} числа частиц, находящихся в трехмерном объеме V в момент времени q^0 :

$$N_V(q_0) = \int_V d^3q \varphi_1^*(q_0, \mathbf{q}) \varphi_1(q_0, \mathbf{q}). \quad (7.102)$$

В силу перестановочных соотношений (7.101)

$$[N_V(q_0), \varphi_1(q^0, \mathbf{q})] = -\varphi_1(q^0, \mathbf{q}) \delta(\mathbf{q} \in V), \quad (7.103a)$$

$$[N_V(q_0), \varphi_1^*(q^0, \mathbf{q})] = +\varphi_1^*(q^0, \mathbf{q}) \delta(\mathbf{q} \in V), \quad (7.103b)$$

так что оператор $N_V(q_0)$, действуя на $\varphi_1^*(q^0, \mathbf{q}_1) \dots \varphi_1^*(q^0, \mathbf{q}_n) |0\rangle$, воспроизводит это состояние, причем собственное значение равно числу частиц, локализованных в точках \mathbf{q}_i объема V .

Представление операторов $\varphi^{(\pm)}(x)$ в конфигурационном пространстве можно получить, если заметить, что в силу перестановочных соотношений (7.74) и определения базисных векторов (7.90) и (7.94)

$$\varphi^{(-)}(x) |x_1, \dots, x_n\rangle = \sqrt{n+1} |x, x_1, x_2, \dots, x_n\rangle, \quad (7.104)$$

$$\varphi^{(+)}(x) |x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n i\Delta^{(+)}(x-x_j) |x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\rangle. \quad (7.105)$$

Так как

$$\bar{\Delta}^{(+)}(x) = \Delta^{(-)}(x) = -\Delta^{(+)}(-x), \quad (7.106)$$

то, взяв равенства, сопряженные с (7.104) и (7.105), находим

$$\langle x_1, \dots, x_n | \varphi^{(+)}(x) | \Phi \rangle = \sqrt{n+1} \langle x, x_1, \dots, x_n | \Phi \rangle, \quad (7.107)$$

$$\langle x_1, \dots, x_n | \varphi^{(-)}(x) | \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n i\Delta^{(+)}(x_j - x) \langle x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n | \Phi \rangle. \quad (7.108)$$

Получив в пространстве Фока представления операторов $\varphi^{(+)}(x)$ и $\varphi^{(-)}(x)$, проанализируем их трансформационные свойства при преобразованиях Лоренца. Для ограниченных преобразований Лоренца они просто выводятся из трансформационных свойств операторов a_k и a_k^* :

$$U(a, \Lambda) \varphi^{(+)}(x) U(a, \Lambda)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_+ d\Omega(k) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} U(a, \Lambda) a_k U(a, \Lambda)^{-1} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_+ d\Omega(k) e^{-i\Lambda \mathbf{k} \cdot \Lambda \mathbf{x}} e^{-i\Lambda k \cdot a} a_{\Lambda k} = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_+ d\Omega(k') e^{-i\mathbf{k}' \cdot (\Lambda \mathbf{x} + a)} a_{k'} = \\ = \varphi^{(+)}(\Lambda \mathbf{x} + a) \quad (7.109)^1$$

¹⁾ Знак плюс у интеграла соответствует интегрированию по состояниям с $k_0 > 0$. — Прим. ред.

и аналогично

$$U(a, \Lambda) \varphi^{(-)}(x) U(a, \Lambda)^{-1} = \varphi^{(-)}(\Lambda x + a). \quad (7.110)$$

Рассмотрим далее трансформационные свойства при отражениях. При пространственном отражении, $x \rightarrow x' = i_s x$ ($x'_0 = x_0$, $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$), одночастичная амплитуда $\Phi^{(1)}(x)$ преобразуется следующим образом:

$$\langle x | \Phi' \rangle = \langle x | U(i_s) | \Phi \rangle = \eta_S \langle i_s x | \Phi \rangle, \quad (7.111)$$

где $\eta_S = \pm 1$. Знак плюс соответствует скалярной частице, а минус — псевдоскалярной. Оператор $U(i_s)$ унитарен, поскольку

$$(\Phi', \Psi') = i \int d^3x \langle \Phi | i_s x \rangle \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle i_s x | \Psi \rangle = i \int d^3x \langle \Phi | x \rangle \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle x | \Psi \rangle = (\Phi, \Psi). \quad (7.112)$$

Закон преобразования для n -частичной амплитуды определим в виде

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n | U(i_s) | \Phi \rangle = (\eta_S)^n \langle i_s x_1, \dots, i_s x_n | \Phi \rangle, \quad (7.113)$$

а для вакуума положим

$$U(i_s) | 0 \rangle = | 0 \rangle. \quad (7.114)$$

Чтобы вывести закон преобразования для операторов поля $\varphi^{(+)}$ и $\varphi^{(-)}$, поступим так же, как при выводе равенства (7.57). Помножим $U(i_s)$ на $\varphi^{(+)}(x)$ и получим

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_2, \dots, x_n | U(i_s) \varphi^{(+)}(x) | \Phi \rangle &= (\eta_S)^n \langle i_s x_1, \dots, i_s x_n | \varphi^{(+)}(x) | \Phi \rangle = \\ &= (\eta_S)^n \sqrt{n+1} \langle x, i_s x_1, \dots, i_s x_n | \Phi \rangle = \\ &= \eta_S \sqrt{n+1} \langle i_s x, x_1, \dots, x_n | U(i_s) | \Phi \rangle = \\ &= \eta_S \langle x_1, \dots, x_n | \varphi^{(+)}(i_s x) U(i_s) | \Phi \rangle, \end{aligned} \quad (7.115)$$

откуда

$$U(i_s) \varphi^{(+)}(x) U(i_s)^{-1} = \eta_S \varphi^{(+)}(i_s x), \quad (7.116)$$

и аналогично, используя свойство $\Delta^{(+)}(i_s x) = \Delta^{(+)}(x)$, имеем

$$U(i_s) \varphi^{(-)}(x) U(i_s)^{-1} = \eta_S \varphi^{(-)}(i_s x). \quad (7.117)$$

Следовательно, трансформационные свойства операторов $a_{\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k}}^*$ при пространственном отражении можно выразить равенствами

$$U(i_s) a_{\mathbf{k}} U(i_s)^{-1} = \eta_S a_{-\mathbf{k}}, \quad (7.118a)$$

$$U(i_s) a_{\mathbf{k}}^* U(i_s)^{-1} = \eta_S a_{-\mathbf{k}}^*. \quad (7.118b)$$

Одночастичное состояние с импульсом \mathbf{k} и энергией $\omega(\mathbf{k})$ при пространственном отражении преобразуется в состояние с импульсом $-\mathbf{k}$ и энергией $\omega(-\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})$.

Доказательство:

$$U(i_s) | \mathbf{k} \rangle = U(i_s) a_{\mathbf{k}}^* U(i_s)^{-1} U(i_s) | 0 \rangle = a_{-\mathbf{k}}^* | 0 \rangle = | -\mathbf{k} \rangle. \quad (7.119)$$

Гамильтониан инвариантен относительно операции $U(i_s)$, так как $U(i_s) H U(i_s)^{-1} = H$. Однако полный импульс \mathbf{P} преобразуется как полярный вектор

$$U(i_s) \mathbf{P} U(i_s)^{-1} = \int \frac{d^3k}{k_0} \mathbf{k} a_{-\mathbf{k}}^* a_{-\mathbf{k}} = -\mathbf{P}, \quad (7.120a)$$

или

$$U(i_s) \mathbf{P} = -\mathbf{P} U(i_s). \quad (7.1206)$$

Приведем явное выражение для оператора $U(i_s)$ [231]:

$$U(i_s) = e^{i\frac{\pi}{2} \int d\Omega(k) \eta_S a_k^* a_k - a_k^* a_{-k}}. \quad (7.121)$$

Чтобы доказать это равенство, заметим, что $N = \int d\Omega(k) a_k^* a_k$ коммутирует с $\int d\Omega(k) a_k^* a_{-k}$, так что можно написать

$$U(i_s) = e^{-i\frac{\pi}{2} \int d\Omega(k) a_k^* a_{-k}} e^{i\frac{\pi}{2} \eta_S N}. \quad (7.122)$$

Мы видели, что

$$e^{i\frac{\pi}{2} \eta_S N} a_k e^{-i\frac{\pi}{2} \eta_S N} = e^{i\frac{\pi}{2} \eta_S} a_k = i \eta_S a_k, \quad (7.123)$$

так как $\eta_S = \pm 1$. Используем формулу

$$e^{i\lambda B} A e^{-i\lambda B} = A + \frac{i\lambda}{1!} [B, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [B, [B, A]] + \frac{(i\lambda)^3}{3!} [B, [B, [B, A]]] + \dots, \quad (7.124)$$

которая получается, если левую часть разложить по λ в окрестности $\lambda = 0$, используя формулу Тэйлора. Тогда находим

$$e^{-i\frac{\pi}{2} \int d\Omega(k) a_k^* a_{-k}} a_k e^{i\frac{\pi}{2} \int d\Omega(k) a_k^* a_{-k}} = a_k \cos \frac{\pi}{2} - i a_{-k} \sin \frac{\pi}{2} = -i a_{-k}. \quad (7.125)$$

Следовательно,

$$U(i_s) a_k U(i_s)^{-1} = \eta_S a_{-k}, \quad (7.126)$$

что и требовалось доказать.

Поскольку два последовательных отражения соответствуют возвращению к первоначальной системе координат ($i_s^2 = 1$), то $U(i_s)^2 = I$, так что $U(i_s) = U^{-1}(i_s) = U^*(i_s)$ и $U(i_s)$ — эрмитов оператор. Эрмитовость $U(i_s)$ предполагает, что этот оператор соответствует некоторой наблюдаемой. Однако поскольку оператор $U(i_s)$ антикоммутирует с \mathbf{P} , он не может быть включен в полный набор наблюдаемых, описывающих систему, за исключением случая, когда частицы покоятся. Например, состояние одной покоящейся частицы есть собственное состояние $U(i_s)$ с собственным значением η_S :

$$U(i_s) a_0^* |0\rangle = U(i_s) a_0^* U(i_s)^{-1} |0\rangle = \eta_S a_0^* |0\rangle. \quad (7.127)$$

Множитель η_S называют «внутренней» четностью частицы. Аналогично n -частичное состояние $(a_0^*)^n |0\rangle$ есть собственное состояние $U(i_s)$ с собственным значением $(\eta_S)^n$.

Рассмотрим далее временные отражения. Если при отражении (обращении) времени $x' = i_t x$ ($x'_0 = -x_0$, $\mathbf{x}' = +\mathbf{x}$) одночастичное состояние с положительной энергией должно переходить в одночастичное состояние с положительной энергией, тогда оператор $U(i_t)$, вызывающий это преобразование, должен быть антиунитарным [856]. Если бы преобразование было унитарным, то одночастичная амплитуда преобразовывалась бы следующим образом:

$$\langle x | \Phi' \rangle = \langle x | U(i_t) | \Phi \rangle = \eta_T \langle i_t x | \Phi \rangle, \quad (7.128)$$

где $\eta_T = \pm 1$ — временная четность частицы. Рассмотрим трансформационные свойства одночастичной амплитуды, когда $|\Phi\rangle$ соответствует одночастичному состоянию с импульсом k , $|\Phi\rangle = |k\rangle$.

Так как $\langle x|k\rangle = [2(2\pi)^3]^{-1/2} \exp(-ik \cdot x)$, то преобразованной волновой функцией была бы функция

$$\langle x|\Phi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} e^{ik_0 x_0} e^{ik \cdot x}, \quad (7.129)$$

которая является решением уравнений Клейна — Гордона с отрицательной энергией. Поэтому чтобы конечная волновая функция была снова решением с положительной энергией, мы требуем выполнения соотношения

$$\langle x|\Phi'\rangle = \langle x|U(i_t)|\Phi\rangle = \eta_T \overline{\langle i_t x|\Phi\rangle} = \eta_T \langle \Phi|i_t x\rangle, \quad (7.130)$$

т. е. чтобы оператор $U(i_t)$ был антиунитарным.

Вакуум инвариантен относительно введенной операции

$$\langle \Phi|U(i_t)|0\rangle = \langle 0|\Phi\rangle \text{ для всех } |\Phi\rangle. \quad (7.131)$$

Определим закон преобразования для n -частичной амплитуды:

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_2, \dots, x_n|U(i_t)|\Phi\rangle &= (\eta_T)^n \overline{\langle i_t x_1, \dots, i_t x_n|\Phi\rangle} = \\ &= (\eta_T)^n \langle \Phi|i_t x_1, i_t x_2, \dots, i_t x_n\rangle. \end{aligned} \quad (7.132)$$

Тогда получим

$$U(i_t) \varphi^{(+)}(x) U(i_t)^{-1} = \eta_T \varphi^{(+)}(i_t x), \quad (7.133a)$$

$$U(i_t) \varphi^{(-)}(x) U(i_t)^{-1} = \eta_T \varphi^{(-)}(i_t x), \quad (7.133b)$$

где $U(i_t)$ — антиунитарный оператор, т. е.

$$U(i_t) \alpha|\Psi\rangle = \overline{\alpha} U(i_t)|\Psi\rangle, \quad (7.134a)$$

$$U(i_t) (|\Psi\rangle + |\Phi\rangle) = U(i_t)|\Psi\rangle + U(i_t)|\Phi\rangle, \quad (7.134b)$$

$$\langle \Phi, \Psi\rangle = \langle U(i_t)\Psi, U(i_t)\Phi\rangle. \quad (7.134v)$$

Часто бывает удобно представлять антиунитарный оператор в виде произведения оператора сопряжения K и некоторого унитарного оператора. Под оператором сопряжения K мы понимаем оператор, который обладает свойствами $K^2 = 1$ и $\langle K\Phi, K\Psi\rangle = \langle \Psi, \Phi\rangle$. Ясно, что если оператор U — антиунитарен, то $UK = \mathcal{U}$ — унитарный оператор, так что произвольный антиунитарный оператор U всегда можно записать в виде $U = \mathcal{U}K$, где оператор \mathcal{U} унитарен.

Чтобы пояснить смысл антиунитарного оператора $U(i_t)$, выведем законы преобразования операторов a_k , a_k^* , заданных в импульсном пространстве, из соответствующих преобразований для $\varphi^{(+)}(x)$ и $\varphi^{(-)}(x)$. Используя выражение (7.70) и свойство антиунитарного оператора (7.134a), найдем

$$\begin{aligned} U(i_t) \varphi^{(+)}(x) U(i_t)^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3 k}{k_0} e^{ik_0 x_0} e^{-ik \cdot x} U(i_t) a_k U(i_t)^{-1} = \\ &= \eta_T \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3 k}{k_0} e^{ik_0 x_0} e^{+ik \cdot x} a_k, \end{aligned} \quad (7.135a)$$

откуда

$$U(i_t) a_k U(i_t)^{-1} = \eta_T a_{-k}. \quad (7.135b)$$

Аналогичным образом, используя (7.72) и (7.133а), получаем

$$U(i_t) a_k^* U(i_t)^{-1} = \eta_T a_{-k}^*. \quad (7.135в)$$

Можно проверить, что в шредингеровской картине каждое состояние физической системы в момент времени t при обращении времени переходит в состояние в момент времени $-t$ с обращенными направлениями скоростей частиц. Инвариантность относительно обращения времени предполагает, что последние состояния существуют. Таково толкование на языке квантовой механики классического понятия обращения времени. В случае классической теории, когда лагранжиан не зависит явно от времени (и содержит только четные степени импульса), если $q_i(t)$, $p_i(t)$ есть возможное движение системы, то и $q_i(-t)$, $-p_i(-t)$ также является возможным движением. Проще говоря, инвариантность относительно обращения времени утверждает, что если движение возможно по некоторому направлению в пространстве, то существует другое возможное движение по тому же самому пути в пространстве, но в обратном направлении.

Мы закончим этот параграф рассмотрением эрмитова оператора поля

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), \quad (7.136а)$$

$$\varphi(x) = \varphi^*(x). \quad (7.136б)$$

Этот оператор, будучи выражен через операторы a_k и a_k^* , имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} (a_k e^{-ik \cdot x} + a_k^* e^{ik \cdot x}) \quad (7.137)$$

и подчиняется уравнению Клейна — Гордона

$$(\square + \mu^2) \varphi(x) = 0. \quad (7.138)$$

Операторы $\varphi^{(+)}(x)$ и $\varphi^{(-)}(x)$ являются соответственно положительно- и отрицательно-частотными частями оператора $\varphi(x)$. Они могут быть получены из $\varphi(x)$ лоренц-инвариантным образом:

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \int_{\sigma} \left\{ \frac{\partial \Delta^{(\pm)}(x-x')}{\partial x'^{\mu}} \varphi(x') - \Delta^{(\pm)}(x-x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial x'^{\mu}} \right\} d\sigma^{\mu}(x'). \quad (7.139)$$

С другой стороны, если представить $\varphi(x)$ в виде интеграла Фурье

$$\varphi(x) = \int d^4k e^{-ik \cdot x} \delta(k^2 - \mu^2) \tilde{\varphi}(k), \quad (7.140)$$

то

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \int d^4k e^{-ik \cdot x} \theta(\pm k_0) \delta(k^2 - \mu^2) \tilde{\varphi}(k). \quad (7.141)$$

Трансформационные свойства $\varphi(x)$ тривиально получаются из трансформационных свойств $\varphi^{(+)}(x)$ и $\varphi^{(-)}(x)$. При ортохронных собственных преобразованиях Лоренца φ преобразуется следующим образом:

$$U(a, \Lambda) \varphi(x) U(a, \Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda x + a), \quad (7.142)$$

а при пространственных и временных отражениях:

$$U(i_s) \varphi(x) U(i_s)^{-1} = \eta_S \varphi(i_s x), \quad (7.143)$$

$$U(i_t) \varphi(x) U(i_t)^{-1} = \eta_T \varphi(i_t x), \quad (7.144)$$

где $U(i_t)$ — антиунитарный оператор.

Перестановочные соотношения для $\varphi(x)$ суть

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(x')] &= [\varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(x') + \varphi^{(-)}(x')] = \\ &= i\Delta^{(+)}(x-x') + i\Delta^{(-)}(x-x') \end{aligned} \quad (7.145a)$$

$$= i\Delta(x-x'), \quad (7.145b)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} (e^{-ik \cdot x} - e^{+ik \cdot x}) = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{ik \cdot x} \sin k_0 x_0 \end{aligned} \quad (7.146a)$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k \varepsilon(k_0) \delta(k^2 - \mu^2) e^{-ik \cdot x}. \quad (7.146b)$$

При переходе от (7.146a) к (7.146b) было использовано соотношение

$$\varepsilon(k_0) \delta(k^2 - \mu^2) = \frac{1}{2|k_0|} \{ \delta(k_0 - \omega_k) - \delta(k_0 + \omega_k) \}, \quad (7.147)$$

где $\varepsilon(k_0) = \theta(k_0) - \theta(-k_0) = k_0/|k_0|$ равно $+1$ при $k_0 > 0$ и -1 при $k_0 < 0$. Из приведенного выше выражения можно вывести важные свойства функции $\Delta(x)$:

$$\Delta(-x) = -\Delta(+x), \quad (7.148a)$$

$$\Delta(\Lambda x) = \Delta(x), \quad (7.148b)$$

$$(\square + \mu^2) \Delta(x) = 0. \quad (7.148b)$$

Сингулярную функцию $\Delta(x)$ можно определить как нечетное инвариантное решение уравнения Клейна — Гордона (см. ниже). Итак, коммутатор (7.145) является инвариантным c -числом. Об инвариантности коммутатора можно заключить также из следующих равенств:

$$\begin{aligned} U(a, \Lambda) [\varphi(x), \varphi(x')] U(a, \Lambda)^{-1} &= \\ &= U(a, \Lambda) \Delta(x-x') U(a, \Lambda)^{-1} = \Delta(x-x') = \\ &= [\varphi(\Lambda x + a), \varphi(\Lambda x' + a)] = \Delta(\Lambda x + a - \Lambda x' - a) = \\ &= \Delta(\Lambda(x-x')) = \Delta(x-x'). \end{aligned} \quad (7.149)$$

Наоборот, требование того, чтобы коммутатор был инвариантным c -числом, фиксирует значение коммутатора с точностью до постоянной. Для доказательства этого утверждения обозначим правую часть коммутатора через $F(x, x')$:

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = F(x, x'), \quad (7.150)$$

где F — по предположению инвариантное c -число. Инвариантность относительно сдвигов требует, чтобы при произвольном a

$$F(x, x') = F(x+a, x'+a), \quad (7.151)$$

так что F может быть функцией только от $x-x'$. А из инвариантности относительно собственных однородных преобразований Лоренца следует

$$F(x) = F(\Lambda x). \quad (7.152)$$

Так как оператор $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, то этому же уравнению должна удовлетворять функция F :

$$(\square_x + \mu^2) [\varphi(x), \varphi(x')] = 0 = (\square_x + \mu^2) F(x-x'). \quad (7.153)$$

Наконец, в силу свойства коммутатора

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = -[\varphi(x'), \varphi(x)] \quad (7.154)$$

функция F должна быть нечетной

$$F(x-x') = -F(x'-x), \quad (7.155a)$$

или

$$F(x) = -F(-x). \quad (7.155b)$$

Таким образом, $F(x)$ является нечетным инвариантным решением уравнения Клейна — Гордона. Любую функцию $F(x)$, удовлетворяющую уравнению Клейна — Гордона, можно записать в виде

$$F(x) = \int d^4k e^{-ik \cdot x} \delta(k^2 - \mu^2) \tilde{F}(k). \quad (7.156)$$

Отметим, что функция $\tilde{F}(k)$ определена только на «массовой поверхности» $k^2 = \mu^2$, т. е. на гиперboloидах $k_0 = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$. Таким образом, все допустимые значения вектора k времени-подобны. Из лоренц-инвариантности $F(x)$ теперь следует

$$\begin{aligned} F(x) = F(\Lambda x) &= \int \delta(k^2 - \mu^2) e^{-ik \cdot \Lambda x} \tilde{F}(k) d^4k = \\ &= \int \delta((\Lambda^{-1}k)^2 - \mu^2) e^{-i\Lambda^{-1}k \cdot x} \tilde{F}(k) d^4k = \\ &= \int \delta(k^2 - \mu^2) e^{-ik \cdot x} \tilde{F}(\Lambda k) d^4k, \end{aligned} \quad (7.157)$$

откуда

$$\tilde{F}(k) = \tilde{F}(\Lambda k). \quad (7.158)$$

Следовательно, $\tilde{F}(k)$ может быть функцией только двух инвариантов k^2 и $\varepsilon(k_0)$, которые можно построить из времени-подобного вектора k . Запишем

$$F(k) = F_1(k^2) + \varepsilon(k_0) F_2(k^2). \quad (7.159)$$

Из-за наличия множителя $\delta(k^2 - \mu^2)$ в равенстве (7.156) в определение $F(x)$ входят значения $F_1(k^2)$ и $F_2(k^2)$ только при $k^2 = \mu^2$; поэтому можно написать

$$F(x) = \int d^4k \delta(k^2 - \mu^2) (F_1 + \varepsilon(k_0) F_2) e^{-ik \cdot x}, \quad (7.160)$$

где $F_{1,2} = F_{1,2}(\mu^2)$ — константы. Далее, требование того, чтобы $F(x) = -F(-x)$, дает условие

$$\begin{aligned} -F(-x) &= - \int d^4k \delta(k^2 - \mu^2) (F_1 + \varepsilon(k_0) F_2) e^{ik \cdot x} = \\ &= - \int d^4k \delta(k^2 - \mu^2) (F_1 - \varepsilon(k_0) F_2) e^{-ik \cdot x} = \\ &= F(x) = \int d^4k \delta(k^2 - \mu^2) (F_1 + \varepsilon(k_0) F_2) e^{-ik \cdot x}. \end{aligned} \quad (7.161a)$$

Следовательно,

$$F_1 = -F_1 = 0, \quad (7.161b)$$

так что

$$F(x) = F_2 \int d^4k e^{-ik \cdot x} \delta(k^2 - \mu^2) \varepsilon(k). \quad (7.162)$$

Наконец, поскольку оператор φ эрмитов, функция $F(x)$ должна обладать свойством

$$\bar{F}(x) = F(-x) = -F(x), \quad (7.163)$$

которое получается, если применить эрмитово сопряжение к равенству (7.150). Следовательно, постоянная F_2 — чисто мнимая. Таким образом, утверждение доказано.

Из инвариантности $\Delta(x)$ при собственных однородных преобразованиях Лоренца и нечетности $\Delta(x)$ можно заключить, что эта функция равна нулю при пространственно-подобных x^2 , т. е. при $x^2 < 0$.

Доказательство: Лоренц-инвариантность означает, что $\Delta(x)$ является функцией только x^2 при $x^2 < 0$ и функцией x^2 и знака времени $\varepsilon(x_0)$ при $x^2 \geq 0$, т. е. на световом конусе и внутри него. [Напомним, что $\varepsilon(x_0)$ имеет инвариантный смысл лишь на световом конусе и внутри него.] Таким образом, при пространственно-подобных x имеем $\Delta(x) = f_1(x^2)$, но функция от x^2 не может быть нечетной. Следовательно, $f_1(x^2) = 0$, что и требовалось доказать. Внутри светового конуса $\Delta(x)$ должна иметь вид $\Delta(x) = \varepsilon(x_0) f_2(x^2)$, т. е. быть нечетной инвариантной функцией. С другой стороны, заметим, что инвариантность одновременного коммутатора $\Delta(0, \mathbf{x}) = \Delta(0, R\mathbf{x})$ относительно вращений означает, что $\Delta(0, \mathbf{x})$ есть функция x^2 . Вместе с условием нечетности $\Delta(-x) = -\Delta(x)$ это дает

$$\Delta(0, \mathbf{x}) = 0, \quad (7.164)$$

т. е. одновременный коммутатор равен нулю

$$[\varphi(x^0, \mathbf{x}), \varphi(x^0, \mathbf{x}')] = 0. \quad (7.165)$$

Действительно, с помощью подходящего преобразования Лоренца всегда можно сделать так, чтобы у преобразованного пространственно-подобного вектора $x' = \Lambda x$ компонента $x'_0 = 0$. Поэтому из равенства $\Delta(x) = \Delta(\Lambda x)$ следует, что $\Delta(x) = 0$ при всех пространственно-подобных x .

Из выражения (7.164а) легко получить другое важное свойство функции $\Delta(x)$:

$$\left(\frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_0} \right)_{x_0=0} = -\delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (7.166)$$

Так как функция $\Delta(x)$ удовлетворяет гиперболическому дифференциальному уравнению второго порядка, то она однозначно определяется этим дифференциальным уравнением

$$(\square + \mu^2) \Delta(x) = 0 \quad (7.167)$$

и начальными условиями при $x_0 = 0$:

$$\text{а) } \Delta(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (7.168\text{а})$$

$$\text{б) } \left(\frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_0} \right)_{x_0=0} = -\delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (7.168\text{б})$$

Функция Δ позволяет найти решение задачи при заданных начальных значениях (задачи Коши) для уравнения Клейна — Гордона. Пусть $g(x)$ — решение уравнения Клейна — Гордона, имеющее вид волнового пакета. Если на некоторой пространственно-подобной поверхности σ_0 с нормалью n_μ это решение и его производная принимают значения $g_0(x)$ и $\partial^\mu g_0(x)$, тогда значение $g(x)$ на любой более поздней пространственно-подобной

поверхности дается выражением

$$g(x) = \int_{\sigma_0} \{ \Delta(x-x') n_\mu \partial'^\mu g_0(x') - n_\mu \partial'^\mu \Delta(x-x') \cdot g_0(x') \} d\sigma(x'). \quad (7.169)$$

Доказательство: Для функции $F_\mu(x)$, которая стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, согласно теореме Гаусса, имеем

$$\int_{\sigma} F_\mu(x') d\sigma^\mu(x') - \int_{\sigma_0} F_\mu(x') d\sigma^\mu(x') = \int_{\Omega} \partial'_\mu F^\mu(x') d^4x', \quad (7.170)$$

где Ω — пространственно-временной объем между σ и σ_0 . Пусть

$$F_\mu(x') = \Delta(x-x') \partial'_\mu g(x') - \partial'_\mu \Delta(x-x') \cdot g(x'). \quad (7.171)$$

Так как g и Δ удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона, то $\partial'_\mu F^\mu(x') = 0$. Возьмем в качестве σ плоскость $x_0 = x'_0 = \text{const}$, так что нормаль к σ имеет вид $n_\mu(x) = (1, 0, 0, 0)$. Используя свойства Δ -функции (7.164) и (7.166), получаем

$$\int_{\sigma} F_\mu(x') d\sigma^\mu(x') = g(x), \quad (7.172)$$

откуда, согласно (7.170) и равенству $\partial_\mu F^\mu(x) = 0$,

$$g(x) = \int_{\sigma_0} F_\mu(x') d\sigma^\mu(x'), \quad (7.173)$$

что и требовалось доказать.

Помимо $\Delta(x)$, существует другая инвариантная функция $\Delta^{(1)}(x)$, которая удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, но является четной. Она обладает следующими свойствами:

$$(\square + \mu^2) \Delta^{(1)}(x) = 0, \quad (7.174a)$$

$$\Delta^{(1)}(x) = \Delta^{(1)}(-x), \quad (7.174б)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta^{(1)}(x)}{\partial x_0} \right)_{x_0=0} = 0. \quad (7.174в)$$

Интегральное представление для этой функции есть

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{ik \cdot x} \cos k_0 x_0, \quad (7.175a)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k e^{-ik \cdot x} \delta(k^2 - \mu^2). \quad (7.175б)$$

Функции (точнее, обобщенные функции) $\Delta(x)$ и $\Delta^{(1)}(x)$ можно выразить через элементарные функции, вычисляя интегралы (7.146a) и (7.175a). Так, при $|x| = r$ находим, что $\Delta(x)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta(x, x_0) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{ik \cdot x} \sin k_0 x_0 = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} \frac{\sin kr \sin k_0 x_0}{kr} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} \cos kr \sin k_0 x_0 = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F(r, x_0). \end{aligned} \quad (7.176)$$

Сделаем замену переменной $k = \mu \operatorname{sh} y$, получаем¹⁾

$$F(r, x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} \cos kr \sin(\sqrt{k^2 + \mu^2} x_0) =$$

$$= \begin{cases} +J_0(\mu \sqrt{x_0^2 - r^2}) & \text{при } x_0 > r, \\ 0 & \text{при } -r < x_0 < r, \\ -J_0(\mu \sqrt{x_0^2 - r^2}) & \text{при } x_0 < -r. \end{cases} \quad (7.177)$$

Выполнив указанное в равенстве (7.176) дифференцирование, $\Delta(x)$ можно записать в форме, в которой видны как ковариантные свойства, так и особенности функции $\Delta(x)$ (см. также приложение к статье Швингера [712]):

$$\Delta(x) = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon(x_0) \left\{ \delta(x^2) - \frac{\mu^2}{2} \theta(x^2) \frac{J_1(\mu \sqrt{x^2})}{\mu \sqrt{x^2}} \right\}, \quad (7.178)$$

где $\theta(y) = 1$, если $y > 0$, и $\theta(y) = 0$, если $y < 0$. При малых x^2 , т. е. вблизи светового конуса, имеет место следующее разложение:

$$\Delta(x) = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon(x_0) \left\{ \delta(x^2) - \frac{\mu^2}{2} \theta(x^2) + \dots \right\}, \quad (7.179)$$

где опущены члены, стремящиеся к нулю при $x^2 \rightarrow 0$. Следовательно, $\Delta(x)$ имеет на световом конусе особенность в виде δ -функции, а также конечный разрыв (скачок).

Используя аналогичную процедуру, можно легко проверить, что

$$\Delta^{(1)}(x, x_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F^{(1)}(r, x_0), \quad (7.180)$$

где

$$F^{(1)}(r, x_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} \cos k_0 x_0 \cos kr =$$

$$= \begin{cases} N_0(\mu \sqrt{x_0^2 - r^2}) & \text{при } |x_0| > r, \\ -iH_0^{(1)}(i\mu \sqrt{r^2 - x_0^2}) & \text{при } r > |x_0|. \end{cases} \quad (7.181)$$

Отметим, что $\Delta^{(1)}$ не равна нулю вне светового конуса. При больших пространственно-подобных расстояниях (т. е. при $r \gg x_0$) $\Delta^{(1)}$ экспоненциально убывает. Функцию $\Delta^{(1)}$ можно также записать в виде, аналогичном равенству (7.178) (см. приложение к статье Швингера [712]). Здесь мы приведем выражение для функции $\Delta^{(1)}$ лишь вблизи светового конуса, чтобы были видны ее особенности:

$$\Delta^{(1)}(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \left\{ P \frac{1}{x^2} - \frac{\mu^2}{2} \ln \left[\frac{\gamma}{2} (\mu^2 |x^2|)^{1/2} \right] + \frac{\mu^2}{4} + \dots \right\}, \quad (7.182)$$

¹⁾ Напомним, что $J_0(z) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(z \operatorname{ch} \beta) d\beta$, $J_\nu(z) = (z/2)^\nu \sum_{l=0}^{\infty} (iz/2)^{2l} \times$
 $\times [l! \Gamma(\nu + l + 1)]^{-1}$, так что в окрестности $z=0$ $J_0(z) \approx 1 - (z^2/4) + 0(z^4)$. Напомним,
 что $J_1(z) = -(\partial/\partial z) J_0(z)$ и что $N_0(z) = -(1/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(z \operatorname{ch} \beta) d\beta$.

где P — главное значение, а $\gamma = 0,577 \dots$ — постоянная Эйлера. Мы опять пренебрегли членами, стремящимися к нулю при $x^2 \rightarrow 0$.

§ 4. Связь с теорией поля

Весь развитый до сих пор формализм основывался на знании свойств частиц, образующих рассматриваемую систему: их спина, массы, трансформационных свойств амплитуд и типа статистики (Бозе — Эйнштейна). Теперь мы покажем, что этот формализм вторичного квантования эквивалентен определенной процедуре квантования классической c -числовой амплитуды поля, которая подчиняется уравнению Клейна — Гордона.

Наши знания по опыту квантования механических систем материальных точек дают возможность предполагать, что для установления упомянутой эквивалентности нужно найти описание системы с помощью канонических переменных $\pi(x, t)$ и $\varphi(x, t)$, перестановочные соотношения для которых должны иметь вид

$$[\pi(x, t), \varphi(x', t)] = -i\hbar\delta^{(3)}(x - x').$$

Последние соотношения будут для системы с бесконечным числом степеней свободы, какой является поле, аналогом перестановочных соотношений $[q_r, p_s] = i\hbar\delta_{rs}$.

Отметим, что если определить оператор

$$\pi(x) = \partial_0\varphi(x) = -\frac{i}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \int_{k_0=\omega_k} d^3k (e^{-ik \cdot x} a_k - e^{+ik \cdot x} a_k^*), \quad (7.183)$$

то одновременные перестановочные соотношения для $\pi(x)$ и $\varphi(x)$ имеют вид δ -функции, т. е.

$$\begin{aligned} [\pi(x), \varphi(x')] \Big|_{x_0=x'_0} &= \frac{\partial}{\partial x_0} [\varphi(x), \varphi(x')] \Big|_{x'_0=x_0} = \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k e^{ik \cdot x - x'} \cos k_0(x_0 - x'_0) \Big|_{x'_0=x_0} = \\ &= -i\delta^{(3)}(x - x'). \end{aligned} \quad (7.184)$$

Таким образом, в некотором смысле, который мы уточним позднее, операторы $\pi(x)$ и $\varphi(x)$ являются сопряженными величинами. Попытаемся выразить H через π и φ . Для этого заметим, что можно получить выражения для операторов a_k и a_k^* через π и φ , если обратить равенства (7.137) и (7.183). Например, равенство (7.183) для $\pi(x)$ можно переписать в виде

$$\pi(x) = \frac{-i}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \int_{k_0=\omega_k} d^3k \{a_k e^{-i\omega_k x_0} - a_{-k}^* e^{i\omega_k x_0}\} e^{ik \cdot x}, \quad (7.185)$$

откуда

$$a_k e^{-i\omega_k x_0} - a_{-k}^* e^{i\omega_k x_0} = \frac{i\sqrt{2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \pi(x) e^{-ik \cdot x}. \quad (7.186)$$

Аналогично, из равенства (7.137) следует

$$a_k e^{-i\omega_k x_0} + a_{-k}^* e^{i\omega_k x_0} = \frac{\sqrt{2}\omega_k}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \varphi(x) e^{-ik \cdot x}, \quad (7.187)$$

так что

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(x) + \frac{i}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \pi(x), \quad (7.188a)$$

$$a_{\mathbf{k}}^* = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \varphi(x') - \frac{i}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \pi(x'). \quad (7.188б)$$

Подставим эти выражения в $H = \int d\Omega(k) a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}$ и заметим, что в равенствах (7.188a) и (7.188б) времена x_0 и x'_0 произвольны. Тогда, полагая для простоты $x_0 = x'_0$, получим

$$H = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3k \omega_{\mathbf{k}}^2 \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(x) \cdot \int d^3x' e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \varphi(x') + \\ + \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \pi(x) \int d^3x' e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \pi(x') + H_c, \quad (7.189)$$

где H_c соответствует перекрестным по π и φ членам [см. ниже равенство (7.192)]. Поскольку $\omega_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2 + \mu^2$, то

$$(\mathbf{k}^2 + \mu^2) \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(x) = \int d^3x \{(\mu^2 - \nabla^2) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\} \varphi(x), \quad (7.190a)$$

$$= \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\mu^2 - \nabla^2) \varphi(x). \quad (7.190б)$$

Интегрирование по частям можно оправдать тем, что переход от равенства (7.190a) к (7.190б) справедлив, если рассматривать матричные элементы от этих операторных равенств между произвольными *нормированными* векторами $|\Psi\rangle$ и $|\Phi\rangle$. Интегрируя по \mathbf{k} , получаем

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \{ \varphi(x) (\mu^2 - \nabla^2) \varphi(x) + \pi^2(x) \} + H_c, \quad (7.191)$$

где

$$H_c = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3k \omega_{\mathbf{k}} \int d^3x \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} [\varphi(x), \pi(x')] \Big|_{x_0=x'_0} = \\ = -\frac{1}{2} \int d^3k \omega_{\mathbf{k}}. \quad (7.192)$$

Таким образом, член H_c есть бесконечное c -число, которое при больших k ведет себя, как $\int k^3 dk$. Его происхождение связано с записью гамильтониана в виде (7.191); когда мы разбиваем φ и π на операторы рождения и уничтожения ($\varphi^{(\pm)}$ и $\partial_0 \varphi^{(\pm)}$), то в $H - H_c$ появляются операторы рождения, стоящие правее операторов уничтожения. Поэтому при действии на состояние без частиц $H - H_c$ дает не нуль, а энергию, равную $+1/2 \int d^3k \omega_{\mathbf{k}}$. Член H_c переопределяет энергию так, что состоянию без частиц приписывается энергия, равная нулю. По-другому можно написать:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x N \{ \pi^2(x) + \varphi(x) (\mu^2 - \nabla^2) \varphi(x) \}, \quad (7.193)$$

где действие оператора N , по определению, таково, что он приводит произведение операторов рождения и уничтожения к «нормальной форме», в которой все операторы рождения стоят слева от всех операторов уничтожения. При этом предполагается, что перегруппировка производится так, как будто бы все коммутаторы равны нулю.

Так

$$N(\varphi^{(-)}(y)\varphi^{(+)}(x)) = N(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y)) = \varphi^{(-)}(y)\varphi^{(+)}(x). \quad (7.194)$$

По определению, для нормального произведения операторов N имеет место распределительный закон, т. е.

$$N[\varphi^{(+)}(x)\{\varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(-)}(z)\}] = N(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(y)) + N(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(z)). \quad (7.195)$$

Иногда нормальное произведение обозначают также двоеточием; например, вместо равенства (7.193) можно написать

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x : (\pi^2(x) + \nabla\varphi(x) \cdot \nabla\varphi(x) + \mu^2\varphi^2(x)) :. \quad (7.196)$$

Здесь мы проинтегрировали по частям член $\nabla^2\varphi$ в равенстве (7.193). Аналогичным образом можно выразить через $\pi(x)$ и $\varphi(x)$ оператор полного импульса

$$P = \frac{1}{2} \int d^3x : \pi(x) \nabla\varphi(x) + \nabla\varphi(x) \cdot \pi(x) :. \quad (7.197)$$

Отметим, что разность между оператором P в нормальной форме и без нее является c -числом, равным $\frac{1}{2} \int d^3k k$, и что этот член равен нулю из соображений симметрии.

Описание системы свободных частиц с помощью вторичного квантования в шредингеровской картине характеризуется гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x : \pi^2(x) + \nabla\varphi(x) \cdot \nabla\varphi(x) + \mu^2\varphi^2(x) :, \quad (7.198)$$

где $\pi(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x}, 0)$ и $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, 0)$ — операторы поля в шредингеровской картине (мы опять приняли, что шредингеровская и гейзенберговская картины совпадают при $t=0$). Эти операторы удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям

$$[\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (7.199)$$

Уравнение Шредингера, определяющее развитие системы во времени, есть $i\partial_t |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$, где $|\Psi(t)\rangle$ — вектор в пространстве $\mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \dots$.

Теперь мы покажем, что квантованную теорию в только что изложенной форме можно получить, если рассматривать величину $\varphi(x)$ как амплитуду классического поля; подчиняющуюся уравнению поля $(\square + \mu^2)\varphi(x) = 0$, и «квантовать» такую классическую теорию поля. Под этим мы понимаем следующее. Поле можно рассматривать как систему с бесконечным числом степеней свободы, причем значение амплитуды в каждой точке пространства соответствует одной такой степени свободы. Если было бы возможно ввести переменную, канонически сопряженную к амплитуде поля в каждой точке пространства, то можно было бы наложить квантовые условия так же, как при переходе от классической механики к квантовой в случае конечного числа степеней свободы. Именно мы потребовали бы, чтобы классическая скобка Пуассона канонических переменных переходила в умноженный на i/\hbar коммутатор этих переменных, которые в квантовой теории становятся некоммутирующими операторами.

Проще всего ввести канонически сопряженные величины с помощью лагранжиана

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \varphi_\mu), \quad (7.200)$$

где $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \varphi_\mu)$ — плотность лагранжиана (или лагранжева плотность), а $\varphi_\mu = \partial_\mu \varphi$. Потребуем, чтобы интеграл действия

$$I = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}(\varphi, \varphi_\mu) \quad (7.201)$$

был стационарен при любых вариациях величин поля, при условии, что вариации на концах t_1 и t_2 промежутка интегрирования в (7.201) равны нулю, т. е. $\delta\varphi(t_2, \mathbf{x}) = \delta\varphi(t_1, \mathbf{x}) = 0$. Ниже мы увидим, что для стационарности действия I необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = 0. \quad (7.202)$$

Лагранжиан выбран так, чтобы уравнение Эйлера совпадало с уравнением поля. Сформулированный принцип действия является естественным обобщением принципа Гамильтона обычной механики, ибо совокупность значений, которые принимают φ и φ_0 , можно рассматривать как аналоги координат и скоростей в механике частиц.

Проварьируем (7.201) по φ :

$$\delta I = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} \delta\varphi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu(x)} \delta\varphi_\mu(x) \right]. \quad (7.203)$$

Здесь Ω — четырехмерный объем, по которому интегрируется (7.201). Форма Ω остается пока произвольной. Зависимость второго члена от $\delta\varphi(x)$ определяется с помощью равенства $\varphi_\mu = \partial_\mu \varphi$ ¹⁾. Интегрируя второй член по частям, находим

$$\delta I = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu} \right) \right] \delta\varphi + \int_{\Sigma} d\sigma(x) \delta\varphi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu} \right) n_\mu(x), \quad (7.204)$$

где Σ — поверхность, ограничивающая объем Ω , а $n_\mu(x)$ — внешняя нормаль к этой поверхности в точке x . Принцип действия требует, чтобы $\delta I = 0$ при всех вариациях $\delta\varphi$, ограниченных лишь условием $\delta\varphi = 0$ на Σ . Так как $\delta\varphi$ внутри Ω произвольна, то требование $\delta I = 0$ ведет к тому, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu(x)} = 0, \quad (7.205)$$

т. е. к тому, что удовлетворяется уравнение Эйлера. При подходящем выборе \mathcal{L} оно совпадает с уравнением поля. Между прочим, этот выбор не единственный. Так, добавление к лагранжевой плотности четырехмерной дивергенции не изменяет уравнение поля.

Доказательство: Рассмотрим новую плотность лагранжиана \mathcal{L}' , полученную из \mathcal{L} добавлением четырехмерной дивергенции:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial F_\mu}{\partial x_\mu}, \quad (7.206)$$

где $F_\mu = F_\mu(\varphi)$. Член $\int d^4x \partial^\mu F_\mu(\varphi)$ в выражении для действия по теореме Гаусса можно преобразовать в интеграл по поверхности Σ , так что его

¹⁾ То есть $\delta\varphi_\mu = \partial_\mu \delta\varphi$. — *Прим. ред.*

вариация тождественно равна нулю. Утверждение остается справедливым, если F_μ зависит не только от φ , но и от φ_ν , при условии, что \mathcal{L}' не содержит вторых производных φ . Физическое содержание лагранжианов, отличающихся четырехмерной дивергенцией, одинаково. Однако гамильтонианы и канонический формализм для них будут, вообще говоря, различными.

Чтобы дальше развить канонический формализм по аналогии со случаем системы частиц, желательно иметь дело со счетным числом степеней свободы, а не с континуумом. Для этой цели трехмерный континуум предполагают разделенным на столь малые кубические ячейки, чтобы можно было пренебречь изменением физических величин внутри каждого кубика. Эти ячейки можно пронумеровать с помощью дискретной переменной. Средние значения φ и $\partial_0\varphi$ в отдельных ячейках можно принять в качестве переменных, описывающих систему (см., например, книгу Вентцеля [836]). С другой стороны, действительную переменную поля $\varphi(x)$ можно разложить по полной совокупности действительных ортонормированных функций $\zeta_n(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\int d^3x \zeta_m(x) \zeta_n(x) = \delta_{mn}, \quad (7.207a)$$

$$\sum_n \zeta_n(x) \zeta_n(x') = \delta^{(3)}(x - x'), \quad (7.207b)$$

т. е. написать ¹⁾

$$\varphi(x) = \sum_n q_n(t) \zeta_n(x), \quad q_n(t) = \int d^3x \zeta_n(x) \varphi(x), \quad (7.208a)$$

$$\varphi_0(x) = \sum_n \dot{q}_n(t) \zeta_n(x), \quad \dot{q}_n(t) = \int d^3x \zeta_n(x) \varphi_0(x). \quad (7.208b)$$

Покажем, что уравнение Эйлера, справедливое при каждом x , можно заменить счетной совокупностью уравнений относительно q_n и \dot{q}_n . Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_n} &= \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_n} \right) = \\ &= \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} \right) \zeta_n(x). \end{aligned} \quad (7.209)$$

Аналогично,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{q}_n} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \zeta_n(x), \quad (7.210)$$

так что если удовлетворяется уравнение (7.202), то

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0 \quad (n = 0, 1, 2; \dots). \quad (7.211)$$

¹⁾ Точкой над буквой, как обычно, обозначается дифференцирование по времени. — Прим. ред.

Наоборот, если имеют место уравнения (7.211), так что

$$\int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu} \right) \zeta_n(x) = 0, \quad (7.212)$$

тогда из полноты совокупности $\{\zeta_n\}$ следует, что удовлетворяется уравнение поля (7.202). В полной аналогии с обычной механикой можно определить импульс, канонически сопряженный с $q_n(t)$:

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n(t)} = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0(x)} \zeta_n(x) d^3x = \\ &= \int \pi(x) \zeta_n(x) d^3x, \end{aligned} \quad (7.213)$$

где $\pi(x)$ определяется как импульс, канонически сопряженный с $\varphi(x)$:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0(x)}. \quad (7.214)$$

Гамильтониан, по определению, равен

$$\begin{aligned} H &= \sum_n p_n(t) \dot{q}_n(t) - L = \\ &= \sum_n \int d^3x \pi(x, t) \zeta_n(x) \int d^3x' \varphi_0(x', t) \zeta_n(x') - L = \\ &= \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0} \varphi_0 - \mathcal{L} \right) = \int d^3x \mathcal{H}, \end{aligned} \quad (7.215)$$

где $\mathcal{H} = \pi \varphi_0 - \mathcal{L} = \mathcal{H}(\varphi, \varphi_i, \pi)$ есть плотность гамильтониана. Гамильтониан H можно также записать в виде

$$H = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0} \varphi_0 - \mathcal{L} g^{00} \right) = \int d^3x T^{00}, \quad (7.216)$$

где T^{00} является $(0, 0)$ -компонентой канонического тензора энергии-импульса, определяемого формулой

$$T^{\mu\nu} = \varphi^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu}. \quad (7.217)$$

Если \mathcal{L} явно не зависит от пространственно-временных координат x , тогда в силу уравнения движения (7.205)

$$\begin{aligned} \frac{dT^{\mu\nu}}{dx^\nu} &= \varphi^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} \right) + \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} - \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} = \\ &= \varphi^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \varphi^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x^\lambda} \right) = \\ &= \varphi^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.218)^1$$

Проинтегрировав равенство $d_\nu T^{\mu\nu} = 0$ по всему трехмерному пространству, получим

$$\frac{d}{dx^0} \int d^3x T^{\mu 0} + \int d^3x \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx^i} T^{\mu i} = 0. \quad (7.219)$$

¹⁾ Если \mathcal{L} явно зависит от координат x , то равенство (7.218) принимает вид $d_\nu T^{\mu\nu} = -\partial^\mu \mathcal{L}$. Явная зависимость \mathcal{L} от x соответствует наличию заданных внешних полей, с которыми взаимодействует поле φ .

Если $T^{\mu i}$ равны нулю на больших расстояниях (что будет иметь место, если поля обладают этим свойством), тогда второй член в (7.219) равен нулю, так как, согласно теореме Гаусса, его можно превратить в интеграл по бесконечно удаленной поверхности. Следовательно, мы получаем четыре закона сохранения

$$\frac{d}{dx^0} \int d^3x T^{\mu 0} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \quad (7.220)$$

которые утверждают, что величины $\int d^3x T^{\mu 0}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) являются интегралами движения. Равенство (7.220) при $\mu = 0$ соответствует сохранению энергии, т. е. $d_0 H = 0$, а при $\mu = 1, 2, 3$ — сохранению трех величин:

$$P^k = \int d^3x T^{k0} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \varphi^k = \int d^3x \pi(x) \varphi^k(x), \quad (7.221)$$

которые после симметризации имеют вид

$$P^k = \frac{1}{2} \int d^3x \{ \pi(x) \varphi^k(x) + \varphi^k(x) \pi(x) \}. \quad (7.222)$$

Величины P^k можно отождествить с тремя компонентами полного импульса поля.

По аналогии с (7.215) можно определить плотность импульса поля, как T^{k0} . Плотность момента количества движения поля (относительно начала координат) естественно определить выражением

$$m_{k10} = x_k T_{10} - x_1 T_{k0}, \quad (7.223)$$

так что полный момент количества движения есть $M_{kl} = \int d^3x m_{k10}$. Чтобы величина M_{kl} являлась пространственной частью сохраняющегося тензора момента $M_{\mu\nu}$

$$M_{\mu\nu} = \int d^3x (x_\mu T_{\nu 0} - x_\nu T_{\mu 0}), \quad (7.224)$$

должно выполняться условие

$$\partial^\rho m_{\mu\nu\rho} = 0, \quad (7.225a)$$

$$m_{\mu\nu\rho} = x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho}, \quad (7.225b)$$

ибо в этом случае $\int d^3x m_{\mu\nu\rho}$ сохраняется, что можно показать так же, как и при выводе равенства (7.220). Однако в силу (7.225b)

$$\partial^\rho m_{\mu\nu\rho} = \partial^\rho (x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho}) = T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu}. \quad (7.226)$$

Таким образом, $M_{\mu\nu}$ будет сохраняющимся тензором, если $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, т. е. если тензор энергии-импульса симметричен. А симметрия последнего, вообще говоря, не следует из определения (7.217). Однако тензор энергии-импульса всегда можно симметризовать [42, 43], используя тот факт, что к лагранжиану всегда можно добавить четырехмерную дивергенцию, не меняя физического содержания теории. Таким образом, хотя плотность энергии, например, и не определяется однозначно, полная энергия поля есть однозначно определенная величина. Три пространственно-пространственные (k, l)-компоненты тензора момента являются компонентами момента количества движения системы, а три простран-

ственно-временные $(0, k)$ -компоненты связаны с координатами центра масс системы [562—564, 652].

Для рассматриваемого поля со спином, равным 0, плотность лагранжиана при отсутствии взаимодействия можно взять в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\mu^2 \varphi^2 - g_{\rho\nu} \partial^\rho \varphi \cdot \partial^\nu \varphi) = -\frac{1}{2} (\mu^2 \varphi^2 - \varphi_\nu \varphi^\nu). \quad (7.227)$$

Чтобы это выражение было допустимой лагранжевой плотностью, нужно, чтобы оно приводило к правильному уравнению поля: $(\square + \mu^2) \varphi = 0$. Это легко проверить:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\lambda} = -\mu^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \varphi_\lambda = -\left(\mu^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x^\lambda}\right) \varphi = -(\square + \mu^2) \varphi. \quad (7.228)$$

Отметим, что плотность лагранжиана является скаляром относительно собственных преобразований Лоренца (в действительности относительно любых преобразований Лоренца, ибо плотность квадратична по φ).

Доказательство: Действительно, при лоренцевом преобразовании $x \rightarrow x' = \Lambda x + a$, $\varphi \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x)$, поэтому $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$. Импульс, канонически сопряженный с φ (не путать с полным импульсом \mathbf{P}), есть

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0} = \varphi_0(x). \quad (7.229)$$

Соответствующий принятому лагранжиану гамильтониан

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \{ \pi(x) \varphi_0(x) - \mathcal{L} \} = \frac{1}{2} \int \{ \pi^2(x) + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi(x) + \mu^2 \varphi^2(x) \}. \quad (7.230)$$

Полученное выражение является положительно определенным, что и следовало ожидать для плотности энергии. Этим объясняется выбор знака минус в выражении для плотности лагранжиана (7.227). Отметим, что вид гамильтониана совпадает с полученным из нашего рассмотрения теории вторичного квантования. Из (7.217) и (7.227) можно вывести выражение для канонического тензора энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = \varphi^\mu \varphi^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\mu^2 \varphi^2 - \varphi_\lambda \varphi^\lambda). \quad (7.231)$$

Как видно из самой записи, этот тензор симметричен, что связано с тем, что поле Клейна—Гордона не обладает внутренним моментом количества движения, т. е. имеет спин, равный 0. К этому вопросу мы вернемся позже, при общем обсуждении классических теорий поля в § 7.

Чтобы проквантовать классическую теорию поля, наложим квантовые условия:

$$\begin{aligned} [q_n(t), q_m(t)] &= [p_n(t), p_m(t)] = 0, \\ [q_n(t), p_m(t)] &= i\hbar \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (7.232)$$

Умножая эти выражения на $\zeta_n(\mathbf{x})$ и $\zeta_m(\mathbf{x})$, суммируя по n и m и используя полноту системы функций $\{\zeta_m\}$, получим перестановочные соотношения для операторов $\varphi(\mathbf{x})$ и $\pi(\mathbf{x})$, определенных равенствами (7.208) и (7.213), где q_n и p_n рассматриваются теперь как операторы:

$$[\varphi(\mathbf{x}, x^0), \varphi(\mathbf{x}', x^0)] = [\pi(\mathbf{x}, x^0), \pi(\mathbf{x}', x^0)] = 0, \quad (7.233)$$

$$[\varphi(\mathbf{x}, x^0), \pi(\mathbf{x}', x^0)] = [\varphi(\mathbf{x}, x^0), \varphi_0(\mathbf{x}', x^0)] = i\hbar c \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (7.234)$$

(Заметьте, что операторы взяты в один и тот же момент времени!) Таким образом, квантование превращает переменные поля в операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям (7.233), (7.234), которые совпадают с (7.184). Следовательно, мы показали эквивалентность теории вторичного квантования для системы невзаимодействующих частиц и квантования классического поля Клейна — Гордона.

Указанная эквивалентность позволяет интерпретировать выражения для лагранжиана, тензора энергии-импульса, момента количества движения и т. д. как операторные выражения. Чтобы однозначно перейти от классического описания к квантовому (однозначно в смысле порядка некоммутирующих множителей $\pi(x)$ и $\varphi(x)$, ибо в классической теории этот порядок произволен), мы примем, что упомянутые выражения будут записываться в нормальной форме.

Легко вычислить коммутатор H с π и φ ¹⁾. Так, поскольку $\varphi(x, x_0)$ коммутирует с $\varphi(x', x_0)$ и с $\nabla\varphi(x', x_0)$, то

$$\begin{aligned} [\varphi(x), H] &= \frac{1}{2} \int d^3x' [\varphi(x, x_0), \pi^2(x', x_0)] = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x' \{ \pi(x', x_0) [\varphi(x), \pi(x', x_0)] + \\ &\quad + [\varphi(x), \pi(x', x_0)] \pi(x', x_0) \} = \\ &= i\hbar c\pi(x). \end{aligned} \quad (7.235)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} [\pi(x), H] &= \frac{1}{2} \int d^3x' [\pi(x), \nabla\varphi(x', x_0) \cdot \nabla\varphi(x', x_0) + \mu^2\varphi^2(x', x_0)] = \\ &= i\hbar c (\nabla^2\varphi(x) - \mu^2\varphi(x)). \end{aligned} \quad (7.236)$$

Это согласуется с определением H , как оператора смещения во времени

$$i\hbar c \partial_0 F(x) = [F(x), H], \quad (7.237)$$

так как равенства (7.235) и (7.236) утверждают, что

$$\varphi_0(x) = \pi(x) \quad (7.238a)$$

и

$$\begin{aligned} \partial_0\pi(x) &= \nabla^2\varphi(x) - \mu^2\varphi(x) = \\ &= \partial_0^2\varphi(x) \end{aligned} \quad (7.238b)$$

и эквивалентны уравнениям движения. Наоборот, если H является оператором смещения во времени [т. е. справедливо равенство (7.237)], то требование, чтобы уравнения, полученные вычислением $[\varphi(x), H]$ и $[\partial_0\varphi, H]$, согласовывались с уравнениями движения, вытекающими из вариационного принципа, предполагает, что должны иметь место канонические перестановочные соотношения. Перестановочные соотношения можно рассматривать как требование согласованности для канонического формализма. Однако нужно подчеркнуть, что канонический формализм допу-

¹⁾ При вычислении $[H, \varphi]$ и $[H, \pi]$ мы пренебрегли тем, что гамильтониан должен быть взят в нормальной форме, поскольку разность между гамильтонианом в нормальной форме и неупорядоченным гамильтонианом для случая рассматриваемого квадратичного гамильтониана является c -числом и коммутирует с φ и π .

скает как соотношения коммутации, так и антикоммутации. Действительно, можно проверить, что если перестановочные соотношения (7.233), (7.234) заменить соотношениями антикоммутации, то последние тоже будут обеспечивать эквивалентность (7.237) и уравнений движения. Правильный выбор перестановочных соотношений для рассматриваемой системы должен быть сделан на основании некоторых физических принципов¹⁾.

Рассмотрим далее соотношения коммутации P_k с $\pi(x)$ и $\varphi(x)$:

$$[\varphi(x), P_k] = \frac{1}{2} \int d^3x' [\varphi(x), \pi(x') \varphi_k(x') + \varphi_k(x') \pi(x')]_{x'_0=x_0} = i\hbar c \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^k}, \quad (7.239a)$$

$$[\pi(x), P_k] = i\hbar c \frac{\partial \pi(x)}{\partial x^k}. \quad (7.239b)$$

Из этих соотношений следует, что для произвольного оператора $F = F(\varphi, \pi)$

$$i\hbar c \frac{\partial F}{\partial x^k} = [F, P_k], \quad (7.240)$$

так что P_k является генератором бесконечно малых пространственных сдвигов. В релятивистских обозначениях равенства (7.237) и (7.240) имеют вид

$$i\hbar c \partial_\mu F = [F, P_\mu]. \quad (7.241)$$

§ 5. Квантованное поле

Как было показано, формулировку с помощью вторичного квантования можно рассматривать как квантованную теорию поля. До сих пор мы имели дело с описанием посредством амплитуд $\langle k_1, k_2 \dots k_n | \Psi \rangle$ или $\langle x_1, \dots x_n | \Psi \rangle$, которые соответствуют вероятности найти данное число частиц с определенными импульсами или координатами. Но мы могли бы также интересоваться вероятностью найти поле, имеющее в момент времени x_0 конфигурацию $\chi(x)$, где $\chi(x)$ — некоторая заданная функция x . В случае нейтрального эрмитова поля, которое мы рассматриваем, на этот вопрос можно получить ответ, если иметь собственные функции $|\chi(x)\rangle$ оператора поля $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) |\chi(x)\rangle = \chi(x) |\chi(x)\rangle. \quad (7.242)$$

Тогда $\langle \chi(x) | \Psi(t) \rangle$ является амплитудой вероятности найти наше поле, характеризуемое вектором состояния $|\Psi(t)\rangle$, имеющим в момент времени t конфигурацию $\chi(x)$. (Для простоты мы используем шредингеровскую картину.) Амплитуда $\langle \chi(x) | \Psi \rangle = \Psi\{\chi\}$ является функционалом от χ .

Введем теперь понятие функциональной производной функционала $F\{\chi\}$. Определим

$$\frac{\delta F\{\chi\}}{\delta \chi(x)} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [F\{\chi(y) + \varepsilon \delta_x(y-x)\} - F\{\chi(y)\}], \quad (7.243)$$

где δ_x — любая функция с хорошим поведением, которая при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в δ -функцию Дирака. Переходить к пределу нужно в указанном порядке.

Например, если

$$F\{\chi\} = \int d^3x f(x) \chi(x), \quad (7.244)$$

¹⁾ Этот вопрос обсуждается в гл. 8 и 18. — Прим. ред.

то

$$\frac{\delta F\{\chi\}}{\delta \chi(\mathbf{x}')} = f(\mathbf{x}'). \quad (7.245)$$

По другому можно написать:

$$\delta F\{\chi\} = \int \frac{\delta F\{\chi\}}{\delta \chi(\mathbf{x})} \delta \chi(\mathbf{x}) d^3x. \quad (7.246)$$

Например, поскольку

$$\delta \chi(\mathbf{x}) = \int \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta \chi(\mathbf{x}') d^3x', \quad (7.247)$$

то находим

$$\frac{\delta \chi(\mathbf{x})}{\delta \chi(\mathbf{x}')} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (7.248)$$

Рассматривая разность между

$$\frac{\delta}{\delta \chi(\mathbf{x})} [\chi(\mathbf{x}') F\{\chi\}] = \left[\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{\delta}{\delta \chi(\mathbf{x})} \right] F\{\chi\} \quad (7.249)$$

и $\chi(\mathbf{x}') \frac{\delta}{\delta \chi(\mathbf{x})} F\{\chi\}$, получаем

$$\left[\chi(\mathbf{x}), -i \frac{\delta}{\delta \chi(\mathbf{x}')} \right] = +i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (7.250)$$

Этот результат дает возможность предположить, что в представлении, в котором оператор $\phi(\mathbf{x})$ диагонален, $\pi(\mathbf{x}')$ имеет вид $-i\hbar \delta / \delta \chi(\mathbf{x}')$. Доказательство аналогично изложенному в гл. 1 для операторов p и q , которые удовлетворяют соотношению $[q, p] = i\hbar$. Поэтому имеем

$$\langle \chi(\mathbf{x}) | \pi(\mathbf{x}') | \Psi \rangle = -i\hbar \frac{\delta}{\delta \chi(\mathbf{x}')} \langle \chi(\mathbf{x}) | \Psi \rangle. \quad (7.251)$$

Получим далее явную зависимость состояния без частиц $|0\rangle$ от $\chi(\mathbf{x})$. Как мы видели, состояние $|0\rangle$ характеризуется тем, что $a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$ при всех \mathbf{k} . Из (7.188а) находим, что вакуум можно характеризовать также соотношением

$$\int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\omega_{\mathbf{k}} \phi(\mathbf{x}) + i\pi(\mathbf{x})) |0\rangle = 0 \quad \text{при всех } \mathbf{k} \quad (7.252)$$

или

$$\omega_{\mathbf{k}} \phi(\mathbf{x}) + i\pi(\mathbf{x}) |0\rangle = 0 \quad \text{при всех } \mathbf{x}. \quad (7.253)$$

Здесь $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mu^2 - \nabla^2}$. Если это равенство скалярно умножить на вектор $\langle \chi(\mathbf{x}') |$, то получим равенство

$$\left\{ \omega_{\mathbf{k}} \chi(\mathbf{x}) + \hbar \frac{\delta}{\delta \chi(\mathbf{x})} \right\} \langle \chi(\mathbf{x}') | 0 \rangle = 0, \quad (7.254)$$

которое можно рассматривать как уравнение с функциональной производной для амплитуды $\langle \chi(\mathbf{x}') | 0 \rangle$.

Решение уравнения (7.254) есть

$$\Phi_0\{\chi\} = \langle \chi(\mathbf{x}) | 0 \rangle = \lambda \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \int \chi(\mathbf{x}') \sqrt{\mu^2 - \nabla_{\mathbf{x}}^2} \chi(\mathbf{x}') d^3x' \right\}, \quad (7.255)$$

где λ — некоторая постоянная, определяющаяся из условия нормировки $\langle 0 | 0 \rangle = 1$. Метод функционалов можно распространить на теорию взаимодействующих полей. Он тесно связан с фейнмановской формулировкой квантовой теории поля, в которой амплитуда процесса выражается в виде

суммы по классическим путям. Изложение и приложения метода функционалов к задачам теории поля читатель найдет в статьях Фока [264], Симанзика [760] и лекциях Швингера [722], а также в обзорной статье Новожилова и Тулуба [590].

§ 6. Заряженное скалярное поле

Рассмотрим теперь обобщение формализма вторичного квантования и формализма теории поля на случай системы, состоящей из противоположно заряженных частиц, имеющих спин, равный 0, и массу μ . Состояние системы будем характеризовать числом положительно и отрицательно заряженных частиц, их импульсами и энергиями. Пусть базисный вектор $|p_1 p_2 \dots p_m; q_1, \dots, q_n\rangle$ соответствует наличию m положительно заряженных частиц с зарядом $+e$, импульсами p_1, p_2, \dots, p_m , энергиями $\omega(p_1), \omega(p_2), \dots, \omega(p_m)$ и n отрицательно заряженных частиц с зарядом $-e$, импульсами q_1, q_2, \dots, q_n , энергиями $\omega(q_1), \omega(q_2), \dots, \omega(q_n)$. Так как противоположно заряженные частицы различимы, то этот вектор будет симметричным лишь при перестановках p_i или q_j в отдельности. Частицы с зарядом $+e$ будем называть «частицами», а с зарядом $-e$ — «античастицами».

Обозначим через a_k, a_k^* операторы уничтожения и рождения положительно заряженных частиц с импульсом k , а через b_k, b_k^* — соответствующие операторы для отрицательно заряженных частиц. Эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$[a_k, a_{k'}^*] = k_0 \delta(k - k'), \quad (7.256)$$

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^*, a_{k'}^*] = 0,$$

$$[b_k, b_{k'}^*] = k_0 \delta(k - k'), \quad (7.257)$$

$$[b_k, b_{k'}] = [b_k^*, b_{k'}^*] = 0,$$

где $k_0 = +\omega_k$. Поскольку операторы a и b относятся к различным степеням свободы нашей системы, примем, что они коммутируют друг с другом:

$$[a_k, b_{k'}^*] = [a_k, b_{k'}] = 0, \quad (7.258a)$$

$$[a_k^*, b_{k'}] = [a_k^*, b_{k'}^*] = 0. \quad (7.258b)$$

Базисные векторы, выраженные через операторы рождения, имеют вид

$$|p_1, p_2, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n! m!}} a_{p_1}^* \dots a_{p_m}^* b_{q_1}^* \dots b_{q_n}^* |0\rangle, \quad (7.259)$$

где состояние без частиц $|0\rangle$ обладает тем свойством, что

$$b_k |0\rangle = a_k |0\rangle = 0 \text{ при всех } k. \quad (7.260)$$

Операторы числа положительных и отрицательных частиц, N_+ и N_- , соответственно определяются выражениями

$$N_+ = \int_+ \frac{d^3k}{k_0} a_k^* a_k \quad (7.261a)$$

и

$$N_- = \int_+ \frac{d^3k}{k_0} b_k^* b_k. \quad (7.261b) \quad 1)$$

Уже знакомым способом, используя перестановочные соотношения и свойство вакуума (7.260), получаем

$$N_+ |p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n\rangle = m |p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n\rangle, \quad (7.262a)$$

$$N_- |p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n\rangle = n |p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n\rangle. \quad (7.262b)$$

Соотношение полноты для базисных векторов есть

$$\begin{aligned} I = |0\rangle\langle 0| + & \int \frac{d^3p}{p_0} |p\rangle\langle p| + \int \frac{d^3q}{q_0} |q\rangle\langle q| + \dots + \\ & + \int \frac{d^3p_1}{p_{10}} \dots \int \frac{d^3p_m}{p_{m0}} \int \frac{d^3q_1}{q_{10}} \dots \int \frac{d^3q_n}{q_{n0}} \times \\ & \times |p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n\rangle\langle p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n| + \dots \end{aligned} \quad (7.263)$$

Можно получить разложение произвольного вектора $|\Phi\rangle$ по базисным векторам, если применить к этому вектору соотношение полноты. Фоковская амплитуда $\langle p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n | \Phi \rangle$ соответствует вероятности найти m положительных мезонов с импульсами p_1, \dots, p_m и n отрицательных мезонов с импульсами q_1, \dots, q_n . Представления операторов a, a^* и b, b^* в пространстве Фока являются тривиальными обобщениями представлений, рассмотренных ранее для случая скалярного поля, и мы не будем их здесь воспроизводить.

В теории существует наблюдаемая, соответствующая полному заряду системы, которая представляется эрмитовым оператором

$$\begin{aligned} Q = e(N_+ - N_-) = Q^* = \\ = e \int \frac{d^3k}{k_0} (a_k^* a_k - b_k^* b_k). \end{aligned} \quad (7.264)$$

Перестановочные соотношения Q с операторами a и b суть

$$[Q, a_k] = -ea_k, \quad [Q, a_k^*] = ea_k^*, \quad (7.265a)$$

$$[Q, b_k] = eb_k, \quad [Q, b_k^*] = -eb_k^*. \quad (7.265b)$$

Операторы полной энергии и полного импульса даются выражениями:

$$H = \int \frac{d^3k}{k_0} \omega_k (a_k^* a_k + b_k^* b_k) \quad (7.266)$$

и

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3k}{k_0} \mathbf{k} (a_k^* a_k + b_k^* b_k), \quad (7.267)$$

или, короче,

$$P_\mu = \int \frac{d^3k}{k_0} k_\mu (a_k^* a_k + b_k^* b_k). \quad (7.268)$$

Введем далее операторы

$$\varphi^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_{+} \frac{d^3k}{k_0} b_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x}, \quad (7.269a)$$

$$\varphi^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_{+} \frac{d^3k}{k_0} a_{\mathbf{k}}^* e^{ik \cdot x}, \quad (7.269б)$$

$$[\varphi^{(+)}(x)]^* = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_{+} \frac{d^3k}{k_0} b_{\mathbf{k}}^* e^{ik \cdot x}, \quad (7.269в)$$

$$[\varphi^{(-)}(x)]^* = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_{+} \frac{d^3k}{k_0} a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x}, \quad (7.269г)$$

которые удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона, поскольку $k_0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$. Комбинируя введенные операторы, определим операторы поля

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_{+} \frac{d^3k}{k_0} (b_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + a_{\mathbf{k}}^* e^{+ik \cdot x}) \quad (7.270)$$

и

$$\varphi^*(x) = [\varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x)]^* = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_{+} \frac{d^3k}{k_0} (b_{\mathbf{k}}^* e^{ik \cdot x} + a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x}), \quad (7.271)$$

подчиняющиеся уравнениям движения:

$$(\square + \mu^2) \varphi(x) = 0 \quad (7.272a)$$

и

$$(\square + \mu^2) \varphi^*(x) = 0. \quad (2.272б)$$

Необходимо отметить, что оператор $\varphi(x)$ *неэрмитов*. Используя установленные ранее свойства $\Delta^{(\pm)}$ -функций и то, что φ , φ^* удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона, можно получить положительно- и отрицательно-частотные части операторов φ , φ^* с помощью соотношений

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \int_{\sigma} d\sigma^{\mu}(x') \{ \partial'_{\mu} \Delta^{(\pm)}(x-x') \cdot \varphi(x') - \Delta^{(\pm)}(x-x') \partial'_{\mu} \varphi(x') \} \quad (7.273a)$$

и

$$\varphi^{*(\pm)}(x) = \int_{\sigma} d\sigma^{\mu}(x') \{ \partial'_{\mu} \Delta^{(\pm)}(x-x') \cdot \varphi^*(x') - \Delta^{(\pm)}(x-x') \partial'_{\mu} \varphi^*(x') \}. \quad (7.273б)$$

Сравнивая (7.273) с равенствами (7.269a) и (7.269б), заключаем, что

$$\varphi^{*(+)}(x) = [\varphi^{(-)}(x)]^* \quad (7.274a)$$

и

$$\varphi^{*(-)}(x) = [\varphi^{(+)}(x)]^*. \quad (7.274б)$$

Базисные векторы в конфигурационном пространстве имеют вид

$$\begin{aligned} |x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n\rangle = \\ = \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \varphi^{(-)}(x_1) \dots \varphi^{(-)}(x_m) \varphi^{*(-)}(y_1) \dots \varphi^{*(-)}(y_n) |0\rangle. \end{aligned} \quad (7.275)$$

Если имеется $x_{10} = \dots = x_{m0} = y_{10} = \dots = y_{n0} = \tau$, то амплитуда $\langle x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n | \Phi \rangle$ соответствует вероятности найти m положительных и n отрицательных мезонов в момент времени τ .

Операторы φ и φ^* были получены комбинацией операторов a и b и поэтому перестановочные соотношения для φ и φ^* с оператором полного заряда имеют простой вид¹⁾. Ввиду равенств (7.270) и (7.265)

$$[Q, \varphi(x)] = +e\varphi(x), \quad (7.276)$$

так что $\varphi(x)$ порождает заряд e .

Доказательство: Пусть $|Q'\rangle$ является собственным состоянием оператора полного заряда Q с собственным значением Q' . Тогда $\varphi(x)|Q'\rangle$ является собственным состоянием Q с собственным значением $Q' + e$:

$$Q\{\varphi(x)|Q'\rangle\} = \varphi(x)Q|Q'\rangle + [Q, \varphi(x)]|Q'\rangle = (Q' + e)\{\varphi(x)|Q'\rangle\}. \quad (7.277)$$

Аналогично,

$$[Q, \varphi^*(x)] = -e\varphi^*(x), \quad (7.278)$$

и, следовательно, $\varphi^*(x)$ является оператором уничтожения заряда e :

$$Q\varphi^*(x)|Q'\rangle = \varphi^*(x)Q|Q'\rangle + [Q, \varphi^*(x)]|Q'\rangle = (Q' - e)\varphi^*(x)|Q'\rangle. \quad (7.279)$$

Ясно, что оператор, уничтожающий заряд e , должен быть построен из операторов a и b^* , как и показывает равенство (7.271). Действительно, полный заряд системы можно уменьшить, либо уничтожая заряд $+e$, либо добавляя заряд $-e$.

Перестановочные соотношения для введенных операторов легко получить, используя выражения (7.270), (7.271) и перестановочные соотношения (7.256) – (7.258):

$$[\varphi(x), \varphi^*(x')] = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k_0} (e^{-ik \cdot (x-x')} - e^{ik \cdot (x-x')}) = i\Delta(x-x'), \quad (7.280a)$$

$$[\varphi^*(x), \varphi(x')] = i\Delta(x-x'), \quad (7.280б)$$

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = [\varphi^*(x), \varphi^*(x')] = 0. \quad (7.280в)$$

Наблюдаемые N_+ и N_- можно выразить через операторы $\varphi^{(\pm)}$, $\varphi^{*(\pm)}$:

$$N_- = i \int_{\sigma} d\sigma^\mu(x) \{\varphi^{*(-)}(x) \partial_\mu \varphi^{(+)}(x) - \partial_\mu \varphi^{*(-)}(x) \cdot \varphi^{(+)}(x)\}, \quad (7.281a)$$

$$N_+ = i \int_{\sigma} d\sigma^\mu(x) \{\varphi^{(-)}(x) \partial_\mu \varphi^{*(+)}(x) - \partial_\mu \varphi^{(-)}(x) \cdot \varphi^{*(+)}(x)\}. \quad (7.281б)$$

Тогда выражение для полного заряда записывается в виде

$$Q = e(N_+ - N_-) \quad (7.282a)$$

$$= -ie \int_{\sigma} d\sigma^\mu(x) (\varphi^*(x) \partial_\mu \varphi(x) - \partial_\mu \varphi^*(x) \cdot \varphi(x)) :. \quad (7.282б)$$

¹⁾ Оператор $\varphi(x) = \alpha\varphi^{(+)}(x) + \beta\varphi^{(-)}(x)$ будет, разумеется, подчиняться таким же перестановочным соотношениям с Q , как и оператор φ , определенный равенством (7.270). Лоренц-инвариантность перестановочных соотношений для операторов $\varphi(x)$ и $\varphi^*(x)$ требует, чтобы $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1$ [см., например, равенства (7.314) и (7.324)]. Частный выбор фаз, соответствующий равенству (7.270), обсуждается далее в этом параграфе.

Полный заряд Q сохраняется, так как

$$\frac{\delta Q}{\delta \sigma(x)} = 0. \quad (7.283)$$

Проверим, что выражение (7.282б) действительно приводится к виду (7.282а), где N_+ и N_- выражаются согласно равенству (7.281). Используя правила (7.194), (7.195), выпишем нормальное произведение равенства (7.282б):

$$\begin{aligned} Q = -ie \int d\sigma^\mu(x) \{ & (\varphi^{*(-)}(x) \partial_\mu \varphi^{(+)}(x) - \partial_\mu \varphi^{*(-)}(x) \cdot \varphi^{(+)}(x)) - \\ & - (\varphi^{(-)}(x) \partial_\mu \varphi^{*(+)}(x) - \partial_\mu \varphi^{(-)}(x) \cdot \varphi^{*(+)}(x)) + \\ & + (\varphi^{*(-)}(x) \partial_\mu \varphi^{(-)}(x) - \partial_\mu \varphi^{*(-)}(x) \cdot \varphi^{(-)}(x)) + \\ & + (\varphi^{*(+)}(x) \partial_\mu \varphi^{(+)}(x) - \partial_\mu \varphi^{*(+)}(x) \cdot \varphi^{(+)}(x)) \}. \end{aligned} \quad (7.284)$$

Первые два члена соответствуют $e(N_+ - N_-)$. Покажем, что третий и четвертый члены равны нулю в результате интегрирования по σ в силу ортогональности положительно- и отрицательно-частотных решений уравнения Клейна — Гордона. Рассмотрим, к примеру, четвертый член. Поскольку $\varphi^{*(+)}$ и $\varphi^{(+)}$ удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона, то в качестве поверхности σ , по которой проводится интегрирование, можно выбрать плоскость $x^0 = \text{const}$. Подставляя вместо $\varphi^{*(+)}$ и $\varphi^{(+)}$ их выражения (7.269г) и (7.269а), находим

$$\begin{aligned} i \int d\sigma^\mu(x) (\varphi^{*(+)}(x) \partial_\mu \varphi^{(+)}(x) - \partial_\mu \varphi^{*(+)}(x) \cdot \varphi^{(+)}(x)) = \\ = \int d^3x \int_{\mp} \frac{d^3k}{k_0} \int_{\mp} \frac{d^3k'}{k'_0} b_k a_{k'} e^{-i(k_0+k'_0)x_0} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} (k'_0 - k_0) = \\ = 0, \end{aligned} \quad (7.285)$$

пбо интегрирование по \mathbf{x} дает множитель $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$, из-за которого $k_0 = k'_0$. Точно так же показывается, что третий член равен нулю.

В согласии с выражением (7.282б) для полного заряда оператор тока $j_\mu(x)$ можно определить в виде

$$j_\mu(x) = -ie : \varphi^*(x) \partial_\mu \varphi(x) - \partial_\mu \varphi^*(x) \cdot \varphi(x) :. \quad (7.286)$$

В силу уравнений движения (7.272) ток сохраняется, т. е. $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$. Поэтому полный заряд

$$Q = \int_\sigma j^\mu(x) d\sigma_\mu(x) \quad (7.287)$$

не зависит от времени. Как отмечалось выше, оператор тока можно разбить на две части: так называемую «нормальную» часть, которая диагональна в N_\pm -представлении, и «флуктуационную» часть. Последняя состоит из членов, являющихся произведениями двух операторов рождения или двух операторов уничтожения. Наличие таких членов, соответствующих рождению и уничтожению пар, с первого взгляда кажется удивительным. Однако Бор и Розенфельд [70] показали, что эти члены существенны для того, чтобы заряд в объеме V , $\int_V j_0(x) d^3x = Q_V$, действительно соответствовал измеряемому на опыте с использованием классических распределений заряда и тока.

Поучительно вычислить среднее значение плотности заряда $j_0(x)$ в состоянии

$$|y; \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{k_0} a_k^* e^{-ik \cdot y} \sqrt{k_0} |0\rangle = (\psi_y(x), \varphi^{(-)}(x)) |0\rangle, \quad (7.288)$$

соответствующем положительному мезону, локализованному в точке y в момент времени y^0 . Вклад в среднее значение будет давать лишь нормальная часть $j_0(x)$. Флуктуационная часть, действуя на состояние $|y; \rangle$, либо дает нуль (члены $\varphi^{*(+)}\varphi^{(+)}$), либо преобразует его в трехчастичное состояние (члены $\varphi^{*(-)}\varphi^{(-)}$), которое ортогонально одномезонному состоянию $|y; \rangle$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle y; | j_0(x) | y; \rangle &= ie \langle y; | \varphi^{(-)}(x) \partial_0 \varphi^{*(+)}(x) - \partial_0 \varphi^{(-)}(x) \cdot \varphi^{*(+)}(x) | y; \rangle = \\ &= e \left\{ \bar{\psi}_y(x) \frac{\partial}{\partial x^0} \psi_y(x) - \frac{\partial}{\partial x^0} \bar{\Psi}_y(x) \cdot \Psi_y(x) \right\}, \end{aligned} \quad (7.289)$$

и среднее значение не равно нулю при $x \neq y$. Следовательно, рассматриваемые частицы не являются точечными зарядами, а имеют заряд, распределенный по некоторой области, размеры которой порядка комптоновской длины волны частицы ($\hbar/\mu c$).

Чтобы установить связь с процедурой квантования поля, описанной ранее для случая нейтрального поля, заметим, что из перестановочных соотношений (7.280) и свойства Δ -функции (7.168) следует

$$[\partial_0 \varphi(x), \varphi^*(x')]_{x_0=x'_0} = -i\delta^{(3)}(x-x') \quad (7.290a)$$

и

$$[\partial_0 \varphi^*(x), \varphi(x')]_{x_0=x'_0} = -i\delta^{(3)}(x-x'). \quad (7.290b)$$

Поэтому определим импульс, канонически сопряженный с φ , как

$$\pi(x) = \partial_0 \varphi^*(x), \quad (7.291)$$

а импульс, канонически сопряженный с φ^* , как

$$\pi^*(x) = \partial_0 \varphi(x). \quad (7.292)$$

Действуя в полной аналогии со случаем нейтрального поля, можно проверить, что гамильтониан имеет вид

$$H = \int d^3x : \pi^*(x) \pi(x) + \nabla \varphi^*(x) \cdot \nabla \varphi(x) + \mu^2 \varphi^*(x) \varphi(x) : \quad (7.293)$$

и получается из лагранжевой плотности

$$\mathcal{L} = : \partial_\lambda \varphi^*(x) \cdot \partial^\lambda \varphi(x) - \mu^2 \varphi^*(x) \varphi(x) :. \quad (7.294)$$

Выражение для тензора энергии-импульса теперь есть

$$T_{\mu\nu} = : \partial_\mu \varphi^*(x) \partial_\nu \varphi(x) + \partial_\nu \varphi^*(x) \partial_\mu \varphi(x) : - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (7.295)$$

а плотность заряда

$$\rho_1^*(x) = j_0(x) = ie : \varphi^*(x) \pi^*(x) - \varphi(x) \pi(x) :. \quad (7.296)$$

Отметим также, что оператор тока можно записать в виде

$$j^\mu(x) = +ie : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu(x)} \varphi(x) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu^*(x)} \varphi^*(x) :. \quad (7.297)$$

В § 7 мы увидим, что существование тока j^μ является следствием инвариантности лагранжиана относительно калибровочных преобразований:

$$\varphi \rightarrow e^{i\alpha}\varphi, \quad (7.298a)$$

$$\varphi^* \rightarrow e^{-i\alpha}\varphi^*. \quad (7.298b)$$

Мы покажем также, что 4-вектор j^μ действительно играет роль тока и заряда при взаимодействии заряженного скалярного поля с электромагнитным полем. Между прочим, уже из вида выражения (7.297) следует, что для эрмитова поля $\varphi^* = \varphi$ вектор j^μ тождественно равен нулю.

Выше мы кратко описали теорию для комплексного поля φ с точки зрения вторичного квантования. Ее можно получить и квантованием классической теории, лагранжиан которой определяется выражением

$$\mathcal{L} = \partial_\lambda \bar{\varphi} \partial^\lambda \varphi - \mu^2 \bar{\varphi} \varphi. \quad (7.299)$$

Амплитуда поля φ и комплексно сопряженная величина $\bar{\varphi}$ должны рассматриваться как независимые классические переменные поля. Варьирование по φ дает уравнение движения для $\bar{\varphi}$:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu} = (\square + \mu^2) \bar{\varphi}(x) = 0, \quad (7.300a)$$

а варьирование по $\bar{\varphi}$ дает уравнение поля для φ :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\varphi}} = (\square + \mu^2) \varphi(x) = 0. \quad (7.300b)$$

Описанная ранее процедура квантования была сформулирована с помощью действительных полей, которые разлагались по полной совокупности действительных ортонормированных функций. Чтобы применить ту же процедуру в настоящем случае, разобьем φ на действительную и мнимую части:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi^{(1)}(x) + i\varphi^{(2)}(x)) \quad (7.301a)$$

и

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi^{(1)}(x) - i\varphi^{(2)}(x)), \quad (7.301b)$$

где $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ — действительны и будут рассматриваться как динамические переменные. Выражение лагранжиана классической теории через $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (\partial_\rho \varphi^{(j)} \partial^\rho \varphi^{(j)} - \mu^2 \varphi^{(j)} \varphi^{(j)}) \quad (7.302)$$

соответствует двум не взаимодействующим скалярным полям. Импульсы, канонически сопряженные к $\varphi^{(j)}$, равны

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(j)}} = \pi^{(j)}(x) = \varphi_0^{(j)}(x), \quad (7.303)$$

а плотность гамильтониана есть

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}(\nabla \varphi^{(j)}, \varphi^{(j)}, \pi^{(j)}) = \sum_{j=1}^2 \pi^{(j)} \varphi^{(j)} - \mathcal{L} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (\pi^{(j)2}(x) + \nabla \varphi^{(j)}(x) \cdot \nabla \varphi^{(j)}(x) + \mu^2 \varphi^{(j)2}(x)). \end{aligned} \quad (7.304)$$

Теперь можно провести разложение по полной совокупности действительных ортонормированных функций $\zeta_n(\mathbf{x})$, определенных равенствами (7.207а) и (7.207б):

$$\varphi^{(i)}(x) = \sum_n q_n^{(i)}(t) \zeta_n(\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2), \quad (7.305)$$

а лагранжиан $L = \int d^3x \mathcal{L}$ рассматривать как функцию $q_n^{(i)}$ и $\dot{q}_n^{(i)}$. Спряженные с $q_n^{(j)}$ импульсы равны

$$p_n^{(i)}(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n^{(i)}(t)} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_0^{(i)}(x)} \zeta_n(\mathbf{x}) d^3x = \int d^3x \pi^{(i)}(x) \zeta_n(\mathbf{x}). \quad (7.306)$$

Наконец, условия квантования выражаются перестановочными соотношениями:

$$[q_n^{(l)}(t), p_m^{(j)}(t)] = i\delta_{lj}\delta_{nm} \quad (7.307а)$$

и

$$[q_n^{(l)}(t), q_m^{(j)}(t)] = [p_n^{(l)}(t), p_m^{(j)}(t)] = 0, \quad (7.307б)$$

где $p_n^{(l)}$ и $q_n^{(l)}$ — теперь эрмитовы операторы. Одновременные перестановочные соотношения для операторов $\pi^{(l)}$ и $\varphi^{(l)}$ имеют вид

$$[\pi^{(l)}(x), \varphi^{(j)}(x')]_{x_0=x'_0} = -i\delta_{lj}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \quad (7.308)$$

причем все остальные одновременные коммутаторы равны нулю. Для неэрмитовых операторов π , π^* и φ , φ^* , определенных равенствами

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi^{(1)}(x) + i\varphi^{(2)}(x)), \quad (7.309а)$$

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi^{(1)}(x) - i\varphi^{(2)}(x)), \quad (7.309б)$$

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0^{(1)}} - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0^{(2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_0^{(1)}(x) - i\varphi_0^{(2)}(x)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi^{(1)}(x) - i\pi^{(2)}(x)), \end{aligned} \quad (7.309в)$$

$$\begin{aligned} \pi^*(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0^{(1)}} + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0^{(2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_0^{(1)}(x) + i\varphi_0^{(2)}(x)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi^{(1)}(x) + i\pi^{(2)}(x)), \end{aligned} \quad (7.309г)$$

перестановочные соотношения

$$[\varphi(x), \pi(x')]_{x_0=x'_0} = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \quad (7.310а)$$

и

$$[\varphi^*(x), \pi^*(x')]_{x_0=x'_0} = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \quad (7.310б)$$

согласуются с установленными ранее перестановочными соотношениями.

Законы преобразования операторов поля при собственных преобразованиях Лоренца следующие:

$$U(a, \Lambda) \varphi(x) U(a, \Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda x + a), \quad (7.311а)$$

$$U(a, \Lambda) \varphi^*(x) U(a, \Lambda)^{-1} = \varphi^*(\Lambda x + a). \quad (7.311б)$$

Потребуем, чтобы при пространственном отражении частицы переходили в частицы, а знак их импульса изменялся согласно классическому толкованию пространственного отражения. Поэтому при отражении $\varphi(x)$

и $\varphi^*(x)$ преобразуются согласно правилам

$$U(i_s)\varphi(x)U(i_s)^{-1} = \eta_P\varphi(i_sx) = \eta_P\varphi(x_0, -\mathbf{x}) \quad (7.312a)$$

и

$$U(i_s)\varphi^*(x)U(i_s)^{-1} = \bar{\eta}_P\varphi^*(i_sx) = \bar{\eta}_P\varphi^*(x_0, -\mathbf{x}), \quad (7.312b)$$

где $U(i_s)$ — линейный унитарный оператор, а η_P — фазовый множитель. Заметим, что операция $U(i_s)$ переводит части операторов поля с положительной (отрицательной) частотой в части с тем же знаком частоты [т. е. $U(i_s)$ переводит $\varphi^{(\pm)}(x)$ в $\eta_P\varphi^{(\pm)}(i_sx)$, что можно проверить, если действовать оператором проектирования $\int d\sigma^\mu(x)\Delta^{(\pm)}(x'-x)\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ на обе части равенства (7.312)]. Вакуум можно характеризовать равенством $\varphi^{(+)}(x)|0\rangle = \varphi^{(+)}(x)|0\rangle = 0$. Отсюда и из упомянутого свойства $U(i_s)$ следует, что можно постулировать инвариантность вакуума относительно $U(i_s)$:

$$U(i_s)|0\rangle = |0\rangle, \quad (7.313)$$

что делает определение $U(i_s)$ однозначным. Далее, для того чтобы лагранжиан был инвариантным, т. е. $U(i_s)\mathcal{L}(x)U(i_s)^{-1} = \mathcal{L}(i_sx)$, $|\eta_P|^2$ должно быть равно $+1$. Можно аргументировать и по-другому. Если операция $U(i_s)$ должна отображать операторную алгебру φ, φ^* (которая определяется уравнениями поля и перестановочными соотношениями) саму на себя, то эта операция должна сохранить неизменными определяющие соотношения, т. е. уравнения поля и перестановочные соотношения. Чтобы последние оставались инвариантными, $|\eta_P|^2$ должно быть равно $+1$, так как

$$\begin{aligned} i\Delta(x-x') &= U(i_s)[\varphi(x), \varphi^*(x')]U(i_s)^{-1} = |\eta_P|^2[\varphi(i_sx), \varphi^*(i_sx')] = \\ &= i|\eta_P|^2\Delta(i_s(x-x')) = i|\eta_P|^2\Delta(x-x'). \end{aligned} \quad (7.314)$$

Мы будем говорить, что теория инвариантна относительно пространственного отражения, если можно выбрать фазовый множитель η_P так, чтобы операция отражения при выбранных фазах коммутировала с гамильтонианом

$$U(i_s)\mathcal{H}(x)U(i_s)^{-1} = \mathcal{H}(i_sx) \quad (7.315)$$

и сохраняла неизменными определяющие соотношения, т. е. перестановочные соотношения. Это эквивалентно утверждению, что не существует такого предсказания теории, которое дало бы возможность отличить правое от левого. В рассматриваемой теории, где вырожденные одночастичные состояния полностью определяются спином (равным 0) и зарядом (плюс для частицы и минус для античастицы), можно выбрать $\eta_P = \pm 1$. Фаза $\eta_P = +1$ соответствует случаю «скалярных» частиц, а $\eta_P = -1$ — случаю «псевдоскалярных» частиц. Далее мы покажем, что бозе-поля характеризуются тем, что частицы и античастицы имеют одинаковую четность. Для этого введем разложение операторов поля по полному набору одночастичных состояний с определенной энергией и моментом количества движения [682]. Разложим $\varphi(x)$ по решениям $\zeta_s(x)$ уравнения $(\nabla^2 + k^2)\zeta_s = 0$, соответствующим определенной четности и моменту количества движения:

$$\zeta_s(\mathbf{x}) = j_l(|\mathbf{k}|r)Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (r = |\mathbf{x}|). \quad (7.316)$$

Здесь Y_l^m — сферические функции, выбранные так, что $\overline{Y_l^m} = (-1)^m Y_l^{-m}$, а $j_l(|\mathbf{k}|r)$ — сферические функции Бесселя, которые везде регулярны.

Предполагается, что функция ζ_s равна нулю на поверхности достаточно большой сферы с радиусом R (т. е. такой, что $|k|R \gg 1$). Это условие ведет к тому, что значения $|k|$ дискретны. Примем, что функции j_l нормированы согласно условию $(2/R) \int_0^R (|k|r)^2 j_l^2(|k|r) dr = 1$. Тогда разложение оператора $\varphi(x)$ имеет вид¹⁾

$$\varphi(x) = \sum_{|k|, l, m} \{a(|k|, l, m) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega_k t} + b^*(|k|, l, m) \bar{Y}_l^m(\theta, \varphi) e^{i\omega_k t}\} |k| \sqrt{\frac{2}{R}} j_l(|k|r). \quad (7.317)$$

Оператор $a^*(|k|, l, m)$ есть оператор рождения положительно заряженной частицы с энергией $\omega_k = \sqrt{k^2 + \mu^2}$, полным (орбитальным) моментом $l(l+1)\hbar^2$ и его третьей компонентой $m\hbar$. Оператор $b^*(|k|, l, m)$ — аналогичный оператор для отрицательно заряженной частицы. Можно проверить, что гамильтониан H и оператор полного момента количества движения $M = \int d^3x [\mathbf{x} \times \mathbf{G}]$ (\mathbf{G} — оператор плотности импульса, $G_i = T_{0i}$) просто выражаются через $a(|k|, l, m)$, $b(|k|, l, m)$ и сопряженные им операторы и что H , M^2 и M_3 в действительности диагональны в представлении, в котором диагональны операторы числа частиц $N_{|k|lm}^+ = a_{|k|lm}^* a_{|k|lm}$ и $N_{|k|lm}^- = b_{|k|lm}^* b_{|k|lm}$. Можно получить связь операторов рождения для состояний с определенным импульсом с операторами рождения для состояний с определенным моментом количества движения, если сравнить (7.269) и (7.317). Например,

$$a^*(\mathbf{k}) = \frac{\omega_k}{|k|} \sqrt{\frac{2R}{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l \bar{Y}_l^m(\mathbf{k}) a^*(|k|, l, m). \quad (7.318)$$

При отражениях

$$\begin{aligned} U(i_s) \varphi(x) U(i_s)^{-1} &= \\ &= \sum_{|k|lm} \{U(i_s) a(|k|, l, m) U(i_s)^{-1} Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega_k t} + \\ &+ U(i_s) b^*(|k|, l, m) U(i_s)^{-1} \bar{Y}_l^m(\theta, \varphi) e^{i\omega_k t}\} |k| \sqrt{\frac{2}{R}} j_l(|k|r) = \\ &= \eta_P \varphi(i_s x) = \eta_P \sum_{|k|lm} \{a(|k|, l, m) (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega_k t} + \\ &+ b^*(|k|, l, m) (-1)^l \bar{Y}_l^m(\theta, \varphi) e^{i\omega_k t}\} |k| \sqrt{\frac{2}{R}} j_l(|k|r). \end{aligned} \quad (7.319)$$

Используя ортонормированность Y_l^m и $j_l(|k|r)$, имеем

$$U(i_s) a_{|k|lm} U(i_s)^{-1} = \eta_P (-1)^l a_{|k|lm} \quad (7.320a)$$

и

$$U(i_s) b_{|k|lm} U(i_s)^{-1} = \eta_P (-1)^l b_{|k|lm}. \quad (7.320b)$$

¹⁾ Отметим, что ранее этот оператор автор обозначал через φ^* [см. (7.271)]. — Прим. ред.

Таким образом, свойства одночастичного состояния $a^*(|k\rangle, l, m)|0\rangle$, связанного с псевдоскалярным полем ($\eta_P = -1$), таковы, что отраженное состояние содержит, помимо множителя, связанного с орбитальным движением, дополнительный знак минус, указывающий на отрицательную «внутреннюю» четность. Подобным образом состояние одной античастицы $b^*(|k\rangle, lm)|0\rangle$ при отражении приобретает множитель $\eta_P(-1)^l$, так что частица и античастица имеют одинаковую внутреннюю четность.

Операция слабого, или вигнеровского, обращения времени (операция обращения движения по терминологии Людерса [517, 518]) определяется с помощью антиунитарного оператора $U(i_t)$, причем

$$U(i_t)\varphi(x)U(i_t)^{-1} = \eta_T\varphi(i_t x), \quad (7.321a)$$

$$U(i_t)\varphi^*(x)U(i_t)^{-1} = \bar{\eta}_T\varphi^*(i_t x), \quad (7.321б)$$

$$U(i_t)^2 = 1. \quad (7.321в)$$

Оператор $U(i_t)$ должен быть антиунитарным, чтобы сохранить инвариантность перестановочных соотношений. Действительно, предположим, что обращение времени определяется с помощью унитарного оператора $\mathcal{V}(i_t)$ с перечисленными выше свойствами. Тогда перестановочные соотношения преобразовывались бы следующим образом:

$$\begin{aligned} i\Delta(x-x') &= \mathcal{V}(i_t)[\varphi(x), \varphi^*(x')]\mathcal{V}(i_t)^{-1} = \\ &= |\eta_T|^2[\varphi(i_t x), \varphi^*(i_t x')] = i\Delta(i_t(x-x'))|\eta_T|^2 = \\ &= -i|\eta_T|^2\Delta(x-x'), \end{aligned} \quad (7.322)$$

что ведет к противоречию, так как нельзя совместить первую и третью строку равенства (7.322). С другой стороны, если $U(i_t)$ — антиунитарный оператор, то

$$U(i_t)iU(i_t)^{-1} = -i. \quad (7.323)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} U(i_t)[\varphi(x), \varphi^*(x')]\mathcal{V}(i_t)^{-1} &= -i\bar{\Delta}(x-x') = -i\Delta(x-x') = \\ &= -i|\eta_T|^2\Delta(x-x'), \end{aligned} \quad (7.324)$$

и перестановочные соотношения будут инвариантными, если $|\eta_T|^2$ выбрано равным $+1$. Можно проверить, что при таком выборе η_T лагранжиан свободного поля тоже инвариантен. Аналогично, $U(i_t)HU(i_t)^{-1} = H$, так что теория инвариантна при обращении времени. Отметим, однако, что

$$U(i_t)PU(i_t)^{-1} = -P \quad (7.325)$$

и

$$U(i_t)MU(i_t)^{-1} = -M. \quad (7.326)$$

Определим далее линейную унитарную операцию зарядового сопряжения U_c , потребовав, чтобы

$$U_c|p_1, p_2, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n\rangle = \eta(n, m)|q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_m\rangle \quad (7.327)$$

и

$$U_c|0\rangle = |0\rangle, \quad (7.328)$$

где $\eta = \eta(n, m)$ — фазовый множитель. Оператор U_c заменяет частицы на античастицы, оставляя неизменными их импульсы, и не изменяет

состояние вакуума. В частности, при действии на одночастичное состояние

$$U_c a_{p_1}^* |0\rangle = U_c |p_1; \rangle = U_c a_{p_1}^* U_c^{-1} |0\rangle = \eta_c |; p_1\rangle = \eta_c b_{p_1}^* |0\rangle, \quad (7.329)$$

так что можно определить

$$U_c a_k^* U_c^{-1} = \eta_c b_k^* \quad (7.330)$$

и

$$U_c a_k U_c^{-1} = \bar{\eta}_c b_k, \quad (7.331)$$

где η_c удовлетворяет условию $|\eta_c|^2 = +1$ и является зарядовой четностью частицы¹⁾. С другой стороны, можно определить зарядово-сопряженный оператор $\varphi_c(x)$

$$\varphi_c(x) = U_c \varphi(x) U_c^{-1} = \eta_c \varphi^*(x) \quad (7.332a)$$

и

$$\varphi_c^*(x) = U_c \varphi^*(x) U_c^{-1} = \bar{\eta}_c \varphi(x). \quad (7.332b)$$

Равенства (7.332) вместе с (7.328) можно рассматривать как определение U_c . В силу нашего определения \mathcal{L} в виде нормального произведения лагранжева плотность инвариантна относительно зарядового сопряжения

$$U_c \mathcal{L} U_c^{-1} = \mathcal{L}. \quad (7.333)$$

То же самое справедливо относительно перестановочных соотношений, что и означает инвариантность теории относительно зарядового сопряжения. Отметим, что оператор полного заряда Q антикоммутирует с U_c :

$$U_c Q U_c^{-1} = -Q. \quad (7.334)$$

Действительное поле, описывающее частицы, тождественные с античастицами, с помощью операции зарядового сопряжения может быть охарактеризовано условием

$$\varphi_c(x) = \varphi^*(x) = \varphi(x). \quad (7.335)$$

Такое соотношение между оператором φ и зарядово-сопряженным оператором φ_c обеспечивает тождественность состояний с частицами и состояний с античастицами. Для такого поля равенства (7.335) и (7.332) дают $\bar{\eta}_c = \eta_c$. Следовательно, η_c должно быть действительным и равным ± 1 . Аналогичные аргументы показывают, что для зарядово-самосопряженных полей фазовые множители η_p и η_T действительны и могут быть равны только ± 1 .

Интересно отметить, что U_c и $U(i_s)$ для бозе-поля коммутируют, поскольку

$$U_c U(i_s) \varphi(x) U(i_s)^{-1} U_c^{-1} = U(i_s) U_c \varphi(x) U_c^{-1} U(i_s)^{-1} = \eta_c \eta_p \varphi^*(i_s x). \quad (7.336)$$

Это справедливо лишь для частиц с целым спином.

§ 7. Законы сохранения и лагранжев формализм

При обсуждении заряженного скалярного поля мы уже кратко отметили, как обобщается лагранжев формализм, чтобы включить поля более

1) Отметим, что понятие зарядовой четности имеет смысл лишь для нейтральной системы; точнее, в том случае, если система переходит при зарядовом сопряжении сама в себя. См., например, книгу Ахиезера и Берестецкого [3], а также [905]. — *Прим. ред.*

чем с одной компонентой. Обозначим посредством $\varphi_r(x)$ ($r = 1, 2, \dots, n$) любое такое многокомпонентное поле. Тогда изменение лагранжевой плотности $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_r, \varphi_{r\mu})$ при варьировании φ_r есть

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{r,\mu}} \right\} \delta\varphi_r + \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{r,\mu}} \delta\varphi_r \right). \quad (7.337)$$

Из принципа действия, требующего, чтобы $\delta I = \delta \int_{\Omega} \mathcal{L} d^4x = 0$ при любых вариациях $\delta\varphi_r$, равных нулю на поверхности Σ объема Ω , вытекают уравнения

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{r,\mu}} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (7.338)$$

которые являются уравнениями поля. Поэтому для полей, удовлетворяющих уравнениям движения, изменение лагранжевой плотности $\delta\mathcal{L}$, вызванное вариациями φ_r , имеет вид

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{r,\mu}} \delta\varphi_r \right). \quad (7.339)$$

Это равенство дает возможность вывести различные законы сохранения, рассматривая различные типы вариаций полей φ_r [629, 377].

Рассмотрим сначала случай, когда \mathcal{L} явно не зависит от пространственно-временных координат и когда вариация $\delta\varphi_r$ вызывается бесконечно малым сдвигом

$$x \rightarrow x' = x + \varepsilon a, \quad (7.340)$$

при котором

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi'_r(x') = \varphi_r(x + \varepsilon a) = \varphi_r(x) + \delta\varphi_r(x). \quad (7.341)$$

Вариация $\delta\varphi_r$ в первом порядке по ε равна

$$\delta\varphi_r(x) = \varphi'_r(x') - \varphi_r(x) = \varepsilon \left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2) = \varepsilon a^\mu \partial_\mu \varphi_r(x). \quad (7.342)$$

Аналогично, вариация плотности лагранжиана равна

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}(\varphi'_r(x'), \varphi'_{r\nu}(x')) - \mathcal{L}(\varphi_r(x), \varphi_{r\nu}(x)) = \\ &= \varepsilon \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi'(x'))}{\partial\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \varepsilon a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\varphi_r(x), \varphi_{r\nu}(x)). \end{aligned} \quad (7.343)$$

Равенство (7.339) утверждает, что

$$\varepsilon a^\mu \left\{ \partial_\mu \mathcal{L} - \sum_{r=1}^n \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{r,\nu}} \partial_\mu \varphi_r \right) \right\} = 0. \quad (7.344)$$

Так как a^μ произвольно, то из равенства (7.344) следует

$$\partial^\nu \left(\sum_{r=1}^n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{r,\nu}} \frac{\partial\varphi_r}{\partial x^\mu} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = 0 \quad (7.345a)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\nu} T_{\mu\nu} = 0. \quad (7.345b)$$

Это закон сохранения канонического тензора энергии-импульса. Тензорный характер $T'_{\mu\nu}$ при собственных преобразованиях Лоренца является следствием принятых трансформационных свойств \mathcal{L} , именно, предположения о том, что \mathcal{L} преобразуется при собственных преобразованиях Лоренца, как скаляр. Как было показано ранее [см. равенства (7.219) и (7.220)], из равенства (7.345) следует постоянство во времени 4-вектора полной энергии-импульса

$$P_\mu = \int_{\sigma} d\sigma_\nu(x) T'^{\nu\mu}. \quad (7.346)$$

Рассмотрение, аналогичное приведенному выше, можно провести и в случае, когда вариация φ_r вызывается бесконечно малым однородным преобразованием Лоренца:

$$\begin{aligned} x_\mu &\rightarrow x'_\mu = (\Lambda x)_\mu = (\delta_\mu^\nu + \varepsilon \lambda_{\mu}^{\nu}) x_\nu, \\ \lambda^{\mu\nu} &= -\lambda^{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (7.347)$$

Предполагается, что при этом φ_r преобразуются следующим образом:

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi'_r(x') = \sum_{s=1}^n B_r^s(\Lambda) \varphi_s(x) \approx \sum_{s=1}^n \left(\delta_r^s + \frac{1}{2} \varepsilon b_r^{s\mu\nu} \lambda_{\mu\nu} \right) \varphi_s(x), \quad (7.348a)$$

причем

$$b_r^{s\mu\nu} = -b_r^{s\nu\mu}. \quad (7.348b)$$

Из лоренц-инвариантности лагранжиана следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\varphi'_r(x'), \varphi'_{r\mu}(x')) &= \mathcal{L}(\varphi_r(x), \varphi_{r\mu}(x)) = \\ &= \mathcal{L}((B^{-1}\varphi')_r(x'), (B^{-1}\varphi'_{\mu})_r(x')), \end{aligned} \quad (7.349)$$

т. е. \mathcal{L} и \mathcal{L}' имеют одинаковые численные значения в одной и той же точке, понимаемой в физическом смысле. Можно проверить, что равенство (7.339) в случае вариаций, вызванных бесконечно малым однородным преобразованием Лоренца, ведет к тому, что тензор $m'^{\mu\nu\varrho}$

$$m'^{\mu\nu\varrho} = \sum_{r,s=1}^n b_r^{s\nu\mu} \varphi_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{r,\varrho}} + x^\nu T'^{\mu\varrho} - x^\mu T'^{\nu\varrho} \quad (7.350)$$

сохраняется и удовлетворяет условию

$$\partial_\varrho m'^{\mu\nu\varrho} = 0. \quad (7.351)$$

Поэтому можно определить шесть не зависящих от времени величин

$$M'^{\mu\nu} = \int_{\sigma} m'^{\mu\nu\varrho} d\sigma_\varrho(x), \quad (7.352)$$

образующих компоненты антисимметричного тензора, причем пространственные компоненты соответствуют компонентам момента количества движения системы, а временные компоненты связаны с координатами центра масс системы [652, 562, 563, 564]. Первый член в равенстве (7.350) соответствует плотности спинового момента количества движения, а член $x^\nu T'^{\mu\varrho} - x^\mu T'^{\nu\varrho}$ — плотности орбитального момента количества движения.

Белинфанте [42] показал, как можно переопределить канонический тензор энергии-импульса $T'^{\mu\nu}$, чтобы новый тензор $T^{\mu\nu}$ был всегда симметричен, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, и чтобы

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (7.353)$$

Кроме того, тензор момента количества движения, определенный равенством

$$m_{\mu\nu\sigma} = x_\mu T_{\nu\sigma} - x_\nu T_{\mu\sigma}, \quad (7.354)$$

обладает свойством

$$\frac{\partial m_{\mu\nu\sigma}}{\partial x_\sigma} = \frac{\partial m'_{\mu\nu\sigma}}{\partial x_\sigma} = 0, \quad (7.355)$$

и поэтому

$$\int_{\sigma} m_{\mu\nu\sigma} d\sigma^\sigma(x) = \int_{\sigma} m'_{\mu\nu\sigma} d\sigma^\sigma(x). \quad (7.356)$$

Из равенства (7.356) следует, что тензор $m_{\mu\nu\sigma}$ ведет к тем же физическим следствиям, что и $m'_{\mu\nu\sigma}$, т. е. они приводят к одинаковым шести интегралам движения. Отметим, между прочим, что для скалярного поля φ , когда $b_r^{\text{см}\nu} = 0$, из (7.350) и (7.351) вытекает, что канонический тензор энергии-импульса уже симметричен.

Десять сохраняющихся величин $\int T^{\mu\nu} d\sigma_\nu = P^\mu$ и $M^{\mu\nu} = \int m^{\mu\nu\sigma} d\sigma_\sigma$ появляются вследствие инвариантности \mathcal{L} относительно неоднородных преобразований Лоренца. Лагранжиан может обладать и другими свойствами инвариантности, которые приведут к дополнительным законам сохранения.

Рассмотрим, например, случай, когда \mathcal{L} относится к описанию комплексных полей, которые характеризуются переменными поля φ_r , φ_r^* . Так как \mathcal{L} действительная функция (а в квантовой теории — эрмитов оператор), то в лагранжиане могут появиться только комбинации $\varphi_r^* \varphi_r$ или $\partial_\mu \varphi_r^* \partial_\mu \varphi_r$. Поэтому \mathcal{L} является инвариантом относительно калибровочного преобразования, при котором

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi'_r(x) = e^{i\alpha} \varphi_r(x) \approx (1 + i\alpha) \varphi_r(x), \quad (7.357)$$

а α — действительная бесконечно малая постоянная. Так как плотность лагранжиана \mathcal{L} , по предположению, инвариантна относительно этого преобразования

$$\delta\mathcal{L} = 0 \quad (7.358)$$

и

$$\delta\varphi_r = \varphi'_r - \varphi_r = +i\alpha\varphi_r, \quad (7.359a)$$

$$\delta\varphi_r^* = \varphi_r'^* - \varphi_r^* = -i\alpha\varphi_r^*, \quad (7.359b)$$

то из равенства (7.339) следует

$$\delta\mathcal{L} = 0 = i\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{r,\mu}} \varphi_r - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r^*} \varphi_r^* \right) \quad (7.360a)$$

$$= \partial_\mu j^\mu(x), \quad (7.360b)$$

где

$$j^\mu(x) = i\alpha \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{r,\mu}} \Phi_r - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{r,\mu}^*} \Phi_r^* \right) \quad (7.361)$$

есть сохраняющаяся плотность электрического заряда и тока. Позже, в гл. 10, мы покажем, что так определенная величина действительно ведет себя как источник электромагнитного поля в соответствии с уравнениями Максвелла, чем будет доказано, что $j^\mu(x)$ на самом деле является плотностью заряда и тока.

В общем случае, если лагранжиан инвариантен (т. е. $\delta \mathcal{L} = 0$) относительно преобразования калибровки

$$\Phi_r \rightarrow \Phi_r' = e^{i\epsilon q_r} \Phi_r \approx (1 + i\epsilon q_r) \Phi_r, \quad (7.362a)$$

$$\delta \Phi_r = i\epsilon q_r \Phi_r, \quad (7.362b)$$

где ϵ — бесконечно малая величина, а q_r — некоторое характерное для поля Φ_r число, равенство (7.339) утверждает, что четырехмерный ток

$$J_\mu(x) = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{r,\mu}(x)} q_r \Phi_r(x) \quad (7.363)$$

имеет равную нулю дивергенцию

$$\partial^\mu J_\mu(x) = 0. \quad (7.364)$$

Равенство (7.364) определяет интеграл движения C :

$$\begin{aligned} C &= \int_{\sigma} J_\mu(x) d\sigma^\mu(x) = \int J_0(x) d^3x = \int \sum_{r=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{r,0}} q_r \Phi_r(x) d^3x = \\ &= \sum_{r=1}^n \int d^3x q_r \pi_r(x) \Phi_r(x). \end{aligned} \quad (7.365)$$

В случае преобразования калибровки (7.357) величина C соответствует полному заряду Q .

§ 8. π-мезоны

Как хорошо известно, в природе существуют три частицы, π^+ , π^- и π^0 -мезоны, массы которых приблизительно равны $273m_e$, а спины равны нулю. Точнее, массы заряженных мезонов одинаковы $\mu(\pi^+) = \mu(\pi^-) = \mu_\pm = 273,27m_e$, а масса π^0 -мезона равна $(264,37 \pm 0,6)m_e$. Последнее значение получено из данных по захвату π^- -мезонов протонами. Спин заряженных π-мезонов был определен из принципа детального равновесия в применении к реакции $p + p \rightarrow d + \pi^+$ и оказался равным нулю. Нейтральный π-мезон также имеет спин, равный нулю, так как он распадается на два γ-кванта, что невозможно для частицы с нечетным спином (значения спина, большие единицы, исключаются из теоретических соображений). Из того, что наблюдается реакция $\pi^- + d \rightarrow 2n$, можно заключить, что π^- -мезон имеет отрицательную четность (по отношению к нуклону, который принято считать обладающим положительной четностью). Если допустить, что π^+ -мезон является античастицей по отношению к π^- -мезону, тогда π^+ -мезон должен иметь такую же четность (т. е. отрицательную), что и π^- -мезон. Все три

частицы нестабильны. Заряженные мезоны распадаются с испусканием заряженного μ -мезона и нейтрино, $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu$, со временем жизни, равным $(2,56 \pm 0,05) \cdot 10^{-8}$ сек. А π^0 -мезоны распадаются на два γ -кванта (и в 1,45% случаев на $e^+ + e^- + \gamma$) со временем жизни $\sim 10^{-16}$ сек¹⁾. Многие толкования взаимодействий π -мезонов основываются на предположении о том, что эти три наблюдаемые частицы являются тремя зарядовыми состояниями одного рода одной «элементарной» частицы. Предполагается, что разница масс заряженных и нейтральных π -мезонов возникает из-за электромагнитных эффектов типа собственной энергии. Мы примем это допущение. Пренебрегая всеми взаимодействиями (не только теми, которые ведут к разнице масс, но и приводящими к нестабильности), получим, что лагранжиан, описывающий систему π -мезонных полей, имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} : \mu_0^2 \varphi_3^2 - \varphi_{3\mu} \varphi_3^\mu : - : \mu_\pm^2 \varphi^* \varphi - \varphi_\mu^* \varphi^\mu :. \quad (7.366)$$

Здесь мы привяли, что массы заряженных π -мезонов одинаковы $\mu_+ = \mu_- = \mu_\pm$; φ_3 есть эрмитов оператор, описывающий нейтральное π^0 -мезонное поле, а φ и φ^* являются операторами (неэрмитовыми), описывающими заряженное поле. Если ввести эрмитовы операторы поля φ_1 и φ_2

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 + i\varphi_2), \quad (7.367a)$$

$$\varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 - i\varphi_2), \quad (7.367b)$$

то \mathcal{L} принимает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (\mu_j^2 \varphi_j \varphi_j - \varphi_{j\mu} \varphi_j^\mu), \quad (7.368)$$

причем $\mu_1 = \mu_2 = \mu_\pm$ и $\mu_3 = \mu_0$. Канонически сопряженные с φ_i импульсы суть

$$\pi_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{i0}(x)} = \varphi_{i0}(x), \quad (7.369)$$

так что одновременные перестановочные соотношения таковы:

$$[\varphi_j(x'), \pi_l(x')]_{x_0=x'_0} = i\delta_{jl}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (7.370)$$

Остальные коммутаторы равны нулю. Оператор плотности тока дается выражением

$$j^\mu = +ie : \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu} \varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu^*} \varphi^* \right) :, \quad (7.371)$$

причем

$$j_0 = \rho = -ie : \pi^* \varphi^* - \pi \varphi : = e : \pi_2 \varphi_1 - \pi_1 \varphi_2 :. \quad (7.372)$$

Этот ток сохраняется, $\partial_\mu j^\mu = 0$. Существование такого сохраняющегося 4-вектора можно рассматривать как следствие инвариантности \mathcal{L} отно-

¹⁾ Подробности относительно π -мезонов, а также интерпретацию экспериментов, ведущую к приведенным выше значениям спина и четности, можно найти в книге Бете и Гофмана [54].

сительно преобразования:

$$\begin{aligned}\varphi &\rightarrow e^{i\alpha}\varphi, \\ \varphi^* &\rightarrow e^{-i\alpha}\varphi, \\ \varphi_3 &\rightarrow \varphi_3.\end{aligned}\quad (7.373)$$

Если поля φ_i ($i = 1, 2, 3$) представлять себе как компоненты вектора φ в некотором «зарядовом» пространстве, то можно увидеть, что плотность \mathcal{L} инвариантна при вращениях вокруг оси \mathcal{Z} в «зарядовом» пространстве. Обозначим через T_3 оператор, который вызывает бесконечно малое вращение вокруг оси \mathcal{Z} , т. е.

$$e^{-i\epsilon T_3}\varphi_1 e^{+i\epsilon T_3} = \varphi_1 + \epsilon\varphi_2, \quad (7.374a)$$

$$e^{-i\epsilon T_3}\varphi_2 e^{+i\epsilon T_3} = -\epsilon\varphi_1 + \varphi_2, \quad (7.374б)$$

$$e^{-i\epsilon T_3}\varphi_3 e^{+i\epsilon T_3} = \varphi_3. \quad (7.374в)$$

Поскольку при бесконечно малом ϵ

$$e^{-i\epsilon T_3}\varphi_i(x) e^{+i\epsilon T_3} \approx \varphi_i(x) - i\epsilon [T_3, \varphi_i(x)], \quad (7.375)$$

то из сравнения равенств (7.374) и (7.375) заключаем, что оператор T_3 должен быть таким, чтобы

$$\begin{aligned}i [T_3, \varphi_1] &= -\varphi_2, \\ i [T_3, \varphi_2] &= \varphi_1, \\ i [T_3, \varphi_3] &= 0.\end{aligned}\quad (7.376)$$

Поэтому в качестве T_3 можно выбрать

$$T_3 = - \int \{ \pi_1(x) \varphi_2(x) - \pi_2(x) \varphi_1(x) \} d^3x = \frac{1}{e} Q = \frac{1}{e} \int d^3x q(x). \quad (7.377)$$

Ясно, что если массы μ_{\pm} и μ_0 принять одинаковыми, тогда плотность лагранжиана \mathcal{L} будет инвариантна относительно произвольных вращений в зарядовом пространстве. Компоненты T_i ($i = 1, 2, 3$), вектора \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = - \int d^3x [\boldsymbol{\pi}(x) \times \boldsymbol{\varphi}(x)] \quad (7.378)$$

являются генераторами вращений вокруг соответствующих осей в зарядовом пространстве. Поскольку \mathbf{T} и H коммутируют \mathbf{T} оказывается интегралом движения. Соотношения коммутации для операторов T_i просто выводятся с помощью равенства (7.370). В результате имеем

$$[T_i, T_j] = \int d^3x \sum_{r, s, m, n=1}^3 \epsilon_{irs} \epsilon_{jmn} [\pi_r(x) \varphi_s(x), \pi_m(x') \varphi_n(x')]_{x_0=x'_0} = i \epsilon_{ijm} T_m. \quad (7.379)$$

Следовательно, операторы T_i изоморфны операторам момента количества движения, и \mathbf{T}^2 и T_3 можно одновременно выбрать диагональными. Величину \mathbf{T} называют изотопическим спином поля, а зарядовое пространство — пространством изотопического спина, или изотопическим пространством.

Поскольку $T_3 = (1/e) Q$, можно сразу написать одночастичные собственные состояния \mathbf{T}^2 и T_3 . Так, состояние с одним нейтральным π -мезоном, $\varphi_3(x) |\Phi_0\rangle$ (причем $|\Phi_0\rangle$ есть состояние вакуума, для которого $T_3 |\Phi_0\rangle = \mathbf{T}^2 |\Phi_0\rangle = 0$), является собственным состоянием T_3 с собственным

значением 0 и T^2 с собственным значением 2, т. е. если собственное значение T^2 обозначить через $t(t+1)$, то $t=1$. Аналогично, $(\varphi_1 + i\varphi_2)|\Phi_0\rangle$ является собственным состоянием T_3 с собственным значением $+1$, а $(\varphi_1 - i\varphi_2)|\Phi_0\rangle$ — собственным состоянием T_3 с собственным значением -1 , причем оба состояния являются собственными состояниями T^2 с $t=+1$. Другими словами, состояние с одним π^+ (π^-)-мезоном является собственным состоянием оператора третьей компоненты изотопического спина с собственным значением $+1$ (-1). Поэтому говорят, что π -мезоны имеют полный изотопический спин $+1$, а три состояния с $t_3=0, \pm 1$ соответствуют трем различным зарядовым состояниям. Приведенные рассуждения будут играть важную роль при анализе взаимодействий мезонов с нуклонами.

Более формальный вывод свойств изотопического спина для мезонного поля таков. Если $\mu_i = \mu$, то лагранжиан (7.368) инвариантен относительно любого вращения в изотопическом пространстве и, в частности, инвариантен при бесконечно малом вращении на угол λ вокруг i -й оси, при котором

$$\varphi_j(x) \rightarrow \varphi'_j(x) = \varphi_j(x) + \lambda \varepsilon_{ijk} \varphi_k(x) \quad (7.380)$$

(подразумевается суммирование по k от 1 до 3).

Вариация φ_j равна

$$\delta\varphi_j = \varphi'_j - \varphi_j = \lambda \varepsilon_{ijk} \varphi_k, \quad (7.381)$$

а так как плотность \mathcal{L} инвариантна при вращениях, равенство (7.339) дает закон сохранения

$$\sum_{j,k=1}^3 : \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{j,\mu}} \varepsilon_{ijk} \varphi_k \right) : = 0, \quad (7.382)$$

который при помощи равенства

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{j,\mu}} = \varphi_j^\mu \quad (7.383a)$$

можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{j,k=1}^3 : \partial_\mu (\varphi_j^\mu \varepsilon_{ijk} \varphi_k) : = 0. \quad (7.383b)$$

Следовательно, вектор изотопического спина

$$\mathcal{J}_i^\mu = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varphi_j^\mu \varphi_k \quad (7.384)$$

сохраняется, т. е.

$$\partial_\mu \mathcal{J}_i^\mu = 0 \quad (i=1, 2, 3), \quad (7.385)$$

так что вектор T с компонентами

$$T_i = \int d\sigma_\mu \mathcal{J}_i^\mu \quad (7.386)$$

не изменяется со временем. Мы закончим эту главу некоторыми замечаниями об описании состояний системы мезонов в изотопическом пространстве.

Вспомним, что мы определили операторы мезонного поля $\varphi_j(x)$ посредством равенства

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k_0} (a_j(k) e^{-ik \cdot x} + a_j^*(k) e^{+ik \cdot x}), \quad (7.387)$$

так что $\varphi = (1/\sqrt{2})(\varphi_1 + i\varphi_2)$ соответствует оператору рождения положительного мезона и оператору уничтожения отрицательно заряженного мезона, $\varphi^* = (1/\sqrt{2})(\varphi_1 - i\varphi_2)$ соответствует оператору рождения отрицательного мезона и оператору уничтожения положительно заряженного мезона, а φ_3 — оператору поля нейтральных мезонов. Следовательно, оператор $(1/\sqrt{2})(a_1(\mathbf{k}) - ia_2(\mathbf{k}))^*$ является оператором рождения положительного мезона с импульсом \mathbf{k} . С использованием этого определения

$$\begin{aligned} T_3 &= \varepsilon_{3jl} \int d^3x \varphi_j(x) \pi_l(x) = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{k_0} \{ (a_{1\mathbf{k}} - ia_{2\mathbf{k}})^* (a_{1\mathbf{k}} - ia_{2\mathbf{k}}) - (a_{1\mathbf{k}} + ia_{2\mathbf{k}})^* (a_{1\mathbf{k}} + ia_{2\mathbf{k}}) \}, \end{aligned} \quad (7.388a)$$

$$= N_+ - N_- = \frac{1}{e} Q. \quad (7.388b)$$

Через операторы $a_{i\mathbf{k}}$ вектор \mathbf{T} выражается следующим образом:

$$\mathbf{T}_j = -i \int \frac{d^3k}{k_0} \varepsilon_{jlm} a_l^*(\mathbf{k}) a_m(\mathbf{k}). \quad (7.389)$$

Так как $[T_j, T_l] = i\varepsilon_{jlm} T_m$, то операторы изотопического спина изоморфны операторам момента количества движения. Операторы

$$T_{\pm} = T_1 \pm iT_2 = - \int \frac{d^3k}{k_0} \{ \pm (a_{1\mathbf{k}} \mp ia_{2\mathbf{k}})^* a_{3\mathbf{k}} \mp a_{3\mathbf{k}}^* (a_{1\mathbf{k}} \pm ia_{2\mathbf{k}}) \} \quad (7.390)$$

изменяют собственные значения оператора T_3 на ± 1 . Классификация состояний n мезонов с помощью собственных значений \mathbf{T}^2 и T_3 проводится в полной аналогии со случаем момента количества движения. Рассмотрим, например, двухмезонную систему. Ясно, что состояние $|\pi^+(\mathbf{k}_1), \pi^+(\mathbf{k}_2)\rangle$, в котором присутствуют два положительно заряженных мезона с импульсами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 ($Q=2$), является собственным состоянием T_3 с собственным значением 2 и \mathbf{T}^2 с собственным значением $2(2+1)$. (Иногда мы будем опускать зависимость от импульсов и писать просто $|2\pi^+\rangle$.)

Поэтому можно написать

$$|T=2, T_3=2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1\mathbf{k}_1} - ia_{2\mathbf{k}_1})^* \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1\mathbf{k}_2} - ia_{2\mathbf{k}_2})^* |0\rangle. \quad (7.391)$$

Обозначения в левой части очевидны: $||T=2, T_3=2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle$ есть двухмезонное состояние с полным изотопическим спином $T=2$ и $T_3=2$. Состояние $|T=2, T_3=1; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle$ получается, если подействовать оператором T_- на $|2, 2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle$. Если фазы выбрать так, что

$$T_{\pm} |t, t_3\rangle = \sqrt{(t \mp t_3)(t \pm t_3 + 1)} |t, t_3 \pm 1\rangle, \quad (7.392)$$

то найдем

$$\begin{aligned}
 T_- |2, 2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle &= 2 |2, 1; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle = \sqrt{2} \int \frac{d^3k}{k_0} \times \\
 &\times \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1k} + ia_{2k})^* a_{3k} - a_{3k}^* \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1k} - ia_{2k}) \right] |\pi^+(\mathbf{k}_1), \pi^+(\mathbf{k}_2)\rangle = \\
 &= -\sqrt{2} (|\pi^+(\mathbf{k}_2); \pi^0(\mathbf{k}_1)\rangle + |\pi^+(\mathbf{k}_1); \pi^0(\mathbf{k}_2)\rangle). \quad (7.393)
 \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 T_- |2, 1; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle &= \sqrt{6} |2, 0; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle = \\
 &= T_- \frac{-1}{\sqrt{2}} (|\pi^+(\mathbf{k}_2); \pi^0(\mathbf{k}_1)\rangle + |\pi^+(\mathbf{k}_1); \pi^0(\mathbf{k}_2)\rangle) = \\
 &= \{2 |; \pi^0(\mathbf{k}_1), \pi^0(\mathbf{k}_2)\rangle - |\pi^+(\mathbf{k}_2); \pi^-(\mathbf{k}_1)\rangle - \\
 &- |\pi^+(\mathbf{k}_1); \pi^-(\mathbf{k}_2)\rangle\} \quad (7.394)
 \end{aligned}$$

и т. д. Имеются три состояния с $T=1$. Ясно, что состояние с $T_3=1$ (и, следовательно, с $Q=1$) должно быть линейной комбинацией состояний $|\pi^+, \pi^0\rangle$, т. е.

$$|1, 1; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle = a |\pi^+(\mathbf{k}_1); \pi^0(\mathbf{k}_2)\rangle + b |\pi^+(\mathbf{k}_2); \pi^0(\mathbf{k}_1)\rangle. \quad (7.395)$$

Это состояние должно быть ортогональным к состоянию $|2, 1; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle$. Отсюда заключаем, что $a = -b$. Поэтому

$$|1, 1; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} \{|\pi^+(\mathbf{k}_1); \pi^0(\mathbf{k}_2)\rangle - |\pi^+(\mathbf{k}_2); \pi^0(\mathbf{k}_1)\rangle\}. \quad (7.396)$$

Поступая так же, как и выше, получаем

$$\begin{aligned}
 |1, 0; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} T_- |1, 1; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \{|\pi^+(\mathbf{k}_1); \pi^-(\mathbf{k}_2)\rangle - |\pi^-(\mathbf{k}_1); \pi^+(\mathbf{k}_2)\rangle\}. \quad (7.397)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |1, -1; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} T_- |1, 0; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \{|\pi^0(\mathbf{k}_2), \pi^-(\mathbf{k}_1)\rangle - |\pi^-(\mathbf{k}_2), \pi^0(\mathbf{k}_1)\rangle\}. \quad (7.398)
 \end{aligned}$$

Существует одно состояние с $T=0$. Поскольку оно должно иметь $T_3=0$ и равный нулю заряд, это состояние является линейной комбинацией состояний $|\pi_1^+, \pi_2^-\rangle$, $|\pi_1^-, \pi_2^+\rangle$ и $|\pi_1^0, \pi_2^0\rangle$. Оно должно быть ортогональным к состояниям $|2, 0; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle$ и $|1, 0; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle$. Последнее требование и определяет вид этой линейной комбинации:

$$\begin{aligned}
 |0, 0; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2!^3}} \{|\pi^+(\mathbf{k}_1); \pi^-(\mathbf{k}_2)\rangle + |\pi^+(\mathbf{k}_2); \pi^-(\mathbf{k}_1)\rangle - \\
 &- |\pi^0(\mathbf{k}_1); \pi^0(\mathbf{k}_2)\rangle\}. \quad (7.399)
 \end{aligned}$$

Квантование поля Дирака

§ 1. Перестановочные соотношения

Свободное заряженное поле со спином, равным $1/2$, описывается четырехкомпонентным комплексным спинором ψ , который удовлетворяет уравнению Дирака, и при лоренцевых преобразованиях изменяется согласно соотношению

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow \psi'_\alpha(x') = \sum_\beta S_{\alpha\beta}(\Lambda) \psi_\beta(\Lambda^{-1}(x' - a)) \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4). \quad (8.1)$$

Чтобы применить канонический формализм, будем рассматривать четыре компоненты дираковского спинора ψ как независимые динамические переменные. Главное отличие лагранжиана для поля Дирака от обсуждавшихся до сих пор лагранжианов заключается в том, что лагранжиан Дирака первого порядка по $\partial_\mu\psi$, ибо он должен приводить к дифференциальному уравнению первого порядка относительно ψ . Это ведет к небольшим изменениям гамильтонова формализма.

Лагранжева плотность имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \tilde{\psi} (-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi - \frac{1}{2} (i \partial_\mu \tilde{\psi} \gamma^\mu + m \tilde{\psi}) \psi. \quad (8.2)$$

Здесь мы обозначили обратную величину комптоновской длины волны для дираковской частицы через m . В дальнейшем мы сохраним это обозначение, чтобы отличать частицу спина, равного $1/2$, от частицы со спином, равным нулю. Массу последней по-прежнему будем обозначать буквой μ . Уравнения движения получаются независимыми варьированиями по ψ и $\tilde{\psi}$. В частности,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\psi}} = -\frac{1}{2} (-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi - \frac{1}{2} m \psi, \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \tilde{\psi})} = -\frac{1}{2} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi, \quad (8.4)$$

так что вариационное уравнение Эйлера дает уравнение Дирака:

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi = 0. \quad (8.5)$$

Аналогично, при варьировании по ψ получается правильное уравнение для сопряженного спинора $\tilde{\psi}$. Между прочим, если удовлетворяются волновые уравнения, то \mathcal{L} обращается в нуль.

Используя общее выражение для вектора тока и заряда [равенство (7.361)], получаем вектор тока для поля Дирака

$$j^\mu(x) = e\tilde{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad (8.6)$$

который сохраняется в силу уравнений движения. В частности, из закона сохранения $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ следует

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int \tilde{\psi}\gamma^0\psi d^3x = 0. \quad (8.7)$$

Это равенство соответствует сохранению полного заряда.

Как уже отмечалось, \mathcal{L} — первого порядка по $\partial_0\psi$. Это ведет к тому, что канонически сопряженные импульсы не являются независимыми от переменных поля ψ и $\tilde{\psi}$. Поэтому канонический лагранжев формализм непосредственно неприменим, и к гамильтониану нельзя сразу же перейти. Возникающую трудность можно обойти, если вспомнить, что все представляющие физический интерес величины можно получить из тензора энергии-импульса [равенство (7.345)], который в настоящем случае, с учетом $\mathcal{L} = 0$, имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left(\tilde{\psi}\gamma^\nu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma^\nu\psi \right). \quad (8.8)$$

Этот тензор несимметричен, но его легко симметризовать (см., например, [622]). Однако тензор (8.8) дает такой же 4-вектор энергии-импульса, как и симметризованный тензор:

$$\begin{aligned} P^\mu &= \int T^{\mu 0} d^3x = \frac{i}{2} \int d^3x \left(\tilde{\psi}\gamma^0 \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma^0\psi \right) = \\ &= i \int d^3x \left(\tilde{\psi}\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi \right). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Последняя строка равенства (8.9) получается, если после интегрирования по частям, опустить поверхностные члены при $\mu = 1, 2, 3$ и использовать (8.7) для $\mu = 0$. В силу уравнений движения для полной энергии, или гамильтониана, получаем выражение

$$\begin{aligned} H = P^0 &= \int d^3x T^{00} = \int d^3x \tilde{\psi}(x) (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi(x) = \\ &= \int d^3x \psi^*(x) (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi(x). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Квантование поля Дирака со спином, равным $1/2$, можно провести по аналогии с квантованием скалярного поля. Следует ожидать, что коэффициенты разложения предингерговских операторов поля $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ по полному набору решений $\omega_n(x)$ уравнения Дирака для свободной частицы можно будет интерпретировать, как операторы рождения и уничтожения. Индекс n у ω_n обозначает совокупность собственных значений полного набора наблюдаемых для одной частицы: энергии, импульса и проекции спина частицы. Функции $\omega_n(x)$ равны спинорам $\omega^r(\mathbf{p})$ ($r = 1, 2, 3, 4$), умноженным на соответствующие плоские волны. Так,

$$\begin{aligned} \omega_r(\mathbf{x}) &= \omega^r(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} & \text{при } r = 1, 2, \\ \omega_r(\mathbf{x}) &= v^r(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} & \text{при } r = 3, 4. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Спиноры $\omega^r(\mathbf{p})$ были введены ранее в гл. 4 [см. равенства (4.141)]. В шредингеровской картине разложения операторов $\psi(\mathbf{x})$ и $\tilde{\psi}(\mathbf{x})$ даются выражениями

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_n \sqrt{\frac{m}{|E_n|}} b_n \omega_n(\mathbf{x}) \quad (8.12a)$$

и

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_n \sqrt{\frac{m}{|E_n|}} b_n^* \tilde{\omega}_n(\mathbf{x}), \quad (8.12б)$$

причем суммирование проводится по состояниям как с положительной, так и с отрицательной энергией. Множитель $(m/|E_n|)^{1/2}$ включен в силу принятой нормировки спиноров: $\tilde{\omega}\omega = \varepsilon$.

Рассмотрим теперь гамильтонов оператор поля, который, согласно равенству (8.10), равен

$$H = \int d^3x \tilde{\psi}(\mathbf{x}) (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi(\mathbf{x}). \quad (8.13)$$

Подставляя в H выражения (8.11) и (8.12), получаем

$$H = \sum_m b_m^* b_m E_m, \quad (8.14)$$

где E_m — собственные значения оператора Дирака $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m$. Если при квантовании теории использовать перестановочные соотношения для бозе-поля, то мы столкнемся с трудностями. Прежде всего, если интерпретировать $b_n^* b_n$ как оператор числа частиц, то энергия поля может быть как положительной, так и отрицательной, поскольку собственные значения E_n могут иметь оба знака, а $b_n^* b_n \geq 0$. Далее, если операторы числа частиц могут иметь любые целые положительные собственные значения, что следует из перестановочных соотношений для бозе-поля [см., например, равенства (6.60) — (6.62)], тогда допустимы состояния с произвольно большой отрицательной энергией. А это не имеет физического смысла. На самом деле из опыта известно, что частицы со спином, равным $1/2$, подчиняются принципу Паули, и поэтому в любом состоянии m не может быть больше одной частицы (m включает определенную энергию, импульс и проекцию спина). Квантование с помощью коммутаторов, ведущее к статистике Бозе, поэтому неправильно, так как разрешает любому числу частиц находиться в одном состоянии.

Как мы уже отмечали в гл. 6, схема квантования, включающая принцип Паули, была развита Йорданом и Вигнером [399]. В этой схеме операторы вместо перестановочных соотношений удовлетворяют соотношениям «антикоммутации»:

$$[b_n, b_m]_+ = [b_n^*, b_m^*]_+ = 0, \quad (8.15)$$

$$[b_n, b_m^*]_+ = \delta_{nm}. \quad (8.16)$$

Оператор числа частиц в состоянии m по-прежнему дается выражением

$$N_m = b_m^* b_m, \quad (8.17)$$

но из перестановочных соотношений (8.15), (8.16) теперь следует

$$\begin{aligned} N_m^2 &= b_m^* b_m b_m^* b_m = \\ &= b_m^* (1 - b_m^* b_m) b_m = b_m^* b_m = \\ &= N_m. \end{aligned} \quad (8.18)$$

так что, в согласии с принципом Паули, числа заполнения могут быть равны только нулю или единице. Уже из перестановочных соотношений (8.15) видно, что в одно состояние нельзя поместить более одной частицы, так как два оператора рождения при действии на любой вектор дают вектор, равный нулю.

Используя антикоммутиационные соотношения, мы удовлетворили принципу Паули, но еще остается та трудность, что гамильтониан не является положительно определенным. Она устраняется с помощью идеи Дирака о том, что в вакууме заполнены все состояния с отрицательной энергией. Если индекс m записать явно как (\mathbf{p}, r) , где r пробегает четыре значения, соответствующие четырем решениям при данном \mathbf{p} ($r=1, 2$ для положительной энергии и $r=3, 4$ для отрицательной энергии), тогда в пределе непрерывных значений \mathbf{p} , разложение $\psi(\mathbf{x})$ [см. равенство (8.12)] принимает вид

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}\right)^{1/2} \left\{ \sum_{r=1}^2 b_r(\mathbf{p}) \omega^r(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \sum_{r=3}^4 b_r(-\mathbf{p}) \omega^r(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right\}, \quad (8.19)$$

причем

$$E_{\mathbf{p}} = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (8.20)$$

Если обозначить операторы числа частиц через

$$N_r^{(+)}(\mathbf{p}) = b_r^*(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p}) \quad \text{при } r=1, 2, \quad (8.21)$$

$$N_r^{(-)}(\mathbf{p}) = b_{r+2}^*(\mathbf{p}) b_{r+2}(\mathbf{p}) \quad \text{при } r=1, 2, \quad (8.22)$$

тогда гамильтониан можно переписать следующим образом:

$$H = \int d^3p \sum_{r=1}^2 E_{\mathbf{p}} \{N_r^{(+)}(\mathbf{p}) - N_r^{(-)}(\mathbf{p})\}. \quad (8.23)$$

Аналогично, с помощью операторов числа частиц можно выразить и полный заряд¹⁾

$$\begin{aligned} Q &= -e \int d^3x \tilde{\psi}(\mathbf{x}) \gamma^0 \psi(\mathbf{x}) = \\ &= -e \int d^3p \sum_{r=1}^2 \{N_r^{(+)}(\mathbf{p}) + N_r^{(-)}(\mathbf{p})\}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Согласно дираковской теории дырок вакуум $|0\rangle$ характеризуется тем, что все состояния с отрицательной энергией заполнены (т. е. $N_r^{(-)}(\mathbf{p})|0\rangle = |0\rangle$ при всех \mathbf{p} и всех r), а состояния с положительной энергией свободны (т. е. $N_r^{(+)}(\mathbf{p})|0\rangle = 0$ для всех \mathbf{p} и всех r). Поэтому энергия и полный заряд вакуума даются равенствами

$$E_0 = - \sum_{r=1}^2 \int d^3p E_{\mathbf{p}}$$

¹⁾ Знак заряда в равенстве (8.24) выбран так, что частица имеет заряд $-e$, а античастица — заряд $+e$. Поэтому теория в таком виде непосредственно применима к электронам.

и

$$Q_0 = -e \sum_{r=1}^2 \int d^3 p. \quad (8.25)$$

Ясно, что эти величины бесконечны. Однако по гипотезе Дирака они ненаблюдаемы, а наблюдаемы лишь разности H и E_0 , Q и Q_0 . Поэтому определим наблюдаемую энергию H' и наблюдаемый полный заряд Q' следующим образом:

$$\begin{aligned} H' = H - E_0 &= \int d^3 p \sum_{r=1}^2 \{N_r^{(+)}(\mathbf{p}) - N_r^{(-)}(\mathbf{p})\} E_p + \int d^3 p \sum_{r=1}^2 E_p = \\ &= \int d^3 p \sum_{r=1}^2 \{N_r^{(+)}(\mathbf{p}) + (1 - N_r^{(-)}(\mathbf{p}))\} E_p \end{aligned} \quad (8.26)$$

и

$$Q' = Q - Q_0 = -e \int d^3 p \sum_{r=1}^2 \{N_r^{(+)}(\mathbf{p}) - (1 - N_r^{(-)}(\mathbf{p}))\}. \quad (8.27)$$

Равенства (8.26) и (8.27) представляют собой математическую формулировку нашего предыдущего обсуждения теории дырок. Они явно показывают, что состояния с отрицательной энергией дают вклад в полный заряд и энергию только тогда, когда $N_r^-(\mathbf{p})$ равно нулю, т. е. когда состояния *не заполнены*. Вклад в заряд Q от незаполненного состояния с отрицательной энергией имеет противоположный знак ($+e$) по сравнению с вкладом от состояний с положительной энергией. С другой стороны, вклад в H от незаполненного состояния $\mathbf{p}r$ с отрицательной энергией есть $+E_p$. Следовательно, энергия H' неотрицательна. Таким образом, отсутствие частицы с определенным зарядом в состоянии с отрицательной энергией соответствует наличию частицы с положительной энергией и противоположным зарядом. В случае электронов эту частицу называют *позитроном*, а в общем случае — *античастицей*.

Необходимо подчеркнуть, что дираковская теория дырок и содержащаяся в ней вычитательная процедура возможны только благодаря квантованию с антикоммутаторами, которое ведет к тому, что каждое состояние с отрицательной энергией может быть занято лишь одной частицей. Отсутствие положительной определенности энергии в классической теории характерно для всех теорий для частиц с полуделым спином. Действительно, если, согласно Паули [627], наложить на квантованную теорию следующие физические требования:

- 1) чтобы коммутировали две любые физические наблюдаемые, относящиеся к пространственно-временным точкам, разделенным пространственно-подобным интервалом (условие причинности);
- 2) чтобы энергия системы была неотрицательной,

тогда можно установить связь между спином и статистикой. Можно показать [627, 628], что квантование теории для частиц с целым спином согласно антикоммутационным соотношениям Иордана — Вигнера (ведущим к статистике Ферми—Дирака) нарушает первый постулат, а квантование для частиц с полуделым спином с помощью перестановочных соотношений (ведущее к статистике Бозе — Эйнштейна) нарушает второй постулат.

Первый постулат можно оправдать тем, что в квантовой теории отсутствие коммутативности двух операторов, соответствующих наблюдаемым величинам, означает, что эти величины не могут быть одновременно измерены с любой точностью. Однако измерения в точках, разделенных пространственно-подобным интервалом, не могут влиять друг на друга, ибо из требования релятивистской причинности сигналы (энергия) не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света. Следовательно, коммутатор наблюдаемых, разделенных пространственно-подобным интервалом, должен быть равен нулю. Второй постулат очевиден. Современную версию доказательства связи между спином и статистикой мы изложим в гл. 18.

Стало обычным переопределять операторы для состояний с отрицательной энергией¹⁾ и обозначать

$$\begin{aligned} b_3(-\mathbf{p}) &= d_1^*(\mathbf{p}), & b_4(-\mathbf{p}) &= d_2^*(\mathbf{p}) \\ b_3^*(-\mathbf{p}) &= d_1(\mathbf{p}), & b_4^*(-\mathbf{p}) &= d_2(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (8.28)$$

так что перестановочные соотношения (8.15) – (8.16) теперь таковы:

$$\begin{aligned} [d_r^*(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{p}')]_+ &= \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \\ [d_r(\mathbf{p}), b_s(\mathbf{p}')]_+ &= [d_r^*(\mathbf{p}), b_s(\mathbf{p}')]_+ = 0, \\ [d_r(\mathbf{p}), b_s^*(\mathbf{p}')]_+ &= [d_r^*(\mathbf{p}), b_s^*(\mathbf{p}')]_+ = 0. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Оператор числа частиц $1 - N_r^{(-)}(-\mathbf{p})$ можно выразить через введенные операторы:

$$\begin{aligned} N_r^{(-)'}(\mathbf{p}) &= 1 - N_r^{(-)}(-\mathbf{p}) = 1 - b_{r+2}^*(-\mathbf{p}) b_{r+2}(-\mathbf{p}) = \\ &= b_{r+2}(-\mathbf{p}) b_{r+2}^*(-\mathbf{p}) = d_r^*(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (8.30)$$

Операторы d^* , d есть операторы рождения и уничтожения античастиц, а оператор $N_r^{(-)'}(\mathbf{p})$ (штрих мы будем далее опускать) — оператор числа античастиц. Разложение оператора ψ теперь имеет вид

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sum_{r=1}^2 \{ b_r(\mathbf{p}) w^r(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + d_r^*(\mathbf{p}) v^r(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \}, \quad (8.31)$$

где $v^r(\mathbf{p})$ — спинор с отрицательной энергией и импульсом $-\mathbf{p}$. Таким образом, $\psi(\mathbf{x})$ — оператор уничтожения частиц и оператор рождения античастиц. При такой формулировке теории дырок состояние вакуума $|\Phi_0\rangle$ характеризуется условием

$$N_r^{(+)}(\mathbf{p}) |\Phi_0\rangle = N_r^{(-)}(\mathbf{p}) |\Phi_0\rangle = 0 \quad (\text{для всех } r \text{ и всех } \mathbf{p}). \quad (8.32)$$

Итак, вакуум обладает равными нулю энергией, зарядом и импульсом и является состоянием без частиц и состоянием с наименьшей энергией. Вакуум инвариантен при всех преобразованиях Лоренца. С другой стороны, его можно охарактеризовать условием

$$b_r(\mathbf{p}) |\Phi_0\rangle = d_r(\mathbf{p}) |\Phi_0\rangle = 0 \quad (\text{для всех } r \text{ и всех } \mathbf{p}). \quad (8.33)$$

Отметим, что при такой формулировке уже ничего не говорится о «фоне» электронов отрицательных энергий.

¹⁾ Это возможно, поскольку операторы удовлетворяют соотношениям антикоммутиации, которые остаются инвариантными при замене $b \longleftrightarrow b^*$.

Правила коммутации операторов числа частиц $N_r^{(\pm)}(\mathbf{p})$ с операторами $b_r(\mathbf{p})$, $b_r^*(\mathbf{p})$ суть

$$[N_r^{(+)}(\mathbf{p}), b_s(\mathbf{p}')] = -\delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') b_r(\mathbf{p}), \quad (8.34)$$

$$[N_r^{(+)}(\mathbf{p}), b_s^*(\mathbf{p}')] = \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') b_r^*(\mathbf{p}), \quad (8.35)$$

$$0 = [N_r^{(-)}(\mathbf{p}), b_s(\mathbf{p}')] = [N_r^{(-)}(\mathbf{p}), b_s^*(\mathbf{p}')]. \quad (8.36)$$

Для коммутаций $N^{(\pm)}$ с операторами античастиц имеют место аналогичные выражения. Следовательно, состояние $b_s^*(\mathbf{p})|\Phi_0\rangle$ есть одночастичное состояние с импульсом \mathbf{p} и проекцией спина s ; $b_{s_1}^*(\mathbf{p}_1)b_{s_2}^*(\mathbf{p}_2)|\Phi_0\rangle$ — двухчастичное состояние и т. д.; состояние $d_{i_1}^*(\mathbf{q}_1)|\Phi_0\rangle$ — состояние с одной античастицей и т. д. Базисные векторы представления, в котором операторы числа частиц диагональны, имеют вид

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1 s_1, \dots, \mathbf{p}_m s_m; \mathbf{q}_1 t_1, \dots; \mathbf{q}_n t_n\rangle = \\ = \frac{1}{\sqrt{n!m!}} b_{s_1}^*(\mathbf{p}_1) \dots b_{s_m}^*(\mathbf{p}_m) d_{t_1}^*(\mathbf{q}_1) \dots d_{t_n}^*(\mathbf{q}_n) |\Phi_0\rangle, \end{aligned} \quad (8.37)$$

причем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}'_1 s'_1, \dots, \mathbf{p}'_m s'_m; \mathbf{q}'_1 t'_1, \dots, \mathbf{q}'_n t'_n | \mathbf{p}_1 s_1, \dots, \mathbf{p}_m s_m; \mathbf{q}_1 t_1, \dots, \mathbf{q}_n t_n \rangle = \\ = \frac{\delta_{mm'} \delta_{nn'}}{m!n!} \det |\delta^{(3)}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}'_j)| \delta_{s_i s'_j} \cdot \det |\delta^{(3)}(\mathbf{q}_k - \mathbf{q}'_e)| \delta_{t_k t'_e}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

§ 2. Конфигурационное пространство

Гейзенберговский оператор $\psi(x)$ получается из шредингеровского оператора $\psi(\mathbf{x})$ с помощью зависящего от времени унитарного преобразования

$$\psi(x) = e^{iH_0 x^0/\hbar} \psi(\mathbf{x}) e^{-iH_0 x^0/\hbar}. \quad (8.39)$$

Используя уже знакомую процедуру, находим

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p \left(\frac{m}{E(\mathbf{p})} \right)^{1/2} \sum_{r=1}^2 \{ b_r(\mathbf{p}) \omega^r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + d_r^*(\mathbf{p}) v^r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \}, \quad (8.40)$$

где $p_0 = +E(\mathbf{p})$, так что $\psi(x)$ подчиняется уравнению Дирака

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi(x) = 0. \quad (8.41)$$

Аналогично,

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p \left(\frac{m}{E(\mathbf{p})} \right)^{1/2} \sum_{r=1}^2 \{ b_r^*(\mathbf{p}) \tilde{\omega}^r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + d_r(\mathbf{p}) \tilde{v}^r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \}, \quad (8.42)$$

$$i\partial_\mu \tilde{\psi}(x) \gamma^\mu + m \tilde{\psi}(x) = 0. \quad (8.43)^1$$

1) Обсуждение релятивистской инвариантности облегчается, если ввести операторы $b'_r(\mathbf{p}) = \sqrt{E(\mathbf{p})} b_r(\mathbf{p})$, $d'_s(\mathbf{p}) = \sqrt{E(\mathbf{p})} d_s(\mathbf{p})$, так что интегрирование в (8.40) — (8.42) проводится по гиперполюду $p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ ($p_0 > 0$) с использованием инвариантной меры $d^3 p_0/p_0$. Перестановочные соотношения (инвариантные) для штрихованных операторов суть $[b'_r(\mathbf{p}), b'_s(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') p_0$ и т. д., где $p_0 = E(\mathbf{p})$.

Положительно- и отрицательно-частотные части операторов $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ даются выражениями

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{p_0 > 0} d^3 p \left(\frac{m}{E(p)} \right)^{1/2} \sum_{r=1}^2 b_r(p) \omega^r(p) e^{-ip \cdot x} \quad (8.44)$$

и есть оператор уничтожения фермиона,

$$\psi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{p_0 > 0} d^3 p \left(\frac{m}{E(p)} \right)^{1/2} \sum_{r=1}^2 d_r^*(p) v^r(p) e^{ip \cdot x} \quad (8.45)$$

и есть оператор рождения антифермиона,

$$\tilde{\psi}^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{p_0 > 0} d^3 p \left(\frac{m}{E(p)} \right)^{1/2} \sum_{r=1}^2 b_r^*(p) \tilde{\omega}^r(p) e^{ip \cdot x} \quad (8.46)$$

и есть оператор рождения фермиона,

$$\tilde{\psi}^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{p_0 > 0} d^3 p \left(\frac{m}{E(p)} \right)^{1/2} \sum_{r=1}^2 d_r(p) \tilde{v}^r(p) e^{-ip \cdot x} \quad (8.47)$$

и есть оператор уничтожения антифермиона. Из равенств (8.44) — (8.47) следует, что

$$\overline{\psi^{(+)}(x)} = \tilde{\psi}^{(-)}(x) \quad (8.48)$$

и

$$\overline{\tilde{\psi}^{(-)}(x)} = \psi^{(+)}(x). \quad (8.49)$$

С помощью операторов в конфигурационном пространстве вакуум $|\Phi_0\rangle$ характеризуется условием

$$\psi^{(+)}(x) |\Phi_0\rangle = \tilde{\psi}^{(+)}(x) |\Phi_0\rangle = 0. \quad (8.50)$$

Перестановочные соотношения для положительно- и отрицательно-частотных частей ψ и $\tilde{\psi}$ имеют вид

$$\begin{aligned} [\psi^{(+)}(x), \psi^{(-)}(x')]_+ &= [\tilde{\psi}^{(-)}(x), \tilde{\psi}^{(+)}(x')]_+ = 0, \\ [\tilde{\psi}^{(+)}(x), \psi^{(+)}(x')]_+ &= [\tilde{\psi}^{(-)}(x), \psi^{(-)}(x')]_+ = 0, \end{aligned} \quad (8.51)$$

тогда как

$$\begin{aligned} [\psi_{\alpha}^{(+)}(x), \tilde{\psi}_{\beta}^{(-)}(x')]_+ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \int d^3 p' \left(\frac{m^2}{E(p)E(p')} \right)^{1/2} \times \\ &\times \sum_{r,s=1}^2 [b_r(p), b_s^*(p')]_+ \omega_{\alpha}^r(p) \tilde{\omega}_{\beta}^s(p') e^{-ip \cdot x + ip' \cdot x'} = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E(p)} (\not{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x-x')} = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} \int_{p_0 > 0} \frac{d^3 p}{p_0} e^{-ip \cdot (x-x')} = \\ &= i(\gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} \Delta^{(+)}(x-x'; m). \end{aligned} \quad (8.52)$$

При выводе последнего выражения мы использовали равенства (8.29), (4.150) и (7.75). Часто встречающееся выражение $-(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta(x)$ мы будем обозначать через $S(x)$:

$$-(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta(x - x'; m) = S(x - x'). \quad (8.53)$$

Тогда перестановочные соотношения (8.52) принимают вид

$$[\Psi_\alpha^{(+)}(x), \tilde{\Psi}_\beta^{(+)}(x')]_+ = -iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x - x'), \quad (8.54)$$

где

$$S^{(+)}(x) = -(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta^{(+)}(x). \quad (8.55)$$

Аналогично получаем

$$[\Psi_\alpha^{(-)}(x), \tilde{\Psi}_\beta^{(-)}(x')]_+ = -iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x - x'), \quad (8.56)$$

где

$$S^{(-)}(x) = -(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta^{(-)}(x), \quad (8.57)$$

и вообще

$$[\Psi_\alpha(x), \tilde{\Psi}_\beta(x')]_+ = -iS_{\alpha\beta}(x - x'), \quad (8.58)$$

причем

$$S(x) = S^{(+)}(x) + S^{(-)}(x). \quad (8.59)$$

Одновременные перестановочные соотношения будут иметь вид

$$[\Psi_\alpha(x), \tilde{\Psi}_\beta(x')]_+ |_{x_0=x'_0} = -\gamma_{\alpha\beta}^0 \partial_0 \Delta(x - x') |_{x_0=x'_0} = +\gamma_{\alpha\beta}^0 \delta^{(3)}(x - x'), \quad (8.60)$$

если вспомнить, что $\Delta(0, x) = 0$ и $\partial_0 \Delta(x) |_{x_0=0} = -\delta^{(3)}(x)$. Умножая (8.60) на γ^0 , получаем канонические антикоммутиационные соотношения для дираковского поля:

$$[\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta^*(x')]_+ |_{x_0=x'_0} = \delta^{(3)}(x - x'). \quad (8.61)$$

Далее будут важны следующие свойства функции $S(x)$:

$$\begin{aligned} (i \not{\partial} - m) S(x) &= -(i \not{\partial} - m) (i \not{\partial} + m) \Delta(x) = \\ &= +(\square + m^2) \Delta(x) = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.62)$$

[что согласуется с равенством (8.58) и с тем, что $\Psi(x)$, $\tilde{\Psi}(x)$ подчиняются уравнениям Дирака] и

$$S(x) |_{x_0=0} = i\gamma^0 \delta(x). \quad (8.63)$$

Дифференциальное уравнение (8.62) и начальное условие (8.63) однозначно определяют функцию S . Эта сингулярная функция играет роль функции Грина при решении задачи с заданными начальными значениями.

Доказательство: Теорема Гаусса утверждает, что

$$\int_{\Omega} \partial^\mu F_\mu(x) d^4x = \int_{\Sigma} d\sigma^\mu(x') F_\mu(x'), \quad (8.64)$$

где Σ — поверхность, ограничивающая объем Ω . Если в качестве F выбрать

$$F_\mu(x') = S(x - x') \gamma_\mu \Psi(x'), \quad (8.65)$$

то, поскольку S и ψ удовлетворяют уравнению Дирака, $\partial^\mu F_\mu(x) = 0$, так что

$$\int_{\sigma_1} S(x-x') \gamma^\mu \psi(x') d\sigma_\mu(x') = \int_{\sigma_2} S(x-x') \gamma^\mu \psi(x') d\sigma_\mu(x'), \quad (8.66)$$

где σ_1 и σ_2 — пространственно-подобные поверхности. (Мы приняли, что интеграл по поверхности, соединяющей σ_1 и σ_2 , равен нулю, так как предполагается, что эта поверхность находится на больших пространственных расстояниях, где поля обращаются в нуль.) Если в качестве σ_2 выбрать плоскость $x^0 = \text{const}$, тогда, используя (8.63), имеем

$$\psi(x) = -i \int_{\sigma_1} S(x-x') \gamma^\mu \psi(x') d\sigma_\mu(x'). \quad (8.67)$$

Такое же выражение получается и для любой другой пространственно-подобной поверхности, проходящей через x^0 , так как

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \int_{\sigma} S(x-x') \gamma^\mu \psi(x') d\sigma_\mu(x') = 0. \quad (8.68)$$

Пусть читатель проверит, что $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ снова являются операторами проектирования для положительных и отрицательных частот $\psi(x)$.

Определим зарядово-сопряженный оператор ψ_c соотношением

$$\psi_c(x) = C \tilde{\psi}^T(x), \quad (8.69)$$

где C — определенная ранее унитарная матрица, обладающая свойствами

$$C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T \quad (8.70a)$$

и

$$C^T = -C. \quad (8.70b)$$

Тогда

$$\psi(x) = C [\tilde{\psi}_c(x)]^T, \quad (8.71)$$

так что

$$\psi^{(+)}(x) = C [\tilde{\psi}_c^{(+)}(x)]^T \quad (8.72)$$

и

$$\tilde{\psi}^{(+)}(x) = [C^{-1} \psi_c^{(+)}(x)]^T. \quad (8.73)$$

Интерпретация операторов $\psi_c^{(\pm)}(x)$ становится ясной, если разложить их по плоским волнам с помощью операторов d , d^* . Так, используя равенство (4.233), находим

$$\begin{aligned} \psi_c^{(+)}(x) &= C [\tilde{\psi}^{(+)}(x)]^T = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2} \sum_{r=1}^2 d_r(\mathbf{p}) C \tilde{v}_r^T(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2} \sum_{r=1}^2 d_r(\mathbf{p}) u_{cr}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \end{aligned} \quad (8.74)$$

и точно так же

$$\tilde{\psi}_c^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2} \sum_{r=1}^2 d_r^*(\mathbf{p}) \tilde{u}_{cr}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}. \quad (8.75)$$

Следовательно, $\psi_c^{(+)}$ — оператор уничтожения, а $\overline{\psi}_c^{(+)}$ — оператор рождения античастицы. Перестановочные соотношения для них имеют вид

$$[\psi_{c\alpha}^{(+)}(x), \overline{\psi}_{c\beta}^{(+)}(x')]_+ = -iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'), \quad (8.76)$$

что следует из равенства

$$[C^{-1}S^{(\pm)}(-x)C]^T = -S^{(\mp)}(x). \quad (8.77)$$

И вообще можно проверить, что

$$[\psi_c(x), \overline{\psi}_c(x')]_+ = -iS(x-x'), \quad (8.78)$$

так как

$$[C^{-1}S(-x)C]^T = -S(x). \quad (8.79)$$

Операторы числа частиц, выраженные с помощью операторов в конфигурационном пространстве, даются равенствами

$$N^{(+)} = \int d^3x \overline{\psi}^{(+)}(x) \gamma^0 \psi^{(+)}(x) = \int_{\sigma} d\sigma^\mu(x) \overline{\psi}^{(+)}(x) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x) \quad (8.80)$$

и

$$N^{(-)} = \int_{\sigma} d\sigma^\mu(x) \overline{\psi}_c^{(-)}(x) \gamma_\mu \psi_c^{(-)}(x). \quad (8.81)$$

Выражение для полного заряда

$$Q = \int d\sigma^\mu(x) j_\mu(x) = -e(N^{(+)} - N^{(-)}) \quad (8.82)$$

вместе с классическим выражением для тока (8.6) предполагает следующее определение оператора тока:

$$j_\mu(x) = -e : \overline{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : = -eN(\tilde{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)), \quad (8.83)$$

где нормальное произведение по определению означает, что произведение операторов рождения и уничтожения записывается в таком виде, что все операторы рождения стоят слева от всех операторов уничтожения, а нужное упорядочение выполняется так, как будто все *антикоммутаторы* равны нулю. Таким образом, N включает изменение знака, возникающее при изменении порядка антикоммутирующих переменных поля. Например,

$$N(\psi^{(+)}(x) \overline{\psi}^{(-)}(y)) = -N(\tilde{\psi}^{(-)}(y) \psi^{(+)}(x)) = -\tilde{\psi}^{(-)}(y) \psi^{(+)}(x), \quad (8.84)$$

$$\begin{aligned} N(\psi^{(+)}(x) \psi^{(+)}(y)) &= -N(\psi^{(+)}(y) \psi^{(+)}(x)) = -\psi^{(+)}(y) \psi^{(+)}(x) = \\ &= \psi^{(+)}(x) \psi^{(+)}(y). \end{aligned} \quad (8.85)$$

По определению, для нормального произведения справедлив распределительный закон.

Используя определение нормального произведения и перестановочные соотношения, любое операторное выражение можно записать с помощью нормальных произведений. Например, разбиение $\tilde{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(y)$

на нормальные произведения достигается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\psi}_\alpha^{(+)}(x) \psi_\beta(y) &= (\widetilde{\psi}_\alpha^{(+)}(x) + \widetilde{\psi}_\alpha^{(-)}(x)) (\psi_\beta^{(+)}(y) + \psi_\beta^{(-)}(y)) = \\
 &= \widetilde{\psi}_\alpha^{(+)}(x) \psi_\beta^{(+)}(y) - \psi_\beta^{(-)}(y) \widetilde{\psi}_\alpha^{(+)}(x) - iS_{\beta\alpha}^{(-)}(y-x) + \\
 &\quad + \widetilde{\psi}_\alpha^{(-)}(x) \psi_\beta^{(+)}(y) + \widetilde{\psi}_\alpha^{(-)}(x) \psi_\beta^{(-)}(y) = \\
 &= N (\widetilde{\psi}_\alpha^{(+)}(x) \psi_\beta^{(+)}(y) + \widetilde{\psi}_\alpha^{(+)}(x) \psi_\beta^{(-)}(y) + \widetilde{\psi}_\alpha^{(-)}(x) \psi_\beta^{(+)}(y) + \\
 &\quad + \widetilde{\psi}_\alpha^{(-)}(x) \psi_\beta^{(-)}(y)) - iS_{\beta\alpha}^{(-)}(y-x) = \\
 &= N (\widetilde{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(y)) - iS_{\beta\alpha}^{(-)}(y-x). \tag{8.86}
 \end{aligned}$$

При переходе к последней строке мы использовали распределительный закон. Используя аналогичные алгебраические манипуляции, легко вывести:

$$\begin{aligned}
 \psi_\alpha(x) \widetilde{\psi}_\beta(y) &= N (\psi_\alpha(x) \widetilde{\psi}_\beta(y)) - iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-y), \\
 \psi(x) \psi(y) &= N (\psi(x) \psi(y)), \\
 \widetilde{\psi}(x) \widetilde{\psi}(y) &= N (\widetilde{\psi}(x) \widetilde{\psi}(y)). \tag{8.87}
 \end{aligned}$$

Среднее по вакууму от любого нормального произведения равно нулю, в частности, равно нулю вакуумное среднее от оператора тока, определенного равенством (8.83). Этого и следует ожидать от любого удовлетворительного определения оператора тока. Отметим, что это не имеет места для выражения $e\widetilde{\psi}\gamma_\mu\psi(x)$, среднее по вакууму от которого с использованием (8.86) есть

$$\begin{aligned}
 -e \langle \widetilde{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \rangle_0 &= -e \lim_{x \rightarrow x'} \sum_{\alpha\beta} (\Phi_0, \widetilde{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x') \Phi_0) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} = \\
 &= ie \lim_{x \rightarrow x'} \sum_{\alpha\beta} S_{\beta\alpha}^{(-)}(x-x') (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} = \\
 &= ie \text{Sp} (\gamma_\mu S^{(-)}(0)), \tag{8.88}
 \end{aligned}$$

т. е. бесконечно. В действительности эта бесконечность при $\mu = 0$ равна вкладу от заряда «фона» (т. е. вкладу всех занятых состояний с отрицательной энергией). Разбиение оператора тока на операторы рождения и уничтожения

$$\begin{aligned}
 j_\mu(x) &= -e (\overleftarrow{\psi}^{(+)}(x) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x) - \overleftarrow{\psi}^{(+)}(x) \gamma_\mu \psi_c^{(+)}(x) + \\
 &\quad + C^{-1} \psi_c^{(+)}(x) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x) + \overleftarrow{\psi}^{(+)}(x) \gamma_\mu C \overleftarrow{\psi}_c^{(+)}(x)) \tag{8.89}
 \end{aligned}$$

показывает, что опять присутствуют флуктуационные члены, т. е. члены, отвечающие рождению и уничтожению пар. При интегрировании по некоторой пространственно-подобной поверхности эти члены обращаются в нуль в силу ортогональности положительно- и отрицательно-частотных решений уравнения Дирака, так что $\int_\sigma j_\mu(x) d\sigma^\mu(x)$ сводится к выражению (8.82) для полного заряда (см. например, [676, 677]).

Пространство состояний, соответствующее m частицам и n античастицам, находящимся на пространственно-подобной поверхности σ , натянуто на базисные векторы

$$(m! n!)^{-1/2} \overleftarrow{\psi}^{(+)}(x_1) \dots \overleftarrow{\psi}^{(+)}(x_m) \overleftarrow{\psi}_c^{(+)}(y_1), \dots \overleftarrow{\psi}_c^{(+)}(y_n) | \Phi_0 \rangle,$$

где все x и y лежат на σ . В общем случае состояние с неопределенным числом частиц и античастиц имеет вид

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = & \Psi^{(0,0)} |0\rangle + \dots + (n!m!)^{-1} \prod_{j=1}^m \left(\int d\sigma^{\mu_j} (x_j) \overline{\psi}^{(+)}(x_j) \gamma_{\mu_j} \right) \times \\ & \times \prod_{k=1}^n \left(\int d\sigma^{\nu_k} (y_k) \overline{\psi}_c^{(+)}(y_k) \gamma_{\nu_k} \right) \Psi^{(m,n)}(x_1, x_2, \dots, x_m; y_1 \dots y_n) |0\rangle + \dots, \end{aligned} \quad (8.90)$$

где предполагается, что амплитуда $\Psi^{(m,n)}$ для m частиц и n античастиц имеет для каждого аргумента спинорный индекс с четырьмя значениями, на который действуют матрицы γ [см., например, равенство (8.92)]. Амплитуда $\Psi^{(m,n)}(x_1, \dots; \dots y_n)$ антисимметрична по переменным x_i и y_j в отдельности, удовлетворяет по каждой из этих переменных уравнению Дирака и содержит только положительные частоты, ибо

$$\begin{aligned} \Psi^{(m,n)}(x_1, \dots, x_m; y_1 \dots y_n) = \\ = \langle 0 | N(\psi(x_1) \dots \psi(x_m) \psi_c(y_1) \dots \psi_c(y_n)) | \Psi \rangle = \\ = \langle 0 | \psi^{(+)}(x_1) \dots \psi^{(+)}(x_m) \psi_c^{(+)}(y_1) \dots \psi_c^{(+)}(y_n) | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (8.91)$$

Неприводимое представление перестановочных соотношений, которое характеризуется существованием состояния без частиц, дается выражениями

$$\begin{aligned} (\psi_\alpha^{(+)}(x) \Psi)^{(m,n)}(x_1 \alpha_1, \dots, x_m \alpha_m; y_1 \beta_1, \dots, y_n \beta_n) = \\ = \sqrt{m+1} \Psi^{(m+1,n)}(x\alpha, x_1 \alpha_1, \dots, x_m \alpha_m; y_1 \beta_1, \dots, y_n \beta_n), \end{aligned} \quad (8.92)$$

$$\begin{aligned} (\overline{\psi}_\alpha^{(+)}(x) \Psi)^{(m,n)}(x_1 \alpha_1, \dots, x_m \alpha_m; y_1 \beta_1, \dots, y_n \beta_n) = \\ = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^4 (-1)^{j+1} S_{\alpha j \alpha}^{(+)}(x_j - x) \times \\ \times \Psi^{(m-1,n)}(x_1 \alpha_1, \dots, x_{j-1} \alpha_{j-1}, x_{j+1} \alpha_{j+1} \dots, x_m \alpha_m; y_1 \beta_1 \dots y_n \beta_n) \end{aligned} \quad (8.93)$$

и

$$\begin{aligned} (\psi_{\beta}^{(+)}(y) \Psi)^{(m,n)}(x_1 \alpha_1, \dots, x_m \alpha_m; y_1 \beta_1, \dots, y_n \beta_n) = \\ = \sqrt{n+1} (-1)^m \Psi^{(m,n+1)}(x_1 \alpha_1, \dots, x_m \alpha_m; y\beta, y_1 \beta_1, \dots, y_n \beta_n), \end{aligned} \quad (8.94)$$

$$\begin{aligned} (\overline{\psi}_{\beta}^{(+)}(y) \Psi)^{(m,n)}(x_1 \alpha_1, \dots, x_m \alpha_m; y_1 \beta_1, \dots, y_n \beta_n) = \\ = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+m+1} S_{\beta j \beta}^{(+)}(y_j - y) \times \\ \times \Psi^{(m,n-1)}(x_1 \alpha_1, \dots, x_m \alpha_m; y_1 \beta_1, \dots, y_{j-1} \beta_{j-1}, y_{j+1} \beta_{j+1}, \dots, y_n \beta_n). \end{aligned} \quad (8.95)$$

Множитель $(-1)^m$ в выражениях для зарядово-сопряженных операторов обеспечивает выполнение соотношений антикоммутации $\{\psi^{(+)}(x), \psi^{(+)}(x')\} = 0$ и т. д. (Относительно других представлений перестановочных соотношений см. [851].)

Легко установить связь обсуждаемой теории поля с теорией Дирака для одной свободной частицы, описываемой спинором с положительной

энергией. Пусть $|\Psi\rangle$ — вектор, описывающий одну частицу. Тогда единственной не равной нулю амплитудой будет

$$\Psi^{(1,0)}(x) = (\Phi_0, \psi(x)\Psi). \quad (8.96)$$

Эта амплитуда удовлетворяет уравнению Дирака, так как ему удовлетворяет $\psi(x)$. Таким образом, $\Psi^{(1,0)}(x)$ есть «одночастичная» дираковская волновая функция, которую мы подробно рассматривали в гл. 4. Отметим, что поскольку $\psi^{(+)}(x)|\Phi_0\rangle = \tilde{\psi}^{(+)}(x)|\Phi_0\rangle = 0$, то, подставив равенство (8.40) в (8.96), получим

$$\Psi^{(1,0)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=1}^2 \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E_p}} (\Phi_0, b_r(\mathbf{p})\Psi) w^r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \quad (8.97)$$

т. е., в согласии с нашим предыдущим изложением, $\Psi^{(1,0)}(x)$ есть суперпозиция решений уравнения Дирака лишь с положительной энергией. Здесь это автоматическое следствие того, что вакуум есть состояние с наименьшей энергией. Аналогично, если $|\Psi\rangle$ есть состояние одной античастицы, то амплитуда $\Psi^{(0,1)}(x)$

$$\begin{aligned} \Psi^{(0,1)}(x) &= (\Phi_0, \psi_c(x)\Psi) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=1}^2 \int d^3q \sqrt{\frac{m}{E_q}} (\Phi_0, d_r(\mathbf{q})\Psi) u_c^r(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} \end{aligned} \quad (8.98)$$

есть амплитуда вероятности найти античастицу. Отметим, что $\Psi^{(0,1)}(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака и также представляет собой суперпозицию решений с положительной энергией, ибо зависимость от времени имеет вид $\exp(-iq_0x_0)$, причем $q_0 > 0$.

§ 3. Трансформационные свойства

При обсуждении релятивистской инвариантности в гл. 4 мы видели, что если одночастичная волновая функция при неоднородных преобразованиях Лоренца $x' = \Lambda x + a$ преобразуется согласно равенству

$$\Psi^{(1,0)}(x') = S(\Lambda) \Psi^{(1,0)}(\Lambda^{-1}(x' - a)), \quad (8.99)$$

где $S(\Lambda)$ — неособенная 4×4 матрица, действующая на спинорные индексы функции $\Psi^{(1,0)}$ и удовлетворяющая условиям

$$S^{-1} \gamma^\lambda S = \Lambda^\lambda_\nu \gamma^\nu, \quad (8.100a)$$

$$\det S = 1, \quad (8.100b)$$

тогда уравнение Дирака для одной частицы сохраняет свой вид (форминвариантно). Определим теперь трансформационные свойства операторов поля, принимая следующий закон преобразования для (m, n) -амплитуды, описывающей m частиц и n античастиц:

$$\begin{aligned} \langle x_1 \alpha_1, \dots, y_n \beta_n | U(a, \Lambda) | \Psi \rangle &= (U(a, \Lambda) \Psi)^{(m,n)}(x_1 \alpha_1, \dots, x_m \alpha_m; y_1 \beta_1, \dots, y_n \beta_n) = \\ &= \sum_{\{\alpha'\}} \prod_{j=1}^m S(\Lambda)_{\alpha_j \alpha'_j} \prod_{k=1}^n S(\Lambda)_{\beta_k \beta'_k} \times \\ &\times \Psi^{(m,n)}(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \alpha'_1, \dots; \dots, \Lambda^{-1}(y_n - a), \beta'_n). \end{aligned} \quad (8.101)$$

Как и при обсуждении в гл. 7, мы примем здесь шредингеровский тип преобразования, при котором преобразуется волновая функция (т. е. вектор состояния), но наблюдатели как в системе отсчета S , так и в системе S' используют *тот же* набор операторов. Такая же процедура, как и в случае скалярного поля, дает

$$\begin{aligned} & (U(a, \Lambda) \psi_\alpha(x) U(a, \Lambda)^{-1} U(a, \Lambda) \Psi)^{(m, n)}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = \\ & = \sum_{\alpha=1}^4 S(\Lambda)_{\alpha\alpha'}^{-1} (\psi_{\alpha'}(\Lambda x + a) U(a, \Lambda) \Psi)^{(m, n)}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \quad (8.102)$$

Здесь было использовано тождество

$$S(\Lambda) S^{(*)} (\Lambda^{-1}(y-a) - x) C = S^{(*)} (y - (\Lambda x + a)) C S(\Lambda)^{-1T}, \quad (8.103)$$

справедливое для ограниченных преобразований Лоренца, и выражения (8.92) — (8.95). Докажем равенство (8.103). Из (8.55) и (8.52) следует

$$S^{(*)}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{p_0 > 0} \frac{d^3 p}{p_0} (p + m) e^{-ip \cdot x}, \quad (8.104)$$

откуда

$$\begin{aligned} S^{(*)} (\Lambda^{-1}(y-a) - x) C &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{p_0} (p + m) C e^{-i\Lambda p \cdot \Lambda(\Lambda^{-1}(y-a) - x)} = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{p_0} [\gamma \cdot (\Lambda^{-1} p) + m] C e^{ip \cdot (y - \Lambda x - a)}. \end{aligned} \quad (8.105)$$

Используя (8.100), находим

$$\begin{aligned} \gamma \cdot (\Lambda^{-1} p) C &= \Lambda_{\nu\mu} p^\nu \gamma^\mu C = S(\Lambda)^{-1} \gamma_\nu S(\Lambda) C p^\nu = \\ &= S(\Lambda)^{-1} \gamma_\nu C [S(\Lambda)^T]^{-1} p^\nu. \end{aligned} \quad (8.106)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S^{(*)} (\Lambda^{-1}(y-a) - x) C &= \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} S(\Lambda)^{-1} \int \frac{d^3 p}{p_0} (p + m) e^{-ip \cdot (y - \Lambda x - a)} C S(\Lambda)^{-1T}. \end{aligned} \quad (8.107)$$

А это и есть равенство (8.103).

Таким образом, при преобразованиях ограниченной группы Лоренца

$$U(a, \Lambda) \psi_\alpha(x) U(a, \Lambda)^{-1} = \sum_{\alpha=1}^4 S(\Lambda)_{\alpha\alpha'}^{-1} \psi_{\alpha'}(\Lambda x + a). \quad (8.108)$$

Если взять равенство, эрмитово сопряженное к (8.108), и умножить его на γ^0 , то получим¹⁾

$$U(a, \Lambda) \tilde{\psi}(x) U(a, \Lambda)^{-1} = \tilde{\psi}(\Lambda x + a) S(\Lambda), \quad (8.109)$$

откуда также следует, что

$$U(a, \Lambda) \psi_c(x) U(a, \Lambda)^{-1} = S(\Lambda)^{-1} \psi_c(\Lambda x + a). \quad (8.110)$$

Равенства (8.108) — (8.110) обеспечивают инвариантность лагранжиана свободного поля и перестановочных соотношений при ограниченных преобразованиях Лоренца.

¹⁾ Следует воспользоваться равенством $S\gamma^0 S^* = \gamma^0$, справедливым для преобразований ограниченной группы Лоренца [см. равенство (4.64) и далее]. — *Прим. ред.*

Закон преобразования операторов поля при пространственном отражении, $x \rightarrow x' = i_s x$, определим следующим образом:

$$U(i_s) \psi(x) U(i_s)^{-1} = \eta_P \gamma_0 \psi(i_s x) \quad (8.111a)$$

и

$$U(i_s) \tilde{\psi}(x) U(i_s)^{-1} = \bar{\eta}_P \tilde{\psi}(i_s x) \gamma_0. \quad (8.111б)$$

Лагранжиан и перестановочные соотношения для свободных полей будут инвариантны относительно определенной выше операции $U(i_s)$, если $|\eta_P|^2 = 1$, а $U(i_s)$ — унитарный оператор. Два последовательных отражения можно рассматривать либо как возвращение к первоначальной системе координат, либо как поворот на угол 2π . Поскольку при повороте на 2π поле Ферми преобразуется как $\psi \rightarrow -\psi$, квадрат η_P можно положить равным либо $+1$, либо -1 , т. е. $\eta_P^2 = \pm 1$, так что $\eta_P = \pm 1$ или $\pm i$ [870] ¹⁾. Вакуум, по определению, инвариантен относительно $U(i_s)$:

$$U(i_s) |0\rangle = |0\rangle. \quad (8.112)$$

Если выбрать $\eta_P = \pm i$, то зарядово-сопряженный оператор ψ_c будет иметь такие же трансформационные свойства, что и ψ [657], за исключением того, что фазовый множитель η заменяется множителем $\bar{\eta}$:

$$U(i_s) \psi_c(x) U(i_s)^{-1} = \bar{\eta}_P \gamma_0 \psi_c(i_s x). \quad (8.113)$$

Мы всегда будем накладывать это дополнительное условие, так что η_P будет равно либо $+i$, либо $-i$.

Закон преобразования операторов $b_s(\mathbf{p})$ и $d_s(\mathbf{p})$ [где s в соответствии с равенствами (4.118a) и (4.118б) обозначает одно из двух возможных значений z -компоненты спина] получается подстановкой разложений (8.40) и (8.41) в (8.111a) и (8.111б). В результате находим

$$U(i_s) b_s(\mathbf{p}) U(i_s)^{-1} = \eta_P b_s(-\mathbf{p}) \quad (8.114a)$$

и

$$U(i_s) d_s(\mathbf{p}) U(i_s)^{-1} = -\bar{\eta}_P d_s(-\mathbf{p}). \quad (8.114б)$$

Здесь мы использовали свойства решений уравнения Дирака:

$$\gamma^0 \omega_r(-\mathbf{p}) = \omega_r(\mathbf{p}) \quad (8.115)$$

и

$$\gamma^0 v_r(-\mathbf{p}) = -v_r(\mathbf{p}). \quad (8.116)$$

Одночастичные состояния при пространственном отражении преобразуются следующим образом:

$$U(i_s) b_s^*(\mathbf{p}) |0\rangle = \bar{\eta}_P b_s^*(-\mathbf{p}) |0\rangle = \bar{\eta}_P |-\mathbf{p}, s\rangle, \quad (8.117)$$

$$U(i_s) d_t^*(\mathbf{q}) |0\rangle = -\eta_P d_t^*(-\mathbf{q}) |0\rangle = -\eta_P |-\mathbf{q}, t\rangle. \quad (8.118)$$

Итак, пространственное отражение преобразует состояние частицы с импульсом \mathbf{p} в состояние с импульсом $-\mathbf{p}$ и оставляет неизменным направление спина. Поэтому оператор $b_s^*(\mathbf{p})$, соответствующий рождению частицы в состоянии с определенной спиральностью, при спине, направленном по импульсу, будет при операции $U(i_s)$ преобразовываться в $\bar{\eta}_P b_s^*(-\mathbf{p})$,

¹⁾ См. также работу Жаркова [892]. — Прим. ред.

т. е. в оператор рождения частицы с импульсом — \mathbf{p} и спином, направленным антипараллельно импульсу. Обратим внимание на знак минус в равенстве (8.114б). Наличие этого знака ведет к тому, что состояние, содержащее одну частицу и одну античастицу в состоянии с равным нулю орбитальным моментом количества движения (S -состоянии), будет при пространственном отражении приобретать множитель $-|\eta_P|^2 = -1$. Другими словами, такое состояние имеет отрицательную четность по отношению к вакууму. Следовательно, фермион и антифермион имеют противоположные внутренние четности, в отличие от бозе-частиц у которых частица и античастица имеют одинаковую внутреннюю четность.

Таблица 2

i	Скаляр	Вектор	Тензор	Псевдовектор (аксиальный вектор)	Псевдоскаляр
O_i	1	γ_μ	$\sigma_{\mu\nu}$	$\gamma_5\gamma_\mu$	γ_5
ε_i	1	$\begin{cases} +1 (\mu=0) \\ -1 (\mu=1, 2, 3) \end{cases}$	$\begin{cases} +1 (\mu, \nu=1, 2, 3) \\ -1 (\mu \text{ или } \nu=0) \end{cases}$	$\begin{cases} -1 (\mu=0) \\ +1 (\mu=1, 2, 3) \end{cases}$	-1

Законы преобразования (8.111) операторов поля $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ ведут к определенным трансформационным свойствам билинейных комбинаций $\tilde{\psi}(x)O_i\psi(x)$ при пространственном отражении. Здесь $O_i = 1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_5\gamma_\mu, \gamma_5$. Эти свойства приведены в табл. 2, где величина ε_i определяется равенством

$$\begin{aligned} U(i_s)\tilde{\psi}(x)O_i\psi(x)U(i_s) &= |\eta_P|^2\tilde{\psi}(i_sx)\gamma_0O_i\gamma_0\psi(i_sx) = \\ &= \varepsilon_i\tilde{\psi}(i_sx)O_i\psi(i_sx). \end{aligned} \quad (8.119)$$

При операции зарядового сопряжения, когда каждое состояние переходит в состояние, где все частицы заменены античастицами с такой же энергией, импульсом и проекцией спина, операторы поля, по определению, преобразуются согласно равенствам

$$U_c b_s^*(\mathbf{p}) U_c^{-1} = \bar{\eta}_c d_s^*(\mathbf{p}) \quad (8.120a)$$

и

$$U_c d_s^*(\mathbf{p}) U_c^{-1} = \eta_c b_s^*(\mathbf{p}), \quad (8.120б)$$

или, что то же самое,

$$U_c \psi(x) U_c^{-1} = \eta_c \psi_c(x) = \eta_c C \tilde{\psi}^T(x) \quad (8.120в)$$

и

$$U_c \tilde{\psi}(x) U_c^{-1} = \bar{\eta}_c \tilde{\psi}_c(x) = -\bar{\eta}_c \psi^T(x) C^*. \quad (8.120г)$$

Инвариантность перестановочных соотношений требует, чтобы множитель η_c был равен по модулю единице и чтобы оператор U_c был унитарным. Для проверки инвариантности перестановочных соотношений используется равенство

$$C^{-1}S(x-x')C = -S^T(x'-x), \quad (8.121)$$

которое доказывается таким же способом, как и равенство (8.103). Постулируется, что вакуум инвариантен относительно операции U_c , т. е. $U_c|0\rangle = |0\rangle$.

Теория будет инвариантной относительно зарядового сопряжения, если можно так выбрать фазовый множитель η_c , что гамильтониан H будет инвариантен относительно U_c , т. е. если $U_c H U_c^{-1} = H$. Так как при операции зарядового сопряжения произведение операторов преобразуется в произведение эрмитово сопряженных операторов, то окончательный порядок множителей в общем случае отличается от начального. В частности, не инвариантен гамильтониан, записанный в виде (8.9) или (8.10). Чтобы сделать теорию инвариантной относительно зарядового сопряжения, необходимо либо антисимметризовать множители в гамильтониане [518, 714], либо постулировать запись в виде нормального произведения, т. е. нужно писать

$$H = -\frac{i}{2} \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [\tilde{\psi}\gamma^0, \partial_0\psi] - \frac{1}{2} [\partial_0\tilde{\psi}\gamma^0, \psi] \right\}, \quad (8.122a)$$

или

$$H = \frac{i}{2} \int d^3x : \tilde{\psi}\gamma^0\partial_0\psi - \partial_0\tilde{\psi}\gamma^0\psi :. \quad (8.122б)$$

В теории свободного поля оба способа эквивалентны. Чтобы обеспечить инвариантность теории относительно зарядового сопряжения в случае взаимодействующих полей в гейзенберговской картине, когда нельзя столь непосредственно определить нормальное произведение, обычно используют антисимметризацию. Мы предоставим читателю в качестве упражнения получить трансформационные свойства билинейных комбинаций $\tilde{\psi}O\psi$ при зарядовом сопряжении. Отметим только, что

$$U_c j_\mu(x) U_c^{-1} = -j_\mu(x). \quad (8.123)$$

Закон преобразования операторов поля при обращении времени определим следующим образом:

$$U(i_t) \psi_\alpha(x) U(i_t)^{-1} = \eta_T \sum_{\alpha'=1}^4 (C^{-1}\gamma_5)_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha'}(i_t x) \quad (8.124a)$$

и

$$U(i_t) \tilde{\psi}_\alpha(x) U(i_t)^{-1} = \bar{\eta}_T \sum_{\alpha'=1}^4 \tilde{\psi}_{\alpha'}(i_t x) (\gamma_5 C)_{\alpha'\alpha}. \quad (8.124б)$$

Чтобы сохранить инвариантность перестановочных соотношений, оператор $U(i_t)$ должен быть антиунитарным, а множитель η_T по модулю должен быть равен единице. Можно проверить, что гамильтониан H инвариантен в том смысле, что

$$U(i_t) \mathcal{H}(x) U(i_t)^{-1} = \mathcal{H}(i_t x) \quad \text{и} \quad U(i_t) H(t) U(i_t)^{-1} = H(-t).$$

Трансформационные свойства билинейных ковариантных комбинаций при обращении времени следующие [515]:

$$U(i_t) \tilde{\psi}(x) \psi(x) U(i_t)^{-1} = \tilde{\psi}(i_t x) \psi(i_t x), \quad (8.125)$$

$$U(i_t) \tilde{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) U(i_t)^{-1} = -\tilde{\psi}(i_t x) \gamma_5 \psi(i_t x), \quad (8.126)$$

$$U(i_t) \tilde{\psi}(x) \begin{Bmatrix} i\gamma_5\gamma^0 \\ i\gamma_5\gamma^i \end{Bmatrix} \psi(x) U(i_t)^{-1} = \tilde{\psi}(i_t x) \begin{Bmatrix} i\gamma_5\gamma^0 \\ -i\gamma_5\gamma^i \end{Bmatrix} \psi(i_t x), \quad (8.127)$$

$$U(i_t) \tilde{\psi}(x) \left\{ \begin{matrix} \gamma^0 \\ \gamma^i \end{matrix} \right\} \psi(x) U(i_t)^{-1} = \tilde{\psi}(i_t x) \left\{ \begin{matrix} \gamma^0 \\ -\gamma^i \end{matrix} \right\} \psi(i_t x), \quad (8.128)$$

$$U(i_t) \tilde{\psi}(x) \left\{ \begin{matrix} \sigma^{0j} \\ \sigma^{jk} \end{matrix} \right\} \psi(x) U(i_t)^{-1} = \tilde{\psi}(i_t x) \left\{ \begin{matrix} \sigma^{0j} \\ -\sigma^{jk} \end{matrix} \right\} \psi(i_t x). \quad (8.129)$$

При выводе этих соотношений важную роль играет антиунитарность оператора $U(i_t)$:

$$\begin{aligned} U(i_t) \tilde{\psi}(x) O_i \psi(x) U(i_t)^{-1} &= U(i_t) \tilde{\psi}(x) U(i_t)^{-1} U(i_t) O_i \psi(x) U(i_t)^{-1} = \\ &= U(i_t) \tilde{\psi}(x) U(i_t)^{-1} \bar{O}_i U(i_t) \psi(x) U(i_t)^{-1} = \\ &= \tilde{\psi}(i_t x) \gamma_5 C \bar{O}_i C^{-1} \gamma_5 \psi(i_t x). \end{aligned} \quad (8.130a)$$

Так как

$$\bar{O}_i = O_i^* T = -C^{-1} O_i^* C, \quad (8.130b)$$

то правая часть равенства (8.130a) определится, если выразить $-\gamma_5 O_i^* \gamma_5$ через O_i .

§ 4. Описание нуклонов в теории поля

Существует много доводов, основанных на анализе свойств ядер, в пользу того, что в приближении, когда можно пренебречь электромагнитными эффектами и слабыми взаимодействиями, протон и нейтрон обладают одинаковыми свойствами. Оба они имеют спин, равный $1/2$, одинаковую пространственную четность (которая принимается равной $+1$) и очень близкие значения масс. (Предполагается, что разницу их масс можно приписать электромагнитным эффектам [255]. Разница магнитных моментов наблюдаема только при наличии электромагнитного поля, которое нарушает их сходство и, конечно, позволяет различить нейтрон и протон.) Известно, что ядерные силы (в приближении, когда пренебрегается электромагнитными эффектами) одинаковы для любых двух нуклонов, находящихся в определенном спиновом состоянии и в состоянии с определенным моментом количества движения. Поэтому можно считать, что нейтрон и протон являются двумя состояниями одной частицы — нуклона. (Исторический обзор по этому вопросу см. в книге Бете и Гофмана [54].) Как можно формально записать это предположение? Рассмотрим систему нуклонов, описываемую гамильтонианом:

$$H = \int d^3x : \{ \tilde{p}(x) (-i\gamma \cdot \partial + m_p) p(x) + \tilde{n}(x) (-i\gamma \cdot \partial + m_n) n(x) \}, \quad (8.131)$$

где p , \tilde{p} и n , \tilde{n} — спинорные операторы, описывающие соответственно протоны и нейтроны. Эти операторы подчиняются соотношениям антикоммутации:

$$\{ p(x), \tilde{p}(x') \}_{x_0=x'_0} = \{ n(x), \tilde{n}(x') \}_{x_0=x'_0} = +\delta(x-x'). \quad (8.132)$$

Все другие одновременные антикоммутаторы равны нулю. Такое описание подразумевает существование антинуклонов. Они действительно наблюдались экспериментально.

Введем оператор

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (8.133a)$$

и примем, что он преобразуется, как двухкомпонентный спинор в трех-

мерном евклидовом «зарядовом» пространстве, причем сопряженный спинор определяется, как

$$\tilde{\psi} = (\tilde{p} \tilde{n}). \quad (8.133)$$

В последующем изложении матрицы γ мы будем рассматривать как прямые произведения четырехмерных частиц γ и единичной матрицы в зарядовом пространстве, т. е. будем рассматривать их как восьми-мерное приводимое представление

$$\langle \gamma \rangle = \gamma \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.134)$$

Если теперь принять, что массы протона и нейтрона равны $m_n = m_p = m$, то H можно переписать в виде

$$H = \int d^3x \tilde{\psi}(x) (-i\gamma \cdot \partial + m) \psi(x). \quad (8.135)$$

Введем матрицы Паули τ_i (размерности 2×2), причем

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.136)$$

Тогда $\frac{1}{2}(1 + \tau_3)$ есть оператор проектирования для протонных состояний, поскольку

$$\frac{1}{2}(1 + \tau_3) \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.137)$$

а $\frac{1}{2}(1 - \tau_3)$ — оператор проектирования для нейтронных состояний. Полный заряд системы дается выражением

$$Q = e \int d^3x \frac{1}{2} [\tilde{p}, \gamma^0 p], \quad (8.138)$$

которое можно переписать с помощью операторов ψ :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} e \int d^3x \left[\tilde{\psi}, \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \gamma^0 \psi \right] = \\ &= e \int : \tilde{\psi} \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \gamma^0 \psi : d^3x. \end{aligned} \quad (8.139)$$

При бесконечно малом повороте на угол ε вокруг l -й оси в зарядовом пространстве ψ изменяется согласно закону, требуемому для преобразования спинора в трехмерном евклидовом пространстве:

$$\psi \rightarrow \left(1 + \frac{1}{2} i\varepsilon \tau_l \right) \psi. \quad (8.140)$$

Отсюда следует, что гамильтониан H [равенство (8.135)] есть скаляр в зарядовом пространстве, поскольку он инвариантен относительно вращений. (Вспомним обсуждение в гл. 1 трансформационных свойств билинейных величин $\psi^* O_i \psi$ при вращениях.) Унитарное преобразование $\exp(i\varepsilon T_l)$, вызывающее малое вращение вокруг l -й оси, можно определить из требования, чтобы

$$e^{i\varepsilon T_l} \psi e^{-i\varepsilon T_l} = \psi + i\varepsilon [T_l, \psi] = \left(1 + \frac{1}{2} i\varepsilon \tau_l \right) \psi, \quad (8.141)$$

т. е. чтобы

$$[T_l, \psi] = \frac{1}{2} \tau_l \psi. \quad (8.142)$$

В качестве T можно выбрать

$$\begin{aligned} T_j &= \frac{1}{2} \int d^3x : \psi^* \tau_j \psi : = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \left[\tilde{\psi} \gamma^0, \frac{1}{2} \tau_j \psi \right] = \frac{1}{2} \int d\sigma^\mu(x) \left[\tilde{\psi} \gamma_\mu, \frac{1}{2} \tau_j \psi \right]. \end{aligned} \quad (8.143)$$

Сравнивая (8.143) и (8.139), замечаем, что выражение для полного заряда Q можно записать в виде

$$\frac{Q}{e} = \frac{1}{2} \int d\sigma^\mu : \tilde{\psi} \gamma_\mu \psi : + T_3, \quad (8.144)$$

где выражение $\int d\sigma^\mu : \tilde{\psi} \gamma_\mu \psi :$ есть оператор, соответствующий полному числу нуклонов минус полное число антинуклонов. Можно проверить, что одночастичные состояния являются собственными состояниями оператора T_3 . Находим

$$\begin{aligned} T_3 |p\rangle &= \frac{1}{2} |p\rangle, & T_3 |n\rangle &= -\frac{1}{2} |n\rangle, \\ T_3 |\bar{p}\rangle &= -\frac{1}{2} |\bar{p}\rangle, & T_3 |\bar{n}\rangle &= \frac{1}{2} |\bar{n}\rangle. \end{aligned} \quad (8.145)$$

Обозначения очевидны. Соотношения коммутации для операторов T_i определяются из перестановочных соотношений для ψ :

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk} T_k. \quad (8.146)$$

Таким образом, еще раз, как и для мезонов, получаем, что операторы T_i изоморфны операторам момента количества движения. Отсюда вытекают и аналогичные следствия (см., например, [529]). Величины T_i есть интегралы движения, поскольку их можно представить как пространственные интегралы от четвертой компоненты сохраняющегося тока. Из инвариантности лагранжиана относительно вращений в пространстве изотопического спина (в пространстве, где ψ преобразуется как обычный спинор), при которых

$$\psi \rightarrow \psi + \frac{1}{2} i\varepsilon \tau_i \psi \quad (8.147)$$

или

$$\delta\psi = \frac{1}{2} i\varepsilon \tau_i \psi, \quad (8.148a)$$

$$\delta\tilde{\psi} = -\frac{1}{2} i\varepsilon \tilde{\psi} \tau_i. \quad (8.148b)$$

получаем следующие законы сохранения [вспомним равенство (7.339)]:

$$0 = \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} \delta\psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \tilde{\psi})} \delta\tilde{\psi} \right) = 0 = \partial_\mu : \tilde{\psi} \gamma^\mu \tau_i \psi :. \quad (8.149)$$

Иначе говоря, равенство (8.149) утверждает, что изотопический ток

$$\mathcal{J}_i^\mu = \frac{1}{2} : \tilde{\psi} \gamma^\mu \tau_i \psi : \quad (8.150)$$

сохраняется, $\partial_\mu \mathcal{J}_i^\mu = 0$ ($i = 1, 2, 3$), так что величины

$$T_i = \int_\sigma d\sigma_\mu \mathcal{J}_i^\mu \quad (8.151)$$

есть интегралы движения.

Квантование электромагнитного поля

§ 1. Лагранжиан классической теории

Калибровочно-инвариантный лагранжиан для электромагнитного поля имеет вид ¹⁾

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x), \quad (9.1)$$

где $F^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, связанный с потенциалами A и φ :

$$F^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu(x)}{\partial x_\mu} = A^{\mu,\nu}(x) - A^{\nu,\mu}(x). \quad (9.2)$$

Здесь $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$, $F^{0k} = \mathcal{E}^k$ — вектор напряженности электрического поля, $F^{kl} = \epsilon_{klj} \mathcal{H}^j$, где \mathcal{H}^j — вектор напряженности магнитного поля, а $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2)$.

Варьирование лагранжиана (9.1) по потенциалам ведет к уравнениям Максвелла

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}(x)}{\partial x^\nu} = 0, \quad (9.3)$$

которые выражаются через потенциалы следующим образом:

$$\square A^\mu(x) - \partial^\mu \chi(x) = 0, \quad (9.4a)$$

$$\chi(x) = \partial^\nu A_\nu(x). \quad (9.4b)$$

В классической теории можно выбрать лоренцеву калибровку $\chi = 0$. Тогда уравнения Максвелла эквивалентны уравнению $\square A^\mu(x) = 0$ при условии, что $\chi = 0$. Написанный выше лагранжиан вызывает затруднения, связанные с тем, что канонически сопряженный с A^0 импульс тождественно равен нулю, так что гамильтонову теорию необходимо видоизменять. В квантовой теории, где A^0 и π^0 являются операторами, удовлетворяющими определенным перестановочным соотношениям, равенство π^0 нулю приводит к дальнейшим осложнениям.

¹⁾ Повсюду в этой книге мы будем пользоваться рационализированной системой единиц Хевисайда — Лоренца, так что $e^2/4\pi\hbar c = \alpha = 1/137$. Используемые здесь потенциалы связаны с потенциалами в гауссовой системе единиц множителем $1/\sqrt{4\pi}$. Лагранжиан (9.1) в гауссовой системе единиц равен $-(16\pi)^{-1} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$.

Чтобы обойти указанную трудность, лагранжиан электромагнитного поля часто записывают, согласно Ферми [240, 241, 242], в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\mu} \right)^2. \quad (9.5)$$

Этот лагранжиан, благодаря присутствию члена χ^2 , не является калибровочно-инвариантным. Ясно, однако, что он релятивистски инвариантен. Использование такого лагранжиана дает в результате варьирования по A_μ следующие уравнения движения:

$$\partial_\mu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad (9.6a)$$

или

$$\square A^\nu = 0. \quad (9.6b)$$

Эти уравнения не эквивалентны уравнениям Максвелла.

Чтобы они были эквивалентными, нужно наложить дополнительные условия, потребовав, чтобы

$$\chi = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (9.7a)$$

и

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (9.7b)$$

Тогда в силу уравнения движения $\square \chi = 0$, следующего из уравнения (9.6), $\chi = 0$ для всех моментов времени. Позднее мы обсудим роль дополнительного условия в случае квантовой теории.

Лагранжиан (9.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \right) \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(A^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \chi^2 + \frac{1}{2} A^\nu \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Это выражение равно

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} A^{\mu, \nu} A_{\mu, \nu}, \quad (9.9)$$

когда $\chi = 0$ и если пренебречь членом, имеющим вид дивергенции. Если использовать (9.9), то канонически сопряженный с A_μ импульс теперь равен

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu, 0}} = -A^{\mu, 0}, \quad (9.10)$$

так что гамильтониан дается выражением

$$H = \int \mathcal{H} d^3x, \quad (9.11a)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \pi^\mu \pi_\mu - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 A_\mu{}^k A^{\mu, k}. \quad (9.11b)$$

Последнее выражение по структуре похоже на формулу для энергии суперпозиции четырех скалярных полей. Однако оно не является положительно определенным, поскольку компонента с $\mu = 0$, входящая в H , отрицательно определена. Так получилось потому, что мы пока еще не использовали дополнительного условия, с помощью которого

гамильтониан в действительности приводится к положительно определенному виду, именно: к знакомому выражению $1/2(\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2)$ (см. [341] и изложенное ниже).

Необходимо отметить, что все приведенное выше рассмотрение основывалось на использовании потенциалов в качестве переменных поля. Это становится источником трудностей, особенно в случае квантовой теории, ибо величины A_μ определяются неоднозначно. Наблюдаемыми являются лишь электрическое и магнитное поля: $A_{\mu, \nu} - A_{\nu, \mu}$. При описании, использующем только потенциалы A_μ , имеется свобода калибровочных преобразований, при которых

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu}, \quad (9.12)$$

поскольку тензор $F_{\mu\nu}$ инвариантен при таком преобразовании.

Функция Λ в соотношении (9.12) должна в силу дополнительного условия $\chi = 0$ удовлетворять уравнению $\square \Lambda = 0$, а в остальном является произвольной. Требование *калибровочной инвариантности* заключается в том, что все физически наблюдаемые полевые величины должны оставаться инвариантными при преобразовании (9.12)¹⁾.

§ 2. Квантование. Формализм Гупта — Блейлера

Канонические перестановочные соотношения имеют вид

$$[\pi^\mu(x), A_\nu(x')]_{x_0=x'_0} = +i\hbar c \delta_\nu^\mu \delta(x-x'), \quad (9.13a)$$

или

$$[A^{\mu,0}(x), A_\nu(x')]_{x_0=x'_0} = -i\hbar c \delta_\nu^\mu \delta(x-x'). \quad (9.13b)$$

С помощью аргументов, аналогичных тем, что приводят к перестановочным соотношениям для скалярного поля, можно показать, что ковариантные перестановочные соотношения для электромагнитных потенциалов суть

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = -i\hbar c g_{\mu\nu} D(x-x'), \quad (9.14)$$

где функция $D(x-x')$ равна $\Delta(x-x')$ при $\mu=0$. Следует отметить отличие в знаке правой части (9.14) для временной компоненты по сравнению с пространственными. Функция $D(x)$ в явном виде [398] запишется так:

$$\begin{aligned} D(x) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0>0} \frac{d^3k}{k_0} e^{ik \cdot x} \sin k_0 x_0 = -\frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{x}|} \int_0^\infty dk \sin k |\mathbf{x}| \sin k x_0 = \\ &= -\frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} \{ \delta(|\mathbf{x}| - x_0) - \delta(|\mathbf{x}| + x_0) \} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \varepsilon(x_0) \delta(x^2). \end{aligned} \quad (9.15)$$

¹⁾ Калибровочную инвариантность в квантовой теории можно понимать как условие того, что 4-векторное поле описывает только кванты со спином 1 (см. [914, 915]). — *Прим. ред.*

Четная сингулярная функция $D^{(1)}$ дается выражением¹⁾

$$\begin{aligned} D^{(1)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} \frac{d^3k}{k_0} e^{ik \cdot x} \cos k_0 x_0 = \frac{1}{2\pi^2 |x|} \int_0^\infty dk \sin k |x| \cos k x_0 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 |x|} \left\{ P \frac{1}{|x| - x_0} + P \frac{1}{|x| + x_0} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} P \frac{1}{x^2}, \end{aligned} \quad (9.16)$$

где $P(1/x^2)$ означает, что при интегрировании в особой точке при $x^2 = 0$ нужно брать главное значение интеграла. С помощью перестановочных соотношений (9.13), (9.14) можно проверить, что

$$[H, A_\mu(x)] = -\frac{1}{2} \int [\pi^\nu(x') \pi_\nu(x'), A_\mu(x)] d^3x = i\hbar c \pi_\mu(x). \quad (9.17)$$

Так как правая часть этого равенства равна $i\hbar c A_{\mu,0} = i\hbar c \partial_0 A_\mu$, то перестановочные соотношения согласуются с толкованием гамильтониана (9.11) как оператора сдвига по времени.

Вспомним, что для каждого трехмерного импульса \mathbf{k} существуют четыре независимых решения уравнения $\square A_\mu = 0$, имеющие вид плоских волн. Разложение оператора $A_\mu(x)$ по этим решениям есть

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \sqrt{\frac{\hbar c}{2(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \{ a^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)*}(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \} \\ & \quad (k_0 = |\mathbf{k}|), \end{aligned} \quad (9.18)$$

где $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})$ ($\lambda = 0, 1, 2, 3$) суть четыре (линейно независимых) единичных вектора поляризации, которые можно выбрать так, чтобы они образовывали ортонормированную систему, причем

$$\varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon_\mu^{(\lambda')} = g^{\lambda\lambda'}, \quad (9.19)$$

где $g^{\lambda\lambda'}$ — метрический тензор. В равенстве (9.18) сумма по (λ) есть обычная сумма (а не лоренц-инвариантное скалярное произведение) по четырем решениям, соответствующим различным поляризациям. Рассмотрим также операторы

$$a_\mu(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a^{(\lambda)}(\mathbf{k}), \quad (9.20)$$

$$a_\mu^*(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a^{(\lambda)*}(\mathbf{k}), \quad (9.21)$$

которые удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[a_\mu(\mathbf{k}), a_\nu^*(\mathbf{k}')] = -g_{\mu\nu} k_0 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (k_0 = |\mathbf{k}|), \quad (9.22a)$$

$$[a_\mu(\mathbf{k}), a_\nu(\mathbf{k}')] = [a_\mu^*(\mathbf{k}), a_\nu^*(\mathbf{k}')] = 0, \quad (9.22b)$$

1) Заметим, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} i \int_0^\infty \exp[-i(x - i\varepsilon)k] dk = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [1/(x - i\varepsilon)] = P(1/x) + i\pi\delta(x)$.

что проверяется с помощью равенства (9.14). Выраженный через эти операторы гамильтониан имеет вид

$$H = - \int \frac{d^3k}{k_0} \hbar k_0 a_\mu^*(\mathbf{k}) a^\mu(\mathbf{k}). \quad (9.23)$$

Чтобы получить физическую интерпретацию рассматриваемой квантованной теории по аналогии со случаем скалярного поля, предположим, что операторы $a_\mu(\mathbf{k})$ при $\mu = 0, 1, 2, 3$ являются операторами уничтожения, а операторы $a_\mu^*(\mathbf{k})$ при $\mu = 0, 1, 2, 3$ — операторами рождения. Дополнительно примем, что существует состояние вакуума $|0\rangle$, которое характеризуется тем, что $a_\mu(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ для всех \mathbf{k} и всех μ . Однако эти допущения ведут к трудностям, поскольку среднее по вакууму от оператора $a_0(\mathbf{k}) a_0^*(\mathbf{k}')$ равно

$$\langle 0 | a_0(\mathbf{k}) a_0^*(\mathbf{k}') | 0 \rangle = \langle 0 | [a_0(\mathbf{k}), a_0^*(\mathbf{k}')] | 0 \rangle = -g_{00} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') k_0, \quad (9.24)$$

так что состояние $\int f(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) d\mathbf{k} | 0 \rangle$ при $\int |f(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} < \infty$ обладает отрицательной нормой. Таким образом, векторное пространство, натянутое на базисные векторы $a_0^*(\mathbf{k}_1) \dots a_0^*(\mathbf{k}_{3n}) | 0 \rangle$, уже не является гильбертовым пространством с обычным скалярным произведением, так как существуют отличные от нуля векторы с нулевой и отрицательной нормой. Поэтому вероятностная интерпретация неприменима.

С другой стороны, мы могли бы предположить, что $a_l(\mathbf{k})$ при $l = 1, 2, 3$ и $a_0^*(\mathbf{k})$ являются операторами уничтожения, а операторы $a_l^*(\mathbf{k})$ при $l = 1, 2, 3$ и $a_0(\mathbf{k})$ — операторами рождения. Это исключает трудность с отрицательными нормами, но ведет к другой, ибо при такой интерпретации операторов a, a^* гамильтониан H не ограничен снизу, т. е. возможны состояния с произвольно большой отрицательной энергией. Например, состояние $a_0(\mathbf{k}) | 0 \rangle$, содержащее один временной фотон, имеет тогда отрицательную энергию

$$H a_0(\mathbf{k}) | 0 \rangle = [H, a_0(\mathbf{k})] | 0 \rangle = -k_0 a_0(\mathbf{k}) | 0 \rangle. \quad (9.25)$$

Таким образом, обе интерпретации операторов $a_\mu(\mathbf{k})$ и $a_\mu^*(\mathbf{k})$ ведут к трудностям. Однако мы пока не накладывали никаких дополнительных условий, так что в действительности рассматриваемая до сих пор теория не соответствует теории Максвелла. Иначе говоря, среднее значение потенциала $\langle A_\mu(x) \rangle_\Psi = \langle \Psi | A_\mu(x) | \Psi \rangle$ в состоянии $|\Psi\rangle$ не удовлетворяет условию Лоренца (т. е. $\partial_\mu \langle A^\mu \rangle_\Psi \neq 0$), и поэтому величины $\langle F_{\mu\nu}(x) \rangle_\Psi$ не удовлетворяют уравнениям Максвелла.

В классической теории поля условие Лоренца $A^{\mu,\mu}(x) = 0$ гарантирует, что уравнения поля $\square A_\mu = 0$ соответствуют уравнениям Максвелла, и обеспечивает положительную определенность полной энергии. Однако в квантованной теории мы уже не можем наложить условие Лоренца в виде операторного тождества, так как это привело бы к противоречию с перестановочными соотношениями, поскольку

$$\left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}, A_\nu(x') \right] = -i\hbar c \frac{\partial D(x-x')}{\partial x^\nu} \neq 0.$$

Чтобы обойти эту трудность, приблизительно до 1949 г. обычно отказывались от перестановочных соотношений (9.14) и (9.22) для нулевой и третьей компоненты A_μ .

Таким образом, нужно было с помощью дополнительного условия $A^{\mu,\mu} | \Psi \rangle = 0$ исключать продольную и времени-подобную части вектора A_μ

для возможных состояний поля $|\Psi\rangle$. Лишь остающиеся поперечные части потенциала рассматривались как динамические переменные, и только они квантовались. При наличии зарядов это соответствует отделению *мгновенного* кулоновского взаимодействия от запаздывающего поперечного электромагнитного взаимодействия. Однако такая процедура не является явно релятивистски инвариантной, так как для движущегося наблюдателя кулоновское взаимодействие (продольные волны) и поперечные волны снова смешиваются. (В этой связи см. работу Зумино [879], где в общих чертах излагается квантовая электродинамика в кулоновской калибровке и набрасывается доказательство релятивистской инвариантности теории в такой форме.)

Гупта [341] и Блейлер [61] развили метод, который позволяет использовать все четыре компоненты потенциала на одинаковых основаниях, ясно показывает релятивистскую инвариантность теории и дает возможность непротиворечиво использовать перестановочные соотношения (9.22) и (9.14). В их формулировке операторы $a_\mu(\mathbf{k})$ ($\mu=0, 1, 2, 3$) являются операторами уничтожения, а операторы $a_\mu^*(\mathbf{k})$ ($\mu=0, 1, 2, 3$) — операторами рождения, причем эти операторы имеют следующее представление в пространстве Фока:

$$(a_\mu(\mathbf{k})\Psi)_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) = \sqrt{n+1} \Psi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n+1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n), \quad (9.26a)$$

$$(a_\mu^*(\mathbf{k})\Psi)_{\mu_1\dots\mu_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g_{\mu\mu_j} k_0 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_j) \times \\ \times \Psi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{j-1}\mu_{j+1}\dots\mu_n}^{(n-1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_{j-1}, \mathbf{k}_{j+1}, \dots, \mathbf{k}_n). \quad (9.26b)$$

Вакуум характеризуется условием

$$a_\mu(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \quad \text{при } \mu = 0, 1, 2, 3 \text{ и для всех } \mathbf{k} \quad (9.27a)$$

или

$$A_\mu^{(+)}(x)|0\rangle = 0 \quad \text{для всех } x. \quad (9.27b)$$

Линейное векторное пространство, натянутое на базисные векторы $\prod_j a_{\mu_j}^*(\mathbf{k}_j)|0\rangle$, будем обозначать через \mathcal{G} . В пространстве \mathcal{G} определяется билинейная форма

$$(\Psi, \chi)_G = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int \frac{d^3k_1}{k_{10}} \dots \int \frac{d^3k_n}{k_{n0}} \overline{\Psi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n)} \times \\ \times \chi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n), \quad (9.28a)$$

где

$$\Psi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) = \langle 0 | a_{\mu_1}(\mathbf{k}_1) a_{\mu_2}(\mathbf{k}_2) \dots a_{\mu_n}(\mathbf{k}_n) | \Psi \rangle, \quad (9.28b)$$

$$\chi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) = \langle 0 | a_{\mu_1}(\mathbf{k}_1) a_{\mu_2}(\mathbf{k}_2) \dots a_{\mu_n}(\mathbf{k}_n) | \chi \rangle. \quad (9.28b)$$

Затем постулируется, что все средние значения от операторов должны вычисляться с использованием билинейной формы $(\Psi, \chi)_G$. При определенном таким образом «скалярном произведении Гупта» состояния с нечетным числом временных фотонов имеют отрицательную норму. Такую неопределенную билинейную форму («скалярное произведение Гупта») нужно отличать от скалярного произведения (Ψ, χ) , определенного фор-

мулой

$$(\Psi, \chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^3k_1}{k_{10}} \dots \int \frac{d^3k_n}{k_{n0}} \times \\ \times \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n=0}^3 \overline{\Psi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n)} \chi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n), \quad (9.29)$$

при котором \mathcal{E} превращается в гильбертово пространство. Неопределенную билинейную форму $(\Psi, \chi)_G$ можно выразить через скалярное произведение (Ψ, χ) :

$$(\Psi, \chi)_G = (\Psi, \eta\chi), \quad (9.30)$$

где η — некоторый линейный оператор. Сравнивая равенства (9.28) и (9.30), получаем

$$(\eta\Psi)_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=0}^3 \prod_{j=1}^n (-g^{\mu_j\nu_j}) \Psi_{\nu_1\dots\nu_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n), \quad (9.31)$$

а также

$$\eta^2 = 1, \quad (9.32a)$$

$$\eta = \eta^*, \quad (9.32b)$$

т. е. оператор η — эрмитов. Необходимо отметить, что относительно билинейной формы (9.28) оператор $A_\mu(x)$ является самосопряженным, т. е.

$$(\chi, a_\mu(k)\Psi)_G = (a_\mu^*(k)\chi, \Psi)_G, \quad (9.33)$$

что можно проверить с помощью выражений (9.26a) и (9.26б). Далее, оператор A_μ подчиняется следующим соотношениям коммутации с оператором η :

$$[A_l(x), \eta] = 0 \quad (l = 1, 2, 3), \quad (9.34a)$$

$$[A_0(x), \eta]_* = 0. \quad (9.34b)$$

В выводе Гупта — Блейлера было важным понимание того, что дополнительное условие $A^\mu{}_{,\mu}(x)|\Psi\rangle = 0$ при всех x , которому должны удовлетворять физические состояния, является слишком ограничительным. Действительно, если наложить дополнительное условие в таком виде, то не было бы состояний, которые бы ему удовлетворяли, ибо оно требует не только отсутствия фотонов определенного сорта, но еще чтобы эти фотоны не могли испускаться. Гупта и Блейлер предложили изменить условие Лоренца так, чтобы оно имело место лишь для части оператора A_μ , уничтожающей фотоны, т. е.

$$\left(\frac{\partial A_\mu^{(+)}(x)}{\partial x_\mu} \right) |\Psi\rangle = 0 \quad \text{при всех } x \quad (9.35a)$$

или

$$L(k)|\Psi\rangle = k^\mu a_\mu(k)|\Psi\rangle = 0 \quad \text{при всех } k \quad (k_0 = |k|) \quad (9.35b)$$

для каждого физического состояния $|\Psi\rangle$ электромагнитного поля. Поскольку оператор $\partial_\mu A^\mu(x)$ удовлетворяет уравнению $\square \partial_\mu A^\mu(x) = 0$, то разбиение этого оператора на положительно- и отрицательно-частотную части $\partial_\mu A^{\mu(\pm)}(x)$ является релятивистски инвариантным. Обозначим через

\mathcal{F} множество состояний $|\Psi\rangle$, удовлетворяющих дополнительному условию, т. е. совокупность таких векторов $|\Psi\rangle$, при действии на которые $L(\mathbf{k}) = k^\mu a_\mu(\mathbf{k})$ дает нуль. Будем рассматривать множество таких состояний. Дополнительное условие $L(\mathbf{k})|\Psi\rangle = 0$ достаточно для того, чтобы фотоны были поперечно поляризованы, и не нарушает соответствия с классической электродинамикой. Например, если обозначить посредством

$$\Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k}) = \langle 0 | a_\mu(\mathbf{k}) | \Psi \rangle_G \quad (9.36)$$

амплитуду вероятности найти в состоянии $|\Psi\rangle$, принадлежащем множеству \mathcal{F} , один фотон с импульсом $k = \{k_0, \mathbf{k}\}$ и поляризацией μ , причем $k_\nu k^\nu = 0$, тогда дополнительное условие $L(\mathbf{k})|\Psi\rangle = 0$ требует, чтобы

$$k^\mu \Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k}) = 0. \quad (9.37)$$

Покажем, что условие (9.37) обеспечивает перпендикулярность поляризации фотона к направлению его движения. Для этого вспомним, что поскольку электромагнитное поле описывается с помощью потенциалов, то теория в известном смысле неоднозначна, ибо всегда можно совершить калибровочное преобразование

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (9.38a)$$

причем

$$\square \Lambda = 0, \quad (9.38b)$$

где Λ — c -числовая функция.

Если ввести фурье-компоненты функции $\Lambda(x)$

$$\Lambda(x) = \sqrt{\frac{\hbar c}{2(2\pi)^3}} i \int \frac{d^3k}{k_0} (\Lambda_+(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + \Lambda_-(\mathbf{k}) e^{+ik \cdot x}), \quad (9.39a)$$

$$\Lambda_+(\mathbf{k}) = -\overline{\Lambda_-(\mathbf{k})}, \quad (9.39b)$$

тогда [равенство (9.38) в импульсном пространстве принимает вид

$$a_\mu(\mathbf{k}) \rightarrow a_\mu(\mathbf{k}) + k_\mu \Lambda_+(\mathbf{k}). \quad (9.40)$$

Возможность производить калибровочные преобразования подразумевает, что функция $\Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k}) + k_\mu \Lambda_+(\mathbf{k})$ описывает то же самое физическое состояние, что и функция $\Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k})$ ¹. Другими словами, амплитуды $\Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k})$ и $\Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k}) + k_\mu \Lambda_+(\mathbf{k})$ эквивалентны (и неразличимы). А если это так, то с помощью калибровочного преобразования, при котором

$$\Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k}) \rightarrow \Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k}) - \frac{k_\mu}{k_0} \Psi_0^{(1)}(\mathbf{k}) \quad (9.41)$$

[т. е. $\Lambda_+(\mathbf{k}) = -\Psi_0^{(1)}(\mathbf{k})/k_0$], всегда можно получить однофотонную амплитуду с равной нулю временной компонентой, причем последняя амплитуда описывает то же состояние, что и исходная²). Для такой амплитуды

¹ Чтобы функция $\Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k})$, определенная равенством (9.36), получила указанную добавку, в данном случае следует рассматривать калибровочное преобразование с операторной функцией Λ , ибо преобразование (9.40) с c -числовой функцией Λ не изменяет $\Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k})$. Преобразования с операторной функцией Λ были введены в работе Ландау и Халатникова [473]. — *Прим. ред.*

² В классической теории это утверждение соответствует тому, что калибровку излучения $\text{div} \mathbf{A} = 0$, $\varphi = 0$ можно получить калибровочным преобразованием из лоренцевой калибровки $A_\nu, \mu = 0$.

условие поперечности (9.37) имеет вид

$$\sum_{i=1}^3 k_i \Psi_i^{(1)}(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \Psi^{(1)}(\mathbf{k}) = 0 \quad (9.42)$$

и действительно выражает тот факт, что векторный потенциал (волновая функция) одного фотона поперечен. Аналогично можно продемонстрировать поперечность амплитуды для n фотонов.

Свобода в описании однофотонной амплитуды, выражаемая равенством (9.40), а именно тот факт, что амплитуда $\Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k}) + k_\mu \Lambda_+(\mathbf{k})$ эквивалентна $\Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k})$, означает также, что любая пропорциональная k_μ амплитуда эквивалентна нулю (поскольку ее можно убрать калибровочным преобразованием). Таким образом, физический смысл имеет лишь часть $\Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k})$, ортогональная 4-вектору k_μ (в силу дополнительного условия) и не пропорциональная k_μ (в силу свободы калибровки), т. е. пространственно-подобная часть $\Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k})$. Поэтому можно (и это проще всего) взять в качестве представителя класса эквивалентных однофотонных амплитуд амплитуду $\Psi_\mu^{\prime(1)}(\mathbf{k}) = \Psi_\mu^{(1)}(\mathbf{k}) - k_\mu \Psi_0^{(1)}(\mathbf{k})/k_0$, т. е. амплитуду с равной нулю временной компонентой и для которой $\mathbf{k} \cdot \Psi^{\prime(1)}(\mathbf{k}) = 0$. Такой выбор обеспечивает положительную определенность нормы физически реализуемого однофотонного состояния [т. е. состояния, у которого не равна нулю лишь амплитуда $\Psi_\mu^{\prime(1)}(\mathbf{k})$]:

$$(\Psi, \Psi)_G = - \int \frac{d^3k}{k_0} \overline{\Psi_\mu^{\prime(1)}(\mathbf{k})} \Psi^{\prime(1)\mu}(\mathbf{k}) \geq 0. \quad (9.43)$$

Знак равенства имеет место лишь тогда, когда $\Psi_\mu^{\prime(1)}(\mathbf{k}) = 0$. Аналогичные утверждения можно сформулировать и для n -фотонных амплитуд. Вектор $|\Psi\rangle$, принадлежащий \mathcal{S} , обладает тем свойством, что его компоненты в пространстве Фока «поперечны», т. е. удовлетворяют условию

$$k^\mu \Psi_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{n-1}) = 0. \quad (9.44a)$$

В силу статистики Бозе амплитуды $\Psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$ симметричны при перестановках $(\mathbf{k}_j \mu_j) \leftrightarrow (\mathbf{k}_i \mu_i)$, так что

$$(k_i)^{\mu_i} \Psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i \dots \mu_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_i, \dots, \mathbf{k}_n) = 0 \quad (9.44b)$$

для всех i ($i = 1, 2, \dots, n$). Следовательно, тензоры $\Psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$ по каждому индексу μ_i либо изотропны, либо пространственно-подобны [поскольку они ортогональны вектору $(k_i)_{\mu_i}$]. Поэтому скалярное произведение Гупта на множестве \mathcal{S} неотрицательно, т. е. $(\Psi, \Psi)_G \geq 0$. Свобода калибровки опять подразумевает, что любая амплитуда $\Psi_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(n)}$, которая по индексу μ_i является изотропным вектором, т. е. пропорциональна k_{μ_i} (и в силу симметрии пропорциональна всем k_{μ_i}), эквивалентна нулю, т. е. не описывает физического состояния. Отсюда заключаем, что физически реализуемые состояния при скалярном произведении Гупта имеют положительно определенную норму. Это делает возможной физическую интерпретацию теории.

Выраженный через операторы в импульсном пространстве 4-вектор энергии-импульса поля имеет вид

$$P^\mu = - \int \frac{d^3k}{k_0} a_\nu^*(\mathbf{k}) a^\nu(\mathbf{k}) \hbar k^\mu. \quad (9.45)$$

Покажем, что выражение $-a_\nu^*(\mathbf{k}) a^\nu(\mathbf{k})$ при действии на вектор из \mathcal{S} действительно является положительно определенным. Для этого выберем

особую систему координат, в которой векторы поляризации $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ таковы, что

$$k^\mu \epsilon_\mu^{(1)}(\mathbf{k}) = k^\mu \epsilon_\mu^{(2)}(\mathbf{k}) = 0, \quad (9.46a)$$

$$-k^\mu \epsilon_\mu^{(3)}(\mathbf{k}) = k^\mu \epsilon_\mu^{(0)}(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|. \quad (9.46b)$$

В частности, этим соотношениям можно удовлетворить, если так повернуть систему координат, чтобы $k^0 = |\mathbf{k}|$, $k^1 = -|\mathbf{k}|$, а $k^2 = k^3 = 0$, т. е. чтобы

$$k_\mu = |\mathbf{k}| (1, 1, 0, 0), \quad (9.47a)$$

и выбрать

$$\epsilon_\mu^{(0)}(\mathbf{k}) = (1, 0, 0, 0),$$

$$\epsilon_\mu^{(1)}(\mathbf{k}) = (0, 0, 1, 0),$$

$$\epsilon_\mu^{(2)}(\mathbf{k}) = (0, 0, 0, 1),$$

$$\epsilon_\mu^{(3)}(\mathbf{k}) = (0, 1, 0, 0). \quad (9.47b)$$

Выбрав так единичные векторы поляризации и вспомнив, что

$$a_\mu(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=1}^4 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a^{(\lambda)}(\mathbf{k}), \quad (9.48)$$

получим, что условие Лоренца (9.35) принимает вид

$$L(\mathbf{k})|\Psi\rangle = k^\mu a_\mu(\mathbf{k})|\Psi\rangle = 0 = |\mathbf{k}| [a^{(0)}(\mathbf{k}) - a^{(3)}(\mathbf{k})]|\Psi\rangle = 0 \quad (9.49a)$$

или

$$a^{(0)}(\mathbf{k})|\Psi\rangle = a^{(3)}(\mathbf{k})|\Psi\rangle \quad (9.49b)$$

для любого физически реализуемого состояния $|\Psi\rangle$.

Отсюда, используя равенства (9.48) и (9.49) и действительность векторов поляризации, заключаем, что для любого $|\Psi\rangle$ из \mathcal{F}

$$\begin{aligned} (\Psi, -a_\mu^*(\mathbf{k}) a^\mu(\mathbf{k}) \Psi)_G &= (\Psi, -\sum_{\lambda\lambda'} a^{(\lambda)*}(\mathbf{k}) a^{(\lambda')}(\mathbf{k}) g_{\lambda\lambda'} \Psi)_G = \\ &= +(\Psi, (a^{(1)*}(\mathbf{k}) a^{(1)}(\mathbf{k}) + a^{(2)*}(\mathbf{k}) a^{(2)}(\mathbf{k})) \Psi)_G \geq 0, \quad (9.50) \end{aligned}$$

так как только поперечные фотоны дают вклад.

Таким образом, мы видим, что в силу дополнительного условия 4-вектор энергии-импульса действительно неотрицателен на множестве \mathcal{F} . Этот результат становится понятнее, если заметить, что в определенной равенством (9.47) системе координат дополнительное условие допускает лишь такие состояния системы, которые содержат равное число продольных и временных фотонов с одинаковым импульсом, поскольку

$$\langle \Psi | a^{(0)*}(\mathbf{k}) a^{(0)}(\mathbf{k}) | \Psi \rangle = \langle \Psi | a^{(3)*}(\mathbf{k}) a^{(3)}(\mathbf{k}) | \Psi \rangle$$

согласно (9.49b). Временные фотоны вносят в полную энергию (импульс) отрицательный вклад, который сокращается с вкладом от продольных фотонов.

Рассмотрим несколько подробнее состояния, принадлежащие множеству \mathcal{F} . Отметим, что если $|\Psi\rangle$ есть физически реализуемое состояние, т. е. удовлетворяет условию $L(\mathbf{k})|\Psi\rangle = 0$, а также содержит лишь поперечные фотоны, тогда вектор

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle &= \left\{ 1 + \int \frac{d^3k_1}{k_{10}} g^{(1)}(\mathbf{k}_1) L^*(\mathbf{k}_1) + \dots + \right. \\ &\left. + \int \frac{d^3k_1}{k_{10}} \dots \int \frac{d^3k_n}{k_{n0}} g^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) L^*(\mathbf{k}_1) \dots L^*(\mathbf{k}_n) + \dots \right\} |\Psi\rangle \quad (9.51) \end{aligned}$$

снова принадлежит \mathcal{F} , т. е. удовлетворяет условию $L(\mathbf{k})|\Psi\rangle = 0$ для всех \mathbf{k} . Это следует из того, что $L(\mathbf{k})$ и $L^*(\mathbf{k}')$ коммутируют:

$$\begin{aligned} [L(\mathbf{k}), L^*(\mathbf{k}')] &= k_\mu k'_\nu [a^\mu(\mathbf{k}), a^{\nu*}(\mathbf{k}')] = \\ &= -k_0 k'^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 0, \end{aligned} \quad (9.52)$$

так как $k^2 = 0$. В действительности, состояния, полученные с помощью равенства (9.51) из физически реализуемых состояний (т. е. содержащих лишь поперечные фотоны), исчерпывают все векторы множества \mathcal{F} . Кроме того, скалярное произведение двух таких векторов $|\chi'\rangle, |\Phi'\rangle$, где

$$\begin{aligned} |\chi'\rangle &= \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\int \frac{d^3 k_i}{k_{i0}} L^*(\mathbf{k}_i) \right) \cdot h^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) \right\} |\chi\rangle, \\ |\Phi'\rangle &= \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\int \frac{d^3 k_i}{k_{i0}} L^*(\mathbf{k}_i) \right) \cdot g^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) \right\} |\Phi\rangle, \end{aligned} \quad (9.53)$$

а $|\Phi\rangle$ и $|\chi\rangle$ — векторы физических состояний, содержащих только поперечные фотоны, равно

$$\langle \chi' | \Phi' \rangle_G = \langle \chi | \Phi \rangle_G, \quad (9.54)$$

так как $L(\mathbf{k})|\Phi\rangle = \langle \Phi | L^*(\mathbf{k}) = 0$. Таким образом, скалярное произведение $|\chi'\rangle$ и $|\Phi'\rangle$ зависит лишь от проекций $|\chi'\rangle$ и $|\Phi'\rangle$ на множество \mathcal{H} физически реализуемых состояний. Как отмечалось выше, \mathcal{H} обладает тем свойством, что все векторы этого множества имеют положительную норму. Поэтому к векторам множества \mathcal{H} применима вероятностная интерпретация. Полученный выше результат приводит к следующему правилу для интерпретации произвольного состояния $|\chi'\rangle$, принадлежащего \mathcal{F} . Нужно спроектировать $|\chi'\rangle$ на \mathcal{H} ; эта проекция, $|\chi\rangle$ (которая является либо состоянием только с поперечными фотонами, либо вакуумом, либо равна нулю), представляет физически реализуемое состояние (если $|\chi\rangle$ не равно нулю), которому эквивалентно состояние $|\chi'\rangle$, т. е. $|\chi\rangle$ и $|\chi'\rangle$ ведут к одинаковым наблюдаемым следствиям. Эквивалентность состояний $|\chi\rangle$ и $|\chi'\rangle$ в точности соответствует произволу в определении $\chi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$, который существует в силу калибровочных преобразований. Но теперь этот произвол выражен с помощью векторов состояний.

Чтобы понять последнее утверждение, вычислим среднее значение $A_\mu(x)$ в состояниях $|\chi\rangle$ и $|\chi'\rangle$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \langle \chi' | a_\mu(\mathbf{k}) | \chi' \rangle_G &= \langle \chi | \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\int \frac{d^3 k_i}{k_{i0}} L(\mathbf{k}_i) \right) \bar{h}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \right\} \times \\ &\times a_\mu(\mathbf{k}) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\int \frac{d^3 k_i}{k_{i0}} L^*(\mathbf{k}_i) \right) h^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \right\} | \chi \rangle_G = \\ &= \langle \chi | a_\mu(\mathbf{k}) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\int \frac{d^3 k_i}{k_{i0}} L^*(\mathbf{k}_i) \right) h^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \right\} | \chi \rangle_G = \\ &= \langle \chi | a_\mu(\mathbf{k}) + k_\mu \Lambda_+(\mathbf{k}) | \chi \rangle_G, \end{aligned} \quad (9.55)$$

где

$$\Lambda_+(\mathbf{k}) = -h^{(1)}(\mathbf{k}). \quad (9.56)$$

При получении (9.55) и (9.56) мы использовали то, что $a_\mu(\mathbf{k})$ и $L(\mathbf{k}')$ коммутируют, а также равенство $L(\mathbf{k})|\chi\rangle = \langle\chi|L^*(\mathbf{k}) = 0$ и соотношения коммутации

$$[a_\mu(\mathbf{k}), L^*(\mathbf{k}')] = -k_\mu k'_0 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (9.57)$$

Аналогично,

$$\langle\chi'|a_\mu^*(\mathbf{k})|\chi'\rangle_G = \langle\chi|a_\mu^*(\mathbf{k}) - k_\mu \Lambda_-(\mathbf{k})|\chi\rangle_G, \quad (9.58)$$

причем

$$\Lambda_-(\mathbf{k}) = \bar{h}^{(1)}(\mathbf{k}),$$

так что

$$\langle\chi'|A_\mu(x)|\chi'\rangle_G = \langle\chi|A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)|\chi\rangle_G \quad (9.59a)$$

при условии

$$\square \Lambda = 0. \quad (9.59b)$$

Таким образом, эквивалентность векторов состояния $|\chi\rangle$ и $|\chi'\rangle$ отражает тот факт, что описание с помощью потенциалов всегда содержит произвол, связанный с возможностью калибровочных преобразований, при которых $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$.

Однако скалярное произведение Гупта гарантирует, что все эквивалентные волновые функции ведут к одинаковым физическим следствиям. В частности, ясно, что средние значения наблюдаемой поля $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ в состояниях $|\chi\rangle$ и $|\chi'\rangle$ одинаковы. Мы можем по желанию выбрать состояние $|\chi\rangle$, не содержащее временных и продольных фотонов, в качестве представителя класса эквивалентных состояний. Однако это соответствует выбору частной калибровки. Так, состояние вакуума $|0\rangle$, характеризуемое условием $a_\mu(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), можно рассматривать как «представителя» возможных в теории вакуумных состояний. Другие «вакуумы» отличаются от состояния $|0\rangle$ наличием равного числа временных и продольных фотонов. Тем не менее средние значения любой калибровочно-инвариантной величины будут одинаковыми для всех различных состояний вакуума.

Таким образом, формализм Гупта имеет определенное достоинство, заключающееся в том, что в рамках теории включены и вполне определены состояния с временными и продольными фотонами, что и должно иметь место при математически корректном определении операторов $A_\mu(x)$, ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Но эти состояния не дают вклада в физически наблюдаемые величины (в случае свободного поля).

В заключение этого параграфа отметим, что калибровочное преобразование $A_\mu \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda$ при $\square \Lambda = 0$ порождается следующим унитарным преобразованием:

$$U_\Lambda(\sigma) = \frac{1}{\hbar c} \int_\sigma d\sigma^\mu(x) \left(\frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x^\mu} \chi(x) - \Lambda(x) \frac{\partial \chi(x)}{\partial x^\mu} \right), \quad (9.60)$$

причем

$$\chi(x) = \partial_\mu A^\mu(x) \quad (9.61a)$$

и

$$A'_\mu(x) = e^{iU_\Lambda} A_\mu(x) e^{-iU_\Lambda} = A_\mu(x) + \frac{i}{1!} [U_\Lambda, A_\mu(x)] + \dots \quad (9.61b)$$

Доказательство: Заметим сначала, что $U_\Lambda(\sigma)$ в действительности не зависит от σ , так как $(\delta/\delta\sigma(x)) U_\Lambda(\sigma) = 0$, поскольку χ и Λ удовлетворяют уравнениям $\square \chi = \square \Lambda = 0$. Далее, поскольку коммутатор U_ν

и $A_\mu(x)$

$$[U_\Lambda, A_\mu(x)] = \int d\sigma^0(x') \left(\frac{\partial \Lambda(x')}{\partial x'^0} \partial'_\mu D(x-x') - \Lambda(x') \frac{\partial \partial'_\mu D(x-x')}{\partial x'^0} \right) = \partial'_\mu \Lambda(x) \quad (9.62)$$

является c -числом, то в (9.61б) дают вклад лишь первые два члена, чем и доказывается сделанное утверждение. Поэтому наблюдаемую (которая с необходимостью калибровочно-инвариантна) можно характеризовать как величину, коммутирующую с U_Λ , или, подробнее, с $L(k)$ и $L^*(k)$. Следовательно, наблюдаемая обладает тем свойством, что она переводит вектор, принадлежащий \mathcal{F} , в другой вектор из \mathcal{F} , т. е. оставляет \mathcal{F} инвариантным.

Мы закончим этот параграф, сформулировав перестановочные соотношения для напряженностей электромагнитного поля:

$$[F_{\mu\nu}(x), F_{\lambda\sigma}(x')] = i\hbar c \{g_{\mu\lambda} \partial_\nu \partial'_\sigma + g_{\nu\sigma} \partial_\mu \partial'_\lambda - g_{\nu\lambda} \partial_\mu \partial'_\sigma - g_{\mu\sigma} \partial_\nu \partial'_\lambda\} D(x-x'). \quad (9.63)$$

Для обсуждения этих перестановочных соотношений в связи с возможностями совместимых измерений компонент электрического и магнитного поля в малых пространственно-временных областях читатель отсылается к классическим работам Бора и Розенфельда [69, 70], а также к обзорной статье Коринальдези [145]. (См. также [676, 677].)

§ 3. Трансформационные свойства

Здесь мы вкратце опишем трансформационные свойства оператора $A_\mu(x)$. При собственных преобразованиях Лоренца A_μ преобразуется как вектор, причем

$$U(a, \Lambda) A_\mu(x) U(a, \Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1})_\mu^\nu A_\nu(\Lambda x + a), \quad (9.64)$$

где U при использовании скалярного произведения Гупта является унитарным оператором, т. е. для произвольных $|\Psi\rangle$ и $|\Phi\rangle$

$$(U(a, \Lambda) \Psi, U(a, \Lambda) \Phi)_G = (\Psi, \Phi)_G. \quad (9.65)$$

Далее требуется, чтобы вакуум для электромагнитного поля (в некоторой определенной калибровке) был инвариантным, т. е. $U(a, \Lambda)|0\rangle = |0\rangle$. Закон преобразования поля при пространственных отражениях, обеспечивающий инвариантность перестановочных соотношений и лагранжиана, имеет вид

$$U(i_s) A_\mu(x) U(i_s)^{-1} = \epsilon_{(\mu)} A_\mu(i_s x), \quad (9.66)$$

где четность $\epsilon_{(\mu)}$ равна ± 1 и может зависеть от μ . (Поскольку электромагнитное поле является эрмитовым, то пространственная четность должна быть действительной величиной.) Значения $\epsilon_{(\mu)}$ определяются из рассмотрения взаимодействия электромагнитного поля с зарядами. Чтобы уравнения Максвелла $\square A_\mu(x) = j_\mu(x)$ были ковариантными, потенциал A_μ должен преобразовываться так же, как и вектор тока j_μ . Мы уже отмечали, что последний преобразуется как обычный вектор (вспомним, например, трансформационные свойства $:\tilde{\Psi}\gamma_\mu\Psi:$), так что $\epsilon_{(0)} = +1$ и $\epsilon_i = -1$ ($i = 1, 2, 3$).

При зарядовом сопряжении $A_\mu(x)$ преобразуется по закону

$$U_c A_\mu(x) U_c^{-1} = -A_\mu(x), \quad (9.67)$$

который, как мы увидим, в случае заряженных полей, взаимодействующих с электромагнитным полем, обеспечивает инвариантность лагранжиана относительно зарядового сопряжения.

Если теория должна быть инвариантной при вигнеровском обращении времени, то потенциал $A_\mu(x)$ должен преобразовываться согласно правилу

$$U(i_t) \begin{Bmatrix} A_0(x) \\ A_i(x) \end{Bmatrix} U(i_t)^{-1} = \begin{Bmatrix} A_0(i_t x) \\ -A_i(i_t x) \end{Bmatrix}, \quad (9.68)$$

где $U(i_t)$ — антиунитарный оператор. В равенстве (9.68) временная четность выбрана так, что A_μ преобразуется как оператор тока j_μ . Такой выбор ведет к тому, что $U(i_t)$ преобразует оператор рождения фотона с импульсом \mathbf{k} и данной круговой поляризацией в оператор рождения фотона с импульсом $-\mathbf{k}$ и той же круговой поляризацией.

Часть третья

ТЕОРИЯ

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ

ПОЛЕЙ

Взаимодействие между полями

§ 1. Симметрии и взаимодействия

В предыдущих главах мы рассматривали лишь системы свободных невзаимодействующих частиц. Мы видели, что такие системы могут быть описаны при помощи операторов поля, подчиняющихся определенным перестановочным соотношениям и вытекающим из лагранжиана уравнениям движения. Однако только при исследовании взаимодействий между полями наиболее полно проявляются преимущества лагранжева подхода: фактически это единственный известный простой метод введения взаимодействия между частицами, в котором может быть сформулирована операция квантования. Наиболее изящная формулировка квантовой теории поля в рамках лагранжева формализма была дана Швингером [714, 715, 717—719]. В ней не делается ссылок на классические поля и рассматриваются только квантованные операторы. Она не лишена, однако, неоднозначностей, так как трудно дать точное математическое определение таким понятиям, как вариации операторов. Мы поэтому останемся верными прежним методам и будем пользоваться лагранжианами, первоначально возникшими в теории классических c -числовых полей.

Рассмотрим сначала классическую теорию взаимодействия поля $\psi(x)$ со спином $\frac{1}{2}$ с нейтральным скалярным полем $\varphi(x)$, спин которого равен нулю. Теория будет релятивистски инвариантной, если мы потребуем инвариантности лагранжевой плотности относительно ограниченных преобразований Лоренца. Именно, пусть производится преобразование Лоренца $x \rightarrow x' = \Lambda x + a$:

$$\psi(x) \rightarrow S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}(x' - a)) = \psi'(x'), \quad (10.1a)$$

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(\Lambda^{-1}(x' - a)) = \varphi'(x'). \quad (10.1b)$$

Тогда требование инвариантности заключается, во-первых, в том, что лагранжева плотность \mathcal{L} должна быть скаляром

$$\mathcal{L}'(\psi'(x'), \varphi'(x')) = \mathcal{L}(\psi(x), \varphi(x)) \quad (\text{скалярность}), \quad (10.2a)$$

т. е. \mathcal{L} и \mathcal{L}' должны иметь одну и ту же величину в одной и той же точке (в физическом смысле). Во-вторых, инвариантность подразумевает сохранение функциональной формы при преобразовании Лоренца:

$$\mathcal{L}'(\psi'(x), \varphi'(x)) = \mathcal{L}(\psi'(x'), \varphi'(x')) \quad (\text{форм-инвариантность}). \quad (10.2b)$$

Уравнение (10.26) гарантирует, что уравнения движения, выраженные через новые переменные, имеют в точности ту же функциональную форму, что и уравнения движения, выраженные через старые переменные. Так как лагранжиан непосредственно связан с такими наблюдаемыми величинами, как гамильтониан и действие, мы требуем, чтобы он был вещественным в классической теории и эрмитовым в квантовой. Мы требуем далее, чтобы лагранжева плотность не содержала производных выше первого порядка, дабы уравнения поля были не выше второго порядка.

Взаимодействие между полями вводится добавлением к свободному лагранжиану \mathcal{L}_0 лагранжиана взаимодействия \mathcal{L}_I , который должен удовлетворять указанным выше требованиям эрмитовости, релятивистской инвариантности и не должен содержать высших пространственно-временных производных от полей. Сила взаимодействия измеряется величиной численного множителя в лагранжиане, называемого константой связи.

Мы будем делать различие между локальными связями, при которых лагранжиан взаимодействия построен из полевых величин, относящихся к одной и той же пространственно-временной точке, например $\mathcal{L}_I = G \tilde{\psi}(x) \psi(x) \varphi(x)$, и нелокальными связями, когда это не имеет места, например $\mathcal{L}_I = G \int \tilde{\psi}(x) \psi(x) F(x-x') \varphi(x') d^4x'$, где заданная скалярная функция $F(x-x')$ характеризует пространственно-временную «область», в которой осуществляется взаимодействие. Мы будем также различать прямые связи и связи с производными. Назовем связь *прямой*, если в \mathcal{L}_I не содержится производных от полей. При связи с производными в \mathcal{L}_I входят производные от полей.

Простейший путь введения локального релятивистски инвариантного взаимодействия между спинорным полем $\psi(x)$ и скалярным полем $\varphi(x)$ состоит в умножении инварианта $\tilde{\psi}\psi$ на φ и записи лагранжиана взаимодействия в следующей форме (в рамках классической теории): $\mathcal{L}_I = G \int d^4x \tilde{\psi}(x) \psi(x) \varphi(x)$, где G — константа связи. Для определения размерности константы связи вспомним, что размерность полевых величин фиксируется размерностью определенных физических величин для свободных полей. Например, для скалярного бозонного поля величина

$$\frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}^2 + (\nabla \varphi)^2 \right\} c^2$$

имеет размерность энергии ($1/\mu$ является комптоновской длиной волны частицы). Поэтому φ^2 имеет размерность $\hbar^2/\mu V$, где V — объем. Аналогично, для поля Дирака величина

$$\int d^3x \tilde{\psi} (-i\hbar c \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\partial} + mc^2) \psi$$

является энергией, так что произведение $\tilde{\psi}\psi V$ безразмерно. Величина $G \int d^3x \tilde{\psi}\psi\varphi$ снова должна иметь размерность энергии, откуда можно заключить, что $G^2/\hbar c$ безразмерно.

Вообще можно различать два типа взаимодействий: те, в которых константа связи (в естественной системе единиц, где $\hbar = c = 1$) имеет размерность длины в нулевой или отрицательной степени, и те, в которых константа связи имеет размерность длины в положительной степени. В естественной системе единиц бозе-поле со спином 0 имеет размерность обратной длины L^{-1} , поле Ферми — Дирака со спином $\frac{1}{2}$ имеет размерность $L^{-3/2}$, а плотность лагранжиана имеет размерность L^{-4} (обратного

четырёхмерного объема). Простейшими из связей являются те, которые составлены из алгебраических функций операторов поля таким образом, что появляются только безразмерные константы связи. Теория такого рода не содержит в себе естественного масштаба. Постоянные μ_0 и m_0 , которые появляются в свободном лагранжиане, отождествляются с массами квантов поля в отсутствие взаимодействия. Последние, однако, не наблюдаемы. Поэтому эти размерные параметры не могут быть использованы для определения масштаба. Истинные массы частиц, которые должны описывать теория, устанавливаются, конечно, абсолютную шкалу длин и масс. Однако современная квантовая теория поля, как мы увидим, не может объяснить наблюдаемого спектра масс фундаментальных частиц. Истинные (наблюдаемые) массы частиц вводятся в теорию при помощи так называемой перенормировки массы (см. гл. 15). При этом подходе величины масс частиц рассматриваются как *феноменологические* проявления неизвестного физического фактора, и неумение включить этот фактор в теорию приводит к неудачам современного описания частиц. Предполагается, что один и тот же физический фактор устанавливает абсолютную шкалу длин и масс. Если принять такую точку зрения, то разумно постулировать, что лагранжиан взаимодействия не должен включать единицу длины, имеющую динамическое происхождение вне области применимости теории. Тогда для взаимодействующих полей со спином 0 и $\frac{1}{2}$ этот принцип¹⁾ допускает только два типа лагранжианов взаимодействия, а именно связи вида $\bar{\psi}\Gamma\psi\phi$ и ϕ^4 . Заметим, что исключаются связи с производными. В этой книге мы будем рассматривать в основном только такие виды взаимодействий.

Для случая псевдоскалярного поля ϕ связь, которая гарантирует инвариантность \mathcal{L}_I относительно собственных преобразований Лоренца и пространственных отражений, имеет вид произведения псевдоскаляров $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ и ϕ , так как $\mathcal{L}_I(x) = G\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi(x)$ является инвариантом относительно отражений. Поле ϕ может, например, описывать нейтральное π -мезонное поле, а ψ — нуклонное поле. Если мы хотим описывать взаимодействие не только нейтральных, но и заряженных мезонов с нуклонами и потребуем зарядовой независимости всех предсказаний теории, то лагранжиан взаимодействия должен быть инвариантным относительно вращений в изотопическом пространстве. Простейшее взаимодействие такого рода связывает нуклонный изотопический вектор $\bar{\psi}\tau\gamma_5\psi$ с мезонным изотопическим вектором ϕ , причем ϕ_3 описывает нейтральное, а $(1/\sqrt{2})(\phi_1 \pm i\phi_2)$ — заряженные мезонные поля. Лагранжиан взаимодействия будет тогда иметь вид

$$\mathcal{L}_I = G\bar{\psi}\tau\gamma_5\psi \cdot \phi = \sum_{i=1}^3 G\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi \phi_i.$$

Это взаимодействие является примером того, как требование инвариантности определяет вид \mathcal{L}_I . В этой главе мы исследуем общую структуру лагранжиана с учетом требования инвариантности относительно определенных преобразований симметрии. Мы будем главным образом рассматривать электромагнитные взаимодействия и взаимодействия между π -мезонами и нуклонами; другие известные сейчас взаимодействия будут обсуждены более кратко. Однако, прежде чем углубляться в математическое описание взаимодействующих квантованных полей, целесообразно,

¹⁾ Отметим, что этот принцип связан с принципом перенормируемости (см. гл. 15—17).

по-видимому, вкратце обсудить основу для такого описания физических явлений.

Раньше мы установили, что любой частице (и ее античастице) можно привести в соответствие квантованное поле. При свободном движении каждая такая частица характеризуется массой, спином, электрическим зарядом и, возможно, другими квантовыми числами, такими, например, как нуклонный заряд или гиперзаряд. Классификация по массе и спину следует из предположения, что частицы могут быть описаны в рамках формализма, основанного на общих принципах квантовой механики и специальной теории относительности. При лагранжевом описании квантованных полей другие «квантовые» числа связываются с инвариантностью лагранжиана относительно определенных калибровочных преобразований.

Основное предположение современной квантовой теории поля состоит в том, что структура и наблюдаемые свойства всех форм материи могут быть объяснены и описаны при помощи *ограниченного* числа фундаментальных частиц, взаимодействующих определенным образом. Эти «фундаментальные» частицы можно, по-видимому, разбить на пять групп¹.

А. Барiony. Это частицы, массы которых лежат между массами нуклона и дейтрона. Все они являются фермионами и подчиняются строгому закону сохранения, известному как закон сохранения барионов или тяжелых частиц. В настоящее время известны восемь таких частиц. Их свойства приведены в табл. 3².

Таблица 3

Барiony

Тип	Частица	Масса (в массах электрона)	Время жизни, сек	Заряд (в зарядах электрона)	Распространенная схема распада
Нуклоны (<i>N</i>)	<i>p</i> (протон)	$1836,12 \pm 0,04$	стабилен	+1	$p + e^- + \bar{\nu}$
	<i>n</i> (нейтрон)	$1838,65 \pm 0,04$	1013 ± 29	0	
Гипероны (<i>Y</i>)	Λ	$2182,5 \pm 0,4$	$(2,51 \pm 0,09) \cdot 10^{-10}$	0	$N + \pi$
	Σ^0	$2329,9 \pm 0,3$	$< (0,1) \cdot 10^{-10}$	0	$\Lambda + \gamma$
	Σ^+	$2327,9 \pm 0,6$	$(0,81 \pm 0,06) \cdot 10^{-10}$	+1	$N + \pi$
	Σ^-	$2341,6 \pm 0,8$	$(1,61 \pm 0,1) \cdot 10^{-10}$	-1	$n + \pi^-$
	Ξ^-	2585 ± 6	$(1,28 \pm 0,4) \cdot 10^{-10}$	-1	$\Lambda + \pi^-$
	Ξ^0	2587 ± 10	$\sim 1 \cdot 10^{-10}$	0	$\Lambda + \pi^0$

Шесть перечисленных в табл. 3 частиц тяжелее нейтрона или протона называют *гиперонами*. Все известные гипероны имеют спин $\frac{1}{2}$ и являются барионами. Античастицы нуклонов, Λ^- и Σ^- -частиц уже наблюдались экспериментально. Следует отметить, что при распадах гиперонов среди продуктов распада всегда содержится гиперон или нуклон.

¹ Полную характеристику экспериментальных исследований вплоть до 1958 г. читатель найдет в книге Джексона [388] и обзорах Гелл-Манна и Розенфельда [314], Францинетти и Морпурго [275], Далитца [451] и Ашкина [21]. Для ознакомления с попытками теоретического объяснения опытных данных рекомендуются статьи Нишижимы [582] и Кеммера, Пурсея и Полкингхорна [441]. См. также труды Женевской, Киевской и Рочестерской конференций по физике частиц больших энергий 1958, 1959 и 1960 гг.

² В таблицы внесены исправления по данным на осень 1962.— *Прим. ред.*

Б. Мезоны. В эту группу частиц включаются π - и K -мезоны, основные характеристики которых приведены в табл. 4. Известно, что мезоны являются бозонами и весьма вероятно, что все они обладают спином, равным нулю. Их взаимодействия с барионами являются сильными.

Таблица 4

Мезоны

Тип	Частица	Масса (в массах электрона)	Время жизни, сек	Схема распада
π -мезоны	π^0	$264,3 \pm 0,3$	$(2,2 \pm 0,8) \cdot 10^{-16}$	$2\gamma, \gamma + e^+ + e^-$
	π^\pm	$273,3 \pm 0,1$	$(2,55 \pm 0,03) \cdot 10^{-8}$	$\mu^\pm + \nu, e^\pm + \nu$
K -мезоны	K^0, \bar{K}^0	$974,2 \pm 1,2$	$(K_1^0) (1,00 \pm 0,04) \cdot 10^{-10}$ $(K_2^0) (6,1 \pm 1,5) \cdot 10^{-8}$	2π $3\pi, \mu + \nu + \pi, e + \nu + \pi$
	K^\pm	$966,6 \pm 0,4$	$(1,224 \pm 0,013) \cdot 10^{-8}$	$\begin{cases} 2\pi, 3\pi, \mu + \nu \\ \mu + \nu + \pi, e + \nu + \pi \end{cases}$

В. Лептоны (легкие фермионы). К этой группе частиц принадлежат мюоны, электроны и нейтрино¹). Они являются фермионами и имеют спин $\frac{1}{2}$. Их свойства перечислены в табл. 5. Лептоны слабо взаимодействуют друг с другом и с барионами и мезонами.

Таблица 5

Лептоны

Тип	Частица	Масса (в массах электрона)	Время жизни, сек	Схема распада
Нейтрино	$\nu_e, \bar{\nu}_e$	0	Стабильно	—
	$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	0	Стабильно	—
Электрон	e^-, e^+	1	Стабилен	—
Мюон	μ^-, μ^+	$206,9 \pm 0,1$	$(2,242 \pm 0,001) \cdot 10^{-6}$	$\begin{cases} \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \\ \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \end{cases}$

Г. Фотон. Частица с массой покоя, равной нулю, стабильная, обладает спином 1 и взаимодействует со всеми заряженными частицами. Она ответственна за электромагнитные взаимодействия между этими частицами.

Д. Гравитон. Частица, которая, как предполагают, связана с гравитационными явлениями²).

¹) В 1962 г. было обнаружено, что существует два разных нейтрино ν_e и ν_μ , сопровождающих электрон и мюон соответственно [см. Phys. Rev. Lett., 9, 36 (1962)].— *Прим. ред.*

²) Гравитон вводится в теорию гравитационных полей по аналогии с фотоном (с той разницей, что его спин равен 2). Его теория почти не разработана и никаких экспериментальных данных о нем нет.— *Прим. ред.*

Как упоминалось выше, взаимодействия между этими частицами допускают, по-видимому, следующую естественную классификацию:

1. *Сильные взаимодействия* — взаимодействия между барионами, антибарионами и мезонами. Эти взаимодействия ответственны за рождение и рассеяние барионов, π - и K -мезонов. Они характеризуются большими константами связи, равными по порядку величины единице или даже больше.

2. *Электромагнитные взаимодействия*, связывающие фотон со всеми заряженными частицами (реальными и виртуальными) и характеризуемые константой связи $e^2/4\pi\hbar c = 1/137$.

3. *Слабые взаимодействия*, ответственные за процессы β -распада, медленные распады гиперонов и мезонов, поглощение мюонов в веществе и распад мюонов¹⁾.

4. *Гравитационные взаимодействия*, характеризуемые ньютоновской гравитационной постоянной G , которая имеет размерность обратного квадрата массы, причем $(G/\hbar c)m_p^2 \sim 10^{-39}$ (m_p — масса протона).

Выше отмечалось, что имеются очень веские данные, свидетельствующие о подчинении барионов абсолютному закону сохранения. Он гласит, что число барионов минус число антибарионов остается постоянным при любых взаимодействиях. Этот закон обычно называют законом сохранения тяжелых частиц. Он является, например, причиной того, что не происходят такие энергетически разрешенные процессы, как $p \rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}$, $n \rightarrow e^+ + e^- + \nu$, и тем самым вообще отвечает за стабильность вещества. Для лептонов, по-видимому, имеет место аналогичный закон сохранения, известный как закон сохранения лептонов. Он гласит, что в любой реакции, содержащей лептоны, сохраняется число лептонов минус число антилептонов. Экспериментальные данные указывают на выполнение этого закона, если отнести e^- , μ^- и ν к «лептонам», а e^+ , μ^+ и $\bar{\nu}$ — к «антилептонам»²⁾.

Наряду с сохранением числа тяжелых частиц и лептонов во всех реакциях фундаментальных частиц с высокой степенью точности сохраняются: а) энергия и импульс; б) момент количества движения; в) электрический заряд.

Эти законы сохранения, как отмечалось выше, могут быть выражены на языке принципов симметрии и инвариантности, которым должна удовлетворять любая теория, претендующая на описание взаимодействий между частицами. Так:

а) сохранение энергии и импульса связано с однородностью пространства и времени и инвариантностью теории относительно пространственных и временных сдвигов;

б) сохранение момента количества движения — с инвариантностью относительно собственных преобразований Лоренца (изотропия пространства-времени);

в) сохранение заряда — с калибровочной инвариантностью.

Поэтому требуют, чтобы лагранжиан, описывающий систему полей, связанных с фундаментальными частицами, был инвариантным относительно неоднородной группы собственных преобразований Лоренца и опре-

¹⁾ Константа связи слабых взаимодействий имеет размерность квадрата длины или обратного квадрата массы, причем $(G/\hbar c) M^2 \sim 10^{-5}$, где M — масса электрона. — *Прим. ред.*

²⁾ После открытия двух типов нейтрино надо считать, что существует и соответственно два закона сохранения лептонов: $e^-\nu_e$, с одной стороны, и $\mu^-\nu_\mu$ — с другой. — *Прим. ред.*

деленных калибровочных преобразований, гарантирующих сохранение заряда, числа барионов и числа лептонов. Ландау [475] и Вигнер [864] высказали согласующуюся с экспериментом гипотезу, что все взаимодействия инвариантны относительно операции обращения времени.

Перечисленные выше законы сохранения в настоящее время считаются точными (по крайней мере в ближайшей к нам части Вселенной), т. е. они выполняются во всех взаимодействиях между частицами. Кроме этих точных законов сохранения, имеется ряд законов сохранения, которые, по-видимому, выполняются только в некоторых взаимодействиях. Так, в сильных взаимодействиях барионов и мезонов сохраняется изотопический спин. Это следует из зарядовой независимости взаимодействий нуклон-нуклон и π -мезон-нуклон и, по-видимому, имеет место также для K -мезон-барионных взаимодействий (см., например, статьи Далица [151], Ли [483], Фелдмана [239]). Весьма вероятно, что во всех сильных взаимодействиях сохраняется также и четность. С другой стороны, электромагнитные взаимодействия сохраняют четность и лишь третью компоненту изотопического спина. Слабые взаимодействия не сохраняют ни четности, ни изотопического спина (последний для лептонов фактически не определен). Это краткое обсуждение показывает, что, по-видимому, имеется соответствие между силой взаимодействия и свойственным ему числом законов сохранения или, наоборот, слабостью взаимодействия и числом нарушаемых им законов сохранения. Причина соответствия еще не выяснена. Однако это соответствие отражено в большинстве современных теорий взаимодействия между фундаментальными частицами.

За последние несколько лет достигнут значительный прогресс в связи с идеей, что природу легче всего описывать последовательностью приближений (см. статьи Пайса [611] и Гелл-Манна [309]). В первом приближении электромагнитные и слабые взаимодействия «выключены», т. е. предполагаются несуществующими. Лептоны и фотон при этом никак не взаимодействуют. В то же время барионы и мезоны взаимодействуют в согласии с упомянутыми выше законами сохранения (числа барионов, полного изотопического спина и его третьей компоненты, странности, PC и т. д.). В этом приближении не могут происходить распады с участием лептонов и фотонов. Во втором приближении учитывается электрический заряд частиц, так что происходят и сильные, и электромагнитные взаимодействия, но не слабые. На процессы с участием барионов и мезонов теперь оказывают влияние электромагнитные эффекты с вытекающим отсюда нарушением закона сохранения полного изотопического спина (зарядовой независимости). Распады с участием фотонов, такие, как $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ и $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$, уже разрешены. Однако лептоны еще не испытывают никаких взаимодействий, кроме электромагнитных. В последнем приближении, которое дает столь точное описание мира, какое только достижимо на сегодняшний день (без учета гравитационных эффектов), принимаются во внимание слабые взаимодействия. Поэтому становятся возможными «медленные» распады гиперонов, мюонов π - и K -мезонов и нейтрона, а также поглощение отрицательных мюонов в веществе.

Следует подчеркнуть, что изложенное выше описание «фундаментальных частиц», несомненно, не окончательное. При этом описании каждой частице приводится в соответствие поле, причем не делается каких-либо различий между «элементарными» и «составными» фундаментальными частицами. Однако в рамках теории поля можно высказать предположение, что π -мезон, например, на самом деле представляет собой составную систему, образованную из тесно связанных друг с другом нуклона и анти-

нуклона (гипотеза Ферми и Янга [244], см. в этой связи также статьи Гейзенберга [373], Саката [684], Леви и Маршака [499], Маркова [534], Окуня [599, 600]), или что гипероны являются связанными состояниями одного или более K -мезонов с нуклонами (Голдхабер [329], Кристи [133]). Схема Ферми и Янга и в самом деле могла бы «объяснить» псевдоскалярную природу π -мезона, так как связанная система нуклон — антинуклон в S -состоянии имеет четность, противоположную четности вакуума. Основная трудность всех подобных теорий состоит в том, что в настоящее время отсутствует сколько-нибудь удовлетворительный способ расчета свойств сильно взаимодействующих систем. В схеме Ферми и ее обобщениях, принадлежащих Саката [684] и Окуню [599], π -мезоны и K -мезоны, а также Σ - и Ξ -гипероны рассматриваются как составные частицы. Энергия связи у этих составных систем сравнима с массами свободных частиц. Возможно, что при не слишком больших энергиях такие составные частицы могут и в самом деле рассматриваться как «элементарные». Поэтому теория, в которой каждой фундаментальной частице приводится в соответствие поле, при определенных условиях может оказаться приближенно верной. Современные теоретические взгляды на мезон-нуклонные явления основываются на этой (приближенной) картине и говорят в пользу такой точки зрения.

§ 2. Ограничения, обусловленные пространственно-временными симметриями

В § 1 этой главы отмечалось, что свойства инвариантности физических законов могут быть разделены на две группы. Первая группа содержит симметрии, которые носят универсальный характер, а вторая группа — симметрии, присущие ограниченному классу явлений. Примером симметрии второй группы служит изотопическая инвариантность, присущая только сильным взаимодействиям. Первая группа симметрий может быть подразделена далее на два класса: пространственно-временные симметрии, состоящие из

- 1) пространственно-временных сдвигов,
- 2) собственных преобразований Лоренца,
- 3) обращения времени (по Вигнеру)

и симметрии, связанные с

- а) сохранением электрического заряда,
- б) сохранением числа тяжелых частиц.

Мы видели, что сохранение заряда может быть связано с инвариантностью лагранжиана относительно определенной группы калибровочных преобразований заряженных полей. Делались также попытки связать сохранение числа тяжелых частиц с определенными калибровочными преобразованиями операторов поля тяжелых частиц. Пока не удалось предложить удовлетворительную схему для этого. Одну из таких попыток мы опишем в § 5.

В этом параграфе мы будем рассматривать ограничения на вид лагранжиана взаимодействия в локальных теориях поля, налагаемые пространственно-временными симметриями. Мы начнем сразу же с вторично-квантованной теории.

Сначала снова рассмотрим случай спинорного поля $\psi(x)$, взаимодействующего с нейтральным скалярным бозонным полем $\phi(x)$. Предположим, что в частной лоренцевой системе отсчета наша система полей может

быть охарактеризована лагранжевой плотностью $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \psi)$. Утверждение, что система полей состоит из спинорного и скалярного полей, означает, что при любом неоднородном преобразовании Лоренца $\{a, \Lambda\}$, при котором $x \rightarrow x' = \Lambda x + a$, поля ψ и φ преобразуются следующим образом:

$$U(a, \Lambda) \varphi(x) U(a, \Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda x + a), \quad (10.3a)$$

$$U(a, \Lambda) \psi(x) U(a, \Lambda)^{-1} = S(\Lambda)^{-1} \psi(\Lambda x + a); \quad (10.3b)$$

здесь $U(a, \Lambda)$ — унитарное представление неоднородной группы Лоренца в гильбертовом пространстве векторов состояния системы. Как отмечалось в гл. 2, для сдвигов $U(a, \Lambda)$ имеет вид

$$U(a, 1) = e^{ia_\mu P^\mu}, \quad (10.4)$$

где 4-вектор энергии-импульса $P_\mu = \int d\sigma_\nu T_{\mu\nu}^v$, а $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса системы полей. Для однородных преобразований Лоренца $U(a, \Lambda)$ запишется в виде

$$U(0, \Lambda) = e^{1/2 i\Lambda^{\mu\nu} M_{\mu\nu}}, \quad (10.5)$$

где $M_{\mu\nu}$ — тензор момента количества движения поля. Таким образом, видно, что существование операторов P_μ и $M_{\mu\nu}$ есть следствие релятивистской инвариантности. Операторы P_μ и $M_{\mu\nu}$ являются генераторами сдвигов и преобразований Лоренца соответственно и поэтому удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (10.6)$$

$$[P_\mu, M_{\kappa\lambda}] = i(g_{\mu\kappa} P_\lambda - g_{\mu\lambda} P_\kappa), \quad (10.7)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\kappa\lambda}] = i(g_{\mu\kappa} M_{\lambda\nu} + g_{\lambda\nu} M_{\mu\kappa} - g_{\lambda\mu} M_{\kappa\nu} - g_{\nu\kappa} M_{\lambda\mu}). \quad (10.8)$$

При бесконечно малых преобразованиях

$$U(a, 1) \approx 1 + ia^\mu P_\mu, \quad (10.9a)$$

$$U(0, \Lambda) \approx 1 + \frac{1}{2} i\Lambda^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \quad (10.9b)$$

формула (10.3a) переходит в

$$\begin{aligned} (1 + ia^\mu P_\mu) \varphi(x) (1 - ia^\mu P_\mu) + O(a^2) &\approx \varphi(x) + a^\mu \partial_\mu \varphi(x) + O_1(a^2) \approx \\ &\approx \varphi(x) + ia^\mu [P_\mu, \varphi(x)] + \dots, \end{aligned} \quad (10.10)$$

откуда

$$[P_\mu, \varphi(x)] = -i\partial_\mu \varphi(x). \quad (10.11)$$

Аналогично,

$$[M_{\mu\nu}, \varphi(x)] = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \varphi(x), \quad (10.12)$$

$$[P_\mu, \psi_\alpha(x)] = -i\partial_\mu \psi_\alpha(x), \quad (10.13)$$

$$[M_{\mu\nu}, \psi_\alpha(x)] = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \psi_\alpha(x) + i \sum_{\beta=1}^4 (\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \psi_\beta(x), \quad (10.14a)$$

где

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu). \quad (10.14b)$$

Следует отметить, что выписанные выше релятивистские преобразования, так же как и рассмотренные ранее преобразования для случая свободных полей, относятся к «шредингеровскому типу», т. е. преобра-

зуются векторы состояния ($|\Phi\rangle \rightarrow |\Phi'\rangle = U(a, \Lambda)|\Phi\rangle$), но используются «одни и те же» операторы (полевые наблюдаемые).

В дальнейшем для некоторых целей будет удобно использовать релятивистские преобразования «гейзенберговского типа», когда преобразуются не векторы состояния, а операторы. При преобразовании гейзенберговского типа наблюдаемая $O(x)$ при релятивистском преобразовании $x \rightarrow x' = \Lambda x + a$ преобразуется по правилу $O(x) \rightarrow O'(x)$. Связь между преобразованиями шредингеровского и гейзенберговского типа заключается в следующем: если при преобразовании шредингеровского типа вектор состояния $|\Phi\rangle$ переходит в $|\Phi'\rangle$, то

$$(\Phi, O'(x)\Phi) = (\Phi', O(x)\Phi'). \quad (10.15)$$

Если U унитарный оператор, то с учетом соотношения $|\Phi'\rangle = U(a, \Lambda)|\Phi\rangle$ $O'(x) = U^{-1}(a, \Lambda)O(x)U(a, \Lambda) =$

$$= U(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1})O(x)U(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1})^{-1} = S_O(\Lambda)O(\Lambda^{-1}(x-a)), \quad (10.16a)$$

или, что то же самое,

$$O'(x') = S_O(\Lambda)O(x). \quad (10.16b)$$

Скалярность лагранжиана \mathcal{L} тогда означает, что преобразованный лагранжиан \mathcal{L}' имеет одну и ту же величину в одной и той же в физическом смысле точке, т. е.

$$\mathcal{L}'(\psi'(x'), \varphi'(x')) = \mathcal{L}(\psi(x), \varphi(x)) = \mathcal{L}(S(\Lambda)^{-1}\psi'(x'), \varphi'(x')), \quad (10.17a)$$

или, эквивалентно,

$$U^{-1}(a, \Lambda)\mathcal{L}(\psi(x'), \varphi(x'))U(a, \Lambda) = \mathcal{L}(\psi(x), \varphi(x)). \quad (10.17b)$$

Мы уже установили, что относящаяся к свободным полям часть лагранжиана \mathcal{L}_0 , являющаяся суммой лагранжиана свободного дираковского поля (8.2) и лагранжиана свободного скалярного поля со спином, равным нулю (7.227), преобразуется как скаляр при собственных преобразованиях Лоренца. Поэтому интеграл действия $\int d^4x \mathcal{L}_0(x)$ для свободных полей является инвариантом. Возвращаясь к части лагранжиана, описывающей взаимодействие между нейтральным (а потому и эрмитовым) скалярным полем и заряженным спинорным полем, мы находим, что относительно *собственных* преобразований Лоренца скалярами являются следующие локальные связи:

$$G\tilde{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x) \quad (\text{скалярная связь}),$$

$$G\tilde{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\varphi(x) \quad (\text{псевдоскалярная связь}),$$

$$G\tilde{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\partial^\mu\varphi(x) \quad (\text{векторная связь}),$$

$$iG\tilde{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x)\partial^\mu\varphi(x) \quad (\text{псевдовекторная связь}).$$

В плотности лагранжиана для псевдовекторной связи множитель i обеспечивает эрмитовость выражения. В этой связи вспомним, что γ_5 есть антиэрмитова матрица, $\gamma_5^* = (\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^* = -\gamma_5$, и что $\gamma_\mu^* = \gamma^0\gamma_\mu\gamma^0$. Поэтому

$$(\tilde{\psi}\gamma_5\psi)^* = (\psi^*\gamma_0\gamma_5\psi)^* = \psi^*\gamma_5^*\gamma_0^*\psi = \tilde{\psi}\gamma_5\psi, \quad (10.18)$$

$$(\tilde{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^* = \psi^*\gamma_5^*\gamma_\mu^*\gamma_0^*\psi = \tilde{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi = -\tilde{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi. \quad (10.19)$$

Рассмотрим теперь ограничения, налагаемые требованием инвариантности теории относительно обращения времени по Вигнеру. Важная теорема Паули [632] и Людерса [517, 518] (это открытие, по существу, было предвосхищено Шеллом и Швингером [714]), известная в настоящее время, как *CPT*-теорема, утверждает, что в рамках релятивистски инвариантных *локальных* теорий поля в предположении обычной связи между спином и статистикой инвариантность относительно обращения времени эквивалентна инвариантности относительно $U_F U_C$, т. е. комбинированной операции зарядового сопряжения (U_C) и пространственного отражения (U_P). В лагранжевой формулировке *CPT*-теорема следует из предположений об инвариантности лагранжиана относительно собственных преобразований Лоренца, эрмитовости лагранжиана, о локальности теории и о том, что частицы целого спина (бозоны) должны подчиняться статистике Бозе — Эйнштейна, а частицы полуцелого спина (фермионы) должны подчиняться статистике Ферми — Дирака, т. е. соблюдается обычная связь между спином и статистикой.

Мы дадим детальное доказательство этой теоремы в гл. 18. Здесь же мы несколько менее формально вкратце изложим физическое содержание предположения об инвариантности относительно операции *CP*. Для этого вспомним, что инвариантность относительно операции пространственного отражения U_P подразумевает, что $[H, U_P] = 0$, и это равносильно сохранению квантового числа, называемого четностью. Если гамильтониан H теории инвариантен относительно пространственного отражения, то в такой теории нельзя отличить правое от левого. Эта инвариантность означает, что зеркальное отражение любого состояния системы также является состоянием системы. Теперь твердо установлено, что слабые взаимодействия не инвариантны относительно U_P . Глубокому пониманию этих вопросов мы обязаны Ли и Янгу [488]. Ландау [475] высказал предположение, что хотя сохранение четности может нарушаться, операция $U_P U_C$ может все же оставаться точной операцией симметрии, относительно которой инвариантны физические законы. Это говорило бы, что состояние, полученное из состояния системы зеркальным отражением с одновременной заменой каждой из частиц на ее античастицу, всегда будет возможным состоянием соответствующей системы античастиц.

Трансформационные свойства спинорного поля $\psi(x)$ при зарядовом сопряжении и пространственном отражении *определяются* следующим образом:

$$U_C \psi(x) U_C^{-1} = \eta_C C \tilde{\psi}^T(x), \quad (10.20a)$$

$$U_P \psi(x) U_P^{-1} = \eta_P \gamma_0 \psi(i_s x), \quad (10.20b)$$

где $|\eta_P|^2 = |\eta_C|^2 = 1$ и $C^{-1} \gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$. Заметим, что нет нужды в конкретизации фазы множителя, появляющегося в правой стороне равенств (10.20a) и (10.20b), так как мы всегда будем рассматривать только билинейные коварианты, образованные из ψ и $\tilde{\psi}$. Нейтральное поле $\phi(x)$ при операции $U_P U_C$ преобразуется согласно правилу

$$U_P U_C \phi(x) (U_P U_C)^{-1} = n \phi(i_s x). \quad (10.21)$$

Ввиду нейтральности бозонного поля n вещественно, причем $n^2 = +1$. Случай $n = 1$ соответствует скалярному полю, случай $n = -1$ — псевдоскалярному. Трансформационные свойства производных от операторов

поля запишутся в виде

$$U_P U_C \partial_\mu \Phi(x) (U_P U_C)^{-1} = \varepsilon_\mu \partial'_\mu \Phi(i_s x), \quad (10.22)$$

где $\varepsilon_\mu = g_{\mu\mu}$, т. е. $\varepsilon_0 = +1$, $\varepsilon_i = -1$ ($i = 1, 2, 3$).

Говорят, что локальная теория является CP -инвариантной (а по теореме Людерса — и T -инвариантной), если существует такой специфический выбор фаз η и n , при котором лагранжиан инвариантен относительно преобразования $U_P U_C$. Другим, эквивалентным критерием CP -инвариантности теории является инвариантность гамильтониана \tilde{H} относительно преобразования $U_P U_C$ при некотором специфическом выборе фаз. Иными словами, теория будет CP -инвариантна, если $H = U_C U_P H (U_C U_P)^{-1}$, или, что то же самое, если $L = U_C U_P L (U_C U_P)^{-1}$.

Покажем теперь, что если CP сохраняется при взаимодействии между спинорным полем $\psi(x)$ и бозонным полем $\phi(x)$, то лагранжиан взаимодействия будет состоять либо из члена вида $\tilde{\psi}\psi\phi$, либо из любой комбинации членов вида $\tilde{\psi}\gamma_5\psi\phi$, $\tilde{\psi}\gamma_\mu\psi\partial^\mu\phi$, $\tilde{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi\partial^\mu\phi$ [235]. Для этого рассмотрим трансформационные свойства билинейных форм $\tilde{\psi}\psi$, $\tilde{\psi}\gamma_\mu\psi$, $\tilde{\psi}\gamma_5\psi$ и $\tilde{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$ при операции CP . Используя (10.20), находим

$$U_C \tilde{\psi}_\alpha(x) O_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) U_C^{-1} = C_{\alpha\delta}^{-1T} \psi_\delta(x) C_{\beta\rho} \tilde{\psi}_\rho(x) O_{\alpha\beta} \quad (10.23a)$$

$$= -\psi_\delta(x) C_{\delta\alpha}^{-1} O_{\alpha\beta} C_{\beta\rho} \tilde{\psi}_\rho(x) \quad (10.23б)$$

$$= \tilde{\psi}_\rho(x) [C^{-1}OC]_{\delta\rho} \psi_\delta(x). \quad (10.23в)$$

При переходе от соотношения (10.23a) к (10.23б) мы использовали тот факт, что $C^T C^{-1} = -I$. При получении соотношения (10.23в) мы учли одновременные перестановочные соотношения и пренебрегли членом, содержащим $\delta^{(3)}(0)$, который возникает из этих перестановочных соотношений. Чтобы не возникало такой неоднозначности, предположим, что все спинорные выражения должны быть симметризованы:

$$\tilde{\psi}_\alpha(x) O_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \rightarrow \frac{1}{2} [(\tilde{\psi}(x)O)_\beta, \psi_\beta(x)] = \frac{1}{2} [\tilde{\psi}_\alpha(x), \psi_\beta(x)] O_{\alpha\beta}. \quad (10.24)$$

Заметим, что коммутатор $1/2 [\tilde{\psi}(x)O, \psi(x)]$ (симметризованное выражение, соответствующее $\tilde{\psi}O\psi(x)$) является однокомпонентной величиной в отличие от коммутатора $[\psi(x), \tilde{\psi}(x')]_+$, являющегося 16-компонентной величиной. Трансформационные свойства симметризованного произведения при зарядовом сопряжении даются формулой

$$U_C [\tilde{\psi}_\alpha(x), \psi_\beta(x)] U_C^{-1} O_{\alpha\beta} = [\tilde{\psi}_\rho(x), \psi_\delta(x)] (C^{-1}OC)_{\delta\rho}. \quad (10.25)$$

В табл. 6 приведены преобразования шестнадцати ковариантов. Комбинируя эти результаты с результатами, полученными при применении операции U_P , находим

$$U_C U_P [\tilde{\psi}(x)O, \psi(x)] (U_C U_P)^{-1} = [\tilde{\psi}(i_s x) \gamma_0 (C^{-1}OC)^T \gamma_0, \psi(i_s x)]. \quad (10.26)$$

Отсюда, применяя обозначение $U_{CP} = U_C U_P$, получаем

$$U_{CP} [\tilde{\psi}(x), \psi(x)] U_{CP}^{-1} = [\tilde{\psi}(i_s x), \psi(i_s x)], \quad (10.27a)$$

$$U_{CP} [\tilde{\psi}(x) \gamma_5, \psi(x)] U_{CP}^{-1} = -[\tilde{\psi}(i_s x) \gamma_5, \psi(i_s x)], \quad (10.27б)$$

$$U_{CP} [\tilde{\psi}(x) \gamma_\mu, \psi(x)] U_{CP}^{-1} = -\varepsilon_\mu [\tilde{\psi}(i_s x) \gamma_\mu, \psi(i_s x)], \quad (10.27в)$$

$$U_{CP} [\tilde{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu, \psi(x)] U_{CP}^{-1} = -\varepsilon_\mu [\tilde{\psi}(i_s x) \gamma_5 \gamma_\mu, \psi(i_s x)]. \quad (10.27г)$$

Таблица 6

O	$c^{-1}OC$	$(c^{-1}OC)^T$	$\gamma_0 (c^{-1}OC)^T \gamma^0$
I	I	I	I
γ_μ	$-\gamma_\mu^T$	$-\gamma_\mu$	$-\varepsilon_\mu \gamma_\mu$
γ_5	$+\gamma_5^T$	γ_5	$-\gamma_5$
$\gamma_5 \gamma_\mu$	$+(\gamma_5 \gamma_\mu)^T$	$\gamma_5 \gamma_\mu$	$-\varepsilon_\mu \gamma_5 \gamma_\mu$
$\sigma_{\mu\nu}$	$-\sigma_{\mu\nu}^T$	$-\sigma_{\mu\nu}$	$-\varepsilon_\nu \varepsilon_\mu \sigma_{\mu\nu}$

Различные члены лагранжиана взаимодействия преобразуются согласно правилам:

$$U_{CP} [\tilde{\psi}(x), \psi(x)] \varphi(x) U_{CP}^{-1} = n [\tilde{\psi}(i_s x), \psi(i_s x)] \varphi(i_s x), \quad (10.28a)$$

$$U_{CP} [\tilde{\psi}(x) \gamma_5, \psi(x)] \varphi(x) U_{CP}^{-1} = -n [\tilde{\psi}(i_s x) \gamma_5, \psi(i_s x)] \varphi(i_s x), \quad (10.28б)$$

$$U_{CP} [\tilde{\psi}(x) \gamma_\mu, \psi(x)] \partial^\mu \varphi(x) U_{CP}^{-1} = -n [\tilde{\psi}(i_s x) \gamma_\mu, \psi(i_s x)] \partial'^\mu \varphi(i_s x), \quad (10.28в)$$

$$U_{CP} [\tilde{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu, \psi(x)] \partial^\mu \varphi(x) U_{CP}^{-1} = -n [\tilde{\psi}(i_s x) \gamma_5 \gamma_\mu, \psi(i_s x)] \partial'^\mu \varphi(i_s x). \quad (10.28г)$$

Следует заметить, что эти члены разделяются на две группы, одна из которых содержит в правой стороне равенств множитель $(+n)$, а другая $(-n)$. Это доказывает высказанное выше утверждение.

Если заметить, что теория, описываемая лагранжианом $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ [где \mathcal{L}_I — линейная комбинация любых из четырех выражений (10.28)], инвариантна относительно калибровочных преобразований $\psi \rightarrow [\exp(i\alpha)] \psi$, $\tilde{\psi} \rightarrow [\exp(-i\alpha)] \tilde{\psi}$, так что величина $[\tilde{\psi} \gamma_\mu, \psi]$ сохраняется, $\partial_\mu [\tilde{\psi} \gamma^\mu, \psi] = 0$, то можно провести дальнейшее упрощение. Теперь член лагранжиана взаимодействия $[\tilde{\psi} \gamma_\mu, \psi] \partial^\mu \varphi$ можно переписать в виде

$$\partial^\mu ([\tilde{\psi} \gamma_\mu, \psi] \varphi) - (\partial^\mu [\tilde{\psi} \gamma_\mu, \psi]) \varphi,$$

что равно $\partial^\mu ([\tilde{\psi} \gamma_\mu, \psi] \varphi)$ в силу указанного выше закона сохранения (или эквивалентно как следствие уравнений движения).

Остающийся член имеет вид 4-дивергенции. Мы отмечали ранее, что два лагранжиана, отличающиеся на 4-дивергенцию, приводят к одним и тем же уравнениям движения и поэтому эквивалентны. Нам не нужно, следовательно, рассматривать векторную связь. Укажем также, что член с векторной связью может быть удален при помощи унитарного преобразования [597]¹⁾. Таким образом, мы приходим к выводу, что в локальной теории, инвариантной относительно преобразований Лоренца и преобразования CP , допустимы только такие лагранжианы взаимодействия между бозонным полем φ со спином, равным нулю, и спинорным полем ψ , которые имеют вид

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{2} G [\tilde{\psi}(x), \psi(x)] \varphi(x), \quad (10.29a)$$

или

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{2} G_1 [\tilde{\psi}(x) \gamma_5, \psi(x)] \varphi(x) + \frac{1}{2} G_2 [\tilde{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu, \psi(x)] \partial^\mu \varphi(x), \quad (10.29б)$$

¹⁾ В отличие от этого, предыдущее рассуждение автора не корректно, так как в лагранжиане нельзя использовать следствий из уравнений движения. — Прим. ред.

если ограничиться трilinearными связями. Интересно отметить, что эти ограничения на вид взаимодействий, вытекающие из CP -инвариантности, в точности такие же, как и вытекающие из сохранения четности, т. е. из требования, чтобы лагранжиан был инвариантен относительно операции U_P в отдельности. В этом случае скалярное взаимодействие тоже не смешивается с псевдоскалярным или псевдовекторным.

В точности такие же рассуждения применимы к случаю взаимодействия между вещественным бозонным векторным полем φ_μ со спином, равным 1, и спинорным полем ψ . Локальные взаимодействия в \mathcal{L}_I должны быть образованы путем комбинации спинорных ковариантов и φ_μ или $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu$. Эти величины преобразуются при U_{CP} согласно

$$U_{CP} \varphi_\mu(x) U_{CP}^{-1} = n' \varepsilon_\mu \varphi_\mu(i_s x) \quad (10.30a)$$

и

$$U_{CP} F_{\mu\nu}(x) U_{CP}^{-1} = n' \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu F_{\mu\nu}(i_s x). \quad (10.30b)$$

Скалярные лагранжианы взаимодействия $\tilde{\psi}\gamma^\mu\psi\varphi_\mu$, $i\tilde{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\varphi_\mu$, $\tilde{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}$ и $\psi\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi F_{\mu\nu}$ (причем $\sigma^{\mu\nu} = (1/2i)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$), преобразуются при операции CP по правилам

$$U_{CP} [\tilde{\psi}(x)\gamma^\mu, \psi(x)] \varphi_\mu(x) U_{CP}^{-1} = -n' [\tilde{\psi}(i_s x)\gamma^\mu, \psi(i_s x)] \varphi_\mu(i_s x), \quad (10.31a)$$

$$U_{CP} [\tilde{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5, \psi(x)] \varphi_\mu(x) U_{CP}^{-1} = -n' [\tilde{\psi}(i_s x)\gamma^\mu\gamma_5, \psi(i_s x)] \varphi_\mu(i_s x), \quad (10.31b)$$

$$U_{CP} [\tilde{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}, \psi(x)] F_{\mu\nu}(x) U_{CP}^{-1} = -n' [\tilde{\psi}(i_s x)\sigma^{\mu\nu}, \psi(i_s x)] F_{\mu\nu}(i_s x), \quad (10.31v)$$

$$U_{CP} [\tilde{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\gamma_5, \psi(x)] F_{\mu\nu}(x) U_{CP}^{-1} = n' [\tilde{\psi}(i_s x)\sigma^{\mu\nu}\gamma_5, \psi(i_s x)] F_{\mu\nu}(i_s x). \quad (10.31g)$$

Таким образом, лагранжиан взаимодействия может либо состоять из линейной комбинации членов вида $\tilde{\psi}\gamma^\mu\psi\varphi^\mu$, $\tilde{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$ и $\tilde{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi\varphi^\mu$, либо иметь вид $\tilde{\psi}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi F^{\mu\nu}$.

В заключение этого параграфа мы проведем краткое исследование требований, налагаемых лоренцевой и CP -инвариантностями на структуру свободных (невзаимодействующих) полей (см., например, работу Соловьева [735]). Используя соотношения (10.27), легко установить, что наиболее общий локальный лагранжиан для свободного дираковского поля, который инвариантен относительно преобразований Лоренца и операции CP и является билинейной комбинацией ψ и $\tilde{\psi}$, дается выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \frac{1}{2} ia (\tilde{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - \partial_\mu\tilde{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)) + \\ & + \frac{1}{2} b (\tilde{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - \partial_\mu\tilde{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x)) - \frac{1}{2} m [\tilde{\psi}(x), \psi(x)], \end{aligned} \quad (10.32)$$

где a и b — вещественные постоянные, а множитель i введен для обеспечения эрмитовости $\mathcal{L}(x)$. Ясно, что этот лагранжиан не инвариантен относительно пространственного отражения, так как при операции U_P меняют знак члены, содержащие γ_5 . Из этого лагранжиана для операторов поля ψ и $\tilde{\psi}$ следуют уравнения движения

$$(-i\Gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0, \quad (10.33a)$$

где

$$\Gamma^\mu = (a - ib\gamma_5) \gamma^\mu. \quad (10.336)$$

Требование, чтобы $\psi(x)$ описывало частицы с массой m , может быть выражено как требование, чтобы $\psi(x)$ удовлетворяло уравнению

$$(\square + m^2) \psi = 0. \quad (10.34)$$

Поэтому матрицы Γ^μ должны удовлетворять перестановочным соотношениям

$$\Gamma^\mu \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \Gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (10.35)$$

Подстановка выражений (10.336) в (10.35) с учетом известных перестановочных соотношений для γ_μ , γ_5 , а именно $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}$ и $[\gamma^\mu \gamma^5]_+ = 0$, показывает, что если $a^2 - b^2 = 1$, то соотношения (10.35) и (10.336) будут удовлетворены. В этом случае (10.33а) будет просто «обычным» уравнением Дирака с другим представлением γ -матриц. Ясно, что частным выбором a и b , удовлетворяющим уравнению $a^2 - b^2 = 1$, будет $a = \sqrt{2}$, $b = 1$.

Отметим, наконец, что релятивистски и CP -инвариантный лагранжиан для заряженного бозонного поля записывается в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \mu^2 [\varphi^*(x), \varphi(x)]_+ + \frac{1}{2} [\partial_\mu \varphi^*(x), \partial^\mu \varphi(x)]_+, \quad (10.36)$$

т. е. должна быть введена симметризация билинейных по бозонным операторам множителей. Мы будем иногда обозначать требующуюся симметризацию точкой и писать

$$\mathcal{L} = -\mu^2 \varphi^* \cdot \varphi + \partial_\mu \varphi^* \cdot \partial^\mu \varphi, \quad (10.37)$$

где

$$\varphi^* \cdot \varphi = \frac{1}{2} [\varphi^*, \varphi]_+. \quad (10.38a)$$

Для упрощения обозначений мы и в случае фермионов часто будем отмечать необходимую симметризацию тоже точкой и писать

$$\frac{1}{2} [\tilde{\psi} O, \psi] = \tilde{\psi} O \cdot \psi. \quad (10.38b)$$

§ 3. Электромагнитные взаимодействия

В § 7 гл. 7 мы отмечали, что с учетом уравнений поля из инвариантности лагранжиана относительно преобразования $\varphi_r \rightarrow \varphi'_r = \varphi_r + \delta\varphi_r$ вытекает¹⁾ существование сохраняющего тока

$$J^\mu = \sum_r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{r,\mu}} \delta\varphi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{r,\mu}^*} \delta\varphi_r^* \right), \quad (10.39a)$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (10.39b)$$

Мы установили, кроме того, что инвариантность эрмитовой лагранжевой плотности \mathcal{L} относительно калибровочных преобразований

$$\varphi_r = e^{i\alpha} \varphi_r, \quad (10.40a)$$

$$\varphi_r^* = e^{-i\alpha} \varphi_r^*, \quad (10.40b)$$

¹⁾ Ниже, вплоть до уравнения (10.47), оператор φ_r обозначает произвольный оператор поля, а не обязательно оператор именно мезонного поля.

в силу (10.39) приводит к сохраняющемуся току, который может быть отождествлен с плотностью электрического заряда и тока системы. Наоборот, наложение требования, чтобы лагранжиан, описывающий электрически заряженные поля, был инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\varphi_r = e^{ie\chi}\varphi_r, \quad (10.41a)$$

$$\varphi_r^* = e^{-ie\chi}\varphi_r^* \quad (10.41b)$$

(известных как калибровочные преобразования заряженных полей) приписывает частице и античастице равные и противоположные по знаку заряды, величина которых не фиксирована. Так как \mathcal{L} эрмитов, из калибровочной инвариантности вытекает, что в лагранжиане должны содержаться только члены вида $\varphi_r^*\varphi_r$.

Янг и Миллс [872] (см. также работу Утиямы [797]) высказали мысль, что указанное выше требование калибровочной инвариантности нужно распространить и на те калибровочные преобразования, при которых фазовый множитель χ является произвольной функцией от координат $\chi = \chi(x)$, так что относительная фаза φ_r в двух различных пространственно-временных точках полностью произвольна. Чтобы сделать лагранжиан инвариантным относительно этой более широкой группы преобразований, необходимо ввести новое поле $A_\mu(x)$ ¹⁾, которое носит векторный характер и преобразуется при указанных калибровочных преобразованиях по закону

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi(x). \quad (10.42)$$

Кроме того, взаимодействие между полями A_μ и φ_r должно вводиться путем подстановок

$$\partial_\mu\varphi_r(x) \rightarrow \left(\partial_\mu - i\frac{e}{c}A_\mu(x) \right) \varphi_r(x) \quad (10.43a)$$

и

$$\partial_\mu\varphi_r^*(x) \rightarrow \left(\partial_\mu + i\frac{e}{c}A_\mu(x) \right) \varphi_r^*(x) \quad (10.43b)$$

в лагранжиане для свободных полей. Эта расширенная калибровочная инвариантность (называемая также инвариантностью относительно калибровочных преобразований второго рода), по существу, определяет взаимодействие заряженных полей с электромагнитным полем $F_{\mu\nu}$ ($F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$). Способ, при помощи которого можно прийти к правилам (10.43), основан на замечании, что при калибровочном преобразовании

$$\varphi_r \rightarrow \varphi'_r = e^{ie\chi(x)}\varphi_r, \quad (10.44a)$$

$$\varphi_r^* \rightarrow \varphi_r'^* = e^{-ie\chi(x)}\varphi_r^*, \quad (10.44b)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi(x) \quad (10.44v)$$

¹⁾ Вывод в работах [872, 797], а также и в ряде других статей о том, что из требования расширенной калибровочной инвариантности вытекает само существование векторного поля, неправилен. Фактически в широком классе теорий, охватывающем и рассмотренные в этих работах случаи, фазы в различных пространственно-временных точках совершенно произвольны без привлечения каких-либо вспомогательных полей и дополнительных взаимодействий. Если же постулировать существование векторного поля A_μ наряду с другими полями, то расширенная калибровочная инвариантность в такой теории ограничивает число степеней свободы взаимодействующего 4-векторного поля и гарантирует, что оно описывает только частицы со спином, равным единице. К этому сводится смысл калибровочной инвариантности (см. по этому поводу статью [915]).— *Прим. ред.*

выражение $(\partial_\mu - ieA_\mu) \varphi_r$ преобразуется согласно правилу

$$(\partial_\mu - ieA'_\mu) \varphi'_r = e^{ie\chi} (\partial_\mu - ieA_\mu - ie \partial_\mu \chi + ie \partial_\mu \chi) \varphi_r = e^{ie\chi} (\partial_\mu - ieA_\mu) \varphi_r. \quad (10.45)$$

Таким образом, фазовый множитель в этом выражении ведет себя так, как если бы он был постоянной, так что выражение $\varphi_r^* (\partial_\mu - ieA_\mu) \varphi_r$ инвариантно относительно калибровочного преобразования (10.44). Поэтому если в лагранжиане для свободных полей \mathcal{L}_m сделать для всех заряженных полей замену

$$\partial_\mu \varphi_r \rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu) \varphi_r, \quad (10.46a)$$

$$\partial_\mu \varphi_r^* \rightarrow (\partial_\mu + ieA_\mu) \varphi_r^* \quad (10.46b)$$

и прибавить к этому лагранжиану лагранжиан не взаимодействующего электромагнитного поля $\mathcal{L}_{em} = -1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, то полный лагранжиан $\mathcal{L} = \mathcal{L}'_m + \mathcal{L}_{em}$ будет инвариантен относительно преобразований (10.44). Заметим, что эта расширенная инвариантность соблюдается только при условии тождественного равенства нулю массы квантов электромагнитного поля. Если бы кванты поля A_μ имели массу m , то лагранжиан свободного поля A_μ был бы равен $-1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m^2 A_\mu A^\mu$. Тогда теория не была бы инвариантна относительно расширенных калибровочных преобразований из-за неинвариантности выражения $m^2 A_\nu A^\nu$ ¹⁾.

В том специальном случае, когда заряженное поле взаимодействует с заданным внешним электромагнитным полем $A_\mu^e(x)$, оказывается, что вариация лагранжиана относительно A_μ^e уже не произвольна. Правильное описание этого случая дается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_m - j^\mu(x) A_\mu^e(x), \quad (10.47)$$

где \mathcal{L}_m — лагранжиан заряженных полей, а j^μ — соответствующее выражение для их тока при наличии электромагнитного поля.

В качестве иллюстрации к этим замечаниям рассмотрим случай заряженного поля Клейна — Гордона, взаимодействующего с электромагнитным полем. Мы отмечали ранее, что плотность лагранжиана для этого поля имеет вид

$$\mathcal{L}_m = -\mu^2 \varphi^* \cdot \varphi + \partial_\mu \varphi^* \cdot \partial^\mu \varphi. \quad (10.48)$$

В соответствии со сказанным выше, для получения правильного лагранжиана, описывающего взаимодействие электромагнитного поля с этим заряженным бозонным полем, мы должны заменить в лагранжиане (10.48) производную согласно правилам (10.46a) и (10.46b) и прибавить лагранжиан электромагнитного поля. Мы получим, таким образом, для полного лагранжиана системы выражение

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \mu^2 \varphi^* \cdot \varphi + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\mu} + ieA_\mu \varphi^* \right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - ieA^\mu \varphi \right). \quad (10.49)$$

Варьирование лагранжиана \mathcal{L} по A_μ приводит к уравнениям для электромагнитного поля

$$-\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} = \square A_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu}, \quad (10.50)$$

тогда как варьирование по φ и φ^* приводит к уравнению Клейна — Гордона при наличии взаимодействия с электромагнитным полем. Урав-

¹⁾ Вопреки утверждению автора теория нейтрального массивного векторного поля допускает калибровочно инвариантную формулировку [914]. — *Прим. ред.*

нение (10.50) указывает, что правильное определение тока как источника электромагнитного поля дается выражением

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} = j_\mu. \quad (10.51)$$

В этом примере

$$j_\mu = +ie \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\mu} + ieA_\mu \varphi^* \right) \cdot \varphi - \varphi^* \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} - ieA_\mu \varphi \right) \right]. \quad (10.52)$$

Этот ток сохраняется в силу уравнений движения. Он является тем сохраняющимся током, который получается как следствие инвариантности полного лагранжиана (10.49) относительно калибровочных преобразований первого рода, т. е. преобразований

$$\varphi \rightarrow e^{i\chi} \varphi, \quad (10.53a)$$

и

$$\varphi^* \rightarrow e^{-i\chi} \varphi^*, \quad (10.53b)$$

где фазовый множитель χ не зависит от x . Из того факта, что j_μ сохраняется, т. е. $\partial^\mu j_\mu = 0$, следует, что величина $Q = \int_\sigma d\sigma^\mu(x) j_\mu(x)$ не зависит от σ и есть интеграл движения. Используя одновременные перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \pi(x')] |_{x_0=x'_0} &= \left[\varphi(x), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \varphi(x')} \right] |_{x_0=x'_0} = \\ &= [\varphi(x), \partial_0 \varphi^*(x') + ieA_0(x') \varphi^*(x')] |_{x_0=x'_0} = \\ &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (10.54a)$$

и

$$\begin{aligned} [\varphi^*(x), \pi^*(x')] |_{x_0=x'_0} &= \left[\varphi^*(x), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \varphi^*(x')} \right] |_{x_0=x'_0} = \\ &= [\varphi^*(x), \partial_0 \varphi(x') - ieA_0(x') \varphi(x')] |_{x_0=x'_0} = \\ &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (10.54b)$$

убеждаемся, что

$$[Q, \varphi(x)] = -e\varphi(x), \quad (10.55a)$$

$$[Q, \varphi^*(x)] = +e\varphi^*(x). \quad (10.55b)$$

При выводе уравнений (10.55a) и (10.55b) в качестве гиперповерхности σ выбрана гиперповерхность $x_0 = \text{const}$. Эти уравнения снова приводят к интерпретации φ и φ^* как операторов рождения и уничтожения, а Q — как оператора заряда. Мы вернемся к этим замечаниям при обсуждении заряженного поля Дирака.

Выражение для лагранжевой плотности (10.49) обычно записывается в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_I, \quad (10.56a)$$

где \mathcal{L}_{em} — лагранжиан свободного электромагнитного поля, а \mathcal{L}_I — лагранжиан взаимодействия

$$\mathcal{L}_I = -ie \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\mu} \cdot \varphi - \varphi^* \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) A^\mu + e^2 A_\mu A^\mu \varphi^* \cdot \varphi; \quad (10.56b)$$

\mathcal{L}_I имеет вид $j_\mu(x) A^\mu(x)$, причем ток j_μ дается выражением (10.52). Появление члена $e^2 A_\mu A^\mu \psi^* \cdot \psi$ характерно для взаимодействия бозонного поля с электромагнитным. Он соответствует в нерелятивистском пределе члену A^2 в уравнении Шредингера при наличии электромагнитного поля.

При помощи изложенных в § 6 гл. 7 методов можно опять развить гамильтонов формализм. Как отмечалось выше, импульсы, канонически сопряженные к переменным φ , теперь будут зависеть от электромагнитного поля.

Лагранжева плотность для взаимодействия поля Дирака с электромагнитным запишется в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2i} \left[\tilde{\psi} \gamma^\mu \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu \right) \psi + im\tilde{\psi} \cdot \psi \right] + \\ + \frac{1}{2i} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x^\mu} + ieA_\mu \tilde{\psi} \right) \gamma^\mu \cdot \psi - im\tilde{\psi} \cdot \psi \right] = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{em} + e\tilde{\psi} \gamma^\mu \cdot \psi A_\mu, \quad (10.57)$$

где \mathcal{L}_m — лагранжиан свободного поля Дирака. Варьирование \mathcal{L} по электромагнитным потенциалам теперь приводит к уравнению

$$\square A_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} = -e\tilde{\psi} \gamma_\mu \cdot \psi. \quad (10.58)$$

Аналогично, путем варьирования по ψ и $\tilde{\psi}$ выводятся уравнения Дирака для $\tilde{\psi}$ и ψ при наличии электромагнитного поля:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu + e\gamma_\mu A^\mu(x)) \psi(x) - m\psi(x) = 0, \quad (10.59a)$$

$$(i\partial^\mu - eA^\mu(x)) \tilde{\psi}(x) \gamma_\mu + m\tilde{\psi}(x) = 0. \quad (10.59b)$$

Уравнение (10.58) показывает, что для тока при наличии электромагнитного поля следует взять выражение

$$j_\mu(x) = -\frac{e}{2} [\tilde{\psi}(x) \gamma_\mu \cdot \psi(x)], \quad (10.60)$$

которое формально совпадает с выражением для тока в случае невзаимодействующих полей (8.83). Оно, однако, не в точности такое же, так как в выражении (10.58) ψ и $\tilde{\psi}$ подчиняются уравнениям (10.59a) и (10.59b), содержащим электромагнитные потенциалы, тогда как в выражении (8.83) ψ подчиняется уравнению для свободного поля.

Уравнения (10.58) и (10.59) являются уравнениями движения для операторов поля в гейзенберговской картине, в которой вектор состояния системы $|\Psi\rangle$ не зависит от времени. Канонический формализм (вместе с обычной связью спина со статистикой) позволит нам дать следующие одновременные перестановочные соотношения для операторов поля¹⁾:

$$[\psi(x), \tilde{\psi}(x')]_{x_0=x'_0} = \gamma_0 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (10.61a)$$

$$[\psi(x), \psi(x')]_{x_0=x'_0} = [\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(x')]_{x_0=x'_0} = 0, \quad (10.61b)$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')]_{x_0=x'_0} = -ihc g_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (10.61b)$$

$$[\psi(x), A_\mu(x')]_{x_0=x'_0} = [\tilde{\psi}(x), A_\mu(x')]_{x_0=x'_0} = 0. \quad (10.61г)$$

¹⁾ Для большей ясности мы включили здесь в перестановочные соотношения множители \hbar и c .

Вследствие релятивистской ковариантности теории эти перестановочные соотношения могут быть обобщены, и для произвольных пространственно-временных интервалов они будут иметь вид

$$[\psi(x), \tilde{\psi}(x')]_{\pm} = -iS(x-x') \quad \text{для } (x-x')^2 < 0, \quad (10.62a)$$

$$[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] = -i\hbar c g_{\mu\nu} D(x-x') \quad \text{для } (x-x')^2 < 0, \quad (10.62b)$$

тогда как остальные коммутаторы или антикоммутаторы равны нулю.

Отметим, что сейчас невозможно записать перестановочные соотношения, справедливые для любых промежутков времени; это потребовало бы исчерпывающего знания решений уравнений движения (10.58) и (10.59) (фактически это именно та проблема, которую нужно решить!). Физическая интерпретация операторов ψ , $\tilde{\psi}$ и A_{μ} так же, как и расчет предсказаний вторично-квантованной теории, здесь значительно более трудны, чем [в случае свободных полей. Однако может быть сделано одно важное утверждение об операторах ψ и $\tilde{\psi}$. Из того факта, что оператор тока [см. § уравнение (10.60)]

$$j_{\mu}(x) = -\frac{e}{2} [\tilde{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x)]$$

имеет равную нулю дивергенцию ($\partial^{\mu} j_{\mu}(x) = 0$), следует независимость от времени оператора полного заряда Q

$$Q = -\frac{e}{2} \int_{\sigma} d\sigma^{\mu}(x') [\tilde{\psi}(x') \gamma_{\mu} \psi(x')]. \quad (10.63)$$

Поэтому Q имеет одну и ту же величину, независимо от частного выбора пространственно-подобной гиперповерхности в правой части уравнения (10.63). Это позволяет нам найти перестановочные соотношения $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ с Q путем выбора в качестве пространственно-временной гиперповерхности σ ту, которая содержит пространственно-временную точку x , так что соблюдаются перестановочные соотношения (10.61) и (10.62). Тогда легко убедиться, что

$$[Q, \psi(x)] = +e\psi(x) \quad (10.64a)$$

и

$$[Q, \tilde{\psi}(x)] = -e\tilde{\psi}(x). \quad (10.64b)$$

Из этих перестановочных соотношений на основании хорошо известных аргументов мы можем заключить, что гейзенберговский оператор $\psi(x)$ уничтожает заряд величиной $-e$ или порождает заряд $+e$, а оператор $\tilde{\psi}(x)$ уничтожает заряд $+e$, или порождает заряд $-e$.

Интересно отметить, что если бы мы при обсуждении заряженного спинорного поля действовали, как в § 2 этой главы, и рассмотрели все возможные взаимодействия, включающие только A_{μ} и $F_{\mu\nu}$ (но не их производные), то требования инвариантности относительно преобразования CP разобьют взаимодействия на две отдельные группы. Взаимодействие может иметь вид

$$\mathcal{L}'_I = e\tilde{\psi}\gamma_{\mu}\psi A^{\mu} + \mu'\tilde{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu} + e'\tilde{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5\psi A^{\mu} \quad (10.65a)$$

(где, как можно видеть, член с e' не сохраняет четности), либо

$$\mathcal{L}''_I = \mu''\tilde{\psi}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi F^{\mu\nu}. \quad (10.65b)$$

Требование калибровочной инвариантности второго рода налагает условие, что взаимодействие должно быть вида \mathcal{L}'_I с $e' = 0$. Ясно, что лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{Дирак}} + \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}'_I$ калибровочно неинвариантен из-за неинвариантности $\mathcal{L}_{\text{Дирак}}$. Ограничения, налагаемые расширенной калибровочной инвариантностью и CP -инвариантностью, приводят, таким образом, к лагранжиану взаимодействия

$$\mathcal{L}_I = e\tilde{\psi}\gamma_\mu \cdot \psi A^\mu + \mu'\tilde{\psi}\sigma_{\mu\nu} \cdot \psi F^{\mu\nu}, \quad (10.66)$$

который инвариантен относительно пространственного отражения и поэтому приводит к сохранению четности. Имеются экспериментальные доказательства сохранения P и C в электромагнитных взаимодействиях (см. статью Ли и Янга [488]).

Взаимодействие $\mu'_0\tilde{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$ используется для описания дополнительного взаимодействия (вдобавок к взаимодействию $j_\mu A^\mu$) частицы Дирака (например, нуклона) с электромагнитным полем. Оно может рассматриваться как взаимодействие между электромагнитным полем и аномальным моментом μ' фермиона, причем $\gamma_k\gamma_l$ ($k, l = 1, 2, 3$) $= -\sigma_i$ ($l \neq k \neq i$) относится к магнитному моменту, а $\gamma_0\gamma_k$ — к электрическому моменту. Взаимодействие $\mu_0\tilde{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$ известно как взаимодействие Паули (см. § 8 гл. 4). Оно может быть использовано для нерелятивистского описания в первом порядке теории возмущений взаимодействия электрона, протона или нейтрона с внешним электромагнитным полем, возникающего из-за того, что магнитный момент этих частиц не равен в точности магнетону Бора $e\hbar/2mc$ (где e и m заряд и масса рассматриваемой частицы). Это взаимодействие, однако, приводит к расходимостям в высших порядках теории возмущений в квантовой теории поля, как и все взаимодействия через связи с производными.

В действительности оказывается, что для объяснения наблюдаемых взаимодействий фотонов с заряженными частицами необходимы только связи вида $j_\mu A^\mu$. Это возможно вследствие того, что при описании в рамках теории поля аномальный магнитный момент частиц со спином $1/2$ не является внутренним свойством этих частиц, а обусловлен их взаимодействием с другими полями (электромагнитным для электрона, мезонными для нуклона) [845]. Поэтому всегда рассматриваются только обычные взаимодействия с зарядами и токами вида $j_\mu A^\mu$. Требование отсутствия других связей иногда, следуя Гелл-Манну [309], называют «принципом минимального электромагнитного взаимодействия». Мы увидим, что при минимальном электромагнитном взаимодействии сохраняется третья компонента изотопического спина T_3 , хотя полный изотопический спин T^2 не сохраняется. Если рассматривать только электромагнитные взаимодействия, то сохранение T_3 равносильно сохранению заряда. Однако этот закон сохранения приобретает независимое значение при наличии других взаимодействий.

Преыдуцщие замечания легко распространить на случай системы π -мезон-нуклон. Рассмотрим сначала нуклоны. Так как заряд нейтрона равен нулю, то электромагнитное поле взаимодействует только с протонным полем. Это достигается требованием, чтобы связь между электромагнитным полем и нуклонным полем $\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$ осуществлялась путем замен:

$$\partial_\mu \psi \rightarrow \left(\partial_\mu + ie \frac{1}{2} (1 + \tau_3) A_\mu \right) \psi \quad (10.67a)$$

и

$$\overline{\partial_\mu \psi} \rightarrow \left(\partial_\mu \tilde{\psi} - ie \tilde{\psi} \frac{1}{2} (1 + \tau_3) A_\mu \right). \quad (10.676)$$

Очевидно, что поскольку $\frac{1}{2} (1 + \tau_3) \psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ 0 \end{pmatrix}$, то только протонное поле будет связано с электромагнитным при подстановках (10.67). Заметим также, что знак члена $ie A_\mu$, который прибавляется к ∂_μ , противоположен знаку соответствующего члена в выражениях (10.43). Это связано с тем, что протоны, которые рассматриваются как «частицы» и описываются полем ψ_p , имеют заряд $+e$. При заменах (10.67) в лагранжиане свободного нуклонного поля оператор ψ_p будет порождать заряд величиной $-e$ и уничтожать заряд величиной $+e$. В этом легко убедиться из перестановочных соотношений между ψ_p и $Q = \int_\sigma j^\mu d\sigma_\mu(x)$, где в выражении для

Q ток $j_\mu = -(\partial \mathcal{L} / \partial A^\mu) = (e/2) [\tilde{\psi} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \psi]$ является источником электромагнитного поля. Аналогичная ситуация возникает и в случае π -мезонного поля. Здесь 1 и 2 компоненты φ должны быть связаны с электромагнитным полем. Для вывода вида связи в этом случае заметим прежде всего, что оператор полного изотопического спина для мезонного поля может быть записан в виде

$$T_i = - \int d\sigma^\mu \sum_{j,k=1}^3 \partial_\mu \varphi_j \cdot \varepsilon_{ijk} \varphi_k = - \sum_{j=1}^3 \int d\sigma^\mu \partial_\mu \varphi_j \cdot (t_i \varphi)_j,$$

где матричные элементы оператора t_i даются формулой $(t_i)_{jk} = \varepsilon_{ijk}$. Поэтому можно выразить полный заряд в виде¹⁾

$$Q = -e \int d\sigma^\mu \partial_\mu \varphi \cdot t_3 \varphi \quad (10.68a)$$

$$= -e \int d\sigma^\mu (\partial_\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2 \partial_\mu \varphi_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (10.68б)$$

$$= -e \int d\sigma^\mu (\partial_\mu \varphi_1 \cdot \varphi_2 - \partial_\mu \varphi_2 \cdot \varphi_1) = ie \int d\sigma^\mu (\partial_\mu \varphi^* \cdot \varphi - \varphi^* \cdot \partial_\mu \varphi). \quad (10.68в)$$

Покажем теперь, что калибровочно-инвариантное взаимодействие с электромагнитным полем может быть введено путем замены

$$\partial_\mu \varphi \rightarrow (\partial_\mu - et_3 A_\mu) \varphi \quad (10.69)$$

в лагранжиане для свободного поля. Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\mu^2 \varphi \cdot \varphi - (\partial_\mu - et_3 A_\mu) \varphi \cdot (\partial^\mu - et_3 A^\mu) \varphi] = \\ & = \frac{1}{2} [\mu^2 \varphi \cdot \varphi - \partial_\mu \varphi \cdot \partial^\mu \varphi] - e (\partial_\mu \varphi_1 \cdot \varphi_2 - \partial_\mu \varphi_2 \cdot \varphi_1) A^\mu - \\ & \quad - e^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) A_\mu A^\mu = \\ & = [\mu^2 \varphi^* \cdot \varphi - \partial_\mu \varphi^* \cdot \partial^\mu \varphi] + \frac{1}{2} [\mu^2 \varphi_3^2 - \partial_\mu \varphi_3 \cdot \partial^\mu \varphi_3] + \\ & \quad + ie (\partial_\mu \varphi^* \cdot \varphi - \varphi^* \cdot \partial_\mu \varphi) A^\mu - e^2 \varphi^* \cdot \varphi A_\mu A^\mu. \end{aligned} \quad (10.70)$$

¹⁾ Отметим, что точка в произведении $\partial_\mu \varphi \cdot t_3 \varphi$ фактически имеет двойной смысл: во-первых, она означает, что нужно взять скалярное произведение векторов $\partial_\mu \varphi$ и $t_3 \varphi$ в изотопическом пространстве; во вторых, полученное выражение должно быть симметризовано по бозонным операторам.

Это и есть требуемый вид взаимодействия заряженного поля φ , φ^* и нейтрального поля φ_3 с электромагнитным полем. Следует отметить, что как для нуклонов, так и для π -мезонов взаимодействующий с электромагнитным полем ток коммутирует с третьей компонентой изотопического спина. В частности, для π -мезонного поля ток, который имеет вид $e\partial_\mu \varphi \cdot t_3 \varphi + e^2 (\varphi \cdot t_3^* t_3 \varphi) A_\mu$, инвариантен только относительно произвольных; вращений вокруг оси $\hat{3}$ в пространстве изотопического спина. Аналогично, нуклонный ток $\frac{1}{2} \tilde{\psi} \gamma_\mu (1 + \tau_3) \cdot \psi$ разделяется на две части, одна из которых $\tilde{\psi} \gamma_\mu \cdot \psi$ является скаляром в изотопическом пространстве, а другая $\tilde{\psi} \gamma_\mu \tau_3 \cdot \psi$ — третьей компонентой вектора. Поэтому ток инвариантен опять только относительно вращений вокруг оси $\hat{3}$ в изотопическом пространстве.

§ 4. Взаимодействие мезонов с нуклонами

Идея, что нейтрон и протон можно рассматривать как два состояния одной и той же частицы, впервые была выдвинута Гейзенбергом [365]. Затем Кассен и Кондон [114] для описания этих двух зарядовых состояний ввели «изотопический» спин. При этом описании протон является «нуклоном», третья компонента изотопического спина которого T_3 равна $+\frac{1}{2}$, нейтрон же — это нуклон с $T_3 = -\frac{1}{2}$. Заряд нуклона, если принять за единицу заряд электрона e , выразится в виде $q = T_3 + \frac{1}{2}$. Говорят, что нейтрон и протон принадлежат изотопическому дуплету с изотопическим спином $T = \frac{1}{2}$. Равенство взаимодействий между нейтроном и протоном и между протонами при условии, что нуклоны находятся в состоянии с одним и тем же спином и орбитальным моментом (об этом равенстве свидетельствуют многие экспериментальные факты), немедленно приводит к понятию полного изотопического спина, который сохраняется при взаимодействии между нуклонами (см. например, [54]). Отсюда непосредственно следует, что все сильные взаимодействия должны подчиняться этому закону сохранения, так как при общепринятом в рамках теории поля описании взаимодействие между нуклонами приписывается обмену виртуальными мезонами.

Все сильно взаимодействующие частицы разделяются на группы, причем массы членов каждой группы мало отличаются между собой. Этот факт служит основой для объединения частиц в «зарядовые» или «изотопические» мультиплеты, которые характеризуются квантовым числом изотопического спина T и имеют $2T + 1$ компонент. Компоненты мультиплета (которым соответствуют различные частицы группы) характеризуются величиной T_3 , измеряющейся от $-T$ до $+T$. Так, мы видели, что три состояния π -мезона можно считать соответствующими мультиплету с $T = 1$:

Таблица 7

Частица	T	T_3
π^+	1	$+\frac{1}{2}$
π^0	1	0
π^-	1	$-\frac{1}{2}$

Аналогично, K -мезоны можно сгруппировать в два дуплета с $T = \frac{1}{2}$, причем один из дуплетов будет состоять из K^+ - и K^0 -мезонов, а другой из

K^- и \bar{K}^0 -мезонов. Гипероны группируются в «зарядовые» мультиплеты следующим образом: Λ -частице приписывается изотопический спин $T = 0$, Σ -частицам — изотопический спин 1, причем $T_3(\Sigma^\pm) = \pm 1$ и $T_3(\Sigma^0) = 0$, а каскадным Ξ -частицам — изотопический спин $\frac{1}{2}$, причем $T_3(\Xi^-) = -\frac{1}{2}$, $T_3(\Xi^0) = +\frac{1}{2}$.

Полный изотопический спин системы сильно взаимодействующих частиц дается векторной суммой векторов изотопического спина всех частиц (в полной аналогии с правилами для сложения моментов). Во всех изученных к настоящему времени реакциях между сильно взаимодействующими частицами сохраняется как полный изотопический спин, так и его третья компонента. (Это верно в той мере, в какой можно пренебречь электромагнитными и тем более слабыми взаимодействиями.) Зарядовая независимость сильных взаимодействий выражается в сохранении T^2 и T_3 для системы взаимодействующих частиц.

Требование сохранения изотопического спина в сильных взаимодействиях тождественно совпадает с требованием инвариантности взаимодействий относительно вращений в изотопическом пространстве. Если пренебречь слабыми и электромагнитными взаимодействиями, то ориентация изотопического спина будет лишена какого-либо физического смысла. В этом случае не было бы никакого различия, скажем, между протоном и нейтроном. (Конечно, это различие становится вполне определенным, если учесть, что протон имеет электрический заряд: электромагнитные взаимодействия приводят к нарушению зарядовой независимости.) Зарядовая независимость утверждает также, например, что силы между Λ -частицей и протоном точно такие же, как и между Λ -частицей и нейтроном (в состояниях с одним и тем же спином и орбитальным моментом).

Рассмотрим теперь описание зарядово-независимого взаимодействия между сильно взаимодействующими частицами в теории поля. В гл. 7 указывалось, как описывать π -мезоны, обладающие изотопическим спином 1, оператором поля ϕ , который преобразуется как вектор в изотопическом пространстве (ϕ_3 описывает нейтральное π -мезонное поле, а $\phi_1 \pm i\phi_2$ — заряженные π -мезонные поля). В гл. 8 мы наметили описание нуклонного поля восьмикомпонентным спинорным оператором

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_p(x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}, \quad (10.71)$$

преобразующимся как двухкомпонентный спинор в изотопическом пространстве. Проанализируем возможные виды инвариантных относительно вращений в изотопическом пространстве взаимодействий между этими полями. Рассмотрим сначала возможные виды связей без производных между ψ и заряженными бозе-полями ϕ и ϕ^* . Очевидно, в силу сохранения заряда, взаимодействие должно иметь вид

$$\mathcal{L}_I = g_1 \tilde{\psi}_n O_1 \cdot \psi_p \phi + g_2 \tilde{\psi}_p O_2 \cdot \psi_n \phi^*. \quad (10.72)$$

С формальной стороны требование сохранения заряда может быть сформулировано в виде $[\mathcal{L}_I, Q] = 0$. Тот факт, что лагранжиан \mathcal{L}_I действительно сохраняет заряд, может быть установлен следующим образом: так как оператор $\phi(x)$ уничтожает заряд $-e$ (или рождает заряд $+e$), то для того, чтобы при действии \mathcal{L}_I на состояние $|\Psi\rangle$ с зарядом q полный заряд состояния не менялся, спинорные множители, связанные с оператором ϕ , должны порождать заряд $-e$ (или уничтожать заряд $+e$). Очевидно, что

оператор $\tilde{\psi}_n O_1 \cdot \psi_p$ действует именно так. Аналогично, оператор φ^* порождает заряд $-e$ (или уничтожает $+e$), а оператор $\tilde{\psi}_p O_2 \cdot \psi_n$ уничтожает заряд $-e$ (или порождает заряд $+e$).

Говорят, что взаимодействие обладает свойством зарядовой симметрии, если лагранжиан \mathcal{L}_I инвариантен относительно преобразования:

$$\psi_n \rightarrow \psi_p, \quad \varphi \rightarrow \varphi^*, \quad (10.73a)$$

$$\psi_p \rightarrow \psi_n, \quad \varphi^* \rightarrow \varphi. \quad (10.73b)$$

Перестановочные соотношения инвариантны относительно этого преобразования. При этом преобразовании \mathcal{L}_I переходит в

$$\mathcal{L}_I \rightarrow g_1 \tilde{\psi}_p O_1 \cdot \psi_n \varphi^* + g_2 \tilde{\psi}_n O_2 \cdot \psi_p \varphi. \quad (10.74)$$

Таким образом, инвариантность относительно зарядовой симметрии требует, чтобы

$$g_1 O_1 = g_2 O_2. \quad (10.75)$$

Далее, из эрмитовости лагранжиана \mathcal{L}_I , $\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I^*$ следует

$$\bar{g}_1 \gamma_0 O_1^* \gamma_0 = g_2 O_2, \quad (10.76a)$$

$$\bar{g}_2 \gamma_0 O_2^* \gamma_0 = g_1 O_1. \quad (10.76b)$$

Из условий (10.75) и (10.76) вытекает, что зарядово-симметричный лагранжиан \mathcal{L}_I должен иметь вид

$$\mathcal{L}_I = g \tilde{\psi}_p O \psi_n \varphi^* + \bar{g} \tilde{\psi}_n \gamma_0 O^* \gamma_0 \psi_p \varphi, \quad (10.77)$$

причем

$$g O = \bar{g} \gamma_0 O^* \gamma_0. \quad (10.78)$$

Поэтому свойством зарядовой симметрии будет обладать любая комбинация следующих взаимодействий:

$$A) \quad g_S (\tilde{\psi}_p \cdot \psi_n \varphi^* + \tilde{\psi}_n \cdot \psi_p \varphi), \quad (10.79)$$

$$B) \quad g_{PS} (\tilde{\psi}_p \gamma_5 \cdot \psi_n \varphi^* + \tilde{\psi}_n \gamma_5 \cdot \psi_p \varphi), \quad (10.80)$$

$$B) \quad g_V (\tilde{\psi}_p \gamma_\mu \cdot \psi_n \partial^\mu \varphi^* + \tilde{\psi}_n \gamma_\mu \cdot \psi_p \partial^\mu \varphi), \quad (10.81)$$

$$Г) \quad i g_{PV} (\tilde{\psi}_p \gamma_5 \gamma_\mu \cdot \psi_n \partial^\mu \varphi^* + \tilde{\psi}_n \gamma_5 \gamma_\mu \cdot \psi_p \partial^\mu \varphi). \quad (10.82)$$

Далее должны быть исследованы требования, налагаемые CP -инвариантностью. Законы преобразования спинорных полей при CP -операции приведены выше, а бозонные поля преобразуются согласно законам

$$U_{CP} \varphi(x) U_{CP}^{-1} = n \varphi^*(i_s x) \quad (10.83)$$

и

$$U_{CP} \varphi^*(x) U_{CP}^{-1} = n \varphi(i_s x), \quad (10.84)$$

где мы считаем пространственную четность n вещественной величиной. Следовательно, при CP -преобразовании взаимодействие (А) умножается на n , в то время как взаимодействия (Б), (В) и (Г) умножаются на $-n$. Таким образом, инвариантность относительно CP -преобразования ведет к одинаковым ограничениям как для зарядово-симметричных взаимодействий, так и для взаимодействий, описанных в § 1, а именно должны осуществляться или скалярное взаимодействие, или линейная комбинация векторного, псевдовекторного и псевдоскалярного взаимодействий.

Для получения зарядово-независимого взаимодействия нуклонного поля с π -мезонным (взаимодействия, инвариантного относительно вращений в изотопическом пространстве) мы должны потребовать, чтобы

$$[\mathcal{L}_I, T_i] = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (10.85)$$

где

$$T_i = \int d\sigma^\mu \tilde{\psi} \frac{1}{2} \tau_i \gamma_\mu \cdot \psi + \int d\sigma^\mu \varphi \cdot \partial_\mu t_i \varphi \quad (10.86)$$

есть i -я компонента полного изотопического спина системы мезон-нуклон. (Напомним, что T_i — генератор вращений вокруг i -й оси в изотопическом пространстве.) Очевидно, что инвариантность будет достигнута, если для получения лагранжиана взаимодействия мы умножим изовектор $\tilde{\psi} O \tau \cdot \psi$ на изовектор φ :

$$\mathcal{L}_I = \sum_{j=1}^3 g \tilde{\psi} O \tau_j \psi \varphi_j. \quad (10.87)$$

Это выражение можно также записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= g [\tilde{\psi} \tau_0 O \cdot \psi (\varphi_1 + i\varphi_2) + \tilde{\psi} \tau_+ O \cdot \psi (\varphi_1 - i\varphi_2)] + g \tilde{\psi} \tau_3 O \cdot \psi \varphi_3 = \\ &= \sqrt{2} g [\tilde{\psi}_n O \cdot \psi_p \varphi + \tilde{\psi}_p O \cdot \psi_n \varphi^*] + g [\tilde{\psi}_p O \cdot \psi_p - \tilde{\psi}_n O \cdot \psi_n] \varphi_3, \end{aligned} \quad (10.88)$$

где $\tau_\pm = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2)$. Отсюда следует, что в зарядово-независимой теории со связью типа Юкавы, т. е. со связью вида $\tilde{\psi} O \psi \varphi$, константа связи нуклонного поля с нейтральным мезонным полем в $\sqrt{2}$ раз слабее, чем с заряженным мезонным полем, и, далее, константы связи нейтрального π -мезонного поля с нейтронным и протонным полями равны по величине, но противоположны по знаку.

Если ограничиться связями типа Юкавы без производных, то наиболее общая связь нуклонного и мезонного полей, удовлетворяющая требованиям релятивистской и CP -инвариантностей, с необходимостью имеет вид¹⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= g [\tilde{\psi}_p \gamma_5 \cdot \psi_n \varphi^* + \tilde{\psi}_n \gamma_5 \cdot \psi_p \varphi] + g'_3 \tilde{\psi}_p \gamma_5 \cdot \psi_p \varphi_3 + g''_3 \tilde{\psi}_n \gamma_5 \cdot \psi_n \varphi_3 = \\ &= g [\tilde{\psi} \tau_- \gamma_5 \cdot \psi \varphi + \tilde{\psi} \tau_+ \gamma_5 \cdot \psi \varphi^*] + g'_3 \tilde{\psi}_p \gamma_5 \cdot \psi_p \varphi_3 + g''_3 \tilde{\psi}_n \gamma_5 \cdot \psi_n \varphi_3, \end{aligned} \quad (10.89)$$

где g, g'_3, g''_3 — вещественные постоянные. Если наложить затем требование зарядовой независимости, то, очевидно, $g'_3 = -g''_3 = (1/\sqrt{2})g$. При этом взаимодействие свелось к виду $\mathcal{L}_I = \frac{1}{2}g [\tilde{\psi} \gamma_5 \tau \cdot \psi] \cdot \varphi$ и, как следует отметить, оказалось инвариантным относительно пространственных отражений P и поэтому сохраняющим четность. Следовательно, из требований CP -инвариантности и зарядовой независимости теории со связью типа Юкавы автоматически вытекает инвариантность такой теории относительно пространственного отражения P (следовательно, и относительно зарядового сопряжения C). Таким образом, взаимодействие системы π -мезонов и нуклонов может быть описано следующим лагранжианом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \tilde{\psi} \cdot (-i\gamma^\mu \partial_\mu + M) \psi - \frac{1}{2} (i\partial_\mu \tilde{\psi} \gamma^\mu + M\tilde{\psi}) \cdot \psi - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mu^2 \varphi \cdot \varphi - \partial_\mu \varphi \cdot \partial^\mu \varphi) + \frac{1}{2} G \sum_{j=1}^3 [\tilde{\psi} \gamma_5 \tau_j \cdot \psi] \varphi_j. \end{aligned} \quad (10.90)$$

¹⁾ Автор предполагает при этом, что для π -мезонного поля в формулах (10.83) и (10.84) $n = -1$. — Прим. ред.

Этот лагранжиан приводит к взаимодействиям между мезонами и нуклонами, которые являются:

- а) лоренц-инвариантными,
- б) зарядово-независимыми,
- в) CP -инвариантными,
- г) P -инвариантными.

Как легко убедиться, из-за «в» и «г» теория также C -инвариантна (инвариантна относительно зарядового сопряжения C —операции замены частиц на соответствующие античастицы). Следует отметить, что в том приближении, в котором мы работаем (т. е. пренебрегая слабыми и электромагнитными взаимодействиями), все частицы стабильны. Более того, мы предположили, что протон и нейтрон имеют одну и ту же («голую») массу M и аналогично, что все π -мезоны имеют одну и ту же «голую» массу μ .

До сих пор мы рассматривали только связи типа Юкавы между нуклонами и мезонами. По-видимому, имеются некоторые указания на существование, кроме этих связей, добавочного самодействия мезон-мезон. Единственное самодействие мезон-мезон, которое инвариантно относительно вращений в изотопическом пространстве и характеризуется безразмерной константой связи, имеет вид

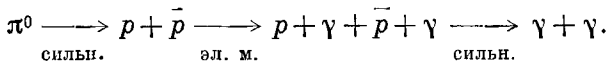
$$\mathcal{L}' = \lambda (\varphi \cdot \varphi)^2. \quad (10.91)$$

Если мы затем учтем взаимодействие с электромагнитным полем, то, согласно принципу минимального электромагнитного взаимодействия, лагранжиан, описывающий эту систему полей, будет даваться выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) \cdot (\partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2} \tilde{\psi} \left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ie}{2} (1 + \tau_3) A_\mu \right) + M \right] \cdot \psi - \\ & - \frac{1}{2} \left[i \left(\partial_\mu \tilde{\psi} - \frac{ie}{2} \tilde{\psi} (1 + \tau_3) A_\mu \right) \gamma^\mu + M \tilde{\psi} \right] \cdot \psi - \\ & - \frac{1}{2} [\mu^2 \varphi \cdot \varphi - (\partial_\mu - et_3 A_\mu) \varphi \cdot (\partial^\mu - et_3 A^\mu) \varphi] + \\ & + \frac{1}{2} G [\tilde{\psi} \gamma_5 \tau, \psi] \cdot \varphi + \lambda (\varphi \cdot \varphi)^2. \end{aligned} \quad (10.92)$$

Нужно отметить, что при наличии электромагнитного поля лагранжиан (10.92) более не инвариантен относительно произвольных вращений в изотопическом пространстве; он остается инвариантным только относительно вращений вокруг оси 3, т. е. T^2 больше не будет сохраняться, будет сохраняться только T_3 . Это, конечно, просто утверждение, что электромагнитные взаимодействия явно зарядово зависимы и снимают вырожденность изотопических мультиплетов: сильные взаимодействия приводят к одинаковым нейтрон-нейтрон и протон-протон силам, но кулоновские силы явным образом нарушают это равенство. Аналогично, разности масс между протоном и нейтроном и между заряженными и нейтральными мезонами, по-видимому, обусловлены электромагнитными эффектами.

При наличии электромагнитных взаимодействий π^0 -мезон больше не стабилен, а может распадаться на два фотона. Следует заметить, что это взаимодействие не является прямым, а осуществляется через посредство нуклонного поля:



В реакции $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ полный изотопический спин изменяется на единицу, что иллюстрирует утверждение о несохранении изотопического спина при наличии электромагнитных взаимодействий. Заметим, что, согласно принципу минимального электромагнитного взаимодействия, связь с электромагнитным полем пропорциональна полному заряду и поэтому линейна по T_3 [например, нуклонный ток пропорционален $\frac{1}{2}\tilde{\psi}(1 + \tau_3)\gamma_\mu\cdot\psi$]. Поэтому величина $j_\mu A^\mu$ преобразуется в изотопическом пространстве как скаляр плюс третья компонента вектора. Каждый раз, когда в смысле теории возмущений действует электромагнитная связь, полный изотопический спин системы может измениться на нуль или на единицу. Поэтому для электромагнитных процессов первого порядка действуют правила отбора $|\Delta T| = 0$ или 1 и $\Delta T_3 = 0$. В матричные элементы переходов из состояния с $T = 0$ в состояние с $T = 0$ может давать вклад только изотопически скалярная связь. В матричные элементы $|\Delta T| = 1$ переходов может давать вклад только векторная часть $j_\mu A^\mu$.

§ 5. Сильные взаимодействия

Тот факт, что при достаточно большой энергии продуктами реакции $\pi^+ + p$ являются не только $\pi^+ + p$ или $\pi^0 + \pi^+ + p$, но и $\Lambda + K^0$, $\Sigma^- + K^+$, ясно показывает, что система π -мезон-нуклон не может рассматриваться как замкнутая, и, следовательно, лагранжиан (10.92) является неполным. При описании взаимодействия между π -мезонами и нуклонами и вообще между любой парой сильно взаимодействующих частиц должно учитываться взаимодействие между всеми сильно взаимодействующими частицами.

Для процессов с сильно взаимодействующими частицами характерны два экспериментальных факта. Первый заключается в строгом соблюдении закона сохранения тяжелых частиц. Этот закон удобно сформулировать несколько иначе, по аналогии с законом сохранения электрического заряда. Предположим, что мы приписываем каждому бариону «барионный» заряд (иногда его называют «нуклонным»), равный $+1$, каждому антибариону — «барионный» заряд, равный -1 , и каждой частице, масса которой меньше массы нуклона, — барионный заряд, равный 0. Тогда закон сохранения тяжелых частиц можно выразить так: барионный заряд является аддитивным квантовым числом и во всех реакциях всегда сохраняется. Второй фундаментальный факт (как показывают многие эксперименты) заключается в том, что сильные взаимодействия зарядово-независимы. Это означает, что в таких взаимодействиях строго сохраняются полный изотопический спин и его третья компонента, если сильно взаимодействующим частицам соответствующим образом приписаны значения изотопического спина. Таким образом, мы приходим к обобщению понятия изотопического спина на K^- , Λ^- , Σ^- и Ξ^- -частицы. Это было сделано Гелл-Манном [303, 308, 314] и независимо Нишижимой [580, 581]. Как отмечалось выше, они приписали Λ -частице изотопический спин $T = 0$, Σ -частицам $T = 1$, а каскадным частицам $T = \frac{1}{2}$. Между прочим, это было сделано в то время, когда еще не были открыты Σ^0 - и Ξ^0 -частицы и еще не наблюдались два различных нейтральных K^0 -мезона. Успешное предсказание существования этих частиц составляет одно из наиболее важных достижений схемы Гелл-Манна — Нишижимы.

При обсуждении системы π -мезон-нуклон мы отмечали, что соотношение между зарядом Q и третьей компонентой изотопического спина

для системы из мезонов и нуклонов выражается равенством

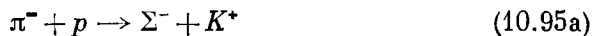
$$\frac{Q}{e} = T_3 + \frac{N}{2} \quad (10.93)$$

где $N = \int d\sigma^\mu \tilde{\psi} \gamma_\mu \cdot \psi$ — оператор числа нуклонов минус число антинуклонов. Гелл-Манн и Нишижима обобщили соотношение (10.93), чтобы оно было применимо также и к системам, включающим K -мезоны и гипероны. Они написали

$$\frac{Q}{e} = T_3 + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} S, \quad (10.94)$$

где B — барионное число (число барионов минус число антибарионов). Величина S называется «странностью» системы и определяет отклонение от формулы $Q/e = T_3 + (B/2)$, которая применима к π -мезонам и нуклонам. Нуклоны и π -мезоны имеют, очевидно, странность 0. Значение странности для других сильно взаимодействующих частиц можно получить непосредственным применением уравнения (10.94). Например, поскольку Λ -частица есть изотопический синглет с $T = 0$, $T_3 = 0$ и имеет электрический заряд, равный 0, и нуклонный заряд $B = 1$, то уравнение (10.94) удовлетворяется при $S(\Lambda) = -1$. Аналогично можно проверить, что $S(\Sigma) = -1$ и $S(\Xi) = -2$.

Значения странности приписываются K -мезонам следующим образом: K^+ - и K^0 -частицы имеют странность +1, странность K^- и \bar{K}^0 равна -1. Приписанные K -мезонам значения странности подтверждаются тем, что K^+ и K^- имеют качественно различные ядерные взаимодействия. Так, наблюдалось, что при средних энергиях K^+ -мезоны при взаимодействии с нуклонами испытывают лишь упругое рассеяние и рассеяние с перезарядкой (например, $K^+ + n \rightarrow K^0 + p$). С другой стороны, K^- -мезоны могут поглотиться с превращением в гиперон и π -мезон ($K^- + n \rightarrow \pi^- + \Lambda$ или $\pi^- + \Sigma^0$). Аналогично, при столкновении π -мезонов большой энергии с протонами наблюдаются реакции



и



но никогда не происходит реакция $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^+ + K^-$.

Гелл-Манн и Нишижима предположили далее, что квантовое число S сохраняется как в сильных, так и в электромагнитных взаимодействиях. Это эквивалентно, конечно, сохранению T_3 в этих взаимодействиях, так как законы сохранения заряда и барионов универсальны. Сильные, электромагнитные и слабые взаимодействия можно теперь классифицировать следующим образом:

а) *Сильные взаимодействия* — взаимодействия между барионами и мезонами, которые сохраняют T и T_3 , а следовательно, странность. Константы связи, характеризующие эти взаимодействия, велики, порядка 1—10.

б) *Электромагнитные взаимодействия* сохраняют T_3 (и, следовательно, S), но не T^2 и характеризуются постоянной тонкой структуры $e^2/4\pi\hbar c = 1/137$.

в) *Слабые взаимодействия* не сохраняют ни изотопического спина T , ни его проекции T_3 , а следовательно, не сохраняют и странности S .

Правило $\Delta S = 0$ для сильных и электромагнитных взаимодействий ведет к жестким ограничениям. Так, во всех реакциях с нуклонами

и π -мезонами странность в начальном состоянии равна нулю. Если столкновение ведет к появлению «странной» частицы (т. е. частицы, странность которой не равна нулю), тогда она должна сопровождаться другими (по крайней мере одной) странными частицами. Отметим, что, анализируя экспериментальные данные по странным частицам, Пайс [611] пришел к этому закону «совместного рождения» еще до появления схемы Гелл-Манна — Нишиджимы.

В процессах распада Λ - и Σ^\pm -частиц (например, $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$) суммарная странность для частиц в конечном состоянии равна нулю и отличается от странности первичной частицы, равной -1 . Согласно Гелл-Манну и Нишиджиме, эти распады должны происходить через слабые взаимодействия и должны быть «медленными». Под «медленными» распадами понимаются распады частиц, времена жизни которых велики по сравнению с характерными для сильных взаимодействий временем \hbar/Mc^2 . Для M порядка массы нуклона $\hbar/Mc^2 \sim 10^{-24}$ сек. С другой стороны, в распадах $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ или $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + e^+ + e^-$ странность не изменяется, $\Delta S = 0$, и поэтому распад должен идти через электромагнитные взаимодействия со временем жизни порядка $(e^2/\hbar c)(\hbar/Mc^2)$. Времена жизни гиперонов, распадающихся с $\Delta S \neq 0$, все имеют порядок 10^{-10} сек, т. е. действительно велики по сравнению с 10^{-24} сек. Время жизни Σ^0 -гиперона еще не измерено, но известно, что оно меньше 10^{-15} сек. Заметим, что при наличии только сильных и электромагнитных взаимодействий все странные частицы, за исключением Σ^0 и $\bar{\Sigma}^0$, были бы стабильны, а такие реакции, как $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ или $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, были бы запрещены законом сохранения странности.

Предсказание о существовании двух различных нейтральных K -мезонов, сделанное Гелл-Манном и Пайсом [308], представляет собой, по-видимому, наиболее выдающийся результат, вытекающий из схемы со странностью. Они заметили, что в то время как при рождении нейтральных K -мезонов из-за сохранения странности имеется четкое различие между K^0 и \bar{K}^0 -мезонами, при распаде странность не сохраняется и не может играть решающей роли. Важную роль должна играть комбинированная четность (CP), так как предполагается, что она сохраняется при распадах.

Пусть $|K^0\rangle$ означает состояние K^0 -мезона в покое, а $|\bar{K}^0\rangle$ — состояние \bar{K}^0 -мезона в покое. Мы считаем K -мезоны бесспиновыми частицами. Состояния $|K^0\rangle$ и $|\bar{K}^0\rangle$ являются собственными состояниями оператора S с собственными значениями $+1$ и -1 соответственно. Далее, при операции CP они преобразуются друг в друга, так как \bar{K}^0 есть античастица для K^0 , и наоборот. При соответствующем выборе относительных фаз этих состояний можно потребовать, чтобы

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \quad (10.96a)$$

и

$$CP|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle. \quad (10.96b)$$

Для описания распада нужно образовать собственные состояния оператора комбинированной инверсии CP , а не S . Следуя Гелл-Манну и Пайсу, определим состояния

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{K}^0\rangle \quad (10.97a)$$

и

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{K}^0\rangle, \quad (10.97b)$$

которые являются состояниями с определенной комбинированной четностью, равной $+1$ и -1 соответственно. Так как

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K_1^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|K_2^0\rangle \quad (10.98a)$$

и

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K_1^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|K_2^0\rangle, \quad (10.98б)$$

то можно говорить, что рождение K^0 -мезона (или \bar{K}^0 -мезона) соответствует рождению с равными вероятностями ($= 1/2$) и предписанными относительными фазами « K_1^0 -мезона» или « K_2^0 -мезона». Комбинированная четность, K_1^0 -мезона равна $+1$, тогда как комбинированная четность K_2^0 -мезона равна -1 . Так как принимается, что в распадах комбинированная четность сохраняется¹⁾, то некоторые схемы распада возможны для K_1^0 , но запрещены для K_2^0 -мезона, и наоборот. Поэтому эти две частицы должны иметь различные времена жизни. Например, конечное состояние, содержащее два π -мезона с полным зарядом $Q = 0$ ($2\pi^0$ или $\pi^+ + \pi^-$) и с равным нулю полным импульсом, имеет положительную комбинированную четность, т. е. является собственным состоянием оператора комбинированной инверсии с собственным значением $+1$, так что распад на два π -мезона разрешен для K_1^0 -мезона и запрещен для K_2^0 -мезона.

Два нейтральных K -мезона с различными временами жизни действительно были обнаружены [480]. Один из них, распадающийся почти всегда на 2π -мезона и имеющий время жизни порядка 10^{-10} сек, был идентифицирован с K_1^0 -мезоном. Другой K -мезон, K_2^0 , имеет значительно большее время жизни — порядка 10^{-8} сек и распадается не на 2π -мезона, а на 3π -мезона (а также и по другим каналам). Кроме предсказания двух различных времен жизни и различных наборов продуктов распада, был подтвержден и другой вывод из теории Гелл-Манна — Пайса, указанный Пайсом и Пиччиони [613]. Предположим, что в какой-либо реакции, например $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$, образован пучок, состоящий из x K^0 -мезонов. Если говорить о K_1^0 - и K_2^0 -мезонах, то этот пучок будет состоять из $x/2$ K_1^0 -мезонов и $x/2$ K_2^0 -мезонов. По прошествии примерно 10^{-9} сек (в системе покоя мезонов) почти все K_1^0 -мезоны распадутся, тогда как из K_2^0 -мезонов распадается лишь ничтожная доля, так как время их жизни значительно больше. Поэтому пучок будет содержать приблизительно $x/2$ K_2^0 -мезонов. Они, как это видно из уравнения (10.97б), не являются состояниями с определенной странностью. С равной вероятностью K_2^0 -мезоны имеют $S = +1$ и $S = -1$. Поэтому при соударении пучка с протонной мишенью около $x/4$ K -мезонов будут способны давать реакции типа $K^0 + p \rightarrow K^+ + n$, характерные для $S = 1$, а другая половина K -мезонов будет способна вызывать реакции типа $\bar{K}^0 + n \rightarrow K^- + p$, $\bar{K}^0 + n \rightarrow \Lambda + \pi^0$ или $\bar{K}^0 + n \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$, характерные для $S = -1$. Это следует сопоставить с реакциями, которые могут быть вызваны первичным пучком, состоящим только из мезонов со странностью $+1$. И действительно, эффект Пайса — Пиччиони был экспериментально обнаружен и было доказано, что «выживший» в течение 10^{-10} сек пучок может образовывать Λ -частицы.

Теоретические предположения, которые делались для описания сильных взаимодействий и установления внутренних связей между ними,

¹⁾ Некоторые качественные черты этой схемы остаются, даже если комбинированная четность не сохраняется.

в большинстве своем полностью спекулятивны. Поэтому мы кратко опишем только некоторые из них. (Для более полного обзора см. [8, 162, 441].)

Первую формулировку схемы Гелл-Манна и Нишижими в рамках теории поля предложили д'Эспанья и Прентки [161]. Она основана на замечании, что для теоретических целей удобно классифицировать фундаментальные частицы на основе квантового числа барионного заряда B , а также введенного Швингером [723] гиперонного заряда $Y = B + S$. Гиперонные заряды барионов и мезонов перечислены в табл. 8.

Таблица 8

Частица	T	T_3	Q	S	B	Y
p	$1/2$	$1/2$	1	0	1	1
n	$1/2$	$-1/2$	0	0	1	1
Λ	0	0	0	-1	1	0
Σ^+	1	1	1	-1	1	0
Σ^-	1	-1	-1	-1	1	0
Σ^0	1	0	0	-1	1	0
Ξ^-	$1/2$	$-1/2$	-1	-2	1	-1
Ξ^0	$1/2$	$1/2$	0	-2	1	-1
π^+	1	1	1	0	0	0
π^-	1	-1	-1	0	0	0
π^0	1	0	0	0	0	0
K^+	$1/2$	$1/2$	1	1	0	1
K^0	$1/2$	$-1/2$	0	1	0	1
K^-	$1/2$	$-1/2$	-1	-1	0	-1
\bar{K}^0	$1/2$	$+1/2$	0	-1	0	-1

Все частицы имеют гиперзаряд 0 или ± 1 . Более того, все частицы с целым изотопическим спином имеют гиперонный заряд $Y = 0$, а с полуцелым изотопическим спином имеют $Y = \pm 1$. Отметим, что в обычном пространстве существует интересная аналогия: все частицы с целым спином, т. е. мезоны, имеют барионный заряд $B = 0$, тогда как частицы с полуцелым спином, т. е. барионы, имеют заряд $B = \pm 1$. Ввиду этой аналогии д'Эспанья и Прентки назвали частицы с целым изотопическим спином, $T = 1, 0$, «изобозонами», а частицы с $T = 1/2$ — «изофермионами». Очевидно, что сохранение в любой сильной реакции полного гиперзаряда Y равносильно сохранению странности. Этот закон сохранения можно выразить также в виде утверждения, что разность между числом изофермионов и числом антиизофермионов является константой.

С целью сформулировать теорию математически д'Эспанья и Прентки предположили, что изотопическое пространство трехмерно и что операторы поля, соответствующие различным частицам, имеют следующие трансформационные свойства:

Λ — скаляр в изотопическом пространстве,

Σ и π — псевдовекторы в изотопическом пространстве,

K и N — спиноры первого рода в изотопическом пространстве,

\bar{K} и Ξ — спиноры второго рода в изотопическом пространстве.

Отметим, что этими предписаниями фиксируются и трансформационные свойства при отражениях в изотопическом пространстве. Утверждение,

что оператор поля Σ -частиц есть псевдовектор, означает, что при отражении в изотопическом пространстве $\Sigma \rightarrow +\Sigma$, т. е. что квантовое число, соответствующее четности в изотопическом пространстве, для Σ -частицы равно единице, $\eta_T = +1$. Аналогичное положение характерно и для π -мезона.

Следует также вспомнить (см. § 6 гл. 1), что в трехмерном евклидовом пространстве имеются два несводимых друг к другу рода спинов. Первый род может быть охарактеризован четностью относительно отражений $\eta_T = +i$, а второй род — четностью относительно отражений $\eta_T = -i$; K -мезоны и нуклоны (N) предполагаются спинорами первого рода; \bar{K} -мезоны и Ξ -частицы — спинорами второго рода. Если определить гиперзаряд Y при помощи соотношения

$$\eta_T = e^{i\frac{\pi}{2}Y}, \quad (10.99)$$

то такое приписание гиперзаряда частицам согласуется с приведенным в табл. 8. (Отметим, что при предположении $|Y| = 0, 1$ не допускаются поля, преобразующиеся как векторы и псевдоскаляры в изотопическом пространстве.) Эти приписания согласуются с рассмотрением K^+ , K^0 - и K^- , \bar{K}^0 -мезонов как античастиц друг друга, потому что при зарядовом сопряжении гиперзаряд Y переходит в $-Y$, т. е. зарядово-сопряженная частица (т. е. античастица) описывается спинором второго рода, если частица описывалась спинором первого рода. Д'Эспанья и Прентки смогли затем связать сохранение гиперзаряда с инвариантностью лагранжиана относительно отражений в изотопическом пространстве в предположении, что между барионами и мезонами допускаются только взаимодействия типа Юкавы и что при этих обстоятельствах в лагранжиане взаимодействия содержатся все возможные скаляры в изотопическом пространстве.

При этих условиях общий лагранжиан взаимодействия, который является истинным скаляром в изотопическом пространстве, содержит только трilinearные связи и сохраняет число тяжелых частиц и странность, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I (\text{сильн}) = & g_1 \tilde{N} \gamma_5 \tau \cdot \pi N + g_2 \tilde{\Lambda} \gamma_5 \pi \cdot \Sigma + \text{э. с.} + \\ & + i g_3 [\tilde{\Sigma} \gamma_5 \times \Sigma] \cdot \pi + g_4 \tilde{\Xi} \gamma_5 \tau \cdot \pi \Xi + \\ & + g_5 \tilde{N} \gamma_5 K \Lambda + \text{э. с.} + g_6 \tilde{N} \gamma_5 \tau \cdot \Sigma K + \text{э. с.} + \\ & + g_7 \tilde{\Xi} \gamma_5 \hat{K} \Lambda + \text{э. с.} + g_8 \tilde{\Xi} \gamma_5 \tau \cdot \Sigma \hat{K} + \text{э. с.}, \quad (10.100) \end{aligned}$$

где

$$\hat{K} = -i\tau_2 K^*. \quad (10.101)$$

В выражении (10.100) не выписана явно зависимость операторов $\Xi, N, \Sigma, \Lambda, \pi, K$ (соответствующих Ξ -, N - (нуклон), Σ -, Λ -, π - и K -частицам) от пространственно-временных координат. В предположении, что все барионы являются частицами со спином $\frac{1}{2}$ (что, по-видимому, согласуется с экспериментальными данными), операторы N -, Σ -, Λ - и Ξ -частиц являются спинорами в пространстве Лоренца. Аналогично, поскольку известно, что π - и K -мезоны имеют спин, равный нулю, то операторы π - и K -полей при собственных преобразованиях Лоренца преобразуются как скаляры. Вид лагранжиана (10.100) определяется качественно тем фактом, что π -мезоны имеют странность, равную нулю, и поэтому связывают частицы с одной и той же странностью, тогда как K -мезоны переносят странность

и поэтому будут связывать только те частицы, странности которых отличаются на единицу. Следует отметить, что при написании взаимодействия (10.100) сделаны определенные предположения, касающиеся относительной четности частиц, и наложено требование инвариантности взаимодействия относительно пространственного отражения. Так как для состояний с различной странностью имеется правило суперотбора, то можно принять условие, что Λ -частица и нуклоны имеют одинаковую четность¹⁾. Взаимодействие $\Sigma\Lambda$ будет содержать единичную матрицу или матрицу γ_5 в зависимости от относительной четности Σ - и Λ -частиц. В лагранжиане (10.100) мы предположили, что Σ - и Λ -частицы имеют одну и ту же четность относительно нуклона, причем четность нуклона принята положительной. Если приписать частицам другие относительные четности, то в соответствующих местах следует опустить матрицы γ_5 . Сделанное нами предположение, что четность K -мезона относительно Λ -гиперона отрицательна, подкрепляется экспериментальными данными по поглощению отрицательных K^- -мезонов в гелии [152]. Из эрмитовости и CP -инвариантности следует вещественность констант связи. В этой схеме закон сохранения тяжелых частиц является следствием инвариантности лагранжиана относительно «калибровочных преобразований».

$$\begin{aligned} N &\rightarrow e^{i\alpha} N & \tilde{N} &\rightarrow e^{-i\alpha} \tilde{N} \\ \Lambda &\rightarrow e^{i\alpha} \Lambda & \tilde{\Lambda} &\rightarrow e^{-i\alpha} \tilde{\Lambda} \\ \Sigma &\rightarrow e^{i\alpha} \Sigma & \tilde{\Sigma} &\rightarrow e^{-i\alpha} \tilde{\Sigma} \\ \Xi &\rightarrow e^{i\alpha} \Xi & \tilde{\Xi} &\rightarrow e^{-i\alpha} \tilde{\Xi}. \end{aligned} \quad (10.102)$$

Из этой инвариантности лагранжиана можно заключить, что оператор

$$B = \int d\sigma_\mu(x) \{ \tilde{N} \gamma^\mu \cdot N + \tilde{\Lambda} \gamma^\mu \cdot \Lambda + \tilde{\Sigma} \gamma^\mu \cdot \Sigma + \tilde{\Xi} \gamma^\mu \cdot \Xi \} \quad (10.103)$$

является интегралом движения. Лагранжиан \mathcal{L}_I инвариантен также относительно преобразований:

$$\begin{aligned} N &\rightarrow N e^{i\alpha} & \Lambda &\rightarrow \Lambda \\ \Xi &\rightarrow \Xi e^{-i\alpha} & \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ K &\rightarrow K e^{i\alpha} & \pi &\rightarrow \pi, \end{aligned} \quad (10.104)$$

что означает существование следующего интеграла движения:

$$Y = \int d\sigma_\mu(x) \{ \tilde{N} \gamma^\mu N - \tilde{\Xi} \gamma^\mu \Xi - i(\partial^\mu K^* \cdot K - K^* \cdot \partial^\mu K) \}, \quad (10.105)$$

который равен числу нуклонов,²⁾ минус число Ξ -частиц плюс число K -частиц. В согласии с табл. 8 кванты полей нуклонов и K -мезонов имеют $Y=1$, Ξ -частиц, \bar{K} -мезонов и антинуклонов имеют $Y=-1$, а для квантов полей π -мезонов, Σ - и Λ -частиц имеют $Y=0$. Тогда заряд

¹⁾ Общее обсуждение вопроса об относительной четности и вообще фазовых множителей при несобственных преобразованиях (например, T , P , C) квантованных полей при наличии правил суперотбора можно найти в работах Мэтьюза [547] и Файнберга и Вайнберга [236].

²⁾ В дальнейшем будет исследовано, насколько законно при наличии взаимодействия называть гейзенберговский оператор $\int d\sigma^\mu(x) \tilde{\psi} \gamma_\mu \cdot \psi$ оператором числа нуклонов (минус число антинуклонов).

определяется соотношением

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} Y, \quad (10.106)$$

причем сохранение квантовых чисел Y и B влечет за собой сохранение странности S , так как $Y = S + B$.

Интересно отметить, что если исключить многозарядные частицы, то в схему с правилом $|Y| \leq 1$ укладываются все известные фундаментальные частицы. Остается только одно незаполненное место, соответствующее изотопически скалярному бозону¹⁾. Если бы такая частица существовала и была бы достаточно массивной, то ее было бы очень трудно наблюдать, так как можно ожидать, что она распадалась бы со временем жизни порядка 10^{-23} сек.

Теория д'Эспанья — Прентки сформулирована в рамках трехмерного изотопического пространства. Естественное обобщение заключается в предположении, что изотопическое пространство является четырехмерным евклидовым пространством и что операторы полей, соответствующие частицам, преобразуются по неприводимым представлениям четырехмерной группы вращений (см. § 6 гл. 1). Такая возможность была рассмотрена Саламом и Полкингхорном [693], которые предположили, что оператор Δ -поля преобразуется по представлению веса $(0, 0)$ (скаляр), операторы Σ - и π -полей — по представлению веса $(1, 0)$ (самодуальный антисимметричный тензор), операторы N - и Ξ -полей преобразуются сообща по представлению веса $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (вектор) и, наконец, операторы K - и \bar{K} -полей преобразуются сообща по представлению веса $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. (Обсуждение других возможностей можно найти в работе [441].)

Недавние эксперименты по фоторождению K -мезонов, как и теоретическая интерпретация энергий связи гиперфрагментов, по-видимому, указывают на то, что взаимодействие K -мезонов с барионами несколько слабее (константа связи ~ 1) взаимодействия π -мезонов с нуклонами (для которого константа связи G такова, что $G^2/4\pi \sim 15$). В соответствии с этим Гелл-Манн [313] и Швингер [723] предложили разделить сильные взаимодействия на два класса: взаимодействия промежуточной силы, состоящие из K -мезон-барионных взаимодействий, и очень сильные, или π -мезонные, взаимодействия. В соответствии со свойством, присущим известным взаимодействиям (чем сильнее взаимодействие, тем большим числом симметрий оно обладает), Гелл-Манн и Швингер независимо постулировали более глубокое, чем зарядовая независимость, свойство симметрии для очень сильных взаимодействий, которое они назвали «глобальной симметрией». Глобальная симметрия означает, что если пренебречь π -мезонными взаимодействиями, то барионы будут образовывать вырожденный мультиплет, все члены которого имеют одну и ту же массу и одинаковые взаимодействия с π -мезонами. Таким образом, предполагается, что в пренебрежении K -мезонными взаимодействиями π -мезон-барионные взаимодействия описываются лагранжианом вида

$$\mathcal{L}_I = g (\tilde{N} \tau \gamma_5 \cdot N + \tilde{\Xi} \tau \gamma_5 \cdot \Xi + \tilde{\Lambda} \gamma_5 \Sigma + \tilde{\Sigma} \gamma_5 \Lambda + [\tilde{\Sigma} \times \gamma_5 \Sigma]) \cdot \pi. \quad (10.107)$$

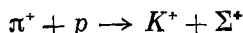
¹⁾ В настоящее время количество экспериментальных данных по частицеподобным состояниям резко возросло. После открытия π^0 -мезона (масса $550 M_{e^0}$) это место следует, по-видимому, считать уже занятым, так как π^0 -мезон имеет подходящие квантовые числа (изоспин $T=0$, спин-четность 0^-) и распадается только посредством электромагнитных взаимодействий на три π -мезона и на два γ -кванта.—
Прим. ред.

Затем утверждается, что за наблюдаемое расщепление масс барионов ответственно взаимодействие с K -мезонами.

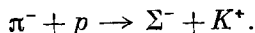
Дальнейшее детальное рассмотрение математического описания сильных взаимодействий увело бы нас слишком далеко. В заключение этого параграфа мы сделаем два замечания о сильных взаимодействиях. Первое из них относится к мотивировке попыток ввести «глобальное» взаимодействие, а второе касается ограничений такой схемы.

Происхождение этой мотивировки связано с замечанием Вигнера [861] об аналогии между электрическим и барионным зарядами и об аналогии между сохранением электрического заряда и сохранением барионного заряда (т. е. сохранением числа тяжелых частиц). Вигнер высказал мысль, что мезонное поле играет такую же роль по отношению к барионному заряду, какую играет электромагнитное поле по отношению к электрическому заряду. Иначе говоря, точно так же как электромагнитное поле «приводит к различиям» между электрически заряженными и нейтральными частицами, мезонное поле приводит к различиям между барионами и «легкими» частицами и непосредственно взаимодействует только с барионами. Проводя эту аналогию дальше, мы могли бы ожидать, что как при электромагнитных взаимодействиях, при которых все частицы с одинаковым зарядом взаимодействуют одним и тем же образом с электромагнитным полем, взаимодействия всех барионов с мезонным полем в точности одинаковы (если не считать различий в знаке). Глобально симметричную схему Гелл-Манна и Швингера можно рассматривать как реализацию этих замечаний Вигнера. Хотя в такой схеме из инвариантности лагранжиана относительно калибровочных преобразований с постоянной фазой можно формально вывести закон сохранения барионов, понятие расширенных калибровочных преобразований *не может* быть привлечено в качестве мотивировки для введения мезонного поля [797, 872].

В заключение этого параграфа следует отметить, что Пайс [614, 615] указал на противоречия с экспериментальными данными любой модели сильных взаимодействий со слишком большим числом свойств симметрии. В частности, он показал, что при условии полноты общепринятого спектра барионов «глобальная» симметрия (предположение о равенстве всех констант связи между π -мезонами и барионами) и «космическая» симметрия (предположение о равенстве всех констант связи между K -мезонами и барионами) не могут соблюдаться одновременно без противоречия с экспериментом. Например, если предположить соблюдение глобальной и космической симметрий, то реакция



была бы запрещена с точностью Δ^2 [где $\Delta = (M_\Sigma - M_\Lambda)/M_\Lambda$] по сравнению с реакцией



Однако обе реакции экспериментально наблюдались и имеют эффективные сечения одного порядка величины.

§ 6. Слабые взаимодействия

Третий класс взаимодействий между фундаментальными частицами — это так называемые слабые взаимодействия¹⁾, характеризующиеся констан-

¹⁾ Очень хорошее изложение современного состояния теории слабых взаимодействий можно найти в лекциях Л. Б. Окуня [916].—Прим. ред.

тами связи порядка $GM^2/\hbar c \sim 10^{-5}$ (где M — масса протона). Эти слабые взаимодействия ответственны за нестабильность странных частиц, π -мезонов, нейтронов, мюонов, а также и за поглощение мюонов ядрами. Единственное исключение составляют два сохраняющих странность распада, $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ и $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$, которые происходят в результате электромагнитных взаимодействий и являются быстрыми. Предположение, что все слабые взаимодействия описываются четырехфермионными связями типа Ферми между Λ -частицами, нуклонами и лептонами, позволяет объяснить большое число наблюдаемых явлений как при β -распаде ядер, так и при распадах гиперонов и мезонов.

Так, распад нейтрона на протон, электрон и антинейтрино

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (10.108)$$

может быть объяснен и понят, если между частицами существует взаимодействие вида

$$\mathcal{L}_I = \sum_{i=1}^5 G_i \bar{p} O_i n \bar{e} O_i \nu + \text{з. с.}, \quad (10.109)$$

где $O_i = (1, \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu)$, а p, n, ν и e — спинорные операторы, соответствующие протону, нейтрону, нейтрино и электрону (\bar{e} порождает электрон с зарядом $-e$ или уничтожает позитрон с зарядом $+e$ и т. д.). Ферми [243] первым для объяснения β -распада ядер построил теорию со связью вида (10.109), которую называют поэтому связью Ферми. Если говорить более определенно, первоначально Ферми предположил, что взаимодействие для объяснения распада $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ имеет вид

$$\mathcal{L}_I = G \bar{p} \gamma^\mu n \bar{e} \gamma_\mu \nu + \text{з. с.}, \quad (10.110)$$

где предполагается, что нейтрино имеет равную нулю массу покоя и в отсутствие взаимодействий подчиняется уравнению $-i\gamma^\mu \partial_\mu \nu(x) = 0$.

Полагают, что распад мюона

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu + \bar{\nu} \quad (10.111)$$

происходит также в результате слабого взаимодействия Ферми вида

$$\mathcal{L}_I = \sum_i G_i \bar{\nu} O_i \mu \bar{e} Q_i \nu + \text{з. с.} \quad (10.112)$$

Аналогично предполагается, что поглощение мюонов ядрами

$$\mu^- + p \rightarrow n + \nu$$

осуществляется посредством взаимодействия вида

$$\mathcal{L}_I = \sum_{i=1}^5 G_i \bar{n} O_i p \bar{\nu} O_i \mu + \text{з. с.} \quad (10.113)$$

Исключительно важно, что вероятности каждого из приведенных выше слабых взаимодействий могут быть объяснены, если рассматривать только векторные и псевдовекторные взаимодействия ($O_i = \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu$) с константами связи одного и того же порядка величины ($G_A' \approx G_V' \approx G^{(i)}$). Еще более замечательно то, что константы связи для всех трех реакций приблизительно равны между собой, т. е. $G' \approx G'' \approx G''' \approx G$, причем $GM^2/\hbar c \sim 10^{-5}$,

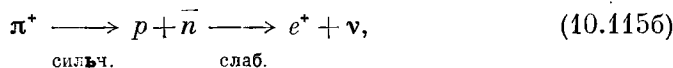
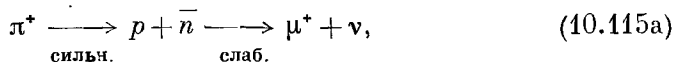
где M — масса протона. Последнее замечание было впервые сделано Клейном [456] и затем независимо другими авторами. Пуппи [654] высказал идею, что эти процессы являются частными реализациями универсального взаимодействия Ферми. Он предложил характеризовать это универсальное взаимодействие Ферми треугольником, показанным на фиг. 6, и постулировал, что любые пары частиц (ab) и (cd) , находящиеся в вершинах треугольника, могут взаимодействовать между собой через взаимодействие Ферми вида $(\bar{a}Ob) \cdot (\bar{c}Od)$ с одной и той же константой связи G .

На основе представлений, развитых в этой главе, можно ожидать, что описание взаимодействия фундаментальных частиц в рамках теории поля с разумной полнотой будет давать лагранжиан

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{своб.}} + \mathcal{L}_{\text{сильн.}} + \mathcal{L}_{\text{эл. м.}} + \mathcal{L}_{\text{слаб.}}, \quad (10.114)$$

где $\mathcal{L}_{\text{своб.}}$ — лагранжиан невзаимодействующих частиц ($\Xi, \Sigma, \Lambda, N, K; \pi, \mu, e, \nu, \gamma$); $\mathcal{L}_{\text{сильн.}}$ — связи, ответственные за сильные взаимодействия между барионами и мезонами; $\mathcal{L}_{\text{эл. м.}}$ — описывает электромагнитные взаимодействия; $\mathcal{L}_{\text{слаб.}}$ — универсальное взаимодействие Ферми в соответствии с треугольником Пуппи.

Важное побочное следствие предполагаемого существования такого универсального взаимодействия Ферми заключается в том, что можно, по крайней мере в принципе, следующим образом объяснить распад π -мезонов: π -мезон сильно взаимодействует с нуклонами, нуклоны же могут подвергаться взаимодействиям Ферми. Таким образом, возможна следующая цепочка процессов:



что качественно объясняет распад π^+ -мезона. Естественно, что если бы такая схема могла количественно объяснить вероятности распада, соотношение между частотами различных схем распада, угловые распределения и корреляции, то такое объяснение было бы значительно более удовлетворительным и «фундаментальным», чем интерпретация на основании введения прямого взаимодействия вида

$$\mathcal{L}_I = \frac{f}{m_\pi} \bar{\nu} \gamma^\alpha \mu \partial_\alpha \pi^* + \text{з. с.}. \quad (10.116)$$

Имеются указания, что отмеченная выше «фундаментальная» схема в самом деле может количественно объяснить $\pi \rightarrow \mu$ распад [325].

Все отмеченные выше схемы распада относились к распадам, в которых сохраняется странность, т. е. $\Delta S = 0$. При слабых распадах других фундаментальных частиц странность изменяется на единицу, $\Delta S = \pm 1$, и хотя их механизм пока не выяснен окончательно, наиболее вероятно, что они вызываются взаимодействиями Ферми.

Экспериментальная информация о слабых распадах приведена в табл. 9.

Таблица 9

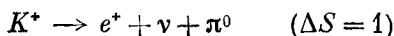
Частица	Продукты распада	Относительная доля, %	Время жизни, сек
Ξ^-	$\Lambda^0 + \pi^-$	100	$(1,28 \pm 0,4) \cdot 10^{-10}$
Ξ^0	$\Lambda^0 + \pi^0$	100	$\sim 10^{-10}$
Σ^+	$p + \pi^0$	46 ± 6	$(0,81 \pm 0,06) \cdot 10^{-10}$
	$n + \pi^+$	54 ± 6	
Σ^-	$n + \pi^-$	100	$(1,61 \pm 0,10) \cdot 10^{-10}$
Λ	$p + \pi^-$	63	
	$n + \pi^0$	37	$(2,51 \pm 0,09) \cdot 10^{-10}$
	$p + e^- + \bar{\nu}$	< 1	
n	$p + e^- + \bar{\nu}$	100	1013 ± 29
K^+	$\mu^+ + \nu$	59 ± 2	
	$\pi^+ + \pi^0$	26 ± 2	
	$\pi^+ + \pi^- + \pi^+$	$5,7 \pm 0,3$	$(1,22 \pm 0,01) \cdot 10^{-8}$
	$\pi^+ + \pi^0 + \pi^0$	$1,7 \pm 0,3$	
	$\pi^0 + e^- + \nu$	$4,2 \pm 0,4$	
	$\pi^0 + \mu^+ + \nu$	$4,0 \pm 0,8$	
K^-	$2\pi, 3\pi, \mu + \nu$		
	$\pi + \mu + \nu, \pi + e + \nu$		$(1,22 \pm 0,01) \cdot 10^{-8}$
K_1^0	$\pi^+ + \pi^-$	78 ± 6	
	$\pi^0 + \pi^0$	22 ± 6	$(1,00 \pm 0,04) \cdot 10^{-10}$
K_2^0	$3\pi, \mu + \nu + \pi, e + \nu + \pi$		$(6,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-8}$
π^\pm	$\mu^\pm + \nu$	~ 100	
	$e^\pm + \nu$	$\sim 10^{-5}$	$(2,55 \pm 0,03) \cdot 10^{-8}$
μ^\pm	$e^\pm + \bar{\nu} + \nu$	100	$(2,22 \pm 0,02) \cdot 10^{-6}$

Конечно, для объяснения распадов странных частиц можно было бы опять придумать прямые взаимодействия, например для распада $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$:

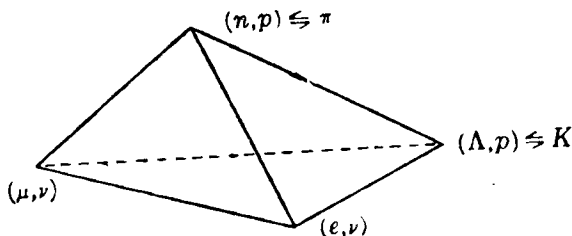
$$\mathcal{L}_I = \frac{f}{M} (\bar{p} \gamma^\mu \Sigma^+ \partial_\mu \pi^0 + \text{э. с.}) \quad (10.117)$$

и т. д. Очевидно, нужно было бы постулировать большое число таких прямых взаимодействий. Поэтому естественно поставить вопрос: можно ли так обобщить понятие универсального (первичного) взаимодействия Ферми, чтобы оно объясняло и распады странных частиц? Пытаясь придумать

такое обобщение, мы замечаем, что в распаде



пара $(e\nu)$ связана с изменяющей странность парой. Эта пара не обязательно должна быть $(K\pi)$, но может быть, например $(p\Lambda)$, так как последняя пара связана с $(K\pi)$ сильными взаимодействиями. Поскольку в таких не сохраняющих странность распадах испускаются также и мюоны, то мы нуждаемся и в связях типа $\tilde{p}\Lambda\mu\nu$. Кроме того, поскольку гипероны в основном распадаются без испускания лептонов, то представляется необходимой связь Ферми вида $\tilde{p}\Lambda p\pi$. Тогда такой распад, как $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$, может происходить следующим образом: $\Lambda \rightarrow n + p + \bar{p}$ посредством слабого взаимодействия, а затем $p + n \rightarrow \pi^-$ посредством сильного взаимодействия, так что в результате мы имеем $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$. Гелл-Манн [309]



Ф и г. 7.

(см. также статью Коста и Даллапорта [146]) выдвинул идею преобразовать треугольник Пуппи в тетраэдр (фиг. 7) путем добавления одной вершины и обобщил таким образом идею универсального взаимодействия. Такая схема способна качественно объяснить все известные распады. Нелептонные распады происходят из-за связи между np -вершиной (которая благодаря сильным взаимодействиям эквивалентна π -вершине) и Λp -вершиной (которая благодаря сильным взаимодействиям эквивалентна K -вершине).

Фейнман и Гелл-Манн [256] заметили, что взаимодействия Ферми приобретают более простой вид, если предположить, что они по своей природе являются взаимодействием тока J_i с самим собой, т. е. имеют вид $J_i^* J_i$, где

$$J_i = G (\tilde{\nu} O_i e + \tilde{\nu} O_i \mu + \tilde{p} O_i n) + X \quad (10.118)$$

(X —часть тока, отвечающего изменению странности на единицу).

Чтобы установить точный вид взаимодействия Ферми, мы вкратце рассмотрим теперь описание распадов частиц со странностью 0 и, в частности, ядерного β -распада. Наиболее общее локальное лоренц-инвариантное четырехфермионное взаимодействие имеет вид

$$\mathcal{L}_I = \sum_{i=1}^5 G_i (\tilde{p} O_i n) (\tilde{e} O_i \nu) + \text{с.}, \quad (10.119)$$

где

$$G_1 = G_S \quad O_1 = 1 \quad (\text{скаляр}), \quad (10.120a)$$

$$G_2 = G_P \quad O_2 = \gamma_5 \quad (\text{псевдоскаляр}), \quad (10.120б)$$

$$G_3 = G_V \quad O_3 = \gamma_\mu \quad (\text{вектор}), \quad (10.120в)$$

$$G_4 = G_A \quad O_4 = i\gamma_\mu \gamma_5 \quad (\text{псевдовектор}), \quad (10.120г)$$

$$G_5 = \frac{1}{2} G_T \quad O_5 = \sigma_{\mu\nu} \quad (\text{тензор}). \quad (10.120д)$$

Вопрос о том, какая из линейных комбинаций правильна, должен быть решен экспериментально. Разрешение этой загадки составило блестящую главу в истории физики. Довольно странно, что хотя уже в начале 30-х годов было накоплено большое количество экспериментальных данных и известны основные факты теории, только в конце 1956 г. наметились основные контуры решения этой проблемы. Возрождение интереса и стимулирование исследований в области β -распада были обусловлены проведенным Ли и Янгом глубоким анализом, показавшим, что до 1956 г. ни в одном из экспериментов не было доказано сохранение четности в β -распаде. Для проверки высказанной Ли и Янгом гипотезы Ву, Амблер и др. [867] провели предложенный ими эксперимент по распаду поляризованного Co^{60} , в котором было ясно доказано наличие корреляций между ориентацией спина Co^{60} и направлением испущенного электрона. Поэтому для объяснения наблюдаемого углового распределения в функции распределения должен содержаться член вида $\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}$, где \mathbf{J} — спин ядра и \mathbf{p} — импульс испущенного электрона. Если β -распадное взаимодействие инвариантно относительно пространственного отражения, то функция распределения должна быть истинным скаляром (и не может содержать членов, подобных $\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}$ или $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$, где $\boldsymbol{\sigma}$ — спин электрона). И наоборот, в функции распределения может появиться псевдоскалярный член только тогда, когда β -распадное взаимодействие не инвариантно относительно пространственного отражения. Таким образом, эксперимент Ву и др. по распаду ориентированных ядер Co^{60} окончательно доказал наличие в лагранжиане \mathcal{L}_I таких членов, что $P\mathcal{L}_I P^{-1} \neq \mathcal{L}_I$. Один из возможных путей осуществления такой ситуации — это смешать каждое сохраняющее четность взаимодействие

$$G_i (\tilde{p}O^i n) (\tilde{e}O^i v) + \text{э. с.}$$

с не сохраняющим четность взаимодействием вида

$$G'_i (\tilde{p}O_i n) (\tilde{e}O^i \gamma_5 v) + \text{э. с.}$$

Рассмотрим подробнее векторное взаимодействие. Лагранжиан взаимодействия может быть в этом случае записан в виде

$$\mathcal{L}_I = G_V (\tilde{p}\gamma^\mu n) \left(\tilde{e}\gamma_\mu \frac{1+i\gamma_5}{\sqrt{1+|b|^2}} v \right) + \text{э. с.} \quad (10.121)$$

Требование CP -инвариантности, как показал Ландау [475], влечет за собой вещественность постоянных G_V и b . Эксперименты указывают, что $b = -1$, т. е. что оператор нейтринного поля входит во взаимодействие только в комбинации $\frac{1}{2} (1 - i\gamma_5)v$. В гл. 5 мы видели, что это эквивалентно двухкомпонентной теории нейтрино, в которой только левые (с отрицательной спиральностью) нейтрино взаимодействуют с веществом.

В последние годы было показано (см. прекрасную обзорную статью Конопинского [460]), что все современные эксперименты по β -распаду могут быть объяснены при помощи смеси векторного и псевдовекторного взаимодействий:

$$\mathcal{L}_I = G_V (\tilde{p}\gamma^\mu n) \left(\tilde{e}\gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) v \right) + G_A (\tilde{p}\gamma^\mu \gamma_5 n) \left(\tilde{e}\gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) v \right) + \text{э. с.} \quad (10.122)$$

Более того, существуют надежные указания, что $|G_A| \approx |G_V|$ (точнее, $|G_A| / |G_V| \approx 1,20$). Мы укажем позднее, как был сделан этот вывод.

Этот параграф мы закончим кратким обзором теоретических предположений, которые были сделаны Судершаном и Маршаком [756], Фейнманом и Гелл-Манном [256] и Сакураи [685], для «объяснения» «V-A»-взаимодействия. По-видимому, наиболее удовлетворительным из них (в том смысле, что оно допускает обобщение на сильные взаимодействия) является предположение Судершана и Маршака и Сакураи, которое заключается в том, что лагранжиан слабых взаимодействий должен быть инвариантным относительно преобразования

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \gamma_5 \psi & m &\rightarrow -m \\ \tilde{\psi} &\rightarrow -\tilde{\psi} \gamma_5 \end{aligned} \quad (10.123)$$

для каждого фермионного поля в отдельности¹⁾. Это может рассматриваться как обобщение требования инвариантности лагранжиана относительно преобразования

$$v \rightarrow \gamma_5 v,$$

или более общего преобразования

$$v \rightarrow e^{i a \gamma_5} v \quad (a = \text{const}),$$

что гарантирует строгое равенство нулю массы нейтрино и при наличии взаимодействия. При этом на полный лагранжиан распространяется инвариантность, присущая лагранжиану невзаимодействующих полей.

Лагранжиан взаимодействия Ферми между четырьмя фермионными полями $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, который инвариантен относительно собственных преобразований Лоренца, может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_I = \sum_{i=1}^5 (\tilde{\psi}_1 O^i \psi_2) (\tilde{\psi}_3 (G_i O_i + G'_i O_i \gamma_5) \psi_4) + \text{э. с.} \quad (10.124)$$

Тогда из инвариантности относительно преобразования обращения массы $\psi_i \rightarrow \gamma_5 \psi_i, m_i \rightarrow -m_i$ будет следовать, что

$$\mathcal{L}_I = G (\tilde{\psi}_1 \gamma_\mu (1 \pm i \gamma_5) \psi_2) (\tilde{\psi}_3 \gamma^\mu (1 \pm i \gamma_5) \psi_4) + \text{э. с.} \quad (10.125)$$

С другой стороны, Фейнман и Гелл-Манн постулировали, что в четырехфермионное взаимодействие (10.124) должна входить только проекция

$$\varphi_i = \frac{1}{2} (1 - i \gamma_5) \psi_i$$

оператора поля ψ_i , т. е. что взаимодействуют только те компоненты поля, для которых $\varphi_i = -i \gamma_5 \psi_i$. Мы будем обозначать оператор проектирования $\frac{1}{2} (1 - i \gamma_5)$ через a_- :

$$a_- = \frac{1}{2} (1 - i \gamma_5) = a_-^2. \quad (10.126)$$

Тогда, поскольку γ_5 — антиэрмитова матрица, то

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i &= \left(\frac{1}{2} (1 - i \gamma_5) \psi_i \right)^* \gamma_0 = \frac{1}{2} \psi_i^* (1 - i \gamma_5) \gamma_0 = \\ &= \tilde{\psi}_i \cdot \frac{1}{2} (1 + i \gamma_5). \end{aligned} \quad (10.127)$$

¹⁾ Инвариантность относительно обращения массы была впервые исследована Тиюмно [779], который, однако, требовал инвариантности только относительно проводимого одновременно для всех полей преобразования $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi, m \rightarrow -m$.

Мы будем обозначать $^{1/2}(1 + i\gamma_5)$ через a_+ и заметим, что $a_+a_- = a_-a_+ = 0$. Тогда наиболее общий локальный лагранжиан взаимодействия без производных имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= \sum_{i=1}^5 g_i (\overline{a_- \psi_1 O_i a_- \psi_2}) (\overline{a_- \psi_3 O_i a_- \psi_4}) = \\ &= \sum_{i=1}^5 g_i (\tilde{\psi}_1 a_+ O_i a_- \psi_2) (\tilde{\psi}_3 a_+ O_i a_- \psi_4) + \text{э. с.} \end{aligned} \quad (10.128)$$

При этом $a_+ O_i a_- = O_i a_+ a_- = 0$ для $O_i = 1, \gamma_5, \sigma_{\mu\nu}$, так как эти O_i коммутируют с γ_5 . С другой стороны, когда $O_i = \gamma_\mu$ и $O_i = i\gamma_\mu \gamma_5$, $a_+ O_i = O_i a_-$, так что

$$\mathcal{L}_I = \sum_{i=V, A} g_i (\tilde{\psi}_1 O_i a_- \psi_2) (\tilde{\psi}_3 O_i a_- \psi_4) + \text{э. с.} \quad (10.129)$$

но поскольку $i\gamma_\mu \gamma_5 (1 - i\gamma_5) = -\gamma_\mu (1 - i\gamma_5)$, то

$$\mathcal{L}_I = G (\tilde{\psi}_1 \gamma_\mu a_- \psi_2) (\tilde{\psi}_3 \gamma^\mu a_- \psi_4) + \text{э. с.}, \quad (10.130)$$

что и является «V-A»-взаимодействием.

§ 7. Теорема эквивалентности

В этом завершающем главу параграфе мы исследуем, в какой мере эквивалентны псевдоскалярная и псевдовекторная связи. Хотя эти два типа связи имеют фундаментальные различия (псевдоскалярное взаимодействие характеризуется безразмерной константой связи и перенормируемо, а псевдовекторное взаимодействие не перенормируемо и его константа связи имеет размерность длины), тем не менее при разложении до определенного порядка по константе связи оба взаимодействия приводят к одинаковым результатам (см. статьи Дайсона [192], Кейса [110, 111] и Фолди [267]).

В шредингеровской картине гамильтониан мезонного и нуклонного полей, взаимодействующих посредством псевдоскалярной связи, имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \psi^* (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta M) \psi(x) + \frac{1}{2} \int d^3x \{ \pi^2(x) + \nabla \phi \cdot \nabla \phi(x) + \mu^2 \phi^2(x) \} + \\ &+ G \int d^3x \psi^* \beta \gamma_5 \phi \psi(x). \end{aligned} \quad (10.131)$$

Мы рассматриваем только нейтральное мезонное поле. Обобщение на случай симметричной мезонной теории не представляет труда.

Произведем теперь унитарное преобразование гамильтониана

$$H' = e^{iS} H e^{-iS} \quad (10.132)$$

с таким оператором S , чтобы исключить член с псевдоскалярной связью, а вместо него ввести член с псевдовекторной связью. Такое преобразование упрощает переход к нерелятивистскому гамильтониану. В этом параграфе, за исключением специально оговоренных мест, мы будем работать в шредингеровской картине.

Предположим, что эрмитов оператор S может быть записан в виде [192, 267, 44]

$$S = \int d^3x \psi^* s \psi (\mathbf{x}) = \int d^3x \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \psi_{\alpha}^* s_{\alpha\beta} \psi_{\beta} \quad (10.133a)$$

с

$$s (\mathbf{x}) = i\gamma_5 \omega (\varphi (\mathbf{x})), \quad (10.133b)$$

где ω — функция только от φ , а $\gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ — антиэрмитова матрица, квадрат которой равен -1 . Нужно отметить, что в спиновом пространстве S является c -числом, а не матрицей и поэтому коммутирует с любой матрицей Дирака.

Для вычисления используем следующий прием, к которому мы уже прибегали в § 3 гл. 7. Определим

$$\psi' (\mathbf{x}, \lambda) = e^{iS\lambda} \psi (\mathbf{x}) e^{-iS\lambda}. \quad (10.134)$$

Тогда оператором, который мы хотим найти, является $\psi' (\mathbf{x}, 1)$, а непреобразованным оператором является $\psi' (\mathbf{x}, 0)$. Далее,

$$\frac{\partial \psi' (\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = i e^{iS\lambda} [S, \psi (\mathbf{x})] e^{-iS\lambda} = i [S, \psi' (\mathbf{x}, \lambda)]. \quad (10.135)$$

Учитывая, что перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} [\psi_{\alpha} (\mathbf{x}), \psi_{\beta}^* (\mathbf{x}')]_+ &= \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\psi_{\alpha} (\mathbf{x}), \psi_{\beta} (\mathbf{x}')]_+ &= [\psi_{\alpha}^* (\mathbf{x}), \psi_{\beta}^* (\mathbf{x}')]_+ = 0 \end{aligned} \quad (10.136)$$

инвариантны относительно унитарного преобразования (10.132) и что φ и ψ коммутируют между собой, и используя выражение (10.133a), получаем

$$\begin{aligned} [S, \psi'_{\alpha} (\mathbf{x}, \lambda)] &= \int d^3x' \sum_{\alpha\beta} [\psi_{\alpha}^* (\mathbf{x}', \lambda) s_{\alpha\beta} \psi_{\beta} (\mathbf{x}', \lambda), \psi'_{\alpha} (\mathbf{x}, \lambda)] = \\ &= - \sum_{\beta} s_{\alpha\beta} \psi_{\beta} (\mathbf{x}, \lambda) = - [s \psi' (\mathbf{x}, \lambda)]_{\alpha}. \end{aligned} \quad (10.137)$$

Уравнение (10.135) теперь приобретает вид

$$\frac{\partial \psi' (\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = -i s \psi' (\mathbf{x}, \lambda) \quad (10.138)$$

и после интегрирования дает

$$\psi' (\mathbf{x}, \lambda) = e^{-i s \lambda} \psi' (\mathbf{x}, 0). \quad (10.139)$$

При получении выражения (10.139) мы использовали начальное условие, что $\psi' (\mathbf{x}, 0)$ является непреобразованным оператором. Преобразованный оператор дается выражением

$$e^{iS} \psi (\mathbf{x}) e^{-iS} = e^{-i s} \psi (\mathbf{x}). \quad (10.140)$$

Так как оператор s , согласно определению (10.133b), эрмитов, $s = s^*$, то, эрмитово сопрягая последнее равенство, получаем

$$e^{iS} \psi^* (\mathbf{x}) e^{-iS} = \psi^* (\mathbf{x}) e^{i s}. \quad (10.141)$$

При вычислении H' по формуле (10.132) окажется очень полезным следующее соотношение:

$$e^{iS} Q e^{-iS} = Q + \frac{i}{1!} [S, Q] + \frac{i^2}{2!} [S, [S, Q]] + \\ + \frac{i^3}{3!} [S, [S, [S, Q]]] + \dots \quad (10.142)$$

Это равенство легко доказать путем разложения $\exp(iS\lambda) Q \exp(-iS\lambda)$ в ряд Тэйлора около точки $\lambda = 0$.

Так как операторы $\varphi(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x}')$ коммутируют между собой, а оператор S коммутирует с любой матрицей Дирака, то

$$e^{iS} (\beta M + G\beta\gamma_5\varphi(\mathbf{x}))_{\alpha\beta} e^{-iS} = (\beta M + G\beta\gamma_5\varphi(\mathbf{x}))_{\alpha\beta}, \quad (10.143)$$

где индексы α и β означают, что мы рассматриваем соответствующий элемент γ -матрицы (эти матричные элементы являются числами!). Поэтому, используя равенства (10.140), (10.141) и (10.143), находим

$$H_1 = e^{iS} \int d^3x \sum_{\alpha\beta} \psi_\alpha^*(\mathbf{x}) (\beta M + G\beta\gamma_5\varphi(\mathbf{x}))_{\alpha\beta} \psi_\beta(\mathbf{x}) e^{-iS} = \\ = \int d^3x \sum_{\alpha\beta} (\psi^*(\mathbf{x}) e^{iS})_\alpha (\beta M + G\beta\gamma_5\varphi(\mathbf{x}))_{\alpha\beta} (e^{-iS} \psi(\mathbf{x}))_\beta = \\ = \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) e^{iS} (\beta M + G\beta\gamma_5\varphi(\mathbf{x})) e^{-iS} \psi(\mathbf{x}). \quad (10.144)$$

Далее, учитывая антикоммутативность матриц β и γ_5 , можно преобразовать множитель $\beta \exp(-iS)$ следующим образом:

$$\beta e^{-iS} = \beta e^{+\gamma_5 w(\varphi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta (\gamma_5)^n \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_5)^n (-1)^n \beta \frac{w^n}{n!} = e^{iS} \beta. \quad (10.145)$$

Аналогично,

$$\beta \gamma_5 e^{-iS} = e^{iS} \beta \gamma_5, \quad (10.146)$$

так что равенство (10.144) может быть приведено к виду

$$H_1 = \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) e^{2iS} (\beta M + G\beta\gamma_5\varphi(\mathbf{x})) \psi(\mathbf{x}). \quad (10.147)$$

Путем таких же выкладок мы получим

$$H_2 = e^{iS} \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \alpha \cdot \mathbf{p} \psi(\mathbf{x}) e^{-iS} = \\ = \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) e^{iS} \alpha \cdot \mathbf{p} e^{-iS} \psi(\mathbf{x}). \quad (10.148)$$

Мы не можем переместить множитель $\exp(-iS)$ дальше, так как операторы $\mathbf{p} = -i\nabla$ и $\varphi(\mathbf{x})$ не коммутируют. Однако вспоминая, что матрицы α и γ_5 коммутируют, и используя соотношение (10.142), можно записать

$$e^{iS} \alpha \cdot \mathbf{p} e^{-iS} = \sum_{j=1}^3 e^{iS} \alpha_j e^{-iS} e^{iS} p_j e^{-iS} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j e^{iS} p_j e^{-iS} = \alpha \cdot \mathbf{p} - \alpha \cdot \nabla S. \quad (10.149)$$

Полезно ввести 4×4 -матрицу Σ_i , связанную с матрицами α_i и γ_5 соотношением

$$\Sigma_i = i\gamma_5 \alpha_i. \quad (10.150)$$

Тогда выражение (10.148) может быть переписано в виде

$$H_2 = \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \psi(\mathbf{x}) - \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Sigma} \cdot \nabla \omega \psi(\mathbf{x}). \quad (10.151)$$

Наконец, мы должны вычислить

$$H_3 = e^{iS} \frac{1}{2} \int d^3x \{ \pi^2(\mathbf{x}) + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) + \mu^2 \varphi^2(\mathbf{x}) \} e^{-iS}. \quad (10.152)$$

Для этого предположим, следуя Дайсону [192], что неизвестная функция $\omega(\varphi)$ имеет вид

$$\omega(\varphi) = \lambda \varphi(\mathbf{x}), \quad (10.153)$$

где λ — постоянная, которую следует найти. Так как операторы $\varphi(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x}')$ коммутируют, то нам нужно вычислить только величину

$$e^{iS} \pi(\mathbf{x}) e^{-iS} = \pi'(\mathbf{x}). \quad (10.154)$$

Используя соотношение (10.142), получаем

$$\pi'(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x}) + i\lambda \int d^3x' [\psi^*(\mathbf{x}') i\gamma_5 \psi(\mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}') \pi(\mathbf{x})]. \quad (10.155)$$

Все высшие члены (повторные коммутаторы) равны нулю, так как коммутатор операторов $\varphi(\mathbf{x})$ и $\pi(\mathbf{x}')$ является c -числом:

$$[\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (10.156)$$

Отсюда

$$\pi'(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x}) - i\lambda \psi^*(\mathbf{x}) \gamma_5 \psi(\mathbf{x}), \quad (10.157)$$

и формула (10.152) превратится в

$$\begin{aligned} H_3 &= \frac{1}{2} \int d^3x \{ \pi'^2(\mathbf{x}) + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) + \mu^2 \varphi^2(\mathbf{x}) \} = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \{ \pi^2(\mathbf{x}) + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) + \mu^2 \varphi^2(\mathbf{x}) \} - \\ &- i\lambda \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \gamma_5 \psi(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \gamma_5 \psi(\mathbf{x}) \right)^2. \end{aligned} \quad (10.158)$$

Собирая все эти члены, мы получаем следующее выражение для преобразованного гамильтониана:

$$\begin{aligned} H' &= \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta M) \psi(\mathbf{x}) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3x \{ \pi^2(\mathbf{x}) + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) + \mu^2 \varphi^2(\mathbf{x}) \} + \\ &+ \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) (e^{2iS} - 1) \beta M \psi(\mathbf{x}) + \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) e^{2iS} G \beta \gamma_5 \varphi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) - \\ &- \lambda \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Sigma} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) - i\lambda \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \gamma_5 \psi(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{x}) - \\ &- \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \gamma_5 \psi(\mathbf{x}) \right)^2. \end{aligned} \quad (10.159)$$

Хотя формула (10.159) является точной, мы не можем подобрать постоянную так, чтобы полностью исключить псевдоскалярную связь. Это обусловлено тем, что мы сделали предположение (10.153). Бергер, Фолди и Осборн [44] применили метод, в котором функция ω остается произвольной до самого конца вычислений. Затем функция ω опреде-

ляется таким образом, чтобы преобразованный гамильтониан не содержал псевдоскалярной связи.

Если в выражении (10.159) разложить в ряд экспоненциальные множители, сохранить квадратичные по φ члены и выбрать

$$-\lambda = \frac{G}{2M}, \quad (10.160)$$

то в этом порядке псевдоскалярная связь будет устранена и преобразованный лагранжиан приобретет вид

$$H' = H_N + H_M + H_I', \quad (10.161a)$$

где

$$H_I' = \frac{G}{2M} \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) + i\gamma_5 \pi(\mathbf{x})) \psi(\mathbf{x}) + \\ + \frac{G^2}{2M} \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \beta \psi(\mathbf{x}) \varphi^2(\mathbf{x}) - \frac{G^2}{8M^2} \left(\int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \gamma_5 \psi(\mathbf{x}) \right)^2. \quad (10.161b)$$

Теперь мы кратко проанализируем модифицированный гамильтониан (10.161). Первый член в выражении (10.161b) имеет вид обычной связи с производными в мезон-нуклонном гамильтониане. Напомним, что оператор $\pi(\mathbf{x})$ равен, по существу, $\partial_t \varphi(\mathbf{x})$, так что в этом члене взаимодействия подынтегральное выражение с точностью до постоянного множителя равно

$$\frac{F}{\mu} \tilde{\psi}(\mathbf{x}) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(\mathbf{x}) \partial^\mu \varphi, \quad (10.162)$$

что является общепринятым выражением для записи псевдовекторного взаимодействия. Мы показали, таким образом, эквивалентность псевдоскалярной и псевдовекторной связей в первом порядке по константе связи. Константа связи взаимодействия с производными связана с константой связи G соотношением

$$\frac{F}{\mu} = \frac{G}{2M}. \quad (10.163)$$

«Двухмезонный» член

$$\frac{G^2}{2M} \int d^3x \psi^* \beta \psi(\mathbf{x}) \varphi^2(\mathbf{x}) \quad (10.164)$$

аналогичен квадратичному члену $(e^2/2m)A^2$, который встречается в релятивистской теории излучения. Он появляется при исключении переходов, связанных с виртуальными парами. В теории возмущений этот член приводит к большому не зависящему от спина вкладу в ядерные силы [496]. Его значение при любых вычислениях рассеяния мезона на нуклоне было подчеркнуто впервые в работе Дрелла и Хенли [183], которые показали, что этот член дает сильное отталкивание в S -волне взаимодействия мезонов с нуклонами. Можно сделать вывод о его важности уже из того, что член с псевдовекторной связью пропорционален величине F/μ , тогда как член с φ^2 пропорционален величине $M(F/\mu)^2$.

Наконец, в гамильтониане для связи с производными всегда присутствует контактный член $\left(\int d^3x \psi^* \gamma_5 \psi(\mathbf{x}) \right)^2$. Если лагранжиан содержит связь с производными (10.162), то сопряженный полю φ импульс будет равен

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} - \frac{F}{\mu} \psi^* \gamma_5 \psi. \quad (10.165)$$

Тогда при исключении $\dot{\phi}$ из гамильтониана возникнет контактный член $\left(\int d^3x \psi^* \gamma_5 \psi(x)\right)^2$.

Наиболее ясно эквивалентность псевдоскалярной и псевдовекторной связей может быть установлена с помощью преобразования Фолди (см. [267, 837, 44]), в котором оператор S имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \gamma_5 \psi(\mathbf{x}) \operatorname{arctg} \left(\frac{G\phi(\mathbf{x})}{M} \right). \quad (10.166)$$

При этом каноническом преобразовании полностью устраняется псевдоскалярная связь, но псевдовекторная связь появляется в нелинейном виде.

Наиболее общие теоремы эквивалентности были установлены Молдауром и Кейсом [559], которые показали, что в первом порядке по константе связи все возможные линейные взаимодействия между скалярными (или псевдоскалярными) мезонами и нуклонами либо исчезают, либо эквивалентны скалярному (или псевдоскалярному) взаимодействию.

Теоремы эквивалентности при наличии электромагнитного поля были доказаны Кейсом [111] и Дреллом и Хенли [183]. Келли [437] предложил исключительно изящный метод вывода теорем эквивалентности, в котором используется возможность добавки к лагранжиану и 4-дивергенции произвольного 4-вектора.

Формальная теория рассеяния

До сих пор рассматривались вопросы формального характера: была описана методика квантования полей на основе канонического формализма. Это позволило представить вторично-квантованную теорию в такой форме, в которой по аналогии с обычной квантовой механикой развитие системы описывается уравнением Шредингера:

$$H|\Psi\rangle = i\hbar \partial_t |\Psi\rangle, \quad (11.1a)$$

$$H = H_0 + H_I. \quad (11.16)$$

Теперь нужно научиться извлекать физические следствия из вторично-квантованной теории. С этой целью мы будем исследовать решаемые модели (см. гл. 12) и рассматривать применения теории возмущений к вторично-квантованным теориям поля (см. гл. 13 и 14).

Всем вторично-квантованным теориям поля присуще то общее свойство, что в результате взаимодействия (описываемого гамильтонианом H_I) вокруг каждого кванта невозмущенных полей (описываемых гамильтонианом H_0) возникает облако других квантов. В пределе точечного (локального) взаимодействия этот эффект приводит к расходимостям. Программа перенормировок позволяет обойти эти трудности. Было замечено, что взаимодействие приводит к изменению констант связи и масс квантов и что поэтому затравочные константы связи и массы не могут быть отождествлены с соответствующими измеряемыми величинами. Большим успехом теории перенормировки явилось то, что переопределение константы связи и массы в квантовой электродинамике оказалось достаточным, чтобы обойти все трудности с расходимостями, возникающими в амплитудах рассеяния и рождения частиц (т. е. в элементах S -матрицы). Можно сказать, что современные теории поля дают полуколичественное (а электродинамика и количественное) описание процессов с элементарными частицами, но проливают мало света на проблему *структуры* этих частиц. Например, мы не в состоянии объяснить наблюдаемый спектр масс элементарных частиц.

В этой главе будут кратко описаны те стороны формальной теории рассеяния, которые нам понадобятся в дальнейшем. Мы также введем картину Дирака (ее часто называют представлением взаимодействия) и рассмотрим некоторые степенные разложения оператора сдвига по времени в этой картине.

§ 1. Потенциальное рассеяние

Сначала в качестве простейшего примера теории рассеяния рассмотрим рассеяние бесспиновой нерелятивистской частицы на потенциале конечного радиуса. Нас интересует описание такого процесса, когда направленный пучок частиц с определенной энергией падает на мишень и рассеивается ею. (Интенсивность пучка предполагается такой, что взаимодействием налетающих частиц между собой можно пренебречь.) Нам нужно найти функциональную зависимость интенсивности рассеянного пучка от его направления в предположении, что известны интенсивность падающего пучка и потенциал взаимодействия между налетающей частицей и мишенью. Мы будем рассматривать рассеяние одиночной частицы из пучка.

Квантовомеханическое описание процесса проводится следующим образом [218]. В момент времени $t = 0$ имеется волновой пакет, сосредоточенный вблизи точки $\mathbf{r}_0 = (0, 0, -z_0)$ с пространственной дисперсией $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и движущийся направо в направлении оси z со средним импульсом $\mathbf{p}_0 = \hbar \mathbf{k}_0$ (с дисперсией $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$, причем $\Delta k_i \Delta x_i \approx 1$). Чтобы частица имела определенную с разумной точностью энергию, потребуем выполнения условия $\Delta k_z \ll k_0$. Расположение в пространстве должно быть таким, чтобы в момент времени $t = 0$ процесс рассеяния еще не начинался, т. е. чтобы между налетающей частицей и мишенью не было взаимодействия (источник налетающих частиц должен находиться далеко от мишени!). Поэтому потребуем выполнения условий $\Delta z \ll |z_0|$ и $|z_0| \gg a$, где a — радиус действия потенциала. Чтобы можно было отличить рассеянный пучок от пучка, прошедшего без взаимодействия, интерференция между рассеянной и начальной волнами должна быть минимальной. Эта сторона приготовления начального состояния выражается требованием $\Delta x, \Delta y \ll |z_0|$. Обычно оказывается, что $\Delta x, \Delta y, \Delta z \gg a$.

Таким образом, в момент времени $t = 0$ наша частица описывается волновой функцией

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = \int e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} \Phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) d^3k, \quad (11.2)$$

где Φ — квадратично интегрируемая функция, имеющая резкий максимум при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ с дисперсией Δk_i . Рассмотрим затем развитие этого пакета во времени. В некоторый более поздний момент времени $t > 0$ имеем

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iHt/\hbar} \Psi(\mathbf{r}, 0), \quad (11.3a)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}), \quad (11.3b)$$

где H — гамильтониан системы. Для расчетов с этим выражением введем вспомогательные функции $\psi_{\mathbf{k}+}(\mathbf{r})$, являющиеся решениями уравнения

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right\} \psi_{\mathbf{k}+}(\mathbf{r}) = E_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}+}(\mathbf{r}), \quad (11.4a)$$

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (11.4b)$$

и имеющие следующее асимптотическое поведение:

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \psi_{\mathbf{k}+}(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} f_{\mathbf{k}+}(\theta, \varphi). \quad (11.5)$$

Существование решений с этим предписанным асимптотическим поведением следует из нашего предположения, что $V(\mathbf{r})$ убывает быстрее $1/r$.

Поэтому при больших r , ψ_{k+} с точностью до членов первого порядка по $1/r$ подчиняется уравнению $(\nabla^2 + k^2)\psi_{k+} = 0$, имеющему как решения вида плоской волны $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, так и решения вида расходящейся сферической волны $\exp(ikr)/r$. Мы покажем теперь, что дифференциальному уравнению (11.4) и граничному условию (11.5) удовлетворяют решения интегрального уравнения

$$\psi_{k+}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \int G_{k+}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}') \psi_{k+}(\mathbf{r}') d^3r', \quad (11.6)$$

где функция Грина G_{k+} дается выражением

$$G_{k+}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\hbar|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \frac{e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{k^2 - k'^2 + i\varepsilon}. \quad (11.7)$$

Доказательство: Так как в силу предположенных свойств потенциала $V(\mathbf{r})$ основной вклад в интеграл в уравнении (11.6) дают малые r' , то при больших r можно записать $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')/r + \dots$. Поэтому

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{k+}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{1}{4\pi} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}} \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}') \psi_{k+}(\mathbf{r}') d^3r', \quad (11.8)$$

так что

$$f_{k+}(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}} V(\mathbf{r}') \psi_{k+}(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (11.9)$$

Заметим, что если записать $f_{k+} = |f_{k+}| \exp i\varphi_+$, то фаза φ_+ характеризуется длиной, определяемой радиусом действия потенциала.

Существует и другая система решений уравнения (11.4), обозначаемых через $\psi_{k-}(\mathbf{r})$ и обладающих асимптотическим поведением

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{k-}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{e^{-ikr}}{r} f_{k-}(\theta, \varphi), \quad (11.10)$$

соответствующим сумме плоской и сходящейся сферической волн. Эти решения удовлетворяют интегральному уравнению:

$$\psi_{k-}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \int G_{k-}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}') \psi_{k-}(\mathbf{r}') d^3r', \quad (11.11)$$

где функция Грина G_{k-} дается выражением

$$G_{k-}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-i\hbar|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \frac{e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{k^2 - k'^2 - i\varepsilon}. \quad (11.12)$$

Если гамильтониан H не имеет связанных состояний, то система функций $\{\psi_{k+}\}$ (или $\{\psi_{k-}\}$) является полной:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi_{k\pm}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{k\pm}(\mathbf{r}') = \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (11.13)$$

Поэтому можно разложить $\Psi(\mathbf{r}, 0)$ по системе $\{\psi_{k+}\}$ и записать

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = \int d^3k B_k \psi_{k+}(\mathbf{r}). \quad (11.14)$$

Мотивировка выбора системы функций $\{\psi_{k+}\}$ вскоре станет ясной. Так как $\Psi(\mathbf{r}, 0)$ в момент времени $t=0$ описывает находящийся далеко от рассеивающего центра пакет, то можно подставить вместо $\psi_{k+}(\mathbf{r})$

ее асимптотическое значение и записать

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = \int d^3k B_{\mathbf{k}} \left(e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f_{\mathbf{k}+}(\theta, \varphi) \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \right). \quad (11.15)$$

Коэффициенты разложения $B_{\mathbf{k}}$ должны быть выбраны так, чтобы выражение (11.15) представляло пакет, локализованный вблизи \mathbf{r}_0 со средним импульсом \mathbf{k}_0 вдоль оси z . Вначале (при $t=0$) пакет движется в области, в которой потенциал не действует. Поэтому движение должно быть как у свободной частицы, и мы полагаем, что в выражение (11.15) дает существенный вклад только часть, соответствующая плоской волне. Тогда положение максимума амплитуды $\Psi(\mathbf{r}, 0)$ может быть получено методом стационарной фазы. Если записать

$$B_{\mathbf{k}} = b(\mathbf{k}) e^{i\beta(\mathbf{k})} \quad (11.16)$$

(b и β вещественны), то максимум возникает при том \mathbf{r} , которое определяется уравнением

$$\nabla_{\mathbf{k}} [\beta(\mathbf{k}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} = 0. \quad (11.17)$$

Поэтому положим

$$\mathbf{r}_0 = -\nabla_{\mathbf{k}} \beta(\mathbf{k}) \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}. \quad (11.18)$$

Для оценки вклада от сферической волны запишем

$$f_{\mathbf{k}+} = |f_{\mathbf{k}+}| e^{i\varphi_+}, \quad (11.19)$$

и скорость измерения фазы этой части подынтегрального выражения равна

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{k}} (\beta(\mathbf{k}) + \varphi_+ + kr) \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} &= \nabla_{\mathbf{k}} \varphi_+ \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} + \varepsilon_3 r + \nabla_{\mathbf{k}} \beta(\mathbf{k}) \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} = \\ &= \nabla_{\mathbf{k}} \varphi_+ \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} + \varepsilon_3 (r + |z_0|), \end{aligned} \quad (11.20)$$

где ε_3 — единичный вектор в направлении оси z , причем учтено, что $\mathbf{r}_0 = -\varepsilon_3 |z_0|$. Вспомним, что $\nabla_{\mathbf{k}} \varphi_+ \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}$ есть длина, характеризующая радиусом действия потенциала и поэтому малая по сравнению с r_0 . Поэтому фаза части со сферической волной не имеет точек стационарности, так как $|\nabla_{\mathbf{k}} (\beta(\mathbf{k}) + \varphi_+ + kr)| \approx (r + |z_0|) > 0$. В действительности она велика при больших $|z_0|$, и поэтому вклад этой части в $\Psi(\mathbf{r}, 0)$ из-за интерференционного погашения пренебрежимо мал. Таким образом, при $t=0$

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) \approx \int B_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k, \quad (11.21)$$

и, сравнивая формулы (11.21) и (11.2), находим

$$B_{\mathbf{k}} = \Phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0}. \quad (11.22)$$

Простота этого результата обусловлена выбором полной системы функций $\{\psi_{\mathbf{k}+}\}$: коэффициенты разложения $\Psi(\mathbf{r}, 0)$ по $\{\psi_{\mathbf{k}+}\}$ совпадают с коэффициентами разложения $\Psi(\mathbf{r}, 0)$ по плоским волнам $\{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}\}$.

Двигаясь к рассеивающему центру, частица с течением времени попадает в область влияния силового поля и может быть отклонена. В экспериментальной установке детектор расположен на большом по сравнению с радиусом действия силового поля расстоянии, так что в области наблюдения частица опять свободно движется по своей траектории. Поэтому для предсказания результата опыта нужно знать поведение $\Psi(\mathbf{r}, t)$ при больших t , когда частица снова находится далеко

от рассеивающего центра. Так как $\psi_{\mathbf{k}+}$ есть собственные функции гамильтониана H с собственными значениями $\hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m$, то можно записать

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iHt/\hbar} \Psi(\mathbf{r}, 0) = \int d^3k \Phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - i\hbar^2 \mathbf{k}^2 t / 2m \hbar} \psi_{\mathbf{k}+}(\mathbf{r}). \quad (11.23)$$

При достаточно больших t снова допустима замена $\psi_{\mathbf{k}+}(\mathbf{r})$ ее асимптотическим выражением (11.5)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}, t) + \Psi_{\text{расс.}}(\mathbf{r}, t), \quad (11.24a)$$

причем

$$\Psi_0(\mathbf{r}, t) = \int d^3k e^{-iE_{\mathbf{k}} t / \hbar} B_{\mathbf{k}} \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (11.24b)$$

■

$$\Psi_{\text{расс.}}(\mathbf{r}, t) = \int d^3k e^{-iE_{\mathbf{k}} t / \hbar} B_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{r} f_{\mathbf{k}+}(\theta, \varphi). \quad (11.24b)$$

Опять методом стационарной фазы можно определить величину r , при которой $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$ имеет максимум: наибольший вклад в $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$ дают \mathbf{r} , удовлетворяющие условию

$$\nabla_{\mathbf{k}} \left(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \frac{\hbar \mathbf{k}^2}{2m} t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right) \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} = 0, \quad (11.25)$$

т. е. $\mathbf{r} = (0, 0, z)$, причем

$$z = -z_0 + \frac{\hbar k_0}{m} t = -z_0 + vt. \quad (11.26)$$

Таким образом, $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$ соответствует той части $\Psi(\mathbf{r}, t)$, которая описывает прошедший (нерассеянный) пакет; $\Psi_{\text{расс.}}$ имеет максимум, если

$$\nabla_{\mathbf{k}} \left(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \frac{\hbar \mathbf{k}^2}{2m} t + \varphi_+ + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right) \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} = 0, \quad (11.27a)$$

т. е. если

$$\varepsilon_3 \left(r + |z_0| - \frac{\hbar k_0}{m} t \right) + \nabla_{\mathbf{k}} \varphi_+ \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} = 0. \quad (11.27b)$$

В пренебрежении малой величиной $\nabla_{\mathbf{k}} \varphi_+$,

$$r = -|z_0| + vt. \quad (11.28)$$

Отсюда следует, что $\Psi_{\text{расс.}}(\mathbf{r}, t)$ представляет рассеянную волну. Уравнение (11.27) соблюдается только при $t > |z_0|/v$, так как r положительно. Поэтому рассеянная волна $\Psi_{\text{расс.}}$ становится отличной от нуля только после достижения первичным волновым пакетом рассеивающего центра, т. е. только после того, как пройдет время $|z_0|/v$. Это может быть принято в качестве нерелятивистского принципа причинности. Таким образом, в дополнение к распространяющемуся вдоль оси z пакету, при $t > |z_0|/v$, имеется расходящаяся из начала сферическая волна, амплитуда которой $f_{\mathbf{k}+}(\theta, \varphi)$ является функцией направления. При $t \gg |z_0|/v$ вероятность найти частицу, летящую в направлении, отличном от начального, в объеме d^3r вблизи точки \mathbf{r} в момент времени t дается формулой

$$|\Psi_{\text{расс.}}(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r = d^3r \int \Phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} f_{\mathbf{k}+}(\theta, \varphi) \frac{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - E_{\mathbf{k}} t / \hbar)}}{r} d^3k|^2. \quad (11.29)$$

Если предположить, что в интервале Δk вблизи k_0 , в котором в основном сосредоточена Φ , функция f_{k_0+} не изменяется слишком быстро с изменением k , то можно записать¹⁾

$$|\Psi_{\text{расс.}}(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r = |f_{k_0+}(\theta, \varphi)|^2 \cdot \left| \int \Phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \frac{e^{i(\hbar r - E_{\mathbf{k}} t / \hbar)}}{r} d^3k \right|^2. \quad (11.30)$$

Поэтому вероятность рассеяния частицы в элемент телесного угла $d\Omega$ в направлении θ, φ дается формулой

$$P_{\Omega} d\Omega = d\Omega |f_{k_0+}(\theta, \varphi)|^2 \int_0^{\infty} dr \left| \int \Phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \frac{e^{i(\hbar r - E_{\mathbf{k}} t / \hbar)}}{r} d^3k \right|^2. \quad (11.31)$$

Наконец, поскольку интеграл по k отличен от нуля только для больших положительных r , то можно, не внося ошибки, распространить интегрирование по r от $-\infty$ до $+\infty$. Дифференциальное эффективное сечение рассеяния $d\sigma$ определяется как отношение вероятности рассеяния в единичный телесный угол к вероятности того, что первоначально частица находилась в цилиндре с единичным (1 см^2) эффективным сечением и с осью вдоль направления первичного пучка, т. е.

$$d\sigma(\theta, \varphi) = \frac{P_{\Omega} d\Omega}{P_0}, \quad (11.32)$$

где

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{A} \int_A dx dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz |\Psi(\mathbf{r}, 0)|^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left| \int B_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}z} d^3k \right|^2, \end{aligned} \quad (11.33)$$

причем мы предположили, что первичный пучок обладает симметрией относительно вращений вокруг оси z . Теперь покажем, что интегралы в выражениях (11.31) и (11.33) совпадают, так что

$$d\sigma(\theta, \varphi) = |f_{k_0+}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \quad (11.34)$$

Доказательство: Запишем $E_{\mathbf{k}}$, стоящее в показателе степени в формуле (11.31), в виде

$$\frac{E_{\mathbf{k}} t}{\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m} t = \frac{\hbar}{2m} t [(k - k_0)^2 - k_0^2 + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_0]. \quad (11.35)$$

Так как $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 \sim (\Delta k)^2$ и $t \sim |z_0|/v$, то первый член по порядку величины равен $\hbar t (\Delta k)^2 / 2m \sim (\Delta k)^2 |z_0| / \hbar k_0$, т. е. значительно меньше единицы. Это соответствует требованию, чтобы пакет не слишком сильно расплывался; в противном случае нельзя было бы отличить расплывание пакета от истинного рассеяния. Условие не слишком быстрого расплывания пакета имеет вид $\delta(\Delta r) / \Delta r \ll 1$, где $\delta(\Delta r) \sim \hbar (\Delta k) t / m$, или

$$\frac{\hbar (\Delta k) t}{m \Delta r} = \frac{(\Delta k)^2}{k_0} |z_0| \ll 1. \quad (11.36)$$

¹⁾ Обсуждение случая, когда это предположение неправильно (резонансное рассеяние), можно найти в превосходном обзоре Бренига и Хаага [85]. Мы очень рекомендуем эту статью в качестве введения в более строгую формулировку формальной теории рассеяния. Она содержит также изложение теории резонансного рассеяния и обсуждение аналитических свойств амплитуд рассеяния.

Поэтому мы пренебрегаем членом $\exp [i\hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 t / 2m]$. Член $\exp (i\hbar \mathbf{k}_0^2 t / 2m)$ является фазовым множителем и выпадает при переходе к квадрату абсолютной величины. Кроме того, свойства $B_{\mathbf{k}}$ позволяют нам записать под знаком интеграла

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_0 \hbar t / m} = e^{i\hbar \mathbf{k}_z v t} \approx e^{i\hbar v t}, \quad (11.37)$$

так что

$$P_{\Omega} d\Omega = d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} dr \left| \int B_{\mathbf{k}} e^{i\hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}} d^3k \right|^2 |f_{\mathbf{k}_0+}(\theta, \varphi)|^2. \quad (11.38)$$

Заменой переменных $r' = r - vt$ завершается доказательство нашего утверждения. Поскольку $B_{\mathbf{k}}$ имеет максимальную величину при \mathbf{k} , лежащих вблизи \mathbf{k}_0 , и вектор \mathbf{k}_0 направлен по оси z , то замена k на k_z допустима.

Важным результатом настоящего параграфа является метод вычисления дифференциального сечения, в котором используются не зависящие от времени волновые функции: амплитуда $f_{\mathbf{k}_0+}(\theta, \varphi)$ однозначно определяется из дифференциального уравнения (11.4) и граничного условия, что асимптотическое выражение для решения содержит только расходящиеся сферические волны.

§ 2. Уравнения Липпмана — Швингера

Выразим наш предыдущий результат в более общем виде. При внимательном анализе содержания § 1 выясняется, что была предположена возможность разбегания гамильтониана на две части: $H = H_0 + V$. Первое из слагаемых, H_0 , описывает невозмущенное движение частиц, а V — взаимодействие между ними, причем предполагается, что V исчезает, когда частицы находятся достаточно далеко друг от друга. Поэтому последующие результаты нельзя непосредственно применять к моделям теорий поля, в которых V ответственно не только за взаимодействие между частицами, но и за самодействие, приводящее к появлению облака вокруг частицы, и к собственно-энергетическим эффектам.

Ниже мы будем предполагать, что H_0 имеет только непрерывный спектр, причем

$$H_0 |\varphi_a\rangle = E_a |\varphi_a\rangle, \quad (11.39a)$$

$$\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = \delta(a - b), \quad (11.39b)$$

и что H имеет такой же непрерывный спектр, как и H_0 , начинающийся от минимального значения $E_a = 0$.

Этого всегда можно добиться подходящим выбором аддитивных констант в H и H_0 . Мы будем обозначать собственные состояния гамильтониана, соответствующие «приходящей» волне ¹⁾ через $|\psi_a^{\pm}\rangle$, а «уходящей» волне — через $|\bar{\psi}_a^{\pm}\rangle$:

$$H |\psi_a^{\pm}\rangle = E_a |\psi_a^{\pm}\rangle. \quad (11.40)$$

Они удовлетворяют уравнениям Липпмана — Швингера [503] (см. также статью Гелл-Манна и Голдбергера [302]):

$$|\psi_a^{\pm}\rangle = |\varphi_a\rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V |\psi_a^{\pm}\rangle, \quad (11.41a)$$

¹⁾ В дальнейшем, ввиду отсутствия в русской литературе соответствующих терминов, $|\psi_a^{\pm}\rangle$ будет также именоваться ин-состоянием (или ин-решением), а $|\bar{\psi}_a^{\pm}\rangle$ — аут-состоянием (или аут-решением). — Прим. ред.

и

$$|\psi_a^-\rangle = |\varphi_a\rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E_a - H_0 - i\varepsilon} V |\psi_a^-\rangle. \quad (11.416)$$

Умножая обе части уравнений (11.41) на $(E_a - H_0)$, легко проверить, что решения этих уравнений являются собственными состояниями гамильтониана H^1). Собственное состояние $|\psi_a^+\rangle$ является решением задачи рассеяния, которое имеет входящие плоские волны [соответствующие члену $|\varphi_a\rangle$ в (11.41a)] и расходящиеся сферические волны [представляемые вторым членом в правой части уравнения (11.41a)]. Добавка $+i\varepsilon$ в знаменателе в (11.41a) выделяет, как показал Дирак [176], расходящиеся рассеянные волны. Аналогично, $|\psi_a^-\rangle$ является тем решением, которое имеет сходящиеся сферические волны и уходящие плоские волны. Более точно в нестационарной формулировке волновой пакет, построенный из состояний $|\psi_a^-\rangle$, будет содержать при $t = -\infty$ сходящиеся сферические волны и плоские волны, а при $t = +\infty$ — только плоские волны.

При рассеянии частицы на локальном потенциале, $\langle \mathbf{r} | V | \mathbf{r}' \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r})$ может быть доказана эквивалентность уравнения (11.41a) рассмотренному выше уравнению (11.6). Для этого следует взять скалярное произведение (11.41a) с $\langle \mathbf{r} |$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \psi_a^+ \rangle &= \langle \mathbf{r} | \varphi_a \rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int d^3 r' \int d^3 r'' \int d^3 p' \int d^3 p'' \times \\ &\times \langle \mathbf{r} | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} | \mathbf{p}'' \rangle \langle \mathbf{p}'' | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | V | \mathbf{r}'' \rangle \langle \mathbf{r}'' | \psi_a^+ \rangle, \end{aligned} \quad (11.42a)$$

или

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \psi_a^\pm \rangle &= \psi_a^\pm(\mathbf{r}) = \\ &= \varphi_a(\mathbf{r}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 r' \int d^3 k' \frac{e^{ik' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k_a^2 - k'^2 \pm i\varepsilon} \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}') \psi_a^\pm(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (11.42b)$$

что совпадает с уравнением (11.6), так как a есть индекс собственного состояния гамильтониана H_0 , а $G_{a\pm}$ определяется интегралом (11.7), который в точности такой же, как и в уравнении (11.42b).

Гамильтониан H в дополнение к рассмотренным выше собственным состояниям может иметь также связанные состояния (индексы греческими буквами)

$$H |\psi_\beta\rangle = E_\beta |\psi_\beta\rangle. \quad (11.43)$$

Мы будем предполагать, что энергия этих состояний меньше энергии любых собственных состояний H_0 с теми же квантовыми числами. Вследствие эрмитовости H эти связанные состояния ортогональны состояниям

¹⁾ Обсуждение вопроса о нормировке векторов $|\varphi_a\rangle$ и $|\psi_a^\pm\rangle$ в нерелятивистской квантовой механике и в теории поля в связи с уравнениями Липпмана—Швингера можно найти в статьях де-Витта [165] и Ван Хоа [806]. В нерелятивистской квантовой механике уравнения (11.41a) и (11.416) верны в записанной выше форме, поскольку и $|\varphi_a\rangle$ и $|\psi_a^\pm\rangle$ нормированы на δ -функцию. В теории поля из-за самодействия, порождаемого H_I , нормировки $|\varphi_a\rangle$ и $|\psi_a^\pm\rangle$ отличаются множителем Z (перенормировка волновой функции), и уравнения Липпмана—Швингера должны быть исправлены с учетом этой перенормировки. Мы обсудим необходимые изменения в гл. 12.

из непрерывного спектра

$$(\psi_\beta, \psi_\alpha^\pm) = 0. \quad (11.44)$$

Система состояний $\{\psi_\alpha^\pm\} + \{\psi_\beta\}$ полна в том смысле, что

$$\sum_\alpha |\psi_\alpha^\pm\rangle \langle \psi_\alpha^\pm| + \sum_\beta |\psi_\beta\rangle \langle \psi_\beta| = 1. \quad (11.45)$$

Несколько позже эти решения для стационарных состояний будут использованы в качестве вспомогательных функций, с помощью которых можно легко решить нестационарную задачу о развитии системы во времени.

§ 3. Картина Дирака

Решение нестационарной задачи целесообразно проводить в картине Дирака ¹⁾, которая связана унитарными преобразованиями с картинами Шредингера и Гейзенберга. Пусть $|\Phi_S(t)\rangle$ будет зависящим от времени вектором состояния, описывающим развитие системы в картине Шредингера, и

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t |\Phi_S(t)\rangle &= H_S |\Phi_S(t)\rangle = \\ &= (H_{0S} + V_S) |\Phi_S(t)\rangle. \end{aligned} \quad (11.46)$$

Определим вектор состояния в картине Дирака $|\Psi_D(t)\rangle$ (называемый также вектором состояния в представлении взаимодействия) соотношением

$$|\Psi_D(t)\rangle = e^{iH_0S t/\hbar} |\Phi_S(t)\rangle. \quad (11.47)$$

В силу уравнения (11.46), $|\Psi_D(t)\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t |\Psi_D(t)\rangle &= e^{iH_0S t/\hbar} V_S e^{-iH_0S t/\hbar} |\Psi_D(t)\rangle = \\ &= V_D(t) |\Psi_D(t)\rangle. \end{aligned} \quad (11.48)$$

Таким образом, зависимость от времени вектора состояния в картине Дирака определяется оператором энергии взаимодействия

$$V_D(t) = e^{iH_0S t/\hbar} V_S e^{-iH_0S t/\hbar}. \quad (11.49)$$

Если $V_D = 0$, т. е. в отсутствие взаимодействия, $|\Psi_D(t)\rangle$ не зависит от времени и картина Дирака совпадает с картиной Гейзенберга.

Соотношение между оператором в картине Дирака $Q_D(t)$ и соответствующим ему оператором в картине Шредингера $Q_S(t)$ определяется так, чтобы

$$(\Psi_D(t) | Q_D(t) | \Psi_D(t)) = (\Phi_S(t) | Q_S(t) | \Phi_S(t)), \quad (11.50)$$

откуда, используя (11.47), получаем

$$Q_D(t) = e^{iH_0S t/\hbar} Q_S e^{-iH_0S t/\hbar}. \quad (11.51)$$

Поэтому зависимость от времени операторов в картине Дирака определяется невозмущенным гамильтонианом

$$i\hbar\partial_t Q_D(t) = + [Q_D(t), H_0], \quad (11.52)$$

¹⁾ Этой картине можно дать имя Дирака, так как она тесно связана с зависящими от времени амплитудами, которые используются в методе вариации постоянных, впервые предложенном Дираком [167, 168].

причем $H_0 = H_{0S} = H_{0D}$. Ниже мы будем опускать индекс D при векторах состояния и операторах в картине Дирака, так как в оставшейся части этой главы мы будем иметь дело только с величинами, определенными в этой картине.

Введем затем оператор сдвига во времени $U(t, t_0)$

$$U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle = |\Psi(t)\rangle, \quad (11.53)$$

который удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \partial_t U(t, t_0) = V(t) U(t, t_0) \quad (11.54)$$

и граничному условию

$$U(t, t) = 1. \quad (11.55)$$

При конечных t и t_0 этот оператор имеет свойства

$$U(t, t_0) U(t_0, t') = U(t, t') \quad (11.56a)$$

и

$$U(t, t_0) = U^{-1}(t_0, t) = U^*(t_0, t), \quad (11.56b)$$

которые могут быть доказаны тем же способом, что и для соответствующих операторов сдвига по времени в картине Шредингера (см. § 1 гл. 1). Для получения явного вида $U(t, t_0)$ вспомним, что в картине Шредингера

$$|\Phi_S(t)\rangle = e^{-iH_S(t-t_0)} |\Phi_S(t_0)\rangle. \quad (11.57)$$

Заменяя состояния $|\Phi_S(t)\rangle$ соответствующими состояниями в картине Дирака, получаем

$$|\Psi(t)\rangle = e^{+iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} |\Psi(t_0)\rangle, \quad (11.58)$$

где $H = H_0 + V(t)$, откуда

$$U(t, t_0) = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0}. \quad (11.59)$$

При описании процесса рассеяния в картине Дирака начальное состояние $|\Phi_i\rangle$ не зависит от времени. Оно соответствует частицам, находящимся далеко друг от друга и поэтому не взаимодействующим между собой. Так как вектор состояния невзаимодействующих частиц не зависит от времени, то удобно приписывать начальному состоянию время $t = -\infty$, т. е. относить его в далекое прошлое. Таким образом, $|\Phi_i\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} |\Psi(t)\rangle$, где $|\Psi(t)\rangle$ — вектор состояния в картине Дирака, описывающий развитие системы. Начальное состояние $|\Phi_i\rangle$ является нормируемым состоянием волнового пакета и представимо в виде суперпозиции собственных состояний H_0 . В пределе плоских волн $|\Phi_i\rangle \rightarrow |\varphi_a\rangle$. Не зависит от времени и вектор состояния частиц после взаимодействия, когда они свободно движутся и находятся далеко друг от друга. Этот вектор состояния определяется поэтому как $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Psi(t)\rangle$.

Амплитуда рассеяния из начального состояния $|\Phi_i\rangle$ в некоторое конечное состояние $|\Phi_f\rangle$, которое снова является нормируемым состоянием свободно движущихся частиц с определенными импульсами и проекциями спина, дается выражением

$$\lim_{t_2 \rightarrow \infty} \langle \Phi_f | \Psi(t_2) \rangle = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \langle \Phi_f | U(t_2, t_1) | \Phi_i \rangle. \quad (11.60)$$

В пределе плоских волн, т. е. когда $|\Phi_i\rangle \rightarrow |\varphi_a\rangle$ и $|\Phi_f\rangle \rightarrow |\varphi_b\rangle$, для этой амплитуды будет принято обозначение

$$S_{ba} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} (\varphi_b | U(t_2, t_1) | \varphi_a). \quad (11.61)$$

Она соответствует амплитуде вероятности перехода системы из начального состояния $|\varphi_a\rangle$ в момент времени $t = -\infty$ в конечное состояние $|\varphi_b\rangle$ в момент времени $t = +\infty$. Оператор S , матричные элементы которого между начальным и конечным состояниями $|\varphi_a\rangle$ и $|\varphi_b\rangle$ соответствуют амплитуде перехода между этими состояниями, называют S -матрицей, или матрицей рассеяния. Такая матрица рассеяния была впервые введена Уилером [841] в 1937 г. в связи с проблемами структуры ядер рассеяния. В 1943 г. она была вновь очень подробно исследована Гейзенбергом [371, 372] в связи с теорией элементарных частиц.

Можно проследить, что ход мыслей, приведший Гейзенберга к рассмотрению S -матрицы, связан с его убеждением [364, 370], что свойственные релятивистским теориям поля трудности с расходимостями можно обойти введением новой фундаментальной постоянной с размерностью длин. Гейзенберг полагает, что эта новая постоянная должна играть ту же роль в ограничении применимости квантовой теории поля, что и постоянная Планка \hbar в ограничении применимости классической механики к атомным системам.

В обычной квантовой механике атомная система полностью определяется гамильтонианом системы. Однако предположение о гамильтониане подразумевает возможность построения непрерывного оператора временного сдвига для волновой функции, что представляется противоречащим существованию фундаментальной длины. Поэтому Гейзенберг отказывается от понятий уравнения Шредингера и гамильтониана. Пытаясь выявить, какого рода операторы и функции должны заменить эти понятия, он приходит к вопросу о том, какие величины в имеющихся формулировках теории поля все еще будут оставаться наблюдаемыми и в будущей «правильной» теории, т. е. какие наблюдаемые величины не зависят от существования фундаментальной длины. Гейзенберг считает, что любой теорией должны описываться следующие наблюдаемые величины:

- 1) энергия и импульс свободных частиц;
- 2) дискретные энергетические уровни замкнутых стационарных систем;
- 3) асимптотическое поведение волновых функций, описывающих процессы столкновения, испускания и поглощения частиц (что позволяет вычислить эффективное сечение таких процессов).

Чтобы поставить во главу угла в новой теории эффективные сечения процессов и другие наблюдаемые (которые могут быть вычислены при наличии гамильтониана), Гейзенберг вводит некоторую унитарную матрицу S и выражает надежду, что с помощью этой S -матрицы можно будет находить вероятности переходов и наблюдаемые свойства связанных состояний. В его исходной статье S -матрица определяется как оператор, преобразующий начальное состояние в конечное. Гейзенберг полагает, что в будущей теории S -матрица возьмет на себя ту роль, которую сейчас играет гамильтониан. Теория S -матрицы Гейзенберга получила дальнейшее развитие в работах Мёллера [560, 561], Штюкельберга [748, 749] и особенно Лемана, Симанзика и Циммермана [493], которые дали наиболее сжатую и четкую ее формулировку в рамках релятивистской квантовой теории поля. Мы вернемся к их работе в гл. 18.

Связь S -матрицы с обычной формой квантовой теории и ее использование при вычислении эффективных сечений и других наблюдаемых обсуждалась во многих статьях, особенно в работе Лапшмана и Швингера [503]. Превосходный обзор применений S -матрицы к теории рассеяния был дан Гелл-Манном и Голдбергером [302] и Бренигом и Хаагом [85].

Чтобы получить различные выражения для амплитуды рассеяния S_{ba} , докажем сначала следующую теорему:

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(0, t_0) |\varphi_a\rangle = |\psi_a^+\rangle, \quad (11.62)$$

т. е. докажем, что при действии оператора $U(0, -\infty)$ на собственное состояние $|\varphi_a\rangle$ гамильтониана H_0 оно переходит в состояние $|\psi_a^+\rangle$, которое является собственным состоянием полного гамильтониана H . При доказательстве (см. [353]) будет использовано состояние волнового пакета

$$|\Phi_i\rangle = \int da |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a | \Phi_i\rangle, \quad (11.63)$$

где коэффициенты разложения существенно отличны от нуля для состояний, близких к некоторому состоянию \hat{a} . Сначала получим выражение для $U(0, t_0) |\Phi_i\rangle$:

$$\begin{aligned} U(0, t_0) |\Phi_i\rangle &= e^{iHt_0} e^{-iH_0 t_0} |\Phi_i\rangle = \\ &= e^{iHt_0} \int da e^{-iE_a t_0} |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a | \Phi_i\rangle, \end{aligned} \quad (11.64)$$

в котором можно легко переходить к пределу $t \rightarrow -\infty$. Чтобы найти результат действия оператора $\exp(iHt_0)$ на вектор состояния $|\varphi_a\rangle$ в (11.64), разложим $|\varphi_a\rangle$ по полной системе $\{|\psi_a^+\rangle\} + \{|\psi_\beta\rangle\}$:

$$|\varphi_a\rangle = \int dc |\psi_c^+\rangle \langle \psi_c^+ | \varphi_a\rangle + \sum_\beta |\psi_\beta\rangle \langle \psi_\beta | \varphi_a\rangle \quad (11.65)$$

[ср. последовательность рассуждений, которые привели к формуле (11.21)]. Тогда

$$\begin{aligned} U(0, t_0) |\Phi_i\rangle &= \int dc \int da e^{i(E_c - E_a)t_0} \langle \varphi_a | \Phi_i\rangle \langle \psi_c^+ | \varphi_a\rangle |\psi_c^+\rangle + \\ &+ \sum_\beta \int da e^{i(E_\beta - E_a)t_0} \langle \varphi_a | \Phi_i\rangle \langle \psi_\beta | \varphi_a\rangle |\psi_\beta\rangle. \end{aligned} \quad (11.66)$$

Согласно уравнению (11.41),

$$\langle \psi_c^+ | \varphi_a\rangle = \delta(c - a) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\langle \psi_c^+ | V | \varphi_a\rangle}{E_c - E_a - i\varepsilon}. \quad (11.67)$$

Подставляя это выражение для $\langle \psi_c^+ | \varphi_a\rangle$ в (11.66), находим

$$\begin{aligned} U(0, t_0) |\Phi_i\rangle &= \int da \langle \varphi_a | \Phi_i\rangle \psi_a^+ + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int da \langle \varphi_a | \Phi_i\rangle \int dc_0 \int dE_c \frac{e^{i(E_c - E_a)t_0}}{E_c - E_a - i\varepsilon} \langle \psi_c^+ | V | \varphi_a\rangle |\psi_c^+\rangle + \\ &+ \sum_\beta \int da e^{i(E_\beta - E_a)t_0} \langle \varphi_a | \Phi_i\rangle \langle \psi_\beta | \varphi_a\rangle |\psi_\beta\rangle. \end{aligned} \quad (11.68)$$

При этом предположено, что энергия E_c во втором члене правой части соотношения (11.68) принадлежит полному набору наблюдаемых s , т. е.

$c = \{E_c, c_0\}$ и $\int dc = \int dE_c \int dc_0$. В последний член соотношения (11.68) можно подставить вместо $\langle \psi_\beta | \varphi_a \rangle$ выражение

$$\langle \psi_\beta | \varphi_a \rangle = \frac{\langle \psi_\beta | V | \varphi_a \rangle}{E_\beta - E_a}, \quad (11.69)$$

поскольку

$$\langle \psi_\beta | V | \varphi_a \rangle = \langle \psi_\beta | H - H_0 | \varphi_a \rangle = (E_\beta - E_a) \langle \psi_\beta | \varphi_a \rangle \quad (11.70)$$

и, по предположению, $E_\beta - E_a \neq 0$. Теперь нас интересует предел $U(0, t_0) | \Phi_i \rangle$, когда t_0 стремится к $-\infty$. Покажем, что в этом пределе второй и третий члены равны нулю. Эвристическое доказательство этого утверждения заключается в следующем: запишем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{i(E_c - E_a)t_0}}{E_c - E_a - i\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{i(E_c - E_a - i\varepsilon)t_0} \int_{-\infty}^0 e^{i(E_c - E_a - i\varepsilon)t'} dt' = \\ &= i \int_{-\infty}^0 e^{i(E_c - E_a - i\varepsilon)(t_0 + t')} dt' = i \int_{-\infty}^{t_0} e^{i(E_c - E_a - i\varepsilon)\tau} d\tau, \end{aligned} \quad (11.71)$$

откуда

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{e^{i(E_c - E_a)t_0}}{E_c - E_a - i\varepsilon} = 0, \quad (11.72a)$$

поэтому второй член в правой части равенства (11.68) исчезает в пределе $t \rightarrow -\infty$. Между прочим, из равенства (11.71) можно также заключить, что

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \frac{e^{i(E_c - E_a)t_0}}{E_c - E_a - i\varepsilon} = 2\pi i \delta(E_c - E_a). \quad (11.72b)$$

Этот результат можно получить более строгим способом, заменяя переменную E_c на $x = (E_a - E_c)t_0$. В пределе $t_0 \rightarrow -\infty$ интегрирование по x проводится в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, поскольку E_c может быть как больше, так и меньше E_a . Тогда интегрирование по x может быть проведено путем замыкания контура интегрирования в нижней половине комплексной x -плоскости. При этом интеграл равен нулю, так как единственный полюс подынтегрального выражения лежит в верхней полуплоскости (см., например, [353]). Заметим далее, что при подстановке выражения (11.69) в равенство (11.68) знаменатель третьего члена этого равенства нигде не обращается в нуль, так как спектр E_β не перекрывается с непрерывным спектром. Поэтому, согласно лемме Римана — Лебега, третий член равенства (11.69) в пределе $t_0 \rightarrow -\infty$ равен нулю. Таким образом,

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(0, t_0) | \Phi_i \rangle = \int da \langle \varphi_a | \Phi_i \rangle \psi_a^\dagger \quad (11.73)$$

и в пределе плоской волны

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(0, t_0) | \varphi_a \rangle = | \psi_a^\dagger \rangle. \quad (11.74)$$

Вследствие нормируемости состояния $| \Phi_i \rangle$ произведения $\langle \varphi_a | \Phi_i \rangle$ являются хорошими функциями от a , что, как следует отметить, было существенно использовано при доказательстве соотношения (11.73). Это позво-

лило применить лемму Римана — Лебега, которая гарантирует равенство нулю в пределе $t \rightarrow \pm \infty$ выражений вида $\int \exp(-ixt) f(x) dx$ с непрерывными функциями $f(x)$.

При вычислениях часто заменяют использование волновых пакетов математическим приемом, состоящим в замене потенциала $V(t)$ на $V_\varepsilon(t)$:

$$V(t) \rightarrow V_\varepsilon(t) = e^{-\varepsilon|t|}V(t), \quad (11.75)$$

причем в пределе $t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} H_\varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (H_0 + e^{-\varepsilon|t|}V(t)) = H_0 \quad (11.76)$$

$[V_\varepsilon(t)$ называют «adiaбатическим потенциалом»]. Тогда состояние $|\Psi_\varepsilon(t)\rangle$, которое развивается из состояния $|\varphi_a\rangle$ при $t = -\infty$ в результате влияния потенциала $V_\varepsilon(t)$, удовлетворяет интегральному уравнению

$$|\Psi_\varepsilon(t)\rangle = |\varphi_a\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t e^{-\varepsilon|t'|}V(t')|\Psi_\varepsilon(t')\rangle dt'. \quad (11.77)$$

Уравнение (11.77) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$i\hbar\partial_t|\Psi_\varepsilon(t)\rangle = e^{-\varepsilon|t|}V(t)|\Psi_\varepsilon(t)\rangle \quad (11.78)$$

с граничным условием $|\Psi_\varepsilon(t = -\infty)\rangle = |\varphi_a\rangle$. В частности, $|\Psi_\varepsilon(0)\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$|\Psi_\varepsilon(0)\rangle = |\varphi_a\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 dt' e^{\varepsilon t'} e^{iH_0 t'} V e^{-iH_0 t'} |\Psi_\varepsilon(t')\rangle. \quad (11.79)$$

Явное представление для $|\Psi_\varepsilon(0)\rangle$ может быть получено путем подстановки в правую часть уравнения (11.79) выражения (11.77) для $|\Psi_\varepsilon(t')\rangle$:

$$\begin{aligned} |\Psi_\varepsilon(0)\rangle &= |\varphi_a\rangle + \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V |\varphi_a\rangle + \\ &+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^0 dt' e^{\varepsilon t'} e^{iH_0 t'} V e^{-iH_0 t'} \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{\varepsilon t''} e^{iH_0 t''} V e^{-iH_0 t''} |\Psi_\varepsilon(t'')\rangle. \end{aligned} \quad (11.80)$$

Снова подставляя выражение (11.77) для $|\Psi_\varepsilon(t'')\rangle$ в правую часть уравнения (11.80) и продолжая затем эту итерационную процедуру, находим

$$\begin{aligned} |\Psi_\varepsilon(0)\rangle &= |\varphi_a\rangle + \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V |\varphi_a\rangle + \\ &+ \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V |\varphi_a\rangle + \dots = \\ &= |\varphi_a\rangle + \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V |\Psi_\varepsilon(0)\rangle. \end{aligned} \quad (11.81)$$

Отсюда, сравнивая уравнения (11.81) и (11.41а), находим

$$|\Psi_\varepsilon(0)\rangle = |\psi_a^+\rangle. \quad (11.82)$$

Другими словами, решение зависящего от времени уравнения (11.77) $|\Psi_\varepsilon(t)\rangle$ позволяет вычислить $|\psi_a^+\rangle$. Введение «adiaбатического» потенциала позволяет во всех вычислениях обойти трудности со сходимостью, которые

имеются, когда уравнение (11.77) не содержит множителя $\exp(-\varepsilon|t|)$. Переходить к пределу $\varepsilon \rightarrow 0^+$ следует только в самом конце вычислений.

Подобным же образом, используя полную систему состояний $\{|\psi_{\bar{b}}\rangle\} + \{|\psi_{\bar{b}}\rangle\}$, убеждаемся, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(0, t) |\varphi_a\rangle = |\psi_{\bar{a}}\rangle. \quad (11.83)$$

С помощью этих результатов, в частности соотношений (11.83) и (11.74), можно выразить амплитуду рассеяния в виде

$$\begin{aligned} S_{ba} &= (\varphi_b, S\varphi_a) = \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \lim_{|\Phi_i\rangle \rightarrow |\varphi_a\rangle} (\varphi_b | U(t_2, t_1) | \Phi_i) = \\ &= \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} (\varphi_b, U(t_2, 0) U(0, t_1) \varphi_a) = \\ &= \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} (U^*(t_2, 0) \varphi_b, U(0, t_1) \varphi_a) = \\ &= \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} (U(0, t_2) \varphi_b, U(0, t_1) \varphi_a) = \\ &= (\psi_{\bar{b}}, \psi_a^*). \end{aligned} \quad (11.84)$$

Соотношения (11.84) для элементов S -матрицы будут играть важную роль в приложениях теории поля. Их значение заключается в том, что ин-состояние $|\psi^+\rangle$ и аут-состояние $|\psi^-\rangle$ могут быть определены без разложения гамильтониана H на невозмущенную и зависящую от возмущения части $H_0 + V$. Отметим также, что в картине Дирака S -матрица может быть записана в виде

$$S = U(\infty, -\infty). \quad (11.85)$$

Выражение для S_{ba} -матрицы может быть записано и другим образом, если заметить, что

$$\begin{aligned} S_{ba} &= \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} (\varphi_b, U(t_2, 0) U(0, t_1) \varphi_a) = \\ &= \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} (\varphi_b, e^{iH_0 t_2} e^{-iH t_2} \psi_a^+) = \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} e^{i(E_b - E_a)t_2} (\varphi_b, \psi_a^+) = \\ &= \delta(a - b) + \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{e^{i(E_b - E_a)t_2}}{E_b - E_a + i\varepsilon} (\varphi_b, V\psi_a^+) = \\ &= \delta(a - b) - 2\pi i \delta(E_a - E_b) R_{ba}, \end{aligned} \quad (11.86)$$

где

$$R_{ba} = (\varphi_b, V\psi_a^+) = (\varphi_b, R\varphi_a) \quad (11.87)$$

называют матричным элементом матрицы реакции, или R -матрицы. Амплитуда R_{ba} удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} R_{ba} &= (\varphi_b, V\psi_a^+) = (\varphi_b, V\varphi_a) + \left(\varphi_b, V \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V\psi_a^+ \right) = \\ &= V_{ba} + \sum_c \left(\varphi_b, V \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} \varphi_c \right) (\varphi_c, V\psi_a^+) = \\ &= V_{ba} + \sum_c \frac{V_{bc} R_{ca}}{E_a - E_c + i\varepsilon}, \end{aligned} \quad (11.88)$$

которое может быть решено методом итераций

$$R_{ba} = V_{ba} + \sum_c \frac{V_{bc} V_{ca}}{E_a - E_c + i\varepsilon} + \dots \quad (11.89)$$

R -матрица связана с важной величиной — вероятностью перехода в единицу времени.

Увеличение в единицу времени вероятности того, что система, первоначально находящаяся в состоянии a , в момент времени t будет найдена в состоянии b , дается формулой

$$\omega_{ba} = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{d}{dt} |(\varphi_b, U(t, t_0) \varphi_a)|^2. \quad (11.90)$$

Отметим, что это выражение не зависит от t .

Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |(\varphi_b, U(t, t_0) \varphi_a)|^2 &= \\ &= \frac{d}{dt} \{(\varphi_b, U(t, t_0) \varphi_a) \overline{(\varphi_b, U(t, t_0) \varphi_a)}\} = \\ &= \frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} \{(\varphi_b, V(t) U(t, t_0) \varphi_a) \overline{(\varphi_b, U(t, t_0) \varphi_a)}\} = \\ &= \frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} \{(\varphi_b, V(t) U(t, 0) U(0, t_0) \varphi_a) \overline{(\varphi_b, U(t, 0) U(0, t_0) \varphi_a)}\}, \end{aligned} \quad (11.91a)$$

что в пределе $t_0 \rightarrow -\infty$ переходит в

$$\begin{aligned} \omega_{ba} &= \frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} \{(\varphi_b, e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t_0} e^{-iH t} \psi_a^+) \overline{(\varphi_b, e^{iH_0 t} e^{-iH t} \psi_a^+)}\} = \\ &= \frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} \{(\varphi_b, V \psi_a^+) \overline{(\varphi_b, \psi_a^+)}\} = \\ &= \frac{2}{\hbar} \delta(b-a) \operatorname{Im} R_{ba} + \frac{2}{\hbar} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} \frac{|R_{ba}|^2}{E_a - E_b - i\varepsilon} = \\ &= \frac{2}{\hbar} \delta(b-a) \operatorname{Im} R_{ba} + \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_a - E_b) |R_{ba}|^2, \end{aligned} \quad (11.91b)$$

причем мы использовали уравнение (11.41) и следующее формальное представление δ -функции:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx - \varepsilon|k|} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{x - i\varepsilon} - \frac{1}{x + i\varepsilon} \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (11.92)$$

Дифференциальное сечение σ_{ab} перехода $a \rightarrow b$ ($a \neq b$) равно вероятности перехода в единицу времени, деленной на поток падающих частиц:

$$\sigma_{ab} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\delta(E_a - E_b) |R_{ba}|^2}{\text{Поток}}. \quad (11.93)$$

В действительности всегда интересуются только переходами в некоторую группу конечных состояний с энергией в интервале между E_b и $E_b + dE_b$ и плотностью ϱ_f . Поэтому интересующая нас вероятность перехода

в единицу времени дается формулой

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{\hbar} \int_{\substack{\text{По заданным} \\ \text{конечным} \\ \text{состояниям}}} db \omega_{ba} = \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \int dE_b \delta(E_b - E_a) |R_{ba}|^2 Q_f(E_b) = \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} |R_{ba}|^2 Q_f(E_b) \Big|_{E_b=E_a}. \end{aligned} \quad (11.94)$$

Чтобы найти эффективное сечение перехода, нужно снова ее разделить на поток.

Сохранение вероятности требует, чтобы переходы из состояния a компенсировались соответствующим убыванием амплитуды состояния a , или, более точно, чтобы

$$\int db \omega_{ba} = 0, \quad (11.95)$$

причем при интегрировании учитывается и состояние $b = a$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \int db \omega_{ba} &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{d}{dt} \int db \langle \varphi_b | U(t, t_0) | \varphi_a \rangle \langle \varphi_a | U(t_0, t) | \varphi_b \rangle = \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{d}{dt} (\varphi_a, U(t_0, t) U(t, t_0) \varphi_a) = \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{d}{dt} (\varphi_a, \varphi_a) = 0. \end{aligned} \quad (11.96)$$

Конечно, соотношение (11.95) равносильно требованию сохранения нормы вектора состояния $|\Psi(t)\rangle$. Подставляя в (11.95) выражение (11.91б), получаем

$$2 \operatorname{Im} R_{aa} = -2\pi \int db \delta(E_a - E_b) |R_{ba}|^2. \quad (11.97)$$

В правой части соотношения (11.97) можно пренебречь вкладом от состояния a . Поэтому $\operatorname{Im} R_{aa}$ пропорционально $\sum_{b \neq a} \sigma_{ab}$, т. е. полному эффективному сечению. Соотношение (11.97) известно под именем оптической теоремы; оно будет использовано при обсуждении дисперсионных соотношений.

§ 4. Унитарность S -матрицы

Докажем теперь, что S -матрица унитарна. Мы видели, что

$$U(0, \pm \infty) | \varphi_a \rangle = | \psi_a^\mp \rangle, \quad (11.98)$$

или эквивалентно

$$U(0, \pm \infty) = \sum_a | \psi_a^\mp \rangle \langle \varphi_a | = \Omega^{(\mp)}, \quad (11.99)$$

где мы обозначили оператор $U(0, \pm \infty)$ через $\Omega^{(\mp)}$. Последнюю величину часто называют волновой матрицей Мёллера [560]. Она преобразует состояние $|\varphi_a\rangle$, принадлежащее непрерывному спектру свободного гамильтониана H_0 , $H_0|\varphi_a\rangle = E_a|\varphi_a\rangle$, в принадлежащие непрерывному спектру

полного гамильтониана H собственные состояния $|\psi_a^\pm\rangle$, $H|\psi_a^\pm\rangle = E_a|\psi_a^\pm\rangle$. Этому свойству $\Omega^{(\pm)}$ можно придать четкую и сжатую формулировку, если заметить, что

$$\Omega^{(\pm)} = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} U(0, t) = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{+iHt} e^{-iH_0 t}. \quad (11.100)$$

Поэтому при каждом конечном t_0

$$e^{iHt_0} \Omega^{(\pm)} e^{-iH_0 t_0} = \Omega^{(\pm)}, \quad (11.101)$$

откуда следует формула, которую мы хотели получить

$$H \Omega^{(\pm)} = \Omega^{(\pm)} H_0. \quad (11.102)$$

S -матрица выражается через $\Omega^{(+)}$ и $\Omega^{(-)}$ в виде

$$\begin{aligned} S &= U(\infty, -\infty) = U(\infty, 0) U(0, -\infty) = \\ &= U^*(0, \infty) U(0, -\infty) = \\ &= \Omega^{(-)*} \Omega^{(+)}. \end{aligned} \quad (11.103)$$

Следует отметить, что волновая матрица $\Omega^{(\pm)}$ не унитарна, так как хотя

$$\begin{aligned} \Omega^{(\pm)*} \Omega^{(\pm)} &= \sum_{ab} |\varphi_a\rangle \langle \psi_a^\pm | \psi_b^\pm \rangle \langle \varphi_b | = \\ &= \sum_{ab} |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a | = 1, \end{aligned} \quad (11.104)$$

но

$$\begin{aligned} \Omega^{(\pm)} \Omega^{(\pm)*} &= \sum_{ab} |\psi_a^\pm\rangle \langle \varphi_a | \varphi_b \rangle \langle \psi_b^\pm | = \\ &= \sum_a^b |\psi_a^\pm\rangle \langle \psi_a^\pm | = 1 - \sum_\beta |\psi_\beta\rangle \langle \psi_\beta | = \\ &= 1 - \Lambda, \end{aligned} \quad (11.105)$$

где Λ — оператор проектирования на связанные состояния полного гамильтониана H . Эти результаты означают, что ¹⁾

$$\Omega^{(\pm)*} |\psi_\beta\rangle = 0 \quad \text{или} \quad \Omega^{(\pm)*} \Lambda = 0, \quad (11.106a)$$

$$\Omega^{(\pm)*} |\psi_a^\pm\rangle = |\varphi_a\rangle. \quad (11.106b)$$

Вместе с тем для S -матрицы мы находим

$$\begin{aligned} SS^* &= [\Omega^{(-)*} \Omega^{(+)}]^* \Omega^{(-)*} \Omega^{(+)} = \\ &= \Omega^{(+)*} (1 - \Lambda) \Omega^{(+)} = \Omega^{(+)*} \Omega^{(+)} = \\ &= 1 \end{aligned} \quad (11.107)$$

и

$$SS^* = \Omega^{(-)*} \Omega^{(+)} \Omega^{(+)*} \Omega^{(-)} = 1. \quad (11.108)$$

¹⁾ Отметим, что если H_0 имеет также и дискретный спектр, и условие полноты его собственных состояний есть $\sum_a |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a | + \sum_\beta |\varphi_\beta\rangle \langle \varphi_\beta | = 1$, то в правой части равенства (11.104) появится $1 - \Lambda_0$, где Λ_0 — оператор проектирования на пространство, натянутое на собственные состояния дискретного спектра H_0 .

Следовательно, S -матрица унитарна. В частности, матричный элемент от равенства (11.108) между состояниями b и d равен

$$\sum_c S_{bc} (S^*)_{cd} = \delta(b-d). \quad (11.109)$$

При подстановке в это равенство выражения (11.86) для S -матрицы оказывается, что из унитарности S -матрицы вытекает уравнение для R -матрицы

$$R_{ba} - R_{ba}^* = 2\pi i \sum_c \delta(E_c - E_a) R_{bc} R_{cd}^* \quad (E_a = E_b), \quad (11.110)$$

которое справедливо только при $E_a = E_b$. При $b = a$ уравнения (11.110) и (11.97) совпадают.

Чтобы сделать явной связь между унитарностью S -матрицы и эрмитовостью гамильтониана H , и, в частности, взаимодействия V , заметим, что

$$V_{ba} = \langle \Psi_b | V | \Phi_a \rangle = \sum_c \langle \Phi_b | V | \Psi_c^* \rangle \langle \Psi_c^* | \Phi_a \rangle + \sum_\beta \langle \Phi_b | V | \Psi_\beta \rangle \langle \Psi_\beta | \Phi_a \rangle. \quad (11.111)$$

Используя равенства (11.67), (11.69) и (11.87), можно переписать соотношение (11.111) в виде

$$V_{ba} = R_{ba} - \sum_c \frac{R_{bc} \overline{R_{ac}}}{E_c - E_a - i\varepsilon} + \sum_\beta (E_\beta - E_b) \langle \Phi_b | \Psi_\beta \rangle \langle \Psi_\beta | \Phi_a \rangle. \quad (11.112)$$

Аналогично,

$$\overline{V_{ab}} = \overline{R_{ab}} - \sum_c \frac{\overline{R_{ac}} R_{bc}}{E_c - E_b + i\varepsilon} + \sum_\beta (E_\beta - E_a) \langle \Psi_\beta | \Phi_a \rangle \langle \Phi_b | \Psi_\beta \rangle. \quad (11.113)$$

Если V — эрмитов оператор, $V = V^*$, то $\overline{V_{ab}} = V_{ba}$, и мы получаем

$$R_{ba} - \overline{R_{ab}} = \sum_c \left(\frac{R_{bc} \overline{R_{ac}}}{E_c - E_a - i\varepsilon} - \frac{\overline{R_{ac}} R_{bc}}{E_c - E_b + i\varepsilon} \right) + \sum_\beta (E_b - E_a) \langle \Psi_\beta | \Psi_\beta \rangle \langle \Psi_\beta | \Phi_a \rangle. \quad (11.114)$$

При $E_b = E_a$ уравнение (11.114) сводится к уравнению (11.110). Уравнение (11.114) приобрело известность как уравнение Лоу [512].

В заключение этого параграфа выпишем интегральное уравнение, определяющее развитие во времени волновой функции связанного состояния. Прежде всего заметим, что $U(t, 0)$ удовлетворяет уравнению

$$i\partial_t U(t, 0) = V(t) U(t, 0), \quad (11.115)$$

которое может быть преобразовано путем интегрирования к виду

$$U(t, 0) = \Omega^{(+)*} - i \int_{-\infty}^t dt' V(t') U(t', 0), \quad (11.116)$$

поскольку $U(-\infty, 0) = \Omega^{(+)*}$. Введем вектор состояния $|\Psi_\beta(t)\rangle$, связанный с вектором связанного состояния $|\Psi_\beta\rangle$ соотношением

$$|\Psi_\beta(t)\rangle = U(t, 0) |\Psi_\beta\rangle. \quad (11.117)$$

Так как $\Omega^{(+)*} |\Psi_\beta\rangle = 0$ [формула (11.106)], то $|\Psi_\beta(t)\rangle$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению

$$|\Psi_\beta(t)\rangle = -i \int_{-\infty}^t dt' V(t') |\Psi_\beta(t')\rangle. \quad (11.118)$$

Уравнение (11.118) следует сопоставить с неоднородным интегральным уравнением (11.77), решения которого описывают рассеяние.

§ 5. R -матрица

Кроме ин- и аут-решений $|\psi_a^\pm\rangle$, можно определить решения $|\psi_a^1\rangle$, соответствующие стоячей волне, которые удовлетворяют уравнению

$$|\psi_a^1\rangle = |\varphi_a\rangle + P \frac{1}{E_a - H_0} V |\psi_a^1\rangle, \quad (11.119)$$

где символ P означает главное значение. Введем затем операторы $R^{(\pm)}$ и K :

$$R_{ba}^{(\pm)} = (\varphi_b, R^{(\pm)} \varphi_a) = (\varphi_b, V \psi_a^\pm) \quad (11.120)$$

и

$$K_{ba} = (\varphi_b, K \varphi_a) = (\varphi_b, V \psi_a^1). \quad (11.121)$$

Заметим, что ранее мы обозначили $R_{ba}^{(+)}$ через R_{ba} . Определим также волновой оператор $\Omega^{(1)}$, соответствующий решениям $|\psi_a^1\rangle$, соотношением

$$|\psi_a^1\rangle = \Omega^{(1)} |\varphi_a\rangle. \quad (11.122)$$

Таким образом, оператор $\Omega^{(1)}$ при действии на неоднородный член уравнения (11.119) переводит его в решение этого уравнения. С учетом формального соотношения

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x) \quad (11.123)$$

из уравнений Липпмана — Швингера следует, что

$$|\psi_a^\pm\rangle = |\varphi_a\rangle + P \frac{1}{E_a - H_0} V |\psi_a^\pm\rangle \mp i\pi\delta(E_a - H_0) V |\psi_a^\pm\rangle. \quad (11.124)$$

Используя полноту системы состояний $|\varphi_a\rangle$, находим

$$V |\psi_a^\pm\rangle = \sum_b |\varphi_b\rangle \langle \varphi_b | V |\psi_a^\pm\rangle = \sum_b R_{ba}^{(\pm)} |\varphi_b\rangle, \quad (11.125)$$

так что уравнение (11.124) может быть записано в виде

$$|\psi_a^\pm\rangle = \left\{ |\varphi_a\rangle \mp i\pi \sum_b \delta(E_a - E_b) R_{ba}^{(\pm)} |\varphi_b\rangle \right\} + P \frac{1}{E_a - H_0} V |\psi_a^\pm\rangle. \quad (11.126)$$

Уравнение (11.126) имеет тот же вид, что и (11.119), исключая неоднородный член в скобках. Учитывая, что оператор $\Omega^{(1)}$ действует как функция Грина интегрального уравнения (11.119), можно записать

$$\begin{aligned} |\psi_a^\pm\rangle &= \Omega^{(1)} \left\{ |\varphi_a\rangle \mp i\pi \sum_b \delta(E_a - E_b) R_{ba}^{(\pm)} |\varphi_b\rangle \right\} = \\ &= |\psi_a^1\rangle \mp i\pi \sum_b \delta(E_a - E_b) R_{ba}^{(\pm)} |\psi_b^1\rangle. \end{aligned} \quad (11.127)$$

Подобным же образом можно проверить, что

$$|\psi_a^1\rangle = |\psi_a^\pm\rangle \mp i\pi \sum_b \delta(E_a - E_b) K_{ba} |\psi_a^\pm\rangle. \quad (11.128)$$

Если скалярно умножить уравнение (11.127) на $\langle \varphi_c | V$, то мы получим следующее соотношение между R - и K -матрицами:

$$R_{ba}^{(\pm)} = K_{ba} \mp i\pi \sum_c \delta(E_a - E_c) R_{ca}^{(\pm)} V_{bc}. \quad (11.129)$$

Определим операторы на энергетической поверхности $R^{(\pm)}$ и K соотношениями

$$R_{ba}^{(\pm)} = 2\pi\delta(E_b - E_a) R_{ba}^{(\pm)} \quad (11.130)$$

и

$$K_{ba} = 2\pi\delta(E_b - E_a) K_{ba} \quad (11.131)$$

(матрицу K называют матрицей реактанса, а матрицу R — матрицей реакции). На энергетической поверхности уравнение (11.129) переходит в

$$R^{(\pm)} = K \mp \frac{i}{2} KR^{(\pm)}. \quad (11.132)$$

Уравнение (11.132) известно как уравнение Гайтлера. Заметим, что матрицы $R^{(\pm)}$ и K имеют размерность энергии, а $R^{(\pm)}$ и K , как и S -матрица, безразмерны. Теперь S -матрица может быть определена соотношением

$$R^{(+)} = SR^{(-)}, \quad (11.133)$$

или эквивалентно

$$S = 1 - iR^{(+)} = (1 + iR^{(-)})^{-1}, \quad (11.134a)$$

т. е.

$$S = \frac{1 - \frac{i}{2} K}{1 + \frac{i}{2} K}. \quad (11.134b)$$

Из унитарности S -матрицы следует эрмитовость K -матрицы. Используя свойство ортогональности системы состояний $\{\psi_c^{\pm}\}$

$$\langle \psi_c^{\pm}, \psi_b^{\pm} \rangle = \delta(c - b) \quad (11.135)$$

и умножая скалярно уравнение (11.128) на $|\psi_a^{\pm}\rangle$, приходим к выводу, что

$$\langle \psi_a^{\pm}, \psi_b^{\pm} \rangle = \left(1 \pm \frac{i}{2} K \right)_{ab}. \quad (11.136)$$

Следовательно, $|\psi_a^{\pm}\rangle$ и $|\psi_b^{\pm}\rangle$ взаимно ортогональны, если только состояния a и b не имеют одну и ту же энергию. Заметим также, что

$$\langle \psi_a^{\pm}, \psi_b^{\pm} \rangle = \langle \psi_a^{\pm}, \psi_b^{\pm} \rangle. \quad (11.137)$$

Элементы S -матрицы даются выражением

$$\begin{aligned} \langle \psi_a^{\pm}, \psi_b^{\pm} \rangle &= \langle \psi_a^{\pm}, \psi_b^{\pm} \rangle - i\pi \sum_c \delta(E_a - E_b) R_{ca}^{(\pm)} \langle \psi_c^{\pm}, \psi_b^{\pm} \rangle = \\ &= \left(1 - \frac{i}{2} K \right)_{ab} - \frac{i}{2} \left(R^{(+)} - \frac{i}{2} KR^{(+)} \right)_{ab} = \\ &= (1 - iR^{(+)})_{ab} = S_{ab}, \end{aligned} \quad (11.138)$$

что подтверждает результат, полученный в нестационарной теории. Чтобы найти нормировку решений, соответствующих стоячей волне,

используем равенство (11.136) и полноту системы $\{\psi_c^{(+)}\} + \{\psi_\beta\}$:

$$\begin{aligned} (\psi_a^1, \psi_b^1) &= \sum_c (\psi_a^1, \psi_c^+) (\psi_c^+, \psi_b^1) + \sum_\beta (\psi_a^1, \psi_\beta) (\psi_\beta, \psi_b^1) = \\ &= \sum_c \left(1 - \frac{i}{2} \mathbf{K}\right)_{ac} \left(1 + \frac{i}{2} \mathbf{K}\right)_{cb} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{4} \mathbf{K}^2\right)_{ab}, \end{aligned} \quad (11.139)$$

где учтено, что состояния $|\psi_a^1\rangle$ и $|\psi_\beta\rangle$ взаимно ортогональны, поскольку они являются собственными функциями гамильтониана H , соответствующими различным собственным значениям ($E_a \neq E_\beta$).

§ 6. U -матрица

Как мы видели, формулировка задачи о рассеянии в картине Дирака имеет несомненные преимущества, поскольку в этой картине матрица рассеяния связана с оператором сдвига во времени $U(t, t_0)$ простым формальным соотношением

$$S = U(\infty, -\infty). \quad (11.140)$$

U -матрица подчиняется интегральному уравнению

$$U(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_I(t') U(t', t_0) dt', \quad (11.141)$$

которое эквивалентно дифференциальному уравнению

$$i\partial_t U(t, t_0) = H_I(t) U(t, t_0) \quad (11.142)$$

с граничным условием

$$U(t_0, t_0) = 1. \quad (11.143)$$

Если картины Дирака, Шредингера и Гейзенберга выбраны так, что они совпадают в момент времени $t = 0$, то матрица $U(t, t_0)$ дается формулой

$$U(t, t_0) = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0}, \quad (11.144)$$

которая делает очевидной унитарность $U(t, t_0)$ при конечных t и t_0 . В общем случае может быть определен оператор $\bar{U}(t, t_0; \tau)$, где τ — момент времени, в который картина Дирака совпадает с картиной Шредингера. Нам, однако, не придется пользоваться этим общим определением.

Групповое свойство

$$U(t_1, t_2) U(t_2, t_0) = U(t_1, t_0) \quad (11.145)$$

позволяет выразить конечное преобразование в виде произведения

$$U(t, t_0) = U(t, t_n) U(t_n, t_{n-1}) \dots U(t_2, t_1) U(t_1, t_0), \quad (11.146)$$

где $U(t_{j+1}, t_j)$ — преобразование от t_j к t_{j+1} . Далее, для случая, когда интервал между t_j и t_{j+1} очень мал, интегральное уравнение

(11.141) может быть приближенно представлено в виде

$$\begin{aligned} U(t_{j+1}, t_j) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt' H_I(t') U(t', t_j) \approx 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt' H_I(t') U(t_j, t_j) \approx \\ &\approx 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt' H_I(t'). \end{aligned} \quad (11.147)$$

Устремляя число интервалов между t_0 и t к бесконечности, получаем

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \\ &+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) + \dots \end{aligned} \quad (11.148)$$

Эта формула может быть получена также методом последовательных итераций уравнения (11.141), т. е. равенство (11.148) является разложением Неймана — Лиувилля для интегрального уравнения (11.141). Известно, что для обычных задач рассеяния это разложение сходится, если H_I — ограниченный оператор. В задачах теории поля сходимость должна быть исследована для каждой теории отдельно.

Рассмотрим теперь n -кратный интеграл

$$I_n = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n). \quad (11.149)$$

Дайсон [193; 194] заметил, что в этом выражении все интегрирования можно проводить по полному интервалу от t_0 до t , если наложить ограничение, чтобы t_j было меньше t_{j-1} ($j \leq n$). Другими словами, можно записать I_n в виде

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_1} dt_n \theta(t_1 - t_2) \theta(t_2 - t_3) \dots \theta(t_{n-1} - t_n) \times \\ &\times H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n), \end{aligned} \quad (11.150)$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда [$\theta(t) = +1$ при $t > 0$ и $\theta(t) = 0$ при $t < 0$]. Если допустима перестановка порядка интегрирования

$$\int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n f(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_P \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n f(t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_n}), \quad (11.151)$$

[где \sum_{1^P} — суммирование по всем перестановкам (t_1, \dots, t_n)], то интегралу I_n можно придать вид

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!} \sum_P \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_1} dt_n \theta(t_{\alpha_1} - t_{\alpha_2}) \dots \theta(t_{\alpha_{n-1}} - t_{\alpha_n}) \times \\ &\times H_I(t_{\alpha_1}) \dots H_I(t_{\alpha_n}) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_1} dt_n P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)). \end{aligned} \quad (11.152)$$

Оператор P определяется соотношением

$$P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) = \sum_P \theta(t_{\alpha_1} - t_{\alpha_2}) \dots \theta(t_{\alpha_{n-1}} - t_{\alpha_n}) H_I(t_{\alpha_1}) \dots H_I(t_{\alpha_n}) \quad (11.153a)$$

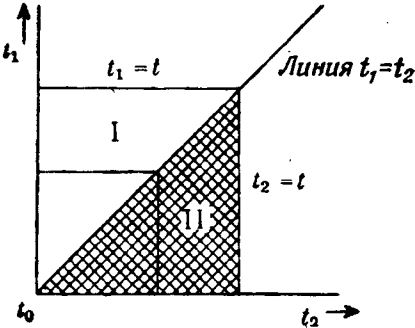
■ при действии на произведение зависящих от времени операторов обладает свойством упорядочивать расположение множителей таким образом, чтобы временные аргументы их убывали слева направо

$$P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) = H_I(t_i) \dots H_I(t_j) \dots H_I(t_k) \quad (11.153b)$$

$(t_i > \dots > t_j > \dots > t_k)$.

При равных временах P -произведение не определяется однозначно формулой (11.153a), так как не определено $\theta(0)$. Однако ясно, что $H_I(t)$ коммутирует сам с собой, поэтому можно записать

$$P(H_I(t) H_I(t)) = H_I(t) H_I(t). \quad (11.154)$$



Ф и г. 8.

В качестве поучительного примера дадим подробное доказательство равенства (11.152) для случая $n=2$:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 P(H_I(t_1) H_I(t_2)) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1). \quad (11.155)$$

На фиг. 8 область интегрирования для левой части равенства (11.155) является весь квадрат. С другой стороны, первый интеграл правой части берется по незатрихованному треугольнику I, тогда как второй интеграл — по затрихованному треугольнику II. Переставить операторные множители $H_I(t_2)$ и $H_I(t_1)$ нельзя, но, предполагая, что можно изменить порядок интегрирования, проинтегрируем сначала по t_1 . Тогда второй интеграл преобразуется в

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1). \quad (11.156)$$

Если теперь переобозначить переменные, т. е. заменить t_1 на t_2 и t_2 на t_1 , то можно записать выражение (11.156) в виде

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2), \quad (11.157)$$

так что

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 P(H_I(t_1) H_I(t_2)) = 2! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2). \quad (11.158)$$

Поэтому разложение (11.148) для $U(t, t_0)$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
 U(t, t_0) &= 1 + \frac{1}{1!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t dt_1 P(H_I(t_1)) + \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 P(H_I(t_1) H_I(t_2)) + \dots = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n P(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)), \quad (11.159)
 \end{aligned}$$

или, суммируя формально ряд, получаем

$$U(t, t_0) = P \left(e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_I(t') dt'} \right). \quad (11.160)$$

И действительно можно проверить, что разложение (11.159) является формальным решением уравнения (11.142). Для этого продифференцируем разложение (11.159) по t :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_{n-1} \times \\
 &\quad \times n H_I(t) P(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_{n-1})). \quad (11.161)
 \end{aligned}$$

При записи правой части равенства (11.161) использована симметрия подынтегрального выражения и тот факт, что t больше t_1, \dots, t_{n-1} . Поэтому можно вынести $H_I(t)$ за знак P -произведения и расположить его слева от остающихся множителей. После этого равенство (11.161) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} &= H_I(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^{n-1} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_{n-1} \times \\
 &\quad \times P(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_{n-1})) = \\
 &= H_I(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) = \\
 &= H_I(t) U(t, t_0); \quad (11.162)
 \end{aligned}$$

и доказательство, что $U(t, t_0)$ в самом деле является решением уравнения (11.7), завершено.

Чтобы получить S -матрицу для задач рассеяния, нужно в разложении (11.162) устремить начальный момент времени t_0 к $-\infty$, а t к $+\infty$. Однако при переходе к пределу следует соблюдать осторожность, так как в члене n -го порядка к пределу $t_0 \rightarrow -\infty$ можно перейти $n!$ способами. Кроме того, если для описания начального и конечного состояний не используются волновые пакеты, то должен быть дан рецепт, как усреднять члены, периодически зависящие от t_0 и t . Простейший способ

преодоления этих трудностей заключается в определении «адиабатической» U -матрицы при помощи замены $H_I(t)$ на $H_I(t) \exp(-\alpha|t|)$, причем переход к пределу $\alpha \rightarrow 0$ должен производиться только после выполнения всех интегрирований. Мы относимся к этой процедуре, как к удобному математическому приему, позволяющему нам работать с ненормируемыми состояниями, которые описывают плоские волны. Этот обеспечивающий сходимостью множитель устраняет также неоднозначность, связанную с порядком перехода к пределам $t \rightarrow \pm \infty$, и приводит к усреднению по $n!$ способам перехода к пределу.

Смысл введения множителя α становится яснее, если рассмотреть член второго порядка в разложении S -матрицы (11.148). Матричный элемент перехода между собственными состояниями $|a\rangle$ и $|b\rangle$ гамильтониана H_0 дается формулой

$$\langle b | S^{(2)} | a \rangle = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \langle b | H_I(t_1) H_I(t_2) | a \rangle. \quad (11.163)$$

Используя определение

$$H_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} H_{IS} e^{-iH_0 t/\hbar}, \quad (11.164)$$

где H_{IS} — оператор в картине Шредингера, и вводя полную систему собственных состояний H_0 между $H_I(t_1)$ и $H_I(t_2)$, получаем

$$\begin{aligned} \langle b | S^{(2)} | a \rangle &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \times \\ &\times e^{i(E_b - E_n)t_1/\hbar} e^{i(E_n - E_a)t_2/\hbar} \langle b | H_{IS} | n \rangle \langle n | H_{IS} | a \rangle. \end{aligned} \quad (11.165)$$

Если $|a\rangle$ есть состояние плоской волны, то интеграл по t_2 на нижнем пределе расходится. Для состояния волнового пакета $|\Phi_i\rangle = \int da c_a |a\rangle$, $\int da |c_a|^2 < \infty$, и вклад от нижнего предела $t_2 = -\infty$, согласно лемме Римана — Лебега, равен нулю. Равным образом, после замены $H_I(t)$ на $H_I(t) \exp(-\alpha|t|)$ мы получим

$$\langle b | S^{(2)} | a \rangle = -2\pi i \delta(E_a - E_b) \sum_n \frac{\langle b | H_{IS} | n \rangle \langle n | H_{IS} | a \rangle}{E_a - E_n + i\alpha}. \quad (11.166)$$

Можно показать, что вообще при $b \neq a$

$$\begin{aligned} \langle b | S | a \rangle &= -2\pi i \delta(E_a - E_b) \left\{ \langle b | H_{IS} | a \rangle + \sum_n \frac{\langle b | H_{IS} | n \rangle \langle n | H_{IS} | a \rangle}{E_a - E_n + i\alpha} + \right. \\ &+ \sum_{n_1, n_2, \dots, n_f} \frac{\langle b | H_{IS} | n_1 \rangle \langle n_1 | H_{IS} | n_2 \rangle \dots \langle n_f | H_{IS} | a \rangle}{(E_a - E_{n_1} + i\alpha)(E_a - E_{n_2} + i\alpha) \dots (E_a - E_{n_f} + i\alpha)} + \dots \left. \right\}, \end{aligned} \quad (11.167a)$$

что является хорошо знакомым результатом «старинной» теории возмущений. Равенство (11.167a) может быть также записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle b | S | a \rangle &= -2\pi i \delta(E_a - E_b) \left\{ \langle b | H_{IS} + H_{IS} \frac{1}{E_a - H_0 + i\alpha} H_{IS} + \dots | a \rangle \right\} = \\ &= -2\pi i \delta(E_a - E_b) R_{ba}, \end{aligned} \quad (11.167b)$$

т. е. получено соотношение (11.86) для случая $b \neq a$.

Мы снова напомним читателю, что намеченный только что в общих чертах формализм не может непосредственно применяться в случае квантовой теории поля, поскольку в этом случае взаимодействие H_I приводит также к сдвигам уровней, а именно, невозмущенный энергетический уровень E_a под влиянием H_I переходит в уровень $E_a + \Delta E_a$ (причем ΔE_a часто бывает бесконечным!). Применение разложения (11.159) в этом случае будет детально обсуждаться в гл. 12.

В качестве введения в формальную методику, применимую, когда H_I ответственно и за смещение уровня, выведем сейчас полезное соотношение между невозмущенными и возмущенными собственными состояниями из дискретного спектра [301, 755]; для простоты мы предположим, что они не вырождены. Пусть $|\beta_0\rangle$ является собственным состоянием H_0 с собственным значением ε

$$H_0 |\beta_0\rangle = \varepsilon |\beta_0\rangle, \quad (11.168)$$

и пусть $|\beta\rangle$ — собственное состояние $H = H_0 + \lambda H_I(0)$ с собственным значением E

$$H |\beta\rangle = E |\beta\rangle, \quad (11.169)$$

причем мы явно выразили зависимость гамильтониана взаимодействия от константы связи λ . Предполагая

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |\beta\rangle = |\beta_0\rangle, \quad (11.170)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} E = \varepsilon, \quad (11.171)$$

мы покажем, что

$$|\beta\rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_\alpha(0, \pm\infty) |\beta_0\rangle}{\langle \beta_0 | U_\alpha(0, \pm\infty) | \beta_0 \rangle} \quad (11.172)$$

и что ΔE дается выражением

$$\Delta E = E - \varepsilon = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1/2 i \hbar \alpha \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \langle \beta_0 | U_\alpha(\infty, -\infty) | \beta_0 \rangle}{\langle \beta_0 | S_\alpha | \beta_0 \rangle}. \quad (11.173)$$

В равенствах (11.172) и (11.173) U_α — это «adiaбатическая» матрица U , которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$i \partial_t U_\alpha(t, t_0) = \lambda e^{-\alpha |t|} H_I(t) U_\alpha(t, t_0) \quad (11.174)$$

$\alpha > 0.$

Доказательство: Введем обозначение

$$U_\alpha(0, -\infty) |\beta_0\rangle = |\beta_0; \alpha\rangle. \quad (11.175)$$

В силу соотношений (11.168) и (11.175)

$$[H_0, U_\alpha(0, -\infty)] |\beta_0\rangle = H_0 |\beta_0; \alpha\rangle - \varepsilon |\beta_0; \alpha\rangle. \quad (11.176)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} [H_0, U_\alpha(0, -\infty)] &= \left[H_0, \sum_n \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^0 dt_n e^{\alpha(t_1+t_2+\dots+t_n)} \times \right. \\ &\quad \times \lambda^n \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) \left. \right] = \\ &= -i \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^0 dt_n e^{\alpha(t_1+t_2+\dots+t_n)} \times \\ &\quad \times \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial t_l} P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) \end{aligned} \quad (11.177)$$

вследствие того, что в картине Дирака H_0 является оператором сдвига по времени, и для любого оператора $F(t)$ в этой картине имеет место соотношение

$$\frac{i}{\hbar} [H_0, F(t)] = \frac{\partial F(t)}{\partial t}. \quad (11.178)$$

Так как подынтегральное выражение в (11.177) симметрично, то $\sum_{i=1}^n \partial_{t_i} = n \partial_{t_1}$ и можно записать равенство (11.177) следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle H_0 - \varepsilon | \beta_0; \alpha \rangle &= \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i/\hbar)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda^n \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^0 dt_n \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{\alpha(t_1+t_2+\dots+t_n)} \frac{\partial}{\partial t_1} P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) \right\} | \beta_0 \rangle = \\ &= \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i/\hbar)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda^n \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^0 dt_2 \dots \int_{-\infty}^0 dt_n \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{\partial}{\partial t_1} (e^{\alpha(t_1+t_2+\dots+t_n)} P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n))) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha e^{\alpha(t_1+t_2+\dots+t_n)} P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) \right] \right\} | \beta_0 \rangle = \\ &= -\lambda H_I(0) U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle + i\hbar\alpha\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle, \quad (11.179) \end{aligned}$$

где второй член в правой части получен в предположении, что $H(0)$ линейно зависит от λ : $H = H_0 + \lambda H_I(0)$. Таким образом, мы показали, что

$$(H_0 + \lambda H_I(0) - \varepsilon) | \beta_0; \alpha \rangle = i\hbar\alpha\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} | \beta_0; \alpha \rangle. \quad (11.180)$$

Аналогично доказывается соотношение

$$(H - \varepsilon) U_\alpha(0, +\infty) | \beta_0 \rangle = -i\hbar\alpha \frac{\partial}{\partial \lambda} U_\alpha(0, +\infty) | \beta_0 \rangle. \quad (11.181)$$

Скалярно умножая соотношение (11.180) на $\langle \beta |$ и используя равенство $\langle \beta | H = E \langle \beta |$, получаем, что сдвиг уровня дается формулой

$$\Delta E = E - \varepsilon = i\hbar\alpha\lambda \frac{\langle \beta | \frac{\partial}{\partial \lambda} U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle}{\langle \beta | U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle}. \quad (11.182)$$

С другой стороны, используя (11.180), мы находим, что

$$\begin{aligned} \left(H - \varepsilon - i\hbar\alpha\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \frac{U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle}{\langle \beta_0 | U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle} = \\ = i\hbar\alpha\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \langle \beta_0 | U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle \right) \frac{U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle}{\langle \beta_0 | U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle}, \quad (11.183) \end{aligned}$$

и, вводя обозначение

$$| \beta' ; \alpha \rangle = \frac{U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle}{\langle \beta_0 | U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle}, \quad (11.184)$$

получаем

$$\langle \beta_0 | H - \varepsilon | \beta' ; \alpha \rangle = i\hbar\alpha\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} (\ln \langle \beta_0 | U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle). \quad (11.185)$$

Предполагая, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |\beta'; \alpha\rangle$ существует

$$|\beta'\rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} |\beta'; \alpha\rangle \quad (11.186)$$

после перехода в равенстве (11.183) к пределу $\alpha \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} (H - \varepsilon) |\beta'\rangle &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(i\hbar\alpha\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} \ln \langle \beta_0 | U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle \right) |\beta'\rangle = \\ &= \langle \beta_0 | H - \varepsilon | \beta'\rangle |\beta'\rangle. \end{aligned} \quad (11.187)$$

Так что $|\beta'\rangle$ есть собственная функция H , которая при $\lambda \rightarrow 0$ переходит в $|\beta_0\rangle$. Поэтому $|\beta'\rangle = |\beta\rangle$. Можно было бы провести аналогичное вычисление и для $U(0, +\infty)$, и тогда мы пришли бы к выводу, что и вообще

$$|\beta\rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_\alpha(0, \pm\infty) |\beta_0\rangle}{\langle \beta_0 | U_\alpha(0, \pm\infty) | \beta_0 \rangle}. \quad (11.188)$$

Следует подчеркнуть, что $U(0, +\infty) |\beta_0\rangle$ и $U(0, -\infty) |\beta_0\rangle$ сводятся к одному и тому же состоянию только в случае дискретного спектра. Действительно, мы видели, что в случае непрерывного спектра $U(0, \pm\infty) |\beta_0\rangle$ суть ин- и аут-состояния $|\Psi_\beta^\pm\rangle$, которые являются различными состояниями полного гамильтониана.

Подставляя в выражение (11.182) для сдвига уровня представление (11.188) для $\langle \beta |$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta E &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} i\hbar\alpha\lambda \frac{\langle \beta_0 | U_\alpha^{-1}(0, +\infty) \frac{\partial}{\partial\lambda} U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle}{\langle \beta_0 | S_\alpha | \beta_0 \rangle} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} i\hbar\alpha\lambda \frac{\langle \beta_0 | \frac{\partial}{\partial\lambda} U_\alpha(\infty, 0) \cdot U_\alpha(0, -\infty) | \beta_0 \rangle}{\langle \beta_0 | S_\alpha | \beta_0 \rangle} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2} i\hbar\alpha\lambda \frac{\frac{\partial}{\partial\lambda} \langle \beta_0 | U_\alpha(\infty, -\infty) | \beta_0 \rangle}{\langle \beta_0 | S_\alpha | \beta_0 \rangle}, \end{aligned} \quad (11.189)$$

что и требовалось доказать.

Простые модели в теории поля

В этой главе мы исследуем три системы взаимодействующих полей: 1) скалярное поле, взаимодействующее с нуклоном (без учета отдачи нуклона), 2) модель Ли и 3) модель Чу для взаимодействия мезонов с нуклонами. Два первых примера допускают точные решения для многих важных состояний соответствующих систем. Третий пример, модель Чу, хотя и не решается точно, объясняет многие важные черты рассеяния мезонов на нуклонах при низких энергиях. Анализ этих простых моделей даст нам понимание как результатов, так и проблем квантовой теории поля.

§ 1. Скалярное поле

Простейшая решаемая модель системы взаимодействующих полей состоит из нейтрального скалярного поля (мезонов), взаимодействующего с бесспиновыми фермионами («нуклонами»), энергия которых по предположению не зависит от импульса. Эта система полей описывается гамильтонианом

$$H = H_0 + H_I, \quad (12.1a)$$

$$H_0 = m_0 \int d\mathbf{p} \psi^*(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}) + \int d\mathbf{k} \omega(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}), \quad \omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}, \quad (12.1b)$$

$$H_I = \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} \int \frac{d\mathbf{k} f(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \psi^*(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \psi(\mathbf{p}) (a(\mathbf{k}) + a^*(-\mathbf{k})), \quad (12.1в)$$

где $\psi(\mathbf{p})$, $\psi^*(\mathbf{p})$ и $a(\mathbf{k})$, $a^*(\mathbf{k})$ — соответственно операторы уничтожения и рождения нуклонов и мезонов. Они удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$[\psi(\mathbf{p}), \psi^*(\mathbf{p}')]_+ = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (12.2a)$$

$$[\psi(\mathbf{p}), \psi(\mathbf{p}')]_+ = [\psi^*(\mathbf{p}), \psi^*(\mathbf{p}')]_+ = 0, \quad (12.2b)$$

$$[a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (12.3a)$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^*(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')] = 0, \quad (12.3b)$$

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{p}), a(\mathbf{k})] &= [\psi(\mathbf{p}), a^*(\mathbf{k})] = [\psi^*(\mathbf{p}), a(\mathbf{k})] = \\ &= [\psi^*(\mathbf{p}), a^*(\mathbf{k})] = 0. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Функция $f(k^2)$ описывает «протяженность» нуклона и играет роль обрезавшей функции. Предполагается, что она достаточно быстро спадает при больших $|k|$, чтобы все интегралы, встречающиеся в теории, были конечными. Так как энергия нуклона не зависит от его импульса, то влияние отдачи не учитывается, хотя импульс и сохраняется в силу трансляционной инвариантности гамильтониана. Иначе говоря, оператор полного импульса

$$P = \int d\mathbf{p} \mathbf{p} \psi^*(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}) + \int d\mathbf{k} \mathbf{k} a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \quad (12.5)$$

коммутирует с H . Оператор P является генератором пространственных сдвигов, причем

$$e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}} \psi(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}} = \psi(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{d}}, \quad (12.6a)$$

$$e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}} \psi^*(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}} = \psi^*(\mathbf{q}) e^{+i\mathbf{q} \cdot \mathbf{d}}, \quad (12.6b)$$

$$e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}} a(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}} = a(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}}, \quad (12.6в)$$

$$e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}} a^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}} = a^*(\mathbf{k}) e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}}. \quad (12.6г)$$

Полученный путем сдвига гамильтониан H' равен H , т. е.

$$H' = e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}} H e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}} = H. \quad (12.7)$$

Это служит доказательством трансляционной инвариантности H . Из (12.7) следует, что $[H, P] = 0$, т. е. гамильтониан (12.1) обеспечивает сохранение импульса.

Благодаря тому, что каждый член в H содержит по меньшей мере один оператор уничтожения, который может стоять правее всех операторов рождения, состояние вакуума $|0\rangle$, определенное соотношениями

$$\psi(\mathbf{p})|0\rangle = a(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \quad \text{для всех } \mathbf{p} \text{ и } \mathbf{k}, \quad (12.8)$$

является собственным состоянием H с собственным значением 0. Аналогично, одномезонное состояние $a^*(\mathbf{k})|0\rangle$ есть собственное состояние H с собственным значением $\omega_{\mathbf{k}}$. С другой стороны, $\psi^*(\mathbf{p})|0\rangle$ не является собственным состоянием H . Обозначим посредством $|\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle$ «физическое» однонуклонное состояние. Оно является собственным состоянием H , а также собственным состоянием P с собственным значением \mathbf{p} :

$$P |\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle = \mathbf{p} |\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle \quad (12.9)$$

и при константе связи λ , стремящейся к нулю, переходит в состояние $\psi^*(\mathbf{p})|0\rangle$. Чтобы получить явное выражение для этого состояния, заметим, что оператор

$$N_{\psi} = \int d\mathbf{p} \psi^*(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}) \quad (12.10)$$

коммутирует с H и, следовательно, также является интегралом движения. Он соответствует числу присутствующих тяжелых «квантов». Термин «кванты» мы используем для обозначения частиц, связанных с «голыми» полями, описываемыми гамильтонианом H_0 , в отличие от физических частиц, которые описываются собственными состояниями H . Если разложить $|\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle$ по «голым» состояниям, т. е. по собственным состояниям H_0 , тогда в разложении могут появиться состояния лишь с тем

же собственным значением N_ψ , что и у $|\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle$:

$$|\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^3q \int d^3k_1 \dots \int d^3k_n c_p^{(n)}(\mathbf{q}; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{n!}} a^*(\mathbf{k}_1) \dots a^*(\mathbf{k}_n) \psi^*(\mathbf{q}) |0\rangle. \quad (12.11)$$

Амплитуда $c_p^{(n)}(\mathbf{q}; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$ представляет собой симметричную функцию $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$ и является амплитудой вероятности найти тяжелый квант с импульсом \mathbf{q} и n мезонов с импульсами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n$:

$$c_p^{(n)}(\mathbf{q}; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | a(\mathbf{k}_1) \dots a(\mathbf{k}_n) \psi(\mathbf{q}) | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle. \quad (12.12)$$

Трансляционная инвариантность⁵ позволяет выделить из $c_p^{(n)}(\mathbf{q}; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n)$ в виде множителя δ -функцию, соответствующую сохранению импульса.

Доказательство: Если ввести в (12.12) унитарный оператор

$$U(\mathbf{d}) = e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}}, \quad (12.13)$$

соответствующий сдвигу на величину \mathbf{d} ; тогда

$$\langle 0 | a(\mathbf{k}_1) \dots a(\mathbf{k}_n) \psi(\mathbf{q}) | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle = \\ = \langle 0 | U^*(\mathbf{d}) U(\mathbf{d}) a(\mathbf{k}_1) U^*(\mathbf{d}) U(\mathbf{d}) \dots \psi(\mathbf{q}) U^*(\mathbf{d}) U(\mathbf{d}) | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle = \\ = e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n + \mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{d}} \langle 0 | a(\mathbf{k}_1) \dots a(\mathbf{k}_n) \psi(\mathbf{q}) | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle. \quad (12.14)$$

Так как равенство (12.14) справедливо при любом \mathbf{d} , то

$$\langle 0 | a(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) \dots a(\mathbf{k}_n) \psi(\mathbf{q}) | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle = \\ = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \dots - \mathbf{k}_n - \mathbf{q}) c'^{(n)}(\mathbf{q}; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n). \quad (12.15)$$

Чтобы найти амплитуды $c^{(n)}$ или амплитуды $c'^{(n)}$, заметим, что поскольку $|\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle$ должно быть собственным состоянием H с собственным значением m_ψ

$$H | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle = m_\psi | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle, \quad (12.16)$$

то амплитуды $c^{(n)}$ должны удовлетворять определенным уравнениям, которые можно получить следующим образом. Рассмотрим коммутатор $[a(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) \dots a(\mathbf{k}_n) \psi(\mathbf{q}), H]$, взятый между состояниями $|0\rangle$ и $|\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle$:

$$\langle 0 | [a(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) \dots a(\mathbf{k}_n) \psi(\mathbf{q}), H_0 + H] | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle = \\ = \left(\sum_{i=1}^n \omega(\mathbf{k}_i) + m_0 \right) \langle 0 | a(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) \dots a(\mathbf{k}_n) \psi(\mathbf{q}) | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle + \\ + \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k f(k^2)}{\sqrt{2\omega(k)}} \langle 0 | a(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}_1) \dots a(\mathbf{k}_n) \psi(\mathbf{q} - \mathbf{k}) | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle + \\ + \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{i=1}^n \frac{f(k_i^2)}{\sqrt{2\omega(k_i)}} \langle 0 | a(\mathbf{k}_1) \dots a(\mathbf{k}_{i-1}) a(\mathbf{k}_{i+1}) \dots a(\mathbf{k}_n) \times \\ \times \psi(\mathbf{q} + \mathbf{k}_i) | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle \quad (12.17a)$$

$$= m_\psi \langle 0 | a(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) \dots a(\mathbf{k}_n) \psi(\mathbf{q}) | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle. \quad (12.17b)$$

Равенство (12.17), будучи выражено через амплитуды $c_p^{(n)}(\mathbf{q}; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$, гласит:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n \omega(\mathbf{k}_i) + m_0 \right) c_p^{(n)}(\mathbf{q}; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) + \\ & + \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{2\omega(\mathbf{k}) + 1} \int \frac{d^3 k f(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} c_p^{(n+1)}(\mathbf{q} - \mathbf{k}; \mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) + \\ & + \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{f(\mathbf{k}_i^2)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k}_i)}} c_p^{(n-1)}(\mathbf{q} + \mathbf{k}_i; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{i-1}, \mathbf{k}_{i+1}, \dots, \mathbf{k}_n) = \\ & = m_\psi c_p^{(n)}(\mathbf{q}; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n). \end{aligned} \quad (12.18)$$

Можно проверить, что

$$c_p^{(n)}(\mathbf{q}; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) = \sqrt{Z} \delta^{(3)}\left(\mathbf{q} + \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i - \mathbf{p}\right) \frac{(-\lambda)^n}{\sqrt{n!}} \prod_{i=1}^n \frac{f(\mathbf{k}_i^2)}{\sqrt{2(2\pi)^3 \omega^3(\mathbf{k}_i)}} \quad (12.19)$$

является решением полученной системы связанных уравнений, если

$$\begin{aligned} m_\psi &= m_0 - \lambda^2 \Delta = m_0 + \delta m, \\ \Delta &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{|f(\mathbf{k}^2)|^2}{2\omega^2(\mathbf{k})}. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Величина Z есть постоянная нормировки. Ее значение будет определено ниже. Однонуклонное состояние с импульсом \mathbf{p} можно, следовательно, записать в виде

$$\begin{aligned} |\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle &= \\ &= \sqrt{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int d^3 q \int d^3 k_1 \dots \int d^3 k_n \delta^{(3)}\left(\mathbf{p} - \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i - \mathbf{q}\right) \times \\ & \quad \times \prod_{i=1}^n \frac{f(\mathbf{k}_i^2)}{\sqrt{2(2\pi)^3 \omega^3(\mathbf{k}_i)}} a^*(\mathbf{k}_1) \dots a^*(\mathbf{k}_n) \psi^*(\mathbf{q}) |0\rangle \quad (12.21a) \\ &= \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^3} \int d^3 q \int d^3 x \exp[i(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}] \times \end{aligned}$$

$$\times \exp \left\{ \int \frac{d^3 k f(\mathbf{k}^2)}{[2(2\pi)^3 \omega^3(\mathbf{k})]^{1/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} a^*(\mathbf{k}) \right\} \psi^*(\mathbf{q}) |0\rangle \quad (12.21b)$$

Равенство (12.21) выражает физическое однонуклонное состояние в виде суперпозиции «голого» состояния с одним квантом и невозмущенных состояний с различным числом мезонов. Последние состояния, которые «сопутствуют» тяжелому кванту, мы будем называть «облаком», которое тяжелый квант приобретает благодаря взаимодействию H_I .

Постоянная Z определяется из условия нормировки

$$\langle \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}') \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (12.22)$$

Подставляя равенство (12.21) в (12.22), находим

$$\begin{aligned} Z & \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int d^3q \int d^3k_1 \dots \int d^3k_n \delta^{(3)} \left(\mathbf{p} - \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i - \mathbf{q} \right) \delta^{(3)} \left(\mathbf{p}' - \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i - \mathbf{q} \right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{(-\lambda)^{2n}}{[2(2\pi)^3]^n n!} \prod_{i=1}^n \frac{|f(\mathbf{k}_i^2)|^2}{\omega^3(\mathbf{k}_i)} \right\} = \\ & = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') Z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\lambda^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \frac{|f(\mathbf{k}^2)|^2}{\omega^3(\mathbf{k})} \right]^n = \\ & = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (12.23)$$

откуда

$$Z = e^{-\lambda^2 L} \quad (12.24)$$

и

$$L = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega^3(\mathbf{k})} |f(\mathbf{k}^2)|^2. \quad (12.25)$$

В случае точечного источника $f(\mathbf{k}^2) = 1$ и L логарифмически расходится. Постоянная нормировки Z , пропорциональная $\langle 0 | \psi(\mathbf{q}) | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle$, в пределе стремится к нулю. Поскольку величину Z можно интерпретировать как вероятность найти «голый» нуклон в физическом однонуклонном состоянии, то эта вероятность в пределе точечной частицы равна нулю. Стремится к нулю и другие компоненты $|\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle$ в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_0 , натянутом на базисные функции $\prod_{i=1}^n a^*(\mathbf{k}_i) \psi^*(\mathbf{q}) |0\rangle$, которые являются собственными функциями H_0 . Таким образом, $|\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle$ уже не лежит в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_0 . Такое положение сохраняется до тех пор, пока $f(\mathbf{k}^2)$ не обеспечивает сходимости L .

Чтобы понять, что получается, рассмотрим такой случай, когда есть только один нуклон, локализованный в начале координат. Тогда гамильтониан можно взять равным

$$H = m_0 + \int d^3k \omega(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k f(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} (a(\mathbf{k}) + a^*(-\mathbf{k})). \quad (12.26)$$

Снова можно проверить, что вектор

$$|\Psi\rangle = \sqrt{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(- \int d^3k \frac{\lambda f(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2(2\pi)^3 \omega^3(\mathbf{k})}} a^*(\mathbf{k}) \right)^n |0\rangle \quad (12.27)$$

является собственным вектором H с собственным значением $m_0 - \lambda^2 \Delta$ и что Z дается выражением (12.24). Поэтому опять $Z \rightarrow 0$, если $f \rightarrow 1$. Запишем теперь гамильтониан (12.26) в виде

$$\begin{aligned} H & = \int d^3k \omega(\mathbf{k}) (a(\mathbf{k}) + v(\mathbf{k}))^* (a(\mathbf{k}) + v(\mathbf{k})) + \\ & + m_0 - \int d^3k |v(\mathbf{k}^2)|^2 \omega(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (12.28a)$$

$$= \int d^3k c^*(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}) \omega(\mathbf{k}) + m, \quad (12.28б)$$

где

$$v(\mathbf{k}^2) = \frac{\lambda f(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2(2\pi)^3} \omega^3(\mathbf{k})} \quad (12.29)$$

и

$$c(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k}) + v(\mathbf{k}). \quad (12.30)$$

Нужно отметить, что операторы $c(\mathbf{k})$, $c^*(\mathbf{k})$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и $a(\mathbf{k})$. Гамильтониан (12.26), выраженный через $c^*(\mathbf{k})$, $c(\mathbf{k})$, диагонален и допускает простую физическую интерпретацию: он описывает источник, характеризующийся величинами m и f , и совокупность свободных мезонов, которые не взаимодействуют с источником и друг с другом. Зададим вопрос: принадлежат ли операторы $c(\mathbf{k})$, $c^*(\mathbf{k})$ тому же самому представлению перестановочных соотношений, что и операторы $a(\mathbf{k})$, $a^*(\mathbf{k})$? Ответ будет утвердительным только в том случае, если существует состояние без частиц $|\Psi_0\rangle$, для которого

$$c(\mathbf{k})|\Psi_0\rangle = 0 \quad \text{при всех } \mathbf{k}. \quad (12.31)$$

Если для $|\Psi_0\rangle$ применить представление в пространстве Фока [определенное с помощью чисел заполнения, соответствующих оператору $N_a = \int d^3k a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})$], то

$$|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_0^{(0)} \\ \Psi_0^{(1)}(\mathbf{k}_1) \\ \vdots \\ \Psi_0^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (12.32a)$$

или, что эквивалентно предыдущему,

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= \Psi_0^{(0)}|0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3k_1 \dots \int d^3k_n \Psi_0^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{n!}} a^*(\mathbf{k}_1) \dots a^*(\mathbf{k}_n)|0\rangle. \end{aligned} \quad (12.32b)$$

Равенство $c(\mathbf{k})|\Psi_0\rangle = (a(\mathbf{k}) + v(\mathbf{k}))|\Psi_0\rangle = 0$ означает, что

$$\sqrt{n+1} \Psi_0^{(n+1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = -v(\mathbf{k}) \Psi_0^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n), \quad (12.33)$$

откуда

$$\Psi_0^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{n=1}^n (-v(\mathbf{k}_i)) \cdot \Psi_0^{(0)}. \quad (12.34)$$

Условие конечности нормы состояния $|\Psi_0\rangle$ есть

$$(\Psi_0, \Psi_0) = |\Psi_0^{(0)}|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int d^3k |v(\mathbf{k})|^2 \right)^n < \infty \quad (12.35)$$

или

$$\int d^3k |v(\mathbf{k})|^2 = \lambda^2 L < \infty. \quad (12.36)$$

Таким образом, операторы $a(\mathbf{k})$ и $a(\mathbf{k}) + v(\mathbf{k})$ будут одновременно обладать состоянием без частиц только, если $L < \infty$. В противном случае, если $a(\mathbf{k})$ имеет состояние без частиц, то $c(\mathbf{k})$ соответствует другому представлению перестановочных соотношений. Эти факты существенны при обсуждении применимости теории возмущений к гамильтониану (12.26), если H_1 рассматривать как возмущение. Ясно, что если L расходится, то нельзя сформулировать теорию возмущений в обычном смысле, поскольку она покоится на допущении, что состояние без частиц невозмущенной системы соответствует состоянию без частиц для возмущенной системы (в этой связи см. также [805]).

Вернемся к теории с гамильтонианом (12.1) и исследуем некоторые из ее предсказаний. Рассмотрим сначала рассеяние мезона на нуклоне. Для этого найдем собственный вектор состояния $|\mathbf{k}; \mathbf{p}\rangle_+$ гамильтониана H с собственным значением $m + \omega(\mathbf{k})$, который описывает мезон с импульсом \mathbf{k} , нуклон с импульсом \mathbf{p} и рассеяние их друг на друге. Напишем, таким образом,

$$|\mathbf{k}, \mathbf{p}\rangle_+ = a_{\mathbf{k}}^* |\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle + |\chi\rangle_+, \quad (12.37)$$

где $a_{\mathbf{k}}^* |\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle$ описывает мезон с импульсом \mathbf{k} , падающий на физический нуклон с импульсом \mathbf{p} , а $|\chi\rangle_+$ соответствует рассеянной волне. Требование, чтобы $|\mathbf{k}, \mathbf{p}\rangle_+$ было собственным состоянием H

$$H |\mathbf{k}, \mathbf{p}\rangle_+ = (m + \omega(\mathbf{k})) |\mathbf{k}, \mathbf{p}\rangle_+, \quad (12.38)$$

означает, что

$$\begin{aligned} H (a_{\mathbf{k}}^* |\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle + |\chi\rangle_+) &= \\ &= (a_{\mathbf{k}}^* H + [H, a_{\mathbf{k}}^*]) |\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle + H |\chi\rangle_+ = \\ &= a_{\mathbf{k}}^* (m + \omega(\mathbf{k})) |\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle + \\ &+ \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p' \frac{f(k^2)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \psi^*(\mathbf{p}' + \mathbf{k}) \psi(\mathbf{p}') |\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle + H |\chi\rangle_+ = \\ &= (m + \omega(\mathbf{k})) (a_{\mathbf{k}}^* |\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle + |\chi\rangle_+). \end{aligned} \quad (12.39)$$

Следовательно, $|\chi\rangle_+$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} (m + \omega(\mathbf{k}) - H) |\chi\rangle_+ &= \\ &= \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p' \frac{f(k^2)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \psi^*(\mathbf{p}' + \mathbf{k}) \psi(\mathbf{p}') |\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle = \\ &= \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(k^2)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} |\Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k})\rangle. \end{aligned} \quad (12.40)$$

Последняя строка в уравнении (12.40) была получена благодаря использованию явного выражения для $|\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle$ [равенство (12.21а)]. Из (12.40) имеем

$$\begin{aligned} |\chi\rangle_+ &= \frac{1}{m + \omega_{\mathbf{k}} - H + i\varepsilon} \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(k^2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} |\Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k})\rangle = \\ &= \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} + i\varepsilon} \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(k^2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} |\Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k})\rangle, \end{aligned} \quad (12.41)$$

где добавка $+i\varepsilon$ должна гарантировать, что $|\chi\rangle_+$ содержит лишь расходящиеся волны. Однако нетрудно заметить, что знаменатель в (12.41) не ведет к особенности, поскольку $\omega_{\mathbf{k}}$ всегда больше нуля. Поэтому нет расходящихся волн и в действительности нет рассеяния. Это можно также увидеть, если заметить, что $|\mathbf{k}, \mathbf{p}\rangle_-$, собственное состояние H , удовлетворяющее граничному условию для аут-решений волн, равно

$|\mathbf{k}, \mathbf{p}\rangle$. [поскольку добавки $\pm i\epsilon$ в (12.44) несущественны], так что

$$|\mathbf{k}, \mathbf{p}\rangle_{\pm} = a_{\mathbf{k}}^* |\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle + \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(k^2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^2}} |\Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k})\rangle. \quad (12.42)$$

Рассмотрим это более подробно. Элемент S -матрицы для рассеяния из состояния \mathbf{k}, \mathbf{p} в состояние \mathbf{k}', \mathbf{p}' есть

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle_{+} &= \langle \Psi^{(1)}(\mathbf{p}') | a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}^* | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle + \\ &+ \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(k^2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^2}} \langle \Psi^{(1)}(\mathbf{p}') | a_{\mathbf{k}'} | \Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \rangle + \\ &+ \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(k'^2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}^2}} \langle \Psi^{(1)}(\mathbf{p}' + \mathbf{k}') | a_{\mathbf{k}}^* | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle + \\ &+ \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} \frac{f(k^2) f(k'^2)}{\sqrt{4\omega_{\mathbf{k}}^2 \omega_{\mathbf{k}'}^2}} \langle \Psi^{(1)}(\mathbf{p}' + \mathbf{k}') | \Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \rangle. \end{aligned} \quad (12.43)$$

Первый член в (12.43), используя перестановочные соотношения для операторов $a_{\mathbf{k}}$ и соотношения ортогональности для «облаченных» нуклонных состояний [равенство (12.22)], можно переписать в другом виде:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \langle \Psi^{(1)}(\mathbf{p}') | a_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}} | \Psi^{(1)}(\mathbf{p}) \rangle.$$

Скалярное произведение в последнем члене равенства (12.43) равно $\delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}')$. Другие члены можно вычислить, если заметить, что

$$\begin{aligned} [H, a_{\mathbf{k}}] | \Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \rangle &= \\ = \left(-\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} - \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3q \frac{f(k'^2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}} } \psi^*(\mathbf{q} - \mathbf{k}') \psi(\mathbf{q}) \right) | \Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \rangle &= \\ = H a_{\mathbf{k}} | \Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \rangle - m a_{\mathbf{k}} | \Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \rangle. \end{aligned} \quad (12.44)$$

Используя опять выражение (12.21), равенство (12.44) можно переписать по-другому:

$$(H + \omega_{\mathbf{k}} - m) a_{\mathbf{k}} | \Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \rangle = - \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \frac{f(k'^2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} | \Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{k}') \rangle. \quad (12.45)$$

Так как оператор $H + \omega_{\mathbf{k}} - m$ в подпространстве однонуклонных состояний является положительно определенным, то он имеет обратный оператор. Поэтому, умножая равенство (12.45) на $(H + \omega_{\mathbf{k}} - m)^{-1}$, будем иметь

$$a_{\mathbf{k}} | \Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \rangle = - \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(k'^2)}{\omega_{\mathbf{k}'} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} | \Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{k}') \rangle. \quad (12.46)$$

Выражение для $\langle \Psi^{(1)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) | a_{\mathbf{k}}^*$ получится, если взять равенство, сопряженное к (12.46). Подставляя эти выражения в правую часть (12.43), находим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle_{+} &= \pm \langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle_{\pm} = \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (12.47)$$

так что R -матрица равна нулю и рассеяния нет. Взаимодействие только «облачает» нуклоны, но не ведет ни к какому другому взаимодействию между мезонами и нуклонами. В этом можно убедиться непосредственно,

если произвести некоторое унитарное преобразование. Оператор

$$U = e^{iS}, \quad (12.48a)$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{i\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \int \frac{d^3k f(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2\omega^3(\mathbf{k})}} [a^*(\mathbf{k}) - a(-\mathbf{k})] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \\ &= \frac{i\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \int d^3k \frac{f(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2\omega^3(\mathbf{k})}} \psi^*(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p} + \mathbf{k}) [a^*(\mathbf{k}) - a(-\mathbf{k})] \end{aligned} \quad (12.48b)$$

обладает тем свойством, что он оставляет вакуум неизменным, а действуя на «голое» однонуклонное состояние $\psi^*(\mathbf{p})|0\rangle$, дает «облаченное» однонуклонное состояние $|\Psi^{(1)}(\mathbf{p})\rangle$, должным образом нормированное. Таким образом, этот унитарный оператор как бы присоединяет к нуклону его «голое» мезонное облако. Определим оператор [339]

$$\begin{aligned} \psi_d^*(\mathbf{p}) &= e^{iS} \psi^*(\mathbf{p}) e^{-iS} = \\ &= \psi^*(\mathbf{p}) + \frac{i}{1!} [S, \psi^*(\mathbf{p})] + \frac{i^2}{2!} [S, [S, \psi^*(\mathbf{p})]] + \dots = \\ &= \int d^3q \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \psi^*(\mathbf{q}) \times \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k f(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2\omega^3(\mathbf{k})}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (a^*(\mathbf{k}) - a(-\mathbf{k})) \right]. \end{aligned} \quad (12.49)$$

Действуя на вакуум $|0\rangle$, оператор $\psi_d^*(\mathbf{p})$ дает собственное состояние H с собственным значением m , которое одновременно является собственным состоянием \mathbf{P} с собственным значением \mathbf{p} . Так как преобразование унитарно, то операторы ψ_d и ψ_d^* опять удовлетворяют каноническим соотношениям антикоммутиации

$$[\psi_d(\mathbf{p}), \psi_d^*(\mathbf{p}')]_{\pm} = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (12.50)$$

Определим тоже «облаченные»¹⁾ операторы рождения мезонов

$$\begin{aligned} a_d^*(\mathbf{k}) &= e^{iS} a^*(\mathbf{k}) e^{-iS} = \\ &= a^*(\mathbf{k}) + \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3q \psi^*(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \psi(\mathbf{q}) \frac{f(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2\omega^3(\mathbf{k})}}. \end{aligned} \quad (12.51)$$

Оператор $a_d^*(\mathbf{k})$ обладает тем свойством, что, действуя на $|0\rangle$, он дает одномезонное состояние с импульсом \mathbf{k} и энергией $\omega_{\mathbf{k}}$, так как

$$a_d^*(\mathbf{k})|0\rangle = a^*(\mathbf{k})|0\rangle. \quad (12.52)$$

Гамильтониан, выраженный через облаченные операторы, есть

$$H_d = H_{0d} + H_{1d}, \quad (12.53)$$

где

$$\begin{aligned} H_{0d} &= m \int d^3p \psi_d^*(\mathbf{p}) \psi_d(\mathbf{p}) + \int d^3k \omega_{\mathbf{k}} a_d^*(\mathbf{k}) a_d(\mathbf{k}), \\ H_{1d} &= \frac{\lambda^2}{(2\pi^3)} \int d^3q \int d^3p \int \frac{d^3k |f(\mathbf{k}^2)|^2}{2\omega_{\mathbf{k}}^2} \psi_d^*(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \psi_d^*(\mathbf{q}) \psi_d(\mathbf{p}) \psi_d(\mathbf{q} + \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (12.54a)$$

Таким образом, выраженный через облаченные операторы новый гамильтониан взаимодействия H_{1d} больше не содержит взаимодействия мезонов

¹⁾ Этому соответствует значок d (от английского «dressed» — «облаченные, одетые»). — Прим. ред.

с нуклонами и ведет лишь к парному взаимодействию нуклонов. Статистический потенциал взаимодействия между двумя нуклонами дается выражением

$$V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k |f(\mathbf{k}^2)|^2}{2\omega^2(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}, \quad (12.55)$$

так как H_{Id} можно записать в виде

$$H_{Id} = \lambda^2 \int d^3x \int d^3x' \psi_d^*(\mathbf{x}') \psi_d^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi_d(\mathbf{x}) \psi_d(\mathbf{x}'). \quad (12.54б)$$

[Вспомните равенства (6.108) — (6.110).] В пределе при $f(\mathbf{k}^2) \rightarrow 1$, т. е. для точечных нуклонов, потенциал (12.55) переходит в потенциал Юкавы:

$$V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{e^{-\mu|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (12.56)$$

Простота рассматриваемой модели позволяет также вычислить в конечном виде матрицу $U(t, t_0)$ и, таким образом, проанализировать действие адиабатического формализма. Мы закончим этот параграф о скалярной модели кратким изложением нестационарного метода для скалярного поля.

Мы хотим вычислить для рассматриваемой теории оператор сдвига во времени $U(t, t_0)$ в картине взаимодействия, в частности, и для случая, когда $t, t_0 \leq 0$. Оператор $U(t, t_0)$ подчиняется уравнению

$$i\partial_t U(t, t_0) = H_I(t) U(t, t_0), \quad (12.57)$$

где

$$\begin{aligned} H_I(t) &= e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t} = \\ &= \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \int \frac{d^3k f(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \psi^*(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \psi(\mathbf{p}) (a(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + a^*(-\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}) - \\ &\quad - \delta m \int d^3p \psi^*(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (12.58)$$

Заметим, что равенство (12.58) подразумевает, что разбиение гамильтониана на свободную часть и возмущение таково, что «голые» кванты имеют массу m . Так получается, если в (12.1) вместо m_0 написать $m_0 = m_0 + \delta m - \delta m = m - \delta m$ и рассматривать член $\delta m \int \psi^*(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}) d^3p$ как часть возмущения.

Согласно нашим прежним правилам, «адиабатическая» матрица U_α является решением уравнения

$$i\partial_t U_\alpha(t, t_0) = H_I(\alpha; t) U_\alpha(t, t_0), \quad (12.59a)$$

$$H_I(\alpha; t) = e^{-\alpha|t|} H_I(t). \quad (12.59б)$$

Чтобы получить решение (12.59a), напомним

$$U_\alpha(t, t_0) = \exp \left[-i \int_{t_0}^t H_I(\alpha; t') dt' \right] V(t, t_0), \quad (12.60)$$

так что в силу (12.59) оператор V удовлетворяет уравнению

$$i\partial_t V(t, t_0) = \left\{ \exp \left[i \int_{t_0}^t H_I(\alpha; t') dt' \right] (H_I(\alpha; t) - i\partial_t) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-i \int_{t_0}^t H_I(\alpha; t') dt' \right] \right\} V(t, t_0). \quad (12.61)$$

Чтобы вычислить правую часть уравнения (12.61), положим

$$\exp \left[i\sigma \int_{t_0}^t H_I(\alpha; t') dt' \right] \frac{\partial \exp \left[-i\sigma \int_{t_0}^t H_I(\alpha; t') dt' \right]}{\partial t} = D_\sigma(t, t_0), \quad (12.62)$$

откуда

$$[D_\sigma]_{\sigma=0} = 0 \quad (12.63)$$

и

$$\frac{\partial D_\sigma}{\partial \sigma} = -i \exp \left[i\sigma \int_{t_0}^t H_I(\alpha; t') dt' \right] H_I(\alpha; t) \exp \left[-i\sigma \int_{t_0}^t H_I(\alpha; t') dt' \right], \quad (12.64)$$

причем

$$\left[\frac{\partial D_\sigma}{\partial \sigma} \right]_{\sigma=0} = -i H_I(\alpha; t). \quad (12.65)$$

Точно так же получаем

$$\frac{\partial^2 D_\sigma}{\partial \sigma^2} = e^{i\sigma \int_{t_0}^t H_I(\alpha; t') dt'} \int_{t_0}^t dt'' [H_I(\alpha; t''), H_I(\alpha; t)] e^{-i\sigma \int_{t_0}^t H_I(\alpha; t') dt'}. \quad (12.66)$$

Коммутатор в (12.66) вычисляется просто. В итоге имеем

$$[H_I(t''), H_I(t)] = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k |f(\mathbf{k}^2)|^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} (e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-t'')} - e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t'')}) \times \\ \times \left\{ \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \psi^*(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}) \psi^*(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \psi(\mathbf{p}_1) \psi(\mathbf{p}_2) - \int d^3 p \psi^*(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}) \right\}. \quad (12.67)$$

Можно проверить, что $[H_I(t''), H_I(t)]$ коммутирует с $H_I(t')$, поэтому

$$\frac{\partial^2 D_\sigma}{\partial \sigma^2} = e^{-\alpha|t|} \int_{t_0}^t dt'' e^{-\alpha|t''|} \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k |f(\mathbf{k}^2)|^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} (e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-t'')} - e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t'')}) \times \\ \times \left\{ \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \psi^*(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}) \psi^*(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \psi(\mathbf{p}_1) \psi(\mathbf{p}_2) - \right. \\ \left. - \int d^3 p \psi^*(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}) \right\} = R_\alpha(t). \quad (12.68)$$

Отсюда видно, что $\partial^3 D_\sigma / \partial \sigma^3$ и все высшие производные равны нулю. Так как

$$\int_0^\sigma \frac{\partial^2 D_{\sigma'}}{\partial \sigma'^2} d\sigma' = \frac{\partial D_\sigma}{\partial \sigma} - \left(\frac{\partial D_\sigma}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0}, \quad (12.69)$$

то, подставляя в это выражение полученные значения $\partial^2 D_\sigma / \partial \sigma^2$ и $\left(\frac{\partial D_\sigma}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0}$, находим

$$\frac{\partial D_\sigma}{\partial \sigma} = -ie \int_{t_0}^t H_I(\alpha; t') dt' H_I(\alpha; t) e^{-i\sigma \int_{t_0}^t H_I(\alpha; t') dt'} = \sigma R_\alpha(t) - iH_I(\alpha; t), \quad (12.70)$$

так что

$$D_\sigma = [D_\sigma]_{\sigma=0} + \int_0^\sigma \frac{\partial D_{\sigma'}}{\partial \sigma'} d\sigma' = \frac{\sigma^2}{2} R_\alpha(t) - i\sigma H_I(\alpha; t). \quad (12.71)$$

Используя равенства (12.61) и (12.71), окончательно получим

$$i\partial_t V(t, t_0) = i \left[\frac{\partial D_\sigma}{\partial \sigma} - D_\sigma \right]_{\sigma=1} V(t, t_0) = \frac{1}{2} iR_\alpha(t) V(t, t_0), \quad (12.72)$$

откуда

$$\dot{V}(t, t_0) = e^{1/2 \int_{t_0}^t R_\alpha(t') dt'} \quad (12.73)$$

и

$$U_\alpha(t, t_0) = e^{-i \int_{t_0}^t H_I(\alpha; t') dt'} e^{1/2 \int_{t_0}^t R_\alpha(t') dt'} \quad (12.74)$$

Наконец, вычислим вторую экспоненту

$$\int_{t_0}^t R_\alpha(t') dt' = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' e^{-\alpha |t'|} \int_{t_0}^t dt'' [H_I(t''), H_I(t')] e^{-\alpha |t''|} \quad (12.75)$$

для частного случая $t_0 = -\infty$ и $t = 0$, когда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 R_\alpha(t) dt' &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k |f(\mathbf{k}^2)|^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left[\frac{1}{\alpha - i\omega_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{\alpha + i\omega_{\mathbf{k}}} \right] \frac{1}{\alpha} \times \\ &\times \left\{ \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \psi^*(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}) \psi^*(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \psi(\mathbf{p}_1) \psi(\mathbf{p}_2) - \int d^3 p \psi^*(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}) \right\} = \\ &= iT \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k |f(\mathbf{k}^2)|^2}{2\omega_{\mathbf{k}}^2} \left\{ \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \psi^*(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}) \psi^*(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \psi(\mathbf{p}_1) \psi(\mathbf{p}_2) - \right. \\ &\quad \left. - \int d^3 p \psi^*(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}) \right\} + O(\alpha), \quad (12.76) \end{aligned}$$

где мы обозначили $1/\alpha$ через T . Последняя величина играет роль большого промежутка времени, в течение которого развивается система. Подобным же образом

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 H_I(\alpha; t') dt' &= \frac{i\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k f(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^3}} \int d^3 p \psi^*(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \psi(\mathbf{p}) (a(\mathbf{k}) - a^*(-\mathbf{k})) - \\ &- \frac{\delta m}{\alpha} \int d^3 p \psi^*(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}), \quad (12.77) \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}
 U_\alpha(0, -\infty) = & \exp \left[\frac{i\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k f(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^2}} \int d^3 p \psi^*(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \psi(\mathbf{p}) (a(\mathbf{k}) - a^*(-\mathbf{k})) + \right. \\
 & + iT \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k |f(\mathbf{k}^2)|^2}{2\omega_{\mathbf{k}}^2} \times \\
 & \left. \times \left\{ \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \psi^*(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}) \psi^*(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) \psi(\mathbf{p}_1) \psi(\mathbf{p}_2) \right\} + O(\alpha) \right].
 \end{aligned}
 \tag{12.78}$$

Отметим, что контрчлены, соответствующие перенормировке массы, в приведенном выше выражении уничтожились, что и следовало ожидать, ибо тяжелые кванты уже в невозмущенных состояниях имели правильные массы.

Можно проверить, что вектор $U_\alpha(0, -\infty) \psi^*(\mathbf{p}) |0\rangle$ в пределе при $\alpha \rightarrow 0$ действительно является собственным вектором H . На самом деле $U_\alpha(0, -\infty)$ есть не что иное как ранее введенное унитарное преобразование, «облачающее» частицу.

§ 2. Модель Ли

Вторая решаемая модель теории поля, которую мы рассмотрим, — это модель Ли [482, 415, 416] (см. также [374]). Она очень похожа на модель со скалярным полем, за исключением того, что нуклоны могут теперь находиться в двух внутренних состояниях и могут переходить из одного состояния в другое. Эти внутренние состояния произвольно названы N -частицей и V -частицей; V -частица может испустить бозон, называемый θ -частицей, и перейти в N -частицу; N -частица не может испустить θ -частицу, но может поглотить ее и перейти в V -частицу; V -частица не может поглотить θ -частицу. Разрешенные процессы можно подытожить соотношением

$$V \rightleftharpoons N + \theta.$$

Таким образом, модель Ли состоит из трех взаимодействующих полей: двух фермионных, описывающих V - и N -частицы, и бозонного поля, описывающего θ -частицы.

Как и в случае модели со скалярным полем, энергии нуклонов предполагаются не зависящими от их импульсов, нуклоны считаются бесспиновыми, импульс сохраняется; θ -частица считается нейтральным бозоном со спином, равным нулю. В некоторых отношениях эта модель даже проще модели со скалярным полем, однако она обладает некоторыми интересными чертами, которых нет у модели со скалярным полем. Например, возможно N - θ -рассеяние и возникает перенормировка «заряда». Гамильтониан, описывающий эту систему полей в преддингеровской картине, определяется выражением

$$H = H_0 + H_I, \tag{12.79a}$$

где

$$H_0 = m_{V0} \int d^3 p V^*(\mathbf{p}) V(\mathbf{p}) + m_{N0} \int d^3 p N^*(\mathbf{p}) N(\mathbf{p}) + \int d^3 k \omega_{\mathbf{k}} a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})
 \tag{12.79б}$$

и

$$H_I = \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k} f_1(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int d\mathbf{p} \{V^*(\mathbf{p}) N(\mathbf{p}-\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + N^*(\mathbf{p}-\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) V(\mathbf{p})\}. \quad (12.79в)$$

Обозначения очевидны: $N^*(\mathbf{p})$ и $N(\mathbf{p})$ — операторы рождения и уничтожения N -кванта с импульсом \mathbf{p} ; $V^*(\mathbf{p})$, $V(\mathbf{p})$ и $a^*(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ играют ту же роль соответственно для квантов V и θ . Параметры m_{V0} , m_{N0} являются массами квантов V - и N -поля, а $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mu_0^2 + \mathbf{k}^2}$ — энергия θ -кванта с импульсом \mathbf{k} и массой μ_0 . Параметр λ_0 характеризует силу связи между полями, а обрезывающая функция $f_1(\mathbf{k}^2) = f(\omega_{\mathbf{k}}) = \bar{f}(\omega_{\mathbf{k}})$ описывает размеры области взаимодействия. Она введена, чтобы избежать расходимостей, связанных с точечным взаимодействием вида

$$H_I \sim \int V^*(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}) \theta(\mathbf{x}) d^3x + \text{э. с.}$$

(Здесь $\theta(\mathbf{x})$ — фурье-образ $a(\mathbf{k})/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$.) Пренебрежение отдачи фермионных квантов характеризуется тем, что энергии V - и N -квантов не зависят от импульсов. Можно было бы рассмотреть более общую теорию, в которой гамильтониан имеет вид

$$H_0 = \int d\mathbf{p} E_{V0}(\mathbf{p}) V^*(\mathbf{p}) V(\mathbf{p}) + \int d\mathbf{p} E_{N0}(\mathbf{p}) N^*(\mathbf{p}) N(\mathbf{p}) + \int d\mathbf{k} \omega(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \quad (12.80)$$

(см., например, [806]). Хотя такая модель и решается, она усложняет формальные стороны вопроса без всякого выигрыша в понимании физики дела.

Операторы поля удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (12.81a)$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^*(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')] = 0, \quad (12.81б)$$

$$[N(\mathbf{p}), N^*(\mathbf{p}')]_+ = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (12.82a)$$

$$[N(\mathbf{p}), N(\mathbf{p}')]_+ = [N^*(\mathbf{p}), N^*(\mathbf{p}')]_+ = 0, \quad (12.82б)$$

$$[V(\mathbf{p}), V^*(\mathbf{p}')]_+ = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (12.83a)$$

$$[V(\mathbf{p}), V(\mathbf{p}')]_+ = [V^*(\mathbf{p}), V^*(\mathbf{p}')]_+ = 0, \quad (12.83б)$$

$$0 = [N(\mathbf{p}), V(\mathbf{p}')]_+ = [N(\mathbf{p}), V^*(\mathbf{p}')]_+ = [N^*(\mathbf{p}), V(\mathbf{p}')]_+ = [N^*(\mathbf{p}), V^*(\mathbf{p}')]_+$$

$$[a(\mathbf{k}), N(\mathbf{p})] = [a(\mathbf{k}), N^*(\mathbf{p})] = \dots = [a^*(\mathbf{k}), V^*(\mathbf{p})] = 0. \quad (12.84)$$

Гамильтониан взаимодействия (12.79в) разрешает только процесс

$$V \rightleftharpoons N + \theta,$$

т. е. уничтожение V -кванта с одновременным рождением N - и θ -квантов, или обратный процесс поглощения θ -кванта N -квантом с превращением в V -квант. Процесс

$$N \rightleftharpoons V + \theta$$

запрещен. Заметим, что взаимодействие таково, что импульс сохраняется. Модель можно интерпретировать несколько по-другому, если

рассматривать N-частицу как нейтрон, V-частицу как протон, а θ -частицу как π^+ -мезон. Тогда реакция $p \rightarrow \pi^+ + n$ разрешена законом сохранения заряда, в то время как переход $n \rightarrow p + \pi^+$, очевидно, запрещен. Такая интерпретация дает понимание ограничений модели Ли. В «нормальной» теории поля появилась бы античастица, обозначим ее через $\bar{\theta}$, которая бы сделала возможной реакцию $V + \bar{\theta} \rightarrow N$. Кроме того, отметим, что член со взаимодействием в модели Ли имеет вид $N^* V \phi^{(+)}(x)$, а такое взаимодействие не является причинным. Оно и не локально, ибо операция выделения положительной-частотной части включает интегрирование по всему пространству.

Простота модели Ли проявляется в том, что совпадают «голый» и физический вакуумы, а также «голые» и физические состояния одной N-частицы и одной θ -частицы. Иначе говоря, «голый» вакуум $|0\rangle$, определенный равенствами

$$N(\mathbf{p})|0\rangle = V(\mathbf{p})|0\rangle = a(\mathbf{p})|0\rangle = 0 \quad \text{для всех } \mathbf{p}, \quad (12.85)$$

является также собственной функцией полного гамильтониана H с собственным значением 0, поскольку $H_I|0\rangle = 0$. Аналогично можно проверить, что $N^*(\mathbf{p})|0\rangle$ есть собственная функция H с собственным значением m_{N0} , так как $H_I N^*(\mathbf{p})|0\rangle = 0$, поскольку каждый член в H_I содержит оператор уничтожения, который либо коммутирует (a_k), либо антикоммутирует (V) с $N^*(\mathbf{p})$. Подобным образом можно проверить, что состояние одной θ -частицы, $a^*(\mathbf{k})|0\rangle$, является собственной функцией H с собственным значением ω_k . Итак, в модели Ли θ - и N-кванты совпадают с соответствующими «физическими» частицами, которые, по предположению, имеют «наблюдаемые» массы m_N и μ . отождествим поэтому μ_0 и μ , m_{N0} и m_N . В последующем мы будем обозначать «физические» состояния (т. е. собственные состояния H) либо значком d , либо жирным шрифтом:

$$|0\rangle_d = |0\rangle, \quad (12.86)$$

$$|N_p\rangle_d = |N_p\rangle = N_p^*|0\rangle, \quad (12.87)$$

$$|\theta_k\rangle_d = |\theta_k\rangle = a_k^*|0\rangle. \quad (12.88)$$

Чтобы получить другие собственные состояния H , заметим, что, помимо оператора полного импульса P

$$P = \int d\mathbf{p} p N^*(\mathbf{p}) N(\mathbf{p}) + \int d\mathbf{p} p V^*(\mathbf{p}) V(\mathbf{p}) + \int d\mathbf{k} k a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}), \quad (12.89)$$

еще два оператора

$$Q_1 = \int d\mathbf{p} (V^*(\mathbf{p}) V(\mathbf{p}) + N^*(\mathbf{p}) N(\mathbf{p})) \quad (12.90)$$

и

$$Q_2 = \int d\mathbf{p} N^*(\mathbf{p}) N(\mathbf{p}) - \int d\mathbf{k} a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \quad (12.91)$$

коммутируют с H

$$[Q_1, H] = [Q_2, H] = 0 \quad (12.92)$$

и являются поэтому интегралами движения. Оператор Q_1 соответствует сумме чисел V- и N-квантов (т. е. полному числу тяжелых квантов), а Q_2 — разности чисел N- и θ -квантов. Следовательно, собственные состояния H можно характеризовать собственными значениями Q_1 и Q_2 . Если

физическое состояние разложить по «голым» состояниям (т. е. по собственным состояниям H_0),

$$\begin{aligned} | \rangle_d = & \Phi^{(0, 0, 0)} | 0 \rangle + \int d\mathbf{p} \Phi^{(1, 0, 0)}(\mathbf{p}) V^*(\mathbf{p}) | 0 \rangle + \dots + \\ & + \frac{1}{\sqrt{m!n!l!}} \int d\mathbf{p}_1 \dots \int d\mathbf{p}_m \int d\mathbf{q}_1 \dots \int d\mathbf{q}_n \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_l \times \\ & \times \Phi^{(m, n, l)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m; \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_l) \times \\ & \times V^*(\mathbf{p}_1) \dots V^*(\mathbf{p}_m) N^*(\mathbf{q}_1) \dots N^*(\mathbf{q}_n) a^*(\mathbf{k}_1) \dots a^*(\mathbf{k}_l) | 0 \rangle + \dots, \end{aligned} \quad (12.93)$$

тогда в этом разложении появятся состояния лишь с теми же собственными значениями Q_1 и Q_2 , что и у физического состояния.

Чтобы получить выражение для физического состояния одной V -частицы, $|V_p\rangle_d$, заметим, что в пределе, когда константа связи $\lambda \rightarrow 0$, $|V_p\rangle_d$ должно переходить в $V_p^* | 0 \rangle$. Собственное значение Q_1 , соответствующее этому состоянию, равно $+1$, а собственное значение Q_2 равно 0 . Только одно другое «голое» состояние имеет те же собственные значения Q_1 и Q_2 . Это состояние $|N_p, \theta_k\rangle = N_p^* a_k^* | 0 \rangle$. Поэтому состояния физической V -частицы, которое является собственной функцией H с собственным значением m_V (m_V — «наблюдаемая» масса V -частицы) и собственной функцией оператора полного импульса \mathbf{P} с собственным значением \mathbf{p} , можно представить в виде следующей суперпозиции «голых» состояний:

$$|V_p\rangle_d = |V_p\rangle = Z_V^{1/2} \left\{ V_p^* | 0 \rangle + \int d\mathbf{k} \Phi(\mathbf{k}) N_{p-k}^* a_k^* | 0 \rangle \right\}, \quad (12.94)$$

где $Z_V^{1/2}$ — постоянная нормировки. Импульсы N - и θ -частиц во втором члене справа таковы, что состояние $\int d\mathbf{k} \Phi(\mathbf{k}) N_{p-k}^* a_k^* | 0 \rangle$ является собственным состоянием \mathbf{P} с собственным значением \mathbf{p} . Коэффициент $\Phi(\mathbf{k})$ определяется из требования, чтобы $|V_p\rangle$ было собственным состоянием H с собственным значением m_V . Если скалярно умножить вектор $\langle V_{p'} |$ на обе части уравнения

$$H |V_p\rangle = m_V |V_p\rangle \quad (12.95)$$

и вспомнить, что состояние с одним V -квантом ортогонально состоянию с одним N и одним θ -квантом, т. е. что $\langle V_{p'} | N_{p-k} \theta_k \rangle = \langle 0 | V_{p'} N_{p-k}^* a_k^* | 0 \rangle = 0$, то получим

$$\langle V_{p'} | H_0 | V_p \rangle + \int d\mathbf{k} \langle V_{p'} | H_I | N_{p-k} \theta_k \rangle \Phi(\mathbf{k}) = m_V \langle V_{p'} | V_p \rangle. \quad (12.96)$$

При вычислении $\langle V_{p'} | H_I | N_{p-k} \theta_k \rangle$ только член $V^* N a$ дает вклад в H_I , так что, используя перестановочные соотношения (12.81) — (12.84), находим

$$\begin{aligned} \langle V_{p'} | H_I | N_{p-k} \theta_k \rangle &= \langle 0 | V_{p'} H_I N_{p-k}^* a_k^* | 0 \rangle = \\ &= \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p}' \int \frac{d\mathbf{k}' f(\omega_{k'})}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \langle 0 | V_{p'} V_{p'}^* N_{p'-k'} a_{k'} N_{p-k}^* a_k^* | 0 \rangle = \\ &= \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_{\mathbf{k}})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (12.97)$$

Следовательно, равенство (12.96) принимает вид

$$m_{V0} + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k} f(\omega_{\mathbf{k}})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \Phi(\mathbf{k}) = m_V. \quad (12.98)$$

Аналогичным образом, умножив уравнение (12.95) на $\langle N_q \theta_1 |$, можно получить уравнение

$$(m_V - m_N - \omega_k) \Phi(k) = \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}}. \quad (12.99)$$

Если $m_V - m_N - \omega_k \neq 0$, что будет иметь место при $m_V < m_N + \mu$, уравнение можно разрешить относительно $\Phi(k)$

$$\Phi(k) = \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k} (m_V - m_N - \omega_k)}. \quad (12.100a)$$

Это соответствует случаю стабильной V -частицы, которая не может самопроизвольно распадаться на N и θ -частицу. При $m_V > m_N + \mu$ знаменатель может обратиться в нуль. Тогда мы разрешим уравнение относительно $\Phi(k)$, понимая особенность в смысле главного значения:

$$\Phi(k) = \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} P \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k} (m_V - m_N - \omega_k)}, \quad (12.100b)$$

где P означает главное значение. Причина такого предписания заключается в том, что состояние одной частицы, которое мы хотим описать, должно быть инвариантно относительно обращения времени. Подставляя это выражение для $\Phi(k)$ в (12.98), получим уравнение, определяющее m_V :

$$m_V = m_{V0} + \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} P \int dk \frac{|f(\omega_k)|^2}{2\omega_k (m_V - m_N - \omega_k)} = m_{V0} + \delta m_V. \quad (12.101)$$

Постоянная перенормировки «волновой функции» Z_V определяется из требования, чтобы

$$d \langle V_{p'} | V_p \rangle_d = \delta^3(p - p'). \quad (12.102)$$

Если это требование выразить с помощью разложения (12.94), то получим

$$1 = Z_V \left(1 + \int dk |\Phi(k)|^2 \right). \quad (12.103)$$

Введем функцию

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} P \int \frac{|f(\omega_k)|^2}{2\omega_k (\omega_k - x)} dk = \\ &= \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^2} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{|f(\omega)|^2 \sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{\omega - x} d\omega. \end{aligned} \quad (12.104)$$

Тогда уравнение для собственных значений (12.101) можно записать в виде

$$F(m_V - m_N) = m_{V0} - m_V, \quad (12.105)$$

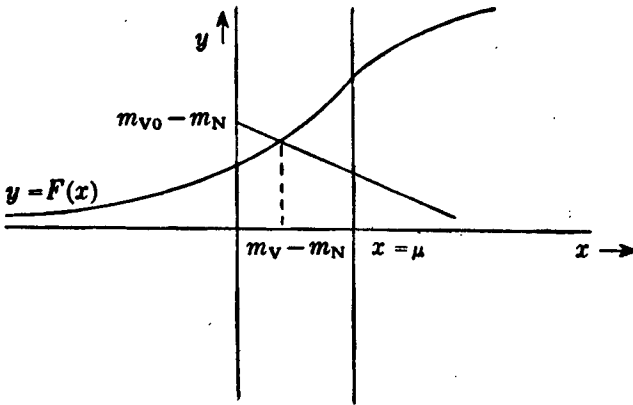
а постоянная нормировки Z_V может быть выражена равенством

$$Z_V^{-1} = 1 + \left(\frac{dF}{dx} \right)_{x=m_V - m_N}. \quad (12.106)$$

Функция $F(x)$ обладает тем свойством, что

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^2} P \int_{\mu}^{\infty} d\omega \frac{|f(\omega)|^2 \sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega - x)^2} > 0, \quad (12.107)$$

так что $F(x)$ — монотонно возрастающая функция x , которая стремится к нулю при $x \rightarrow -\infty$ и непрерывна при $x = \mu$. Качественное поведение $F(x)$ показано на фиг. 9 и 10. Значение m_V в каждом случае определяется пересечением прямой $y = -x + (m_{V0} - m_N)$ и кривой $y = F(x)$.

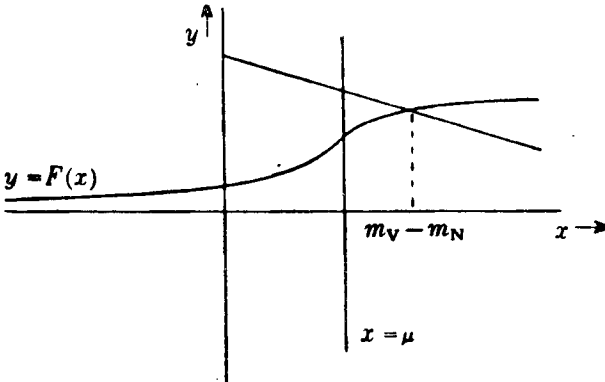


Ф и г. 9.

Можно различить два случая. Если

$$-\mu + m_{V0} - m_N < F(\mu),$$

то корень уравнения (12.105) получается при $x < \mu$ и $m_V - m_N < \mu$, что соответствует стабильной V -частице. Приведенное выше неравенство всегда может быть выполнено, если выбрать массу m_{V0} достаточно малой. Интересно отметить, что в условии стабильности $m_V - m_N < \mu$



Ф и г. 10.

фигурирует масса физической частицы m_V , и именно эта величина определяет, разрешена ли энергетически реакция $V \rightarrow N + \theta$. С другой стороны, если m_{V0} удовлетворяет неравенству

$$-\mu + m_{V0} - m_N > F(\mu),$$

то не существует корня уравнения $m_{V0} - m_V = F(m_V - m_N)$, расположенного левее точки $x = \mu$, но есть корень правее этой точки, который соответствует нестабильной V -частице [318]. Рассмотрим модель Ли

только для случая, когда V -частица стабильна и реакция $V \rightarrow N + \theta$ не разрешена энергетически. В этом случае физическое состояние V -частицы можно записать в виде

$$|V_p\rangle_d = Z_V^{1/2} \left\{ |V_p\rangle + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}(m_V - m_N - \omega_k)} |N_{p-k}, \theta_k\rangle \right\}, \quad (12.108)$$

а Z_V дается равенством (12.106). Амплитуда вероятности найти в состоянии $\int d\mathbf{p} g(\mathbf{p}) |V_p\rangle_d$ при $\int |g(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} = 1$ «голый» квант, соответствующий состоянию в виде волнового пакета $\int d\mathbf{p} g(\mathbf{p}) V_p^* |0\rangle$, равна

$$\int d\mathbf{p} \int d\mathbf{p}' \bar{g}(\mathbf{p}) g(\mathbf{p}') \langle V_p | V_{p'} \rangle_d = Z_V^{-1/2}. \quad (12.109)$$

Таким образом, Z_V есть вероятность найти «голый» квант в физическом состоянии одной V -частицы.

Для дальнейших применений удобно представить наш гамильтониан в таком виде, чтобы H_0 описывал «голые» частицы с физической массой m_V . Для этого в выражении для H добавим и вычтем член $\delta m_V \int d\mathbf{p} V^*(\mathbf{p}) V(\mathbf{p})$, и положим $m_V = m_{V0} + \delta m_V$, так что

$$H = H'_0 + H_I, \quad (12.110a)$$

$$H'_0 = m_V \int d\mathbf{p} V^*(\mathbf{p}) V(\mathbf{p}) + m_N \int d\mathbf{p} N^*(\mathbf{p}) N(\mathbf{p}) + \int d\mathbf{k} \omega(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}), \quad (12.110б)$$

$$H_I = H_I - \delta m_V \int d\mathbf{p} V^*(\mathbf{p}) V(\mathbf{p}). \quad (12.110в)$$

Для лучшего понимания модели Ли рассчитаем предсказываемое моделью рассеяние θ -частиц N -частицами. Мы должны, следовательно, найти состояние $|N_q, \theta_k\rangle_+$ (напомним, что жирным шрифтом обозначаются состояния, отмечавшиеся прежде значком d) — решение уравнения

$$H |N_q, \theta_k\rangle_+ = (\omega_k + m_N) |N_q, \theta_k\rangle_+, \quad (12.111)$$

которое соответствует падающей плоской волне $a_k^* |N_q\rangle = |N_q, \theta_k\rangle$ и расходящейся рассеянной волне, обозначенной посредством $|\chi\rangle_+$:

$$\begin{aligned} |N_q, \theta_k\rangle_+ &= |N_q, \theta_k\rangle + |\chi\rangle_+ \\ &= N_q^* a_k^* |0\rangle + |\chi\rangle_+. \end{aligned} \quad (12.112)$$

Далее,

$$\begin{aligned} H |N_q, \theta_k\rangle_+ &= H a_k^* |N_q\rangle + H |\chi\rangle_+ \\ &= a_k^* H |N_q\rangle + [H, a_k^*] |N_q\rangle + H |\chi\rangle_+. \end{aligned} \quad (12.113a)$$

Так как $H |N_q\rangle = m_N |N_q\rangle$ и

$$[H, a_k^*] = \omega_k a_k^* + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}} V^*(\mathbf{p}) N(\mathbf{p} - \mathbf{k}), \quad (12.114)$$

то вместо уравнения (12.113a) получим

$$(m_N + \omega_k - H) |\chi\rangle_+ = \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}} V^*(\mathbf{q} + \mathbf{k}) |0\rangle. \quad (12.113б)$$

Таким образом, поскольку рассеянная волна (при $t = +\infty$) должна содержать только расходящиеся волны,

$$|\chi\rangle_+ = \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_{\mathbf{k}})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{1}{m_N + \omega_{\mathbf{k}} - H + i\varepsilon} V^*(\mathbf{q} + \mathbf{k}) |0\rangle, \quad (12.115)$$

откуда

$$|N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}}\rangle_+ = |N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}}\rangle + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_{\mathbf{k}})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{1}{m_N + \omega_{\mathbf{k}} - H + i\varepsilon} V^*(\mathbf{q} + \mathbf{k}) |0\rangle, \quad (12.116)$$

причем

$${}_+ \langle N_{\mathbf{q}'}, \theta_{\mathbf{k}'} | N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}} \rangle_+ = \delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \quad (12.117)$$

Такую нормировку следует ожидать, если исходить из общих положений (вспомним § 2 гл. 10). Это можно проверить и непосредственно, используя технику, аналогичную той, которая далее потребуется для вычисления S -матрицы. Поэтому мы изложим здесь эту технику. В сущности, нам нужна формула

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - H + i\varepsilon} a_{\mathbf{k}}^* &= a_{\mathbf{k}}^* \frac{1}{x - H - \omega_{\mathbf{k}} + i\varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{x - H + i\varepsilon} [H_I, a_{\mathbf{k}}^*] \frac{1}{x - H - \omega_{\mathbf{k}} + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (12.118)$$

Чтобы доказать формулу (12.118), заметим прежде всего, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - H_0 + i\varepsilon} a_{\mathbf{k}}^* &= -i \int_0^{\infty} d\lambda e^{i(x+i\varepsilon-H_0)\lambda} a_{\mathbf{k}}^* = \\ &= -i \int_0^{\infty} d\lambda e^{i(x+i\varepsilon)\lambda} e^{-iH_0\lambda} a_{\mathbf{k}}^* e^{iH_0\lambda} e^{-iH_0\lambda} = \\ &= -i \int_0^{\infty} d\lambda a_{\mathbf{k}}^* e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+H_0-x-i\varepsilon)\lambda} = \\ &= a_{\mathbf{k}}^* \frac{1}{x - H_0 - \omega_{\mathbf{k}} + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (12.119)$$

Используя далее алгебраическое тождество

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} b \frac{1}{a}, \quad (12.120)$$

справедливое как для чисел, так и для операторов, можно написать

$$\frac{1}{x - H_0 - H_I + i\varepsilon} = \frac{1}{x - H_0 + i\varepsilon} + \frac{1}{x - H + i\varepsilon} H_I \frac{1}{x - H_0 + i\varepsilon}. \quad (12.121)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - H + i\varepsilon} a_{\mathbf{k}}^* &= a_{\mathbf{k}}^* \frac{1}{x - H_0 - \omega_{\mathbf{k}} + i\varepsilon} + \frac{1}{x - H + i\varepsilon} H_I a_{\mathbf{k}}^* \frac{1}{x - H_0 - \omega_{\mathbf{k}} + i\varepsilon} = \\ &= a_{\mathbf{k}}^* \frac{1}{x - H_0 - \omega_{\mathbf{k}} + i\varepsilon} + \frac{1}{x - H + i\varepsilon} a_{\mathbf{k}}^* H_I \frac{1}{x - H_0 - \omega_{\mathbf{k}} + i\varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{x - H + i\varepsilon} [H_I, a_{\mathbf{k}}^*] \frac{1}{x - H_0 - \omega_{\mathbf{k}} + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (12.122)$$

Перенесем второй член правой части равенства в левую часть и получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-H+i\varepsilon} a_{\mathbf{k}}^* (x-H_0-\omega_{\mathbf{k}}-H_I+i\varepsilon) \frac{1}{x-H_0-\omega_{\mathbf{k}}+i\varepsilon} = \\ = a_{\mathbf{k}}^* \frac{1}{x-H_0-\omega_{\mathbf{k}}+i\varepsilon} + \frac{1}{x-H+i\varepsilon} [H_I, a_{\mathbf{k}}^*] \frac{1}{x-H_0-\omega_{\mathbf{k}}+i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (12.123)$$

Сокращая последнее равенство на множитель $(x-H_0-\omega_{\mathbf{k}}+i\varepsilon)^{-1}$ и умножая затем справа на $(x-H-\omega_{\mathbf{k}}+i\varepsilon)^{-1}$, получим (12.118).

Используем теперь равенство (12.118) и перепишем равенство (12.116), определяющее ин-состояние $|N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}}\rangle_+$. Прежде всего выразим «голое» состояние $V^*(\mathbf{q}+\mathbf{k})|0\rangle$ через физическое состояние V -частицы:

$$\begin{aligned} V^*(\mathbf{q}+\mathbf{k})|0\rangle = Z_{\mathbf{V}}^{-1/2} |V_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}\rangle - \\ - \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk' f(\omega_{\mathbf{k}'})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}} (m_{\mathbf{V}}-m_{\mathbf{N}}-\omega_{\mathbf{k}'})} |N_{\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{k}'}, \theta_{\mathbf{k}'}\rangle, \end{aligned} \quad (12.124)$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_{\mathbf{N}}+\omega_{\mathbf{k}}-H+i\varepsilon} V^*(\mathbf{q}+\mathbf{k})|0\rangle = \frac{Z_{\mathbf{V}}^{-1/2}}{m_{\mathbf{N}}+\omega_{\mathbf{k}}-m_{\mathbf{V}}+i\varepsilon} |V_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}\rangle - \\ - \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk' f(\omega_{\mathbf{k}'})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}} (m_{\mathbf{V}}-m_{\mathbf{N}}-\omega_{\mathbf{k}'})} \frac{1}{m_{\mathbf{N}}+\omega_{\mathbf{k}}-H+i\varepsilon} a_{\mathbf{k}'}^* |N_{\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{k}'}\rangle. \end{aligned} \quad (12.125)$$

Перепишем теперь второй член с помощью равенства (12.118):

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_{\mathbf{N}}+\omega_{\mathbf{k}}-H+i\varepsilon} a_{\mathbf{k}'}^* |N_{\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{k}'}\rangle = \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}+i\varepsilon} \times \\ \times \left\{ a_{\mathbf{k}'}^* |N_{\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{k}'}\rangle + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_{\mathbf{k}'})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \frac{1}{m_{\mathbf{N}}+\omega_{\mathbf{k}}-H+i\varepsilon} V^*(\mathbf{q}+\mathbf{k})|0\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (12.126)$$

Комбинируя (12.125) и (12.126), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_{\mathbf{N}}+\omega_{\mathbf{k}}-H+i\varepsilon} |V_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{G_+(\omega_{\mathbf{k}})} \frac{1}{m_{\mathbf{N}}+\omega_{\mathbf{k}}-m_{\mathbf{V}}} \times \\ \times \left\{ |V_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}\rangle + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk' f(\omega_{\mathbf{k}'})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}} (\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}+i\varepsilon)} |N_{\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{k}'}, \theta_{\mathbf{k}'}\rangle \right\}, \end{aligned} \quad (12.127a)$$

где

$$G_+(\omega_{\mathbf{k}}) = \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \int dk' \frac{|f(\omega_{\mathbf{k}'})|^2}{(m_{\mathbf{V}}-m_{\mathbf{N}}-\omega_{\mathbf{k}'})2\omega_{\mathbf{k}'}} \frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}+i\varepsilon)} \right). \quad (12.127b)$$

Следовательно, нормировочный интеграл дается выражением

$$\begin{aligned} \langle + (N_{\mathbf{q}'}, \theta_{\mathbf{k}} | N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}} \rangle_+ = \delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') + \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega) f(\omega')}{\sqrt{4\omega\omega'}} \times \\ \times \delta^{(3)}(\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{q}'-\mathbf{k}') \left\{ \frac{1}{G_+(\omega)} \frac{1}{m_{\mathbf{N}}+\omega-m_{\mathbf{V}}} - \frac{1}{G_+(\omega')} \frac{1}{m_{\mathbf{N}}+\omega'-m_{\mathbf{V}}} \right\} \times \\ \times \frac{1}{\omega-\omega'+i\varepsilon} + \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega) f(\omega')}{\sqrt{4\omega\omega'}} \frac{1}{G_+(\omega)} \frac{1}{G_+(\omega')} \times \\ \times \frac{1}{m_{\mathbf{N}}+\omega'-m_{\mathbf{V}}} \frac{1}{m_{\mathbf{N}}+\omega-m_{\mathbf{V}}} \cdot \delta^{(3)}(\mathbf{q}+\mathbf{k}-\mathbf{q}'-\mathbf{k}') \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \int dk'' \frac{|f(\omega'')|^2}{2\omega'' (\omega'-\omega''-i\varepsilon) (\omega-\omega''+i\varepsilon)} \right\}, \end{aligned} \quad (12.128)$$

где для краткости мы положили $\omega_k = \omega$, $\omega_{k'} = \omega'$ и т. д. Комбинируя выражения в скобках второго члена справа, легко проверить, что этот член уничтожается с последним, так что остается только первый член $\delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Тем самым равенство (12.117) доказано.

Совершенно аналогично можно проверить, что решение уравнения $H|N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}}\rangle_- = (\omega_{\mathbf{k}} + m_N)|N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}}\rangle_-$, которое на бесконечности имеет вид плоской волны плюс сходящиеся волны, дается выражением

$$|N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}}\rangle_- = |N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}}\rangle + \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_{\mathbf{k}})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{1}{m_N + \omega_{\mathbf{k}} - H - i\varepsilon} V^*(\mathbf{q} + \mathbf{k})|0\rangle \quad (12.129)$$

с нормировкой

$$\langle N_{\mathbf{q}'}, \theta_{\mathbf{k}'} | N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}} \rangle_- = \delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \quad (12.130)$$

Сравнивая равенства (12.129) и (12.116), мы видим, что

$$|N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}}\rangle_+ = |N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}}\rangle_- - 2\pi i \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_{\mathbf{k}})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \delta(m_N + \omega_{\mathbf{k}} - H) V^*(\mathbf{q} + \mathbf{k})|0\rangle, \quad (12.131)$$

так что S -матрица для рассеяния из состояния $|N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}}\rangle$ в состояние $|N_{\mathbf{q}'}, \theta_{\mathbf{k}'}\rangle$ есть

$$\begin{aligned} \langle N_{\mathbf{q}'}, \theta_{\mathbf{k}'} | N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}} \rangle_+ &= \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \\ &- 2\pi i \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_{\mathbf{k}})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} -) \langle N_{\mathbf{q}'}, \theta_{\mathbf{k}'} | V^*(\mathbf{q} + \mathbf{k}) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (12.132)$$

а R -матрица имеет вид

$$\begin{aligned} \langle N_{\mathbf{q}'}, \theta_{\mathbf{k}'} | R | N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}} \rangle &= \frac{\lambda_0}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_{\mathbf{k}})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \langle N_{\mathbf{q}'}, \theta_{\mathbf{k}'} | V^*(\mathbf{q} + \mathbf{k}) | 0 \rangle = \\ &= \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \frac{|f(\omega_{\mathbf{k}})|^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} \langle 0 | V(\mathbf{q}' + \mathbf{k}') \frac{1}{m_N + \omega_{\mathbf{k}} - H + i\varepsilon} V^*(\mathbf{q} + \mathbf{k}) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (12.133)$$

В последнем выражении $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}'}$, так как матричные элементы берутся на энергетической поверхности. Чтобы вычислить (12.133), используем опять равенства (12.127) и получим

$$\begin{aligned} \langle N_{\mathbf{q}'}, \theta_{\mathbf{k}'} | R | N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}} \rangle &= \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \frac{|f(\omega_{\mathbf{k}})|^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} \frac{1}{m_N + \omega_{\mathbf{k}} - m_V} \cdot \delta^{(3)}(\mathbf{k}' + \mathbf{q}' - \mathbf{k} - \mathbf{q}) \times \\ &\times \left[1 + \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \int \frac{|f(\omega'')|^2}{2\omega'' (m_V - m_N - \omega'')} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega'' + i\varepsilon} d\mathbf{k}'' \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (12.134)$$

Заметим, что в пределе точечной частицы, т. е. при $f(\omega) = 1$ интеграл в знаменателе равенства (12.134) ведет себя при больших k как $\int dk/k$ и, следовательно, расходится. Поэтому в пределе R -матрица обращается в нуль и рассеяния нет. Можно, однако, переписать знаменатель, используя алгебраическое тождество

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a^2} + \frac{a-b}{a^2b}. \quad (12.135)$$

Тогда

$$1 + \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}'' \frac{|f(\omega'')|^2}{2\omega'' (m_V - m_N - \omega'')} \frac{1}{\omega - \omega'' + i\varepsilon} =$$

$$= Z_V^{-1} + \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}'' \frac{|f(\omega'')|^2 (m_V - m_N - \omega)}{2\omega'' (m_V - m_N - \omega'')^2 (\omega - \omega'' + i\varepsilon)}, \quad (12.136)$$

так что R -матрицу можно записать в виде

$$\langle N_{\mathbf{q}'}, \theta_{\mathbf{k}'} | R | N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{Z_V \lambda_0^2}{(2\pi)^3} \frac{|f(\omega_{\mathbf{k}})|^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{k}' - \mathbf{q}') \frac{1}{m_N + \omega_{\mathbf{k}} - m_V} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{Z_V \lambda_0^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}'' \frac{|f(\omega'')|^2 (m_V - m_N - \omega_{\mathbf{k}})}{2\omega'' (m_V - m_N - \omega'')^2 (\omega_{\mathbf{k}} - \omega'' + i\varepsilon)} \right]^{-1}. \quad (12.137)$$

Матрица R останется конечной даже в пределе точечного источника, если определить новую, «перенормированную», константу связи λ с помощью соотношения

$$\lambda^2 = Z_V \lambda_0^2 \quad (12.138)$$

и выбрать ее конечной. Таким образом, «перенормированная» константа связи в модели Ли вводится, чтобы рассеяние не исчезало в пределе точечного источника.

Мы могли бы рассуждать несколько по-другому, заметив, что параметр λ_0 , входящий в теорию, должен быть определен в терминах наблюдаемых величин, например, с помощью сечения N - θ -рассеяния при некоторой заданной энергии. Предположим, что такое «измерение» существует и мы знаем длину рассеяния a . Заметим, что равенство (12.137) предсказывает рассеяние только в S -состоянии. Поэтому, если δ есть фаза (сдвиг фазы) S -волны, то приведенная S -матрица для S -рассеяния есть

$$s(k) = e^{2i\delta(k)} = 1 - 4\pi \frac{k^2}{\Delta} 2\pi i \frac{A(k)}{1+B(k)}, \quad (12.139a)$$

где

$$\langle N_{\mathbf{q}'}, \theta_{\mathbf{k}'} | S | N_{\mathbf{q}}, \theta_{\mathbf{k}} \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k}' + \mathbf{q}' - \mathbf{k} - \mathbf{q}) \delta^{(1)}(k - k') \frac{1}{kk'} s(k), \quad (12.139b)$$

ибо

$$\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{\Delta} \delta(k - k'), \quad (12.140a)$$

$$\Delta = \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega}, \quad (12.140b)$$

и

$$A(k) = \frac{Z_V \lambda_0^2}{(2\pi)^3} \frac{|f(\omega)|^2}{2\omega} \frac{1}{m_N + \omega - m_V}, \quad (12.141)$$

$$B(k) = \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}'' \frac{|f(\omega'')|^2}{2\omega'' (m_V - m_N - \omega'') (\omega - \omega'' + i\varepsilon)}. \quad (12.142)$$

Отсюда заключаем, что

$$-\frac{\text{tg } \delta(k)}{k} = \frac{4\pi^2 \omega A(k)}{1 + 1/2(B(k) + \bar{B}(k))} =$$

$$= 4\pi^2 \frac{\lambda_0^2}{2(2\pi)^3} \frac{|f(\omega)|^2}{m_N + \omega - m_V} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} P \int \frac{|f(\omega'')|^2}{2\omega'' (m_V - m_N - \omega'')} \frac{1}{(\omega - \omega'')} d\mathbf{k}'' \right]^{-1}. \quad (12.143)$$

Длина рассеяния a , которая определяется как $\lim_{k \rightarrow 0} (-\operatorname{tg} \delta(k)/k)$, дается выражением

$$a = - \left. \frac{\operatorname{tg} \delta(k)}{k} \right|_{k=0} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \frac{|f(\mu)|^2}{m_N + \mu - m_V} \cdot \left[1 + \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \operatorname{P} \int_{\mu}^{\infty} \frac{|f(\omega'')|^2 \sqrt{\omega''^2 - \mu^2}}{(m_V - m_N - \omega'')(\mu - \omega'')} d\omega'' \right]^{-1}. \quad (12.144)$$

Теперь можно выразить величину $\lambda_0^2/4\pi$ через «измеримую» величину a , поскольку

$$\left(\frac{\lambda_0^2}{4\pi} \right)^{-1} = \frac{1}{a} \frac{|f(\mu)|^2}{m_N + \mu - m_V} - \operatorname{P} \int_{\mu}^{\infty} d\omega'' \frac{|f(\omega'')|^2 \sqrt{\omega''^2 - \mu^2}}{(m_V - m_N - \omega'')(\mu - \omega'')}, \quad (12.145)$$

так что в общем случае

$$\frac{\operatorname{tg} \delta(k)}{k} = \frac{m_V - m_N - \mu}{m_V - m_N - \omega_k} a |f(\omega_k)|^2 \cdot \left[|f(\mu)|^2 + a(m_N + \mu - m_V) \times \right. \\ \left. \times (\mu - \omega_k) \operatorname{P} \int_{\mu}^{\infty} \frac{|f(\omega'')|^2 \sqrt{\omega''^2 - \mu^2} d\omega''}{(m_V - m_N - \omega'')(\omega - \omega'')(\mu - \omega'')} \right]. \quad (12.146)$$

Отметим, что теперь $\operatorname{tg} \delta(k)/k$ выражается только через «измеримые» величины. Эта процедура опять дает конечную, не равную нулю амплитуду рассеяния в пределе точечного источника, $f(\omega) \rightarrow 1$. Представление амплитуды рассеяния как функции наблюдаемых величин в общем случае будем называть «перенормировкой».

Вообще говоря, «перенормированную» константу связи можно определить, сравнивая точное выражение для амплитуды рассеяния с результатами теории в низшем порядке теории возмущений при кинетической энергии, равной нулю. Нужно подчеркнуть, что такая «перенормированная» константа связи отличается от определенной равенством (12.138), хотя и связана с ней, как мы увидим, с помощью простого конечного выражения. Амплитуда N - θ -рассеяния в низшем порядке теории возмущений есть

$$r(k) \delta^{(3)}(\mathbf{q}' + \mathbf{k}' - \mathbf{q} - \mathbf{k}) \Big|_{\text{борн.}} = \langle N_{\mathbf{q}'}, \theta_{\mathbf{k}'} | H_I \frac{1}{m_N + \omega_{\mathbf{k}} - H_0 + i\epsilon} H_I | N_{\mathbf{q}'}, \theta_{\mathbf{k}} \rangle, \quad (12.147)$$

так что

$$r(k) \Big|_{\text{борн.}} = \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \frac{|f(\omega)|^2}{2\omega(m_N + \omega - m_V)}. \quad (12.148)$$

Определим теперь перенормированную константу λ_R требованием, чтобы амплитуда рассеяния при импульсах мезонов, равных нулю, была равна амплитуде в борновском приближении, в которой постоянная λ_0^2 заменена на λ_R^2 :

$$r(k) \Big|_{\substack{\text{точная} \\ k=0}} = \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \frac{|f(\mu)|^2}{2\mu(m_N + \mu - m_V)} \times \\ \times \left[1 + \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} \operatorname{P} \int_{\mu}^{\infty} \frac{4\pi |f(\omega'')|^2 \sqrt{\omega''^2 - \mu^2}}{(m_V - m_N - \omega'')(\mu - \omega'')} d\omega'' \right]^{-1} = \\ = \frac{\lambda_R^2}{(2\pi)^3} \frac{|f(\mu)|^2}{2\mu(m_N + \mu - m_V)}, \quad (12.149)$$

откуда

$$\lambda_R^2 = \frac{\lambda_0^2}{1 + \frac{\lambda_0^2}{(2\pi)^3} P \int \frac{|f(\omega'')|^2 dk''}{2\omega''(m_V - m_N - \omega'')(\mu - \omega'')}} , \quad (12.150a)$$

$$\lambda_0^2 = \frac{\lambda_R^2}{1 - \frac{\lambda_R^2}{(2\pi)^3} P \int \frac{|f(\omega'')|^2 dk''}{2\omega''(m_V - m_N - \omega'')(\mu - \omega'')}} . \quad (12.150b)$$

Константа связи λ_R^2 связана с константой связи $\lambda^2 = Z_V \lambda_0^2$ соотношением

$$\lambda^2 = \frac{\lambda_R^2}{1 - \frac{\lambda_R^2}{(2\pi)^3} (\mu + m_N - m_V) \int \frac{|f(\omega'')|^2 dk''}{2\omega''(m_V - m_N - \omega'')^2 (\mu - \omega'')}} . \quad (12.151)$$

Заметим, что интеграл в равенстве (12.151) конечен даже в пределе при $f(\omega) \rightarrow 1$, так что если задана константа λ_R^2 , то λ^2 определяется однозначно. Поэтому эти две константы связи равноправны. По причинам, которые станут ясны позже, мы будем работать с перенормированной константой, определенной равенством $\lambda^2 = Z_V \lambda_0^2$:

$$\lambda^2 = \frac{\lambda_0^2}{1 + \lambda_0^2 L} , \quad (12.152a)$$

так что

$$\lambda_0^2 = \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2 L} , \quad (12.152b)$$

где

$$L = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \frac{|f(\omega)|^2}{2\omega(m_V - m_N - \omega)^2} . \quad (12.153)$$

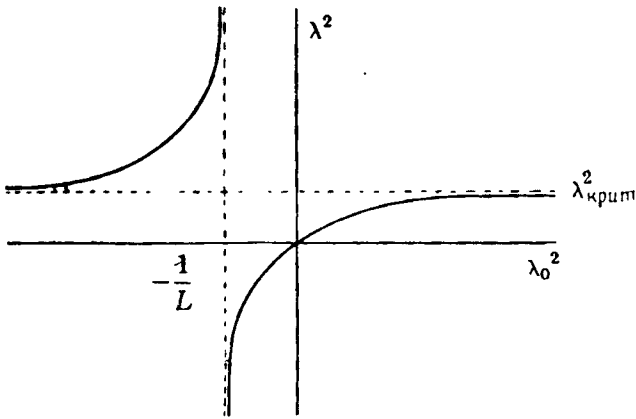
Отметим, что для любого фиксированного значения L , т. е. для заданной обрезавшей функции, существует максимальное значение перенормированной константы связи. Этот результат схематично изображен на фиг. 11.

Как указывалось выше, применение изложенного формализма к «физической» ситуации заключается в том, что фиксируется значение λ^2 , а обрезавшая функция $f(\omega)$ подбирается так, чтобы получить согласие с «экспериментом». Поэтому возможно, что для заданных λ^2 и $f(\omega)$ (или L) не существует $\lambda_0^2 > 0$. Было предположено, что такое явление имеет место и в «реалистических» теориях поля, например, в квантовой электродинамике. К этому вопросу мы позже вернемся. Из фиг. 11 видно также, что для данного L и $\lambda^2 > \lambda_{\text{крит}}^2$ хотя и не существует положительных значений λ_0^2 , но есть отрицательные. Отрицательные значения λ_0^2 означают, однако, мнимость λ_0 , так что гамильтониан (12.79) не эрмитов, и, следовательно, вероятности либо не сохраняются, либо не являются положительно определенными.

Такое же положение возникает при фиксированном значении λ^2 в пределе при $f(\omega) \rightarrow 1$ и $L \rightarrow \infty$. В этом пределе λ_0^2 становится отрицательной, а λ_0 мнимой величиной, что опять-таки означает *неэрмитовость* гамильтониана. Эту трудность можно выразить несколько иначе, если рассмотреть постоянную нормировки Z_V , которая выражается через перенормированную константу связи:

$$Z_V = \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} = 1 - \lambda^2 L . \quad (12.154)$$

Мы видели, что Z_V есть вероятность найти «голый» V -квант в физическом состоянии V -частицы. Следовательно, эта величина должна быть заключена между 0 и 1, $0 \leq Z_V \leq 1$. Однако равенство (12.154) показывает, что при достаточно больших $\lambda^2 L$ постоянная Z_V может быть отрицательной.



Ф и г. 11.

Доказательство того, что Z_V должна быть положительной величиной, можно получить, рассмотрев среднее по вакууму от антикоммутиатора $[V(p), V^*(p')]_+$

$$\langle 0 | [V(p), V^*(p')]_+ | 0 \rangle = \delta^{(3)}(p - p'). \quad (12.155)$$

Так как $V(p)|0\rangle = 0$, то лишь первый член антикоммутиатора дает вклад и

$$\sum_{|n\rangle} \langle 0 | V(p) | n \rangle \langle n | V^*(p') | 0 \rangle = \delta^{(3)}(p - p'), \quad (12.156)$$

где $\{|n\rangle\}$ — полный набор состояний. Выберем в качестве $\{|n\rangle\}$ физические состояния, т. е. собственные состояния H . В силу правил отбора (12.92) только состояния физической V -частицы и состояния N - θ -рассеяния будут давать вклад в сумму. Подставим в (12.156) эти состояния, выраженные явно с помощью перенормированной константы связи:

$$|V_p\rangle = Z_V^{1/2} |V_p\rangle + \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k(m_V - m_N - \omega_k)}} |N_{p-k}, \theta_k\rangle, \quad (12.157)$$

$$\begin{aligned} |N_q, \theta_k\rangle_+ &= |N_q, \theta_k\rangle + Z_V^{1/2} \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k h(\omega_k + i\epsilon)}} |V_{q+k}\rangle + \\ &+ \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k h(\omega_k + i\epsilon)}} \int dk' \frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{2\omega_{k'}(\omega_k - \omega_{k'} + i\epsilon)}} |N_{q+k-k'}, \theta_{k'}\rangle, \end{aligned} \quad (12.158)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{h(\omega_k + i\epsilon)}{m_N + \omega_k - m_V} &= \\ &= 1 + \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} (m_N + \omega_k - m_V) \int \frac{dk' |f(\omega_{k'})|^2}{2\omega_{k'}(m_V - m_N - \omega_{k'})^2 \omega_{k'} - (\omega_k + i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (12.159)$$

Получим

$$Z_V \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \left(1 + \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{|f(\omega_{\mathbf{k}})|^2}{2\omega_{\mathbf{k}} |\hbar(\omega_{\mathbf{k}} + i\varepsilon)|^2} \right) = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (12.160a)$$

или

$$Z_V^{-1} = 1 + \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{|f(\omega_{\mathbf{k}})|^2}{2\omega_{\mathbf{k}} |\hbar(\omega_{\mathbf{k}} + i\varepsilon)|^2}. \quad (12.160b)$$

Таким образом, постоянная Z_V положительна и меньше единицы. Очевидно, что этот результат противоречит соотношению (12.154) при достаточно больших $\lambda^2 L$. Нужно отметить, что неравенство $0 \leq Z_V \leq 1$ не зависит от детальной структуры f или h , поскольку интеграл в правой части (12.160) положителен. Однако на самом деле предполагалось, что состояния V -частиц и N - θ -рассеяния образуют полную систему состояний в подпространстве, которое характеризуется собственными значениями $q_1 = 1$, $q_2 = 0$. Поэтому исследуем заново спектр собственных значений H в этом подпространстве. Но прежде удобно определить перенормированный оператор для V -частицы

$$V_R(\mathbf{p}) = Z_V^{-1/2} V(\mathbf{p}). \quad (12.161)$$

Этот перенормированный оператор обладает тем свойством, что он имеет конечные матричные элементы между физическими состояниями даже при $f(\omega) \rightarrow 1$. В частности,

$$\langle 0 | V_R(\mathbf{p}) | V_{\mathbf{p}'} \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (12.162)$$

в отличие от оператора $V(\mathbf{p})$, [матричные элементы которого между физическими состояниями пропорциональны $Z_V^{1/2}$, причем Z_V^{-1} расходится в пределе $f \rightarrow 1$]. Заметим, что перестановочные соотношения для перенормированных операторов

$$[V_R^*(\mathbf{p}), V_R(\mathbf{p}')]_+ = Z_V^{-1} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (12.163)$$

имеют более сильную особенность в пределе при $f \rightarrow 1$, чем перестановочные соотношения для перенормированных операторов. Гамильтониан, выраженный через перенормированные операторы и перенормированную константу связи, имеет вид

$$H_0 = m_V Z_V \int d\mathbf{p} V_R^*(\mathbf{p}) V_R(\mathbf{p}) + m_N \int d\mathbf{p} N^*(\mathbf{p}) N(\mathbf{p}) + \int d\mathbf{k} \omega(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}), \quad (12.164)$$

$$H_I = \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{f(\omega_{\mathbf{k}})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int d\mathbf{p} \{ V_R^*(\mathbf{p}) N(\mathbf{p} - \mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + N^*(\mathbf{p} - \mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) V_R(\mathbf{p}) \} - \delta m_V Z_V \int d\mathbf{p} V_R^*(\mathbf{p}) V_R(\mathbf{p}). \quad (12.165)$$

Далее мы опустим значок R у перенормированных операторов V -частиц, поскольку мы будем иметь дело только с такими операторами.

Собственные состояния H_0 , соответствующие $q_1 = 1$, $q_2 = 0$ и импульсу \mathbf{p} , определяются уравнением

$$H | \mathbf{p} \rangle = (m_N + \Omega) | \mathbf{p} \rangle, \quad (12.166)$$

где для Ω будут допускаться любые значения между $-\infty$ и $+\infty$, а $| \mathbf{p} \rangle$, как мы видели, имеет вид

$$| \mathbf{p} \rangle = \beta V^*(\mathbf{p}) | 0 \rangle + \int d\mathbf{k} \varphi(\mathbf{k}) N^*(\mathbf{p} - \mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) | 0 \rangle, \quad (12.167)$$

где β — некоторая постоянная. Подставляя это выражение в (12.166), получим два условия для β и φ :

$$(m_V - m_N - \Omega - \delta m_V) \beta = - \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}} \varphi(k), \quad (12.168a)$$

$$(\omega_k - \Omega) \varphi(k) = - \frac{\lambda}{Z_V (2\pi)^{3/2}} \beta \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2\omega_k}}. \quad (12.168b)$$

Условие совместности имеет вид

$$0 = Z_V^{-1} (m_V - m_N - \Omega) \times \\ \times \left[1 + (m_N + \Omega - m_V) \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} \int \frac{dk |f(\omega_k)|^2}{2\omega_k (\omega_k - \Omega) (m_V - m_N - \omega_k)} \right], \quad (12.169)$$

или

$$h(\Omega) = 0. \quad (12.170)$$

Здесь мы использовали значение δm_V , даваемое равенством (12.104), и определение $h(x)$ [равенство (12.159)]. Ясно, что $\Omega = m_V - m_N$ есть корень уравнения, соответствующий состоянию V-частицы с энергией m_V . И наоборот, мы могли бы фиксировать значение δm_V в условии совместности для (12.168), потребовав, чтобы существовал корень со значением $\Omega = m_V - m_N$.

Отметим также, что

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{h(x)}{m_N + x - m_V} \right) = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} \int \frac{dk |f(\omega_k)|^2}{2\omega_k (\omega_k + m_N - m_V)} \frac{1}{(\omega_k - x)^2} > 0, \quad (12.171)$$

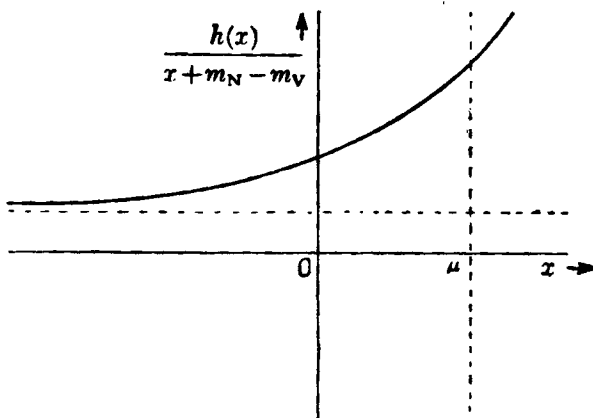
когда $m_N + \mu > m_V \geq 0$ и, кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{m_N + x - m_V} = 1 - \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2} \int \frac{dk |f(\omega_k)|^2}{2\omega_k (m_V - m_N - \omega_k)^2} = 0 \left(\frac{1}{x} \right) = \\ = 1 - \lambda^2 L = \\ = Z_V. \quad (12.172)$$

Поэтому, когда $Z_V > 0$, график функции $\frac{h(x)}{m_N + x - m_V}$ имеет вид, показанный на фиг. 12. В этом случае у уравнения $h(x) = 0$ есть только один корень при $x = m_V - m_N$. Когда же $Z_V < 0$, то имеется дополнительный корень в точке $x = \Omega_0$, причем $\Omega_0 < \mu$ (фиг. 13). Дополнительный корень соответствует новому состоянию в теории. Это состояние

$|G\rangle$ можно построить в явном виде [415]. Оказывается, что значение $\langle 0 | V_R | G \rangle \langle G | V_R^* | G \rangle$ отрицательно и равно $[h'(\Omega_0)]^{-1}$. Далее можно показать, что этот отрицательный член дает в точности такой вклад, который нужен, чтобы совместить (12.160) и (12.154). Новое состояние Челлен и Паули назвали «призрачным» состоянием, или «духом». В присутствии «призрачных» состояний есть только один способ сделать формализм непротиворечивым — принять, что эти состояния появляются с отрицательными нормами. Оказывается, что возникновение таких отрицательных вероятностей означает, что S-матрица не унитарна, и модель при $Z_V < 0$ физически неприемлема. Челлен и Паули [415], Гейзенберг [374], Ферретти [246] и другие (см. например, дискуссию на конференции по физике высоких энергий в ЦЕРНе в 1957 г.) попытались непротиворечиво

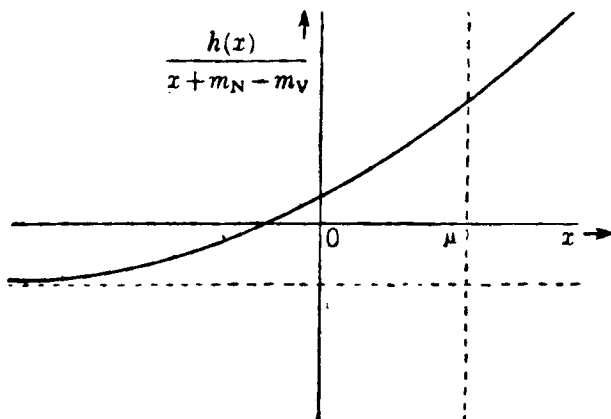
интерпретировать теорию при наличии «духов», используя для представления состояний векторное пространство с индефинитной метрикой¹⁾. Такой подход придал некоторый смысл теории, но только ценой отказа от микропричинности и унитарности S -матрицы. В дальнейшем, когда мы будем ссылаться на модель Ли, мы ограничимся случаем действитель-



Ф и г. 12.

ных и положительных значений Z_V и действительных δm_V , так чтобы не возникала проблема «призраков». Отметим, что это требует обрезания, ибо при $f \rightarrow 1$ постоянная $Z_V < 0$ и трудности с «призраками» неизбежны.

Много внимания уделялось модели Ли в случае, когда $m_V > m_\theta + m_N$, т. е. когда V -частица нестабильна и может распадаться на N - и θ -частицы.



Ф и г. 13.

Тогда модель можно использовать, чтобы испытать на ней определения массы и времени жизни нестабильной частицы. Для общего обсуждения

¹⁾ Упомянутые авторы интересовались не самой моделью Ли, а вопросом о том, можно ли дать физическую интерпретацию системе полей, для которой нужно представлять состояния в векторном пространстве с индефинитной нормой, и, в частности, можно ли достичь этого без слишком решительных изменений обычных правил квантовой механики (см., например, [19]). Для дальнейшего понимания связи модели Ли с более «реалистичными» теориями поля см. статью Форда [272].

описания нестабильных частиц в квантовой теории поля и, в частности, описания нестабильной V-частицы в модели Ли читатель отсылается к статьям Леви [500, 501] (см. также [318, 11, 381]).

§ 3. Другие простые модели

Помимо модели со скалярным полем и модели Ли, существует несколько простых моделей, которые также решаются в том смысле, что можно получить явные выражения для одночастичных состояний. Для некоторых из них можно найти и состояния рассеяния. В числе этих моделей одной из наиболее важных является парная модель Вентцеля [834, 835]. Она состоит из скалярного поля, взаимодействующего с источником. Система описывается следующим гамильтонианом:

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^3x \{ \pi^2 + (\nabla\phi)^2 + \mu^2\phi^2 \} + m_0\psi^*\psi, \quad (12.173a)$$

$$H_I = \frac{\lambda}{2} \int d^3x \int d^3x' U(x) U(x') : \phi(x) \phi(x') : \psi^*\psi, \quad (12.173b)$$

причем

$$[\psi, \psi^*]_+ = 1, \quad [\psi, \psi]_+ = 0 \quad (12.174)$$

и

$$[\phi(x), \pi(x')] = i\delta^{(3)}(x - x'). \quad (12.175)$$

Функция $U(x)$ описывает форму источника. Обычно предполагается, что $U(x) = U(|x|)$; и в этом случае с источником взаимодействуют только мезоны в S-состоянии. Модель полностью решается и обсуждалась многими авторами. В дополнение к первоначальным работам Вентцеля [834, 835] читателю рекомендуется ознакомиться со статьями Клейна и Мак-Кормика [448], а также Шевалье и Ридо [119], в которых подробно обсуждается характер решений в зависимости от λ^2 (λ — константа связи; при $\lambda < 0$ может существовать связанное состояние реального мезона и источника). Родственная модель рассматривалась Энцем [221].

Другой класс решаемых моделей предложили Руигрок и Ван Хов [678]. Они нетривиальным образом обобщили модель Ли, разрешив тяжелым частицам испускать и поглощать произвольное число квантов. В простейшей форме модель описывает взаимодействие между тяжелым полем (полем V-частиц) и легким полем (полем θ -частиц); V-кванты являются фермионами с двумя внутренними состояниями V_1 и V_2 (N- и V-частицы модели Ли), а θ -кванты являются бозонами с массой μ и спином, равным нулю. Гамильтониан допускает следующие элементарные переходы:

$$\begin{aligned} V_1 &\xleftrightarrow{\lambda_1} V_2 + \theta \quad (\text{константа связи } \lambda_1), \\ V_2 &\xleftrightarrow{\lambda_2} V_1 + \theta \quad (\text{константа связи } \lambda_2) \end{aligned}$$

и имеет вид

$$H = H_0 + H_I,$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^2 m_{V_i 0} \int V_i^*(p) V_i(p) dp + \int \omega_k a^*(k) a(k) dk,$$

$$\begin{aligned} H_I = \lambda_1 \int dp \int dk \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2}(2\pi)^3 \omega_k} [V_1^*(p) V_2(p-k) a(k) + \text{э. с.}] + \\ + \lambda_2 \int dp \int dk \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{2}(2\pi)^3 \omega_k} [V_2^*(p) V_1(p-k) a(k) + \text{э. с.}] \quad (12.176) \end{aligned}$$

Когда $\lambda_1 = 0$, модель Руигрока и Ван Хова превращается в модель Ли, а случай $\lambda_1 = \lambda_2$ соответствует рассмотренной в § 1 модели со скалярным полем. При произвольных λ_1, λ_2 одночастичные состояния и соответствующие постоянные перенормировки волновых функций можно получить в конечном виде. Модель подробно изучалась Руижгроком [679—681] (см. также [339, 5071]).

Модель Руигрока и Ван Хова обладает интересными свойствами, о которых написал в своей работе Ван Хов [807] с целью поднять некоторые вопросы о существующем в теории поля описании слабых и сильных взаимодействий. При очень большой, но конечной величине обрезания $\omega_{\text{макс}}$ модель ведет к «наблюдаемым» эффектам двух различных типов. Один тип, называемый «слабыми взаимодействиями», дает эффекты порядка $\mu/\omega_{\text{макс}}$ по отношению к эффектам второго типа, которые называются сильными взаимодействиями. Последние остаются конечными в пределе при $\mu/\omega_{\text{макс}} \rightarrow 0$, т. е. при энергии обрезания, стремящейся к бесконечности, в то время как слабые взаимодействия стремятся к нулю. В пределе $\omega_{\text{макс}} \rightarrow \infty$, когда присутствуют только сильные взаимодействия, система характеризуется определенными свойствами симметрии, но они не точны при больших, но конечных $\omega_{\text{макс}}$, т. е. в присутствии слабых взаимодействий.

Такой подход резко отличается от обычного способа описания сильных и слабых взаимодействий. При обычной формулировке вводится лагранжиан, который в качестве главного члена взаимодействия содержит выражения, соответствующие сильным взаимодействиям и характеризующиеся «большой» константой связи и определенными симметриями. Затем путем добавления к лагранжиану «малых» членов, нарушающих симметрии членов сильного взаимодействия, включаются слабые взаимодействия. В модели Руигрока и Ван Хова гамильтониан содержит только то, что обычно называют сильными взаимодействиями, а различие между сильными и слабыми взаимодействиями тесно связано с обрезанием при больших энергиях. Различие тем самым справедливо лишь в области энергий $E \ll \omega_{\text{макс}}$, и ничего нельзя сказать о свойствах модели и природе взаимодействия при $E \sim \omega_{\text{макс}}$ или $E > \omega_{\text{макс}}$.

Хотя эта модель и нереалистична, тем не менее она указывает другое направление, в котором можно было бы искать объяснение взаимодействий элементарных частиц.

§ 4. Теория Чу и Лоу

Для рассмотренных ранее в этой главе моделей характерно, что в них можно получить точные решения для одночастичных состояний. В некоторых случаях, например в модели Ли, можно рассчитать также и состояния рассеяния. Хотя эти модели нельзя непосредственно применить к описанию физических явлений, они играют важную роль. Например, можно разработать приближенные методы и сравнить результаты приближенных вычислений с точными решениями. Можно полностью исследовать патологические явления, как, например, «призрачные» состояния, и установить их происхождение. Наконец, модели позволяют заглянуть в структуру теорий поля¹⁾.

¹⁾ В этой связи интересна статья Хаага и Лузатто [350], которые показали, что в модели Ли и для скалярного поля, взаимодействующего с фиксированными источниками, уравнения движения для перенормированного поля можно сформулировать в виде дифференциальных уравнений, включающих только конечные величины даже в пределе точечного взаимодействия [т. е. при $f(\omega) = 1$].

Следующая модель, которую мы исследуем, хотя и «проста», но точно не решается. Однако она применима к описанию явлений с участием π -мезонов и нуклонов низких энергий. В действительности важность этой модели проистекает из ее успеха в объяснении рассеяния мезонов на нуклонах и фоторождения мезонов при низких энергиях. В некотором смысле, который мы здесь не будем пытаться истолковывать (см., однако, [606, 183]), модель взаимодействия мезонов с нуклонами, которую мы будем изучать, можно рассматривать как нерелятивистский предел γ_5 -теории, описываемой гамильтонианом

$$H = \int d^3x : \psi^*(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta M_0) \psi(\mathbf{x}) : + \frac{1}{2} \int : \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) + \nabla \boldsymbol{\phi} \cdot \nabla \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) + \mu_0^2 \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) : + \frac{1}{2} G \int d^3x [\psi^*(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\gamma}_5 \psi(\mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad (12.177)$$

где ψ — оператор поля нуклонов (8-компонентный), $\boldsymbol{\phi}$ — оператор поля π -мезонов, а M_0 и μ_0 — соответственно «голые» массы нуклона и мезона. Можно показать, что существуют последовательные канонические преобразования, которые удаляют из H члены, нечетные по дираковским матрицам¹⁾. С точностью до $1/M_0$ преобразованный гамильтониан, не содержащий нечетных дираковских матриц, есть

$$H' \approx \int d^3x : \psi^*(\mathbf{x}) \beta \left(M_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2M_0} \right) \psi(\mathbf{x}) : + H_{\text{мезон}}^{(0)} + \frac{G}{2M_0} \frac{1}{2} \int d^3x \sum_{j=1}^3 [\psi^*(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}_j \boldsymbol{\sigma}, \psi(\mathbf{x})] \cdot \nabla \boldsymbol{\phi}_j(\mathbf{x}) + O\left(\frac{1}{M_0^2}\right). \quad (12.178)$$

В действительности мы сделаем еще один шаг — пренебрежем отдаленными, т. е. членом $\frac{\mathbf{p}^2}{2M_0}$ в $H_{\text{нукл.}}^{(0)}$, и ограничимся случаем, когда есть только один нуклон, локализованный в начале координат. Иначе говоря, в качестве гамильтониана возьмем

$$H = H_0 + H_I, \quad (12.179a)$$

$$H_0 = H_{\text{мезон}}^{(0)} + M_0 \psi^* \psi, \quad (12.179b)$$

$$H_I = \frac{f_0}{\mu} \int d^3x \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) \psi^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \psi = \frac{f_0}{\mu} \int d^3x \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \psi^* \sigma_i \tau_j \psi \partial_i \phi_j(\mathbf{x}). \quad (12.179b)$$

В равенствах (12.179) ψ есть четырехкомпонентный оператор, описывающий нуклон. Он преобразуется как двухкомпонентный спинор как в изотопическом, так и в обычном пространстве. Точнее,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad (12.180a)$$

где ψ_p и ψ_n — двухкомпонентные спиноры в обычном пространстве

$$\psi_p = \begin{pmatrix} \psi_p \uparrow \\ \psi_p \downarrow \end{pmatrix}, \quad \psi_n = \begin{pmatrix} \psi_n \uparrow \\ \psi_n \downarrow \end{pmatrix}. \quad (12.180b)$$

¹⁾ Это обобщение преобразования Фолди—Вотхойзена на случай теории поля. Вспомните также § 7 гл. 10.

Они удовлетворяют соотношениям антикоммутации

$$\{\psi_p, \psi_p^*\} = \{\psi_n, \psi_n^*\} = 1, \quad (12.181a)$$

$$\{\psi_n, \psi_p\} = \{\psi_n^*, \psi_p^*\} = \{\psi_n, \psi_p^*\} = \dots = \{\psi_n^*, \psi_n^*\} = 0. \quad (12.181b)$$

Функция источника $\varrho(\mathbf{x})$ описывает протяженность области мезон-нуклонного взаимодействия. Предполагается, что она сферически симметрична, т. е. $\varrho(\mathbf{x}) = \varrho(|\mathbf{x}|)$, и действительна. Кроме того, обрезаящая функция будет нормирована так, что

$$\int \varrho(\mathbf{x}) d^3x = 1. \quad (12.182)$$

Если ввести компоненту Фурье $v(\mathbf{k}) = v(k^2)$ функции $\varrho(\mathbf{x})$,

$$v(k^2) = \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \varrho(\mathbf{x}) d^3x, \quad (12.183)$$

то в силу равенства (12.182) $v(0) = 1$. Если R_0 — радиус области взаимодействия, т. е. области, в которой $\varrho(\mathbf{x})$ отлична от нуля, тогда при импульсах \mathbf{k} , таких, что $|\mathbf{k}| R_0 \gg 1$, функция $v(k^2)$ быстро спадает к нулю. Во всех дальнейших приложениях мы выберем

$$\begin{aligned} v(k^2) &= 1 \quad \text{при } |\mathbf{k}| \leq k_{\text{макс}}, \\ &= 0 \quad \text{при } |\mathbf{k}| \geq k_{\text{макс}}, \end{aligned} \quad (12.184)$$

где $k_{\text{макс}} \sim 1/R_0$. Величину $\omega_{\text{макс}} = \sqrt{k_{\text{макс}}^2 + \mu^2}$ будем называть энергией обрезания. Радиус R_0 всегда будет предполагаться меньшим $1/\mu$. Он окажется порядка $1/M$, где M — масса нуклона.

Константу связи $f/\mu = G/2M$ называют псевдовекторной константой связи. В теории, описываемой гамильтонианом (12.179), пренебрегается следующими эффектами, которые могут оказать некоторое влияние на мезон-нуклонные явления: а) отдачей нуклона, б) влиянием антинуклонов, в) возможным прямым мезон-мезонным взаимодействием, г) влиянием K -мезонов и гиперонов. При применении модели к мезон-нуклонным взаимодействиям при низких энергиях предполагается поэтому, что эти эффекты малы и что в некотором смысле они включены в обрезаящую функцию $v(k^2)$. Отметим, что гамильтониан (12.179) инвариантен при

- а) пространственных вращениях,
- б) вращениях в изотопическом пространстве,
- в) обращении времени,
- г) пространственных отражениях.

На самом деле вид гамильтониана в сущности полностью определяется приведенными выше требованиями инвариантности и допущением Юкавы о том, что π -мезоны испускаются в элементарном процессе взаимодействия по одному: $N \rightleftharpoons N + \pi$. Член $\nabla\varphi$ появляется из-за того, что при пространственных отражениях φ ведет себя, как псевдоскаляр. Поэтому единственный истинный скаляр, который можно построить из операторов φ , $\psi^*\psi$ и $\psi^*\sigma\psi$, есть $\psi^*(\sigma \cdot \nabla) \tau \cdot \varphi\psi$. В силу требования инвариантности H_I относительно обращения времени в гамильтониане взаимодействия не появляется никаких членов, содержащих $\pi(\mathbf{x})$ [$\pi(\mathbf{x})$ — импульс, канонически сопряженный с $\varphi(\mathbf{x})$]. Инвариантность теории относительно пространственных вращений означает, что полный момент

количества движения системы \mathbf{J} постоянен во времени:

$$J_i = \frac{1}{2} \psi^* \sigma_i \psi - \frac{1}{2} \int d^3x \sum_{jkl} [\pi_l(x), \varepsilon_{ijk} x_j \partial_k \Phi_l(x)]_+, \quad (12.185)$$

причем

$$[J_i, H] = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (12.186)$$

Аналогично, инвариантности теории относительно вращений в изотопическом пространстве соответствует постоянство во времени вектора полного изотопического спина:

$$T_i = \frac{1}{2} \psi^* \tau_i \psi + \int d^3x \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \Phi_j \pi_k, \quad (12.187)$$

причем

$$[T_i, H] = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (12.188)$$

Теория обладает еще одним характерным свойством: только мезоны в P -состоянии взаимодействуют с нуклоном. Проще всего убедиться в этом, если разложить оператор мезонного поля не по одночастичным состояниям с определенным импульсом

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} (a_{ik} e^{ik \cdot x} + a_{ik}^* e^{-ik \cdot x}), \quad (12.189a)$$

$$[a_{ik}, a_{jk}^*] = \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (12.189b)^1$$

а по полной системе одночастичных состояний, характеризуемых полным моментом количества движения, его третьей компонентой и энергией:

$$\begin{aligned} \Phi_i(x) = \sum_{k, l, m} \sqrt{\frac{1}{2\omega_k}} (a_{iklm} Y_{lm}(\theta, \varphi) + \\ + (-1)^m a_{iklm}^* Y_{l, -m}(\theta, \varphi)) \sqrt{\frac{2k^2}{R}} j_l(kr); \quad |\mathbf{k}| = k, \end{aligned} \quad (12.190a)^2$$

$$[a_{iklm}, a_{j'k'l'm'}^*] = \delta_{ij} \delta_{kk'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (12.190b)$$

Если подставить это разложение в выражение для H_I , то легко видеть, что только члены с $l=1$ велики, когда размеры источника меньше дебройлевской волны π -мезона, поскольку функция $j_l(kr)$ только при $l=1$ имеет не равную нулю производную в точке $r=0$. Мезоны с $l \neq 1$ не взаимодействуют с нуклонами и ведут себя как свободные.

Отсутствие взаимодействия в состояниях с $l \neq 1$ можно понять следующим образом. Рассматриваемая модель основана на предположении Юкавы о том, что нуклон испускает и поглощает мезоны по одному в каждом элементарном процессе: $N \rightleftharpoons N + \pi$. Так как при этом полный момент количества движения сохраняется, то собственное значение полного момента $N + \pi$ -системы, $(\frac{1}{2}\sigma + L)^2$, должно быть равно собственному значению полного момента нуклона до испускания мезона,

¹⁾ Заметим, что мы используем другую нормировку операторов по сравнению с нормировкой гл. 7. Такая запись обычна при нековариантном описании системы.

²⁾ R — радиус сферы квантования. Функции $j_l(kr)$ нормированы так, что

$$\frac{2k^2}{R} \int_0^R dr r^2 j_l^2(kr) = 1.$$

т. е. $(\frac{1}{2}\sigma^2)^2$. Следовательно, $l=0$ или 1. Поскольку четность также сохраняется, четность $N+\pi$ -системы, которая есть $(-1)^l(-1)$ [дополнительный множитель (-1) появляется вследствие того, что π -мезон обладает отрицательной внутренней четностью], должна быть равна четности нуклона $(+1)$, так что $l=1$. Отметим, что эти рассуждения справедливы только для нуклона, который удерживается в покое и не испытывает отдачи при испускании π -мезона.

Приведенная выше модель для описания мезон-нуклонных явлений при низких энергиях стала известна как модель Чу, ибо Чу первый указал, что гамильтониан (12.179) действительно может количественно объяснить наблюдаемые черты мезон-нуклонного рассеяния при низких энергиях [120].

Вакуум можно определить как собственное состояние H с собственным значением 0, характеризующееся условиями

$$\psi|0\rangle = a_{ik}|0\rangle = 0 \text{ при всех } i \text{ и всех } k. \quad (12.191)$$

Одномезонное состояние $a_{ik}|0\rangle$ также есть собственная функция H . Соответствующее собственное значение равно ω_k . Одномезонные собственные функции операторов H , T^2 , T_3 , J^2 и J_3 одновременно суть $\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1klm} \pm ia_{2klm})^*|0\rangle$ и $a_{3klm}^*|0\rangle$. Состояние $\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1klm} - ia_{2klm})^*|0\rangle$ соответствует положительно заряженному мезону с моментом количества движения l , третьей компонентой момента m и т. д. В настоящей модели «голое» и физическое одномезонные состояния совпадают.

«Голое» однонуклонное состояние $\psi^*|0\rangle$ уже не является собственным состоянием H . Обозначим посредством $|s, t\rangle_+$ собственные состояния H , соответствующие наличию «физического» нуклона с «наблюдаемой» массой M , где через s и t обозначены собственные значения операторов J_3 и T_3 . Состояние $|\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle_+$ соответствует протону со спином, направленным вверх, $|\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle_+$ — протону со спином, направленным вниз, $|\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle_+$ — нейтрону со спином, направленным вверх, и $|\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\rangle_+$ — нейтрону со спином, направленным вниз. Эти четыре состояния вырождены, причем

$$H|s, t\rangle_+ = M|s, t\rangle_+. \quad (12.192)$$

Здесь M — масса «облаченного» нуклона, отождествляемая с массой физического нуклона. «Голые» однонуклонные состояния обозначим посредством $|s, t\rangle$.

Далее мы будем иметь дело со свойствами либо однонуклонной системы, либо мезон-нуклонной системы, т. е. со свойствами состояний, которые всегда содержат только один нуклон. Поэтому в выражении для H можно опустить операторы ψ и написать гамильтониан для мезон-однонуклонной системы:

$$H = H_{\text{мезон}}^{(0)} + M_0 + H_I, \quad (12.193a)$$

$$\begin{aligned} H_I &= \frac{f_0}{\mu} \int d^3x \varrho(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \\ &= \frac{f_0}{\mu} \int \sum_{i,j=1}^3 d^3x \tau_i \sigma_i \frac{\partial \varphi_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \varrho(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (12.193b)$$

Невозмущенные векторы состояний $|n\rangle$ в пространстве чисел заполнения имеют теперь вид $|s, t; \mathbf{k}_1^+, \dots, \mathbf{k}_m^+; \mathbf{k}_1^-, \dots, \mathbf{k}_n^-; \mathbf{k}_1^0, \dots, \mathbf{k}_r^0\rangle$, причем опе-

ратор σ действует на спиновую переменную s , оператор τ на переменную изотопического спина t , а \mathbf{k}^+ , \mathbf{k}^- , \mathbf{k}^0 обозначают соответственно импульсы положительных, отрицательных и нейтральных мезонов.

Как и в моделях, рассмотренных ранее в этой главе, масса M в уравнении (12.192) введена в теорию «феноменологически». Гамильтониан можно выразить, используя наблюдаемую массу M :

$$H = M_0 + H_{\text{мезон}}^{(0)} + H_I \quad (12.194a)$$

$$= (M_0 + \Delta M) + H_{\text{мезон}}^{(0)} + H_I - \Delta M \quad (12.194б)$$

$$= M + H_{\text{мезон}}^{(0)} + (H_I - \Delta M) = M + H_{\text{мезон}}^{(0)} + H'_I, \quad (12.194в)$$

где ΔM — изменение массы, обусловленное возмущением. Так как M_0 — ненаблюдаемая величина, то этот параметр всегда можно выбрать так, чтобы сумма $M_0 + \Delta M$ была равна наблюдаемой массе. В дальнейшем окажется полезным рассматривать $M + H_{\text{мезон}}^{(0)} = H_0$ в качестве гамильтониана свободного поля, а $H'_I = H_I - \Delta M$ как гамильтониан взаимодействия. При таком разделении H на свободную часть и возмущение «голые» однонуклонные состояния имеют ту же массу, что и «физический» нуклон. Вообще такое разбиение предполагает, что H имеет тот же непрерывный спектр, что и H_0 . Вспомним, что это было одним из допущений в формализме Липпмана — Швингера.

Для однонуклонного состояния $|s, t\rangle_+$ можно получить интегральное уравнение [849]. Для этого заметим, что если разбить $|s, t\rangle_+$ на вектор, параллельный невозмущенному состоянию $|s, t\rangle$, и вектор, ортогональный $|s, t\rangle$, т. е. если написать¹⁾

$$|s, t\rangle_+ = \sqrt{Z_2} |s, t\rangle + |\chi\rangle, \quad (12.195)$$

причем

$$P_N |\chi\rangle = 0, \quad (12.196a)$$

$$P_N = \sum_{s, t} |s, t\rangle \langle s, t|, \quad (12.196б)$$

тогда

$$(H_0 - M) |s, t\rangle_+ = (H_0 - M) |\chi\rangle. \quad (12.197)$$

Множитель $Z_2^{1/2}$ является постоянной нормировки. Так как

$$(H_0 + H_I) |s, t\rangle_+ = M |s, t\rangle_+,$$

то

$$(H_0 - M) |\chi\rangle = -H'_I |s, t\rangle_+. \quad (12.198)$$

Отметим также, что $P_N H'_I |s, t\rangle_+ = 0$, поскольку P_N и H_0 коммутируют. Вспоминая, что вектор $|\chi\rangle$ не имеет составляющей вдоль $|s, t\rangle$, и решая уравнение (12.198), находим

$$|\chi\rangle = (1 - P_N) \frac{1}{M - H_0} H'_I |s, t\rangle_+, \quad (12.199)$$

¹⁾ Свойства инвариантности H_I гарантируют, что в разложении (12.195) появятся невозмущенные однонуклонные состояния $|s, t\rangle$ только с теми же квантовыми числами, что и у $|s, t\rangle_+$.

так что

$$|s, t\rangle_+ = Z_2^{1/2} |s, t\rangle + (1 - P_N) \frac{1}{M - H_0} H_I' |s, t\rangle_+. \quad (12.200)$$

Итерируя это уравнение, получим для физического состояния $|s, t\rangle_+$ разложение теории возмущений в форме Вигнера — Бриллюэна, выраженное с помощью «голых» состояний:

$$|s, t\rangle_+ = Z_2^{1/2} \left[1 + (1 - P_N) \frac{1}{M - H_0} H_I' + \right. \\ \left. + \frac{(1 - P_N)}{M - H_0} H_I' \frac{(1 - P_N)}{M - H_0} H_I' + \dots \right] |s, t\rangle. \quad (12.201)$$

Изменение (сдвиг) массы определяется теперь из равенства

$$\langle s, t | H - H_0 | s, t \rangle_+ = (M - M) \langle s, t | s, t \rangle_+ = 0 = \\ = \langle s, t | H_I' | s, t \rangle_+ = \langle s, t | H_I - \Delta M | s, t \rangle_+, \quad (12.202)$$

откуда, поскольку $\langle s, t | s, t \rangle_+ = Z_2^{1/2}$,

$$\Delta M = Z_2^{-1/2} \langle s, t | H_I | s, t \rangle_+. \quad (12.203)$$

Если подставить в (12.203) разложение $|s, t\rangle_+$ по теории возмущений [равенство (12.201)], то легко последовательно вычислить вклады в ΔM от различных порядков теории возмущений. Изменение массы в первом порядке равно нулю, так как оператор H_I либо рождает, либо уничтожает один мезон:

$$\Delta M^{(1)} = \langle s, t | H_I | s, t \rangle = 0. \quad (12.204)$$

И вообще $\langle s', t' | H_I | s, t \rangle = 0$. Изменение массы во втором порядке теории возмущений есть

$$\Delta M^{(2)} = \langle s, t | H_I (1 - P_N) \frac{1}{M - H_0} H_I | s, t \rangle, \quad (12.205a)$$

$$= \sum_{\substack{|n\rangle \\ \neq \text{однонуклонному} \\ \text{состоянию}}} \frac{\langle s, t | H_I | n \rangle \langle n | H_I | s, t \rangle}{M - \epsilon_n}; \quad (12.205b)$$

где $|n\rangle$ — собственные состояния H_0 с собственными значениями ϵ_n . Наличие оператора проектирования $1 - P_N$ в (12.205a) требует, чтобы в сумме по $|n\rangle$ однонуклонные состояния были опущены. Благодаря свойствам симметрии H_I в сумму дают вклад лишь состояния $|n\rangle$, у которых $J = 1/2$, $J_3 = s$ и $T = 1/2$, $T_3 = t$. Изменение массы во втором порядке просто рассчитать, используя выражение (12.205a). Заметим сначала, что гамильтониан взаимодействия можно кратко записать в виде

$$H_I = \sum_{jk} (a_{jk} V_{jk}^{(0)} + a_{jk}^* V_{jk}^{(0)*}), \quad (12.206)$$

где

$$V_{jk}^{(0)} = \frac{f_0}{\mu} \frac{iv(k^2)}{\sqrt{2}(2\pi)^3 \omega_k} \sigma \cdot k \tau_j. \quad (12.207)$$

Равенство (12.206) получено подстановкой разложения (12.189) в (12.193б). В выражении (12.205a) для изменения массы во втором порядке из H_I , стоящего справа, дает вклад только член $\sum_k V_{jk}^{(0)*} a_{jk}^*$, поскольку $a_{jk} |s, t\rangle = 0$

для всех j и k . Аналогично, из H_I слева дает вклад только член $\sum_k V_{jk}^{(0)} a_{jk}$, так что

$$\Delta M^{(2)} = \langle s, t | \sum_{k, r, k', r'} a_{rk} V_{rk}^{(0)} \frac{1}{M-H_0} V_{r'k'}^{(0)*} a_{r'k'}^* | s, t \rangle, \quad (12.208a)$$

$$= \langle s, t | \sum_{k, r, k', r'} a_{rk} a_{r'k'}^* V_{rk}^{(0)} V_{r'k'}^{(0)*} \frac{1}{M-H_0-\omega_k} | s, t \rangle, \quad (12.208б)$$

$$= \langle s, t | \sum_{k, r} \frac{V_{rk}^{(0)} V_{rk}^{(0)*}}{-\omega_k} | s, t \rangle. \quad (12.208в)$$

При переходе от (12.208a) к (12.208б) мы использовали равенство (12.118), тот факт, что $V_{rk}^{(0)}$ и a_{rk} коммутируют и что V_{rk} и H_0 коммутируют. При переходе к (12.208в) были использованы перестановочные соотношения $[a_{rk}, a_{r'k'}^*] = \delta_{rr'} \delta^{(3)}(k-k')$ и то, что $a_{rk} | s, t \rangle = 0$. Следовательно, во втором порядке

$$\begin{aligned} \Delta M^{(2)} &= \langle s, t | \frac{f_0^2}{\mu^2} \int d^3k \sum_r \frac{(\sigma \cdot k)(\sigma \cdot k) \tau_r \tau_r}{-\omega_k} \frac{|v(k^2)|^2}{2(2\pi)^3 \omega_k} | s, t \rangle = \\ &= -\frac{3(4\pi)}{2(2\pi)^3} \frac{f_0^2}{\mu^2} \int_0^\infty k^2 dk \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} |v(k^2)|^2. \end{aligned} \quad (12.209)$$

Постоянная нормировки $\sqrt{Z_2}$ определяется из требования

$${}_+ \langle s, t | s' t' \rangle_+ = \delta_{ss'} \delta_{tt'}, \quad (12.210)$$

откуда следует

$$Z_2 = 1 - {}_+ \langle s, t | H_I (1 - P_N) \frac{1}{(H_0 - M)^2} H_I | s, t \rangle_+. \quad (12.211)$$

Постоянная нормировки $\sqrt{Z_2}$ равна также

$$\sqrt{Z_2} = \langle s, t | s, t \rangle_+, \quad (12.212)$$

т. е. амплитуде вероятности найти «голое» нуклонное состояние в физическом нуклонном состоянии. В низшем порядке по H_I равенство (12.211) дает

$$\begin{aligned} Z_2 &= 1 - Z_2 \langle s, t | \sum_{r, k} V_{rk}^{(0)} a_{rk} V_{rk}^{(0)*} a_{rk}^* \frac{1}{\omega_k} | s, t \rangle = \\ &= 1 - Z_2 \left(\frac{3f_0^2}{2(2\pi)^3 \mu^2} \int d^3k \frac{v^2(k^2)}{\omega_k^3} \right), \end{aligned} \quad (12.213a)$$

или

$$\begin{aligned} Z_2 &= \left(1 + \frac{3f_0^2}{2(2\pi)^3 \mu^2} \int d^3k \frac{v^2(k^2)}{\omega_k^3} \right)^{-1} \approx \\ &\approx 1 - \frac{3f_0^2}{2(2\pi)^3 \mu^2} \int d^3k \frac{v^2(k^2)}{\omega_k^3} \pm \dots \end{aligned} \quad (12.213б)$$

при $f_0^2/\mu^2 \ll 1$. Физическое однонуклонное состояние в первом порядке теории возмущений есть

$$\begin{aligned} |s, t\rangle_+ &= |s, t\rangle + (1 - P_N) \frac{1}{M - H_0} H_I |s, t\rangle = \\ &= |s, t\rangle + \sum_{k, r} -\frac{1}{\omega_k} V_{rk}^{(0)*} a_{rk}^* |s, t\rangle. \end{aligned} \quad (12.214)$$

Это состояние имеет не равную нулю амплитуду вероятности найти «голый» нуклон и (виртуальный) мезон. С точностью до f_0/μ оно правильно нормировано.

Вклады высших порядков в изменение массы, постоянная нормировки и т. д. рассчитываются аналогично. В действительности обсуждение разложений по теории возмущений удобнее всего проводить, используя графы (подробнее см. [849]). Так, члену собственной энергии $\Delta M^{(2)}$ отвечает диаграмма, показанная на фиг. 14. Она соответствует испусканию и поглощению мезона с импульсом k . Нуклон изображается прямой горизонтальной линией, а мезон — пунктирной линией. Пунктирная линия, кончающаяся на нуклонной линии, изображает



Фиг. 14.

поглощение или испускание мезона. Так, на графе, соответствующем собственной энергии во втором порядке, вершина a соответствует члену $\langle n | H_I | s, t \rangle$ в (12.205) и изображает испускание мезона; аналогично, вершина b соответствует члену $\langle s, t | H_I | n \rangle$. Начальное состояние на

диаграмме показано справа, а конечное состояние — слева (как и в матричном элементе, которому соответствует диаграмма). Наоборот, если дана диаграмма фиг. 14, то можно сразу выписать соответствующий матричный элемент. Мы здесь не будем углубляться в метод графов, поскольку он ясно изложен в прекрасной обзорной статье Вика [849] и в работе Чу [120]. Метод графов¹⁾ будет в полной мере изложен для релятивистских теорий (см. гл. 13). Кроме того, в модели Чу нас прежде всего интересуют методы, не основанные на теории возмущений.

Наша следующая задача — рассмотреть предсказания модели Чу для рассеяния мезонов на нуклонах. Сначала мы кратко изложим методы теории возмущений, а затем методы, не основанные на теории возмущений, принадлежащие Лоу [512], Виду [849] и Чу и Лоу [121].

Рассмотрим сначала рассеяние в низшем порядке теории возмущений, т. е. борновское приближение. Нам нужно вычислить амплитуду рассеяния мезона из начального состояния $|k, i; s, t\rangle = a_{ik} |s, t\rangle$, в котором мезон имеет импульс k и индекс изотопического спина i , в конечное состояние $|k', j'; s', t'\rangle = a_{j'k'} |s', t'\rangle$. Так как H_0 и H_I инвариантны относительно вращений в изотопическом пространстве, то матричный элемент перехода $R_{ji} = \langle j | R | i \rangle$, где

$$R_{ji} = (H_I)_{ji} + \sum_{j(\neq i)} (H_I)_{jj} \frac{1}{E_i - E_j + i\epsilon} (H_I)_{ji} + \dots, \quad (12.215)$$

равен нулю, если начальное и конечное состояния не являются состояниями с одним и тем же полным изотопическим спином и его третьей компонентой. Поэтому полезно классифицировать состояния по значениям T^2 и T_3 .

Легко построить собственные состояния T^2 и T_3 , которые соответствуют нуклону и одному мезону, не взаимодействующим друг с другом. Так как они состоят из состояний с $T=1$ (мезон) и $T=1/2$ (нуклон), то будет два ряда мезон-нуклонных состояний: один с $T=3/2$, а другой с $T=1/2$. Ясно, что состояние с $T=3/2$ и $T_3=3/2$ соответствует состоянию $|p; \pi^+\rangle$, т. е. состоянию, составленному из протона и поло-

¹⁾ Метод графов используются во многих прикладных дисциплинах. Математическую теорию графов см. в книге Бержа [884]. — Прим. ред.

жительно заряженного мезона.

Таким образом, если опустить импульсы частиц, то

$$|T = \frac{3}{2}, T_3 = \frac{3}{2}\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |p; \pi^+\rangle. \quad (12.216)$$

Поскольку для системы мезон — нуклон

$$T_- = \tau_- + \sqrt{2} \int d^3k \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1k} + ia_{2k})^* a_{3k} - a_{3k}^* \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1k} - ia_{2k}) \right], \quad (12.217)$$

то находим

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |p; \pi^0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |n; \pi^+\rangle, \quad (12.218)$$

$$|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |p; \pi^-\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |n; \pi^0\rangle, \quad (12.219)$$

$$|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |n; \pi^-\rangle. \quad (12.220)$$

Общие фазы состояний здесь выбраны в согласии с выбором фаз в книге Бете и Гофмана [54]. Состояние с $T = 1/2$, $T_3 = 1/2$ должно быть линейной комбинацией $|p; \pi^0\rangle$ и $|n; \pi^+\rangle$, которая ортогональна состоянию $|\frac{3}{2}, 1/2\rangle$. Следовательно,

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |p; \pi^0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |n; \pi^+\rangle \quad (12.221)$$

и

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |p; \pi^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |n; \pi^0\rangle. \quad (12.222)$$

Обратив эти равенства, получим

$$|p; \pi^-\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \quad (12.223)$$

и

$$|p; \pi^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \quad (12.224)$$

Так как оператор перехода R коммутирует с T_i ($i=1, 2, 3$), то амплитуда рассеяния $R(T', T'_3; \mathbf{k}, \mathbf{k}', s', s)$, определенная равенством $\langle T'', T''_3; \mathbf{k}'', s'' | R | T', T'_3; \mathbf{k}', s' \rangle = R(T', T'_3; \mathbf{k}'', \mathbf{k}', s'', s') \delta_{T''T'} \delta_{T''_3 T'_3}$ (12.225)

и соответствующая рассеянию из начального состояния с полным изотопическим спином T' и его проекцией T'_3 , импульсом мезона \mathbf{k}' и проекцией спина нуклона s' в конечное состояние с теми же изотопическими квантовыми числами, но с импульсом мезона \mathbf{k}'' и проекцией спина нуклона s'' , не зависит от T'_3 .

• Доказательство:

$$\begin{aligned} \langle T', T'_3 | T_- R T_+ | T', T'_3 \rangle &= \\ &= (T' - T'_3) \langle T', T'_3 + 1 | R | T', T'_3 + 1 \rangle = \\ &= \langle T', T'_3 | R T_- T_+ | T', T'_3 \rangle = \\ &= \langle T', T'_3 | R (T'^2 - T'^2 - T_3) | T', T'_3 \rangle = \\ &= (T' - T'_3) \langle T', T'_3 + 1 | R | T', T'_3 \rangle \end{aligned} \quad (12.226a)$$

и, следовательно,

$$\langle T', T'_3 + 1 | R | T', T'_3 + 1 \rangle = \langle T', T'_3 | R | T', T'_3 \rangle. \quad (12.2266)$$

Можно также сказать, что R есть скаляр в изотопическом пространстве, и поэтому, согласно теореме Вигнера — Экарта (см., например, [671] или [216]), имеют место правила отбора $\Delta T = 0$, $\Delta T_3 = 0$ и матричный элемент не зависит от T'_3 . Таким образом, рассеяние мезонов нуклонами описывается амплитудами $R(T; \mathbf{k}, \mathbf{k}', s', s)$, где $T = 3/2$ или $1/2$. Связь между амплитудами рассеяния для экспериментально наблюдаемых процессов

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p, \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p, \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^0 + n \text{ (перезарядка)} \end{aligned}$$

и амплитудами с определенным изотопическим спином следующая:

$$R(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p) = -\langle \pi^+; p | \pi^+; p \rangle_+ = -\left\langle \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle_+ = R(3), \quad (12.227)$$

где $R(3)$ — сокращенная запись $R(3/2; \mathbf{k}', \mathbf{k}, s', s)$. Мы опустили зависимость амплитуды рассеяния R от всех переменных, кроме T . Аналогично,

$$\begin{aligned} R(\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p) &= \\ &= -\langle \pi^-; p | \pi^-; p \rangle_+ = \\ &= \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right| + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right| \right\} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_+ + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_+ \right\} = \frac{1}{3} \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_+ + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{3} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_+ \right\rangle = \frac{1}{3} R(3) + \frac{2}{3} R(1) \end{aligned} \quad (12.228)$$

и

$$\begin{aligned} R(\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n) &= \\ &= -\langle \pi^-; p | \pi^0; n \rangle_+ = \\ &= \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right| + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right| \right\} \times \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_+ - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_+ \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{9}} (R(3) - R(1)). \end{aligned} \quad (12.229)$$

Дифференциальные сечения процессов (12.227) — (12.229) выражаются формулой

$$\frac{d\sigma_{ba}}{d\Omega} = \frac{\omega^2 |R_{ba}|^2}{(2\pi)^2}, \quad (12.230)$$

где R_{ba} — матричный элемент R , соответствующий процессу $a \rightarrow b$.

Формула (12.230) выводится следующим знакомым путем. Вспомним, что вероятность перехода за единицу времени из состояния $|i\rangle$

в состоянии $|f\rangle$ есть

$$\omega_{fi} = 2\pi\delta(E_f - E_i) |R_{fi}|^2. \quad (12.231)$$

Нас интересует только вероятность перехода в совокупность конечных состояний с энергией около E_f и с импульсами между \mathbf{k}_f и $\mathbf{k}_f + d\mathbf{k}_f$. Эта вероятность равна

$$\begin{aligned} w &= \int dn_f 2\pi\delta(E_f - E_i) |R_{fi}|^2 = \\ &= 2\pi \left(\frac{dn_f}{dE} \right)_{E=E_f} |R_{fi}|^2. \end{aligned} \quad (12.232)$$

Сечение рассеяния связано с w соотношением

$$d\sigma = \frac{w}{v_i}, \quad (12.233)$$

где $v_i = k_i/\omega_i$ есть скорость падающего мезона. Число конечных состояний с импульсами между \mathbf{k} и $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$ есть

$$dn = \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad (12.234)$$

так что ¹⁾

$$\varrho(E_f) = \left(\frac{dn_f}{dE} \right)_{E=E_f} = \frac{k_f^2 dk_f d\Omega}{dE_f (2\pi)^3} = \frac{k_f \omega_f d\Omega}{(2\pi)^3}, \quad (12.235)$$

ибо $E = \omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$.

Таким образом, вычисление сечения сводится к вычислению $|R_{fi}|^2$. Несколько проще рассчитать амплитуду $\langle \mathbf{k}', i'; s', t' | R | \mathbf{k}, i; s, t \rangle$, чем амплитуду

$$\begin{aligned} \langle T, T_3; \mathbf{k}', s' | R | T, T_3; \mathbf{k}, s \rangle &= R(T, T_3; \mathbf{k}', \mathbf{k}; s', s) = \\ &= R_{s's}(T; \mathbf{k}', \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (12.236)$$

Свяжем поэтому $R_{s's}(T, T_3; \mathbf{k}', \mathbf{k})$ и амплитуды $\langle \mathbf{k}', i'; s't' | R | \mathbf{k}, i; s, t \rangle$ с помощью операторов проецирования для состояний с определенным полным изотопическим спином. Конечно, можно было бы и непосредственно использовать коэффициенты Клебша-Жордана, чтобы преобразовать результаты из i, t -представления в представление, в котором T и T_3 диагональны. Поэтому материал, изложенный на нескольких следующих страницах, включен только для полноты.

Стандартными методами теории преобразований получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}', r'; s', t' | R | \mathbf{k}, r; s, t \rangle &= \\ &= \sum_{T, T_3} \langle r', t' | T, T_3 \rangle \langle T, T_3; \mathbf{k}', s' | R | T, T_3; \mathbf{k}, s \rangle \langle T, T_3 | r, t \rangle = \\ &= \sum_{T, T_3} \langle r', t' | T, T_3 \rangle R_{s's}(T; \mathbf{k}', \mathbf{k}) \langle T, T_3 | r, t \rangle = \\ &= \sum_T \langle r', t' | P(T) | r, t \rangle R_{s's}(T; \mathbf{k}', \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (12.237)$$

¹⁾ Для удобства мы взяли единичный нормировочный объем $V=1$. В противном случае сечение, которое связано с w соотношением $d\sigma = \frac{w}{v_i}$ падающий поток, было бы равно Vw/v_i , а $dn = V d\mathbf{k}/(2\pi)^3$, но $|R_{fi}|^2 \sim 1/V^2$, так что V в конечном выражении для $d\sigma$ не входит.

где $\langle r', t' | T, T_3 \rangle$ — коэффициенты Клебша-Жордана, а

$$P(T) = \sum_{T_3} |T, T_3\rangle \langle T, T_3| \quad (12.238a)$$

— оператор проектирования для состояния с полным изотопическим спином T , так что

$$\langle r', t' | P(T) | r, t \rangle = \sum_{T_3} \langle r', t' | T, T_3 \rangle \langle T, T_3 | r, t \rangle. \quad (12.238б)$$

В дальнейшем будет удобно использовать изоморфизм между $|T$ и $t + 1/2 \tau$ в подпространстве, соответствующем одному мезону и одному нуклону. Пространство изотопического спина для системы мезон-нуклон образовано векторами $|r, t\rangle$, которые можно представить как прямые произведения трехмерных (мезонных) векторов $|r\rangle$ и двухкомпонентных спиноров (нуклонных) $|t\rangle$, на которые действуют операторы изотопического спина мезона (t) и нуклона (τ).

Операторы проектирования для состояний с $T = 3/2$ и $T = 1/2$ имеют вид

$$P_T \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{2 + t \cdot \tau}{3}, \quad (12.239)$$

$$P_T \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1 - t \cdot \tau}{3}, \quad (12.240)$$

причем

$$P_T \left(\frac{3}{2} \right) + P_T \left(\frac{1}{2} \right) = 1. \quad (12.241)$$

Доказательство: Оператор $T^2 = (t + 1/2 \tau)^2 = t^2 + t \cdot \tau + 1/4 \tau^2 = 2 + t \cdot \tau + 3/4$ имеет собственное значение $15/4$ для состояний с $T = 3/2$ и собственное значение $3/4$ для состояний с $T = 1/2$. Поэтому

$$t \cdot \tau = 1 \quad \text{для } T = \frac{3}{2},$$

$$t \cdot \tau = -2 \quad \text{для } T = \frac{1}{2}.$$

Требую, чтобы $[P_T(T)]^2 = P_T(T)$ и чтобы выполнялось равенство (12.241), легко получить выражения (12.239) и (12.240).

Матричный элемент $\langle r', t' | P_T(T) | r, t \rangle$ можно упростить, если вспомнить, что

$$\langle r' | t_j | r \rangle = -i \varepsilon_{j r' r}. \quad (12.242)$$

Отсюда, например, следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \langle r', t' | 1 - t \cdot \tau | r, t \rangle &= \frac{1}{3} \langle t' | \delta_{r r'} + i \varepsilon_{j r' r} \tau_j | t \rangle = \\ &= \frac{1}{3} \langle t' | \delta_{r r'} - \frac{1}{2} [\tau_r, \tau_{r'}] | t \rangle = \\ &= \langle t' | \frac{1}{3} \tau_r \tau_{r'} | t \rangle. \end{aligned} \quad (12.243)$$

Здесь мы использовали перестановочные соотношения $[\tau_r, \tau_r] = 2i \sum_j \varepsilon_{j r' r} \tau_j$ и $[\tau_{r'}, \tau_r]_+ = 2\delta_{r r'}$. Аналогично,

$$\frac{1}{3} \langle r', t' | 2 + t \cdot \tau | r, t \rangle = \frac{1}{2} \langle t' | \tau_r \tau_{r'} + \frac{1}{3} \tau_r \tau_r | t \rangle \quad (12.244)$$

и, следовательно,

$$\langle t' | \tau_r \tau_{r'} | t \rangle = \langle r', t' | 2P_T \left(\frac{3}{2} \right) - P_T \left(\frac{1}{2} \right) | r, t \rangle, \quad (12.245a)$$

$$\langle t' | \tau_r \tau_r | t \rangle = \langle r', t' | 3P_T \left(\frac{1}{2} \right) | r, t \rangle. \quad (12.245b)$$

Обозначим через $\mathcal{J}_{1/2}$ и $\mathcal{J}_{3/2}$ следующие величины:

$$\mathcal{J}_{1/2}(r', r) = \frac{1}{3} \delta_{r'r} + \frac{1}{3} \frac{1}{2} [\tau_{r'}, \tau_r], \quad (12.246a)$$

$$\mathcal{J}_{3/2}(r', r) = \frac{2}{3} \delta_{r'r} - \frac{1}{3} \frac{1}{2} [\tau_{r'}, \tau_r]. \quad (12.246b)$$

Они являются операторами проектирования [в том смысле, что $\sum_{r'} \mathcal{J}_T(r', r'') \mathcal{J}_{T'}(r'', r) = \delta_{TT'} \mathcal{J}_T(r', r)$] для состояний с изотопическим спином $1/2$ и $3/2$ в пространстве изотопического спина нуклонов.

Полностью аналогичную процедуру можно применить к состояниям с определенным моментом количества движения. Поскольку \mathbf{J}^2 и J_3 , так же, как и оператор четности, коммутируют с H , то начальные и конечные состояния удобно классифицировать по полному моменту, его третьей компоненте и четности системы. Так как R и J_i коммутируют, амплитуда рассеяния

$$\begin{aligned} R(T, T_3; J, J_3; \omega_{\mathbf{k}}) &= \langle T, T_3; J, J_3, \omega(\mathbf{k}_f) | R | T, T_3; J, J_3; \omega(\mathbf{k}_i) \rangle = \\ &= R(T, J; \omega(\mathbf{k})) = R_{TJ}(\omega_{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (12.247)$$

не зависит от J_3 ; [$\omega = \omega(\mathbf{k}_f) = \omega(\mathbf{k}_i) = \omega_{\mathbf{k}}$ есть энергия мезона]. Поэтому

$$\begin{aligned} &\langle T, T_3; \mathbf{k}', s' | R | T, T_3; \mathbf{k}, s \rangle = \\ &= \sum_{J_3} \langle \mathbf{k}', s' | J, J_3 \rangle \langle T, T_3; J, J_3, \omega(\mathbf{k}_f) | R | T, T_3; J, J_3; \omega(\mathbf{k}_i) \rangle \langle J, J_3 | \mathbf{k}, s \rangle = \\ &= \sum_{J_3} \langle \mathbf{k}', s' | J, J_3 \rangle \langle J, J_3 | \mathbf{k}, s \rangle R(T, J; \omega_{\mathbf{k}}) = \\ &= \sum_J \langle \mathbf{k}', s' | P_J(J) | \mathbf{k}, s \rangle R_{TJ}(\omega_{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (12.248)$$

где

$$P_J(J) = \sum_{J_3} |J, J_3\rangle \langle J, J_3| \quad (12.249)$$

— оператор проектирования для состояния с полным моментом J .

Мы уже отмечали, что только мезоны с $l=1$ взаимодействуют с нуклонами. Поэтому мы будем интересоваться лишь операторами проектирования $P_J(3/2)$ и $P_J(1/2)$, поскольку рассеяние происходит только в состояниях с $J=3/2$ и $J=1/2$. Обозначим через l орбитальный момент количества движения мезона, а через $1/2 \sigma$ — спиновый момент нуклона. В мезон-нуклонном подпространстве оператор \mathbf{J} изоморфен $l+1/2 \sigma$. Следовательно, в полной аналогии со случаем изотопического спина

$$P_J \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{2+l \cdot \sigma}{3}, \quad (12.250)$$

$$P_J \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1-l \cdot \sigma}{3}. \quad (12.251)$$

Состояния $|\mathbf{k}, s\rangle$ являются прямыми произведениями мезонных состояний $|\mathbf{k}\rangle = |\omega(\mathbf{k}), \theta, \varphi\rangle$ и нуклонных спиноров $|s\rangle$. Через θ, φ мы обозначили углы, определяющие направление вектора \mathbf{k} . Матричный элемент $\langle \omega(\mathbf{k}'), \theta', \varphi', s' | P_J(3/2) | \omega(\mathbf{k}), \theta, \varphi, s \rangle$ можно вычислить непосредственно. Если, как и ранее, принять такую нормировку, что

$$\langle \theta, \varphi | l m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\omega k}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (12.252)$$

($k = |\mathbf{k}|$), то при $\omega(\mathbf{k}') = \omega(\mathbf{k})$, ($k = k'$)

$$\langle \mathbf{k}', s' | P_J\left(\frac{3}{2}\right) | \mathbf{k}, s \rangle = \frac{1}{4\pi k^2 \sqrt{k'\omega'k\omega}} \langle s' | 2\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} - i([\mathbf{k}' \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}) | s \rangle \quad (12.253)$$

и

$$\langle \mathbf{k}', s' | P_J\left(\frac{1}{2}\right) | \mathbf{k}, s \rangle = \frac{1}{4\pi k^2 \sqrt{k'\omega'k\omega}} \langle s' | 2\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} + i([\mathbf{k}' \times \mathbf{k}] \cdot \boldsymbol{\sigma}) | s \rangle. \quad (12.254)$$

Используя равенство

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}') = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' + i([\mathbf{k} \times \mathbf{k}'] \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (12.255)$$

находим

$$\langle s' | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}') | s \rangle = \frac{4\pi k^2}{3} \sqrt{k'\omega'k\omega} \langle \theta', \varphi', s' | 2P_J\left(\frac{3}{2}\right) - P_J\left(\frac{1}{2}\right) | \theta, \varphi, s \rangle, \quad (12.256a)$$

и

$$\langle s' | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}')(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) | s \rangle = 4\pi k^2 \sqrt{k'\omega'k\omega} \langle \theta', \varphi', s' | P_J\left(\frac{1}{2}\right) | \theta, \varphi, s \rangle. \quad (12.256b)$$

Введем также операторы

$$\mathcal{Y}_{1/2}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1 + i(\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_1]), \quad (12.257a)$$

$$\mathcal{Y}_{3/2}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) = 2\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1 - i(\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_1]), \quad (12.257b)$$

которые являются операторами проектирования для состояний с $J = 1/2$ и $J = 3/2$ в пространстве обычного спина нуклона, в том смысле, что

$$\int d\Omega_{\mathbf{k}} \mathcal{Y}_J(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \mathcal{Y}_{J'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = 4\pi \delta_{JJ'} \mathcal{Y}_J(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1). \quad (12.257b)$$

Теперь мы можем вычислить матрицу перехода. Во втором порядке теории возмущений

$$R_{fi} = \langle \mathbf{k}', r'; s', t' | \Delta M^{(2)} | \mathbf{k}, r; s, t \rangle + \langle \mathbf{k}', r'; s', t' | H_I \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} H_I | \mathbf{k}, r; s, t \rangle, \quad (12.258)$$

где $\Delta M^{(2)}$ дается равенством (12.208b) и

$$H_I = \sum_{j\mathbf{k}} (a_{j\mathbf{k}} V_{j\mathbf{k}}^{(0)} + a_{j\mathbf{k}}^* V_{j\mathbf{k}}^{(0)*}), \quad (12.259a)$$

$$V_{j\mathbf{k}}^{(0)} = i \frac{f_0}{\mu} \frac{v(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}(2\pi)^3}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \tau_j. \quad (12.259b)$$

Отметим, что H_I рождает или уничтожает один мезон, а оператор $H_I G_{0+}(E_i) H_I$, где

$$G_{0+}(E) = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon}, \quad (12.260)$$

должен связывать в (12.258) одномезонное состояние с одномезонным. Поэтому, если оператор H_I , стоящий справа, рождает мезон, то H_I , стоящий слева, должен уничтожить мезон, поскольку оператор $G_{0+}(E_i)$ диагонален. Аналогично, если первый из операторов H_I уничтожает мезон, то второй должен рождать мезон в конечном состоянии. Более конкретно, поскольку

$$\frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon} a_{ik} = a_{ik} \frac{1}{E_i - H_0 + \omega_k + i\varepsilon}, \quad (12.261a)$$

$$\frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon} a_{ik}^* = a_{ik}^* \frac{1}{E_i - H_0 - \omega_k + i\varepsilon}, \quad (12.261b)$$

и состояние $|\mathbf{k}, r; s, t\rangle$ есть собственное состояние H_0 с собственным значением $M + \omega_k$, имеем

$$R_{fi} = \langle \mathbf{k}', r'; s', t' | \Delta M^{(2)} + \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}', j, j'} \left\{ \frac{a_{j'q}^* V_{j'q}^{(0)*} a_{jq} V_{jq}^{(0)}}{E_i - \omega_k + \omega_q - M + i\varepsilon} + \frac{a_{j'q'} V_{j'q'}^{(0)} a_{jq}^* V_{jq}^{(0)*}}{E_i - \omega_k - \omega_q - M + i\varepsilon} \right\} | \mathbf{k}, r; s, t \rangle. \quad (12.262)$$

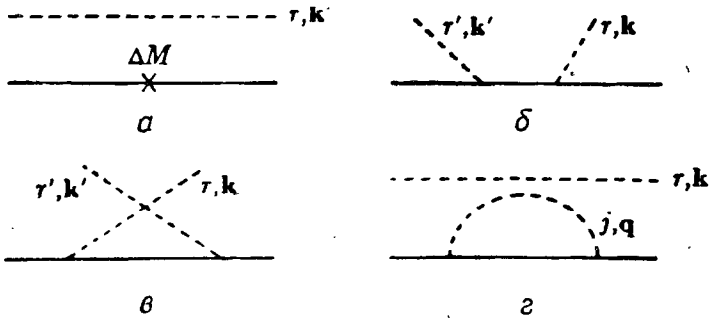
Так как $E_i = \omega_k + M$, то, используя перестановочные соотношения $[a_{jk}, a_{j'k'}^*] = \delta_{jj'} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ и равенство

$$a_{jq} |\mathbf{k}, r; s, t\rangle = a_{jq} a_{rk}^* |s, t\rangle = \delta_{jr} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) |s, t\rangle,$$

окончательно получим

$$R_{fi} = \langle s', t' | \Delta M^{(2)} \delta_{rr'} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{V_{r'k}^{(0)*} V_{rk}^{(0)}}{\omega_k} - \frac{V_{rk}^{(0)} V_{r'k'}^{(0)*}}{\omega_{k'}} + \sum_{\mathbf{q}j} \frac{V_{jq}^{(0)} V_{jq}^{(0)*}}{-\omega_q} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{rr'} |s, t\rangle. \quad (12.263)$$

Эти четыре члена можно представить с помощью диаграмм, показанных на фиг. 15. Диаграмма *a* соответствует однократному действию члена



Ф и г. 15.

$\Delta M^{(2)}$, а диаграмма *б* — члену V^*V и изображает процесс, в котором сначала уничтожается падающий мезон, а затем рождается рассеянный мезон. Диаграмма *в* соответствует процессу, когда сначала рождается рассеянный мезон, а затем поглощается падающий (член VV^*). Наконец, диаграмма *г* соответствует процессу, в котором начальный мезон не взаимодействует с нуклоном, а нуклон испускает и поглощает (виртуальный)

мезон. Отметим, что член $\Delta M^{(2)}$ в точности сокращается с членом собственной энергии во втором порядке теории возмущений, т. е. с членом, соответствующим диаграмме g , так что

$$R_{fi} = \langle s', t' | [V_r^{(0)*}, V_{rk}^{(2)}] | s, t \rangle \frac{1}{\omega_{k'}}, \quad (12.264a)$$

$$= \frac{f_0^2}{\mu^2} \frac{v(k'^2) v(k^2)}{V(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \cdot \frac{1}{\omega_{k'}} \times$$

$$\times \langle s', t' | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}') (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) \tau_r \tau_r - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}') \tau_r \tau_r | s, t \rangle.$$

$$(12.264b)$$

Обратим внимание на вид амплитуды рассеяния в борновском приближении, в частности, на ее зависимость от энергии мезона $\omega_{k'}$. Амплитуда имеет полюс при $\omega_{k'} = 0$, а соответствующий вычет пропорционален f_0^2 . Используя наши предыдущие результаты, равенства (12.247), (12.248) и (12.256a), (12.256b), а также аналогичные соотношения для изотопических переменных, из (12.264b) легко получить выражения для амплитуд рассеяния в состояниях с определенным полным моментом и изотопическим спином. Обозначая эти амплитуды через $R_{2J2T}(\omega)$, находим

$$R_{11}(\omega) = \frac{8}{3} \frac{f_0^2}{\mu^2} \frac{4\pi k^3 |v(k^2)|^2}{2(2\pi)^3 \omega_k}, \quad (12.265)$$

$$R_{13}(\omega) = \frac{2}{3} \frac{f_0^2}{\mu^2} \frac{4\pi k^3 |v(k^2)|^2}{2(2\pi)^3 \omega_k}, \quad (12.266)$$

$$R_{31}(\omega) = R_{13}(\omega), \quad (12.267)$$

$$R_{33}(\omega) = -\frac{4}{3} \frac{f_0^2}{\mu^2} \frac{4\pi k^3 |v(k^2)|^2}{2(2\pi)^3 \omega_k}. \quad (12.268)$$

Так как J^2 , J_3 , T^2 , T_3 сохраняются при рассеянии, то в представлении, определенном с помощью J , J_3 , T , T_3 , S -матрица диагональна. Далее, поскольку она унитарна, ее собственные значения по модулю равны единице. Поэтому, как обычно, пишем

$$\langle J, T, \omega' | S | J, T, \omega \rangle = e^{2i\delta_{2J2T}(\omega)} \delta(\omega' - \omega), \quad (12.269)$$

где δ_{2J2T} — фазы рассеяния (фазовые сдвиги).

По определению, $S_{fi} = (\mathbf{1}_{fi} - 2\pi i R_{fi}) \cdot \delta(E_f - E_i)$, откуда

$$\langle J', T', \omega | R | J', T', \omega \rangle = -\frac{1}{\pi} e^{i\delta_{2J2T}} \sin \delta_{2J2T}. \quad (12.270)$$

Следовательно, в данном случае

$$e^{i\delta_{11}} \sin \delta_{11} = -\frac{8}{3} \left(\frac{f_0^2}{4\pi} \frac{|v(k^2)|^2 k^3}{\mu^2 \omega_k} \right), \quad (12.271)$$

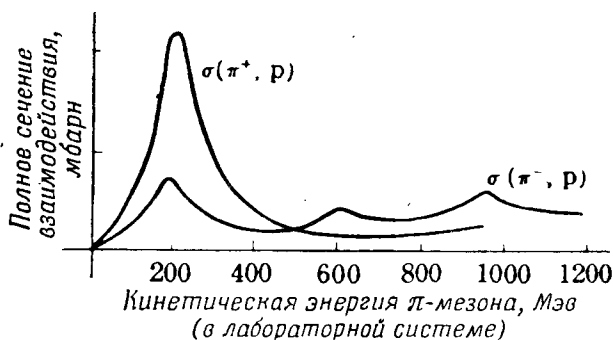
$$e^{i\delta_{13}} \sin \delta_{13} = -\frac{2}{3} \left(\frac{f_0^2}{4\pi} \frac{|v(k^2)|^2 k^3}{\mu^2 \omega_k} \right), \quad (12.272)$$

$$\delta_{13} = \delta_{31}, \quad (12.273)$$

$$e^{i\delta_{33}} \sin \delta_{33} = \frac{4}{3} \left(\frac{f_0^2}{4\pi} \frac{|v(k^2)|^2 k^3}{\mu^2 \omega_k} \right). \quad (12.274)$$

Таким образом, в борновском приближении все фазы оказываются величинами одного порядка. На опыте наблюдается совсем другая картина.

Из данных по мезон-нуклонному рассеянию следует, что при низких энергиях сечение рассеяния в 33-состоянии много больше, чем в 31, 13 и 11-состояниях, и соответственно фазы δ_{11} , δ_{13} малы по сравнению с δ_{33} . Это главная черта мезон-нуклонного рассеяния при низких энергиях. На фиг. 16 показаны полные сечения взаимодействия π^+ - и π^- -мезонов (с покоящимися вначале протонами) при кинетической энергии π -мезонов в интервале от нуля до 1,2 Бэв. Уже тот факт, что сечения при нулевой энергии очень малы, указывает, что S -рассеяние при низких энергиях аномально мало и рассеяние происходит преимущественно в P -состоянии.



Ф и г. 16.

Нужно отметить высокий максимум в π^+ , p -рассеянии приблизительно при 190 Мэв. Это известный 33-резонанс. Он влияет и на π^- , p -рассеяние при той же энергии.

Заметим, что 33-фаза, даваемая равенством (12.274), положительна, в то время как δ_{11} и δ_{13} — отрицательны. Это проверено экспериментально. Потенциал взаимодействия между мезоном и нуклоном должен быть, следовательно, потенциалом притяжения в (3, 3)-состоянии и отталкивания в состояниях (3, 1), (1, 3) и (1, 1). Вспомним, что в нерелятивистской квантовой механике потенциал притяжения ведет к положительным фазам, которые увеличиваются в высших борновских приближениях, в то время как потенциал отталкивания дает отрицательные фазы, уменьшающиеся в высших приближениях¹⁾. Это справедливо только при отсутствии связанных состояний. Тем не менее изложенные замечания дают возможность предположить, что можно получить лучшее согласие с экспериментом в четвертом и высших порядках теории возмущений. Действительно, вычисления в четвертом порядке, выполненные Чу [120], частично подтверждают эти предположения. Однако вопрос о том, находится ли модель Чу в согласии с экспериментами по рассеянию мезонов на нуклонах при низких энергиях, не может быть решен с помощью вычислений по теории возмущений ввиду медленной сходимости ряда теории возмущений. Так, отношение фаз в четвертом порядке к фазам во втором порядке (с учетом перенормировки заряда) имеет порядок величины

$$\frac{\delta^{(4)}}{\delta^{(2)}} \sim \frac{f^2}{\mu^2} \frac{\omega_{\text{макс}}}{\mu}.$$

¹⁾ Качественно это происходит потому, что в высших приближениях потенциал притяжения будет еще больше «втягивать» волновую функцию, а потенциал отталкивания еще больше «выталкивать» ее из области действия потенциала.

При энергии обрезания $\omega_{\text{макс.}} \sim M$ (M — масса нуклона) и перенормированной константе связи $f^2/\mu^2 = 0,08$ это отношение имеет вид

$$\frac{\delta^{(4)}}{\delta^{(2)}} \sim \frac{1}{2}.$$

Здесь использованы приблизительно те значения параметров, которые необходимы, чтобы объяснить поведение 33-фазы при низких энергиях.

Лоу [512] довелось вывести ряд соотношений между наблюдаемыми величинами, которые строго следуют из модели Чу и могут быть использованы для проверки теории. Эти соотношения были независимо получены Викам [849] и исследовались дальше Чу и Лоу [121, 122], которые положили их в основу полной теории π -мезонных явлений при низких энергиях, включая фоторождение. Статьи Чу и Лоу являются поворотным пунктом в развитии квантовой теории поля. Каждому, кто серьезно изучает современную теорию поля, настоятельно рекомендуется изучить их, ибо никакой обзор этих работ нельзя сравнить с ясным и простым изложением Вика, Чу и Лоу.

Вику [849] принадлежит важное замечание, что для решения задачи рассеяния мезонов на нуклонах состоянии рассеяния нужно представить в виде свободного мезона, падающего на физический («облаченный») нуклон, и рассеянной волны. Обозначим через $|s, t\rangle_+$ четыре собственных состояния H , соответствующих физическому нуклону. Задача заключается в том, чтобы найти такие решения уравнения

$$(H - E) |jk; s, t\rangle_+ = 0, \quad (12.275a)$$

$$E = M + \omega_k, \quad (12.275b)$$

которые имеют вид

$$|j, k; s, t\rangle_+ = a_{jk}^* |s, t\rangle_+ + |\chi'\rangle_+, \quad (12.276)$$

где $|\chi'\rangle_+$ — состояние с уходящим свободным мезоном. Используя нестационарную формулировку задачи рассеяния, можно проверить, что член $a_{jk}^* |s, t\rangle_+$ соответствует при $t = -\infty$ свободному мезону, падающему на физический нуклон. Потребовав, чтобы $|j, k; s, t\rangle_+$, выраженное равенством (12.276), было решением уравнения (12.275), находим

$$\begin{aligned} 0 &= (H - M - \omega_k) (a_{jk}^* |s, t\rangle_+ + |\chi'\rangle_+) = \\ &= (a_{jk}^* H + [H, a_{jk}^*] |s, t\rangle_+ - (M + \omega_k) a_{jk}^* |s, t\rangle_+ + \\ &\quad + (H - M - \omega_k) |\chi'\rangle_+. \end{aligned} \quad (12.277)$$

Так как

$$H = M + \sum_{jk} \omega_k a_{jk}^* a_{jk} + \sum_{jk} (a_{jk} V_{jk}^{(0)} + a_{jk}^* V_{jk}^{(0)*}) - \Delta M, \quad (12.278)$$

$$[H, a_{jk}^*] = \omega_k a_{jk}^* + V_{jk}^{(0)}, \quad (12.279)$$

получаем

$$(H - M - \omega_k) |\chi'\rangle_+ = -V_{jk}^{(0)} |s, t\rangle_+ \quad (12.280)$$

и

$$|\chi'\rangle_+ = \frac{1}{M + \omega_k - H + i\varepsilon} V_{jk}^{(0)} |s, t\rangle_+. \quad (12.281)$$

Состояние

$$|j, k; s, t\rangle_+ = a_{jk}^* |s, t\rangle_+ + \frac{1}{M + \omega_k - H + i\varepsilon} V_{jk}^{(0)} |s, t\rangle_+ \quad (12.282)$$

есть искомое состояние, соответствующее рассеянию мезона с импульсом \mathbf{k} и изотопическим спином j на нуклоне в состоянии $|s, t\rangle_+$. Действительно, $|j, \mathbf{k}; s, t\rangle_+$ удовлетворяет уравнению (12.275) и имеет нужное поведение в особой точке, гарантирующее, что при $t = +\infty$ существуют только расходящиеся волны. Аналогичным образом решение $|j, \mathbf{k}; s, t\rangle_-$, соответствующее ин-решению Липпмана — Швингера, есть

$$|j, \mathbf{k}; s, t\rangle_- = a_{jk}^* |s, t\rangle_+ + \frac{1}{M + \omega_{\mathbf{k}} - H - i\varepsilon} V_{jk}^{(0)} |s, t\rangle_+. \quad (12.283)$$

Заметим, что $|s, t\rangle_+ = |s, t\rangle_-$, ибо однонуклонное состояние стационарно, так что $S |s, t\rangle_+ = |s, t\rangle_- = |s, t\rangle_+$.

Сравнивая (12.283) и (12.282), заключаем, что

$$\begin{aligned} |j, \mathbf{k}; s, t\rangle_+ &= |j, \mathbf{k}; s, t\rangle_- + \left[\frac{1}{M + \omega_{\mathbf{k}} - H + i\varepsilon} - \frac{1}{M + \omega_{\mathbf{k}} - H - i\varepsilon} \right] V_{jk}^{(0)} |s, t\rangle_+ = \\ &= |j, \mathbf{k}; s, t\rangle_- - 2\pi i \delta(M + \omega_{\mathbf{k}} - H) V_{jk}^{(0)} |s, t\rangle_+. \end{aligned} \quad (12.284)$$

Отсюда получаем, что S -матричный элемент для рассеяния, при котором мезон в состоянии $|j, \mathbf{k}\rangle$ и нуклон в состоянии $|s, t\rangle_+$ переходят соответственно в состояния $|j', \mathbf{k}'\rangle$ и $|s', t'\rangle_+$, дается выражением

$$\begin{aligned} \langle j', \mathbf{k}'; s', t' | S | j, \mathbf{k}; s, t\rangle_+ &= \\ &= -\langle j', \mathbf{k}'; s', t' | j, \mathbf{k}; s, t\rangle_+ = \\ &= -\langle j', \mathbf{k}'; s', t' | j, \mathbf{k}; s, t\rangle_- - 2\pi i \langle j', \mathbf{k}'; s', t' | \delta(M + \omega_{\mathbf{k}} - H) V_{jk}^{(0)} |s, t\rangle_+ = \\ &= \delta_{jj'} \delta_{ss'} \delta_{tt'} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - 2\pi i \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) \langle j', \mathbf{k}'; s', t' | V_{jk}^{(0)} |s, t\rangle_+ = \\ &= \delta_{jj'} \delta_{ss'} \delta_{tt'} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - 2\pi i \delta(\omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}}) R_{jk, st}(j', \mathbf{k}'; s', t'), \end{aligned} \quad (12.285)$$

причем¹⁾

$$R_{jk, st}(j', \mathbf{k}'; s', t') = -\langle j', \mathbf{k}'; s', t' | V_{jk}^{(0)} |s, t\rangle_+. \quad (12.286)$$

При $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}'}$ величина $R_{jk, st}(j', \mathbf{k}'; s', t') = -\langle j', \mathbf{k}'; s', t' | V_{jk}^{(0)} |s, t\rangle_+$ является обычной R -матрицей теории рассеяния. Но это не так, когда $\omega_{\mathbf{k}} \neq \omega_{\mathbf{k}'}$. Однако поскольку

$$V_{jk}^{(0)} = \frac{f_0}{\mu} \frac{i\nu(\mathbf{k}^2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \tau_j, \quad (12.287)$$

зависимость $R_{jk, st}(j', \mathbf{k}'; s', t')$ от \mathbf{k} полностью известна. Множитель $k\nu(\mathbf{k}^2)/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$ можно вынести из матричного элемента, определяющего $R_{jk, st}(j', \mathbf{k}'; s', t')$, а остающийся матричный элемент не зависит от \mathbf{k} . Такая факторизуемость есть особая черта модели Чу и происходит от пренебрежения отдачей нуклона. Она означает, что величина $R_{jk, st}(j', \mathbf{k}'; s', t)$ при $\omega_{\mathbf{k}} \neq \omega_{\mathbf{k}'}$ тесно связана с $R_{jk, st}(j', \mathbf{k}'; s', t)$ на энергетической поверхности, т. е. с амплитудой рассеяния, поскольку зависимость $R_{jk, st}(j', \mathbf{k}'; s', t')$ от переменных \mathbf{k} и j выделяется в виде известного множителя. Этот факт оказывается в высшей степени важным для дальнейшего, ибо он позволяет тривиальным образом связать значения

¹⁾ Для теории, которая не является теорией типа Юкавы (т. е. H_I не линейно по Φ), результаты изменяются следующим образом. Пусть $H = H_0 + H_I$, положим $[H_I, a_{rk}^*] = j_r(\mathbf{k})$, тогда

$$R_{lk, st}(l', \mathbf{k}'; s', t') = -\langle l', \mathbf{k}'; s', t' | j_l(\mathbf{k}) |s, t\rangle_+.$$

$R_{jk, st}(j', k'; s', t')$ на энергетической поверхности и вне ее. В противоположность этому случаю зависимость обычной R -матрицы от ее переменных не факторизуется, и ее значения на энергетической поверхности и вне ее связаны непросто. Если подставить в (12.286) выражение для $\langle j', k'; s', t' |$ из (12.283), то получим

$$R_{jk, st}(j', k'; s', t') = {}_+ \langle s', t' | a_{j'k'} V_{jk}^{(0)*} | s, t \rangle_+ + \\ + {}_+ \langle s', t' | V_{j'k'}^{(0)*} \frac{1}{M + \omega_{k'} - H + i\varepsilon} V_{jk}^{(0)} | s, t \rangle_+. \quad (12.288)$$

Первый член в (12.288) можно представить в другом виде. Так как

$$[H, a_{j'k'}] = -\omega_{k'} a_{j'k'} - V_{j'k'}^{(0)*}, \quad (12.289)$$

то находим

$$H a_{j'k'} | s', t' \rangle_+ = \{M a_{j'k'} + [H, a_{j'k'}]\} | s', t' \rangle_+ = \\ = \{(M - \omega_{k'}) a_{j'k'} - V_{j'k'}^{(0)*}\} | s', t' \rangle_+. \quad (12.290)$$

Поскольку спектр оператора $H - M + \omega_{k'}$ всегда положителен, то $H - M + \omega_{k'}$ имеет вполне определенный обратный оператор и

$$a_{j'k'} | s', t' \rangle_+ = -\frac{1}{H - M + \omega_{k'}} V_{j'k'}^{(0)*} | s', t' \rangle_+. \quad (12.291)$$

В теории типа теории Юкавы V и a коммутируют, поэтому равенство (12.291) дает возможность переписать R в виде

$$R_{jk, st}(j', k', s', t') = {}_+ \langle s', t' | V_{j'k'}^{(0)*} - \frac{1}{\omega_{k'} + M - H + i\varepsilon} V_{jk}^{(0)} - \\ - V_{jk}^{(0)} \frac{1}{\omega_{k'} - M + H} V_{j'k'}^{(0)*} | s, t \rangle_+. \quad (12.292)$$

В разложении теории возмущений первый член соответствует сумме всех диаграмм, в которых линии падающего и рассеянного мезона не пересекаются, а второй член соответствует сумме всех «перекрестных» диаграмм. Используем в равенстве (12.292) условие полноты для собственных состояний $|n\rangle_-$ полного гамильтониана

$$\sum_{|n\rangle_-} |n\rangle_- \langle n| = 1, \quad (12.293)$$

где состояния с $n=0$ соответствуют однонуклонным состояниям $|0\rangle_- = |s, t\rangle_-$, состояния с $n=1$ соответствуют состояниям рассеяния мезона на нуклоне, а состояния с $n=2$ соответствуют состояниям рассеяния с двумя мезонами (описываемыми плоскими волнами) при $t = \infty$ и т. д. Тогда получим

$$R_{jk, st}(j', k'; s', t') = \sum_{|n\rangle_-} \left\{ \frac{{}_+ \langle s', t' | V_{j'k'}^{(0)*} | n \rangle_- - \langle n | V_{jk}^{(0)} | s, t \rangle_+}{M + \omega_{k'} - E_n + i\varepsilon} + \right. \\ \left. + \frac{{}_+ \langle s', t' | V_{j'k'}^{(0)} | n \rangle_- - \langle n | V_{j'k'}^{(0)*} | s, t \rangle_+}{M - \omega_{k'} - E_n} \right\}. \quad (12.294)^1$$

¹ Знаменатель второго члена в (12.294) никогда не обращается в нуль, поскольку наименьшее значение E_n равно M . Поэтому, если это окажется удобным, к этому знаменателю можно добавить член $-i\varepsilon$, так как всегда рассматривается предел при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим далее матричный элемент $\langle n | V_{jk}^{(0)} | s, t \rangle_+$ и покажем, что при $E_n = \omega_k + M$ он в точности равен матричному элементу R -матрицы для процесса $\pi + N \rightarrow n$.

Доказательство: Матричный элемент S -матрицы для рассеяния из начального состояния $|j, k; s, t\rangle_+$ в конечное состояние $|n\rangle_-$ имеет вид

$$\langle n | j, k; s, t \rangle_+ = \delta(n; jk, st) - 2\pi i \delta(E_n - \omega_k - M) R_{jk, st}(n), \quad (12.295)$$

где $R_{jk, st}(n)$ при $E_n = \omega_k + M$ есть матричный элемент R -матрицы, а

$$\delta(n; jk, st) = \langle n | j, k; s, t \rangle_- = \langle n | j, k; s, t \rangle_+. \quad (12.296)$$

Подставляя в левую часть равенства (12.295) вместо $|j, k; s, t\rangle_+$ выражение (12.284), получаем

$$R_{jk, st}(n) = \langle n | V_{jk}^{(0)} | s, t \rangle_+. \quad (12.297)$$

Еще раз отметим, что зависимость $R_{jk, st}(n)$ от k факторизуется и известна, так что матричный элемент $\langle n | V_{jk}^{(0)} | s, t \rangle_+$ при $E_n \neq \omega_k + M$ просто связан с его значением на энергетической поверхности. Наконец, замечая, что

$$\begin{aligned} \langle s', t' | V_{j'k'}^{(0)*} | n \rangle_- &= \overline{\langle n | V_{j'k'}^{(0)} | s', t' \rangle_+} \\ &= \overline{R_{j'k', s't'}(n)} \end{aligned} \quad (12.298)$$

и

$$V_{j'k'}^{(0)*} = -V_{jk}^{(0)}, \quad (12.299)$$

переишем уравнение (12.294) в виде

$$R_{jk, st}(j'k', s't') = \sum_n \left\{ \frac{\overline{R_{j'k', s't'}(n)} R_{jk, st}(n)}{M + \omega_{k'} - E_n + i\varepsilon} + \frac{\overline{R_{jk, s't'}(n)} R_{j'k', st}(n)}{M - \omega_k - E_n} \right\}. \quad (12.300)$$

Уравнение (12.300) есть уравнение Лоу для модели Чу. Оно нелинейно и связывает амплитуду мезон-нуклонного рассеяния со всеми другими амплитудами рассеяния и рождения, которые имеют либо то же самое начальное состояние, либо то же самое конечное состояние, что и амплитуда мезон-нуклонного рассеяния. Если и для других амплитуд $R_{jk, st}(n)$ вывести аналогичные уравнения, то можно получить замкнутую бесконечную систему уравнений, которые в некотором смысле (мы уточним его позже), эквивалентны первоначальной гамильтоновой формулировке. В действительности такая система уравнений была выведена и проанализирована Нортоном и Клейном [588, 589] (см. также [289]) для несколько более простой модели—скалярное поле, взаимодействующее с источниками с помощью взаимодействия вида

$$H_I = \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(\int \varrho(x) \varphi(x) d^3x \right)^i.$$

Заметим, что поскольку зависимость $R_{jk, st}(j'k', s't')$ от k и ω_k полностью определяется зависимостью $V_{jk}^{(0)}$ от этих переменных, то она выпадает из уравнения Лоу. Это получается из-за того, что одна и та же зависимость появляется в правой и левой частях уравнения (12.300). Кроме того, хотя для определения амплитуды рассеяния мы будем главным образом интересоваться решениями при $\omega_{k'} = \omega_k$, нужно отметить, что уравнение Лоу (12.300) в действительности справедливо и при $\omega_{k'} \neq \omega_k$.

Существуют три важных свойства, которыми обладает уравнение Лоу:

- 1) унитарность;
- 2) перекрестная (кроссинг) симметрия;
- 3) аналитические свойства.

Унитарность S -матрицы

$$SS^* = S^*S = 1, \quad (12.301)$$

где

$$\langle n | S | j, \mathbf{k}; s, t \rangle_+ = \delta(n; j\mathbf{k}, st) - 2\pi i \delta(E_n - \omega_{\mathbf{k}} - M) R_{j\mathbf{k}, st}(n), \quad (12.302)$$

означает, что $R_{j\mathbf{k}, st}(j'\mathbf{k}', s't')$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \overline{R_{j'\mathbf{k}', s't'}(j\mathbf{k}, st)} - R_{j\mathbf{k}, st}(j'\mathbf{k}', s't') &= \\ &= 2\pi i \sum_n \overline{R_{j'\mathbf{k}', s't'}(n)} R_{j\mathbf{k}, st}(n) \delta(E_n - M - \omega_{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (12.303)$$

где $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}'}$. (Отметим, кстати, что состояние без мезонов, $n=0$, $E_0 = M$, не вносит вклада в правую часть, так как $\omega_{\mathbf{k}} \neq 0$.) Из уравнения Лоу (12.300) следует

$$\begin{aligned} \overline{R_{j'\mathbf{k}', s't'}(j\mathbf{k}, st)} - R_{j\mathbf{k}, st}(j'\mathbf{k}', s't') &= \\ &= \sum_n \left\{ \frac{R_{j\mathbf{k}, st}(n) \overline{R_{j'\mathbf{k}', s't'}(n)}}{\omega_{\mathbf{k}} + M - E_n - i\varepsilon} - \frac{R_{j\mathbf{k}, st}(n) \overline{R_{j'\mathbf{k}', s't'}(n)}}{\omega_{\mathbf{k}'} + M - E_n + i\varepsilon} \right\}. \end{aligned} \quad (12.304)$$

Полагая $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}'}$ и используя тождество

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x), \quad (12.305)$$

можно проверить, что любое решение уравнения Лоу $R_{j\mathbf{k}, st}(j'\mathbf{k}', s't')$ автоматически ведет к унитарной S -матрице.

Для анализа дальнейших свойств симметрии амплитуды рассеяния удобно определить функцию r комплексной переменной z

$$r_{j\mathbf{k}, st | j'\mathbf{k}', s't'}(z) = \sum_n \left\{ \frac{\overline{R_{j'\mathbf{k}', s't'}(n)} R_{j\mathbf{k}, st}(n)}{z + M - E_n} + \frac{\overline{R_{j\mathbf{k}, s't'}(n)} R_{j'\mathbf{k}', st}(n)}{M - z - E_n} \right\}, \quad (12.306)$$

причем

$$\lim_{z \rightarrow \omega_{\mathbf{k}} + i\varepsilon} r_{j\mathbf{k}, st | j'\mathbf{k}', s't'}(z) = R_{j\mathbf{k}, st}(j'\mathbf{k}', s't'). \quad (12.307)$$

Заметим, что зависимость r от \mathbf{k} и \mathbf{k}' известна, не известна лишь зависимость от z . Из определения r [равенство (12.306)] следует, что

$$r_{j\mathbf{k}, s't' | j'\mathbf{k}', st}(z) = r_{j'\mathbf{k}', s't' | j\mathbf{k}, st}(-z). \quad (12.308)$$

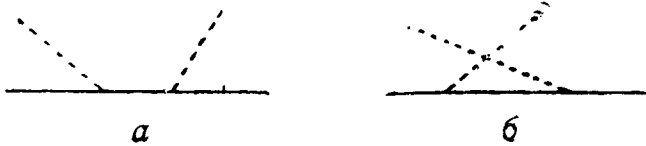
Равенство (12.308) представляет собой математическую формулировку «кроссинг»-теоремы Гелл-Манна и Голдбергера [306]. На языке диаграмм эта симметрия выражается утверждением, что для любой данной диаграммы существует другая диаграмма, которая получается из первой перестановкой линий входящего и уходящего мезона. Точнее, мат-

ричный элемент для перекрестной диаграммы можно получить из матричного элемента для неперекрестной диаграммы: а) перестановкой k и k' , б) перестановкой τ_j и $\tau_{j'}$, в) изменением знака ω в энергетических знаменателях. Поскольку R -матрица равна сумме вкладов от всех диаграмм, она должна остаться неизменной после перечисленных преобразований. Это очень просто проверить для членов второго порядка, возникающих от диаграмм фиг. 17. Замечаем также, что

$$\overline{r_{jk, s't'|j'k', st}(\bar{z})} = r_{jk, st|j'k', s't'}(-z), \quad (12.309a)$$

$$= r_{j'k', st|jk, s't'}(z), \quad (12.309б)$$

где при получении второй строки мы использовали перекрестную симметрию. Иногда удобно рассматривать $r_{jk, st|j'k', s't'}(z)$ как матрич-



Ф и г. 17.

ный элемент оператора $r_{pq}(z)$, т. е. $\langle s, t | r_{pq}(z) | s', t' \rangle = r_{jk, st|j'k', s't'}(z)$, где переменные jk сокращенно обозначены через p , а $j'k'$ — через q . Соотношение перекрестной симметрии (12.308) тогда можно записать в виде

$$r_{qp}(z) = r_{pq}(-z), \quad (12.310)$$

а условие действительности (12.309) переписывается так:

$$r_{qp}^*(\bar{z}) = r_{pq}(z). \quad (12.311)$$

Можно вывести дальнейшие свойства функции $r_{jk, st|j'k', s't'}(z)$, если использовать предположения относительно свойств энергетического спектра промежуточных состояний, которые входят в определение r [равенство (12.306)]. Примем, что H имеет изолированное собственное значение при $E_n = M$, соответствующее нуклонным состояниям, и непрерывный спектр, начиная с $E = M + \mu$, $M + 2\mu$, ..., который соответствует состояниям нуклон + один мезон, нуклон + два мезона и т. д. Примем также, что нет изолированных собственных значений между M и $M + \mu$. Наличие таких собственных значений отвечало бы связанным состояниям мезона и нуклона.

Рассмотрим подробно вклад в r от однонуклонных состояний ($n = 0$), для которых $E_n = M$. Эти состояния дают полюс в $r(z)$ при $z = 0$, вычет в котором пропорционален

$$\begin{aligned} & \sum_{s''t''} \{ \overline{R_{j'k', s't'}(s''t'')} R_{jk, st}(s''t'') - \overline{R_{jk, s't'}(s''t'')} R_{j'k', st}(s''t'') \} = \\ & = \sum_{s''t''} \{ \overline{+ \langle s'', t'' | V_{j'k'}^{(0)} | s', t' \rangle_{++} \langle s'', t'' | V_{jk}^{(0)} | s, t \rangle_+} - \\ & \quad - \overline{+ \langle s'', t'' | V_{jk}^{(0)} | s', t' \rangle_{++} \langle s'', t'' | V_{j'k'}^{(0)} | s, t \rangle_+} \}. \quad (12.312) \end{aligned}$$

Ясно, что вычет равен нулю при рассеянии вперед без перезарядки, т. е. при $(j'k') = (jk)$. Помимо известной зависимости от k , матричный элемент оператора $V_{jk}^{(0)}$ между физическими однонуклонными состояниями пропорционален ${}_+ \langle s', t' | \sigma_i \tau_j | s, t \rangle_+$. Далее, из трансформационных свойств

состояний $|s, t\rangle_+$ и операторов σ_i, τ_j относительно вращений в обычном и изотопическом пространстве следует

$$\langle s', t' | \sigma_i \tau_j | s, t \rangle_+ = Z \langle s', t' | \sigma_i \tau_j | s, t \rangle, \quad (12.313)$$

т. е. что отношение матричного элемента от $\sigma_i \tau_j$ между физическими однонуклонными состояниями к матричному элементу от $\sigma_i \tau_j$ между «голыми» состояниями с теми же квантовыми числами равно постоянной Z , не зависящей от s, t и s', t' . Для доказательства используются соотношения коммутации σ_i, τ_j с полным моментом количества движения и изотопическим спином. Из перестановочных соотношений для \mathbf{J}^4 и σ_i находим (см., например, [617])

$$\langle s', t' | \sigma_i \tau_j | s, t \rangle_+ = \frac{3}{4} \langle \frac{1}{2}, t' | \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}_j | \frac{1}{2}, t \rangle_{++} \langle \frac{1}{2}, s' | J_i | \frac{1}{2}, s \rangle'_+; \quad (12.314a)$$

здесь $|1/2, s\rangle'_+$ — собственная функция \mathbf{J}^2 (при $J = 1/2$) и J_3 ($J_3 = s$). Обозначение $\langle 1/2, t' | \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}_j | 1/2, t \rangle_+$ указывает, что этот матричный элемент не зависит от значения J_3 для однонуклонного состояния $|s, t\rangle_+$. Поскольку τ_j по отношению к полному изотопическому спину обладает такими же свойствами, как и σ_j по отношению к \mathbf{J} , то получаем

$$\begin{aligned} \langle s', t' | \sigma_i \tau_j | s, t \rangle_+ &= \frac{9}{16} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_+ \times \\ &\times \langle \frac{1}{2}, s' | J_i | \frac{1}{2}, s \rangle'_+ \langle \frac{1}{2}, t' | T_j | \frac{1}{2}, t \rangle''_+, \end{aligned} \quad (12.314b)$$

где $|1/2, t\rangle''_+$ — собственное состояние \mathbf{T}^2 (причем $T = 1/2$) и T_3 ($T_3 = t$), а обозначение $\langle 1/2, 1/2 | \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} | 1/2, 1/2 \rangle_+$ отмечает тот факт, что этот матричный элемент не зависит от s', t', s и t . Ясно, что подобное выражение можно написать и для матричного элемента от $\sigma_j \tau_i$ между «голыми» состояниями и, кроме того

$$\langle \frac{1}{2}, s' | J_i | \frac{1}{2}, s \rangle'_+ = \langle \frac{1}{2}, s' | J_i^{(0)} | \frac{1}{2}, s \rangle', \quad (12.314b)$$

$$\langle \frac{1}{2}, t' | T_j | \frac{1}{2}, t \rangle''_+ = \langle \frac{1}{2}, t' | T_j^{(0)} | \frac{1}{2}, t \rangle'', \quad (12.314г)$$

где индекс (0) у $J_i^{(0)}$ и $T_j^{(0)}$ указывает, что эти операторы соответствуют системе из мезона и нуклона, не взаимодействующих между собой. Следовательно,

$$\frac{\langle s', t' | \sigma_i \tau_j | s, t \rangle_+}{\langle s', t' | \sigma_i \tau_j | s, t \rangle} = \frac{\langle 1/2, 1/2 | \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} | 1/2, 1/2 \rangle_+}{\langle 1/2, 1/2 | \mathbf{J}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} | 1/2, 1/2 \rangle}. \quad (12.315)$$

Из вывода следует, что правая часть не зависит от s, t и s', t' . Это отношение не равно единице, что отражает наличие мезонного облака, окружающего физический нуклон. Влияние мезонного облака можно описать, изменив величину постоянной взаимодействия. Определим перенормированную константу связи f с помощью соотношения

$$f_0 \langle s', t' | \sigma_i \tau_j | s, t \rangle_+ = f \langle s', t' | \sigma_i \tau_j | s, t \rangle, \quad (12.316a)$$

т. е.

$$f = Z f_0, \quad (12.316b)$$

так что

$$R_{jk, st}(s''t'') = \langle s''t'' | V_{jk} | st \rangle, \quad (12.317)$$

где V_{jk} получается из $V_{jk}^{(0)}$, если заменить f_0 на f :

$$V_{jk} = i \frac{f}{\mu} \frac{v(k^2)}{\sqrt{2\omega_k}} \sigma \cdot k \tau_j, \quad (12.318)$$

а $|s, t\rangle$ — вектор состояния «голого» нуклона. Таким образом, функция $r_{qp}(z)$ полностью определяется в окрестности $z=0$ перенормированной константой связи, и наоборот, ибо

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} z r_{qp}(z) &= \sum_{s''t''} \{ {}_+ \langle s', t' | V_{jk}^{(0)*} | s'', t'' \rangle_+ + \langle s'', t'' | V_{jk}^{(0)} | s, t \rangle_+ - \\ &\quad - {}_+ \langle s', t' | V_{jk}^{(0)*} | s'', t'' \rangle_+ + \langle s'', t'' | V_{jk}^{(0)} | s, t \rangle_+ \} = \\ &= \sum_{s''t''} \{ \langle s', t' | V_{jk}^* | s'', t'' \rangle \langle s'', t'' | V_{jk} | s, t \rangle - \\ &\quad - \langle s', t' | V_{jk}^* | s'', t'' \rangle \langle s'', t'' | V_{jk} | s, t \rangle \} = \\ &= \langle s', t' | [V_{jk}^*, V_{jk}] | s, t \rangle. \end{aligned} \quad (12.319)$$

Согласно равенству (12.318), поведение амплитуды рассеяния при нулевой энергии полностью определяется перенормированной константой связи f . Кроме того, оно совпадает с получаемым из борновского приближения, если в последнем заменить f_0 перенормированной константой связи f . Требование того, чтобы точная амплитуда рассеяния при нулевой энергии совпадала с таким образом «перенормированной» амплитудой борновского приближения, можно принять в качестве рецепта для перенормировки константы связи [482].

Смысл перенормированной константы связи становится яснее, если рассмотреть среднее значение оператора мезонного поля в однонуклонном состоянии $|s, t\rangle_+$. Рассчитаем ${}_+ \langle s, t | \varphi_j(\mathbf{x}) | s, t \rangle_+$. Поскольку $|s, t\rangle_+$ есть собственное состояние H , очевидно, что

$${}_+ \langle s, t | [H, a_{ik}] | s, t \rangle_+ = {}_+ \langle s, t | [H, a_{ik}^*] | s, t \rangle_+ = 0. \quad (12.320)$$

Из (12.279) и (12.289) вытекает, что

$${}_+ \langle s, t | a_{jk} | s, t \rangle_+ = {}_+ \langle s, t | \frac{1}{\omega_k} V_{jk}^{(0)} | s, t \rangle_+, \quad (12.321a)$$

$${}_+ \langle s, t | a_{jk}^* | s, t \rangle_+ = - {}_+ \langle s, t | \frac{1}{\omega_k} V_{jk}^{(0)} | s, t \rangle_+ \quad (12.321b)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} {}_+ \langle s, t | \varphi_j(\mathbf{x}) | s, t \rangle_+ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} {}_+ \langle s, t | a_{jk} e^{ik \cdot \mathbf{x}} + a_{jk}^* e^{-ik \cdot \mathbf{x}} | s, t \rangle_+ = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f_0}{\mu} \partial_i \int d^3k v(k^2) \frac{e^{ik \cdot \mathbf{x}} + e^{-ik \cdot \mathbf{x}}}{2\omega_k^2} {}_+ \langle s, t | \sigma_i \tau_j | s, t \rangle_+ = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{f}{\mu} \langle s, t | \tau_j \sigma \cdot \nabla | s, t \rangle \int d^3k v(k^2) \frac{e^{ik \cdot \mathbf{x}}}{k^2 + \mu^2}. \end{aligned} \quad (12.322)$$

При $|\mathbf{x}|$, значительно превышающих радиус источника R_0 , в правую часть (12.322) будут вносить вклад только малые значения $|\mathbf{k}|$, а для

этих значений $|\mathbf{k}|$ функция $v(\mathbf{k}^2) \approx 1$. Поэтому получаем

$$\lim_{|\mathbf{x}| \gg R_0} \langle s, t | \varphi_j(\mathbf{x}) | s, t \rangle_+ \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{f}{\mu} \langle s, t | \tau_j \sigma \cdot \nabla | s, t \rangle \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (12.323)$$

где $r = |\mathbf{x}|$. На расстояниях, больших по сравнению с радиусом источника, мезонный «потенциал» нуклона является потенциалом Юкавы, а его величина определяется *перенормированной* константой связи f . Поместим теперь другой нуклон (обозначим его цифрой 2) в точку \mathbf{x} , причем $|\mathbf{x}|$ много больше R_0 , так что справедливо выражение (12.323). Если присутствие этого нуклона лишь незначительно возмущает мезонное поле около первого нуклона, расположенного в начале координат, то энергия второго нуклона в поле первого приближенно равна среднему значению оператора

$$\sum_j \frac{f}{\mu} \int d^3x' \varrho_2(\mathbf{x}') \sigma_2 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \langle s_1, t_1 | \varphi_j(\mathbf{x}') | s_1, t_1 \rangle \tau_{2j}$$

в состоянии $|s_2, t_2\rangle_+$. Здесь $|s_2, t_2\rangle_+$ — состояние, в котором находится нуклон 2, а $\varrho_2(\mathbf{x}')$ — функция источника этого нуклона, отличная от нуля только около точки \mathbf{x} . Таким образом,

$$\begin{aligned} E(r) &\sim \frac{f^2}{\mu^2} \sum_j \int d^3x' \varrho_2(\mathbf{x}') \langle s_2, t_2 | \tau_{2j} \sigma_2 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} | s_2, t_2 \rangle \langle s_1, t_1 | \tau_{1j} \sigma_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} | s_1, t_1 \rangle \frac{e^{-\mu|\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}'|} \sim \\ &\sim \frac{f^2}{\mu^2} \sum_j \langle s_2, t_2 | \tau_{2j} \sigma_2 \cdot \nabla | s_2, t_2 \rangle \langle s_1, t_1 | \tau_{1j} \sigma_1 \cdot \nabla | s_1, t_1 \rangle \frac{e^{-\mu|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} = \\ &= \frac{f^2}{\mu^2} \langle s_2 t_2, s_1 t_1 | \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \sigma_1 \cdot \nabla \sigma_2 \cdot \nabla | s_2 t_2, s_1 t_1 \rangle \frac{e^{-\mu|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}. \end{aligned} \quad (12.324)$$

Эта формула представляет собой приближенное выражение для потенциала взаимодействия двух нуклонов в адиабатическом пределе.

Вернемся теперь к рассматриваемой задаче — описанию рассеяния мезонов на нуклонах и, в частности, к свойствам функции $r_{\text{qp}}(z)$. При $z \rightarrow \infty$ функция $r_{\text{qp}}(z)$ ведет себя, как $1/z$. Это видно из равенства (12.306). Когда z стремится к бесконечности, зависимостью знаменателя от E_n можно пренебречь. Используя, далее, для вычисления суммы по состояниям условие полноты, находим

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z r_{\text{qp}}(z) = - \langle s', t' | [V_{\text{p}}^{(0)}, V_{\text{q}}^{*(0)}] | s, t \rangle_+. \quad (12.325)$$

Из равенства (12.306) видно также, что все особенности $r(z)$ лежат на действительной оси, поскольку E_n действительны. Состояния $|n=1\rangle_-$, т. е. состояния рассеяния одного мезона на нуклоне, имеют в качестве собственных значений гамильтониана положительные действительные числа от $M + \mu$ до ∞ . Аналогично, состояния $|n=2\rangle_-$ имеют действительный энергетический спектр, простирающийся от $M + 2\mu$ до ∞ , и т. д. Таким образом, функция $r_{\text{qp}}(z)$ имеет от вклада одномерных состояний точку ветвления при $z = \mu$ и определена в плоскости z с разрезом по действительной оси при $z \geq \mu$. Аналогично, от вклада n -мезонных состояний имеется точка ветвления при $z = n\mu$ и разрез, начинающийся от $z = n\mu$ ($n = 2, 3, \dots$). В силу перекрестной симметрии r имеет также точки ветвления при $z = -n\mu$. Соответствующие разрезы начинаются при $z = -n\mu$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Итак, $r(z)$ имеет полюс при $z = 0$ с вычетом, пропорциональным f^2 , ведет себя на бесконечности как $1/z$,

имеет точки ветвления $z = \pm \mu$ и определена в плоскости z с разрезами вдоль действительной оси при $z \geq \mu$ и $z \leq -\mu$. Других особенностей, помимо перечисленных, $r(z)$ не имеет. Аналитическая функция, обладающая такими свойствами, должна иметь следующий общий вид:

$$r_{qp}(z) = \frac{\mathcal{R}_{qp}}{z} + \int_{\mu}^{\infty} dx' \left[\frac{F_{qp}(x')}{x' - z} + \frac{G_{qp}(x')}{x' + z} \right]. \quad (12.326)$$

Здесь \mathcal{R}_{qp} — вычет $r_{qp}(z)$ в точке $z = 0$, а $F(x)$ и $G(x)$ — весовые функции, определенные при $x \geq \mu$. Так как

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow x + i\varepsilon} r_{qp}(z) &= \frac{\mathcal{R}_{qp}}{x + i\varepsilon} + \int_{\mu}^{\infty} dx' \left[\frac{F_{qp}(x')}{x' - x - i\varepsilon} + \frac{G_{qp}(x')}{x' + x + i\varepsilon} \right] = \\ &= \frac{\mathcal{R}_{qp}}{x + i\varepsilon} + P \int_{\mu}^{\infty} dx' \left[\frac{F_{qp}(x')}{x' - x} + \frac{G_{qp}(x')}{x' + x} \right] + \\ &+ i\pi\theta(x - \mu) F_{qp}(x) - i\pi\theta(-x - \mu) G_{qp}(x) \end{aligned} \quad (12.327a)$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow x - i\varepsilon} r_{qp}(z) &= \frac{\mathcal{R}_{qp}}{x - i\varepsilon} + P \int_{\mu}^{\infty} dx' \left[\frac{F_{qp}(x')}{x' - x} + \frac{G_{qp}(x')}{x' + x} \right] - \\ &- i\pi\theta(x - \mu) F_{qp}(x) + i\pi\theta(-x - \mu) G_{qp}(x), \end{aligned} \quad (12.327b)$$

то очевидно, что

$$2\pi i F_{qp}(x) = \lim_{z \rightarrow x + i\varepsilon} r_{qp}(z) - \lim_{z \rightarrow x - i\varepsilon} r_{qp}(z) \quad (x > \mu), \quad (12.328a)$$

$$2\pi i G_{qp}(x) = \lim_{z \rightarrow -x - i\varepsilon} r_{qp}(z) - \lim_{z \rightarrow -x + i\varepsilon} r_{qp}(z) \quad (x < -\mu), \quad (12.328b)$$

т. е. F и G выражаются через скачок функции r на разрезах, идущих по действительной оси, соответственно в правой и левой полуплоскостях. Вспомним, что амплитуда рассеяния $R_q(\mathbf{p})$ (рассматриваемая как оператор в спиновом и изотопическом пространстве) определяется как предел $r_{qp}(z)$ при $z = \omega_p + i\varepsilon$. Поэтому если наложить условие действительности $r_{qp}(z) = r_{pq}^*(\bar{z})$, то равенство (12.328a) дает

$$2\pi i F_{qp}(\omega_p) = [R_q(\mathbf{p}) - R_p^*(\mathbf{q})]_{\omega_p = \omega_q}. \quad (12.329a)$$

Соотношение перекрестной симметрии позволяет аналогично записать равенство (12.328b):

$$2\pi i G_{qp}(\omega_p) = [R_p(\mathbf{q}) - R_q^*(\mathbf{p})]_{\omega_p = \omega_q}. \quad (12.329b)$$

Наконец, с помощью условия унитарности (12.303) и соотношений (12.329a), (12.329b) можно преобразовать равенство (12.326) в первоначальное уравнение Лоу (12.300) для случая $\omega_p = \omega_q$. (Последнее ограничение несущественно, поскольку с энергетической поверхности можно сместиться произвольным образом, как это было отмечено ранее.)

Таким образом, если было бы возможно найти матричную функцию $r_{qp}(z)$, которая имеет простой полюс в начале координат с вычетом \mathcal{R}_{qp} , ведет себя на бесконечности как $1/z$, имеет только точки ветвления и определена в плоскости z с разрезами на действительной оси при $z > \mu$ и $z < -\mu$ и которая удовлетворяет условиям унитарности, пере-

крестной симметрии (12.310) и действительности (12.311), то мы имели бы решение уравнения Лоу. Однако условие унитарности включает состояния с двумя и более мезонами и поэтому не может быть записано только с помощью $r_{qp}(z)$. Если же пренебречь состояниями с многими мезонами, то сформулированные выше условия могут служить практической основой для решения задачи рассеяния. Пренебрежение состояниями с двумя и более мезонами законно, если сечения неупругих процессов малы по сравнению с сечениями упругих процессов (при всех значениях энергии). Такое приближение называется одномезонным. Рассмотрим его подробнее. Уравнение Лоу в этом приближении принимает вид

$$\begin{aligned}
 R_{jk, st}(j'k', s't') = & \\
 = \frac{1}{\omega_k} \sum_{|s'', t''\rangle_+} \{ & \overline{R_{j'k', s't'}(s''t'')} R_{jk, st}(s''t'') - \overline{R_{jk, s't'}(s''t'')} R_{j'k', st}(s''t'') \} + \\
 + \sum_{|j'', k''; s'', t''\rangle_-} \left\{ & \frac{\overline{R_{j'k', s't'}(j''k'', s''t'')} R_{jk, st}(j''k'', s''t'')}{\omega_{k'} - \omega_{k''} + i\epsilon} - \right. \\
 & \left. \frac{\overline{R_{jk, s't'}(j''k'', s''t'')} R_{j'k', st}(j''k'', s''t'')}{\omega_{k'} + \omega_{k''}} \right\}. \quad (12.330)
 \end{aligned}$$

Это — неоднородное нелинейное интегральное уравнение относительно $R_{jk, st}(j'k', s't')$. Отметим, что в уравнении (12.330) суммирование идет по всем состояниям $|j''k''; s'', t''\rangle_-$, включая состояния с $\omega_{k''} \neq \omega_k$. Поэтому, как видно из самой записи, уравнение (12.330) включает не только амплитуды рассеяния [т. е. не только $R_{j'k', s't'}(j''k'', s''t'')$ при $\omega_{k'} = \omega_{k''}$]. Однако, как отмечалось ранее, в модели Чу можно связать матричные элементы вне энергетической поверхности с матричными элементами на энергетической поверхности. Точнее,

$$\begin{aligned}
 \langle j', k'; s', t' | V_{jk}^{(0)} | s, t \rangle_+ = & \frac{if_0}{\mu} \frac{v(k^2) k_l}{\sqrt{2\omega_k}} \langle j', k'; s', t' | \sigma_l \tau_j | s, t \rangle_+ = \\
 = \frac{v(k^2) k}{v(q^2) q} \sqrt{\frac{\omega_q}{\omega_k}} \langle j', k'; s', t' | V_{jq}^{(0)} | s, t \rangle_+, \quad (12.331)
 \end{aligned}$$

где q — произвольный импульс, который можно выбрать и так, чтобы $\omega_q = \omega_{k'}$. Поэтому уравнение Лоу в статической модели (как в одномезонном приближении, так и точное) можно записать только через наблюдаемые величины, т. е. амплитуды рассеяния $\langle n | V_{jq} | s, t \rangle_+$ при $E_n = \omega_q + M$. В релятивистских теориях это невозможно, и уравнение Лоу там не так интересно, так как оно является соотношением между матричными элементами вне энергетической поверхности. В случае релятивистских теорий можно вывести ряд других соотношений, которые известны как дисперсионные соотношения. Они содержат матричные элементы только на энергетической поверхности. Их мы рассмотрим в § 4. гл. 18. В одномезонном приближении условие унитарности (12.303) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \overline{R_{j'k', s't'}(jk, st)} - R_{jk, st}(j'k', s't') = & \\
 = 2\pi i \sum_{j'', k'', s'', t''} \delta(\omega_k - \omega_{k''}) \overline{R_{j'k', s't'}(j''k'', s''t'')} R_{jk, st}(j''k'', s''t''), \quad (12.332)
 \end{aligned}$$

где $\omega_k = \omega_{k'}$. Состояния без мезонов не могут иметь энергию, совпадающую с энергией какого-либо одномезонного состояния, и поэтому не

вносят вклад в правую часть (12.303). Отметим также, что если ограничиться энергиями $\omega_k < 2\mu$, то состояния с двумя и более мезонами не могут давать вклад в правую часть общего условия унитарности (12.303), так что при $\omega_k < 2\mu$ равенство (12.332) является точным.

Чтобы еще более упростить наши обозначения, обозначим нуклонные переменные st одной буквой n , причем n пробегает значения от 1 до 4, и будем рассматривать $R_{jk, n}(j'k', n')$ как матричный элемент оператора $R_{jk}(j'k')$, т. е.

$$R_{jk, n}(j'k', n') = \langle n' | R_{jk}(j'k') | n \rangle. \quad (12.333)$$

С учетом равенства (12.319) уравнение (12.330) в этих [обозначениях] гласит:

$$\begin{aligned} \langle n' | R_{jk}(j'k') | n \rangle &= \frac{1}{\omega_k} \sum_{n''} \langle n' | [V_{j'k'}, V_{jk}] | n \rangle - \\ &- \sum_{j'', k'', n''} \left\{ \frac{\langle n' | R_{j'k'}(j''k'') | n' \rangle \langle n'' | R_{jk}(j''k'') | n \rangle}{\omega_{k''} - \omega_{k'} - i\epsilon} + \right. \\ &\left. + \frac{\langle n'' | R_{jk}(j''k'') | n' \rangle \langle n'' | R_{j'k'}(j''k'') | n \rangle}{\omega_{k'} + \omega_{k''}} \right\}. \end{aligned} \quad (12.334)$$

Обозначим, как и выше, $\langle n'' | R_{j'k'}(j''k'') | n' \rangle$ через $\langle n' | R_{j'k'}^*(j''k'') | n'' \rangle$. Теперь можно просуммировать по четырем промежуточным нуклонным состояниям и записать (12.334) в виде

$$\begin{aligned} R_{jk}(j'k') &= \frac{1}{\omega_k} [V_{j'k'}, V_{jk}] - \\ &- \sum_{j''k''} \left\{ \frac{R_{j'k'}^*(j''k'') R_{jk}(j''k'')}{\omega_{k''} - \omega_{k'} - i\epsilon} + \frac{R_{jk}^*(j''k'') R_{j'k'}(j''k'')}{\omega_{k'} + \omega_{k''}} \right\}. \end{aligned} \quad (12.335)$$

В дальнейшем мы будем сокращенно обозначать мезонные переменные jk одним индексом, например $(j'k') = \mathbf{q}$, $(jk) = \mathbf{p}$, а оператор $R_{jk}(j'k')$, рассматриваемый как функция $\omega_k = z$, через $r_{qp}(z)$. Представим далее $r_{qp}(z)$ в виде суммы членов, соответствующих состояниям с определенным полным моментом количества движения и изотопическим спином, т. е. напишем

$$r_{qp}(z) = -v(\mathbf{q}^2)v(\mathbf{p}^2) \frac{4\pi}{\sqrt{4\omega_p\omega_q}} \sum_{\alpha=1}^4 P_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{q}) h_\alpha(z), \quad (12.336)$$

где P_α — операторы проектирования для четырех состояний полного момента и изотопического спина:

$$P_{11} = \frac{1}{3} \tau_p \tau_q (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}) = \mathcal{J}_{1/2}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mathcal{Y}_{1/2}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (12.337)$$

$$P_{13} = \frac{1}{3} \tau_p \tau_q [3\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})] = \mathcal{J}_{1/2} \mathcal{Y}_{3/2}, \quad (12.338)$$

$$P_{31} = \left(\delta_{pq} - \frac{1}{3} \tau_p \tau_q \right) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}) = \mathcal{J}_{3/2} \mathcal{Y}_{1/2}, \quad (12.339)$$

$$P_{33} = \left(\delta_{pq} - \frac{1}{3} \tau_p \tau_q \right) [3\mathbf{p} - \mathbf{q} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})] = \mathcal{J}_{3/2} \mathcal{Y}_{3/2}. \quad (12.340)$$

Значок α соответствует $(2T, 2J)$, где J — полный момент количества движения, а T — полный изотопический спин. Если разложение $r_{qp}(z)$ (12.336)

подставить в условие унитарности (12.332), то последнее принимает вид

$$\operatorname{Im} h_{\alpha}(\omega_p) = v^2 (p^2) p^3 |h_{\alpha}(\omega_p)|^2. \quad (12.341)$$

Чтобы получить (12.341), нужно выполнить суммирование в правой части условия унитарности (12.332). При этом используется тот факт, что $k^2 dk d\Omega_k = k\omega_k d\omega_k d\Omega_k$ и тождество

$$\int d\Omega_k \sigma \cdot k (\sigma \cdot p) \sigma \cdot k = -\frac{4\pi k^2}{3} \sigma \cdot p. \quad (12.342)$$

Из (12.341) следует, что можно написать

$$\lim_{z \rightarrow \omega_p + i\varepsilon} h_{\alpha}(z) = \frac{e^{i\delta_{\alpha}(p)} \sin \delta_{\alpha}(p)}{v^2 (p^2) p^3}, \quad (12.343)$$

где $\delta_{\alpha}(p)$ — действительные фазы.

Если в условии унитарности не использовать одномезонного приближения, тогда $\delta_{\alpha}(p)$ действительны и совпадают с обычными фазами рассеяния только при $\omega_p \leq 2\mu$. Заметим, что даже при $\omega_p > 2\mu$ из условия унитарности следует

$$\operatorname{Im} h_{\alpha}(\omega_p) = \frac{\sigma_{\alpha}(\omega_p)}{4\pi v^2 (p^2) p}, \quad (12.344)$$

где σ_{α} — полное сечение взаимодействия в состоянии α (включая все неупругие процессы), нормированное так, что оно равно $\frac{4\pi}{p^2} \sin^2 \delta_{\alpha}$ в области упругого рассеяния $\omega_p \leq 2\mu$.

Условие (12.310) для r_{pq} , записанное как условие для $h_{\alpha}(z)$, гласит:

$$\sum_{\alpha=1}^4 P_{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) h_{\alpha}(z) = \sum_{\alpha=1}^4 P_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) h_{\alpha}(-z). \quad (12.345)$$

Пользуясь определениями операторов проектирования P_{α} , (12.337)–(12.340), можно проверить, что

$$P_{\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{\alpha=1}^4 A_{\alpha\beta} P_{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (12.346)$$

где «перекрестная» 4×4 матрица A есть

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 & 16 \\ -2 & -1 & 8 & 4 \\ -2 & 8 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12.347)$$

Так как A представляет собой матрицу отражения, то она обладает тем свойством, что

$$\sum_{\beta=1}^4 A_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}. \quad (12.348)$$

Наконец, используя свойства ортогональности P_{α} , из (12.345) получим соотношения перекрестной симметрии для функций $h_{\alpha}(z)$:

$$h_{\alpha}(z) = \sum_{\beta=1}^4 A_{\alpha\beta} h_{\beta}(-z). \quad (12.349)$$

Условие эрмитовости для $r_{\text{qp}}(z)$ означает, что $h_\alpha(z)$ есть действительная функция z в том смысле, что

$$h_\alpha(\bar{z}) = \overline{h_\alpha(z)}. \quad (12.350)$$

Так как неоднородный член в (12.335), т. е. член борновского приближения, можно записать как

$$-\frac{1}{\omega_q} \sum_\alpha \lambda_\alpha P_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cdot \frac{v(\mathbf{p}^2)v(\mathbf{q}^2)}{\sqrt{4\omega_p\omega_q}}, \quad (12.351)$$

где

$$\lambda_\alpha = \frac{2}{3} \left(\frac{f}{\mu} \right)^2 \begin{bmatrix} -4 & \text{для } \alpha = 11 \\ -1 & \text{для } \alpha = 13 \\ -1 & \text{для } \alpha = 31 \\ 2 & \text{для } \alpha = 33 \end{bmatrix}, \quad (12.352)$$

то уравнение Лоу, выраженное через $h_\alpha(\omega)$, есть

$$h_\alpha(\omega) = \frac{\lambda_\alpha}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_\mu^\infty d\omega_p p^3 v^2(\mathbf{p}^2) \left\{ \frac{|h_\alpha(\omega_p)|^2}{\omega_p - \omega - i\varepsilon} + \sum_\beta A_{\alpha\beta} \frac{|h_\beta(\omega_p)|^2}{\omega_p + \omega} \right\}. \quad (12.353)$$

С помощью условия унитарности (12.344) его можно переписать в виде

$$h_\alpha(\omega) = \frac{\lambda_\alpha}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_\mu^\infty d\omega_p \left\{ \frac{\text{Im } h_\alpha(\omega_p)}{\omega_p - \omega - i\varepsilon} + \sum_\beta A_{\alpha\beta} \frac{\text{Im } h_\beta(\omega_p)}{\omega_p + \omega} \right\} \quad (12.354)$$

$$= \frac{\lambda_\alpha}{\omega} + \frac{1}{4\pi^2} \int_\mu^\infty d\omega_p \left\{ \frac{\sigma_\alpha(\omega_p)}{\omega_p - \omega - i\varepsilon} + \sum_\beta A_{\alpha\beta} \frac{\sigma_\beta(\omega_p)}{\omega_p + \omega} \right\} \frac{1}{p v^2(\mathbf{p}^2)}. \quad (12.355)$$

Уравнения (12.355) и (12.354) представляют собой в действительности точные следствия модели Чу и условия унитарности и не зависят от однорезонного приближения, что будет проверено с помощью равенств (12.300), (12.303), (12.344) и (12.336). К этому вопросу мы вернемся в конце параграфа. Уравнение (12.354) эквивалентно тому, что $h_\alpha(z)$ обладает следующими свойствами:

- а) все особенности $h_\alpha(z)$ расположены на действительной оси;
- б) $h_\alpha(z)$ имеет простой полюс в начале координат с вычетом λ_α ;
- в) $h_\alpha(z)$ имеет точки ветвления при $z = \pm \mu$ и определена в плоскости с разрезами, идущими по действительной оси от $z = \pm \mu$ до $\pm \infty$;
- г) $h_\alpha(z)$ ведет себя на бесконечности как $1/z$;
- д) $h_\alpha(z)$ удовлетворяет соотношениям перекрестной симметрии (12.349).

Чтобы решить уравнение (12.349), Чу и Лоу ввели действительную функцию

$$g_\alpha(z) = \frac{\lambda_\alpha}{z} \frac{1}{h_\alpha(z)}, \quad (12.356)$$

где $g_\alpha(0) = 1$, поскольку $h_\alpha(z)$ имеет полюс при $z=0$ с вычетом λ_α . Функция $g_\alpha(z)$ на бесконечности ведет себя как константа. Функцию $g_\alpha(z)$ удобно ввести потому, что ее скачки на разрезах при $z > \mu$ и $z < -\mu$ не зависят от самой функции $g_\alpha(z)$. Например, в области

$\omega_p > \mu$, поскольку $\overline{h_\alpha(z)} = h_\alpha(\bar{z})$,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \omega_p + i\varepsilon} g_\alpha(z) - \lim_{z \rightarrow \omega_p - i\varepsilon} g_\alpha(z) &= \frac{\lambda_\alpha}{\omega_p} \left[\frac{1}{h_\alpha(\omega_p + i\varepsilon)} - \frac{1}{h_\alpha(\omega_p - i\varepsilon)} \right] = \\ &= -\frac{2i\lambda_\alpha}{\omega_p} \frac{\operatorname{Im} h_\alpha(\omega_p + i\varepsilon)}{|h_\alpha(\omega_p + i\varepsilon)|^2} = -\frac{\lambda_\alpha}{\omega_p} \left[\frac{2ip^3 v^2 (p^2) |h_\alpha(\omega_p)|^2}{|h_\alpha(\omega_p)|^2} \right] = \\ &= -2i \frac{\lambda_\alpha p^3}{\omega_p} v^2 (p^2). \end{aligned} \quad (12.357)$$

Соотношения перекрестной симметрии для g_α суть

$$\sum_\beta B_{\alpha\beta} \frac{1}{g_\beta(z)} = \frac{1}{g_\alpha(-z)}, \quad (12.358)$$

где

$$B_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\lambda_\alpha} A_{\alpha\beta} \lambda_\beta. \quad (12.359)$$

Функция $g_\alpha(z)$ имеет следующие особенности. Как и $h_\alpha(z)$, она имеет точки ветвления при $z = \pm \mu$ и определена в плоскости с разрезами, идущими по действительной оси до $\pm \infty$. Если $h_\alpha(z)$ не имеет нулей, то других особенностей у $g_\alpha(z)$ нет. Из уравнения (12.353) следует, что $\operatorname{Im} h_\alpha(z) = c_\alpha \operatorname{Im} z$, где c_α — некоторая постоянная. Поэтому если c_α не равна случайно нулю, то нули $h_\alpha(z)$ могут лежать лишь на действительной оси. При достаточно малых значениях $(f/\mu)^2$ функция $h_\alpha(z)$ не будет иметь нулей даже на действительной оси (поскольку тогда преобладает член λ_α/z), так что в этом случае граничные условия для $g_\alpha(z)$ и природа ее особенностей предполагают, что для $g_\alpha(z)$ существует следующее представление:

$$g_\alpha(z) = 1 - \frac{z}{\pi} \int_\mu^\infty dx' \left[\frac{A_\alpha(x')}{x' - z} + \frac{B_\alpha(x')}{x' + z} \right], \quad (12.360)$$

где A_α и B_α — весовые функции, определенные при $x \geq \mu$.

Функция $A_\alpha(x)$ дает скачок $g_\alpha(z)$ при переходе действительной оси при $z \geq \mu$. Поэтому в силу (12.357)

$$A_\alpha(\omega_p) = \frac{\lambda_\alpha p^3}{\omega_p^2} v^2 (p^2). \quad (12.361)$$

Соотношений перекрестной симметрии как раз достаточно, чтобы определить вторую весовую функцию $B_\alpha(x)$, которая дает скачок функции $g_\alpha(z)$ при переходе через действительную ось при $z \leq -\mu$. Следовательно, при достаточно малых f^2/μ^2

$$h_\alpha(z) = \frac{\lambda_\alpha/z}{1 - \frac{z}{\pi} \lambda_\alpha \int_\mu^\infty \frac{d\omega_p}{\omega_p^2} \frac{p^3 v^2 (p^2)}{\omega_p - z} - \frac{z}{\pi} \int_\mu^\infty \frac{d\omega_p}{\omega_p^2} \frac{p^3 v^2 (p^2)}{\omega_p + z} B'_\alpha(\omega_p)}, \quad (12.362)$$

где $p = \sqrt{\omega_p^2 - \mu^2}$, а функция B' , определенная соотношением

$$\frac{p^3 v^2 (p^2)}{\omega_p^2} B'_\alpha(\omega_p) = B_\alpha(\omega_p), \quad (12.363)$$

должна быть выбрана так, чтобы функция $h_\alpha(z)$ удовлетворяла соотношениям перекрестной симметрии (12.349). (Относительно численных мето-

дов решения этой задачи см. [699], а также [123].) Равенство (12.362) дает решение уравнения Лоу в одномезонном приближении. Это решение является аналитическим продолжением решения теории возмущений по $(f/\mu)^2$. Кастильехо, Далиц и Дайсон [115] (см. также [450]) показали, что оно не единственное, а скорее одно из бесконечного числа решений. Другие решения возникают, если $h_\alpha(z)$ имеет произвольное число нулей на действительной оси, а вычеты функции $g_\alpha(z)$ в этих точках положительны. Таким образом, решение Чу и Лоу отличается от других решений тем, что оно имеет наименьшее число нулей в амплитуде рассеяния.

Эта неоднозначность решения возникает из-за того, что уравнение Лоу не выражает всего физического содержания теории [202, 588, 589]. Более конкретно, неоднозначность вызвана недостатком информации в уравнении Лоу относительно внутренней структуры системы [348]. Фэрли и Полкингхорн [227, 228] показали, что для выбора правильного «физического» решения, которое является единственным, достаточно знать энергетический спектр невозмущенного гамильтониана. Одному и тому же уравнению Лоу соответствует бесконечный класс теорий. В частности, решение Чу и Лоу описывает одну такую теорию, в которой нуклон обладает минимальной внутренней структурой. Все другие решения соответствуют моделям, в которых мишень (нуклон) обладает возбужденными состояниями, что ведет к дополнительным резонансам.

Отметим далее, что в силу равенств (12.356) и (12.343)

$$\operatorname{Re} g_\alpha(z) \Big|_{z \rightarrow \omega_p + i\epsilon} = \frac{\lambda_\alpha p^3 v^2 (p^2)}{\omega_p} \operatorname{ctg} \delta_\alpha(\omega_p), \quad (12.364)$$

а из равенства (12.362) следует

$$\operatorname{Re} g_\alpha(\omega) = 1 - \omega \left\{ \frac{\lambda_\alpha}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega_p p^3 v^2 (p^2)}{\omega_p^2 (\omega_p - \omega)} + \frac{1}{\pi} \int \frac{d\omega_p}{\omega_p^2} p^3 v^2 (p^2) \frac{B'_\alpha(\omega_p)}{\omega_p + \omega} \right\}. \quad (12.365)$$

Без обрезания, т. е. при $v(p^2) = 1$, интегралы в равенстве (12.365) расходились бы линейно. Поэтому вклад в интегралы дает главным образом область $\omega_p \sim \omega_{\max}$, где ω_{\max} — максимальная энергия, эффективно допускаемая обрезанием множителем $v(p^2)$. Следовательно, при ω , малых по сравнению с ω_{\max} , зависимостью знаменателей подынтегрального выражения от ω можно пренебречь. Можно ожидать, что вносимая этим пренебрежением ошибка будет порядка ω/ω_{\max} , так как]

$$\frac{1}{\omega_p - \omega} = \frac{1}{\omega_p} + \frac{\omega}{\omega_p} \frac{1}{\omega_p - \omega}. \quad (12.366)$$

При обрезании около 1 Бэ и для мезонов с энергией, меньшей 250 Мэв, это приближение должно быть разумным. В общем случае $\operatorname{Re} g_\alpha(\omega)$ можно записать в виде

$$\frac{\lambda_\alpha p^3 v^2 (p^2)}{\omega_p} \operatorname{ctg} \delta_\alpha(\omega_p) = 1 - \omega_p r_\alpha(\omega_p). \quad (12.367)$$

Согласно приведенным аргументам, величина $r_\alpha(\omega_p)$ почти постоянна при малых ω_p . Приближение, которое заключается в полном пренебрежении зависимостью $r_\alpha(\omega_p)$ от энергии при $\omega_p \ll \omega_{\max}$, называется при-

ближением эффективного радиуса¹⁾. Как видно из равенства (12.365), r_α — порядка $\lambda_\alpha \omega_{\max}$. Перекрестная симметрия требует, чтобы $r_{11} = -r_{33} - 1/4 r_{13}$, или

$$r_\alpha = r_{33} \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{4} x \\ -x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (12.368)$$

где $x = -r_{13}/r_{33}$. Далее, сравнивая (12.365) и (12.355) при $\omega < \mu$, можно показать, что

$$r_{33} = \frac{\mu^2}{3f^2} \frac{1}{4\pi^2} \int_\mu^\infty d\omega_p \frac{(\sqrt{2}\sigma_3 + \sigma_1 + \sigma_2)}{\omega_p \rho v^2(p^2)}, \quad (12.369)$$

т. е. эффективный радиус r_{33} положителен. При подходящем выборе обрезания в 33-состоянии будет резонанс, поскольку из равенства (12.367) с точностью до $1/\omega_{\max}$ следует

$$\frac{p^3 v^2(p^2)}{\omega_p} \operatorname{ctg} \delta_{33}(\omega_p) = \frac{3\mu^2}{4f^2} (1 - r_{33}\omega_p). \quad (12.370)$$

Резонанс будет при $\omega_p = 1/r_{33}$, т. е. в точке, где $\delta_{33} = 90^\circ$. Таким образом, предсказываются P -фазы при низких энергиях. Они выражаются через два параметра: константу связи f^2 и эффективный радиус r_{33} , причем последний определяется обрезанием ω_{\max} , ибо $r_{33} \sim f^2 \omega_{\max}$.

Константу связи можно определить из графика функции $p^3 \operatorname{ctg} \delta_{33}(\omega_p) \cdot 1/\omega_p$ в зависимости от ω_p . Формула (12.370) показывает, что в приближении эффективного радиуса этот график должен иметь вид прямой линии, а длина отрезка оси ординат от начала координат до точки пересечения с графиком должна быть равна $3/4 (\mu^2/f^2)$. Ожидаемая линейная зависимость действительно была обнаружена и привела к значению $f^2/\mu^2 = 0,08$. (Полный и подробный анализ см. в статье Бернгардини [46].) Поскольку экспериментально установлено, что есть резонанс при $\omega_p \sim 200 Mэв$, то соотношение между резонансной энергией ω_0 и r_{33} , $r_{33} \approx 1/\omega_0$, и теоретическое соотношение $r_{33} \sim \left[\left(\frac{f^2}{\mu^2} \right) \omega_{\max} \right] / \mu^2$ означают, что $\omega_{\max} \sim 6\mu$. Таким образом, апостериори оправдывается предположение о малости $1/\omega_{\max}$.

Модель Чу ведет лишь к P -рассеянию и, таким образом, не может объяснить S -фазы при низких энергиях. Чтобы распространить анализ Чу и Лоу на S -рассеяние при низких энергиях, Дрелл, Фридман и Захариазен [184] обобщили модель Чу, включив взаимодействие мезонов с нуклонами в S -состоянии. Они приняли следующий гамильтониан взаимодействия:

$$H_I = H_p + H_{s1} + H_{s2}, \quad (12.371a)$$

$$H_p = \frac{f_0}{\mu} \sum_j \int \varrho(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \varphi_j(\mathbf{x}) \tau_j d^3x, \quad (12.371б)$$

$$H_{s1} = g_{01} \int \varphi(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}) \varrho(\mathbf{x}') d^3x d^3x', \quad (12.371в)$$

¹⁾ В действительности степенной ряд $r_\alpha(z) = r_\alpha(0) + z r'_\alpha(0) + \dots$ имеет радиус сходимости $< \mu$, а именно при $z = \mu$ начинается физически интересная область. Тем не менее $r_\alpha(\omega) \approx r_\alpha(0)$ при $\mu \ll \omega \ll \omega_{\max}$ (см. [125]).

$$H_{s2} = g_{02} \int (\tau \cdot [\varphi(x) \times \pi(x')]) \varrho(x) \varrho(x') d^3x d^3x'. \quad (12.371r)$$

Этот гамильтониан представляет собой статический предел гамильтониана (12.177), причем учтены члены порядка $1/M$ и G^2/M^2 . Взаимодействие $H_s = H_{s1} + H_{s2}$ ведет к S -рассеянию. Дрелл и др. получили амплитуды S - и P -рассеяния, которые являются функциями перенормированных постоянных:

$$f = \frac{+\langle s, t | \sigma_i \tau_j | s, t \rangle_+}{\langle s, t | \sigma_i \tau_j | s, t \rangle} f_0 = Z f_0, \quad (12.372)$$

$$g_1 = \frac{+\langle s, t | s, t \rangle_+}{\langle s, t | s, t \rangle} g_{01} = g_{01} \quad (12.373)$$

и

$$g_2 = \frac{+\langle s, t | \tau_i | s, t \rangle_+}{\langle s, t | \tau_i | s, t \rangle} g_{02} = Z' g_{02}. \quad (12.374)$$

Приняв g_1 и g_2 в качестве подбираемых параметров, а f и ϱ определяя из данных по P -рассеянию, Дрелл и др. нашли, что можно получить согласие с экспериментальными значениями S -фаз при низких энергиях:

$$\delta_{J=0, T=1/2} = \delta_1 = 0,16 \frac{\hbar k}{\mu c}, \quad (12.375a)$$

$$\delta_{J=0, T=3/2} = \delta_3 = -0,11 \frac{\hbar k}{\mu c}, \quad (12.375b)$$

если положить

$$g_1 = \frac{0,4}{\mu} \quad (12.376)$$

и

$$g_2 = \frac{0,4}{\mu^2} \quad (12.377)$$

(см. также [71]). Используя подход Вика, Чу и Лоу и гамильтониан (12.374), Бинсер [58] рассчитал двойное рождение π -мезонов в S -состоянии мезоном в P -состоянии. Полученные им результаты находятся в разумном согласии с экспериментом. Вычисления рождения мезонов в мезон-нуклонных столкновениях с использованием формализма Чу и Лоу были выполнены также Франклином [274], Родбергом [665] и Кейзесом [435] (см. также работу Баршея [35], который исходил из псевдоскалярной мезонной теории в гейзенберговской картине. Используя подход Лоу [512], он получил амплитуду рождения мезона, а затем перешел к статическому пределу).

К несчастью, из-за недостатка места мы должны ограничиться обсуждением модели Чу в применении к мезон-нуклонному рассеянию и не можем подробно остановиться ни на включении электромагнитных взаимодействий в этой модели, ни на ее предсказаниях относительно ядерных сил. А результаты, относящиеся к фоторождению мезонов, поистине успешны и, возможно, являющиеся наибольшим достижением подхода Чу и Лоу, ибо в этом подходе результаты по мезон-нуклонному рассеянию связываются с задачей о фоторождении. В самом деле, раз известны фазы π -мезон-нуклонного рассеяния, то соответствующие фотомезонные сечения предсказываются почти однозначно и находятся в хорошем согласии с экспериментом. Далее, теория предсказывает, что фоторождение мезонов в пределе нулевой энергии зависит только от значения f^2/μ^2 , той самой пере-

нормированной константы, которая появилась в P -рассеянии мезонов на нуклонах. Подробности читатель найдет во второй статье Чу и Лоу [122] (см. также [123]).

Экспериментально найдено, что ход сечения фоторождения заряженных π -мезонов в зависимости от энергии сильно отличается от поведения сечения фоторождения нейтральных мезонов. Как $\sigma(\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n)$, так и $\sigma(\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p)$ имеют максимум при энергии фотона около 330 $M\text{эв}$, который соответствует 33-резонансу в рассеянии π -мезонов на нуклонах. Поведение $\sigma(\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p)$ у порога свидетельствует о том, что π^0 -мезоны рождаются в P -состоянии, в то время как поведение $\sigma(\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n)$ у порога показывает, что заряженные π -мезоны рождаются главным образом в S -состоянии. Это примечательное различие можно понять, если вспомнить, что калибровочно-инвариантное введение электромагнитного взаимодействия требует замены оператора $\nabla\phi$ в H_I на $(\nabla - et_3A)\phi$, т. е. оператор ∇ должен быть заменен на $\nabla + ieA$, когда он действует на оператор поля π^+ -мезона. Поэтому при наличии электромагнитного поля в гамильтониане взаимодействия появляется дополнительный член вида $\left(\frac{ef}{\mu}\sigma \cdot A\phi_{\pi^+} + \text{э. с.}\right)$, который и описывает фоторождение заряженных π -мезонов в S -состоянии.

С помощью модели Чу и на основании подхода Чу и Лоу были рассчитаны и другие электромагнитные эффекты: фоторождение пары π -мезонов (один в S -состоянии, другой в P -состоянии) [148], распределение заряда и аномальные магнитные моменты нуклонов [699, 783, 557], а также рассеяние фотонов на нуклоне [431].

Наконец, Лоу [513] ясно и просто изложил связь между статической моделью Чу и полностью релятивистской γ_3 -теорией и объяснил основу успеха простой статической модели. В сущности причина, почему полезна столь грубая теория, заключается в том, что соображения инвариантности (по отношению к вращениям в обычном и изотопическом пространстве, а также четность и т. д.) и предполагаемый энергетический спектр состояний мезон-нуклонной системы диктуют поведение теории при низких энергиях. Почти любая теория с теми же свойствами инвариантности и тем же спектром имела бы такое же поведение P -волны при низких энергиях [382], пока не включаются члены с прямым мезон-мезонным взаимодействием. Таким образом, успех модели Чу отражает также относительно малую важность мезон-мезонных взаимодействий для P -рассеяния при низких энергиях.

Мы закончим этот параграф о модели Чу изложением другого вывода уравнения Лоу, который основывается на связи между причинностью и «дисперсионными соотношениями». (Об этой связи в применении к данному случаю см. работу [781].) Под причинностью мы понимаем условие того, что реакция системы на возмущение должна быть равна нулю при временах, предшествующих началу действия возмущения, т. е. «выходной сигнал не может появиться ранее входного», если говорить на языке радиотехники. В применении к задаче рассеяния условие причинности утверждает, что не может быть рассеянных волн до тех пор, пока начальная волна не достигнет какой-либо части рассеивателя. Под дисперсионными соотношениями понимаются соотношения, связывающие действительную и мнимую части функции, которая обычно является физически наблюдаемой величиной, например амплитудой рассеяния.

Простой (и нестрогий) вывод связи между принципом причинности и дисперсионными соотношениями следующий. Пусть входная величина

для данной физической системы, рассматриваемая как функция времени, есть $I(t)$, а получающаяся выходная величина (отклик системы) — $R(t)$. Предположим, что система линейна, хотя дисперсионные соотношения справедливы и для несколько более общих систем. Примем также, что система не зависит от времени, т. е. что смещение входного сигнала во времени как целого вызывает соответствующее смещение во времени отклика системы. При этих предположениях можно написать следующее соотношение между входным сигналом и откликом системы:

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} T(t-t') I(t') dt', \quad (12.378)$$

где $T(t)$ (функция распределения временной задержки) есть выходной сигнал, соответствующий входному сигналу в виде δ -функции. Если обозначить через $r(\omega)$, $t(\omega)$ и $i(\omega)$ фурье-компоненты функций R , T и I соответственно, т. е.

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (12.379)$$

то равенство (12.378) переписывается в виде

$$r(\omega) = t(\omega) i(\omega) \quad (12.380)$$

или

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} t(\omega) i(\omega). \quad (12.381)$$

Принцип причинности можно сформулировать в виде следующего утверждения: если $I(t) = 0$ при $t < 0$, тогда $R(t) = 0$ при $t < 0$. Так как

$$i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} I(t) dt, \quad (12.382)$$

то для $I(t) = 0$ при $t < 0$ функция

$$i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} I(t) dt, \quad (12.383)$$

рассматриваемая как функция комплексной переменной $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, будет аналитической функцией при $\text{Im } \omega = \omega_2 > 0$, т. е. в верхней части комплексной плоскости ω . [Для простоты примем, что $I(t)$ ограничена или интегрируема с квадратом, чтобы интеграл (12.383) всегда сходился при $\omega_2 > 0$.]

Отметим далее, что из равенства (12.381) следует, что $R(t)$ равна нулю при $t < 0$, если функция $t(\omega) i(\omega)$ аналитична в верхней полуплоскости ω ¹⁾. Так как $i(\omega)$ аналитична в верхней полуплоскости (а это справедливо для *всех* входных сигналов, равных нулю при $t < 0$), то система будет причинной, если фурье-компонента $t(\omega)$ функции $T(t)$ будет аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной

¹⁾ И если $t(\omega) i(\omega)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, чтобы интеграл по верхнему полуокружению стремился к нулю при стремлении радиуса к бесконечности. — Прим. ред.

переменной ω или, что эквивалентно, если $T(t) = 0$ при $t < 0$, т. е. если $T(t) = \theta(t) T'(t)$, где $\theta(t) = 0$ при $t < 0$ и 1 при $t > 0$. Поэтому, согласно теореме Коши, для любого контура C , лежащего в верхней полуплоскости ω , и любого ω при $\text{Im } \omega > 0$ можно написать

$$t(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta. \quad (12.384)$$

Предположим, что поведение $t(\zeta)$ на бесконечности таково, что контур можно превратить в контур большого полукруга и что вклад от интегрирования по дуге полукруга равен нулю в пределе, когда радиус R стремится к ∞ . Тогда

$$t(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta. \quad (12.385)$$

Наконец, поскольку мы интересуемся действительными значениями ω , в пределе при $\omega \rightarrow \omega_1 + i\varepsilon$, то получим

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_1 + i\varepsilon} t(\omega) &= t(\omega_1) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t(\zeta)}{\zeta - \omega_1 - i\varepsilon} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t(\zeta)}{\zeta - \omega_1} d\zeta + \frac{1}{2} t(\omega_1), \end{aligned} \quad (12.386)$$

откуда при действительных ω

$$t(\omega) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta. \quad (12.387)$$

Из (12.387) следует

$$\text{Re } t(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } t(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (12.388a)$$

$$\text{Im } t(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re } t(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (12.388b)$$

Так как

$$i \text{Im } t(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im } t(\omega') i\pi d(\omega - \omega') d\omega', \quad (12.389)$$

то, складывая (12.388a) и (12.389), можно также написать

$$t(\omega) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } t(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} d\omega'. \quad (12.390)$$

Равенства (12.388) и (12.390) называются дисперсионными соотношениями и, очевидно, полностью эквивалентны аналитичности $t(\omega)$ при $\text{Im } \omega > 0$ и условию того, чтобы поведение $t(\omega)$ на бесконечности было таким, что $\int \frac{t(\omega)}{\omega} d\omega \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

После этого предварительного отступления вернемся к описанию мезон-нуклонного рассеяния. Амплитуда рассеяния определяет отклик системы при рассеянии мезона на нуклоне (напомним, что $|\rangle_- = S|\rangle_+$ и $R \propto S - 1$). Поэтому можно ожидать, что амплитуда $R_{JT}(\omega)$ (предполагается, что она определена с помощью аналитического продолжения для всех значений ω при $\text{Im } \omega > 0$) подчиняется дисперсионным соотношениям. Однако благодаря конечным размерам нуклона амплитуда рассеяния, а функция $h_\alpha(\omega)$ [т. е. отношение амплитуды к $v^2(k^2)k^3$] удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$h_\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } h_\alpha(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} d\omega'. \quad (12.391)$$

Покажем теперь, что уравнение (12.391) вместе с соотношением перекрестной симметрии и условием унитарности в действительности является уравнением Лоу. Поскольку последнее есть интегральное уравнение, в которое входят величины, определенные лишь при $\omega > \mu$, т. е. при физических значениях ω , то прежде всего желательно переписать (12.391) таким образом, чтобы интегрирование проводилось по $\omega > \mu$. Соотношение перекрестной симметрии гласит, что

$$h_\alpha(-\omega) = \sum_\beta A_{\alpha\beta} h_\beta(\omega). \quad (12.392)$$

Поэтому (12.391) можно переписать в виде

$$h_\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\mu}^{\mu} d\omega' \frac{\text{Im } h_\alpha(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im } h_\alpha(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \sum_\beta A_{\alpha\beta} \frac{\text{Im } h_\beta(\omega')}{\omega' + \omega}. \quad (12.393)$$

Чтобы получить вклад от области $|\omega| < \mu$, используем условие унитарности, которое можно записать в виде

$$\text{Im } h_\alpha(\omega) \propto -\pi \sum_\beta h_{\alpha\beta} \bar{h}_{\beta\alpha} \delta(\omega + M - E_\beta), \quad (12.394)$$

где $h_{\alpha\beta}$ — амплитуда процесса $\alpha \rightarrow \beta$ (в этих обозначениях $h_\alpha = h_{\alpha\alpha}$). Ясно, что при $|\omega| \leq \mu$ в сумму правой части (12.394) вносят вклад лишь однопуклонные состояния, так как для других состояний аргумент δ -функции всегда не равен нулю. Используя эти результаты, получаем

$$\text{Im } h_\alpha(\omega) = \pi \lambda_\alpha \delta(\omega) \quad (|\omega| < \mu) \quad (12.395)$$

и окончательно

$$h_\alpha(\omega) = \frac{\lambda_\alpha}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im } h_\alpha(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \sum_\beta A_{\alpha\beta} \frac{\text{Im } h_\beta(\omega')}{\omega' + \omega}. \quad (12.396)$$

А это и есть наше прежнее уравнение (12.354).

Приведение S -матрицы к нормальной форме

§ 1. Вводные замечания общего характера

В предыдущей главе изучались некоторые «простые» и решаемые модели теорий поля. Теперь мы перейдем к обсуждению методов теории возмущений в квантованной теории взаимодействующих релятивистских полей. Сначала рассмотрим применение теории возмущений к описанию рассеяния частиц. Мы будем основываться на выведенной ранее формуле для S -матрицы в картине Дирака. Вспомним, что в этой картине операторы поля удовлетворяют свободным уравнениям и что зависимость от времени вектора состояния $|\Psi(t)\rangle$ определяется гамильтонианом взаимодействия $H_I(t)$:

$$i\hbar \partial_t |\Psi(t)\rangle = H_I(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (13.1)$$

В этой картине S -матрица задается формулой

$$S = U(\infty, -\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(t, t_0) \quad (13.2a)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)). \quad (13.2b)$$

Она полностью определяет изменение состояния системы вследствие взаимодействия. В формулу (13.2b) удобно подставить явное выражение для плотности гамильтониана $\mathcal{H}_I(x)$. Так как

$$H_I(t) = \int d^3x \mathcal{H}_I(x), \quad (13.3)$$

то

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar c}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_n P(\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n)). \quad (13.4)$$

Во всех интересующих нас примерах плотность гамильтониана будет иметь следующее свойство:

$$[\mathcal{H}_I(x), \mathcal{H}_I(x')] = 0 \text{ при } (x - x')^2 < 0, \quad (13.5)$$

поэтому порядок, в котором следуют $\mathcal{H}_I(x)$ и $\mathcal{H}_I(x')$ при $x_0 = x'_0$, не существен, и, следовательно, оператор P полностью характеризует операцию упорядочивания. Выражение (13.4) для S -матрицы очевидным

образом ковариантно, и в этом заключается его преимущество перед выражением (13.26). Ковариантность может быть сделана еще более явной, если записать выражение (13.4) в виде

$$S = P \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_I(x) d^4x \right) \right]. \quad (13.6)$$

Так как $\mathcal{H}_I(x)$ и d^4x — скаляры, то показатель степени является инвариантом. С другой стороны, в силу свойства (11.5) хронологический оператор P тоже определен инвариантным образом. Тем самым завершено доказательство инвариантности выражения (13.6).

При использовании выражения (13.4) в задачах теории поля имеется, однако, несколько трудностей. Во-первых, для получения S -матрицы нужно в $U(t, t_0)$ перейти к пределам $\lim t \rightarrow \infty$, $\lim t_0 \rightarrow -\infty$, что требует специального предписания. В частности, для члена n -го порядка имеется $n!$ способов перехода к пределу. Во-вторых, должен быть дан рецепт, как сгладить переходное поведение, обусловленное тем, что в момент времени t_0 вектор состояния является собственной функцией H_0 , тогда как в любой следующий момент времени зависимость вектора состояния от времени определяется $H_I(t)$.

Чтобы обойти эти трудности, Дайсон [196—199] ввел «промежуточное представление взаимодействия» (или сглаженную картину взаимодействия). В этой картине гамильтониан взаимодействия умножается на множитель вида $\exp(-\lambda |t|)$, обеспечивающий сходимость. Переходить к пределу $\lambda \rightarrow 0$ следует после выполнения всех вычислений. Такой множитель сходимости устраняет как неоднозначность из-за порядка перехода к пределу $t \rightarrow \pm \infty$ (результат эквивалентен усреднению по $n!$ способам стремления к пределу), так и переходные эффекты.

Другая трудность, встречающаяся при применении выражения (13.4) к задачам теории поля, заключается в следующем. Как отмечалось выше, при применении теории возмущений в картине Дирака (взаимодействия) обычно предполагают, что начальное состояние системы является собственным состоянием невозмущенного гамильтониана H_0 . Из-за взаимодействия $H_I(t)$ вектор состояния изменяется. В конечном счете при больших t снова делается предположение, что поведение вектора состояния определяется только H_0 .

Таким образом, применимость теории возмущений покоится на предположении, что возмущенный и невозмущенный векторы состояния лежат в одном и том же гильбертовом пространстве. Известно, однако, что для локальных точечных взаимодействий это не так. Ван Хов [804, 805] показал, что в теориях с трilinearными точечными взаимодействиями (или в теориях с недостаточно быстро убывающими функциями обрезания) нет нормируемых векторов состояния (отличных от вакуума для тех теорий, в которых «голый» и физический вакуум совпадают), которые лежали бы в области пересечения гильбертовых пространств собственных состояний H и H_0 .

Чтобы обойти эту трудность, в последнее время стало модным работать в терминах так называемых «ин»- и «аут»-операторов (см. работы Янга и Фельдмана [871] и Челлена [408], а также Швебера [708]), которые удовлетворяют перестановочным соотношениям и уравнениям для свободных полей и которые действуют в гильбертовом пространстве собственных состояний полного гамильтониана H . Для определения ин-операторов предположим, что картины Гейзенберга, Шредингера и Дирака

совпадают в момент времени $t = 0$. Определим затем оператор

$$V_+(t) = e^{iHt}\Omega^{(+)}e^{-iHt}, \quad (13.7)$$

где $\Omega^{(+)}$ — волновая матрица Мёллера. Напомним, что она имеет следующие свойства:

$$\Omega^{(+)}|\varphi_a\rangle = |\psi_a^+\rangle, \quad (13.8a)$$

$$\Omega^{(+)}H_0\Omega^{(+)-1} = H \quad (13.8b)$$

или

$$\Omega^{(+)}H_0 = H\Omega^{(+)}. \quad (13.8b)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что гамильтонианы ¹⁾ H_0 и H не имеют связанных состояний. Тогда $\Omega^{(+)-1} = \Omega^{(+)*}$ и

$$\begin{aligned} V_+(t)^{-1} &= e^{iHt}\Omega^{(+)*}e^{-iHt} = \\ &= e^{iHt}\Omega^{(+)-1}e^{-iHt}. \end{aligned} \quad (13.9)$$

Развитие во времени оператора $V_+(t)$ определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} i\partial_t V_+(t) &= e^{iHt}[\Omega^{(+)}, H]e^{-iHt} = \\ &= e^{iHt}\Omega^{(+)}(H - H_0)e^{-iHt} = \\ &= e^{iHt}\Omega^{(+)}e^{-iHt}e^{iHt}H_I(0)e^{-iHt} = \\ &= V_+(t)H_{IH}(t), \end{aligned} \quad (13.10)$$

где значок H использован для обозначения гейзенберговского оператора. Определим гейзенберговский «ин»-оператор:

$$\begin{aligned} O_{in}(t) &= V_+(t)O_H(t)V_+(t)^{-1} = \\ &= e^{iHt}\Omega^{(+)}e^{-iHt}O_H(t)e^{iHt}\Omega^{(+)-1}e^{-iHt} = \\ &= e^{iHt}\Omega^{(+)}O_H(0)\Omega^{(+)-1}e^{-iHt} = \\ &= e^{iHt}O_{in}(0)e^{-iHt}. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Из этого определения легко вывести уравнение движения, которому удовлетворяет оператор $O_{in}(t)$:

$$-i\partial_t O_{in}(t) = [H, O_{in}(t)], \quad (13.12a)$$

как и требуется для гейзенберговского оператора. Имеем также

$$\begin{aligned} -i\partial_t O_{in}(t) &= e^{iHt}\{H\Omega^{(+)}O_H(0)\Omega^{(+)-1} - \Omega^{(+)}O_H(0)\Omega^{(+)-1}H\}e^{-iHt} = \\ &= e^{iHt}\Omega^{(+)}[H_0, O_H(0)]\Omega^{(+)-1}e^{-iHt} = \\ &= e^{iHt}\Omega^{(+)}e^{-iHt}[H_{0H}(t), O_H(t)]e^{iHt}\Omega^{(+)-1}e^{-iHt} = \\ &= [H_{0in}(t), O_{in}(t)], \end{aligned} \quad (13.12b)$$

так что оператор $O_{in}(t)$ подчиняется свободному уравнению, определяемому гамильтонианом H_{0in} . Чтобы получить выражение для гамильто-

¹⁾ Операторы H, H_0, H_I и т. д. без временного аргумента являются гейзенберговскими операторами, отнесенными к моменту времени $t=0$. Их зависимость от времени определяется соотношением

$$O_H(t) = e^{iHt}O_H(0)e^{-iHt},$$

так что $H(t) = H_H(t) = H(0) = H$.

ниана $H_{0\text{ in}}$, следует заменить в выражении для H_0 гейзенберговские операторы «ин»-операторами. Из равенств (13.11) и (13.86) следует

$$\begin{aligned} H_{0\text{ in}}(t) &= e^{iHt}\Omega^{(+)}H_{0H}(0)\Omega^{(+)-1}e^{-iHt} = \\ &= e^{iHt}H_H e^{-iHt} = \\ &= H = H_{0\text{ in}}(0). \end{aligned} \quad (13.13)$$

Следовательно, собственные состояния гамильтониана $H_{0\text{ in}}$ являются также собственными состояниями и гамильтониана H .

Подставляя множитель $V_+(t)^{-1}V_+(t)$ в правую часть уравнения (13.10), можно переписать его в виде

$$i\partial_t V_+(t) = H_{I\text{ in}}(t)V_+(t). \quad (13.14)$$

Для получения других свойств оператора $V_+(t)$ рассмотрим матричный элемент

$$\begin{aligned} \langle \psi_b^+ | V_+(t) | \psi_a^+ \rangle &= e^{-i(E_a - E_b)t} \langle \psi_b^+ | \Omega^{(+)} | \psi_a^+ \rangle = \\ &= e^{-i(E_a - E_b)t} \langle \psi_b^+ | \psi_a^+ \rangle = \\ &= e^{-i(E_a - E_b)t} \left\{ \delta(b - a) - \frac{R_{ba}}{E_b - E_a - i\varepsilon} \right\}. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Переходя к пределу $t \rightarrow \pm \infty$, получаем

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \psi_b^+ | V_+(t) | \psi_a^+ \rangle = \delta(b - a), \quad (13.16a)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \psi_b^+ | V_+(t) | \psi_a^+ \rangle = \delta(b - a) - 2\pi i \delta(E_b - E_a) R_{ba} = S_{ba}, \quad (13.16b)$$

т. е. $\lim_{t \rightarrow +\infty} V_+(t) = S$ (S -матрице в картине Гейзенберга, матричные элементы S_{ba} которой определены через точные гейзенберговские состояния рассеяния $|\psi^+\rangle$, являющиеся собственными состояниями гамильтониана H [a также и $H_{0\text{ in}}$, согласно равенству (13.13)]). Формализм S -матрицы на основе «ин»-операторов подобен развитому ранее формализму на основе операторов в картине взаимодействия. Например, $V_+(t)$ в силу уравнения (13.14) и граничного условия $\lim_{t \rightarrow -\infty} V_+(t) = 1$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$V_+(t) = 1 - i \int_{-\infty}^t H_{I\text{ in}}(t') V_+(t') dt', \quad (13.17)$$

откуда

$$V_+(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^t dt_1 \dots \int_{-\infty}^t dt_n P(H_{I\text{ in}}(t_1) \dots H_{I\text{ in}}(t_n)) \quad (13.18)$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} S = V_+(+\infty)$. Элементы S -матрицы вычисляются между собственными состояниями невозмущенного гамильтониана (он теперь $H_{0\text{ in}}$!).

Мы снова хотим подчеркнуть, что этот формализм справедлив только тогда, когда нет связанных состояний. Позже мы вернемся к проблеме учета связанных состояний.

Можно построить в точности такой же формализм и с помощью оператора $V_-(t)$, который определяется соотношением

$$V_-(t) = e^{iHt}\Omega^{(-)}e^{-iHt}. \quad (13.19)$$

При этом S -матрица дается выражениями

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \psi_b^- | V_-(t) | \psi_a^- \rangle = S_{ba} \quad (13.20a)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \psi_b^- | V_-(t) | \psi_a^- \rangle = \delta(b-a). \quad (13.20b)$$

С помощью оператора $V_-(t)$ можно определить гейзенберговские «аут-операторы

$$O_{\text{out}}(t) = V_-(t) O_H(t) V_-(t)^{-1}, \quad (13.21)$$

которые снова подчиняются свободным уравнениям, и построить «аут-собственные состояния $|\psi_a^- \rangle$. Легко найти соотношение между ин- и аут-операторами. С этой целью вспомним, что S -матрица может быть определена из соотношений $S|\psi_a^- \rangle = |\psi_a^+ \rangle$ или $S\Omega^{(-)}|\varphi_a \rangle = \Omega^{(+)}|\varphi_a \rangle$, откуда

$$S = \Omega^{(+)}\Omega^{(-)-1} \quad (13.22)$$

и

$$\begin{aligned} O_{\text{out}}(0) &= \Omega^{(-)} O_H(0) \Omega^{(-)-1} = \Omega^{(-)}\Omega^{(+)-1} O_{\text{in}}(0) \Omega^{(+)}\Omega^{(-)-1} = \\ &= S^{-1} O_{\text{in}}(0) S. \end{aligned} \quad (13.23a)$$

Так как S -матрица коммутирует с $\exp iHt$, то в общем случае

$$O_{\text{out}}(t) = S^{-1} O_{\text{in}}(t) S. \quad (13.23b)$$

В ин-аут формализме мы обходим трудность, связанную с тем, что невозмущенные и возмущенные собственные состояния не лежат в одном и том же гильбертовом пространстве. Нужно отметить, однако, что в строгом математическом смысле не существует унитарного оператора $\Omega^{(\pm)}$, если гамильтонианы H_0 и H не имеют общих векторов состояния. Таким образом, исходная трудность только переносится в другое место. Поэтому мы пока продолжим наше изложение в картине Дирака.

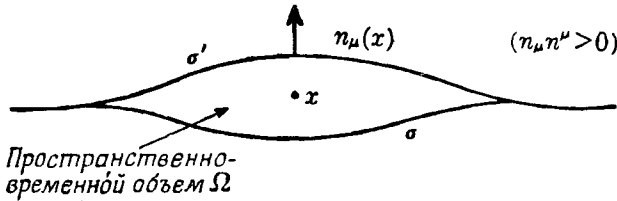
Томонага [782] и Швингер [711] положили начало интенсивному использованию картины взаимодействия в теории поля, что привело к значительному прогрессу в развитии вычислительных методов теории поля. Преимущество картины взаимодействия заключается в том, что в этой картине операторы поля удовлетворяют свободным уравнениям, так что могут быть записаны неодновременные инвариантные перестановочные соотношения. В этой картине уравнение (13.1) можно обобщить и придать ему ковариантную форму. Уравнение (13.1) в той форме, в которой оно записано, не ковариантно, поскольку для определения производной по времени требуется выделенная лоренцева система отсчета.

Обобщение состоит во введении понятия общей пространственно-подобной поверхности вместо «плоской» поверхности $t = \text{const}$. Единственное условие, которому должна удовлетворять такая поверхность, заключается в том, что нормаль к ней в любой точке x , $n_\mu(x)$, должна быть времени-подобной, т. е. $n_\mu(x) n^\mu(x) > 0$. Это означает, что никакие две точки на поверхности не могут быть связаны световым сигналом, или, другими словами, любые две точки поверхности разделены пространственно-подобным интервалом. Обозначим такую поверхность через σ . Каждой точке x этой поверхности можно приписать время $t(x)$, называемое ее локальным временем. В том пределе, когда поверхность становится плоской, каждая точка имеет одно и то же время t , равное координате плоскости $t = \text{const}$. Теперь само собой возникает естественное

обобщение $|\Psi(t)\rangle$ — переход к $|\Psi(t(\mathbf{x}))\rangle$. Затем можно рассматривать основное уравнение

$$i\hbar\partial_t|\Psi(t)\rangle = H_I(t)|\Psi(t)\rangle \quad (13.24)$$

как результат суммирования бесконечного ряда уравнений, полученных при помощи введения локального времени для каждой точки пространственно-подобной поверхности. Если выразить гамильтониан взаимо-



Ф и г. 18.

действия в виде суммы по малым трехмерным ячейкам ΔV пространственно-подобной поверхности σ

$$H_I(t) = \sum_{\sigma} \mathcal{H}_I(x) \Delta V, \quad (13.25)$$

то уравнение, которое соблюдается в малой ячейке вокруг пространственно-временной точки $x, t(x)$, может быть записано в виде

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t(\mathbf{x}))\rangle}{\partial t(\mathbf{x})} = \mathcal{H}_I(x) \Delta V |\Psi(t(\mathbf{x}))\rangle; \quad (13.26)$$

это уравнение представляет собой обобщение уравнения (13.24), ибо если изменение $|\Psi(t)\rangle$ при бесконечно малом сдвиге всей поверхности $t = \text{const}$ как целого определяется интегралом $\int \mathcal{H}_I(x) d^3x$, то разумно считать,

что вариация $|\Psi(t(\mathbf{x}))\rangle$ в точке $x, t(x)$ должна определяться плотностью энергии взаимодействия $\mathcal{H}_I(x) \Delta V$ в бесконечно малой окрестности точки x .

Так как произведение $\Delta V t(x)$ является инвариантом, то напрашивается следующий инвариантный метод дифференцирования. Рассмотрим функцию пространственно-подобной поверхности $|\Psi(t(\mathbf{x}))\rangle = |\Psi(\sigma)\rangle$. Сравним значения этой функции на двух пространственно-подобных поверхностях σ и σ' , которые отличаются друг от друга только в окрестности пространственно-временной точки x на бесконечно малую величину (фиг. 18). Теперь определим инвариантную операцию

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} |\Psi(\sigma)\rangle &= \lim_{\Delta t \Delta V \rightarrow 0} \frac{|\Psi(t(\mathbf{x}) + \Delta t(\mathbf{x}))\rangle - |\Psi(t(\mathbf{x}))\rangle}{c \int_{\Delta V} d^3x \Delta t(\mathbf{x})} = \\ &= \lim_{\Delta t \Delta V \rightarrow 0} \frac{|\Psi(\sigma')\rangle - |\Psi(\sigma)\rangle}{c \Delta t(\mathbf{x}) \Delta V} = \\ &= \lim_{\Omega(x) \rightarrow 0} \frac{|\Psi(\sigma')\rangle - |\Psi(\sigma)\rangle}{\Omega(x)}. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Здесь $\Omega(x)$ — четырехмерный объем, заключенный между поверхностями σ и σ' , причем σ' — пространственно-подобная поверхность, полученная

путем малой деформации поверхности σ вблизи точки x . При переходе к пределу $\Omega(x)$ стягивается к точке x . Поэтому можно переписать уравнение (13.26) в виде

$$i\hbar c \frac{\delta |\Psi(\sigma)\rangle}{\delta \sigma(x)} = \mathcal{H}_I(x) |\Psi(\sigma)\rangle. \quad (13.28)$$

Это уравнение ковариантно, так как гамильтониан \mathcal{H}_I является инвариантом в случае взаимодействий без производных (относительно взаимодействий с производными см. замечания, приведенные ниже), и для определения понятия пространственно-подобной поверхности не требуется задания какой-либо лоренцевой системы отсчета. Таким образом, мы написали уравнение движения системы без ссылок на какую-либо частную систему координат. Уравнение (13.28) обычно называют уравнением Томонага — Швингера.

Для существования решений уравнения (13.28) должно быть выполнено следующее условие интегрируемости:

$$\frac{\delta^2 |\Psi(\sigma)\rangle}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(x')} - \frac{\delta^2 |\Psi(\sigma)\rangle}{\delta \sigma(x') \delta \sigma(x)} = 0, \quad (13.29)$$

что по существу ограничивает область изменения $\sigma(x)$. В свою очередь для соблюдения условия (13.29) необходимо, чтобы

$$[\mathcal{H}_I(x), \mathcal{H}_I(x')] = 0 \quad (13.30)$$

для точек x и x' , лежащих на пространственно-подобной поверхности σ . Операторы поля подчиняются таким инвариантным перестановочным соотношениям, что условие (13.30) автоматически удовлетворяется для всех локальных взаимодействий без производных. Когда плотность лагранжиана взаимодействия содержит производные по времени от полевых переменных (например, в случае взаимодействия заряженного бозонного поля с электромагнитным), необходимо несколько обобщить описанный выше метод. В этом случае для того, чтобы условие интегрируемости было выполнено, плотность гамильтониана взаимодействия должна явно зависеть от поверхности (см., например, статьи Кролла [465] и Мэтьюза [538]). Из условия интегрируемости следует, что решение существует только тогда, когда поверхность σ является пространственно-подобной, так как коммутатор (13.30) не равен нулю, если точки x и x' разделены времениподобным интервалом. Кроме того, это условие гарантирует, что если пространственно-подобная поверхность становится плоскостью $t = \text{const}$, то каждое решение уравнения (13.28) удовлетворяет и уравнению (13.24).

В дальнейшем нам не придется в явном виде пользоваться этими поверхностями. Они не упрощают теорию и не вносят дополнительного вклада в физическое содержание теории, хотя в физическом смысле эти поверхности не хуже плоских поверхностей $t = \text{const}$. В то же время физически необоснованным является предположение, что эрмитовы операторы поля, взятые в строго определенных пространственно-временных точках, существуют и измеримы в обычном квантовомеханическом смысле. Действительно, Бор и Розенфельд [69, 70] в своих классических работах, посвященных проблеме измеримости электромагнитных полей, показали, что измеримы лишь средние значения операторов поля по малым пространственно-временным объемам, т. е. измеримы лишь эрмитовы операторы вида $\varphi(R) = \int_R \varphi(x) d^4x$, где R — малая область пространства-времени. Это обусловлено конечными размерами классических измеритель-

ных приборов и конечными промежутками времени, необходимыми для определения сил при помощи изучения их действия на макроскопические пробные тела. До сих пор еще не удалось найти связь между этими ограничениями на возможности измерений и проблемой расходимостей собственного заряда и собственной массы в релятивистских теориях поля. Вместе с тем известно, что если пространственно-временной объем, в котором производятся измерения флуктуаций поля или распределения плотности заряда и тока, имеет резкие пространственно-временные границы, то в теории возникают дополнительные «граничные расходимости» (см. статьи Гейзенберга [368], Штюкельберга [753, 754] и Коринальдези [144, 145]).

Чтобы уточнить сделанные выше замечания, мы проиллюстрируем их на простой модели теории поля, в которой спинорное поле взаимодействует с нейтральным мезонным полем. В картине Шредингера несимметризованный гамильтониан имеет вид

$$H = \int d^3x \tilde{\psi} (-i\gamma \cdot \partial + M_0) \psi(x) + \frac{1}{2} \int d^3x \{ \pi^2(x) + \mu_0^2 \varphi^2(x) + (\partial\varphi(x))^2 \} + G \int d^3x \tilde{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \varphi(x). \quad (13.31)$$

В картине Дирака операторы поля удовлетворяют следующим уравнениям движения и перестановочным соотношениям:

$$(-i\gamma \cdot \partial + M_0) \psi_D(x) = 0, \quad [\psi_D(x), \tilde{\psi}_D(x')]_+ = -iS(x-x'), \quad (13.32)$$

$$(\square + \mu_0^2) \varphi_D(x) = 0, \quad [\varphi_D(x), \varphi_D(x')] = i\Delta(x-x'), \quad (13.33)$$

а уравнение Томонага — Швингера для вектора состояния системы запишется в виде

$$i \frac{\delta |\Psi(\sigma)\rangle}{\delta \sigma(x)} = \mathcal{H}_{ID}(x) |\Psi(\sigma)\rangle, \quad (13.34)$$

где

$$\mathcal{H}_{ID}(x) = G : \tilde{\psi}_D(x) \Gamma \psi_D(x) : \varphi_D(x). \quad (13.35)$$

Уравнения, которым удовлетворяют ин-операторы $\varphi_{in}(x)$ и $\psi_{in}(x)$, совпадают с уравнениями (13.32) и (13.33), а оператор $V_+(t)$ подчиняется уравнению

$$i\partial_t V_+(t) = G \int d^3x : \tilde{\psi}_{in}(x) \Gamma \psi_{in}(x) : \varphi_{in}(x) V_+(t). \quad (13.36)$$

Для применения развитого в гл. 11 формализма к рассеянию мезона на нуклоне или к любому другому процессу рассеяния необходимо, чтобы спектры гамильтонианов H и H_0 совпадали. Если разбить гамильтониан (13.31) на невозмущенную и возмущенную части согласно формуле

$$H = H_0 + H_I(0), \quad (13.37)$$

где

$$H_I(0) = G \int d^3x : \tilde{\psi}(x) \Gamma \psi(x) : \varphi(x) \Big|_{x_0=0}, \quad (13.38)$$

то эти спектры не совпадают по двум причинам. Во-первых, в релятивистских теориях поля вообще, и в рассматриваемой модели в частности, «голый» вакуум $|\Phi_0\rangle$ (собственное состояние гамильтониана H_0) не является

собственным вектором гамильтониана H . Действительно, слагаемое $\tilde{\psi}^{(-)} \Gamma \psi^{(-)}$ в гамильтониане взаимодействия H_I приводит к рождению пар, и поэтому $H_I(0)|\Phi_0\rangle \neq 0$. Из-за возможности рождения пар энергия физического вакуума смещается относительно энергии «голого» вакуума на (вообще говоря, бесконечную) величину собственной энергии вакуума E_0 . Чтобы собственные значения энергии «голого» и физического вакуума совпали, мы прибавим и вычтем член E_0 — сдвиг уровня вакуума. Затем мы будем рассматривать $H_0 + E_0$ как невозмущенный гамильтониан, а $H_I - E_0$ как возмущение. Во-вторых, аналогичное явление возникает и в одночастичных состояниях: не совпадают энергии «голого» одночастичного состояния (собственного состояния H_0) и соответствующего физического одночастичного состояния (собственного состояния H) с тем же импульсом. Для одиночной (свободной) частицы единственный эффект, к которому может в релятивистски инвариантной теории приводить взаимодействие, сводится к изменению массы этой частицы (на δM для нуклона и на $\delta \mu^2$ для мезона). Таким образом, изменение энергии однонуклонного состояния дается формулой

$$E + \Delta E = \sqrt{(M_0 + \delta M)^2 + p^2} \approx \sqrt{M_0^2 + p^2} + \frac{M_0 \delta M}{\sqrt{M_0^2 + p^2}} + \dots, \quad (13.39)$$

и в первом порядке сдвиг уровня равен

$$\Delta E = \frac{M_0 \delta M}{E}. \quad (13.40)$$

Для учета этого сдвига уровня спектры гамильтонианов H_0 и H изменяют так же, как и для простых моделей, рассмотренных в гл. 12. Мы добавляем к H_0 член $\int d^3x \delta M : \tilde{\psi} \psi :$ и вычитаем этот же член из H_I , а затем отождествляем $M_0 + \delta M$ с физической (наблюдаемой) массой нуклона. Аналогично, мы добавляем и вычитаем член $\frac{1}{2} \int d^3x \delta \mu^2 : \varphi^2 :$ и отождествляем $\delta \mu^2 + \mu_0^2$ с квадратом наблюдаемой массы мезона. Поэтому невозмущенный гамильтониан и гамильтониан взаимодействия превращаются в

$$\begin{aligned} H_0 &= \int d^3x : \tilde{\psi} (-i \gamma \cdot \partial + M) \psi : + \frac{1}{2} \int d^3x : \pi^2 + \mu^2 \varphi^2 + (\partial \varphi)^2 : + E_0, \\ H_I &= G \int d^3x : \tilde{\psi} \Gamma \psi : \varphi - E_0 - \int d^3x : \tilde{\psi} \psi : \delta M - \frac{1}{2} \int d^3x \delta \mu^2 : \varphi^2 :, \end{aligned} \quad (13.41)$$

где перенормировочные контрчлены должны быть определены таким образом, чтобы однонуклонное состояние с импульсом p имело энергию $\sqrt{p^2 + M^2}$, а одномезонное $\sqrt{p^2 + \mu^2}$. Эти контрчлены взаимно уничтожаются с собственно-энергетическими членами, возникающими в процессе вычислений. Отметим снова, что при такой процедуре параметры M и μ вводятся в теорию феноменологически.

Приступим теперь к подробному анализу гамильтониана взаимодействия $G : \tilde{\psi} \Gamma \psi : \varphi$ в картине Шредингера. Рассмотрим сначала его спиновую часть $\tilde{\psi}(\mathbf{x}) \Gamma \psi(\mathbf{x})$. Если подставить в это выражение разложения $\tilde{\psi}(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ на операторы рождения и уничтожения, то возникают четыре типа членов:

1) $b_p^* b_{p'}$, соответствующий уничтожению нуклона с импульсом p с последующим рождением нуклона с импульсом p' , т. е. соответствующий рассеянию нуклона;

- 2) $d_p^* d_{p'}$, соответствующий рассеянию антинуклона;
 3) $b_p d_{p'}$, соответствующий аннигиляции нуклона и антинуклона,
 т. е. уничтожению пары;
 4) $b_p^* d_{p'}$, соответствующий рождению пары.

Далее, разложение оператора мезонного поля на операторы рождения и уничтожения записывается в виде

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k^* + a_{-k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (13.42)$$

Следовательно, гамильтониан взаимодействия H_I приводит к восьми элементарным процессам, которые соответствуют

- 1) испусканию бозона, сопровождаемому
 - а) рассеянием нуклона,
 - б) рассеянием антинуклона,
 - в) аннигиляцией пары,
 - г) рождением пары;
- 2) поглощению бозона, сопровождаемому перечисленными выше процессами.

Эти элементарные процессы могут быть графически изображены хронологически упорядоченными диаграммами Фейнмана. Обозначим бозон прерывистой линией, нуклон — линией, направленной вперед во времени, а антинуклон — линией, направленной обратно во времени. Тогда процесс рассеяния нуклонов с испусканием бозона может быть представлен фиг. 19,а. Направление возрастания времени указано на фигуре; указано также направление линий, причем его нельзя топологически исказить. Именно это мы подразумеваем, называя диаграммы «хронологически упорядоченными». Аналогично, процесс рассеяния антинуклона с испусканием бозона представляется фиг. 19,б, а схемы других процессов изображены на фиг. 19,в — 19,з.

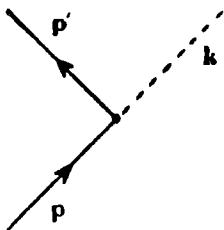
В результате интегрирования по d^3x в выражении для гамильтониана взаимодействия H_I мы приходим к сохранению импульса в каждой вершине. Рассмотрим, например, процесс рассеяния нуклона (см. фиг. 19,а). Часть H_I , которая приводит к этому процессу, равна

$$(H_I)_{a1} = \frac{G}{(2\pi)^{9/2}} \int d^3x \int d^3p' \int d^3p \int d^3k \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 e^{-i(\mathbf{p}' + \mathbf{k} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \times \\ \times \sqrt{\frac{M^2}{2\omega(\mathbf{k}) E(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}')}} \tilde{w}^r(\mathbf{p}') \Gamma \omega^s(\mathbf{p}) b_r^*(\mathbf{p}') b_s(\mathbf{p}) a^*(\mathbf{k}). \quad (13.43)$$

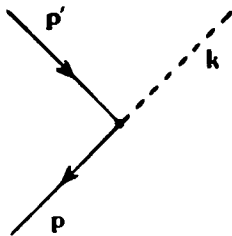
Интегрируя по d^3x , находим

$$(H_I)_{a1} = \frac{G}{(2\pi)^{9/2}} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' \sqrt{\frac{M^2}{2\omega(\mathbf{k}) E(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}')}} \times \\ \times \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}) \tilde{w}^r(\mathbf{p}') \Gamma \omega^s(\mathbf{p}') b_r^*(\mathbf{p}') b_s(\mathbf{p}) a^*(\mathbf{k}). \quad (13.44)$$

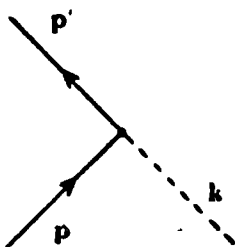
Возникшая здесь δ -функция соответствует сохранению импульса в вершине. Таким образом, если входящий нуклон на фиг. 19,а имел импульс \mathbf{p} , то импульс уходящего нуклона \mathbf{p}' связан с \mathbf{p} соотношением $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{k}$, где \mathbf{k} — импульс испущенного мезона.



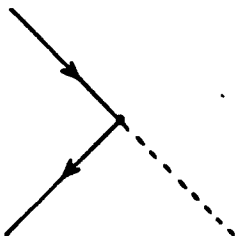
Процесс $b_{p'}^* b_p a_k$
а



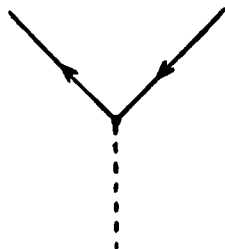
Процесс $d_{p'}^* d_p a_k$
б



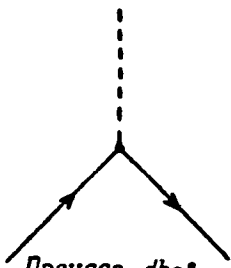
Процесс $b_{p'}^* b_p a_k$
в



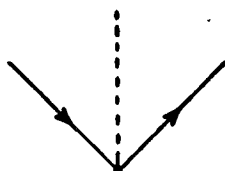
Процесс $d^* d a$
г



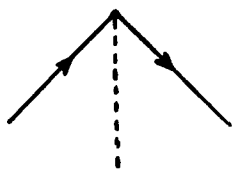
Процесс $d^* b^* a$
д



Процесс $d b a^*$
е



Процесс $d^* b^* a^*$
ж



Процесс $d b a$
з

Теория возмущений применяется так же, как и в обычной квантовой механике. Если ограничиться процессами второго порядка¹⁾, то матричный элемент для процесса $i \rightarrow f$ дается выражением

$$R_{fi}^{(2)} = \langle \Phi_f, R^{(2)} \Phi_i \rangle = \sum_{\substack{m \\ E_m \neq E_i}} \frac{\langle \Phi_f, H_I \Phi_m \rangle \langle \Phi_m, H_I \Phi_i \rangle}{E_i - E_m + i\epsilon}, \quad (13.45)$$

где $|\Phi_f\rangle$, $|\Phi_i\rangle$ и $|\Phi_m\rangle$ — волновые функции конечного, начального и промежуточного состояний системы. (Все они являются собственными функциями H_0 .) Суммирование проводится по всем промежуточным состояниям, которые отличаются от начального состояния, обладающего энергией E_i .

§ 2. Рассеяние нейтрального мезона на нуклоне

В качестве иллюстрации к сделанным выше замечаниям вычислим в псевдоскалярной теории с псевдоскалярной связью матричные элементы низшего порядка для рассеяния нейтрального мезона на нуклоне.

Рассеяние двух частиц протекает через состояния, которые описываются следующим образом:

Начальное состояние. В начальном состоянии имеются мезон с импульсом \mathbf{k}_1 и нуклон с импульсом \mathbf{p}_1 и спиновым индексом s_1 , т. е.

$$|\Phi_i\rangle = b_{s_1}^*(\mathbf{p}_1) a^*(\mathbf{k}_1) |\Phi_0\rangle. \quad (13.46)$$

Промежуточные состояния. В низшем порядке теории возмущений в результате взаимодействия H_I возможны следующие четыре промежуточных состояния:

а) нуклон поглощает мезон (это соответствует члену b^*ba в H_I), так что в промежуточном состоянии имеется только один нуклон с импульсом $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1$ и энергией $\sqrt{\mathbf{p}_1^2 + M^2}$;

б) нуклон испускает конечный мезон с импульсом \mathbf{k}_2 (посредством члена b^*ba^*), так что в промежуточном состоянии находятся два мезона с импульсами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и нуклон с импульсом $\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2$;

в) рождаются пара нуклон—антинуклон и мезон ($d^*b^*a^*$), так что в промежуточном состоянии имеются два нуклона, один антинуклон и два мезона; нуклон и мезон, образованные в этом процессе, будут составлять конечное состояние;

г) начальный мезон образует пару, а сам «исчезает» (d^*b^*a), т. е. промежуточное состояние состоит из двух нуклонов и одного антинуклона, но не содержит мезонов.

Конечное состояние. Вторичное применение оператора H_I в формуле (13.45) должно перевести систему в конечное состояние, в котором имеются мезон с импульсом \mathbf{k}_2 и нуклон со спиновым индексом s_2 и импульсом \mathbf{p}_2 , т. е.

$$|\Phi_f\rangle = b_{s_2}^*(\mathbf{p}_2) a^*(\mathbf{k}_2) |\Phi_0\rangle. \quad (13.47)$$

Это достигается следующим образом:

а) нуклон в промежуточном состоянии испускает конечный мезон и сам переходит в конечное состояние (процесс b^*ba^*);

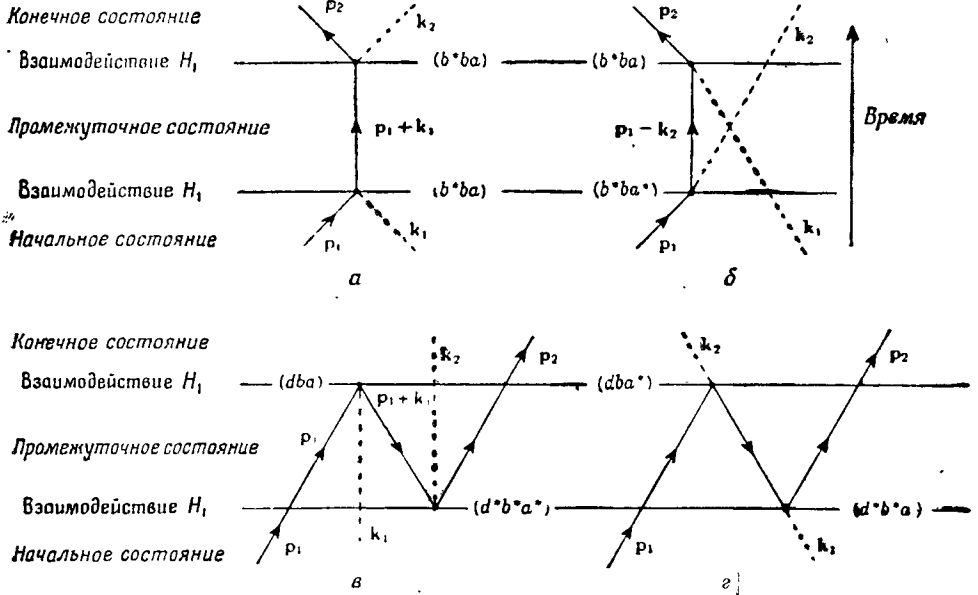
¹⁾ Реальные процессы первого порядка не могут осуществляться, поскольку в этих процессах не выполняется закон сохранения энергии и импульса.

б) нуклон в промежуточном состоянии поглощает начальный мезон (процесс b^*ba);

в) образованный в промежуточном состоянии антинуклон аннигилирует с начальным нуклоном, а начальный мезон поглощается (dba);

г) образованный в промежуточном состоянии антинуклон аннигилирует с начальным нуклоном, и рождается конечный мезон (dba^*).

Соответствующие хронологически упорядоченные диаграммы Фейнмана изображены на фиг. 20.



Ф и г. 20.

Рассмотрим сначала вклад в $R_{ji}^{(2)}$ от процесса (а). Полезно переписать матричный элемент (13.45) для этого процесса в виде

$$R_{ji}^{(2)a} = \langle \Phi_f, H_I^{(a2)} \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} H_I^{(a1)} \Phi_i \rangle, \quad (13.48)$$

где $E_i = E(\mathbf{p}_1) + \omega(\mathbf{k}_1)$ — энергия начального состояния¹). Оператор $H_I^{(a1)}$ дается выражением

$$H_I^{(a1)} = \frac{G}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \int d^3p' \int d^3k \left(\frac{M^2}{2E(\mathbf{p})E(\mathbf{p}')\omega(\mathbf{k})} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum_{s, r=1}^2 \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k}) b_r^*(\mathbf{p}') b_s(\mathbf{p}) a(\mathbf{k}) \tilde{\omega}^r(\mathbf{p}') \gamma_5 \omega^s(\mathbf{p}), \quad (13.49)$$

и оператор $H_I^{(a2)}$ определяется формулой (13.44) с $\Gamma = \gamma_5$. Теперь, используя формулы (13.46) и (13.49) и свойства вакуума

$$0 = a(\mathbf{k})|\Phi_0\rangle = b_s(\mathbf{p})|\Phi_0\rangle = d_s(\mathbf{p})|\Phi_0\rangle,$$

¹ Строго говоря, следовало бы включить в выражение (13.48) множитель $(1 - P_i)$, где P_i — оператор проектирования на начальное состояние. Однако $\langle \Phi_i, H_I \Phi_i \rangle = 0$.

легко найти промежуточное состояние $|\Phi_m^{(a)}\rangle = H_I^{(a1)} |\Phi_i\rangle$. Состояние

$$|\Phi_m^{(a)}\rangle = b_r^*(\mathbf{p}') b_s(\mathbf{p}) a(\mathbf{k}) |\Phi_i\rangle \quad (13.50a)$$

с учетом перестановочных соотношений для операторов b и a приобретает вид

$$\begin{aligned} |\Phi_m^{(a)}\rangle &= b_r^*(\mathbf{p}') b_s(\mathbf{p}) a(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}_1) b_{s_1}^*(\mathbf{p}_1) |\Phi_0\rangle = \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \delta_{s_1 s} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) b_r^*(\mathbf{p}') |\Phi_0\rangle. \end{aligned} \quad (13.50b)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |\Phi_m^{(a)}\rangle &= H_I^{(a1)} |\Phi_i\rangle = \frac{G}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{M^2}{2E(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1) E(\mathbf{p}_1) \omega(\mathbf{k}_1)} \right)^{1/2} \times \\ &\times \sum_{r=1}^2 \tilde{\omega}^r(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1) \gamma_5 \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1) b_r^*(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1) |\Phi_0\rangle; \end{aligned} \quad (13.51)$$

$|\Phi_m^{(a)}\rangle$ является однонуклонным состоянием с импульсом $\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1$. Оператор H_0 , действуя на это состояние, дает $E(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1) |\Phi_m^{(a)}\rangle$. Поэтому действие оператора $(E_i - H_0 + i\varepsilon)^{-1}$ на состояние $|\Phi_m^{(a)}\rangle$ приводит к $[E_i - E(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1)]^{-1} |\Phi_m^{(a)}\rangle$.

Используя ту же методику, легко показать, что действие оператора $H_I^{(a2)}$ на последнее выражение приводит к

$$\begin{aligned} &H_I^{(a2)} (E_i - H_0 + i\varepsilon)^{-1} H_I^{(a1)} |\Phi_i\rangle = \\ &= \frac{G^2}{2(2\pi)^3} \sum_{r=1}^2 \int d^3k \frac{M}{E(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1)} \left(\frac{M^2}{\omega(\mathbf{k}) \omega(\mathbf{k}_1) E(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) E(\mathbf{p}_1)} \right)^{1/2} \times \\ &\times \frac{[\tilde{\omega}^s(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \gamma_5 \omega^r(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1)] [\tilde{\omega}^r(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1) \gamma_5 \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1)]}{E(\mathbf{p}_1) + \omega(\mathbf{k}_1) - E(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1) + i\varepsilon} \times \\ &\times b_s^*(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) |\Phi_0\rangle. \end{aligned} \quad (13.52)$$

Наконец, чтобы найти $R_{fi}^{(2)a}$, мы должны вычислить матричный элемент

$$\begin{aligned} \langle \Phi_f, b_s^*(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) \Phi_0 \rangle &= \langle b_{s_2}^*(\mathbf{p}_2) a^*(\mathbf{k}_2) \Phi_0, b^*(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) \Phi_0 \rangle = \\ &= \delta_{s_2 s} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (13.53)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R_{fi}^{(2)a} &= \frac{G^2}{2(2\pi)^3} \frac{M}{E(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1)} \left(\frac{M^2}{\omega(\mathbf{k}_2) \omega(\mathbf{k}_1) E(\mathbf{p}_2) E(\mathbf{p}_1)} \right)^{1/2} \times \\ &\times \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \sum_{r=1}^2 \frac{[\tilde{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2) \gamma_5 \omega^r(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1)] [\tilde{\omega}^r(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1) \gamma_5 \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1)]}{E(\mathbf{p}_1) + \omega(\mathbf{k}_1) - E(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1) + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (13.54)$$

Множитель с δ -функцией соответствует сохранению полного импульса в этом процессе.

Можно интерпретировать полученный матричный элемент следующим образом: множитель

$$\frac{G}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \left(\frac{M^2}{\omega(\mathbf{k}_1) E(\mathbf{p}_1) E(\mathbf{p}')} \right)^{1/2} \tilde{\omega}^r(\mathbf{p}') \gamma_5 \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1) \quad (13.55)$$

соответствует поглощению мезона с импульсом \mathbf{k}_1 (сомножитель $[2(2\pi)^3 \omega(\mathbf{k}_1)]^{-1/2}$) начальным нуклоном с импульсом \mathbf{p}_1 , переходящим в состояние с импульсом \mathbf{p}' [сомножитель $\frac{G}{(2\pi)^3} \left(\frac{M^2}{E(\mathbf{p}_1) E(\mathbf{p}')} \right)^{1/2} \tilde{\omega}^r(\mathbf{p}') \gamma_5 \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1)$].

Так как в этом процессе импульс сохраняется, то появляется множитель $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1)$. Аналогично, множитель

$$\frac{G}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \left(\frac{M^2}{\omega(\mathbf{k}_2) E(\mathbf{p}_2) E(\mathbf{p}')} \right)^{1/2} \tilde{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2) \gamma_5 \omega^r(\mathbf{p}') \quad (13.56)$$

соответствует матричному элементу перехода нуклона из состояния $(\mathbf{p}'r)$ в конечное состояние $(\mathbf{p}_2 s_2)$, сопровождаемого испусканием мезона с импульсом \mathbf{k}_2 . Импульс снова сохраняется, и поэтому возникает множитель $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}')$. Наконец, после деления на $E_i - E_m + i\epsilon$ [в нашем примере $E_m^a = E(\mathbf{p}')$] нужно, следуя теории возмущений, просуммировать по всем промежуточным состояниям (что соответствует здесь операции $\int d^3 p \sum_r^{1,2}$). Эта процедура снова приведет к (13.54).

Используя эти соображения, можно сразу же выписать матричный элемент, соответствующий диаграмме фиг. 20,б. Здесь начальный нуклон сначала испускает конечный мезон с импульсом \mathbf{k}_2 , а сам переходит в состояние с импульсом $\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2$. Поэтому в промежуточном состоянии находятся два мезона и нуклон, так что его энергия равна

$$E_m^b = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) + E(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (13.57)$$

Таким образом, матричный элемент $R_{fi}^{(2)\delta}$ запишется в виде

$$R_{fi}^{(2)\delta} = \frac{G^2}{2(2\pi)^3} \left(\frac{M}{E(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2)} \right) \left(\frac{M^2}{\omega(\mathbf{k}_1) \omega(\mathbf{k}_2) E(\mathbf{p}_1) E(\mathbf{p}_2)} \right)^{1/2} \times \\ \times \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1) \sum_{r=1}^2 \frac{\tilde{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2) \gamma_5 \omega^r(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2) [\tilde{\omega}^r(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2) \gamma_5 \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1)]}{E(\mathbf{p}_1) - E(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2) - \omega(\mathbf{k}_2)}. \quad (13.58)$$

Аналогичная описанной выше процедура показывает, что испусканию мезона с импульсом \mathbf{k}_2 при рождении пары, в которой нуклон характеризуется переменными $\mathbf{p}_2 s_2$, а антинуклон $-\mathbf{p}'r$, соответствует множитель

$$\frac{G}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \left(\frac{M^2}{\omega(\mathbf{k}_2) E(\mathbf{p}_2) E(\mathbf{p}')} \right)^{1/2} \tilde{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2) \gamma_5 v^r(\mathbf{p}'). \quad (13.59)$$

Подобным же образом аннигиляции пары (нуклона $\mathbf{p}_1 s_1$ и антинуклона $\mathbf{p}'r$), сопровождаемой поглощением мезона (\mathbf{k}_1) , соответствует множитель

$$\frac{G}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \left(\frac{M^2}{\omega(\mathbf{k}_1) E(\mathbf{p}_1) E(\mathbf{p}')} \right)^{1/2} \tilde{v}^r(\mathbf{p}') \gamma_5 \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1). \quad (13.60)$$

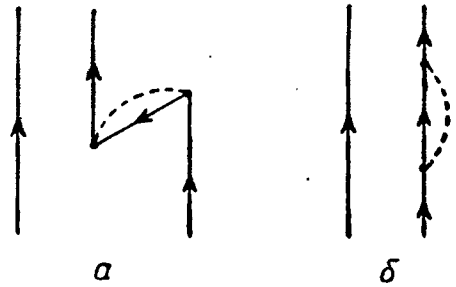
Поэтому матричный элемент, представляемый на фиг. 20,в хронологически упорядоченной диаграммой Фейнмана, равен

$$R_{fi}^{(2)\delta} = -\frac{G^2}{2(2\pi)^3} \left(\frac{M}{E(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1)} \right) \left(\frac{M^2}{\omega(\mathbf{k}_1) \omega(\mathbf{k}_2) E(\mathbf{p}_1) E(\mathbf{p}_2)} \right)^{1/2} \times \\ \times \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1) \times \\ \times \sum_{r=1}^2 \frac{[\tilde{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2) \gamma_5 v^r(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1)] [\tilde{v}^r(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1) \gamma_5 \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1)]}{E_i - E(\mathbf{p}_1) - E(\mathbf{p}_2) - E(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2)}. \quad (13.61)$$

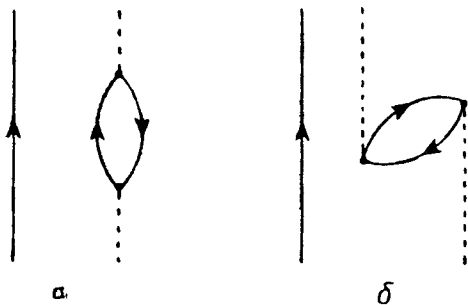
Знак минус в правой части равенства возникает из-за принципа Паули. Аналогично для диаграммы фиг. 20,з получаем

$$R_{fi}^{(2)z} = -\frac{G^2}{2(2\pi)^3} \left(\frac{M}{E(p_1 - k_2)} \right) \left(\frac{M^2}{\omega(k_1)\omega(k_2)E(p_1)E(p_2)} \right)^{1/2} \times \\ \times \delta^{(3)}(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \sum_{r=1}^2 \frac{[\tilde{\omega}^{s_2}(p_2) \gamma_5 v^r(p_1 - k_2)] [\tilde{v}(p_1 - k_2) \gamma_5 \omega^{s_1}(p_1)]}{E_i - E(p_1) - E(p_2) - E(p_1 - k_2)}. \quad (13.62)$$

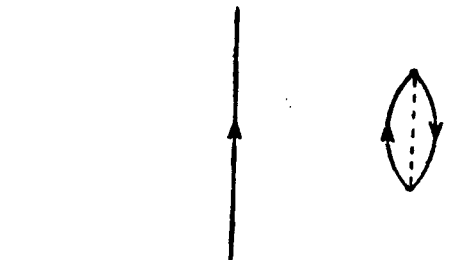
Эти четыре матричных элемента описывают рассеяние мезона на нуклоне в низшем порядке теории возмущений. Во втором порядке теории возмущений возможны и другие процессы с участием мезона и нуклона. Например, диаграммы на фиг. 21 соответствуют процессам, которые приводят к собственной энергии нуклона. Вклад от этих диаграмм полностью погашается вкладом от члена $\delta M \psi \psi$ при подходящем подборе множителя δM . Аналогично, вклад от диаграмм фиг. 22, которые соответствуют собственной энергии мезона во втором порядке теории возмущений, уничтожается вкладом от члена $\Delta \mu^2 \varphi^2$ в гамильтониане $\mathcal{H}_I(x)$. Наконец, вклад от диаграммы фиг. 23, соответствующей собственной энергии вакуума, взаимно уничтожается с вкладом от члена E_0 в гамильтониане H_I , если должным образом подобрать величину E_0 во втором порядке теории возмущений, равную $E_0^{(2)}$. При желании теперь можно найти эффективное сечение рассеяния, для чего нужно просуммировать по промежуточным состояниям при



Ф и г. 21.



Ф и г. 22.



Ф и г. 23.

помощи соотношений (4.143а) и (4.143б) и выполнить необходимые интегрирования. Здесь этого делать мы не будем, а рассмотрим упрощение в матричном элементе, которое получается в пределе, когда импульс мезона в системе центра масс ($k_1 = -p_1 = k_i$, $k_2 = -p_2 = k_f$) значительно меньше массы нуклона, не касаясь того, что в этом случае приближение Борна незаконно [54].

Заметим, что в системе центра масс движение нуклона является нерелятивистским. Поэтому матричный элемент $\tilde{\omega}^r(p_1 + k_1) \gamma_5 \omega^{s_1}(p_1) = \tilde{\omega}^r(0) \gamma_5 \omega^{s_1}(-k_1)$ мал, поскольку матрица γ_5 стоит между двумя амплитудами $\omega^r(0)$ и $\omega^{s_1}(-k_1)$, которые соответствуют положительной

энергии и незначительно отличаются величиной импульса [вспомним обсуждение свойств матрицы γ_5 в гл. 4, а именно соотношения (4.130) и (4.131)]. Используя явные представления матрицы γ_5 и амплитуды ω , находим, что этот матричный элемент равен величине оператора $i\sigma \cdot \mathbf{k}_i/2M$, взятого в обкладках между двухкомпонентными спинорами Паули $|r\rangle$ и $|s_i\rangle$. (Теперь σ есть 2×2 матрица спина нуклона!) Аналогично, в нашем приближении матричный элемент $\tilde{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2) \gamma_5 \omega^r(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1)$ в системе центра масс определяется оператором $-i\sigma \cdot \mathbf{k}_f/2M$. Мы видим, что испусканию или поглощению мезона, сопровождаемому переходом нуклона из одного состояния с положительной энергией в другое такое же, соответствует матричный элемент вида $i\sigma \cdot \mathbf{k}/2M$. Это вскрывает некоторые важные особенности псевдоскалярной связи: во-первых, при таких переходах мезон поглощается или испускается в P -состоянии и, во-вторых, взаимодействие ослабляется, поскольку оно содержит «малый» оператор γ_5 . Таким образом, диаграммы фиг. 20, *a* и *б* преимущественно приводят к P -волне в рассеянии мезона. В пределе $k \ll M$ энергетический знаменатель в выражении (13.54) становится равным (в системе центра масс)

$$E(\mathbf{k}_i) + \omega(\mathbf{k}_i) - M \approx M + \omega(\mathbf{k}_i) - M \approx \omega(\mathbf{k}_i), \quad (13.63)$$

так что матричный элемент (13.54), если опустить δ -функцию, пропорционален

$$\begin{aligned} r_{fi}^{(2)a} &= \frac{G^2}{(2M)^2} \frac{1}{\sqrt{4\omega(\mathbf{k}_i)\omega(\mathbf{k}_f)}} \frac{\sigma \cdot \mathbf{k}_f \sigma \cdot \mathbf{k}_i}{\omega(\mathbf{k}_i)} = \\ &= \left(\frac{G\mu}{2M}\right)^2 \frac{1}{\mu^2 \sqrt{4\omega(\mathbf{k}_i)\omega(\mathbf{k}_f)}} \frac{\sigma \cdot \mathbf{k}_f \sigma \cdot \mathbf{k}_i}{\omega(\mathbf{k}_i)}. \end{aligned} \quad (13.64)$$

Второе выражение для этого матричного элемента указывает на родство теорий с псевдоскалярной и с псевдовекторной связями, которое обсуждалось в гл. 10. Подобным же образом матричный элемент для диаграммы фиг. 20, *б* в этом] приближении запишется в виде

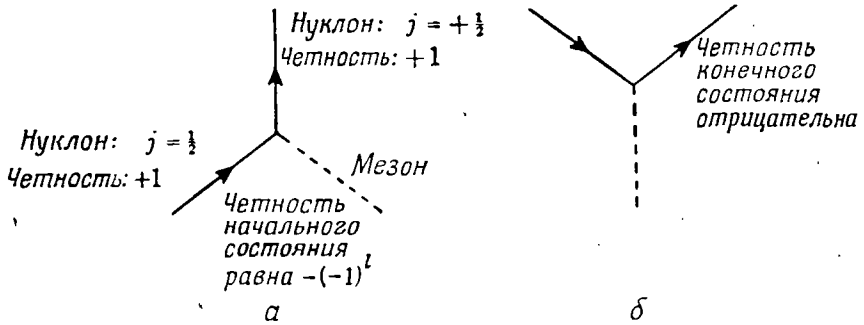
$$r_{fi}^{(2)b} = \left(\frac{G\mu}{2M}\right)^2 \frac{1}{\mu^2 \sqrt{4\omega(\mathbf{k}_i)\omega(\mathbf{k}_f)}} \frac{\sigma \cdot \mathbf{k}_i \sigma \cdot \mathbf{k}_f}{\omega(\mathbf{k}_f)}. \quad (13.65)$$

Следует вспомнить, что такие же выражения для матричных элементов, как и (13.64) и (13.65), получаются и в низшем приближении в статической модели Чу (за исключением функций обрезания), что проливает дополнительный свет на область применимости этой модели.

Матричные элементы (13.64) и (13.62), в которые дают вклад процессы с рождением пары, велики. В нашем приближении эти матричные элементы сферически симметричны, так что диаграммы фиг. 20, *в* и *г* ответственны в основном за S -волну в амплитуде рассеяния. Более тщательное изучение задачи рассеяния без использования приближения Борна показывает, что на самом деле в амплитуде рассеяния S -волна значительно меньше получаемой в приближении Борна, а P -волна — больше [54].

В заключение этого параграфа мы качественно обсудим, почему в пределе $k \ll M$ диаграммы фиг. 20, *a* и *б* в основном приводят к P -волне рассеяния, тогда как диаграммы фиг. 20, *в* и *г* — к S -волне. Причина, по существу, заключается в следующем: при энергии мезона $\omega(\mathbf{k}) \ll M$ нуклон в системе центра масс движется очень медленно по сравнению с мезоном. Поэтому в первом приближении его движением можно полностью пренебречь. Рассмотрим, далее, применение законов сохранения момента количества движения и четности к двум процессам, соответствующим диаграм-

мам фиг. 24. Если мы условно предположим внутреннюю четность нуклона положительной, то внутренняя четность антинуклона будет отрицательна. Так как рассматриваемый мезон псевдоскалярен, то перед поглощением четность всей системы будет положительной в случае P -состояния и отрицательной в случае S -состояния. После поглощения в процессе, изображенном на фиг. 24, a , возникающий нуклон, согласно принятому условию, обладает положительной внутренней четностью. В то же время в результате процесса на фиг. 24, b возникает состояние с отрицательной четностью. Поэтому псевдоскалярный мезон может быть поглощен только из состояний с нечетным орбитальным моментом в процессе, показанном



Ф и г. 24.

на фиг. 24, a , и только из состояний с четным орбитальным моментом в процессе, показанном на фиг. 24, b . Если ограничиться низшими парциальными волнами, то диаграмма фиг. 24, a соответствует поглощению только из P -состояния, а диаграмма фиг. 24, b — только из S -состояния.

Перейдем теперь к описанию рассеяния в картине Дирака, используя выражение (13.4) для S -матрицы. Допустим, что нас снова интересует амплитуда рассеяния мезона на нуклоне. В низшем порядке теории возмущений амплитуда рассеяния из начального состояния $|p s; k\rangle = b_s^*(p)a^*(k) | \Phi_0 \rangle$ в конечное состояние $|p' s'; k'\rangle$ дается выражением

$$\begin{aligned}
 \langle p' s'; k' | S | p s; k \rangle &= \\
 &= -\frac{1}{2!} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \langle p' s'; k' | P (\mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2)) | p s; k \rangle = \\
 &= -\frac{G^2}{2!} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \langle p' s'; k' | P (\tilde{\psi}(x_1) \Gamma \psi(x_1) \varphi(x_1) \tilde{\psi}(x_2) \Gamma \psi(x_2) \varphi(x_2)) | p s; k \rangle = \\
 &= -\frac{G^2}{2!} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \langle p' s' | P (\tilde{\psi}(x_1) \Gamma \psi(x_1) \tilde{\psi}(x_2) \Gamma \psi(x_2)) | p s \rangle \times \\
 &\quad \times \langle k' | P (\varphi(x_1) \varphi(x_2)) | k \rangle. \quad (13.66)
 \end{aligned}$$

Из этого выражения можно было бы получить в аналитическом виде элемент S -матрицы для рассеяния. Однако существует общий метод приведения S -матрицы к сумме частей, каждая из которых дает вклад в определенный процесс. Поэтому сначала мы изложим этот общий метод, а уже потом вернемся снова к частной задаче рассеяния мезона на нуклоне.

§ 3. Теорема Вика

Каждый член разложения S -матрицы в степенной ряд (13.4) приводит к большому числу виртуальных и реальных процессов. Дайсон [195—197] и Вика [846] показали, как выразить хронологическое произведение $P(\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n))$ в такой форме, в которой все виртуальные процессы представлены явно. Они применили так называемое разложение хронологического произведения на сумму *нормальных произведений*. Следует вспомнить, что последние определяются, как такие произведения операторов рождения и уничтожения свободных частиц, в которых все операторы рождения стоят слева от всех операторов уничтожения. Тогда существует одно и только одно нормальное произведение, имеющее отличный от нуля матричный элемент перехода между любыми наперед заданными начальными и конечными состояниями, которые содержат данные числа свободных частиц с определенными импульсами и проекциями спина. Таким образом, разложение S -матрицы на сумму нормальных произведений эквивалентно перечислению всех элементов S -матрицы в представлении, которое диагонально по числам заполнения свободных частиц. Диаграммы Фейнмана оказываются тогда просто компактным графическим способом представления нормального произведения. Мы покажем здесь, как приводить S -матрицу к нормальной форме, следуя алгебраическому методу Вика [846].

Рассмотрим сначала простое произведение операторов Q в картине взаимодействия. Разложение такого произведения на сумму нормальных произведений, в которых все операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения, выводится при помощи перестановочных соотношений между входящими в произведение Q множителями. Эти соотношения являются операторными тождествами и не зависят от тех конкретных состояний, которые могут нас интересовать. Введем снова оператор N , который при действии на произведение операторов рождения и уничтожения записывает это произведение в нормальной форме. При этом подразумевается, что перестановка операторов должна производиться так, как если бы в перестановочных соотношениях для операторов все коммутаторы и антикоммутаторы были равны нулю. Таким образом, операция N -упорядочивания включает изменение знака при перестановке антикоммутирующих полей. Вспомним, что для произведения двух бозонных множителей имеем

$$N(\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y)) = N(\varphi^{(+)}(y)\varphi^{(-)}(x)) = \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y). \quad (13.67)$$

Аналогично для произведения двух фермионных множителей

$$\begin{aligned} N(\psi^{(+)}(x)\tilde{\psi}^{(-)}(y)) &= -N(\tilde{\psi}^{(-)}(y)\psi^{(+)}(x)) = \\ &= -\tilde{\psi}^{(-)}(y)\psi^{(+)}(x). \end{aligned} \quad (13.68)$$

По определению, для нормального произведения справедлив дистрибутивный закон, например

$$\begin{aligned} N(\varphi(x)\varphi(y)) &= N[(\varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x))(\varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(-)}(y))] = \\ &= N(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(y)) + N(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y)) + \\ &+ N(\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y)) + N(\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(y)). \end{aligned} \quad (13.69)$$

Используя перестановочные соотношения, можно затем записать:

$$\tilde{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(y) = N(\tilde{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(y)) - iS_{\beta\alpha}^{\leftarrow}(y-x), \quad (13.70a)$$

$$\psi_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta(y) = N(\psi_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta(y)) - iS_{\alpha\beta}^{\rightarrow}(x-y), \quad (13.70б)$$

$$\psi(x) \psi(y) = N(\psi(x) \psi(y)), \quad (13.70в)$$

$$\varphi(x) \varphi(y) = N(\varphi(x) \varphi(y)) + i\hbar c \Delta^{(+)}(x-y), \quad (13.70г)$$

$$\varphi(x) \psi(y) = N(\varphi(x) \psi(y)). \quad (13.70д)$$

Теперь мы введем хронологический оператор Вика T , отличие которого от хронологического оператора Дайсона P заключается только в том, что при действии оператора T учитывается знак перестановки фермионных множителей:

$$T(UV \dots Z) = \delta_P XY \dots \quad (13.71)$$

Другими словами, оператор T , действуя на произведение зависящих от времени операторов $UV \dots Z$, располагает входящие в произведение множители в хронологическом порядке $XY \dots$ (оператор, зависящий от самого позднего момента времени, стоит крайним слева), причем всему произведению придается знак плюс или минус (δ_P) в зависимости от того, является ли перестановка фермионных множителей при переходе от левой части равенства (13.71) к правой четной или нечетной. Это означает, что при перестановке множителей в хронологическом порядке оператор T действует так, как если бы все коммутаторы и антикоммутаторы были равны нулю. Для случая двух множителей

$$T(\psi(x) \psi(y)) = +\psi(x) \psi(y), \quad \text{если } x_0 > y_0, \quad (13.72a)$$

$$= -\psi(y) \psi(x), \quad \text{если } y_0 > x_0. \quad (13.72б)$$

В силу перестановочного соотношения $0 = [\psi(x), \psi(y)]_+$ правые части равенств (13.72) в обоих случаях можно записать в виде

$$T(\psi(x) \psi(y)) = \psi(x) \psi(y). \quad (13.73)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} T(\psi(x) \tilde{\psi}(y)) &= +\psi(x) \tilde{\psi}(y), & \text{если } x_0 > y_0, \\ &= -\tilde{\psi}(y) \psi(x), & \text{если } y_0 > x_0, \end{aligned} \quad (13.74)$$

$$\begin{aligned} T(\varphi(x) \varphi(y)) &= \varphi(x) \varphi(y), & \text{если } x_0 > y_0, \\ &= \varphi(y) \varphi(x), & \text{если } y_0 > x_0. \end{aligned} \quad (13.75)$$

Теперь вернемся к основной задаче — как выразить хронологическое произведение через сумму нормальных произведений. Для этого введем понятие спаривания двух множителей, которое нам понадобится для представления коммутаторов и антикоммутаторов, возникающих при преобразовании хронологического произведения к нормальной форме. Будем обозначать спаривание двумя точками, стоящими сверху справа у соответствующих двух множителей. В качестве определения спаривания возьмем соотношение

$$T(UV) = U \cdot V + N(UV), \quad (13.76)$$

где $U \cdot V$ — спаривание множителей U и V . В картине взаимодействия интересующие нас коммутаторы или антикоммутаторы всегда являются c -числами, так что спаривания также всегда представляют собой c -числа. Далее, из определения оператора N следует, что среднее по вакууму

(«голому») от нормального произведения операторов в картине взаимодействия равно нулю. Поэтому если равенство (13.76) усреднить по вакууму, то мы получим

$$UV = (\Phi_0, T(UV)\Phi_0). \quad (13.77)$$

Из определений T - и N -произведений следует, что при $x_0 > y_0$

$$\begin{aligned} \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y) &= T(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y)) - N(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y)) = \\ &= \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y) - \varphi^{(-)}(y)\varphi^{(+)}(x) = \\ &= [\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)] = i\hbar c\Delta^{(+)}(x-y). \end{aligned} \quad (13.78)$$

Аналогично проверяется, что

$$\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y) = 0 \quad \text{при } y_0 > x_0, \quad (13.79)$$

в согласии, конечно, с определением спаривания при помощи соотношения (13.77), а именно

$$\begin{aligned} \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y) &= (\Phi_0, T(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y))\Phi_0) = \\ &= \begin{cases} i\hbar c\Delta^{(+)}(x-y) & \text{при } x_0 > y_0, \\ 0 & \text{при } y_0 > x_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.80)$$

В общем случае оказывается, что

$$\begin{aligned} \varphi(x)\varphi(y) &= T(\varphi(x)\varphi(y)) - N(\varphi(x)\varphi(y)) = \\ &= (\Phi_0, T(\varphi(x)\varphi(y))\Phi_0) = \\ &= \begin{cases} +i\hbar c\Delta^{(+)}(x-y) & \text{при } x_0 > y_0, \\ -i\hbar c\Delta^{(-)}(x-y) & \text{при } y_0 > x_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.81a)$$

Следуя Дайсону, обозначим функцию, которая имеет свойства, указанные в правой части соотношения (13.81), через $\Delta_F(x-y)$, т. е.

$$\frac{1}{2}\hbar c\Delta_F(x-y) = \begin{cases} i\hbar c\Delta^{(+)}(x-y) & \text{при } x_0 > y_0, \\ -i\hbar c\Delta^{(-)}(x-y) & \text{при } y_0 > x_0. \end{cases} \quad (13.81b)$$

Используя определение (13.76) и перестановочные (антикоммутиационные) соотношения, мы подобным же образом найдем для фермионных множителей

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x)\tilde{\psi}_\beta(y) &= (\Phi_0, T(\psi_\alpha(x)\tilde{\psi}_\beta(y))\Phi_0) = \\ &= \begin{cases} -iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-y) & \text{при } x_0 > y_0 \\ +iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-y) & \text{при } y_0 > x_0 \end{cases} \\ &= -\frac{1}{2}S_{F\alpha\beta}(x-y) = K_{+\alpha\beta}(x-y). \end{aligned} \quad (13.82)$$

Из определения нормального и T -произведений следует также

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x) &= -\psi_\alpha(x)\tilde{\psi}_\beta(y) = \\ &= +\frac{1}{2}S_{F\alpha\beta}(x-y). \end{aligned} \quad (13.83)$$

Таким образом, всякий раз, когда спаренное произведение не равно нулю, в нем важен порядок множителей. Наконец, смешанное спаренное произведение бозонного и фермионного множителей равно нулю,

так же как и спаривание двух множителей типа ψ или $\tilde{\psi}$:

$$\psi(x) \psi(y) = \tilde{\psi}(x) \psi(y) = \psi(x) \tilde{\psi}(y) = \tilde{\psi}(x) \tilde{\psi}(y) = 0. \quad (13.84)$$

Итак, мы установили, что неравными нулю спариваниями являются

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta(y) &= (\Phi_0, T(\psi_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta(y)) \Phi_0) = \\ &= -\frac{1}{2} S_{F\alpha\beta}(x-y) \end{aligned} \quad (13.85)$$

и

$$\begin{aligned} \varphi(x) \varphi(y) &= (\Phi_0, T(\varphi(x) \varphi(y)) \Phi_0) = \\ &= +\frac{1}{2} \hbar c \Delta_F(x-y). \end{aligned} \quad (13.86)$$

Функции $-\frac{1}{2} S_F = K_+$ и Δ_F иногда, следуя работе Штюкельберга и Ривье [752], также называют причинными функциями S_c и Δ_c , поскольку Штюкельберг и Ривье пришли к ним, как к функциям Грина, обеспечивающим правильную причинную последовательность событий во времени в квантовой теории (см. также статью Фирца [257]).

Чтобы упростить дальнейшее изложение, определим нормальное произведение с одним или несколькими спариваниями. Для различных спариваний мы будем использовать значки, такие, как две точки, три точки и т. д. Например, если $UV \dots XYZ$ — операторы рождения и уничтожения, то, согласно нашему определению,

$$N(UV \dots R \dots X \dots YZ) = \pm (U'Z') (V'X') N(\dots R \dots Y), \quad (13.87)$$

причем знак плюс или минус должен быть взят в соответствии с тем, является ли перестановка фермионных множителей при переходе от левой части к правой четной или нечетной.

Теперь мы можем доказать очень полезную вспомогательную теорему.

Теорема. Если оператор Z предшествует во времени операторам $UV \dots XY$, то

$$\begin{aligned} N(UV \dots XY) Z &= N(UV \dots XY Z') + N(UV \dots X'YZ') + \dots \\ &\dots + N(U'V \dots XYZ') + N(UV \dots XYZ). \end{aligned} \quad (13.88)$$

Поскольку для нормального произведения имеет место дистрибутивный закон, то достаточно, очевидно, доказать соотношение (13.88) для случая, когда каждый из множителей U, V, \dots, X, Y является либо оператором рождения, либо оператором уничтожения. Кроме того, согласно определению нормального произведения, соотношение (13.88) остается верным при перегруппировке множителей $UV \dots XY$, если произвести одну и ту же перегруппировку в обеих частях соотношения. Поэтому можно считать, что операторы $UV \dots XY$ уже расположены в нормальном порядке и все операторы рождения стоят слева от всех операторов уничтожения.

Мы докажем теорему в предположении, что Z — это оператор рождения и что все операторы $UV \dots XY$ являются операторами уничтожения. Ясно, что такое доказательство является исчерпывающим. Действительно, если $UV \dots XY$ являются операторами уничтожения, а Z — оператором рождения, то в соотношение (13.88) можно добавить любое число операторов рождения слева от всех множителей внутри N -произведения. При этом справедливость теоремы не нарушится, так как спаривание двух операторов рождения равно нулю. С другой стороны, если Z будет оператором уничтожения, а $UV \dots XY$ — операторами рождения, то соотношение

(13.88) сведется к тривиальному тождеству. В самом деле, спаривание оператора рождения с оператором уничтожения равно нулю, если момент времени, в который задан оператор уничтожения, предшествует моменту времени, от которого зависит оператор рождения [см., например, формулу (13.80)]. В этом случае в правой части соотношения (13.88) отличен от нуля только последний член, и это соотношение превращается в тождество.

Теорема доказывается методом математической индукции. Ее справедливость очевидна для случая одного множителя под знаком N -произведения, так как тогда (напомним, что, по определению, оператор Z предшествует во времени оператору Y)

$$N(Y)Z = YZ = T(YZ), \quad (13.89)$$

а, согласно определению (13.76),

$$T(YZ) = Y'Z' + N(YZ). \quad (13.90)$$

Предположим теперь, что соотношение (13.88) верно для случая n множителей, и умножим его слева еще на один оператор уничтожения D , заданный в более поздний момент времени, чем оператор Z . Тогда

$$DN(UV \dots XY)Z = N(DUV \dots XY'Z') + \dots \\ \dots + N(DUV \dots XYZ') + DN(UV \dots XYZ), \quad (13.91)$$

потому что во всех членах, в которых оператор Z спарен, множитель D можно ввести под знак нормального произведения. Однако поскольку, по определению, Z есть оператор рождения, а все множители $UV \dots$ — операторы уничтожения, то

$$N(UV \dots XYZ) = \delta_P ZUV \dots XY, \quad (13.92)$$

где δ_P — знак перестановки фермионных множителей. Отсюда

$$DN(UV \dots XYZ) = \delta_P DZUV \dots XY. \quad (13.93)$$

Учитывая снова, что оператор Z задан в более ранний момент времени, чем оператор D , находим

$$DZ = T(DZ) = D'Z' + N(DZ) = \\ = D'Z' + \delta_Q ZD, \quad (13.94)$$

и отсюда следует, что

$$DZUV \dots XY = D'Z'UV \dots XY + \delta_Q ZDUV \dots XY. \quad (13.95)$$

В силу нашего определения нормального произведения со спариванием

$$D'Z'UV \dots XY = \delta_P N(DUV \dots XYZ). \quad (13.96)$$

Аналогично,

$$ZDUV \dots XY = \delta_P \delta_Q N(DUV \dots XYZ). \quad (13.97)$$

В итоге, объединяя результаты, получаем

$$DN(UV \dots XYZ) = \delta_P DZUV \dots XY = \\ = \delta_P^2 N(DUV \dots XYZ) + \delta_P^2 \delta_Q^2 N(DUV \dots XYZ). \quad (13.98)$$

Так как $\delta_Q^2 = \delta_P^2 = 1$, то наша теорема доказана для случая $n+1$ операторов уничтожения, что достаточно для общего доказательства теоремы методом математической индукции.

Эта теорема сразу же обобщается. Умножим слева соотношение (13.88) на множитель $R''S''$. Тогда, используя определение (13.87), можно придать соотношению (13.88), например, следующий вид:

$$N(UR''V \dots S''XY)Z = N(UR''V \dots S''XYZ) + \dots \\ \dots + N(UR''V \dots S''XYZ) + N(UR''V \dots S''XYZ). \quad (13.99)$$

Можно умножить на несколько таких спаренных множителей. Таким образом, теорема (13.88) остается верной и тогда, когда внутри произведения $N(UV \dots XY)$ имеется любое число отмеченных спариваний (одних и тех же, конечно, в каждом члене).

Теорема Вика гласит: T -произведение операторов равно сумме их N -произведений со всеми возможными спариваниями, включая и их N -произведение без спариваний

$$T(UV \dots XYZ) = N(UV \dots XYZ) + N(U'V'' \dots XYZ) + \dots \\ \dots + N(U'V'' \dots X''YZ') + \dots + N(U'V''W'' \dots X''Y'Z''') + \dots \quad (13.100)$$

Доказательство проводится снова методом математической индукции. Для одного множителя теорема верна. Она верна и для двух множителей, так как в этом случае она совпадает с определением (13.76). Предположим, что теорема соблюдается и для n множителей. Затем умножим справа соотношение (13.100) на оператор Ω , предшествующий во времени всем остальным множителям:

$$T(UV \dots XYZ)\Omega = T(UV \dots XYZ\Omega). \quad (13.101)$$

После умножения на оператор Ω члены в правой части соотношения (13.100) приобретают вид $N(UV \dots XYZ)\Omega$. При помощи ранее доказанной теоремы (13.88) эти члены могут быть снова переразложены на сумму нормальных произведений. Тем самым теорема (13.100) оказывается верной и для $n + 1$ множителей, если оператор Ω предшествует во времени операторам U, V, \dots, X, Y, Z . Это ограничение, однако, можно легко устранить. Если оператор Ω находится под знаком T - и N -произведений, то можно переставить операторы, так как, согласно определению T - и N -произведений, соотношение (13.100) инвариантно относительно одинаковых перегруппировок множителей в обеих частях соотношения. Тем самым теорема доказана в общем случае $n + 1$ множителей.

Для разложения простого произведения операторов на сумму нормальных произведений также можно записать похожее на приведенное выше правило (см. работы Дайсона [195, 196]). Обозначая в этом случае символ свертывания линией, соединяющей соответствующие множители, можно определить операцию свертывания при помощи соотношений (13.70a) — (13.70г):

$$\underline{\psi_\alpha(x)} \tilde{\psi}_\beta(x') = -iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x') = (\Phi_0, \psi_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta(x') \Phi_0), \quad (13.102)$$

$$\tilde{\psi}_\beta(x') \underline{\psi_\alpha(x)} = -iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x') = (\Phi_0, \tilde{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x) \Phi_0), \quad (13.103)$$

$$\underline{\varphi(x)} \underline{\varphi(x')} = i\Delta^{(+)}(x-x') = (\Phi_0, \varphi(x) \varphi(x') \Phi_0), \quad (13.104)$$

$$\underline{\psi(x)} \underline{\psi(y)} = \underline{\tilde{\psi}(x)} \underline{\tilde{\psi}(y)} = \underline{\varphi(x)} \underline{\psi(y)} = \underline{\varphi(x)} \underline{\tilde{\psi}(y)} = 0. \quad (13.105)$$

Методом математической индукции легко доказать теорему о разложении, в которой утверждается, что простое произведение операторов равно сумме их N -произведений со всеми мыслимыми свертываниями, включая и их N -произведение без свертываний:

$$UV \dots XYZ = N(UV \dots XYZ) + N(\underbrace{UV \dots XYZ}) + \dots + N(\underbrace{UV \dots XYZ}) + \dots \quad (13.106)$$

Только доказанные теоремы нельзя непосредственно применить к приведению S -матрицы к нормальной форме по следующим причинам: во-первых, в разложении S -матрицы фигурирует хронологический оператор Дайсона P , а не оператор Вика T . Во-вторых, S -матрица содержит некоммутирующие операторы, зависящие от одного и того же момента времени, и операция T -упорядочивания на них не распространяется.

В квантовой электродинамике гамильтониан взаимодействия имеет вид $\mathcal{H}_I(x) = j_\mu(x) A^\mu(x)$, и вторая трудность устраняется, если помнить, что выражение для плотности тока

$$j_\mu(x) = -e\tilde{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \quad (13.107)$$

неверно и должно быть заменено выражением

$$j'_\mu(x) = -\frac{e}{2} [\tilde{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)]. \quad (13.108)$$

Выражение $j'_\mu(x)$ для тока получается при симметризации теории относительно частиц и античастиц. Вакуумное среднее от $j'_\mu(x)$ равно нулю:

$$(\Phi_0, j'_\mu(x) \Phi_0) = 0. \quad (13.109)$$

Легко показать, что этот симметризованный ток (мы теперь будем опускать штрихи) может быть записан в виде нормального произведения

$$j_\mu(x) = -eN(\tilde{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)). \quad (13.110)$$

Поэтому, когда в хронологическом произведении появляется ток $j_\mu(x)$, множители в выражении для тока упорядочены операцией нормального произведения. Таким образом, в квантовой электродинамике S -матрицу можно записать в виде

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)^n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \dots \int d^4x_n \times \\ \times T \{N(\tilde{\psi}(x_1) \gamma^{\mu_1} \psi(x_1) A_{\mu_1}(x_1)) \dots N(\tilde{\psi}(x_n) \gamma^{\mu_n} \psi(x_n) A_{\mu_n}(x_n))\}, \quad (13.111)$$

где мы внесли под знак нормального произведения и оператор A_μ (это можно сделать, потому что операторы $\tilde{\psi} \gamma^\mu \psi(x)$ и $A_\mu(x)$ коммутируют). Кроме того, в этой записи разложения Дайсона оператор P заменен оператором T , так как они теперь не отличаются друг от друга, поскольку фермионные множители всегда входят только парами, в которых оба множителя относятся к одному и тому же моменту времени.

T -произведение, в котором имеются N -произведения, называют смешанным произведением. Вика обобщил теорему (13.100) и на такие смешанные произведения. Эта теорема гласит:

Теорема. Смешанное T -произведение можно разложить, согласно формуле (13.100), но при этом следует опустить спаривания между уже N -упорядоченными множителями.

Доказательство теоремы основывается на следующем приеме. Предположим, что мы использовали дистрибутивный закон для приведения смешанного T -произведения типа (13.111) к сумме таких смешанных T -произведений, каждое из которых содержит только операторы рождения или уничтожения X, Y, Z (т. е. только $A^{(+)}, A^{(-)}, \psi^{(+)}, \psi^{(-)}$ и т. д., но не A, ψ или $\tilde{\psi}$). Затем можно рассматривать смешанное T -произведение $T\{N(RST)\dots N(XYZ)\}$, где под знаком каждого N -произведения все три множителя, например XYZ , относятся к одному и тому же моменту времени, как предел такого T -произведения $T(RST\dots XYZ)$, в котором внутри каждой из троек RST, \dots, XYZ момент времени, к которому относятся операторы рождения, превышает на бесконечно малую величину момент времени, к которому относятся операторы уничтожения. Теперь можно применить теорему (13.100). Так как спаривания, которые должны быть опущены по теореме для смешанных T -произведений, исчезают фактически (операторы уничтожения относятся к более раннему моменту времени, чем операторы рождения), то теорема доказана.

В псевдоскалярной мезонной теории, где

$$\mathcal{H}_I(x) = \frac{1}{2} G[\psi(x)\gamma_5\tilde{\psi}(x)]\varphi(x) = GN(\tilde{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\varphi(x)), \quad (13.112)$$

по теореме Вика для смешанных произведений также не нужно в каждом $\mathcal{H}_I(x)$ спаривать операторы $\tilde{\psi}(x)$ и $\psi(x)$.

§ 4. Интегральные представления для инвариантных функций

При спаривании двух бозонных операторов возникает функция

$$\Delta_F(x) = \begin{cases} +2i\Delta^{(+)}(x) & \text{при } x_0 > 0, \\ -2i\Delta^{(-)}(x) & \text{при } x_0 < 0. \end{cases} \quad (13.113)$$

Напомним, что

$$\Delta(x) = \Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x) \quad (13.114)$$

и

$$\Delta^{(+)}(x) = \frac{1}{2} [\Delta(x) - i\Delta^{(1)}(x)], \quad (13.115)$$

$$\Delta^{(-)}(x) = \frac{1}{2} [\Delta(x) + i\Delta^{(1)}(x)]. \quad (13.116)$$

Ранее, в гл. 7, были определены сингулярные функции $\Delta, \Delta^{(1)}$ и $\Delta^{(\pm)}$. Используя их, можно дать и другое выражение для функции Δ_F :

$$\Delta_F(x) = \Delta^{(1)}(x) + i\varepsilon(x)\Delta(x), \quad (13.117)$$

где $\varepsilon(x) = x_0/|x_0|$. Так как $\Delta^{(1)}(x)$ есть четная функция от x , а $\Delta(x)$ и $\varepsilon(x)$ — нечетные, то $\Delta_F(x)$ — четная функция от x . Вне светового конуса $\Delta(x)$ равна нулю, тогда как $\Delta^{(1)}(x)$ отлична от нуля. Поэтому вне светового конуса функция $\Delta_F(x)$ также не равна нулю и фактически совпадает с $\Delta^{(1)}(x)$.

Чтобы получить интегральное представление функции $\Delta_F(x)$, напомним интегральные представления функций $\Delta(x)$ и $\Delta^{(1)}(x)$:

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k e^{-ik \cdot x} \delta(k^2 - \mu^2) \varepsilon(k), \quad (13.118)$$

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k e^{-ik \cdot x} \delta(k^2 - \mu^2). \quad (13.119)$$

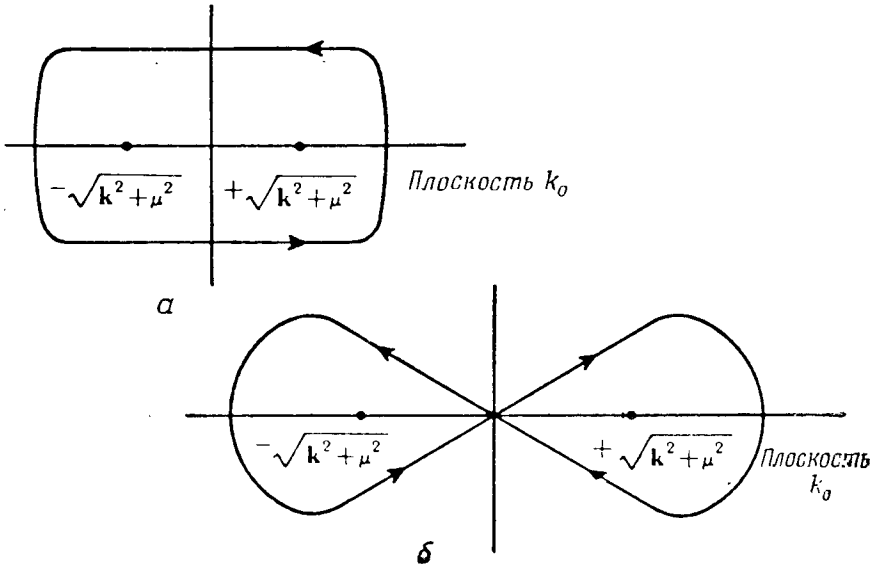
Полностью эквивалентные определения этих сингулярных функций даются выражениями

$$\Delta(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_C \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - \mu^2} d^4k \quad (13.120)$$

и

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_1} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - \mu^2} d^4k. \quad (13.124)$$

В этих выражениях сначала надо проинтегрировать по переменной k_0 . Контуры интегрирования C и C_1 в комплексной плоскости k_0 изображе-



Ф и г. 25.

ны диаграммами a и b фиг. 25. После этого следует провести интегрирование по вещественным переменным k^1 , k^2 и k^3 .

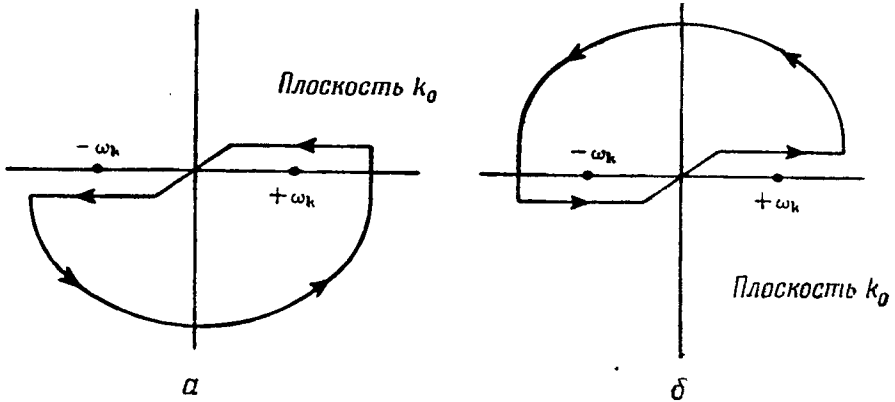
Аналогично, представление

$$\Delta^{(+)}(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{k_0 > 0} e^{-ik \cdot x} \delta(k^2 - \mu^2) d^4k \quad (13.122)$$

можно заменить при $x_0 > 0$ следующим интегральным представлением:

$$\Delta^{(+)}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C_+} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - \mu^2} d^4k \quad \text{при } x_0 > 0. \quad (13.123)$$

Контур интегрирования C_+ идет вдоль вещественной оси k_0 , обходя сингулярность при $k_0 = -\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} = -\omega_{\mathbf{k}}$ снизу, а сингулярность при $k_0 = +\omega_{\mathbf{k}}$ — сверху, и замыкается большим полукругом в нижней полу-

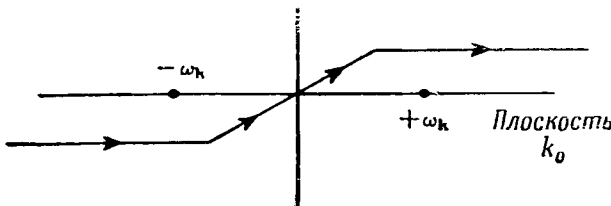


Ф и г. 26.

плоскости (фиг. 26, а). При $x_0 < 0$ функция $\Delta^{(-)}(x)$ имеет следующее интегральное представление:

$$\Delta^{(-)}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C_-} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - \mu^2} d^4k \quad \text{при } x_0 < 0. \quad (13.124)$$

Контур интегрирования C_- изображен на фиг. 26, б. Исходя из определения (13.113) функции Δ_F , можно построить для нее следующее



Ф и г. 27.

интегральное представление:

$$\Delta_F(x) = \frac{2i}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{d^4k}{k^2 - \mu^2} e^{-ik \cdot x}. \quad (13.125)$$

Контур интегрирования C_F показан на фиг. 27. В самом деле, при $x_0 > 0$ можно замкнуть контур в нижней полуплоскости и тогда в согласии с формулой (13.123)

$$\Delta_F(x) = 2i \Delta^{(+)}(x) \quad \text{при } x_0 > 0. \quad (13.126)$$

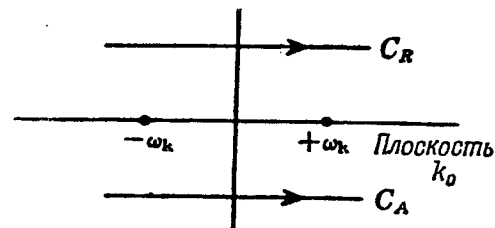
Замкнем контур в верхней полуплоскости и найдем

$$\Delta_F(x) = -2i \Delta^{(-)}(x) \quad \text{при } x_0 < 0, \quad (13.127)$$

что согласуется с данным ранее определением (13.113).

Тот же результат, который получается при интегрировании по контуру C_F , можно получить при интегрировании по вещественной оси k_0 от $-\infty$ до $+\infty$, если добавить к массе μ малую отрицательную мнимую добавку, которую следует устремить к нулю после выполнения интегрирования. В этом случае знаменатель в формуле (13.125) превращается в $k^2 - \mu^2 + i\varepsilon$. Добавление малой отрицательной мнимой добавки к массе смещает положение полюсов. Теперь они оказываются в точках

$$\begin{aligned} k_0 &= \pm \sqrt{k^2 + (\mu - i\varepsilon)^2} = \\ &= \pm \sqrt{k^2 + \mu^2 - i\varepsilon'} = \\ &= \pm \sqrt{k^2 + \mu^2 \mp i\varepsilon''}, \end{aligned} \quad (13.128)$$



Ф и г. 28.

т. е. полюс в точке $-\omega_k$ смещается вверх, а полюс в точке $+\omega_k$ смещается вниз, что и должно быть.

Для полноты приведем здесь еще интегральные представления сингулярных функций $\Delta_A(x)$ и $\Delta_R(x)$:

$$\Delta_A(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C_A} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - \mu^2} d^4k \quad (13.129)$$

$$\Delta_R(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C_R} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - \mu^2} d^4k. \quad (13.130)$$

Контур интегрирования C_A и C_R показаны на фиг. 28. При $x_0 > 0$ можно замкнуть эти контуры большим полукругом в нижней полуплоскости. Тогда мы получим

$$\Delta_A(x) = 0 \quad \text{при } x_0 > 0, \quad (13.131)$$

$$\Delta_R(x) = -\Delta(x) \quad \text{при } x_0 > 0.$$

Аналогично, при $x_0 < 0$ эти контуры можно замкнуть в верхней полуплоскости. В этом случае

$$\Delta_A(x) = \Delta(x) \quad \text{при } x_0 < 0, \quad (13.132)$$

$$\Delta_R(x) = 0 \quad \text{при } x_0 < 0.$$

Поэтому эти сингулярные функции называют «запаздывающей» и «опережающей». Из их определений следует, что

$$\Delta(x) = \Delta_A(x) - \Delta_R(x) \quad (13.133)$$

и

$$\Delta_A(x) = \Delta_R(-x). \quad (13.134)$$

Сингулярная функция $\bar{\Delta}(x)$, которая является четной функцией от времени, определяется выражением

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{2} (\Delta_A(x) + \Delta_R(x)), \quad (13.135)$$

так что

$$\bar{\Delta}(x) = +\frac{1}{2} \Delta(x) \quad \text{при } x_0 < 0, \quad (13.136a)$$

$$= -\frac{1}{2} \Delta(x) \quad \text{при } x_0 > 0, \quad (13.136b)$$

или

$$\bar{\Delta}(x) = -\frac{1}{2} \varepsilon(x) \Delta(x). \quad (13.137)$$

Функции $\bar{\Delta}$ и $\Delta^{(1)}$ широко использовались в работах Швингера [709, 711, 712, 713].

Функции $\Delta_F(x)$, $\bar{\Delta}(x)$, $\Delta_A(x)$ и $\Delta_R(x)$ удовлетворяют неоднородному уравнению Клейна—Гордона с $\delta^{(4)}(x)$ в качестве функции источника. С другой стороны, функции $\Delta^{(\pm)}(x)$, $\Delta(x)$ и $\Delta^{(1)}(x)$ подчиняются однородному уравнению Клейна—Гордона.

Функция S_F связана с функцией Δ_F соотношением

$$S_F(x) = -(i\gamma \cdot \partial + m) \Delta_F(x), \quad (13.138)$$

так что

$$\begin{aligned} S_F(x) &= -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int \frac{\gamma \cdot p + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot x} d^4p = \\ &= -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{\gamma \cdot p - m + i\varepsilon} e^{-ip \cdot x} d^4p. \end{aligned} \quad (13.139)$$

Функции $S^{(1)}$, $S^{(\pm)}$, S_A , S_R и т. д. связаны с соответствующими функциями $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(\pm)}$, Δ_A , Δ_R и т. д. соотношением, аналогичным (13.138).

Диаграммы Фейнмана

Чтобы освоиться с формализмом S -матрицы в картине Дирака и научиться свободно, не прибегая всякий раз к теореме Вика, выписывать матричные элементы, мы рассмотрим несколько примеров, которые позволят вывести некоторые общие правила.

§ 1. Взаимодействие с внешним электромагнитным полем

Рассмотрим сначала взаимодействие электронно-позитронного поля с заданным внешним электромагнитным полем. В этом случае плотность гамильтониана взаимодействия есть $\mathcal{H}_I(x) = j_\mu(x) A^\mu(x)$, и S -матрица дается выражением

$$S = 1 + \left(\frac{ie}{hc}\right) \int d^4x_1 N(\tilde{\psi}(x_1) \gamma^\mu A^e_\mu(x_1) \psi(x_1)) + \\ + \frac{1}{2!} \left(\frac{ie}{hc}\right)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 T(N(\tilde{\psi}(x_1) \gamma^\mu A^e_\mu(x_1) \psi(x_1)) \times \\ \times N(\tilde{\psi}(x_2) \gamma^\mu A^e_\mu(x_2) \psi(x_2)) + \dots \quad (14.1)$$

Рассмотрим член первого порядка $N(\tilde{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)) A^e_\mu(x)$. Ранее мы уже выписывали формулу для нормального произведения спинорных множителей. Будем теперь изображать входящие в нормальные произведения операторы рождения и уничтожения линиями, которые для электронов направлены вверх (в направлении возрастания времени), а для позитронов — вниз (в направлении убывания времени). При этом

1) оператор $\tilde{\psi}^{(-)}(x)$, соответствующий рождению электрона в пространственно-временной точке x , представляется направленной линией, выходящей из точки x вверх, как показано на фиг. 29, а;

2) оператор $\psi^{(+)}(x)$ (уничтожение электрона в точке x) представляется направленной вверх линией, приходящей в точку x (фиг. 29, б);

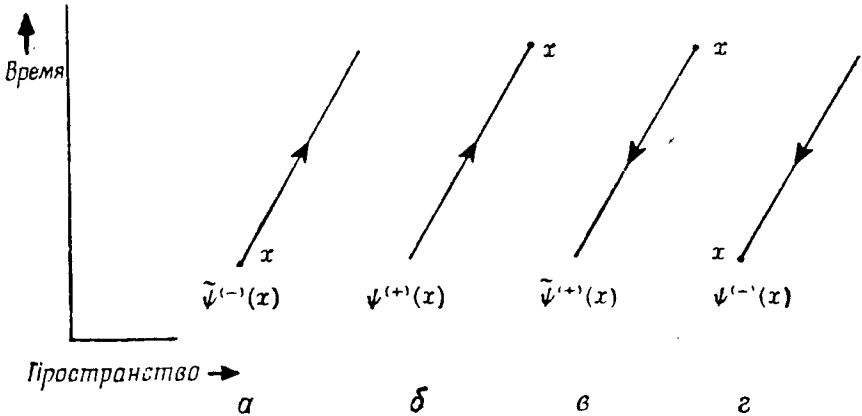
3) оператор $\tilde{\psi}^{(+)}(x)$ (уничтожение позитрона в точке x) представляется линией, выходящей из точки x и направленной вниз (фиг. 29, в);

4) оператор $\psi^{(-)}(x)$ (рождение позитрона в точке x) представляется линией, направленной вниз и приходящей в точку x (фиг. 29, г).

На пространственно-временных диаграммах направлению возрастания времени будет отвечать направление вверх, как показано на фиг. 29.

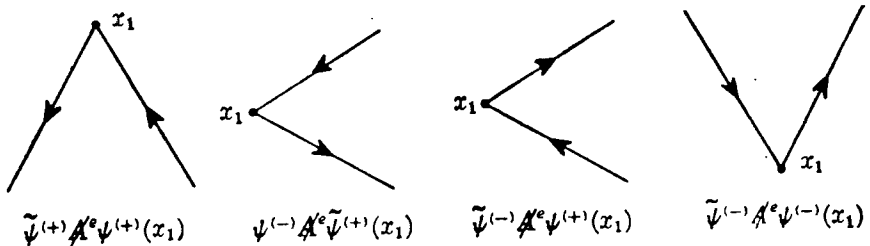
Наша договоренность о направлении позитронных линий согласуется с описанием позитронов у Фейнмана [251, 252] как электронов, движущихся обратно во времени.

При таком описании операторы $\tilde{\psi}$ представляются линиями, выходящими из точки x (вверх или вниз), а операторы ψ — линиями, приходящими



Ф и г. 29.

щими в точку x . Видно также, что линии, соответствующие положительно-частотным операторам, расположены ниже точки x , а линии, соответствующие отрицательно-частотным операторам, находятся выше (позже) точки x . Тогда член первого порядка в разложении S -матрицы можно представить четырьмя диаграммами Фейнмана, которые изображены на фиг. 30.



Ф и г. 30.

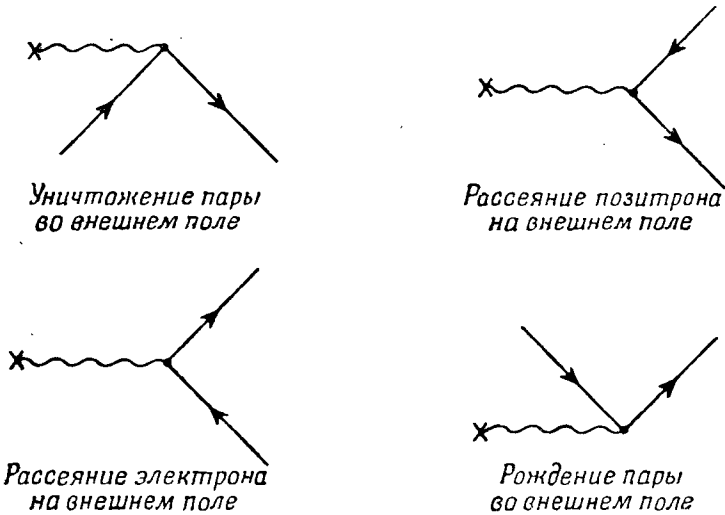
При этом подразумевают, что в точке x_1 должно действовать внешнее поле. Иногда внешний потенциал изображают явно, представляя его волнистой линией с крестом на конце. При такой договоренности диаграммы, изображенные на фиг. 30, будут выглядеть так, как показано на фиг. 31.

Рассмотрим теперь член второго порядка. Используя теорему Вика и выражая спаривание двух спинорных множителей через функцию распространения Фейнмана $-\frac{1}{2}S_F = K_+$, получаем (опуская множители A^e)

$$\begin{aligned}
 T(N(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1))N(\tilde{\psi}_\rho(x_2)\psi_\sigma(x_2))) &= \\
 &= N(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)\tilde{\psi}_\rho(x_2)\psi_\sigma(x_2)) + N(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)K_{+\beta\rho}(x_1-x_2)\psi_\sigma(x_2)) + \\
 &+ N(\tilde{\psi}_\rho(x_2)K_{+\alpha\sigma}(x_2-x_1)\psi_\beta(x_1)) - K_{+\beta\rho}(x_1-x_2)K_{+\alpha\sigma}(x_2-x_1). \quad (14.2)
 \end{aligned}$$

На диаграммах Фейнмана первый член в правой части равенства соответствует совместному возникновению любых двух элементарных процессов

из числа представленных на фиг. 30. Некоторые из возможных процессов приведены на фиг. 32.

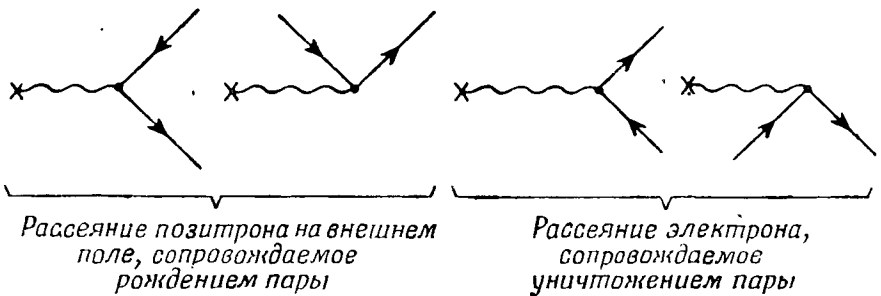


Ф и г. 31.

Если представить множитель $K_+(x_1 - x_2) = -\frac{1}{2}S_F(x_1 - x_2)$, который возникает при спаривании операторов $\psi(x_1)$ и $\bar{\psi}(x_2)$, внутренней линией, направленной от точки x_2 к точке x_1 , то член

$$N(\bar{\psi}(x_1) A^\circ(x_1) K_+(x_1 - x_2) A^\circ(x_2) \psi(x_2)) \tag{14.3}$$

даст четыре диаграммы, изображенные на фиг. 33. Эти диаграммы соответствуют поправкам второго порядка (два взаимодействия с внешним полем) к рассеянию электрона и позитрона (диаграммы на фиг. 33, а и б), а также



Ф и г. 32.

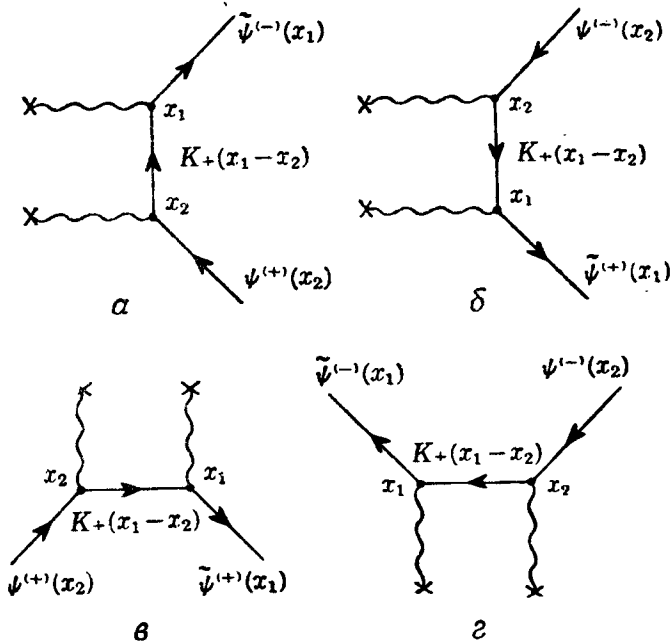
рождению и аннигиляции пары во внешнем поле (диаграммы на фиг. 33, в и г). Наряду с каждой диаграммой, изображенной на фиг. 33, существует и другая диаграмма, в которой переставлены точки x_1 и x_2 . Этот факт проявляется в явном виде при изучении третьего члена в правой части равенства (14.2). Третий член приводит к диаграммам Фейнмана, которые совпадают с диаграммами, показанными на фиг. 33, если поменять наименование пространственно-временных точек. Так как x_1 и x_2 являются немymi переменными, по которым производится интегрирование, то можно

объединить второй и третий члены в равенстве (14.2). Тогда появится множитель $2!$, который сократится с множителем $\frac{1}{2}!$, стоящим перед членом второго порядка в разложении S -матрицы (14.1).

Наконец, последний член в равенстве (14.2)

$$\text{Sp} \{ A^e(x_1) K_+(x_1 - x_2) A^e(x_2) K_+(x_2 - x_1) \}$$

представляется диаграммой на фиг. 34. Он описывает вакуумный процесс, в котором электронно-позитронная пара сначала рождается, а затем анни-



Ф и г. 33.

гирует. Соответствующий матричный элемент, равный

$$\begin{aligned}
 M_V^{(2)} &= -\frac{1}{2!} \left(\frac{ie}{\hbar c} \right)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \times \\
 &\times \sum_{\alpha\beta\gamma\sigma} A^e_{\mu}(x_1) A^e_{\nu}(x_2) \{ (\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} (\gamma^{\nu})_{\rho\sigma} K_{+\beta\rho}(x_1 - x_2) K_{+\sigma\alpha}(x_2 - x_1) \} = \\
 &= +\frac{1}{2!} \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \text{Sp} \{ A^e(x_1) K_+(x_1 - x_2) A^e(x_2) K_+(x_2 - x_1) \},
 \end{aligned}
 \tag{14.4}$$

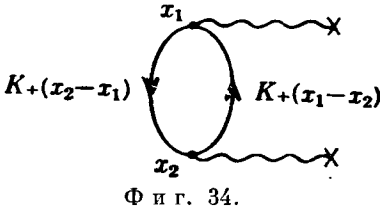
должен интерпретироваться как амплитуда вероятности вакууму остаться вакуумом, т. е. вероятности того, что ни в начале, ни в конце нет частиц. При вычислении этого матричного элемента оказывается, что он имеет независимо от поля бесконечную мнимую часть. Позже мы подробно проанализируем эту трудность.

Из этих примеров ясно, что существует взаимно однозначное соответствие между разложением на сумму нормальных произведений и диаграммами Фейнмана, если считать различными диаграммы Фейнмана, отличающиеся только наименованиями вершин. Следует тщательно относиться к выбору правильного знака матричного элемента, соответствующего

каждой диаграмме; разложение Вика автоматически приводит к правильному знаку. Большим преимуществом подхода Фейнмана является то, что диаграммы *a* и *b* на фиг. 35 описываются одним единственным членом

$$\int d^4x_1 \int d^4x_2 \tilde{\psi}^{(-)}(x_1) A^e(x_1) K_+(x_1 - x_2) A^e(x_2) \psi^{(+)}(x_2),$$

т. е. диаграммы с различным хронологическим упорядочением описываются одним и тем же матричным элементом. Поэтому количество диаграмм значительно меньше, чем при не зависящем от времени подходе, описанном в § 2 гл. 13.



В качестве примера рассмотрим амплитуду рассеяния позитрона на внешнем поле в низшем порядке теорий возмущений. Пусть начальным состоянием будет

$$|\Phi_i\rangle = d_{s_1}^*(\mathbf{p}_1) |\Phi_0\rangle, \quad (14.5)$$

и пусть нас интересует рассеяние в конечное состояние

$$|\Phi_f\rangle = d_{s_2}^*(\mathbf{p}_2) |\Phi_0\rangle. \quad (14.6)$$

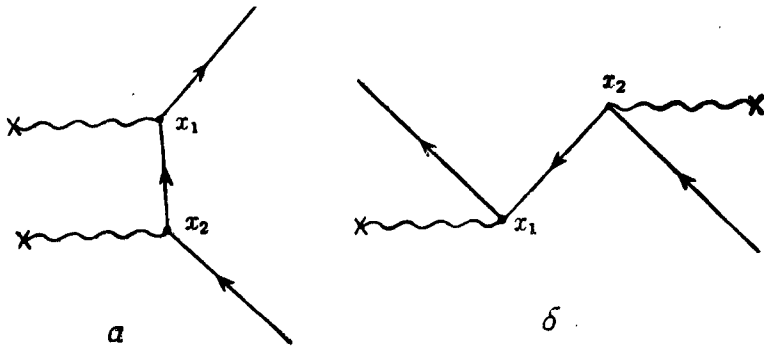
В первом порядке по внешнему потенциалу амплитуда вероятности для этого процесса равна

$$M = (\Phi_f, (1 + S^{(1)}) \Phi_i). \quad (14.7)$$

Рассмотрим

$$M^{(1)} = (\Phi_f, S^{(1)} \Phi_i) = \left(\frac{ie}{\hbar c} \right) \int d^4x_1 (d_{s_2}^*(\mathbf{p}_2) \Phi_0, N(\tilde{\psi}(x_1) A^e(x_1) \psi(x_1)) d_{s_1}^*(\mathbf{p}_1) \Phi_0). \quad (14.8)$$

Если разложить нормальное произведение, то отличный от нуля вклад будет давать только член разложения $-\psi_{\beta}^{(-)}(x_1) \tilde{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x_2)$; оператор $\tilde{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x_1)$



уничтожает позитрон в начальном состоянии, а оператор $\psi_{\beta}^{(-)}(x_1)$ рождает позитрон в конечном состоянии. Далее, согласно формулам (8.45) и (8.47),

$$-\psi_{\beta}^{(-)}(x) \tilde{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \int d^3p' \left(\frac{m^2}{E(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}')} \right)^{1/2} \times \sum_{r, s=1}^2 v_{\beta}^r(\mathbf{p}) \tilde{v}_{\alpha}^s(\mathbf{p}') e^{i(p-p') \cdot x} d_r^*(\mathbf{p}) d_s(\mathbf{p}'). \quad (14.9)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 M^{(1)} &= \left(\frac{-ie}{\hbar c} \right) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x_1 \int d^3p \int d^3p' \left(\frac{m^2}{E(\mathbf{p})E(\mathbf{p}')} \right)^{1/2} e^{i(p-p') \cdot x_1} \times \\
 &\quad \times \sum_{r, s=1}^2 \tilde{v}^s(\mathbf{p}') A^e(x_1) v^r(\mathbf{p}) (\Phi_0, d_{s_2}(\mathbf{p}_2) d_r^*(\mathbf{p}) d_s(\mathbf{p}') d_{s_1}^*(\mathbf{p}_1) \Phi_0) = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left(-\frac{ie}{\hbar c} \right) \int d^4x_1 \left(\frac{m^2}{E(\mathbf{p}_1)E(\mathbf{p}_2)} \right)^{1/2} e^{-i(p_1-p_2) \cdot x_1} \times \\
 &\quad \times \tilde{v}_{s_1}(\mathbf{p}_1) A^e(x_1) v_{s_2}(\mathbf{p}_2). \tag{14.10}
 \end{aligned}$$

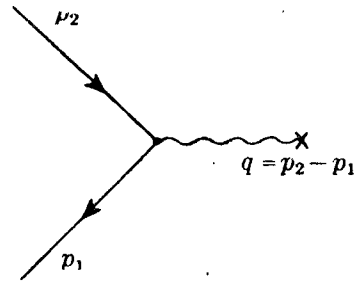
Если ввести обозначение

$$a_\mu(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{iq \cdot x} A^e_\mu(x), \tag{14.11}$$

то матричный элемент приобретает вид

$$\begin{aligned}
 M^{(1)} &= -\frac{e}{\hbar c} \left(\frac{m^2}{E(\mathbf{p}_1)E(\mathbf{p}_2)} \right)^{1/2} 2\pi i \tilde{v}_{s_1}(\mathbf{p}_1) \not{a}(p_2 - p_1) v_{s_2}(\mathbf{p}_2) = \\
 &= -\frac{e}{\hbar c} \left(\frac{m^2}{E(\mathbf{p}_1)E(\mathbf{p}_2)} \right)^{1/2} 2\pi i \tilde{u}_{s_2}^c(\mathbf{p}_2) \not{a}(p_2 - p_1) u_{s_1}^c(\mathbf{p}_1), \tag{14.12}
 \end{aligned}$$

где через u^c обозначен зарядово-сопряженный спинор. Отметим, что в отличие от случая рассеяния электрона вместо знака плюс появился знак минус. Множители $(m/E(\mathbf{p}))^{1/2}$ являются нормировочными множителями волновых функций начального и конечного состояний позитрона. Далее, из формулы (14.12) видно, что если чертить диаграммы Фейнмана в импульсном представлении, придавая каждой линии определенный импульс, то при описании позитронов зарядово-сопряженными спинорами значительно проще выбирать множители, соответствующие каждой линии и вершине, чем при описании позитронов дираковскими спинорами с отрицательной энергией (фиг. 36).



Ф и г. 36.

В первом порядке теории возмущений амплитуду рассеяния электрона на внешнем потенциале из состояния $b_{s_1}^*(p_1) | \Phi_0 \rangle$ в состояние $b_{s_2}^*(p_2) | \Phi_0 \rangle$ описывает матричный элемент

$$M_e^{(1)} = \left(\frac{e}{\hbar c} \right) \left(\frac{m^2}{E(\mathbf{p}_1)E(\mathbf{p}_2)} \right)^{1/2} 2\pi i \tilde{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2) \not{a}(p_2 - p_1) u_{s_1}(\mathbf{p}_1), \tag{14.13}$$

который соответствует диаграммам Фейнмана на фиг. 30. Если внешнее электромагнитное поле является кулоновским полем ядра с зарядом $+Ze$

$$A^0 = \frac{Ze}{4\pi r}, \tag{14.14}$$

то

$$\begin{aligned}
 a(q) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{iq \cdot x} \gamma^\mu A_\mu(x) d^4x = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(q_0) \gamma^0 \int d^3x e^{-iq \cdot x} A_0(x) = \\
 &= \frac{Ze}{4\pi} \frac{1}{2\pi^2 q^2} \delta(q_0) \gamma^0. \tag{14.15}
 \end{aligned}$$

Следовательно, амплитуда рассеяния в этом случае будет равна

$$M_e^{(1)} = \frac{Ze^2}{4\pi\hbar c} \frac{i}{\pi} \left(\frac{m^2}{E(\mathbf{p}_1)E(\mathbf{p}_2)} \right)^{1/2} \tilde{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2) \frac{1}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} \gamma^0 u_{s_1}(\mathbf{p}_1) \delta(E_2 - E_1), \quad (14.16)$$

где $E_1 = E_2 = E$ — энергия электрона. Вероятность перехода определяется квадратом модуля амплитуды перехода:

$$|M_e^{(1)}|^2 = Z^2 \alpha^2 \frac{m^2}{E(\mathbf{p}_1)E(\mathbf{p}_2)} \frac{1}{\pi^2} \delta(E_2 - E_1) \delta(0) \times \\ \times |\tilde{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2) \frac{1}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} \gamma^0 u_{s_1}(\mathbf{p}_1)|^2, \quad (14.17)$$

где $\alpha = e^2/4\pi\hbar c \approx (137)^{-1}$. Множитель $\delta(0)$ должен интерпретироваться следующим образом:

$$\delta(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{E_1 \rightarrow E_2} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_1 - E_2)t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi}, \quad (14.18)$$

где T — время, в течение которого происходит взаимодействие. Отсюда вероятность перехода в единицу времени $\omega_{1 \rightarrow 2}$ в одно избранное конечное $u_{s_2}(\mathbf{p}_2)$ дается выражением

$$\omega_{1 \rightarrow 2} = \frac{Z^2 \alpha^2}{2\pi^3} \left(\frac{m}{E} \right)^2 |\tilde{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2) \frac{1}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} \gamma^0 u_{s_1}(\mathbf{p}_1)|^2 \delta(E_1 - E_2). \quad (14.19)$$

Если начальный пучок не поляризован и нас не интересует спиновое состояние конечного электрона, то следует просуммировать $|M_e^{(1)}|^2$ по конечным спиновым состояниям и усреднить по начальным. Кроме того, мы интересуемся только вероятностью перехода в единицу времени в группу конечных состояний с плотностью $\rho_f = dn_f/dE_f$. Эта вероятность равна

$$\omega = \frac{4Z^2 \alpha^2}{(2\pi)^3} \left(\frac{m}{E} \right)^2 \left(\frac{dn_f}{dE_f} \right)_{E_f=E_i} \frac{1}{2} \text{Sp} \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m} \gamma^0 \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma^0 \right) \frac{1}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^4}. \quad (14.20)$$

Чтобы найти плотность конечных состояний, заметим, что в подпространстве одночастичных состояний оператор

$$\int dn_f b_s^*(\mathbf{p}_f) |\Phi_0\rangle \langle \Phi_0| b_s(\mathbf{p}_f)$$

должен быть равен единичному оператору. Другими словами, действуя на одночастичное состояние $|\Phi\rangle = b_s^*(\mathbf{q}) |\Phi_0\rangle$, этот оператор должен воспроизвести его. Отсюда $dn_f = d^3 p_f$ и

$$\frac{dn_f}{dE} = \frac{p^2 dp d\Omega}{dE} = E p d\Omega, \quad (14.21)$$

поскольку

$$\frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \frac{p}{E}. \quad (14.22)$$

Используя установленные в § 5 гл. 5 свойства следов γ -матриц, легко вычислить след в (14.20). Учитывая, что след произведения нечетного числа γ -матриц равен нулю, и используя формулу (4.172), получаем

$$\frac{1}{2} \text{Sp} \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m} \gamma^0 \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma^0 \right) = \frac{1}{8m^2} \text{Sp} (\not{p}_2 \gamma^0 \not{p}_1 \gamma^0 + m^2) = \\ = \frac{1}{2m^2} (2p_{20} p_{10} - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 + m^2) = \\ = \frac{1}{2m^2} (E^2 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 + m^2). \quad (14.23)$$

Так как внешнее поле не зависит от времени, то энергия частицы сохраняется

$$E_1 = E_2 = (p_1^2 + m^2)^{1/2} = (p_2^2 + m^2)^{1/2}, \quad (14.24)$$

откуда следует, что абсолютная величина трехмерного импульса частицы также сохраняется. Если обозначить угол рассеяния буквой θ , то

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| \cos \theta = p^2 \cos \theta = (E^2 - m^2) \cos \theta, \quad (14.25)$$

где $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = p$. Из релятивистской механики мы знаем, что

$$\frac{m}{(1-v^2)^{1/2}} = E \quad \text{или} \quad \frac{m^2}{E^2} = 1 - v^2, \quad (14.26)$$

где v — скорость частицы. Поэтому выражение (14.23) для следа может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Sp} \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m} \gamma^0 \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma^0 \right) &= \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{2} (1 + \cos \theta) (E^2 - m^2) + m^2 \right] = \\ &= \frac{E^2}{m^2} \left[v^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta + 1 - v^2 \right] = \frac{E^2}{m^2} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \right). \end{aligned} \quad (14.27)$$

Аналогично, поскольку абсолютная величина импульса сохраняется, то

$$|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1| = 2p \sin \frac{1}{2} \theta. \quad (14.28)$$

Таким образом, мы получаем следующее выражение для ω :

$$\omega = \frac{Z^2 \alpha^2}{4p^4 \sin^4 \frac{1}{2} \theta} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \right) \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{dn_f}{dE_f} \right)_{E_f=E_i}. \quad (14.29)$$

Чтобы найти дифференциальное эффективное сечение, нужно разделить вероятность ω на плотность потока падающих частиц. Плотность падающих частиц может быть получена из плотности тока, соответствующей вектору начального состояния электронно-позитронной системы. Рассмотрим среднее значение оператора тока в начальном состоянии $b_{s_1}^*(\mathbf{p}_1) |\Phi_0\rangle$, состоящем из одного электрона с импульсом \mathbf{p}_1 и спиновым индексом s_1 :

$$\langle j_\mu(x) \rangle = - \left(b_{s_1}^*(\mathbf{p}_1) \Phi_0, \frac{e}{2} [\tilde{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] b_{s_1}(\mathbf{p}_1) \Phi_0 \right). \quad (14.30)$$

Ясно, что в разложении оператора тока по операторам рождения и уничтожения (частиц с определенным импульсом и проекцией спина) вклад в матричный элемент (14.30) будут вносить только члены, пропорциональные b^*b , откуда

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle &= -e (b_{s_1}^*(\mathbf{p}_1) \Phi_0, \overline{\psi^{(+)}(x)} \gamma_\mu \psi^{(+)}(x) b_{s_1}(\mathbf{p}_1) \Phi_0) = \\ &= -\frac{e}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_1} \tilde{\omega}^{s_1}(\mathbf{p}_1) \gamma_\mu \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1) = \\ &= -\frac{e}{(2\pi)^3} \frac{p_{1\mu}}{E_1} = -\frac{1}{(2\pi)^3} e v_{1\mu}, \end{aligned} \quad (14.31)$$

где $v_{1\mu}$ — скорость падающей частицы. Отсюда для плотности потока падающих электронов получаем

$$\text{Поток} = \frac{1}{(2\pi)^3} v = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{p}{E}. \quad (14.32)$$

Следовательно, дифференциальное эффективное сечение дается выражением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4p^2v^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta\right), \quad (14.33)$$

что отличается от формулы Резерфорда $Z^2\alpha^2/4p^2v^2 \sin^4 \frac{1}{2} \theta$ множителем $(1 - v^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta)$. Этот множитель служит поправкой к формуле Резерфорда, учитывающей спин электрона. Он и в самом деле возник из выражения для следа. Следующий порядок теории возмущений, т. е. вклад от двойного рассеяния, вычислили Мак-Кинли и Фешбах [524] (см. также статью Далицца [149]). Непосредственное применение разложения теории возмущений (14.1) на деле приводит во втором порядке (и фактически во всех высших порядках) к расходящемуся результату, что связано с бесконечным радиусом действия кулоновского поля. Это затруднение было разрешено Далиццем [149], который показал, что амплитуда рассеяния в экранированном кулоновском поле

$$A^0 = \frac{Ze}{4\pi} \frac{e^{-\lambda r}}{r} \quad (14.34)$$

в нерелятивистском пределе сводится к амплитуде рассеяния в низшем порядке (в первом порядке по $Z\alpha$), умноженной на фазовый множитель, который стремится к бесконечности, как $1/\lambda$, когда радиус экранирования $1/\lambda$ стремится к бесконечности (т. е. когда $\lambda \rightarrow 0$). Расходимости в высших порядках разложения в степенной ряд (14.1) возникают именно за счет бесконечного вклада от этого фазового множителя.

Для описания рассеяния электронов на протонах при больших энергиях необходимо так изменить формулу Мотта (14.33), чтобы учесть:

- а) отдачу протона;
- б) вклад в рассеяние, связанный с магнитным моментом протона;
- в) конечные размеры распределения протонного заряда и магнитного момента;
- г) радиационные поправки к упругому рассеянию, учитывающие испускание и поглощение виртуальных фотонов, и испускание реальных фотонов, допускаемое конечной разрешающей способностью эксперимента.

Эффекты «а» и «б» учтены Розенблютом [674]. Эффект конечных размеров нуклонов выражается в том, что первую часть формулы (14.33) умножают на форм-фактор нуклона. Форм-фактор является функцией передачи импульса $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|$ и дается фурье-образом плотности заряда нуклона. Эффекты «г» мы обсудим в гл. 12. По поводу рассеяния электронов больших энергий читатель отсылается к превосходному обзору Хофштадтера [378].

Обратимся теперь к краткому обсуждению вакуумных диаграмм. Выше мы отмечали, что в низшем порядке теории возмущений амплитуда вероятности вакууму остаться вакуумом при наличии внешнего поля дается интегралом

$$M_V^{(2)} = \frac{e^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \text{Sp} \{A^e(x_1) K_+(x_1 - x_2) A^e(x_2) K_+(x_2 - x_1)\}, \quad (14.35)$$

который расходится независимо от вида внешнего поля A^e из-за совпадения особенностей у функций $K_+(x_1 - x_2)$ и $K_+(x_2 - x_1)$ при $x_1 = x_2$. Чтобы

выразить в явной форме эту расходимость, введем в равенство (14.35) фурье-образы \tilde{K} и a функций K_+ и A^e . Тогда

$$M_V^{(2)} = \frac{e^2}{2(2\pi)^8} \int d^4k a_\mu(k) \Pi^{\mu\nu}(k) a_\nu(-k), \quad (14.36)$$

где

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \int d^4q \text{Sp} \{ \gamma^\mu \tilde{K}_+(q+k) \gamma^\nu \tilde{K}_+(q) \} = \Pi^{\nu\mu}(k). \quad (14.37)$$

Из требования калибровочной инвариантности вытекает инвариантность матричного элемента $M_V^{(2)}$ относительно замены $a_\mu(k)$ на $a_\mu(k) + k_\mu \Lambda(k)$. Иначе говоря, если вместо $a_\mu(k)$ подставить произведение 4-вектора k_μ на любую скалярную функцию от k , то матричный элемент $M_V^{(2)}$ должен обратиться в нуль. Поэтому

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = \Pi^{\mu\nu} k_\nu = 0, \quad (14.38)$$

откуда следует, что $\Pi^{\mu\nu}(k)$ можно записать в виде

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) \Pi(k). \quad (14.39)$$

Соотношение (14.39) позволяет переписать формулу (14.36) в явно калибровочно-инвариантном виде, выразив ее только через напряженности поля. Действительно, учитывая, что

$$(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) a^\mu(-k) a^\nu(k) = -\frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu}(-k) \tilde{F}^{\mu\nu}(k), \quad (14.40)$$

и подставляя это выражение в формулу (14.36), получаем

$$M_V^{(2)} = \frac{e^2}{4} \int d^4x_1 \int d^4x_2 F_{\mu\nu}(x_1) \tilde{\Pi}(x_1 - x_2) F^{\mu\nu}(x_2), \quad (14.41)$$

где $\tilde{\Pi}(x)$ — фурье-образ $\Pi(k)$. Явное выражение функции $\tilde{\Pi}(x)$ было получено многими авторами, и мы в гл. 15 будем заниматься этим. Здесь мы приведем выражение для $\tilde{\Pi}(x)$, найденное Швингером [721]:

$$\tilde{\Pi}(x - x') = \frac{i}{16\pi^2} \int_{4m^2}^{\infty} dx^2 \left[\left(1 - \frac{4m^2}{x^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{4m^2}{x^2}\right)^{3/2} \right] \Delta_F(x - x'; x^2). \quad (14.42)$$

Для выделения расходящейся части функции $\tilde{\Pi}(x)$ запишем

$$\Delta_F(x - x'; x^2) = -\frac{2i}{x^2} \delta^{(4)}(x - x') - \frac{1}{x^2} \square_x \Delta_F(x - x'; x^2). \quad (14.43)$$

Отсюда следует

$$\tilde{\Pi}(x - x') = C \delta^{(4)}(x - x') + \square_x \tilde{\Pi}'(x - x'), \quad (14.44)$$

где C — логарифмически расходящаяся постоянная вида

$$C = \frac{1}{6\pi^2} \left(\ln \left(\frac{K}{m} \right) - \frac{5}{6} \right) \Big|_{K \rightarrow \infty}. \quad (14.45)$$

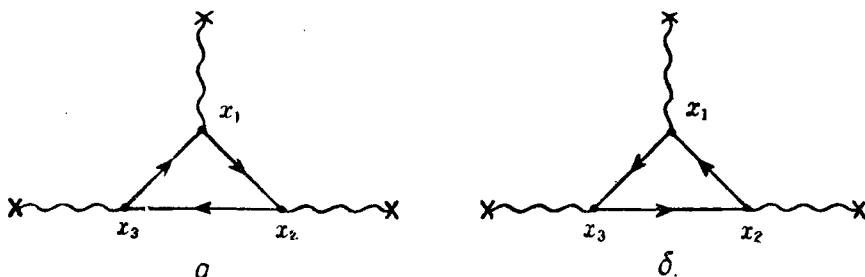
Ядро $\tilde{\Pi}'(x)$ приводит к сходящемуся интегралу для большинства внешних полей, которые приходится рассматривать. В частности, оно дает конечный вклад в матричный элемент $M_V^{(2)}$ для внешнего поля, наилучшие особенности которого имеют вид $|x - x_0|^{-(2-\gamma)}$ с $\gamma > 0$.

Среднее значение по вакууму третьего члена разложения S -матрицы $S^{(3)}$, соответствующее вкладу третьего порядка в амплитуду перехода

вакуума в вакуум под влиянием внешнего поля, дается выражением

$$M_V^{(3)} = \left(\Phi_0, \left(\frac{ie}{\hbar c} \right)^3 \frac{1}{3!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \times \right. \\ \left. \times T \{ N(\tilde{\psi} A^\mu \psi(x_1)) N(\tilde{\psi} A^\mu \psi(x_2)) N(\tilde{\psi} A^\mu \psi(x_3)) \} \Phi_0 \right). \quad (14.46)$$

В этот матричный элемент внесут вклад только те нормальные произведения в разложении T -произведения, в которых все фермионные мно-



Ф и г. 37.

жители спарены. Имеются два таких нормальных произведения, которые соответствуют следующим двум возможностям спаривания:

$$- \psi \cdot (x_1) \tilde{\psi} \cdot (x_2) \psi \cdot \cdot (x_2) \tilde{\psi} \cdot \cdot (x_3) \psi \cdot \cdot \cdot (x_3) \tilde{\psi} \cdot \cdot \cdot (x_1) \quad (14.47a)$$

и

$$- \psi \cdot (x_1) \tilde{\psi} \cdot (x_3) \psi \cdot \cdot (x_3) \tilde{\psi} \cdot \cdot (x_2) \psi \cdot \cdot \cdot (x_2) \tilde{\psi} \cdot \cdot \cdot (x_1). \quad (14.47b)$$

Они соответствуют двум диаграммам, изображенным на фиг. 37. (Внешнее электромагнитное поле действует в точках x_1 , x_2 и x_3 .)

Обратим внимание на знак минус перед выражениями (14.47). Он возник потому, что при спаривании первого и последнего фермионных множителей всегда приходится делать нечетную перестановку множителей ψ и $\tilde{\psi}$. Этот знак минус имеет то же происхождение, что и знак минус перед последним членом в правой части равенства (14.2). Вообще любая имеющая вид замкнутой петли диаграмма Фейнмана приводит к множителю -1 перед соответствующим ей матричным элементом.

Таким образом, матричный элемент, соответствующий диаграммам на фиг. 37, имеет вид

$$M_V^{(3)} = - \frac{1}{3!} \left(\frac{ie}{\hbar c} \right)^3 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \times \\ \times [\text{Sp} \{ A^\mu(x_1) K_+(x_1-x_2) A^\mu(x_2) K_+(x_2-x_3) A^\mu(x_3) K_+(x_3-x_1) \} + \\ + \text{Sp} \{ A^\mu(x_1) K_+(x_1-x_3) A^\mu(x_3) K_+(x_3-x_2) A^\mu(x_2) K_+(x_2-x_1) \}]. \quad (14.48)$$

Хотя при помощи замены переменных можно привести первый и второй члены к одинаковому виду, тем не менее по причине, которая вскоре выяснится, мы сохраним для матричного элемента $M_V^{(3)}$ выражение (14.48).

Покажем теперь, что матричный элемент (14.48) равен нулю. Для доказательства используем существование унитарной антисимметричной

матрицы C со следующими свойствами:

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}, \quad (14.49a)$$

$$C^*C = CC^* = 1, \quad (14.49b)$$

$$C^T = -C. \quad (14.49b')$$

Подставляя в первый член формулы (14.48) множитель $C^{-1}C = I$, получаем

$$\text{Sp} \{ \} = \text{Sp} \{ C^{-1}A^e(x_1) CC^{-1}K_+(x_1-x_2) CC^{-1}A^e(x_2) CC^{-1} \times \\ \times K_+(x_2-x_3) CC^{-1}A^e(x_3) CC^{-1}K_+(x_3-x_1) C \}. \quad (14.50)$$

Однако из свойств (14.49) следует

$$C^{-1}K_+(x_1-x_2) C = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{-\not{p}^T + m}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} d^4 p = \\ = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{\not{p}^T + m}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x_2 - x_1)} d^4 p = K_+^T(x_2 - x_1). \quad (14.51)$$

Поэтому след в выражении (14.50) можно записать в виде

$$\text{Sp} \{ \} = (-1)^3 \text{Sp} \{ A^{eT}(x_1) K_+^T(x_2-x_1) A^{eT}(x_2) K_+^T(x_3-x_2) A^{eT}(x_3) K_+^T(x_1-x_3) \} = \\ = -\text{Sp} \{ K_+(x_1-x_3) A^e(x_3) K_+(x_3-x_2) A^e(x_2) K_+(x_2-x_1) A^e(x_1) \} = \\ = -\text{Sp} \{ A^e(x_1) K_+(x_1-x_3) A^e(x_3) K_+(x_3-x_2) A^e(x_2) K_+(x_2-x_1) \}, \quad (14.52)$$

так что два члена в выражении (14.48) взаимно уничтожаются, и, следовательно, $M^{(3)} = 0$. Фактически, конечно, каждый член в отдельности равен нулю, так как заменой переменных можно преобразовать правую часть равенства (14.52) к исходной форме — левой части равенства (14.50). При этом окажется, что рассматриваемый след равен самому себе со знаком минус, т. е. равен нулю.

Взаимное уничтожение двух членов в равенстве (14.48) допускает следующее физическое толкование. Можно считать, что первый член, соответствующий диаграмме на фиг. 37, а, описывает распространение электрона в одном направлении, а второй член, соответствующий диаграмме на фиг. 37, б, описывает распространение электрона в противоположном направлении. Однако при обращении направления движения электрон ведет себя подобно позитрону. Поэтому меняется знак его заряда и, следовательно, знак каждого взаимодействия с внешним потенциалом. Следовательно, сумма вкладов от этих двух диаграмм равна нулю. Подобным же образом матричный элемент, соответствующий диаграмме, в которой имеется замкнутая петля с нечетным числом вершин, равен нулю в самом общем случае. Эта теорема принадлежит Фарри [291]¹⁾.

Обозначим, следуя Фейнману, сумму матричных элементов, соответствующих связным диаграммам с замкнутыми петлями, через $-L$, т. е.

$$\sum_n M_n^{(3)} = -L. \quad (14.53)$$

Мы поставили знак минус, чтобы подчеркнуть тот факт, что мы имеем дело с замкнутыми петлями. Помимо этих одиночных петель, возможно рождение двух независимых пар, каждая из которых может затем аннигилировать.

¹⁾ Общее и четкое доказательство теоремы Фарри читатель может найти в монографии Ахизера и Берестецкого [3].— *Прим. ред.*

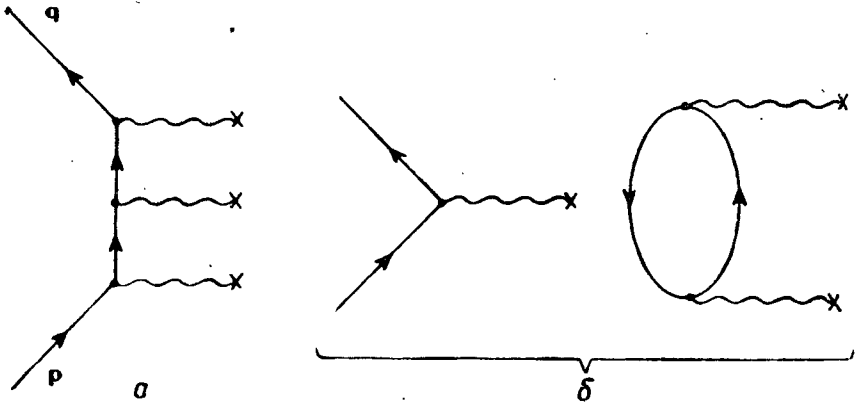
ровать. Вклад от таких пар петель равен $L^2/2!$, поскольку в L^2 каждая пара петель учитывается дважды. Поэтому полная амплитуда перехода вакуума в вакуум имеет вид

$$(\Phi_0, S\Phi_0) = 1 - L + \frac{L^2}{2!} - \frac{L^3}{3!} + \dots = e^{-L}; \quad (14.54)$$

L имеет бесконечную мнимую часть, соответствующую собственной энергии вакуума. Эта бесконечность, однако, не оказывает влияния на постоянную нормировки так как вероятность того, что вакуум останется вакуумом, дается выражением

$$|(\Phi_0, S\Phi_0)|^2 = \exp(-2 \operatorname{Re} L), \quad (14.55)$$

а вещественная часть L , вообще говоря, конечна. Другими словами, если бы мы включили в гамильтониан взаимодействия член вида ΔE_0 , соответствующий сдвигу уровня состояния физического вакуума относительно



Ф и г. 38.

состояния «голового» вакуума, то для статического поля $\Delta E_0 = \operatorname{Im} L/T^1$. [T — интервал времени (вообще говоря, бесконечный) между начальным и конечным состояниями, т. е. $U(T, -\infty) = S$.] Член ΔE_0 подбирается так, чтобы уничтожить расходимости в $\operatorname{Im} L$.

Рассмотрим теперь рассеяние электрона в третьем порядке теории возмущений. Кроме трехкратного взаимодействия с внешним полем (фиг. 38, а), возможен процесс однократного рассеяния на внешнем поле, сопровождаемый не связанным с ним вакуумным процессом (фиг. 38, б). Матричный элемент перехода из состояния p в состояние q , соответствующий диаграмме Фейнмана на фиг. 38, б, можно записать в виде

$$(q | S^{(3\phi)} | p) = (q | R^{(1)} | p) (0 | S^{(2)} | 0), \quad (14.56)$$

где $(q | R^{(1)} | p)$ — матричный элемент в первом борновском приближении, соответствующий однократному рассеянию, т. е.

$$(q | R^{(1)} | p) = 2\pi i \left(\frac{e}{\hbar c} \right) \left(\frac{m^2}{E(p)E(q)} \right)^{1/2} \tilde{u}^s(q) \not{a}(q-p) u^r(p), \quad (14.57)$$

¹ Тот факт, что в случае статического внешнего поля, когда $A^e(x) = A^e(x)$, L пропорционально T , может быть доказан путем введения в матричный элемент M_V в качестве новых переменных интегрирования относительных времен $x_{10} - x_{20}$, $x_{20} - x_{30}$ и т. д. Например, введем в выражение (14.4) переменные интегрирования x_{10} и $x_{20} - x_{10}$. Тогда интегрирование по x_{10} приведет к множителю T .

а $(0 | S^{(2)} | 0)$ — вакуумное среднее S -матрицы во втором порядке теории возмущений. Несвязность двух частей диаграммы на фиг. 38, 6 проявляется в том, что матричный элемент (14.56) распадается на произведение двух множителей, не содержащих общих переменных.

Аналогично в высших порядках теории возмущений мы получим однократное рассеяние, сопровождаемое всеми возможными вакуумными процессами. Поэтому можно записать полную амплитуду перехода из состояния p в состояние q в виде

$$(q | S | p) = (q | R | p) (0 | S | 0) = (q | R | p) e^{-L}, \quad (14.58)$$

где $(0 | S | 0)$ — вакуумное среднее S -матрицы, представляемое вакуумными диаграммами Фейнмана, тогда как $(q | R | p)$ представляется только связными диаграммами процессов рассеяния, т. е. диаграммами, не содержащими вакуумных петель. Фейнман [251] назвал величину $(q | S | p)$ абсолютной амплитудой вероятности перехода, а величину $(q | R | p)$ — относительной амплитудой вероятности перехода. Таким образом, для решения задачи об электроны во внешнем поле мы должны для заданного поля вычислить L только один раз и затем рассматривать только те матричные элементы, которые соответствуют связным диаграммам [матрице R в выражении (14.58)]. Тогда абсолютная вероятность данного процесса будет равна относительной вероятности $|(p | R | q)|^2$, умноженной на вероятность того, что вакуум останется вакуумом $[\exp(-2\text{Re } L)]$.

Описанный выше в общих чертах диаграммный анализ был развит Фейнманом [251]. В этой статье Фейнман не только дал формулировку теории дырок, в которой значительно упрощаются все вычисления эффектов взаимодействия электронов и позитронов с внешним электромагнитным полем, но развил новый метод анализа теории возмущений, основанный на диаграммах. Затем Фейнман обобщил формулировку на взаимодействия между частицами [252] и доказал эквивалентность полученной теории стандартным формулировкам квантовой теории поля [253]. Подход Фейнмана основывается на рассмотрении функции распространения, которая связывает решения уравнения Дирака, относящиеся к двум разным моментам времени. Мы здесь в краткой форме повторим формулировку Фейнмана, отправляясь от квантованной теории поля. Однако никакой обзор работ Фейнмана не может во всей полноте передать ясности, простоты и изящества его оригинальных статей. Поэтому читателю необходимо изучить эти статьи.

Относительная амплитуда того, что электрон достигнет точки x , если он находился сначала в состоянии $\tilde{\psi}(x') | \Phi_0$, согласно предыдущим рассмотрениям, есть

$$K_+^A(x, x') = \frac{\langle \Phi_0 | \psi(x) U(t, t') \tilde{\psi}(x') | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | U(t, t') | \Phi_0 \rangle}, \quad (14.59)$$

где $x_0 = t$, $x'_0 = t'$, и оператор $U(t, t')$ имеет вид

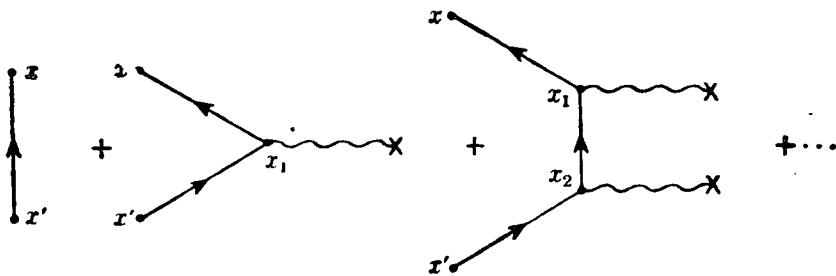
$$U(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ie}{\hbar c} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{t'}^t d^4x_1 \int_{t'}^t d^4x_2 \dots \int_{t'}^t d^4x_n \times \\ \times T \{ N(\tilde{\psi}(x_1) A^e(x_1) \psi(x_1)) \dots N(\tilde{\psi}(x_n) A^e(x_n) \psi(x_n)) \}. \quad (14.60)$$

Мы здесь игнорировали тот факт, что состояние $\tilde{\psi}(x) | \Phi_0$ в действительности не соответствует локализованному в точке x электрону.

Эту трудность, однако, можно преодолеть, если образовать соответствующим образом определенное скалярное произведение обеих сторон равенства (14.59) с локализованными амплитудами Ньютона — Вигнера. Так как к таким скалярным произведениям можно перейти на любой стадии вычислений, то мы не будем больше касаться этого вопроса. Далее, равенству (14.59) можно придать вид

$$K_+^A(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{i'}^t d^4x_1 \int_{i'}^t d^4x_2 \dots \int_{i'}^t d^4x_n \times \\ \times \langle \Phi_0 | T \{ \psi(x) N(\tilde{\psi}(x_1) A^e(x_1) \psi(x_1)) \dots \\ \dots N(\tilde{\psi}(x_n) A^e(x_n) \psi(x_n)) \tilde{\psi}(x') \} | \Phi_0 \rangle_C, \quad (14.61)$$

где индекс C означает, что следует рассматривать только связанные диаграммы. Множители $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x')$ можно внести в скобки, поставив



Ф и г. 39.

их на указанные места, поскольку это расположение соответствует хронологическому порядку.

В выражение (14.61) вносят вклад связанные диаграммы, изображенные на фиг. 39. Они приводят к следующему результату:

$$K_+^A(x, x') = K_+(x - x') + ie \int K_+(x - x_1) A^e(x_1) K_+(x_1 - x') d^4x_1 + \\ + (ie)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 K_+(x - x_1) A^e(x_1) K_+(x_1 - x_2) \times \\ \times A^e(x_2) K_+(x_2 - x') + \dots, \quad (14.62a)$$

$$= K_+(x - x') + ie \int K_+(x - x_1) A^e(x_1) K_+^A(x_1, x') d^4x_1. \quad (14.62b)$$

При выводе уравнения (14.62b) мы использовали то, что равенство (14.62a) является разложением Неймана — Лиувилля уравнения (14.62b).

Из сказанного выше, вообще говоря, следует, что если начальное одноэлектронное состояние есть

$$|\Phi_i\rangle = \int_{\sigma(x')=i'} \tilde{\psi}(x') \gamma_\mu f(x') d\sigma^\mu(x') |\Phi_0\rangle, \quad (14.63)$$

а конечным состоянием является

$$|\Phi_f\rangle = \int_{\sigma(x)=t} \tilde{\psi}(x) \gamma_\mu g(x) d\sigma^\mu(x) |\Phi_0\rangle, \quad (14.64)$$

то амплитуда перехода дается выражением

$$R_{fi} = \int_{\sigma'} d\sigma^\mu(x) \int_{\sigma} d\sigma^\nu(x') \tilde{g}(x) \gamma_\mu K_+^A(x, x') \gamma_\nu f(x'). \quad (14.65)$$

Таким образом, ядро K_+^A может рассматриваться как ядро интегрального соотношения, распространяющего начальную амплитуду f на поверхность σ' :

$$f_\sigma(x) = \int_{\sigma'} d\sigma^\mu(x') K_+^A(x, x') \gamma_\mu f(x'), \quad (14.66)$$

и амплитуда перехода дается скалярным произведением

$$(g_\sigma, f_\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_\mu(x) \tilde{g}_\sigma(x) \gamma^\mu f_\sigma(x), \quad (14.67)$$

где $g_\sigma = g$. Фейнман [254] пришел к такому же точно выражению при рассмотрении функции Грина $G^A(x, x')$, которая связывает решения уравнения Дирака во внешнем поле A^e в два разных момента времени. Доводы, основанные на теории дырок, позволили ему заключить, что правильно выбранная функция Грина должна содержать только положительные частоты при $t > t'$, что приводит к соотношению $G^A = K_+^A$. Под функцией Грина уравнения Дирака во внешнем поле понимают решение уравнения

$$[i\gamma_\mu(\partial^\mu - ieA^{e\mu}(x)) - m] G^A(x, x') = i\delta^{(4)}(x - x'). \quad (14.68)$$

Если φ есть решение уравнения

$$[i\gamma_\mu(\partial^\mu - ieA^{e\mu}(x)) - m] \varphi(x) = 0, \quad (14.69)$$

то теорема Гаусса утверждает, что для точек x , которые находятся внутри объема Ω , ограниченного поверхностью σ :

$$\varphi(x) = \int_{\sigma} G^A(x, x') \gamma_\mu \varphi(x') n^\mu(x') d\sigma(x'). \quad (14.70)$$

При помощи уравнения (14.62) легко проверить, что функция K_+^A удовлетворяет дифференциальному уравнению (14.68). Далее, из-за свойств неоднородного члена K_+ и ядра $K_+ A^e$ в уравнении (14.62) функция K_+^A содержит только положительные частоты при $x_0 > x'_0$, если A^e есть слабое внешнее поле. Сказанное выше показывает, что использование ядра K_+^A дает интерпретацию уравнения Дирака в духе теории дырок и позволяет обойтись без формализма теории поля в задачах о взаимодействии позитронов и электронов с внешними полями.

Представленная выше теория взаимодействия электронов и позитронов с внешним полем основывалась на разложении S -матрицы в ряд теории возмущений (14.1). Однако для достаточно слабых не зависящих от времени внешних полей можно дать точное формальное решение (см., например, статьи Швингера [718, 721]). Пусть φ_n будут s -числовые решения уравнения Дирака во внешнем поле:

$$[i\gamma_\mu(\partial^\mu - ieA^{e\mu}(x)) - m] \varphi_n(x) = 0, \quad (14.71)$$

где индекс n характеризует полный набор коммутирующих наблюдаемых для одной частицы. Ниже мы всегда будем предполагать, что не зависящее от времени поле достаточно слабое, так что состояния с положи-

тельными и отрицательными энергиями разделены конечным интервалом. Если это не будет так, то не будет и стабильного вакуума.

Гейзенберговский оператор $\psi^e(x)$, который удовлетворяет уравнению движения

$$[i\gamma_\mu(\partial^\mu - ieA^{\mu e}(x)) - m]\psi^e(x) = 0, \quad (14.72)$$

можно разложить по функциям $\varphi_n(x)$:

$$\psi^e(x) = \sum_{(n', E_+)} b_{n'}^e \varphi_n(x) + \sum_{(n', E_-)} d_{n'}^e{}^* \varphi_n(x), \quad (14.73)$$

где первое суммирование проводится только по функциям с положительной энергией, а второе — только по функциям с отрицательной энергией. Из канонических перестановочных соотношений

$$[\psi^e(x), \tilde{\psi}^e(x')]_+ \Big|_{x_0=x'_0} = \gamma^0 \delta^{(3)}(x - x') \quad (14.74)$$

и свойств ортогональности решений $\varphi_n(x)$ следует, что операторы $b_{n'}^e, d_{n'}^e, \dots$ удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям, как и в случае свободных полей:

$$\begin{aligned} [b_{n'}^e, b_{n''}^e{}^*]_+ &= \delta_{nn'}, \\ [b_{n'}^e, d_{n''}^e{}^*]_+ &= [d_{n'}^e, b_{n''}^e{}^*]_+ = 0 \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (14.75)$$

Оператор тока дается выражением

$$j_\mu^e(x) = -\frac{e}{2} [\tilde{\psi}^e(x) \gamma_\mu \psi^e(x)], \quad (14.76)$$

и в силу уравнений движения его дивергенция равна нулю. Из перестановочных соотношений для оператора полного заряда

$$Q = -\frac{e}{2} \int d^3x [\tilde{\psi}^e(x) \gamma^0 \psi^e(x)] \quad (14.77)$$

с операторами ψ^e и $\tilde{\psi}^e$ вытекает интерпретация ψ^e как оператора уничтожения для частицы с зарядом $-e$ и оператора рождения для частицы с зарядом $+e$. Гамильтониан, так же как и оператор заряда, диагонален по операторам $b_{n'}^e$ и $d_{n'}^e{}^*$. Это позволяет интерпретировать операторы $b_{n'}^e$ и $d_{n'}^e{}^*$ как операторы уничтожения отрицательно заряженной и положительно заряженной частиц соответственно в состоянии n . Состояние вакуума $|\Phi^e_0\rangle$ определяется как состояние с наименьшей энергией и удовлетворяет соотношениям

$$d_{n'}^e |\Phi^e_0\rangle = b_{n'}^e |\Phi^e_0\rangle = 0 \text{ для всех } n. \quad (14.78)$$

Если $|\Phi^e_1\rangle$ — одноэлектронное состояние, то единственной не равной нулю амплитудой будет

$$\chi(x) = \langle \Phi^e_0 | \psi^e(x) | \Phi^e_1 \rangle. \quad (14.79)$$

Эта амплитуда удовлетворяет уравнению Дирака (14.71) во внешнем поле, поскольку ему удовлетворяет оператор $\psi^e(x)$. Далее, используя разложение (14.73) и соотношение $\langle \Phi^e_0 | d_{n'}^e{}^* = 0$, замечаем, что амплитуда χ является суперпозицией решений с положительной энергией:

$$\chi(x) = \sum_{n', E_+} \langle \Phi^e_0 | b_{n'}^e | \Phi^e_1 \rangle \varphi_{n', E_+}(x). \quad (14.80)$$

Функция распространения K_+^A приобретает наиболее простой вид, если выразить ее через гейзенберговские операторы ψ^e :

$$K_+^A(x, x') = (\Phi_0^e, T(\psi^e(x) \tilde{\psi}^e(x')) \Phi_0^e) \quad (14.81a)$$

$$= \begin{cases} \sum_{n', E+} \varphi_n(x) \tilde{\varphi}_n(x') & \text{при } x_0 > x'_0, \\ - \sum_{n', E-} \varphi_n(x) \tilde{\varphi}_n(x') & \text{при } x_0 < x'_0. \end{cases} \quad (14.81b)$$

§ 2. Диаграммы Фейнмана для взаимодействующих полей

Рассмотрим теперь теорию нейтрального псевдоскалярного поля, взаимодействующего с полем со спином, равным $1/2$, посредством псевдоскалярной связи. Плотность лагранжиана дается выражением

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{2} G [\tilde{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x)] \varphi(x). \quad (14.82a)$$

Плотность гамильтониана в картине взаимодействия можно записать в виде

$$\mathcal{H}_I(x) = GN \tilde{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \varphi(x). \quad (14.82b)$$

В этом случае матричные элементы S -матрицы в первом порядке теории возмущений равны нулю, поскольку энергия и импульс не могут сохраняться в акте испускания и поглощения свободного мезона свободным нуклоном. Поэтому исследуем матричный элемент второго порядка:

$$S^{(2)} = \left(-\frac{iG}{\hbar c} \right)^2 \frac{1}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \{ N(\tilde{\psi}(x_1) \gamma_5 \psi(x_1)) N(\tilde{\psi}(x_2) \gamma_5 \psi(x_2)) \} \times \\ \times T(\varphi(x_1) \varphi(x_2)). \quad (14.83)$$

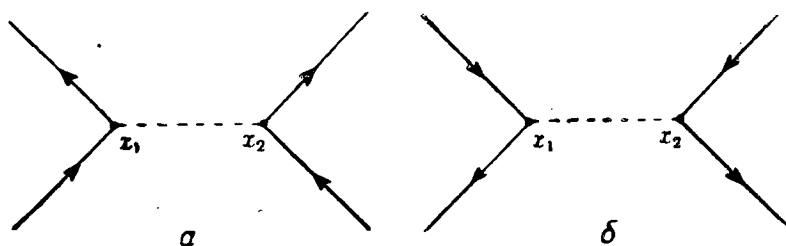
Мы отдельно записали T -произведения для нуклонных и мезонных операторов, что можно сделать, так как они коммутируют друг с другом. Ранее было показано, что спаривание $\tilde{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x)$ равно нулю. Поэтому разложение T -произведений фермионных операторов фактически совпадает с разложением (14.2). Таким образом, нужно рассмотреть только мезонные операторы. Используя теорему Вика, получаем

$$T(\varphi(x_1) \varphi(x_2)) = N(\varphi(x_1) \varphi(x_2)) + \frac{1}{2} \hbar c \Delta_F(x_1 - x_2). \quad (14.84)$$

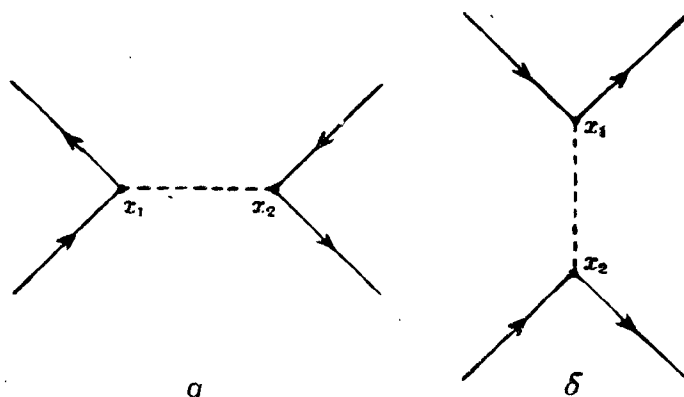
Будем представлять спаривание бозонных множителей $\varphi(x_1) \varphi(x_2)$ пунктирной линией, соединяющей точки x_1 и x_2 , оператор рождения мезона $\varphi^{(-)}(x)$ — пунктирной линией, выходящей из точки x_1 и направленной вверх, а оператор уничтожения мезона $\varphi^{(+)}(x)$ — пунктирной линией, направленной к точке x_1 . Тогда диаграммы на фиг. 40 — 47 будут представлять матричные элементы S -матрицы во втором порядке теории возмущений. Рассмотрим конкретные диаграммы и соответствующие им члены.

1. $N(\tilde{\psi}\psi\tilde{\psi}\psi) N(\varphi\varphi)$. Эти члены равны $(S^{(1)})^2$ и не приводят к реальным процессам, поскольку энергия и импульс не сохраняются.

2. $N(\tilde{\psi}\psi\tilde{\psi}\psi) \varphi^+ \varphi^-$. Эти члены соответствуют обмену бозоном между двумя фермионами и приводят к рассеянию нуклона на нуклоне, аналогичному меллеровскому рассеянию. Для взаимодействия тождественных частиц, кроме двух диаграмм на фиг. 40, следует взять еще две диаграммы, в которых переставлены точки x_1 и x_2 . Это относится к каждой диаграмме

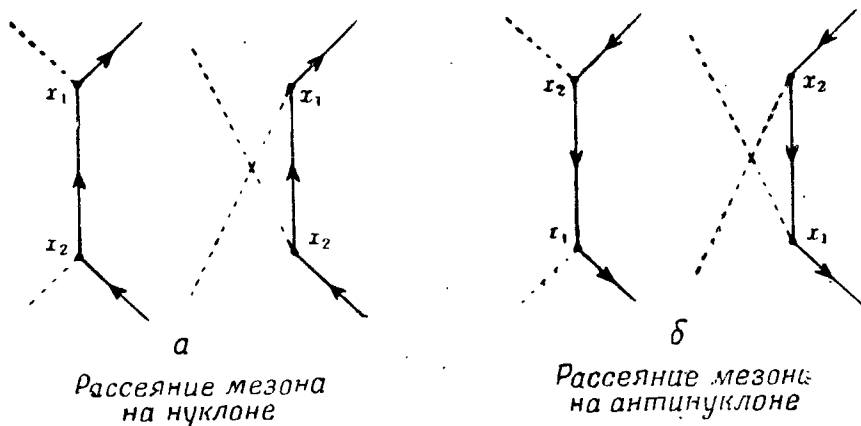


Ф и г. 40.



Ф и г. 41.

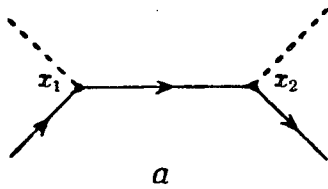
рассматриваемой в этом параграфе, исключая диаграмму на фиг. 46, соответствующую флуктуациям вакуума. Если сложить матричные элементы, соответствующие этим топологически совпадающим диаграммам, то



Ф и г. 42.

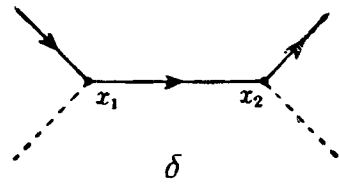
сократится множитель $\frac{1}{2}!$, связанный с разложением в ряд теории возмущений. При вычислении матричного элемента между начальным и конечным состояниями обменное рассеяние будет учтено автоматически.

Во втором порядке теории возмущений рассеянию антинуклона на нуклоне соответствуют две диаграммы на фиг. 41. Вторая диаграмма (фиг. 41, б) возникает вследствие возможности аннигиляции двух частиц



a

Аннигиляция пары нуклон-антинуклон на два мезона



б

Образование нуклонной пары при столкновении двух мезонов

Ф и г. 43.

друг на друге о испусканием виртуального бозона, который рождает затем частицы в конечном состоянии.

Процессы, которые мы только что обсудили, соответствуют наличию в начальном и конечном состояниях двух фермионов.



a

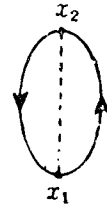


б

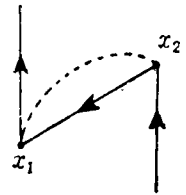
Ф и г. 44.



Ф и г. 45.



Ф и г. 46.



Ф и г. 47.

3. $N(\tilde{\psi}K_+\psi)N(\varphi\varphi)$. Матричный элемент $S^{(2)}$ содержит также ряд членов, отвечающих различным процессам с одним бозоном и одним фермионом в начальном и конечном состояниях. Соответствующие этим процессам диаграммы *a* и *б* показаны на фиг. 42. Член $N(\tilde{\psi}K_+\psi)N(\varphi\varphi)$ приводит, кроме того, к процессам, диаграммы *a* и *б* для которых изображены на фиг. 43.

4. $N(\tilde{\psi}K_+\psi)\varphi\varphi$. Этот член описывает безмезонные процессы с участием одного фермиона и приводит к диаграммам собственной энергии фермионов (фиг. 44). Он будет подробно рассмотрен позже.

5. $N(\varphi\varphi)K_+K_+$. Этот член относится к случаю, когда в начальном и конечном состояниях имеется один мезон и нет нуклонов. Он описывает собственную энергию мезона, представляемую диаграммой на фиг. 45.

6. Наконец, имеется член $K_+K_+\Delta_F$, диаграмма Фейнмана для которого дана на фиг. 46. Эта диаграмма соответствует флуктуациям вакуума.

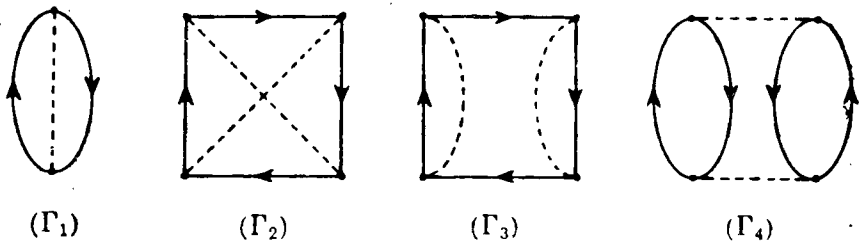
Может быть, следует еще раз подчеркнуть, что хронологическая последовательность промежуточных состояний не существенна. Так, диаграмма на фиг. 47 есть частный случай диаграммы фиг. 44, *a*, когда $x_{10} < x_{20}$. Другими словами, можно как угодно деформировать диаграмму Фейнмана, заботясь только о том, чтобы сохранялось правильное направление внешних линий, относящихся к начальному и конечному состояниям.

На фиг. 48 приведены примеры вакуумных процессов. Эти вакуумные диаграммы снова можно не рассматривать.

Доказательство: Полный вклад от всех вакуумных процессов дается матричным элементом $\langle \Phi_0 | S | \Phi_0 \rangle = M_V$. В матричный элемент M_V вносят вклад те диаграммы, которые не имеют внешних линий. В общем случае вакуумная диаграмма состоит из нескольких не связанных между собой кусков. Обозначим через $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$ элементарные связанные вакуумные диаграммы, т. е. такие диаграммы, которые можно обойти, двигаясь только по внутренним линиям. Тогда наиболее общая диаграмма вакуумных флуктуаций будет образована из n_1 диаграмм типа Γ_1, n_2 диаграмм типа Γ_2 и т. д. Вклад в M_V от диаграммы $\Gamma = n_1 \Gamma_1 + n_2 \Gamma_2 + \dots$ будет равен

$$\langle \Phi_0 | S_\Gamma | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | S_{\Gamma_1} | \Phi_0 \rangle^{n_1} \langle \Phi_0 | S_{\Gamma_2} | \Phi_0 \rangle^{n_2} \dots, \quad (14.85)$$

где $\langle \Phi_0 | S_{\Gamma_1} | \Phi_0 \rangle$ — матричный элемент, соответствующий диаграмме Γ_1 . Тот факт, что вклады от диаграмм $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ просто перемножаются,



Ф и г. 48.

следует из несвязности рассматриваемой диаграммы. Если диаграмма содержит несколько тождественных частей, то не все члены семейства будут различны, так как перестановка индексов их вершин будет приводить к тем же диаграммам. Отсюда следует, что полная амплитуда перехода вакуума в вакуум дается соотношением

$$\begin{aligned} M_V = \langle \Phi_0 | S | \Phi_0 \rangle &= \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{1}{n_1! n_2! \dots} \langle \Phi_0 | S_{\Gamma_1} | \Phi_0 \rangle^{n_1} \langle \Phi_0 | S_{\Gamma_2} | \Phi_0 \rangle^{n_2} \dots = \\ &= e^{\langle \Phi_0 | S_{\Gamma_1} | \Phi_0 \rangle} e^{\langle \Phi_0 | S_{\Gamma_2} | \Phi_0 \rangle} \dots = e^{\langle \Phi_0 | S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2} + \dots | \Phi_0 \rangle} = e^{\langle \Phi_0 | S | \Phi_0 \rangle_C} = e^{-L}, \end{aligned} \quad (14.86)$$

где через $\langle \Phi_0 | S | \Phi_0 \rangle_C$ обозначен вклад от всех связанных диаграмм. Величина L чисто мнимая, так что вероятность вакууму остаться вакуумом равна единице.

Если сосредоточить внимание на каком-либо реальном процессе рассеяния, например на процессе, изображенном диаграммой на фиг. 40 и имеющем матричный элемент M , то в высших порядках теории возмущений эта же самая диаграмма будет появляться в сопровождении несвязанных с ней вакуумных диаграмм. Суммируя по всем вакуумным процессам, мы просто умножим матричный элемент M на $\exp(-L)$ — фазовый множитель, абсолютная величина которого равна единице. Поэтому можно не рассматривать все несвязные диаграммы.

Методом, аналогичным описанному выше для матричного элемента второго порядка, можно установить взаимно однозначное соответствие между матричными элементами n -го порядка S -матрицы в нормальной

форме и диаграммами Фейнмана с n вершинами, идентифицированными с пространственно-временными точками x_1, x_2, \dots, x_n . Так как разложение T -произведения включает все возможные спаривания, то подобным же образом существует взаимно однозначное соответствие между всеми возможными диаграммами с данным числом n вершин (идентифицированных с пространственно-временными точками) и нормальным разложением S -матрицы в n -м порядке теории возмущений.

Благодаря этому соответствию применение диаграмм Фейнмана оказывается чрезвычайно полезным. На практике вычерчивают все возможные топологически различные¹⁾ диаграммы в соответствии с видом гамильтониана взаимодействия. Если последний имеет вид $\tilde{\psi}\Gamma\psi$, то в каждой вершине должны встречаться две фермионные и одна бозонная линии. Тогда можно получить матричный элемент, соответствующий любой диаграмме n -го порядка, выписывая следующие множители:

1. Множитель $(-i/\hbar c)^n$ для диаграмм в целом, согласно разложению по теории возмущений.

2. Множитель $(G\Gamma)_{\alpha\beta}$ для каждой вершины.

3. Множитель $\frac{1}{2}\hbar c\Delta_F(x_j - x_l)$ для внутренней бозонной линии, соединяющей точки x_j и x_l .

4. Множитель $[-\frac{1}{2}S_F(x_l - x_j)]_{\alpha\beta} = [K_+(x_l - x_j)]_{\alpha\beta}$ для внутренней фермионной линии, направленной от точки x_j к точке x_l . Предполагается, что имеются соответствующий вершине x_l множитель $(G\Gamma)_{\alpha\alpha}$ и соответствующий вершине x_j множитель $(G\Gamma)_{\beta\beta}$.

5. Правильно выбранные операторы рождения и уничтожения $\psi^{(\pm)}(x)$, $\bar{\psi}^{(\pm)}(x)$ и $\varphi^{(\pm)}(x)$ для каждой свободной внешней нуклонной и бозонной линии, выходящей из точки x или приходящей в эту точку.

6. Множитель (-1) для каждой внутренней замкнутой фермионной петли.

7. Полученное выражение нужно проинтегрировать по x_1, x_2, \dots, x_n .

Если квантованное бозе-поле является электромагнитным (волнистые линии на диаграмме), то правила 2 и 3 следует заменить следующими:

2а. Множитель $(e\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ для каждой вершины.

3а. Множитель $-\frac{1}{2}\hbar c D_F(x_j - x_l)g_{\mu\nu}$ для внутренней фотонной линии, соединяющей точки x_j и x_l . Предполагается, что имеются множители $(e\gamma^\mu)$ и $(e\gamma^\nu)$ для этих вершин, и подразумевается суммирование по μ и ν .

Следует подчеркнуть, что формула

$$(\Phi_0, T(A_\mu(x) A_\nu(x')) \Phi_0) = -\frac{1}{2} \hbar c D_F(x - x') g_{\mu\nu} \quad (14.87a)$$

соответствует частному выбору калибровки для электромагнитных потенциалов. Путем изменения калибровки можно изменить правую часть формулы (14.87a) и записать

$$(\Phi'_0, T(A_\mu(x) A_\nu(x')) \Phi'_0) = -\frac{1}{2} (g_{\mu\nu} + \lambda \partial_\mu \partial_\nu \square^{-2}) \hbar c D_F(x - x'), \quad (14.87б)$$

где λ — произвольная постоянная. Частный вид этой формулы при $\lambda = -1$

$$(\Phi'_0, T(A_\mu(x) A_\nu(x')) \Phi_0) = -\frac{1}{2} (g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \square^{-2}) \hbar c D_F(x - x') \quad (14.87в)$$

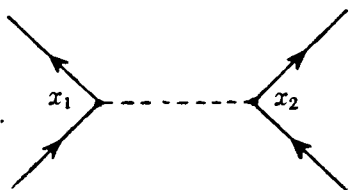
¹⁾ Т. е. диаграммы, отличающиеся только перестановкой индексов вершин, не считаются различными.

часто бывает удобен, так как при таком выборе калибровки правая часть равенства (14.87а) оказывается поперечной, т. е.

$$\partial^\mu (\Phi'_0 | T (A_\mu(x) A_\nu(x')) \Phi_0) = 0.$$

Мы будем называть калибровку, в которой функция распространения фотона дается правой частью равенства (14.87в), поперечной калибровкой, или калибровкой Ландау.

Далее, в правиле 4 следует заменить $G\gamma$ на $e\gamma^\mu$, а в правиле 5 заменить ϕ на A_μ , причем индекс μ совпадает с индексом γ -матрицы, действующей в этой вершине. Строго говоря, когда мы имеем дело с электромагнитным полем, следует учитывать дополнительное условие. Однако если ограничиться рассмотрением задач рассеяния, в которых начальное и конечное состояния являются «голыми» состояниями, относящимися к моментам времени $t = \pm \infty$, то обсуждение и формализм, изложенные в гл. 8, могут быть использованы *полностью*, поскольку эволюция системы описывается



Ф и г. 49

в терминах таких «голых» состояний. Поэтому при исследовании задач рассеяния не нужно беспокоиться о каких-либо модификациях дополнительного условия (в этой связи см. работу Кестера и Яуха [139]).

Отметим, что при перечислении множителей не упоминался множитель $1/n!$, поскольку мы касались только топологически различных диаграмм. Ясно, что имеется $n!$ перестановок точек x_1, \dots, x_n между собой, которые не изменяют топологической структуры диаграммы, т. е. при которых диаграмма остается такой же, если не считать наименования точек. Последнее замечание не применимо к диаграммам вакуумных флуктуаций, но, как отмечалось выше, вакуумные диаграммы не нужно рассматривать.

В проведенном выше анализе не использовался тот факт, что при отсутствии внешних полей полная энергия и импульс системы полей сохраняются при столкновениях. Поэтому следует ожидать значительных упрощений при переходе к импульсному пространству.

§ 3. Диаграммы Фейнмана в импульсном пространстве

Для иллюстрации методов, применяемых в импульсном пространстве, рассмотрим рассеяние двух фермионов. При помощи установленных в предыдущем параграфе правил легко записать оператор, соответствующий диаграмме на фиг. 49. Он дается выражением

$$S_{NN}^{(2)} = \left(-\frac{i}{\hbar c}\right)^2 G^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \times \\ \times N \left(\bar{\psi}^{(+)}(x_1) \Gamma \psi^{(+)}(x_1) \frac{\hbar c}{2} \Delta_F(x_1 - x_2) \bar{\psi}^{(+)}(x_2) \Gamma \psi^{(+)}(x_2) \right). \quad (14.88)$$

Отметим снова, что в равенстве (14.88) нет множителя $1/2!$, поскольку имеется $2!$ диаграммы указанного типа, а именно диаграмма на фиг. 49 и такая же диаграмма с переставленными точками x_1 и x_2 . Чтобы получить амплитуду вероятности для этого процесса, мы должны взять матричный элемент от оператора $S_{NN}^{(2)}$ между начальным и конечным

состояниями $|\Phi_i\rangle$ и $|\Phi_f\rangle$. Пусть этими состояниями будут

$$|\Phi_i\rangle = b_{s_1}^*(\mathbf{p}_1) b_{r_1}^*(\mathbf{q}_1) |\Phi_0\rangle \quad (14.89a)$$

и

$$|\Phi_f\rangle = b_{s_2}^*(\mathbf{p}_2) b_{r_2}^*(\mathbf{q}_2) |\Phi_0\rangle, \quad (14.89b)$$

где $\mathbf{p}_1 s_1$, $\mathbf{q}_1 r_1$ и $\mathbf{p}_2 s_2$, $\mathbf{q}_2 r_2$ — импульсы и спиновые индексы нуклонов до и после столкновения соответственно. На основании анализа, аналогично проведенному в § 1 [равенства (14.7) — (14.12)], можно считать, что множитель $\overline{\psi}^{(+)}(x_1) \Gamma \psi^{(+)}(x_1)$ уничтожает частицу, характеризуемую переменными $\mathbf{p}_1 s_1$ с волновой функцией $\overline{\omega}^{s_1}(\mathbf{p}_1)$, и рождает частицу $\mathbf{p}_2 s_2$ с волновой функцией $\overline{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2)$. Оператор $\overline{\psi}^{(+)}(x_2) \Gamma \psi^{(+)}(x_2)$ дает то же самое для частиц, характеризующихся переменными $\mathbf{q} r$. Кроме того, оператор $S^{(2)}$ приводит также к матричному элементу для обменного рассеяния, в котором волновые функции двух частиц в конечном состоянии переставлены. Точная структура обоих этих членов получается при вычислении матричного элемента

$$\langle \Phi_f, N \overline{\psi}^{(+)} \Gamma \psi^{(+)}(x_1) \overline{\psi}^{(+)} \Gamma \psi^{(+)}(x_2) \Phi_i \rangle.$$

С другой стороны, в выражении (14.88) можно сразу же заменить операторы $\overline{\psi}^{(+)}(x)$ и $\psi^{(+)}(x)$ волновыми функциями тех свободных частиц, которые они рождают или уничтожают:

$$\overline{\psi}^{(+)}(x_1) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \overline{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2) e^{i p_2 \cdot x_1} \left(\frac{M}{E(\mathbf{p}_2)} \right)^{1/2} \quad (14.90a)$$

и

$$\psi^{(+)}(x_1) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1) e^{-i p_1 \cdot x_1} \left(\frac{M}{E(\mathbf{p}_1)} \right)^{1/2}, \quad (14.90b)$$

где $p_i^2 = p_i^2 = M^2$ и $p_{0i} = E(\mathbf{p}_i) = (\mathbf{p}_i^2 + M^2)^{1/2}$.

Матричный элемент для необменного рассеяния тогда приобретает вид (множители \hbar и c включены)

$$\begin{aligned} R = & \left(-\frac{iG}{\hbar c} \right)^2 \hbar c \frac{1}{(2\pi)^4 (2\pi)^6} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^4 k \times \\ & \times \left(\frac{M^4}{E(\mathbf{p}_1) E(\mathbf{p}_2) E(\mathbf{q}_1) E(\mathbf{q}_2)} \right)^{1/2} e^{i(p_2 - p_1) \cdot x_1} e^{i(q_2 - q_1) \cdot x_2} e^{-i k \cdot (x_2 - x_1)} \times \\ & \times \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} [\overline{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2) \Gamma \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1)] [\overline{\omega}^{r_2}(\mathbf{q}_2) \Gamma \omega^{r_1}(\mathbf{q}_1)]. \quad (14.91) \end{aligned}$$

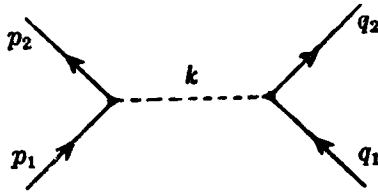
Матричный элемент для обменного рассеяния R_{ex} получается перестановкой в матричном элементе $-R$ волновых функций двух частиц в конечном состоянии:

$$\begin{aligned} R_{ex} = & - \left(-\frac{iG}{\hbar c} \right)^2 \hbar c \frac{1}{(2\pi)^4 (2\pi)^6} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^4 k \times \\ & \times \left(\frac{M^4}{E(\mathbf{p}_1) E(\mathbf{p}_2) E(\mathbf{q}_1) E(\mathbf{q}_2)} \right)^{1/2} e^{i(q_2 - p_1) \cdot x_1} e^{i(p_2 - q_1) \cdot x_2} e^{-i k \cdot (x_2 - x_1)} \times \\ & \times \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} [\overline{\omega}^{r_2}(\mathbf{q}_2) \Gamma \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1)] [\overline{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2) \Gamma \omega^{r_1}(\mathbf{q}_1)]. \quad (14.92) \end{aligned}$$

Проводя указанные интегрирования по переменным x_1 и x_2 , мы получаем для матричного элемента R следующее выражение:

$$R = -\frac{i}{\pi} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \int d^4k \delta^{(4)}(p_2 - p_1 - k) \delta^{(4)}(q_2 - q_1 - k) \times \\ \times [\tilde{w}^{s_2}(p_2) \Gamma w^{s_1}(p_1)] [\tilde{w}^{r_2}(q_2) \Gamma w^{r_1}(q_1)] \times \\ \times \left(\frac{M^4}{E(p_1) E(p_2) E(q_1) E(q_2)} \right)^{1/2} \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \quad (14.93)$$

Мы намеренно оставляем матричный элемент в виде (14.93), в котором его можно легко интерпретировать. Мы можем представить себе (фиг. 50), что падающий нуклон с импульсом p_1 и спиновым индексом s_1 [волновая функция $w^{s_1}(p_1)$] испускает (множитель Γ) бозон с импульсом k и переходит в конечное состояние с импульсом p_2 и спиновым индексом s_2 [волновая функция $w^{s_2}(p_2)$].



Ф и г. 50.

Дельта-функция $(2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1 + k)$, возникающая при интегрировании по переменной x_1 , говорит о сохранении энергии и импульса в акте излучения. При этом нуклон переходит в состояние с импульсом $p_2 = p_1 - k$. Аналогично, второй нуклон с импульсом q_1 [волновая функция

$w^{r_1}(q_1)$] поглощает (множитель Γ) испущенный первым нуклоном квант и переходит в конечное состояние [волновая функция $w^{r_2}(q_2)$]. Наличие дельта-функции $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_2 - q_1 - k)$ указывает на сохранение энергии и импульса в этом процессе¹⁾. Функция распространения для бозонов

есть $\frac{\hbar c}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}$, и нужно проинтегрировать по всем виртуальным квантам, т. е. по внутренним линиям. Величина $\left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right)^4 \left(\frac{M^4}{E(p_1) E(p_2) E(q_1) E(q_2)} \right)^{1/2}$ есть произведение нормировочных множителей для волновых функций нуклонов. Наконец, все выражение умножается на множитель $(-i/\hbar c)^2$, возникающий при разложении в ряд теории возмущений.

В данном выше примере можно проинтегрировать по импульсу k и получить окончательный вид для матричного элемента

$$R = -\frac{i}{\pi} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \delta^{(4)}(p_2 + q_2 - p_1 - q_1) \left(\frac{M^4}{E(p_1) E(p_2) E(q_1) E(q_2)} \right)^{1/2} \times \\ \times \frac{[\tilde{w}^{s_2}(p_2) \Gamma w^{s_1}(p_1)] [\tilde{w}^{r_2}(q_2) \Gamma w^{r_1}(q_1)]}{(q_2 - q_1)^2 - \mu^2}. \quad (14.94)$$

Дельта-функция $\delta^{(4)}$ снова выражает сохранение полной энергии и полного импульса в этом процессе.

В качестве второго иллюстративного примера рассмотрим во втором порядке теории возмущений собственную энергию нуклона, соответствующую диаграмме Фейнмана на фиг. 51. Описываемый этой диаграммой

1) В старой теории возмущений энергия не сохранялась в промежуточных состояниях, хотя импульс и масса сохранялись. В теории возмущений Фейнмана — Дайсона энергия и импульс сохраняются, но масса (включая инвариантную величину) не сохраняется. В этом кроется причина инвариантного характера теории возмущений Фейнмана (см. статьи Умэдзавы и Кавабе [788, 791]).

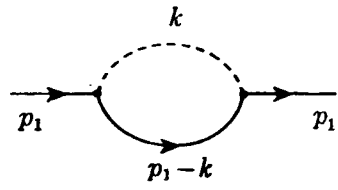
оператор дается выражением

$$S_{SE}^{(2)} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{iG}{\hbar c} \right)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \times \\ \times N [\tilde{\psi}(x_1) \Gamma S_F(x_1 - x_2) \Gamma \psi(x_2)] \frac{\hbar c}{2} \Delta_F(x_1 - x_2). \quad (14.95)$$

Матричный элемент оператора $S_{SE}^{(2)}$ между однонуклонными состояниями с импульсами p_1 и p_2 запишется в виде

$$R' = \left(-\frac{iG}{\hbar c} \right)^2 \left(\frac{1}{(2\pi)^4} \right)^2 \frac{\hbar c}{(2\pi)^3} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4q \int d^4k \times \\ \times \left(\frac{M^2}{E(p_1)E(p_2)} \right)^{1/2} \exp [ip_2 \cdot x_1 - iq \cdot (x_1 - x_2) - ik \cdot (x_1 - x_2) - ip_1 \cdot x_2] \times \\ \times \tilde{\omega}^s(p_2) \Gamma \frac{\gamma \cdot q + M}{q^2 - M^2 + i\epsilon'} \Gamma \omega^r(p_1) \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} = \\ = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{G^2}{4\pi\hbar c} \right) \int d^4k \int d^4q \left(\frac{m^2}{E(p_1)E(p_2)} \right)^{1/2} \delta^{(4)}(p_2 - q - k) \times \\ \times \delta^{(4)}(p_1 - k - q) \tilde{\omega}^s(p_2) \Gamma \frac{\gamma \cdot q + M}{q^2 - M^2 + i\epsilon'} \Gamma \omega^r(p_1) \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (14.96)$$

Этот матричный элемент снова можно легко интерпретировать при помощи диаграммы Фейнмана в импульсном пространстве (см. фиг. 51). Нуклон с импульсом p_1 и спиновым индексом r [множитель $\omega^r(p_1)$] испускает бозон (множитель $G\Gamma$) с импульсом k . Дельта-функция $\delta^{(4)}(p_1 - k - q)$ выражает сохранение энергии и импульса в этом процессе, так что после испускания нуклон движется с импульсом $q = p_1 - k$. Его функция распространения (обратный оператор Дирака) есть $(\gamma \cdot q - M + i\epsilon)^{-1}$. Виртуальный мезон с импульсом k , функция распространения которого есть $(k^2 - \mu^2)^{-1}$ (обратный оператор Клейна — Гордона), затем поглощается нуклоном (множитель $G\Gamma$), причем энергия и импульс опять сохраняются [$\delta^{(4)}(p_2 - q - k)$]. Нужно проинтегрировать по всем виртуальным квантам (внутренним линиям), т. е. по импульсам q и k . Интегрирование по импульсу q приводит к



Ф и г. 51.

$$R' = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^{(4)}(p_1 - p_2) \left(\frac{M}{E(p_1)} \right) \left(\frac{G^2}{4\pi\hbar c} \right) \int d^4k \times \\ \times \tilde{\omega}^s(p_2) \Gamma \frac{\gamma \cdot (p_2 - k) + M}{(p_2 - k)^2 - M^2 + i\epsilon} \Gamma \omega^r(p_1) \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (14.97)$$

Функция $\delta^{(4)}(p_2 - p_1)$ снова соответствует сохранению импульса и энергии в процессе в целом. Энергия и импульс нуклона должны быть одинаковыми до и после процесса, так как в противном случае матричный элемент обращается в нуль. Существует только диагональный матричный элемент, для которого $p_1s \rightarrow p_1s$. Этот единственный отличный от нуля матричный элемент можно переписать в несколько иной форме, если учесть, что в данном случае операторы рождения и уничтожения рождают

и уничтожают частицы с одинаковыми энергиями и импульсами, так что в равенство (14.95) можно подставить

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(x_1) &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{M}{E(\mathbf{p})}\right)^{1/2} \tilde{w}^s(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot x_1}, \\ \psi(x_2) &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{M}{E(\mathbf{p})}\right)^{1/2} w^s(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot x_2}.\end{aligned}\quad (14.98)$$

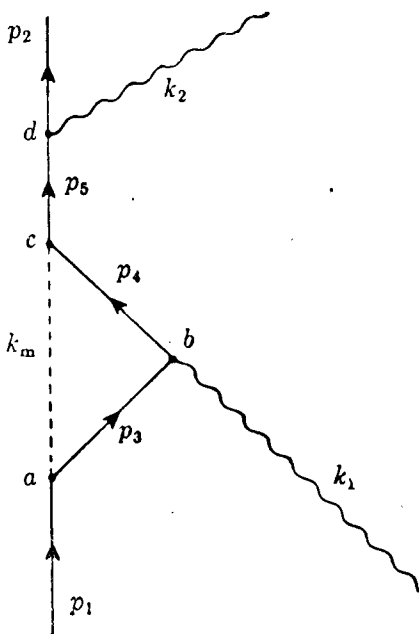
Интегрирование по переменным x_1 и x_2 в (14.96) можно теперь заменить интегрированием по переменным $x_1 - x_2$ и $x_1 + x_2$. Последнее интегрирование приводит к величине VT — пространственно-временному объему, на который распространяется интеграл. Поэтому мы получаем следующее выражение для матричного элемента:

$$\begin{aligned}R' &= \frac{1}{4\pi^3} \left(\frac{G^2}{4\pi\hbar c}\right) \frac{V}{(2\pi)^3} T \left(\frac{M}{E(\mathbf{p})}\right) \times \\ &\times \int d^4k \tilde{w}^s(\mathbf{p}) \Gamma \frac{\gamma \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}) + M}{(p-k)^2 - M^2 + i\epsilon} \times \\ &\times \Gamma w^s(\mathbf{p}) \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}.\end{aligned}\quad (14.99)$$

Пропорциональность матричного элемента R' объему V обусловлена тем, что спинорные волновые функции были нормированы на все пространство. Если бы мы их нормировали на объем V , то множитель $V/(2\pi)^3$ не появился бы и матричный элемент был бы просто пропорционален времени T . Значение такой зависимости от T будет обсуждено при исследовании собственно энергетических эффектов в гл. 15.

После этих примеров становится ясно, что на самом деле нет необходимости начинать с записи матричного элемента в пространстве координат.

Он может быть сразу же записан в импульсном пространстве. Рассмотрим, например, более сложную диаграмму, изображенную на фиг. 52. В физическом смысле эта диаграмма представляет поправку к комптоновскому рассеянию фотона на нуклоне, обусловленную излучением с последующим поглощением виртуального нейтрального мезона. Фермион (протон), который первоначально находился в свободном состоянии $w^{s_1}(\mathbf{p}_1)$, рассеивается в точке a с испусканием виртуального мезона, затем поглощает падающий световой квант в точке b , поглощает испущенный виртуальный мезон в точке c и, наконец, в точке d испускает конечный световой квант, переходя в свободное состояние $w^{s_2}(\mathbf{p}_2)$. Таким образом, эта диаграмма имеет четыре внешние линии, которые не оканчиваются внутри диаграммы. Эти линии соответствуют фермиону и фотону в начальном и конечном состояниях. Диаграмма содержит также четыре внутренние линии, а именно ab , bc , cd и ac , из которых первые три соответствуют распространению фермиона, а последняя — распространению виртуального мезона. Диаграмма имеет четыре вершины, так что она



Ф и г. 52.

соответствует процессу четвертого порядка, к которому приводит $S^{(4)}$:

$$S^{(4)} = e^2 G^2 \left(\frac{-i}{\hbar c} \right)^4 \frac{1}{4!} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^4 x_3 \int d^4 x_4 \times \\ \times T \{ N(\tilde{\psi} A \psi(x_1)) N(\tilde{\psi} A \psi(x_2)) N(\tilde{\psi} \Gamma \psi \varphi(x_3)) N(\tilde{\psi} \Gamma \psi \varphi(x_4)) \}. \quad (14.100)$$

На фиг. 52 не отмечены направления во времени внутренних фермионных линий. Однако чтобы выписать матричный элемент, мы должны обратить внимание на последовательность, в которой появляются отдельные процессы вдоль фермионной линии (эта последовательность не должна обязательно совпадать с последовательностью во времени). С какого конца диаграммы (по времени) нужно начинать — это вопрос договоренности. Однако стало обычным начинать с конечного состояния и затем двигаться вдоль фермионной линии.

Напомним правила, которые мы вывели из предыдущих примеров. В матричный элемент входят:

- а) множитель $\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma \cdot p - M + i\varepsilon}$ для каждой внутренней нуклонной линии с импульсом p ;
- б) множитель $\frac{i\hbar c}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}$ для каждой внутренней мезонной линии с импульсом k ;
- в) множитель $-\frac{i\hbar c}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} g_{\mu\nu}$ для каждой внутренней фотонной линии с импульсом k , соединяющей вершины, в которых действуют матрицы γ^μ и γ^ν ;
- г) множитель $+e\gamma^\mu$ для испускания или поглощения в вершине виртуального фотона (внутренней фотонной линии) фермионом с зарядом e ;
- д) множитель $G\Gamma$ для испускания или поглощения в вершине виртуального мезона;
- е) множитель $\varepsilon^{(\lambda)}_{\mu}(\mathbf{k}) \frac{(\hbar c)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2|k_0|}}$ для каждой внешней фотонной линии, излучаемой или поглощаемой в вершине, в которой действует матрица γ^μ ; $\varepsilon^{(\lambda)}_{\mu}(\mathbf{k})$ есть 4-вектор поляризации ($\varepsilon_{\mu} \varepsilon^{\mu} = -1$) испущенного или поглощенного фотона с энергией-импульсом k и состоянием поляризации λ ($k_0 = |\mathbf{k}|$; заметим также, что $k_{\mu} \varepsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) = 0$);
- ж) множитель $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{(\hbar c)^{1/2}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}$ для каждого внешнего мезона с энергией $\omega_{\mathbf{k}} = (k^2 + \mu^2)^{1/2}$, который испускается или поглощается нуклоном в вершине, в которой имеется множитель $G\Gamma$;
- з) множитель $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E(\mathbf{p})}} \tilde{\omega}^s(\mathbf{p})$ для каждой внешней нуклонной линии с импульсом \mathbf{p} и спиновым индексом s , выходящей из диаграммы;
- и) множитель $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E(\mathbf{p})}} \omega^s(\mathbf{p})$ для каждой внешней нуклонной линии с импульсом \mathbf{p} и спиновым индексом s , входящей в диаграмму;
- к) множитель $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p' \pm k)$ для каждой вершины, соответствующий сохранению энергии и импульса для всех линий, соединяющихся в данной вершине; p и p' — импульсы фермионных линий, k — импульс внутренней или внешней линии фотона или мезона, кончающихся в этой вершине;
- л) множитель (-1) для каждой замкнутой фермионной петли;

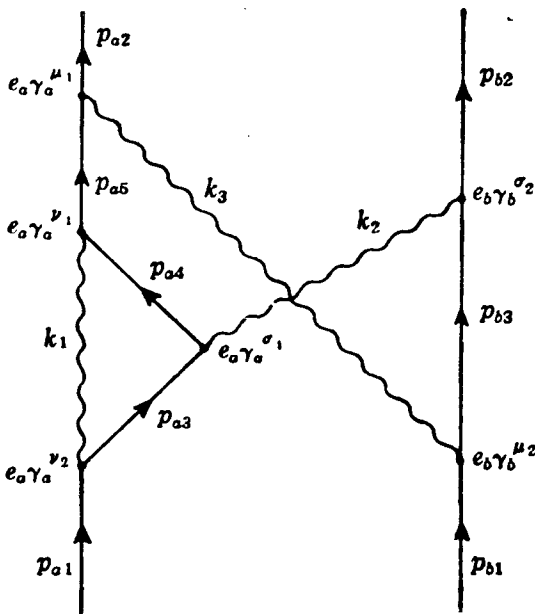
м) множитель $(-i/\hbar c)^n$, соответствующий члену n -го порядка в разложении в ряд теории возмущений;

И, наконец, нужно проинтегрировать по импульсам всех внутренних линий.

Пользуясь этими правилами, можно сразу записать матричный элемент, соответствующий диаграмме на фиг. 52. Он имеет вид

$$\begin{aligned}
 R = & \left(-\frac{i}{\hbar c}\right)^4 \int d^4 k_m \int d^4 p_3 \int d^4 p_4 \int d^4 p_5 [(2\pi)^4]^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_3 - k_m) \times \\
 & \times \delta^{(4)}(p_4 - p_3 - k_1) \delta^{(4)}(p_5 - p_4 - k_m) \delta^{(4)}(p_2 - p_5 + k_2) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{M}{E(p_2)}\right)^{1/2} \times \\
 & \times \tilde{w}^{s_2}(p_2) \frac{(\hbar c)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2} (2|k_2|)^{1/2}} e\gamma^{\nu} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda_2)}(k_2) \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma \cdot p_5 - M + i\varepsilon} G\Gamma \frac{i}{(2\pi)^4} \times \\
 & \times \frac{1}{\gamma \cdot p_4 - M + i\varepsilon} \frac{(\hbar c)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2} (2|k_1|)^{1/2}} e\gamma^{\mu} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda_1)}(k_1) \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma \cdot p_3 - M + i\varepsilon} \times \\
 & \times G\Gamma \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{M}{E(p_1)}\right)^{1/2} w^{s_1}(p_1) \frac{i\hbar c}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_m^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \quad (14.101)
 \end{aligned}$$

При записи этого матричного элемента мы двигались вдоль нуклонной линии, выписывая для каждого встречающегося процесса соответствующие



Ф и г. 53.

ему множителю. Отметим, что испущенный в точке d фотон имеет импульс $-k_2$. Действительно, оператор испускания фотона содержит экспоненциальный множитель $\exp(ik_2 \cdot x)$, и интегрирование по соответствующей переменной x приводит к члену $-k_2$ в аргументе δ -функции. Это согласуется с интуитивным представлением, что для получения конечного импульса нуклона p_2 следует вычесть из импульса p_5 импульс фотона k_2 . Аналогично, поглощенный в точке b фотон имеет импульс $+k_1$ [оператор поглощения содержит множитель $\exp(-ik_1 \cdot x)$]. Знак импульса k_m несуществен, но его следует последовательно использовать в δ -функциях.

Если предположить, что мезон испускается в точке a , то его импульс в этой вершине будет $+k_m$, так что $p_3 + k_m = p_1$. Тогда в точке c он должен поглотиться, и поэтому $p_4 + k_m = p_5$.

В нашем примере ясно, что благодаря наличию δ -функций можно провести три интегрирования по внутренним импульсам. Тогда остающаяся δ -функция снова будет выражать сохранение полной энергии и импульса для внешних линий.

Рассмотрим далее случай двух нетождественных положительно заряженных фермионов, взаимодействующих через электромагнитное поле, как это показано на фиг. 53. При записи матричного элемента, соответствующего этой диаграмме, мы опять будем двигаться вдоль каждой фермионной линии от конечного состояния к начальному. Совершенно не существенно, с какой частицы мы начнем, так как относящиеся к различным частицам операторы коммутируют. Имеет значение, однако, то, что фотонные линии с импульсами k_2 и k_3 пересекаются друг с другом. Это означает, что мы должны внимательно отнестись к расположению вершинных операторов $e\gamma^\mu$ в правильном порядке, так как затем нужно просуммировать по их поляризационным индексам. Применяя установленные выше правила, но различая теперь операторы для двух частиц (например, γ -матрицы) при помощи индексов a и b , мы получаем следующее выражение для матричного элемента процесса:

$$\begin{aligned}
 R = & \left(\frac{-i}{\hbar c} \right)^6 \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \int d^4 k_3 \int d^4 p_{a3} \int d^4 p_{a4} \int d^4 p_{a5} \int d^4 p_{b3} \times \\
 & \times [(2\pi)^4]^6 \delta^{(4)}(k_1 + p_{a3} - p_{a1}) \delta^{(4)}(p_{a4} + k_2 - p_{a3}) \delta^{(4)}(p_{a5} - p_{a4} - k_1) \times \\
 & \times \delta^{(4)}(p_{a2} - p_{a5} - k_3) \delta^{(4)}(p_{b2} - p_{b3} - k_2) \delta^{(4)}(p_{b3} + k_3 - p_{b1}) \times \\
 & \times \left[\left(\frac{M_a}{(2\pi)^3 E(p_{a2})} \right)^{1/2} \tilde{\omega}_a^{s_{a2}}(p_{a2}) e_a \gamma_a^{\mu_1} \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma_a \cdot p_{a5} - M_a + i\epsilon} e_a \gamma_a^{\nu_1} \frac{i}{(2\pi)^4} \times \right. \\
 & \times \left. \frac{1}{\gamma_a \cdot p_{a4} - M_a + i\epsilon} e_a \gamma_a^{\sigma_1} \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\gamma_a \cdot p_{a3} - M_a + i\epsilon)} \left(\frac{M_a}{(2\pi)^3 E(p_{a1})} \right)^{1/2} \omega^{s_{a1}}(p_{a1}) \right] \times \\
 & \times \left[\left(\frac{M_b}{(2\pi)^3 E(p_{b2})} \right)^{1/2} \tilde{\omega}_b^{s_{b2}}(p_{b2}) e_b \gamma_b^{\mu_2} \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma_b \cdot p_{b3} - M_b + i\epsilon} e_b \gamma_b^{\nu_2} \frac{i}{(2\pi)^4} \times \right. \\
 & \times \left. \left(\frac{M_b}{(2\pi)^3 E(p_{b1})} \right)^{1/2} \omega_b^{s_{b1}}(p_{b1}) \right] \times \\
 & \times \left[\frac{-i\hbar c}{(2\pi)^4} \right]^3 g_{\mu_1 \mu_2} \frac{1}{k_3^2 + i\delta} g_{\nu_1 \nu_2} \frac{1}{k_1^2 + i\delta} g_{\sigma_1 \sigma_2} \frac{1}{k_2^2 + i\delta}, \quad (14.102)
 \end{aligned}$$

причем подразумевается суммирование по повторяющимся индексам, что равносильно в данном случае суммированию по поляризациям виртуальных фотонов. Знак, который мы приписываем импульсам k_1 , k_2 и k_3 , снова несуществен, но мы должны быть последовательными при обращении с законом сохранения импульса: если один конец фотонной линии рассматривается как испускание фотона, то другой должен рассматриваться как его поглощение.

Техника Фейнмана непосредственно распространяется на взаимодействия вида $G: \bar{\psi} \Gamma \psi \cdot \phi$. При этом виртуальному мезону, испущенному или поглощенному в вершине, соответствует множитель $G \tau_i \Gamma$. Функция распространения для виртуального мезона между двумя вершинами, в которых стоят матрицы τ_i и τ_j , дается множителем $\delta_{ij} [i(2\pi)^{-4}] \times (k^2 - \mu^2 + i\epsilon)^{-1}$. Должно быть проведено суммирование по индексам i и j . Матрицы τ автоматически учитывают сохранение заряда в каждой вершине. На практике можно также просто следить за тем, какова

нуклонная линия — протонная или нейтронная. Тогда функции распространения нейтральных и заряженных мезонов $i(2\pi)^{-4}(k^2 - \mu^2 + ie)^{-1}$. Однако при такой методике следует проявлять особую осторожность при выборе правильного значения константы связи в π -мезон-нуклонных вершинах: испускание или поглощение заряженного мезона нуклоном имеет константу связи $\sqrt{2}G$, тогда как испускание или поглощение нейтрального мезона протоном имеет константу связи $+G$, а испускание или поглощение нейтрального мезона нейтроном имеет константу связи $-G$.

Чтобы получить правила для диаграмм Фейнмана, описывающих взаимодействие заряженных мезонов с фотонами, напомним, что взаимодействие заряженного бозонного поля с электромагнитным полем описывается лагранжианом взаимодействия, плотность которого есть

$$\mathcal{L}_I(x) = -ieN [\varphi^*(x) \cdot \partial_\mu \varphi(x) - \partial_\mu \varphi^*(x) \cdot \varphi(x)] A^\mu(x) + e^2 N [A_\mu(x) A^\mu(x) \varphi^*(x) \varphi(x)]. \quad (14.103)$$

Если, как и в предыдущих случаях, перейти к картине взаимодействия и ковариантному уравнению Томонага — Швингера, то оказывается, что плотность гамильтониана взаимодействия, получаемая непосредственным применением канонического формализма, не удовлетворяет условию интегрируемости. Канезава и Томонага [420] (см. также статьи Неймана и Фарри [910] и Кивоцита [444, 445]) показали, что правильное ковариантное обобщение плотности гамильтониана взаимодействия дается выражением

$$\mathcal{H}_I(x; \sigma) = N (+ie [\varphi^*(x) \cdot \partial_\mu \varphi(x) - \partial_\mu \varphi^*(x) \cdot \varphi(x)] A^\mu(x) - e^2 \varphi^*(x) \varphi(x) [A_\mu(x) A^\mu(x) - (n_\mu(x) A^\mu(x))^2]) = \mathcal{H}'_I(x) + \mathcal{H}''_I(x; \sigma), \quad (14.104)$$

где n_μ — нормаль к пространственно-подобной поверхности σ в точке x . Отметим, что эта плотность гамильтониана явно зависит от поверхности, так как зависит от нормали $n_\mu(x)$. Она сводится к обычной плотности гамильтониана взаимодействия в случае плоской поверхности $t = \text{const}$, т. е. когда $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$. Зависимость плотности гамильтониана $\mathcal{H}_I(x; \sigma)$ от пространственно-временной поверхности присуща всем связям с производными.

Затем можно было бы построить S -матрицу в соответствии с правилами, изложенными в гл. 13, используя для \mathcal{H}_I выражение (14.104). Мэтьюз [539] показал, однако, что в этой теории при вычислении S -матрицы все зависящие от нормали n_μ выражения всегда взаимно уничтожаются с некоторыми сингулярными выражениями, возникающими при учете эффектов высших порядков для не зависящей от нормали n_μ части гамильтониана \mathcal{H}_I . На деле оказывается, что правильная методика сводится к полному игнорированию зависящей от нормали части и в то же время к использованию простых правил, развитых выше для описания эффектов взаимодействия. Таким образом, следует использовать плотность гамильтониана¹⁾

$$\mathcal{H}'_I(x) = +ieN [\varphi^*(x) \cdot \partial_\mu \varphi(x) - \partial_\mu \varphi^*(x) \cdot \varphi(x)] A^\mu(x) - e^2 N [\varphi^*(x) \varphi(x) A_\mu(x) A^\mu(x)], \quad (14.105)$$

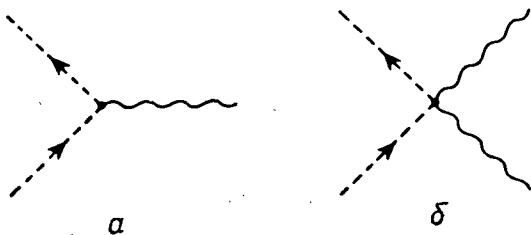
¹⁾ Чтобы теория была калибровочно-инвариантной, в последнем члене формулы (14.105) под знаком N -произведения должны стоять только операторы заряженного мезонного поля, т. е. этот член должен быть записан в виде $-e^2 A_\mu(x) A_\mu(x) N(\varphi^*(x)\varphi(x))$ — Прим. ред.

и для спаривания бозонных множителей, содержащих производные, нужно применить¹⁾ следующие выражения:

$$\frac{\partial \varphi^*(x)}{\partial x_\mu} \varphi^*(x') = \left(\Phi_0, T \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\mu} \varphi^*(x') \right) \Phi_0 \right) \Rightarrow \frac{hc}{2} \frac{\partial \Delta_F(x-x')}{\partial x_\mu}, \quad (14.106a)$$

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi^*(x')}{\partial x'_\nu} = \left(\Phi_0, T \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi^*(x')}{\partial x'_\nu} \right) \Phi_0 \right) \Rightarrow \frac{hc}{2} \frac{\partial^2 \Delta_F(x-x')}{\partial x_\mu \partial x'_\nu}. \quad (14.106b)$$

При помощи этих формул можно непосредственно перенести на данный случай развитые ранее графические методы. Так, член первого порядка по e в $\mathcal{H}_I(x)$ приводит к диаграмме, содержащей две мезонные и одну фотонную линии в каждой вершине, как показано на фиг. 54, а (теперь



Ф и г. 54.

мезонная линия должна быть направленной, чтобы указать знак заряда!); член гамильтониана взаимодействия $\varphi^*(x) \varphi(x) A_\mu(x) A^\mu(x)$ приводит к одновременному испусканию или поглощению в вершине двух фотонов, как показано на фиг. 54, б.

Правила для записи матричного элемента, соответствующего диаграмме n -го порядка (диаграмме, содержащей n вершин), снова можно получить, применяя теорему Вика к разложению S -матрицы для гамильтониана (14.105). (В работе Рорлиха [667] этот анализ подробно проведен.) Отметим, однако, что в рассматриваемом случае элемент S -матрицы n -го порядка содержит члены всех порядков между e^n и e^{2n} . В импульсном пространстве надо применять следующие правила.

В матричном элементе имеются множители:

а) $+e(p_\mu + p'_\mu)$ для каждой одиночной вершины; p_μ и p'_μ — импульсы входящей в вершину и выходящей из вершины мезонных линий соответственно;

б) $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p' \pm k)$ для каждой одиночной вершины; p и p' — импульсы мезонных линий, а k — импульс внутренней или внешней фотонной линии, кончающейся в этой вершине (знак плюс или минус зависит от того, испускается фотон или поглощается);

в) $e^2 (2\pi)^4 g_{\mu\nu} \delta^{(4)}(p - p' \pm k \pm k')$ для каждой двойной вершины (вершины, в которой испускаются или поглощаются две фотонные линии с поляризациями μ и ν); каждый испущенный или поглощенный в двойной вершине фотон представляется соответствующим ему множителем (см. ниже правила «г» и «е»);

¹⁾ Согласно этим правилам, опускаются сингулярные выражения, возникающие при дифференцировании сингулярных функций [539, 667].

г) $-\frac{i\hbar c}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\delta} g_{\mu\nu}$ для каждой внутренней фотонной линии с импульсом k , соединяющей вершины, в которых имеются множители $(p+p')^\mu$ и $(p+p')^\nu$ в случае одиночных вершин, или множители $g^{\mu\sigma}$ и $g^{\nu\sigma}$ в случае двойных вершин (индексы ρ и σ относятся ко второму фотону, испущенному или поглощенному в двойной вершине), или множители $(p+p')^\mu$ и $g^{\nu\rho}$ в смешанном случае;

д) $\frac{i\hbar c}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon}$ для каждой внутренней мезонной линии с импульсом p ;

е) $\sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi)^3}} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})$ для каждой внешней фотонной линии, которая испущена или поглощена в одиночной или двойной вершине; $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k})$ есть 4-вектор поляризации ($\epsilon_\mu \epsilon^\mu = -1$, $k_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{k}) = 0$) для испущенного или поглощенного фотона с энергией $k_0 = |\mathbf{k}|$, импульсом \mathbf{k} и состоянием поляризации λ ;

ж) $\sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi)^3}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}$ для каждой внешней мезонной линии с импульсом \mathbf{k} и энергией $\omega_{\mathbf{k}} = (\mathbf{k}^2 + \mu^2)^{1/2}$, входящей в диаграмму и выходящей из нее;

з) $(-i/\hbar c)^n$ из разложения в ряд теории возмущений;

и) наконец, полученное произведение нужно проинтегрировать по всем внутренним импульсам и умножить интеграл на весовой множитель $w = 2^g$, причем $g = d - b$, где d — это число двойных вершин в диаграмме, а b — число пар двойных вершин, соединенных двумя фотонными линиями.

Использование символа нормального произведения в выражении (14.105) для \mathcal{E}_I приводит к тому, что по теореме Вика следует опускать те диаграммы Фейнмана, в которых две фотонные линии, выходящие из одной вершины, вновь соединяются, не участвуя в каком-либо взаимодействии. Так, *не должны* рассматриваться диаграммы, подобные показанным на фиг. 55¹).

Аналогичная изложенной выше ситуация возникает в любой теории со связью с производными, например в случае псевдоскалярной мезонной теории с псевдоскалярной связью, в которой

$$\mathcal{L}_I = \frac{f}{\mu} : \tilde{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) \partial_\mu \phi(x) :. \quad (14.107)$$

Канонически сопряженный к полю ϕ импульс имеет вид

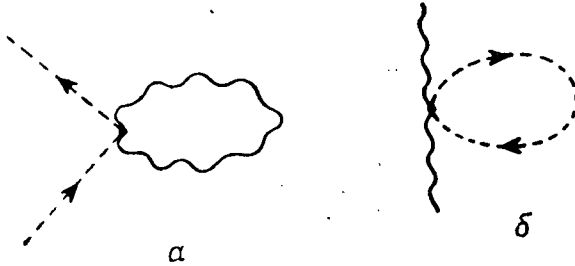
$$\pi(x) = \partial_0 \phi(x) - \frac{f}{\mu} : \tilde{\psi}(x) \gamma^0 \gamma_5 \psi(x) :. \quad (14.108)$$

¹) В примечании на стр. 458 уже отмечалось, что для соблюдения калибровочной инвариантности в формулу (14.105) вместо члена $-e^2 N (\phi \underline{A}_\mu \underline{A}^\mu)$ на самом деле должен входить член $-e^2 A_\mu A^\mu N(\phi)$, который приводит к диаграмме, показанной на рис. 55, а. Диаграммы такого типа *необходимо* учитывать, иначе физические результаты теории (например, собственная энергия заряженного мезона) будут зависеть от выбора калибровки. Заметим также, что в калибровке, в которой $\underline{A}_\mu \underline{A}^\mu = 0$, обсуждаемые диаграммы вносят равный нулю вклад в матричные элементы, но функция рас пространения фотона содержит *существенные* градиентные добавки (она пропорциональна $g_{\mu\nu} - 4 \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$). — Прим. ред.

и плотность гамильтониана взаимодействия не равна уже со знаком минус плотности лагранжиана взаимодействия, а дается выражением

$$\mathcal{H}_I^{\mu}(x; \sigma) = : \frac{i}{\mu} \tilde{\Psi}(x) \gamma_{\mu} \gamma_5 \Psi(x) \partial^{\mu} \varphi(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\mu} \right)^2 (\tilde{\Psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \Psi n^{\mu}(x))^2, \quad (14.109)$$

причем оба члена должны быть использованы при вычислении S -матрицы. Как и в предыдущем случае, при подробном анализе выясняется,



Ф и г. 55.

что для получения правильного ответа следует принять для S -матрицы разложение

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{+i}{\hbar c} \right)^n \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n P(\mathcal{L}_I(x_1) \dots \mathcal{L}_I(x_n)) \quad (14.110)$$

и пренебречь дополнительными сингулярными членами, возникающими при спаривании операторов $\partial_{\nu} \varphi$ и $\partial_{\mu} \varphi$, когда $\mu = \nu = 0$.

§ 4. Эффективные сечения

Изложенные в этой главе правила позволяют написать матричный элемент, соответствующий любой наперед заданной диаграмме Фейнмана, т. е. дают возможность вычислить S -матрицу. Элемент S -матрицы между заданными начальным и конечным состояниями $|\Phi_a\rangle$ и $|\Phi_b\rangle$ есть амплитуда вероятности перехода из начального состояния $|\Phi_a\rangle$ в конечное состояние $|\Phi_b\rangle$. Запишем амплитуду перехода в виде

$$R_{ba} = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{b=1}^{n'} p'_b - \sum_{a=1}^n p_a \right) (b | M | a) \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right]^{n+n'} N N', \quad (14.111)$$

где в явном виде записаны δ -функции, соответствующие сохранению полной энергии и полного импульса $\left(\sum_{a=1}^n p_a - \text{сумма 4-импульсов } n \text{ падающих частиц, } \sum_{b=1}^{n'} p'_b - \text{сумма 4-импульсов } n' \text{ образованных частиц} \right)$, и нормировочные множители N и N' падающих и образованных частиц $\left[\left(\frac{m}{E} \right) \text{ для фермионов, } 1/\sqrt{2\omega} \text{ для бозонов} \right]$. Поэтому $M_{ba} = (b | M | a)$ есть релятивистски инвариантный матричный элемент.

Мы уже изучили в § 1 этой главы рассеяние частицы на не зависящем от времени внешнем поле. В этом случае импульс не сохраняется,

и амплитуда перехода имеет вид

$$R'_{ba} = +2\pi i \delta^{(4)} \left(\sum p_{a0} - \sum p'_{b0} \right) (b | M' | a). \quad (14.112)$$

В § 1 был намечен способ вывода формулы для эффективного сечения в этом случае. Поэтому мы не будем рассматривать ниже процессы рассеяния с участием внешнего поля. Далее, для применений наибольшее значение имеют столкновения, в которых начальное состояние состоит из двух частиц, и мы ограничимся этим случаем.

Пусть Ω есть совокупность состояний частиц, обладающих импульсами в интервалах $p'_1, p_1 + dp'_1, \dots, p'_n$ и $p_n + dp'_n$ и заданными проекциями спина. Вероятность рассеяния в конечном состоянии, в котором состояние отдельных частиц принадлежит совокупности Ω , дается выражением

$$d\omega = \int_{\Omega} |R'_{ba}|^2 dp'_1 \dots dp'_n. \quad (14.113)$$

Вероятность перехода бесконечна, поскольку она содержит в силу ненормируемости наших векторов состояния множитель $\delta^{(4)}(0)$. Чтобы исправить это положение, следовало бы строить для начальных состояний волновые пакеты. Вместо этого, следуя Липшману и Швингеру [503], можно снова интерпретировать множитель $\delta^{(4)}(0)$ как $(2\pi)^{-4} VT$, где V — (большой) объем, а T — (большой) интервал времени, в котором и в течение которого имеет место процесс рассеяния. Физический интерес представляет величина $d\omega'$ — вероятность перехода в единицу времени и в единичном объеме. Пусть нормировка начальных одночастичных состояний такова, что их плотность равна η_i ($i = 1, 2$). Тогда

$$d\omega' = \frac{d\omega}{\eta_1 \eta_2 V T} = (2\pi)^4 \int_{\Omega} N^2 N'^2 \delta^{(4)} \left(\sum_{b=1}^{n'} p'_b - \sum_{a=1}^n p_a \right) \times \\ \times \frac{1}{(2\pi)^6 \eta_1 \eta_2} | (b | M | a) |^2 \frac{dp'_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{dp'_n}{(2\pi)^3}. \quad (14.114)$$

Эффективное сечение $d\sigma$ равно числу переходов в единицу времени и объема, разделенному на поток падающих частиц и на число частиц мишени в единице объема. Так как при делении на η_i мы нормировали начальные состояния так, что они содержат одну частицу в единице объема, то поток начальных частиц будет равен $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = v$, где \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 — скорости начальных частиц, причем предполагается, что частицы движутся вдоль одной прямой. Поэтому, чтобы получить эффективное сечение $d\sigma$, надо разделить вероятность перехода $d\omega'$ на относительную скорость начальных частиц $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$:

$$d\sigma = \frac{d\omega'}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}. \quad (14.115)$$

Релятивистскую инвариантность эффективного сечения можно сделать явной, если заметить, что множитель $E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ можно заменить инвариантным выражением $|(p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2|$ и что $d^3 p / E$ есть инвариант.

В случае двухчастичной реакции

$$p_1 + p_2 \rightarrow p'_1 + p'_2$$

формулы (14.114) и (14.115) определяют обычное дифференциальное сечение, если взять в качестве Ω совокупность конечных состояний, в которых импульс одной из конечных частиц p'_1 лежит в заданном

телесном угле $d\Omega$. При заданном $d\Omega$ значения p'_1 , p'_2 , $p_{10} = E_1$ и $p_{20} = E_2$ фиксируются законами сохранения энергии и импульса. В системе центра масс $|p'_1| = |p'_2|$, и формула (14.115) приобретает вид

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{(2\pi)^{-8}}{v\eta_1\eta_2} \int N^2 N'^2 p_1'^2 dp_1' d\Omega |M_{ba}|^2 \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) = \\ &= \frac{(2\pi)^{-8}}{\eta_1\eta_2 v} N^2 N'^2 p_1' \frac{E'_1 E'_2}{E'_1 + E'_2} |M_{ba}|^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (14.116)$$

Так как относительная скорость двух частиц в конечном состоянии равна

$$v' = \frac{p'_1 (E'_1 + E'_2)}{E'_1 E'_2},$$

то эффективное сечение для случая двухчастичных реакций дается формулой

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^{-8}}{\eta_1\eta_2 v v'} (p'_1)^2 |M_{ba}|^2 N^2 N'^2. \quad (14.117)$$

Рассмотрим далее случай распада нестабильной частицы с импульсом k на две частицы с импульсами p_1 и p_2 (например, распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ или распад $K^0 \rightarrow 2\pi$). Вероятность распада в единицу времени (величина, обратная времени жизни) равна полной вероятности перехода в единицу времени:

$$\omega = \frac{1}{\tau} = (2\pi)^4 \int \delta^{(4)}(k - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} |M|^2 \frac{N^2 N'^2}{\eta (2\pi)^3}, \quad (14.118)$$

где интегрирование по допустимым конечным состояниям должно включать и суммирование по спиновым состояниям дочерних частиц, если они имеют спин. В системе покоя распадающейся частицы $k = (m_0, 0)$ (m_0 — масса распадающейся частицы) и $|p_1| = |p_2|$, откуда

$$\delta^{(4)}(k - p_1 - p_2) = \delta^{(4)}(m_0 - p_{10} - p_{20}) \delta^{(3)}(p_1 + p_2), \quad (14.119)$$

так что

$$\omega = (2\pi)^4 \int \delta^{(4)}(m_0 - \sqrt{p_1^2 + m_1^2} - \sqrt{p_1^2 + m_2^2}) |M_{ba}|^2 \frac{N^2 N'^2}{\eta (2\pi)^3} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3}. \quad (14.120)$$

Если распадающаяся частица бесспиновая, то распад должен быть изотропным, и поэтому величина $|M_{ba}|^2$ должна быть сферически симметричной в импульсном пространстве. Тогда

$$\frac{1}{\tau} = (2\pi)^4 4\pi \int_0^\infty \delta(m_0 - \sqrt{p^2 + m_1^2} - \sqrt{p^2 + m_2^2}) |M_{ba}|^2 \frac{N^2 N'^2}{\eta (2\pi)^3} p^2 dp. \quad (14.121)$$

§ 5. Примеры

1. Комptonовское рассеяние

Мы проиллюстрируем применение формулы (14.114) вычислением эффективного сечения рассеяния фотона на свободных электронах (комptonовское рассеяние) в низшем порядке теории возмущений.

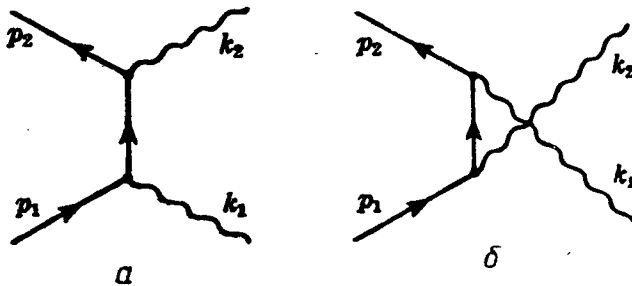
В низшем порядке имеются две диаграммы Фейнмана (фиг. 5б). На фиг. 5б, а электрон в состоянии $p_1 s_1$ сначала поглощает фотон с импульсом k_1 и вектором поляризации $\varepsilon^{(\lambda_1)}(k_1)$ и затем испускает второй фотон с импульсом k_2 и поляризацией $\varepsilon^{(\lambda_2)}(k_2)$, переходя в конеч-

ное состояние с импульсом p_2 и спиновым индексом s_2 . Во втором процессе (фиг. 56, б) акт излучения конечного фотона предшествует акту поглощения начального фотона. При помощи установленных в § 3 правил легко проверить, что матричный элемент, соответствующий этим двум диаграммам, имеет вид

$$R_{ba} = \delta^{(4)}(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \frac{r_0}{2\pi i} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 \omega_1 \omega_2}} \times \tilde{\omega}_{s_2}(p_2) \left\{ \gamma \cdot \varepsilon_2 \frac{\gamma \cdot (p_1 + k_1) + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2 + i\delta} \gamma \cdot \varepsilon_1 + \gamma \cdot \varepsilon_1 \frac{\gamma \cdot (p_1 - k_2) + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\delta} \gamma \cdot \varepsilon_2 \right\} \omega^{s_1}(p_1) \quad (14.122a)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) (p_2 s_2, k_2 \varepsilon_2 | M | p_1 s_1, k_1 \varepsilon_1) \times \frac{1}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{m^2}{4E(p_1)E(p_2)\omega(k_1)\omega(k_2)}}, \quad (14.122b)$$

где, поскольку это не может привести к недоразумению, мы записали $\varepsilon^{(\lambda_1)}(k_1)$ как ε_1 и $\omega(k_1)$ как ω_1 ; в аналогичном смысле исполь-



Ф и г. 56.

зуются обозначения ε_2 , ω_2 и E_1 , E_2 . Проследим, как возник в формуле (14.122) классический радиус электрона $r_0 = e^2/4\pi mc^2$. Применение правил § 3 приводит в формуле (14.122a) к численному множителю $\alpha/2\pi i$. Если выразить нормировочный множитель фотона $(2|k|)^{-1/2}$ через его энергию $\hbar ck$, то в числителе появится дополнительный множитель $\hbar c$, который вместе с множителем m и константой тонкой связи α даст r_0 . Это объясняет также появление множителя m^2 в числителе: одно m возникает из нормировочного множителя электрона, а другое — при переходе от постоянной α к радиусу r_0 . Так как мы приняли систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$, то энергия фотона есть $\omega = |k|$.

Обозначим множитель в фигурных скобках в формуле (14.122a) символом \mathcal{M} . Выражение для \mathcal{M} можно упростить, если учесть, что электрон и фотон свободны, т. е. что

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2 \quad (14.123)$$

и

$$k_1^2 = k_2^2 = 0, \quad (14.124)$$

$$k_1 \cdot \varepsilon_1 = k_2 \cdot \varepsilon_2 = 0. \quad (14.125)$$

Для дальнейшего упрощения результатов выберем систему отсчета, в которой электрон до столкновения покоится, $p_1 = (m, 0, 0, 0)$. Выберем также такие векторы поляризации, которые имеют только пространствен-

ные компоненты; это всегда можно сделать при помощи соответствующим образом подобранного калибровочного преобразования (см. § 2 гл. 9). Вследствие такого выбора калибровки

$$p_1 \cdot \varepsilon_1 = p_1 \cdot \varepsilon_2 = 0. \quad (14.126)$$

Отметим, наконец, что оператор \mathfrak{M} действует справа на волновую функцию Дирака, которая является собственной функцией оператора $\gamma \cdot p_1$ с собственным значением m . Из перестановочных правил для γ -матриц

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad (14.127)$$

следует соотношение

$$(\gamma \cdot p_1)(\gamma \cdot \varepsilon_1) = -(\gamma \cdot \varepsilon_1)(\gamma \cdot p_1) + 2p_1 \cdot \varepsilon_1. \quad (14.128)$$

Однако в силу равенства (14.126) второй член равен нулю. Аналогично доказывается, что произведение $\gamma \cdot p_1$ антикоммутирует с произведением $\gamma \cdot \varepsilon_2$. При помощи этих результатов можно исключить встречающиеся в выражении для \mathfrak{M} члены $\gamma \cdot p_1 + m$. Наконец, с учетом соотношения (14.125) можно записать

$$R_{ba} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \frac{-i r_0 m^2}{(2\pi)^5 \sqrt{E_1 E_2 \omega_1 \omega_2}} \times \\ \times \tilde{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2) \left\{ \gamma \cdot \varepsilon_2 \frac{\gamma \cdot k_1}{2p_1 \cdot k_1} \gamma \cdot \varepsilon_1 + \gamma \cdot \varepsilon_1 \frac{\gamma \cdot k_2}{2p_1 \cdot k_2} \gamma \cdot \varepsilon_2 \right\} \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1). \quad (14.129)$$

Чтобы получить вероятность перехода, мы должны взять квадрат модуля величины R_{ba} . Пусть нас не интересует проекция спина электрона в конечном состоянии и мы ограничиваемся случаем, когда начальные электроны не поляризованы. Тогда нужно просуммировать $|\tilde{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2) \mathfrak{M} \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1)|^2$ по индексу s_2 и усреднить по индексу s_1 , что, как мы видели в гл. 4, сводится к вычислению некоторого следа. Несколько громоздкие вычисления приводят к следующему результату:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{s_1 s_2} |\tilde{\omega}^{s_2}(\mathbf{p}_2) \mathfrak{M} \omega^{s_1}(\mathbf{p}_1)|^2 \quad (14.130a)$$

$$= \frac{1}{8m^2} \text{Sp} \{ (\gamma \cdot p_2 + m) \mathfrak{M} (\gamma \cdot p_1 + m) \mathfrak{M} \} \quad (14.130b)$$

$$= \frac{1}{4m^2} \left[\frac{p_1 \cdot k_1}{p_1 \cdot k_2} + \frac{p_1 \cdot k_2}{p_1 \cdot k_1} - 2 + 4(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^2 \right] \quad (14.130b)$$

$$= \frac{1}{4m^2} \left[\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - 2 + 4 \cos^2 \Theta \right], \quad (14.130g)$$

причем при переходе от равенства (14.130b) к равенству (14.130g) использован тот факт, что в лабораторной системе $p_1 = (m, 0, 0, 0)$ и что Θ есть угол между направлениями поляризации падающего и излученного фотонов. Выражение (14.130g) составляет главную часть формулы Клейна — Нишины, выведенной в работах Клейна и Нишины [455], Нишины [587] и Тамма [768] (см. также монографию Гайтлера [376]). Чтобы вычислить эффективное сечение процесса, нужно знать плотность падающих частиц. Ее можно найти, рассматривая плотность тока электронно-позитронного поля и вектор Пойнтинга электромагнитного поля. Среднее значение оператора тока в начальном состоянии электрона

$|\Phi_i\rangle = b_{s_1}^*(\mathbf{p}_1)\Phi_0\rangle$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x)\rangle_i &= -\frac{1}{2}e\langle\Phi_i, [\tilde{\psi}(x)\gamma_\mu, \psi(x)]\Phi_i\rangle = \\ &= -e\langle b_{s_1}^*(\mathbf{p}_1)\Phi_0, \tilde{\psi}^{(+)}(x)\gamma_\mu\psi^{(+)}(x)b_{s_1}^*(\mathbf{p}_1)\Phi_0\rangle = \\ &= -\frac{e}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_1}\tilde{\omega}^{s_1}(\mathbf{p}_1)\gamma_\mu\omega^{s_1}(\mathbf{p}_1) = \\ &= -\frac{e}{(2\pi)^3}\frac{p_{1\mu}}{E_1} = -\frac{e}{(2\pi)^3}v_{1\mu}, \end{aligned} \quad (14.131)$$

где $v_{1\mu}$ — скорость начального электрона. Для плотности заряда в начальном состоянии отсюда получаем

$$\langle Q(x)\rangle_i = -\frac{e}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_1}\omega_{p_1}^*(x)\omega_{p_1}(x), \quad (14.132)$$

так что плотность начальных электронов η_1 дается выражением

$$\eta_1 = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_1}. \quad (14.133)$$

Если принять во внимание, что дираковские спиноры были нормированы не в единичном объеме, а в инвариантном объеме m/E_1 , то можно получить в точности такой же результат. Можно установить также, что плотность падающих фотонов равна $1/(2\pi)^3$. Величина $|R_{ba}|^2/VT$ является вероятностью перехода в единицу времени и в единичном объеме для полученной выше плотности начальных частиц. Чтобы получить вероятность перехода на единицу плотности начальных частиц, надо разделить $|R_{ba}|^2/VT$ на $\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{E_1}$. Тогда $d\omega'$ в данном случае будет

$$d\omega' = r_0^2 \int d^3k_2 \int d^3p_2 \delta^{(4)}(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \frac{m^3}{E_2\omega_1\omega_2} F. \quad (14.134)$$

Теперь, интегрируя по d^3p_2 , можно исключить δ -функции, зависящие от импульсных переменных, после чего

$$d\omega' = r_0^2 \int d^3k_2 \delta^{(1)}(E_f - E_i) \frac{m^3}{E_2\omega_1\omega_2} F, \quad (14.135)$$

где $E_f = p_{20} + k_{20}$ — полная энергия системы в конечном состоянии, а $E_i = p_{10} + k_{10}$ — полная энергия начального состояния. Запишем

$$d^3k_2 = (k_{20})^2 dk_{20} d\Omega = (k_{20})^2 \left(\frac{dk_{20}}{dE_f}\right) d\Omega dE_f. \quad (14.136)$$

Можно теперь проинтегрировать по dE_f и устранить последнюю оставшуюся δ -функцию, зависящую от энергии. Таким образом,

$$d\omega' = r_0^2 \frac{m^3}{E_2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \left(\frac{d\omega_2}{dE_f}\right)_{E_f=E_i} d\Omega. \quad (14.137)$$

Заметим, что при интегрировании по d^3p_2 импульсы частиц в конечном состоянии выражаются через импульсы начальных частиц в соответствии с законом сохранения импульса. Аналогично, интегрирование по dE_f в соответствии с законом сохранения энергии фиксирует полную энергию частиц в конечном состоянии.

Проведем теперь указанные в формуле (14.136) дифференцирования. В лабораторной системе отсчета, учитывая, что

$$\begin{aligned} E_f = \omega_2 + E_2 = \omega_1 + E_1 = \omega_2 + (p_2^2 + m^2)^{1/2} = \\ = \omega_2 + (\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos\varphi + \omega_2^2 + m^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (14.138)$$

где φ — угол рассеяния

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = \omega_1 \omega_2 \cos \varphi, \quad (14.139)$$

и используя соотношение Комптона

$$\omega_1 \omega_2 (1 - \cos \varphi) = m (\omega_1 - \omega_2), \quad (14.140)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{dE_f}{d\omega_2} &= 1 + \frac{\omega_2 - \omega_1 \cos \varphi}{E_2} = \frac{E_2 + \omega_2 - \omega_1 \cos \varphi}{E_2} = \\ &= \frac{m + \omega_1 (1 - \cos \varphi)}{E_2} = \frac{m}{E_2} \frac{\omega_1}{\omega_2}. \end{aligned} \quad (14.141)$$

Поэтому вероятность перехода, при котором рассеянный фотон излучается в телесный угол $d\Omega$ и имеет энергию ω_2 , дается выражением

$$d\omega' = r_0^2 m^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 F d\Omega. \quad (14.142)$$

Дифференциальное эффективное сечение $d\sigma$ определяется как частное от деления вероятности перехода на падающий поток ($c=1$) и на число рассеивающих частиц в единице объема ($=1$). Поэтому

$$d\sigma = r_0^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 m^2 F d\Omega, \quad (14.143)$$

что и является хорошо известной формулой Клейна — Нишины.

Рассмотрим здесь эффективное сечение только в нерелятивистском пределе, т. е. когда $\omega_1, \omega_2 \ll m$ и $p_1 = p_2 = (m, 0, 0, 0)$. В этом пределе формула (14.130г) сводится к

$$F_{\text{нер}} = \frac{1}{m^2} \cos^2 \Theta \quad (14.144)$$

(так как $\omega_1 = \omega_2$) и дифференциальное эффективное сечение рассеяния приобретает вид

$$d\sigma_{\text{нер}} = r_0^2 \cos^2 \Theta d\Omega, \quad (14.145)$$

что совпадает с классической формулой Томсона для рассеяния излучения с малой энергией на статическом заряде. Дифференциальное эффективное сечение для неполяризованного света получается суммированием по двум конечным состояниям поляризации фотона и усреднением по двум начальным. Это суммирование может быть легко проведено¹⁾

¹⁾ Напомним, что трехмерные векторы $\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k})$, $\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k})$ и $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ образуют ортонормированную систему, соотношение полноты для которой имеет вид

$$\mathbf{e}_r^{(1)}(\mathbf{k}) \mathbf{e}_s^{(1)}(\mathbf{k}) + \mathbf{e}_r^{(2)}(\mathbf{k}) \mathbf{e}_s^{(2)}(\mathbf{k}) + \frac{k_r k_s}{|\mathbf{k}|^2} = \delta_{rs},$$

где индексы $r, s = 1, 2, 3$ обозначают компоненты векторов. Поэтому мы можем записать

$$\sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{e}_r^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \mathbf{e}_s^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = \delta_{rs} - \frac{k_r k_s}{|\mathbf{k}|^2}.$$

Аналогично легко проверить, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} [\mathbf{e}^{(\lambda_1)}(\mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{e}^{(\lambda_2)}(\mathbf{k}_2)]^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{r, s} \mathbf{e}_r^{(\lambda_1)}(\mathbf{k}_1) \mathbf{e}_r^{(\lambda_2)}(\mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{e}_s^{(\lambda_1)}(\mathbf{k}_1) \mathbf{e}_s^{(\lambda_2)}(\mathbf{k}_2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{rs} \left(\delta_{rs} - \frac{k_{1r} k_{1s}}{|\mathbf{k}_1|^2} \right) \left(\delta_{rs} - \frac{k_{2r} k_{2s}}{|\mathbf{k}_2|^2} \right) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \varphi), \end{aligned}$$

где φ — угол между векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , т. е. угол рассеяния.

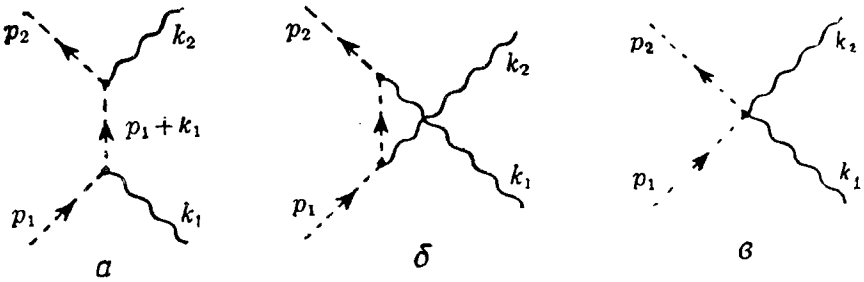
и дает следующий результат:

$$d\bar{\sigma}_{\text{нер}} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \varphi) d\Omega, \quad (14.146)$$

где φ — угол между векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , т. е. угол рассеяния. Полное эффективное сечение получается при интегрировании по телесному углу $d\Omega$ и равно

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2. \quad (14.147)$$

В гл. 17 мы увидим, что формула томсоновского рассеяния (14.147) играет важную роль в понимании перенормировки заряда.



Ф и г. 57.

Интересно сравнить рассеяние фотонов на частицах со спином $1/2$ и на частицах со спином 0. Для этого вычислим эффективное сечение рассеяния фотонов на π -мезонах в низшем порядке теории возмущений. Этому процессу соответствуют три диаграммы, изображенные на фиг. 57. Матричный элемент S имеет вид

$$T = -\frac{a}{4\pi \sqrt{p_{10} p_{20} \omega_1 \omega_2}} \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \times \\ \times \left\{ (p_2 + p_1 + k_1) \cdot \varepsilon_2 \frac{1}{(p_1 + k_1)^2 - \mu^2} (2p_1 + k_1) \cdot \varepsilon_1 + \right. \\ \left. + (p_2 + p_1 - k_2) \cdot \varepsilon_1 \frac{1}{(p_1 - k_2)^2 - \mu^2} (2p_1 - k_2) \cdot \varepsilon_2 - 2\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \right\}. \quad (14.148)$$

Член с множителем 2 соответствует диаграмме на фиг. 57, б (в N -произведении $A_\mu(x) A^\mu(x) \varphi^* \varphi(x)$: любой из операторов A может привести к излучению фотона 2 или поглощению фотона 1). В такой системе отсчета, в которой начальный π -мезон покоится, $\mathbf{p}_1 = 0$, и при таком выборе калибровки, когда оба вектора поляризации ε_1 и ε_2 имеют только пространственные компоненты (так что $p_1 \cdot \varepsilon_1 = p_1 \cdot \varepsilon_2 = 0$), отличен от нуля только член, соответствующий диаграмме на фиг. 57, в. Это есть следствие выбора такой специфической калибровки, в которой $\varepsilon_{10} = \varepsilon_{20} = 0$. Интересно отметить, что амплитуды, соответствующие каждой из диаграмм на фиг. 57, в отдельности не являются калибровочно-инвариантными, хотя суммарная амплитуда инвариантна (это легко проверить, произведя калибровочное преобразование $\varepsilon_\mu \rightarrow \varepsilon'_\mu = \varepsilon_\mu + \lambda k_\mu$). Эффективное сечение дается интегралом

$$d\sigma = \alpha^2 \int d^3 k_2 \int d^3 p_2 \delta^{(1)}(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \frac{|\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2|^2}{p_{10} p_{20} \omega_1 \omega_2}. \quad (14.149)$$

Если теперь в точности так же, как в случае спина, равного $1/2$, провести интегрирование, то в конечном итоге получим

$$d\sigma = r_\pi^2 \frac{\mu^2}{[\mu + \omega_1(1 - \cos \varphi)]^2} |(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)|^2 d\Omega, \quad (14.150)$$

где $r_\pi = e^2/4\pi\mu$ — классический радиус π -мезона и $\cos \varphi \omega_1 \omega_2 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2$. В крайне нерелятивистском пределе при $\omega_1 \ll \mu$ формула для эффективного сечения снова сводится к классической:

$$d\sigma = r_\pi^2 |(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)|^2 d\Omega. \quad (14.151)$$

Таким образом, рассеяние фотона с очень малой энергией на частице со спином 0 в точности такое же, как и рассеяние на частице со спином $1/2$. Объяснение заключается в том, что для очень больших длин волн рассеяние осуществляется только на полном заряде рассеивающей системы.

В заключение этого раздела отметим, что в силу унитарности S -матрицы между членами разложения S -матрицы различного порядка соблюдаются определенные соотношения. Так, для разложения S -матрицы в степенной ряд по константе связи

$$S = 1 + eS_1 + e^2S_2 + \dots \quad (14.152)$$

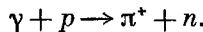
условие унитарности S -матрицы имеет вид

$$1 = S^*S = 1 + e(S_1^* + S_1) + e^2(S_1^*S_1 + S_2^* + S_2) + e^3(S_1^*S_2 + S_2^*S_1 + S_3^* + S_3) + e^4(S_1^*S_3 + S_2^*S_2 + S_3^*S_1 + S_4^* + S_4) + \dots, \quad (14.153)$$

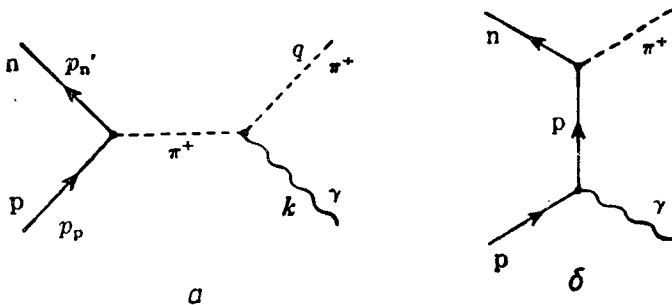
и поэтому каждое выражение в скобках должно быть равно нулю. Получаемые при этом соотношения между членами разложения S_n могут оказаться очень полезными для вычислений (см., например, [402]).

2. Фоторождение π -мезонов

В качестве второго примера рассмотрим фоторождение положительно заряженных π -мезонов в реакции



Диаграммы низшего порядка, которые связаны с этим процессом в псевдоскалярной мезонной теории со связью без производных, приведены



Ф и г. 58.

на фиг. 58. Соответствующий диаграмме на фиг. 58,а процесс похож на фотоэффект: виртуальный мезон в нуклонном облаке (для которого

$q^2 \neq \mu^2$), поглощая фотон, становится «реальным». Мы принимаем во внимание только заряд нуклонов и пренебрегаем аномальным магнитным моментом. Результаты этих вычислений в низшем порядке теории возмущений совершенно не согласуются с экспериментом и приводятся только как пример применения техники Фейнмана. Диаграмме на фиг. 58,а соответствует часть матричного элемента

$$R^{(a)} = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{E_p E_p' 4q_0 k_0}} (2\pi)^3 \delta^{(4)}(p' + q - p - k) \times \\ \times \tilde{\omega}_n(p') \sqrt{2} G \gamma_5 \omega_p(p) \frac{1}{(q-k)^2 - \mu^2} \frac{i}{(2\pi)^4} [-e \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot (2q - k)] \quad (14.154a) \\ = -\frac{i}{(2\pi)^2} - \frac{\sqrt{2} eGM}{\sqrt{E_p E_p' 4q_0 k_0}} \tilde{\omega}_n(p') \gamma_5 \frac{q \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k})}{q \cdot k} \omega_p(p) \cdot \delta^{(4)}(p' + q - p - k), \quad (14.154b)$$

причем при переходе к (14.154б) учтено, что $q^2 = \mu^2$, $k^2 = 0$, $\varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot k = 0$, и предположено, что массы протона и нейтрона одинаковы и равны M . Диаграмме на фиг. 58,б соответствует часть матричного элемента

$$R^{(b)} = \frac{e}{(2\pi)^6} \frac{M}{\sqrt{E_p E_p' 4q_0 k_0}} (2\pi)^3 \delta^{(4)}(p' + q - p - k) \times \\ \times \tilde{\omega}_n(p') G \gamma_5 \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\gamma \cdot (p+k) + M}{(p+k)^2 - M^2} \gamma \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \omega_p(p). \quad (14.155)$$

В калибровке, в которой $\varepsilon_0^{(\lambda)} = 0$, и в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс соблюдается равенство $p \cdot \varepsilon = 0$. Поэтому

$$R^{(b)} = \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{eGM}{\sqrt{E_p E_p' 4q_0 k_0}} \tilde{\omega}_n(p') \gamma_5 \times \\ \times \frac{\gamma \cdot k \gamma \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k})}{2p \cdot k} \omega_p(p) \delta^{(4)}(p' + q - p - k). \quad (14.156)$$

Сумма вкладов от диаграмм а и б фиг. 58 равна

$$R = -\frac{i}{(2\pi)^2} \frac{eGM}{\sqrt{E_p E_p' 4q_0 k_0}} \delta^{(4)}(p' + q - p - k) \times \\ \times \tilde{\omega}_n(p') \gamma_5 \left[\frac{q \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k})}{q \cdot k} - \frac{\gamma \cdot k \gamma \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k})}{2p \cdot k} \right] \omega_p(p). \quad (14.157)$$

Чтобы вычислить дифференциальное эффективное сечение для неполяризованных протонов, мы должны вычислить $\sum_{\text{спин}} |R|^2$. В системе центра масс

$$\text{Sp} \left\{ \left[\frac{q \cdot \varepsilon}{q \cdot k} - \frac{\gamma \cdot k \gamma \cdot \varepsilon}{2p \cdot k} \right] \gamma_5 \frac{\gamma \cdot p + M}{2M} \gamma_5 \left[\frac{q \cdot \varepsilon}{q \cdot k} - \frac{\gamma \cdot k \gamma \cdot \varepsilon}{2p \cdot k} \right] \frac{\gamma \cdot p' + M}{2M} \right\} = \\ = \frac{1}{2M^2} \left(1 - \frac{\mu^2}{2} \frac{q^2 \sin^2 \theta}{k^2 (q_0 - |\mathbf{q}| \cos \theta)^2} - \frac{q_0 - |\mathbf{q}| \cos \theta}{E_p + |\mathbf{k}|} \right) = \mathfrak{F}, \quad (14.158)$$

где
$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{q}| \omega \cos \theta. \quad (14.159)$$

Применяя соотношения (14.114) и (14.115), получаем следующую формулу для дифференциального эффективного сечения в системе центра масс:

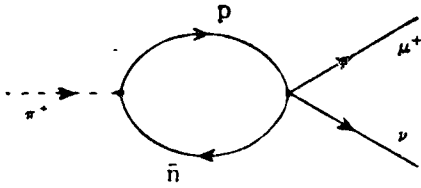
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2 G^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{2E_p E_p'} \frac{|\mathbf{q}|}{|\mathbf{k}|} \frac{1}{1 + (|\mathbf{k}|/E_p)} \frac{1}{1 + (q_0/E_p')} \mathfrak{F}. \quad (14.160)$$

3. Распад π -мезона

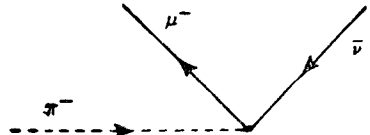
В качестве другого примера применения вычислительной техники рассмотрим следующую феноменологическую модель для объяснения распада заряженного π -мезона на μ -мезон и нейтрино:

$$\mathcal{H}_I = G_{\text{эфф.}} : \bar{\mu} \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \nu : \partial^{\mu} \pi(x) + \text{э. с.}, \quad (14.161)$$

где π обозначает π -мезонный оператор, а μ и ν — четырехкомпонентные спинорные операторы для мюонного и нейтринного полей. Волновые



Ф и г. 59.



Ф и г. 60.

функции нейтрино нормированы так, что

$$\sum_{r=1}^2 u_{(\nu)r}(\mathbf{p}) \tilde{u}_{(\nu)r}(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^2 v_{(\nu)r}(\mathbf{p}) \tilde{v}_{(\nu)r}(\mathbf{p}) = \frac{\gamma \cdot \mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}, \quad (14.162)$$

и разложение оператора $\nu(x)$ в картине взаимодействия имеет вид

$$\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p \sum_{r=1}^2 \{ b_r(\mathbf{p}) u_{(\nu)r}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + d_r^*(\mathbf{p}) v_{(\nu)r}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \}, \quad (14.163)$$

где $p_0 = |\mathbf{p}|$; $b_r(\mathbf{p})$ и $d_r(\mathbf{p})$ — операторы уничтожения для нейтрино и антинейтрино соответственно, удовлетворяющие обычным перестановочным соотношениям $\{b_r(\mathbf{p}), b_r^*(\mathbf{p}')\} = \delta_{rr} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ и т. д., так что

$$\{\nu(x); \tilde{\nu}(x')\} = -iS(x - x'; m = 0). \quad (14.164)$$

Гамильтониан взаимодействия (14.161) описывает элементарные процессы $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}$ и $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$. Из-за множителя $\frac{1}{2}(1 - i\gamma_5)$ гамильтониан \mathcal{H}_I не инвариантен относительно пространственного отражения P . Гамильтониан (14.161) можно рассматривать как результат «исключения» сильных взаимодействий из гамильтониана, описывающего сильные взаимодействия между барионами и мезонами и слабые взаимодействия типа Ферми между барионами и лептонами. В низшем порядке теории возмущений такой более полной теории распад π -мезона может протекать, как показано на фиг. 59.

Гамильтониан (14.161) непосредственно приводит в низшем порядке теории возмущений к диаграмме фиг. 60. Этой диаграмме соответствует следующий матричный элемент распада π -мезона:

$$R = -i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k) \frac{G_{\text{эфф.}}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m_{(\mu)}}{E_{(\mu)}}} \times \\ \times \tilde{u}_{(\mu)}(\mathbf{p}) \gamma^0 \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) v_{(\nu)}(\mathbf{k}) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\pi}}} q_0, \quad (14.165)$$

где q есть 4-импульс π -мезона, p и k есть 4-импульсы мюона и нейтрино соответственно. Закон сохранения энергии и импульса утверждает, что $q = p + k$, откуда $\gamma \cdot q = \gamma \cdot p + \gamma \cdot k$. Это позволяет нам упростить выражение (14.165), так как $u_{(\mu)}(\mathbf{p}) \gamma \cdot p = m_{(\mu)} \tilde{u}(\mathbf{p})$ и $v \cdot k v_{(\nu)}(\mathbf{k}) = 0$. Отсюда

$$R = -i (2\pi)^4 \frac{G_{\text{эфф}}^2}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m_{(\mu)}^2}{(2\pi)^3 2\omega_{\pi} E_{(\mu)}}} \tilde{u}_{(\mu)} \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) v_{(\nu)} \delta^{(4)}(p + k - q) \quad (14.166)$$

и вероятность перехода в единицу времени и объема (безотносительно к спиновому состоянию нейтрино) запишется в виде

$$\sum_{(\nu)} \frac{1}{VT} |R|^2 = (2\pi)^4 \frac{G_{\text{эфф}}^2}{(2\pi)^9} \frac{m_{(\mu)}^2}{2\omega_{\pi} E_{(\mu)}} \times \\ \times \tilde{u}_{(\mu)}(\mathbf{p}) \frac{1}{2} (1 + i\gamma_5) \frac{\gamma \cdot k}{2k_0} \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) u_{(\mu)}(\mathbf{p}) \cdot \delta^{(4)}(p + k - q). \quad (14.167)$$

Если мы интересуемся только временем жизни, то единственной имеющей значение величиной является вероятность перехода безотносительно к спиновому состоянию мюона, т. е.

$$\frac{1}{VT} \sum_{\text{спин } \mu, \nu} |R|^2 = \frac{G_{\text{эфф}}^2}{(2\pi)^5} \frac{m_{(\mu)}^2}{8\omega_{\pi} E_{(\mu)} k_0} \delta^{(4)}(p + k - q) \times \\ \times \text{Sp} \left[\frac{1}{2} (1 + i\gamma_5) \gamma \cdot k \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) (\gamma \cdot p + m_{(\mu)}) \right]. \quad (14.168)$$

Можно произвести дальнейшее упрощение выражения для следа, если учесть, что $1/4(1 - i\gamma_5)^2 = 1/2(1 - i\gamma_5)$ и что след нечетного числа γ -матриц равен нулю, так что

$$\text{Sp} [\] = \frac{1}{2} \text{Sp} [\gamma \cdot k \gamma \cdot p + i\gamma \cdot k \gamma \cdot p \gamma_5] = 2k \cdot p \quad (14.169)$$

и

$$\frac{1}{VT} \sum_{\text{спин } \mu, \nu} |R|^2 = \frac{G_{\text{эфф}}^2}{(2\pi)^5} \frac{m_{(\mu)}^2}{4\omega_{\pi} E_{(\mu)} k_0} k \cdot p \delta^{(4)}(p + k - q). \quad (14.170)$$

Так как нейтрино имеет равную нулю массу покоя, то $k^2 = 0$ и $q^2 = m_{\pi}^2 = k^2 + 2p \cdot k + p^2 = m_{(\mu)}^2 + 2p \cdot k$, откуда следует,

$$p \cdot k = \frac{1}{2} (m_{\pi}^2 - m_{(\mu)}^2) = \frac{m_{\pi}^2}{2} \left(1 - \frac{m_{(\mu)}^2}{m_{\pi}^2} \right) = \\ = (q - k) \cdot k = q \cdot k = q_0 k_0 (1 - \mathbf{v}_{\pi} \cdot \hat{\mathbf{k}}), \quad (14.171)$$

где через $\hat{\mathbf{k}}$ обозначен единичный вектор в направлении движения нейтрино. Чтобы вычислить полную вероятность перехода в единицу времени Γ , удобно рассмотреть распад π -мезона в его системе покоя. Тогда мы находим

$$\Gamma = \frac{G_{\text{эфф}}^2}{(2\pi)^2} \int d^3 p \int d^3 k \frac{m_{(\mu)}^2}{4\omega_{\pi} E_{(\mu)} k_0} \delta^{(4)}(p + k - q) k \cdot p \quad (14.172)$$

[множитель $(2\pi)^3$ введен в это равенство для того, чтобы начальное состояние было нормировано на одну частицу в единице объема]. В системе покоя π -мезона $m_{\pi} = q_0 = \omega_{\pi} = (p_0 + k_0) = (\mathbf{p}^2 + m_{(\mu)}^2)^{1/2} + |\mathbf{p}|$,

так что

$$|\mathbf{p}| = \frac{1}{2m_\pi} (m_\pi^2 - m_\mu^2) = \frac{m_\pi}{2} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right) \quad (14.173)$$

и

$$\Gamma = \frac{G_{\text{эфф}}^2}{4\pi} m_\pi m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right). \quad (14.174)$$

Интересно отметить, что если привлечь предположение об универсальном ферми-взаимодействии, то эффективным гамильтонианом для описания распада π -мезона на электрон и антинейтрино будет

$$\mathcal{H}'_I = G_{\text{эфф}} : \tilde{e}\gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) v : \partial^\mu \pi(x) + \text{э. с.}, \quad (14.175)$$

где $G_{\text{эфф}}$ должна совпадать с константой связи в гамильтониане (14.161). Тогда отношение вероятностей распада, согласно теории, должно быть равно

$$\frac{\Gamma_{\pi \rightarrow e}}{\Gamma_{\pi \rightarrow \mu}} = \frac{m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)}{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)} = 1,3 \cdot 10^{-4}, \quad (14.176)$$

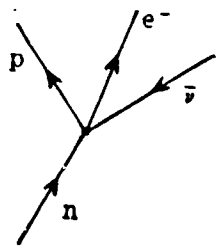
что согласуется с отношением вероятностей распада, найденным экспериментально [20].

4. β -распад нейтрона

В качестве последнего примера применения вычислительной техники квантовой теории поля проведем вычисления, связанные с некоторыми свойствами распада нейтрона в теории β -распада, которая была предложена Гелл-Манном и Фейнманом, а также Маршаком и Судершаном (см. гл. 10). Напомним, что они предложили следующий гамильтониан взаимодействия для описания не сохраняющего четность β -взаимодействия нуклонов:

$$\mathcal{H}_I = G : \left(\tilde{p}\gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) n \right) \times \\ \times \left(\tilde{e}\gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) v \right) : + \text{э. с.}, \quad (14.177)$$

где через p , n , e и $\bar{\nu}$ обозначены четырехкомпонентные спинорные операторы протона, нейтрона, электрона и нейтрино соответственно. Этот гамильтониан взаимодействия приводит к различным процессам. Диаграмма Фейнмана, изображенная на фиг. 61, соответствует распаду нейтрона $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$. Легко показать, что диаграмма на фиг. 61 приводит к матричному элементу



Ф и г. 61.

$$R = \frac{G}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{M_n M_p m_e}{E_n E_p E_e}} \left(\tilde{u}_p \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) u_n \right) \times \\ \times \left(\tilde{u}_e \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) v_\nu \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p_f - p_n \right). \quad (14.178)$$

Мы должны вычислить величину $|R|^2$. Рассмотрим для общности распад нейтрона, поляризованного вдоль некоторого направления \mathbf{n} , в его системе покоя. Для вычислений с поляризованными частицами нужно знать соответствующий оператор проектирования. Отметим, что квадрат опера-

тора $i\gamma_5\gamma\cdot n$ равен $+1$, если $n_\mu n^\mu = -1$, и этот оператор коммутирует с дираковским оператором $\gamma\cdot p + m$, если $p\cdot n = p_\mu n^\mu = 0$. Поэтому могут быть найдены собственные функции, принадлежащие одновременно обоим этим операторам. В системе покоя частицы $p = (M, 0, 0, 0)$, и так как должно выполняться равенство $p\cdot n = 0$, то $n_0 = 0$ (вектор n может быть произвольным). Отсюда следует, что $i\gamma_5\gamma\cdot n = -i\gamma_5\gamma\cdot n = i\gamma_5\gamma_0\gamma\cdot n\gamma_0 = = \Sigma\cdot n\gamma_0$. Поэтому общая собственная функция операторов $\gamma\cdot p + m = = \gamma_0 p_0 + m$ и $i\gamma_5\gamma\cdot n$ соответствует волновой функции покоящейся частицы со спином, ориентированным вдоль направления n . Таким образом, требуемый оператор проектирования равен $1/2 (1 - i\gamma\cdot n\gamma_5)$. Отметим, однако, что он имеет непосредственный физический смысл только в системе покоя частицы¹⁾.

Вероятность распада нейтрона (поляризованного вдоль направления n в своей системе покоя) на протон, антинейтрино (безотносительно к их поляризациям) и электрон (поляризованный вдоль направления n_e в своей системе покоя) равна

$$\frac{1}{VT} \sum_{\text{Спиновым состоянием протона и нейтрино}} |R|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p' - p \right) \frac{G^2}{(2\pi)^{12}} \frac{M_n M_p m_e}{E_n E_p E_e} \times \\ \times \text{Sp} \left[\frac{1}{2} (1 + i\gamma_5) \gamma_\nu \frac{\gamma\cdot p_p + M_p}{2M_p} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \frac{\gamma\cdot p_n + M_n}{2M_n} \frac{1 - i\gamma\cdot n_n \gamma_5}{2} \right] \times \\ \times \text{Sp} \left[\frac{1}{2} (1 + i\gamma_5) \gamma_\nu \frac{\gamma\cdot p_e + m_e}{2m_e} \frac{1}{2} (1 - i\gamma\cdot n_e \gamma_5) \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \frac{\gamma\cdot p_{(\nu)}}{2|p_{(\nu)}|} \right]. \quad (14.179)$$

Первый след соответствует нуклонным множителям, второй — лептонным. Следы можно упростить, если учесть, что $\gamma_5^2 = -1$, и поэтому $\gamma_5(1 \pm i\gamma_5) = \mp i(1 \pm i\gamma_5)$, а также, что $1/4(1 \pm i\gamma_5)^2 = 1/2(1 \pm i\gamma_5)$ и $(1 \mp i\gamma_5)(1 \pm i\gamma_5) = 0$. Используя эти соотношения, преобразуем след для нуклонных множителей к виду

$$\text{Sp} []_{\text{нукл.}} = \frac{1}{2^4 M_n M_p} \text{Sp} [\gamma_\nu \gamma\cdot p_p \gamma_\mu (1 - i\gamma_5) (\gamma\cdot p_n + M_n) (1 - i\gamma\cdot n_n \gamma_5)] = \\ = \frac{1}{2^4 M_n M_p} \text{Sp} [\gamma_\nu \gamma\cdot p_p \gamma_\mu (\gamma\cdot p_n + M_n) (1 - \gamma\cdot n_n) (1 + i\gamma_5)]. \quad (14.180)$$

Далее, поскольку след нечетного числа γ -матриц равен нулю, то

$$\text{Sp} []_{\text{нукл.}} = \frac{1}{2^4 M_n M_p} [\gamma_\nu \gamma\cdot p_p \gamma_\mu \gamma\cdot p_n (1 + i\gamma_5) - \\ - \gamma_\nu \gamma\cdot p_p \gamma_\mu M_n \gamma\cdot n_n - i\gamma_\nu \gamma\cdot p_p \gamma_\mu M_n \gamma\cdot n_n \gamma_5]. \quad (14.181)$$

Эти следы легко вычислить при помощи соотношений

$$\text{Sp} (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4 (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}), \quad (14.182a)$$

$$\text{Sp} (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_5) = -4 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (14.182b)$$

$$\text{Sp} (\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) = 0. \quad (14.182b)$$

1) Можно было бы, с другой стороны, ввести нековариантный оператор проектирования $1/2(1 - s\Sigma\cdot p)$, соответствующий состояниям с определенной спиральностью (см. статью Мишеля и Уайтмана [550]).

След нуклонных множителей оказывается равным

$$4(g_{\nu\beta}g_{\alpha\mu} - g_{\nu\mu}g_{\alpha\beta} + g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta} - i\varepsilon_{\nu\alpha\mu\beta})(p_p^\alpha p_n^\beta - M_n p_p^\alpha n_n^\beta).$$

Аналогично след лептонных множителей приводится к виду

$$4(g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta})(p_{(\nu)\alpha} p_{e\beta} - m_e p_{(\nu)\alpha} n_{e\beta}).$$

Используя соотношение

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} = -2!(g_\rho^\mu g_\sigma^\nu - g_\sigma^\mu g_\rho^\nu), \quad (14.183)$$

для произведения следов находим

$$4[p_{(\nu)} \cdot (p_n - M_n n_n)] [(p_e - m_e n_e) \cdot p_\nu]. \quad (14.184)$$

Для электрона в состоянии с определенной спиральностью в системе покоя электрона $n_{e0} = 0$ и $\mathbf{n}_e = s_e \mathbf{p}_e / |\mathbf{p}_e|$ (где $s_e = \pm 1$). Так как $n_{e\mu}$ преобразуется как 4-вектор, то в движущейся системе отсчета

$$n_{e0} = \frac{E_e}{m_e} (0 + v_e s_e) = s_e \frac{E_e}{m_e} v_e. \quad (14.185)$$

Поэтому вероятность перехода в нерелятивистском пределе по скорости протона пропорциональна выражению

$$G^2 M E_e E_{(\nu)} (1 + \cos \theta_\nu) (1 - s_e v_e), \quad (14.186)$$

где θ_ν — угол между направлением спина нейтрона и направлением испущенного антинейтрино. Эти предсказания теории, в частности угловые корреляции для антинейтрино, были подтверждены в опыте Телегди и др. [772]. Из формулы (14.186) вытекает, что при $v_e/c \sim 1$ вероятность обнаружения электрона со спиральностью $+1$ приблизительно равна нулю, а относительная вероятность того, что электрон имеет спиральность -1 , близка к единице. Поэтому электроны, испущенные при β -распаде нейтрона, поляризованы (левый винт). В рассматриваемом распаде нейтрона их угловое распределение изотропно. Это также было подтверждено в работе Телегди и др.

Тот факт, что испущенные при β -распаде электроны должны обладать значительной продольной поляризацией (порядка v_e/c), стимулировал разработку экспериментаторами и теоретиками методов для детектирования таких электронов. Были вычислены вновь эффективные сечения для

- а) рассеяния поляризованных электронов на ядре (рассеяние Мотта);
- б) рассеяния поляризованных электронов на поляризованных электронах (что может быть осуществлено путем рассеяния поляризованных электронов на ферромагнитных $3d$ -электронах железа в магнитном поле);
- в) круговой поляризации тормозного излучения поляризованных электронов;
- г) аннигиляции поляризованных позитронов в ферромагнитных веществах;

- д) комптоновского рассеяния поляризованного излучения.

Экспериментальные и теоретические работы по этому вопросу обсуждаются в обзоре Стерихаймера [741], к которому мы отсылаем читателя.

§ 6. Принципы симметрии и S -матрица

Инвариантность лагранжиана относительно определенных преобразований симметрии — пространственных отражений, преобразований Лоренца, зарядового сопряжения и т. д. — влечет за собой инвариантность

S -матрицы относительно таких же преобразований симметрии. Инвариантность S -матрицы означает, что

$$USU^{-1} = S, \quad (14.187)$$

где U — унитарный (или антиунитарный) оператор, порождающий преобразование симметрии в гильбертовом пространстве векторов состояния. Соотношение (14.187) можно также записать в виде

$$[U, S] = 0. \quad (14.188)$$

Поэтому U может быть назван константой столкновения. Только при условии, что $U^2 = 1$ и, следовательно, преобразование симметрии является дискретной операцией, U будет наблюдаемой, так как только при этом условии унитарный оператор U эрмитов. Однако следует вспомнить, что в случае непрерывных преобразований оператор U может быть записан в виде $\exp(i\theta G)$, где G — эрмитов оператор, который является генератором бесконечно малых преобразований. Рассматривая бесконечно малые преобразования, выводим, что $[1 + i\epsilon G, S] = 0 = [G, S]$. В силу эрмитовости оператора G состояния системы могут быть классифицированы при помощи собственных значений этого оператора. Тогда соотношение $[G, S] = 0$ гласит, что амплитуда перехода $\langle g'' | S | g' \rangle$ между двумя состояниями с различными собственными значениями оператора G должна быть равна нулю. Операторы энергии-импульса, момента количества движения, изотопического спина, странности, барионного числа, числа лептонов и т. д. являются примерами операторов типа G . Может быть приведено много примеров правил отбора, которые вытекают из факта существования такого оператора G , для которого $[S, G] = 0$. Наиболее знакомы, по-видимому, правило Лапорта для дипольного излучения при атомных переходах и правила отбора Ферми и Гамова — Теллера для β -распада ядер.

Когда оператор U соответствует дискретному преобразованию, причем $U^* = U$ и $U^2 = 1$ (например, пространственному отражению или зарядовому сопряжению), он является унитарным и эрмитовым¹⁾. Равенство нулю коммутатора $[S, U]$ вместе с эрмитовостью оператора U означает равенство нулю элементов S -матрицы между собственными состояниями оператора U с различными собственными значениями.

Мы проиллюстрируем следствия соотношения $[S, U] = 0$ в дискретном случае путем вывода некоторых правил отбора для распада позитрония из инвариантности квантовой электродинамики относительно операции зарядового сопряжения. При этом следует помнить, что собственными состояниями оператора U_c могут быть только состояния с нулевым зарядом (так как $U_c Q = -Q U_c$). Поэтому из требования инвариантности относительно зарядового сопряжения можно вывести правила отбора только для нейтральных систем. Инвариантность квантовой электродинамики относительно унитарного преобразования U_c , при котором

$$U_c A_\mu(x) U_c^{-1} = \eta_A A_\mu(x), \quad (14.189a)$$

$$U_c \psi(x) U_c^{-1} = \eta_\psi \tilde{\psi}(x) C, \quad (14.189б)$$

$$U_c \tilde{\psi}(x) U_c^{-1} = -\tilde{\eta}_\psi C^* \psi(x), \quad (14.189в)$$

$$C^T = -C; C^{-1} \gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}; C^* = C^{-1} \quad (14.189г)$$

¹⁾ Напомним, что при выборе $U^2 = +1$ (а, скажем, не $e^{i\beta}$) подразумевается определенный выбор фаз для спиновых операторов.

следует из возможности такого выбора фаз η_A и η_Ψ , что уравнения поля, перестановочные соотношения для операторов и гамильтониан \mathcal{H}_I инвариантны относительно преобразования $U_c: \mathcal{H}_I = U_c \mathcal{H}_I U_c^{-1}$. Из инвариантности перестановочных соотношений вытекает $|\eta_\Psi|^2 = |\eta_A|^2 = +1$. Выбор фазы

$$\eta_A = -1 \quad (14.190)$$

гарантирует инвариантность гамильтониана

$$\mathcal{H}_I(x) = -e: \tilde{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x) = j_\mu(x) A^\mu(x)$$

относительно преобразования U_c . [Напомним, что $U_c j_\mu(x) U_c^{-1} = -j_\mu(x)$.] Далее можно выбрать фазу оператора U_c так, чтобы $U_c |\Phi_0\rangle = 0$.

Рассмотрим систему, состоящую из электрона и позитрона и описываемую вектором состояния

$$|\Phi\rangle = \sum_{t,s} \int d^3p \int d^3q \chi(\mathbf{p}s; \mathbf{q}t) b_s^*(\mathbf{p}) d_t^*(\mathbf{q}) |\Phi_0\rangle, \quad (14.191)$$

где χ соответствует (в нерелятивистском предделе) волновой функции системы в импульсном пространстве. При преобразовании U_c состояние $|\Phi\rangle$ переходит в

$$\begin{aligned} U_c |\Phi\rangle &= \sum_{t,s} \int d^3p \int d^3q \chi(\mathbf{p}s; \mathbf{q}t) d_s^*(\mathbf{p}) b_t^*(\mathbf{q}) |\Phi_0\rangle = \\ &= - \sum_{t,s} \int d^3p \int d^3q \chi(\mathbf{p}s; \mathbf{q}t) b_t^*(\mathbf{q}) d_s^*(\mathbf{p}) |\Phi_0\rangle = \\ &= - \sum_{t,s} \int d^3p \int d^3q \chi(\mathbf{q}t; \mathbf{p}s) b_s^*(\mathbf{p}) d_t^*(\mathbf{q}) |\Phi_0\rangle. \end{aligned} \quad (14.192)$$

Таким образом, если функция χ симметрична относительно перестановки электрона и позитрона, то $|\Phi\rangle$ будет собственной функцией оператора U_c с собственным значением -1 , а если функция χ антисимметрична, то $|\Phi\rangle$ будет собственной функцией с собственным значением $+1$.

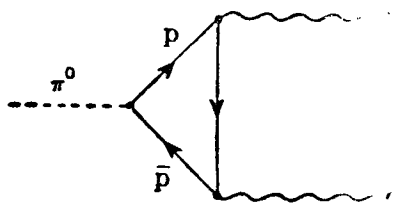
Легко проверить, что состояние системы из n фотонов

$$|\Phi_n\rangle = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{1,2} \int d^3k_1 \dots \int d^3k_n \varphi(k_1 \lambda_1, \dots, k_n \lambda_n) a_{\lambda_1}^*(k_1) \dots a_{\lambda_n}^*(k_n) |\Phi_0\rangle \quad (14.193)$$

является собственным состоянием оператора U_c с собственным значением $(-1)^n$. Из соотношения $[S, U_c] = 0$ следует, что амплитуда перехода $\langle \Phi_n | S | \Phi \rangle = \langle \Phi_n | U_c^{-1} S U_c | \Phi \rangle$ отлична от нуля только тогда, когда соответствующее зарядовому сопряжению квантовое число имеет одно и то же значение для начального и конечного состояний. Для 1S -состояния функция χ антисимметрична относительно перестановки электрона и позитрона, так что в этом случае $|\Phi\rangle$ есть собственное состояние оператора зарядового сопряжения с собственным значением $+1$. Поэтому такое состояние электронно-позитронной системы может аннигилировать только на четное число фотонов $2, 4, \dots$ (конечно, вероятность распада на 4 фотона в α^2 раз меньше вероятности распада на 2 фотона). Аналогично, поскольку волновая функция 3S -состояния симметрична относительно перестановки частиц, то электронно-позитронная система в этом состоянии может распадаться только на нечетное число фотонов.

Если теория, описывающая взаимодействие мезонов и нуклонов между собой и с электромагнитным полем, инвариантна относительно зарядового сопряжения, то, поскольку π^0 -поле при зарядовом сопряжении переходит само в себя, $U_c \pi^0 U_c^{-1} = \eta_{\pi^0} \pi^0$ ($\eta_{\pi^0}^2 = 1$ и фаза η_{π^0} вещественна), из факта распада π^0 -мезона на два γ -кванта следует, что $\eta_{\pi^0} = +1$.

Доказательство: Так как конечное состояние системы двух фотонов имеет зарядовую четность, равную $+1$, то и начальное состояние (π^0 -мезон) должно иметь ту же зарядовую четность. (Диаграмма Фейнмана, соответствующая этому распаду, показана на фиг. 62.) К тому же отметим, что приписание π^0 -мезону зарядовой четности $\eta_{\pi^0} = +1$ согласуется также с описанием взаимодействия между нейтральными псевдоскалярными мезонами и нуклонами при помощи инвариантной относительно зарядового сопряжения связи типа Юкава вида



Ф и г. 62.

$$\mathcal{H}_I = \sum_{i=1}^3 \tilde{\psi} \gamma_5 \tau_i \psi : \pi_i.$$

Доказательство: При зарядовом сопряжении $U_c : \tilde{\psi} \gamma_5 \tau_3 \psi : U_c^{-1} = : \tilde{\psi} \gamma_5 \tau_3 \psi :$. Поэтому для инвариантности третьего слагаемого необходимо, чтобы зарядовая четность η_{π^0} была равна $+1$.

Другое следствие инвариантности теории относительно операции зарядового сопряжения заключается в том, что амплитуда перехода между состояниями $|a\rangle$ и $|b\rangle$ равна амплитуде перехода между состояниями $|\bar{a}\rangle = U_c |a\rangle$ и $|\bar{b}\rangle = U_c |b\rangle$, где состояния $|\bar{a}\rangle$ и $|\bar{b}\rangle$ получаются заменой каждой частицы в состояниях $|a\rangle$ и $|b\rangle$ соответствующей античастицей.

Доказательство: Так как оператор U_c унитарный и предположено, что $[S, U_c] = 0$, то

$$\langle b | S | a \rangle = \langle b | U_c^* U_c S U_c^* U_c | a \rangle = \langle \bar{b} | S | \bar{a} \rangle. \quad (14.194)$$

Из инвариантности относительно зарядового сопряжения следует также, что заряд и магнитный момент частицы и античастицы имеют противоположные знаки.

Доказательство: Магнитный момент частицы равен среднему значению оператора $\int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] d^3x$, где \mathbf{j} — оператор полного тока. Если обозначить через $|a\rangle$ состояние частицы, а через $|\bar{a}\rangle$ — состояние античастицы с теми же квантовыми числами, то

$$\begin{aligned} \mu_a &= \langle a | \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] d^3x | a \rangle = \langle a | U_c^{-1} U_c \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] d^3x U_c^{-1} U_c | a \rangle = \\ &= - \langle \bar{a} | \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] d^3x | \bar{a} \rangle = -\mu_{\bar{a}}, \end{aligned} \quad (14.195)$$

так как $U_c j_\mu(x) U_c^{-1} = -j_\mu(x)$. Отметим, что поэтому истинно нейтральная (зарядово-самосопряженная) частица должна иметь нулевой магнитный момент. (Для ознакомления с дальнейшими следствиями см. работы Пайса и Йоста [612], Вольфенштейна и Равенхолла [866], Мишеля [549], Фейнберга и Вайнберга [236].)

Следствия инвариантности теории относительно операции обращения времени вследствие антиунитарного характера оператора $U_T = T$, порождающего это преобразование, отличаются от следствий из инвариантности относительно пространственного отражения и зарядового сопряжения. Напомним, что теорию считают инвариантной относительно обращения времени, если при соответствующем подборе фаз η_{IT} операторов поля при преобразовании U_T

$$U_T \Phi(x) U_T^{-1} = \eta_{\Phi T} \Phi(i, x), \quad (14.196a)$$

$$U_T \Psi(x) U_T^{-1} = \eta_{\Psi T} C^{-1} \gamma_5 \Psi(i, x) \quad (14.196b)$$

уравнения поля и перестановочные соотношения инвариантны, и

$$U_T \mathcal{H}_I(x) U_T^{-1} = \mathcal{H}_I(i, x). \quad (14.197)$$

Рассмотрим действие оператора U_T на ин-решение $|\Psi_a^+\rangle$ уравнения Липпмана — Швингера

$$|\Psi_a^+\rangle = |\Phi_a\rangle + \frac{1}{E_a - H_I + i\epsilon} H_I |\Psi_a^+\rangle, \quad (14.198)$$

которое сводится к состоянию плоской волны $|\Phi_a\rangle$ при $t = -\infty$. Если теория инвариантна относительно обращения времени T , $T H_I T^{-1} = H_I$, то

$$U_T |\Psi_a^+\rangle = U_T |\Phi_a\rangle + \frac{1}{E_a - H_I - i\epsilon} H_I U_T |\Psi_a^+\rangle. \quad (14.199)$$

В силу антиунитарного характера операции T знак перед $i\epsilon$ в знаменателе изменился, так что $U_T |\Psi_a^+\rangle$ является аут-решением уравнения Липпмана — Швингера, которое соответствует состоянию плоской волны $U_T |\Phi_a\rangle$ при $t = +\infty$. Ранее мы пришли к выводу (в гл. 7, 8 и 9), что применение операции U_T к состоянию $|\Phi_a\rangle$ меняет знак скоростей всех частиц, находящихся в этом состоянии, так что, например, если $|\Phi_a\rangle$ есть двухчастичное состояние, в котором частицы имеют скорости v_1 и v_2 , то в состоянии $U_T |\Phi_a\rangle$ частицы будут иметь скорости $-v_1$ и $-v_2$. Введем обозначение

$$U_T |\Phi_a\rangle = |\Phi_{Ta}\rangle. \quad (14.200)$$

Так как S -матрица определяется соотношениями $S_{ba} = \langle \Psi_b^{(-)} | \Psi_a^{(+)} \rangle$, то инвариантность теории относительно обращения времени требует, чтобы

$$\begin{aligned} S_{ba} &= (\Phi_b, S\Phi_a) = (\Psi_b^{(-)}, \Psi_a^{(+)}) = \\ &= \overline{(U_T \Psi_b^{(-)}, U_T \Psi_a^{(+)})} = \overline{(\Psi_{Tb}^{(+)}, \Psi_{Ta}^{(-)})} = \\ &= (\Psi_{Ta}^{(-)}, \Psi_{Tb}^{(+)}) = S_{TaTb}. \end{aligned} \quad (14.201)$$

Это утверждение называют теоремой «детального равновесия». При определенных обстоятельствах (когда теория инвариантна относительно вращений и в качестве базисных векторов $|\Phi_a\rangle$ выбраны собственные состояния оператора полного момента количества движения) соотношение (14.201) сводится к утверждению, что S -матрица симметрична [140].

Ранее уже упоминалась CPT -теорема [518], утверждающая, что теория поля будет автоматически инвариантна относительно произведения преобразований TCP ($= U_T U_C U_P$), взятого в любом порядке, если она обладает следующими свойствами:

- инвариантность относительно собственных преобразований Лоренца;
- гамильтониан эрмитов;

- в) установлена обычная связь между спином и статистикой;
 г) операторы поля локальны.

Более точно выражаясь, можно показать, что возможен такой выбор фаз η_{iP} , η_{iC} , η_{iT} для различных операторов поля ($\varphi_i = \varphi, \psi, A_\mu$ и т. д.) при преобразованиях P , C и T , который приведет к равенству нулю коммутатора $[TCP, H] = 0$. В частности, такой выбор, когда $\eta_{iT}\eta_{iC}\eta_{iP} = 1$, гарантирует, что теория инвариантна относительно CPT -преобразования, даже если нет инвариантности относительно преобразований C , P и T в отдельности. Такой выбор фаз всегда можно сделать, так как если теория не инвариантна относительно C , P и T в отдельности, соответствующие им фазы произвольны и могут быть выбраны должным образом. С другой стороны, если имеется инвариантность относительно каждого из преобразований T , C и P , так что их фазы фиксированы, то фазы η_{iC} и η_{iP} выбираются так, чтобы была инвариантность относительно C - и P -преобразований, а фаза η_{iT} — так, чтобы было выполнено $\eta_{iT}\eta_{iP}\eta_{iC} = 1$. Мы не будем здесь доказывать эту важную теорему, так как имеется несколько блестящих обзорных статей (Людерса [518], Паули [632], Граверта, Людерса и Рольника [336], см. также статью Файнберга и Вайнберга [236]).

Одно из следствий CPT -теоремы заключается в том, что масса частицы всегда равна массе ее античастицы. Из этой теоремы следует также, что для нестабильной частицы с массой m времена жизни частицы и античастицы совпадают (результат Ли, Оме и Янга [489]). При доказательстве последнего утверждения предполагается, что в рамках только сильных взаимодействий частица стабильна, а ее нестабильность обусловлена слабыми взаимодействиями, эффект которых достаточно рассматривать только в первом порядке. При помощи гамильтониана сильных взаимодействий H определяют такое одночастичное состояние $|\Psi_a\rangle$, что в системе, где частица покоится, $H_{\text{сильн.}}|\Psi_a\rangle = m|\Psi_a\rangle$. В результате слабых взаимодействий (гамильтониан $H_{\text{слаб.}}$) частица распадается. Конечное состояние, в котором находятся частицы, образованные при распаде, обозначим через $|\Psi_b\rangle$. Тогда полная вероятность перехода в единицу времени определяется матричным элементом

$$\delta^{(4)}(P_b - P_a) \langle b | M | a \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \Psi_b | H_{\text{слаб.}}(t) | \Psi_a \rangle dt$$

и пропорциональна выражению

$$\Gamma_a \propto \frac{1}{m} \int |\langle b | M | a \rangle|^2 \delta^{(4)}(P_b - P_a) db. \quad (14.202)$$

Интегрирование проводится по всем возможным конечным состояниям. Ясно, что включение оператора TCP в матричный элемент $|\langle b | M | a \rangle|^2 = |(\Psi_b, H_{\text{слаб.}} \Psi_a)|^2$ превратит частицы в античастицы, откуда заключаем, что $\Gamma_a = \Gamma_{\bar{a}}$.

Квантовая электродинамика

В этой главе мы приступаем к изложению методов, предложенных для обхода трудностей с расходимостями, присущих любой релятивистской локальной теории поля с нетривиальным взаимодействием. Эти методы, разработанные в основном Фейнманом и Швингером, применяются с поразительным успехом в квантовой электродинамике, где благодаря малости константы связи теория возмущений приводит к замечательному согласию между вычислениями и экспериментальными данными по лэмбовскому сдвигу, разности энергий основных состояний орто- и пара-позитрония, сверхтонкой структуре водорода, ширине линий радиационных атомных переходов и другим атомным явлениям. В формализме Фейнмана — Швингера — Дайсона трудности, вызванные возникновением расходящихся выражений при вычислении радиационных поправок, обходят путем включения появляющихся бесконечных констант в некоторые параметры, которым апостериори приписываются конечные наблюдаемые экспериментально значения. Этот подход получил название метода перенормировок.

Можно проследить, что при его применении в определенных практически важных вариантах теории поля *все* бесконечности в разложении S -матрицы сводятся к некоторым основным (в квантовой электродинамике, например, к поправкам к массе и заряду электрона). Дайсон показал, что если в квантовой электродинамике заменить всюду эти бесконечные (из-за поправок) значения параметров массы и заряда их реально наблюдаемыми значениями, то все коэффициенты степенного разложения S -матрицы станут конечными. В своей первоначальной форме процедура перенормировок была применима только к степенным разложениям, в частности к разложению S -матрицы в степенной ряд. В случае квантовой электродинамики необходимость использования степенного ряда не является очень сильным ограничением, так как малость константы связи α позволяет надеяться, что даже если степенной ряд и не будет сходиться, такое разложение может оказаться полезным асимптотическим разложением.

Однако в мезонных теориях большая величина констант связи заставляет сомневаться в сходимости разложения теории возмущений и вообще в полезности такого разложения для получения предсказаний теории. Челлен, Валатин и другие дали формулировку процедуры перенор-

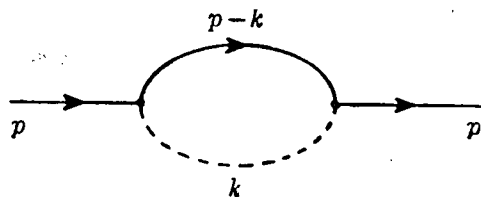
мировок, которая свободна от ограничения случаем степенных рядов¹⁾.

Вместе с тем все еще не выяснен вопрос, обусловлены ли ультрафиолетовые расходимости использованием неадекватных математических методов или они внутренне присущи современным формулировкам физической теории. В настоящее время считают, что второе утверждение, по-видимому, «более верно». Мы вернемся к этому вопросу в конце обсуждения программы перенормировок.

В этой главе мы изложим методы перенормировок в применении к разложению S -матрицы в ряд теории возмущений в квантовой электродинамике. В § 7 мы кратко изложим процедуру перенормировок в псевдоскалярной мезонной теории со связью без производных.

§ 1. Собственная энергия фермиона

Ранее отмечалось, что при разложении S -матрицы теории взаимодействующих бозонов и фермионов $[\mathcal{L}_I = G : \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) : \phi(x)]$ один из возможных процессов второго порядка соответствует излучению



Ф и г. 63.

с последующим поглощением виртуального бозона фермионом. Диаграмма Фейнмана, соответствующая этому процессу, вновь приведена на фиг. 63. Мы уже выписывали матричный элемент для случая, когда линии p являются внешними; он равен

$$R = \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{1}{4\pi^3} T \frac{M_0}{E_0(p)} \bar{w}^s(p) \int \Gamma \frac{\gamma \cdot (p-k) + M}{(p-k)^2 - M_0^2 + i\epsilon} \times \\ \times \Gamma \frac{1}{k^2 - \mu_0^2 + i\epsilon'} w^s(p) d^4k, \quad (15.1)$$

$$E_0(p) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M_0^2},$$

где волновые функции нормированы на объем V . Здесь и ниже мы будем обозначать через $\Sigma^{(2)}(p)$ оператор

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \int \Gamma \frac{1}{\gamma \cdot (p-k) - M_0 + i\epsilon} \Gamma \frac{d^4k}{k^2 - \mu_0^2 + i\epsilon'}. \quad (15.2)$$

Вообще может случиться, что диаграмма на фиг. 63 будет частью более сложной диаграммы, так что выходящие фермионные линии будут соответствовать функциям распространения фермионов. Множитель, соответствующий такой внутренней части диаграммы, запишется в виде

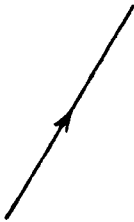
$$4\pi \left(\frac{i}{(2\pi)^4} \right) \frac{1}{\gamma \cdot p - M_0} \Sigma^{(2)}(p) \frac{1}{\gamma \cdot p - M_0}.$$

¹⁾ Мастерски изложенный исторический обзор развития квантовой электродинамики дан в предисловии Швингера к сборнику избранных статей по квантовой электродинамике под его редакцией [724]. Для правильной оценки новейшего развития электродинамики в свете первых успешных шагов, сделанных в 30-х годах, читателю необходимо ознакомиться с содержанием этого сборника.

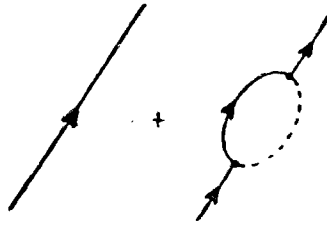
Очень важно понимать, что вклад от диаграммы на фиг. 63 можно рассматривать как поправку к свободной функции распространения $(\gamma \cdot p - M_0)^{-1}$ (фиг. 64), возникающую в низшем порядке теории возмущений. Тогда модифицированная функция распространения будет соответствовать диаграмме на фиг. 65 и ее аналитическое выражение будет иметь вид

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\gamma \cdot p - M_0} + \frac{1}{\gamma \cdot p - M_0} \frac{i}{4\pi^3} \Sigma^{(2)}(p) \frac{1}{\gamma \cdot p - M_0} \right].$$

Ясно, что такая точка зрения может быть распространена на диаграммы собственной энергии фермиона высших порядков. Сначала, однако, рассмотрим случай, когда линии p являются внешними линиями.



Фиг. 64.



Фиг. 65.

Следует помнить, что в картине взаимодействия развитие во времени вектора состояния $|\Phi(t_0)\rangle = |\Phi(p_s)\rangle = b_s^*(p) |\Phi_0\rangle$, описывающего в момент времени t_0 (в отдаленном прошлом) свободный фермион, определяется уравнением

$$|\Phi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Phi(t_0)\rangle, \quad (15.3)$$

где $U(t, t_0)$ — матрица \hat{U} [см. (11.141)]. В результате взаимодействия фермиона с квантованным бозонным полем энергия состояния $|\Phi(p_s)\rangle$ изменяется, и энергетический сдвиг ΔE определяется соотношением

$$e^{-i\Delta E(t-t_0)} = \frac{\langle \Phi(p_s) | U(t, t_0) | \Phi(p_s) \rangle}{\langle \Phi_0 | U(t, t_0) | \Phi_0 \rangle}. \quad (15.4)$$

В (15.4) разность времен $t - t_0$ должна быть большой и любая осцилляционная зависимость должна быть от t до t_0 усреднена. Из соотношения (15.4) следует, что возникающее в результате взаимодействия изменение энергии состояния $|\Phi(p_s)\rangle$ проявляется в изменении фазы. [С другой стороны, можно было бы использовать соотношение (11.189) для сдвига уровня; однако эта формула не содержит столь явным образом большую разность времен $T = t - t_0$.] Множитель $\langle \Phi_0 | U(t, t_0) | \Phi_0 \rangle$ сокращается с бесконечным фазовым множителем, содержащимся в числителе правой части (15.4) из-за несвязных диаграмм для перехода вакуума в вакуум. Таким образом, в низшем порядке по ΔE мы получаем

$$\begin{aligned} -i\Delta ET &= (iG)^2 \langle \Phi(p_s) | \int d^4x_1 \int d^4x_2 \times \\ &\times P\{ : \tilde{\psi}(x_1) \Gamma \psi(x_1) \varphi(x_1) : : \tilde{\psi}(x_2) \Gamma \psi(x_2) \varphi(x_2) : \}_C | \Phi(p_s) \rangle = \\ &= \frac{1}{4\pi^3} T \frac{M_0}{E_0(p)} \tilde{w}^s(p) \Sigma^{(2)}(p) w^s(p) \end{aligned} \quad (15.5a)$$

или

$$\Delta E = \frac{i}{4\pi^3} \frac{M_0}{E_0(p)} \tilde{\omega}^s(p) \Sigma^{(2)}(p) \omega^s(p). \quad (15.56)$$

Единственные измерения, которые можно сделать в случае свободной частицы, сводятся к измерению ее энергии E и импульса p . Из них можно образовать только одну инвариантную величину — массу частицы

$$E^2 - p^2 = M^2. \quad (15.6)$$

Поэтому влияние релятивистски инвариантного взаимодействия на свободную частицу исчерпывается изменением ее массы на некоторую величину, скажем на δM . Тогда изменение энергии «голой» частицы должно определяться из соотношения

$$E_0 + \Delta E_0 = \sqrt{(M_0 + \delta M)^2 + p^2}. \quad (15.7)$$

Разлагая это равенство по δM , находим

$$E_0 + \Delta E_0 = \sqrt{M_0^2 + p^2} + \frac{M_0 \delta M}{\sqrt{M_0^2 + p^2}} + O((\delta M)^2) \quad (15.8)$$

и в первом порядке

$$\Delta E_0 = \frac{M_0 \delta M}{E_0}. \quad (15.9)$$

Другими словами, в инвариантной теории собственная энергия в первом порядке должна определенным образом зависеть от импульса частицы, т. е. она должна быть обратно пропорциональна $\sqrt{M_0^2 + p^2}$. Тот факт, что собственная энергия обратно пропорциональна энергии E_0 , был обнаружен еще Вайскопфом [825, 826] при изучении собственной энергии методами теории возмущений в теории дырок.

Эффект собственной энергии для свободной частицы может привести только к изменению ее массы, и это служит основой современного подхода к преодолению трудностей с расходимостями. Первый шаг в этом направлении был сделан Крамерсом [462] в 1947 г. в связи с классической электродинамикой. Он отметил, что ни в одном опыте нельзя измерить «голую» массу электрона M_0 и что наблюдаемой массой является только $(M_0 + \delta M)$, для которой мы введем обычное обозначение M , т. е.

$$M = M_0 + \delta M. \quad (15.10)$$

Поэтому Крамерс, принимая выдвинутую Гейзенбергом точку зрения на квантовую механику, предположил, что в теории должна играть роль только наблюдаемая величина M , а не величины M_0 или δM в отдельности. Этот принцип известен как принцип *перенормировки массы*. Крамерс указал, что изменение массы может оказаться бесконечным (надеясь, однако, что в будущей теории оно будет конечным и малым), но это не имеет значения, так как физически наблюдаемые величины, например уровни энергии и эффективные сечения, выраженные через наблюдаемую массу M , будут конечными. Этот принцип оказался на практике исключительно плодотворным и привел к успешному развитию в последние годы квантовой электродинамики и псевдоскалярной мезонной теории.

Перенормировка массы может быть явным образом включена в теорию, как это уже объяснялось в гл. 12, путем введения в лагранжиан контрчлена. Лагранжиан свободного поля содержит член $M_0 : \tilde{\psi}(x) \psi(x) :$, где M_0 — масса «голого» кванта. Этот член может быть записан в виде $M : \tilde{\psi}(x) \psi(x) : - \delta M : \tilde{\psi}(x) \psi(x) :$, а затем член $-\delta M : \tilde{\psi}(x) \psi(x) :$

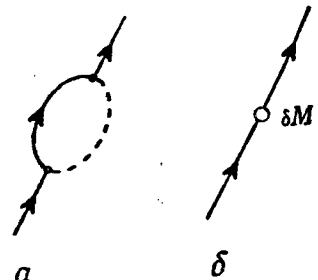
рассматривается как часть лагранжиана взаимодействия наряду с $G : \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \phi(x) :$. Точнее говоря, вклад от члена $-\delta M : \bar{\psi}(x) \psi(x) :$ всегда должен рассматриваться вместе с вкладом от диаграмм собственной энергии фермиона (они взаимно уничтожаются в случае свободной частицы). Например, следует рассматривать диаграммы на фиг. 66 вместе. Кругок на диаграмме b соответствует вкладу от члена $\delta M : \bar{\psi} \psi :$. Затем бесконечная величина δM определяется таким образом, чтобы вклад от собственно-энергетической диаграммы a взаимно уничтожился с вкладом от диаграммы b в случае свободного фермиона, масса которого в точности равна наблюдаемой массе M . В более общем случае, если мы рассмотрим все собственно-энергетические диаграммы, вносящие вклад в амплитуду вероятности того, что электрон в состоянии $|\Phi(E_p, p_s)\rangle$ ($E_p = (p^2 + M^2)^{1/2}$) останется в этом же состоянии, то эта амплитуда, с точностью до численных множителей, есть

$$A = \tilde{\omega}^s(p) [1 + \Sigma'(p)] \omega^s(p), \quad (15.11a)$$

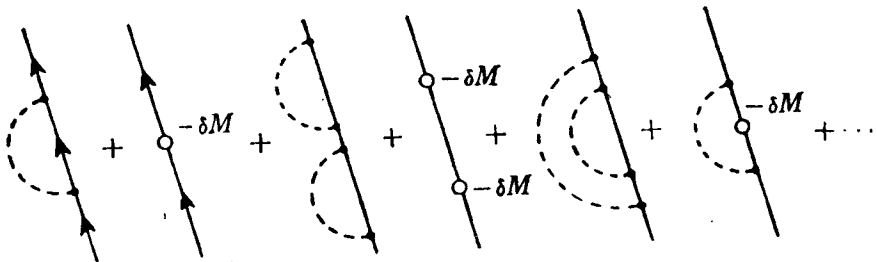
где через $\Sigma'(p)$ обозначен вклад от всех собственно-энергетических диаграмм фермиона, часть из которых изображена на фиг. 67. Требование перенормировки массы заключается в том, что при $p = M, p^2 = M^2$, величина $\Sigma'(p)$ должна быть равна нулю [так как мы включили в $\Sigma'(p)$ вклад от члена $\delta M'$]. Когда диаграммы на фиг. 67 соответствуют модификации внутренней линии, первоначальная функция распространения $S_F(p) = (p - M)^{-1}$ превращается в

$$S'_F(p) = \frac{1}{\gamma \cdot p - M} + \frac{1}{\gamma \cdot p - M} \Sigma'(p) \frac{1}{\gamma \cdot p - M}. \quad (15.11b)$$

Принцип перенормировки массы может быть также сформулирован как требование, чтобы полюс модифицированной функции распростра-



Ф и г. 66.



Ф и г. 67.

нения $S'_F(p)$, рассматриваемой как функция от $\gamma \cdot p$, находился в точке, соответствующей экспериментальной массе частицы. Отметим, что эти требования фиксируют величину δM . Например, поскольку диаграмма a на фиг. 66 дает вклад в порядке G^2 , то это определяет величину δM в этом порядке. Аналогичным образом определяются члены разложения величины δM по G^2 в высших порядках. Чтобы учесть собственную энергию мезона в лагранжиан, нужно ввести контрчлен $\delta\mu^2 : \phi^2(x) :$. Мы вернемся к этому позже, в § 8.

Вычислим теперь во втором порядке теории возмущений собственную энергию электрона (или, что эквивалентно, величину δm), возникающую из-за его взаимодействия с квантованным электромагнитным полем. В этом случае формула (15.2) приобретает вид

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \int d^4k \gamma^\mu \frac{\gamma \cdot (p-k) + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{1}{k^2 + i\epsilon'}; \quad (15.12)$$

и нас интересует только случай свободной частицы, когда $\not{p} = m$, $p^2 = m^2$. Используя соотношения

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4, \quad (15.13a)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu, \quad (15.13b)$$

получаем

$$\Sigma^{(2)}(\not{p} = m) = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} 2 \int \frac{\gamma \cdot k + m}{-2p \cdot k + k^2} \frac{d^4k}{k^2 + i\epsilon}. \quad (15.14)$$

При больших k оба знаменателя ведут себя как k^2 . В этом пределе вклад от члена $\gamma \cdot k$ равен нулю из соображений симметрии, и подынтегральное выражение при больших k пропорционально $k^3 dk/k^4$. Поэтому интеграл логарифмически расходится. Хотя здесь не учитывалось, что метрика является не евклидовой, а гиперболической, ниже будет показано, что и более тщательный анализ подтверждает этот результат. То, что собственная энергия электрона в квантовой электродинамике должна быть бесконечной, было выяснено еще в 1929 г. Уже в те годы Гейзенберг и Паули [362, 363] указали на это, а Уоллер [814], Оппенгеймер [604], Розенфельд [675] и другие вычислили собственную энергию электрона в одноэлектронной теории Дирака и обнаружили, что она квадратично расходится. В 1934 г. Вайскопф [825, 826] заново рассчитал собственную энергию электрона, используя дираковскую теорию дырок, и нашел, что расходимость является только логарифмической. В расчетах «старинными методами» электромагнитной собственной энергии обычно рассматривали отдельно вклад от статического кулонова поля и вклад от поперечного поля (см., например, работу Вайскопфа [828]). Эта методика подсказывалась нерелятивистским пределом, в котором преобладает вклад от статического поля.

Интересно изучить взаимосвязь между собственной энергией, появляющейся в квантовой электродинамике, и собственной энергией, встречающейся в классической теории излучения¹⁾, и понять различие между ними. Проще всего ввести собственную энергию в классической электродинамике, отождествив ее с электрической и магнитной энергиями собственного поля электрона. Другой подход, принадлежащий Лоренцу [508, 509], основывается на том, что собственное поле электрона затрудняет ускорение электрона во внешнем поле и поэтому эквивалентно добавочной массе электрона. Эта собственная масса дается выражением, аналогичным выражению для собственной энергии. Однако между ними имеется некоторое различие, которое вызывает значительные затруднения в классической теории собственной энергии. В классической теории собственная энергия равна (исключая численный множитель, равный $\frac{1}{2}$) e^2/r_0 , где r_0 — «радиус» электрона. Таким образом, точечный электрон приводит к бесконечной собственной энергии.

Если приписать электрону конечный радиус, то взаимодействие электрона с электромагнитным полем будет содержать форм-фактор,

¹⁾ См., например, монографию Гайтлера [376].

заметно отличающийся от единицы, когда длина волны $\lambda/2\pi$ близка по величине к радиусу r_0 . Положив

$$r_0 = \frac{1}{k_{\text{макс}}}, \quad (15.15)$$

мы видим, что классическая собственная энергия e^2/r_0 пропорциональна величине $k_{\text{макс}}$, т. е. линейно расходится по k . Величину $k_{\text{макс}}$ обычно называют радиусом обрезания.

В то время была весьма популярна теория, в которой масса электрона полностью приписывалась энергии самодействия (см. книгу Абрагама и Беккера [4]). В такой теории радиус электрона равен

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}, \quad (15.16)$$

и эту величину принято называть «классическим радиусом электрона». Пуанкаре [642—644] указал на несколько недостатков такой модели. Например, если вычислить импульс, переносимый полем при движении электрона со скоростью v , то этот импульс оказывается соответствующим частице с массой покоя, которая не совпадает с получаемой из соотношения (15.16). Другими словами, эта модель не дает ни правильных трансформационных свойств, ни правильной взаимосвязи между энергией и импульсом. На этом основании Пуанкаре приходит к выводу, что, кроме электромагнитных сил, должны быть и какие-то другие добавочные силы, которые дают добавочную собственную энергию электрона. Замечания Пуанкаре связаны с так называемой проблемой собственных натяжений, которая будет кратко обсуждена ниже.

В отличие от классической теории собственная энергия, вычисленная в дираковской теории дырок, пропорциональна величине

$$\frac{e^2}{4\pi\hbar c} mc^2 \ln \left(\frac{\hbar k_{\text{макс}}}{mc} \right), \quad (15.17)$$

т. е. она расходится только логарифмически. Другое важное отличие заключается в том, что в квантовой теории собственная энергия зависит от массы покоя электрона m , тогда как в классической теории в выражении для собственной энергии масса m не содержится. Уже эти различия указывают, что проблема собственной энергии в квантовой теории имеет совсем другую природу, чем в классической теории. Существенно, что серьезные отклонения от классического поведения начинаются уже на расстояниях порядка комптоновской длины \hbar/mc . Классический радиус электрона в 137 раз меньше комптоновской длины волны электрона. Таким образом, если рассматривать все меньшие и меньшие расстояния, то квантовые эффекты должны быть учтены прежде, чем возникнут возможные эффекты классического радиуса электрона. Поэтому кажется маловероятным, что решение проблемы собственной энергии в классической теории окажется необходимым или достаточным для решения квантовомеханической задачи.

Если в дираковской теории дырок мы захотим приписать основную часть массы электрона его собственной энергии, то, согласно формуле (15.17), следует постулировать радиус обрезания, равный по порядку величины

$$R_{\text{макс}} = \frac{\hbar}{mc} e^{-137}. \quad (15.18)$$

Надо иметь в виду, что на расстояниях порядка комптоновской длины волны мезона $\hbar/\mu_{\pi c}$ (гораздо больших $R_{\text{макс}}$) могут образовываться виртуальные мезоны, которые в свою очередь могут сильно взаимодействовать с виртуальными нуклонами. Таким образом, квантовая электродинамика может оказаться неприменимой гораздо раньше, чем будут достигнуты энергии, соответствующие длине (15.18). В этой связи заметим, что причиной нарушения квантовой электродинамики может оказаться взаимодействие электромагнитного и электронно-позитронного полей с другими полями.

Несмотря на различия между классической и квантовой теорией, были предприняты многочисленные попытки таких переформулировок классической теории Максвелла — Лоренца, которые при наличии точечных зарядов оказались бы свободны от расходимостей. Если бы удалось построить классическую электродинамику, которая не содержала бы трудностей с бесконечной собственной энергией и конечными собственными натяжениями (взрывающийся электрон), и если бы эту теорию можно было проквантовать, то проблема построения внутренне непротиворечивой квантовой электродинамики, казалось, была бы разрешена. Было много успешных попыток построить такую классическую теорию, но ни одна из них не внесла ничего нового в разрешение квантовой проблемы.

Так, в подходе Вентцеля [832, 833, 836] используется тот факт, что точечный заряд можно рассматривать как предельный случай размазанного, когда пространственно-подобный вектор, соответствующий радиусу электрона, стремится к нулю. С другой стороны, Дирак [173, 174] (с предшествующими работами можно познакомиться по обзору Элизера [220]) использовал возможности, связанные с существованием запаздывающих и опережающих решений уравнений Максвелла. Он определил «собственное» и «внешнее» поля как полусумму и полуразность соответственно запаздывающего и опережающего полей. Такое разбиение полей инвариантно. Он сохранил теорию Максвелла — Лоренца для описания поля вплоть до точечного электрона и показал, что приводящие к бесконечностям члены можно вычесть лоренц-инвариантным способом. Это соответствует вычитанию собственного поля из полного поля для получения силы, действующей на данный электрон. Вычитание не нарушает никаких законов сохранения, так как последовательно учитывается реакция поля излучения на движение электронов. Однако в обсуждаемой классической теории Дирака свободный электрон претерпевал бы самоускоренное движение. В этом отношении теория Дирака не удовлетворительна.

Другой возможной классической теорией, тесно связанной с приведенной выше теорией Дирака, является теория действия на расстоянии Уилера и Фейнмана [842, 843]. В теории действия на расстоянии электромагнитное поле снова разбивается инвариантным образом на собственное и внешнее поля. При этом постулируется, что собственное поле данного электрона не производит обратного действия на породившую его частицу. Таким образом, в теории Уилера и Фейнмана нет таких понятий, как собственная энергия частицы. Развитый формализм называли теорией действия на расстоянии, потому что поля являются чисто вспомогательными сущностями, не имеющими собственных степеней свободы. Авторы проинтегрировали уравнения движения частиц, так что поля в явном виде не появляются. В их теории требуется, чтобы взаимодействие между частицами осуществлялось посредством полусуммы запаздывающего и опережающего полей. С этой точки зрения реакция излучения возникает вследствие статистического механизма (а не имеет чисто электродинами-

ческое происхождение), и все испущенное излучение в конечном итоге поглощается.

Другая очень интересная теория точечного электрона была разработана Штюкельбергом [746, 747]. В его теории не только собственная энергия электрона оказывается конечной, но и получается равное нулю собственное натяжение. Вследствие кулоновского отталкивания точечный заряд стремится расширяться, что приводит к бесконечной собственной энергии и конечному собственному натяжению. Идея Штюкельберга состоит в том, что если, кроме электромагнитного взаимодействия, существует другой вид взаимодействия, характеризуемый «новым» (например, мезонным) зарядом, и новое взаимодействие приводит к притяжению одноименных зарядов, то можно уравновесить кулоновское отталкивание. Чтобы не было наблюдаемых эффектов, когда заряды расположены далеко друг от друга, необходим малый радиус действия новых сил. Поэтому Штюкельберг постулировал существование взаимодействия электрона с массивным скалярным полем. Именно при таком взаимодействии одноименные частицы притягиваются, причем радиус действия соответствующих сил мал. Штюкельберг нашел, что при $e^2 = f^2$ (f — константа связи со скалярным полем) полная классическая собственная энергия конечна, а собственное натяжение равно нулю.

Бопп [72] и Ланде и Томас [477, 478, 479] развили теорию, аналогичную теории Штюкельберга, в которой вместо скалярного поля взято векторное. Хотя векторное поле приводит к отталкиванию между частицами одинакового заряда, они предположили, что следует вычитать полную энергию векторного поля из энергии электрона. Это делает компенсацию возможной, но энергия уже не положительна.

Фактически первой релятивистски и калибровочно-инвариантной классической теорией, в которой получается конечная собственная энергия и конечное собственное натяжение, является теория Борна и Инфельда [74, 75, 76]. В их теории уравнения Максвелла заменены нелинейной системой уравнений, переходящей в пределе слабых полей в систему уравнений Максвелла. Из-за нелинейности квантование становится почти невозможным. Кроме того, в их теории при наличии точечных зарядов по-прежнему существуют сингулярности.

Нелинейные унитарные теории поля¹⁾ были предложены Ми (см. книгу Паули [620]), Розеном [672, 673], Йели (не опубликовано), Финкельштейном [259] и Дреллом [182]. В унитарных теориях поля частицы возникают не как сингулярности поля, а как малые объемы, в которых сосредоточены заряд и энергия поля. В таких теориях уравнения движения частиц вытекают из уравнений поля. Именно в этом отношении унитарные теории отличаются от теорий, в которых частицы представляются сингулярностями поля. В последнем случае уравнения движения теряют смысл в этих сингулярностях, и поэтому вообще не могут определять движение частицы.

Унитарная теория обязательно должна быть нелинейной, поскольку если уравнения линейны, то одна частица не может оказывать влияния на другую. Если фиксировать заряд частиц, то в такой теории однозначно получится дискретный спектр масс. Розен [672, 673] и Йели (не опубликовано) показали, что некоторые из обычных классических теорий поля, например теория дираковского поля, взаимодействующего посредством

¹⁾ Мы не включаем сюда общую теорию относительности Эйнштейна и его единые теории.

скалярной связи с полем Клейна — Гордона, допускают существование статических и сферически-симметричных решений, которые могут быть интерпретированы как частицы. Эти решения не имеют сингулярностей и квадратично интегрируемы, так что классические бесконечности никогда не появляются. Квантование унитарных теорий с формальной стороны было рассмотрено Финкельштейном [259].

Дирак [177—180] развил классическую теорию непрерывно распределенных зарядов, движущихся согласно уравнению движения Лоренца. Характерная черта этой теории заключается в том, что в ней встречается только отношение заряда к массе e/m , а не заряд e и масса m в отдельности. Однако в существующей формулировке теории может быть введено только одно отношение e/m . Дирак считал, что будет найден новый метод квантования этой теории, в которой будет введена постоянная Планка \hbar и в то же время будет объяснено, почему электрический заряд всегда кратен заряду электрона e . Тогда была бы установлена связь с постоянными e и \hbar и тем самым было бы зафиксировано значение постоянной тонкой структуры $e^2/4\pi\hbar c$.

Во многих других классических теориях стремились ввести радиус электрона релятивистски инвариантным образом. При этом встречаются трудности, связанные с необходимостью задать распределение заряда в согласии с причинностью в смысле теории относительности. Так, рассмотрим поведение абсолютно жесткого электрона, на который падает пакет электромагнитных волн. Как только фронт пакета достигнет края распределения заряда, весь электрон в целом начнет двигаться. Таким образом, импульс будет передан мгновенно, что противоречит релятивистскому закону причинности. Поэтому были предприняты попытки ограничить эти нарушения причинности пространственно-временными интервалами, чтобы не возникало противоречий с опытом. (В этой связи см. работу Кретьена и Пайерлса [130].)

Были развиты линейные теории с протяженным источником. В классической теории лучшими среди них являются теории Боппа [73], Пайерлса и Мак-Мануса [526, 635], а также Фейнмана [248]. Мак-Манус [526] предположил существование нелокального взаимодействия вида, о котором говорилось в § 3 гл. 11. Предложенный им лагранжиан взаимодействия

$$\int \mathcal{L}_I(x) d^4x = - \iint j^\mu(x) F[(x-x')^2] A_\mu(x') d^4x d^4x' \quad (15.19)$$

соответствует усреднению взаимодействия по пространственно-временной области. Ядро F релятивистски инвариантно, так как оно зависит только от инвариантного четырехмерного интервала между точками. На функцию F налагается требование, чтобы она достаточно быстро убывала, когда квадрат интервала $R^2 = (x-x')^2$ становится большим, так что функция F может удовлетворять условию

$$\int F(x^2) d^4x = 1, \quad (15.20)$$

выполнение которого необходимо, чтобы сделать полный заряд конечным и равным e . Такие функции F можно найти, рассматривая четырехмерные фурье-образы $g(k^2)$ функций $F(R^2)$

$$F(R^2) = \int e^{-ik \cdot (x-x')} g(k^2) d^4k. \quad (15.21)$$

Одна из подобных функций, которая дает ядро $F(R^2)$, удовлетворяющее поставленным выше требованиям, имеет вид

$$g(k^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{1 + (k^2 r_0^2)^2} \quad (15.22)$$

Таким образом, релятивистски инвариантно введен конечный радиус электрона. Теория Мак-Мануса, в которой электрон представлен распределением заряда и в пространстве и во времени, дает конечную собственную энергию электрона.

Фейнман [248] ввел конечный радиус электрона непосредственно во взаимодействие между двумя электронами, а не во взаимодействие электрона с электромагнитным полем, так как его теория сформулирована на языке действия на расстоянии. Впоследствии было показано, что для определенного класса функций F теории Мак-Мануса и Фейнмана эквивалентны. Большое преимущество этих теорий заключается в том, что они могут быть проквантованы [249] и действительно приводят к конечной собственной энергии электрона в низшем порядке теории возмущений.

В квантовой теории, однако, существуют вообще другие расходимости, которые не встречаются в классической теории: обусловленные поляризацией вакуума расходимости, связанные с процессом образования пары электромагнитным полем и ее последующей аннигиляции. Чтобы исправить это положение при помощи нелокальной теории, нужно было бы рассмотреть лагранжиан взаимодействия вида

$$- \int \tilde{\psi}(x') \gamma^\mu \psi(x'') A_\mu(x''') F(x-x', x-x'', x-x''') d^4x' d^4x'' d^4x'''. \quad (15.23)$$

Теперь нельзя больше говорить о токе j_μ в пространственно-временной точке x , поскольку выражение для тока зависит от двух аргументов: x и x' . Хотя полный заряд сохраняется, мы фактически не имеем уже локального уравнения непрерывности для электрического заряда, так как взаимодействие (15.23) калибровочно не инвариантно. Кретьен и Шайерлс [131] попытались дать формулировку нелокальной электродинамики, в которой удовлетворялось бы требование калибровочной инвариантности. Хотя им и удалось построить такую теорию, они не сумели устранить в ней расходимости, связанные с поляризацией вакуума.

Несмотря на то, что попытки получить конечную собственную энергию в классической теории не оказались особенно успешными в более широких рамках квантовой теории, все же они подсказали полезные методы для формального исключения расходимостей из квантованной теории. Часто бывает удобно, следуя Фейнману [249], вводить обрезание, которое делает собственную энергию конечной, но зависящей от параметра обрезания λ . Такое обрезание может рассматриваться как частный случай взаимодействия (15.23), когда появляющийся в обычной локальной теории множитель $\frac{1}{2} \Delta_F(x-y) = \varphi'(x) \varphi'(y)$ заменяется новой функцией

$$\frac{1}{2} \Delta_{F \text{ Reg}}(x-y) = \int d^4x' \int d^4y' F(x-x') F(y-y') \varphi'(x') \varphi'(y'). \quad (15.24)$$

Путем подходящего выбора функций F можно сделать $\Delta_{F \text{ Reg}}$ гладкой функцией от аргумента $(x-y)^2$, не имеющей особенностей. Ясно, что можно подобрать функцию $\Delta_{F \text{ Reg}}$ многими способами, выбирая по-разному функции F . Простейшим вариантом, по-видимому, является вариант, предложенный самим Фейнманом [249], при котором функция распространения

бозона $(k^2 - \mu^2)^{-1}$ заменяется на

$$\begin{aligned} \Delta_F \text{Reg}(k^2) &= \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{k^2 - \mu^2} - \frac{1}{k^2 - \mu^2 - \lambda^2} \right] G(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{k^2 - \mu^2} \left(\frac{-\lambda^2}{k^2 - \mu^2 - \lambda^2} \right) G(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (15.25)$$

Значения переменной λ , которыми определяется функция $G(\lambda)$, значительно превышают массы M и μ , и эта функция так нормирована, что

$$\int_0^{\infty} G(\lambda) d\lambda = 1. \quad (15.26)$$

Следовательно, если не интегрировать по λ , то в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ получится функция распространения локальной теории¹⁾. Каждый интеграл по импульсам виртуальных бозонов, который раньше содержал множитель $(k^2 - \mu^2)^{-1}$, теперь содержит улучшающий сходимости множитель $C(k^2)$

$$C(k^2) = - \int_0^{\infty} d\lambda G(\lambda) \frac{\lambda^2}{k^2 - \mu^2 - \lambda^2}; \quad (15.27)$$

этого достаточно для обеспечения сходимости всех интегралов по импульсам виртуальных бозонов. Обход полюсов по-прежнему определен в смысле Фейнмана, т. е. масса μ содержит малую отрицательную мнимую часть. Следует подчеркнуть, однако, что метод обрезания Фейнмана есть формальный вычислительный прием, вовсе не дающий последовательной теории. Действительно, в электродинамике, например, функция распространения фотона $1/k^2$ будет заменена выражением $(k^2)^{-1} - (k^2 - \lambda^2)^{-1}$, что может рассматриваться как результат введения добавочного взаимодействия электронно-позитронного поля с векторным полем, кванты которого имеют массу λ и функция распространения которого есть $-(k^2 - \lambda^2)^{-1}$. Однако знак минус означает, что эти кванты связаны с зарядами посредством множителя $-e^2$, так что лагранжиан взаимодействия должен иметь мнимую константу связи ie , откуда вытекает неэрмитовость этого лагранжиана \mathcal{L}_I . Таким образом, вероятность не будет сохраняться. В самом деле, можно проверить, что при использовании указанных выше модифицированных функций распространения в теории будет введено нарушение сохранения вероятностей порядка m^2/λ^2 ²⁾.

В качестве иллюстрации современной ковариантной техники интегрирования (см. статью Фейнмана [252], особенно приложения) вычислим

¹⁾ Точнее, формула (15.25) будет соответствовать свойственной локальной теории функции распространения $(k^2 - \mu^2)^{-1}$, если положить $G(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$ и перейти к пределу $\lambda_0 \rightarrow \infty$. — *Прим. ред.*

²⁾ Знак минус перед $(k^2 - \lambda^2)^{-1}$ можно связать с тем, что норма состояний с нечетным числом квантов векторного поля с массой λ отрицательно определена. Следовательно, унитарность теории (сохранение вероятности) действительно нарушается. Однако приводимая автором оценка меры нарушения унитарности m^2/λ^2 не справедлива. Так, если в импульсном пространстве рассматривать процессы при энергии ниже порога рождения нефизических векторных квантов с массой λ , то унитарность вообще не нарушается, хотя состоятельность такого подхода спорна. Изложенные соображения носят общий характер и относятся к любой регуляризации по Паули и Вилларсу (см. ниже). В случае теории заряженных векторных полей они использовались в [887, 901]. — *Прим. ред.*

теперь, используя метод обрезания Фейнмана, собственную энергию фермиона в теории, в которой $\mathcal{L}_I = G : \bar{\psi} \Gamma \psi \varphi : .$ Если интегрировать по dL только в самом конце расчета и заметить, что

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} - \frac{1}{k^2 - \mu^2 - \lambda^2} = - \int_0^{\lambda^2} \frac{dL}{(k^2 - \mu^2 - L)^2}, \quad (15.28)$$

то интеграл собственной энергии (15.5), (15.2) приобретает вид

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{-i}{4\pi^3} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{M}{E(p)} \times \\ &\times \tilde{w}(p) \int_0^{\lambda^2} dL \int d^4k \Gamma \frac{\gamma \cdot (p-k) + M}{(p-k)^2 - M^2 + i\varepsilon} \Gamma \frac{1}{(k^2 - \mu^2 - L)^2} w(p). \end{aligned} \quad (15.29)$$

Рассмотрим сначала интеграл по k . Вследствие того, что сделано обрезание, этот интеграл сходится. Так как мы имеем дело со свободной частицей, для которой $p^2 = M^2$, то соответствующий фермионной линии знаменатель $(p-k)^2 - M^2$ может быть упрощен:

$$p^2 - 2p \cdot k + k^2 - M^2 = k^2 - 2p \cdot k. \quad (15.30)$$

В (15.29) оба знаменателя можно объединить в один, являющийся функцией только от k^2 , если воспользоваться замечательной формулой Фейнмана¹⁾

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2}. \quad (15.31)$$

Так как в рассматриваемом примере один из множителей имеет вид $(k^2 - \mu^2 - L)^2$, то следует использовать формулу

$$\frac{1}{a^2b} = \int_0^1 \frac{2z dz}{[az + b(1-z)]^3}, \quad (15.32)$$

¹⁾ Для вывода этой формулы заметим, что

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dx}{x^2},$$

и введем в последний интеграл новую переменную $x = az + b(1-z)$. Равенство (15.31) в той форме, в которой оно записано, справедливо для всех значений a и b . Если, однако, a и b имеют противоположные знаки, то z следует рассматривать как комплексную переменную, а контур интегрирования должен отклоняться от вещественной оси, чтобы обойти особенность в точке $z = b/(b-a)$. Фактически можно выбрать любой контур интегрирования, соединяющий точки $z=0$ и $z=1$, но не проходящий через особую точку, поскольку вычет подынтегрального выражения в особой точке равен нулю. Интеграл Фейнмана (15.31) есть частный случай следующей формулы:

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{dz_1 dz_2 dz_3 \dots dz_n}{[a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n]^n}; \quad \sum_{i=1}^n z_i = 1.$$

Интегралы такого типа рассмотрены, например, в учебнике Гурса и Хедрика [335]. Этот интеграл можно вычислить также, вводя в подынтегральное выраже-

которая получается из формулы (15.31) дифференцированием по a . Тогда для объединенного знаменателя получим

$$\begin{aligned} (k^2 - \mu^2 - L)z + (k^2 - 2p \cdot k)(1 - z) &= \\ &= k^2 - 2p \cdot k(1 - z) - (\mu^2 + L)z = \\ &= [k - p(1 - z)]^2 - M^2(1 - z)^2 - (\mu^2 + L)z, \end{aligned} \quad (15.33)$$

где снова учтено, что $p^2 = M^2$. Введем затем переменную $k' = k - p(1 - z)$, после чего интеграл приобретает вид

$$2 \int_0^1 dz z \int d^4 k' \Gamma \frac{\gamma \cdot p z - \gamma \cdot k' + M}{(k'^2 - M^2(1 - z)^2 - (\mu^2 + L)z)^3} \Gamma. \quad (15.34)$$

Штрихи можно теперь опустить, и знаменатель стал функцией только от k^2 . Далее, интегралы вида $\int d^4 k k_\mu f(k^2)$ равны нулю из соображений симметрии. Вообще из свойств симметрии вытекает, что

$$\int d^4 k \text{ (нечетное число множителей вида } k_\mu) f(k^2) = 0, \quad (15.35a)$$

$$\int d^4 k k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \int d^4 k k^2 f(k^2). \quad (15.35b)$$

Поэтому в интеграле (15.34) член с $\gamma \cdot k$ равен нулю. Если бы обрезания не было, то это означало бы, что интеграл расходится только логарифмически, а не линейно.

Нам нужно вычислить, таким образом, следующий интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 k \frac{1}{(k^2 - C + i\epsilon)^3}, \quad (15.36)$$

где $C = m^2(1 - z)^2 + (\mu^2 + L)z$ есть положительно определенная величина. Как уже указывалось, контур интегрирования проходит по вещественной оси, а полюсы смещены с нее за счет добавки Фейнмана $-i\epsilon$ к массам частиц. Можно, однако, повернуть контур интегрирования на 90° в комплексной плоскости и интегрировать по контуру вдоль мнимой оси от $-i\infty$ до $+i\infty$. Допустимость этой процедуры основана

на δ -функцию $\delta\left(\sum_{i=1}^n z_i - 1\right)$. С другой стороны, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} &= (n-1)! \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \dots \int_0^{z_{n-2}} dz_{n-1} \times \\ &\times \frac{1}{[a_n z_{n-1} + a_{n-1}(z_{n-2} - z_{n-1}) + \dots + a_1(1 - z_1)]^n} = \\ &= (n-1)! \int_0^1 \zeta_1^{n-2} d\zeta_1 \int_0^1 \zeta_2^{n-3} d\zeta_2 \dots \int_0^1 d\zeta_{n-1} \times \\ &\times \frac{1}{[a_1 \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_{n-1} + a_2 \zeta_1 \dots \zeta_{n-2}(1 - \zeta_{n-1}) + \dots + a_n(1 - \zeta_1)]^n}. \end{aligned}$$

на том, что при повороте нигде не пересекаются особые точки, так как они расположены над отрицательной вещественной осью и под положительной вещественной осью. Поэтому можно ввести новую переменную интегрирования $k_0 = ik_4$ и интеграл (15.36) превращается в интеграл по четырехмерному евклидову пространству:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dk_0}{(k^2 - C + i\varepsilon)^3} = -i \int \frac{dk_4 d^3k}{(k_4^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + C)^3}. \quad (15.37)$$

После введения в четырехмерном пространстве сферических координат элемент объема станет равным $2\pi^2 k^3 dk$, и в конечном итоге интеграл I сведется к

$$I = -2\pi^2 i \int_0^{\infty} \frac{k^3 dk}{(k^2 + C)^3} = -i\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x + C)^3} = -\frac{i\pi^2}{2C}. \quad (15.38)$$

Отметим, что значение аналогичных интегралов с другими показателями степеней в знаменателе может быть получено интегрированием или дифференцированием интеграла I по параметру C .

Таким образом, собственная энергия во втором порядке теории возмущений равна (опуская $\int d\lambda$)

$$\Delta E = -\frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{M}{E(\mathbf{p})} \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dz z \int_0^{\lambda^2} dL \times \\ \times \tilde{\omega}(\mathbf{p}) [\Gamma(\gamma \cdot p z + M) \Gamma] \omega(\mathbf{p}) \frac{1}{[M^2(1-z)^2 + (\mu^2 + L)z]}. \quad (15.39)$$

Когда $\Gamma = \gamma_3$, получаем

$$\Delta E = \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{M}{E(\mathbf{p})} \frac{1}{4\pi} \tilde{\omega}(\mathbf{p}) \omega(\mathbf{p}) \int_0^1 dz \int_0^{\lambda^2} dL \frac{Mz(1-z)}{M^2(1-z)^2 + (\mu^2 + L)z}, \quad (15.40a)$$

где учтено, что $\gamma \cdot p \omega(\mathbf{p}) = M\omega(\mathbf{p})$. Интегрирование по L приводит к

$$\Delta E = \frac{M}{E(\mathbf{p})} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{1}{4\pi} \tilde{\omega}(\mathbf{p}) \omega(\mathbf{p}) \times \\ \times M \int_0^1 dz (1-z) \ln \left[\frac{M^2(1-z)^2 + (\mu^2 + \lambda^2)z}{M^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right]. \quad (15.40b)$$

В пределе $\lambda \rightarrow \infty$ можно пренебречь в числителе логарифма членом $\mu^2 z + M^2(1-z)^2$ и оставить только член $\lambda^2 z$. Если, кроме того, пренебречь массой μ по сравнению с массой M , то

$$\Delta E = \frac{M}{E(\mathbf{p})} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{M}{8\pi} \left[\ln \left(\frac{\lambda^2}{M^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \tilde{\omega}(\mathbf{p}) \omega(\mathbf{p}). \quad (15.40в)$$

Это выражение логарифмически расходится в пределе $\lambda \rightarrow \infty$. Точное вычисление интеграла (15.40б) приводит к результату

$$\Delta E = \frac{M}{E(\mathbf{p})} \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{M}{8\pi} \left[\ln \left(\frac{\lambda^2}{M^2} \right) - \frac{1}{2} + \frac{\mu^2}{M^2} + 2 \left(\frac{\mu}{M} \right)^2 \left(1 - \frac{\mu^2}{2M^2} \right) \ln \frac{\mu}{M} - \right. \\ \left. - 2 \left(\frac{\mu}{M} \right)^3 \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{2M^2}} \arccos \frac{\mu}{2M} \right] \tilde{\omega}(\mathbf{p}) \omega(\mathbf{p}). \quad (15.40r)$$

Поэтому изменение массы равно

$$\delta M = \frac{G^2}{4\pi\hbar c} \frac{M}{8\pi} \left[\ln \left(\frac{\lambda^2}{M^2} \right) - \frac{1}{2} + O \left(\frac{\mu}{M} \right) \right]. \quad (15.41)$$

Таким образом, в ковариантном формализме Фейнмана в четкой форме показано, что собственная энергия соответствует изменению массы. Собственная энергия фермиона, взаимодействующего со скалярным бозонным полем посредством скалярной связи, расходится тоже логарифмически, но имеет противоположный знак по сравнению с псевдоскалярным случаем

$$\delta M \sim -M \frac{3g^2}{4\pi\hbar c} \ln \frac{\lambda}{M}.$$

Знак собственной энергии электрона во втором порядке теории возмущений в квантовой электродинамике такой же, как и в псевдоскалярном случае, причем

$$\delta m \sim m \frac{3e^2}{4\pi} \left(\ln \frac{\lambda^2}{m^2} + \frac{1}{2} \right).$$

В случае *свободного* электрона выражения, соответствующие диаграммам на фиг. 66, при этом выборе δm взаимно уничтожаются (в низшем порядке теории возмущений).

Только что изложенный метод обрезания Фейнмана может рассматриваться как частный случай общего формального ковариантного метода обращения с расходящимися интегралами, предложенного Паули и Вилларсом [631] (см. также работы Штюкельберга и Ривье [664, 750, 751]). Их метод известен как метод «регуляризации». Он состоит в том, что сначала все сингулярные выражения «регуляризуются», а затем производится предельный процесс. Так, если

$$I(M) = \int d^4k J(k, M) \quad (15.42a)$$

является расходящимся интегралом по внутренней линии с массой M , то регуляризованный интеграл $I_R(M)$ определяется формулой

$$I_R(M) = \sum_{i=1}^N C_i I(M_i) = \int \sum_{i=1}^N C_i J(k, M_i) d^4k, \quad (15.42b)$$

причем $C_1 = 1$ и $M_1 = M$.

На постоянные C_i и M_i накладываются определенные ограничения, достаточные для того, чтобы интеграл (15.42b) стал сходящимся. Найдено, что в электродинамике условия

$$\sum_{i=1}^N C_i = 0 \quad (15.43a)$$

и

$$\sum_{i=1}^N C_i M_i^2 = 0 \quad (15.43b)$$

достаточны для достижения этой цели. Предельный процесс заключается в устремлении значений вспомогательных масс M_i ($i = 2, 3, \dots$) к бесконечности.

Условия (15.43) обеспечивают отсутствие особенностей у регуляризованных функций Δ и $\Delta^{(1)}$ на световом конусе, присущих соответствующим нерегуляризованным функциям [напомним равенства (7.179) и (7.182) и отметим, что условия (15.43) полностью устраняют особенности]. Выпол-

нение условий (15.43) оказывается достаточным, чтобы сделать сходящимся выражение для собственной энергии электрона при условии, что производится регуляризация всего выражения в целом, а не его отдельных частей. После выполнения в конечном итоге предельного процесса $M_i \rightarrow \infty$ ($i = 2, 3 \dots$) снова появляется логарифмическая расходимость.

Описанная выше методика по терминологии Паули и Вилларса является «формалистической теорией», в которой даются чисто формальные рецепты для вычисления расходящихся интегралов, в противоположность «реалистической теории», в которой математический аппарат, приводящий к сходимости, получается как следствие взаимодействия с другими полями (см., например, статью Пайса [609]).

Следует отметить, что на каждой стадии вычисления собственной энергии методом Фейнмана сохраняется релятивистская инвариантность теории. Это очень важно, так как становится возможным однозначное выделение эффектов собственной энергии и получается, что собственное натяжение фермиона $S(0)$ равно нулю. Величина $S(0)$ определяется как среднее значение пространственно-пространственной компоненты симметризованного тензора энергии-импульса системы полей в одночастичном состоянии с нулевым импульсом

$$S(0) = \langle \Phi_1, T_i^i(x) \Phi_1 \rangle \quad (15.44)$$

(суммирование по i не предполагается). Напомним, что оператор энергии-импульса системы P^μ связан с тензором $T^{\mu\nu}$ соотношением $P_\mu = \int d\sigma^\nu T_{\mu\nu}$ и что этот оператор преобразуется как 4-вектор, если $T_{\mu\nu}$ является тензором второго ранга. Если рассмотреть две различные лоренцевы системы отсчета O' и O , причем в системе O частица покоится, а в системе O' имеет импульс \mathbf{p}' и энергию E' , то возникает вопрос о том, связаны ли величины \mathbf{p}' и E' [вычисленные при помощи тензора $T'^{\mu\nu}(x')$] преобразованием Лоренца с соответствующими величинами, вычисленными при помощи тензора $T^{\mu\nu}$. Оказывается (см. статьи Пайса и Эпштейна [610], Рорлиха [666, 668], Вилларса [810], Боровича и Кона [77], Такахашии и Умэдзава [765], а также Арну и Гайтлера [15]), что необходимым условием для этого является равенство нулю собственного натяжения. Последнее будет равно нулю в любой релятивистски ковариантной теории без расходимостей. Поэтому любое ковариантное обрезание (такое, как в методе Фейнмана) будет автоматически гарантировать исчезновение собственного натяжения, так как оно обеспечивает сохранение ковариантности теории в ходе вычислений.

§ 2. Перенормировка массы и лэмбовский сдвиг в нерелятивистском приближении

В этом параграфе мы проиллюстрируем принцип перенормировки на задаче о лэмбовском сдвиге — исторически первой задаче, которая была решена при помощи этого принципа. Когда Крамерс в 1947 г. выдвинул этот принцип, Лэмб и Ризерфорд [469] как раз измерили смещение уровня водорода $2S$ относительно уровня $2P$. Следуя идее Крамерса, Бете [50] интерпретировал лэмбовский сдвиг уровней как эффект взаимодействия электрона с полем излучения. Фактически Бете просто вычислил собственную энергию электрона, связанного в атоме. Но, согласно идее Крамерса, основная часть собственной энергии уже учтена, если в расчетах исполь-

зуется наблюдаемая масса электрона m , а не «голая» масса m_0 . Таким образом, истинный сдвиг уровня равен разности между собственными энергиями связанного и свободного электронов.

В нерелятивистском приближении, использованном Бете в 1947 г., нужно рассматривать взаимодействие электрона только с поперечными электромагнитными волнами. Гамильтониан для описания электрона, движущегося в некотором потенциале $V(\mathbf{x})$ и взаимодействующего с полем излучения, имеет вид

$$H = H_{\text{рад}} + H_m + H_{\text{int}} = H_0 + H_I, \quad (15.45)$$

причем¹⁾

$$H_{\text{рад}} = \frac{1}{2} \int (\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2) d^3x, \quad (15.45a)$$

$$H_m = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} + V(\mathbf{x}), \quad (15.45b)$$

$$H_I = -\frac{e}{m_0 c} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (15.45b)$$

Здесь выбрана калибровка излучения, в которой для описания излучения используется только вектор-потенциал \mathbf{A} , причем $\text{div } \mathbf{A} = 0$, $\mathcal{E} = -\partial_0 \mathbf{A} = (i/\hbar)[\mathbf{A}, H]$ и $\mathcal{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. В картине Шредингера разложение квантового оператора поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ по операторам рождения и уничтожения фотонов с импульсом \mathbf{k} и состоянием поляризации λ запишется в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}(\mathbf{k}) (c_{\lambda}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + c_{\lambda}^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}). \quad (15.46)$$

Отметим, что суммирование по индексу λ проводится только по двум поперечным состояниям поляризации 1 и 2, и поскольку $\text{div } \mathbf{A} = 0$, то $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}(\mathbf{k}) = 0$ ($\lambda = 1, 2$). Операторы поля подчиняются обычным перестановочным соотношениям:

$$[c_{\lambda}(\mathbf{k}), c_{\lambda'}^*(\mathbf{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

и

$$[c_{\lambda}(\mathbf{k}), c_{\lambda'}(\mathbf{k}')] = [c_{\lambda}^*(\mathbf{k}), c_{\lambda'}^*(\mathbf{k}')] = 0. \quad (15.47)$$

Оператор $N_{\lambda}(\mathbf{k}) = c_{\lambda}^*(\mathbf{k}) c_{\lambda}(\mathbf{k})$ есть оператор числа фотонов с импульсом \mathbf{k} и состоянием поляризации λ , и $H_{\text{рад}} = \hbar \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_{\mathbf{k}} N_{\lambda}(\mathbf{k})$, где $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$.

Гамильтониан (15.45) соответствует взаимодействию нерелятивистской точечной частицы с полем излучения. Однако взаимодействующая заряженная частица может испускать виртуальные фотоны с произвольно большим импульсом и должна приобретать при этом настолько большие импульсы отдачи, что ее движение перестанет быть нерелятивистским. Поэтому, строго говоря, гамильтониан (15.45) не является внутренне непротиворечивым. Эту трудность можно частично обойти, если рас-

¹⁾ В дальнейшем нас будут интересовать только эффекты собственной энергии, обусловленные гамильтонианом взаимодействия H_{int} . Поэтому мы опускаем член A^2 , который возникает из-за калибровочно-инвариантного включения взаимодействия заряженной частицы с излучением посредством замены $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$. Член A^2 вносит не интересующий нас из-за независимости от импульса частицы вклад в собственную энергию. Этот член, однако, важен в задачах о рассеянии излучения на заряженных частицах и, конечно, для калибровочной инвариантности теории.

смагивать частицу с распределенным зарядом и записать гамильтониан взаимодействия в виде $-(e/m_0c) \int F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$, где функция $F(\mathbf{x}')$ описывает распределение заряда. Далее, если $a \approx \hbar/mc$ будет радиусом этого распределения, то фотоны с длиной волны, меньшей a , не будут взаимодействовать с частицей. Другими словами, в разложение (15.46) будут вносить вклад только те импульсы k , для которых $\hbar k < mc$.

Рассмотрим теперь свободный электрон. Тогда $V(\mathbf{x}) = 0$. Если бы гамильтониан H_I был равен нулю, то собственные функции гамильтонианов H и H_0 совпадали бы и были бы произведениями собственных функций операторов $\mathbf{p}^2/2m_0$ и $H_{\text{рад}}$. Если предположить, что связь между электроном и полем излучения слабая и что поэтому справедлива теория возмущений, то гамильтониан H_I вызовет некоторый сдвиг невозмущенных собственных значений энергии. Вычислим это изменение энергии во втором приближении теории возмущений для такого невозмущенного состояния, в котором имеется один электрон с импульсом \mathbf{p} и нет фотонов, т. е. для состояния

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} |\Phi_0\rangle, \quad (15.48)$$

где V — нормировочный объем для волновой функции электрона, а $|\Phi_0\rangle$ — состояние вакуума для поля излучения, $c_\lambda(\mathbf{k})|\Phi_0\rangle = 0$. Отметим, что энергия E_0 этого состояния равна кинетической энергии электрона $\mathbf{p}^2/2m_0$.

Способом, аналогичным примененному в § 4 гл. 12, легко установить, что во втором порядке теории возмущений¹⁾ сдвиг энергии обусловлен испусканием фотона электроном и его последующим поглощением и равен

$$\Delta E^{(2)} = \sum_{i \neq 0} \frac{\langle \Phi | H_I | i \rangle \langle i | H_I | \Phi \rangle}{E_0 - E_i} \quad (15.49a)$$

$$= \left(\Phi, H_I \frac{1}{E_0 - H} H_I \Phi \right) \quad (15.49b)$$

$$= \frac{e^2}{m_0^2 c^2} \frac{\hbar c}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k}} \int \frac{d^3 k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \int d^3 x \frac{1}{V} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} \times$$

$$\times \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}})(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{e}_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}})}{E_0 - \frac{1}{2m_0}(\mathbf{p} - \hbar \mathbf{k}')^2 - \hbar c |\mathbf{k}'|} F(\mathbf{k}) F^*(\mathbf{k}') \times$$

$$\times (\Phi_0, c_\lambda(\mathbf{k}) c_{\lambda'}^*(\mathbf{k}') \Phi_0) \quad (15.49v)$$

$$= -\frac{e^2}{m_0^2 c^2} \frac{\hbar c}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega_k} |F(\mathbf{k})|^2 \sum_{\lambda=1}^2 \frac{|\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})|^2}{-\frac{\hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m_0} + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m_0} \mp \hbar c |\mathbf{k}|} \quad (15.49r)$$

Далее, $\mathbf{p}/m_0 = \mathbf{v}$ есть скорость «голой» частицы. Поэтому первый член знаменателя в формуле (15.49r) имеет порядок v/c по сравнению с членом $\hbar c |\mathbf{k}|$. Так как нас интересует нерелятивистский предел, то мы пренебрежем членом $\hbar \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}$. Кроме того, известно, что функция $F(\mathbf{k})$ обрезает вклад от больших k ($|\mathbf{k}| > 1/a$). Поэтому мы пренебрежем также членом $\hbar^2 \mathbf{k}^2/2m_0$ по сравнению с членом $\hbar c |\mathbf{k}|$. Наконец, учитывая, что векторы

¹⁾ Член $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ в первом порядке теории возмущений не существует, так как $(\Phi, \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \Phi) = 0$. Член A^2 в этом порядке будет давать константу.

\mathbf{k} и $\mathbf{\varepsilon}_\lambda(\mathbf{k})$ ортогональны, так что

$$\sum_{\lambda=1}^2 |\mathbf{p} \cdot \mathbf{\varepsilon}_\lambda(\mathbf{k})|^2 = p^2 - \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})^2}{k^2}, \quad (15.50)$$

и выбирая полярную ось в направлении вектора \mathbf{p} , можно проинтегрировать по углам в (15.49г) и получить

$$\Delta E^{(2)} \approx -\frac{p^2}{2m_0} \left[\frac{e^2}{4\pi\hbar c} \frac{4}{3\pi} \frac{\hbar}{m_0 c} \int_0^\infty dk |F(k)|^2 \right]. \quad (15.51)$$

Отметим, что для точечного заряда $F(k) = 1$, и поэтому интеграл, определяющий $\Delta E^{(2)}$, линейно расходится. Очень важно, что собственная энергия фактически оказалась пропорциональной кинетической энергии «голой» частицы $p^2/2m_0$. Во втором приближении теории возмущений энергия системы есть

$$E = E_0 + \Delta E^{(2)} \quad (15.52a)$$

$$= \frac{p^2}{2m_0} \left[1 - \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{\hbar}{m_0 c} \int_0^\infty dk |F(k)|^2 \right] \quad (15.52б)$$

$$= \frac{p^2}{2m_0} \left[1 - \frac{\delta m}{m_0} \right], \quad (15.52в)$$

где

$$\delta m = \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{\hbar}{c} \int_0^\infty dk |F(k)|^2. \quad (15.52г)$$

Примем теперь точку зрения Крамерса и будем считать δm электромагнитной массой, которую приобретает частица (сверх ее «голой», механической массы) в результате взаимодействия с полем излучения. Вместе с тем наблюдаемой является только масса $m_0 + \delta m$, так как не существует таких экспериментов, при помощи которых можно было бы провести различие между частью массы заряженной частицы, которая имеет электромагнитное происхождение, и частью массы, имеющей механическое происхождение. Поэтому мы отождествим величину $m_0 + \delta m$ с наблюдаемой массой электрона. (Имеются, конечно, электромагнитные добавки к массе в высших порядках теории возмущений, и, строго говоря, с наблюдаемой массой m должна быть отождествлена сумма всех этих добавок и «голой» массы m_0 .) Так как в нашей теории с обрезанием величина δm мала (порядка постоянной тонкой структуры α), то можно считать (15.52в) членом второго порядка в разложении

$$E = \frac{p^2}{2(m_0 + \delta m)} \approx \frac{p^2}{2m_0} \left(1 - \frac{\delta m}{m_0} + \dots \right). \quad (15.53)$$

Следовательно, если теперь выразить энергию через наблюдаемую величину m , то результат теории возмущений приобретает следующий смысл: энергия частицы действительно равна $E = p^2/2m$. Отметим, что совершенно безразлично, конечна или бесконечна величина δm , так как перенормировка массы проводится формально.

Изложенная теория в одном отношении все еще неудовлетворительна: в исходный гамильтониан входит «голая» масса. Применим снова

принцип Крамерса и запишем гамильтониан в виде

$$H = H_{\text{rad}} + \frac{\mathbf{p}^2}{2(m-\delta m)} - \frac{e}{(m-\delta m)c} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \approx \approx H_{\text{rad}} + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{mc} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{\delta m}{m} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad (15.54)$$

(члены порядка e^3 опущены). Будем теперь рассматривать в качестве энергии возмущения в гамильтониане (15.54) не только член $(e/mc) \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$, но и член $(\delta m/m) (\mathbf{p}^2/2m)$, причем величину δm в низшем порядке по α выберем равной

$$\delta m = \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{\hbar}{c} \int_0^\infty dk |F(k)|^2. \quad (15.55)$$

При таком подходе энергия одноэлектронного состояния в e^2 -приближении строго равна $\mathbf{p}^2/2m$. Обратно, можно было бы определить величину δm в e^2 -приближении из требования, чтобы энергия физического одноэлектронного состояния была равна $\mathbf{p}^2/2m$. Член $(\delta m/m) (\mathbf{p}^2/2m)$ обычно называют контрчленом перенормировки массы.

Перейдем теперь к случаю электрона, движущегося по боровской орбите в поле ядра, т. е. случай, когда $V(\mathbf{x}) = -Zc^2/|\mathbf{x}|$. Гамильтониан системы должен быть взят в виде

$$H = H_{\text{rad}} + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) - \frac{e}{mc} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{\delta m}{m} \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (15.56)$$

где величина δm задана выше выражением (15.55). В этом гамильтониане, поскольку нас интересуют только связанные состояния электрона, можно сделать значительные упрощения. Для связанных состояний координата электрона \mathbf{x} по порядку величины равна боровскому радиусу. Отсюда следует, что в разложении (15.46) можно заменить экспоненциальные множители $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ единицей, так как $F(k)$ обрезает импульсы, большие по сравнению с mc .

Такое приближение называют дипольным. Оно эквивалентно пренебрежению запаздыванием и эффектами отдачи при испускании и поглощении фотона электроном. Иными словами, рассматривается взаимодействие электрона только с такими длинными волнами, что передача импульса пренебрежимо мала. В этом приближении разложение оператора $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ запишется в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=1}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda(\mathbf{k}) (c_\lambda(\mathbf{k}) + c_\lambda^*(\mathbf{k})). \quad (15.57)$$

Применяя снова теорию возмущений, но в качестве невозмущенных собственных функций выбирая на этот раз собственные функции гамильтониана $H_{\text{rad}} + (\mathbf{p}^2/2m) + V(\mathbf{x})$, мы находим (Бете [50]), что для состояния с квантовым числом n сдвиг уровня равен

$$\Delta E_n = -\frac{2\alpha}{3\pi c^2} \int_0^\infty dk k |F(k)|^2 \sum_r \frac{|v_{rn}|^2}{E_r - E_n + k} + \frac{\delta m}{m} \frac{\mathbf{p}^2 |nn\rangle}{2m}, \quad (15.58)$$

где сумма по квантовому числу r распространяется на все состояния электрона, а v есть оператор скорости электрона. Используя тождество

$$\frac{1}{E_r - E_n + k} = \frac{1}{k} - \frac{E_r - E_n}{k(E_r - E_n + k)}, \quad (15.59)$$

можно переписать выражение (15.58) в виде

$$\Delta E_n = -\frac{2\alpha}{3\pi c^2} \int_0^\infty dk |F(k)|^2 \sum_r |\mathbf{v}_{nr}|^2 + \frac{\delta m}{m} \frac{|\mathbf{p}^2|_{nn}}{2m} + \\ + \frac{2\alpha}{3\pi c^2} \int_0^\infty dk |F(k)|^2 \sum_r \frac{|\mathbf{v}_{nr}|^2 (E_r - E_n)}{E_r - E_n + k}. \quad (15.60)$$

Учитывая теперь, что $\overline{\mathbf{v}_{nr}} = \mathbf{v}_{rn}$ и что

$$\sum_r \mathbf{v}_{nr} \cdot \mathbf{v}_{rn} = |\mathbf{v}^2|_{nn} = \frac{|\mathbf{p}^2|_{nn}}{m^2}, \quad (15.61)$$

мы видим, что первый член представляет собой как раз собственную энергию электрона, находящегося в состоянии n . Следовательно, этот член взаимно уничтожается с вторым членом в формуле (15.60) — контрчленом перенормировки массы. Таким образом, в конечном итоге выражение для сдвига уровня запишется в виде

$$\Delta E_n = \frac{2\alpha}{3\pi c^2} \int_0^K dk \sum_r \frac{|\mathbf{v}_{nr}|^2 (E_r - E_n)}{E_r - E_n + k} \quad (15.62a)$$

$$= \frac{2\alpha}{3\pi c^2} \sum_r |\mathbf{v}_{nr}|^2 (E_r - E_n) \ln \frac{K}{|E_r - E_n|}, \quad (15.62b)$$

где K — энергия обрезания. По порядку величины $K \sim mc^2$, и это значение предполагается большим по сравнению со всеми разностями энергий $E_r - E_n$ в атоме.

В своей первоначальной работе Бете [50] фактически не использовал контрчлена и не приписывал электрону конечных размеров порядка комптоновской длины волны. Вместо этого он учел, что при перенормировке поправки к кинетической энергии, обусловленные собственной массой, должны быть вычтены из собственной энергии связанного электрона. Вычитание понижает степень расходимости собственной энергии связанного электрона от линейной до логарифмической. [Устремите K к ∞ в соотношении (15.62b).] Бете предположил далее, что этот же принцип приведет к сходящемуся результату в теории дырок (в которой собственная энергия расходится только логарифмически), и поэтому ввел в нерелятивистской теории обрезание для энергий фотона порядка mc^2 . Полученная при таком предположении формула для сдвига уровня [50, 52, 357] совпадает с формулой (15.62b). Вычисление при помощи этой формулы дает для сдвига $2S$ -уровня значение 1040 Мгц в удивительно хорошем согласии с новейшими экспериментальными данными ($1057,77 \pm 0,10 \text{ Мгц}$) [785].

Покажем, как проводить расчеты по формуле (15.62b). В нерелятивистской области значение логарифма очень велико, и удобно записать

$$\sum_r (E_r - E_n) |\mathbf{p}_{rn}|^2 \ln \frac{|E_r - E_n|}{Ry} = \left[\sum_r (E_r - E_n) |\mathbf{p}_{rn}|^2 \right] \ln \frac{(E_{cp} - E_n)}{Ry}, \quad (15.63)$$

где Ry — постоянная Ридберга. Это выражение служит определением величины $E_{cp} - E_n$. Было найдено [52], что для $2S$ -уровня атома водорода $E_{cp} - E_n \approx 16,6 Ry$. В случае водородоподобных атомов

$$H_m = (\mathbf{p}^2/2m) + V(\mathbf{x}), \quad V(\mathbf{x}) = -Ze^2/|\mathbf{x}| \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} \sum_r (E_r - E_n) |\mathbf{p}_{rn}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 ([p_i, [H_m, p_i]])_{nn} = \\ &= \frac{1}{2} \int \bar{\psi}_n(\mathbf{x}) \nabla^2 V(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) d^3x = 2\pi\hbar^2 e^2 Z |\psi_n(0)|^2. \end{aligned} \quad (15.64)$$

В этом приближении сдвиг уровня имеется только в S -состояниях. Для S -состояния с квантовым числом n соблюдается равенство $|\psi_n(0)|^2 = (Z/\pi\hbar^3 a_0)^3$, где a_0 — борковский радиус. Поэтому выражение для сдвига уровня приобретает вид

$$\Delta E (S\text{-состояния}) = \frac{8}{3\pi} \frac{\alpha^3 Z^4}{n^3} \text{Ry} \ln \frac{K}{(E - E_n)_{\text{ср}}}. \quad (15.65)$$

Для $2S$ -состояния оно дает величину сдвига, равную 1040 Мэв .

Последующие вычисления с учетом релятивистских эффектов подтвердили, что вычисленное при помощи принципа перенормировок Крамерса выражение для сдвига уровня действительно сходится. В результате этих вычислений в работах Швингера и Вайскопфа [710], Френча и Вайскопфа [280], Кролла и Лэмба [464], Фейнмана [249], Швингера [713] и Бете [51, 52] для сдвига уровня было получено значение 1052 Мэв . Баранджер [24—26], Карплус, Клейн и Швингер [426], Фрид и Йенни [284] и Лайзер [481] произвели дальнейшее уточнение расчета, особенно в связи с трактовкой компонент с большим импульсом для электрона в $2S$ -состоянии, и их результат совпадает с наблюдаемой величиной в пределах $0,1 \text{ Мэв}$. (Обзор современного состояния теории энергетических уровней водородоподобных атомов можно найти в статьях Питермана [638] и Лайзера [481].)

§ 3. Радиационные поправки к рассеянию

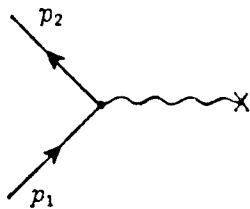
Для иллюстрации метода перенормировок релятивистской теории поля¹⁾ мы подробно рассмотрим с учетом радиационных поправок рассеяние электрона на внешнем электромагнитном поле [251—252]. Для этого случая плотность гамильтониана взаимодействия запишется в виде

$$\mathcal{H}_I(x) = -eN [\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu(x)] - eN [\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu^0(x)] - \delta m N [\bar{\psi}\psi(x)]. \quad (15.66)$$

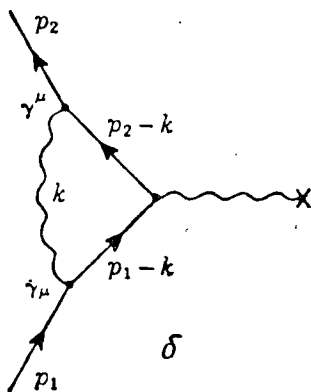
Первый член представляет взаимодействие электронно-позитронного поля с квантованным полем излучения, второй член — взаимодействие с внешним потенциалом $A_\mu^0(x)$, причем предположено, что $\partial_\mu A^{\mu\nu}(x) = 0$, и, наконец, третий член — это контрчлен для перенормировки массы. На фиг. 68 изображены диаграммы, соответствующие членам разложения S -матрицы до третьего порядка включительно, которые вносят вклад в рассеяние. Волнистые линии с крестом на конце на фиг. 68 соответствуют внешнему потенциалу.

Матричный элемент, соответствующий диаграмме a на фиг. 68, был уже исследован раньше. Этот матричный элемент перехода из состоя-

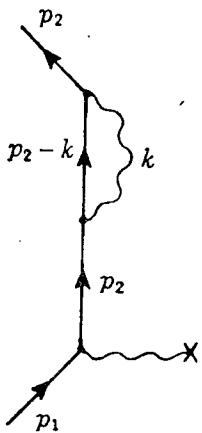
¹⁾ Полуклассическое исследование радиационных поправок, допускающее простое физическое истолкование, было проведено в работах Велтона [830] и Коба [459], а также в очень хорошей обзорной статье Вайскопфа [829]. Изложение методов перенормировок в «старой» теории возмущений можно найти в статьях Льюиса [502] и Эшштейна [222].



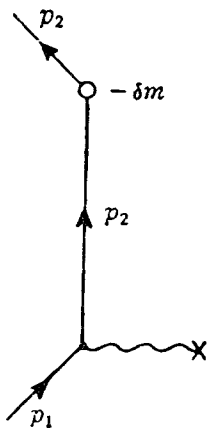
α



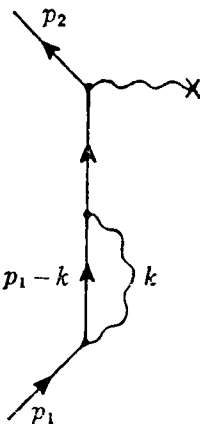
δ



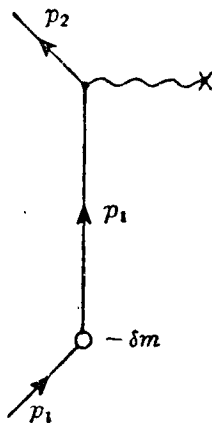
$\theta 1$



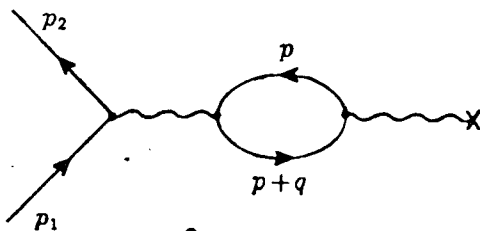
$\theta 2$



$\zeta 1$



$\zeta 2$



θ

Ф и г. 68.

ния с импульсом p_1 в состояние с импульсом p_2 дается выражением

$$R^{(a)}(p_1, p_2) = 2\pi i \tilde{u}(p_2) M^{(a)} u(p_1), \quad (15.67a)$$

$$M^{(a)} = e\gamma^\mu a_\mu(p_2 - p_1), \quad (15.67b)$$

$$q^\mu a_\mu(q) = 0. \quad (15.67b')$$

Здесь опущены нормировочные множители $[m/E(p)]^{1/2}$. Используя установленные ранее правила, для матричного элемента $M^{(b)}$, соответствующего диаграмме Фейнмана b на фиг. 68, получаем

$$M^{(b)} = -\frac{i\alpha}{4\pi^3} \int d^4k \gamma^\mu \frac{1}{\gamma \cdot (p_2 - k) - m} e\gamma^\nu a_\nu(p_2 - p_1) \times \\ \times \frac{1}{\gamma \cdot (-k) - m} \gamma^\mu \frac{1}{k^2 - \lambda_{\text{мин}}^2 + i\varepsilon} \quad (15.68a)$$

$$= \Lambda^\nu(p_2, p_1) e a_\nu(p_2 - p_1), \quad (15.68b)$$

где $\alpha = e^2/4\pi\hbar c = 1/137$ (электрический заряд e взят в рациональной системе единиц). Диаграмму b на фиг. 68 называют вершинной диаграммой, а $\Lambda^\nu(p_2, p_1)$ — вершинным оператором. В формуле (15.68a) функция распространения фотона $1/k^2$ заменена на $1/(k^2 - \lambda_{\text{мин}}^2)$, чтобы избежать расходимость при малых k . Смысл этого приема будет обсужден ниже.

Аналогично, операторы, соответствующие диаграммам eI и gI , можно записать в виде

$$M^{(eI)} = -\frac{ie}{4\pi^3} \Sigma^{(2)}(p_2) \frac{1}{\gamma \cdot p_2 - m} \gamma \cdot a(p_2 - p_1) \quad (15.69)$$

и

$$M^{(gI)} = -\frac{ie}{4\pi^3} \gamma \cdot a(p_2 - p_1) \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - m} \Sigma^{(2)}(p_1), \quad (15.70)$$

где оператор собственной энергии во втором приближении теории возмущений $\Sigma^{(2)}(p)$ дается выражением

$$\Sigma^{(2)}(p) = \alpha \int d^4k \gamma^\mu \frac{1}{\gamma \cdot (p - k) - m} \gamma^\mu \frac{1}{k^2 - \lambda_{\text{мин}}^2 + i\varepsilon}. \quad (15.71)$$

Диаграммам с поправками к массе $e2$ и $g2$ соответствуют

$$M^{(e2)} = -e\delta m \frac{1}{\gamma \cdot p_2 - m} \gamma \cdot a(p_2 - p_1) \quad (15.72)$$

и

$$M^{(g2)} = -e\delta m \gamma \cdot a(p_2 - p_1) \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - m}. \quad (15.73)$$

Наконец, диаграмме ∂ , которая соответствует эффекту поляризации вакуума и будет обсуждена в § 5, соответствует

$$M^{(\partial)} = \frac{i\alpha}{4\pi^3} \gamma^\mu \frac{1}{(p_2 - p_1)^2} \Pi_{\mu\nu} a^\nu(p_2 - p_1), \quad (15.74)$$

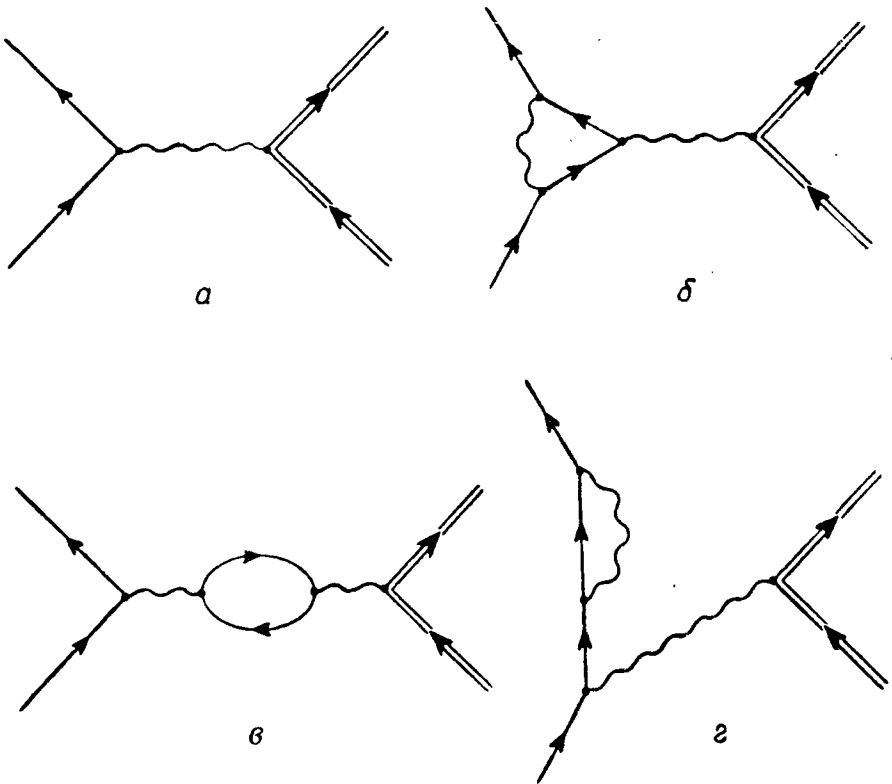
где

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \int d^4p \text{Sp} \left[\gamma_\mu \frac{1}{\gamma \cdot (p+q) - m} \gamma_\nu \frac{1}{\gamma \cdot p - m} \right] \quad (15.75)$$

и

$$q = p_2 - p_1. \quad (15.76)$$

Следует отметить, что хотя здесь избран случай внешнего поля, так же прост и случай, когда внешнее поле заменено внутренней фотонной линией. В этом случае все множители $a_\mu(q)$ были бы заменены множителями $q^{-2}e\gamma_\mu$, соответствующими функциям распространения фотона, входящим в появляющиеся вместо крестов вершины (должны быть также δ -функции, отвечающие закону сохранения импульса $p_2 - p_1 = q$). Затем проводился бы последующий анализ. В этом случае диаграммы на фиг. 68 были бы частями более сложных диаграмм, например диаграмм, показанных на фиг. 69 и соответствующих взаимодействию электрона с протоном (обозначенным двойными линиями).



Ф и г. 69.

Анализ диаграммы *a* на фиг. 69 дает возможность понять условия, при соблюдении которых источник виртуальных фотонов может рассматриваться как «внешний» потенциал. Пусть $a_\mu^{(1)}(q)$ — амплитуда образования источником виртуальных фотонов с импульсом q и поляризацией μ . Тогда матричный элемент рассеяния электрона на этом источнике посредством поглощения одного фотона (фиг. 70) будет пропорционален выражению

$$M^{(1)} = \int d^4q \frac{1}{\gamma \cdot (p_1 + q) - m} \gamma^\mu \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - m} a_\mu^{(1)}(q). \quad (15.77)$$

Аналогично, если амплитуда излучения источником двух фотонов есть $a_{\mu_1 \mu_2}^{(2)}(q_1, q_2)$, то матричный элемент рассеяния электрона благодаря погло-

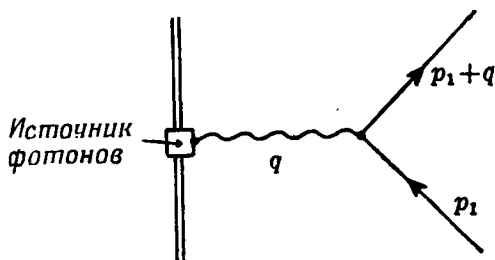
щению двух фотонов будет пропорционален выражению

$$M^{(2)} = \int d^4q_1 \int d^4q_2 \frac{1}{\gamma \cdot (p_1 + q_1 + q_2) - m} \gamma^{\mu_1} \times \\ \times \frac{1}{\gamma \cdot (p_1 + q_1) - m} \gamma^{\mu_2} \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - m} a_{\mu_1 \mu_2}^{(2)}(q_1, q_2). \quad (15.78)$$

Если источник обладает тем свойством, что излучение первого фотона не приводит к существенным изменениям его состояния, амплитуда излучения второго фотона не зависит от того, был или не был излучен предыдущий фотон, т. е. если

$$a_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^{(n)}(q_1, \dots, q_n) = a_{\mu_1}^{(1)}(q_1) \dots a_{\mu_n}^{(1)}(q_n), \quad (15.79)$$

то такой источник называют «внешним» потенциалом. Очень тяжелая заряженная частица обладает свойством получать пренебрежимо малую отдачу при излучении фотона с энергией $\omega_k \ll M$. Следовательно, такой источник



Ф и г. 70.

ведет себя подобно внешнему потенциалу. (Описание излучения классических систем дано в статьях Глаубера [320], Тирринга и Тучека [775] и Швингера [718].) Аналогично, излучение заряженной частицей очень мягких реальных фотонов в хорошем приближении можно описывать в рамках классической теории. Это приближение, которое состоит в пренебрежении реакцией заряда на взаимодействие с электромагнитным полем, впервые узаконили и применили Блох и Нордсик [62].

Чтоб подробнее познакомиться с этим в случае виртуального испускания, рассмотрим снова диаграмму a на фиг. 69, предположив, что двойная линия представляет тяжелую частицу со спином $\frac{1}{2}$, массой $M \gg m$ и зарядом Ze . Амплитуда рассеяния электрона из состояния с импульсом p_1 в состояние с импульсом $p_2 = p_1 + k$ будет тогда пропорциональна выражению

$$R' = Ze^2 \delta^{(4)}(p_2 + q_2 - p_1 - q_1) \cdot \tilde{u}_M(q_2) \gamma^\mu u_M(q_1) \frac{1}{k^2} \tilde{u}_m(p_2) \gamma_\mu u_m(p_1). \quad (15.80)$$

Напомним, что

$$\tilde{u}_M(q_2) \gamma_\mu u_M(q_1) = \frac{1}{2M} \tilde{u}_M(q_2) [\gamma \cdot q_2 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma \cdot q_1] u_M(q_1) \quad (15.81a)$$

$$= \frac{1}{2M} (q_1 + q_2)_\mu \tilde{u}_M(q_2) u_M(q_1) + \\ + \frac{i}{2M} (q_2 - q_1)^\nu \tilde{u}_M(q_2) \sigma_{\nu\mu} u_M(q_1). \quad (15.81b)$$

В этом разложении первый член соответствует вкладу от заряда, а второй — вкладу от магнитного момента. В том приближении, когда пренебрегают отдачей, т. е. когда полагают $q_2 = q_1$, второй член равен

нулю. В системе покоя тяжелой частицы пренебрежение отдачей означает, что

$$q_{1\mu} \approx q_{2\mu} = M g_{0\mu}. \quad (15.82)$$

В этом случае выражение (15.81) становится равным единице, так как $\tilde{u}_M(0) u_M(0) = 1$. Поскольку $q_2 = q_1 - k$, то

$$q_2^2 = M^2 = (q_1 - k)^2 = M^2 - 2k \cdot q_1 + k^2. \quad (15.83)$$

Квадрат пространственно-подобного вектора $k^2 = 2k \cdot q_1$ в системе отсчета, в которой массивная частица покоится, равен $2k_0 M$. Отсюда $k_0 \approx -k^2/2M$ и

$$\frac{1}{k^2} \approx -\frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{1 - k^2/4M^2} \right) \approx -\frac{1}{k^2}, \quad (15.84)$$

что соответствует кулоновскому потенциалу. Таким образом, если пренебречь отдачей, то формула (15.80) сводится к

$$R' \sim -\tilde{u}_m(p_2) \gamma^0 \frac{Ze^2}{|p_2 - p_1|^2} u_m(p_1) \delta^{(1)}(p_{20} - p_{10}) \delta^{(3)}(p_2 - p_1 - \Delta q) \quad (15.85)$$

и представляет собой амплитуду рассеяния электрона с передачей импульса Δq в кулоновском поле массивной частицы.

Вернемся теперь к основной задаче этого параграфа, а именно к анализу диаграмм фиг. 68. Рассмотрим сначала диаграмму б, которая, как мы видели, соответствует оператору $\Lambda^\nu(p_2, p_1) a_\nu(q)$. Очевидно, что интеграл в выражении для Λ

$$\Lambda^\nu(p_2, p_1) = -\frac{i\alpha}{4\pi^3} \int d^4k \gamma^\mu \frac{1}{\gamma \cdot (p_2 - k) - m} \gamma_\nu \frac{1}{\gamma \cdot (p_1 - k) - m} \gamma_\mu \times \\ \times \frac{1}{k^2 - \lambda_{\text{мин}}^2 + i\epsilon} \quad (15.86)$$

логарифмически расходится, поскольку при больших k знаменатель ведет себя как k^4 , а числитель — как $d^4k \sim k^3 dk$. Используя метод регуляризации (см. статью Фейнмана [252], приложение В), можно вычислить¹⁾ интеграл (15.86). С этой целью в выражении (15.86) функция распространения фотона $(k^2 - \lambda_{\text{мин}}^2)^{-1}$ заменяется на $(k^2 - \lambda_{\text{мин}}^2)^{-1} - (k^2 - M^2)^{-1}$, где M — большая «регуляризующая масса». Регуляризованное выражение может быть записано в виде

$$\Delta_{\text{вн}}(q) = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\ln \frac{M}{m} + \frac{9}{4} - 2 \ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин}}} \right) \gamma_\mu + \Lambda_{\text{Сн}}(q). \quad (15.87)$$

Величина $\Lambda_{\text{Сн}}(q)$ представляется интегралом, который сходится при больших импульсах k (хотя и расходится в пределе $\lambda_{\text{мин}} \rightarrow 0$). Фейнман вычислил этот интеграл для случая, когда $q^2 \leq 4m^2$ и $p_1^2 = p_2^2 = m^2$, пренебрегая членами, которые в пределе $\lambda_{\text{мин}} \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$ обращаются в нуль²⁾. Если ввести параметр θ при помощи соотношения $\sin^2 \theta = q^2/4m^2$,

¹⁾ Три энергетических знаменателя можно объединить в один при помощи повторного использования формулы Фейнмана (15.31) или при помощи формулы

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx x \int_0^1 dy \frac{1}{[a(1-x) + bxy + cx(1-y)]^3}.$$

²⁾ В случае $q^2 > 4m^2$ внешний потенциал может рождасть реальные пары, и знаменатель, содержащий вспомогательные переменные интегрирования x и y , имеет полюсы. Вместе с тем интеграл хорошо определен, поскольку добавка $i\epsilon$ дает однозначное предписание, как его вычислять. Возможность рождения реальных пар, однако, практически не имеет большого значения, и поэтому мы не рассматриваем случая $q^2 > 4m^2$. Вычисление оператора $\Lambda_\nu(p_1, p_2)$, когда $p_1^2 \neq m^2$ и $p_2^2 \neq m^2$, можно найти в статье Карплуса и Кролла [422].

то при сделанных предположениях выражение для $\Lambda_{C\mu}$ запишется в виде

$$\Lambda_{C\mu}(q) = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \left[2 \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин}}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) + \theta \text{tg } \theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4}{\text{tg } 2\theta} \int_0^{\theta} x \text{tg } x dx \right] \gamma_{\mu} + \frac{\gamma \cdot q \gamma_{\mu} - \gamma_{\mu} \gamma \cdot q}{4m} \frac{2\theta}{\sin 2\theta} \right\}. \quad (15.88)$$

При малых значениях импульса q оператор $\Lambda_{C\mu}(q)$ имеет вид

$$\Lambda_{C\mu}(q) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{4m} (\gamma \cdot q \gamma_{\mu} - \gamma_{\mu} \gamma \cdot q) + \frac{2q^2}{3m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин}}} - \frac{3}{8} \right) \gamma_{\mu} \right]. \quad (15.89)$$

Все эти выражения справедливы только тогда, когда p_1 и p_2 являются импульсами свободных частиц, т. е. $p_1^2 = p_2^2 = m^2$.

Следует отметить, что выражения (15.88) и (15.89) стремятся к нулю, когда приращение импульса q стремится к нулю, и что, с другой стороны, логарифмически расходящийся (первый) член в выражении (15.87) не зависит от q . Иными словами, только та часть оператора Λ_{μ} , которая не обращается в нуль, когда $q \rightarrow 0$ или когда p_2 стремится к p_1 , содержит расходящийся интеграл. Чтобы убедиться, что так и должно быть, зафиксировав импульс p_1 и разложим оператор Λ_{μ} , определенный выражением (15.86), в ряд по степеням разности $p_2 - p_1$ или, вернее, по степеням компонент этого 4-вектора. При этом для разложения оператора $[\gamma \cdot (p_2 - k) - m]^{-1}$ используем справедливое для любых операторов A и B [252] общее разложение

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} - \dots, \quad (15.90a)$$

которое получается путем итерации тождества (15.90б):

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A+B} \quad (15.90б)$$

$$= \frac{1}{A} (A+B) \frac{1}{A+B} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A+B} = \\ = \frac{1}{A} (A+B-B) \frac{1}{A+B}. \quad (15.90в)$$

Применим формулу (15.90а) к оператору $[\gamma \cdot (p_2 - k) - m]^{-1}$:

$$\frac{1}{\gamma \cdot p_2 - \gamma \cdot k - m} = \frac{1}{\gamma \cdot p_1 + \gamma \cdot (p_2 - p_1) - \gamma \cdot k - m} = \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - \gamma \cdot k - m} - \\ - \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - \gamma \cdot k - m} \gamma \cdot (p_2 - p_1) \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - \gamma \cdot k - m} + \dots \quad (15.91)$$

Ясно, что при больших k первый член будет порядка $1/k$, второй — порядка $1/k^2$ и т. д. Если подставить разложение (15.91) в интеграл (15.86), то только первый член приведет к логарифмически расходящемуся интегралу по k . Второй член даст подинтегральное выражение, которое ведет себя как dk/k^2 , и поэтому соответствующий интеграл сходится. Последующие члены ряда будут давать все лучше и лучше сходящиеся интегралы: член, пропорциональный $(p_2 - p_1)^n$, приведет к подинтегральному выражению вида dk/k^{n+1} . Это доказывает сделанное выше утверждение, что расходится только $\Lambda_{\mu}(p_1, p_1)$ [т. е. только эта величина зависит от регуляризирующей массы M , см. (15.87)], но что

$$\Lambda_{C\mu}(p_1, p_2) = \Lambda_{\mu}(p_1, p_2) - \Lambda_{\mu}(p_1, p_1) \quad (15.92)$$

есть конечная величина (т. е. представляется сходящимся интегралом по k и не зависит от регуляризующей массы). Формулу (15.92) можно рассматривать как определение конечной части вершинного оператора Λ_μ с учетом поправок, который обозначен в формуле (15.88) через $\Lambda_{C\mu}$ (по крайней мере для случая, когда p_1 и p_2 есть импульсы свободных частиц).

Рассмотрим несколько подробнее член $\Lambda_\mu(p_1, p_1)$. Используя тождества

$$\gamma^\mu k \gamma_\mu = -2k, \quad (15.93a)$$

$$\gamma^\mu k p \gamma_\mu = 4p \cdot k, \quad (15.93б)$$

$$\gamma^\mu k p q \gamma_\mu = -2q p k, \quad (15.93в)$$

убеждаемся, что $\Lambda_\mu(p_1, p_1)$ можно записать в виде

$$\Lambda_\mu(p_1, p_1) = B \gamma_\mu + R_\mu(p_1), \quad (15.94a)$$

где B — расходящаяся константа:

$$B = \frac{\alpha}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{M}{m} + \frac{9}{4} - 2 \ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин}}} \right), \quad (15.94б)$$

а величина $R_\mu(p_1)$ конечна, причем

$$\tilde{u}(p_1) R_\mu(p_1) u(p_1) = 0 \quad (15.94в)$$

и

$$R_\mu(p_1) \Big|_{\gamma \cdot p_1 = m} = 0. \quad (15.94г)$$

Выражение для полного вершинного оператора может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(p_2, p_1) &= \Lambda_\mu(p_1, p_1) + \{\Lambda_\mu(p_2, p_1) - \Lambda_\mu(p_1, p_1)\} = \\ &= B \gamma_\mu + R_\mu(p_1) + \Lambda_{C\mu}(p_2, p_1). \end{aligned} \quad (15.95)$$

Поэтому можно объединить вклады от диаграмм a и b на фиг. 67 и записать $M^{(a)} + M^{(б)} = +2\pi i (1 + B) e \tilde{u}(p_2) \gamma \cdot a (p_2 - p_1) u(p_1) +$

$$+ 2\pi i \tilde{u}(p_2) e \Lambda_{C\mu}(p_2, p_1) a^\mu (p_2 - p_1) u(p_1). \quad (15.96)$$

Ниже будет показано, что в электродинамике при совместном рассмотрении диаграмм ϵ и ζ на фиг. 68 член с константой B фактически пропадает. Следует подчеркнуть, что константа B зависит от выбора калибровки. Так, в калибровке Ландау функция распространения фотона взята в виде $D_{F\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu k^{-2}) k^{-2}$, и константа B в e^2 -приближении имеет конечное значение. Если выбрана калибровка Ландау, то единственная расходимость в e^2 -приближении теории возмущений соответствует перенормировке массы и устраняется контрчленом δm (Фрид и Йенни [282]).

В теории перенормировок широко используется метод перенормировки при помощи вычитаний. Примером может служить формула (15.95). Оператор [в нашем случае $\Lambda_\mu(p_1, p_2)$] разлагают в степенной ряд по некоторой величине, связанной с внешними переменными (в нашем случае по $p_2 - p_1$). Тогда только первый член (или несколько первых членов) этого разложения будет содержать расходящиеся интегралы по внутренним переменным (в нашем случае по k). Затем эти члены релятивистски инвариантным образом отбрасываются, для чего используется либо перенормировка массы, либо перенормировка заряда, которая будет описана в § 5 гл. 15, либо замечают, что они взаимно уничтожаются с другими бесконеч-

ными членами, как это было в случае нашего Λ_μ , либо в отдельных случаях вводят в исходный лагранжиан специальные члены, как, например, в случаях, которые будут обсуждены в гл. 16. Конечные члены, которые остаются после такого отбрасывания, принимаются в качестве перенормированного выражения для рассматриваемого оператора. В остающейся части книги мы систематически будем сталкиваться с этой методикой.

Изучим теперь члены (15.69) и (15.72). Они содержат множитель $(\gamma \cdot p - m)^{-1}$, что приводит к трудностям, так как матричные элементы $M^{(e1)}$ и $M^{(e2)}$ должны быть взяты между двумя состояниями свободных частиц, и поэтому знаменатель становится равным нулю. Хотя сумма числителей в выражениях для $M^{(e1)}$ и $M^{(e2)}$ также оказывается равной нулю, это только приводит к неопределенности типа $0/0$. Чтобы получить однозначный результат, следует ввести в явном виде затухающие множители, которые необходимы для правильного определения начального и конечного «голых» состояний (см. гл. 11), поскольку указанная неоднозначность существенно связана с предельным процессом, при котором начальное и конечное время в матрице $U(t, t_0)$ устремляются к $\pm\infty$. Если не соблюдать предосторожность, то, применяя предельный процесс, можно нарушить унитарность S -матрицы. Фейнман [252] и Дайсон [194, 199] показали, как преодолеть эту трудность (см. также статьи Карплуса и Кролла [422] и Людерса [516]). Если ввести в явном виде затухающую функцию $g(t)$, которая адиабатически включает и выключает взаимодействие между полями, то гамильтониан взаимодействия заменится выражением¹⁾

$$\mathcal{H}_I(x) \rightarrow -eg(t) N [\tilde{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)] (A^\mu(x) + A^{e\mu}(x)) - \delta m [g(t)]^2 N (\tilde{\psi}(x) \psi(x)). \quad (15.97)$$

Предполагается, что время, на протяжении которого функция $g(t)$ существенно изменяется, значительно превышает длительность процесса рассеяния. Если обозначить фурье-образ функции $g(t)$ через $G(\Gamma_0)$, то

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\Gamma_0) e^{-i\Gamma_0 t} d\Gamma_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\Gamma_0) e^{-i\Gamma \cdot x} d\Gamma_0, \quad (15.98)$$

где введен вектор $\Gamma_\mu = (\Gamma_0, 0, 0, 0)$. Выбрана нормировка, при которой

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\Gamma_0) d\Gamma_0 = 1, \quad (15.99)$$

и предположено, что функция $G(\Gamma_0)$ ведет себя почти как дельта-функция и существенно отличается от нуля только для значений Γ_0 , равных по порядку величины T^{-1} .

Если подставить гамильтониан взаимодействия (15.97) в разложение S -матрицы, то выражение (15.70), например, заменится на

$$M^{(e1)} = -\frac{ie}{4\pi^3} \iint \gamma \cdot a(p_2 - p_1 - \Gamma - \Gamma') \frac{1}{\gamma^\mu (p_{1\mu} + \Gamma_\mu + \Gamma'_\mu) - m} \times \\ \times \Sigma^{(2)}(p_1 + \Gamma) G(\Gamma_0) G(\Gamma'_0) d\Gamma_0 d\Gamma'_0. \quad (15.10c)$$

¹⁾ Будучи радиационным эффектом второго порядка, δm , должно быть умножено на $[g(t)]^2$.

При $T \rightarrow \infty$, а также Γ_0 и $\Gamma'_0 \rightarrow 0$ подынтегральное выражение может быть преобразовано. Функция распространения электрона превратится в

$$\frac{1}{\gamma^\mu (p_{1\mu} + \Gamma_\mu + \Gamma'_\mu) - m} = \frac{\gamma^\mu (p_{1\mu} + \Gamma_\mu + \Gamma'_\mu) + m}{2p_1 \cdot (\Gamma + \Gamma') + (\Gamma + \Gamma')^2} \approx \frac{\gamma \cdot p_1 + m}{2p_{10} (\Gamma_{10} + \Gamma'_0)}, \quad (15.101)$$

причем учтено, что для свободной частицы $p_1^2 = m^2$. Следовательно, если использовать для разложения оператора $\Sigma^{(2)}(p_1 + \Gamma)$ соотношение

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} - \dots \quad (15.102)$$

и оставить в разложении оператора $\Sigma^{(2)}$ только члены первой степени по Γ , то

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(p_1 + \Gamma) &= \alpha \int d^4 k \gamma^\mu \frac{1}{\gamma \cdot (p_1 + k + \Gamma) - m} \gamma_\mu \frac{1}{k^2 - \lambda_{\text{МИН}}^2 + i\varepsilon} = \\ &= \Sigma^{(2)}(p_1) - \alpha \int d^4 k \gamma^\mu \frac{1}{\gamma \cdot (p_1 + k) - m} \gamma^\nu \frac{1}{\gamma \cdot (p_1 + k) - m} \gamma_\mu \times \\ &\quad \times \frac{1}{k^2 - \lambda_{\text{МИН}}^2 + i\varepsilon} \Gamma_\nu = \Sigma^{(2)}(p_1) - I^\nu(p_1) \Gamma_\nu, \end{aligned} \quad (15.103a)$$

где $I_\nu(p)$ — логарифмически расходящийся интеграл, тесно связанный с оператором $\Lambda^\nu(p_1, p_1)$:

$$I_\nu(p_1) = 4\pi^3 i \Lambda_\nu(p_1, p_1). \quad (15.103b)$$

Используя формулу (15.103), можно записать подынтегральное выражение в интеграле (15.100) в виде

$$\frac{1}{\gamma \cdot (p_1 + \Gamma + \Gamma') - m} [\Sigma^{(2)}(p_1) - I^\nu(p_1) \Gamma_\nu]. \quad (15.104)$$

Если аналогичным образом ввести затухающую функцию $g(t)$ в выражение (15.73) для матричного элемента $M^{(e2)}$, то оно примет вид

$$\begin{aligned} M^{(e2)} &= - \int \int e dt \gamma \cdot a(p_2 - p_1 - \Gamma - \Gamma') \times \\ &\quad \times \frac{1}{\gamma \cdot (p_1 + \Gamma + \Gamma') - m} G(\Gamma_0) G(\Gamma'_0) d\Gamma_0 d\Gamma'_0. \end{aligned} \quad (15.105)$$

Поскольку $\Sigma^{(2)}(p_1^2 = m^2)$, исключая постоянный множитель $(-i/4\pi^3)$, определяется как δt , то ясно, что $M^{(e2)}$ взаимно уничтожается с частью матричного элемента $M^{(e1)}$, содержащей $\Sigma^{(2)}(p_1)$. Фактически это есть перенормировка массы. Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} M^{(e1)} + M^{(e2)} &= - \frac{ie}{4\pi^3} \int \int d\Gamma_0 d\Gamma'_0 G(\Gamma_0) G(\Gamma'_0) \times \\ &\quad \times \gamma \cdot a(p_2 - p_1 - \Gamma - \Gamma') \frac{1}{\gamma \cdot (p_1 + \Gamma + \Gamma') - m} I_{\text{н}}^\nu(p_1) \Gamma_\nu. \end{aligned} \quad (15.106)$$

Далее, из релятивистской инвариантности следует, что величина $I^\nu(p_1)$ преобразуется при преобразованиях Лоренца как 4-вектор, и поэтому она должна иметь следующую структуру¹⁾:

$$\begin{aligned} I^\nu(p_1) &= I_{(1)}(p_1^2) \gamma^\nu + I_{(2)}(p_1^2) (\gamma \cdot p_1 - m) \gamma^\nu + \\ &\quad + I_{(3)}(p_1^2) \gamma^\nu (\gamma \cdot p_1 - m) + I_{(4)}(p_1^2) (\gamma \cdot p_1 - m) \gamma^\nu (\gamma \cdot p_1 - m), \end{aligned} \quad (15.107)$$

¹⁾ Отметим, что член вида $I'(p_1^2) p^\nu$ всегда может быть записан в виде $1/2 I'(p_1^2) (\gamma^\nu \not{p} + \not{p} \gamma^\nu)$, так что выражение (15.107) действительно описывает наиболее общую структуру $I_\nu(p_1)$.

где $I_{(1)}, I_{(2)}, \dots$ — функции инварианта p^2 . При действии $\Gamma^v(p_1)$ на дираковский спинор свободной частицы с импульсом p_1 только первые два члена будут давать отличный от нуля вклад. Кроме того, вклад от второго члена будет пропорционален Γ , и им поэтому можно пренебречь. Отсюда следует, что надо рассмотреть только первый член. Тогда при $p_1^2 = m^2$ можно записать

$$\Gamma^v(p_1^2) = I_{(1)} \gamma^v, \quad (15.108)$$

где $I_{(1)} = I_{(1)}(m^2)$ — константа, равная $+4\pi^3 i B$, причем константа B определяется формулой (15.94) [вспомните соотношение (15.103б)]. Затем следует симметризовать множитель в конце выражения (15.106), заменив Γ на $\frac{1}{2}(\Gamma + \Gamma')$. Учитывая, что оператор (15.106) применяется к дираковскому спинору, можно добавить к множителю $\frac{1}{2}(\Gamma + \Gamma')$ оператор $\frac{1}{2}(\gamma \cdot p - m)$. Тогда выражение (15.106) приобретет вид

$$M^{(21)} + M^{(22)} = + \frac{iea}{4\pi^3} \int \int d\Gamma_0 d\Gamma'_0 G(\Gamma_0) G(\Gamma'_0) \gamma \cdot a (p_2 - p_1 - \Gamma - \Gamma') \times \\ \times \frac{1}{\gamma \cdot (p_1 + \Gamma + \Gamma') - m} I_{(1)} \frac{1}{2} [\gamma \cdot (p_1 + \Gamma + \Gamma') - m]. \quad (15.109)$$

В пределе $\Gamma_0 \rightarrow 0$ оно превратится в

$$M^{(21)} + M^{(22)} = + \frac{1}{2} \frac{ie}{4\pi^3} I_{(1)} \gamma \cdot a (p_2 - p_1) = - \frac{1}{2} eB \gamma \cdot a (p_2 - p_1), \quad (15.110)$$

причем на множитель $\frac{1}{2}$ следует обратить особое внимание. Аналогичный анализ может быть проведен и для матричных элементов (15.69) и (15.72), что приводит к результату

$$M^{(21)} + M^{(22)} = + \frac{1}{2} \frac{ie}{4\pi^3} I_{(1)} \gamma \cdot a (p_2 - p_1) = - \frac{1}{2} eB \gamma \cdot a (p_2 - p_1). \quad (15.111)$$

Выше было показано, что расходящийся вклад в матричный элемент от диаграммы *b* на фиг. 68 может быть записан в виде

$$M_D^{(6)} = \Lambda^v(p_1, p_1) e a_\nu (p_2 - p_1) = B e \gamma \cdot a (p_2 - p_1). \quad (15.112)$$

Поэтому, хотя каждый из матричных элементов, соответствующих диаграммам *b*, *v* и *g* на фиг. 68, взятый в отдельности, расходится, сумма их все же конечна и фактически равна

$$M = + 2\pi i \tilde{u}(p_2) e \Lambda_{C\nu}(p_2, p_1) a^\nu (p_2 - p_1) u(p_1), \quad (15.113)$$

где оператор $\Lambda_{C\nu}$ определяется формулой (15.88). В гл. 16 будет показано, что это взаимное уничтожение расходимостей собственно энергетической и вершинной частей связано с калибровочной инвариантностью и происходит в квантовой электродинамике во всех порядках теории возмущений.

Перейдем теперь к выяснению физического смысла расходимостей в сумме матричных элементов (диаграммы *v* и *g* на фиг. 68). Мы вычислим эффект взаимодействия электрона с внешним полем вплоть до порядка e^3 . В первом порядке по e дает вклад диаграмма *a* на фиг. 68, которая представляет взаимодействие электрона с внешним полем и ни с чем более. В третьем порядке по e ситуация изменится в двух отношениях. Во-первых, имеется вероятность P того, что электрон будет взаимодействовать с внешним полем между актами испускания и поглощения виртуального фотона. Этот процесс описывается диаграммой *b* на фиг. 68. Во-вторых, вероятность взаимодействия электрона с внешним полем, когда около

электрона нет виртуального фотона, теперь уже равна не 1, а $1 - P$, т. е. она уменьшается на величину вероятности нахождения виртуального фотона около электрона (эти утверждения непосредственно вытекают из унитарности S -матрицы, так как условие унитарности гарантирует сохранение полной вероятности). Указанная вероятность дается выражением

$$P = \int |b(\mathbf{k})|^2 d^3k = -\frac{i\alpha}{4\pi^3} I_{(4)}, \quad (15.114)$$

где $b(\mathbf{k})$ — амплитуда вероятности того, что имеется виртуальный квант с заданным импульсом \mathbf{k} .

Уменьшение вероятности обнаружения электрона, не окруженного виртуальными квантами, равносильно изменению нормировки волновой функции электрона. Поэтому диаграммы ϵ и ζ на фиг. 68 часто называют диаграммами перенормировки волновой функции. Диаграмма ζ описывает перенормировку волновой функции начального, а диаграмма ϵ — конечного состояний электрона. Волновая функция (т. е. амплитуда вероятности) должна быть перенормирована при помощи множителя $(1 - P)^{1/2}$, так что поправкой первого порядка будет $1/2 P$, что и объясняет появление множителя $1/2$ в формуле (15.114).

§ 4. Аномальный магнитный момент и лэмбовский сдвиг

В предыдущем параграфе было показано, что после перенормировки массы сумма вкладов от диаграмм ϵ и ζ на фиг. 68 конечна и соответствующий матричный элемент дается выражением (15.113). По-видимому, смысл этих радиационных поправок проще всего понять, если рассмотреть их, используя понятие «эквивалентного» потенциала, в котором движется электрон. Амплитуда рассеяния, включающая вклады от диаграмм $a - \epsilon$ на фиг. 68, равна

$$R = +2\pi i e \tilde{u}(\mathbf{p}_2) (\gamma_\nu + \Lambda_{C\nu}(p_2, p_1)) u(\mathbf{p}_1) a^\nu(p_2 - p_1). \quad (15.115)$$

Это равенство можно также записать в виде

$$R = +2\pi i e \tilde{u}(\mathbf{p}_2) \left\{ F(q^2) \gamma_\nu - \frac{i}{2m} G(q^2) q^\mu \sigma_{\nu\mu} \right\} u(\mathbf{p}_1) a^\nu(p_2 - p_1), \quad (15.116)$$

что представляет собой наиболее общую структуру матричного элемента, которая следует из релятивистской и калибровочной инвариантности формализма S -матрицы при условии, что внешнее поле слабое, и поэтому можно ограничиться только линейными по внешнему полю членами [699]¹⁾.

Подставляя (15.115) в явное представление вершинного оператора $\Lambda_{C\nu}$ (15.88), легко убедиться, что в рассматриваемом приближении функции F и G суть

$$F(q^2) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left[\left(2 \ln \frac{m}{\lambda_{\min}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} \right) + \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{4}{\operatorname{tg} 2\theta} \int_0^\theta x \operatorname{tg} x dx \right], \quad (15.117a)$$

$$G(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{2\theta}{\sin 2\theta}, \quad \sin^2 \theta = \frac{q^2}{4m^2}. \quad (15.117b)$$

¹⁾ В гл. 17 будет дан вывод структурного соотношения (15.116).

Далее, в первом порядке по внешнему полю матричный элемент для упругого рассеяния дираковской частицы, электромагнитные свойства которой охарактеризованы при помощи коэффициентов Фолди ϵ_n и μ_n (ϵ_0 — статический электрический заряд, а μ_0 — статический аномальный магнитный момент; вспомните § 8 гл. 4), имеет вид

$$\begin{aligned} (p_2 | s | p_1) &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4x \tilde{u}(p_2) e^{ip_2 \cdot x} \times \\ &\times \sum_{n=0} \left\{ \epsilon_n \square^n \gamma^\nu A_\nu^e(x) + \frac{1}{2} \mu_n \sigma_{\mu\nu} \square^n F^{\mu\nu}(x) \right\} \cdot u(p_1) e^{-ip_1 \cdot x} = \\ &= -2\pi i \tilde{u}(p_2) \sum_{n=0} [\epsilon_n q^{2n} \gamma_\nu - i q^\mu \sigma_{\nu\mu} \mu_n q^{2n}] u(p_1) a^\nu(p_2 - p_1). \quad (15.118) \end{aligned}$$

Разложим функции $F(q^2)$ и $G(q^2)$ в степенной ряд по q^2 :

$$F(q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)} q^{2n}, \quad (15.119a)$$

$$G(q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)} q^{2n}. \quad (15.119b)$$

Сопоставляя формулы (15.118) и (15.116), мы видим, что коэффициенты разложения $F^{(n)}$ и $G^{(n)}$ с точностью до постоянных множителей совпадают с коэффициентами Фолди ϵ_n и μ_n , которые феноменологически характеризуют внутреннюю электромагнитную структуру частицы со спином $\frac{1}{2}$. Таким образом, из-за радиационных поправок электрон ведет себя так, как если бы он обладал распределением заряда вида $-eF(q^2)$ и распределением аномального магнитного момента вида $(-e/2m)G(q^2)$. Функции $F(q^2)$ и $G(q^2)$ называют форм-факторами заряда и магнитного момента электрона [873].

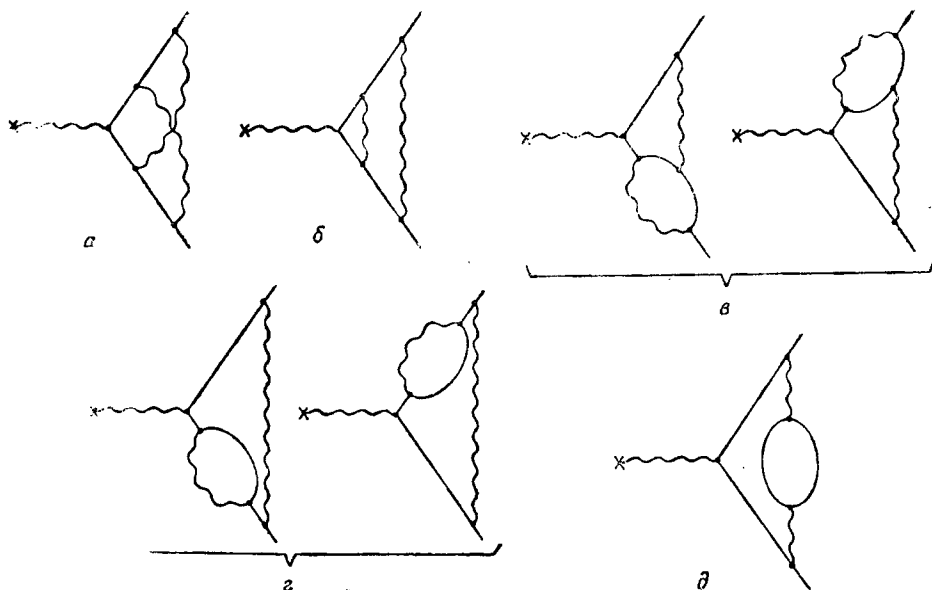
Нужно отметить, что из разложения (15.116) видно, что вследствие радиационных поправок во втором порядке теории возмущений электрон в медленно меняющемся внешнем электромагнитном поле ведет себя, как если бы он имел статический магнитный момент, равный по величине $(1 + \frac{\alpha}{2\pi})$ магнетонов Бора, так как $G(0) = \frac{2m}{-e} \mu_0 = \frac{\alpha}{2\pi}$. Существование этого аномального магнитного момента было впервые экспериментально обнаружено Нейфом, Нельсоном и Раби [567] и Наглом, Джулианом и Захариасом [906]. Брейт [81—83] первый высказал мысль, что наблюдаемый эффект может быть объяснен наличием у электрона малого дополнительного спинового магнитного момента. В работе Швингера [709] впервые было показано, что часть радиационных поправок в квантовой электродинамике соответствует дополнительному магнитному моменту, связанному со спином электрона и равному по величине $\alpha/2\pi$ (см. также работу Латтинджера [520]). Вклад в аномальный магнитный момент, т. е. в $G(q^2)$, от диаграмм четвертого порядка, изображенных на фиг. 71, был вычислен Карплусом и Кроллом [422]. На фиг. 71 опущены диаграммы с участием контрчленов δm .

Важность работы Карплуса и Кролла заключается в том, что в ней впервые был проведен расчет в четвертом порядке теории возмущений и было в явном виде показано, что и в этом порядке программа перенормировок позволяет обойти все трудности с расходимостями. Их результаты содержали некоторые численные ошибки, и поэтому Сомерфилд [736, 737], Питерман [637] и Кролл (1957 г., не опубликовано)

сделали новый расчет. Указанный этими авторами вклад в магнитный момент электрона в четвертом порядке теории возмущений есть

$$\begin{aligned} \Delta\mu^{(4)} &= \frac{\alpha^2}{\pi^2} \left(\frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{3}{4} \zeta(3) - \frac{1}{2} \pi^2 \ln 2 \right) \frac{e\hbar}{2mc} = \\ &= -0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \frac{e\hbar}{2mc}, \end{aligned} \quad (15.120)$$

где $\zeta(3)$ — дзета-функция Римана при значении аргумента, равном 3. Таким образом, полный аномальный магнитный момент электрона с уче-



Ф и г. 71.

том членов вплоть до порядка α^2 равен

$$\Delta\mu_{(\text{теор.})} = \left(\frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right) \frac{e\hbar}{2mc} = 0,0011596 \frac{e\hbar}{2mc}. \quad (15.121)$$

Шупп, Пидд и Крейн [706] произвели наиболее точное экспериментальное измерение величины $\Delta\mu$, измерив гиромангнитное отношение g для свободных электронов. Они нашли, что

$$\Delta\mu_{(\text{эксп.})} = (0,0011609 \pm 0,0000024) \frac{e\hbar}{2mc} \quad (15.122)$$

в хорошем согласии с теоретически предсказываемым значением.

Далее, сравнение выражений (15.118) и (15.117а) показывает, что суммарный эффект от радиационных поправок, соответствующих диаграммам а — г на фиг. 68, можно рассматривать как изменение потенциала [эффективный потенциал для электрона равен $(\gamma_\mu + \Delta C_\mu) a^\mu$, а не $\gamma_\mu a^\mu$]. Из выражений (11.117а) и (11.89) явствует, что радиационные поправки размазывают потенциал по области с размерами порядка комптоновской длины волны. Более точно эффективный потенциал для электрона есть

$$F(q^2) a_\nu(q) \sim a_\nu(q) - \frac{2q^2}{3m^2} \frac{\alpha}{2\pi} \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{мин}}} - \frac{3}{8} \right) a_\nu(q). \quad (15.123)$$

Это изменение потенциала будет модифицировать структуру энергетических уровней в атоме. Для случая атома водорода в предположении чистого кулоновского поля из формулы (15.123) вытекает, что эффективный потенциал между протоном и электроном содержит также член, пропорциональный

$$-\frac{\alpha}{3\pi t^2} \nabla^2 \left(\frac{Ze^2}{r} \right) = 4\pi \frac{\alpha}{3\pi t^2} Ze^2 \delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (15.124)$$

Ввиду наличия дельта-функции $\delta(\mathbf{r})$ этот член оказывает влияние преимущественно на S -уровни. Для случая уровня $2^2S_{1/2}$ найдено, что возмущение (15.124) сдвигает этот уровень примерно на 1010 Мгц относительно уровня $2P_{1/2}$ и снимает, таким образом, имеющееся в дираковской теории вырождение. Аномальный магнитный момент привносит в сдвиг уровней $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ приблизительно 68 Мгц . Эффекты поляризации вакуума (вклад от диаграммы δ на фиг. 68) дают добавку к сдвигу $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$, равную -27 Мгц , так что предсказываемое значение сдвига с точностью до членов порядка $\alpha(\alpha Z)^4$ приблизительно равно 1052 Мгц . Экспериментальное значение этого сдвига есть $1057,77 \text{ Мгц}$. Учет поправок порядка $\alpha(\alpha Z)^5$ и $\alpha^2(\alpha Z)^4$ и поправок на конечные размеры и конечную массу дает для сдвига уровней $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ в водороде теоретическое значение $1057,95 \pm 0,15 \text{ Мгц}$, что хорошо согласуется с экспериментом. Учет членов порядка $\alpha(\alpha Z)^6 \ln^2(\alpha Z)$ и $\alpha(\alpha Z)^6 \ln(\alpha Z)$ [481, 284] приводит для водорода к согласию с экспериментом в пределах $0,07 \pm 0,15 \text{ Мгц}$ (см. табл. 10). Неопределенность $0,15 \text{ Мгц}$ в теоретическом значении соответствует невычисляемым эффектам конечных размеров $0,02 \text{ Мгц}$ и тому, что вклад в форм-фактор $F(q^2)$ четвертого порядка [831] не мог быть вычислен в аналитическом виде и для него только были даны строгие оценки сверху и снизу.

Таблица 10

Теоретическое и экспериментальное значения лэмбовского сдвига (Мгц)

	H	D	He
Теоретическое значение	$1057,70 \pm 0,15$	$1058,96 \pm 0,16$	$14046,3 \pm 3,0$
Экспериментальное значение	$1057,77 \pm 0,10$	$1059,00 \pm 0,10$	$14040,2 \pm 4,5$

Таким образом, приближенная величина лэмбовского сдвига может быть получена из среднего значения оператора $\Lambda_{C\mu}(q)a^\mu(q)$ для рассматриваемых водородоподобных состояний. Строго говоря, в этом случае выражение (15.89) для $\Lambda_{C\mu}(p_1, p_2)$ неприменимо, так как электрон уже не свободен ($p^2 \neq m^2$, ведь он связан в атоме!), а выражение (15.89) для вершинного оператора было выведено в предположении, что $p_1^2 = p_2^2 = m^2$. Однако при $|\mathbf{p}| \ll mc$ отклонения от формулы (15.89) малы, и поэтому считают, что соответствующими поправками можно пренебречь. Имеется и вторая трудность, связанная с обсуждаемой методикой: второй член в формуле (15.89) становится бесконечным, если устремить массу фотона $\lambda_{\text{мин}}$ к нулю. Такая «инфракрасная катастрофа» является ложной и не должна была бы возникать в выражении для лэмбовского сдвига уровней связанного электрона.

При описании рассеяния свободных частиц инфракрасные расходимости возникают потому, что электрон может излучать и поглощать мяг-

кие фотоны, не очень сильно смещаясь с энергетической поверхности $p^2 = m^2$. Это дает электронные функции распространения с очень малыми знаменателями, которые в сочетании с фотонными функциями распространения приводят к инфракрасным расходимостям. С другой стороны, при вычислении лэмбовского сдвига инфракрасные расходимости не могут возникать, потому что в этом случае 4-импульс электрона не лежит на энергетической поверхности свободной частицы. Таким образом, даже для очень малых энергий фотона знаменатель электронной функции распространения равен не нулю, а $m^2 - p^2$. Получающийся вершинный оператор логарифмически зависит от этой величины. Поэтому фигурирующий в случае рассеяния свободной частицы $\ln \lambda_{\min}/m$ в рассматриваемом случае эффективно заменяется на $\ln(m^2 - p^2)/m^2$. Поскольку для связанного водородоподобного состояния $p_0 = m - \varepsilon_n$, где ε_n — энергия связи в состоянии n и $|\mathbf{p}| \sim Z\alpha m$, то

$$\frac{1}{m} (m^2 - p^2) \sim 2 \left[\frac{p^2}{2m} + \varepsilon_n \right],$$

так что $\ln \lambda_{\min}/m$ в задаче связанных состояний заменяется на $\ln 2 \left[\frac{p^2}{2m} + \varepsilon_n \right]$. Среднее значение этого оператора дает главный вклад в логарифм Бете.

И из нерелятивистского рассмотрения в § 2 также видно, что при вычислении лэмбовского сдвига не могут возникать инфракрасные расходимости. При этом рассмотрении предполагалось, что фотоны имеют нулевую массу покоя и что электрон связан. Выражение (15.62а) для лэмбовского сдвига (см. стр. 502) имеет резонансный знаменатель $E_r - E_n + |\mathbf{k}|$, который не обращается в нуль для световых квантов с нулевой энергией $|\mathbf{k}| = 0$, поскольку из-за множителя $E_r - E_n$ в числитель вносят вклад только состояния с $r \neq n$.

Опишем теперь методику, которую обычно применяли при старых расчетах лэмбовского сдвига. Нерелятивистский лэмбовский сдвиг вычислялся сначала для световых квантов с нулевой массой покоя [выражение (15.62а)], а затем снова для фотонов с массой покоя λ_{\min} . В последнем расчете в знаменателе (15.62а) k следует заменить выражением

$$\omega_{\mathbf{k}} = (k^2 + \lambda_{\min}^2)^{1/2}. \quad (15.125)$$

Разность между результатами этих двух вычислений представляет собой разность между лэмбовскими сдвигами связанного электрона, взаимодействующего с поперечными квантами с нулевой и с конечной массой покоя соответственно. Эта разность равна

$$\begin{aligned} \Delta E(0) - \Delta E(\lambda_{\min}) &= \frac{2\alpha}{3\pi c^2} \int_0^K dk \sum_r |\mathbf{v}_{rn}|^2 (E_r - E_n) \times \\ &\times \left[\frac{1}{E_r - E_n + k} - \frac{1}{E_r - E_n + (k^2 - \lambda_{\min}^2)^{1/2}} \right]. \quad (15.126) \end{aligned}$$

Интеграл (15.126) сходится и на нижнем пределе ($k = 0$), и на верхнем; следовательно, верхний предел K можно заменить на ∞ . Кроме того, существенный вклад в выражение (15.126) дают только значения $k \ll \lambda_{\min}$. Поэтому если выбрать $\lambda_{\min} \ll mc^2$, то все представляющие интерес промежуточные состояния (r, k) в формуле (15.126) будут нерелятивистскими. Следовательно, использованные в § 2 гл. 15 приближения, включая

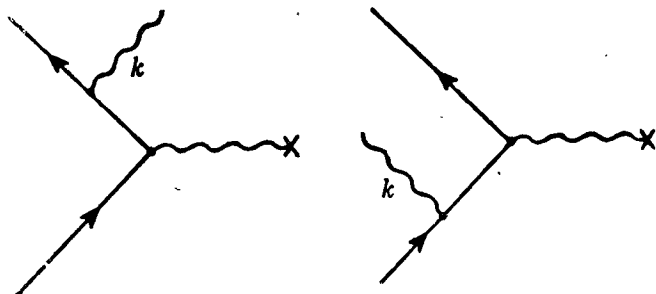
дипольное, оказываются оправданными. Теперь к выражению (15.126) прибавляют среднее значение выражения (15.89) для рассматриваемого водородоподобного состояния, оставляя массу фотона $\lambda_{\text{мин}}$ конечной. В действительности величину $\lambda_{\text{мин}}$ следует выбрать большей по сравнению с величиной энергии связи в атоме водорода ($\lambda_{\text{мин}} \gg 1 \text{ Ry}$), чтобы оправдать использование годного для свободных электронов выражения (15.89). Ясно, что это условие совместимо с требованием $\lambda_{\text{мин}} \ll mc^2$. Вычисление затем показывает, что в сумме выражения (15.126) и среднего значения (15.89) член $\ln \lambda_{\text{мин}}$ сокращается. Как и следовало ожидать, результат не зависит от фиктивной массы фотона. Френч и Вайскофф [280] отметили, что в формуле для сдвига уровней следует учесть также продольные и временные фотоны. Если сделать это, то в результате получим сумму выражения (15.626) и среднего значения выражения (15.89) при условии, что $\ln \lambda_{\text{мин}}$ положен равным

$$\ln \lambda_{\text{мин}} = \ln 2K - \frac{5}{6}. \quad (15.127)$$

Из только что описанных вычислений для лэмбовского сдвига получает-ся упомянутый выше результат 1052 *Мгц* (после включения эффектов поляризации вакуума). Уточнения этих вычислений и обсуждение высших приближений читатель может найти в статьях Баранджера, Бете и Фейнмана [26], Карплуса, Клейна и Швингера [426], Миллса и Кролла [553], Лайзера [481], Фрида и Йенни [282, 284] (см. также статьи Кролла и Поллока [466] и Карплуса и Клейна [425], в которых вычисляются радиационные поправки к сверхтонкой структуре).

Вернемся теперь к краткому обсуждению смысла величины $\lambda_{\text{мин}}$ для проблем, относящихся к рассеянию свободных электронов. Тот факт, что выражения (11.89) и (11.113) логарифмически расходятся при $\lambda_{\text{мин}} \rightarrow 0$, известен как «инфракрасная расходимость». Описанный только что в общих чертах метод, который устраняет инфракрасные расходимости для связанных электронов, нельзя применить к свободным электронам. Ясно, что нельзя вычислять эффективные сечения рассеяния непосредственно из выражений (11.89) и (11.113), устремляя в них $\lambda_{\text{мин}} \rightarrow 0$. Эта трудность устраняется, если заметить, что невозможно поставить такой эксперимент, в котором было бы гарантировано, что электрон в процессе рассеяния не излучил ни одного фотона. Лучшее, чего можно добиться при постановке эксперимента, — это потребовать, чтобы энергия фотона, если он был излучен, была меньше некоторой энергии k_0 , которая определяется точностью измерительных приборов. Оказывается, что дифференциальное эффективное сечение для рассеяния, сопровождаемого излучением фотона (тормозным излучением) с энергией, меньшей k_0 , также содержит инфракрасную расходимость и что эта расходимость взаимно уничтожается с аналогичной расходимостью в радиационных поправках. Точнее, если предположить, как это сделано выше, что фотон имеет очень малую массу $\lambda_{\text{мин}}$, то соответствующая диаграмма $b - g$ на фиг. 68 амплитуда будет содержать член вида $\ln(m/\lambda_{\text{мин}})$. Таким образом, вероятность рассеяния без излучения фотонов $|R^{(a)} + \dots + R^{(e)}|^2$ содержит член, пропорциональный $be^6 \ln(m/\lambda_{\text{мин}})$. (В более высоком порядке по α будет и член вида $[\ln(m/\lambda_{\text{мин}})]^2$.) Вместе с тем оказывается, что диаграммы на фиг. 72, соответствующие процессам с излучением реального фотона ($k^2 = 0$), приводят к вероятности рассеяния, сопровождаемого излучением реального фотона с энергией, меньшей k_0 , которая содержит член, равный (в низшем порядке по α) — $be^6 \ln(k_0/\lambda_{\text{мин}})$. Таким образом, вплоть до порядка

e^6 сумма вероятностей уже не содержит $\lambda_{\text{мин}}$, так что в этом порядке инфракрасные расходимости устранены. В общем случае инфракрасные расходимости всегда сокращаются, если рассматривать все процессы, включая излучение реальных фотонов, возможные в данном порядке теории возмущений. Общее обсуждение этого вопроса читатель может найти в статьях



Ф и г. 72.

Блоха и Нордсика [62] (где впервые было дано решение проблемы инфракрасных расходимостей), Паули и Фирца [626], Бете и Опенгеймера [49], Йоста [400], Глаубера [320], Брауна и Фейнмана [91], Яуха и Рорлиха [390, 391], Ломона [505, 506], Прэнджа [650], Асколи [17, 18], Наканиши [569] и Йенни, Фраутчи и Суура [875]. Мы вернемся к этому вопросу в § 6.

§ 5. Поляризация вакуума

До сих пор мы еще не обсуждали матричный элемент (15.74), соответствующий диаграмме δ на фиг. 68. Для истолкования этого члена можно представить себе, что замкнутая электронно-позитронная петля индуцирует ток

$$j_{\mu}(q) = \frac{i\alpha}{4\pi^3} \Pi_{\mu\nu}(q) a^{\nu}(q), \quad (15.128)$$

причем этот ток служит источником фотонов с импульсом q , который действует на электрон и рассеивает его. Из требования инвариантности этого индуцированного тока относительно калибровочного преобразования

$$a_{\nu} \rightarrow a_{\nu} + q_{\nu}\Lambda(q) \quad (15.129)$$

вытекает, что

$$\Pi_{\mu\nu}(q) q^{\nu} = 0. \quad (15.130)$$

Точно так же, чтобы ток $j_{\mu}(q)$ сохранялся, он должен удовлетворять уравнению непрерывности

$$q^{\mu} j_{\mu}(q) = q^{\mu} \Pi_{\mu\nu}(q) a^{\nu}(q) = 0, \quad (15.131)$$

которое эквивалентно уравнению (15.130), так как тензор $\Pi_{\mu\nu}$ симметричен. Оператор $\Pi_{\mu\nu}(q)$ обычно называют поляризационным тензором. Запишем тензор $\Pi_{\mu\nu}(q)$ в виде

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \Pi_{(1)}(q^2) q_{\mu} q_{\nu} + q^2 \Pi_{(2)}(q^2) g_{\mu\nu}, \quad (15.132)$$

где вследствие релятивистской инвариантности $\Pi_{(1)}$ и $\Pi_{(2)}$ являются функциями только от q^2 . Тогда уравнение (15.130) эквивалентно условию

$$\Pi_{(1)}(q^2) = -\Pi_{(2)}(q^2), \quad (15.133a)$$

так что выражение (15.128) для тока $j_\mu(q)$ должно сводиться к

$$j_\mu(q) = \frac{i\alpha}{4\pi^3} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi_{(1)}(q^2) a^\nu(q), \quad (15.133б)$$

или

$$j_\mu(q) = \frac{i\alpha}{4\pi^3} \Pi_{(1)}(q^2) J_\mu^e(q), \quad (15.133в)$$

где $J_\mu^e(q)$ — ток, создающий внешнее поле $a_\mu(q)$. При выводе формулы (15.133в) использовано уравнение Максвелла для внешнего поля

$$\partial^\nu F_{\mu\nu}^e(x) = J_\mu^e(x), \quad (15.134а)$$

которое связывает внешнее поле с создающим его током. В импульсном пространстве уравнение (15.134а) имеет вид

$$(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) a^\nu(q) = J_\mu^e(q). \quad (15.134б)$$

Выражение для $\Pi_{(1)}$ может быть получено следующим образом:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \int d^4p \frac{\text{Sp}\{\gamma_\mu [\gamma \cdot (p+q) + m] \gamma_\nu [\gamma \cdot p + m]\}}{[(p+q)^2 - m^2][p^2 - m^2]} \quad (15.135а)$$

$$= \int_0^1 dz \int d^4p \frac{\text{Sp}\{\gamma_\mu (\not{p} + \not{q} + m) \gamma_\nu (\not{p} + m)\}}{[(p+qz)^2 + q^2(z-z^2) - m^2]^2} \quad (15.135б)$$

$$= \int_0^1 dz \int d^4p \frac{\text{Sp}\{\gamma_\mu (\not{p} + \not{q}(1-z) + m) \gamma_\nu (\not{p} - \not{q}z + m)\}}{[p^2 + q^2(z-z^2) - m^2]^2}. \quad (15.135в)$$

При получении (15.135в) из (15.135б) сделана замена переменной p на $p - qz$. Так как постоянная m имеет малую отрицательную мнимую часть, то можно снова повернуть контур интегрирования и интегрировать по p_0 вдоль мнимой оси от $-i\infty$ до $+i\infty$. Если вычислить след, а затем опустить нечетные по переменным p_μ члены [формула (15.135а)] и использовать соотношение симметрии (15.135б), то

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = 4 \int_0^1 dz \int d^4p \frac{-(2q_\nu q_\mu - g_{\mu\nu} q^2)(z-z^2) - g_{\mu\nu}(1/2 p^2 - m^2)}{[p^2 + q^2(z-z^2) - m^2]^2}. \quad (15.136)$$

Таким образом, выражение для поляризационного тензора $\Pi_{\mu\nu}(q)$ квадратично расходится, поскольку в числитель входит шестая степень переменной интегрирования ($p^2 d^4p$), а в знаменатель — только четвертая. Но если потребовать, чтобы выражение (15.136) было калибровочно-инвариантным и удовлетворяло уравнениям (15.130) и (15.131), то мы получим

$$\int d^4p \frac{-q^2(z-z^2) - 1/2 p^2 + m^2}{[p^2 + q^2(z-z^2) - m^2]^2} = 0. \quad (15.137)$$

Хотя этот интеграл, строго говоря, расходится и поэтому не имеет смысла, тем не менее мы используем это соотношение¹⁾ (вытекающее из физического требования калибровочной инвариантности), чтобы

¹⁾ Несколько более удовлетворительный подход состоит в том, что сначала «регуляризуют» выражение (15.136) по электронной массе (см. приложение С статьи Фейнмана [252] и работу Паули и Вилларса [631]).

переписать выражение (15.136) в виде

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -8 (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \int_0^1 dz (z - z^2) \int d^4 p [p^2 + q^2 (z - z^2) - m^2]^{-2} \quad (15.138a)$$

$$= (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi_{(1)}(q^2), \quad (15.138б)$$

причем

$$\Pi_{(1)}(q^2) = \Pi(q^2) = -8 \int dz (z - z^2) \int \frac{d^4 p}{[p^2 + (z - z^2) q^2 - m^2]^2}. \quad (15.138в)$$

Если разложить¹⁾ функцию $\Pi(q^2)$ по степеням q^2

$$\Pi(q^2) = \Pi(0) + \frac{\partial \Pi(q^2)}{\partial q^2} \Big|_{q^2=0} q^2 + \dots, \quad (15.139)$$

то ясно, что член $\Pi(0)$ расходится логарифмически, а все остальные члены конечны. Действительно, в последовательных членах разложения по q^2 показатель степени переменной интегрирования p понижается настолько, насколько возрастает показатель степени внешней переменной q , что было показано в конце § 3. Не зависящий от q^2 член в разложении функции Π содержит интеграл по p , подынтегральное выражение которого ведет себя, как (dp/p) ; поэтому $\Pi(0)$ логарифмически расходится. Следующий член разложения имеет порядок q^2 и содержит уже сходящийся при больших p интеграл вида $\int dp/p^3$; следовательно, Π' и все высшие члены разложения (15.139) представляются сходящимися интегралами по переменной p . Теперь можно использовать прием, аналогичный примененному для получения выражения (15.92), т. е. вычесть из функции $\Pi(q^2)$ ее значение при $q^2 = 0$ и таким образом получить конечный результат. Ниже будет показано, что если применить операцию перенормировки заряда, то именно этот конечный остаток $\Pi(q^2) - \Pi(0)$ будет описывать наблюдаемые эффекты поляризации вакуума.

Отметим, что разложение (15.139) законно только при $q^2 < m^2$. Когда $q^2 > (2m)^2$, внешнее поле может образовывать реальные пары и матричный элемент $M^{(e)}$ будет иметь как вещественную, так и мнимую части. Мнимая часть соответствует убыванию во времени амплитуды вероятности рассеяния без образования реальных пар. С другой стороны, амплитуда вероятности перехода в конечное состояние, которое включает те или иные реальные пары, будет соответственно возрастать во времени. Возрастание и соответствующее убывание этих матричных элементов таковы, что полная вероятность перехода из начального состояния равна единице, так как S -матрица унитарна (в этой связи см. статью Далитца [150]). Мы ограничимся случаем $q^2 < m^2$, так как он представляет наибольший физический интерес.

Используя метод, который уже применялся нами ранее при ковариантном вычислении собственной энергии электрона, можно найти для поляризационного тензора $\Pi_{\mu\nu}$ (см. приложение С к статье Фейнмана

¹⁾ Заметим, что функция $\Pi(q^2)$ безразмерна, поэтому Π' имеет размерность m^{-2} , Π'' — размерность m^{-4} и т. д.

[252] следующее выражение:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = 4\pi^2 i (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \times \\ \times \left[-\frac{2}{3} \lim_{M \rightarrow \infty} \ln \frac{M}{m} - \frac{4m^2 + 2q^2}{3q^2} \left(1 - \frac{\theta}{\operatorname{tg} \theta} \right) + \frac{1}{9} \right], \quad (15.140)$$

где $q^2 = 4m^2 \sin^2 \theta$. Логарифмически расходящийся член $-\left(\frac{8\pi^2 i}{3}\right) \ln \frac{M}{m}$ соответствует $\Pi(0)$. Так как на внешнее поле наложено условие Лоренца

$$q^\mu a_\mu(q) = 0, \quad (15.141)$$

то, используя выражения (15.138) и (15.140), можно записать матричный элемент (15.74) в виде

$$M^{(\theta)} = \frac{iea}{4\pi^3} \Pi(q^2) \gamma^\mu a_\mu(q) = \\ = \frac{iea}{4\pi^3} [\Pi(0) + q^2 \Pi'(0) + q^4 \Pi''(0) + \dots] \gamma^\mu a_\mu(q). \quad (15.142)$$

Далее, можно объединить первый член правой части с матричным элементом (15.67), соответствующим диаграмме a на фиг. 68. Тогда, хотя член $(iea/4\pi^3) \Pi(0)$ фактически бесконечен, можно считать, что константа $(iea/4\pi^3) \Pi(0)$ есть множитель, который просто уменьшает величину внешнего поля. Таким образом, этот член производит ненаблюдаемую перенормировку внешнего поля. Из выражения (15.133в) видно, что расходящаяся часть индуцированного тока $j_\mu(q)$ точно пропорциональна индуцирующему внешнему току $J_\mu^e(q)$. Поэтому перенормировку можно рассматривать как такую операцию, при которой перенормируется плотность внешнего 4-тока $J_\mu^e(q)$, а тем самым и заряд.

Обратим внимание на сходство между перенормировками заряда и массы. В обоих случаях бесконечности относят к ненаблюдаемым явлениям. Так, при перенормировке массы бесконечная величина δm изменяет только механическую массу электрона m_0 . Поскольку наблюдаемой величиной является только полная масса $m = m_0 + \delta m$, то бесконечности пропадают, если выразить результаты теории через наблюдаемую массу. То же самое имеет место и в случае перенормировки заряда. Внешний ток J_μ^e невозможно экспериментально отделить от пропорционального ему индуцированного тока. Действительно, точно так же, как электрон всегда окружен облаком виртуальных квантов (так что всегда будет измеряться полная масса m), так и внешний ток всегда поляризует вакуум, и поэтому при всех измерениях внешнего тока и заряда на больших расстояниях наблюдаемая плотность 4-тока будет равна

$$J_{\mu R}^e(x) = \left[1 + \frac{ia}{4\pi^3} \Pi(0) \right] J_\mu^e(x), \quad (15.143)$$

где $J_{\mu R}^e(x)$ — «перенормированная» плотность 4-тока. Отсюда следует, что при выражении матричного элемента $M^{(a)} + M^{(\theta)}$ через перенормированную плотность внешнего 4-тока $J_{\mu R}^e(x)$ (вместо J_μ^e) будут получаться конечные результаты, т. е.

$$M^{(a)} + M^{(\theta)} = e\gamma \cdot a_R(q) + \frac{iea}{4\pi^3} \Pi'(0) q^2 \gamma \cdot a(q) + \dots \quad (15.144)$$

Нам следовало бы также пометить как перенормированные остальные члены ряда (15.144), так как в рассматриваемом порядке теории возмущений они не нуждаются в дополнительной перенормировке. Вместе с тем

диаграммы высших порядков приводят к нетривиальной перенормировке этих членов.

Из сделанных выше замечаний должно быть достаточно ясно, что даже при отсутствии бесконечностей все же следует производить перенормировку теории. Причина перенормировки заключается в том, что состояние системы описывается при помощи невозмущенных «голых» волновых функций, в то время как в реальном мире никогда нельзя избавиться от взаимодействия между полями. Поэтому возникают поправки к «голым» массе и заряду. Однако всегда можно наблюдать только «голую» массу (заряд) плюс поправки к ней. Следовательно, наблюдаемые величины всегда следует выражать через перенормированные константы. Таким образом, вопросы расходимостей и перенормировки в определенном смысле являются отдельными вопросами. Тем не менее, поскольку во всех локальных релятивистских теориях поля со взаимодействием имеются расходимости, термин «перенормируемость» будет применяться для характеристики того свойства теории, согласно которому при выражении наблюдаемых величин через перенормированные заряд и массу расходимости исчезают.

Вычисление $\Pi'(0)$ проводится непосредственно, причем оказывается, что

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Pi(q)}{\partial q^2} \right|_{q^2=0} &= 16 \int_0^1 dz (z - z^2)^2 \int \frac{d^4 p}{[p^2 - m^2]^3} = \\ &= \frac{16}{30} \frac{i\pi^2}{2m^2}. \end{aligned} \quad (15.145)$$

Таким образом, эффективный потенциал для электрона в результате эффектов поляризации вакуума равен

$$a_{\mu \text{ эфф}}(q) = \left(1 - \frac{\alpha}{15\pi m^2} q^2 \right) a_{\mu}(q), \quad (15.146)$$

что в конфигурационном пространстве превращается в

$$A_{\mu \text{ эфф}}(x) = \left(1 + \frac{\alpha}{15\pi m^2} \square \right) A_{\mu}(x). \quad (15.147)$$

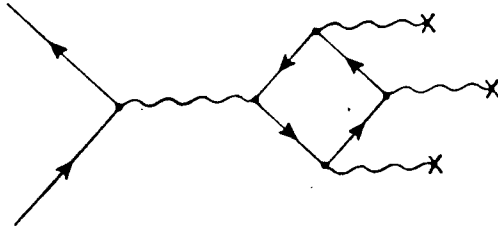
Следовательно, поляризация вакуума размывает потенциал по области с радиусом, равным по порядку величины комптоновской длине электрона. В атоме водорода кулоновский потенциал протона меняется не только вследствие радиационных поправок, рассмотренных в § 3 и 4, но и в результате поляризации вакуума. Эффективный потенциал для электрона (с учетом только эффектов поляризации вакуума) равен

$$-Ze^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{\alpha}{15\pi m^2} 4\pi\delta(r) \right).$$

Тот факт, что электростатический потенциал точечного заряда в вакууме не описывается точным законом Кулона, а изменяется вследствие поляризации вакуума, называют эффектом Юлинга [787]. Юлинг первый вычислил отклонение от кулоновского закона [коэффициент $\Pi'(0)$ и т. д.] вскоре после первых обсуждений поляризации вакуума в статьях Дирака [171, 172] и Гейзенберга [366, 367]. (Результаты этих работ освещены в обзоре Вайскопфа [827]; см. также статьи Валатина [799, 800].) В нерелятивистском приближении эффект Юлинга оказывает влияние только на S -состояния атома водорода; в частности, он понижает уровень $2S_{1/2}$ на

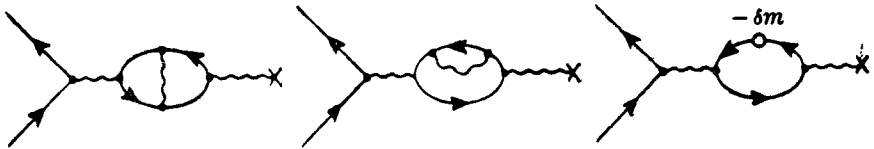
27 Мгц по сравнению с уровнем $2P_{1/2}$. Поскольку теория согласуется с экспериментом с точностью до $1/4$ Мгц, то это прямо доказывает, что эффекты поляризации вакуума существенны и реальны.

Как говорилось выше, сущность эффекта поляризации вакуума заключается в размазывании эффективного заряда точечных частиц по области с размерами порядка \hbar/mc . Физическую картину происходящего



Ф и г. 73.

в явлениях поляризации вакуума можно представить себе следующим образом. Заряд Q_0 в результате взаимодействия с электронно-позитронным полем окружается облаком электронов и позитронов. Часть из них, обладающая полным зарядом δQ того же знака, что и Q_0 , уходит на бесконечность (см. приложение к статье Швингера [713]), а остается другая часть облака, имеющая полный заряд $-\delta Q$, которая тесно связана с пробным телом и сосредоточена вокруг него в области с размерами \hbar/mc . При наблюдении заряда тела с расстояний, больших по сравнению с \hbar/mc ,



Ф и г. 74.

представляется, что заряд эффективно равен перенормированному заряду $Q = Q_0 - \delta Q$. Вместе с тем при наблюдении с расстояний, много меньших \hbar/mc , наблюдался бы «голый» перенормированный заряд Q_0 .

Эффекты поляризации вакуума в высших порядках теории возмущений, соответствующие диаграммам типа показанных на фиг. 73, проанализировали Челлен [407, 408], Фарри [292] и Умэдзава и Камефучи [792]. В случае постоянного внешнего поля явление поляризации вакуума во всех порядках по величине индуцирующего поля обсуждалось в статьях Вайскоффа [827] и Швингера [714]. В случае кулоновского поля эту проблему изучали Уичмэн и Кролл [844].

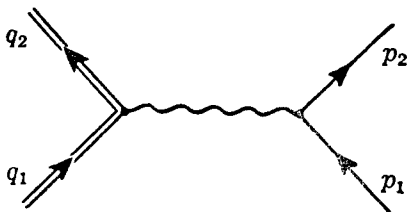
Радиационные поправки к диаграммам с петлей, примеры которых изображены на фиг. 74, вычислялись в статьях Баранджера, Дайсона и Солпитера [27], а также Челлена и Сабри [414]. Они имеют порядок $\alpha^2(\alpha Z)^2$ и вносят $-0,24$ Мгц в сдвиг уровня $2^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$.

Мы получили бы аналогичную описанной выше ситуацию, если бы вместо взаимодействия с внешним полем рассматривали взаимодействие между двумя зарядами. Для проведения такого анализа необходимо несколько глубже учесть калибровочную инвариантность теории. До сих

пор для фотонной функции распространения использовалось выражение

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} D_F(x-y) = (\Phi_0, T(A_\mu(x) A_\nu(y)) \Phi_0). \quad (15.148)$$

Нужно отметить, однако, что это выражение не удовлетворяет в явной форме дополнительному условию $\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) = 0$. Чтобы условие Лоренца удовлетворялось в явной форме, следует заменить функцию распространения $g_{\mu\nu} k^{-2}$ на $(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu k^{-2}) k^{-2}$, что соответствует функции распространения в определенной калибровке, часто называемой калибровкой Ландау (она впервые рассматривалась в работе Ландау, Абрикосова и Халатникова [472]); см. также книгу Боголюбова и Ширкова [67] и статью Зумино [879]). Отметим, что в задачах рассеяния использование функции распространения Ландау и, в частности, члена $-k_\mu k_\nu (k^{-2})^2$ не внесет никаких



Ф и г. 75.

изменений в проведенные выше рассмотрения [252]. Остановимся, например, на случае меллеровского взаимодействия между двумя заряженными частицами в низшем порядке теории возмущений (фиг. 75). Этой диаграмме соответствует матричный элемент, пропорциональный выражению

$$R_M = e^2 \tilde{u}_M(q_2) \gamma^\mu u_M(q_1) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2} \tilde{u}(p_2) \gamma^\nu u(p_1), \quad (15.149)$$

где $q_1 - q_2 = k = p_2 - p_1$. Вклад в матричный элемент, вносимый членом $k_\mu k_\nu$ в фотонной функции распространения, равен нулю, потому что

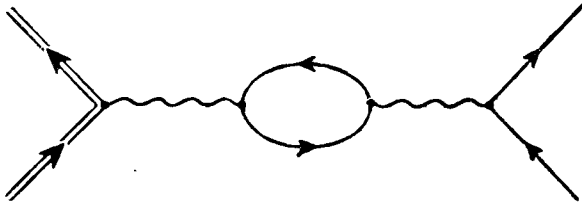
$$\begin{aligned} \tilde{u}'(p_2) \gamma \cdot k u(p_1) &= \tilde{u}(p_2) \gamma \cdot (p_2 - p_1) u(p_1) = \\ &= (m - m) \tilde{u}(p_2) u(p_1) = 0. \end{aligned} \quad (15.150)$$

Фейнман [252] показал, что это утверждение справедливо во всех порядках теории возмущений. Причина, по которой члены $k_\mu k_\nu$ в фотонных функциях распространения не существенны, заключается в том, что все источники электромагнитного потенциала (токи заряженных частиц) подчиняются дифференциальному уравнению непрерывности $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$. (Этот факт, конечно, внутренне связан с калибровочной инвариантностью теории.)

Поправка к меллеровскому взаимодействию, учитывающая в низшем порядке поляризацию вакуума, описывается диаграммой на фиг. 76. Матричный элемент, соответствующий этой диаграмме, может быть получен, если заменить множитель $(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu k^{-2}) k^{-2}$ в меллеровском матричном элементе (15.149) вкладом от вставки «петли», который (с точностью до постоянного множителя) равен

$$e^2 (g_{\mu\rho} - k_\mu k_\rho k^{-2}) k^{-2} \Pi^{\rho\sigma}(k^2) (g_{\sigma\nu} - k_\sigma k_\nu k^{-2}) k^{-2}, \quad (15.151)$$

где $\Pi_{\rho\sigma}(k^2)$ — поляризационный тензор, определенный формулами (15.75) и (15.138). Если снова разложить $\Pi_{\rho\sigma}$ согласно (15.139), то член $\Pi(0)$ приведет к выражению, отличающемуся от меллеровского матричного элемента (15.149) постоянным множителем. Поэтому в S -матрице эти два члена можно объединить и рассматривать множитель $\left[1 + \frac{ia}{4\pi^3} \Pi(0)\right] e^2$, на который теперь умножен меллеровский матричный элемент низшего порядка, как *перенормированный заряд* e_R^2 . Член $\Pi'(0)k^2$ дает радиационные поправки к матричным элементам низшего порядка, обусловленные



Ф и г. 76.

эффектами поляризации вакуума. Они соответствуют изменению взаимодействия между двумя зарядами вследствие явлений поляризации вакуума.

Отметим также, что поляризационный тензор $\Pi_{\mu\nu}(k^2)$ при $k^2 = 0$ описывает собственную энергию фотона в низшем приближении теории возмущений. В этом случае собственная энергия возникает в результате рождения виртуальной электронно-позитронной пары и ее последующей



Ф и г. 77.

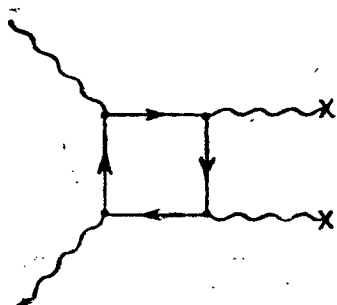
аннигиляции, как это показано на фиг. 77. Эта диаграмма дает добавку, пропорциональную $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \Pi^{\mu\nu}(k^2) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k)$, к матричному элементу S -матрицы между однофотонными состояниями с импульсом k и состоянием поляризации λ . Используя выражение (15.138), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_\mu^{(\lambda)\dagger}(k) \Pi^{\mu\nu}(k^2) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k) &= \varepsilon_\mu^{(\lambda)\dagger}(k) (k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k^2) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k) \cdot \Pi(k^2) = \\ &= -k^2 \varepsilon_\mu^{(\lambda)\dagger}(k) \varepsilon^{(\lambda)\mu}(k) \Pi(k^2) = 0 \quad \text{для } k^2 = 0. \end{aligned} \quad (15.152)$$

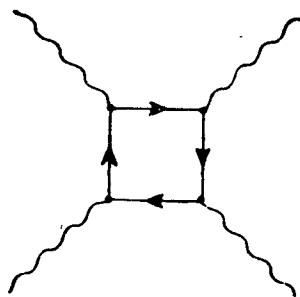
Тот факт, что выражение (15.152) равно нулю, есть следствие калибровочной инвариантности выражения (15.138) для $\Pi_{\mu\nu}$ и означает, что масса фотона была точно равна нулю. Из того, что $\Pi^{\mu\nu}(k) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ равно нулю, следует, что одиночный фотон при перемещении в пространстве не индуцирует тока. Для свободно распространяющихся электромагнитных волн эффекты поляризации вакуума отсутствуют. Последнее утверждение, однако, справедливо только пока рассматриваются эффекты низшего порядка по внешнему полю или полю излучения. Так, если учесть нелинейные эффекты по внешнему полю (т. е. члены, содержащие вторые и высшие степени поля $A_\mu^{(e)}$), то становятся возможными такие наблюдаемые процессы, как рассеяние фотона на внешнем поле (фиг. 78). Аналогично, в высших порядках теории возмущений возможно рассеяние двух фотонов друг

на другие в результате эффектов поляризации вакуума (им соответствуют диаграммы с замкнутыми петлями типа указанной на фиг. 79).

Как отмечалось выше, из калибровочной инвариантности вытекает тождественное равенство нулю собственной энергии и массы фотона¹⁾. Таким образом, вследствие калибровочной инвариантности нет необходимости в контрчлене для перенормировки «массы фотона»²⁾. Можно сформулировать эти факты несколько по-иному. Определим фотонную функцию распространения $D_F(k^2)$, соответствующую диаграммам на фиг. 80, т. е. одиночной фотонной линии вместе со всеми диаграммами, которые приводят к собственной энергии фотона. Тому факту, что масса покоя



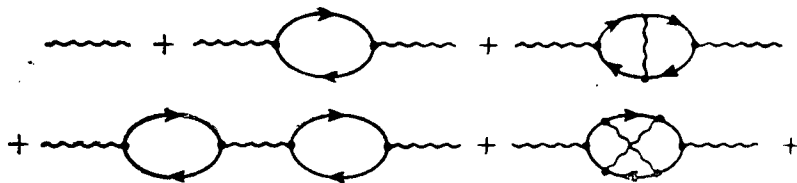
Ф и г. 78.



Ф и г. 79.

«реального» фотона равна нулю, соответствует утверждение, что функция распространения $D_F(k^2)$ (которая включает все радиационные поправки) имеет полюс при $k^2 = 0$, что отвечает массе физического фотона.

Наконец, отметим, что эффекты поляризации вакуума возникают не только в результате рождения виртуальных электронно-позитронных пар, но и пар заряженных мезонов, нуклонных пар и т. д. Фактически каждый



Ф и г. 80.

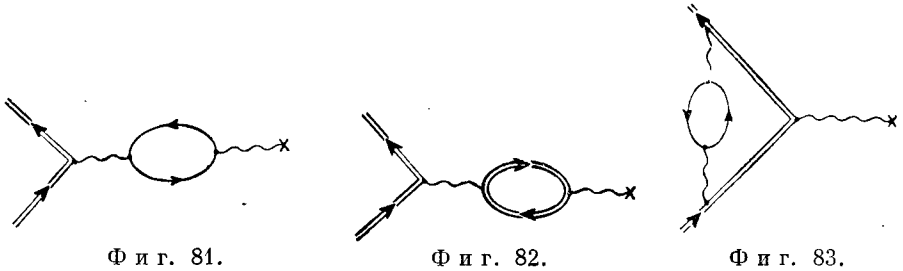
тип заряженных частиц будет вносить вклад в поляризацию вакуума, причем вклады от различных типов частиц просто будут складываться (Фелдман [238], Умэдзава и Кавабе [789—792]). Вследствие этого одна и та же перенормировка заряда будет применяться к заряду любой частицы, которая может взаимодействовать с электромагнитным полем. Другими словами, если предположить, что перенормированные заряды всех частиц одинаковы, то будут совпадать и перенормированные заряды, и этот вывод не зависит от частного вида взаимодействий, которые дают вклад в поляризацию вакуума.

¹⁾ Как показано в [914], из калибровочной инвариантности не вытекает, что масса фотона должна быть равна нулю.— *Прим. ред.*

²⁾ Вместе с тем не следует недооценивать неоднозначности, связанные с тем, что мы имеем дело с расходящимися интегралами; напомним рассуждения, изложенные след за формулой (15.136).

В том, что каждый тип заряженных частиц вносит вклад в явление поляризации вакуума, действительно можно убедиться, измерив сдвиг уровней в μ -мезоатомах и в π -мезоатомах. В этих случаях основной вклад в сдвиг уровней из-за эффектов поляризации вакуума фактически связан с рождением электронно-позитронной пары, т. е. с диаграммой на фиг. 81, где двойные линии представляют либо μ -мезон, либо π -мезон, а одинарные линии являются электронными. (Напомним, что радиационные эффекты, обусловленные явлениями поляризации вакуума, в низшем порядке по внешнему полю обратно пропорциональны квадрату массы частиц, образующих петлю.) Поэтому вклад в сдвиг уровня от диаграммы на фиг. 82 в $(m_e/m_\mu)^2$ или $(m_e/m_\pi)^2$ раз меньше вклада от диаграммы на фиг. 81.

Аналогично, при вычислении радиационных поправок четвертого порядка к магнитному моменту μ -мезона должен быть учтен вклад от диаграммы, показанной на фиг. 83. Суура и Уичмэн [759], а также Питерман [637] вычислили вклад в аномальный магнитный момент мюона, соответствующий диаграмме на фиг. 83. Он оказался равным



раммы, показанной на фиг. 83. Суура и Уичмэн [759], а также Питерман [637] вычислили вклад в аномальный магнитный момент мюона, соответствующий диаграмме на фиг. 83. Он оказался равным

$$\Delta\mu_{(\mu)} = \frac{\alpha^2}{\pi^2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{m_{(\mu)}^2}{4m_e^2} + \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{25}{36} + O\left(\frac{m_e}{m_{(\mu)}}\right) \right] \frac{e\hbar}{2m_{(\mu)}c} \approx 1,08 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \frac{e\hbar}{2m_{(\mu)}c} . \quad (15.153)$$

Таким образом, вычисленный аномальный магнитный момент мюона, обусловленный электромагнитными радиационными поправками, превышает аномальный магнитный момент электрона и равен

$$\Delta\mu_{(\mu\text{юон})} = \left(\frac{\alpha}{2\pi} + 0,75 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right) \frac{e\hbar}{2m_{(\mu)}c} , \quad (15.154)$$

тогда как у электрона он равен

$$\Delta\mu_{(\text{электрон})} = \left(\frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right) \frac{e\hbar}{2m_{ec}} . \quad (15.155)$$

Пока еще не проведено очень точных измерений гиромагнитного отношения g для μ -мезонов. Лучшим значением в настоящее время является $g_{(\mu)} \approx 2 (1,0015 \pm 0,0006)$, так что формула (15.154) пока еще не проверена.

§ 6. Применения

В предыдущих параграфах в общих чертах были описаны современные методы обращения с расходимостями, возникающими в высших порядках разложения в степенной ряд решений уравнений движения в квантовой

электродинамике. Эти методы применяются для вычисления радиационных поправок низшего порядка к большинству элементарных процессов рассеяния с участием электронов и фотонов.

Впервые радиационные поправки были вычислены к кулоновскому рассеянию электрона (если не считать лэмбовского сдвига, относящегося к проблеме связанных состояний). Именно на примере этого процесса мы продемонстрировали метод перенормировок. Радиационные поправки к резерфордской формуле рассеяния были впервые выведены Швингером [713]. Вычисление проводилось в первом борновском приближении как по кулоновскому полю, так и по полю излучения. Для справедливости этого приближения требуется не только выполнение условия $\alpha \ll 1$, но и $Z\alpha \ll 1$ (где Z — заряд ядра). Эффективное сечение рассеяния (с включением радиационных поправок) получается обычным образом из квадрата модуля амплитуды перехода

$$R = +2\pi i \tilde{u}(p_2) M u(p_1), \quad (15.156a)$$

где

$$M = \{ \gamma_v + \Lambda_{Cv}(p_2, p_1) - \frac{i\alpha}{4\pi^3} [\Pi(q^2) - \Pi(0)] \gamma_v \} e^{i\alpha} e^v(q) \quad (q = p_2 - p_1) \quad (15.156b)$$

(вспомните вывод формулы Резерфорда в гл. 14). Использование выражения (15.156b), однако, не может быть вполне корректным, так как в матричном элементе M содержится в пределе $\lambda_{\text{мин}} \rightarrow 0$ инфракрасная расходимость [см. (15.89)].

Выход из этой трудности уже указывался в § 4: наряду с безрадиационными процессами рассеяния электрон с отличной от нуля (и фактически бесконечной) вероятностью испускает фотоны в процессе рассеяния. Во втором порядке имеются две такие диаграммы (фиг. 72), одна из которых соответствует процессу, в котором электрон сначала рассеивается на внешнем потенциале, а затем излучает фотон, а другая описывает обратный процесс, когда электрон сначала излучает фотон, а потом уже рассеивается. При помощи правил, приведенных в гл. 14, легко записать матричные элементы, соответствующие этим диаграммам. Для перехода, сопровождаемого излучением фотона с 4-импульсом k и поляризацией $\epsilon^{(\lambda)}(k)$ [$k \cdot \epsilon^{(\lambda)}(k) = 0$], они равны

$$R_1 = -2\pi i \tilde{u}(p_2) \left[\frac{e}{\sqrt{2}(2\pi)^3 k_0} \gamma \cdot \epsilon^{(\lambda)}(k) \frac{\gamma \cdot (p_2 + k) + m}{(p_2 + k)^2 - m^2} \times \right. \\ \left. \times e\gamma \cdot a(p_2 + k - p_1) \right] u(p_1) \quad (15.157a)$$

$$= -2\pi i \tilde{u}(p_2) M_1 u(p_1) \quad (15.157b)$$

и

$$R_2 = -2\pi i \tilde{u}(p_2) \left[e\gamma \cdot a(p_2 - p_1 + k) \frac{\gamma \cdot (p_1 - k) + m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{e}{\sqrt{2}(2\pi)^3 k_0} \gamma \cdot \epsilon^{(\lambda)}(k) \right] u(p_1) \quad (15.158a)$$

$$= -2\pi i \tilde{u}(p_2) M_2 u(p_1). \quad (15.158b)$$

Рассмотрим теперь случай, когда испускаемый фотон очень мягкий, т. е. $k_0 \ll m$ и $|k| \ll |p_1|, |p_2|$. Вспоминая, что

$$\gamma \cdot p \gamma \cdot q = -\gamma \cdot q \gamma \cdot p + 2p \cdot q, \quad (15.159)$$

и учитывая, что в рассматриваемой задаче

$$k^2 = 0, \quad (15.160a)$$

$$(\gamma \cdot p_1 - m) u(p_1) = 0 \quad (p_1^2 = m^2), \quad (15.160b)$$

$$\tilde{u}(p_2) (\gamma \cdot p_2 - m) = 0 \quad (p_2^2 = m^2), \quad (15.160b)$$

получаем

$$R_1 + R_2 \approx -2\pi i \frac{e}{\sqrt{2(2\pi)^3 k_0}} \tilde{u}(p_2) \left[\left(\frac{p_2 \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k})}{p_2 \cdot k} - \frac{p_1 \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k})}{p_1 \cdot k} \right) \times \right. \\ \left. \times e \gamma \cdot a(p_2 - p_1) \right] u(p_1) \quad (15.161a)$$

$$\approx -\frac{e}{\sqrt{2(2\pi)^3 k_0}} \left[\frac{p_2 \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k})}{p_2 \cdot k} - \frac{p_1 \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k})}{p_1 \cdot k} \right] R^{(a)}(p_1, p_2), \quad (15.161b)$$

где $R^{(a)}(p_1, p_2)$ дается выражением (15.67). Отсюда следует, что вероятность рассеяния электрона из состояния с импульсом p_1 в состояние с импульсом p_2 с излучением одиночного фотона с энергией в интервале между 0 и $\Delta E \ll m$ и произвольной поляризацией равна

$$|R'|^2 = \sum_{\lambda=0}^3 \int_0^{\Delta E} d^3k |R_1 + R_2|^2 = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \sum_{\lambda=0}^3 \int_0^{\Delta E} \frac{d^3k}{k_0} \times \\ \times \left| \frac{p_2 \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k})}{p_2 \cdot k} - \frac{p_1 \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k})}{p_1 \cdot k} \right|^2 |R^{(a)}(p_1, p_2)|^2. \quad (15.162)$$

Из выражения (15.162) ясно, что эта вероятность логарифмически расходится на нижнем пределе. Если изменение импульса электрона мало, $|\mathbf{q}| = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2| \ll m$, то возможно дальнейшее упрощение результата путем перехода к системе отсчета, в которой электрон и в начальном, и в конечном состояниях в хорошем приближении покоится; в этой системе

$$p_1 \cdot k = p_2 \cdot k \approx m k_0. \quad (15.163)$$

Тогда множитель под знаком модуля в выражении (15.162) имеет числитель, равный $(p_2 - p_1) \cdot \varepsilon^{(\lambda)} = q \cdot \varepsilon^{(\lambda)}$. Учтем теперь только поперечные кванты (только они и могут быть излучены) и усредним по всем направлениям вектора \mathbf{k} . Тогда мы получим

$$\left\langle \sum_{\lambda=1}^2 |q \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k})|^2 \right\rangle = -\frac{2}{3} q^2, \quad (15.164)$$

так что

$$|R'|^2 = -\frac{2\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} |R^{(a)}(p_1, p_2)|^2 \ln \frac{\Delta E}{k_{\min}}, \quad (15.165)$$

причем нижний предел интегрирования по k в выражении (15.162) заменен на k_{\min} . Величина ΔE теперь относится к лоренцевой системе отсчета, в которой электрон, по существу, покоится. Исключая эту величину, все остальные множители релятивистски инвариантны. (Вычисление, справедливое при любой начальной энергии и любом измерении импульса электрона, см. в статьях Йоста [400] и Швингера [712], а также Блоха и Нордсика [62].)

Вероятность рассеяния электрона из состояния $u(p_1)$ в состояние $u(p_2)$ без излучения фотона равна квадрату модуля выражения (15.156),

или в явной форме ¹⁾

$$\begin{aligned} |R|^2 &= | + 2\pi i \tilde{u}(\mathbf{p}_2) [M^{(a)} + e\Lambda_{\nu C}(p_2, p_1) a^\nu (p_2 - p_1)] u(\mathbf{p}_1) |^2 = \\ &= |R^{(a)}(p_1, p_2)|^2 + 2\pi i \overline{R^{(a)}(p_1, p_2)} u(\mathbf{p}_2) e\Lambda_{C\nu}(p_2, p_1) a^\nu (p_2 - p_1) u(\mathbf{p}_1) - \\ &\quad - 2\pi i (\tilde{u}(\mathbf{p}_2) e\Lambda_{C\nu}(p_2, p_1) a^\nu (p_2 - p_1) u(\mathbf{p}_1)) R^{(a)}(p_2, p_1), \quad (15.166) \end{aligned}$$

где опущены члены порядка e^8 . Из формулы (15.88) следует, что имеющая инфракрасную расходимость часть $\Lambda_{\nu C}$ (назовем ее $\Lambda_{\nu C}^i$) вносит в выражение (15.166) множитель

$$\begin{aligned} + 2\pi i \tilde{u}(\mathbf{p}_2) e\Lambda_{C\nu}^i(p_2, p_1) a^\nu (p_2 - p_1) u(\mathbf{p}_1) &= \\ = \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{МИН}}} \right) [+ 2\pi i \tilde{u}(\mathbf{p}_2) e\gamma \cdot a (p_2 - p_1) u(\mathbf{p}_1)] &= \\ = \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{МИН}}} \right) R^{(a)}(p_2, p_1) & \quad (15.167) \end{aligned}$$

(снова при условии, что изменение импульса $|\mathbf{q}|$ мало). Поэтому, выписывая только инфракрасно расходящиеся части второго и третьего членов, можно представить формулу (15.166) в виде

$$|R|^2 = |R^{(a)}(p_1, p_2)|^2 + \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\text{МИН}}} \right) |R^{(a)}(p_1, p_2)|^2. \quad (15.168)$$

Сопоставляя выражения (15.168) и (15.165), можно усмотреть (см. для сравнения также статью Бете и Опенгеймера [49]), что сумма $|R|^2$ и $|R'|^2$, т. е. полное эффективное сечение для всех возможных в e^6 -приближении процессов, конечна и не содержит расходимостей в пределе $k_{\text{МИН}}$ и $\lambda_{\text{МИН}} \rightarrow 0$. Она зависит, однако, от величины ΔE , которая соответствует энергии, ниже которой реальные фотоны не могут быть зарегистрированы в эксперименте. Величина ΔE определяется энергетическим разрешением детектора, использованного в эксперименте.

Швингер [713] вычислил эффективное сечение рассеяния с потерями энергии, меньшими ΔE , как в ультрарелятивистском, так и в промежуточном и в нерелятивистском случаях. Эффективное сечение в нерелятивистском пределе (включая добавки от поляризации вакуума внешним полем) есть

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M = 1 - \frac{8\alpha}{3\pi} \left(\frac{19}{30} + \ln \frac{m}{2\Delta E} \right) v^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta, \quad (15.169)$$

где $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M$ — моттовское эффективное сечение

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M = \frac{Z^2 e^4}{4p^2 v^2 \sin^4 \frac{1}{2} \theta} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \right). \quad (15.170)$$

В пределе больших энергий эффективное сечение запишется в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M = 1 - \frac{4\alpha}{\pi} \ln \left(\frac{2E \sin \frac{1}{2} \theta}{m} \right) \cdot \ln \left(\frac{E}{\Delta E} \right). \quad (15.171)$$

¹⁾ Мы пренебрегли вкладом от поляризации вакуума. Включение этого члена никоим образом не повлияло бы на полученные ниже выводы, так как $\Pi(q) - \Pi(0)$ не содержит инфракрасной расходимости.

Таким образом, и в нерелятивистском, и в ультрарелятивистском пределах эффективное сечение может быть записано в виде

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M = 1 - \delta(E). \quad (15.172)$$

Тот факт, что эффективное сечение может быть выражено в виде (15.172) даже при учете высших приближений по внешнему потенциалу, был показан в статье Суура [758]. Ньютон [574, 575] и Кретьен [132] проделали явные вычисления во втором порядке по внешнему полю, но для процессов только с одиночным виртуальным фотоном. Их расчеты подтвердили, что отношение $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ к $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M$ может быть выражено в виде (15.172), т. е. что радиационные поправки приводят к незначительным изменениям в упругом эффективном сечении. Швингер заметил также, что с убыванием ΔE , т. е. при улучшении разрешающей способности детектора по энергии, величина δ становится большой, а поэтому выражение (15.172) утрачивает смысл. При этих обстоятельствах, однако, будут становиться важными радиационные поправки высших порядков. На основе доводов, похожих на доводы Блоха и Нордсика, Швингер высказал предположение, что

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M = e^{-\delta}. \quad (15.173)$$

Йенни и Суура [873] (см. также [875]) показали, что при малых ΔE ($\Delta E \ll E$) предположение Швингера асимптотически справедливо (см. статьи Гупта [896] и Тсаи [786]). Эксперименты Таутфеста и Пановского [923] по измерению радиационных поправок к рассеянию электронов при высоких энергиях подтвердили поправку низшего порядка (15.171).

Венезер, Берсон и Кролл [831] вычислили радиационные поправки четвертого порядка к рассеянию электрона на внешнем поле [т. е. вклады в $F(q^2)$ от диаграмм, включающих два виртуальных фотона, но только одно взаимодействие с внешним полем].

Другая задача, для которой были вычислены радиационные поправки, — это комптоновское рассеяние фотона на свободной частице со спином 0 и $\frac{1}{2}$. Коринальдези и Йост [143] вычислили радиационные поправки для спина, равного нулю. Браун и Фейнман [91] вычислили все радиационные поправки низшего порядка к формуле Клейна — Нишины и нашли в явном виде эффективное сечение в e^6 -приближении для нерелятивистского и ультрарелятивистского случаев. Читатель найдет в их статье четкое и исчерпывающее обсуждение вычислительной техники и практических приемов, которые используются при вычислении радиационных поправок в задачах рассеяния. В гл. 16 будет показано, что в пределе равной нулю энергии фотона все радиационные поправки к комптоновскому рассеянию становятся равными нулю. Там же будет обсуждаться связь этого важного факта с принципом перенормировки заряда [774].

Выше уже говорилось о вычислении радиационных поправок четвертого порядка к магнитному моменту электрона в работе Карплуса и Кролла [422]. В их статье производится выделение расходимостей в операторе собственной энергии и вершинном операторе для случая, когда $p^2 \neq m^2$, т. е. когда все линии внутренние.

Другой процесс, для которого вычислены радиационные поправки низшего порядка, — это конверсионное рождение пар [150]. Радиационные поправки для тормозного излучения вычислил Митра с сотрудниками [555, 556].

Все эти электромагнитные радиационные поправки очень малы (1% или меньше), так что даже при самых благоприятных условиях их трудно проверить на опыте. Тем не менее успех теории, выразившийся в предсказании правильной величины лэмбовского сдвига уровней, не оставляет сомнений в реальности этих эффектов.

§ 7. Картина Фарри

В § 4 мы столкнулись с определенной трудностью при выводе формулы лэмбовского сдвига для связанных электронов из радиационных поправок, вычисленных для свободных электронов. На самом деле все полученные до сих пор результаты применимы, строго говоря, только к задачам рассеяния, в которых все частицы в начальном и конечном состояниях свободны. Вместе с тем существует широкий класс важных экспериментов по рассеянию, в которых электрон связан в атоме (например, релеевское рассеяние) и для рассмотрения которых описанные методы уже непригодны.

Фарри [292] показал, как можно обобщить формализм Фейнмана — Дайсона на такие случаи, когда электрон находится в связанном состоянии или когда разложение по степеням $Z\alpha$ незаконно. Ясно, что эти случаи укладываются в рамки шредингеровской картины, если в качестве невозмущенного гамильтониана электронно-позитронного поля выбрать оператор

$$H_0 = \int d^3x : \psi^*(x) \{ -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m \} \psi(x) : - e \int d^3x : \psi^*(x) \gamma_0 \gamma_\mu A^{\mu} (x) \psi(x) :, \quad (15.174)$$

где $A_\mu^e(x)$ описывает статический внешний потенциал, в котором находится в связанном состоянии электрон. Гамильтониан, описывающий взаимодействие между веществом и излучением, запишется в виде

$$H_I = -e \int d^3x : \tilde{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : A_\mu(x), \quad (15.175)$$

где $A_\mu(x)$ — квантованный электромагнитный потенциал в шредингеровской картине. Собственные функции гамильтониана H_0 теперь являются векторами состояния систем с определенным числом невзаимодействующих между собой электронов и позитронов, которые находятся в одночастичных состояниях, описываемых уравнением Дирака во внешнем потенциале $A^{\mu}(x)$. Точнее говоря, оказывается, что изложенный в гл. 8 метод квантования поля Дирака не претерпевает существенных изменений, если в качестве гамильтониана H_0 взять оператор (15.174). При этом операторы поля $\psi^*(x)$ и $\psi(x)$ следует разлагать по полной системе решений уравнения Дирака во внешнем потенциале $A^{\mu}(x)$. Именно такая методика была использована в первых релятивистских вычислениях лэмбовского сдвига (см., например, работы Френча и Вайскопфа [280] и Кролла и Лэмба [464]). Однако такой подход нековариантен, и выделение расходимостей производится весьма неоднозначным образом [464]. Метод Фарри позволяет достигнуть упомянутого выделения в рамках ковариантного формализма, причем эффекты внешнего потенциала включаются в переменные.

Рассмотрим снова уравнение движения для вектора состояния в картине взаимодействия

$$i\hbar c \frac{\partial |\Psi(\tau)\rangle}{\partial \tau} = \int d\sigma(x) \mathcal{H}_I(x) |\Psi(\tau)\rangle, \quad (15.176)$$

где $\mathcal{H}_I(x)$ — плотность энергии взаимодействия (15.66). Мы написали здесь уравнение Томонага — Швингера для случая плоской пространственно-подобной поверхности, уравнение которой имеет вид

$$n_\mu x^\mu = \tau, \quad (15.177)$$

где n_μ — единичный вектор нормали к плоскости τ . Если $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$, то τ — это гиперплоскость $t = \text{const}$, $d\sigma = d^3x$, и уравнение (15.176) приобретает более привычный вид:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \int d^3x \left\{ -\frac{e}{2} [\tilde{\psi}(x) \gamma^\mu, \psi(x)] (A_\mu(x) + A^e_\mu(x)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \delta m [\tilde{\psi}(x), \psi(x)] \right\} |\Psi(t)\rangle \quad (15.178a)$$

$$= H_I(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (15.178b)$$

Следуя Фарри, сделаем теперь следующее унитарное преобразование вектора состояния $|\Psi(t)\rangle$:

$$|\Psi_F(t)\rangle = V^{-1} |\Psi(t)\rangle. \quad (15.179)$$

Тогда вектор состояния $|\Psi_F(t)\rangle$ будет удовлетворять уравнению

$$i\hbar \partial_t |\Psi_F(t)\rangle = [V^{-1}(t) H_I(t) V(t) + i\hbar \partial_t V^{-1}(t) \cdot V(t)] |\Psi_F(t)\rangle. \quad (15.180)$$

Если выбрать унитарный оператор V ($V^* = V^{-1}$) так, чтобы он удовлетворял уравнению

$$i\hbar \partial_t V^{-1}(t) \cdot V(t) = -i\hbar V^{-1}(t) \partial_t V(t) = \\ = + V^{-1}(t) \int_{x_0=t} d^3x \frac{e}{2} [\tilde{\psi}(x) \gamma^\mu, \psi(x)] A^e_\mu(x) V(t) \quad (15.181a)$$

или

$$i\hbar \partial_t V(t) = - \int_{x_0=t} d^3x \frac{e}{2} [\tilde{\psi}(x) \gamma^\mu, \psi(x)] A^e_\mu(x) V(t), \quad (15.181b)$$

то вектор состояния $|\Psi_F(t)\rangle$ будет подчиняться уравнению

$$i\hbar \partial_t |\Psi_F(t)\rangle = \int_{x_0=ct} d^3x \left\{ -\frac{e}{2} [\tilde{\psi}_F(x) \gamma^\mu, \psi_F(x)] A_{F\mu}(x) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta m [\tilde{\psi}_F(x), \psi_F(x)] \right\} |\Psi_F(t)\rangle, \quad (15.182)$$

где преобразованные операторы ψ_F и A_F определяются формулами

$$\psi_F(x) = V^{-1}(t) \psi(x) V(t) \quad (x_0 = ct) \quad (15.183)$$

и

$$A_{F\mu}(x) = V^{-1}(t) A_\mu(x) V(t) \quad (x_0 = ct). \quad (15.184)$$

Они удовлетворяют тем же одновременным перестановочным соотношениям, что и операторы ψ и A_μ .

Выведем уравнение движения для оператора $\psi_F(x)$. Для этого продифференцируем формулу (15.183) по $x_0 = ct$ и используем уравнение (15.181). Тогда мы получим

$$\partial_0 \psi_F(x) = \partial_0 V^{-1}(t) \cdot \psi(x) V(t) + V^{-1}(t) \psi(x) \partial_t V(t) + V^{-1}(t) \partial_0 \psi(x) \cdot V(t) = \\ = -\frac{i}{\hbar c} V^{-1}(t) \left[- \int_{x'_0=t} d^3x' \frac{e}{2} [\tilde{\psi}(x') \gamma^\mu, \psi(x')] A^e_\mu(x'), \psi(x) \right] V(t) + \\ + V^{-1}(t) \partial_0 \psi(x) \cdot V(t). \quad (15.185)$$

Вычисление коммутатора в уравнении (15.185) дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{x'_0=ct} d^3x' [[\tilde{\Psi}(x') \gamma^\mu, \Psi(x')] \psi(x)] A_\mu^e(x') = \\ = i \int d^3x' S(x-x') \gamma^\mu A_\mu^e(x') \psi(x') = -\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu^e(x) \psi(x), \end{aligned} \quad (15.186)$$

так как $-iS(x-x')$ при $t=t'$ равно $\gamma^0 \delta^{(3)}(x-x')$. Учитывая, что оператор $\psi(x)$ в картине взаимодействия удовлетворяет уравнению

$$\partial_0 \psi(x) = (-\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\partial} - i\gamma^0 m) \psi(x), \quad (15.187)$$

и объединяя члены, находим, что оператор ψ_F подчиняется следующему уравнению:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_F(x) = \frac{e}{\hbar c} \gamma^\mu A_\mu^e(x) \psi_F(x), \quad (15.188)$$

т. е. он удовлетворяет уравнению Дирака во внешнем электромагнитном поле $A_\mu^e(x)$. Аналогично, поскольку операторы $A_\mu(x)$ и $\psi(x)$ коммутируют, то

$$A_{F\mu}(x) = A_\mu(x), \quad (15.189)$$

так что

$$\square A_{F\mu}(x) = 0. \quad (15.190)$$

Картина, характеризуемая уравнениями (15.182), (15.188) и (15.190), получила наименование картины Фарри, или картины взаимодействия для связанных состояний, так как она может быть использована для решения задач для связанных состояний.

Проведем рассуждения, которые позволят нам убедиться в этом. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ есть система решений уравнения (15.188) в неоператорном смысле, причем индекс n определяет квантовые числа состояний (которые могут быть как связанными состояниями, так и состояниями рассеяния). Разложим оператор $\psi_F(x)$ по системе функций $\varphi_n(x)$:

$$\psi_F(x) = \sum_{n', E_+} b_n^{(e)} \varphi_n(x) + \sum_{n', E_-} d_n^{(e)*} \varphi_n(x), \quad (15.191)$$

где в первом члене суммирование распространяется только на решения с положительной энергией (E_+), а во втором — на решения с отрицательной энергией. Тогда оператор $b_n^{(e)}$ будет оператором уничтожения электрона в состоянии n , $d_n^{(e)*}$ — оператором рождения позитрона и т. д. Это легко установить, используя свойства гамильтониана $H_{0F} = V^{-1} H_{0D} V$ и, в частности, перестановочные соотношения между ним и оператором $b_n^{(e)*}$. Заметим, что разложение (15.191) имеет смысл только в случае достаточно слабых полей, когда есть щель между положительными и отрицательными собственными значениями энергии. В противоположном случае стабильного вакуума $|\Phi_{F0}\rangle$ не существует (см. статьи Снайдера и Вайнберга [734], Фарри [292] и Салама и Мэтьюза [692]). Отметим также, что зависимость от времени функции $\varphi_n(x)$ выражается в виде $\exp(-iE_n x^0)$, где E_n — собственное значение энергии для собственной функции $\varphi_n(x)$.

Решение уравнения (15.182) снова может быть записано в виде

$$|\Psi_F(t_2)\rangle = U_F(t_2, t_1) |\Psi_F(t_1)\rangle, \quad (15.192)$$

где $U_F(t_2, t_1)$ определяется разложением Дайсона

$$U_F(t_2, t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar c}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d^4x_1 \int_{t_1}^{t_2} d^4x_2 \dots \int_{t_1}^{t_2} d^4x_n \times \\ \times T(\mathcal{H}_{FI}(x_1) \mathcal{H}_{FI}(x_2) \dots \mathcal{H}_{FI}(x_n)), \quad (15.193)$$

причем гамильтониан \mathcal{H}_{FI} имеет вид

$$\mathcal{H}_{FI}(x) = -\frac{1}{2} e [\tilde{\psi}_F(x) \gamma^\mu, \psi_F(x)] A_{F\mu}(x) - \frac{1}{2} \delta m [\tilde{\psi}_F(x), \psi_F(x)]. \quad (15.194)$$

Рассмотрим теперь вектор состояния $|\Phi_{Fa}\rangle = b_a^{(e)*} |\Phi_{F0}\rangle$ не взаимодействующей с полем излучения системы, в которой содержится один «голый» электрон в некотором связанном состоянии a и нет фотонов. Энергия этого состояния равна E_a — собственному значению энергии, соответствующему собственной функции φ_a оператора уравнения Дирака во внешнем поле. Однако вследствие взаимодействия \mathcal{H}_{FI} энергия этого состояния изменится. Рассуждения проводятся точно так же, как в § 1, и для изменения энергии ΔE_a состояния $|\Phi_{Fa}\rangle$ мы фактически получаем очень похожую формулу

$$e^{-i\Delta E_a(t_2-t_1)} = \frac{(\Phi_{Fa}, U_F(t_2, t_1) \Phi_{Fa})}{(\Phi_{F0}, U_F(t_2, t_1) \Phi_{F0})}, \quad (15.195)$$

где разность времени $t_2 - t_1$ должна быть взята большой и нужно усреднить по всем осцилляциям на концах интеграла t_2 и t_1 . (Вспомните рассмотрение в гл. 11, которое легко обобщить на случай, когда гамильтониан H_0 имеет связанные состояния.)

Величина ΔE_a имеет как вещественную, так и мнимую части. Вещественная часть соответствует сдвигу уровней вследствие взаимодействия с полем излучения. Мнимая часть ΔE_a отрицательна и соответствует распаду состояния $|\Phi_{Fa}\rangle$, возникающему при переходе электрона в состояние с меньшей энергией и сопровождаемому излучением одного или большего числа фотонов. Поэтому она определяет время жизни (или ширину линии) состояния a . Мнимая часть ΔE_a равна нулю для основного состояния.

Можно снова анализировать оператор $U_F(t_2, t_1)$ при помощи диаграмм Фейнмана. Единственное отличие от проведенного ранее анализа в картине взаимодействия, когда нет связанных состояний, заключается в том, что теперь в качестве спаривания фермионных множителей следует взять

$$-\frac{1}{2} S_F^c(x_2, x_1) = (\Phi_{F0}, T(\psi_F(x_2) \tilde{\psi}_F(x_1)) \Phi_{F0}) = \\ = \begin{cases} + \sum_{n, E+} \varphi_n(x_2) \tilde{\varphi}_n(x_1) & \text{для } x_{20} > x_{10} \\ - \sum_{n, E-} \varphi_n(x_2) \tilde{\varphi}_n(x_1) & \text{для } x_{10} > x_{20}. \end{cases} \quad (15.196)$$

Функция S_F^c больше уже не является функцией от разности пространственно-временных координат. В случае статического поля она зависит от пространственных координат \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 в отдельности и от разности времен $t_2 - t_1$.

Функция $-\frac{1}{2}S_F^e(x, y)$ совпадает с функцией распространения Фейнмана во внешнем поле K_+^A , которая обсуждалась в § 1 гл. 14. Она удовлетворяет следующим уравнениям:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu^e(x) - m) S_F^e(x, y) = -2i\delta^{(4)}(x - y), \quad (15.197a)$$

$$\frac{i\partial S_F^e(x, y)}{\partial y^\mu} \gamma^\mu + S_F^e(x, y) [e\gamma^\mu A_\mu^e(y) + m] = -2i\delta^{(4)}(x - y), \quad (15.197b)$$

которые вытекают из уравнений движения для операторов ψ_F и $\tilde{\psi}_F$ и определения (15.196). Дельта-функция в правой части уравнений возникает при дифференцировании выражения (15.196) по времени. В самом деле, можно записать

$$T(\psi_F(x) \tilde{\psi}_F(y)) = \frac{1}{2} [\psi_F(x), \tilde{\psi}_F(y)] + \frac{1}{2} \varepsilon(x - y) [\psi_F(x), \tilde{\psi}_F(y)]_+, \quad (15.198)$$

и если применить к этому выражению операцию $i\gamma^0 \partial_0$, то множитель $\varepsilon(x - y)$ даст $2i\gamma^0 \delta^{(1)}(x_0 - y_0)$. Благодаря наличию $\delta(x_0 - y_0)$ можно использовать канонический одновременный антикоммутиатор для операторов $\psi_F(x)$ и $\tilde{\psi}_F(y)$, равный $\gamma^0 \delta^{(3)}(x - y)$, и найти, что

$$\begin{aligned} (i\gamma^0 \partial_0 + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\partial} - e\gamma^\mu A_\mu^e(x) - m) (\Phi_{0F}, T(\psi_F(x) \tilde{\psi}_F(y)) \Phi_{0F}) &= \\ = -\frac{1}{2} (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu^e(x) - m) S_F^e(x, y) &= \\ = (\Phi_{0F}, T((i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu^e(x) - m) \psi_F(x) \tilde{\psi}_F(y)) \Phi_{0F}) + i\delta^{(4)}(x - y) &= \\ = i\delta^{(4)}(x - y), & \end{aligned} \quad (15.199)$$

где при выводе последней строки использовано уравнение движения для оператора $\psi_F(x)$. Вывод уравнения (15.197b) производится аналогичным образом. Вводя фурье-образы¹⁾

$$S_F^e(x, y) = \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 e^{-ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} S_F^e(p_1, p_2), \quad (15.200)$$

$$S_F(p) = \frac{-2i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma \cdot p - m}, \quad (15.201)$$

легко записать уравнения (15.197a) и (15.197b) в импульсном пространстве. Итерация этих уравнений приводит к следующему все еще точному уравнению:

$$\begin{aligned} S_F^e(p_1, p_2) &= S_F(p_1) \delta^{(4)}(p_1 - p_2) + \left(\frac{(2\pi)^4}{-2i} \right) S_F(p_1) e\gamma \cdot a(p_1 - p_2) S_F(p_2) + \\ &+ \left(\frac{(2\pi)^4}{-2i} \right)^2 S_F(p_1) \left[\int d^4 q \int d^4 q' e\gamma \cdot a(q) \times \right. \\ &\left. \times S_F^e(p_1 - q, p_2 + q') e\gamma \cdot a(q') \right] S_F(p_2). \end{aligned} \quad (15.202)$$

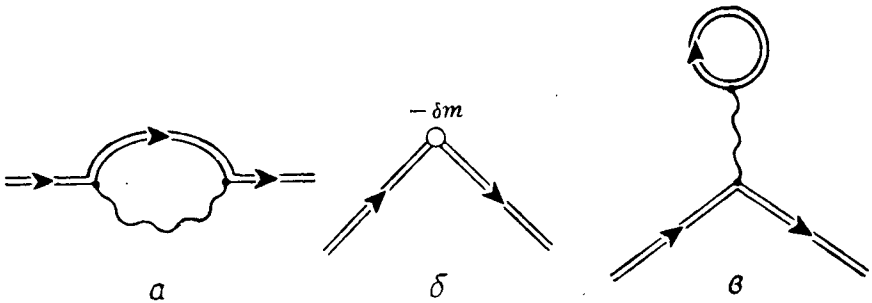
1) В представляющем наибольший интерес для практических применений случае внешнее поле не зависит от времени. Тогда в формуле (15.200) $S_F^e(p_1, p_2)$ заменяется на

$$S_F^e(p_1, p_2) \rightarrow \delta^{(1)}(p_{10} - p_{20}) S_F^e(p_1, p_2).$$

В картине взаимодействия для связанных состояний Фарри среднее значение тока по вакууму уже не равно нулю

$$-\frac{1}{2} e (\Phi_{F0}, [\tilde{\Psi}_F(x) \gamma_\mu, \Psi_F(x)] \Phi_{F0}) = j_F(x) \neq 0. \quad (15.203)$$

Оно соответствует току, индуцированному в вакууме внешним полем, и поэтому содержит все явления поляризации вакуума. Из того, что вакуумное среднее оператора тока отлично от нуля, следует, что в формуле (15.193) при разложении T -произведений на нормальные произведения необходимо включать спаривания в множителе $^{1/2} [\tilde{\Psi}_F(x) \gamma_\mu, \Psi_F(x)]$, входящем в выражение для \mathcal{H}_{FI} . Как и в случае соответствующей задачи для свободных электронов, члены разложения могут быть пред-



Ф и г. 84.

ставлены диаграммами Фейнмана. Радиационные поправки второго порядка представлены диаграммами на фиг. 84, причем функции распространения электрона во внешнем поле изображены двойными линиями. Величина сдвига уровня стационарного состояния φ_a в общем случае комплексна и в низшем порядке теории возмущений определяется формулой

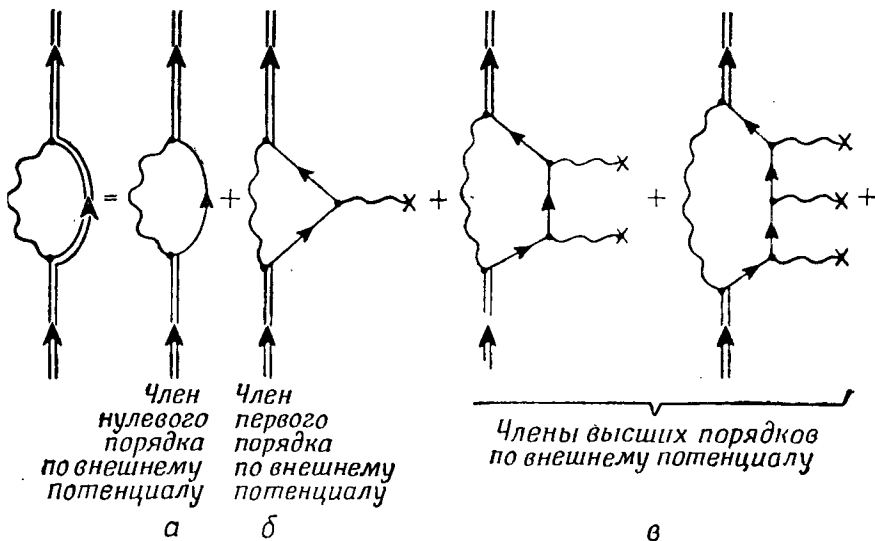
$$\begin{aligned} -\frac{i}{\hbar} T \Delta E_a = & -\alpha \pi \int_{i_0}^t \tilde{\varphi}_a(x_2) \gamma^\mu S_F^e(x_2, x_1) \gamma_\mu D_F(x_2 - x_1) \varphi_a(x_1) d^4x_1 d^4x_2 - \\ & -\alpha \pi \int_{i_0}^t \tilde{\varphi}_a(x_2) \gamma^\mu \varphi_a(x_2) D_F(x_2 - x_1) \text{Sp} [\gamma_\mu S_F^e(x_1, x_1)] d^4x_1 d^4x_2 + \\ & + i \delta m \int_{i_0}^t \tilde{\varphi}_a(x_1) \varphi_a(x_1) d^4x_1. \end{aligned} \quad (15.204)$$

Ввиду того, что в статическом внешнем поле функция $S_F^e(x_1, x_2)$ зависит только от разности $(x_2 - x_1)_0$ временных компонент точек x_1 и x_2 , можно ввести в первые два члена новые переменные интегрирования $(x_2 - x_1)_0$ и $^{1/2}(x_2 + x_1)_0$, что позволит провести интегрирование по переменной $(x_2 + x_1)_0$. Подынтегральное выражение в члене δm в формуле (15.204) не зависит от x_1 , так что и здесь интегрирование по времени приве-

дет к множителю $t - t_0 = T$. В результате получим

$$\begin{aligned} \Delta E_a = & -i\alpha\pi \int \tilde{\varphi}_a(x_2) \gamma^\mu S_F^e(x_2, x_1) \gamma_\mu \varphi_a(x_1) D_F(x_2 - x_1) d^3x_1 d^3x_2 d(x_2 - x_1)_0 - \\ & -i\alpha\pi \int \tilde{\varphi}_a(x_2) \gamma^\mu \varphi_a(x_2) D_F(x_2 - x_1) \text{Sp} [\gamma_\mu S_F^e(x_1, x_1)] \times \\ & \times d^3x_1 d^3x_2 d(x_2 - x_1)_0 - \delta m \int d^3x_1 \tilde{\varphi}_a(x_1) \varphi_a(x_1). \end{aligned} \quad (15.205)$$

Энергетический сдвиг уровня a определяется вещественной частью ΔE_a . Первый член выражения (15.205) содержит бесконечную собственно-энергетическую часть, которая должна быть изолирована и уничтожена при



Ф и г. 85.

помощи члена δm . Второй член также содержит бесконечную часть, соответствующую перенормировке заряда, которая должна быть выделена и устранена.

Выделение этих расходящихся частей может быть проведено при помощи соотношения (15.202), которое соответствует началу итерационного разложения функции S_F^e по степеням внешнего поля. Результат итерации для функции распространения связанного состояния может быть наглядно представлен (фиг. 85). Матричный элемент, соответствующий диаграмме a на фиг. 85, содержит расходящуюся собственно-энергетическую часть, которая взаимно уничтожается с членом δm в выражении (15.205). Более точно, в рассматриваемом случае диаграмма a соответствует члену, который пропорционален интегралу $\int \tilde{\varphi}_a(\mathbf{p}) \Sigma^{(2)}(p) \varphi_a(\mathbf{p})$, где оператор $\Sigma^{(2)}(p)$ определяется выражением (15.71) и может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(p) = & \Sigma^{(2)}(p = m) + A(p - m) + (p - m) \Sigma_f^{(2)}(p) = \\ = & 2\pi i \delta m + A(p - m) + (p - m) \Sigma_f^{(2)}(p), \end{aligned} \quad (15.206)$$

причем константа A бесконечна, а $\Sigma_f^{(2)}(p)$ уже не расходится. Заметим, что поскольку $\varphi_a(\mathbf{p})$ не является дираковским спинором свободной час-

тицы, а удовлетворяет уравнению

$$(\gamma \cdot p - m) \Phi_a(p) = -e \int d^3q \gamma \cdot a(p - q) \Phi_a(q), \quad (15.207)$$

то второй член в уравнении (15.206) не равен нулю. Первый член, как отмечалось выше, уничтожается с третьим членом выражения (15.205). Можно показать, что вклад от члена A в (15.206) уничтожается с расходимостью во вкладе от диаграммы b на фиг. 85. Аналогично, если в след второго члена формулы (15.205) подставить выражение (15.202) для $S_F^e(x_1, x_2)$, то окажется, что первый член, содержащий $S_F(x_1 - x_2)$, тождественно равен нулю, тогда как второй член описывает эффекты поляризации вакуума слабым полем, вычисленные в § 4. Поэтому появляющиеся здесь расходимости могут быть изолированы и отброшены.

Читатель найдет четкое и понятное изложение деталей этих вычислений в статьях Кролла и Поллока [466] и Баранджера, Бете и Фейнмана [26]; в них показано, в частности, как производить ковариантное выделение расходимостей (ультрафиолетовых и инфракрасных) в проблеме связанного состояния (см. также работу Миллса и Кролла [553]). Кролл и Поллок исследовали влияние электромагнитных радиационных поправок на расщепление сверхтонкой структуры. Это чрезвычайно важно потому, что наиболее точное численное значение постоянной тонкой структуры получено путем измерения сверхтонкого расщепления в водороде¹). Баранджер, Бете и Фейнман вычислили самый сдвиг уровня (лэмбовский сдвиг) и получили поправки от больших импульсов к упомянутым выше расчетам Бете, Френча и Вайскопфа, Лэмба и Кролла, а также Фейнмана.

Радиационные поправки к сверхтонкой структуре и к энергетическим уровням связанного электрона были вычислены также Карплусом, Клейном и Швингером [426, 427]. В этих более формальных расчетах использована развитая Швингером [714, 715] техника вычислений, которая из-за ограниченности объема не может быть изложена в этой книге. Поэтому здесь в основном сделаны ссылки на те статьи, которые наиболее близки по духу к принятому в этой книге изложению теории поля²). Работы Кролла и Поллока и Баранджера и др., опирающиеся на метод Фейнмана — Дайсона, имеют, по-видимому, то преимущество, что в них физическое содержание вычислений и приближений яснее, нежели в более формальном подходе Карплуса, Клейна и Швингера.

Расчеты Баранджера и др. и Карплуса и др. охватывают радиационные эффекты от одного виртуального фотона и $Z\alpha$ поправки к сдвигу уровня в низшем порядке теории возмущений.

Если включить все остальные известные поправки (например, эффекты отдачи и конечных размеров, α^2 -радиационные поправки, $\alpha(\alpha Z)^6 \ln^2(\alpha Z)$ -поправки и т. д.), то теоретические результаты для сдвига уровней $2^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$ с феноменальной точностью согласуются с экспериментом: $1057,70 \pm 0,15$ Мгц по сравнению с экспериментальным значением $1057,77 \pm 0,10$ Мгц. (В настоящее время существует расхождение порядка $6,1 \pm 4,5$ Мгц в случае однократно ионизованного гелия.) (Обзор теории сдвигов энергетических уровней в атомах, охватывающий выпол-

¹) Поправки к формуле Ферми для сверхтонкой структуры, обусловленные эффектами отдачи, структуры и радиационными, изложены в книге Бете и Солпитера [56] (см. также статьи Иддингса и Платумана [898]).

²) В качестве введения в технику Швингера можно указать статью Sommerfelda [737].

ненные к 1959 г. работы, можно найти в статьях Питермана [638] и Лайзера [481].)

Основные трудности, встречающиеся при проведении вычислений лэмбовского сдвига, относятся главным образом к устранению инфракрасных расходимостей. В § 4 уже отмечалось, что в наиболее ранних расчетах (например, [249, 464, 280]) сдвига уровня, возникающего из-за фотонов высокой энергии, трудность с инфракрасной расходимостью устранялась введением массы фотона и применением перенормированного верхинялого оператора, вычисленного при $|p_1| \ll mc$, $|p_2| \ll mc$, $|p_1 - p_2| \ll mc$. Вклад от фотонов «малой энергии» вычислялся затем путем использования нерелятивистского дипольного приближения (§ 2). Если сложить эти два вклада [используя формулу связи Френча (15.127)], то в низшем порядке теории возмущений получается выражение для сдвига уровней, которое не зависит от предположенной массы фотона $\lambda_{\text{мин}}$. В расчете Карплуса и др. и Баранджера и др. показано, что инфракрасные расходимости в конечном результате пропадают.

Большой прогресс в изучении лэмбовского сдвига был достигнут в работе Фрида и Йенни [282]. Они заметили, что можно выбрать такую калибровку, в которой фотонная функция распространения нулевого порядка имеет вид

$$D_{F\mu\nu}(k) = \left(g_{\mu\nu} + 2 \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2}, \quad (15.208)$$

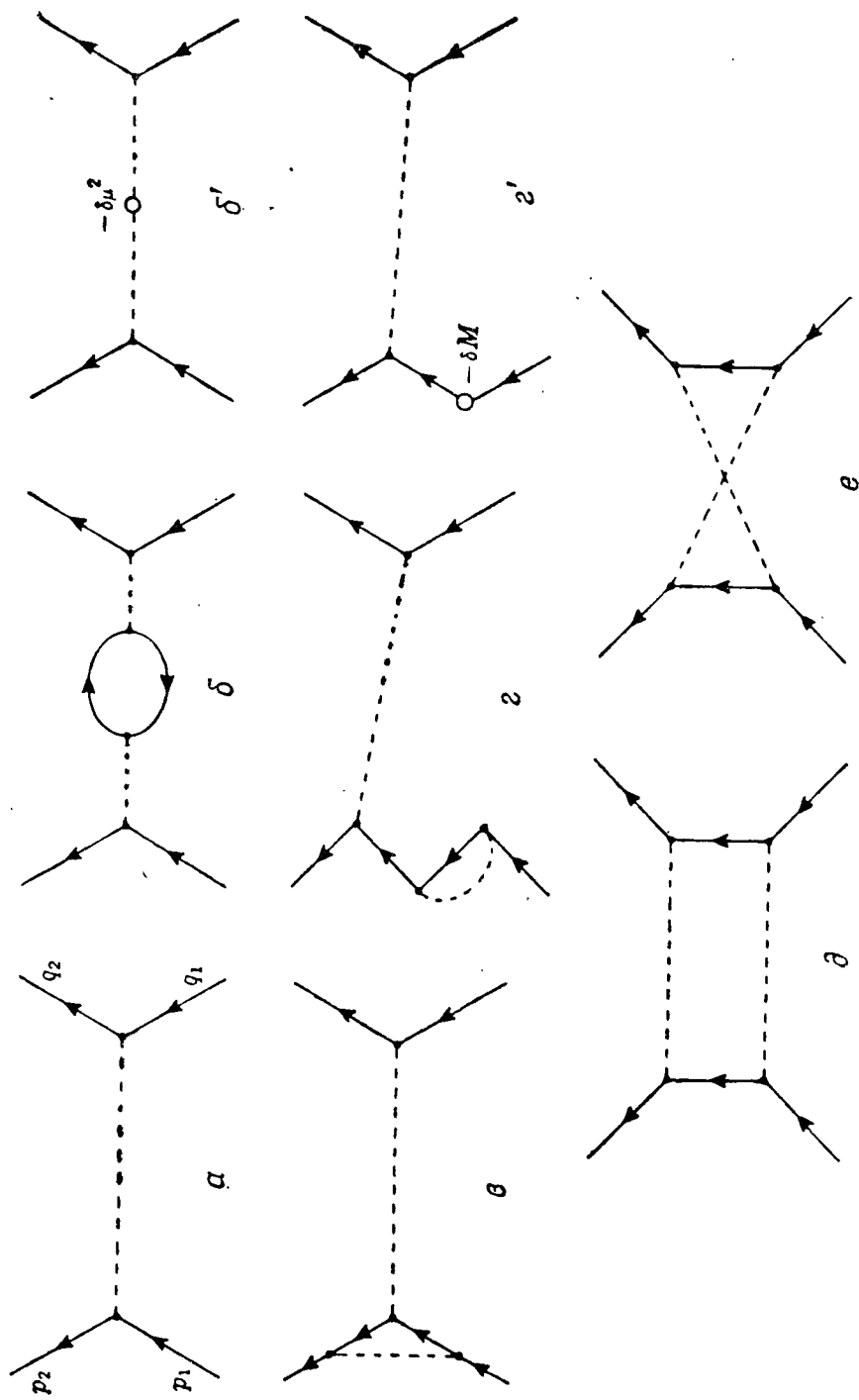
и что именно эта калибровка особенно удобна для изучения инфракрасных расходимостей. Оказывается, что в этой калибровке главный вклад в лэмбовский сдвиг вносят первые две диаграммы *a* и *b* на фиг. 85, соответствующие первым двум членам разложения (15.202). Остающаяся после перенормировки массы в диаграмме *a* ультрафиолетовая расходимость взаимно уничтожается с соответствующей расходимостью в диаграмме *b*. Далее может быть дано естественное предписание для изоляции этих расходимостей, при котором не вводятся никакие ложные инфракрасные расходимости. Читатель найдет в работе [282] анализ и простой вывод лэмбовского сдвига вплоть до порядка $\alpha(Z\alpha)^4 m$.

Картина Фарри также была использована для расчета релеевского рассеяния, т. е. рассеяния фотона на связанном электроде. В своей полной общности задача оказалась очень трудной даже во втором порядке теории возмущений. Методы расчета были развиты в работе Брауна, Пайерлса и Вудворда [885], в которой имеются ссылки на более старые источники. Лоу [510] рассматривал в картине Фарри задачу о естественной форме спектральных линий.

Этим заканчивается наш краткий обзор квантовой электродинамики, если не считать замечаний о перенормировке в гл. 12. Читателю, интересующемуся этим вопросом, можно рекомендовать монографии Яуха и Рорлиха [392], Ахизера и Берестецкого [3], Челлена [900], Боголюбова и Ширкова [67], в которых освещены более формальные аспекты теории (см. также монографию Тирринга [776]).

§ 8. Перенормировка в мезонной теории

Техника перенормировок, которую мы применяли в электродинамике, может быть легко перенесена на мезонные теории и, в частности, на случай псевдоскалярных мезонов, взаимодействующих с нуклонами посредством псевдоскалярной связи. Мы увидим, однако, что в отличие от кван-



Фиг. 86.

товой электродинамики в мезонной теории существует несколько возможных определений перенормированной константы связи в зависимости, например, от того, выбрано ли условие

$$\lim_{p' \rightarrow p \rightarrow 0} \tilde{u}(p') \Lambda_5(p', p) u(p) \rightarrow 0 \quad (15.209a)$$

или условие

$$\lim_{(p'-p)^2 \rightarrow \mu^2} \tilde{u}(p') \Lambda_5(p', p) u(p) \rightarrow 0, \quad (15.209б)$$

т. е. от того, считаем ли мы, что радиационные поправки должны быть равны нулю в пределе равной нулю полной или кинетической энергии мезонов. В квантовой электродинамике оба эти предела совпадают, так как фотон имеет равную нулю массу покоя. Было доказано, что любое из следующих требований:

- а) для взаимодействия расположенных далеко друг от друга зарядов должен соблюдаться закон Кулона,
- б) амплитуда рассеяния фотона на заряженной частице в пределе нулевой энергии фотона должна описываться формулой Томсона, ведет к одной и той же величине перенормированного заряда в электродинамике.

Для определенности мы проиллюстрируем наши замечания о перенормировке в мезонной теории на примере задачи рассеяния нуклонов на нуклонах в PS - PS -теории, т. е. в псевдоскалярной мезонной теории с псевдоскалярной связью [822]. Гамильтониан взаимодействия в этой теории имеет вид

$$\mathcal{H}_I = G : \tilde{\psi}(x) \tau_i \gamma_5 \psi(x) : \varphi_i(x) - \delta M : \tilde{\psi}(x) \psi(x) : - \delta \mu^2 : \varphi_i \varphi_i :. \quad (15.210)$$

[В выражении (15.210) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.] Диаграммой низшего порядка является диаграмма a на фиг. 86, которой соответствует матричный элемент (опуская нормировочные множители для спиноров $\sqrt{M/E}$, множитель $-2\pi i$ и δ -функцию, соответствующую сохранению полной энергии и импульса)

$$T^{(a)} = \frac{G^2}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{u}(p_2) \tau_i \gamma_5 u(p_1) \delta_{ij} \tilde{u}(q_2) \tau_j \gamma_5 u(q_1)}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \quad (k = q_2 - q_1 = p_1 - p_2). \quad (15.211)$$

Кроме того, поскольку рассматриваемые нуклоны являются тождественными частицами, то диаграмма a на фиг. 86 приводит к матричному элементу обменного рассеяния, который может быть получен из $-T^{(a)}$ перестановкой импульсов p_2 и q_2 . В дальнейшем мы не будем рассматривать матричных элементов обменного рассеяния, которые всегда могут быть получены из выписываемых матричных элементов при помощи перестановки импульсов p_2 и q_2 и замены знака перед получившимся выражением на минус. Типы диаграмм, приводящих к радиационным поправкам к матричному элементу $T^{(a)}$, показаны на фиг. 86 (диаграммы b — e).

Диаграмма b на фиг. 86 аналогична диаграмме, описывающей поляризацию вакуума в квантовой электродинамике. Можно считать, что диаграмма b получена из диаграммы a путем замены в последней внутренней мезонной линии диаграммой, изображенной на фиг. 87. Соответственно матричный элемент $T^{(b)}$, определяемый диаграммой b на фиг. 86, может быть получен из матричного элемента $T^{(a)}$ путем замены в последнем множителя $(i/(2\pi)^4) \delta_{ij} (k^2 - \mu^2)^{-1}$ множителем

$(i/(2\pi)^4) (k^2 - \mu^2)^{-1} K_{ij}(k) (i/(2\pi)^4) \cdot (k^2 - \mu^2)^{-1}$, где

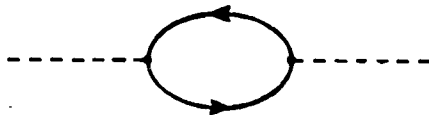
$$K_{ij}(k) = -G^2 \int d^4p \text{Sp} \left\{ \tau_j \gamma_5 \frac{1}{\gamma \cdot (p+k) - M} \tau_i \gamma_5 \frac{1}{\gamma \cdot p - M} \right\}. \quad (15.212)$$

В выражении (15.212) знак Sp означает, что нужно вычислить след как дираковских матриц, так и изотопических матриц. (Напомним, что $\text{Sp} \tau_i \tau_j = \delta_{ij}$.) Используя для объединения знаменателей формулу Фейнмана (15.34) и регуляризуя выражение по массе нуклона, находим

$$K_{ij}(k) = \delta_{ij} K(k), \quad (15.213a)$$

$$K(k) = -G^2 \int_0^1 dz \int d^4p \sum_i c_i \frac{\text{Sp} [\gamma_5 (\not{p} + \not{k} - M_i) \gamma_5 (\not{p} + M_i)]}{(p^2 + 2z p \cdot k + z k^2 - M_i^2 + i\varepsilon)^2}. \quad (15.213b)$$

Если сделать замену переменных и применить соотношение симметрии $\int d^4p p_\mu f(p^2) = 0$, то станет очевидным, что интеграл является функцией



Ф и г. 87.

только от k^2 и что он квадратично расходится:

$$K(k^2) = G^2 \int_0^1 dz \int d^4p \sum_i c_i \frac{4 [p^2 + k^2 (z^2 - z) - M_i^2]}{[p^2 + k^2 (z - z^2) - M_i^2 + i\varepsilon]}. \quad (15.214)$$

Если по аналогии с поляризационным тензором в электродинамике разложить функцию $K(k^2)$ по степеням $(k^2 - \mu^2)$ вблизи точки $k^2 = \mu^2$, то

$$K(k^2) = K(0) + (k^2 - \mu^2) K'(0) + (k^2 - \mu^2)^2 K_R(k^2). \quad (15.215)$$

Разложение в ряд Тэйлора соответствует дифференцированию подынтегрального выражения. При дифференцировании показатель степени знаменателя в выражении (15.214) увеличивается, так что $K'(0)$ расходится только логарифмически, а K_R является уже конечным. При подходящем подборе $\delta\mu^2$ первый член разложения (15.215) полностью уничтожается вкладом от диаграммы б на фиг. 86. Таким образом, он соответствует собственной энергии мезона. [Для свободного мезона ($k^2 = \mu^2$) и, согласно разложению (15.215), в этом случае нет никаких других эффектов, кроме этого изменения массы.] Следовательно, сумма вкладов от диаграмм б и б' на фиг. 86 равна

$$T^{(b)} + T^{(b')} = \frac{G^2}{8\pi^3} \frac{\tilde{u}(p_2) \tau_i \gamma_5 u(p_1) \delta_{ij} \tilde{u}(q_2) \tau_j \gamma_5 u(q_1)}{k^2 - \mu^2} \frac{i}{(2\pi)^4} \times \\ \times [K'(0) + (k^2 - \mu^2) K_R(k^2)]. \quad (15.216)$$

Следует отметить, что член, содержащий $K'(0)$, отличается только постоянным множителем от матричного элемента $T^{(a)}$ (15.211). Поэтому можно объединить этот член с $T^{(a)}$ и определить $G^2 \left(1 + \frac{i}{(2\pi)^4} K'(0) \right)$ как перенормированную константу связи. Последний член в выражении (15.216),

содержащий $K_R(k^2)$, является конечным и представляет собой радиационную поправку к матричному элементу $T^{(a)}$.

Рассмотрим теперь диаграмму ε на фиг. 86, которая соответствует вставке вершинной части в диаграмму низшего порядка (a на фиг. 86). Анализ, такой же как и в случае квантовой электродинамики, показывает, что матричный элемент $T^{(\varepsilon)}$ получается из матричного элемента $T^{(a)}$ путем замены матрицы $\gamma_5 \tau_i$ между нуклонными спинорами с импульсами p_2 и p_1 на

$$\tau_i \gamma_5 \rightarrow \frac{iG^2}{(2\pi)^4} \int \gamma_5 \tau_j \frac{1}{\gamma \cdot (p_2 - l) - M} \gamma_5 \tau_i \frac{1}{\gamma \cdot (p_1 - l) - M} \gamma_5 \tau_j \frac{d^4 l}{l^2 - \mu^2}. \quad (15.217)$$

Так как $\tau_j \tau_i \tau_j = -\tau_i$, то это равносильно замене γ_5 на $\Lambda_5^{(2)}(p_2, p_1)$, причём

$$\Lambda_5^{(2)}(p_2, p_1) = \frac{iG^2}{(2\pi)^4} \int d^4 l \frac{[\gamma \cdot (-p_2 + l) + M] \gamma_5 [\gamma \cdot (-p_1 + l) + M]}{[(p_2 - l)^2 - M^2][l^2 - \mu^2]}. \quad (15.218)$$

Оператор $\Lambda_5^{(2)}(p_2, p_1)$ логарифмически расходится. Если учесть, что он стоит между двумя спинорами свободных частиц $u(p_2)$ и $u(p_1)$, то его можно упростить, так как можно положить $\gamma \cdot p_1 = M$, $\gamma \cdot p_2 = M$. Интересующая нас величина дается выражением

$$\Lambda_5^{(2)}(p_2, p_1) \Big|_{\substack{\gamma \cdot p_1 = M \\ \gamma \cdot p_2 = M}} = \frac{iG^2}{(2\pi)^4} \gamma_5 \int \frac{l^2 d^4 l}{[(p_2 - l)^2 - M^2][(p_1 - l)^2 - M^2][l^2 - \mu^2]}. \quad (15.219)$$

Эта величина релятивистски инвариантна и, следовательно, может быть функцией только от p_1^2 , p_2^2 и $(p_1 - p_2)^2$. Так как p_1 и p_2 суть импульсы свободных частиц ($p_1^2 = p_2^2 = M^2$), то Λ_5 является функцией только от $(p_1 - p_2)^2$: $\Lambda_5^{(2)}(p_1, p_2) = \Lambda_5^{(2)}[(p_1 - p_2)^2]$.

Из того, что интеграл (15.219) расходится только логарифмически, следует, что для выделения его конечной части достаточно одного вычитания. Поэтому если записать

$$! \Lambda_5^{(2)}((p_2 - p_1)^2) = \Lambda_5^{(2)}(\mu^2) + \Lambda_5^{(2)C}((p_2 - p_1)^2), \quad (15.220)$$

то $\Lambda_5^{(2)C}$ является конечной величиной, а $\Lambda_5^{(2)}(\mu^2) = C \gamma_5$, где C — логарифмически расходящаяся константа¹⁾. Структура этого расходящегося члена снова оказывается такой, что он может быть объединен с матричным элементом низшего порядка, и переопределение константы связи впитает в себя расходимость. Аналогично, вклад от диаграммы ε на фиг. 86 может быть получен из вклада от диаграммы a на фиг. 86 путем замены $u(p_1)$ множителем $\left(\frac{i}{(2\pi)^4}\right) (\gamma \cdot p_1 - M)^{-1} \Sigma^{(2)}(p_1) u(p_1)$, где

$$\Sigma^{(2)}(p_1) = G^2 \int d^4 l \tau_i \gamma_5 \frac{1}{\gamma \cdot (p - l) - M} \tau_i \gamma_5 \frac{1}{l^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \quad (15.221)$$

— логарифмически расходящийся интеграл. Он может быть разложен вблизи $\gamma \cdot p = M$ следующим образом:

$$\Sigma^{(2)}(p) = \delta M^{(2)} + B^{(2)}(\gamma \cdot p - M) + \Sigma_C^{(2)}(p), \quad (15.222)$$

где $\delta M^{(2)}$ и $B^{(2)}$ — расходящиеся константы, а $\Sigma_C^{(2)}$ — конечная величина, равная нулю при $\gamma \cdot p = M$. Первый член определяет перенормировку массы и уничтожается вкладом от члена δM (ε' на фиг. 86). Вклад от

¹⁾ Отметим, что так же можно бы определить конечную часть $\Lambda_5^{(2)C}$, вычтя из $\Lambda_5^{(2)}((p_2 - p_1)^2)$ величину $\Lambda_5^{(2)}(0)$. Это привело бы к другой перенормированной константе связи.

второго члена соответствует перенормировке волновой функции, в чем можно убедиться при помощи приема, аналогичного указанному в § 3. [Во всяком случае, он отличается от матричного элемента $T^{(a)}$ постоянным (бесконечным) множителем и поэтому может быть включен в этот матричный элемент.] Член $\Sigma_C^{(2)}(p)$ равен нулю при $\gamma \cdot p = M$ и поэтому в настоящем случае не дает вклада, так как $\Sigma_C^{(2)}(p)$ действует на $u(p)$.

Диаграммы d и e на фиг. 86 соответствуют процессам рассеяния, в которых нуклоны обмениваются двумя мезонами. Они конечны и не содержат никаких радиационных эффектов.

В качестве упражнения читателю рекомендуется провести анализ структуры этих же диаграмм в случае PS - PV -теории, т. е. псевдоскалярной мезонной теории с псевдовекторной связью $\mathcal{L}_I = \frac{F}{\mu} : \tilde{\psi} \tau_i \gamma_5 \gamma_\mu \psi : \partial^\mu \phi$. Здесь мы отметим только, что эти два вида связи дают тождественные матричные элементы в низшем порядке теории возмущений, если

$$\frac{G}{2M} = \frac{F}{\mu}. \quad (15.223)$$

Доказательство: В PS - PV -теории диаграмме низшего порядка (a на фиг. 86) соответствует матричный элемент

$$T_{PV}^{(a)} = \frac{F^2}{\mu^2 (2\pi)^3} \frac{\tilde{u}(p_2) \tau_i \gamma_5 \gamma_\nu \cdot (p_2 - p_1) u(p_1) \tilde{u}(q_2) \tau_i \gamma_5 \gamma_\nu \cdot (q_2 - q_1) u(q_1)}{(q_2 - q_1)^2 - \mu^2}. \quad (15.224)$$

Так как

$$\tilde{u}(p_2) \gamma_5 \gamma_\nu \cdot (p_2 - p_1) u(p_1) = -2M \tilde{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1), \quad (15.225)$$

то матричный элемент $T_{PV}^{(a)}$ совпадает с $T_{PS}^{(a)}$, если константы связи удовлетворяют соотношению (15.223).

В заключение настоящего параграфа мы кратко обсудим вопрос о возможности использования потенциала для описания взаимодействия между нуклонами, по крайней мере в нерелятивистской области малых энергий. Наиболее очевидный способ определения потенциала заключается в требовании, чтобы амплитуда рассеяния, вычисленная из уравнения Шредингера, в которое подставлен этот потенциал, воспроизводила S -матрицу теории поля в нерелятивистской области энергий. Если предположить, что взаимодействие между частицами в нерелятивистской области может быть описано уравнением Шредингера с потенциалом $V(|\mathbf{x}|)$:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_2^2 + V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \right\} \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = i\hbar \partial_t \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t), \quad (15.226)$$

то их относительное движение будет определяться уравнением

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M^*} \nabla^2 + V(|\mathbf{x}|) \right\} \varphi(\mathbf{x}) = W \varphi(\mathbf{x}), \quad (15.227)$$

где приведенная масса M^* равна $1/2 M$. Тогда в системе центра масс ($\mathbf{p}_1 = -\mathbf{q}_1$) рассеяние из состояния с относительным импульсом $1/2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) = \mathbf{k}_1$ в состояние с относительным импульсом $\mathbf{k}_2 = 1/2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2)$ определяется S -матрицей¹⁾:

$$\langle \mathbf{k}_2 | s | \mathbf{k}_1 \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) - 2\pi i \delta(W_2 - W_1) \langle \mathbf{k}_2 | t | \mathbf{k}_1 \rangle, \quad (15.228)$$

1) Мы не выписываем спиновых индексов нуклонов.

где $W = \mathbf{k}^2/M$, ($|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{k}|$). Эта T -матрица связана с потенциалом уравнением (11.88), т. е.

$$(\mathbf{k}_2 | t | \mathbf{k}_1) = (\mathbf{k}_2 | V | \mathbf{k}_1) - \int d^3k (\mathbf{k}_2 | V | \mathbf{k}) \frac{(\mathbf{k} | t | \mathbf{k}_1)}{W - W_1}. \quad (15.229)$$

Рассмотрим решение этого интегрального уравнения только в низшем приближении. Тогда можно принять

$$(\mathbf{k}_2 | V | \mathbf{k}_1) \approx (\mathbf{k}_2 | T | \mathbf{k}_1). \quad (15.230)$$

В таком приближении не возникает никаких неоднозначностей, связанных с тем, что в моделях теории поля матрица T известна только при $\mathbf{k}_2^2 = \mathbf{k}_1^2$. [Отметим, однако, что величины $(\mathbf{k} | T | \mathbf{k}')$ при $\mathbf{k}_1^2 \neq \mathbf{k}_2^2$ вообще будут влиять на определение потенциала V .] Далее, выражение для элемента S -матрицы в теории поля имеет вид

$$(p_2 q_2 | S | p_1 q_1) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - 2\pi i \delta^{(4)}(p_2 + q_2 - p_1 - q_1) \frac{M^2}{E(\mathbf{p}_1) E(\mathbf{p}_2) E(\mathbf{q}_1) E(\mathbf{q}_2)} \sum_n T^{(n)}, \quad (15.231)$$

где $T^{(n)}$ — вклады от различных диаграмм, к числу которых относятся, в частности, и диаграммы, показанные на фиг. 86. Приведенная S -матрица, из которой выделена в виде множителей кинематика системы центра масс, определяется выражением

$$(p_2 q_2 | S | p_1 q_1) = \delta^{(3)}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \delta(P_{20} - P_{10}) (\mathbf{k}_2 | s | \mathbf{k}_1), \quad (15.232)$$

где $P_i = p_i + q_i$ ($i = 1, 2$) — вектор полной энергии и импульса, а $\mathbf{k}_i = 1/2(p_i - q_i)$ — относительный импульс частиц. Соответствующая приведенная T -матрица во втором порядке теории возмущений дается поэтому именно выражением (15.211). Сравнивая выражения (15.231) и (15.228) и учитывая определение (15.232), мы приходим к выводу, что в системе центра масс ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1 = 0$, $q_{10} = q_{20} = p_{10} = p_{20} = E$) вообще имеет место равенство

$$(\mathbf{k}_2 | t | \mathbf{k}_1) = \frac{M^2}{E^2} \sum_n T^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \quad (15.233)$$

Докажем теперь, что эффективный нерелятивистский потенциал соответствует матричному элементу второго порядка $T^{(a)}$. Следует ожидать, как отмечалось выше, что понятие потенциала может иметь смысл только в нерелятивистской области энергий, так что нам надо взять матричный элемент в нерелятивистском пределе. Примем во внимание, что

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mathbf{p}_2) \gamma_5 u(\mathbf{p}_1) &= \frac{1}{2M} \tilde{u}(\mathbf{p}_2) (\gamma \cdot p_2 \gamma_5 + \gamma_5 \gamma \cdot p_1) u(\mathbf{p}_1) = \\ &= \frac{1}{2M} \tilde{u}(\mathbf{p}_2) \gamma^\mu \gamma_5 u(\mathbf{p}_1) (p_{2\mu} - p_{1\mu}) \end{aligned} \quad (15.234)$$

и что в нерелятивистском пределе $|\mathbf{p}_2|, |\mathbf{p}_1| \ll M$ этот матричный элемент имеет вид

$$\tilde{u}(\mathbf{p}_2) \gamma_5 u(\mathbf{p}_1) \rightarrow i \frac{\tilde{u}_2 \sigma \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) u_1}{2M}, \quad (15.235)$$

где \tilde{u}_2 и u_1 — двухкомпонентные спиноры Паули. Таким образом, в нерелятивистском пределе матричные элементы $T^{(a)}$ становятся равными

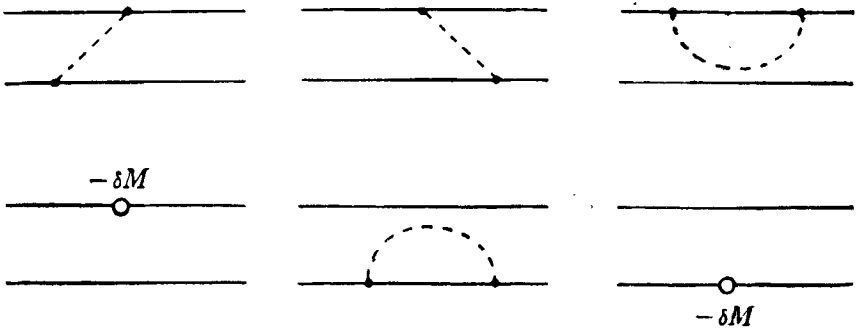
$$(\mathbf{k}_2 | t^{(a)} | \mathbf{k}_1) = -\frac{1}{8\pi^3} \left(\frac{G^2}{4M^2} \right) \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)}{(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)^2 + \mu^2} \quad (15.236)$$

(здесь использовано, что в системе центра масс $q_{10} = q_{20} = p_{20} = p_{10}$). Поэтому в пространстве координат

$$V(|\mathbf{x}|) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{G^2}{4M^2} \right) \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}}{k^2 + \mu^2} \quad (15.237a)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{G^2}{4M^2} \right) \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}. \quad (15.237б)$$

Интересно отметить, что Гартенхауз [295] получил во втором порядке в статической модели Чу выражение для потенциала, которое в точности совпадает с выражением (15.237а), если не считать множителя, связанного с функцией обрезания. Модель Чу легко распространить на случай двух нуклонов, один из которых закреплен в начале координат, а другой — в некоторой точке \mathbf{x} . Тогда потенциал представляет



Ф и г. 88.

энергию двухнуклонных состояний минус их собственные энергии. Диаграммы, которые дают вклад в низшем порядке, показаны на фиг. 88. Они приводят к

$$V(|\mathbf{x}|) = \left(\frac{f}{\mu} \right)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{v^2(k^2)}{2\omega_k} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}}{-\omega_k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (15.238)$$

что, кроме множителя $v^2(k^2)$, действительно совпадает с потенциалом (15.237а). Можно считать, что обрезание эффективно учитывает пренебрегаемые в модели эффекты отдачи. Потенциал (15.237а) также должен был бы, конечно, содержать эффекты обрезания, возникающие в результате пренебрежения поправками на отдачу. Эти поправки на отдачу становятся существенными при передачах импульса, равных по порядку величины массе нуклона M . Поэтому потенциал (15.237а) на расстояниях, меньших комптоновской длины волны нуклона $1/M$, теряет смысл. Аналогично, из-за наличия неизвестной функции обрезания статический потенциал имеет смысл только при $r > (1/M)$. Следует подчеркнуть, однако, что вклад от обмена двумя π -мезонами нарушит законность применения одно- π -мезонного обменного потенциала уже для расстояний

$\frac{\hbar}{2\mu_\pi c} \leq r \leq \frac{1}{2\mu_\pi c}$. Надо помнить также, что исходная гипотеза Юкавы о существовании π -мезонов исторически была выдвинута для объяснения короткодействующих сил между нуклонами. Радиус сил, обусловленных обменом одним π -мезоном, по порядку величины равен $\hbar/\mu_\pi c$, где μ_π — масса мезона; радиус сил, связанных с обменом двумя π -мезонами, составляет

примерно $\hbar/2\mu_{\pi c}$; обмен n π -мезонами приводит к силам с радиусом действия $\sim (\hbar/n\mu_{\pi c})$. Это означает, что если интересоваться только «хвостом» ядерного потенциала, то надо рассматривать только вклад, соответствующий обмену одним мезоном.

Основное свойство одно- π -мезонного потенциала (15.237а) при больших r (т. е. при $r \gg \hbar/\mu_{\pi c}$) заключается в том, что он является потенциалом притяжения и для 1S_0 -, и для 3S_1 -состояний. В то же время эксперименты показывают, что силы в 3S_1 -состоянии больше, чем в 3S_0 -состоянии. Однако это различие может быть объяснено тензорными силами, которые являются силами притяжения в триплетном состоянии и не действуют в синглетном состоянии. Тензорные силы не только объясняют различие между синглетными и триплетными состояниями, но, кроме того, также существенны для объяснения квадрупольного момента дейтрона. Таким образом, качественные свойства одно- π -мезонного обменного потенциала согласуются с экспериментом. Чтобы получить количественные предсказания, необходимо знать потенциал для меньших расстояний между нуклонами. В настоящее время не существует по-настоящему удовлетворительных вычислений двух- и много- π -мезонного обменного потенциала.

Существует, однако, интересный способ проверки вклада от одно- π -мезонного обмена в ядерные силы путем анализа рассеяния нуклонов на нуклонах при больших энергиях. Парциальные волны с большими l чувствительны только к хвосту ядерного потенциала. (Припомните, что в классической теории частица с импульсом p рассеивается на потенциале радиуса a только тогда, когда ее параметр удара t меньше a ; на язык квантовой механики это утверждение переводится следующим образом: только те парциальные волны, для которых $\hbar k \leq pa$, подвергаются рассеянию.) Так, если при анализе экспериментальных данных по рассеянию протонов на протонах при энергии 310 Мэв предположить, что одно- π -мезонное приближение определяет фазы при $l \geq 5$, и исключить парциальные волны с $l \leq 4$, то получается очень хорошее согласие с экспериментальным угловым распределением. Кроме того, определенная таким образом константа связи f оказалась равной $f \approx 0,06$ в удовлетворительном согласии со значением, полученным из анализа рассеяния π -мезонов на нуклоне [522]. Вдохновляющий характер этих результатов оценивается особенно высоко, если вспомнить, что до 1958 г. ни одна величина не была вычислена и измерена с точностью, достаточной для количественного подтверждения правильности псевдоскалярной мезонной теории.

Появилось большое число статей, в которых рассматривается вывод потенциала между нуклонами (см. обзор Филлипса [639]; а также статьи Гупта [344] и Чарапа и Фубини [116—118]).

Количественная теория перенормировок

В гл. 15 мы анализировали расходимости, которые встречаются в квантовой электродинамике и псевдоскалярной мезонной теории при вычислении элементов S -матрицы в высших порядках теории возмущений. Теперь нужно выяснить, приводят ли к расходимостям какие-либо другие типы диаграмм, помимо уже рассмотренных. Общему исследованию типов расходящихся диаграмм посвящен § 1. Затем мы изложим доказательство перенормируемости S -матрицы в квантовой электродинамике в той форме, в которой оно было дано Уордом.

§ 1. Примитивно расходящиеся диаграммы

В теории Фейнмана при вычислении элементов S -матрицы могут возникнуть три типа расходимостей, которые были классифицированы Дайсоном [194] следующим образом:

- 1) особенности, обусловленные совпадением двух или более полюсов подинтегрального выражения;
- 2) расходимости при малых импульсах, вызываемые наличием в подинтегральном выражении множителей $1/k^2$;
- 3) расходимости при больших импульсах за счет недостаточно быстрого убывания на бесконечности всего подинтегрального выражения в целом.

Расходимости первого типа возникают, например, когда при некоторых частных значениях импульсов частиц многочастичный процесс может быть разбит на независимые процессы, состоящие из независимых групп частиц (обсуждение этих расходимостей см. у Идена [207]). Примером расходимостей второго типа служит так называемая «инфракрасная катастрофа», которая анализировалась в гл. 15 (§ 4 и 6). Третий тип расходимостей возникает при совпадении особенностей функций $D_F(x)$, $\Delta_F(x)$ и $S_F(x)$ при малых x^2 . Например, собственная энергия электрона в наименьшем порядке пропорциональна

$$\int d^4x_1 \int d^4x_2 \overline{\psi^{(+)}(x_1)} \gamma^\mu S_F(x_1 - x_2) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x_2) D_F(x_1 - x_2)$$

и, таким образом, содержит произведение $S_F(x)D_F(x)$. При малых x^2 функция $\Delta_F(x)$ ведет себя следующим образом:

$$\Delta_F(x) \sim \delta(x^2) - \frac{i}{\pi x^2} - \frac{\mu^2}{4} \theta(x^2) + O(\ln \mu \sqrt{x^2} \text{ и } \sqrt{x^2} \ln \mu \sqrt{x^2}).$$

В связи с этим, чтобы определить произведение $S_F(x)D_F(x)$, необходимо придать смысл произведениям, подобным $(\delta(x^2))^2$, $\delta(x^2)x^{-2}$, $\delta(x^2)\theta(x^2)$ и т. п. Теория перенормировок частично может рассматриваться как попытка придать смысл таким сингулярным (обобщенным) функциям (см., например, книгу Боголюбова и Ширкова [67]).

Мы здесь не будем касаться расходимостей первого и второго типов и остановимся только на действительно причиняющих много беспокойства расходимостях третьего типа. Характерные примеры этих расходимостей уже обсуждались выше.

Рассмотрим теперь диаграмму общего вида, состоящую из внешних и внутренних бозонных и фермионных линий. Как мы знаем, для получения ее вклада в матричный элемент S -матрицы нужно проинтегрировать по всем внутренним импульсам p_j независимо от того, к какой линии они относятся—к бозонной или фермионной. Таким образом, мы должны проинтегрировать по $d^4p_j = dp_j^0 dp_j^1 dp_j^2 dp_j^3$. Дайсон [194] указал, что для изучения возможных типов расходимостей удобно повернуть контур интегрирования по p_j^0 таким образом, чтобы он шел вдоль мнимой оси в комплексной плоскости p_j^0 (вспомните § 1 гл. 15). Он показал далее [194] (см. также работу [196]), что это всегда можно сделать, не вводя новых типов расходимостей. Этим преобразованием достигается то преимущество, что в результате все четыре компонента становятся равноправными. Так, если положить $p_j^0 = ip_j^4$, где переменная p_j^4 — действительная, то обычные (рационализованные¹⁾) знаменатели принимают вид

$$\begin{aligned} p \cdot p - m^2 &= p^2 - m^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2 = \\ &= -(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + m^2). \end{aligned} \quad (16.1)$$

Они, таким образом, отрицательно определены, и интегрирование ведется по евклидову четырехмерному p -пространству.

После того как интеграл, соответствующий какой-либо диаграмме Фейнмана, преобразован указанным образом, исследование интеграла и оценка степени его расходимости становится более легкой задачей. Если степень импульсов в числителе ниже степени импульсов в знаменателе, интеграл будет сходящимся. С другой стороны, если степень импульсов в числителе выше или равна степени импульсов в знаменателе, то интеграл может расходиться, но не с необходимостью во всех случаях. Определим «размерность» интеграла как разность между полной степенью импульсов в числителе подынтегрального выражения и степенью импульсов в знаменателе. Обозначим размерность через D . Тогда достаточное условие сходимости запишется $D < 0$, а условие, при котором возможны расходимости, будет гласить $D \geq 0$.

Прежде рассмотрим взаимодействие спинорного поля с бозонным за счет простейшей связи без производных $\mathcal{L}_I = G : \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) : \varphi(x)$. Связи с производными мы вкратце обсудим позднее. Наше предварительное обсуждение прямых взаимодействий показало, что в каждой «вершине» любой диаграммы сходятся две фермионные и одна бозонная линии. Для характеристики диаграмм примем следующие обозначения:

- F — число фермионных линий,
- B — число бозонных линий,
- C — число вершин,

¹⁾ Т. е. знаменатели, освобожденные от матриц.— *Прим. ред.*

- F_e — число внешних фермионных линий,
 B_e — число внешних бозонных линий,
 F_i — число внутренних фермионных линий,
 B_i — число внутренних бозонных линий.

Задавая число и тип внешних линий, мы конкретизируем процесс, а задавая числа F_i и B_i , определяем приближение, в котором вычисляется процесс, но при этом еще остается свобода в выборе частного расположения внутренних линий.

Далее, при прямой связи оператор Γ ($\Gamma = \gamma_\mu, \gamma_5$ или I) не содержит импульсов участвующих частиц. Внешние линии также не влияют на сходимость, так как по ним интегрирование не проводится. Степень импульсов в числителе и знаменателе подсчитывается следующим образом:

1. Каждой внутренней фермионной или бозонной линии в числителе соответствует множитель d^4p . Это дает в D вклад, равный 4 ($F_i + B_i$).

2. В каждой вершине после интегрирования по всему пространству-времени возникает четырехмерная δ -функция. Наличие этой δ -функции эквивалентно добавлению в знаменатель четвертой степени импульса. Вспомним, однако, что одна из этих δ -функций выражает закон сохранения полного 4-импульса, т. е. неизменность его при переходе из начального в конечное состояние, и поэтому не приводит к уменьшению размерности подынтегрального выражения. Таким образом, вклад вершин в D равен $-4(C - 1)$.

3. Каждая внутренняя фермионная линия вносит в знаменатель первую степень импульса, поскольку ей соответствует функция распространения $\frac{1}{\gamma \cdot p - m}$. Это дает вклад в D , равный $-F_i$.

4. Каждая внутренняя бозонная линия вносит в знаменатель вторую степень импульса, поскольку ей соответствует функция распространения $\frac{1}{p^2 - \mu^2}$. Этим в D вносится вклад, равный $-2B_i$. Итак, размерность D дается выражением

$$D = 3F_i + 2B_i - 4(C - 1). \quad (16.2)$$

Эту величину можно выразить через число внешних линий, если учесть, что число вершин связано и с числом фермионных и с числом бозонных линий. Так, в каждой вершине сходятся две фермионные линии, и поэтому число концов фермионных линий равно удвоенному числу вершин. Но у каждой внутренней фермионной линии два конца, а у каждой внешней — один, следовательно,

$$2F_i + F_e = 2C. \quad (16.3)$$

Аналогично, в каждой вершине оканчивается одна бозонная линия, и поэтому число концов бозонных линий равно C :

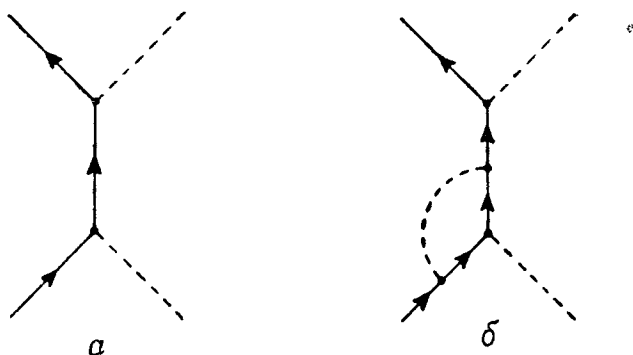
$$2B_i + B_e = C. \quad (16.4)$$

Подставляя F_i и B_i из соотношений (16.3) и (16.4) в (16.2), получаем

$$D = 4 - \frac{3}{2}F_e - B_e. \quad (16.5)$$

Анализ изложенного выше способа оценки порядка расходимостей интегралов (путем подсчета степеней) показывает, что, вообще говоря, он

применим только к матричным элементам с интегрированием по одному 4-импульсу. В случае интеграла большей кратности подсчет степеней не является достаточным для выяснения, сходится матричный элемент или расходится. Не всегда верно, что вклад вершин в D равен $-4(C-1)$. Далее, при интегрировании по нескольким 4-импульсам может случиться, что при фиксировании одной или более переменных интегрирования (т. е. внутренних 4-импульсов) остающийся интеграл меньшей кратности окажется расходящимся. В этом можно убедиться, сравнивая диаграммы на фиг. 89. Для обеих диаграмм $D = -1$, так как они имеют одинаковое число внешних линий. Однако, как известно, диаграмма β расходится. Поэтому неравенства $D \geq 0$ или $D < 0$ непосредственно применимы как критерий расходимости или сходимости лишь в случае диаграмм наименьшего порядка, которым соответствует только одно интегрирование. Если диаграмма содержит n внутренних линий, то условия $D < 0$ или $D \geq 0$ верны как критерий сходимости или расходимости только



Ф и г. 89.

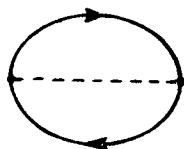
в том случае, когда результат субинтегрирования по как угодно выбранному $n - 1$ -му внутреннему 4-импульсу является конечным. Другими словами, если диаграмма расходится, то расходимость у нее должна возникнуть только при последнем интегрировании по 4-импульсу.

Расходящиеся диаграммы, обладающие этим свойством, называют *примитивно расходящимися* [194]. Их можно характеризовать как такие, которые приводят к сходящемуся матричному элементу, если разорвать любую из внутренних линий диаграммы и заменить ее двумя внешними. Поскольку, по предположению, интеграл сходится, когда одна из переменных интегрирования фиксирована, то интеграл будет расходиться, только если степень числителя $4(F_i + B_i - C + 1)$ не меньше степени знаменателя $2B_i + F_i$, т. е. если $4(F_i + B_i - C + 1) \geq 2B_i + F_i$, или, иначе, если $D \geq 0$. Отметим, что поскольку в теории поля со связью без производных размерность D не зависит от C , то степень расходимости примитивно расходящейся диаграммы там не зависит от числа вершин у диаграммы. Примитивно расходящиеся диаграммы дают базисные радиационные поправки, с помощью которых все другие радиационные поправки можно получить, делая соответствующие вставки.

Теперь мы перечислим эти базисные расходящиеся диаграммы. Уместно напомнить, что фермионная линия никогда не кончается, а поэтому число F_e всегда должно быть четным.

Случай $F_e = 0, V_e = 0$

Этим значениям соответствует диаграмма фиг. 90, приводящая к вакуумному собственнo-энергетическому эффекту. Матричный элемент, соответствующий этой диаграмме, квадратично расходится. Однако, как

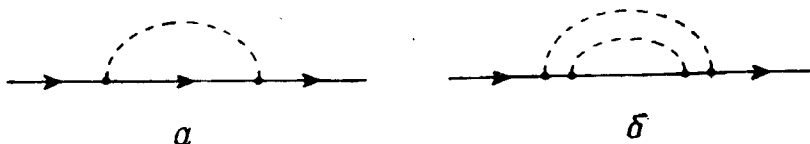


Ф и г. 90.

мы уже указывали, такие вакуумно-вакуумные диаграммы не должны рассматриваться, и при дальнейшем рассмотрении они будут опускаться.

Случай $F_e = 2, V_e = 0$

Единственная примитивно расходящаяся фермионная собственнo-энергетическая диаграмма показана на фиг. 91, а. Разумеется, существуют и другие (непримитивно расходящиеся) собственнo-энергетические диаграммы с более чем одним виртуальным бозоном, например диаграмма

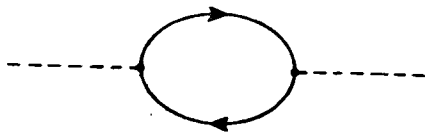


Ф и г. 91.

фиг. 91, б. По формуле (16.5) определяем, что диаграмме фиг. 91, а соответствует размерность $D = 1$, и, следовательно, возможна линейная расходимость. В действительности, как мы уже видели в § 1 гл. 15, расходимость только логарифмическая, соответствующая $D = 0$. Как правило, если размерность D нечетна, то на деле реализуется расходимость ближайшей более низкой четной степени.

Случай $F_e = 0, V_e = 2$

Этим значениям соответствует бозонная собственная энергия (фиг. 92), которая обсуждалась в § 5 и 8 гл. 15. По формуле (16.5) находим, что $D = 2$. И в самом деле, в мезонной теории осуществляется эта квадратич-

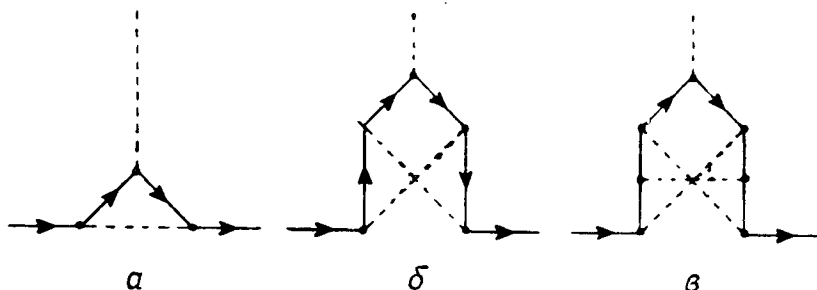


Ф и г. 92.

ная расходимость. Однако в электродинамике, как мы уже видели, благодаря калибровочной инвариантности расходимость всего лишь логарифмическая.

Случай $F_e = 2$, $B_e = 1$

Вершинная диаграмма, изображенная на фиг. 93, *а*, является простейшим примером диаграмм этого типа. В данном случае $D = 0$ и, в принципе, возможна логарифмическая расходимость. Вместе с тем в гл. 15 было показано, что в случае электромагнитного поля и в случае нейтрального псевдоскалярного мезонного поля эти расходимости компенсируются расходимостями, соответствующими двум собственно-энергетическим

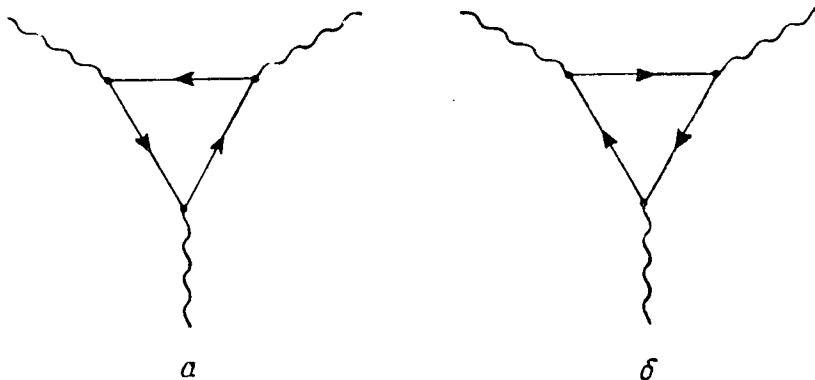


Ф и г. 93.

диаграммам. В других случаях эта диаграмма может приводить к реальной логарифмической расходимости. Более сложные типы примитивно расходящихся вершинных диаграмм показаны на фиг. 93, *б*, *в*. Они будут обсуждаться в § 2.

Случай $F_e = 0$, $B_e = 3$

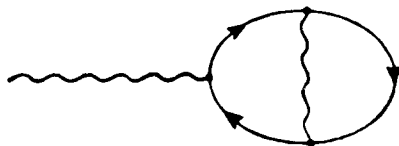
В этом случае $D = 1$, так что возможна линейная расходимость. Типичная диаграмма изображена на фиг. 94, *а*. По очевидной причине ее часто называют треугольной диаграммой. Возможны многочисленные



Ф и г. 94.

варианты этой диаграммы в зависимости от конкретной природы фермионного треугольника и бозонных линий, присоединяющихся в вершинах. Сперва обсудим те случаи, когда фермионное поле взаимодействует только с одним бозонным полем, и в первую очередь с электромагнитным, т. е. рассмотрим две диаграммы фиг. 94. При вычислении оказывается, что интеграл не только не расходится, но равен нулю. Это в более общей фор-

ме повторяет ситуацию, которая уже встречалась в § 3 гл. 14 для внешнего поля¹⁾. Обращение матричного элемента в нуль можно понять на основе инвариантности квантовой электродинамики относительно операции зарядового сопряжения. Качественно этот факт обосновывается следующим образом. Фермионная линия представляет позитроны и электроны. Предположим, что матричный элемент с одним каким-то выбором знака заряда соответствует фиг. 94, а. На второй диаграмме (фиг. 94, б) направление обхода электронного контура обращено. Для получения полного вклада в S -матрицу вклады, соответствующие фиг. 94, а и б, нужно сложить. Так, если соответствующие матричные элементы обозначить M_a и M_b , то нужно вычислить $M_a + M_b$. Однако обращение



Ф и г. 95.

направления обхода заряженного фермионного контура означает просто изменение знака заряда. Поэтому матричный элемент M_b отличается от матричного элемента M_a только множителем $(-1)^3 = -1$. Отсюда $M_a + M_b = 0$. Более общо: в электродинамике любой замкнутый электронный полигон (замкнутый контур), имеющий нечетное число вершин, дает нулевой вклад. Эта теорема впервые была сформулирована и доказана Фарри [291]. Аналогичные соображения показывают, что равно нулю и матричный элемент, соответствующий диаграмме, приведенной на фиг. 95 ($F_e = 0, B_e = 1$). Если бы не было теоремы Фарри (а также сохранения момента количества движения), то эта диаграмма приводила бы к кубично расходящемуся интегралу, поскольку $D = 3$.

Пусть со спиновым полем по-прежнему взаимодействует только одно бозонное поле, но пусть теперь оно будет псевдоскалярным мезонным полем. Диаграммы фиг. 94 снова дают нулевой вклад, что обусловлено природой оператора взаимодействия γ_5 [689, 690]. Это можно показать следующим образом. Пусть импульсы трех виртуальных фермионов равны p_1, p_2 и p_3 . Тогда матричный элемент пропорционален выражению

$$\gamma_5 \frac{1}{\gamma \cdot p_1 - M} \gamma_5 \frac{1}{\gamma \cdot p_2 - M} \gamma_5 \frac{1}{\gamma \cdot p_3 - M} . \quad (16.6)$$

После рационализации знаменателя и с учетом того, что матрица γ_5 антикоммутирует со всеми матрицами γ_μ , входящими в $\gamma \cdot p$, преобразуем числитель выражения (16.6) к виду

$$-\gamma_5 (\gamma \cdot p_1 + M) (-\gamma \cdot p_2 + M) (\gamma \cdot p_3 + M) . \quad (16.7)$$

Далее, для получения элемента S -матрицы мы должны вычислить след выражения (16.6), так как импульсы и спиновые переменные виртуальных фермионов принимают все возможные значения. С этой целью напомним, что

$$\text{Sp} (\gamma_\mu) = \text{Sp} \gamma_\mu \gamma_5 = \text{Sp} \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5 = \text{Sp} \gamma_5 = 0 , \quad (16.8)$$

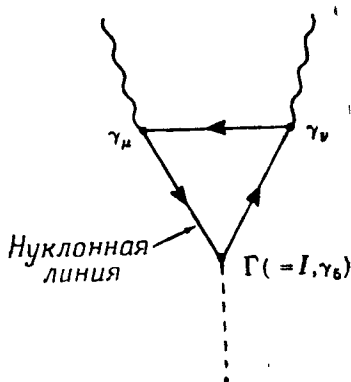
¹⁾ Однако сейчас вклады отдельных диаграмм не равны нулю. В случае внешнего поля они обращались в нуль благодаря интегрированию по внешним полям, действующим в трех вершинах.

поскольку $\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu = -\sum_{\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\rho \gamma^\sigma$. Аналогично,

$$\text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) = -\text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5) = -\text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) = 0. \quad (16.9)$$

Таким образом, в действительности след матрицы (16.7) равен нулю, и треугольная диаграмма в псевдоскалярной теории вклада не дает¹⁾. Этот результат имеет следующее непосредственное обобщение: тяжелый псевдоскалярный мезон не может распадаться на два (или вообще на четное число) более легких псевдоскалярных мезонов.

Далее мы рассмотрим случай, когда бозонное поле есть скалярное мезонное поле. В этом случае в каждой из трех вершин стоит множитель



Ф и г. 96.

$\Gamma = 1$, а для числителя теперь вместо (16.7) получается выражение

$$(\gamma \cdot p_1 + M)(\gamma \cdot p_2 + M)(\gamma \cdot p_3 + M). \quad (16.10)$$

При вычислении следа выражения (16.10) члены, содержащие одну или три матрицы γ , обращаются в нуль, но члены без матриц γ или с двумя такими матрицами отличны от нуля. Поэтому в данном случае матричный элемент не будет равен нулю. Поскольку размерность D нечетная, то мы найдем, что в действительности расходимость будет логарифмической, т. е. будет соответствовать значению $D = 0$, а не максимальному значению $D = 1$. Добавление в лагранжиан контрчлена $a\varphi^3$ (с бесконечным коэффициентом a) позволяет скомпенсировать эту расходимость.

Пусть теперь имеются два различных бозонных поля. Пусть, например, в двух вершинах происходит взаимодействие с фотонами и в одной с мезоном, как показано на фиг. 96. Эта диаграмма описывает в наиниžшем порядке распад нейтрального мезона на два фотона (см. работы Янга [869], Штейнбергера [739]). В этом случае константа связи e входит только в квадрате, т. е. четное число раз, и поэтому теорема зарядового сопряжения Фарри не вынуждает матричный элемент обратиться в нуль. Кроме того, неприменимы более аргументы об обращении следа в нуль

¹⁾ В псевдоскалярной теории эту теорему для замкнутого контура с любым нечетным числом вершин можно доказать, если воспользоваться инвариантностью S -матрицы относительно пространственных отражений. Общие правила отбора, которые являются следствиями теорем; аналогичных теореме Фарри, для процессов с участием мезонов и нуклонов см. у Фукуды, Хайакавы и Миямото [287, 288], Пайса и Йоста [612], а также у Вольфенштейна и Равенхолла [866].

ни при $\Gamma = \gamma_5$, ни при $\Gamma = 1$. В самом деле, матричный элемент теперь пропорционален выражению

$$\Gamma (\gamma \cdot p_1 + M) \gamma_\nu (\gamma \cdot p_2 + M) \gamma_\mu (\gamma \cdot p_3 + M). \quad (16.11)$$

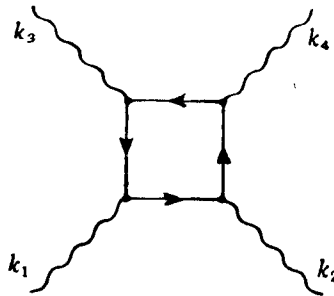
Если $\Gamma = 1$, то будут отличны от нуля члены с четным числом матриц γ . Пусть $\Gamma = \gamma_5$. Остальных множителей, содержащих матрицы γ , имеется больше четырех, и, следовательно, можно составить второй множитель γ_5 , что дает $\gamma_5^2 = -1$. Поэтому и в псевдоскалярном случае также получается ненулевой результат.

Если начальный мезон на фиг. 96 скалярный, то разумное использование условия независимости от калибровки (см. работы Фукуды, Хайакавы и Миямото [287, 288] и Швингера [714]) показывает, что хотя $D = 1$, но фактически вклад вносит только член, имеющий размерность $D = -1$, и поэтому результат оказывается сходящимся. В случае псевдоскалярного мезона результат, соответствующий фиг. 96, также калибровочно-инвариантный и сходящийся. Распад нейтрального псевдоскалярного π -мезона на два γ -кванта наблюдался экспериментально, и было установлено, что время жизни π^0 -мезона $< 10^{-15}$ сек.

Наконец, упомянем случай, когда оба бозонных поля мезонные. В этом случае для вероятности распада скалярного мезона на два псевдоскалярных получается ненулевой результат.

Случай $B_e = 4, F_e = 0$

Для данного случая по формуле (16.5) находим, что $D = 0$. Сперва рассмотрим рассеяние света на свете. Диаграмма Фейнмана для этого процесса приведена на фиг. 97. В результате этого процесса два начальных



Ф и г. 97.

фотона с импульсами k_1 и k_2 рассеиваются друг на друге, превращаясь в два конечных фотона с импульсами k_3 и k_4 . В действительности логарифмической расходимости нет. Вклад вносит только член размерности $D = -4$, т. е. матричный элемент, соответствующий диаграмме, очень хорошо сходится (см. работы Фейнмана [252], Карплуса и Неймана [423], а также работу Уорда [815]). Этот факт снова обязан калибровочной инвариантности и может быть понят следующим образом. Элемент S -матрицы для рассеяния $(k_3, k_4 | S | k_1, k_2)$ можно записать в виде

$$(k_3, k_4 | S | k_1, k_2) = (k_3, k_4 | -i \int \mathcal{L}_{\Gamma \text{эфф}} | k_1, k_2), \quad (16.12)$$

где эффективный лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{\Gamma \text{эфф}}$ должен быть релятивистски и калибровочно-инвариантной функцией произведения четырех

операторов A_μ , а значит, он должен выражаться через величины $(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2$ и $(\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma})^2$, где $\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathcal{H}^2 - \mathcal{E}^2$ и $\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} = \mathcal{H} \cdot \mathcal{E}$. Поскольку оператор напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ имеет размерность kA , то калибровочно-инвариантный матричный элемент, соответствующий диаграмме фиг. 97, должен быть пропорционален произведению импульсов k_1, k_2, k_3 и k_4 . Это требование приводит к понижению старшей степени импульса электрона в подинтегральном выражении, соответствующем левой части формулы (16.12), на четыре единицы, и вклад вносит только член с размерностью $D = -4$.

В спинорной электродинамике эффективный лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$ в наинизшем порядке по α^2 дается выражением

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \frac{2\alpha^2}{45m^4} [(\mathcal{H}^2 - \mathcal{E}^2)^2 + 7(\mathcal{H} \cdot \mathcal{E})^2]. \quad (16.13)$$

Тот факт, что рождение виртуальных пар в вакууме, согласно теории, приводит к взаимодействию фотонов, был обнаружен еще в 1934 г. Халперном [356]. Эйлер и Коккель [223], Эйлер [224], а также Гейзенберг и Эйлер [369] рассматривали эту задачу в 1936 г., но вследствие больших вычислительных трудностей расчета процесса четвертого порядка в старой теории они смогли выполнить вычисления только в пределе малой энергии фотонов. Эффективное сечение рассеяния двух фотонов с равными и очень малыми энергиями ($\omega \ll m$) было найдено Эйлером [224] и оказалось растущим как шестая степень энергии. Однако последующие вычисления Ахизера [883] показали, что в ультрарелятивистском пределе сечение падает, как $\frac{\alpha^2}{\pi^2} r_0^2 \left(\frac{m}{\omega}\right)^2 \left(\ln \frac{\omega}{m}\right)^4$. Но только с помощью аппарата современной квантовой электродинамики Карплусу и Нейману [423, 424] удалось связать эти области энергий. При обсуждении этого процесса в 1936 г. Гейзенберг предполагал, что рассеяние света на свете, вероятно, можно будет наблюдать в звездах. На самом деле вычисления Карплуса и Неймана показали, что даже при наиболее благоприятной энергии фотонов, равной $2mc^2$ (около 1 Мэв), т. е. как раз достаточной для рождения реальной пары, величина сечения примерно равна лишь $3 \cdot 10^{-30} \text{ см}^2$). Наблюдать этот эффект очень трудно, так как даже в межзвездном пространстве рассеяние излучения на межзвездном водороде (и пыли) много больше.

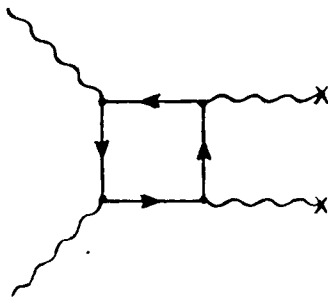
Однако объектом экспериментальной проверки, по-видимому, сможет служить другой электромагнитный процесс с $B_e = 4$, $F_e = 0$ — рассеяние света на электростатическом поле во втором порядке²⁾. Если на диаграмме Фейнмана обозначить статическое взаимодействие крестами, то процесс представится диаграммой фиг. 98. Процесс мог бы наблюдаться, в частности, в сильном кулоновом поле тяжелого ядра с зарядом Z . Взаимодействие в вершинах, помеченных крестами, характеризуется константой

¹⁾ Порядок величины очевиден, поскольку в каждой из четырех вершин происходит взаимодействие с константой связи e , вносящее в матричный элемент множитель $\frac{e}{\sqrt{4\pi\hbar c}}$. Это означает, что по порядку величины эффективное сечение должно быть равно $\left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)^4 \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \sim 4 \cdot 10^{-30} \text{ см}^2$.

²⁾ Матричный элемент для рассеяния на статическом потенциале в первом порядке равен нулю, так как он соответствует треугольной диаграмме, к которой применима теорема Фарри. Отметим, что теорема Фарри была выведена именно с целью изучения этого процесса.

Ze^2 вместо e . Эффективное сечение отличается от сечения рассеяния света на свете дополнительным множителем $\left(\frac{Z^2e^2}{4\pi\hbar c}\right)^2$. Так, при Z порядка 82 сечение примерно равно $\frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-30} = 1,5 \cdot 10^{-26}$ см², или 15 мбарн.

Мысль о рассеянии этого типа принадлежит Дельбрюку [159], и поэтому такое рассеяние часто называют «дельбрюковским рассеянием». В некоторых предельных случаях оно было вычислено Ахиезером и Померанчуком [2] и Кеммером и Людвигом [438, 439] еще до создания современной квантовой электродинамики. Дельбрюковское рассеяние в простом случае рассеяния фотона вперед, когда импульс фотона практически



Ф и г. 98.

не изменяется, было рассчитано Рорлихом и Глюкштерном [668], которые нашли, что дифференциальное сечение для дельбрюковского рассеяния вперед непрерывно растет с ростом энергии γ -кванта. Это один из немногих процессов, которые обнаруживают такой безостановочный рост.

С меньшей строгостью, чем у Рорлиха и Глюкштерна, выполнены расчеты Бете и Рорлиха [53] по получению углового распределения дельбрюковского рассеяния на малые углы, порядка $\theta \approx \frac{mc^2}{\hbar\omega}$ и менее. К сожалению, до сих пор нет расчетов дельбрюковского рассеяния при углах и энергиях, представляющих экспериментальный интерес, а именно при больших углах и энергиях в несколько $Mэв$ (см., однако, статью Клиссона [138], работавшего в этом направлении). Следует отметить, что дельбрюковское рассеяние исследовали также с помощью дисперсионных соотношений и оптической теоремы, которые связывают амплитуду дельбрюковского рассеяния с сопровождающим абсорбционным процессом рождения пар. Этот метод был применен Рорлихом и Глюкштерном [668] и Толлом [780]. Результаты такого подхода согласуются с результатами, полученными по теории возмущений. В настоящее время имеются экспериментальные указания, которые с большей вероятностью говорят в пользу существования дельбрюковского рассеяния (см. работы Бернштейна и Манна [47] и Моффата и Стрингфелло [558]). Экспериментальная проверка существования такого процесса, порождаемого замкнутым контуром, все еще остается желательной, но теперь она менее актуальна, чем раньше, поскольку измерения лэмбовского сдвига уже продемонстрировали реальность эффекта поляризации вакуума, вклад которого в сдвиг равен -27 Мгц.

До сих пор при обсуждении диаграммы с $B_e = 4$, $F_e = 0$ бозонное поле считалось электромагнитным полем. Можно рассмотреть также рассеяние мезонов на мезонах за счет диаграммы этого типа [689, 690]. В этом случае нет калибровочной инвариантности, а поэтому понижение порядка

расходимости не происходит: и для скалярных, и для псевдоскалярных мезонов результат оказывается расходящимся. Это первая (и единственная) расходимость в псевдоскалярной теории, которая не устраняется перенормировкой массы или константы связи. В духе нашей программы перенормировок расходимость в мезон-мезонном рассеянии также должна быть устранена при помощи подходящей перенормировки. С этой целью в первоначальный лагранжиан необходимо ввести член $\lambda\phi^4$ с подходящим образом выбранным (бесконечным) коэффициентом λ . (В зарядово-симметричной псевдоскалярной теории контрчлен имел бы вид $\frac{1}{4}\lambda : (\phi \cdot \phi)^2 : = = \frac{1}{4} \lambda : \phi_i \phi_i \phi_j \phi_j : .)$

Член с ϕ^4 не совсем необычен. При описании взаимодействия скалярных или псевдоскалярных мезонов с электромагнитным полем мы уже встречали члены типа $:\phi^* \phi A_\mu A^\mu:$ в лагранжиане взаимодействия, т. е. члены четвертого порядка по бозонным операторам. Конечно, в известной мере ново то, что коэффициент λ должен быть бесконечным, чтобы скомпенсировать бесконечность, появляющуюся в амплитуде рассеяния мезона на мезоне в четвертом порядке. Не известно, должна ли постоянная λ наряду с бесконечной частью иметь также конечную часть, т. е. сводится ли роль взаимодействия $\lambda\phi^4$ только к компенсации расходимости и диаграммы фиг. 97.

Различные модели рассеяния π -мезонов на нуклонах (например, модель Чу — Лоу) очень хорошо согласуются с экспериментальными данными без введения π - π -связи, и это расценивается как свидетельство, что специфическая мезон-мезонная связь $\lambda (\phi \cdot \phi)^2$ является слабой. Однако вполне возможно, что даже сильное мезон-мезонное взаимодействие может слабо проявляться в рассеянии мезонов на нуклонах при малых энергиях. Вопрос о том, должен ли при описании мезон-нуклонных явлений входить в лагранжиан конечный член вида $\delta\lambda : (\phi \cdot \phi)^2 :$, еще ждет дальнейших экспериментальных данных и усовершенствованных вычислительных методов.

Диаграмма мезон-мезонного рассеяния будет также входить как составная часть более сложных диаграмм. Как показал Салам [689, 690], это не ведет к внутренним трудностям теории.

На этом мы заканчиваем характеристику диаграмм, которые могут приводить к расходимостям при описании взаимодействия фермионов и бозонов с помощью связей без производных. Большинство этих расходимостей можно устранить с помощью перенормировки масс и констант связи:

1. В электродинамике перенормировкой масс и константы связи устраняются все расходимости.

2. В псевдоскалярной мезодинамике перенормировкой масс и константы связи устраняются все расходимости, за исключением расходимости четырехугольной диаграммы, которая вынуждает ввести в лагранжиан член $\lambda\phi^4$.

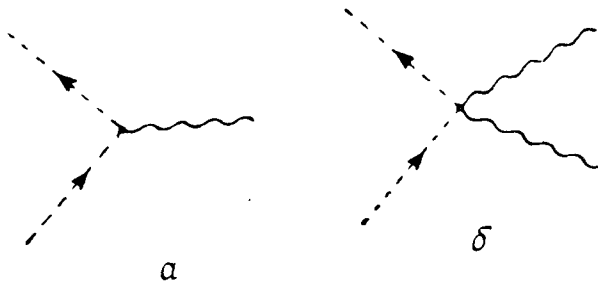
3. В скалярной мезодинамике и треугольная, и четырехугольная диаграммы приводят к расходимостям, которые не могут быть устранены перенормировкой масс и константы связи. Это вынуждает ввести в лагранжиан контрчлены $a\phi^3$ и $b\phi^4$. (Подчеркнем, что константа a не безразмерна.)

Из этой сводки следует, что с точки зрения теории поля псевдоскалярная мезодинамика несколько проще скалярной. Однако между обеими имеется глубокое внутреннее различие, поскольку для придания смысла скалярной мезодинамике нужно ввести новую размерную константу.

Теперь перейдем к обсуждению примитивно расходящихся диаграмм в случае взаимодействия двух бозонных полей и, в частности, в слу-

чае взаимодействия заряженных бозонов со спином 0 (т. е. заряженных мезонов) с электромагнитным полем (с фотонами), т. е. в скалярной электродинамике. Пусть через C обозначается число вершин, через P — число бозонных линий, а через Q — число фотонных линий, причем, как и прежде, числа, отмеченные индексами i и e , будут относиться соответственно к внутренним и внешним линиям. Выражение для размерности D будет получено аналогично тому, как это было сделано выше.

На первом этапе вывода ограничим взаимодействие одним только членом: $(\varphi^* \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \varphi^* \cdot \varphi) : A^\mu(x)$. Это означает, что допускаются лишь вершины, изображенные на фиг. 99, а, а вершины, изображенные



Ф и г. 99.

на фиг. 99, б, запрещены. При таком ограничении подсчет степеней импульсов в подынтегральном выражении проводится следующим образом:

1. Каждой внутренней линии соответствует множитель d^4p в числителе. Это дает вклад в D , равный $+4(P_i + Q_i)$.

2. Каждой вершине соответствует $\delta^{(4)}$ -функция, что эквивалентно четвертой степени в знаменателе. Одна из $\delta^{(4)}$ -функций выражает закон сохранения полного импульса. Поэтому вклад вершин в D равен $-4(C - 1)$. Кроме того, в каждой вершине стоит оператор взаимодействия. Поскольку мы пока ограничились лишь взаимодействием $(p + p')^\mu A_\mu$, то дополнительный вклад всех вершин в D будет равен $+C$.

3. Каждой внутренней мезонной линии соответствует вторая степень импульса в знаменателе за счет функции распространения $\frac{1}{p^2 - \mu^2}$. Это дает вклад в D , равный $-2P_i$.

4. Каждой внутренней фотонной линии также соответствует вторая степень в знаменателе за счет функции распространения фотона $1/p^2$. Это дает вклад в D , равный $-2Q_i$.

Отсюда для D получается выражение

$$D = 2P_i + 2Q_i - 3C + 4. \quad (16.14)$$

Выражение (16.14) для D можно выразить через число внешних линий, поскольку

$$2Q_i + Q_e = C \quad (16.15a)$$

и

$$2P_i + P_e = 2C. \quad (16.15b)$$

Подставляя Q_i и P_i из формул (16.15a) и (16.15b) в (16.14), находим

$$D = 4 - P_e - Q_e. \quad (16.16)$$

Как и в случае взаимодействия фермионов с бозонами, коэффициент при C обратился в нуль, и, следовательно, степень расходимости не зависит от числа вершин.

Теперь перечислим все примитивно расходящиеся диаграммы, встречающиеся в скалярной электродинамике. В этой связи нужно напомнить, что мезонная линия никогда не кончается (благодаря сохранению заряда), и поэтому число P_e всегда четное.

Случай $P_e = 2, Q_e = 0$

На фиг. 100 показана простейшая диаграмма этого рода. По формуле (16.16) в этом случае $D = 2$. Квадратичная расходимость собственной энергии бозона со спином 0 на самом деле реализуется. Напомним, что

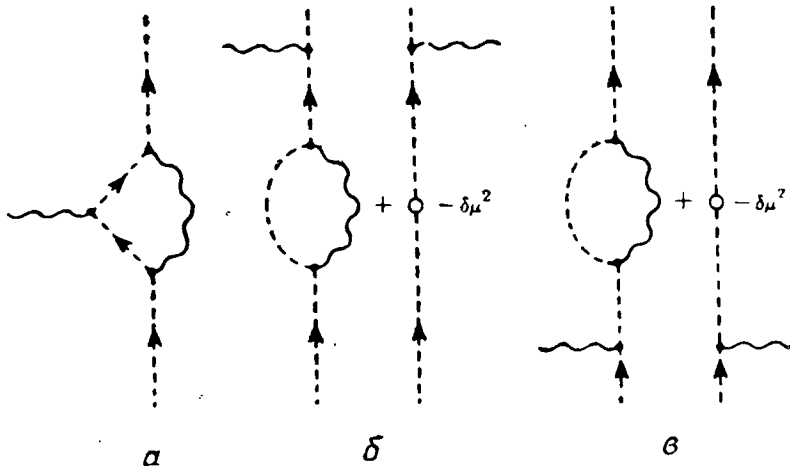


Ф и г. 100.

собственная энергия фермиона за счет взаимодействия с фотонами расходится логарифмически, тогда как в классической теории собственная энергия электрона расходится линейно. Это прямое указание на то, что никаким классическим оценкам собственной энергии фермиона или бозона нельзя доверять.

Случай $P_e = 2, Q_e = 1$

Однофотонная вершинная диаграмма наимизшего порядка показана на фиг. 101, а. Она приводит к лэмбовскому сдвигу для заряженного мезона.



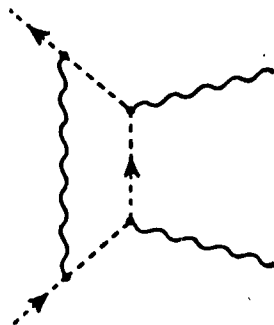
Ф и г. 101.

Как и в случае спина $\frac{1}{2}$, существуют три диаграммы, показанные на фиг. 101, которые порознь расходятся линейно ($D = 1$). Однако сумма всех трех дает конечный результат.

Случай $P_e = 2, Q_e = 2$

Как видно из фиг. 102, данный случай соответствует радиационной поправке к комптон-эффекту, т. е. к рассеянию фотона на бозоне со спи-

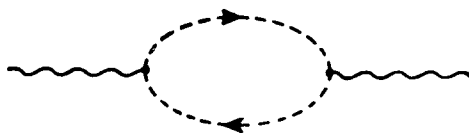
ном 0. По формуле (16.16) получаем $D = 0$. Однако в действительности благодаря калибровочной инвариантности отличным от нуля оказывается только коэффициент при члене следующего порядка с $D = -2$. Поэтому результат получается сходящимся.



Ф и г. 102.

Случай $P_e = 0, Q_e = 2$

Этот случай соответствует собственной энергии фотона, т. е. еще одному возможному вкладу в поляризацию вакуума — вкладу за счет рождения виртуальных пар заряженных мезонов, как это показано на фиг. 103. Здесь $D = 2$. В действительности квадратичной расходимости нет благодаря калибровочной инвариантности. В разложении тензора поляризации остается только следующий член, соответствующий $D = 0$, т. е. логарифмически расходящийся член и дальнейшие конечные члены. Конечные члены имеют физический смысл. Численные коэффициенты в них отличны от коэффициентов в выражении для поляризации вакуума



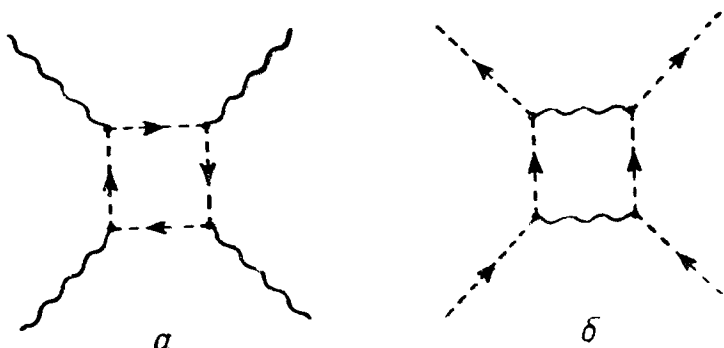
Ф и г. 103.

путем образования виртуальных электронно-позитронных пар (см., например, статью Швингера [714]), но вклад конечных членов по-прежнему обратно пропорционален квадрату массы виртуальной частицы. Мы уже отмечали в § 5 гл. 15, что вклад в лэмбовский сдвиг от электронно-позитронной поляризации вакуума равен -27 Мгц . Вклад в лэмбовский сдвиг от π -мезонной поляризации вакуума в $(275)^2$ раз меньше, т. е. составляет только $0,3 \text{ кгц}$, и поэтому ненаблюдаем. Поскольку в настоящее время теоретическое и экспериментальное значения для лэмбовского сдвига согласуются в пределах $0,25 \text{ Мгц}$, то можно заключить, что нет способных рождаться парами заряженных частиц, масса которых превышала бы массу электрона менее чем в десять раз.

Случай $P_e = 0, Q_e = 4$

Это случай рассеяния света на свете, когда внутренние линии четырехугольной диаграммы суть линии бозона со спином 0 (фиг. 104, а). Хотя $D = 0$, однако этой диаграмме соответствует сходящийся матричный эле-

мент, поскольку благодаря калибровочной инвариантности отличным от нуля оказывается только член с $D = -4$ и дальнейшие конечные члены.



Ф и г. 104.

Случай $P_e = 4, Q_e = 0$

Эти значения соответствуют рассеянию частиц Бозе друг на друге за счет электромагнитного взаимодействия между ними, как это показано на фиг. 104, б. В данном случае $D = 0$, и в самом деле расходимость оказывается логарифмической, поскольку калибровочная инвариантность ее не уменьшает. Как и в случае мезон-мезонного рассеяния путем образования виртуальных нуклонных пар данную расходимость можно компенсировать, добавляя к первоначальному лагранжиану член $\lambda_{em}(\varphi^* \varphi)^2$ (константа λ_{em} снова безразмерная!).

Теперь обратимся к анализу диаграмм, на которых есть вершины, соответствующие члену $:\varphi^* \varphi A_\mu A^\mu:$. Будем различать вершины, в которых взаимодействует *один* фотон, и вершины, в которых взаимодействуют *два* фотона. Пусть C_1 — число вершин с взаимодействием $:\varphi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi A^\mu:$, а C_2 — число вершин с взаимодействием $:\varphi^* \varphi A^\mu A_\mu:$. Тогда с помощью обычного подсчета находим

$$D = -4(C_1 + C_2 - 1) + 4(P_i + Q_i) + C_1 - 2P_i - 2Q_i. \quad (16.17)$$

Так как число концов фотоных линий равно $2C_2 + C_1$, то

$$2Q_i + Q_e = 2C_2 + C_1, \quad (16.18a)$$

а так как в каждой вершине сходятся две бозонные линии, то

$$2P_i + P_e = 2(C_1 + C_2). \quad (16.18б)$$

Находя P_i и Q_i из соотношений (16.18a) и (16.18б) и подставляя эти значения в формулу (16.17), снова получаем

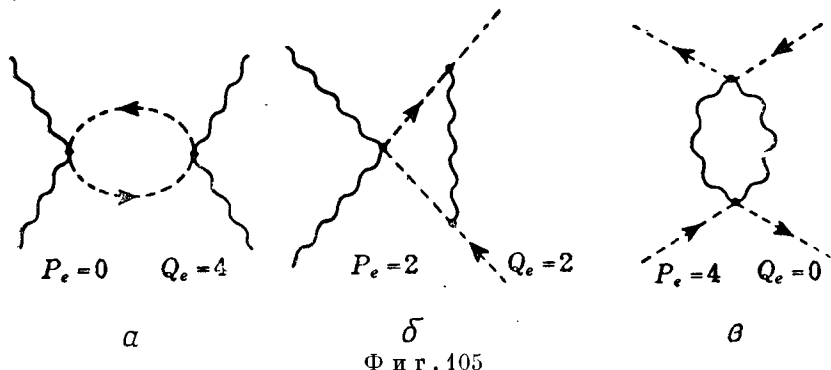
$$D = 4 - P_e - Q_e. \quad (16.19)$$

Выражение для размерности D совпало с выражением (16.16), так что двухфотонное взаимодействие не вызывает дополнительных трудностей. Однако оно заставляет включить в определение контрчлена с λ_{em} члены, компенсирующие расходимость диаграммы фиг. 105, в. (Дальнейшие подробности см. у Рорлиха [667].) Благодаря калибровочной инвариантности вклад диаграмм 105, а и б снова оказывается конечным. (Напомним также, что поскольку все члены взаимодействия записаны в виде нормаль-

ного произведения, то фотонная линия не может начинаться и кончатся в одной и той же вершине, и, следовательно, эти расходящиеся «головастикообразные» диаграммы не вносят вклада ни в мезонную собственную энергию, ни в другие процессы.)¹⁾

В заключение этого параграфа мы вкратце проанализируем типы примитивно расходящихся диаграмм, которые встречаются в теории поля при связях с производными и вообще тогда, когда константа связи размерна. Сперва рассмотрим $PS-PV$ - и $S-V$ -теории. Лагранжиан взаимодействия в этих случаях записывается в виде

$$\mathcal{L}_I = \frac{F}{\mu} : \bar{\psi}(x) \Gamma \gamma_\mu \psi(x) : \partial^\mu \phi(x) \quad (\Gamma = \gamma^5 \text{ или } I). \text{ Благодаря тому, что в него}$$



входит градиент мезонного оператора, в каждой вершине будет стоять оператор $\Gamma \gamma \cdot k$, где k_μ — импульс мезона, уничтожающегося или рождающегося в вершине. При вычислении размерности D для примитивно расходящихся диаграмм каждая вершина будет вносить дополнительную степень импульса, и поэтому в данном случае мы получим

$$D = 4 - \frac{3}{2} F_e - B_e + C. \quad (16.20)$$

В противоположность всем обсуждавшимся до сих пор теориям в данном случае значение D зависит от числа вершин C , и поэтому имеется нечислимое множество примитивно расходящихся диаграмм.

Таким образом, если бы мы применили к этим взаимодействиям принцип перенормировки, то чтобы сделать теорию конечной, потребовалось бы бесконечное число констант перенормировки. Поскольку теория перенормировок в том виде, как она формулируется в настоящее время, требует по одному эксперименту для определения каждой константы, то, чтобы придать теории смысл, понадобилось бы выполнить бесконечное число таких экспериментов. Поэтому программа перенормировок, формулируемая в настоящее время в рамках ряда теории возмущений, является адекватным подходом к теориям со связью с производной. Такие теории называют неперенормируемыми.

Хотя мы и не рассматриваем поля, которые описывали бы частицы конечной массы со спином выше $\frac{1}{2}$, однако отметим, что такие теории

¹⁾ Это утверждение неправильно. Запись двухфотонного члена лагранжиана взаимодействия в виде N -произведения нарушает калибровочную инвариантность. Более того, только учет «головастикообразных» диаграмм позволяет обеспечить калибровочную инвариантность. Поэтому правильная запись лагранжиана взаимодействия не исключает этих диаграмм (см. наше примечание на стр. 460).— *Прим. ред.*

обычно неперенормируемые. Исключение составляет теория нейтрального бозонного поля со спином 1, взаимодействующего с фермионным полем со спином $\frac{1}{2}$. Эта теория аналогична квантовой электродинамике, за исключением того, что в ней нет калибровочной инвариантности¹⁾. Теория нейтральных бозонов со спином выше единицы, взаимодействующих с фермионами со спином $\frac{1}{2}$, неперенормируема. Квантовые теории электромагнитных взаимодействий заряженных бозонов, обладающих спином 1 или выше, также неперенормируемы. То же самое относится и к взаимодействию таких заряженных бозонов с фермионами со спином $\frac{1}{2}$ ²⁾.

Точно так же неперенормируемы слабые взаимодействия Ферми, т. е. взаимодействия вида $(\bar{p}Oin) (\bar{v}O^ie)$. Рассмотрим, например, взаимодействие $(\bar{p}n) (\bar{v}e)$. Если обозначить через N число нуклонных линий, а через L число лептонных линий какой-либо диаграммы, то

$$D = -4C + 4 + 3N_i + 3L_i. \quad (16.21)$$

А так как

$$2N_i + N_e = 2C \quad (16.22a)$$

и

$$2L_i + L_e = 2C, \quad (16.22b)$$

то выражение для D можно переписать в виде

$$D = 2C + 4 - \frac{3}{2}N_e - \frac{3}{2}L_e; \quad (16.23)$$

следовательно, снова имеется неисчислимо множество примитивно расходящихся диаграмм, и теория неперенормируемая.

Если для придания смысла теории применено инвариантное обрезание или регуляризация (без которых теория является расходящейся), тогда перенормируемость теории означает, что после перенормировки массы и заряда (и, возможно, конечного числа других параметров) предсказания теории (по крайней мере представленные в виде ряда теории возмущений) не зависят от обрезания. Этого нет в так называемых неперенормируемых теориях. В таких теориях даже после перенормировки масс и зарядов остается сильная зависимость от обрезания. Сомнительно, чтобы это могло служить доводом против таких теорий, поскольку широко распространено мнение, что взаимодействия, которыми обычно пренебрегают (например, гравитационное или взаимодействия странных частиц), в принципе могли бы приводить к эффективному обрезанию³⁾.

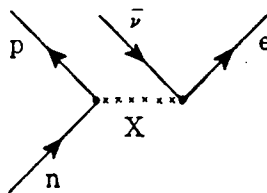
Интуитивно эту идею можно обосновать следующим образом. Один из эффектов взаимодействия между полями состоит в том, что каждая частица окружается облаком квантов *всех* полей— приобретает *структуру*. В современной теории не видно подхода к объяснению многих структурных

¹⁾ Калибровочно-инвариантная формулировка этой теории существует [914].—
Прим. ред.

²⁾ Исключением, по-видимому, является смешанная теория Берда и Бете [38], в которой и псевдоскалярные, и псевдовекторные мезоны связаны с нуклонами при помощи псевдовекторной связи. На том уровне, до которого теория была доведена в их статье, расходимости не появились. Общее исследование пока еще не сделано. Однако взаимодействие заряженных мезонов со спином 1 с электромагнитным полем все равно будет неперенормируемым.

³⁾ Например, теория гравитации в сочетании с квантовой теорией определяет характерную длину $\sqrt{\frac{\gamma\hbar}{c^3}} \approx 10^{-32}$ см, где γ — обычная гравитационная постоянная.

свойств частиц, например их массы, но можно думать, что более строгое описание взаимодействия между «фундаментальными» частицами в рамках теории поля носило бы нелокальный характер или по крайней мере содержало бы новую фундаментальную константу размерности длины. В случае нелокальных взаимодействий теория автоматически содержала бы константу размерности длины, определяющую размер области нелокальности (эта постоянная l была бы, вероятно, порядка 10^{-13} см или еще меньше). Вообще говоря, эта длина l могла бы быть или константой связи нелинейного взаимодействия (см. обзор Гейзенберга [373]), или радиусом



Ф и г. 106.

области нелокальности. Предположим далее, что теория может быть сформулирована с помощью лагранжиана $\mathcal{L}(l)$. В разложении этого лагранжиана $\mathcal{L}(l)$ по степеням l

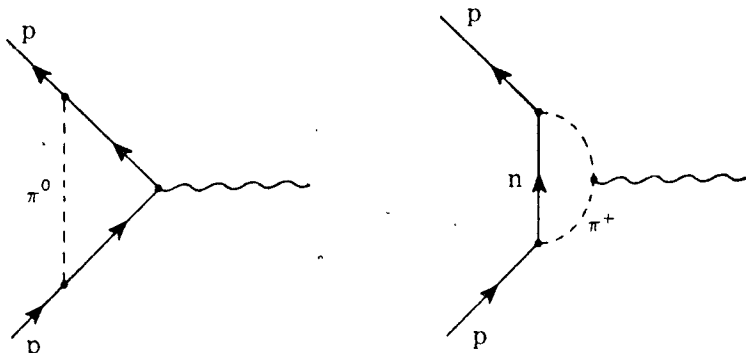
$$\mathcal{L}(l) = \mathcal{L}_0 + l\mathcal{L}_1 + l^2\mathcal{L}_2 + \dots \quad (16.24)$$

каждый следующий член описывает все более и более слабое взаимодействие, поскольку постоянная l мала. Отметим, что, согласно принятой в настоящее время классификации взаимодействий по их силе (сильные, электромагнитные и слабые; см. обсуждение в гл. 10), самые слабые взаимодействия (взаимодействия Ферми) характеризуются константой связи, имеющей размерность квадрата длины.

Эти эвристические соображения делают правдоподобным тот факт, что неперенормируемость слабых взаимодействий, когда они выделены из числа прочих и записаны в виде $l^2\mathcal{L}_2$, не может служить доводом против использования этой формы в области ее применимости. По-видимому, разложение вида (16.24) законно только в некоторой области энергий, а взаимодействия Ферми, которые ответственны за слабые распады, при высоких энергиях (скажем, при энергиях, сравнимых с массой нуклона) не представимы в виде $l^2\mathcal{L}_2 \sim G_{\beta}(\tilde{p}n)(\tilde{\nu}e)$. Не исключено, что взаимодействия Ферми переносятся тяжелым заряженным бозоном X , который связывает барионный ток с лептонным током таким образом, что распад нейтрона совершается в два этапа $n \rightarrow p + X^- \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}$, как это показано на фиг. 106. Если это так, то амплитуда, соответствующая обмену бозоном X , записывалась бы в виде $-g^2(\tilde{p}n)(k^2 - \mu_X^2)^{-1}(\tilde{\nu}e)$, а обычная амплитуда β -распада $G_{\beta}(\tilde{p}n)(\tilde{\nu}e)$ была бы лишь ее предельной формой, верной при малых энергиях. Благодаря малости энергии и передачи импульса в β -распаде $\mu_X^2 \gg k^2$ и, следовательно, в области малых энергий обе амплитуды совпадают, если $G_{\beta} = \frac{g^2}{\mu_X^2}$. На самом деле, для того чтобы в локальном пределе, в пределе малых энергий, получа-

лась $V-A$ -теория, тяжелый бозон должен обладать спином 1 и иметь функцию распространения $(k_X^2 - \mu_X^2)^{-1} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$.

Пример подобной ситуации мы встречаем при использовании неперенормируемого взаимодействия $-e : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : A^\mu + \frac{1}{2} \Delta\mu : \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi : F^{\mu\nu}$ для описания взаимодействия протона (обладающего аномальным магнитным моментом $\Delta\mu = 1,7896$) с электромагнитным полем. Этот феноменологический учет магнитных свойств протона оправдан только в медленно меняющихся электромагнитных полях и при нерелятивистском движении



Ф и г. 107.

частицы. Недопустимо применять такое описание для вычисления радиационных поправок, обусловленных высокочастотными флуктуациями квантованного электромагнитного поля. В действительности в полной теории, которая учитывает и мезон-нуклонные, и электромагнитные взаимодействия, дополнительный магнитный момент возникает за счет мезонных радиационных поправок, показанных, например, на фиг. 107. Таким образом, член $\frac{1}{2} \Delta\mu : \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi : F^{\mu\nu}$ должен рассматриваться не как часть фундаментального взаимодействия между протоном и электромагнитным полем, а только как феноменологическое представление этого взаимодействия при низких энергиях.

Если намеченная выше точка зрения в какой-то степени верна, тогда в факте перенормируемости или неперенормируемости данной теории не обязательно отражается какая-то фундаментальная особенность теории. Зато большую важность приобретает выяснение вопроса, до каких энергий справедливо современное описание электромагнитных явлений с помощью лагранжиана, характеризуемого безразмерной константой связи $\frac{e}{\sqrt{\hbar c}}$. Что означает для лагранжиана $\mathcal{L}(l)$ тот факт, что в квантовой

электродинамике после перенормировки масс и зарядов нет зависимости от обрезания? Что отражает тот факт, что теории поля, в которых кон-

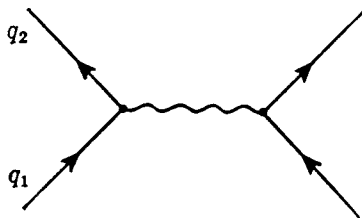
¹⁾ В действительности во всех известных вариантах теории заряженных векторных бозонов функция распространения имеет вид

$$(k_X^2 - \mu_X^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\mu_X^2} \right).$$

Это не препятствует получению $V-A$ -теории, но ведет к неперенормируемости.—
Прим. ред.

станты связи имеют размерность длины, возведенной в некоторую положительную степень, являются *неперенормируемыми*, а теории с безразмерной константой связи — *перенормируемыми*¹⁾ (Взаимодействия с константой связи $G \propto [L]^n$ называются взаимодействиями первого рода, если $n \leq 0$, и второго рода, если $n > 0$; см. книгу Умэдзавы [927].)

Эксперименты по определению распределения заряда нейтрона и протона, по измерению магнитного момента μ -мезона, лэмбовского сдвига и магнитного форм-фактора протона показывают [185], что между предсказаниями квантовой электродинамики и экспериментальными данными



Ф и г. 108.

нет расхождений вплоть до энергий $600 M_{\text{эв}}$, или, что равносильно, на расстояниях, больших $0,33 \cdot 10^{-13}$ см²). Были предложены эксперименты по проверке электродинамики на малых расстояниях (см. работы Дрелла [185] и Фраучи [276]), но для них требуются либо очень большие энергии, либо необычайно высокая точность измерений. Например, матричный элемент для рассеяния электронов на электронах в наинижеом порядке вычисляется по диаграмме фиг. 108. Виртуальной фотонной линии на этой диаграмме соответствует функция распространения $q^{-2} = (q_2 - q_1)^{-2}$, которая в системе центра масс имеет вид $-1/q^2$, т. е. является фурье-образом кулоновского потенциала $1/r$. Если принять измененную на малых расстояниях форму электродинамики, в которой потенциал $1/r$ заменен потенциалом $1/r (1 - e^{-\Lambda r})$, тогда функция распространения фотона $1/q^2$ превра-

¹⁾ Не все взаимодействия с безразмерными константами связи перенормируемы. Так, теория Янга и Миллса [872] для триплета тяжелых векторных бозонов, содержащая только безразмерные константы связи, неперенормируема [948]. — Прим. ред.

²⁾ К выводу, что отклонение от квантовой электродинамики наступает на расстояниях, меньших $0,3 \cdot 10^{-13}$ см, можно прийти, предположив, что разность масс протона и нейтрона ($\sim 2,53 m_e$) имеет электромагнитное происхождение [255]. С этой точки зрения разность масс $M_n - M_p$ есть результат конкуренции между собственной энергией за счет электростатического отталкивания (главный член которого имеет порядок $1/R$) и собственной энергией за счет магнитного момента (порядка $1/R^2$). Взаимодействие через магнитный момент может уменьшить массу M_p по сравнению с массой M_n . Поскольку $M_n > M_p$, то магнитные эффекты существенны. По наблюдаемой разности масс $M_n - M_p \sim 2,53 m_e$ Фейнман и Шпейсман [255] заключили, что средний квадратичный радиус протона равен $0,4 \cdot 10^{-13}$ см, т. е. половине радиуса, следующего из экспериментов по рассеянию электронов на протонах. Эти эксперименты [378] дали для среднего квадратичного радиуса протона значение $0,8 \cdot 10^{-13}$ см, а радиус распределения заряда нейтрона практически оказался равным нулю. При интерпретации этих данных полагают, что квантовая электродинамика все еще применима, а все отклонения от теоретических предсказаний вызваны эффектом структуры нуклона. Расхождение между значением среднего квадратичного радиуса по теории Фейнмана — Шпейсмана и наблюдаемым значением можно объяснить обрезанием в электродинамике примерно на $0,3 \cdot 10^{-13}$ см.

тятся в функцию распространения $\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2 - \hbar^2 \Lambda^2}$. При таком изменении квантовой электродинамики сечение меллеровского рассеяния приобретает дополнительный множитель $1 + \frac{2q^2}{\hbar^2 \Lambda^2}$. Эксперимент с электронами с энергией 8 *Бэв*, рассеивающимися на неподвижной электронной мишени, выполненный с 10%-ной точностью, смог бы зарегистрировать длину обрезания $1/\Lambda \sim 0,5 \cdot 10^{-13}$ см. Поэтому в свое время вопрос, какова граница применимости квантовой электродинамики, будет решен экспериментально.

Хотя мы и привели аргументы, предостерегающие от игнорирования перенормируемых теорий, тем не менее в настоящей книге мы ограничимся только перенормируемыми теориями. Это оправдано следующими обстоятельствами. Во-первых, есть основания считать, что *PS-PS*-теория способна объяснить мезон-нуклонные явления при низких энергиях, а то, что квантовая электродинамика верна во всей области явлений, где она была проверена, является фактом. Во-вторых, структура теорий со связями с производными гораздо сложнее, чем при связях без производных (см., например, работы Арновита и Дезера [16], Кулера [888], Гюттингера [345, 346]); да и вообще о них мало что известно. В частности, нам не известно, как извлекать из них наблюдаемые следствия.

В заключение подчеркнем, что успех программы перенормировок состоял в том, что она обошла проблему расходимостей. Однако она не решила эту проблему. Поэтому перенормировки не являются окончательным разрешением проблемы расходимостей, которая отягощает локальную релятивистскую теорию квантованных полей. Прекрасное согласие перенормированной квантовой электродинамики с экспериментом в широкой области энергий внушает мысль, что перенормированная теория схватывает некоторые существенные черты более основательной «будущей правильной теории». Это служит мощным стимулом для детального изучения перенормируемых теорий. «Правильная теория» должна не только быть свободной от расходимостей, но и объяснять спектр масс элементарных частиц, а также давать значения констант связи, таких, как постоянная тонкой структуры¹⁾ (величин, которые в настоящее время находятся эмпирически). Несомненно, что некоторые черты теории перенормировок войдут в состав или будут представлены в будущей правильной теории. Также весьма вероятно, что в «будущей теории» взаимопроникновение и одновременное сосуществование всех «элементарных» частиц (таких, как электроны, нуклоны и т. д.) будет неотъемлемой частью теории. Существует надежда, что изучение современных форм перенормированной квантовой электродинамики и перенормируемых мезонных теорий позволит выяснить те элементы современных теорий, без которых можно обойтись, и те, которые являются следствиями очень общих принципов,

¹⁾ На ранней стадии развития теории перенормировок была высказана некоторая надежда, что значение постоянной тонкой структуры можно будет определить, потребовав, чтобы расходимости в последовательных порядках теории возмущений взаимно сокращались. Эта идея была предложена Паули. Однако Йост и Латтинджер [401] показали, что такого взаимного сокращения не происходит. Так, расходимость поляризации вакуума имеет во втором и в четвертом порядках один и тот же знак. До некоторой степени сходную идею обеспечения конечности и сходимости собственной энергии выдвинул Рака [658], но позднее она была опровергнута Франком [273] путем прямого вычисления вклада в собственную энергию фермиона в четвертом порядке (см. также работу Гелл-Манна и Лоу [894]).

таких, как релятивистская инвариантность и причинность, и которые, возможно, также будут представлены в «будущей теории». В действительности такой подход уже привел к новой формулировке, в которой фигурируют только конечные перенормированные величины и структура которой проливает некоторый свет на затронутые здесь вопросы [490, 493, 852]. Мы займемся этими формулировками в гл. 18.

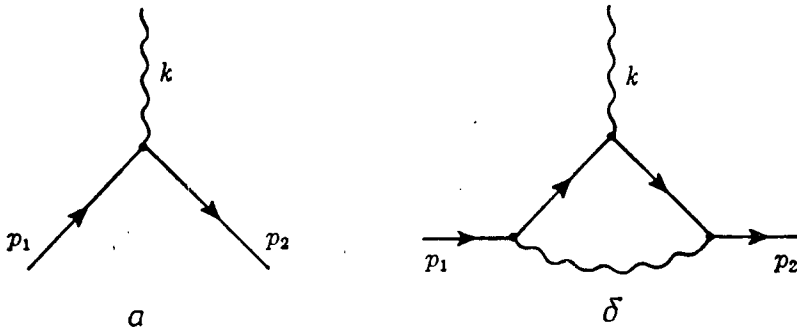
§ 2. Перенормируемость квантовой электродинамики

Теперь мы покажем, что идеи перенормировки заряда и массы фактически достаточно, чтобы устранить все ультрафиолетовые расходимости в разложении S -матрицы в квантовой электродинамике.

В § 1 мы видели, что условием расходимости интеграла, соответствующего примитивно расходящейся диаграмме, является

$$\frac{3}{2} F_e + B_e < 5,$$

где в данном случае F_e и B_e — числа внешних электронных и фотонных линий. Это неравенство, как мы видим, означает, что имеется лишь конечное число примитивно расходящихся диаграмм, снабжающих теорию



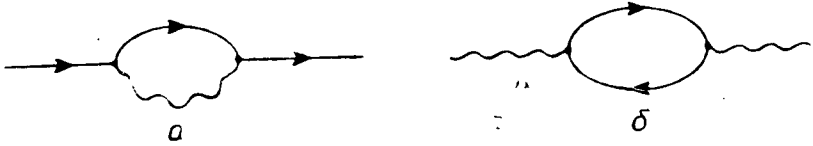
Ф и г. 109.

расходимостями. Причина заключается в том, что степень расходимости интегралов, соответствующих этим диаграммам, не зависит от порядка диаграмм. Программа перенормировок состоит в формулировке вычитательной процедуры для устранения бесконечностей и в теоретическом оправдании этих вычитаний. При изложении перенормировки квантовой электродинамики мы тесно следуем двум оригинальным статьям Дайсона 1949 г. [193, 194], а доказательство перенормируемости проводим согласно Уорду [817].

Прежде всего введем понятия *связной, приводимой и неприводимой* диаграмм, а также *вершинной и собственно-энергетической* частей [194].

Диаграмма называется *связной*, если любая ее часть соединена с остальными частями по меньшей мере двумя линиями. *Вершинная часть* определяется как связная часть (состоящая только из вершин и внутренних линий), соединяющаяся с остальной частью диаграммы двумя фермионными линиями и одной фотонной линией. На фиг. 109, *a* показана простейшая вершинная часть. Имеются также вершинные части V более высокого порядка (например, приведенная на фиг. 109, *b*), которыми можно заменять любую вершину какой-либо диаграммы G , причем получающаяся модифи-

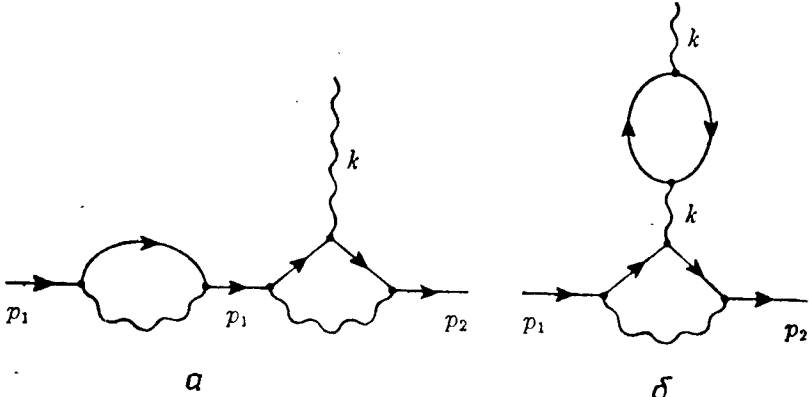
пированная диаграмма G' снова будет иметь определенный физический смысл. Матричный элемент, соответствующий G' , можно получить, заменив в матричном элементе, соответствующем диаграмме G , матрицу γ_μ в некоторой рассматриваемой вершине оператором $\Lambda_\mu(V, p_1, p_2)$, который зависит только от структуры вершинной части V и от импульсов, соответствующих двум фермионным линиям, посредством которых вершинная



Ф и г. 110.

часть соединяется с остальной частью диаграммы, т. е. от векторов импульса p_1 и p_2 на фиг. 109.

Точно так же *собственно-энергетическая часть* W диаграммы G есть связанная часть (состоящая только из вершин и внутренних линий), которая может вставляться в середину электронной или фотонной линии на диаграмме G , причем получившаяся модифицированная диаграмма снова будет совместима с правилами построения диаграмм Фейнмана. На фиг. 110 показаны простейшие возможные электронная и фотонная собственно-энергетические части. На фиг. 111, а показана вставка электронной



Ф и г. 111.

собственно-энергетической части в электронную линию p_1 фиг. 109, б, а на фиг. 111, б — вставка фотонной собственно-энергетической части в фотонную линию k фиг. 109, б. Эти линии p_1 или k для всей диаграммы в целом могут быть внешними или внутренними. Специальный случай собственно-энергетической части — собственно-энергетическая часть, состоящая только из одной точки. Она соответствует члену $-\delta m : \bar{\psi}(x)\psi(x)$ в гамилтониане взаимодействия $\mathcal{H}_I(x)$.

Вместе с Дайсоном определим фурье-образ операторов ψ и A следующим образом:

$$\psi(x) = \int d^4p e^{-ip \cdot x} \psi(p), \quad (16.25)$$

$$A_\mu(x) = \int d^4k e^{-ik \cdot x} A_\mu(k). \quad (16.26)$$

Функции распространения $S_F(p)$ и $D_F(k)$ в настоящем параграфе всюду определены по существу как фурье-образы функций $S_F(x)$ и $D_F(x)$. Явный вид их следующий:

$$D_F(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \quad (16.27a)$$

и

$$S_F(p) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\gamma \cdot p - m}. \quad (16.27b)$$

Если теперь модифицированную диаграмму, полученную с помощью одной из указанных выше вставок в диаграмму G , обозначить через G' , то тогда сформулированные ранее правила для записи матричных элементов позволяют заключить, что матричный элемент, соответствующий диаграмме G' , можно получить из матричного элемента, соответствующего диаграмме G , путем следующих преобразований:

а) вставки электронной собственно-энергетической части W во внешнюю линию электрона с импульсом p_1 :

$$\psi(p_1) \rightarrow S_F(p_1) [\Sigma(W, p_1) - 2\pi i \delta m] \psi(p_1), \quad (16.28)$$

$$\tilde{\psi}(p_1) \rightarrow \tilde{\psi}(p_1) [\Sigma(W, p_1) - 2\pi i \delta m] S_F(p_1); \quad (16.29)$$

б) вставки электронной собственно-энергетической части W во внутреннюю линию электрона с импульсом p_1 :

$$S_F(p_1) \rightarrow S_F(p_1) [\Sigma(W, p_1) - 2\pi i \delta m] S_F(p_1); \quad (16.30)$$

в) вставки фотонной собственно-энергетической части W' во внешнюю линию фотона с импульсом k :

$$A_\mu(k) \rightarrow A_\mu(k) \Pi(W', k) D_F(k); \quad (16.31)$$

г) вставки фотонной собственно-энергетической части W' во внутреннюю линию фотона с импульсом k :

$$D_F(k) \rightarrow D_F(k) \Pi(W', k) D_F(k); \quad (16.32)$$

д) вставки вершинной части V вместо простейшего вершинного оператора γ_μ :

$$\gamma_\mu \rightarrow \Lambda_\mu(V, p_1, p_2). \quad (16.33)$$

Здесь оператор Σ (или Π) зависит только от структуры диаграммы W (или W') и от импульса p_1 (или k), но не зависит от остальной части диаграммы. В формулах (16.28), (16.29) и (16.30) член $-2\pi i \delta m$, возникающий как вклад члена $-\delta m: \tilde{\psi}\psi(x)$: гамильтониана взаимодействия, добавляется для осуществления перенормировки массы. Фотонный собственно-энергетический оператор Π не нуждается в таком члене, поскольку собственная энергия фотона обращается в нуль на основании требования калибровочной инвариантности. (Однако для мезонов член перенормировки массы снова был бы необходим; вспомните § 8 гл. 15.) Аналогично, вершинный оператор $\Lambda_\mu(V, p_1, p_2)$ зависит только от структуры диаграммы V и от импульсов p_1 и p_2 обеих присоединяющихся фермионных линий. Подчеркнем, что операторы Λ_μ , Σ и Π можно вычислить независимо от остальной части диаграммы в совершенно общем виде. Затем их можно будет использовать в различных конкретных практических расчетах.

Если из диаграммы G исключить все собственно-энергетические и вершинные части, получим приведенную диаграмму G_0 , которую называют

скелетом диаграммы G . Диаграмма, совпадающая со своим скелетом, называется *неприводимой*. Собственно-энергетические части W и W' во втором порядке, показанные на фиг. 110, — единственные примеры неприводимых собственно-энергетических частей. Все собственно-энергетические части более высокого порядка являются *приводимыми*, т. е. не неприводимыми, и могут быть получены при помощи вставок собственно-энергетических и вершинных частей в линии и вершины диаграмм W и W' фиг. 110. Однако вершинные части более высоких порядков, чем второй, могут быть и приводимыми, и неприводимыми. Вершинную, или собственно-энергетическую, часть называют *собственной*, если она не распадается на две части,



Ф и г. 112.

соединенные только одной линией; в противном случае ее называют *несобственной*. На фиг. 112 дан пример несобственной фермионной собственно-энергетической части.

Приводимые диаграммы G некоторого порядка, скажем n , можно получить, вставляя независимо и всеми возможными способами собственно-энергетические и вершинные части подходящих порядков в различные линии и вершины некоторой неприводимой диаграммы G_0 более низкого порядка. Эти диаграммы G образуют хорошо определенный класс L , и поэтому все их можно точно перечислить.

Предположим, что величина M_0 есть часть матричного элемента S -матрицы для некоторого процесса, соответствующая диаграмме G_0 . Затем каждая новая диаграмма G класса L будет давать дополнительный вклад в тот же матричный элемент. Сумму *всех* вкладов, включая M_0 , обозначим через M . Ввиду независимости вставок, которые делаются в различные вершины и линии диаграммы G_0 , сумма M будет получаться из M_0 с помощью следующих изменений составных частей выражения M_0 .

Множители $S_F(p)$ величины M_0 , соответствующие всем внутренним электронным линиям диаграммы G_0 , заменяются на

$$S'_F(p) = S_F(p) + S_F(p) \Sigma^*(p) S'_F(p) \quad (16.34)$$

(доказательство будет дано ниже). Аналогично, операторы ψ или $\tilde{\psi}$, соответствующие всем внешним линиям, заменяются на

$$\psi(p) \rightarrow \psi'(p) = \psi(p) + S'_F(p) \Sigma^*(p) \psi(p) \quad (16.35a)$$

и

$$\tilde{\psi}(p) \rightarrow \tilde{\psi}'(p) = \tilde{\psi}(p) + \tilde{\psi}(p) \Sigma^*(p) S'_F(p). \quad (16.35b)$$

Фотонным линиям соответствуют замены

$$D_F(k) \rightarrow D'_F(k) = D_F(k) + D_F(k) \Pi^*(k) D'_F(k) \quad (16.36a)$$

и

$$A_\mu(k) \rightarrow A'_\mu(k) = A_\mu(k) + A_\mu(k) \Pi^*(k) D'_F(k). \quad (16.36b)$$

Наконец, вершинный оператор γ_μ заменяется оператором

$$\gamma_\mu \rightarrow \Gamma_\mu(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_1, p_2). \quad (16.37)$$

Здесь $\Sigma^*(p)$ и $\Pi^*(p)$ — суммы операторов $\Sigma(W, p)$ и $\Pi(W', k)$ по всем *собственным* собственнно-энергетическим частям. Предполагается, что в Σ^* включен вклад контрчлена перенормировки массы.

В действительности для обеспечения последовательности перенормировочной процедуры требуется уделять несколько больше внимания калибровочной инвариантности (см. в этой связи работы Боголюбова и Ширкова [64, 67], статьи Умэдзавы, Томозавы, Конумы и Какефучи [793], Умэдзавы и Какефучи [794] и Фрида и Йенни [284]). Так, соотношение (16.36а) должно быть заменено соотношением

$$D_{F\mu\nu}(k) = D_{F\mu\nu}(k) + D_{F\mu\lambda}(k) \Pi^{*\lambda\sigma}(k) D'_{F\sigma\nu}(k), \quad (16.36в)$$

где оператор $\Pi^{*\lambda\sigma}(k)$ есть сумма по всем собственным собственнно-энергетическим частям и предполагается, что этот оператор имеет калибровочно-инвариантный вид

$$\Pi^{*\lambda\sigma}(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Pi^*(k). \quad (16.36г)$$

Если свободную функцию распространения взять в виде

$$D_{F\mu\nu}(k) = \frac{1}{2\pi} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2}, \quad (16.38)$$

то

$$D'_{F\mu\nu}(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) D'_F(k). \quad (16.39)$$

Соотношение (16.36а) получается теперь как результат подстановки выражений (16.38), (16.39) и (16.36г) в (16.36в).

Точно так же величина $\Lambda_\mu(p_1, p_2)$ в соотношении (16.37) есть сумма всех величин $\Lambda_\mu(V, p_1, p_2)$ по всем *собственным* вершинным частям, поскольку вершинная часть, которая не является собственной, есть собственная вершинная часть плюс одна или более собственнно-энергетических частей, а последние уже включены в S'_F и D'_F .

Несобственные части, будучи неперекрывающимися комбинациями собственных частей, уже учтены в неявных определениях функций S'_F и D'_F , данных выше. Так, легко видеть, что несобственные диаграммы, типа изображенных на фиг. 112, содержатся в определении

$$S'_F(p, W) = S_F(p) + S_F(p) \Sigma(p, W) S'_F(p, W), \quad (16.40)$$

где W — фермионная собственнно-энергетическая часть, изображенная на фиг. 110, а. В самом деле, если мы разрешим это уравнение относительно S'_F , то получим

$$S'_F(p, W) = \frac{1}{1 - S_F(p) \Sigma(p, W)} S_F(p) = S_F(p) + S_F(p) \Sigma(p, W) S_F(p) + \\ + S_F(p) \Sigma(p, W) S_F(p) \Sigma(p, W) S_F(p) + \dots \quad (16.41)$$

Графическое представление этого выражения дано на фиг. 113.

Матричный элемент S -матрицы будет вычислен правильно, если учесть только вклады неприводимых диаграмм, а затем в членах, соответствующих каждой скелетной (неприводимой) диаграмме, произвести замены (16.34) на (16.39). Соотношения (16.34) — (16.36) являются интегральными уравнениями. Например, соотношение (16.34) в коор-

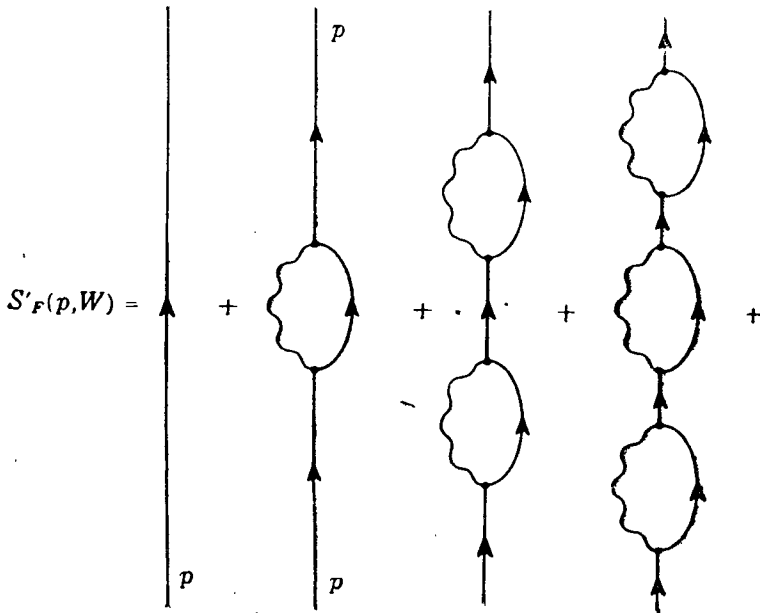
динатном пространстве приняло бы вид

$$S'_F(x-y) = S_F(x-y) + \int d^4x' \int d^4y' S_F(x-x') \Sigma^*(x'-y') S'_F(y'-y). \quad (16.42)$$

Аналогично, соотношению (16.37) в координатном пространстве соответствует замена

$$\gamma_\mu \delta^{(4)}(x-x') \delta^{(4)}(x'-x'') \rightarrow \Gamma_\mu(x-x'; x'-x''). \quad (16.43)$$

Чтобы вычислить операторы Λ_μ , Σ^* и Π^* , необходимо выписать в явном виде интегралы, соответствующие каждой собственно-энергетической части W и вершинной части V . Для эффектов высоких порядков части W и V сами часто будут приводимыми (причем W и W' всегда),



Ф и г. 113.

содержащими внутри себя собственно-энергетические и вершинные части. В этом случае снова удобно сперва исключить такие приводимые части V и W , а затем учесть их при помощи замен (16.34) на (16.39) в интеграле, соответствующем неприводимым частям V и W . Именно так можно получить интегральные уравнения для Λ_μ , Σ^* и Π^* .

Следует, однако, отметить, что все приводимые собственно-энергетические части исчерпываются вставками вершинных частей только в одну, а не в обе вершины неприводимой собственно-энергетической части (см. фиг. 110); в противном случае происходил бы переучет — одна и та же собственно-энергетическая часть учитывалась бы более одного раза. Имея в виду это обстоятельство, мы фактически сразу же можем записать инте-

гральные уравнения для Σ^* и Π^* (α — постоянная тонкой структуры):

$$\Sigma^*(x-x') = -2\pi i \int d^4y \int d^4y' \gamma^\mu S'_F(x-y) \Gamma_\mu(y-x; y-y') D'_F(y'-x) \quad (16.44)$$

и

$$g_{\mu\nu} \Pi^*(x-x') = 2\pi \alpha \int d^4y \int d^4y' \text{Sp} [\gamma_\mu S'_F(x-y) \Gamma_\nu(y-x'; y-y') S'_F(y'-x)]. \quad (16.45)$$

С другой стороны, Λ_μ нельзя представить в замкнутом виде как результат вставки величин Γ_ν , S'_F и D'_F . Однако в виде разложения по степеням α подобное представление для Γ_μ записать можно. В импульсном пространстве оно имеет вид [714, 217]

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p_1, p_2) &\equiv \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_1, p_2) = \\ &= \gamma_\mu - 2\alpha i \int \Gamma^\nu(p_1; p_1-k) S'_F(p_1-k) \Gamma_\mu(p_1-k, p_2-k) \times \\ &\quad \times S'_F(p_2-k) \Gamma_\nu(p_2-k, p_2) D'_F(k) d^4k + \dots \quad (16.46) \end{aligned}$$

Другими словами, для получения интегрального уравнения для Γ_μ нужно нарисовать все неприводимые вершинные диаграммы и произвести в каждой вставки, соответствующие заменам S_F на S'_F , γ_μ на Γ_μ и D_F на D'_F . Этим путем порождается весь ряд для Γ_μ .

Следует оговориться, что манипуляции, которые производятся здесь с бесконечными величинами, имеют чисто формальный смысл. При практических применениях всегда разумно воспользоваться регуляризацией, в результате которой все интегралы становятся конечными, хотя и зависящими от обрезания. Величины, которые были бы конечными в отсутствие обрезания, при этом не изменятся, в то время как, например, логарифмически расходящиеся величины превратятся в конечные логарифмические функции от регуляризующих масс.

Далее мы перейдем к задаче отождествления расходимостей, встречающихся в теории, и к предписаниям по устранению их.

Вспомним, что расходящийся матричный элемент M мы называли *примитивным*, если при фиксировании в нем какой угодно одной переменной интегрирования (4-импульс) интеграл по остальным переменным сходится. Фиксирование переменной интегрирования (4-импульса) p_μ^j означает замену внутренней линии связной диаграммы двумя внешними линиями. Пусть G — примитивно расходящаяся диаграмма с F_e внешними фермионными линиями и B_e внешними фотонными линиями; тогда, как мы уже видели в § 1, диаграмма может расходиться, если $3/2 F_e + B_e < 5$.

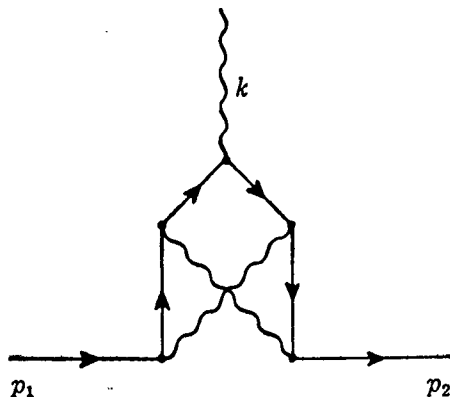
Примитивно расходящиеся диаграммы были ранее перечислены в § 1:

- 1) электронная собственно-энергетическая часть ($F_e = 2, B_e = 0$);
- 2) фотонная собственно-энергетическая часть ($B_e = 2, F_e = 0$);
- 3) вершинная часть ($F_e = 2, B_e = 1$);
- 4) диаграмма рассеяния света на свете ($B_e = 4, F_e = 0$).

Согласно теореме Фарри, треугольные диаграммы дают нулевой вклад, и их рассматривать не нужно. Кроме того, как было выяснено выше, диаграмма рассеяния света на свете благодаря калибровочной инвариантности на самом деле является сходящейся.

Снова подчеркнем, что большинство диаграмм не обладает тем свойством, чтобы после фиксирования какого-либо одного из внутренних

импульсов соответствующий интеграл сходился. В самом деле, из определения приводимой диаграммы следует, что приводимая расходящаяся диаграмма не может быть примитивно расходящейся. Поэтому примитивные расходимости соответствуют неприводимым (т. е. скелетным) диаграммам¹⁾, перечисленным выше. Имеется только по одной неприводимой собственно-энергетической части для электрона и фотона.



Ф и г. 114.

Они изображены на фиг. 110. Что касается вершинных частей, то существуют неприводимые вершинные части любого порядка. Пример неприводимой вершинной части высшего порядка дан на фиг. 114.

§ 3. Отделение расходимостей неприводимых диаграмм

Дайсон [194] развил метод однозначного разбиения примитивно расходящихся интегралов на конечную и бесконечную части. Это разбиение осуществляется при помощи разложения подынтегрального выражения, соответствующего примитивно расходящейся диаграмме, в ряд Тэйлора по внешним импульсам [вспомните формулу (15.90) и, особенно, обсуждение после формулы (15.89)]. Так, если $R(p, t)$ — подынтегральное выражение, в котором p — внешний, а t — внутренний импульсы, то разложение запишется в виде

$$R(p, t) = R(0, t) + p_\mu \left(\frac{\partial R(p, t)}{\partial p_\mu} \right)_{p=0} + \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \left(\frac{\partial^2 R(p, t)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \right)_{p=0} + \dots \quad (16.47)$$

Каждое дифференцирование увеличивает разность степеней t в знаменателе и числителе на единицу. Поэтому если интеграл расходится логарифмически, линейно или квадратично, то при почленном интегрировании разложения R будут расходиться только один, два или три первых члена. Вид расходящихся членов следует из релятивистской инвариантности. Теперь мы рассмотрим отделение расходимостей в выражениях, соответствующих различным неприводимым расходящимся диаграммам.

¹⁾ Это верно, если диаграмма, кроме того, является собственной. — Прим. ред.

Электронная собственно-энергетическая часть

Единственную существующую неприводимую электронную собственно-энергетическую часть можно представить интегралом

$$\Sigma(W, p) = \int R_e(p, k) d^4k, \quad (16.48)$$

который расходится линейно, поскольку $[R_e(p, k) \propto e^2 \gamma^\mu S_F(p-k) \gamma_\mu D_F(k)]$. Разложение Тэйлора для этого случая берется в виде

$$R_e(p, k) = R_e(0, k) + p_\mu \left(\frac{\partial R_e(p, k)}{\partial p_\mu} \right)_{p=0} + R_{eC}(p, k). \quad (16.49)$$

Поскольку выражение Σ расходится линейно, то интеграл от остаточного члена R_{eC} сходится, так как R_{eC} содержит в знаменателе две лишние степени по сравнению с подынтегральным выражением $R_e(p, k)$. Итак, выражение (16.48) можно записать в виде

$$\Sigma(W, p) = A'(W) + B'_\mu(W) p^\mu + \Sigma_C(W, p), \quad (16.50)$$

где $A'(W)$ и $B'_\mu(W)$ — расходящиеся матричные операторы, не зависящие от p . Так как величина $\Sigma(W, p)$ есть скалярная 4×4 матрица, то ее можно разложить по шестнадцати линейно независимым матрицам Γ :

$$\Sigma(p) = \Sigma_S(p) + \Sigma_{V\mu}(p) \gamma^\mu + \frac{1}{2} \Sigma_{T\mu\nu}(p) \sigma^{\mu\nu} + \Sigma_P(p) \gamma_5 + \Sigma_{A\mu}(p) \gamma^\mu \gamma_5. \quad (16.51)$$

Релятивистская инвариантность требует, чтобы $\Sigma_S(p)$, $\Sigma_{V\mu}(p)$ и $\Sigma_{T\mu\nu}(p)$ были соответственно скалярной, векторной и тензорной функциями от инварианта p^2 и чтобы функции $\Sigma_{A\mu}(p)$ и $\Sigma_P(p)$ были равны нулю. Поскольку единственным, имеющимся в нашем распоряжении вектором является вектор p_μ , то $\Sigma_{V\mu}(p) = p_\mu \Sigma'_V(p^2)$, $\Sigma_{T\mu\nu}(p) = p_\mu p_\nu \Sigma'_T(p^2)$ и, следовательно, если еще учесть, что $\sigma_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0$, получим

$$\Sigma(W, p) = \Sigma_S(W, p^2) + \gamma^\mu p_\mu \Sigma'_V(W, p^2), \quad (16.52)$$

где мы опустили штрих у Σ'_V . Сравнивая выражения (16.52) и (16.50), находим

$$A'(W) = \Sigma_S(W, 0) \quad (16.53)$$

и

$$B'_\mu(W) = \gamma_\mu \Sigma'_V(W, 0) = \gamma_\mu B'(W). \quad (16.54)$$

Кроме того, поскольку Σ_C — выражение сходящееся, то его можно однозначно записать в виде

$$\Sigma_C(W, p^2) = A''(W) + B''(W) (\gamma \cdot p - m) + (\gamma \cdot p - m) S_C(W, p^2), \quad (16.55)$$

где функция $S_C(W, p^2)$ для свободного электрона (т. е. при $\gamma \cdot p = m$ и $p^2 = m^2$) обращается в нуль. Пользуясь формулами (16.54) и (16.55), можно переписать выражение (16.50) в виде

$$\begin{aligned} \Sigma(W, p) = & A''(W) + A'(W) + B'(W) \gamma \cdot p + \\ & + B''(W) (\gamma \cdot p - m) + (\gamma \cdot p - m) S_C(W, p^2). \end{aligned} \quad (16.56a)$$

Если же ввести обозначения

$$A'(W) + A''(W) + mB'(W) = A(W) \quad (16.56б)$$

и

$$B'(W) + B''(W) = B(W) \quad (16.56в)$$

и добавить вклад члена $-\delta m: \tilde{\psi}\psi$; то после суммирования по всем неприводимым собственно-энергетическим диаграммам (на самом деле имеется только одна такая диаграмма!) получим¹⁾

$$\Sigma^*(p) = A_I - 2\pi i \delta m_I + B_I(\gamma \cdot p - m) + (\gamma \cdot p - m) S_C(I, p^2). \quad (16.57)$$

Это и есть вклад неприводимой (I) собственно-энергетической диаграммы в $\Sigma^*(p)$. Для A_I в формуле (16.57) имеем

$$\sum_{\text{по неприводимым } W_i} A(W_i) = A(W) = A_I. \quad (16.58)$$

Аналогично, $B_I = B(W)$ и т. д. Перенормировка массы определяется таким образом, чтобы при $\gamma \cdot p = m$, т. е. у свободного электрона, масса точно равнялась m . Поэтому

$$\tilde{\psi}(p) \Sigma_I^*(W, p) \psi(p) = 0 \quad \text{при } \gamma \cdot p = m, \quad (16.59)$$

откуда следует

$$A_I = 2\pi i \delta m_I. \quad (16.60)$$

Фотонная собственно-энергетическая часть

Неприводимую фотонную собственно-энергетическую часть W' , изображенную на фиг. 110, б, можно представить интегралом

$$\Pi(W', k) = \int R_p(k, q) d^4q, \quad (16.61)$$

где Π — скалярная квадратично расходящаяся функция. На этот раз вычитательная процедура определяется при помощи разложения

$$R_p(k, q) = R_p(0, q) + k_\mu \left(\frac{\partial R_p(k, q)}{\partial k_\mu} \right)_{k=0} + \frac{1}{2} k_\mu k_\nu \left(\frac{\partial^2 R_p(k, q)}{\partial k_\mu \partial k_\nu} \right)_{k=0} + R_{pC}(k, q). \quad (16.62)$$

Так как по сравнению с $R_p(k, q)$ член $R_{pC}(k, q)$ содержит дополнительно третью степень q в знаменателе, то интеграл от него по q сходится. Поступая аналогично тому, как это было сделано в случае собственной энергии электрона, получаем с учетом требований ковариантности

$$\Pi(W', k) = A_1(W') + B_{1\mu}(W') k^\mu + C_{\mu\nu}(W') k^\mu k^\nu + \Pi_C(W', k). \quad (16.63)$$

Величины A_1 , $B_{1\mu}$, $C_{\mu\nu}$ суть тензоры, имеющие одни и те же значения компонент во всех лоренцевых системах отсчета, а отсюда следует

$$B_{1\mu}(W') = 0, \quad (16.64)$$

$$C_{\mu\nu}(W') = C(W') g_{\mu\nu}. \quad (16.65)$$

Кроме того, калибровочная инвариантность запрещает появление постоянной $A_1(W')$, и поэтому ее следует приравнять нулю. Таким образом, учитывая еще, что $C_{\mu\nu}(W') k^\mu k^\nu = C(W') k^2$, можно записать

$$\Pi(W', k) = k^2 D_C(W', k) + C'(W') k^2, \quad (16.66a)$$

где

$$D_C(W', k) = 0 \quad \text{при } k^2 = 0, \quad (16.66b)$$

а постоянная $C(W')$ включена в $C'(W')$.

¹⁾ Практически это разбегание осуществляется разложением $S_F(p-k)$ в R_e по формуле $(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}B(A+B)^{-1}BA^{-1}$ с $A = \gamma \cdot k$ и $B = \gamma \cdot p - m$.

Наконец, поскольку имеется только одна неприводимая фотонная собственно-энергетическая часть, получаем

$$\Pi_I^*(k^2) = k^2 C_I + k^2 D_C(I, k^2), \quad (16.67)$$

где постоянная $C'(W')$ обозначена через C_I . Величина $\Pi_I^*(k^2)$ снова есть вклад в Π^* от всех неприводимых фотонных собственно-энергетических диаграмм.

Вершинная часть

Вклад вершинных частей самое большое расходится логарифмически. Поэтому в данном случае в разложении Тэйлора для подынтегрального выражения величины Λ_μ члены с производными не требуются и, следовательно,

$$\Lambda_\mu(V, p_1, p_2) = L_\mu(V) + \Lambda_{\mu C}(V, p_1, p_2), \quad (16.68)$$

где $L_\mu(V)$ — постоянный расходящийся матричный оператор, а остаточный член $\Lambda_{\mu C}$ сходится и обращается в нуль при $p_1 = p_2 = 0$. Ковариантность требует, чтобы

$$L_\mu(V) = L(V) \gamma_\mu. \quad (16.69)$$

Кроме того, при $p_1 = p_2$ и $\gamma \cdot p_1 = m$ оператор $\Lambda_{\mu C}$ сводится к матрице γ_μ , помноженной на постоянную. Это значение можно включить в член $L(V) \gamma_\mu$. Поэтому можно считать, что оператор $\Lambda_{\mu C}$ в (16.68) равен нулю не при $p_1 = p_2 = 0$, а при $\gamma \cdot p_1 = \gamma \cdot p_2 = m$ и $p_1 = p_2$. Физический смысл этого утверждения заключается в следующем: величина $\Lambda_{\mu C}$ не дает вклада, когда электромагнитный потенциал является постоянным, так как такой потенциал переносит нулевой импульс. Но именно так и должно быть, поскольку постоянный электромагнитный потенциал всегда можно устранить с помощью калибровочного преобразования. Далее, поскольку $\tilde{\psi}(p) \gamma_\mu \psi(p)$ есть 4-вектор тока электрона без учета радиационных поправок, то величину $\tilde{\psi}(p) \Gamma_\mu \psi(p)$ можно интерпретировать, как 4-вектор тока электрона с учетом радиационных поправок. Поэтому соотношение (16.68) при сделанных предположениях означает, что весь статический заряд включен в член $(1+L)\gamma_\mu$, поскольку при $\gamma \cdot p = m$ для свободного электрона $\Lambda_{\mu C}(p, p, V) = 0$ и, следовательно, $\tilde{\psi}(p) \Gamma_\mu \psi(p) = (1+L)\tilde{\psi}(p) \gamma_\mu \psi(p)$.

Просуммировав соотношение (16.68) по всем неприводимым вершинным частям, получаем

$$\sum_{\text{по всем неприводимым } V_i} \Lambda_\mu(V^i, p_1, p_2) = \Lambda_{\mu I}(p_1, p_2) = L_I \gamma_\mu + \Lambda_{\mu IC}(p_1, p_2), \quad (16.70)$$

где L_I — расходящаяся константа.

Формулы (16.57), (16.67) и (16.70) составляют основу для отделения расходимостей в выражениях, соответствующих неприводимым диаграммам. Что касается конкретных вычислений, то мы отсылаем читателя к статье Карплуса и Кролла [422], где отделение расходимостей собственно-энергетической и вершинной частей наимизшего порядка проведено явно. Изложенный метод тождествен с методом, который разбирался в гл. 15, где мы обсуждали перенормировку

радиационных поправок наимизшего порядка, используя, однако, для отделения расходимостей регуляризованные выражения.

Теперь мы должны получить формулы, аналогичные формулам (16.57), (16.67) и (16.70), для вклада в операторы Σ^* , Π^* и Γ_μ от приводимых собственных диаграмм; в этих формулах конечные и бесконечные части снова должны быть разделены релятивистски инвариантным и однозначным образом. На основании соображений инвариантности ясно, что эти операторы должны иметь вид

$$\Sigma^*(p) = (A - 2\pi i \delta m) + 2\pi B (\gamma \cdot p - m) + S_C(p) (\gamma \cdot p - m), \quad (16.71)$$

$$\Pi^*(k) = 2\pi C k^2 + k^2 D_C(k^2), \quad (16.72)$$

$$\Lambda_\mu(p_1, p_2) = L\gamma_\mu + \Lambda_{\mu C}(p_1, p_2), \quad (16.73)$$

где

$$S_C(p) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma \cdot p = m,$$

$$\Lambda_{\mu C}(p, p) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma \cdot p = m \quad (16.74)$$

и

$$D_C(k^2) = 0 \quad \text{при} \quad k^2 = 0, \quad (16.75)$$

а A , B , C и L — расходящиеся константы.

Формулы (16.71), (16.72) и (16.73) дают лишь окончательную форму для этих операторов. Однако прежде всего мы должны научиться отделять расходимости в выражениях, соответствующих приводимым диаграммам, чтобы получался однозначный, ковариантный и сходящийся результат.

§ 4. Отделение расходимостей приводимых диаграмм

В предыдущем параграфе мы рассмотрели инвариантный метод Дайсона для отделения расходимостей неприводимых диаграмм. Чтобы показать возможность перенормировки теории в целом, мы должны рассмотреть диаграммы всех возможных типов и всех порядков, приводимые и неприводимые. Следовательно, нужно показать, как отделяются расходимости приводимых диаграмм.

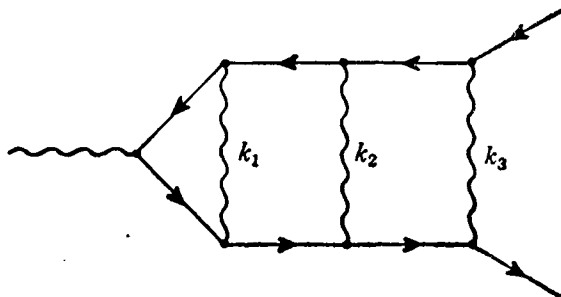
Диаграммы G , получающиеся из неприводимой диаграммы G_0 путем вставок V , W , W' в различные линии и вершины G_0 , могут быть подразделены на три класса:

- 1) диаграммы с совершенно неперекрывающимися вставками;
- 2) диаграммы, на которых вставки целиком содержатся друг в друге;
- 3) диаграммы с перекрывающимися вставками.

Отделение расходимостей первых двух классов диаграмм можно выполнить по методу инвариантного отделения, развитому Дайсоном, т. е. так, как это было объяснено в предыдущем параграфе. Если вставки не перекрываются, то отделение может быть выполнено независимо в каждой вставке. Расходимости, соответствующие диаграммам второго класса, можно отделить по тому же методу *последовательно*, начиная с расходимости *самой внутренней* вставки и заканчивая расходимостью диаграммы G как целого. Например, на диаграмме фиг. 115 расходимость, соответствующая интегрированию по k_1 , отделяется первой, затем отделяется расходимость, возникающая от интегрирования по k_2 , и наконец — расходимость, обусловленная интегрированием по k_3 . Не представляют трудностей и комбинации расходимостей первых двух типов. Так, на диаграмме фиг. 116 первой отделяется расходимость от интегрирования по k_1 , затем расходимость фотонной собственно-энергетической части в линии k_2

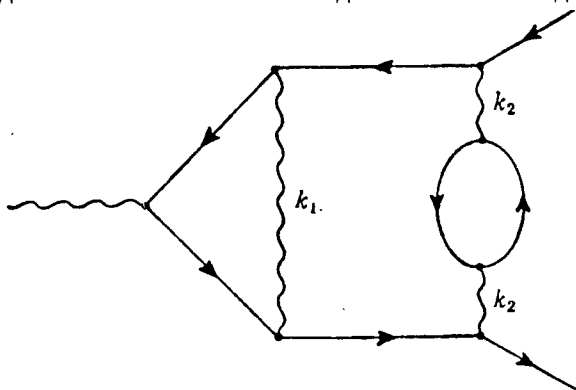
и в конце концов отделяется расходящаяся, соответствующая интегрированию по k_2 .

Однако метод Дайсона недостаточен для перекрывающихся вставок, так как в этом случае мы сталкиваемся с интегралами, которые расходятся одновременно по более чем одной переменной. Они расходятся, даже если



Ф и г. 115.

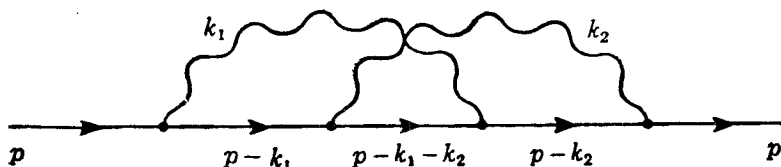
интегрировать только по какой-либо одной из переменных, удерживая фиксированными другие [см., например, выражение (16.76a)]. Эта ситуация резко отличается от ситуации для диаграмм первых двух классов, когда на каждом этапе можно иметь дело только с одной переменной



Ф и г. 116.

интегрирования и когда разложение (16.47) действительно ведет к отделению расходящихся.

Пример такой перекрывающейся диаграммы показан на фиг. 117. Она представляет собой диаграмму собственной энергии электрона, которая



Ф и г. 117.

может быть получена вставкой вершинной части в вершину a или в вершину b диаграммы, изображенной на фиг. 118. Диаграмме фиг. 117 соот-

ветствует матричный элемент

$$\Sigma(W_2, p) = e^4 \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 F^\mu(p, k_1) G_{\nu\mu}(p, k_1, k_2) H^\nu(p, k_2), \quad (16.76a)$$

где

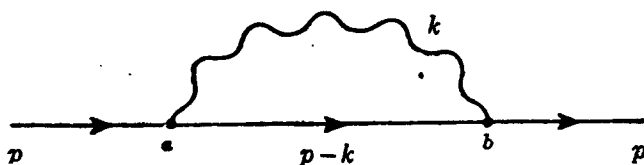
$$F^\mu(p, k_1) = \frac{1}{k_1^2} \gamma^\mu \frac{\gamma \cdot (p - k_1) + m}{(p - k_1)^2 - m^2}, \quad (16.76б)$$

$$G^{\nu\mu}(p, k_1, k_2) = \gamma^\nu \frac{\gamma \cdot (p - k_1 - k_2) + m}{(p - k_1 - k_2)^2 - m^2} \gamma^\mu, \quad (16.76в)$$

$$H^\nu(p, k_2) = \frac{1}{k_2^2} \frac{\gamma \cdot (p - k_2) + m}{(p - k_2)^2 - m^2} \gamma^\nu. \quad (16.76г)$$

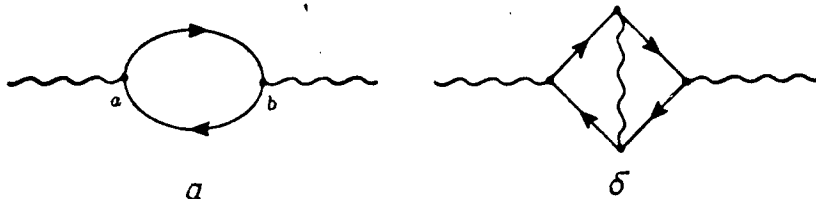
В данном случае не только двойной интеграл по $k_1 k_2$ расходится линейно, но расходится (логарифмически) и интегралы по какой-либо одной из переменных k_1 или k_2 , когда другая фиксирована.

То же самое происходит при вставке вершинной части в вершину a фотонной собственно-энергетической диаграммы второго порядка, изобра-



Ф и г. 118.

женной на фиг. 119, *а*. Эта вставка одновременно может быть воспринята как вставка во вторую вершину b (фиг. 119, *б*). В общем случае вклад в Π^* (или Σ^*) от некоторой приводимой диаграммы, подобной диаграмме фиг. 119, *б*, есть интеграл, который обладает расходимостями, соответствующими всем способам, какими можно построить диаграмму при помощи



Ф и г. 119.

вставок вершинных частей в одну из двух или сразу в обе вершины первоначальной неприводимой диаграммы. Дайсон назвал эти расходимости « b -расходимостями».

Другими словами, b -расходимости ведут к трудностям по той причине, что одну и ту же приводимую собственно-энергетическую часть можно рассматривать как построенную из неприводимых компонент многими различными способами, соответственно тому, считается ли вершинная часть подставленной в одну или в другую вершину неприводимой диаграммы второго порядка, а каждый возможный способ построения вносит свои расходимости независимо.

Дайсон в 1949 г. (не опубликовано) и Салам в 1951 г. [689, 690] дали однозначные правила для отделения расходимостей перекрывающихся диаграмм. В применении к неперекрывающимся диаграммам эти правила

сводятся к правилам, данным в § 3. Новые правила позволяют однозначно выделять ковариантные и абсолютно сходящиеся остаточные члены в случае перекрывающихся расходящихся частей.

По-видимому, стоит подчеркнуть, что при получении правильного предписания для отделения расходящихся перекрывающихся диаграмм трудность представляет только *правильное* перечисление *всех* расходящихся частей, которое позволяло бы интерпретировать вычитания как перенормировку и привело бы к однозначному выделению конечных частей. Задача трудна потому, что она требует анализа чрезвычайно сложных многократных интегралов, для которых не существует адекватных обозначений. (По выражению Салама, адекватные обозначения — это такие обозначения, которые кажутся «краткими, точными и понятными по меньшей мере двум лицам, одно из которых может быть их автором».) Впервые такие обозначения были введены в важной статье Салама [689], благодаря которой обсуждение проблемы перенормировок приобрело более ясную и более строгую основу. Сейчас мы кратко, не входя в детали, изложим метод Салама.

Рассмотрим n -кратный интеграл I_n , соответствующий некоторой диаграмме с n «базисными» 4-векторами импульса t_i ; такими, что аргументы всех функций распространения выражаются как линейные комбинации t_i (и импульсов, соответствующих внешним линиям). Различные множители S_F и D_F в I_n будут как функциями одной переменной t_i , так и функциями двух и более таких переменных. Интеграл (16.76а) есть пример I_n при $n = 2$. По терминологии Салама, интегрирование по меньшему, чем n , числу переменных при фиксированных остальных называется субинтегрированием. Сходимость каждого субинтеграла можно оценить подсчетом степеней t_j (по которым ведется субинтегрирование) в числителе и знаменателе подынтегрального выражения. При подсчете степеней все переменные интегрирования следует рассматривать как равноправные. Именно этим путем мы пришли к заключению, что двойной интеграл по $k_1 k_2$ (16.76а) расходится линейно, так как в числителе стоит 11-я степень импульсов k , а в знаменателе — только 10-я. Для сходимости I_n как целого должен сходиться не только окончательный интеграл по переменным t_1, \dots, t_n , но и различные субинтегралы по меньшему числу базисных переменных, т. е. по $t_i, t_i t_j, \dots, t_i t_j \dots t_{n-1}$, выбираемых всеми возможными способами. Возможен случай, когда интеграл в целом сходится (судя по результатам подсчета степеней t_i), но некоторые субинтегралы расходятся. Тогда говорят, что этот интеграл *с виду сходящийся*.

Чтобы сделать интеграл I_n сходящимся, следует вычесть из подынтегрального выражения ряд расходящихся членов. Сперва те, которые соответствуют всем возможным субинтегрированиям по числу переменных от 1 до $(n - 1)$, а затем — соответствующие окончательному интегрированию по всем n переменным. Правила, по которым вычитаются расходящиеся члены, следующие.

Сперва фиксируются все переменные подынтегрального выражения, кроме t_1 , и по правилам Дайсона [используя разложение (16.47)] вычитаются расходимости, соответствующие субинтегрированию по t_1 . В этих вычитаемых членах множители, не зависящие от t_1 , оставляются неизменными, а в множителях, содержащих t_1 , переменным t_2, t_3, \dots, t_n и внешним импульсам придаются значения, соответствующие свободным частицам. Аналогично должны быть сделаны вычитания, соответствующие субинтегрированиям по каждой из остальных переменных интегрирования t_2, \dots, t_n . В новом подынтегральном выражении, полученном таким

способом, нужно далее зафиксировать все переменные, за исключением двух t_1 и t_2 , и вычесть расходящиеся члены, соответствующие субинтегрированию по $t_1 t_2$, причем при получении этих членов из нового подынтегрального выражения множители, не содержащие t_1 и t_2 , следует оставить неизменными, а в множителях, зависящих от t_1 , или от t_2 , или от обеих переменных сразу, переменным t_3, t_4, \dots, t_n (и внешним импульсам) следует придать значения, соответствующие свободным частицам. Аналогичные вычитания должны быть сделаны для всех возможных остальных пар переменных $t_i t_j$. Таким же образом вычитаются расходящиеся члены, соответствующие субинтегрированиям по $t_i t_j t_k, \dots, t_1 t_2 \dots t_{n-1}$, причем на каждой стадии перед вычитанием расходящихся членов, соответствующих какому-либо субинтегрированию, подынтегральное выражение должно быть модифицировано путем вычитания расходящихся членов, соответствующих всем возможным субинтегрированиям предыдущего порядка. «Истинная расходимость» при некотором субинтегрировании может быть определена как расходящаяся часть, которую необходимо вычесть из «модифицированного» подынтегрального выражения (как это только что было определено), чтобы сделать этот субинтеграл сходящимся.

После того как таким же образом произведено вычитание истинных расходимостей, соответствующих всем субинтегрированиям вплоть до $(n-1)$ -го порядка, необходимо произвести последнее вычитание, чтобы отделить истинную расходимость, возникающую при интегрировании по всем n переменным. Наконец, если в процессе этой вычитательной процедуры обнаружится, что какой-либо субинтеграл *с виду сходящийся*, тогда соответствующего вычитания делать не нужно.

Вся процедура в целом может быть математически выражена следующим образом:

$$I_n = \sum_{i=1}^n D(t_i) R(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n) + \\ + \sum_{ij}^n D(t_i, t_j) R(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n) + \\ + \dots + D(t_1, \dots, t_n) + I_C(t_1, \dots, t_n). \quad (16.77)$$

Здесь $D(t_i, t_j, \dots)$ — «истинная расходимость», соответствующая субинтегрированию по переменным $t_i t_j \dots$, а соответствующий множитель R называется «приведенным интегралом»; $D(t_1, t_2, \dots, t_n)$ — «истинная расходимость» при окончательном интегрировании по всем n переменным. Салам показал [690] (см. также работу Вайнберга [824]), что в перенормируемой теории поля эта вычитательная процедура на самом деле приводит к *абсолютно сходящемуся* и *однозначно определенному* остаточному члену I_C .

Отметим, что если интеграл I_n не содержит перекрывающихся множителей, то его можно записать в виде

$$I_n = \left(\int F_1(t_1) d^4 t_1 \right) \left(\int F_2(t_2) d^4 t_2 \right) \dots \left(\int F_n(t_n) d^4 t_n \right). \quad (16.78)$$

В этом случае можно отделить расходимости по каждой переменной отдельно по методу Дайсона, и конечная часть (16.78) запишется в виде

$$I_C = \prod_{r=1}^n \left(\int \{F_r(t_r) - D_r(t_r)\} d^4 t_r \right), \quad (16.79)$$

где $D_r(t_r)$ — член, который при интегрировании по t_r дает истинную расходимость.

Если в данном случае неперекрывающихся диаграмм соответствующим образом определить истинные расходимости D и приведенные интегралы R , то из формул (16.78) и (16.79) вытекает

$$\begin{aligned}
 I_n = & \sum_{i=1}^n D(t_i) R(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n) - \\
 & - \sum_{ij}^n D(t_i, t_j) R(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n) + \\
 & + (-1)^{n-1} D(t_1, t_2, \dots, t_n) + I_C(t_1, t_2, \dots, t_n).
 \end{aligned} \tag{16.80}$$

Таким образом, в отличие от формулы (16.77) члены разложения (16.80) имеют чередующиеся положительные и отрицательные знаки.

Разложениями (16.77) и (16.80) можно теперь воспользоваться для вывода формул (16.71), (16.72) и (16.73). После этого, если величины S'_{F1} , D'_{F1} и $\Gamma_{\mu 1}$ суть конечные физические существенные части функций S'_F , D'_F и Γ_μ , получаемые из последних путем отбрасывания расходящихся частей операторов Σ^* , Π^* и Γ_μ , то можно показать, что после подходящей перенормировки массы эти конечные функции будут связаны с соответствующими бесконечными согласно

$$\begin{aligned}
 S'_F(e) &= Z_2 S'_{F1}(e_1), \\
 D'_F(e) &= Z_3 D'_{F1}(e_1), \\
 \Gamma_\mu(e) &= Z_1^{-1} \Gamma_{\mu 1}(e_1),
 \end{aligned} \tag{16.81}$$

где Z_1 , Z_2 и Z_3 — расходящиеся константы, а $e_1 = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e$ — перенормированный заряд.

Мы не будем приводить здесь этого вывода. Он дан в статьях Салама [689, 690], в которых также содержится доказательство перенормируемости мезонных теорий со связями без производных (см. также работу Такеды [767]). Вместо этого мы будем следовать видоизменной вычитательной процедуре Уорда [817], при которой удастся избежать построения приводимых собственно-энергетических частей. С этой целью Уорд использует выведенное им [816] формальное тождество, о котором будет идти речь в следующем параграфе.

В заключение настоящего параграфа следует отметить, что при рассмотрении приводимых собственно-энергетических частей сформулированные выше правила Салама необходимы, чтобы правильно интерпретировать вычитания как умножение на множители Z . Только приняв эти (однозначные) правила для отделения расходимостей, можно доказать перенормируемость теории на пути, намеченном Дайсоном [194]. Однако что касается практических приложений, то правильные конечные части получаются при помощи более «наивного» подхода, который мы продемонстрируем на примере перекрывающейся диаграммы, изображенной на фиг. 117.

Данная диаграмма может рассматриваться как результат вставки вершинной части $\Lambda_\mu(p-k, p)$ в вершину b (или a) на фиг. 118. Этот оператор можно разбить на сходящуюся и расходящуюся части по формуле (16.70):

$$\Lambda_\mu(p-k, p) = L\gamma_\mu + \Lambda_{\mu C}(p-k, p). \tag{16.82}$$

Если сложить выражения, построенные по диаграммам фиг. 118 и 117, то расходящийся член $L\gamma_\mu$ можно убрать перенормировкой заряда в выражении, соответствующем диаграмме фиг. 118. Иначе говоря, можно отбрасывать расходящийся член, молчаливо подразумевая, что это эквивалентно умножению выражения, соответствующего диаграмме более низкого порядка, на постоянный множитель, т. е. переопределению заряда (константы связи), стоящего общим множителем в этом выражении. Если мы теперь вставим оператор $\Lambda_{\mu C}(p-k, p)$ вместо γ_μ в вершине b (или a) фиг. 118, то конечная часть оператора Σ , соответствующего фиг. 117, будучи вычислена путем вычитания расходимости по правилу (16.57), окажется тождественно равной конечной части, получающейся по правилам Салама. Однако расходящиеся части (если их удержать), полученные обоими способами, будут различными. В действительности, если принять эту «наивную» методику, то мы не смогли бы доказать перенормируемость теории, поскольку расходимости не удалось бы интерпретировать на языке множителей Z , перенормирующих заряд e единым образом во всех матричных элементах.

§ 5. Тождество Уорда

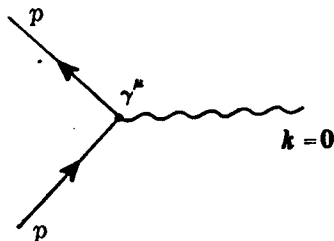
Если продифференцировать тождество $S_F(p)S_F^{-1}(p)=1$ по p_μ , то после несложного преобразования

$$\frac{\partial S_F(p)}{\partial p^\mu} = -S_F(p) \frac{\partial S_F^{-1}(p)}{\partial p^\mu} S_F(p). \quad (16.83a)$$

Подставляя сюда в качестве $S_F^{-1}(p)$ явное выражение $2\pi(\gamma \cdot p - m)$, находим

$$\frac{\partial S_F(p)}{\partial p^\mu} = -2\pi S_F(p) \gamma_\mu S_F(p). \quad (16.83б)$$

Правая часть соотношения (16.83б) содержит набор множителей, соответствующий диаграмме фиг. 120, где импульс фотонной линии равен



Фиг. 120.

нулю. Поэтому формальное дифференцирование функции распространения $S_F(p)$ по p^μ соответствует присоединению линии фотона с равным нулю импульсом к электронной линии.

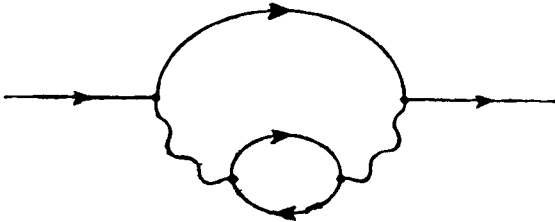
Рассмотрим далее собственно-энергетическую диаграмму W , изображенную на фиг. 110, а. Ей соответствует оператор

$$\Sigma(p, W) = -\frac{ie^2}{2\pi} \int d^4k \gamma^\nu S_F(p-k) \gamma_\nu D_F(k). \quad (16.84)$$

Если продифференцировать оператор $\Sigma(p, W)$ по p_μ , то с помощью тождества (16.83б) получим

$$\frac{\partial \Sigma(p, W)}{\partial p^\mu} = ie^2 \int d^4k \gamma^\nu S_F(p-k) \gamma_\mu S(p-k) \gamma^\nu D_F(k). \quad (16.85)$$

Но это выражение с точностью до множителя (-2π) равно оператору $\Lambda_\mu(V, p, p)$, который соответствует вершинной диаграмме наинизшего



Ф и г. 121.

порядка, изображенной на фиг. 109, б, если там импульс фотона k приравнять нулю¹⁾.

Очевидно, что из собственной собственно-энергетической диаграммы W путем присоединения внешней фотонной линии к какой-либо внутренней электронной линии W можно получить собственную вершинную диаграмму V . Как мы уже видели, присоединению фотонной линии с равным нулю импульсом к электронной линии формально соответствует дифференцирование функции распространения, представляющей эту линию, по переносимому ею внешнему импульсу p^μ . Поэтому дифференцирование оператора $\Sigma(W, p)$ по p^μ присоединяет фотонную линию к каждой электронной линии, переносящей импульс p , диаграммы W ²⁾.

¹⁾ Появление численного множителя $-2\alpha i$ в выражении (16.84) становится понятным, если вспомнить, что, согласно соотношению (16.30), оператор $\Sigma(p, W)$ определен как матричный элемент, соответствующий диаграмме W , который дополнительно помножен на множитель $\frac{i}{(2\pi)^3}$. Точно так же напомним, что оператор $\Lambda_\mu(p_1, p_2, V)$ был определен как оператор, которым нужно заменить матрицу γ_μ в выражении

$$\left(-\frac{i}{\hbar c}\right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2 \pm k) \frac{i}{(2\pi)^3} S_F(p_1) \gamma_\mu \frac{i}{(2\pi)^3} S_F(p_2) \frac{i}{(2\pi)^3} D_F(k),$$

соответствующем простой вершинной диаграмме фиг. 109, а, чтобы получилось выражение, соответствующее диаграмме V (фиг. 109, б). Отсюда оператор Λ_μ , соответствующий фиг. 109, б, равен

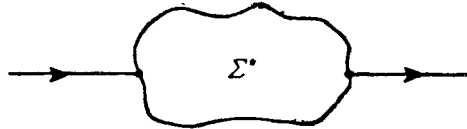
$$\Lambda_\mu(p_1, p_2, V) = -2\alpha i \int d^4k \gamma^\nu S_F(p_1 - k) \gamma_\mu S_F(p_2 - k) \gamma^\nu D_F(k).$$

²⁾ Сделаем замечание по поводу собственных собственно-энергетических частей, содержащих замкнутые контуры. Рассмотрим, например, диаграмму фиг. 121. На этой диаграмме импульсы p_2 и p_3 можно выбрать не зависящими от p . Однако к ним всегда можно добавить импульс p , не меняя значения интеграла, поскольку переменные p_2 и p_3 суть переменные интегрирования. Если это сделать, то дифференцирование по p будет присоединять фотонную линию с импульсом, равным нулю, и к линиям замкнутого контура, и, следовательно, эти собственные вершинные диаграммы учитываются автоматически. В действительности они дают нулевой вклад на основании теоремы Фарри: у замкнутого контура теперь будет нечетное число вершин, в результате чего произойдет сокращение с вкладом от другой диаграммы, на которой электронные линии замкнутого контура обходятся в противоположном направлении. Другой способ рассуждений — ввести контурную переменную интегрирования t_μ ,

Если же мы просуммируем по всем собственным собственно-энергетическим диаграммам, а затем продифференцируем по p , то мы получим сумму по *всем* собственным вершинным диаграммам. Таким образом,

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Sigma^*(p)}{\partial p^\mu} = \Lambda_\mu(p, p). \quad (16.86)$$

Это соотношение, связывающее операторы Σ^* и Λ_μ , впервые было выведено Уордом [815, 816].



Ф и г. 122.

Тождество (16.86) позволяет получить соотношение, связывающее функции S'_F и Γ . Из (16.34) следует, что

$$\begin{aligned} (S'_F(p))^{-1} &= S_F^{-1}(p) - \Sigma^*(p) = \\ &= 2\pi \left(\gamma \cdot p - m - \frac{1}{2\pi} \Sigma^*(p) \right), \end{aligned} \quad (16.87)$$

и отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial p^\mu} (S'_F(p))^{-1} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial p^\mu} [S_F^{-1}(p) - \Sigma^*(p)] = \\ &= \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p, p) = \Gamma_\mu(p, p). \end{aligned} \quad (16.88)$$

Это другая форма записи тождества Уорда.

Несколько иной вывод, обнаруживающий связь тождества Уорда с требованием калибровочной инвариантности, можно дать, основываясь на том, что постоянный внешний электромагнитный потенциал передает нулевой импульс. Рассмотрим собственный собственно-энергетический оператор $\Sigma^*(p)$ (фиг. 122) в присутствии некоторого постоянного потенциала a_μ и обозначим его через $\Sigma_a^*(p)$ (импульс p прежний!). Теперь разложим оператор $\Sigma_a^*(p)$ в ряд по степеням внешнего потенциала

$$\Sigma_a^*(p) = \Sigma(p) + 2\pi e a^\mu \Lambda_\mu(p, p) + \frac{(2\pi e)^2}{2!} a^\mu a^\nu \Xi_{\mu\nu}(p, p) + \dots \quad (16.89)$$

Однако на основании требования калибровочной инвариантности оператор $\Sigma_a^*(p)$ должен также быть равен оператору $\Sigma^*(p - ea)$, так что

$$\begin{aligned} \Sigma_a^*(p) &= \Sigma^*(p - ea) = \\ &= \Sigma^*(p) - ea^\mu \left(\frac{\partial \Sigma^*(p)}{\partial p^\mu} \right)_{a=0} + \frac{1}{2!} e^2 a^\mu a^\nu \left(\frac{\partial^2 \Sigma^*(p)}{\partial p^\mu \partial p^\nu} \right)_{a=0} + \dots \end{aligned} \quad (16.90)$$

которая войдет в состав аргумента каждой электронной линии контура. Тогда присоединение фотонной линии с равным нулю импульсом к линиям контура получается при помощи дифференцирования по t_μ . Интегрирование такого подынтегрального выражения по переменной t_μ даст нуль [815].

Сравнивая разложения (16.89) и (16.90), получаем

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Sigma^*(p)}{\partial p^\mu} = \Lambda_\mu(p, p), \quad (16.91)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2 \Sigma^*(p)}{\partial p^\mu \partial p^\nu} = \Xi_{\mu\nu}(p, p). \quad (16.92)$$

Оператор $\Xi_{\mu\nu}$ есть часть оператора, соответствующего комптоновскому рассеянию фотона с нулевой энергией.

Связь между этими двумя методами вывода тождеств Уорда становится очевидной, если заметить, что в обоих случаях имеется линия, переносящая заряд, которая изменяется либо присоединением к ней фотона с равным нулю импульсом, либо заменой ее импульса p на импульс $p - ea$, где e — заряд, переносимый линией. Разумеется, тот факт, что заряд проходит через всю диаграмму от начала до конца непрерывным образом, есть следствие закона сохранения заряда. Это обстоятельство гарантирует также, что при дифференцировании оператора $\Sigma^*(p)$ по p_μ фотонная линия с равным нулю импульсом присоединяется всеми возможными способами, и, следовательно, каждая возникающая диаграмма будет собственной вершинной частью. Обратный закон сохранения заряда можно вывести как следствие инвариантности теории относительно калибровочного преобразования $\psi \rightarrow \exp(iea_\mu x^\mu) \psi$, при котором $p\psi \rightarrow (p - ea)\psi$ и из которого следует соотношение (16.90).

В действительности эти соображения приводят к обобщению приведенного выше тождества Уорда и соотношений (16.91) и (16.92). Обобщенные соотношения связывают любую диаграмму Фейнмана с диаграммой, содержащей на единицу меньшее число внешних фотонных линий (см. работы Такахаши [766], а также Казеса [436]). Простейшее обобщенное тождество Уорда гласит

$$2\pi(p'_\mu - p_\mu) \Gamma^\mu(p', p) = S_F'^{-1}(p') - S_F^{-1}(p). \quad (16.93)$$

Нам не придется использовать это обобщенное тождество Уорда в дальнейшем.

Мы закончим настоящий параграф замечанием, что прямым следствием тождества Уорда является соотношение

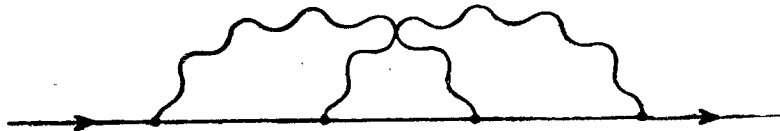
$$B + L = 0, \quad (16.94)$$

связывающее константы, входящие в выражения (16.71) и (16.73). Этим доказывается, что в квантовой электродинамике во всех порядках вершинная расходимость сокращается с расходимостью перенормировки волновой функции.

§ 6. Доказательство перенормируемости

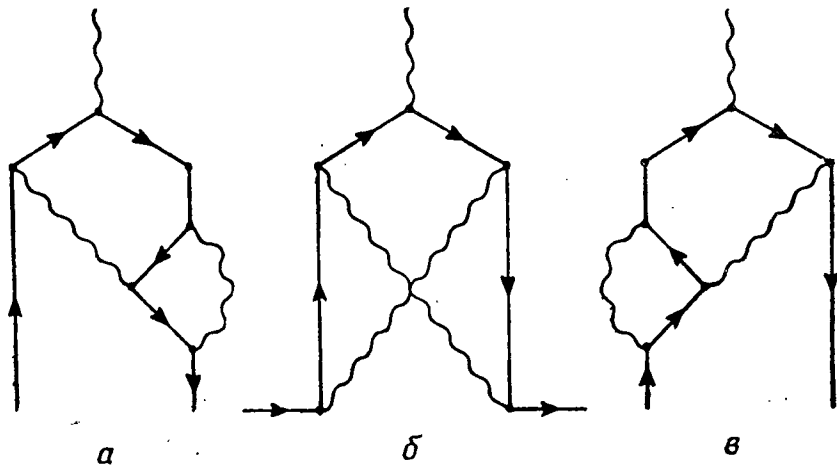
Теперь мы приведем доказательство перенормируемости квантовой электродинамики, принадлежащее Уорду [817]. В этом доказательстве проблема перекрывающихся расходимостей обходится путем сведения анализа собственных электронных собственно-энергетических диаграмм к анализу собственных вершинных частей, а анализа собственных фотонных собственно-энергетических диаграмм — к анализу некоторого другого класса диаграмм, для которых также нет перекрывания.

В качестве простой иллюстрации метода в случае электронных собственно-энергетических диаграмм рассмотрим собственно-энергетический оператор $\Sigma^*(p, W_2)$, соответствующий диаграмме фиг. 123. Как показал анализ в § 4, оператор $\Sigma^*(p, W_2)$ содержит перекрывающиеся расходимости. Вычисляя производную $\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma^*(p, W_2)$, мы получаем три члена, соответствующих диаграммам *a*, *б* и *в*, показанным на фиг. 124.



Ф и г. 123.

Эти три диаграммы возникают путем присоединения внешней фотонной линии с равным нулю импульсом к трем внутренним электронным линиям диаграммы фиг. 124. Мы обозначим операторы, соответствующие этим трем диаграммам, через $\Lambda_\mu(p_1, p_2, V_i^{(2)})$, $i = 1, 2, 3$. Отметим, что, во-первых, добавление внешней фотонной линии прежде всего



Ф и г. 124.

уменьшает степень расходимости (диаграммы фиг. 124 расходятся логарифмически, тогда как диаграмма фиг. 123 — линейно) и, во-вторых, — и это для нас наиболее существенно — расходящиеся части этих собственных вершинных диаграмм можно отделить без каких-либо затруднений и произвола. Пусть эти расходимости уже отделены в $\Lambda_\mu(p, p, V_i^{(2)})$ по правилам, которые были даны выше. Поскольку имеется связь

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Sigma^*(p, W_2)}{\partial p^\mu} = \sum_{i=1}^3 \Lambda_\mu(p, p, V_i^{(2)}) = \Lambda_\mu(p, p, V_2), \quad (16.95)$$

то оператор $\Sigma^*(p, W_2)$ путем интегрирования соотношения (16.95) можно выразить обратно через оператор $\Lambda_\mu(p, p, V_2)$

$$\Sigma^*(p, W_2) - \Sigma^*(p', W_2) = -2\pi \int_{p'}^p \Lambda_\mu(p'', p'', V_2) dp''^\mu. \quad (16.96)$$

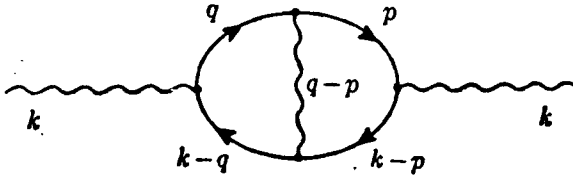
Далее вспомним, что оператор $\Sigma^*(p, W_2)$ при $p = m$, $p^2 = m^2$ равен $2\pi i d m(W_2)$. Поэтому

$$\Sigma^*(p, W_2) - 2\pi i d m(W_2) = -2\pi \int_{p'}^p \Lambda_\mu(p'', p'', V_2) dp''^\mu, \quad (16.97a)$$

где

$$\gamma \cdot p' = m, \quad p'^2 = m^2. \quad (16.97b)$$

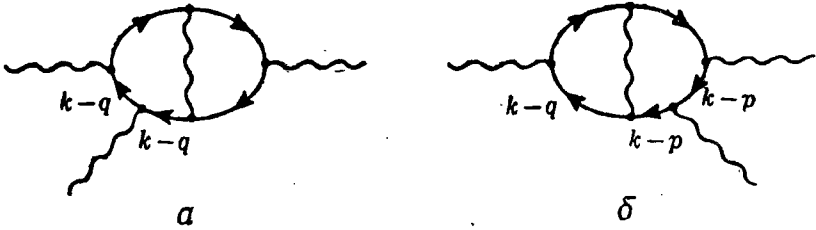
Таким образом, если в формулу (16.97) подставить выражение для оператора $\Lambda_\mu(p'', p''; V_2)$ (соответствующего собственной вершинной



Ф и г. 125.

части) с уже отделенными расходимостями, то для оператора $\Sigma^*(p, W_2)$ получится выражение, в котором расходимости будут отделены и классифицированы. При этом мы нигде не встретимся с трудностями, связанными с проблемой перекрывания.

Аналогичную процедуру можно разработать для перекрывающихся расходимостей, соответствующих фотонным собственно-энергетическим



Ф и г. 126.

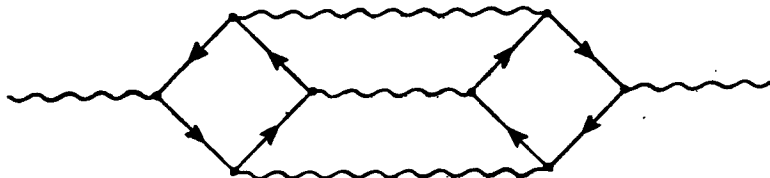
частям. Так, рассмотрим, например, собственную собственно-энергетическую диаграмму, показанную на фиг. 125, которой соответствует фотонный собственно-энергетический оператор $\Pi^*(k, W_2)$. Обратим внимание на импульсы, приписанные внутренним электронным линиям. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{1}{\gamma \cdot (k-q) - m} = - \frac{1}{\gamma \cdot (k-q) - m} \gamma^\mu \frac{1}{\gamma \cdot (k-q) - m}, \quad (16.98)$$

то оператор $\Delta_\mu(k, k; W_2')$, получающийся при дифференцировании оператора $\Pi^*(k, W_2)$ по k_μ , можно построить по диаграммам а и б фиг. 126, которые получаются путем присоединения внешней фотонной линии с равным нулю импульсом к тем электронным линиям диаграммы фиг. 125, которые переносят внешний импульс.

Расходимость полученных диаграмм снова оказывается слабее расходимости диаграммы фиг. 125. В самом деле, диаграммам фиг. 126, представляющим оператор $\Delta_\mu(k, k; W_2')$, соответствуют только логарифмические расходимости (линейные расходимости не возникают благодаря лоренц-инвариантности). Кроме того, расходимости могут быть отделены

без каких-либо затруднений и произвола. Раз расходимости отделены, то оператор Π^* снова можно найти, интегрируя по конечному интервалу. В более высоких порядках ситуация оказывается несколько сложнее, так как существуют фотонные собственно-энергетические диаграммы, на которых импульс внешнего фотона должны переносить некоторые из внутренних фотонных линий (см., например, фиг. 127). В этом случае дифференцирование по k_μ ведет не к множителю γ_μ , а к множителю k_μ . Одновременно оно будет увеличивать степень знаменателя и, таким образом, снова улучшать сходимость интеграла. Во всяком случае, дифференцирование по k_μ всегда устраняет перекрывающиеся расходимости, поскольку при присоединении фотонной линии с равным нулю импульсом к какой-



Ф и г. 127.

либо части, обладающей перекрывающейся расходимостью, тот элемент диаграммы, к которому непосредственно присоединилась фотонная линия, перестает расходиться — остается только одна из двух перекрывающихся расходимостей.

Посмотрим теперь, как работает метод в общем случае. Начнем с электронных собственно-энергетических частей. Интегрируя соотношение (16.86), получаем

$$\Sigma^*(p) - \Sigma^*(p') = -2\pi \int_{p'}^p dq^\mu \Lambda_\mu(q, q) \quad (16.99a)$$

$$= -2\pi \int_0^1 dx (p^\mu - p'^\mu) \Lambda_\mu(p^x, p^x). \quad (16.99б)$$

Вторая форма [выражение (16.99б)] получается после замены переменной

$$q = p^x = px + (1-x)p',$$

где, по определению, p' — импульс свободного электрона, т. е. подразумевается, что после интегрирования по x величина p'^2 приравнивается m^2 , а величина $\gamma \cdot p'$ приравнивается m (где m — экспериментальное значение массы электрона). При этом с помощью члена $\Sigma^*(p')$ автоматически учтена перенормировка массы, так как, по определению, величина $\Sigma^*(p')$ при $\gamma \cdot p' = m$, $p'^2 = m^2$ равна $2\pi i \delta m^1$). В дальнейшем мы не будем выписывать член $\Sigma^*(p')$, считая, что член δm включен в определение $\Sigma^*(p)$. Как видно из формулы (16.46), оператор Λ_μ будет получен правильно, если в выражениях, соответствующих всем неприводимым вершинным диаграммам, мы заменим все γ_μ на Γ_μ , все S_F на S'_F и все D_F на D'_F , а затем просуммируем весь ряд. Оператор Λ_μ не содержит изгибов, так как он строится из неприводимых

¹⁾ Более подробно импульс p' задавать не нужно, так как он появляется только в составе ковариантных комбинаций $\gamma \cdot p'$ или $p' \cdot p' = p'^2$.

диаграмм, и поэтому конечные части могут быть отделены без затруднений и произвола.

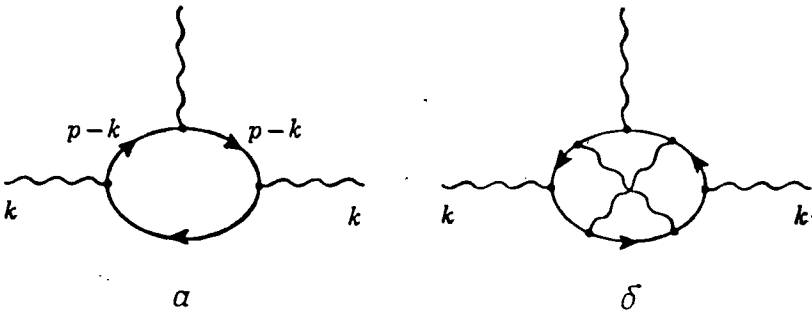
Поступая аналогично, определим оператор Δ_μ с помощью уравнения

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Pi^*(k)}{\partial k^\mu} = \Delta_\mu(k, k), \quad (16.100)$$

так что

$$\Pi^*(k) = -2\pi \int_0^k dq^\mu \Delta_\mu(q, q) = -2\pi \int_0^1 dy k^\mu \Delta_\mu(ky, ky), \quad (16.101)$$

где собственная энергия фотона $\Pi^*(0)$ была приравнена нулю в согласии с требованием калибровочной инвариантности.



Ф и г. 128.

Важно ясно понимать, что данное выше определение Δ_μ как производной Π^* является в действительности неявным определением, которое позволяет вычислять функции Π^* и Δ_μ с помощью некоторого класса неприводимых диаграмм, выбираемых специальным образом. Фактически в интегральные уравнения будет входить не Δ_μ , а функция, определяемая согласно

$$W_\mu(k) = 2k_\mu + \Delta_\mu(k, k). \quad (16.102)$$

Она связана с функцией D'_F соотношением

$$W_\mu(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial k^\mu} [D'_F(k)]^{-1}, \quad (16.103)$$

так что

$$[D'_F(k)]^{-1} = 2\pi \int_0^1 dy k^\mu W_\mu(ky). \quad (16.104)$$

Соотношение (16.104) и показывает, что расходящаяся функция W_μ будет встречаться в интегральных соотношениях, определяющих операторы D'_F , Π^* и т. д.

На языке диаграмм Фейнмана функция W_μ есть вклад всех неприводимых диаграмм, получаемых из фотонных собственно-энергетических диаграмм путем присоединения внешней фотонной линии к электронным линиям, переносящим внешний фотонный импульс (фиг. 128). При выписывании точного матричного элемента по исходным диаграммам Фейнмана снова должны быть сделаны замены: $\gamma_\mu \rightarrow \Gamma_\mu$, $D_F \rightarrow D'_F$ и $S_F \rightarrow S'_F$. Первые два члена: $2k_\mu$ и член, соответствующий простей-

шей контурной диаграмме, даются выражением

$$W_\mu(k) = 2k_\mu - \frac{2}{3} \alpha \int \text{Sp} \{ \Gamma_\nu(p, p+k) S'_F(p+k) \times \\ \times \Gamma_\mu(p+k, p+k) S'_F(p+k) \Gamma_\nu(p+k, p) S'_F(p) \} d^4p + \dots \quad (16.105)$$

Существуют также члены более высоких порядков. Следующий член соответствует диаграмме, содержащей внутри контура две пересекающиеся фотонные линии (см. фиг. 128, б), и т. д. Итак, оба оператора: Λ_μ и W_μ — суть определенные суммы вкладов неприводимых диаграмм, которые в худшем случае расходятся логарифмически.

Теперь можно дать схему построения (последовательными приближениями) конечных частей функций Γ_μ , S'_F и D'_F , которые должны вставляться в скелетные диаграммы при вычислении точных матричных элементов.

С этой целью напомним, что оператор Γ_μ расходится логарифмически, так что оператор $\Gamma_{\mu 1}$, определяемый согласно

$$\Gamma_{\mu 1}(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_1, p_2) - \Lambda_\mu(p'_1, p'_1), \quad (16.106)$$

где p'_1 — снова 4-импульс свободного электрона (т. е. $\gamma \cdot p'_1 = m$, $p_1^2 = m^2$), будет конечным. Вспомним также, что оператор Λ_μ может расходиться линейно, поскольку оператор Π^* расходится квадратично. [В действительности лоренц-инвариантность понижает эту расходимость до логарифмической, так как не существует инвариантного 4-вектора, т. е. постоянная $\Lambda_\mu(0, 0)$ в формуле (16.107) равна нулю.] Поэтому величина

$$\Delta_\mu(yk, yk) - \Delta_\mu(0, 0) - (yk)_\nu \left(\frac{\partial \Delta_\mu(yk, yk)}{\partial (yk)_\nu} \right)_{k=0} \quad (16.107)$$

является конечной. Далее, следуя Уорду, произведем вычитания, делающие конечными ядра в уравнениях (16.34) — (16.37). Решениями этих новых уравнений будут конечные функции S'_{F1} , D'_{F1} и $\Gamma_{\mu 1}$. Таким образом, приходим к уравнениям

$$S'_{F1}(p) = S_F(p) - 2\pi S_F(p) \int_0^1 dx (p^\mu - p'^\mu) \{ \Lambda_\mu(p^x, p^x) - \Lambda_\mu(p', p') \} S'_{F1}(p), \quad (16.108)$$

$$D'_{F1}(k) = D_F(k) - 2\pi D_F(k) \int_0^1 dy k^\mu \times \\ \times \left\{ \Delta_\mu(yk, yk) - \Delta_\mu(0, 0) - (yk)_\nu \left(\frac{\partial \Delta_\mu(yk, yk)}{\partial (yk)_\nu} \right)_{k=0} \right\} D'_{F1}(k), \quad (16.109)$$

$$\Gamma_{\mu 1}(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_1, p_2) - \Lambda_\mu(p'_1, p'_1), \quad (16.110)$$

Операторы S'_{F1} , D'_{F1} , $\Gamma_{\mu 1}$, определяемые интегральными уравнениями (16.108) — (16.110), будут конечными. Постоянную e в этих модифицированных уравнениях заменим всюду другой постоянной e_1 . Теперь покажем, что если e_1 — подходящим образом выбранная функция постоянных e и m , тогда модифицированные функции $S'_{F1}(p, e_1)$, $D'_{F1}(k, e_1)$ и $\Gamma_{\mu 1}(p_1, p_2, e_1)$ отличаются от первоначальных расходящихся функций $S'_F(p, e)$, $D'_F(k, e)$, $\Gamma_\mu(p_1, p_2; e)$ только общими множителями. Другими словами, модификация первоначальных интегральных уравнений (16.34) — (16.37) путем вычитания бесконечных членов эквивалентна перенормировке

заряда. Точнее говоря, мы покажем, что конечные и соответствующие бесконечные функции, определяемые уравнениями (16.34), (16.36а) и (16.37), связаны следующим образом

$$S'_F(p; e) = Z_2(e_1) S'_{F1}(p; e_1), \quad (16.111)$$

$$D'_F(k; e) = Z_3(e_1) D'_{F1}(k; e_1), \quad (16.112)$$

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2; e) = Z_1^{-1}(e_1) \Gamma_{\mu 1}(p_1, p_2; e_1), \quad (16.113)$$

где Z_1, Z_2, Z_3 — бесконечные константы, подлежащие определению, а

$$e_1 = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e. \quad (16.114)$$

Эти соотношения, впервые выведенные Дайсоном [194], позволяют интерпретировать *вычитание* бесконечных констант как *выделение* бесконечных постоянных множителей.

Доказательство перенормируемости квантовой электродинамики проводится в два этапа: первый этап состоит в выборе вычитательной процедуры (или регуляризации) с целью сделать конечными интегралы, которые без этого расходятся; второй этап посвящается доказательству, что это вычитание (или регуляризация) эквивалентно перенормировке, т. е. что отбрасывание расходящихся членов равнозначно изменению значений параметров, через которые была записана первоначальная перенормированная теория, например постоянных m_0 и e .

В справедливости соотношений (16.111), (16.112) и (16.113) можно убедиться, подставляя выражения (16.111)–(16.113) для величин S'_F , D'_F и Γ_μ в первоначальную систему определяющих их уравнений:

$$S'_F = S_F + S_F \Sigma^* S'_F, \quad (16.115)$$

$$D'_F = D_F + D_F \Pi^* D'_F, \quad (16.116)$$

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu + \sum_{\substack{\text{по всем неприменимым} \\ \text{видимым } V^i}} \Lambda_\mu(V^i), \quad (16.117)$$

где операторы Σ^* и Π^* даются формулами (16.44) и (16.45) соответственно. Далее, в выражении (16.46) для Γ_μ каждый член с коэффициентом $(e^2)^n$ содержит ровно n функций D'_F , $2n$ функций S'_F и $(2n+1)$ функций Γ . Поэтому если в выражении для Γ заменить e на e_1 по формуле (16.114), а D'_F , S'_F и Γ_μ — их конечными прообразами, с которыми они связаны соотношениями (16.111), (16.112) и (16.113), то мы получим

$$\Lambda_\mu(e, \Gamma_\mu, S'_F, D'_F) = Z_1^{-1} \Lambda_\mu(e_1, \Gamma_{\mu 1}, S'_{F1}, D'_{F1}). \quad (16.118)$$

Аналогично, в выражении (16.105) для Δ_μ каждый член с коэффициентом $(e^2)^n$ содержит $(2n+1)$ функций Γ и S'_F и $(n-1)$ функций D'_F , так что если мы снова заменим e на e_1 , S'_F на S'_{F1} , D'_F на D'_{F1} и Γ_μ на $\Gamma_{\mu 1}$, то найдем

$$\Delta_\mu(e, \Gamma_\mu, S'_F, D'_F) = Z_1^{-1} Z_3^{-1} Z_2 \Delta_\mu(e_1, \Gamma_{\mu 1}, S'_{F1}, D'_{F1}) \quad (16.119a)$$

или

$$W_\mu(e, \Gamma_\mu, S'_F, D'_F) = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{-1} W_\mu(e_1, \Gamma_{\mu 1}, S'_{F1}, D'_{F1}). \quad (16.119b)$$

Используя все это, соотношения (16.99) и (16.101) можно переписать в виде

$$\Sigma^*(p; e_1) = -2\pi Z_1^{-1} \int_0^1 dx (p^\mu - p'^\mu) \Lambda_\mu(p^x, p^x; e_1, \Gamma_1, S'_{F1}, D'_{F1}) \quad (16.120)$$

и

$$\Pi^*(k; e_1) = -2\pi Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{-1} \int_0^1 dy k^\mu \Delta_\mu(yk, yk; e_1, \Gamma_1, S'_{F1}, D'_{F1}). \quad (16.121)$$

Интегральные уравнения (16.115), (16.116) и (16.117) после подстановки в них выражений (16.120) и (16.121) принимают вид

$$Z_2 S'_{F1}(e_1) = S_F - 2\pi S_F \times \\ \times Z_1^{-1} Z_2 \int_0^1 dx (p^\mu - p'^\mu) \Lambda_\mu(p^x, p^x; e_1, \Gamma_1, S'_{F1}, D'_{F1}) \cdot S'_{F1}(e_1). \quad (16.122)$$

$$Z_3 D'_{F1}(e_1) = D_F - 2\pi D_F \times \\ \times Z_1^{-1} Z_2 \int_0^1 dy k^\mu \Delta_\mu(yk, yk; e_1, \Gamma_1, S'_{F1}, D'_{F1}) \cdot D'_{F1}(e_1), \quad (16.123)$$

$$Z_1^{-1} \Gamma_{\mu 1}(e_1) = \gamma_\mu + Z_1^{-1} \Lambda_\mu(e_1, \Gamma_1, S'_{F1}, D'_{F1}). \quad (16.124)$$

Эти уравнения должны тождественно совпадать с интегральными уравнениями (16.108), (16.109) и (16.110) для конечных операторов S'_{F1} , D'_{F1} и $\Gamma_{\mu 1}$. Обе системы уравнений действительно совпадут, если в уравнениях (16.110) и (16.124)

$$Z_1(e_1) \gamma_\mu = \gamma_\mu - \Lambda_\mu(p', p'; e_1). \quad (16.125a)$$

Сопоставляя это равенство с соотношениями (16.73) и (16.94), выясняем, что

$$Z_1(e_1) = 1 + B(e_1) = 1 - L(e_1). \quad (16.125b)$$

Если теперь подставить это значение в уравнение (16.108), то станет ясным, что уравнения (16.122) и (16.108) совпадают при условии, что

$$Z_1 = Z_2, \quad (16.126)$$

и, наконец, уравнения (16.109) и (16.123) совпадут, если

$$(Z_3 - 1) k^2 = i k^\mu k^\nu \int_0^1 dy y \left(\frac{\partial \Delta_\mu(ky, ky)}{\partial (ky)^\nu} \right)_{k=0} \quad (16.127)$$

или, следовательно, если

$$Z_3 = 1 + k^{-2} k^\mu k^\nu C_{\mu\nu}, \quad (16.128a)$$

где

$$C_{\mu\nu} = i \int_0^1 dy y \left(\frac{\partial \Delta_\mu(ky, ky)}{\partial (ky)^\nu} \right)_{k=0}. \quad (16.128b)$$

При получении соотношения (16.127) мы воспользовались тем, что в соответствии с требованием ковариантности в формуле (16.109) $\Delta_\mu(0, 0) = 0$. Наконец, ковариантность требует также, чтобы $C_{\mu\nu} = C g_{\mu\nu}$, так что

$$Z_3 = 1 + C, \quad (16.129)$$

причем величина $C g_{\mu\nu}$ дается формулой (16.128b).

Итак, мы показали, что соотношения (16.141) — (16.143) верны, если постоянная e_1 дается выражением (16.144) и если множители Z определены соотношениями (16.125), (16.126) и (16.129).

Чтобы продвинуться дальше в понимании процедуры перенормировок, вспомним, что собственно-энергетический оператор после перенормировки массы можно записать в виде

$$\Sigma^*(p) = 2\pi B (\gamma \cdot p - m) + S_C(p) (\gamma \cdot p - m) \quad (16.130)$$

[см. формулу (16.71)], где оператор $S_C(p)$ обращается в нуль при $\gamma \cdot p = m$. Соотношения (16.130) и (16.87) позволяют заключить, что функция распространения представима в виде

$$\begin{aligned} S'_F(p) &= \frac{1}{S_F^{-1}(p) - \Sigma^*(p)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1+B}{\gamma \cdot p - m} + (\text{Члены, конечные при } \gamma \cdot p = m) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{Z_2}{\gamma \cdot p - m} + (\text{Члены, конечные при } \gamma \cdot p = m), \end{aligned} \quad (16.134)$$

так что

$$\lim_{\gamma \cdot p \rightarrow m} 2\pi (\gamma \cdot p - m) S'_{F1}(p; e_1) = 1. \quad (16.132)$$

Аналогично можно проверить, что

$$\Gamma_{\mu 1}(p_1, p_2) \Big|_{\gamma \cdot p_1 = \gamma \cdot p_2 = m} = \gamma_\mu \quad (16.133)$$

и

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} 2\pi k^2 D'_{F1}(k) = 1. \quad (16.134)$$

Эти соотношения означают, что к движению свободного электрона или фотона нет наблюдаемых радиационных поправок ни в каком порядке по константе связи. По сути дела эти соотношения можно рассматривать как определения перенормировки массы и заряда, выражающие требования, чтобы свободный (физический) электрон имел определенную массу m (экспериментальное значение массы электрона) и определенный заряд e_1 (экспериментальное значение заряда электрона) и чтобы свободный фотон двигался в свободном пространстве без возмущений и обладал массой, равной нулю.

Теперь обратимся к соотношениям (16.35). Вспоминая, что вектор p в этих соотношениях есть импульс свободного электрона и что вблизи $\gamma \cdot p = m$

$$\Sigma^*(p) = 2\pi (Z_2 - 1) (\gamma \cdot p - m), \quad (16.135)$$

мы можем переписать соотношение (16.35) в виде

$$\psi'(p) = \psi(p) + 2\pi (Z_2 - 1) S_F(p) (\gamma \cdot p - m) \psi(p). \quad (16.136)$$

Выражение (16.136) содержит неопределенность, поскольку при действии оператора $\gamma \cdot p - m$ на спинор $\psi(p)$ получается нуль, а при действии его на функцию распространения $S_F(p)$ — постоянная $1/2\pi$. Таким образом, в зависимости от порядка, в котором перемножаются множители, выражение (16.136) для $\psi'(p)$ оказывается равным либо $\psi(p)$, либо $Z_2\psi(p)$. При обсуждении в § 3 гл. 15 мы уже видели, что эта неопределенность раскрывается, если вычисления S -матрицы проводятся с большей тщательностью, так чтобы на всех этапах вычислений была

гарантирована унитарность S -матрицы. Укажем, что на самом деле правильная перенормировка волновой функции записывается в виде

$$\psi'(p) = Z_2^{1/2} \psi(p) \quad (16.137)$$

(см. также работу Карплуса и Кролла [422]). Аналогичные исследования показывают, что

$$\tilde{\psi}'(p) = Z_2^{1/2} \tilde{\psi}(p) \quad (16.138)$$

и

$$A'_\mu(k) = Z_3^{1/2} A_\mu(k). \quad (16.139)$$

Рассмотрим теперь неприводимый матричный элемент M для какого-либо процесса. Пусть соответствующая диаграмма состоит из F_e внешних электронных линий, B_e внешних фотонных линий и n вершин. Тогда в соответствии с анализом, проведенным в настоящем параграфе, матричный элемент M будет содержать n множителей Γ_μ , F_e множителей ψ или $\tilde{\psi}$, B_e множителей A , F_i множителей S'_F , соответствующих F_i внутренним электронным линиям, и B_i множителей D'_F , соответствующих внутренним фотонным линиям. Напомним, что числа внутренних и внешних линий связаны соотношением

$$n = \frac{1}{2} F_e + F_i = B_e + 2B_i. \quad (16.140)$$

Поэтому если в матричном элементе M заменить операторы Γ_μ , S'_F и D'_F их конечными прообразами $\Gamma_{\mu 1}$, S'_{F1} и D'_{F1} с помощью соотношений (16.111), (16.112) и (16.113), тогда множители Z будут появляться в матричном элементе только в комбинации

$$(Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{1/2})^n.$$

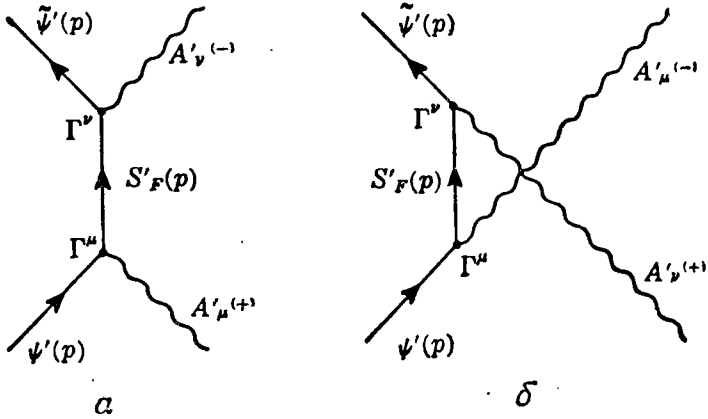
А это именно тот дополнительный множитель, который превращает общий множитель e^n матричного элемента M в множитель e_1^n . Таким образом, и константа связи e , и множители Z исчезают из матричного элемента M , оставляя после себя только конечные операторы $\Gamma_{\mu 1}(e_1)$, $D'_{F1}(e_1)$, $S'_{F1}(e_1)$ и константу e_1 . Если теперь отождествить константу e_1 с наблюдаемым конечным зарядом электрона, то в матричном элементе M больше не останется никаких расходящихся выражений. Так как матричный элемент M предполагался совершенно общим, то тем самым завершено полное исключение всех ультрафиолетовых расходимостей из S -матрицы¹⁾.

Этот параграф мы окончим замечанием, что равенство $Z_1 = Z_2$ [соотношение (16.126)] снова свидетельствует о сокращении (во всех порядках) расходимостей, приводящих к перенормировке волновой функции, с расходимостями вершинной части. Это прямое следствие тождества Уорда и тем самым калибровочной инвариантности. Таким образом, единственной подлинной расходимостью в квантовой электродинамике является расходимость собственной энергии фотона, т. е. расходимость, связанная с явлением поляризации вакуума. Она выражается расходящейся константой Z_3 .

¹⁾ Инфракрасные расходимости и их сокращение в рамках программы перенормировок обсуждаются у Нуха и Рорлиха [390] и Йенни, Фраучи и Суура [875].

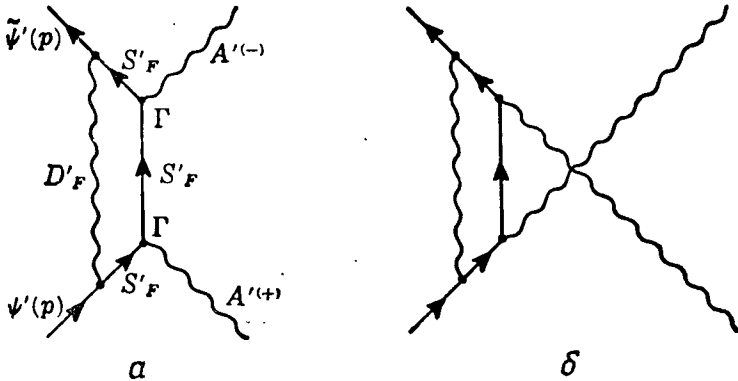
§ 7. Смысл перенормировки заряда

Чтобы выяснить смысл перенормировки заряда, рассмотрим комптоновское рассеяние фотона с малой энергией на свободном электроне [774]. Имеются два класса неприводимых диаграмм, вносящих вклад. Первый исчерпывается диаграммами *a* и *б* фиг. 129. Примеры диаграмм



Ф и г. 129.

второго класса показаны на фиг. 130. Второй класс диаграмм может быть получен путем присоединения двух внешних фотонных линий к диаграмме Σ^* , как это показано на фиг. 131. В предельном случае



Ф и г. 13 .

фотонов с равной нулю частотой вклад диаграмм фиг. 129 в матричный элемент равен (со всеми радиационными поправками) выражению

$$M_a = (2\pi)^2 e^2 \tilde{\psi}'(p) \{ \Gamma^\mu(p, p) S'_F(p) \Gamma^\nu(p, p) + \Gamma^\nu(p, p) S'_F(p) \Gamma^\mu(p, p) \} \psi'(p) A_{\mu}^{(+)} A_{\nu}^{(-)}, \quad (16.141)$$

где p — импульс электрона, $A'^{(+)}$ и $A'^{(-)}$ — операторы рождения и уничтожения фотонов с равной нулю частотой, включающие радиационные поправки. В согласии с обсуждением в § 5 [особенно см. формулу (16.92)] диаграмме фиг. 131 соответствует матричный элемент

$$M_6 = e^2 \tilde{\psi}'(p) \frac{\partial^2 \Sigma^*(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \psi'(p) A'_\mu^{(+)} A'_\nu^{(-)}. \quad (16.142)$$

Используя тождество

$$\frac{\partial S'_F(p)}{\partial p_\mu} = -S'_F(p) \frac{\partial S'^{-1}_F(p)}{\partial p_\mu} S'_F(p) \quad (16.143)$$

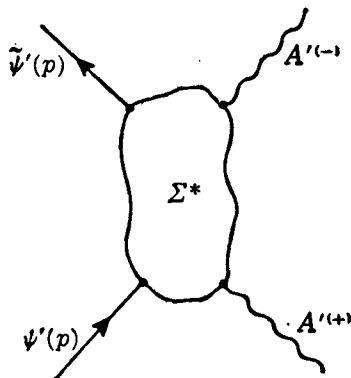
и соотношение (16.88), без труда находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S'_F(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} = & (2\pi)^2 \{ S'_F(p) \Gamma^\nu(p, p) S'_F(p) \Gamma^\mu(p, p) S'_F(p) + \\ & + S'_F(p) \Gamma^\mu(p, p) S'_F(p) \Gamma^\nu(p, p) S'_F(p) \} + \\ & + S'_F(p) \frac{\partial^2 \Sigma^*(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} S'_F(p). \end{aligned} \quad (16.144)$$

Таким образом, полный матричный элемент M можно записать в виде

$$M = M_a + M_6 = e^2 \tilde{\psi}'(p) \left\{ S'^{-1}_F(p) \frac{\partial^2 S'_F(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} S'^{-1}_F(p) \right\} \psi'(p) A'_\mu^{(+)} A'_\nu^{(-)}. \quad (16.145)$$

Подставляя сюда выражения (16.131), (16.137) — (16.139) и выполняя операции, указанные в фигурных скобках, найдем, что все множители



Ф и г. 131.

Z_2 сокращаются и матричный элемент M принимает вид

$$M = Z_3 e^2 \tilde{\psi}(p) \{ \gamma^\mu S_F(p) \gamma^\nu + \gamma^\nu S_F(p) \gamma^\mu \} \psi(p) A'_\mu^{(+)} A'_\nu^{(-)}. \quad (16.146)$$

Далее следует учесть, что $Z_3 e^2 = e_1^2$. Таким образом, точный матричный элемент M рассеяния фотонов с нулевой энергией строго равен матричному элементу, вычисленному во втором порядке теорий возмущений

(в борновском приближении). Следовательно, в этом параграфе все радиационные поправки исчезают. Матричный элемент M приводит к известной формуле Томсона

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e_1^2}{4\pi mc^2} \right) \quad (16.147)$$

(вывод см. в § 5 гл. 14 и у Брауна и Фейнмана [91], где рассмотрены также радиационные поправки).

Как мы видим, перенормировка заряда может быть определена требованием, чтобы теоретическое сечение комптон-эффекта в пределе низких энергий выражалось экспериментально оправданной формулой Томсона. Этим определяется экспериментальное значение перенормированного заряда электрона e_1 .

Физическая основа сделанного утверждения та, что томсоновское рассеяние является чисто классическим эффектом и зависит только от полного заряда. Длина волны фотона в данном случае столь велика, что не существенны никакие детали распределения заряда рассеивателя. Поскольку благодаря закону сохранения заряда радиационные поправки не могут изменять полного заряда, то формулу Томсона и в самом деле можно использовать для определения экспериментального значения перенормированного заряда электрона e_1 .

Другой способ определить заряд можно было бы выразить требованием, чтобы для взаимодействия двух далеких друг от друга покоящихся электронов был справедлив закон Кулона. Этот способ приведет к тому же значению константы e_1 . И вообще можно показать [411, 413], что перенормировка заряда в квантовой электродинамике по сути дела определяется однозначно как следствие закона сохранения заряда.

§ 8. Общие замечания

Итак, мы рассмотрели проблему перенормируемости спинорной квантовой электродинамики. Салам [691] доказал перенормируемость теорий заряженных скалярных и псевдоскалярных бозонов, взаимодействующих с электромагнитным полем. В этом случае перенормировки массы и заряда недостаточно, и чтобы последовательно уничтожить все расходимости, соответствующие диаграмме меллеровского рассеяния одной бесспиновой частицы на другой, в лагранжиан должен быть добавлен контрчлен $\lambda : (\varphi^* \varphi)^2$: (λ — бесконечная константа). Доказательство перенормируемости, т. е. соотношений типа (16.111) — (16.114), в этом случае намного труднее, чем в спинорной электродинамике, из-за более сложных перекрытий. Уорд [818] развил свой метод, изложенный в § 6 настоящей главы, и охватил эти случаи. Однако точно так же, как и в спинорной электродинамике, подход Салама, по-видимому, более прозрачен и дает более ясную физическую картину метода перенормировок, чем более простой, но более формальный и неявный подход Уорда.

Салам [689, 690] также дал доказательство перенормируемости теории взаимодействующих мезонного и нуклонного полей в случае связей без производных. В теории псевдоскалярных мезонов в гамилтониан снова должны быть добавлены контрчлены $\lambda' : (\varphi^* \varphi)^2$: для заряженных мезонов и $\lambda'' : \varphi^4$: для нейтральных. В теории скалярных мезонов, как было отмечено в § 1 настоящей главы, помимо члена φ^4 , должен быть добавлен член $\lambda''' : \varphi^3$; он нужен для того, чтобы скомпенсировать расходимости диаграмм с тремя внешними мезонными линиями. Мэтьюз [540, 541, 542], Салам [688] и Уорд [818] показали, что без каких-либо существенно новых

усложнений можно перенормировать комбинацию взаимодействий мезонного, нуклонного, фотонного и электронно-позитронного полей.

Вычислительные методы были развиты в настоящей главе на основе обычного представления взаимодействия и применялись только для устранения расходимостей S -матрицы. Существуют и другие методы устранения расходимостей. Например, по аналогии с контрчленом перенормировки массы можно ввести в лагранжиан контрчлен, компенсирующий эффекты перенормировки заряда. Тогда с самого начала можно работать прямо с перенормированным зарядом, подобно тому как работают с перенормированной массой. Такую формулировку развил Гупта [343]. (На самом деле в формализме Гупты перенормировка заряда представлена как перенормировка единицы измерения электромагнитного поля, а не как перенормировка константы связи.) Такеда [767] использовал вариант метода Салама для вывода требующихся контрчленов. Превосходное изложение этих методов дано в статье Мэтьюза и Салама [545], где, кроме того, аналогично ясным и простым образом рассмотрены проблемы мезонных взаимодействий. Все эти методы эквивалентны в том смысле, что они связаны друг с другом при помощи (неограниченных) «унитарных» преобразований.

Для иллюстрации этого метода рассмотрим случай нейтрального псевдоскалярного мезонного поля, взаимодействующего с фермионным полем. Лагранжиан теории имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} : \mu^2 \varphi^2(x) + \partial_\nu \varphi \partial^\nu \varphi(x) : - \frac{1}{4} \left[\tilde{\psi}(x), (-i\gamma \cdot \partial + M) \psi(x) \right] - \\ & - \frac{1}{4} [i\partial_\mu \tilde{\psi}(x) \gamma^\mu + M \tilde{\psi}(x), \psi(x)] + \frac{1}{2} \delta M [\tilde{\psi}(x), \psi(x)] - \\ & - \frac{1}{2} G [\tilde{\psi}(x) \gamma_5, \psi(x)] \varphi(x) - \frac{1}{2} \delta \mu^2 : \varphi^2(x) : - \delta \lambda : \varphi^4(x) :, \quad (16.148) \end{aligned}$$

где члены с $\delta \mu^2$, δM суть контрчлены перенормировки массы, а $\delta \lambda : \varphi^4(x) :$ — контрчлен мезон-мезонной расходимости. Определим теперь «перенормированные» операторы Φ_R и Ψ_R и перенормированную константу связи G_R :

$$\Phi(x) = Z_3^{1/2} \Phi_R(x), \quad (16.149)$$

$$\Psi(x) = Z_2^{1/2} \Psi_R(x), \quad (16.150)$$

$$G = Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} Z_1 G_R. \quad (16.151)$$

Константы перенормировки Z_1 , Z_2 и Z_3 запишем в виде

$$Z_1 = 1 - L, \quad (16.152)$$

$$Z_2 = 1 + B, \quad (16.153)$$

$$Z_3 = 1 + C, \quad (16.154)$$

где L , B и C — бесконечные константы, аналогичные величинам $L(e_1)$, $B(e_1)$ и $C(e_1)$, встречавшимся в электродинамике. (Только в данном случае $L \neq B$, так как здесь нет тождества Уорда.)

Лагранжиан (16.148), выраженный через перенормированные величины, можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{0R} + \mathcal{L}_{IR}, \quad (16.155a)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & -\frac{1}{2} : \mu^2 \varphi_R^2(x) + \partial_\nu \varphi_R \partial^\nu \varphi_R(x) : - \frac{1}{4} [\tilde{\psi}_R(x), (-i\gamma \cdot \partial + M) \psi_R(x)] - \\ & - \frac{1}{4} [i\partial_\mu \tilde{\psi}_R(x) \gamma^\mu + M \tilde{\psi}_R(x), \psi_R(x)], \end{aligned} \quad (16.155b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & -\frac{1}{2} C : (\mu^2 \varphi_R^2 + \partial_\nu \varphi_R \partial^\nu \varphi_R) : - \frac{1}{4} B [\tilde{\psi}_R(x), (-i\gamma \cdot \partial + M) \psi_R(x)] - \\ & - \frac{1}{4} B [i\gamma_\mu \tilde{\psi}_R(x) \gamma^\mu + M \tilde{\psi}_R(x), \psi_R(x)] - \frac{1}{2} \delta \mu^2 Z_3 : \varphi_R^2(x) : - \\ & - \frac{1}{2} \delta M Z_2 [\tilde{\psi}_R(x), \psi_R(x)] - \delta \lambda Z_3^2 : \varphi_R^4(x) : - Z_1 G_R \frac{1}{2} [\tilde{\psi}_R(x) \gamma_5, \psi_R(x)] \varphi_R(x). \end{aligned} \quad (16.155в)$$

Лагранжиан \mathcal{L}_0 определяет новую «перенормированную» картину взаимодействия, в которой перенормированные операторы φ_R и ψ_R удовлетворяют уравнениям движения и перестановочным соотношениям для свободных полей. Новые контрчлены в \mathcal{L}_I точно компенсируют все расходимости, к которым приводит взаимодействие¹⁾.

Вкратце обсудим ограничивающие предположения, в рамках которых теория перенормировок излагалась до сих пор. Первое и наиболее существенное — то, что все исследование выше (например, дайсоновский анализ примитивных расходимостей) существенно опиралось на разложение S -матрицы в ряд по степеням константы связи. Кроме того, при этом молчаливо предполагалось, что ряд, в который разложена S -матрица, сходится после проведения перенормировок. Известно, что в теории, в которой существует возможность захвата в стационарные связанные состояния, ряды после перенормировки расходятся [245, 577]. В этом случае ряд теории возмущений для амплитуды расходится даже в нерелятивистской квантовой механике [403]. Причина расходимости рядов в релятивистской теории поля та же самая. Ферретти [245] провел подробное исследование этого вопроса. Он анализировал унитарный оператор

$$V(t) = \prod_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_{n+1}}^{t_n} \lambda(t') H_I(t') dt' \right\}, \quad (16.156)$$

где t_0, t_1, \dots, t_n — последовательность времен от $-\infty$ до t , в пределе становящихся бесконечно близкими друг к другу. Оператор $V(t)$ диагона-

¹⁾ Обсуждение следствий того факта, что к постоянным Z_1, Z_2 и Z_3 всегда можно добавить конечные части, не меняя при этом наблюдаемых следствий при соответствующем переопределении константы связи, читатель может найти у Штюкельберга [922], Гелл-Мана и Лоу [304], а также Боголюбова и Ширкова [64, 67] (особенно см. гл. VIII книги [67]). (Применение этой группы преобразований, так называемой ренормгруппы, в физике высоких энергий см. в работе [880]. — *Прим. ред.*)

лизует полный гамильтониан $H_0 + \lambda H_I$, т. е. он выбран так, чтобы оператор

$$E(\lambda) = V^{-1}(t) (H_0 + \lambda H_I) (t) V(t) \quad (16.157)$$

был диагонален в представлении, в котором диагонален гамильтониан H_0 . В выражении (16.156) Ферретти явно отразил адиабатическую гипотезу, допустив, что константа связи λ является функцией времени, $\lambda = \lambda(t)$. Предполагалось, что функция $\lambda(t)$ очень медленно возрастает от значения $\lambda = 0$ при $t = -\infty$ до значения $\lambda = 1$ при $t' = t$. Как было установлено ранее, это необходимо для того, чтобы придать оператору $V(t)$ строгий смысл.

Если теперь формально разложить произведение $V(t)$ в ряд по степеням константы связи, то получим

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \lambda(t_1) H_I(t_1) \dots \lambda(t_n) H_I(t_n). \quad (16.158)$$

Ферретти проанализировал условия, при которых оператор $V(t)$ равен оператору $S(t)$. Он в совершенно общем виде показал, что они не будут равны, если полный гамильтониан $H_0 + \lambda H_I$ обладает дискретным спектром собственных значений. Это верно даже тогда, когда сами дискретные собственные значения могут быть вычислены по теории возмущений (в виде ряда). Фактически Ферретти смог показать, что в случае, когда имеются дискретные собственные значения, ряд для $S(t)$ расходится (см. также работу Глезера и Циммермана [317]). Поэтому если даже оставить в стороне вопрос сходимости, то перенормировка S -матрицы в том виде, как она изложена в настоящей главе, строго говоря, применима только в случае чистых процессов рассеяния свободных частиц, когда нет никаких связанных состояний.

Кайаньелло [100] и Йенни и Гартенхауз [874] исследовали сходимость матричных элементов оператора $U(t, t')$ при разложении по степеням константы связи. Они показали, что в нелокальной теории с гамильтонианом взаимодействия

$$H_I = G \int d^4x \int d^4x' \int d^4x'' K(x - x', x - x'') : \tilde{\psi}(x') \psi(x'') : \varphi(x)$$

амплитуда перехода за конечный интервал времени для любого процесса почленно мажорируется экспоненциальным рядом. Далее было показано, что при таком взаимодействии элементы матрицы U , рассматриваемые как степенные ряды по неперенормированной константе связи G , сходятся в круге с бесконечным радиусом (сходимость обуславливается сокращениями вкладов от различных диаграмм Фейнмана). Однако в предельном случае $t - t' \rightarrow \infty$ не было получено определенных результатов. Некоторые выводы подобного рода были сделаны Йенни и Гартенхаузом, но они основывались на предположении о законности адиабатического выключения взаимодействия и, следовательно, предполагалось отсутствие переходов из состояния вакуума в другие состояния. Однако если доверять некоторым соображениям Дайсона [200], то это предположение представляет собой открытый вопрос.

Дайсон [200] привел аргументы в пользу того, что разложение S -матрицы в квантовой электродинамике в лучшем случае можно считать

только асимптотическим. Ход его мысли был следующий. Предположим, что вычисляется физическая наблюдаемая величина в виде ряда по степеням константы связи e^2 . Если этот ряд сходится при некотором положительном значении e^2 , то он должен сходиться в некотором круге радиуса e^2 с центром в начале комплексной плоскости $Z = e^2$. Поэтому ряд должен сходиться также и при $e=0$ и, кроме того, на некотором интервале отрицательной действительной полуоси, т. е. при отрицательных значениях e^2 . Отрицательные значения e^2 соответствуют миру, в котором одноименные заряды притягиваются друг к другу, а разноименные — отталкиваются¹⁾. Однако если постоянная e^2 отрицательна, тогда состояние, в котором имеется большое число N электронно-позитронных пар (причем электроны сгруппировались в области пространства V_1 , а позитроны — в другой, удаленной от V_1 области V_2), имело бы при достаточно большом значении N энергию, меньшую энергии вакуума. Иначе говоря, если силы между одноименными зарядами притягивающие и действующие, тогда энергия связи большого собрания частиц могла бы превысить энергию, необходимую для их рождения. Поэтому состояние вакуума нестабильно по отношению к таким состояниям. Чем больше число пар, тем более резко выражается эффект. Следовательно, члены ряда все более и более высоких порядков должны играть все более и более существенную роль, поэтому ряды не могут сходиться.

В лучшем случае ряды могут быть только асимптотическими. Расходимость рядов будет становиться заметной только тогда, когда рассматриваются члены очень высоких порядков. Дайсон оценил, что в квантовой электродинамике члены рядов сперва убывают до минимума, а затем безгранично возрастают, причем номер минимального члена порядка величины $\frac{1}{\alpha} \sim 137$.

Редмонд и Урецкий [662] выдвинули некоторые аргументы в пользу того, что в действительности функции распространения D_F и S_F обладают существенной особенностью как функции константы связи g при $g=0$. Ясно, что при таких обстоятельствах любое разложение по степеням константы связи в лучшем случае будет асимптотическим. Мы вернемся к этим вопросам в гл. 17, после получения замкнутых выражений для функций распространения и перенормировочных констант Z_1 , Z_2 , Z_3 , записанных через гейзенберговские операторы.

Несомненно, что читатель с математическими наклонностями выразит в этом месте серьезные сомнения в обоснованности и осмысленности программы перенормировок, поскольку в этой программе в качестве отправной точки принимается система бессмысленных уравнений, с которыми далее для получения (предположительно) конечных результатов манипулируют по правилам, лежащим вне рамок традиционной математики (не говоря уже о том, что эти предписания, как это изложено в настоящей главе, рассчитаны только на применение к решению «бессмысленных уравнений» с помощью разложения в степенные ряды, которые, по всей вероятности, даже не сходятся!).

В действительности Челлен [409] и Валатин [799—803] дали обобщение метода перенормировок, освободившее его от ограниченности, связан-

¹⁾ Этот аргумент, по-видимому, не вполне убедителен, поскольку отрицательность e^2 , т. е. мнимость константы связи в первоначальном лагранжиане, означает, что лагранжиан \mathcal{L} неэрмитов и что, следовательно, вероятности не обязательно сохраняются.

ной с использованием рядов теории возмущений. Важный шаг, имеющий целью придать более строгий математический смысл операциям, применяемым при осуществлении программы перенормировок, был сделан Кайаньелло [96—104]. Он подчеркнул то обстоятельство, что поскольку мы имеем дело с системой гиперболических дифференциальных уравнений, то интегралы в выражениях, представляющих решения этих уравнений, должны быть переопределены. Известно, что непосредственное использование обычного интеграла Римана для решения гиперболических уравнений может порождать расходимости, которые исчезают, если изменить определение интеграла (пример — «конечные части» Адамара [897]). Кайаньелло пришел к выводу, что при подходящем переопределении интеграла можно полностью обойти проблему перенормировки ультрафиолетовых расходимостей.

Однако даже эти усовершенствованные методы не дают ответа на главный вопрос современной квантовой теории поля: существуют ли решения перенормированных уравнений — и если существуют, то каковы их аналитические свойства как функций перенормированной константы связи? Соображения, выдвигавшиеся в качестве ответа на эти вопросы, будут приведены в следующей главе.

Часть четвертая

**ДАЛЬНЕЙШЕЕ
РАЗВИТИЕ
ФОРМАЛИЗМА**

Гейзенберговская картина

Свойства релятивистских теорий поля, выведенные в гл. 14—16, были получены в картине взаимодействия на основе теории возмущений. В настоящей главе мы выведем некоторые важные свойства релятивистских теорий поля, используя для описания системы полей гейзенберговскую картину. При этом решающую роль будут играть соображения, основанные на релятивистской инвариантности теории, что объясняет предпочтительное положение гейзенберговской картины, поскольку именно в этой картине релятивистская инвариантность квантовой теории формулируется наиболее просто. В принципе причина такого положения заключается в том, что шредингеровская картина и дираковская картина имеют дело с описанием экспериментов, относящихся к одному моменту времени в используемой инерциальной системе. В общем случае результаты таких экспериментов трудно выразить через результаты аналогичных экспериментов в других инерциальных системах. Кроме того, для определения состояния, относящегося к определенному моменту времени, нужно иметь возможность определить полный набор коммутирующих наблюдаемых, которые соответствуют совместимым экспериментам в один и тот же момент времени. Поскольку не ясно, существует ли такой набор для релятивистских систем полей, может оказаться, что состояние, относящееся к определенному моменту времени, в этом случае вообще невозможно определить.

До сих пор мы касались главным образом описания «чистых» процессов рассеяния, когда частицы рассматриваются как свободные в начале и в конце процесса. Для этого случая была развита теория S -матрицы. Такая точка зрения соответствует описанию результатов измерений, относящихся к асимптотическому поведению системы. Однако существует другой класс физических свойств, которые нельзя описать, если известна только S -матрица для рассеяния свободных (в начале и в конце процесса) частиц. Например, зная S -матрицу, мы еще не можем определить связанных состояний системы [899] и предсказать результаты возможных локальных измерений, таких, как измерение плотности заряда и тока или напряженностей поля в некоторой области пространства-времени [69, 70]. Таким образом, для рассмотрения подобных задач изложенный до сих пор формализм должен быть обобщен. Мы увидим, что именно для таких задач хорошо приспособлена гейзенберговская картина.

§ 1. Средние по вакууму от гейзенберговских операторов

Гейзенберговская картина определяется тем, что вектор состояния в этой картине постоянен во времени, а всю зависимость от взаимодействия несут операторы. В квантовой электродинамике операторы поля¹⁾ в гейзенберговской картине удовлетворяют следующим уравнениям движения:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi(x) = -\delta m \psi(x) - e\gamma_\mu A^\mu(x) \psi(x), \quad (17.1)$$

$$\square A_\mu(x) = j_\mu(x) = -\frac{e}{2} [\tilde{\psi}(x) \gamma_\mu, \psi(x)]. \quad (17.2)$$

Гейзенберговский вектор состояния системы $|\Psi\rangle$ от времени не зависит:

$$\partial_t |\Psi\rangle = 0. \quad (17.3a)$$

Кроме того, физически реализуемые состояния системы удовлетворяют дополнительному условию

$$(\partial_\mu A^\mu(x))^{(+)} |\Psi\rangle = 0. \quad (17.3b)$$

Это дополнительное условие релятивистски инвариантно, ибо оператор $\partial_\mu A^\mu(x)$ в силу уравнений движения (17.1) и (17.2) удовлетворяет уравнению $\square(\partial_\mu A^\mu(x)) = 0$, и, следовательно, разбиение на положительные и отрицательные частоты имеет смысл и инвариантно. Уравнения движения (17.1) и (17.2) можно вывести из плотности лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\nu} - \frac{1}{4} [\tilde{\psi}(x), (-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi(x)] - \\ & - \frac{1}{4} [i\partial_\mu \tilde{\psi}(x) \gamma^\mu + m\tilde{\psi}(x), \psi(x)] + \frac{e}{2} [\tilde{\psi}(x) \gamma^\mu, \psi(x)] A_\mu(x) + \\ & + \frac{1}{2} \delta m [\tilde{\psi}(x), \psi(x)] = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Невозможно написать перестановочные соотношения для гейзенберговских операторов, которые были бы справедливы при всех временах. Для этого потребовалось бы знать решения уравнений движения (17.1) и (17.2) для любого момента времени. А это фактически та самая задача, которую нужно решить. Однако из лагранжиана можно получить канонические перестановочные соотношения, которые справедливы для операторов при равных временах²⁾:

$$[\psi(x), \tilde{\psi}(x')]_+ |_{x_0=x'_0} = \gamma^0 \delta^{(3)}(x-x') \quad (17.5a)$$

и

$$[A_\mu(x), \partial'_\nu A_\nu(x')]_{x_0=x'_0} = -i\hbar c g_{\mu\nu} \delta^{(3)}(x-x'). \quad (17.5b)$$

Другие коммутаторы (антикоммутаторы) равны нулю. Эти перестановочные соотношения можно обобщить на произвольные пространствен-

¹⁾ В этой главе для обозначения гейзенберговских операторов и векторов состояний будет использоваться жирный шрифт.

²⁾ Относительно современных методов получения перестановочных соотношений см. [636, 716, 717, 720, 94, 134].

но-подобные интервалы [711]. Тогда они имеют вид

$$[\Psi(x), \tilde{\Psi}(x')]_+ = -iS(x-x'), \quad (17.6a)$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = -i\hbar c g_{\mu\nu} D(x-x'), \quad (17.6б)$$

$$[\Psi(x), \Psi(x')]_+ = [\tilde{\Psi}(x), \tilde{\Psi}(x')]_+ = 0, \quad (17.6в)$$

$$[\Psi(x), A_\mu(x')] = [\tilde{\Psi}(x), A_\mu(x')] = 0 \quad (17.6г)$$

при $(x-x')^2 < 0$.

Лагранжиан дает также возможность построить тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, с помощью которого можно определить 4-вектор энергии-импульса P_μ и тензор момента количества движения $M_{\mu\nu}$. Операторы P_μ и $M_{\mu\nu}$ являются соответственно генераторами бесконечно малых сдвигов и однородных преобразований Лоренца: $U(a, 1) = e^{ia_\mu P^\mu}$, $U(0, \Lambda) = e^{1/2 \Lambda_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}$. Временная компонента P_0 оператора сдвига P_μ есть гамильтониан системы. При преобразованиях Лоренца $\{a, \Lambda\}$ операторы поля $\Psi(x)$ и $A_\mu(x)$, по определению, подчиняются следующим законам преобразования:

$$U(a, \Lambda) A_\mu(x) U(a, \Lambda)^{-1} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\mu\nu}^{-1} A^\nu(\Lambda x + a), \quad (17.7a)$$

$$U(a, \Lambda) \psi_\alpha(x) U(a, \Lambda)^{-1} = \sum_{\beta=1}^4 S_{\alpha\beta}^{-1}(\Lambda) \psi_\beta(\Lambda x + a), \quad (17.7б)$$

где соответствие $\Lambda \rightarrow S(\Lambda)$ есть обычное (с точностью до множителя) спинорное представление однородной группы Лоренца размерности 4×4 , а $U(a, \Lambda)$ есть унитарное (или антиунитарное, когда $\Lambda_0^0 < -1$) представление группы Лоренца в гильбертовом пространстве физически реализуемых состояний системы. Равенства (17.7a) и (17.7б) характеризуют $\Psi(x)$ как спинорное поле, а $A_\mu(x)$ — как векторное. Генераторы бесконечно малых преобразований сдвига и вращений удовлетворяют следующим соотношениям коммутации:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (17.8a)$$

$$[P_\mu, M_{\kappa\lambda}] = i(g_{\mu\kappa} P_\lambda - g_{\mu\lambda} P_\kappa), \quad (17.8б)$$

$$[M_{\kappa\lambda}, M_{\mu\nu}] = i(g_{\lambda\mu} M_{\kappa\nu} + g_{\kappa\nu} M_{\lambda\mu} - g_{\kappa\mu} M_{\lambda\nu} - g_{\lambda\nu} M_{\kappa\mu}), \quad (17.8в)$$

которые совпадают с соотношениями структуры неоднородной группы Лоренца, обеспечивая, таким образом, лоренц-ковариантность теории. Равенство (17.8a) выражает сохранение полной энергии и импульса системы полей. Операторы P_μ являются операторами сдвига в пространстве-времени и при бесконечно малом сдвиге на величину δx^μ вызывают в операторе $F(x)$ изменение

$$i\delta x^\mu [P_\mu, F(x)] = \delta F(x) \quad (17.9a)$$

или

$$i [P_\mu, F(x)] = \partial_\mu F(x). \quad (17.9б)$$

В последних равенствах $F(x)$ — произвольный гейзенберговский оператор, который зависит от x только через посредство операторов $A_\nu(x)$ и $\Psi(x)$.

Поскольку все операторы P_μ коммутируют друг с другом, можно выбрать представление, в котором каждый базисный вектор является собственной функцией всех P_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) с собственным значением p_μ :

$$P_\mu |\Psi_a\rangle = p_\mu^{(a)} |\Psi_a\rangle. \quad (17.10)$$

Каждый такой вектор $|\Psi_a\rangle$ описывает стационарное состояние и имеет определенные приписываемые ему энергию и импульс. Однако, зафиксировав энергию и импульс, мы не определяем состояние однозначно. Нужно задать и другие квантовые числа, например полный заряд. Обозначим через α собственные значения, которые вместе с $p_\mu^{(a)}$ образуют полный набор наблюдаемых величин. Для обозначения состояний системы мы часто будем использовать символ $|\mathbf{p}, \alpha\rangle$. Здесь \mathbf{p} обозначает импульс состояния, $P_\mu |\mathbf{p}, \alpha\rangle = p_\mu |\mathbf{p}, \alpha\rangle$, а α — другие квантовые числа, которые необходимы, чтобы определить состояние.

Матричный элемент коммутатора P_μ и $F(x)$ в импульсном представлении, используя (17.96) и (17.10), можно записать в виде

$$\begin{aligned} i(\Psi_a, [F(x), P_\mu] \Psi_b) &= i(p_\mu^{(b)} - p_\mu^{(a)}) (\Psi_a, F(x) \Psi_b) = \\ &= -\partial_\mu (\Psi_a, F(x) \Psi_b), \end{aligned} \quad (17.11)$$

откуда

$$(\Psi_a, F(x) \Psi_b) = (\Psi_a, F(0) \Psi_b) e^{-i(p^{(b)} - p^{(a)}) \cdot x}. \quad (17.12)$$

В равенстве (17.12) $F(0)$ есть оператор $F(x)$, взятый в точке $x=0$. Это равенство выражает зависимость от x матричного элемента произвольного гейзенберговского оператора в представлении, где операторы P_μ диагональны. В данной главе мы будем использовать это представление.

Чтобы получить дальнейшие выводы, обычно делают три следующих физических предположения относительно состояний, фигурирующих в теории (Челлен [409]; Уайтман, 1952 г., не опубликовано):

I. а) Существует единственное состояние вакуума $|\Psi_0\rangle$. Оно инвариантно относительно любых преобразований Лоренца

$$U(a, \Lambda) |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle. \quad (17.13)$$

б) Это состояние является состоянием с наименьшей энергией ($p_0^{(0)} = 0$).

II. Состояния системы содержат только времени-подобные или изотропные импульсы с неотрицательной энергией, т. е. не существует состояний $|\Psi_n\rangle$, 4-импульсы которых $p_\mu^{(n)}$ удовлетворяют неравенству $p_\mu^{(n)} p^{(n)\mu} < 0$ или $p_\mu^{(n)} p^{(n)\mu} > 0$ при $p_0^{(n)} < 0$.

III. Существует набор состояний $|\mathbf{p}^{(n)}, \alpha\rangle$, причем $p_\mu^{(n)} p^{(n)\mu} \geq 0$, $p_0^{(n)} \geq 0$, который является полным в гильбертовом пространстве физически реализуемых состояний системы полей.

Относительно допущения (I, а) можно сделать следующие замечания. Рассмотрим пространство состояний \mathfrak{M}_0 , удовлетворяющих соотношению $U(a, \Lambda) |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle$. Тогда закон умножения для величин $U(a, \Lambda)$

$$U(a, \Lambda) U(b, N) = U(\Lambda b + a, \Lambda N) \quad (17.14)$$

означает, что \mathfrak{M}_0 инвариантно относительно преобразования $\{a, \Lambda\}$. Можно показать, что в силу непрерывности $U(a, \Lambda)$ это пространство является замкнутым линейным пространством. В этом пространстве операторы $U(a, \Lambda)$ порождают унитарное представление неоднородной

группы Лоренца (с точностью до множителя) с тривиальным оператором сдвига. Поскольку это представление унитарно, то любое такое представление либо эквивалентно тривиальному $U(a, \Lambda) \rightarrow 1$, либо бесконечномерному (см. гл. 2). Таким образом, если какие-либо состояния вакуума вообще существуют, то они могут быть двух видов: инвариантные относительно преобразований Лоренца и бесконечномерные, компоненты которых преобразуются друг через друга при преобразованиях Лоренца. Допущение (1, а) говорит о том, что вакуум является таким состоянием, которое преобразуется по одномерному унитарному представлению неоднородной группы Лоренца.

Предположение о том, что состояние с наименьшей энергией (если оно существует) и есть состояние вакуума, представляется очевидным. Далее, теория поля, в которой не существовало бы состояния с наименьшей энергией, т. е. в которой энергетический спектр не был бы ограничен снизу, не была бы состоятельной, поскольку тогда система разрушилась бы, испытывая радиационные переходы. Известно несколько примеров релятивистских теорий поля, в которых не существует основного состояния [258, 37]. Один из таких примеров — это теория Уорда (скалярное поле с самодействием $\lambda\phi^3$). Гамильтониан в этой модели имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x : (\phi^0)^2 + (\phi^k)^2 + \mu^2\phi^2 + \lambda\phi^3 : ,$$

$$\phi^k = \partial^k\phi, \quad \phi^0 = \partial^0\phi. \quad (17.15)$$

В теории Уорда не существует основного состояния, ибо бозе-поле может быть возбуждено как угодно сильно, так что член $\lambda\phi^3$, который не является положительно определенным, при сильных возбуждениях поля будет, вообще говоря, преобладать над положительно определенными квадратичными членами в H . Поэтому теория Уорда не может служить подходящей моделью взаимодействующих полей.

Теперь относительно предположения (II). Аргумент против существования состояний с отрицательной энергией или пространственно-подобными импульсами заключается в том, что такие состояния никем и никогда не наблюдались на опыте. Что же касается существования таких состояний в теории, то во избежание противоречий с известными в настоящее время фактами необходимо и достаточно, чтобы эти состояния

- 1) были ортогональны всем физически мыслимым состояниям и
- 2) не появлялись в результате взаимодействий.

Первое условие выполнено в любой релятивистски инвариантной теории, но второму удовлетворить нельзя, если не исключить всех внешних возмущений, которые вызывают переходы в нефизические состояния. Если бы второе условие было удовлетворено, то можно было бы полностью исключить нежелательные состояния из теории. При каких обстоятельствах удовлетворяется это условие — неизвестно. Поэтому обычно предполагается, что любое состояние имеет лишь времени-подобные импульсы и положительные энергии.

Из релятивистской инвариантности вытекает, что 4-вектор энергии-импульса состояния вакуума равен нулю. Так как, по предположению, вакуум единствен и является состоянием с наименьшей энергией, то отсюда следует, что собственное значение P_0 для любого другого состояния таково, что $p_0^{(n)} > 0$ при всех n .

В квантовой электродинамике требования $p_\mu^{(0)} = 0$ недостаточно, чтобы однозначно определить вакуумное состояние, поскольку существует свобода в выборе калибровки. Существует бесконечное число вакуумных состояний, которые отличаются лишь выбором калибровки. В последующем мы примем калибровку, при которой $(\Psi_0, \eta A_\mu(x) \Psi_0) = 0$ [409]. Предполагается, что (17.13) не противоречит второму постулату.

Вернемся к главной теме этого параграфа — изучению средних по вакууму от упорядоченных по времени гейзенберговских операторов

$$\begin{aligned} G_{\alpha_1 \dots \alpha_m \beta_1 \dots \beta_m \mu_1 \dots \mu_n}(x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_n) = \\ = (\Psi_0, T(\psi_{\alpha_1}(x_1) \dots \psi_{\alpha_m}(x_m) \tilde{\psi}_{\beta_1}(y_1) \dots \tilde{\psi}_{\beta_m}(y_m) A_{\mu_1}(z_1) \dots \\ \dots A_{\mu_n}(z_n)), \Psi_0). \end{aligned} \quad (17.16)$$

Целесообразность рассмотрения таких функций Грина для описания корпускулярных аспектов в квантовой теории поля была впервые подчеркнута Гелл-Манном и Лоу [301] и Швингером [715]. Перечисленные авторы установили связь между этими функциями Грина и фейнмановскими функциями распространения для многочастичных систем. Швингер положил функции Грина в основу своей формулировки квантовой теории поля. Чтобы выяснить их смысл, мы прежде всего свяжем их с величинами в представлении взаимодействия.

Определим гейзенберговские векторы состояния так, чтобы они совпадали с векторами состояния в картине взаимодействия в момент времени $t = 0$. Если векторы состояния $|\Psi(t)\rangle$ в картине взаимодействия являются решениями уравнения

$$i\partial_t |\Psi(t)\rangle = H_I(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (17.17)$$

то соответствующие гейзенберговские векторы $|\Psi\rangle$ определяются следующим образом:

$$U(t, 0) |\Psi\rangle = |\Psi(t)\rangle, \quad (17.18)$$

где унитарный оператор $U(t, 0)$ удовлетворяет уравнению

$$i\partial_t U(t, 0) = H_I(t) U(t, 0) \quad (17.19a)$$

и граничному условию

$$U(0, 0) = 1. \quad (17.19b)$$

Связь между операторами в картине взаимодействия и соответствующими гейзенберговскими операторами получается из требования, чтобы совпадали их средние значения для соответствующих векторов состояния. Иначе говоря, по определению,

$$(\Psi, \mathbf{F}(x) \Psi) = (\Psi(t), F(x) \Psi(t)), \quad (17.20)$$

где вектор состояния $|\Psi(t)\rangle$ берется в тот же момент времени x_0 , что и оператор $F(x)$. Отсюда, используя (17.18), получаем

$$\begin{aligned} (\Psi, \mathbf{F}(x) \Psi) &= (U(t, 0) \Psi, F(x) U(t, 0) \Psi) = \\ &= (\Psi, U^{-1}(t, 0) F(x) U(t, 0) \Psi), \end{aligned} \quad (17.21a)$$

или

$$\mathbf{F}(x) = U^{-1}(t, 0) F(x) U(t, 0), \quad (17.21b)$$

где $t = x_0$.

Явное выражение для оператора U можно получить следующим образом. Вспомним, что от шредингеровской картины, в которой вектор состояния $|\Psi_S(t)\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$i\partial_t |\Psi_S(t)\rangle = (H_{0S} + H_{IS}) |\Psi_S(t)\rangle \quad (17.22)$$

(H_{0S} и H_{IS} — операторы, не зависящие от времени), можно перейти к картине взаимодействия с помощью унитарного преобразования

$$|\Psi(t)\rangle = e^{iH_0 t} |\Psi_S(t)\rangle. \quad (17.23)$$

Эти две картины совпадают в момент времени $t=0$. Можно также унитарным преобразованием перейти от шредингеровской картины прямо к гейзенберговской картине, если вспомнить, что гамильтониан $H = H_{0S} + H_{IS} = \mathbf{H}$ не зависит от времени:

$$|\Psi\rangle = e^{iHt} |\Psi_S(t)\rangle. \quad (17.24)$$

Легко установить, что полученный вектор $|\Psi\rangle$ действительно не зависит от времени: $\partial_t |\Psi\rangle = 0$. Подставляя в (17.24) вектор $|\Psi_S(t)\rangle$, выраженный с помощью равенства (17.23), имеем

$$|\Psi\rangle = e^{iHt} e^{-iH_0 t} |\Psi(t)\rangle. \quad (17.25)$$

Сравнивая равенства (17.18) и (17.25), получаем следующее выражение для оператора $U(t, 0)$:

$$U(t, 0) = e^{iH_0 t} e^{-iHt}. \quad (17.26)$$

В дальнейшем окажется полезным выражение «физического» (или «истинного») вакуума $|\Psi_0\rangle$ (собственного состояния H с собственным значением 0) через вакуум «голых» квантов $|\Phi_0\rangle$ ($H_0|\Phi_0\rangle = 0$). Нужное выражение было ранее выведено в гл. 11:

$$\lambda |\Psi_0(0)\rangle = \lambda |\Psi_0\rangle = \frac{U(0, \pm\infty) |\Phi_0\rangle}{(\Phi_0, U(0, \pm\infty) \Phi_0)}. \quad (17.27)$$

Здесь λ — постоянная нормировки. Нужно отметить, что в числителе и знаменателе правой части (17.27) присутствуют бесконечные фазовые множители, соответствующие несвязанным диаграммам типа вакуум — вакуум. В частном они сокращаются.

После этих формальных вводных замечаний рассмотрим вакуумное среднее упорядоченного по времени произведения двух гейзенберговских операторов. Сначала для простоты возьмем среднее по вакууму от произведения двух бозонных операторов в мезонной теории с гамильтонианом $H_I(t) = G \int d\sigma(x) N(\tilde{\psi}(x) \gamma \psi(x)) \varphi(x)$, где $\gamma = 1$ или γ_5 . Обозначим этот матричный элемент через

$$R(x_1, x_2) = (\Psi_0, T(\varphi(x_1) \varphi(x_2)) \Psi_0) \quad (17.28)$$

и предположим сначала, что $x_{10} > x_{20}$.

Если с помощью (17.18), (17.21) и (17.27) записать гейзенберговские операторы и векторы состояний правой части (17.28) через величины в представлении взаимодействия, то для R при $x_{10} > x_{20}$ получим

$$R(x_1, x_2) = (U(0, +\infty) \Phi_0, U^{-1}(t_1, 0) \varphi(x_1) U(t_1, 0) \times \\ \times U^{-1}(t_2, 0) \varphi(x_2) U(t_2, 0) U(0, -\infty) \Phi_0). \quad (17.29)$$

Мы опустили знаменатель выражения (17.27), подразумевая, что при вычислении (17.29) с помощью диаграмм Фейнмана не нужно учитывать

все несвязанные диаграммы с замкнутыми петлями. Оператор U унитарен и обладает групповым свойством, так что

$$U(t_1, t_3)U(t_3, t_2) = U(t_1, t_2) \quad (17.30)$$

и

$$U^{-1}(t_1, t_2) = U^*(t_1, t_2) = U(t_2, t_1). \quad (17.31)$$

Следовательно,

$$U^{-1}(t_1, t_2)U(t_1, t_3) = U(t_2, t_3). \quad (17.32)$$

Оператор $U(t, t')$ удовлетворяет уравнению

$$i\partial_t U(t, t') = H_I(t)U(t, t') \quad (17.33a)$$

и граничному условию

$$U(t, t) = 1. \quad (17.33b)$$

Напомним, что решение уравнения (17.33) можно представить в виде

$$U(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{1}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \dots \int_{t'}^t dt_n T(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)). \quad (17.34)$$

Функцию R можно переписать следующим образом:

$$R(x_1, x_2) = (\Phi_0, U^{-1}(0, +\infty)U^{-1}(t_1, 0)\varphi(x_1)U(t_1, t_2)\varphi(x_2)U(t_2, -\infty)\Phi_0) \quad (17.35a)$$

$$= (\Phi_0, U(+\infty, t_1)\varphi(x_1)U(t_1, t_2)\varphi(x_2)U(t_2, -\infty)\Phi_0) \quad (17.35b)$$

$$= (\Phi_0, T(U(+\infty, t_1)\varphi(x_1)U(t_1, t_2)\varphi(x_2)U(t_2, -\infty))\Phi_0) \quad (17.35b)$$

$$= (\Phi_0, T(U(+\infty, -\infty)\varphi(x_1)\varphi(x_2))\Phi_0). \quad (17.35r)$$

Введение хронологического оператора в равенство (17.35b) очевидно. Затем согласно теореме Вика можно переставить множители и получить (17.35r). Операторный множитель в последнем равенстве можно записать в явном виде:

$$\begin{aligned} T(U(+\infty, -\infty)\varphi(x_1)\varphi(x_2)) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 y_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 y_n T(\mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_n)\varphi(x_1)\varphi(x_2))_C, \end{aligned} \quad (17.36)$$

где индекс C означает, что нужно рассматривать только связанные диаграммы. Легко проверить, что равенство (17.36) в действительности справедливо и для произвольных значений x_{10} и x_{20} . Поэтому, используя теорему Вика, $R(x_1, x_2)$ можно вычислить с помощью разложения в ряд. Выпишем первые члены этого ряда:

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \Delta_F(x_1 - x_2) + \frac{1}{16} G^2 \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 \Delta_F(x_1 - x_2) \times \\ &\quad \times \text{Sp}(\gamma S_F(y_1 - y_2) \gamma S_F(y_2 - y_1) \Delta_F(y_2 - x_2) + \dots) \end{aligned} \quad (17.37)$$

Ясно, что на языке диаграмм Фейнмана $R(x_1, x_2)$ соответствует простой бозонной линии и всем возможным собственно-энергетическим вставкам в эту линию (фиг. 132). Таким образом, $R(x_1, x_2)$ совпадает

со штрихованной бозонной функцией распространения гл. 16:

$$R(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \Delta'_F(x_1, x_2) = (\Psi_0, T(\psi(x_1)\psi(x_2))\Psi_0). \quad (17.38)$$

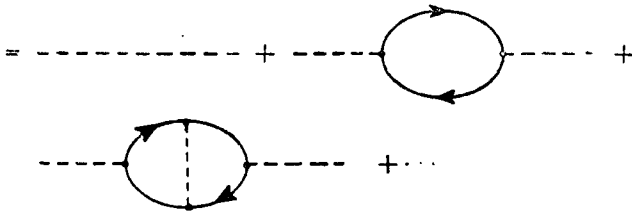
Используя те же приемы, что и для бозонных операторов, легко установить, что

$$-\frac{1}{2} S'_F(x_1, x_2) = (\Psi_0, T(\psi(x_1)\tilde{\psi}(x_2))\Psi_0) \quad (17.39a)$$

$$= (\Phi_0, T(S\psi(x_1)\tilde{\psi}(x_2))\Phi_0) \quad (17.39b)$$

$$S = U(+\infty, -\infty) \quad (17.39b)$$

Аналогично проверяется, что среднее по вакууму оператора $T(\psi(x)\tilde{\psi}(y)\psi(z))$ соответствует диаграммам Фейнмана, показанным $\frac{1}{2} \Delta'_F(x_1, x_2) = R(x_1, x_2) =$

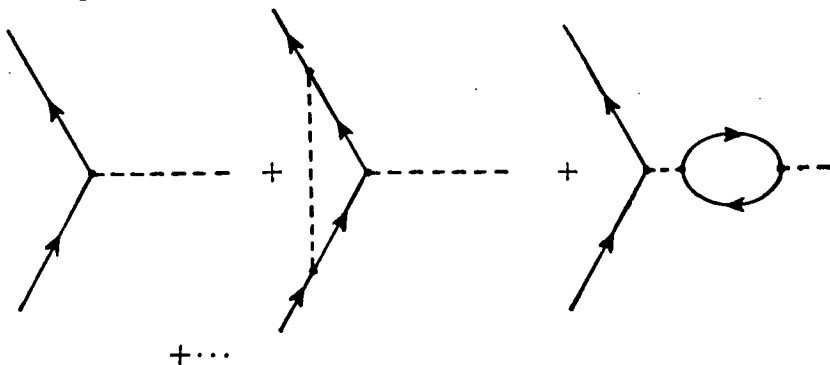


Ф и г. 132.

на фиг. 133. Это среднее по вакууму можно выразить через функции S'_F , D'_F и Γ :

$$\langle \Psi_0 | T(\tilde{\psi}_\beta(x)\psi_\alpha(y)\psi(z)) | \Psi_0 \rangle = -\frac{1}{8} \int d^4x' \int d^4y' \int d^4z' \times \\ \times S'_{F\alpha\sigma}(y-y') \Gamma_{\sigma\rho}(y'-z', x'-z') S'_{F\rho\beta}(x'-x) \Delta'_F(z'-z). \quad (17.40)$$

Функции $\Delta'_F(x_1, x_2)$ и $S'_F(x_1, x_2)$ являются простейшими примерами функций Грина. И в общем случае функция Грина соответствует сумме



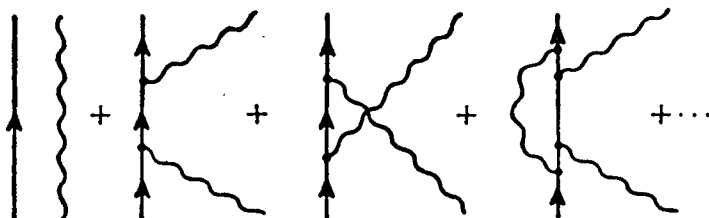
Ф и г. 133.

диаграмм Фейнмана всех порядков, которые дают вклад в данный процесс. Функция Грина отличается от S -матрицы тем, что она не содержит множителей, соответствующих внешним линиям, и тем,

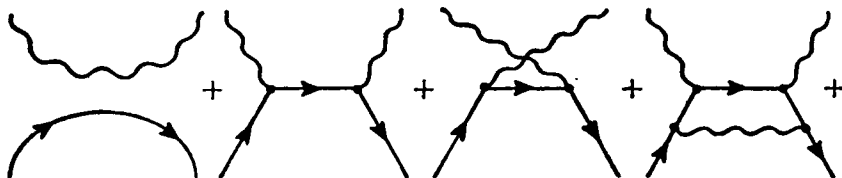
что она определена для всех значений импульсов внешних линий, а не только на массовой поверхности. Однако определение функций Грина подразумевает, что выполняются такие законы сохранения, как закон сохранения заряда и закон сохранения импульса. В качестве примера рассмотрим функцию Грина в импульсном пространстве для комптоновского рассеяния. Эта функция $G_{\mu_1\mu_2}(p'k'; pk)$ определена так, что выражение

$$\sqrt{\frac{m^2}{8E'E_0\omega\omega'}} \frac{1}{(2\pi)^6} \tilde{u}(p') \varepsilon_{\mu}^{(\lambda')}(k') G^{\mu'\mu}(p'k'; pk) u(p) \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k)$$

является элементом S -матрицы, описывающим процесс во всех порядках теории возмущений. Нужно отметить, что та же самая функция Грина G



Комптон-эффект



Аннигиляция пары

Ф и г. 134.

описывает процесс аннигиляции пары на два фотона, поскольку последний процесс описывается теми же диаграммами Фейнмана (только повернутыми). Это изображено на фиг. 134.

Однако в случае аннигиляции пары в матричный элемент S -матрицы входит функция $G(-p', k'; p, -k)$, если электрон и позитрон в начальном состоянии имеют импульсы p, p' , а фотоны в конечном состоянии — импульсы k, k' .

§ 2. Спектральное представление Лемана

Сделанные допущения

- о релятивистской инвариантности,
- о наличии спектральных условий (существование вакуума и состояний только с $p_{\mu}p^{\mu} \geq 0, p_0 \geq 0$),
- о том, что физические состояния образуют гильбертово пространство с эрмитовым скалярным произведением, так что каждое состояние обладает положительной нормой,

позволяют вывести некоторые общие свойства, характеризующие структуру средних по вакууму от двух гейзенберговских операторов, т. е.

Δ'_F - и S'_F -функций. Такие общие представления были использованы впервые Челленом [409]. Из общих принципов квантовой теории поля они впервые систематическим образом были получены Уайтманом (1953 г., не опубликовано) и независимо Леманом [490]. Они известны как представления Лемана для двухточечных функций («двухточечников»).

Сначала мы выведем представление Лемана для среднего по вакууму от упорядоченного по времени произведения двух операторов нейтрального скалярного поля. Эта величина, как было установлено, соответствует Δ'_F -функции:

$$\frac{1}{2} \Delta'_F(x, y) = (\Psi_0, T(\varphi(x)\varphi(y))\Psi_0).$$

Так как спектральное представление для упорядоченного по времени произведения можно получить из представления для обычного произведения операторов, мы изучим сначала свойства функции Уайтмана:

$$W^{(2)}(x, y) = (\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0). \quad (17.41)$$

Обобщенные функции, определенные как вакуумные средние от произведений гейзенберговских операторов, известны как функции Уайтмана, который первый подробно исследовал их свойства [852]. Лоренц-ковариантность теории, т. е. тот факт, что при неоднородных преобразованиях Лоренца

$$U(a, \Lambda)\varphi(x)U(a, \Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda x + a), \quad (17.42a)$$

$$U(a, \Lambda)|\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle, \quad (17.42b)$$

где $U(a, \Lambda)$ — унитарный оператор, поскольку временные отражения не рассматриваются, означает, что

$$\begin{aligned} (\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) &= (U(a, \Lambda)\Psi_0, U(a, \Lambda)\varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = \\ &= (\Psi_0, \varphi(\Lambda x + a)\varphi(\Lambda y + x)\Psi_0). \end{aligned} \quad (17.43)$$

Если ограничиться «чистыми» сдвигами, $\Lambda = I$, то из равенства (17.43) вытекает, что при произвольном сдвиге

$$W^{(2)}(x, y) = W^{(2)}(x + a, y + a). \quad (17.44a)$$

Следовательно, $W^{(2)}$ есть функция только разности координат x и y , т. е.

$$W^{(2)}(x, y) = W^{(2)}(x - y). \quad (17.44b)$$

Инвариантность относительно однородных собственных преобразований означает, что

$$W^{(2)}(x - y) = W^{(2)}(\Lambda(x - y)), \quad (17.44b)$$

откуда следует, что $W^{(2)}$ есть функция только $(x - y)^2$ при пространственно-подобных интервалах и функции $(x - y)^2$ и $\varepsilon(x - y)$ — при времени-подобных и равных нулю интервалах.

Обратимся теперь к свойствам функции $W^{(2)}$, которые следуют из предположения, что состояния системы обладают лишь положительными энергиями и времени-подобными импульсами. Используя полный набор состояний $|\mathbf{p}^{(m)}, \alpha\rangle$, $\mathbf{P}_\mu|\mathbf{p}, \alpha\rangle = p_\mu|\mathbf{p}, \alpha\rangle$, где α относится к другим наблюдаемым, характеризующим базисные векторы, равенство (17.41) можно переписать следующим образом:

$$(\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = \sum_{|\mathbf{p}^{(m)}, \alpha\rangle} \langle\Psi_0|\varphi(x)|\mathbf{p}^{(m)}, \alpha\rangle \langle\mathbf{p}^{(m)}, \alpha|\varphi(y)|\Psi_0\rangle. \quad (17.45)$$

Далее, выделяя с помощью равенства (17.12) пространственно-временную зависимость матричных элементов в виде множителя, получаем

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0, \varphi(x) \varphi(y) \Psi_0 \rangle &= \sum_{|\mathbf{p}^{(m)}, \alpha\rangle} \langle \Psi_0 | \varphi(0) | \mathbf{p}^{(m)}, \alpha \rangle \langle \mathbf{p}^{(m)}, \alpha | \varphi(0) | \Psi_0 \rangle e^{-ip^{(m)} \cdot (x-y)} = \\ &= \sum_{|\mathbf{p}^{(m)}, \alpha\rangle} |\langle \Psi_0 | \varphi(0) | \mathbf{p}^{(m)}, \alpha \rangle|^2 e^{-ip^{(m)} \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (17.46)$$

Суммирование в (17.46) производится по всем физически различным состояниям (α) и по всем значениям их полного 4-импульса $(p^{(m)})$. Полный 4-импульс $p_\mu^{(m)}$ состояния $|\mathbf{p}^{(m)}, \alpha\rangle$ определяет массу системы $M^{(m)}$:

$$M^{(m)2} = p_\mu^{(m)} p^{(n)\mu}. \quad (17.47)$$

Масса $M^{(m)}$ соответствует полной энергии данного состояния в системе покоя системы.

Введем теперь *положительно-определенную* величину $\varrho(p^{(m)})$, определенную соотношением

$$\varrho(p^{(m)}) = (2\pi)^3 \sum_{\alpha} |\langle \Psi_0 | \varphi(0) | \mathbf{p}^{(m)}, \alpha \rangle|^2, \quad (17.48)$$

где суммирование проводится по всем состояниям $|\mathbf{p}^{(m)}, \alpha\rangle$ с фиксированным значением $p^{(m)}$. Легко проверить, что существует лишь конечное число состояний с данным значением $p^{(m)}$, так что сумма, определяющая $\varrho(p^{(m)})$, расходиться не может. Сделаем два замечания относительно функции $\varrho(p^{(m)})$. Во-первых, она определена лишь при времени-подобных импульсах и $p_0^{(m)} \geq 0$, поскольку $p_\mu^{(m)}$ есть 4-импульс физического состояния. Во-вторых, из трансформационных свойств матричного элемента $\langle \Psi_0 | \varphi(0) | \mathbf{p}^{(m)}, \alpha \rangle$ при однородных преобразованиях Лоренца

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | \varphi(0) | \mathbf{p}^{(m)}, \alpha \rangle &= \langle \Psi_0 | \varphi(0) U(\Lambda^{-1}, 0) | \mathbf{p}^{(m)}, \alpha \rangle = \\ &= \langle \Psi_0 | \varphi(0) | \Lambda \mathbf{p}^{(m)}, \alpha' \rangle \end{aligned} \quad (17.49)$$

следует, что $\varrho(p^{(m)}) = \varrho(\Lambda p^{(m)})$ есть функция только $p^{(n)2}$. В итоге можно написать

$$\theta(p^2) \theta(p_0) \varrho(p^2) = (2\pi)^3 \sum_{\alpha} |\langle \Psi_0 | \varphi(0) | \mathbf{p}, \alpha \rangle|^2. \quad (17.50)$$

Равенство (17.46) переписывается следующим образом:

$$\langle \Psi_0, \varphi(x) \varphi(y) \Psi_0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \theta(p^2) \theta(p_0) \varrho(p^2) e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (17.51)$$

где суммирование по векторам $p^{(m)}$ записано как интегрирование по $d^4 p$. Так как $\theta(p^2)$ можно представить в виде

$$\theta(p^2) = \int_0^{\infty} dm^2 \delta(p^2 - m^2), \quad (17.52)$$

то окончательно равенство (17.51) можно переписать в виде

$$\langle \Psi_0, \varphi(x) \varphi(y) \Psi_0 \rangle = i \int_0^{\infty} dm^2 \varrho(m^2) \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4 p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (17.53)$$

В интеграле по p легко узнать сингулярную (без штриха) функцию $\Delta^{(+)}(x-y; m^2)$, соответствующую массе m . Таким образом,

$$(\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = i \int_0^{\infty} dm^2 \varrho(m^2) \Delta^{(+)}(x-y; m^2). \quad (17.54)$$

Чтобы получить полное представление упорядоченного по времени произведения, используем тот факт, что при $x_0 > y_0$

$$\begin{aligned} (\Psi_0, T(\varphi(x)\varphi(y))\Psi_0) &= (\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = \\ &= i \int_0^{\infty} dm^2 \varrho(m^2) \Delta^{(+)}(x-y; m^2), \end{aligned} \quad (17.55)$$

а при $y_0 > x_0$

$$\begin{aligned} (\Psi_0, T(\varphi(x)\varphi(y))\Psi_0) &= (\Psi_0, \varphi(y)\varphi(x)\Psi_0) = \\ &= i \int_0^{\infty} dm^2 \varrho(m^2) \Delta^{(+)}(y-x; m^2) = \\ &= -i \int_0^{\infty} dm^2 \varrho(m^2) \Delta^{(-)}(x-y; m^2). \end{aligned} \quad (17.56)$$

Комбинируя равенства (17.55) и (17.56), имеем

$$\begin{aligned} (\Psi_0, T(\varphi(x)\varphi(y))\Psi_0) &= \frac{1}{2} \Delta_F(x-y) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dm^2 \varrho(m^2) \Delta_F(x-y; m^2). \end{aligned} \quad (17.57)$$

Формула (17.54) позволяет вывести также спектральное представление для среднего по вакууму от коммутатора:

$$\begin{aligned} (\Psi_0, [\varphi(x), \varphi(y)]\Psi_0) &= i \int_0^{\infty} dm^2 \varrho(m^2) (\Delta^{(+)}(x-y; m^2) + \Delta^{(-)}(x-y; m^2)) = \\ &= i \int_0^{\infty} dm^2 \varrho(m^2) \Delta(x-y; m^2). \end{aligned} \quad (17.58)$$

Заметим, что при выводе этих спектральных представлений не было сделано никаких допущений динамического характера, кроме предположения, что полный набор состояний $|\mathbf{p}, \alpha\rangle$ характеризуется лишь времени-подобными или изотропными 4-импульсами ($p_\mu p^\mu \geq 0$ при $p_0 \geq 0$). Без всяких предположений относительно перестановочных соотношений для операторов $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ было получено, что среднее по вакууму от коммутатора $[\varphi(x), \varphi(y)]$ равно нулю при пространственно-подобных интервалах, так как функция $\Delta(x-y; m^2)$ обладает этим свойством при всех m^2 .

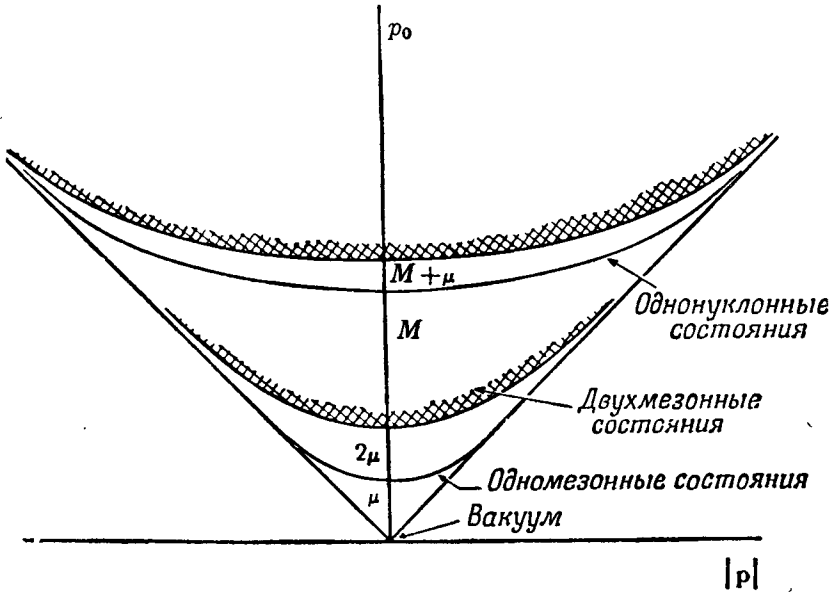
Изучим теперь несколько полнее структуру спектральной функции $\varrho(p^2)$. Для этого необходимо определить спектр физических состояний

точнее, чем требовалось до сих пор. Так как мы будем рассматривать теорию нейтральных псевдоскалярных бозонов, взаимодействующих с фермионами спина $1/2$, то примем, что оператор энергии-импульса P_μ имеет следующий спектр масс:

а) изолированную точку при $p^2 = 0$, соответствующую состоянию вакуума;

б) изолированную точку при $p^2 = \mu^2$, соответствующую стабильному одномезонному состоянию; μ — физическая (наблюдаемая) масса мезона;

в) непрерывный спектр, начинающийся при $p^2 = (2\mu)^2$ и соответствующий двухмезонным состояниям; аналогично, непрерывный спектр,



Ф и г. 135.

начинающийся при $p^2 = (n\mu)^2$, $n = 3, 4, \dots$, и соответствующий n -мезонным состояниям;

г) отдельную точку при $p^2 = M^2$, соответствующую стабильному однуклонному состоянию; M — масса физического нуклона;

д) непрерывный спектр, начинающийся при $p^2 = (nM + t\mu)^2$, $n = 1, 2, \dots$, $t = 0, 1, 2, \dots$, и соответствующий мезон-нуклонным состояниям.

Спектр физических состояний показан на фиг. 135. Эти деталиные предположения относительно импульсно-энергетического спектра физических состояний позволяют написать $\varrho(p^2)$ в виде

$$\varrho(p^2) = (2\pi)^3 \sum_{\alpha} |\langle \Psi_0 | \varphi(0) | p, \alpha \rangle|^2 \quad (17.59a)$$

$$= (2\pi)^3 |\langle \Psi_0 | \varphi(0) | p; p^2 = \mu^2 \rangle|^2 \delta(p^2 - \mu^2) + \\ + (2\pi)^3 \sum_{\alpha'} |\langle \Psi_0 | \varphi(0) | p, \alpha' \rangle|^2, \quad (17.59б)$$

где разделены вклады в ϱ от одномезонного состояния $|p; p^2 = \mu^2\rangle$ с импульсом p_μ и от остальных состояний с тем же импульсом. Сумма по α в равенстве (17.59a) не включает вакуумного состояния, поскольку

оно имеет 4-импульс, равный 0. Для псевдоскалярного поля состояние вакуума не дает вклада и в $\varrho(0)$, так как среднее по вакууму от $\varphi(x)$ равно нулю.

Доказательство: Из трансляционной инвариантности следует, что среднее $\langle \Psi_0 | \varphi(x) | \Psi_0 \rangle$ должно быть постоянной. Если теория инвариантна относительно пространственных отражений, то

$$U(i_s) \varphi(x) U(i_s)^{-1} = -\varphi(i_s x), \quad (17.60a)$$

$$U(i_s) | \Psi_0 \rangle = | \Psi_0 \rangle, \quad (17.60b)$$

и эта постоянная должна быть равна нулю.

Проанализируем подробно вклад одномезонного состояния. Для этого рассмотрим матричный элемент $\langle \Psi_0 | \varphi(x) | \mathbf{p}; p^2 = \mu^2 \rangle$, где $|\mathbf{p}; p^2 = \mu^2 \rangle$, как и выше, означает одномезонное собственное состояние \mathbf{P}_μ , т. е.

$$\mathbf{P}_\mu | \mathbf{p}; p^2 = \mu^2 \rangle = p_\mu | \mathbf{p}; p^2 = \mu^2 \rangle, \quad (17.61a)$$

причем

$$p_\mu p^\mu = p^2 = \mu^2. \quad (17.61b)$$

Из трансляционной инвариантности вытекает, что

$$\langle \Psi_0 | \varphi(x) | \mathbf{p}; p^2 = \mu^2 \rangle = e^{-ip \cdot x} \langle \Psi_0 | \varphi(0) | \mathbf{p}; p^2 = \mu^2 \rangle. \quad (17.62)$$

Как отмечалось выше, из релятивистской инвариантности следует, что $\langle \Psi_0 | \varphi(0) | \mathbf{p}; p^2 = \mu^2 \rangle$ есть функция только p^2 . Для одномезонного состояния $p^2 = \mu^2$, поэтому матричный элемент $\langle \Psi_0 | \varphi(0) | \mathbf{p}; p^2 = \mu^2 \rangle$ — действительная постоянная, не зависящая от p_μ . Обозначим ее через $\sqrt{Z_3}/(2\pi)^3$. Следовательно,

$$\langle \Psi_0 | \varphi(x) | \mathbf{p}; p^2 = \mu^2 \rangle = \frac{Z_3^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ip \cdot x}. \quad (17.63)$$

С помощью (17.63) можно переписать равенство (17.59б):

$$\varrho(m^2) = Z_3 \delta(m^2 - \mu^2) + \sigma(m^2), \quad (17.64)$$

где положительно определенная величина σ является вкладом состояний с $p^2 > \mu^2$ в функцию ϱ :

$$\sigma(p^2) = (2\pi)^3 \sum_{\alpha'} |\langle \Psi_0 | \varphi(0) | \mathbf{p}, \alpha' \rangle|^2. \quad (17.65)$$

Используя выражение (17.64), окончательно можно переписать (17.57) в виде

$$\Delta'_F(x-y) = Z_3 \Delta_F(x-y; \mu^2) + \int_{(3\mu)^2}^{\infty} dm^2 \sigma(m^2) \Delta_F(x-y; m^2). \quad (17.66)$$

В равенстве (17.66) интегрирование начинается с $(3\mu)^2$ в силу псевдоскалярности оператора φ , ибо матричный элемент $\langle \Psi_0 | \varphi(0) | \mathbf{p}; \alpha' \rangle$, где α' соответствует двухмезонному состоянию, равен нулю. Первые состояния, которые дают вклад в σ , являются трехмезонными, а для них спектр масс начинается с 3μ .

Относительно постоянной нормировки Z_3 можно высказать некоторые утверждения, если принять, что φ — локальное поле, т. е. если

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = i\Delta(x-y) \text{ при } (x-y)^2 < 0. \quad (17.67)$$

Напомним, что при $(x-y)^2 < 0$ функция $\Delta(x-y; m^2)$ не зависит от массы m и пропорциональна $\frac{1}{4\pi} \varepsilon(x-y) \delta((x-y)^2)$. Поэтому для локаль-

ных полей равенство (17.58) принимает вид

$$i\Delta(x-y) = i \int_0^{\infty} dm^2 \varrho(m^2) \Delta(x-y; m^2) \quad \text{при } (x-y)^2 < 0. \quad (17.68)$$

Так как функция $\Delta(x-y; m^2)$ при $(x-y)^2 < 0$ не зависит от m , то

$$\int_0^{\infty} \varrho(m^2) dm^2 = 1, \quad (17.69a)$$

или, что эквивалентно предыдущему равенству,

$$Z_3 + \int_{(3\mu)^2}^{\infty} \sigma(m^2) dm^2 = 1. \quad (17.69b)$$

Поскольку $\sigma(m^2) \geq 0$, то из (17.69b) следует, что $0 \leq Z_3 \leq 1$.

Относительно приведенного вывода могут возникнуть возражения, так как в действительности $\Delta(x-y; m^2) = 0$ при $(x-y)^2 < 0$. При более сильном предположении, когда $\Phi(x)$ подчиняется каноническим перестановочным соотношениям, получаются те же результаты. Канонические перестановочные соотношения имеют место, если исходить из локального лагранжиана. Если

$$[\partial_0 \Phi(x), \Phi(y)]_{x_0=y_0} = -i\delta^{(3)}(x-y), \quad (17.70)$$

то легко получить равенство (17.69), продифференцировав по x_0 обе части равенства (17.58), положив затем $x_0 = y_0$ и вспомнив, что производная $\partial_0 \Delta(x)$ при $x_0 = 0$ равна $-\delta^{(3)}(x)$. Другие важные свойства функции Грина $\Delta'_F(x)$ наиболее просто выражаются с помощью ее фурье-образа $\Delta'_F(k^2)$:

$$\Delta'_F(k^2) = \frac{Z_3}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \int_{(3\mu)^2}^{\infty} dm^2 \frac{\sigma(m^2)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (17.71)$$

Рассмотрим функцию $\Delta'_F(\zeta)$ комплексной переменной ζ , определенную равенством

$$\Delta'_F(\zeta) = \frac{Z_3}{\zeta - \mu^2} + \int_{(3\mu)^2}^{\infty} dm^2 \frac{\sigma(m^2)}{\zeta - m^2}. \quad (17.72a)$$

Так как Z_3 и $\sigma(m^2)$ действительны, то

$$\overline{\Delta'_F(\zeta)} = \Delta'_F(\bar{\zeta}). \quad (17.72b)$$

Представляющая физический интерес величина $\Delta'_F(k^2)$ получается из $\Delta'_F(\zeta)$ в пределе при $\zeta \rightarrow k^2 + i\epsilon$:

$$\lim_{\zeta \rightarrow k^2 + i\epsilon} \Delta'_F(\zeta) = \Delta'_F(k^2). \quad (17.73)$$

Из выражения (17.72) видно, что в плоскости комплексной переменной ζ функция $\Delta'_F(\zeta)$ имеет полюс на действительной оси при $\zeta = \mu^2$ и точку ветвления при $\zeta = (3\mu)^2$, причем разрез идет по положительной действительной оси от $(3\mu)^2$ до $+\infty$. В остальной части плоскости $\Delta'_F(\zeta)$ ана-

литична. Отметим также, что если положить $\zeta = \xi + i\eta$, то

$$\Delta'_F(\zeta) = \frac{Z_3(\xi - \mu^2)}{(\xi - \mu^2)^2 + \eta^2} + \int_{(3\mu)^2}^{\infty} dm^2 \frac{\sigma(m^2)(\xi - m^2)}{(\xi - m^2)^2 + \eta^2} - \\ - i \left[\frac{Z_3\eta}{(\xi - \mu^2)^2 + \eta^2} + \int_{(3\mu)^2}^{\infty} dm^2 \frac{\sigma(m^2)\eta}{(\xi - m^2)^2 + \eta^2} \right], \quad (17.74)$$

так что $\text{Im } \Delta'_F(\zeta)$ имеет знак, противоположный знаку $\text{Im } \zeta$, и отлична от нуля при $\text{Im } \zeta \neq 0$. Следовательно, функция $\Delta'_F(\zeta)$ не обращается в нуль при комплексных значениях ζ . Она может иметь нули на действительной оси и только при $\xi > 0$. Скачок функции $\Delta'_F(\zeta)$ при переходе через линию разреза есть

$$\Delta'_F(\xi + i\varepsilon) - \Delta'_F(\xi - i\varepsilon) = -2\pi i Z_3 \delta(\xi - \mu^2) - 2\pi i \int_{(3\mu)^2}^{\infty} dm^2 \sigma(m^2) \delta(\xi - m^2) \quad (17.75a)$$

или

$$\text{Im } \Delta'_F(\xi + i\varepsilon) = -\pi Z_3 \delta(\xi - \mu^2) - \pi \theta(\xi - 9\mu^2) \sigma(\xi). \quad (17.75b)$$

Используя (17.75b), равенство (17.72a) можно записать в виде соотношения

$$\Delta'_F(k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } \Delta'_F(k'^2)}{k'^2 - k^2 - i\varepsilon} dk'^2. \quad (17.76)$$

Это дисперсионное соотношение для функции $\Delta'_F(k^2)$ получено независимо от теории возмущений и является точным следствием теории поля, так как оно следует из предположений спектральности и релятивистской инвариантности теории. Заметим, что уравнение (17.76) не определяет функцию $\Delta'_F(k^2)$ (все бозонные функции распространения «разумных» теорий поля будут ему удовлетворять), а лишь кратко выражает ее аналитические свойства, которые следуют из физических предположений.

Результаты для бозонной функции распространения, полученные до сих пор, не зависят от каких-либо специальных динамических предположений. Далее мы выведем некоторые соотношения, которые уже являются следствиями специальных допущений динамического характера. Первое из этих соотношений — связь между «голой» и физической массами бозона. Рассмотрим опять нейтральную псевдоскалярную мезонную теорию, которая описывается с помощью операторов ψ и φ , удовлетворяющих уравнениям

$$(\square + \mu_0^2) \varphi(x) = \frac{1}{2} G [\tilde{\psi}(x) \gamma_5, \psi(x)] \varphi(x) - \mathbf{J}(x) \quad (17.77)$$

и

$$(-i\gamma \cdot \partial + M_0) \psi(x) = G \gamma_5 \varphi(x) \psi(x), \quad (17.78)$$

где μ_0 и M_0 — массы «голых» квантов. Одновременные коммутаторы для операторов ψ и φ такие же, как и ранее [см. равенства (17.6a) (17.6b), (17.67) и (17.70)]. Вспомним также, что при равных временах ψ и φ коммутируют. Если подействовать оператором $\square_x + \mu_0^2$ на среднее

по вакууму от коммутатора $[\Phi(x), \Phi(y)]$, то получим

$$\begin{aligned} (\square_x + \mu_0^2) (\Psi_0, [\Phi(x), \Phi(y)] \Psi_0) &= (\Psi_0, [\mathbf{J}(x), \Phi(y)] \Psi_0) = \\ &= i (\square_x + \mu_0^2) \int_0^\infty dm^2 \varrho(m^2) \Delta(x-y; m^2) = \\ &= i \int_0^\infty dm^2 \varrho(m^2) (\mu_0^2 - m^2) \Delta(x-y; m^2), \end{aligned} \quad (17.79)$$

так как $\square_x \Delta(x-y; m^2) = -m^2 \Delta(x-y; m^2)$. Если равенство (17.79) продифференцировать по x_0 , положить $x_0 = y_0$ и заметить, что при равных временах $\Phi(y)$ коммутирует с $\mathbf{J}(x)$ и $\partial_0 \mathbf{J}(x)$, т. е. с $\psi(x)$ и $\partial_0 \psi(x)$ [что не противоречит уравнению (17.78)], то получим

$$\mu_0^2 = \frac{\int_0^\infty dm^2 \varrho(m^2) m^2}{\int_0^\infty dm^2 \varrho(m^2)} = Z_3 \mu^2 + \int_{(3\mu)^2}^\infty m^2 \sigma(m^2) dm^2, \quad (17.80a)$$

так что

$$\mu_0^2 - \mu^2 = \int_0^\infty dm^2 \varrho(m^2) (m^2 - \mu^2) \quad (17.80б)$$

$$= \int_{\mu^2}^\infty dm^2 \varrho(m^2) (m^2 - \mu^2). \quad (17.80в)$$

Поскольку функция $\varrho(m^2)$ положительна, равенство (17.80в) показывает, что «голая» масса больше физической¹⁾.

Рассмотрим далее асимптотическое поведение $\Delta'_F(k^2)$ при больших импульсах, или, что эквивалентно, поведение $\Delta'_F(x)$ при малых значениях x . Из (17.71) следует

$$\begin{aligned} \lim_{k^2 \rightarrow \infty} \Delta'_F(k^2) &= \lim_{k^2 \rightarrow \infty} \int_0^\infty dm^2 \frac{\varrho(m^2)}{k^2 \left(1 - \frac{m^2}{k^2} + i\varepsilon\right)} \approx \\ &\approx \lim_{k^2 \rightarrow \infty} \int_0^\infty dm^2 \varrho(m^2) \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{m^2}{k^2} \pm \dots\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{\mu_0^2}{k^2} \pm \dots\right) \approx \frac{1}{k^2 - \mu_0^2 + i\varepsilon} + O\left(\frac{1}{k^6}\right). \end{aligned} \quad (17.81)$$

Таким образом, при больших импульсах или малых пространственно-временных расстояниях поведение бозонной функции распространения определяется «голой» массой бозона.

¹⁾ При наличии в лагранжиане контрчлена $\lambda \Phi^4$ равенства (17.80) справедливы только в том случае, когда операторы соответствующим образом упорядочены. Если уравнение движения для бозонного поля имеет вид

$$(\square + \mu_0^2) \Phi(x) = \frac{1}{2} G [\tilde{\Psi}(x) \gamma_5, \Psi(x)] - \lambda [\Phi^3(x) - 3\Phi(x) \langle \Phi^2(x) \rangle_0],$$

где $\langle \Phi^2(x) \rangle_0 = \langle \Psi_0 | \Phi^2(x) | \Psi_0 \rangle$, то получаются равенства (17.80).

Наоборот, при малых импульсах или при больших временах и больших пространственных расстояниях преобладает полюсной член, так что

$$\lim_{k^2 \rightarrow \mu^2} \Delta'_F(k^2) \approx \frac{Z_3}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (17.82)$$

По существу $\Delta'_F(x-x')$ есть бозонная функция распространения с учетом всех радиационных поправок. Если в равенстве (17.81) с помощью преобразования Фурье перейти к конфигурационному пространству, то получим функцию распространения в пределе при $x-x' \rightarrow 0$. Это дает возможность рассчитать амплитуду вероятности того, что бозе-квант, локализованный в момент времени x'^0 в точке \mathbf{x}' , через короткое время в момент x^0 будет обнаружен в точке \mathbf{x} с помощью идеализированного, почти мгновенного измерения. Равенство (17.81) говорит о том, что при таком мгновенном эксперименте взаимодействие не успевает оказать влияния и поэтому распространение кванта описывается с помощью «голой» массы. С другой стороны, при больших временных интервалах, соответствующих реальному измерению, функция распространения, которая определяет результат измерения, зависит уже от физической (наблюдаемой) массы частицы.

Аналогичные результаты получаются для фотонной функции распространения в квантовой электродинамике. Представление Лемана для функции $D'_{F\mu\nu}(k^2)$ имеет вид

$$D'_{F\mu\nu}(k^2) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) D'_F(k^2), \quad (17.83a)$$

$$D'_F(k^2) = \frac{Z_3}{k^2} + \int_0^\infty dM^2 \frac{\sigma(M^2)}{k^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (17.83b)$$

Можно опять доказать, что

$$Z_3 + \int_0^\infty \sigma(M^2) dM^2 = 1. \quad (17.84)$$

Доказательство положительной определенности $\sigma(M^2)$ и Z_3 провести несколько труднее, так как скалярное произведение Гупта не является положительно определенным. Во втором порядке по e функция D'_F определяется выражением

$$D'_F(k^2) \approx \frac{Z_3^{(2)}}{k^2} + \int_0^\infty dM^2 \frac{\sigma^{(2)}(M^2)}{k^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (17.85a)$$

причем

$$Z_3^{(2)} \approx 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\lambda^2}{m^2}, \quad (17.85b)$$

$$\sigma^{(2)}(M^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{M^2} \left(1 + \frac{2m^2}{M^2} \right) \left(1 - \frac{4m^2}{M^2} \right)^{1/2} \theta(M^2 - 4m^2). \quad (17.85v)$$

Вклад в $\sigma^{(2)}$ возникает от диаграммы с замкнутой петлей (рождение и аннигиляция электронно-позитронной пары). Вычисляется $\sigma^{(2)}$ непосредственно.

Вспомним, что, по определению, при поперечной калибровке

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} D'_{F\mu\nu}(x-y) &= -\frac{1}{2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) D'_F(x-y) = \\ &= (\Psi_0, T(A_\mu(x) A_\nu(y)) \Psi_0) = \\ &= (\Phi_0, T(A_\mu(x) A_\nu(y) S)_C \Phi_0). \end{aligned} \quad (17.86)$$

Индекс C означает, что нужно рассматривать лишь связанные диаграммы, так что с учетом членов порядка e^2

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D'_{F\mu\nu}(x-y) &= \frac{1}{2} D_{F\mu\nu}(x-y) + \frac{e^2}{16} \int d^4 z_1 \int d^4 z_2 \times \\ &\times \text{Sp} \{ \gamma^{\mu_1} S_F(z_2 - z_1) \gamma^{\nu_1} S_F(z_1 - z_2) \} D_{F\mu\mu_1}(x - z_1) D_{F\nu\nu_1}(y - z_2), \end{aligned} \quad (17.87)$$

где при нашем выборе калибровки

$$D_{F\mu\nu}(x-y) = \frac{2i}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ik \cdot (x-y)} \left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu} \right) \frac{1}{k^2 + i\epsilon}. \quad (17.88)$$

Фурье-образ второго члена в (17.87) равен

$$\frac{e^2}{(2\pi)^8} \int d^4 k e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{k^{-2} k_\mu k_{\mu_1} - g_{\mu\mu_1}}{k^2 - i\epsilon} \cdot \Pi^{\mu_1\nu_1(2)}(k^2) \frac{k^{-2} k_{\nu_1} - g_{\nu_1\nu}}{k^2 + i\epsilon}, \quad (17.89a)$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k^2) = -8(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) \Pi^{(2)}(k^2) \quad (17.89b)$$

есть тензор поляризации вакуума, вычисленный в гл. 15 [равенства (15.138a) — (15.138b)]. Расходящаяся часть $\Pi^{(2)}(k^2)$, $\Pi^{(2)}(0)$ дает член, пропорциональный $D_{F\mu\nu}(x-y)$:

$$\frac{e^2}{(2\pi)^8} \Pi^{(2)}(0) \int d^4 k e^{-ik \cdot (x-y)} \left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu} \right) \frac{1}{k^2 + i\epsilon} = -\frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \frac{1}{2} D_{F\mu\nu}(x-y), \quad (17.90)$$

и комбинируется с первым членом правой части (17.87). Сравнивая (17.87) и общее выражение

$$D'_{F\mu\nu}(x-y) = Z_3 D_{F\mu\nu}(x-y) + \int_0^\infty dM^2 \sigma(M^2) \left(\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} - g_{\mu\nu} \right) \Delta_F(x-y; M^2), \quad (17.91)$$

получаем

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\lambda^2}{M^2} + \dots \quad (17.92)$$

Сходящуюся часть, $\Pi^{(2)}(k^2) - \Pi^{(2)}(0)$, можно записать в виде

$$\Pi^{(2)}(k^2) - \Pi^{(2)}(0) = i\pi^2 \int_0^1 dz (z - z^2) \ln \left| \frac{m^2 - (z - z^2) k^2}{m^2} \right| \quad (17.93a)$$

$$= -\frac{1}{2} i\pi^2 k^2 \int_0^1 \frac{z^2 dz \left(1 - \frac{z^2}{3} \right)}{4m^2 - k^2(1 - z^2) - i\epsilon}. \quad (17.93b)$$

При переходе от (17.93a) к (17.93b) мы сделали замену переменной $z \rightarrow 1 - 2z$ и выполнили интегрирование по частям. Окончательно,

вводя переменную $\frac{4m^2}{1-z^2} = M^2$, получаем

$$\Pi^{(2)}(k^2) - \Pi^{(2)}(0) = \frac{i\pi^2 k^2}{6} \int_{4m^2}^{\infty} dM^2 \frac{\left(1 + \frac{2m^2}{M^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}}{M^2(k^2 - M^2 + i\varepsilon)}. \quad (17.94)$$

Заметим, что в этом выражении k^2 под знаком интеграла появляется лишь в знаменателе и в виде $[k^2 - M^2 + i\varepsilon]^{-1}$, что соответствует бозонной функции распространения с массой M . Комбинируя (17.94), (17.89) и (17.87), замечаем, что конечную часть в (17.91) можно записать в виде

$$\int_0^{\infty} dM^2 \sigma^{(2)}(M^2) (\partial^{-2} \partial_{\mu} \partial_{\nu} - g_{\mu\nu}) \Delta_F(x-y; M^2),$$

где $\sigma^{(2)}(M^2)$ дается выражением (17.85в).

Функция $D'_F(k^2)$ при больших k^2 ведет себя как

$$\lim_{k^2 \rightarrow \infty} D'_F(k^2) \approx \frac{1}{k^2} \left(Z_3 + \int_0^{\infty} \sigma(M^2) dM^2 + O\left(\frac{1}{k^6}\right) \right) \approx \frac{1}{k^2}, \quad (17.95a)$$

а при малых k^2 как

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} D'_F(k^2) \approx \frac{Z_3}{k^2}. \quad (17.95b)$$

Для физической интерпретации равенств (17.95a) и (17.95b) вспомним, что потенциальная энергия двух тяжелых пробных частиц с неперенормированными зарядами q_0 и q'_0 , находящимися на расстоянии r друг от друга, дается формулой

$$V(r) = \frac{q_0 q'_0}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ik \cdot r} D'_F(k^2). \quad (17.96)$$

При малых r ($r \ll \frac{1}{m}$) потенциал будет определяться поведением $D'_F(k)$ при больших k и, следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow 0} V(r) \sim \frac{q_0 q'_0}{4\pi r} + \dots \quad (17.97a)$$

При больших r ($r \gg \frac{1}{m}$) потенциал определяется поведением $D'_F(k)$ при малых значениях k , так что

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) &\approx \frac{Z_3 q_0 q'_0}{4\pi r} + \dots \approx \\ &\approx \frac{q q'}{4\pi r}. \end{aligned} \quad (17.97b)$$

Здесь q и q' — перенормированные заряды источников: $q = Z_3^{1/2} q_0$, $q' = Z_3^{1/2} q'_0$. Таким образом, характер взаимодействия между частицами определяется на малых расстояниях перенормированным зарядом, а на больших — перенормированным. Тот факт, что $0 \leq Z_3 \leq 1$, означает, что перенормированный заряд меньше, чем «голый». Это выглядит правдоподобно в свете обсуждения в § 5 гл. 15, где указывалось, что явление поляризации вакуума можно описать следующим образом. «Голой» заряд окружает себя облаком виртуальных квантов с противоположным знаком заряда (а кванты с зарядом того же знака отталкиваются на бесконечность). Эти кванты являются составными частями виртуальных пар,

которые постоянно рождаются при флуктуациях вакуума. Таким образом, на больших расстояниях мы видим «голый» заряд минус заряд облака, а это, по определению, перенормированный заряд. Поэтому его величина меньше, чем величина «голового» заряда.

Выполненные ранее вычисления константы Z_3 в электродинамике (и аналогичные вычисления в мезодинамике) показывают, что Z_3 расходится по крайней мере при вычислениях по теории возмущений. Следовательно, матричный элемент от бозонного оператора Φ между физическим однозонным состоянием и вакуумом тоже расходится:

$$\langle \Psi_0 | \Phi(0) | p; p^2 = \mu^2 \rangle = \frac{Z_3^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (17.98)$$

Определим поэтому новый, перенормированный оператор

$$\Phi_R(x) = Z_3^{-1/2} \Phi(x), \quad (17.99)$$

который обладает тем свойством, что его матричный элемент между физическим однозонным состоянием и вакуумом конечен:

$$\langle \Psi_0 | \Phi_R(x) | p; p^2 = \mu^2 \rangle = \langle \Psi_0 | Z_3^{-1/2} \Phi(x) | p; p^2 = \mu^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ip \cdot x}. \quad (17.100a)$$

Матричный элемент оператора $\Phi_R(x)$ между произвольными физическими состояниями также будет конечным. Перенормированная весовая функция

$$Q_R(p^2) = (2\pi)^3 \sum_{\alpha} |\langle \Psi_0 | \Phi_R(0) | p; \alpha \rangle|^2 \quad (17.100b)$$

просто связана с неперенормированной:

$$Q_R(p^2) = Z_3^{-1} Q(p^2). \quad (17.101)$$

Так как $\Phi_R(x)$ — перенормированный оператор поля, то вычисления $Q_R(p^2)$ можно провести, не сталкиваясь с расходимостями. Записанное с помощью перенормированных величин равенство (17.69) имеет вид

$$1 + \int_{(3\mu)^2}^{\infty} \sigma_R(m^2) dm^2 = Z_3^{-1}. \quad (17.102)$$

Отметим также, что перенормированные операторы удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[\Phi_R(x), \Phi_R(y)] = 0 \quad \text{при } (x-y)^2 < 0, \quad (17.103a)$$

$$[\partial_0 \Phi_R(x), \Phi_R(y)]_{x_0=y_0} = -i Z_3^{-1} \delta^{(3)}(x-y). \quad (17.103b)$$

Для спинорных полей можно разработать технику, аналогичную примененной при вычислении вакуумного среднего от двух бозонных полей (Уайтман, 1953 г., не опубликовано; Леман [490]; Гелл-Манн и Лоу [304]). Обозначим среднее по вакууму от произведения двух спинорных полей (фермионную двухточечную функцию Уайтмана) через

$$W_{\alpha\beta}^{\Psi}(x-y) = (\Psi_0, \psi_{\alpha}(x) \tilde{\psi}_{\beta}(y) \Psi_0). \quad (17.104)$$

Здесь мы уже использовали трансляционную инвариантность теории, записав W^{Ψ} как функцию $x-y$. Так как при однородных преобразова-

ниях Лоренца

$$U(0, \Lambda) |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle, \quad (17.105a)$$

$$U(0, \Lambda) \Psi_\alpha(x) U(0, \Lambda)^{-1} = \sum_{\beta=1}^4 S_{\alpha\beta}^{-1}(\Lambda) \Psi_\beta(\Lambda x), \quad (17.105b)$$

то

$$W_{\alpha\beta}^\Psi(x-y) = \sum_{\delta\beta} S_{\alpha\delta}^{-1}(\Lambda) W_{\delta\beta}^\Psi(\Lambda(x-y)) S_{\delta\beta}(\Lambda). \quad (17.106)$$

Далее можно разложить W^Ψ по шестнадцати линейно независимым матрицам $\Gamma^{(i)}$, образованным из матриц γ и их произведений:

$$W_{\alpha\beta}^\Psi(x) = \sum_{i=1}^{16} [\Gamma^{(i)}]_{\alpha\beta} W_{(i)}^\Psi(x). \quad (17.107)$$

Разделяя матрицы $\Gamma^{(i)}$ на группы с определенными трансформационными свойствами, имеем

$$W_{\alpha\beta}^\Psi(x) = \delta_{\alpha\beta} W_S^\Psi(x) + (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} W_{V\mu}^\Psi(x) + (\gamma^5)_{\alpha\beta} W_P^\Psi(x) + \\ + \frac{1}{2} (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} W_{T\mu\nu}^\Psi(x) + i (\gamma^5 \gamma^\mu)_{\alpha\beta} W_{A\mu}^\Psi(x). \quad (17.108)$$

Подставляя (17.108) в (17.106), используя $S(\Lambda)^{-1} \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu$ и вычисляя нужные следы, найдем

$$W_S^\Psi(x) = W_S^\Psi(\Lambda x), \quad (17.109a)$$

$$W_{V\mu}^\Psi(x) = \Lambda_\mu^{-1\nu} W_{V\nu}^\Psi(\Lambda x), \quad (17.109b)$$

$$W_{T\mu\nu}^\Psi(x) = \Lambda_\mu^{-1\lambda} \Lambda_\nu^{-1\lambda} W_{T\lambda\lambda}^\Psi(\Lambda x), \quad (17.109b)$$

$$W_{A\mu}^\Psi(x) = (\det \Lambda) \Lambda_\mu^{-1\nu} W_{A\nu}^\Psi(\Lambda x), \quad (17.109r)$$

$$W_P^\Psi(x) = \det \Lambda \cdot W_P^\Psi(\Lambda x). \quad (17.109d)$$

Полученные соотношения оправдывают введенные обозначения: S (скаляр), V (вектор), T (тензор), A (аксиальный вектор) и P (псевдоскаляр). Комплексно сопрягая обе части равенства (17.104), получаем

$$\overline{W_{\alpha\beta}^\Psi(x-y)} = \overline{(\Psi_0, \Psi_\alpha(x) \tilde{\Psi}_\beta(y) \Psi_0)} = (\Psi_0, (\Psi_\alpha(x) \tilde{\Psi}_\beta(y))^* \Psi_0) = \\ = \sum_{\rho\lambda} \gamma_{\beta\rho}^0 (\Psi_0, \Psi_\rho(y) \tilde{\Psi}_\lambda(x) \Psi_0) \gamma_{\lambda\alpha}^0 = \\ = \sum_{\rho\lambda} \gamma_{\rho\beta}^0 W_{\rho\lambda}^\Psi(y-x) \gamma_{\lambda\alpha}^0 \quad (17.110a)$$

или

$$W^\Psi(x)^* = \gamma^0 W^\Psi(-x) \gamma^0. \quad (17.110b)$$

Далее, так как $\gamma^0 [\Gamma^{(i)}]^* \gamma^0 = \Gamma^{(i)}$, то

$$W_{(i)}^\Psi(x) = \overline{W_{(i)}^\Psi(-x)}. \quad (17.111)$$

Применение PT ($= C$) и T -инвариантности вместе с равенствами (17.105)–(17.111) показывает, что W_P^Ψ , W_T^Ψ и W_A^Ψ равны нулю и, следовательно,

$$W_{\alpha\beta}^\Psi(x) = \delta_{\alpha\beta} W_S^\Psi(x) + (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} W_{V\mu}^\Psi(x). \quad (17.112)$$

Используем далее спектральные условия. Вводя в равенство (17.104) полный набор состояний $|\mathbf{p}, \alpha\rangle$, находим

$$W_{\rho\sigma}^{\Psi}(x-y) = \sum_{|\mathbf{p}, \alpha\rangle} \langle \Psi_0 | \Psi_{\rho}(0) | \mathbf{p}, \alpha \rangle \langle \mathbf{p}, \alpha | \tilde{\Psi}_{\sigma}(0) | \Psi_0 \rangle e^{-i\mathbf{p}\cdot(x-y)}. \quad (17.113)$$

Обозначив сумму по различным состояниям $|\mathbf{p}, \alpha\rangle$ с фиксированным 4-импульсом p_{μ} через $\omega_{\rho\sigma}(p)$:

$$\theta(p^2) \theta(p_0) \omega_{\rho\sigma}(p) = (2\pi)^3 \sum_{\alpha} \langle \Psi_0 | \Psi_{\rho}(0) | \mathbf{p}, \alpha \rangle \langle \mathbf{p}, \alpha | \tilde{\Psi}_{\sigma}(0) | \Psi_0 \rangle, \quad (17.114)$$

можно написать

$$W_{\rho\sigma}^{\Psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p e^{-i\mathbf{p}\cdot(x-y)} \theta(p_0) \theta(p^2) \omega_{\rho\sigma}(p), \quad (17.115a)$$

где

$$\omega_{\rho\sigma}(p) = \delta_{\rho\sigma} \omega_S(p) + (\gamma^{\mu})_{\rho\sigma} \omega_{V\mu}(p). \quad (17.115b)$$

Условия ковариантности [равенства (17.109a) – (17.109д)], выраженные через функции $\omega_{V\mu}(p)$ и $\omega_S(p)$, гласят:

$$\omega_S(p) = \omega_S(\Lambda p), \quad (17.116a)$$

$$\omega_{V\mu}(p) = \Lambda_{\mu}^{-1\nu} \omega_{V\nu}(\Lambda p). \quad (17.116b)$$

Из (17.116a) следует, что $\omega_S(p) = \omega_{(1)}(p^2)$. Равенство (17.116b) утверждает, что $\omega_{V\mu}(p)$ для всех p на гиперboloиде $p^2 = \lambda^2$ можно получить из $\omega_{V\mu}(\lambda, 0)$. Кроме того, $\omega_{V\mu}(\lambda, 0)$ есть 4-вектор, инвариантный относительно всех преобразований Λ , которые оставляют инвариантным вектор $(\lambda, 0)$, т. е. относительно всех вращений. Поэтому $\omega_{Vi}(\lambda, 0) = 0$ при $i = 1, 2, 3$ и

$$\omega_{V\mu}(p) = p_{\mu} \omega_{(2)}(p^2), \quad (17.117)$$

так что окончательно $W^{\Psi}(x)$ можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} W^{\Psi}(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p e^{-i\mathbf{p}\cdot(x-y)} \theta(p_0) \theta(p^2) (\omega_{(1)}(p^2) + \gamma \cdot p \omega_{(2)}(p^2)) = \\ &= i \int_0^{\infty} dm^2 \{ \omega_{(1)}(m^2) + \omega_{(2)}(m^2) i\gamma \cdot \partial \} \Delta^{(+)}(x-y; m^2). \end{aligned} \quad (17.118)$$

Переопределяя весовые функции:

$$\omega_{(1)} - m \omega_{(2)} = \varrho_{(2)}, \quad (17.119a)$$

$$\omega_{(2)} = \varrho_{(1)}, \quad (17.119b)$$

можно написать

$$\begin{aligned} W^{\Psi}(x-y) &= (\Psi_0, \psi(x) \tilde{\psi}(y) \Psi_0) = \\ &= \int_0^{\infty} dm^2 \{ \varrho_{(1)}(m^2) (-iS^{(+)}(x-y; m)) + \varrho_{(2)}(m^2) i\Delta^{(+)}(x-y; m^2) \}. \end{aligned} \quad (17.120)$$

Из сравнения равенств (17.114), (17.115b) и (17.119) можно заключить, что весовые функции $\varrho_{(1)}$ и $\varrho_{(2)}$ действительны и что в мезонной теории (где норма любого состояния положительна) эти функции удовлетворяют следующим условиям положительной определенности: $\varrho_{(1)}(m^2) \geq 0$, $2m\varrho_{(1)}(m^2) \geq \varrho_{(2)}(m^2) > 0$. В квантовой электродинамике отсутствие положительной определенности скалярного произведения Гупта не позволяет вывести эти заключения.

Как и для бозонов, опять можно получить

$$\langle \Psi_0, T(\Psi(x)\tilde{\Psi}(y))\Psi_0 \rangle = -\frac{1}{2} S'_F(x-y) \quad (17.121a)$$

$$= \int_0^{\infty} dm^2 \{ \omega_{(1)}(m^2) + \omega_{(2)}(m^2) i\gamma^\mu \partial_\mu \} \Delta_F(x-y; m^2). \quad (17.121b)$$

Обозначая фурье-образ $S'_F(x-y)$ через $S'_F(p)$, имеем

$$-\frac{1}{2} S'_F(p) = i \int_0^{\infty} dm^2 \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (\omega_{(1)}(m^2) + \gamma \cdot p \omega_{(2)}(m^2)). \quad (17.122)$$

Удобно ввести две новые функции, $h^{(1)}(m^2)$ и $h^{(2)}(m^2)$, определенные равенствами:

$$\omega_{(1)}(m^2) = h^{(1)}(m^2) - h^{(2)}(m^2), \quad (17.123a)$$

$$\omega_{(2)}(m^2) = \frac{1}{m} (h^{(1)}(m^2) + h^{(2)}(m^2)). \quad (17.123b)$$

Тогда

$$-\frac{1}{2} S'_F(p) = i \int_0^{\infty} \frac{dm^2}{m} \left[\frac{h^{(1)}(m^2)}{\gamma \cdot p - m + i\epsilon} + \frac{h^{(2)}(m^2)}{\gamma \cdot p + m - i\epsilon} \right]. \quad (17.124)$$

Представляет интерес рассмотреть вид S'_F , когда явно выделен вклад однофермионных состояний. Исследуем с этой целью структуру функций $\omega_{(1)}$ и $\omega_{(2)}$. Из равенств (17.114) и (17.115б) следует

$$\omega_{(1)}(p^2) = \frac{(2\pi)^3}{4} \sum_{\rho=1}^4 \sum_{|\rho\alpha\rangle} \langle \Psi_0 | \psi_\rho(0) | \rho, \alpha \rangle \langle \rho, \alpha | \tilde{\psi}_\rho(0) | \Psi_0 \rangle. \quad (17.125)$$

Выделяя вклад однофермионных состояний, получаем

$$\omega_{(1)}(p^2) = \frac{(2\pi)^3}{4} \sum_{\rho=1}^4 \sum_{s=1}^2 \langle \Psi_0 | \psi_\rho(0) | \rho, s; p^2 = M^2 \rangle \times \\ \times \langle \rho, s; p^2 = M^2 | \tilde{\psi}_\rho(0) | \Psi_0 \rangle + \omega'_{(1)}(p^2), \quad (17.126)$$

где через $\omega'_{(1)}(p^2)$ обозначен вклад от всех других состояний $|\rho, \alpha'\rangle$. Из соображений релятивистской инвариантности

$$\langle \Psi_0 | \psi_\rho(x) | \rho, s; p^2 = M^2 \rangle = \frac{Z_2^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ip \cdot x} \sqrt{2M} u_\rho^s(\mathbf{p}), \quad (17.127)$$

где $(\gamma \cdot p - M) u^s(\mathbf{p}) = 0$, а Z_2 — постоянная нормировки. Подставляя выражение (17.127) в равенство (17.126), видим, что два однофермионных состояния ($s=1, 2$) дают в $\omega_{(1)}(p^2)$ член

$$\frac{1}{2} Z_2 M \text{Sp} \left(\sum_{s=1}^2 u^s(\mathbf{p}) \tilde{u}^s(\mathbf{p}) \right) = \frac{1}{2} Z_2 M \text{Sp} \left(\frac{\gamma \cdot p + M}{2M} \right) = \\ = Z_2 M. \quad (17.128)$$

Следовательно,

$$\omega_{(1)}(p^2) = Z_2 M \delta(p^2 - M^2) + \omega'_{(1)}(p^2). \quad (17.129)$$

Аналогично легко получить [так как, согласно (17.1156), $\text{Sp}(\gamma^0 \omega) = 4p^0 \omega_{(2)}$]

$$\omega_{(2)}(p^2) = Z_2 \delta(p^2 - M^2) + \omega'_{(2)}(p^2). \quad (17.130)$$

Поэтому из равенств (17.123) следует

$$h^{(1)}(m^2) = MZ_2 \delta(m^2 - M^2) + \frac{1}{2} [\omega'_{(1)}(m^2) + m\omega'_{(2)}(m^2)], \quad (17.131)$$

$$h^{(2)}(m^2) = \frac{1}{2} [m\omega'_{(2)}(m^2) - \omega'_{(1)}(m^2)]. \quad (17.132)$$

Равенство (17.124) теперь гласит:

$$-\frac{1}{2} S'_F(p) = i \frac{Z_2}{\gamma \cdot p - M + i\epsilon} + \frac{1}{2} \int_{M+\mu}^{\infty} \left\{ \frac{\omega'_{(1)}(m^2) + m\omega'_{(2)}(m^2)}{\gamma \cdot p - m + i\epsilon} - \frac{\omega'_{(1)}(m^2) - m\omega'_{(2)}(m^2)}{\gamma \cdot p + m - i\epsilon} \right\} \frac{dm^2}{m}. \quad (17.133)$$

В локальной теории поля, где спинорные операторы подчиняются каноническим одновременным перестановочным соотношениям

$$[\psi(x), \tilde{\psi}(x')]_+ \Big|_{x_0=x'_0} = \gamma^0 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (17.134)$$

можно получить дальнейшие ограничения на весовую функцию $\varrho_{(1)}$, если сравнить представление Лемана для $(\Psi_0 [\psi(x), \tilde{\psi}(x')]_+ \Psi_0)$ при $x_0 = x'_0$ со средним по вакууму из равенства (17.126). Предполагая C -инвариантность теории [которая дает возможность связать $(\Psi_0, \psi(x) \tilde{\psi}(y) \Psi_0)$ и $(\Psi_0, \tilde{\psi}(x) \psi(y) \Psi_0)$], находим, что среднее по вакууму от антикоммутатора $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(y)$ имеет следующее спектральное представление:

$$\Psi_0, [\psi(x), \tilde{\psi}(x')]_+ \Psi_0 = \int_0^{\infty} dm^2 \{ \varrho_{(1)}(m^2) (-iS(x-x'; m)) + \varrho_{(2)}(m^2) i\Delta(x-x'; m^2) \}. \quad (17.135)$$

Сравнивая это равенство при $x_0 = x'_0$ с усредненным по вакууму равенством (17.134), получаем

$$\int_0^{\infty} dm^2 \varrho_{(1)}(m^2) = 1 = Z_2 + \int_0^{\infty} dm^2 \omega'_{(2)}(m^2), \quad (17.136)$$

так как $\Delta(\mathbf{x}, 0; m^2) = 0$.

Наконец, если уравнение движения для оператора ψ есть

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - M) \psi(x) = G\gamma_5 \varphi(x) \psi(x) - \delta M \psi(x), \quad (17.137)$$

то процедура, аналогичная примененной в случае бозонного поля, показывает, что

$$M - M_0 = \delta M = \frac{\int_0^{\infty} [(M-m) \varrho_{(1)}(m^2) + \varrho_{(2)}(m^2)] dm^2}{\int_0^{\infty} \varrho_{(1)}(m^2) dm^2}. \quad (17.138)$$

Равенство (17.138) получается, если подействовать оператором $i\gamma \cdot \partial - M$ на $(\Psi_0, [\tilde{\psi}(x), \psi(x')]_+ \Psi_0)$,

использовать уравнение движения (17.137) и представление (17.135), а затем перейти к равным временам.

При вычислениях по теории возмущений Z_2 расходится. Поэтому определяют перенормированный гейзенберговский оператор $\Psi_R(x)$ с помощью равенства

$$\Psi_R(x) = Z_2^{-1/2} \psi(x), \quad (17.139a)$$

$$\tilde{\Psi}_R(x) = Z_2^{-1/2} \tilde{\psi}(x). \quad (17.139b)$$

Перенормированный оператор $\Psi_R(x)$ обладает тем свойством, что его матричный элемент между физическим однонуклонным состоянием и вакуумом конечен. Перенормированные операторы удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[\Psi_R(x), \tilde{\Psi}_R(x')]_{+} \Big|_{x_0=x'_0} = -iZ_2^{-1} S(x-x'). \quad (17.140)$$

Для среднего по вакууму от произведения двух перенормированных операторов имеется спектральное представление, выражающееся через весовые функции $Q_{(1)R}$ и $Q_{(2)R}$. Это представление совпадает с написанным выше. Ясно, что перенормированные весовые функции связаны с неперенормированными мультипликативно, $Z_2 Q_{(i)R} = Q_{(i)}$ ($i = 1, 2$), откуда с помощью равенства (17.136) получаем

$$Z_2^{-1} = \int_0^{\infty} Q_{(1)R}(m^2) dm^2. \quad (17.141)$$

Если определить перенормированный заряд G_R ,

$$G_R = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{1/2} G, \quad (17.142)$$

то уравнения движения для перенормированных гейзенберговских операторов в нейтральной псевдоскалярной мезонной теории будут иметь вид

$$\begin{aligned} (i\gamma \cdot \partial - M) \Psi_R(x) &= -\delta M \Psi_R(x) + G_R Z_1 Z_2^{-1} \gamma_5 \Phi_R(x) \Psi_R(x) (\square + \mu^2) \Phi_R(x) = \\ &= \frac{1}{2} G_R Z_1 Z_3^{-1} [\tilde{\Psi}_R(x) \gamma_5, \Psi_R(x)] + \frac{1}{2} \delta \mu_0^2 \Phi_R(x) - \delta \lambda' \Phi_R^2(x). \end{aligned} \quad (17.143)$$

При расчете различных эффектов по теории возмущений с использованием перенормированных операторов (и постоянных Z_1, Z_2, Z_3 , определенных выше) все сечения и сдвиги уровней получаются конечными. Однако остаются еще расходимости, связанные с локальными величинами, такими, как $(\Psi_0, \mathbf{J}_R(x) \mathbf{J}_R(x') \Psi_0)$ или $(\Psi_0, \Phi_R(x) \Phi_R(x') \Psi_0)$. Это отражает тот факт, что такой локальный оператор, как $\mathbf{J}_R(x)$ или $\Phi_R(x)$, не может быть наблюдаемой. Противоположный случай соответствовал бы возможности произвести измерение в одной пространственно-временной точке, что, однако, исключается соотношениями неопределенностей. Анализ возможных измерений показывает, что наблюдаемыми будут лишь взвешенные средние по пространственно-временным областям, т. е. лишь величины типа $\int_{\Omega} d^4x \mathbf{J}(x) f(x)$, где $f(x)$ — некоторая весовая функция.

Спектральные представления функций Грина

$$(\Psi_0, T(\psi(x) \tilde{\psi}(y)) \Psi_0) \text{ и } (\Psi_0, T(\varphi(x) \varphi(y)) \Psi_0),$$

которые мы обсудили в этом параграфе, являются общими и зависят лишь от релятивистской инвариантности теории и некоторых свойств импульсно-энергетического спектра физических состояний. Отсюда ясен один критерий, выполнения которого нужно требовать от любого подхода к нахождению решений квантовой теории поля с помощью теории возмущений. Необходимо, чтобы полученные приближенные решения обладали такими же аналитическими свойствами, которые известны для точных решений. Попытки включить в теорию возмущений аналитические свойства функций Δ'_F и S'_F были предприняты Редмондом [661] и Фолком [229]. По этой и по другим причинам очень интересно иметь аналогичные представления для функций Грина высших порядков, чему в недавнее время было уделено большое внимание. Для введения в эти проблемы мы отсылаем читателя к статьям Чисхолма [129], Намбу [572, 573], Наканиши [568], Симанзика [763], Мэтьюза [537], Ландау [476], Окуня и Рудика [601] и Бьёркена [57]. В гл. 18 мы выведем представление для матричного элемента $\langle p, \alpha | [\varphi(x), \varphi(y)] | q, \beta \rangle$, предполагая, что φ — локальное поле.

§ 3. Величина перенормировочных констант

Формальное рассмотрение последнего параграфа показывает, что перенормировочная константа Z_3 должна удовлетворять соотношению $0 \leq Z_3 \leq 1$. Поэтому нужно обсудить три возможности: а) $0 < Z_3 < 1$, б) $Z_3 = 0$, в) $Z_3 = 1$. В действительности для некоторых теорий (вспомним модель Ли) существует четвертая возможность г) $Z_3 < 0$, так что нужно исследовать и этот случай. Чтобы увидеть, что означает каждая из возможностей, мы обсудим их на примере квантовой электродинамики. Вспомним, что перенормированная функция распространения $D'_{FR\mu\nu}(x-y)$ выражается через перенормированные операторы $A_{R\mu}(x) = Z_3^{-1/2} A_\mu(x)$

$$D'_{FR\mu\nu}(x-y) = (\Psi_0, T(A_{R\mu}(x) A_{R\nu}(y)) \Psi_0) \quad (17.144a)$$

и имеет следующее спектральное представление:

$$D'_{FR\mu\nu}(k^2) = (g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu k^{-2}) D_{FR}(k^2) \quad (17.144б)$$

$$D_{FR}(k^2) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} + \int_0^\infty dM^2 \frac{\sigma_R(M^2)}{k^2 - M^2 + i\varepsilon}. \quad (17.144в)$$

Вспомним также, как Z_3 выражается через $\sigma_R(M^2)$:

$$Z_3^{-1} = 1 + \int_0^\infty \sigma_R(M^2) dM^2. \quad (17.145)$$

Для дальнейшего обсуждения удобно ввести функцию

$$P(k^2) = k^2 D'_{FR}(k^2), \quad (17.146)$$

которая обладает свойствами

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} P(k^2) = P(0) = 1 \quad (17.147)$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{k^2 \rightarrow \infty} P(k^2) &= \lim_{k^2 \rightarrow \infty} \left(1 + \int_0^\infty \frac{dM^2 \sigma_R(M^2)}{\left(1 - \frac{M^2}{k^2} + i\varepsilon\right)} \right) \approx \\ &\approx 1 + \int_0^\infty \sigma_R(M^2) dM^2 + O\left(\frac{1}{k^2}\right) = Z_3^{-1}. \end{aligned} \quad (17.148)$$

Как уже отмечалось, теория возмущений в низшем порядке по e^2 дает, что асимптотически

$$\lim_{M^2 \rightarrow \infty} \sigma_R(M^2) \approx \frac{e_R^2}{3\pi} \frac{1}{M^2}, \quad (17.149)$$

так что

$$Z_3^{-1} \approx 1 + \int \frac{e_R^2}{3\pi} \frac{dM^2}{M^2} \quad (17.150a)$$

$$\approx \infty, \quad (17.150б)$$

т. е. $Z_3 = 0$. Это означает, что «голый» заряд ($e_0^2 = Z_3^{-1} e_R^2$) бесконечен. Полученный результат можно сформулировать менее категорично, если заметить, что $Z_3^{-1} e_R^2$ есть коэффициент при $1/r$ в электростатическом потенциале двух зарядов на *близких* расстояниях. Можно сказать, что закон Кулона e_R^2/r , который на больших расстояниях определяет перенормированные электрические заряды частиц, на малых расстояниях в действительности имеет более сильную особенность, чем $1/r$. Сформулируем утверждение точнее. Как ранее было отмечено, потенциальная энергия двух тяжелых точечных пробных тел с перенормированными зарядами q_R и q'_R , находящихся на расстоянии r друг от друга, дается выражением

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{q_R q'_R}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} D'_{FR}(p^2, e_R^2) \approx \\ &\approx \frac{q_R q'_R}{4\pi r} \left[1 + \frac{\alpha_R^2}{3\pi} \int_{4m^2}^\infty dM^2 e^{-rMc/\hbar} \left(1 + \frac{2m^2}{M^2} \right) \left(1 - \frac{4m^2}{M^2} \right)^{1/2} \frac{1}{M^2} \right], \end{aligned} \quad (17.151)$$

асимптотический вид которого при $r \ll \frac{\hbar}{mc}$ есть [304]:

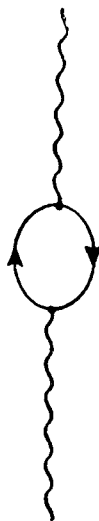
$$V(r) \approx \frac{q_R q'_R}{4\pi r} \left[1 + \frac{2\alpha_R^2}{3\pi} \left\{ \ln\left(\frac{\hbar}{mcr}\right) - \frac{5}{6} - \ln \gamma \right\} + O(\alpha_R^2) \right], \quad (17.152)$$

где $\gamma = 1,781 \dots$. Мы указывали также, что при $r \rightarrow 0$ энергия $V(r)$ должна стремиться к $\frac{q_0 q'_0}{4\pi r}$, где q_0, q'_0 — «голые» заряды, и, следовательно,

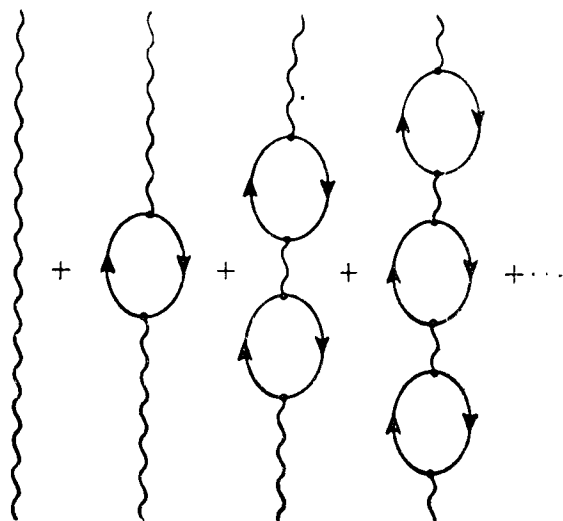
$$q_0 q'_0 = q_R q'_R \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ 1 + \frac{2\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{\left(\frac{\hbar}{mc}\right)}{r} + \dots \right\}. \quad (17.153)$$

Поэтому вместо утверждения, что «голые» заряды становятся бесконечными, можно сказать, что с учетом поляризации вакуума потенциал между заряженными частицами имеет при $r=0$ более сильную особенность, чем $1/r$. Фактически он ведет себя как $\frac{1}{r} \ln \frac{1}{r}$. Конечно, при таких обстоятельствах не очень полезно использовать понятие «голого» заряда e_0 . Ведь квантовая электродинамика определяется через поведе-

ние заряда на больших расстояниях (или, что эквивалентно, через его поведение при низких энергиях). Случай, когда $Z_3 = 0$, является определенной возможностью и, помимо перенормировки, ведет к непротиворечивой физической картине. Предположение, что $Z_3 = 0$, основано на результатах вычислений $\sigma_R(M^2)$ во втором порядке теории возмущений. При этом учитывался вклад в σ_R только от одной замкнутой петли, показанной на фиг. 136.



Ф и г. 136.



Ф и г. 137.

Интересно рассмотреть вид $D'_{FR}(k^2)$ или $P(k^2)$, когда учитываются вклады всех диаграмм, изображенных на фиг. 137. В § 2 гл. 16 мы видели, что учет таких несобственных диаграмм заключается в том, что $D'_F(k)$ заменяется на

$$D'_F(k) = \frac{D_F(k)}{1 - \Pi^{(2)}(k^2)} \sim \frac{1}{(1 + C^{(2)})k^2 - (\Pi^{(2)}(k^2) - \Pi^{(2)}(0))k^2}, \quad (17.154)$$

причем $(Z_3^{(2)})^{-1} = 1 + C^{(2)}$. Следовательно, в этом случае $D'_{FR}(k^2)$ в пределе $k^2 \rightarrow \infty$ есть

$$\lim_{k^2 \rightarrow \infty} D'_{FR}(k^2) \sim \frac{1}{k^2 \left(1 - \frac{\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{k^2}{4m^2} + \dots \right)} \quad (17.155)$$

или

$$\lim_{k^2 \rightarrow \infty} P(k^2) \sim \frac{1}{1 - \frac{\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{k^2}{4m^2} + \dots}. \quad (17.156)$$

Если согласиться с таким результатом, тогда постоянная Z_3^{-1} , равная пределу $P(k^2)$ при $k^2 \rightarrow \infty$, при отсутствии обрезания может быть отрицательной. А это противоречит общему соотношению $0 \leq Z_3 \leq 1$, полученному в предположении, что каждое состояние обладает положительной нормой в гильбертовом пространстве. Поэтому, чтобы теория была математически последовательной, должны существовать состояния с отрицательной нормой («призраки»). Следовательно, S -матрица уже не будет унитарной, и положение фактически очень похоже на то, с которым

сталкиваются в модели Ли (см. § 2 гл. 12), когда константа связи превосходит по величине критическое значение [415, 272, 793, 794, 474].

Этот результат для функции D'_F был получен суммированием особого класса диаграмм Фейнмана, не обращая внимания на то, удовлетворяет ли это приближение общим требованиям, следующим из представления Лемана [равенство (17.76)], или нет. Рассмотрим, что получится, если потребовать, чтобы для такого приближения выполнялось равенство (17.76) [661, 68]. С этой целью запишем вклад члена n -го порядка в $P(k^2)$ при больших k^2 в виде

$$P^{(n)}(k^2) \approx -(F(k^2, m^2))^n, \quad (17.157a)$$

$$F(k^2, m^2) = \frac{\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{4m^2 - k^2}{4m^2}. \quad (17.157b)$$

Здесь в аргумент логарифма введен член $4m^2$, чтобы правильно представить мнимую часть F

$$\text{Im } F(k^2, m^2) = -\frac{\alpha_R}{3} \theta(k^2 - 4m^2) \quad (17.157b)$$

и в то же самое время сохранить нормировку $F(0, m^2) = 0$. Непосредственное суммирование $P^{(n)}(k^2)$, как мы видели, дает

$$\lim_{k^2 \rightarrow \infty} P(k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(k^2) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{4m^2 - k^2}{4m^2}}. \quad (17.158)$$

Поступим, однако, таким образом, чтобы удовлетворялось равенство (17.76). Для этого заметим, что член функции распространения $D'_{FR}(k^2)$, соответствующий n -му приближению, есть

$$D'_{FR}(k^2) = \frac{1}{k^2} P^{(n)}(k^2) \approx \frac{1}{k^2} \left(\frac{\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{4m^2 - k^2}{4m^2} \right)^n. \quad (17.159a)$$

Его можно представить в лемановской спектральной форме, если написать, что

$$D'_{FR}(k^2) = \frac{1}{k^2} \left(\frac{\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{4m^2 - k^2}{4m^2} \right)^n = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{I_n(z)}{z - k^2} dz, \quad (17.159b)$$

причем

$$\pi I_n(z) = \text{Im } D'_{FR}(k^2). \quad (17.159b)$$

Теперь

$$\pi I_n(z) = \text{Im} \frac{1}{z} \left(\frac{\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{4m^2 - z}{4m^2} \right)^n, \quad (17.160)$$

так что

$$I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(z) = \frac{\alpha_R}{3\pi z} \left[\left(1 - \frac{\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{z - 4m^2}{4m^2} \right)^2 + \frac{\alpha_R}{9} \right]^{-1} \theta(z - 4m^2), \quad (17.161)$$

и в этом приближении фотонная функция Грина, удовлетворяющая равенству (17.76), дается выражением

$$\begin{aligned} D'_{FR}(k^2) &= \frac{1}{k^2} + \frac{\alpha_R}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dz}{z - k^2 - i\varepsilon} \left[\left(1 - \frac{\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{z - 4m^2}{4m^2} \right)^2 + \frac{\alpha_R}{9} \right]^{-1} = \\ &= \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{4m^2 - k^2}{4m^2} \right)^{-1} - \frac{3\pi}{\alpha_R} \frac{1}{[1 - 4e^{-3\pi/\alpha_R}] [k^2 - 4m^2 + 4m^2 e^{3\pi/\alpha_R}]}, \end{aligned} \quad (17.162a)$$

которое при $k^2 \gg m^2$ и $\alpha_R < 1$ принимает вид

$$D'_{FR}(k^2) \approx \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 - \frac{\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{-k^2}{4m^2}} - \frac{3\pi}{\alpha_R} \frac{1}{k^2 + 4m^2} e^{3\pi/\alpha_R}. \quad (17.1626)$$

Функция распространения (17.1626) обладает следующими свойствами:

- 1) она не имеет логарифмического полюса;
- 2) в окрестности $\alpha_R = 0$ функция $D'_{FR}(k^2)$ имеет существенную особенность вида $e^{-3\pi/\alpha_R}$. Тем не менее в окрестности точки $\alpha_R = 0$ асимптотическое разложение $D_{FR}(k^2)$ совпадает с обычным разложением теории возмущений, n -й член которого можно представить в виде (17.159а);
- 3) из соотношения $Z_3^{-1} = \lim_{k^2 \rightarrow \infty} k^2 D'_{FR}(k^2)$ получаем

$$Z_3 = \frac{\alpha_R}{3\pi}, \quad (17.163)$$

так что при таком методе вычислений «голый» заряд ($\alpha_0 = Z_3^{-1}\alpha_R = 3\pi$) не зависит от α_R . (Эта возможность уже предполагалась Гелл-Манном и Лоу [304], которые указывали, что при конечной постоянной Z_3 «голый» заряд не зависит от перенормированного заряда.)

Такая возможность, когда решения релятивистских теорий поля имеют существенную особенность при равной нулю константе связи, была особенно подчеркнута Редмондом [661, 662, 663]. В частности, Редмонд и Урецкий [662] предположили, что все нетривиальные теории поля характеризуются спектральными функциями $\varrho(M^2)$, которые имеют существенные особенности при $M^2 = 0$, так что в разложениях этих функций по степеням константы связи все коэффициенты будут расходящимися функциями M^2 при $M^2 \rightarrow \infty$, даже если сумма ряда стремится к нулю¹⁾. Кроме того, Редмонд и Урецкий предположили, что разница между перенормируемой и неперенормируемой теорией заключается в том, что первая допускает асимптотическое разложение в окрестности нулевого значения константы связи, а вторая — не допускает.

Итак, мы показали, как может появиться возможность $0 < Z_3 < 1$. В настоящее время неизвестно, какая из перечисленных выше возможностей соответствует правильному решению. В существующей формулировке квантовой теории поля это остается нерешенной математической задачей.

Челлен [413, 417] попытался доказать, не используя явно теорию возмущений, что перенормировочные константы в квантовой электродинамике конечны. Основные этапы его доказательства таковы. Принимая, что электродинамика является математически непротиворечивой теорией и что мультипликативные перенормировочные константы Z_1 , $Z_2 = Z_1$ и Z_3 конечны, Челлен устанавливает формулу для асимптотического поведения перенормированной вершинной функции $\Gamma_{R\mu}(p, p') = \Gamma_{1\mu}(p, p') = \Gamma_{1\mu}(p^2, p'^2, (p - p')^2)$ в том случае, когда квадрат передачи

¹⁾ Рассмотрим функцию $\left(\frac{M^2}{4m^2}\right)^{-\alpha_R/3\pi}$, которая при больших M^2 стремится к нулю. Однако ее разложение в степенной ряд $\left(\frac{M^2}{4\pi}\right)^{-\alpha_R/3\pi} = e^{-\alpha_R/3\pi \ln(M^2/4m^2)} = 1 - \frac{\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{M^2}{4m^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_R}{3\pi} \ln \frac{M^2}{4m^2}\right)^2 + \dots$

обладает тем свойством, что каждый коэффициент расходится при $M^2 \rightarrow \infty$.

импульса $(p - p')^2$ стремится к бесконечности, а импульсы p, p' лежат на массовой поверхности. Формула Челлена утверждает, что

$$\lim_{(p-p')^2 \rightarrow \infty} \Gamma_{1\mu}(p^2 = p'^2 = m^2; (p - p')^2) = Z_1 \gamma_\mu, \quad (17.164)$$

т. е. в этом пределе $\Gamma_{1\mu}$ дается выражением в борновском приближении, умноженным на Z_1 . Затем, используя результаты Лемана, Симанзика и Циммермана [491] (обобщенные на случай квантовой электродинамики Эвансом [899] и Дреллом и Захариазеном [187]), можно показать, что на самом деле в этом пределе вершинный оператор стремится к нулю. Поэтому можно заключить, что $Z_1 = 0$ или $Z_1^{-1} = \infty$.

Вывод Челлена был подвергнут критике с двух точек зрения. Первая касается калибровочной инвариантности результата (17.164). Джонсон [395] обнаружил, что, в то время как $\Gamma_{1\mu}$ — калибровочно-инвариантная функция и непосредственно связана с экспериментально наблюдаемыми величинами, перенормировочная константа Z_1 калибровочно не инвариантна: Действительно, как мы отмечали, во втором порядке теории возмущений и при калибровке, в которой $D_{F\mu\nu}(k^2) = (g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu k^{-2})k^{-2}$, константы Z_1 и Z_2 конечны, а при калибровке, в которой $D_{F\mu\nu}(k^2) = g_{\mu\nu}k^{-2}$, константа Z_1 расходящаяся. Следовательно, замечание Джонсона показывает, что равенство (17.164) не может быть справедливым, если оно случайно не выполняется при некоторой частной калибровке. Зумиво [879] проверил, что соотношение (17.164) действительно не согласуется с калибровочной инвариантностью квантовой электродинамики и что, кроме того, маловероятно, чтобы это равенство было справедливо при какой-либо частной калибровке.

Второе возражение против доказательства Челлена было выдвинуто Газиоровичем, Йенни и Суура [296], которые указали, что перечисление Челленом возможных видов дисперсионных соотношений для вершинной функции неполно и поэтому его заключений вывести нельзя.

§ 4. *S*-матрица в гейзенберговской картине

В § 1 настоящей главы было указано, как функция Грина для данного процесса выражается через среднее по вакууму от гейзенберговских операторов, соответствующих входящим и выходящим частицам, участвующим в процессе. В этом параграфе мы продемонстрируем, как выразить матричные элементы *S*-матрицы только через гейзенберговские состояния и операторы. Способ для этого был уже намечен в гл. 13, где было показано, что гейзенберговские ин-операторы можно формально определить с помощью соотношений

$$\Phi_{in}(x) = V_+(t) \Phi(x) V_+(t)^{-1}, \quad x_0 = t, \quad (17.165a)$$

где
$$V_+(t) = e^{iHt} \Omega^{(+)} e^{-iHt} \quad (17.165b)$$

и $\Omega^{(+)} = U(0, -\infty)$ — волновая матрица Мёллера, которая преобразует собственные состояния $H_0 = H^{(0)}(0)$ с положительной энергией в собственные ин-состояния оператора H с той же самой энергией. Матрица $\Omega^{(+)}$ обладает тем свойством, что

$$H(0)(1 - \Lambda) = H(1 - \Lambda) = \Omega^{(+)} H^{(0)}(0) \Omega^{(+)*} = H_{in}^{(0)}(0) = H_{in}^{(0)}(t) = H_{in}^{(0)}, \quad (17.166)$$

где Λ — оператор проектирования на связанные состояния оператора H . Было показано также, что матричные элементы оператора $V_+(+\infty)$

между истинными состояниями рассеяния являются элементами S -матрицы. Изучим более подробно свойства ин-операторов в теории поля. Примем пока, что в теории нет связанных состояний, так что $\Omega^{(+)*} = \Omega^{(+)-1}$.

Из равенств (17.165) и (17.166) непосредственно следует уравнение движения для $\Phi_{in}(x)$

$$i\partial_0\Phi_{in}(x) = [\Phi_{in}(x), \mathbf{H}_{in}^{(0)}] \quad (17.167)$$

и то, что ин-операторы для любых моментов времени удовлетворяют перестановочным соотношениям для свободных полей:

$$[\Phi_{in}(x), \Phi_{in}(y)] = i\Delta(x-y). \quad (17.168)$$

Мы считаем Φ бозе-полем. Повторное использование равенства (17.167), т. е.

$$-\partial_0^2\Phi_{in}(x) = [[\Phi_{in}(x), \mathbf{H}_{in}^{(0)}], \mathbf{H}_{in}^{(0)}], \quad (17.169)$$

ведет к уравнению Клейна — Гордона

$$-\partial_0^2\Phi_{in}(x) = (-\partial^2 + \mu^2)\Phi_{in}(x). \quad (17.170)$$

Однако нужно подчеркнуть, что хотя $\Phi_{in}(x)$ и удовлетворяет уравнению движения для свободного поля, тем не менее оно является гейзенберговским полем, т. е. его зависимость от времени определяется оператором \mathbf{H} , как видно из приведенного ниже равенства (17.171а):

$$\begin{aligned} \Phi_{in}(x) &= e^{i\mathbf{H}t} \Omega^{(+)} e^{-i\mathbf{H}t} \Phi(x) e^{i\mathbf{H}t} \Omega^{(+)*} e^{-i\mathbf{H}t} = e^{i\mathbf{H}t} \Omega^{(+)} \Phi(\mathbf{x}, 0) \Omega^{(+)*} e^{-i\mathbf{H}t} = \\ &= e^{i\mathbf{H}t} \Phi_{in}(\mathbf{x}, 0) e^{-i\mathbf{H}t} \end{aligned} \quad (17.171a)$$

$$= e^{i\mathbf{H}_{in}^{(0)}t} \Phi_{in}(\mathbf{x}, 0) e^{-i\mathbf{H}_{in}^{(0)}t}. \quad (17.171b)$$

Можно получить явное соотношение между $\Phi_{in}(x)$ и $\Phi(x)$, в которое не входит $V_+(t)$. Чтобы установить это соответствие, проще всего связать оба этих оператора с оператором $\Phi(x)$ в картине взаимодействия. Напомним, что последний связан с гейзенберговским оператором $\Phi(x)$ соотношением

$$U(t, 0)^{-1} \Phi(x) U(t, 0) = \Phi(x). \quad (17.172)$$

Мы приняли, что дираковская, гейзенберговская и предингеровская картины совпадают при $t=0$, так что

$$\Phi(\mathbf{x}, 0) = \Phi(\mathbf{x}, 0). \quad (17.173)$$

Поскольку зависимость ин-операторов от времени была установлена, то достаточно получить явное соотношение между $\Phi_{in}(\mathbf{x}, 0)$ и $\Phi(\mathbf{x}, 0)$. Для этого используем равенства (17.165а) и (17.172):

$$\begin{aligned} \Phi_{in}(\mathbf{x}, 0) &= V_+(0) \Phi(\mathbf{x}, 0) V_+(0)^{-1} = \\ &= U(0, -\infty) \Phi(\mathbf{x}, 0) U(0, -\infty)^{-1} = \\ &= \Phi(\mathbf{x}, 0) + [U(0, -\infty), \Phi(\mathbf{x}, 0)] U(0, -\infty)^{-1}. \end{aligned} \quad (17.174a)$$

Здесь

$$\begin{aligned} [U(0, -\infty), \Phi(\mathbf{x}, 0)] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{(n-1)!} \int_{-\infty}^0 d^4x_1 \dots \int_{-\infty}^0 d^4x_n \times \\ &\times P([\mathcal{H}_I(x_1), \Phi(\mathbf{x}, 0)] \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n)). \end{aligned} \quad (17.174b)$$

В качестве характерного примера рассмотрим теорию, в которой

$$\mathcal{H}_I(x) = J(x) \Phi(x),$$

где J содержит лишь фермионные множители (например, $J(x) = G: \tilde{\psi}(x) \gamma \psi(x):$). В этом случае уравнение движения для Φ есть

$$(\square + \mu^2) \Phi(x) = \mathbf{J}(x). \quad (17.175)$$

В такой теории выражение (17.174б) легко вычислить, и получается

$$\begin{aligned} [U(0, -\infty), \Phi(x, 0)] &= + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!} \int_{-\infty}^0 d^4y \int_{-\infty}^0 d^4x_1 \int_{-\infty}^0 d^4x_2 \dots \int_{-\infty}^0 d^4x_{n-1} \times \\ &\times \Delta(x-y, -y_0) P(J(y) \mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_{n-1})) = \\ &= + \int_{-\infty}^0 d^4y \Delta(x-y, -y_0) P(J(y) U(0, -\infty)). \end{aligned} \quad (17.176)$$

Используя то, что $y_0 < 0$, и свойства хронологического оператора, выражение $P(J(y) U(0, -\infty))$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} P(J(y) U(0, -\infty)) &= P(U(0, y_0) J(y) U(y_0, -\infty)) = \\ &= U(0, y_0) J(y) U(y_0, -\infty) = \\ &= U(y_0, 0)^{-1} J(y) U(y_0, 0) U(0, y_0) U(y_0, -\infty) = \\ &= \mathbf{J}(y) U(0, -\infty). \end{aligned} \quad (17.177)$$

Суммируя полученные результаты, имеем

$$\Phi_{\text{in}}(x, 0) = \Phi(x, 0) = \int_{-\infty}^0 d^4y \Delta(x-y, -y_0) \mathbf{J}(y). \quad (17.178)$$

Так как все операторы в равенстве (17.178) гейзенберговские, то путем сдвига по времени получается равенство, связывающее $\Phi_{\text{in}}(x)$ и $\Phi(x)$ при любом x_0 :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}}(x, t) &= \Phi_{\text{in}}(x) = e^{-iHt} \Phi_{\text{in}}(x, 0) e^{iHt} = \\ &= \Phi(x) + \int_{-\infty}^0 d^4y \Delta(x-y, -y_0) \mathbf{J}(y_0 + t, y) = \\ &= \Phi(x) + \int_{-\infty}^t d^4y \Delta(x-y, x_0 - y_0) \mathbf{J}(y_0, y) \quad (t = x_0), \end{aligned} \quad (17.179)$$

или, в четырехмерных обозначениях, $x = (x, t)$,

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_{\text{in}}(x) - \int_{-\infty}^t d^4y \Delta(x-y) \mathbf{J}(y) = \\ &= \Phi_{\text{in}}(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} d^4y \Delta_R(x-y) \mathbf{J}(y), \end{aligned} \quad (17.180)$$

где $\Delta_R(x)$ — запаздывающая сингулярная функция: $\Delta_R(x) = -\theta(x) \Delta(x)$. Равенство (17.180) можно рассматривать как интегральную форму уравнения движения $(\square + \mu^2) \Phi(x) = \mathbf{J}(x)$, решение которого удовлетво-

ряет начальному условию

$$\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \varphi_{in}(x). \quad (17.181)$$

Последнее утверждение можно доказать, если допустить адиабатическое выключение взаимодействия, т. е. если $G \rightarrow Ge^{-\alpha|x_0|}$ (см., например, [412]). Однако доказательство носит скорее эвристический характер, а математически расплывчато, ибо $\varphi(x)$ — оператор, и поэтому нужно более точно определить, в каком смысле $\varphi(x)$ стремится к $\varphi_{in}(x)$.

Хааг [347] первый подчеркнул, что необходимо определить вид операторной сходимости, который используется в равенстве (17.181). Хааг требовал, чтобы предельный процесс $\varphi(x) \rightarrow \varphi_{in}(x)$ при $x_0 \rightarrow -\infty$ понимался в смысле сильной сходимости, т. е.

$$\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \|\varphi(x) - \varphi_{in}(x)\| \Psi = 0 \quad (17.182)$$

для любого, но фиксированного вектора $|\Psi\rangle$ в области определения $\varphi(x)$ и $\varphi_{in}(x)$. В определении (17.182) символ $\|\Phi\|$ обозначает норму вектора $|\Phi\rangle$, т. е. $\|\Phi\| = (\Phi, \Phi)^{1/2}$. Леман, Симанзик и Циммерман [491] показали, что требование сходимости в смысле (17.182) сталкивается с двумя трудностями. Первая из них связана с тем, что состояния $\varphi(x)|\Psi\rangle$ и $\varphi_{in}(x)|\Psi\rangle$ не имеют конечной нормы. Но эту трудность можно преодолеть, если рассматривать оператор

$$\varphi^f(t) = -i \int \! \! \int d\sigma^\mu(x) \varphi(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu f(x) \quad (17.183)$$

и аналогично определенный оператор $\varphi_{in}^f(t)$, где $f(x)$ — нормируемое решение уравнения Клейна — Гордона, имеющее вид волнового пакета с положительной энергией. (Заметим, что оператор $\varphi_{in}^f(t) = \varphi_{in}^f$ в действительности не зависит от времени, поскольку и f , и φ_{in} удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона.) Второе возражение связано с тем, что если требовать, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\varphi^f(t) - \varphi_{in}^f\| \Psi = 0, \quad (17.184)$$

и выбрать $|\Psi\rangle = |\Psi_0\rangle$, то равенство (17.184) означает, что среднее по вакууму от произведения двух гейзенберговских полей равно среднему по вакууму от произведения двух свободных полей φ_{in} в противоречии с вычислениями по теории возмущений. Поэтому Леман, Симанзик и Циммерман заключили, что сходимость не может быть сильной и нужно требовать лишь слабую сходимость. В применении к настоящему случаю оператор $\varphi^f(t)$ называют слабо сходящимся к φ_{in}^f , если

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\Psi, (\varphi^f(t) - \varphi_{in}^f) \Phi| = 0 \quad (17.185)$$

для всех пар векторов $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle$ в области определения $\varphi^f(t)$ и φ_{in}^f . Именно в этом смысле нужно понимать равенство (17.184)¹⁾. Условия, при которых в локальных релятивистских теориях поля оператор φ_{in}^f существует в качестве слабого предела, исследовались Гринбергом и Уайтманом. Они показали, что даже в теориях с бесконечными перенорми-

¹⁾ При $Z_3=0$ положение на самом деле несколько сложнее. В этом случае нужно также усреднить $\varphi^f(t)$ по времени, ибо при $Z_3=0$ вектор $\varphi^f(t)|\Psi\rangle$ может не существовать (Гринберг, 1957 г., не опубликовано; см. [854]).

ровочными константами волновых функций (т. е. когда $Z_2^{-1}, Z_3^{-1} = \infty$) ин-операторы существуют как слабые пределы гейзенберговских операторов в смысле равенства (17.185). Они показали также, что эти операторы обладают трансформационными свойствами свободных полей с заданной массой и поэтому подчиняются перестановочным соотношениям для свободных полей (см. также [877]). К этим вопросам мы вернемся в гл. 18.

Аналогично можно определить аут-оператор

$$\Phi_{\text{out}}(x) = V_-(t) \Phi(x) V_-(t)^{-1}, \quad (17.186a)$$

где

$$V_-(t) = e^{iHt} \Omega^{(-)} e^{-iHt}, \quad (17.186b)$$

а $\Omega^{(-)} = U(0, +\infty)$ — волновая матрица Мёллера, дающая аут-решения. Можно проверить, что гейзенберговские аут-операторы обладают следующими свойствами:

$$[\square + \mu^2] \Phi_{\text{out}}(x) = 0, \quad (17.187)$$

$$[\Phi_{\text{out}}(x), \Phi_{\text{out}}(y)] = i\Delta(x-y; \mu), \quad (17.188)$$

$$\Phi(x) = \Phi_{\text{out}}(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_A(x-y) J(y) d^4y. \quad (17.189)$$

Кроме того, из определения ин- и аут-операторов следует, что

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{out}}(x) &= V_-(t) V_+(t)^{-1} \Phi_{\text{in}}(x) [V_-(t) V_+(t)^{-1}]^{-1} = \\ &= S^{-1} \Phi_{\text{in}}(x) S, \end{aligned} \quad (17.190)$$

т. е. S-матрица связывает ин- и аут-поля.

Равенства (17.180) и (17.189) впервые были выписаны Янгом и Фелдманом [871] и Челленом [408], которые получили их, интегрируя гейзенберговские уравнения движения с помощью запаздывающих и опережающих функций Грина Δ_R и Δ_A . Так как операторы Φ_{in} и Φ_{out} удовлетворяют уравнениям для свободных полей, то указанные авторы постулировали для этих операторов перестановочные соотношения для свободных полей¹⁾. Из того, что Φ_{in} и Φ_{out} подчиняются одинаковым перестановочным соотношениям, получается, что они должны быть связаны унитарным преобразованием, т. е. $\Phi_{\text{out}} = S^{-1} \Phi_{\text{in}} S$. (Это заключение предполагает дополнительно, что Φ_{in} и Φ_{out} имеют одно и то же вакуумное состояние.) Затем Янг и Фелдман показывают, что так определенная S-матрица совпадает с S-матрицей, определенной обычным образом в представлении взаимодействия.

Аналогичные результаты справедливы и для нуклонного оператора. В теории с нейтральными мезонами, взаимодействие которых с нуклонами описывается лагранжевой плотностью $\mathcal{L}_I = G[\tilde{\psi}(x) \gamma, \psi(x)] \Phi(x)$,

¹⁾ Это предположение не обязательно. Так, $\Phi_{\text{симм}}(x) = 1/2 (\Phi_{\text{in}}(x) + \Phi_{\text{out}}(x))$ подчиняется уравнениям свободного поля, а перестановочным соотношениям для свободного поля не удовлетворяет.

уравнения Янга и Фелдмана для нуклонного оператора принимают вид

$$\Psi(x) = \Psi_{\text{in}}(x) + \int S_R(x-y) \Phi(y) \gamma \Psi(y) d^4y \quad (17.191)$$

$$= \Psi_{\text{out}}(x) - \int S_A(x-y) \Phi(y) \gamma \Psi(y) d^4y, \quad (17.192)$$

$$(-i\gamma \cdot \partial + M) \Psi_{\text{in}}(x) = (-i\gamma \cdot \partial + M) \Psi_{\text{out}}(x) = 0, \quad (17.193)$$

$$[\Psi_{\text{out}}(x), \tilde{\Psi}_{\text{out}}(y)]_+ = [\Psi_{\text{in}}(x), \tilde{\Psi}_{\text{in}}(y)]_+ = -iS(x-y; M), \quad (17.194)$$

$$\Psi_{\text{out}}(x) = S^{-1} \Psi_{\text{in}}(x) S. \quad (17.195)$$

Так как ин- и аут-операторы удовлетворяют уравнениям для свободных полей, то эти операторы можно разложить на положительно- и отрицательно-частотные части инвариантным образом, так что разложение будет справедливым для всех моментов времени.

Иначе говоря, можно, например, написать

$$\Phi_{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (e^{-ik \cdot x} a_{\text{out}}(\mathbf{k}) + e^{ik \cdot x} a_{\text{out}}^*(\mathbf{k})) \quad (17.196a)$$

$$k_0 = \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \\ = \Phi_{\text{out}}^{(+)}(x) + \Phi_{\text{out}}^{(-)}(x). \quad (17.196b)$$

Аналогично разлагаются и нуклонные ин- и аут-операторы. Состояние физического вакуума $|\Psi_0\rangle$ является собственным состоянием $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{in}}^{(0)}$ с собственным значением 0. Оно характеризуется равенствами

$$\Phi_{\text{out}}^{(+)}(x) |\Psi_0\rangle = \Psi_{\text{out}}^{(+)}(x) |\Psi_0\rangle = \tilde{\Psi}_{\text{out}}^{(+)}(x) |\Psi_0\rangle = 0. \quad (17.197)$$

Другие собственные состояния гамильтониана

$$\mathbf{H}_{\text{in}}^{(0)} = \int d^3x : \tilde{\Psi}_{\text{in}}(x) (-i\gamma \cdot \partial + M) \Psi_{\text{in}}(x) : + \\ + \frac{1}{2} \int d^3x : (\partial^0 \Phi_{\text{in}})^2 + (\partial \Phi_{\text{in}})^2 + \mu^2 \Phi_{\text{in}}^2 : \quad (17.198)$$

строятся таким же образом, как и в случае свободных частиц, рассмотренном в гл. 7 и 8, ибо Φ_{in} и Ψ_{in} по отношению к $|\Psi_0\rangle$ имеют такие же свойства, как операторы свободных частиц по отношению к $|\Phi_0\rangle$. Так, n -мезонное ин-состояние

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} a_{\text{in}}^*(\mathbf{k}_1) \dots a_{\text{in}}^*(\mathbf{k}_n) |\Psi_0\rangle$$

является собственным состоянием $\mathbf{H}_{\text{in}}^{(0)}$ с собственным значением $\sum_{i=1}^n \omega(\mathbf{k}_i)$

и собственным состоянием полного импульса \mathbf{P} с собственным значением

$\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i$. Однако важно понять, что, поскольку $\mathbf{H}_{\text{in}}^{(0)} = \mathbf{H}$, это n -мезонное ин-состояние будет также собственным состоянием полного гамильтониана. В частности, состояние $a_{\text{in}}^*(\mathbf{k}_1) a_{\text{in}}^*(\mathbf{k}_2) |\Psi_0\rangle$ есть такое стационарное состояние, когда два пучка свободных мезонов с импульсами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 сталкиваются и дают расходящиеся волны продуктов реакции (например, мезонов, нуклонных пар и т. д.), совместимых с законами сохра-

нения. Входящие пучки состоят из облаченных (физических) частиц. Аналогично, состояния

$$\Psi_{in}^{(+)}(x) | \Psi_0 \rangle, \quad \Psi_{in}^{(-)}(x) | \Psi_0 \rangle \quad \text{и} \quad \tilde{\Psi}_{in}^{(-)}(x) | \Psi_0 \rangle$$

являются физическими одночастичными состояниями. Чтобы уточнить эти утверждения, рассмотрим вектор состояния

$$|ps\rangle_{in} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\sigma^\mu(x) \tilde{\Psi}_{in}(x) \gamma_\mu \omega^s(p) e^{-ip \cdot x} | \Psi_0 \rangle, \quad (17.199)$$

где $\omega^s(p)$ — спинор Дирака с положительной энергией, так что $p^2 = M^2$ и $p_0 > 0$. Если подействовать на обе части равенства (17.199) оператором P_μ , использовать равенство (17.96), справедливое для любого гейзенберговского оператора, и вспомнить, что $P_\mu | \Psi_0 \rangle = 0$, то получим

$$P_\nu |ps\rangle_{in} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [P_\nu, \tilde{\Psi}_{in}^\dagger(x)] \gamma_\mu \omega^s(p) e^{-ip \cdot x} d\sigma^\mu(x) | \Psi_0 \rangle \quad (17.200a)$$

$$= - \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \partial_\nu \tilde{\Psi}_{in}(x) \gamma_\mu \omega^s(p) e^{-ip \cdot x} d\sigma^\mu(x) | \Psi_0 \rangle \quad (17.200б)$$

$$= p_\nu |ps\rangle_{in}. \quad (17.200в)$$

При переходе от (17.200б) к равенству (17.200в) было проведено интегрирование по частям и пренебрежено поверхностными членами¹⁾. Так как $p_\mu = (p_0 = \sqrt{p^2 + M^2}, p)$, то $|ps\rangle_{in}$ есть собственное состояние оператора полной энергии-импульса P_μ с собственным значением p_μ и массой $M = \sqrt{p_\mu p^\mu}$. Следовательно, состояние $|ps\rangle_{in}$ — однонуклонное состояние с импульсом p . Такое же рассуждение показывает, что $\Psi_{in}^{(+)}(x) | \Psi_0 \rangle$ является одномезонным состоянием. Отметим также, что поскольку одночастичные состояния стационарны, то

$$S b_{in}^*(ps) | \Psi_0 \rangle = \lambda_{ps} b_{in}^*(ps) | \Psi_0 \rangle = b_{out}^*(ps) | \Psi_0 \rangle, \quad (17.201)$$

где $|\lambda_{ps}|^2 = +1$. Аналогичное соотношение справедливо и для одномезонного состояния, и для состояния с одним антинуклоном, так что в общем случае при подходящем выборе фазовых множителей

$$|1 \text{ частица}\rangle_{in} = |1 \text{ частица}\rangle_{out}. \quad (17.202)$$

Аут-состояния $|p_1 s_1 \dots p_l s_l; q_1, t_1 \dots q_m, t_m; k_1 \dots k_n\rangle_{out}$ можно построить таким же образом:

$$\begin{aligned} |p_1 s_1, \dots p_l s_l; q_1 t_1 \dots q_m t_m; k_1 \dots k_n\rangle_{out} = \\ = \frac{1}{\sqrt{l! m! n!}} b_{out}^*(p_1 s_1) \dots = a_{out}^*(k_n) | \Psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (17.203)$$

Они также являются собственными состояниями H и удовлетворяют граничным условиям для аут-решений. Наконец, S -матрицу можно записать в виде

$$\text{out}\langle \mathbf{b} | \mathbf{a} \rangle_{in} = S_{ba}. \quad (17.204)$$

¹⁾ Чтобы оправдать отбрасывание поверхностных членов, нужно рассмотреть вместо спинора $f(x) = w(p) e^{-ip \cdot x}$ волновой пакет $\hat{f}(x)$, причем предельный переход $\hat{f} \rightarrow f$ выполнять в конце. Член с ∂_0 будет равен нулю в силу постоянства во времени правой части равенства (17.199), так как и $w(p) e^{-ip \cdot x}$, и $\Psi_{in}(x)$ удовлетворяют уравнению Дирака для свободной частицы.

Развитый до сих пор формализм позволяет выразить матричные элементы, определенные в картине взаимодействия, через величины в гейзенберговской картине. Особый интерес представляют матричные элементы вида $\langle a | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) S) | b \rangle$, где $|a\rangle$ и $|b\rangle$ — векторы состояний в дираковской картине. В этой связи напомним, что если $|a\rangle$ и $|b\rangle$ — собственные («голые») состояния оператора H_0 в картине взаимодействия, то, как было получено,

$$U(0, -\infty) |a\rangle = |a\rangle_{\text{in}}, \quad (17.205a)$$

$$U(0, +\infty) |b\rangle = |b\rangle_{\text{out}}. \quad (17.205b)$$

Подробнее, если

$$|a\rangle = a^*(\mathbf{k}_1) \dots a^*(\mathbf{k}_n) |\Phi_0\rangle, \quad (17.206)$$

то

$$\begin{aligned} U(0, -\infty) |a\rangle &= \\ &= U(0, -\infty) a^*(\mathbf{k}_1) U(0, -\infty)^{-1} U(0, -\infty) \dots U(0, -\infty) |\Phi_0\rangle = \\ &= a_{\text{in}}^*(\mathbf{k}_1) \dots a_{\text{in}}^*(\mathbf{k}_n) |\Psi_0\rangle = |a_{\text{in}}\rangle. \end{aligned} \quad (17.207)$$

Легко проверить следующее соотношение:

$$\langle a | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) S) | b \rangle = {}_{\text{out}}\langle a | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) | b \rangle_{\text{in}}. \quad (17.208)$$

Доказывается оно так же, как и ранее. Допустим, что $x_{10} > x_{20} > \dots > x_{n0}$, тогда

$$\begin{aligned} T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) S) &= U(\infty, 0) U(0, x_{10}) \varphi(x_1) U(x_{10}, 0) U(0, x_{10}) \times \\ &\times U(x_{10}, x_{20}) \dots \varphi(x_n) U(x_{n0}, 0) U(0, -\infty) = \\ &= U(\infty, 0) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) U(0, -\infty). \end{aligned} \quad (17.209)$$

Очевидно, что при произвольном временном порядке

$$T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) S) = U(\infty, 0) T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) U(0, -\infty). \quad (17.210)$$

Отсюда сразу следует равенство (17.208).

В качестве применения равенства (17.208) выразим в конечном виде через гейзенберговские операторы амплитуду мезон-нуклонного рассеяния в нейтральной псевдоскалярной теории [512]. Для этого вспомним, что в дираковской картине амплитуда рассеяния из начального состояния $|ps; \mathbf{k}\rangle$ в конечное состояние $|p's'; \mathbf{k}'\rangle$ дается выражением

$$\langle p's'; \mathbf{k}' | S | ps; \mathbf{k} \rangle = \langle p's' | a(\mathbf{k}') S a^*(\mathbf{k}) | ps \rangle. \quad (17.211)$$

В дальнейшем мы будем широко использовать тот факт, что операторы рождения и уничтожения мезона a_α^* и a_α в одночастичном состоянии f_α можно записать в виде

$$a_\alpha^* = i \int_i \varphi(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_\alpha(x) d^3x \quad (17.212a)$$

и

$$a_\alpha = i \int_i \bar{f}_\alpha(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x) d^3x. \quad (17.212b)$$

Здесь f_α — решение уравнения Клейна — Гордона, имеющее вид нормируемого волнового пакета с положительной энергией. Рассмотрение с помощью волновых пакетов обладает тем преимуществом, что состоя-

ние $a_{\alpha}^*|\Phi_0\rangle$ имеет конечную норму, в то время как состояние $a_{\mathbf{k}}^*|\Phi_0\rangle$ ненормируемо. В предельном случае плоских волн

$$f_{\alpha}(x) \rightarrow f_{\mathbf{k}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (17.213)$$

и соответственно $a_{\alpha} \rightarrow a_{\mathbf{k}}$, $a_{\alpha}^* \rightarrow a_{\mathbf{k}}^*$. Отметим, что, поскольку f и φ удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона, время t , при котором проводится интегрирование в равенствах (17.212а) и (17.212б), произвольно. Поэтому равенство (17.211) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}'s'; \mathbf{k}' | S | \mathbf{p}s; \mathbf{k} \rangle = \\ = - \int_{t'} d^3x' \int_t d^3x \overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x'_0}} \langle \mathbf{p}'s' | \varphi(x') S \varphi(x) | \mathbf{p}s \rangle \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_0}} f_{\mathbf{k}}(x). \end{aligned} \quad (17.214)$$

В дальнейшем мы предположим, что $f_{\mathbf{k}}$ и $f_{\mathbf{k}'}$ соответствуют *нормируемым* решениям уравнения Клейна — Гордона с импульсами, приблизительно равными \mathbf{k} и \mathbf{k}' . Предельный переход $f_{\mathbf{k}} \rightarrow$ (плоская волна с импульсом \mathbf{k}) будем совершать лишь в конце вычислений. Следует напомнить, что правильное описание реального эксперимента по рассеянию требует использования волновых пакетов, а амплитуда $\langle \mathbf{p}'s'; \mathbf{k}' | S | \mathbf{p}s; \mathbf{k} \rangle$ является на самом деле идеализированным пределом.

Так как значения t и t' в (17.214) произвольны, то удобно t взять в бесконечно далеком прошлом, а t' — в бесконечно далеком будущем. Это дает возможность записать (17.214) в виде

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}'s'; \mathbf{k}' | S | \mathbf{p}s; \mathbf{k} \rangle = \\ = - \int_{t'=-\infty} d^3x' \int_{t=+\infty} d^3x \overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x'_0}} \langle \mathbf{p}'s' | T(\varphi(x') S \varphi(x)) | \mathbf{p}s \rangle \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_0}} f_{\mathbf{k}}(x). \end{aligned} \quad (17.215)$$

Используя равенство (17.210), матричный элемент в (17.215) можно представить следующим образом:

$$\langle \mathbf{p}'s' | T(S \varphi(x') \varphi(x)) | \mathbf{p}s \rangle = \text{out} \langle \mathbf{p}'s' | T(\varphi(x') \varphi(x)) | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}}, \quad (17.216)$$

так что окончательно

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}'s'; \mathbf{k}' | S | \mathbf{p}s; \mathbf{k} \rangle = - \lim_{t' \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{t'} d^3x' \int_t d^3x \times \\ \times \overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x'_0}} \text{out} \langle \mathbf{p}'s' | T(\varphi(x') \varphi(x)) | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_0}} f_{\mathbf{k}}(x). \end{aligned} \quad (17.217)$$

Этот матричный элемент можно преобразовать дальше, если выполнено асимптотическое условие, которое заключается в том, что при произвольных (но фиксированных) нормируемых векторах состояний $|\Psi\rangle$ и $|\Phi\rangle$ должен существовать $\lim_{x_0 \rightarrow \pm\infty} \langle \Psi | \varphi'(x_0) | \Phi \rangle$, или, точнее,

$$\lim_{x_0 \rightarrow \pm\infty} \langle \Psi | i \int_{x_0} d^3x \overline{f_{\mathbf{k}}(x)} \overleftrightarrow{\partial_0} \varphi(x) | \Phi \rangle = \langle \Psi | i \int_{x_0} d^3x \overline{f_{\mathbf{k}}(x)} \overleftrightarrow{\partial_0} \varphi_{\text{out}}(x) | \Phi \rangle. \quad (17.218)$$

Другими словами, асимптотическое условие требует, чтобы имели смысл предел, определенный равенством (17.185), и аналогичное соотношение

для аут-поля [равенство (17.218)]. В общем смысле асимптотическое условие требует, чтобы теорию можно было интерпретировать с помощью асимптотических наблюдаемых, относящихся к частицам, т. е. с помощью наблюдаемых для стационарных ин- и аут-состояний, которые обладают такими же трансформационными и статистическими свойствами и такими же свойствами ортогональности, как и состояния свободных частиц с данной массой. Эти асимптотические состояния строятся с помощью ин- и аут-операторов и отличаются от состояний свободных частиц тем, что они содержат частицы с импульсами, отличными от импульсов входящих частиц в случае ин-состояний (или уходящих частиц для аут-состояний), и которые соответствуют уходящим (или входящим) рассеянным частицам. Асимптотические условия требуют, чтобы ин- и аут-поля можно было получить из гейзенберговских полей вполне определенным предельным переходом — асимптотическим предельным переходом [равенство (17.218)]. В дальнейшем мы примем, что рассматриваемая теория поля такова, что асимптотические условия выполняются.

В предельном случае, когда f_k — плоская волна, равенство (17.218) принимает вид

$$\lim_{f \rightarrow f_k} \lim_{x_0 \rightarrow \pm\infty} \langle \Psi | i \int d^3x \varphi(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x) | \Phi \rangle = \langle \Psi | \mathbf{a}_{\text{in}}^*(\mathbf{k}) | \Phi \rangle. \quad (17.219)$$

Следовательно, можно переписать и амплитуду рассеяния

$$\begin{aligned} \langle p's', k' | \mathcal{S} | ps, k \rangle &= \text{out} \langle p's' | \mathbf{a}_{\text{out}}(\mathbf{k}') \mathbf{a}_{\text{in}}^*(\mathbf{k}) | ps \rangle_{\text{in}} = \\ &= \text{out} \langle p's', k' | \mathbf{a}_{\text{in}}^*(\mathbf{k}) | ps \rangle_{\text{in}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{out} \langle p's', k' | i \int_t d^3x \varphi(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x) | ps \rangle_{\text{in}}. \end{aligned} \quad (17.220)$$

Используем далее тождество

$$\int d^3x \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 \partial_0 F(x) = \int_{t=+\infty} d^3x F(x) - \int_{t=-\infty} d^3x F(x) \quad (17.221)$$

и приведем равенство (17.220) к виду

$$\begin{aligned} i \int_{t=-\infty} d^3x \text{out} \langle p's'; k' | \varphi(x) | ps \rangle_{\text{in}} \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x) = \\ = i \int_{t=+\infty} d^3x \text{out} \langle p's'; k' | \varphi(x) | ps \rangle_{\text{in}} \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x) - \\ - i \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \int dx^0 \partial_0 [\text{out} \langle p's'; k' | \varphi(x) | ps \rangle_{\text{in}} \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)] = \\ = \text{out} \langle p's'; k' | \mathbf{a}_{\text{out}}^*(\mathbf{k}) | ps \rangle_{\text{in}} - \\ - i \int d^4x (\square_x + \mu^2) \text{out} \langle p's'; k' | [\varphi(x) | ps \rangle_{\text{in}} \cdot f_k(x). \end{aligned} \quad (17.222)$$

Чтобы получить последнюю строку в равенстве (17.222), мы использовали асимптотическое условие (17.219), написав в первом члене $\mathbf{a}_{\text{out}}^*(\mathbf{k})$. Мы также воспользовались тем, что $f_k(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона

$$\partial_0^2 f_k(x) = (\partial^2 - \mu^2) f_k(x), \quad (17.223)$$

а затем проинтегрировали по частям по пространственным переменным во втором члене. Первый член можно упростить, если вспомнить, что одночастичные состояния обладают свойством стабильности: $|\text{ps}\rangle_{\text{in}} = |\text{ps}\rangle_{\text{out}}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{out}\langle \mathbf{p}'s', \mathbf{k} | \mathbf{a}_{\text{out}}^*(\mathbf{k}) | \text{ps}\rangle_{\text{in}} &= \text{out}\langle \mathbf{p}'s' | \mathbf{a}_{\text{out}}(\mathbf{k}') \mathbf{a}_{\text{out}}^*(\mathbf{k}) | \text{ps}\rangle_{\text{out}} = \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')_{\text{out}} \langle \mathbf{p}'s' | \text{ps}\rangle_{\text{out}} = \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'}, \end{aligned} \quad (17.224)$$

так как

$$[\mathbf{a}_{\text{in}}(\mathbf{k}), \mathbf{a}_{\text{in}}^*(\mathbf{k}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (17.225a)$$

$$[\mathbf{a}_{\text{out}}(\mathbf{k}), \mathbf{b}_{\text{out}}(\text{ps})] = 0, \quad (17.225b)$$

и

$$\langle \Psi_0 | \mathbf{a}_{\text{out}}^*(\mathbf{k}) = 0. \quad (17.226)$$

Следовательно, матричный элемент рассеяния дается выражением

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}'s', \mathbf{k}' | S | \text{ps}, \mathbf{k} \rangle &= \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \\ &- i \int d^4x (\square_x + \mu^2) \text{out}\langle \mathbf{p}'s', \mathbf{k}' | \varphi(x) | \text{ps}\rangle_{\text{in}} \cdot f_{\mathbf{k}'}(x). \end{aligned} \quad (17.227)$$

Поступая так же, как выше, имеем

$$\begin{aligned} \text{out}\langle \mathbf{p}'s', \mathbf{k}' | \varphi(x) | \text{ps}\rangle_{\text{in}} &= \text{out}\langle \mathbf{p}'s' | \mathbf{a}_{\text{out}}(\mathbf{k}') \varphi(x) | \text{ps}\rangle_{\text{in}} = \\ &= i \int_{t \rightarrow +\infty} d^3x' \overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x'^0}} \text{out}\langle \mathbf{p}'s' | \varphi(x') \varphi(x) | \text{ps}\rangle_{\text{in}}. \end{aligned} \quad (17.228)$$

Поскольку в последнем выражении x'^0 соответствует бесконечно далекому будущему, напишем

$$\varphi(x') \varphi(x) = T(\varphi(x') \varphi(x)). \quad (17.229)$$

Применяя равенство (17.224), получаем

$$\begin{aligned} i \int_{t' = +\infty} d^3x' \overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x'^0}} \text{out}\langle \mathbf{p}'s' | T(\varphi(x') \varphi(x)) | \text{ps}\rangle_{\text{in}} &= \\ &= i \int_{t' = -\infty} d^3x' \overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x'^0}} \text{out}\langle \mathbf{p}'s' | T(\varphi(x') \varphi(x)) | \text{ps}\rangle_{\text{in}} + \\ &+ i \int d^4x' \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x'^0}} \left[\overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x'^0}} \text{out}\langle \mathbf{p}'s' | T(\varphi(x') \varphi(x)) | \text{ps}\rangle_{\text{in}} \right]. \end{aligned} \quad (17.230)$$

Так как интегрирование по гиперповерхности в первом члене выполняется теперь при $x'^0 = -\infty$, то

$$T(\varphi(x') \varphi(x)) = \varphi(x) \varphi(x') \quad \text{при } x'^0 \rightarrow -\infty. \quad (17.231)$$

Первый член в правой части равенства (17.230) равен нулю, так как

$$\begin{aligned} i \int_{t' = -\infty} d^3x' \overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x'^0}} \text{out}\langle \mathbf{p}'s' | \varphi(x) \varphi(x') | \text{ps}\rangle_{\text{in}} &= \\ &= \text{out}\langle \mathbf{p}'s' | \varphi(x) \mathbf{a}_{\text{in}}(\mathbf{k}') | \text{ps}\rangle_{\text{in}} \end{aligned} \quad (17.232)$$

и поскольку $a_{in}(\mathbf{k}) | \mathbf{p} \mathbf{s} \rangle_{in} = b_{in}^*(\mathbf{p} \mathbf{s}) a_{in}(\mathbf{k}) | \Psi_0 \rangle = 0$. Для этого мы и ввели T -произведение. Выполнив указанное дифференцирование и проинтегрировав по частям по пространственным переменным, окончательно запишем равенство (17.230) следующим образом:

$$\langle \mathbf{p}' \mathbf{s}', \mathbf{k}' | S | \mathbf{p} \mathbf{s}, \mathbf{k} \rangle = {}_{in} \langle \mathbf{p}' \mathbf{s}', \mathbf{k}' | \mathbf{p} \mathbf{s}, \mathbf{k} \rangle_{in} + \int d^4x \int d^4x' \times \\ \times \overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} f_{\mathbf{k}}(x) (\square_x + \mu^2) (\square_{x'} + \mu^2) {}_{out} \langle \mathbf{p}' \mathbf{s}' | T(\Phi(x') \Phi(x)) | \mathbf{p} \mathbf{s} \rangle_{in}. \quad (17.233)$$

В предельном случае плоских волн равенство (17.233) принимает вид

$$\langle \mathbf{p}' \mathbf{s}', \mathbf{k}' | S | \mathbf{p} \mathbf{s}, \mathbf{k} \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}} \times \\ \times \int d^4x \int d^4x' e^{i(k' \cdot x' - k \cdot x)} (\square_x + \mu^2) (\square_{x'} + \mu^2) {}_{out} \langle \mathbf{p}' \mathbf{s}' | T(\Phi(x') \Phi(x)) | \mathbf{p} \mathbf{s} \rangle_{in}. \quad (17.234)$$

Прежде чем перейти к дальнейшему анализу амплитуды мезон-нуклонного рассеяния в том виде, как она дается равенством (17.234), отметим, что можно получить несколько иное выражение, если переписать равенство (17.228) следующим образом:

$$i \int_{t \rightarrow -\infty} d^3x' \overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x'^0} {}_{out} \langle \mathbf{p}' \mathbf{s}' | \Phi(x') \Phi(x) | \mathbf{p} \mathbf{s} \rangle_{out} = \\ = i \int_{t \rightarrow \infty} d^3x' \overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x'^0} {}_{out} \langle \mathbf{p}' \mathbf{s}' | \theta(x' - x) [\Phi(x'), \Phi(x)] | \mathbf{p} \mathbf{s} \rangle_{out}. \quad (17.235)$$

Здесь мы воспользовались стабильностью одночастичных состояний $|\mathbf{p} \mathbf{s} \rangle_{in} = |\mathbf{p} \mathbf{s} \rangle_{out}$. Вводя запаздывающий коммутатор

$$R(\Phi(x') \Phi(x)) = -i \theta(x' - x) [\Phi(x'), \Phi(x)], \quad (17.236a)$$

$$\theta(x' - x) = 1, \quad \text{если } x'^0 > x^0, \\ = 0, \quad \text{если } x'^0 < x^0, \quad (17.236b)$$

мы использовали то, что x'^0 находится в бесконечно далеком будущем. Поэтому $\theta(x' - x) = 1$, а член

$$i \int_{t \rightarrow -\infty} d^3x' \overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x'^0} {}_{out} \langle \mathbf{p}' \mathbf{s}' | \Phi(x) \Phi(x') | \mathbf{p} \mathbf{s} \rangle_{out} = \\ = {}_{out} \langle \mathbf{p}' \mathbf{s}' | \Phi(x) a_{out}(\mathbf{k}) | \mathbf{p} \mathbf{s} \rangle_{out} \quad (17.237)$$

равен нулю, так как $a_{out}(\mathbf{k}) | \mathbf{p} \mathbf{s} \rangle_{out} = 0$.

Рассмотрение, аналогичное тому, которое привело нас к равенству (17.234), теперь дает

$$i \int_{t \rightarrow -\infty} d^3x' \overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x'^0} {}_{out} \langle \mathbf{p}' \mathbf{s}' | \theta(x' - x) [\Phi(x'), \Phi(x)] | \mathbf{p} \mathbf{s} \rangle_{out} = \\ = - \int_{t = -\infty} d^3x' \overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x'^0} {}_{out} \langle \mathbf{p}' \mathbf{s}' | R(\Phi(x') \Phi(x)) | \mathbf{p} \mathbf{s} \rangle_{out} - \\ - \int d^4x' \partial_0 \left[\overline{f_{\mathbf{k}'}(x')} \frac{\partial}{\partial x'^0} {}_{out} \langle \mathbf{p}' \mathbf{s}' | R(\Phi(x') \Phi(x)) | \mathbf{p} \mathbf{s} \rangle_{out} \right]. \quad (17.238)$$

Интеграл при $t = -\infty$ не вносит вклада благодаря множителю $\theta(x' - x)$, который равен нулю при $x^0 = -\infty$. Таким образом, элемент S-матрицы можно записать также в виде

$$\langle p's', k' | S | ps, k \rangle = \delta_{ss'} \delta^{(3)}(p - p') \delta^{(3)}(k - k') + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_k \omega_{k'}}} \times \\ \times i \int d^4x \int d^4x' e^{i(h' \cdot x' - h \cdot x)} (\square_x + \mu^2) (\square_{x'} + \mu^2) \text{out} \langle p's' | R(\varphi(x') \varphi(x)) | ps \rangle_{\text{in}}. \quad (17.239)$$

Необходимо подчеркнуть, что выражения (17.234) и (17.239) для элемента S-матрицы представляют одну и ту же функцию только при $k^2 = k'^2 = \mu^2$ и $p^2 = p'^2 = M^2$, т. е. только на массовой поверхности. Вне ее они будут соответствовать, вообще говоря, различным функциям.

Вернемся к выражению (17.234) для элемента матрицы рассеяния. Заметим, что правую часть этого равенства можно преобразовать, если учесть, что

$$T(\varphi(x) \varphi(y)) = \frac{1}{2} \varepsilon(x - y) [\varphi(x), \varphi(y)] + \frac{1}{2} [\varphi(x), \varphi(y)], \quad (17.240)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x^0} T(\varphi(x) \varphi(y)) = \frac{1}{2} \varepsilon(x - y) [\partial_0 \varphi(x), \varphi(y)] + \frac{1}{2} [\partial_0 \varphi(x), \varphi(y)] + \\ + \delta^{(1)}(x_0 - y_0) [\varphi(x), \varphi(y)] = T(\partial_0 \varphi(x) \varphi(y)), \quad (17.241)$$

так как одновременной коммутатор $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ равен нулю. Аналогично вычисляется и вторая производная:

$$\partial_0^2 T(\varphi(x) \varphi(y)) = \delta^{(1)}(x^0 - y^0) [\partial_0 \varphi(x), \varphi(y)] + T(\partial_0^2 \varphi(x) \varphi(y)) = \\ = -i \delta^{(4)}(x - y) + T(\partial_0^2 \varphi(x) \varphi(y)), \quad (17.242)$$

так что

$$(\square_x + \mu^2) T(\varphi(x) \varphi(y)) = -i \delta^{(4)}(x - y) + T(\mathbf{J}(x) \varphi(y)), \quad (17.243)$$

где

$$(\square + \mu^2) \varphi(x) = \mathbf{J}(x). \quad (17.244)$$

Таким же образом находим

$$(\square_y + \mu^2) T(\mathbf{J}(x) \varphi(y)) = T(\mathbf{J}(x) \mathbf{J}(y)) - \delta^{(1)}(x^0 - y^0) [\mathbf{J}(x), \partial^0 \varphi(y)]. \quad (17.245)$$

Здесь мы предположили, что при $x_0 = y_0$ операторы $\varphi(y)$ и $\mathbf{J}(x)$ коммутируют. Это следует из условия причинности, согласно которому коммутатор двух локальных наблюдаемых (эрмитовых операторов), взятых в пространственно-подобных точках, должен быть равен нулю. Подробнее условие причинности мы обсудим в гл. 18. Комбинируя полученные выше результаты, можно амплитуду рассеяния окончательно записать в виде

$$\langle p's', k' | S | ps, k \rangle = \delta_{ss'} \delta^{(3)}(p - p') \delta^{(3)}(k - k') + \\ + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_k \omega_{k'}}} \int d^4x \int d^4x' e^{i(h' \cdot x' - h \cdot x)} \times \\ \times \{ \text{out} \langle p's' | T(\mathbf{J}(x') \mathbf{J}(x)) + \delta^{(1)}(x^0 - y^0) [\mathbf{J}(x'), \partial^0 \varphi(x)] | ps \rangle_{\text{in}} \}. \quad (17.246)$$

Это и есть нужное нам выражение.

§ 5. Предельные теоремы для низких энергий

В качестве применения выражения (17.246) для амплитуды рассеяния бозона на фермионе мы рассмотрим рассеяние фотонов с очень малой частотой заряженной системой со спином $1/2$. В гл. 16 мы отмечали, что рассеяние фотонов с нулевой энергией на заряженной системе описывается формулой Томсона и не зависит от структуры системы. Этот факт был использован для определения перенормированного заряда. Здесь мы покажем, что в пределе нулевой частоты фотона не только амплитуда рассеяния, но и ее первая производная по частоте определяются статическими свойствами системы, т. е. зарядом, массой и статическим магнитным моментом фермиона со спином $1/2$, на котором рассеивается фотон [511, 893]. При последующем рассмотрении мы всегда будем предполагать, что длина волны фотона много больше размеров системы. Для рассеяния фотонов нуклонами такой длиной, по отношению к которой длина волны фотона должна быть велика, является комптоновская длина волны π -мезона, т. е. должно быть $k \ll \mu_{\pi}c$.

Для определенности будем рассматривать рассеяние фотона нуклоном в псевдоскалярной мезонной теории. Лагранжиан системы связанных мезонного, нуклонного и электромагнитного полей дается равенством (10.92). Амплитуда рассеяния фотона на нуклоне из начального состояния [в котором фотон имеет импульс \mathbf{k} , энергию $\omega = |\mathbf{k}|$, поляризацию $\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \cdot \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = 0$, а нуклон имеет импульс \mathbf{p} и проекцию спина s] в конечное состояние [в котором фотон характеризуется величинами \mathbf{k}' , ω' , ϵ' , $(\epsilon' \cdot \mathbf{k}' = 0)$, а нуклон имеет импульс \mathbf{p}' и проекцию спина s'] имеет вид¹⁾

$$\langle \mathbf{p}'s', \mathbf{k}'\epsilon' | S | \mathbf{p}s, \mathbf{k}\epsilon \rangle = \text{out}(\mathbf{p}'s', \mathbf{k}'\epsilon' | \mathbf{p}s, \mathbf{k}\epsilon)_{\text{in}} =$$

$$= \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega\omega'}} \int d^4x \int d^4x' e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' x')} \times$$

$$\times \{ \text{out}(\mathbf{p}'s' | T(\epsilon' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}') \cdot \epsilon \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x})) + \delta(x_0 - x'_0) [\epsilon' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}'), \epsilon \cdot \partial^0 \mathbf{A}(\mathbf{x})] | \mathbf{p}s)_{\text{in}} \}, \quad (17.247)$$

где $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ — пространственная часть²⁾ 4-вектора $\mathbf{j}_{\mu}(\mathbf{x})$, являющегося источником электромагнитного поля:

$$\square \mathbf{A}_{\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{j}_{\mu}(\mathbf{x}). \quad (17.248)$$

Ток в обсуждаемой теории определяется выражением

$$\mathbf{j}_{\mu}(\mathbf{x}) = -ie \left[\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x^{\mu}} - ie \mathbf{A}_{\mu} \Phi^* \right) \Phi - \Phi^* \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu}} + ie \mathbf{A}_{\mu} \Phi \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} e \left[\tilde{\Psi}(\mathbf{x}) \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 + \tau_3), \Psi(\mathbf{x}) \right]. \quad (17.249)$$

В равенстве (17.249) Φ , Φ^* — гейзенберговские операторы, соответствующие заряженным мезонам. Используя это выражение для \mathbf{j}_{μ} , легко вычислить одновременной коммутатор в равенстве (17.247)

$$\delta(x_0 - x'_0) [\mathbf{j}_i(\mathbf{x}'), \partial^0 \mathbf{A}_l(\mathbf{x})] = -2e^2 \delta(x_0 - x'_0) \Phi^*(\mathbf{x}') \Phi(\mathbf{x}') [\mathbf{A}_i(\mathbf{x}'), \partial^0 \mathbf{A}_l(\mathbf{x})] =$$

$$= +2ie^2 \delta(x_0 - x'_0) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') g_{il} \Phi^*(\mathbf{x}') \Phi(\mathbf{x}'), \quad (17.250)$$

¹⁾ Собственное значение T_3 для нуклона мы не выписываем.

²⁾ В данном случае жирный шрифт для \mathbf{j} означает то, что \mathbf{j} — гейзенберговский оператор (перенормированный) и что он трехмерный вектор.

так что S -матрица имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}'s', \mathbf{k}'\mathbf{e}' | S | \mathbf{p}s, \mathbf{k}\mathbf{e} \rangle &= \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} + \\ &+ \frac{2ie^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega\omega'}} \int d^4x e^{i(k'-k)\cdot x} \text{out} \langle \mathbf{p}'s' | \Phi^*(x) \Phi(x) | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}} \mathbf{e}' \cdot \mathbf{e} + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega\omega'}} \int d^4x \int d^4x' e^{ik'\cdot x' - ik\cdot x} \times \\ &\times \text{out} \langle \mathbf{p}'s' | T(\mathbf{e}' \cdot \mathbf{j}(x') \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}(x)) | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}}. \end{aligned} \quad (17.251)$$

Если написать, что $S = 1 - 2\pi iT$, тогда T можно выразить следующим образом:

$$\langle \mathbf{p}'s', \mathbf{k}'\mathbf{e}' | T | \mathbf{p}s, \mathbf{k}\mathbf{e} \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4 \sqrt{4\omega\omega'}} \sum_{l, m=1}^3 \mathbf{e}'_l t_{lm} \mathbf{e}_m, \quad (17.252a)$$

где

$$\begin{aligned} t_{lm} &= 2ie^2 \int d^4x e^{i(k'-k)\cdot x} \text{out} \langle \mathbf{p}'s' | \Phi^*(x) \Phi(x) | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}} \delta_{lm} + \\ &+ \int d^4x \int d^4x' e^{i(k'\cdot x' - k\cdot x)} \text{out} \langle \mathbf{p}'s' | T(\mathbf{j}_l(x') \mathbf{j}_m(x)) | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}}. \end{aligned} \quad (17.252b)$$

Докажем теперь, что

$$\sum_{l, m=1}^3 k_l t_{lm} k_m = \omega' \omega \int d^4x \int d^4x' e^{ik'\cdot x' - ik\cdot x} \text{out} \langle \mathbf{p}'s' | T(\rho(x') \rho(x)) | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}}, \quad (17.253)$$

где $\rho(x) = \mathbf{j}_0(x)$ — плотность заряда.

Доказательство: Рассчитаем сначала $\sum_{l=1}^3 k_l t_{lm}$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 k_l t_{lm} &= 2ie^2 \int d^4x e^{i(k'-k)\cdot x} \text{out} \langle \mathbf{p}'s' | \Phi^*(x) \Phi(x) | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}} \cdot k'_m + \\ &+ i \int d^4x \int d^4x' e^{ik'\cdot x' - ik\cdot x} \text{out} \langle \mathbf{p}'s' | T(\partial' \cdot \mathbf{j}(x') \mathbf{j}_m(x)) | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}}. \end{aligned} \quad (17.254)$$

Используя уравнение непрерывности

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{j}_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial \rho}{\partial x_0}, \quad (17.255)$$

можно второй член в правой части равенства (17.254) преобразовать к виду $\text{out} \langle \mathbf{p}'s' | T(\partial'_0 \rho(x') \mathbf{j}_m(x)) | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}}$. Так как

$$T\left(\frac{\partial \rho(x')}{\partial x'_0} \mathbf{j}_m(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x'_0} T(\rho(x') \mathbf{j}_m(x)) - \delta(x_0 - x'_0) [\rho(x'), \mathbf{j}_m(x)], \quad (17.256)$$

то, подставляя выражение (17.256) в формулу (17.254), после интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 k_l t_{lm} &= 2ie^2 \int d^4x e^{i(k'-k)\cdot x} \text{out} \langle \mathbf{p}'s' | \Phi^*(x) \Phi(x) | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}} k'_m - \\ &- i \int d^4x \int d^4x' e^{ik'\cdot x' - ik\cdot x} \text{out} \langle \mathbf{p}'s' | [\rho(x'), \mathbf{j}_m(x)] | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}} \delta(x_0 - x'_0) + \\ &+ \int d^4x \int d^4x' \omega' e^{ik'\cdot x' - ik\cdot x} \text{out} \langle \mathbf{p}'s' | T(\rho(x') \mathbf{j}_m(x)) | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}}. \end{aligned} \quad (17.257)$$

Используя выражение (17.249) для 4-вектора тока и одновременные и перестановочные соотношения, можно вычислить коммутатор $[\mathbf{q}(x'), \mathbf{j}_m(x)]$ и проверить, что первые два члена в (17.257) взаимно уничтожаются. Прделав аналогичные выкладки и воспользовавшись равенством нулю одновременного коммутатора $\mathbf{q}(x)$ и $\mathbf{q}(y)$, в результате получим равенство (17.253)

$$\sum_{l, m=1}^3 k_l t_{lm} k_m = \omega' \omega \int d^4x \int d^4x' e^{ik \cdot x} e^{-ik' \cdot x'} \text{out}(\mathbf{p}'s' | T(\mathbf{q}(x') \mathbf{q}(x)) | \mathbf{p}s)_{\text{in}}.$$

Это равенство является следствием калибровочной инвариантности теории. Если из других источников можно получить достаточную информацию относительно коэффициентов в разложении t_{lm} по тензорным структурам, то равенство (17.253) можно применить для вычисления самой функции t_{lm} . Преимущество, получаемое при использовании соотношения (17.253) для расчета рассеяния, заключается в том, что если интересоваться амплитудой рассеяния, пренебрегая величинами порядка k и выше, то достигается существенное упрощение, так как

$\int d^3x \mathbf{q}(x) = \mathbf{Q}$ есть оператор полного заряда и $\mathbf{Q} | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}} = e_R | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}}$ или $0 | \mathbf{p}s \rangle_{\text{in}}$. Мы покажем, что амплитуду рассеяния с точностью до величин порядка k можно выразить через матричные элементы плотности заряда $\mathbf{q}(x)$, а не через плотность тока $\mathbf{j}(x)$. Из равенства (17.252б), определяющего t_{lm} , видно, что первый член (пропорциональный $\Phi^* \Phi$), если пренебречь степенями k выше второй, не зависит от спина и пропорционален δ_{lm} . Второй член можно записать в виде суммы по промежуточным состояниям, если между множителями $\mathbf{j}_l(x')$ и $\mathbf{j}_m(x)$ вставить полный набор состояний. Вклад в сумму, который возникает от однонуклонных промежуточных состояний (невозбужденных состояний) $t_{lm}^{(0)}$, легко подсчитать с точностью до величин порядка k . Прямые вычисления дают, что сумма $\sum_{lm} k_l t_{lm}^{(0)} k_m$ равна нулю. Можно показать, что

вклад от возбужденных состояний $t_{lm}^{(b)}$ с точностью до величин порядка k пропорционален δ_{lm} и матричным элементам σ_{lm} . Другими словами, в этом приближении

$$t_{lm} = A \delta_{lm} + B \sigma_{lm} + t_{lm}^{(0)}, \quad (17.258)$$

так что, подставляя выражение (17.258) в (17.253), находим

$$(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) A + (\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{k}' \times \mathbf{k}]) B = \omega' \omega C, \quad (17.259a)$$

где

$$C = \int d^4x \int d^4x' e^{ik' \cdot x'} e^{-ik \cdot x} \text{out}(\mathbf{p}'s' | T(\mathbf{q}(x') \mathbf{q}(x)) | \mathbf{p}s)_{\text{in}}. \quad (17.259б)$$

Спинорные множители $\tilde{u}_s(\mathbf{p}')$ и $u_s(\mathbf{p})$ в равенствах (17.258) и (17.259a) были опущены. Посмотрим, как вычислить величину C . Трансляционная инвариантность теории позволяет упростить равенство (17.259a). Так как оператор полной энергии-импульса системы \mathbf{P}_μ является генератором пространственно-временных сдвигов, то

$$e^{i\mathbf{P}_\mu a^\mu} \mathbf{q}(x) e^{-i\mathbf{P}_\mu a^\mu} = \mathbf{q}(x + a). \quad (17.260)$$

Используя унитарность оператора $U(1, a) = e^{i\mathbf{P} \cdot a}$, можно написать

$$\begin{aligned} \text{out}(\mathbf{p}'s' | T(\mathbf{q}(x') \mathbf{q}(x)) | \mathbf{p}s)_{\text{in}} &= \\ &= \text{out}(\mathbf{p}'s' | e^{-i\mathbf{P} \cdot a} e^{i\mathbf{P} \cdot a} \cdot T(\mathbf{q}(x') \mathbf{q}(x)) e^{-i\mathbf{P} \cdot a} e^{i\mathbf{P} \cdot a} | \mathbf{p}s)_{\text{in}} = \\ &= e^{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot a} \text{out}(\mathbf{p}'s' | T(\mathbf{q}(x' + a) \mathbf{q}(x + a)) | \mathbf{p}s)_{\text{in}}. \end{aligned} \quad (17.261)$$

Равенство (17.261) справедливо при произвольных сдвигах a . Выбрав $a = -x$, можно переписать равенство (17.253) следующим образом:

$$\sum_{l, m=1}^3 k_l t_{lm} k_m = \omega' \omega \int d^4 x \int d^4 x' e^{-i(p+k-p'-k') \cdot x} e^{i k' \cdot (x'-x)} \times \\ \times \text{out} \langle \mathbf{p}' s' | T(\mathbf{q}(x'-x) \mathbf{q}(0)) | \mathbf{p} s \rangle_{\text{in}} = \\ = (2\pi)^4 \omega' \omega \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \int d^4 y e^{i k' \cdot y} \text{out} \langle \mathbf{p}' s' | T(\mathbf{q}(y) \mathbf{q}(0)) | \mathbf{p} s \rangle_{\text{in}}. \quad (17.262)$$

Здесь δ -функция выражает сохранение полной энергии и полного импульса в рассматриваемом процессе. Если записать

$$T(\mathbf{q}(y) \mathbf{q}(0)) = \theta(y) \mathbf{q}(y) \mathbf{q}(0) + \theta(-y) \mathbf{q}(0) \mathbf{q}(y) \quad (17.263)$$

и вставить между $\mathbf{q}(0)$ и $\mathbf{q}(y)$ полную систему состояний $|\mathbf{q}, \alpha\rangle_{\text{in}}$, являющихся собственными состояниями \mathbf{P}_μ с собственными значениями q_μ , то получим

$$\int d^4 y e^{i k' \cdot y} \text{out} \langle \mathbf{p}' s' | T(\mathbf{q}(y) \mathbf{q}(0)) | \mathbf{p} s \rangle_{\text{in}} = \\ = \sum_{|\mathbf{q}, \alpha\rangle_{\text{in}}} \left\{ \int_0^\infty dy_0 \int d^3 y e^{i k' \cdot y} \text{out} \langle \mathbf{p}' s' | \mathbf{q}(y) | \mathbf{q}, \alpha \rangle_{\text{in}} \text{in} \langle \mathbf{q}, \alpha | \mathbf{q}(0) | \mathbf{p} s \rangle_{\text{in}} + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^0 dy_0 \int d^3 y e^{i k' \cdot y} \text{out} \langle \mathbf{p}' s' | \mathbf{q}(0) | \mathbf{q}, \alpha \rangle_{\text{in}} \text{in} \langle \mathbf{q}, \alpha | \mathbf{q}(y) | \mathbf{p} s \rangle_{\text{in}} \right\} = \\ = \sum_{|\mathbf{q}, \alpha\rangle_{\text{in}}} \left\{ \int_0^\infty dy_0 \int d^3 y e^{i(k'+p'-q) \cdot y} \langle \mathbf{p}' s' | \mathbf{q}(0) | \mathbf{q}, \alpha \rangle_+ + \langle \mathbf{q}, \alpha | \mathbf{q}(0) | \mathbf{p} s \rangle_+ + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^0 dy_0 \int d^3 y e^{i(k'-p+q) \cdot y} \langle \mathbf{p}' s' | \mathbf{q}(0) | \mathbf{q}, \alpha \rangle_+ + \langle \mathbf{q}, \alpha | \mathbf{q}(0) | \mathbf{p} s \rangle_+ \right\} = \\ = i \sum_{q_0, \alpha} \left\{ \frac{-\langle \mathbf{p}' s' | \mathbf{q}(0) | \mathbf{p}' + \mathbf{k}', q_0; \alpha \rangle_+ + \langle q_0, \mathbf{p}' + \mathbf{k}'; \alpha | \mathbf{q}(0) | \mathbf{p} s \rangle_+}{k'_0 + p'_0 - q_0 + i\epsilon} - \right. \\ \left. - \frac{-\langle \mathbf{p}' s' | \mathbf{q}(0) | \mathbf{p} - \mathbf{k}', q_0; \alpha \rangle_+ + \langle q_0, \mathbf{p} - \mathbf{k}'; \alpha | \mathbf{q}(0) | \mathbf{p} s \rangle_+}{k'_0 - p_0 + q_0 - i\epsilon} \right\}. \quad (17.264)$$

Суммирование в формуле (17.264) проводится по всем состояниям $|\alpha\rangle$, которые можно связать с однонуклонным с помощью оператора $\mathbf{q}(0)$. Так как $\mathbf{j}_\mu(x)$ коммутирует с оператором числа нуклонов N (число нуклонов минус число антинуклонов), то состояния $|\alpha\rangle$ должны быть собственными состояниями N с собственным значением $+1$. Ясно также, что они должны иметь такой же заряд, как и состояния $|\mathbf{p} s\rangle_\pm$. Поэтому дают вклад однонуклонные состояния, состояния одного нуклона плюс одного мезона и т. д.¹⁾ Однако члены, возникающие от возбужденных состояний (т. е. от состояний, отличных от однонуклонного состояния), дают вклад порядка k^2 , так как оператор полного заряда $\int d^3 x \mathbf{q}(x)$,

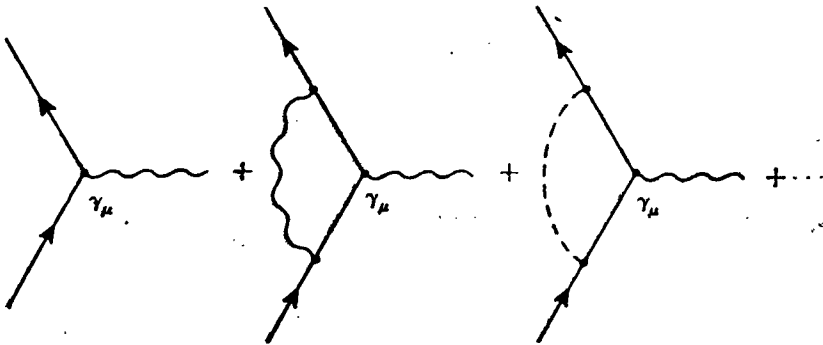
1) Промежуточные состояния, содержащие один нуклон и фотоны, будут давать вклад по крайней мере порядка α по сравнению с вкладом низшего порядка. Поэтому обычно пренебрегают вкладом от состояний с фотонами по сравнению с вкладами порядка G^2 от промежуточных состояний, содержащих мезоны.

действуя на $|\mathbf{ps}\rangle_{\pm}$ или $|\mathbf{p}'s'\rangle_{\pm}$, дает c -числовой множитель, равный заряду соответствующего состояния. Поэтому для вычисления C с точностью до величин порядка k нужно учесть в равенстве (17.264) лишь вклад от однонуклонных промежуточных состояний. Если выделить вклад этих состояний, то получим

$$\begin{aligned} & \int d^4y e^{ik \cdot y} \langle \mathbf{p}'s' | T(\mathbf{q}(y) \mathbf{q}(0) | \mathbf{ps})_{in} = \\ & = i \sum_{s''} \left\{ \frac{-\langle \mathbf{p}'s' | \mathbf{q}(0) | \mathbf{p}'+\mathbf{k}', E(\mathbf{p}'+\mathbf{k}'), s'' \rangle_+ \langle s'', \mathbf{p}'+\mathbf{k}', E(\mathbf{p}'+\mathbf{k}') | \mathbf{q}(0) | \mathbf{ps} \rangle_+}{\omega' + E(\mathbf{p}') - E(\mathbf{p}'+\mathbf{k}') + i\varepsilon} \right. \\ & \left. - \frac{-\langle \mathbf{p}'s' | \mathbf{q}(0) | \mathbf{p}-\mathbf{k}', E(\mathbf{p}-\mathbf{k}'), s'' \rangle_+ \langle s'', \mathbf{p}-\mathbf{k}', E(\mathbf{p}-\mathbf{k}') | \mathbf{q}(0) | \mathbf{ps} \rangle_+}{\omega' - E(\mathbf{p}) + E(\mathbf{p}-\mathbf{k}')} \right\} + O(k^2) \end{aligned} \quad (17.265)$$

где $E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$.

Чтобы вклад от однонуклонных состояний выразить в явной форме, найдем общий вид матричного элемента $+\langle \mathbf{p}'s' | \mathbf{j}_{\mu}(0) | \mathbf{ps} \rangle_-$. Этот матрич-



Ф и г. 138.

ный элемент, выраженный через операторы в картине взаимодействия, равен

$$\begin{aligned} +\langle \mathbf{p}'s' | \mathbf{j}_{\mu}(0) | \mathbf{ps} \rangle_+ & = -(p' - p)^2 +\langle \mathbf{p}'s' | A_{\mu}(0) | \mathbf{ps} \rangle_+ = \\ & = \langle \mathbf{p}'s' | U(0, \infty) \mathbf{j}_{\mu}(0) U(0, -\infty) | \mathbf{ps} \rangle = \\ & = \langle \mathbf{p}'s' | T(S \mathbf{j}_{\mu}(0)) | \mathbf{ps} \rangle. \end{aligned} \quad (17.266a)$$

Правая часть равенства (17.266a) представлена с помощью диаграмм на фиг. 138. Таким образом, матричный элемент $-\langle \mathbf{p}'s' | \mathbf{j}_{R\mu}(0) | \mathbf{ps} \rangle_+$ равен¹⁾

$$+\langle \mathbf{p}'s' | \mathbf{j}_{R\mu}(0) | \mathbf{ps} \rangle_- = (p' - p)^2 D'_{F1}(p' - p) \tilde{u}^{s'}(\mathbf{p}') \Gamma_{1\mu}(p', p) u^s(\mathbf{p}), \quad (17.266b)$$

где $\Gamma_{1\mu}$ — перенормированный вершинный оператор. Чтобы построить оператор $\Gamma_{1\mu}$, заметим, что из соображений релятивистской инвариант-

¹⁾ В правой части равенства (17.266b) мы опустили кинематический множитель $\left(\frac{M^2}{p_0 p'_0}\right)^{1/2}$. Так как наши спиноры нормированы согласно равенству $\tilde{u}(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}) = +1$ (для спиноров с положительной энергией), то множитель $\left(\frac{M^2}{p_0 p'_0}\right)^{1/2}$ необходим для обеспечения ковариантности матричного элемента. Мы также добавили индекс R к операторам, чтобы напомнить читателю, что в этом параграфе мы имеем дело с перенормированными гейзенберговскими операторами.

ности он должен иметь вид

$$\Gamma_{1\mu}(p', p) \Big|_{p^2=p'^2=M^2} = \gamma_\mu F_1(q^2) + i\sigma_{\mu\nu} p^\nu G_1(q^2) + i\sigma_{\mu\nu} p'^\nu G_2(q^2),$$

$$q = p' - p, \quad (17.267)$$

где F_1 , G_1 и G_2 — инвариантные функции. Кроме того, в силу уравнения непрерывности $\partial^\mu \mathbf{j}_\mu(x) = 0$ имеем $\partial^\mu \langle \mathbf{p}' s' | \mathbf{j}_\mu(x) | \mathbf{p} s \rangle_- = 0$. Это означает, что

$$(p' - p)^\mu \tilde{u}^{s'}(p') \Gamma_{1\mu}(p', p) u^s(p) = 0. \quad (17.268)$$

Член $\tilde{u}(p') \gamma_\mu (p' - p)^\mu u(p) F_1(q^2)$ равен нулю из-за того, что \tilde{u} и u подчиняются уравнению Дирака. А из равенства нулю выражения $(p' - p)^\mu \tilde{u}(p') \{ \sigma_{\mu\nu} p^\nu G_1(q^2) + \sigma_{\mu\nu} p'^\nu G_2(q^2) \} u(p)$ получаем

$$-G_1(q^2) = G_2(q^2) = F_2(q^2), \quad (17.269)$$

так что

$$\Gamma_{1\mu}(p', p) = \gamma_\mu F_1(q^2) + i\sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\nu F_2(q^2). \quad (17.270)$$

Форм-факторы $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$ описывают распределение заряда и намагнитченности в нуклоне. Они являются обобщениями электромагнитных форм-факторов, рассмотренных при описании взаимодействия электрона с электромагнитным полем. Так как полный заряд определяется матричным элементом $\langle \mathbf{p} s | \int d^3x \mathbf{j}_0(x) | \mathbf{p} s \rangle_+$, т. е. матричным элементом при $q = 0$, то имеем

$$F_1(0) = \frac{1}{2} (1 + \tau_3) e_R, \quad (17.271)$$

или $F_1^p(0) = e_R$, а $F_1^n(0) = 0$, где индексы n и p относятся соответственно к нейтрону и протону. Магнитный момент нуклона получится, если вычислить среднее значение оператора $\frac{1}{2} \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{j}]$ в состоянии $|\Psi\rangle$, в котором нуклон находится в покое. Это среднее значение равно

$$\langle \Psi | \frac{1}{2} \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{j}(x)] | \Psi \rangle = \left[\frac{F_1(0)}{2M} + F_2(0) \right] \langle \tilde{u}(0) \boldsymbol{\sigma} u(0) \rangle, \quad (17.272)$$

где правая часть означает среднее значение $\boldsymbol{\sigma}$ для спинора Дирака, соответствующего частице в покое ($\mathbf{p} = 0$). Так как $\frac{F_1(0)}{2M}$ в силу соотношения (17.271) равно дираковскому магнитному моменту, то ясно, что $F_2(0) = \Delta\mu$ — это аномальный магнитный момент. Высшие моменты функций F_1, F_2 характеризуют форму распределения заряда и намагнитченности. (Форм-факторы можно мыслить как фурье-образы пространственных распределений заряда и намагнитченности.) Средний квадратичный радиус пространственного распределения связан с производной $F_{1,2}$ при $q^2 = 0$. Экспериментальные данные [379, 380] по рассеянию электронов на нуклонах и дейтронах показывают, что $F_{1p} \approx F_{2p} \approx F_{2n}$ (по крайней мере при тех значениях q^2 , при которых были выполнены эксперименты), а $F_{1n} \approx 0$.

Итак, мы установили, что

$$-\langle \mathbf{p}' s' | \mathbf{j}_\mu(0) | \mathbf{p} s \rangle_+ = \tilde{u}^{s'}(p') [\gamma_\mu F_1(q^2) + i\sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2)] u^s(p) \quad (17.273)$$

$$q = p' - p,$$

так что матричный элемент $\langle p's' | q(0) | ps \rangle_-$ дается равенством

$$\begin{aligned} \langle p's' | q_R(0) | ps \rangle_- &= \\ &= q^2 D'_{F_1}(q) \{ u^{s'*}(p') u^s(p) F_1(q^2) + F_2(q^2) u^{s'*}(p') \beta \alpha \cdot q u^s(p) \} \quad (17.274) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \langle p's' | j_R(0) | ps \rangle_- &= \\ &= q^2 D'_{F_1}(q) u^{s'*}(p') \{ \alpha F_1(q^2) - i [\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}] F_2(q^2) \} u^s(p), \quad (17.275a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx u^{s'*}(p') \left\{ \frac{F_1(0)}{2M} (\mathbf{p} + \mathbf{p}') + i \left(\frac{F_1(0)}{2M} + \Delta\mu \right) [\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}] \right\} u^s(p) + O(q^2) \approx \\ &\approx u^{s'*}(p') \left\{ \frac{F_1(0)}{2M} (\mathbf{p} + \mathbf{p}') + i\mu [\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}] \right\} u^s(p) + O(q^2). \quad (17.275b) \end{aligned}$$

Выражение (17.275b) соответствует току нерелятивистской частицы, характеризующейся зарядом $F_1(0)$ и полным магнитным моментом μ . Взаимодействие такой частицы с магнитным полем \mathcal{H} определяется гамильтонианом

$$H \sim - \frac{F_1(0)}{2M} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) - \mu \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{H}. \quad (17.276)$$

Подставляя (17.274) и (17.275) в равенство (17.265), находим, что для рассеяния фотонов на протонах с точностью до величин порядка k^2

$$\begin{aligned} &\int d^4y e^{ik'y} v_{in} \langle p's' | T(q(y) q(0)) | ps \rangle_{in} = \\ &= u^{s'*} \left[\frac{e_R^2}{M} \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{\omega \omega'} \right) + i \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{k}' \times \mathbf{k}]}{\omega} \right) \frac{e_R}{M} \left(2\mu - \frac{e_R}{2M} \right) \right] u^s + O(k^2), \quad (17.277) \end{aligned}$$

где μ — полный магнитный момент нуклона. Правая часть равенства (17.277) выражена через двухкомпонентные спиноры Паули $u^{s'}$ и u^s , соответствующие проекциям спина s' и s . Другими словами, в равенстве (17.277) мы перешли к «большим» компонентам спиноров $u^{s'}(p)$ и $u^s(p)$. Выражение (17.277), пропорциональное $\sum_{lm} k'_l t_{lm} k_m$ [вспомним равенства (17.259a) и (17.262)], позволяет вычислить t_{lm} , что в свою очередь дает возможность вычислить амплитуду рассеяния с точностью до величин порядка k [см. равенство (17.252a)]. С такой точностью амплитуда рассеяния равна

$$\begin{aligned} \langle p's', k'\epsilon' | S | ps, k\epsilon \rangle &= \frac{-i(2\pi)^4}{\sqrt{4\omega\omega'}} \cdot \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \times \\ &\times u^{s'*} \left\{ \frac{e_R^2}{M} \boldsymbol{\epsilon}' \cdot \boldsymbol{\epsilon} - i \frac{e_R}{M} \omega (\boldsymbol{\sigma} \cdot [\boldsymbol{\epsilon}' \times \boldsymbol{\epsilon}]) \left(2\mu - \frac{e_R}{2M} \right) - \frac{2i\mu^2}{\omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot [[\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{k}] \times [\boldsymbol{\epsilon}' \times \mathbf{k}']]) - \right. \\ &\left. - \frac{e_R \mu i}{M \omega} ((\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k}') (\boldsymbol{\epsilon} \cdot [\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{k}']) - (\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{k}) (\boldsymbol{\epsilon} \cdot [\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{k}])) \right\} u^s + O(k^2). \quad (17.278) \end{aligned}$$

Для рассеяния вперед $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ и выражение для амплитуды рассеяния принимает вид

$$\begin{aligned} \langle ps', k\epsilon' | S | ps, k\epsilon \rangle &= \frac{-i(2\pi)^4}{\sqrt{4\omega\omega'}} \times \\ &\times \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) u^{s'*} \left\{ \frac{e_R^2}{M} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}' + i\omega (\Delta\mu)^2 (\boldsymbol{\sigma} \cdot [\boldsymbol{\epsilon}' \times \boldsymbol{\epsilon}]) \right\} u^s. \quad (17.279) \end{aligned}$$

[Конечно, для нейтрона член $\frac{e_R^2}{M}$ отсутствует, так как $F_1^n(0) = 0$.] Из равенств (17.278) и (17.279) видно, что с точностью до членов, линейных

по частоте фотона, амплитуда рассеяния зависит лишь от заряда, массы и магнитного момента рассеивателя. Лоу [514] показал, что тормозное излучение фотонов малых энергий (с такой же точностью) можно связать с амплитудой рассеяния без испускания фотонов и что коэффициенты разложения по частоте и в этом случае определяются статическими электромагнитными свойствами системы.

Другие важные предельные теоремы для мезон-нуклонного рассеяния и фоторождения мезонов при низких энергиях были установлены Кроллом и Рудерманом [467] и Клейном [449] (см. также [436]). Значение предельных теорем заключается в том, что они дают способ измерения параметров, которые независимо определяются другими экспериментами. Так, заряд и магнитный момент протона измеряются в принципе с помощью рассеяния протона в слабом и медленно меняющемся внешнем электромагнитном поле (достаточно слабом, чтобы рассматривать лишь линейные по полю эффекты, и достаточно медленно меняющемся, чтобы можно было пренебречь изменением напряженности в пространстве и во времени). А доказанная выше предельная теорема для комптоновского рассеяния при низких энергиях показывает, как таким образом определенные параметры входят в амплитуду рассеяния фотонов на протонах.

§ 6. Проблема связанных состояний

В этом параграфе мы изложим некоторые методы, использующиеся при исследовании проблемы связанных состояний в релятивистской теории поля. Проблему связанных состояний можно рассматривать с двух тесно соприкасающихся точек зрения. Одна из них заключается в обобщении понятия фейнмановских функций распространения на многочастичные системы. При другом подходе имеют дело непосредственно с амплитудами, которые являются аналогами «волновых функций» в нерелятивистском случае (см. работы Фейнмана [251, 252], Швингера [715], Солпитера и Бете [696], Гелл-Манна и Лоу [301], Нишижимы [578] и Фриза [277, 278]).

Рассмотрим сначала задачу описания одноэлектронной системы в слабом статическом внешнем поле, когда учитывается влияние квантованного излучения и электронно-позитронного поля. Известно, что если влиянием квантованного поля излучения пренебречь, то операторы $\psi^e(x)$, описывающие квантованное электронно-позитронное поле, удовлетворяют уравнению движения

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu + e\gamma_\mu A^{\mu e}(x) - m) \psi^e(x) = 0. \quad (17.280)$$

Кроме того, при достаточно слабых полях существует стабильный вакуум $|\Phi_0^e\rangle$, и состояние

$$|\Phi_n^e\rangle = \int_{\sigma} d\sigma_\mu(x) \tilde{\psi}^e(x) \gamma^\mu \varphi_n(x) |\Phi_0^e\rangle \quad (17.281)$$

описывает одноэлектронное состояние и не зависит от σ . Здесь $\varphi_n(x)$ — решение уравнения Дирака с положительной энергией во внешнем поле $A^{\mu e}(x)$. Состояние $|\Phi_n^e\rangle$ является собственным состоянием P_0 , полной энергии системы полей, с собственным значением E_n (где E_n — собственное значение энергии для функции φ_n). Наоборот, одновременные перестановочные соотношения

$$\{\psi^e(x), \tilde{\psi}^e(x')\}_{x_0=x'_0} = \gamma^0 \delta^{(3)}(x - x') \quad (17.282)$$

и свойство вакуума быть состоянием с наимизшей энергией позволяют заключить, что

$$\langle \Phi_0^e | \psi^e(x) | \Phi_n^e \rangle = \varphi_n(x). \quad (17.283)$$

Эта амплитуда $\varphi_n(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu + e\gamma_\mu A^{\mu e}(x) - m) \varphi_n(x) = 0, \quad (17.284)$$

поскольку ему удовлетворяет $\psi^e(x)$, а также уравнению

$$i\partial_0 \varphi_n(x) = E_n \varphi_n(x), \quad (17.285)$$

если $|\Phi_n^e\rangle$ — собственное состояние P_0 с собственным значением E_n .

Доказательство:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0^e | [P_0, \psi^e(x)] | \Phi_n^e \rangle &= i\partial_0 \langle \Phi_0^e | \psi^e(x) | \Phi_n^e \rangle = \\ &= \langle \Phi_0^e | \psi^e(x) E_n | \Phi_n^e \rangle. \end{aligned} \quad (17.286)$$

Когда учитывается влияние квантованного поля излучения, вектор состояния системы в картине Фарри удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t | \Psi_F(t) \rangle &= H_{IF}(t) | \Psi_F(t) \rangle = \\ &= -e \int d\sigma(x) : \tilde{\psi}^e(x) \gamma^\mu \psi^e(x) : A_\mu^e(x) | \Psi_F(t) \rangle, \end{aligned} \quad (17.287)$$

где $\psi^e(x)$ — фермионные операторы в картине Фарри, удовлетворяющие уравнению (17.280). Замечания, сделанные в § 1 этой главы, предполагают, что векторы

$$| \Psi_n \rangle = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{U^e(0, t_0) | \Phi_n^e \rangle}{\langle \Phi_0^e | U^e(0, t_0) | \Phi_0^e \rangle} \quad (17.288)$$

рассматриваются как «физические» собственные векторы, которые описывают систему с учетом поля излучения. Однако только в случае состояния вакуума $|\Phi_0^e\rangle$ и для одной частицы в низшем связанном состоянии получающиеся состояния $|\Psi\rangle$ будут собственными состояниями P_0 с дискретными собственными значениями. Наше утверждение состоит в том, что энергетический спектр объединенной системы электронно-позитронного поля и поля излучения имеет дискретное собственное значение при $p_0 = 0$, которое соответствует вакууму; непрерывный спектр, начинающийся с $p_0 = 0$ и соответствующий состояниям с одним, двумя и т. д. фотонами; дискретное собственное значение при $m - \epsilon_0$ (где ϵ_0 — энергия связи $1s$ -состояния с учетом всех радиационных поправок) и непрерывный спектр, начинающийся в этой точке и соответствующий состояниям одного электрона с одним, двумя и т. д. фотонами. Дискретные собственные значения оператора $P_0^{(0)}$, которые соответствуют связанным состояниям φ_n и появляются при $m - E_n$, когда пренебрегается влиянием квантованного поля излучения, в результате взаимодействия с ним приобретают отрицательную мнимую добавку и смещаются с действительной оси в комплексной плоскости энергии. Физически эта формулировка означает, что высшие возбужденные состояния нестабильны относительно переходов в нижние состояния с испусканием фотонов. (Состояния, содержащие один электрон в низшем состоянии, конечно, стабильны в силу сохранения заряда.)

По аналогии со случаем, когда отсутствует поле излучения, будем описывать одноэлектронную систему с гейзенберговским вектором состоя-

ния $|\Psi\rangle$ амплитудой

$$f(x) = (\Psi_0, \psi(x)\Psi), \quad (17.289)$$

где $\psi(x)$ — гейзенберговский оператор электронно-позитронного поля, взаимодействующего с внешним полем и полем излучения. Оператор $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = -e\gamma_\mu (A^{e\mu}(x) + A^\mu(x))\psi(x). \quad (17.290)$$

Так как $|\Psi\rangle$, по предположению, есть одноэлектронное состояние (так что $Q|\Psi\rangle = -e|\Psi\rangle$), то амплитуды

$$f(x_1, \dots, x_n) = (\Psi_0, T(\psi(x_1) \dots \psi(x_n)\Psi)) \quad (17.291)$$

равны нулю, а амплитуды

$$f_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(n, m)}(x, x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n) = \\ = (\Psi_0, T(\psi(x)\psi(x_1) \dots \psi(x_n)\tilde{\psi}(y_1) \dots \tilde{\psi}(y_n)A_{\mu_1}(z_1) \dots A_{\mu_n}(z_n))\Psi_0) \quad (17.292)$$

отличны от нуля. То, что последние амплитуды не равны нулю, связано с возможностью рождения пар внешним полем и с возможностью испускания фотонов нашей одноэлектронной системой.

Рассмотрим несколько более подробно «одночастичную» амплитуду $f(x)$, определенную равенством (17.289). Используя соотношение

$$|\Psi\rangle = \frac{U^e(0, \infty)|\Phi^e\rangle}{(\Phi_0^e, U^e(0, -\infty)\Phi_0^e)}, \quad (17.293)$$

амплитуду $f(x)$ можно выразить через переменные в картине Фарри:

$$f(x) = \langle \Phi_0^e | U^{e*}(0, \infty) U^e(t, 0)^{-1} \psi^e(x) U^e(t, 0) U^e(0, -\infty) | \Phi^e \rangle_C = \\ = \langle \Phi_0^e | T(S^e \psi^e(x)) | \Phi \rangle_C, \quad (17.294a)$$

$$S^e = U^e(+\infty, -\infty). \quad (17.294b)$$

Рассмотрим, в частности, случай

$$|\Phi^e\rangle = |\Phi_n^e\rangle = \int_\sigma d\sigma_\mu(x) \tilde{\psi}^e \gamma^\mu \varphi_n(x) |\Phi_0^e\rangle, \quad (17.295)$$

где пространственно-подобную поверхность σ в силу того, что она произвольная, возьмем при $t = -\infty$. При таком выборе σ равенство (17.294) можно записать в виде

$$f_n(x) = \int (\Phi_0^e, T(S^e \psi^e(x) \tilde{\psi}^e(x')) \Phi_0^e) \gamma^\mu \varphi_n(x') d\sigma_\mu^-(x'), \quad (17.296a)$$

$$S^e = U^e(\infty, -\infty) \quad (17.296b)$$

или

$$f_n(x) = -\frac{1}{2} \int_\sigma S_F^e(x, x') \gamma^\mu \varphi_n(x') d\sigma_\mu(x'), \quad (17.297)$$

где

$$-\frac{1}{2} S_F^e(x, x') = (\Phi_0^e, T(S^e \psi^e(x) \tilde{\psi}^e(x')) \Phi_0^e) \quad (17.298)$$

есть фейнмановская функция распространения частиц во внешнем поле с учетом всех радиационных поправок. Она является функцией x, x'

и $x_0 - x'_0$ и удовлетворяет интегральному уравнению

$$-\frac{1}{2} S_F^{e'}(x, x') = -\frac{1}{2} S_F^e(x, x') + \int -\frac{1}{2} S_F^e(x, x'') \Sigma_e^*(x'', x''') -\frac{1}{2} S_F^{e'}(x''', x') d^4 x'' d^4 x''', \quad (17.299)$$

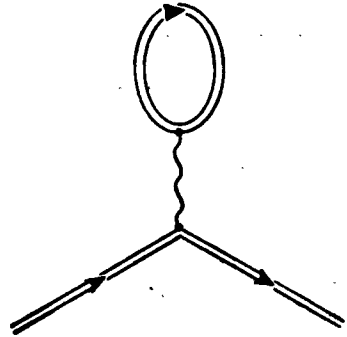
причем S_F^e определяется выражением

$$-\frac{1}{2} S_F^e(x, x') = (\Phi_0^e, T(\psi^e(x) \tilde{\psi}^e(x')) \Phi_0^e). \quad (17.300)$$

Собственные диаграммы собственной энергии, дающие вклад в Σ_e^* , те же, что и диаграммы, дающие вклад в Σ^* (например, диаграмма



Ф и г. 139.



Ф и г. 140.

на фиг. 139). Однако Σ_e^* содержит еще целый ряд дополнительных диаграмм, возникающих от поляризации вакуума внешним полем. Такая диаграмма низшего порядка показана на фиг. 140. Вспомним, что после перенормировки эта диаграмма дает член

$$\Sigma_e^{*(2)}(x, x') \approx \frac{e^2}{15\pi m^2} \delta^{(4)}(x - x') \gamma^\mu \square A_\mu^e(x). \quad (17.301)$$

Если подставить $S_F^{e'}$ из уравнения (17.299) в (17.297), то получается следующее интегральное уравнение для $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \varphi_n(x) + \int d^4 x' \int d^4 x'' -\frac{1}{2} S_F^e(x, x'') \Sigma_e^*(x'', x') f_n(x'). \quad (17.302)$$

С другой стороны, поскольку $\varphi_n(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака с внешним полем $A^e(x)$, а $S_F^e(x, x')$ подчиняется уравнению

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu + e\gamma_\mu A^{e\mu}(x) - m) S_F^e(x, x') = 2i\delta^{(4)}(x - x'), \quad (17.303)$$

находим, что $f_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu + e\gamma_\mu A^{e\mu}(x) - m) f_n(x) + \int d^4 x' \Sigma_e^*(x, x') f_n(x') = 0. \quad (17.304)$$

Это уравнение для амплитуды $f(x)$ впервые было выведено Швингером [715]. Оно является обобщением уравнения Дирака, включающим радиационные поправки. Как выше упоминалось, уравнение (17.304) будет иметь решения вида

$$f(x) = e^{-iE x_0} g(x) \quad (17.305)$$

только для низших состояний. Для других состояний будут существовать приближенные решения вида

$$f(x) \sim e^{-i(E - \frac{i}{2}\Gamma)x_0} g(x), \quad (17.306)$$

где $1/\Gamma$ — время жизни рассматриваемого состояния¹⁾.

Когда внешнего поля нет, одночастичные состояния описываются с помощью амплитуд $f(x)$, $f(x, x_1; y_1)$, ... следующим образом. Обозначим через $|\Psi_{ps}\rangle$ одночастичный гейзенберговский вектор состояния, который является собственным вектором оператора P_μ с собственным значением p_μ , причем $p_\mu p^\mu = m^2$. Тогда одночастичная амплитуда $f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = (\Psi_0, \psi(x) \Psi_{ps}), \quad (17.307)$$

где $\psi(x)$ — гейзенберговский оператор поля, удовлетворяющий уравнению (17.1). Выражая правую часть равенства (17.307) через операторы в представлении взаимодействия, имеем

$$f(x) = (\Phi_0, U(\infty, 0) U^{-1}(t, 0) \psi(x) U(t, 0) U(0, -\infty) \Phi_{ps})_C, \quad (17.308)$$

причем

$$|\Psi_{ps}\rangle = U(0, -\infty) |\Phi_{ps}\rangle_C \quad (17.309)$$

и

$$|\Phi_{ps}\rangle = b_s^*(p) |\Phi_0\rangle = \int d\sigma_\mu(x) \tilde{\psi}(x) \gamma_\mu \omega^s(p) e^{-ip \cdot x} |\Phi_0\rangle. \quad (17.310)$$

Поэтому можно написать

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (\Phi_0, T(S\psi(x) \tilde{\psi}(x')) \Phi_0) \gamma^\mu \omega(x') d\sigma_\mu(x') = \\ &= \int d\sigma_\mu(x') \frac{-1}{2} S'_F(x-x') \gamma^\mu \omega(x'), \end{aligned} \quad (17.311)$$

где $\frac{-1}{2} S'_F(x-x')$ — перенормированная функция распространения (прежде мы обозначали ее через S'_{F1}), которая удовлетворяет интегральному уравнению

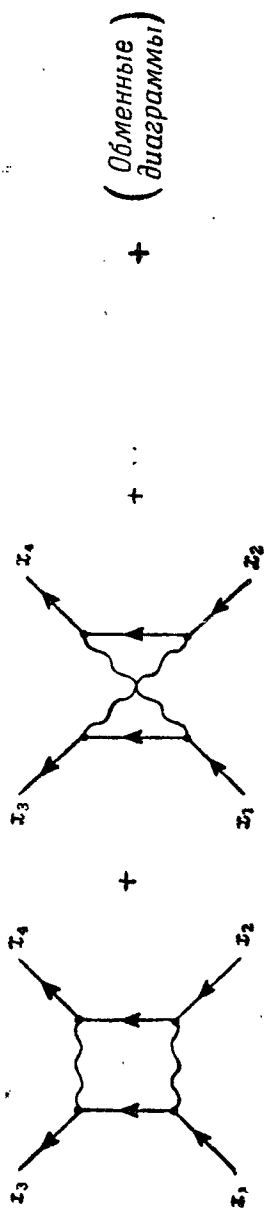
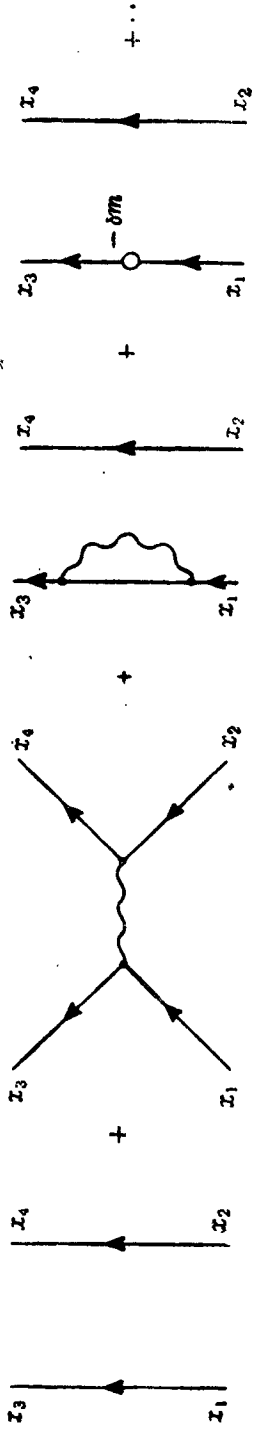
$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} S'_F(x-x') &= -\frac{1}{2} S_F(x-x') + \\ &+ \int d^4x' \frac{-1}{2} S_F(x-x'') \Sigma^*(x''-x''') \frac{-1}{2} S'_F(x'''-x'). \end{aligned} \quad (17.312)$$

В уравнении (17.312) Σ^* является суммой вкладов от всех собственных диаграмм собственной энергии. Подставляя S'_F из этого уравнения в (17.311), находим, что $f(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(x) = \omega_p(x) - \int d^4x' \Sigma^*(x-x') f(x'), \quad (17.313)$$

которое включает граничное условие, требующее, чтобы функция $f(x')$ описывала частицу с импульсом p_μ , так как неоднородный член равен $\omega_p(x)$. В действительности, если итерировать полученное выше уравнение, то, поскольку $\int d^4x' \Sigma^*(x-x') \omega_p(x') = 0$, имеем $f(x) = \omega_p(x)$.

¹⁾ Относительно способа решения уравнений (17.299) и (17.304) см. работу Лоу [510], а также работу Милса и Кролла [553].



(Обменные
 диаграммы)

Фиг. 141.

Приведенные выше примеры показывают, что для определения свойств одночастичных состояний достаточно изучить фейнмановские функции распространения $K'_{A+} = -^{1/2} S'_F$ или $K'_+ = -^{1/2} S'_F$. Чтобы обобщить такое рассмотрение на двухчастичные системы, определим функцию распространения для двухчастичной системы

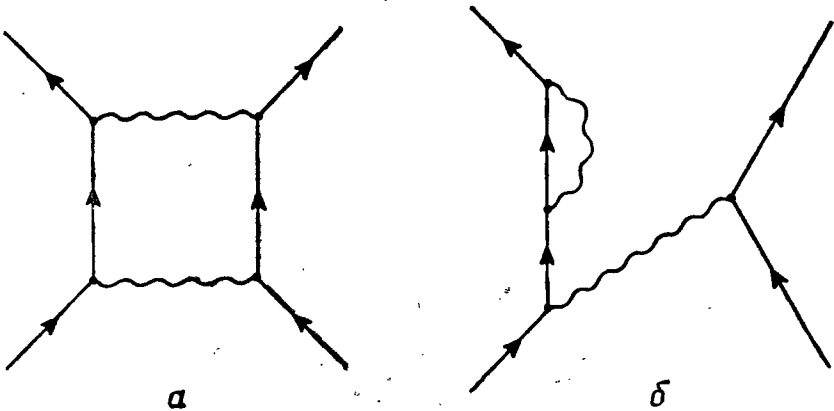
$$K_+^{(2)'}(x_3, x_4; x_1, x_2) = \frac{(\Phi_0, T(S\psi(x_3)\psi(x_4)\tilde{\psi}(x_1)\tilde{\psi}(x_2))\Phi_0)}{(\Phi_0, S\Phi_0)} = (\Psi_0, T(\psi(x_3)\psi(x_4)\tilde{\psi}(x_1)\tilde{\psi}(x_2))\Psi_0). \quad (17.314)$$

Разложение выражения (17.314) в ряд показывает, что

$$K_+^{(2)'}(x_3, x_4; x_1, x_2) = K_+(x_3-x_1)K_+(x_4-x_2) - K_+(x_4-x_1)K_+(x_3-x_2) - \frac{e^2}{2} \int d^4x' \int d^4x'' K_+(x_3-x')\gamma^\mu K_+(x'-x_1)D_F(x'-x'') \times K_+(x_4-x'')\gamma_\mu K_+(x''-x_2) - (\text{Обменный член с } x_3 \leftrightarrow x_4) + \dots \quad (17.315)$$

Этот ряд можно представить с помощью диаграмм фиг. 141.

Солпитер и Бете [696] проанализировали структуру ряда (17.315) аналогично тому, как это было описано в гл. 16. Они назвали диаграмму приводимой, если ее можно разделить на две несвязанные части

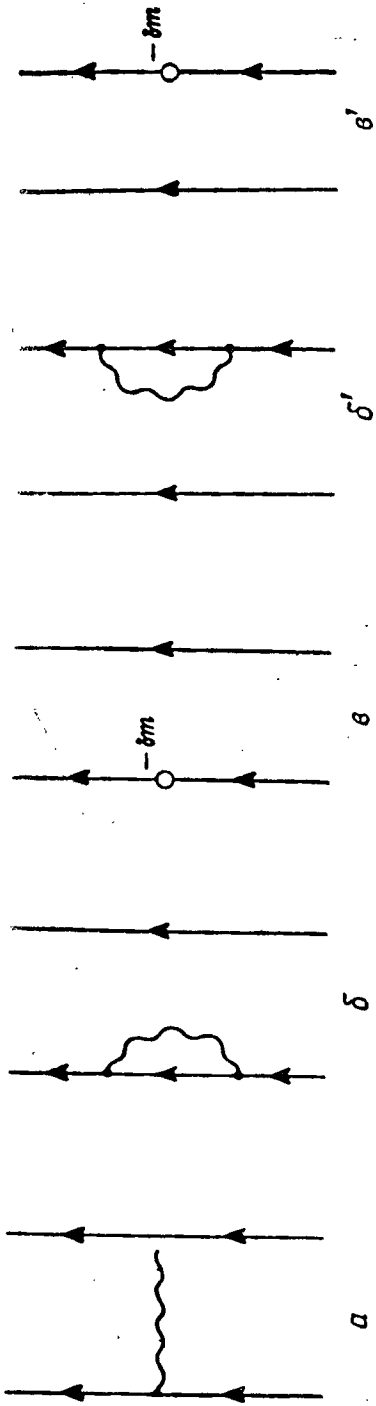


Ф и г. 142.

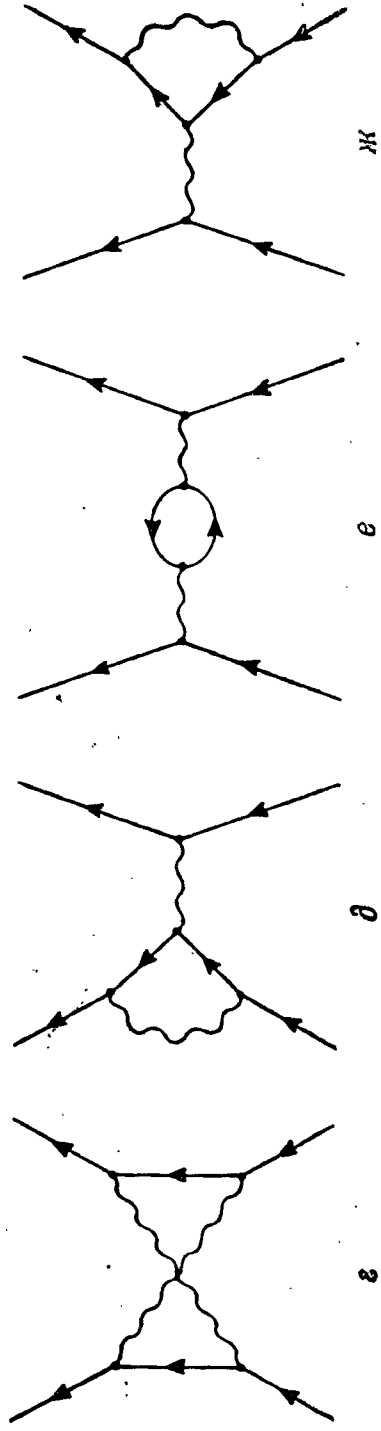
линией, которая не пересекает бозонных линий, а каждую из фермионных пересекает лишь один раз. Примеры таких приводимых диаграмм *a* и *б* даны на фиг. 142. Неприводимые диаграммы до четвертого порядка включительно изображены на фиг. 143. Ясно, что приводимые диаграммы всегда можно разбить на неприводимые части. Кроме того, неприводимые диаграммы можно упорядочить по степеням константы связи в соответствующих матричных элементах.

Если обозначить через $\sum_m G^{(m)}(x_1, x_2; x_3, x_4) = G(x_1, x_2; x_3, x_4)$ сумму всех выражений, соответствующих неприводимым диаграммам, то двухчастичную функцию распространения $K_+^{(2)'}(x_3, x_4; x_1, x_2)$ (опуская обмен-

Диаграммы второго порядка



Диаграммы четвертого порядка

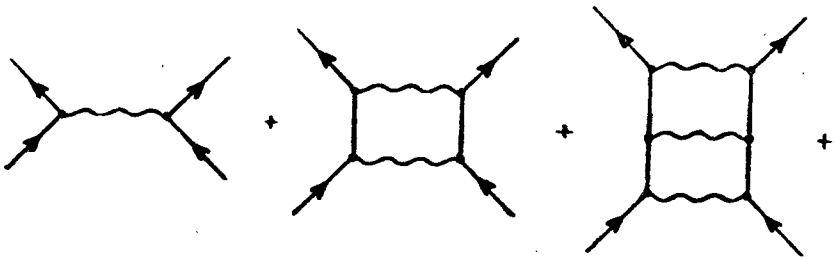


ный член) можно записать в следующем виде [696]:

$$\begin{aligned}
 & K_+^{(2)'}(x_3, x_4; x_1, x_2) - K_+'(x_3 - x_1) K_+'(x_4 - x_2) = \\
 & = i \int \int \int \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 K_+'(x_3 - x_5) K_+'(x_4 - x_6) \times \\
 & \times \sum_{(m)} G^{(m)}(x_5, x_6; x_7, x_8) K_+^{(2)'}(x_7, x_8; x_1, x_2). \quad (17.316)
 \end{aligned}$$

Хотя это интегральное уравнение и содержит бесконечный ряд $\sum_{(m)} G^{(m)}$, ясно, что в нем меньше членов, чем в разложении (17.315)¹⁾.

Если итерировать уравнение (17.316), то становится очевидным, что приводимые диаграммы уже учтены в интегральном уравнении. И действительно, итерации дают в точности все члены разложения в ряд



Ф и г. 144.

равенства (17.314). Нужно также отметить, что при записи в виде (17.316) можно не рассматривать все фермионные собственно-энергетические части, так как они уже учтены тем, что каждой фермионной линии в $G^{(m)}$ соответствует множитель $-\frac{1}{2}S'_F = K_+'$. Тот факт, что все приводимые диаграммы уже включены в (17.316), может быть бесспорным преимуществом для теорий, в которых константа связи мала, при этом $\sum_{(m)} G^{(m)}$ можно рассматривать как асимптотический ряд. Например, большая часть энергии связи между протоном и электроном обусловлена повторяющимся действием диаграммы на фиг. 143,а, т. е. диаграммами, показанными на фиг. 144. При этом преимущество, которое получается при использовании уравнения (17.316) с ядром $G^{(2)}$, эквивалентно тому, которое мы имеем, когда решаем уравнение Шредингера с потенциалом, а не рассматриваем потенциал как возмущение.

В электродинамике функция взаимодействия $G^{(2)}$ в низшем порядке по e дается выражением

$$G^{(2)}(x_5, x_6; x_7, x_8) = e^2 D_F(x_5 - x_6) \delta^{(4)}(x_5 - x_7) \delta^{(4)}(x_6 - x_8) \gamma_a^\mu \gamma_{b\mu}, \quad (17.317a)$$

где значки a, b относятся к двум фермионам, которые здесь предполагаются различимыми. В этом приближении, которое известно как «лестничное» приближение (так как оно учитывает все диаграммы такого

1) Существуют указания, что этот ряд не сходится [384], если только между матричными элементами, соответствующими неприводимым диаграммам данного порядка, не происходит существенных сокращений.

вида, как на фиг. 144), функция распространения получается как решение интегрального уравнения

$$K'_{+(l)}(x_1, x_2; y_1, y_2) = \frac{1}{4} S_F(x_1 - y_1) S_F(x_2 - y_2) + \frac{1}{2} \pi \alpha \int d^4 x_3 \int d^4 x_4 \times \\ \times S_F(x_1 - x_3) S_F(x_2 - x_4) \gamma_\mu^{(1)} \gamma^{(2)\mu} D_F(x_3 - x_4) K'_{+(l)}(x_3, x_4; y_1, y_2), \quad (17.3176)$$

где для простоты частицы опять считаются различными.

Связь функции распространения $K'_+(x_1, x_2; x_3, x_4)$ со свойствами стационарных состояний системы полей была установлена Гелл-Манном и Лоу [301] и Иденом [209]. Обозначим собственные состояния оператора энергии-импульса системы через $|p, \alpha\rangle$. Если теория допускает связанные состояния двух фермионов, то эти связанные состояния будут характеризоваться, в частности, их энергией связи или массой покоя $M^{(\alpha)}$, т. е. если $p_\mu^{(\alpha)}$ — вектор полной энергии-импульса связанной системы, то $p_\mu^{(\alpha)} p^{(\alpha)\mu} = M^{(\alpha)2}$. Далее, когда $t_1, t_2 > t_3, t_4$,

$$T(\psi(x_1)\psi(x_2)\tilde{\psi}(x_3)\tilde{\psi}(x_4)) = T(\psi(x_1)\psi(x_2))T(\tilde{\psi}(x_3)\tilde{\psi}(x_4)), \quad (17.318)$$

и поскольку предполагается, что набор состояний $|p, \alpha\rangle$ является полным, то двухчастичную функцию распространения можно записать следующим образом:

$$K'_+(x_1, x_2; x_3, x_4) = \sum_{|p, \alpha\rangle} \langle \Psi_0 | T(\psi(x_1)\psi(x_2)) | p, \alpha \rangle \langle p, \alpha | T(\tilde{\psi}(x_3)\tilde{\psi}(x_4)) | \Psi_0 \rangle = \\ = \sum_{p, \alpha} \chi_{p\alpha}(x_1, x_2) \chi_{p\alpha}^\dagger(x_3, x_4), \quad (17.319)$$

где

$$\chi_{p\alpha}(x_1, x_2) = \langle \Psi_0 | T(\psi(x_1)\psi(x_2)) | p, \alpha \rangle \quad (17.320a)$$

и

$$\chi_{p\alpha}^\dagger(x_3, x_4) = \langle p, \alpha | T(\tilde{\psi}(x_3)\tilde{\psi}(x_4)) | \Psi_0 \rangle = \\ = \overline{\langle \Psi_0, T^\dagger(\tilde{\psi}(x_3)\tilde{\psi}(x_4)) | p, \alpha \rangle} \gamma^0 \gamma^0. \quad (17.320b)$$

В равенстве (17.320b) T^\dagger означает антихронологическое упорядочивание операторов, т. е. операторы, относящиеся к более поздним моментам времени, должны стоять справа от операторов, соответствующих предшествующим моментам времени.

Установим теперь те свойства функции $\chi_{p\alpha}(x_1, x_2)$, которые вытекают из трансляционной инвариантности теории. Поскольку при сдвиге на величину a

$$U(a) | p, \alpha \rangle = e^{iP \cdot a} | p, \alpha \rangle = e^{ip \cdot a} | p, \alpha \rangle, \quad (17.321)$$

получаем

$$\chi_{p\alpha}(x_1, x_2) = \langle \Psi_0 | e^{-iP \cdot a} e^{iP \cdot a} T(\psi(x_1)\psi(x_2)) e^{-iP \cdot a} e^{iP \cdot a} | p, \alpha \rangle = \\ = \langle \Psi_0 | T(\psi(x_1+a)\psi(x_2+a)) | p, \alpha \rangle e^{ip \cdot a} = \\ = e^{ip \cdot a} \chi_{p\alpha}(x_1+a, x_2+a). \quad (17.322)$$

Равенство (17.322) справедливо при любых пространственно-временных сдвигах и, в частности, при $a = -X$, где

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

X — координата центра масс. При таком выборе a функцию $\chi_{p\alpha}(x_1, x_2)$ можно записать в виде

$$\chi_{p\alpha}(x_1, x_2) = e^{-ip \cdot X} f_{p\alpha}(x_1 - x_2). \quad (17.323)$$

Здесь зависимость $\chi_{p\alpha}(x_1, x_2)$ от координаты центра масс (e^{-ipX}) и зависимость от относительной координаты $x_1 - x_2$ ($f_{p\alpha}(x_1 - x_2)$) разделены. Отметим, что при изменении p меняется и $f_{p\alpha}(x_1 - x_2)$.

Если рассматриваемая система полей допускает существование двух-фермионного (может быть, вырожденного) связанного состояния $|p, b\rangle$ с массой M_b , тогда, выделив в равенстве (17.319) вклад от этих состояний, функцию распространения при $X_0 > Y_0$ можно представить в виде

$$K'_+(x_1, x_2; y_1, y_2) = \sum_b \int d^4p e^{-ip(X-Y)} \delta(p^2 - \tilde{M}_b^2) \theta(p_0) f_{pb}(x) f_{pb}^\dagger(y) + \\ + \sum_{\alpha \neq b} \int d^4p \chi_{p\alpha}(x_1, x_2) \chi_{p\alpha}^\dagger(y_1, y_2). \quad (17.324)$$

Суммирование по b в первом члене идет по всем вырожденным состояниям с массой M_b . Равенство (17.324) при $X_0 > Y_0$ позволяет написать

$$K'_+(x_1, x_2; y_1, y_2) = \\ = \frac{1}{2} \int d^3p e^{ip \cdot (X-Y)} \int_0^\infty \frac{dp_0}{p_0} e^{-ip_0(X_0-Y_0)} \delta(p_0 - \sqrt{p^2 + M_b^2}) \times \\ \times \sum_b f_{pb}(x) f_{pb}^\dagger(y) + \text{Члены, регулярные при } p_0 = \sqrt{p^2 + M_b^2}. \quad (17.325)$$

Отметим, что хотя $f_{pb}(x)$ и изменяется, когда p принимает различные значения, при которых $p^2 = M_b^2$, все же если функция f_{pb} известна при одном значении p , то ее можно получить и для любых других значений p из соображений лоренц-ковариантности теории. Поэтому обычно удобно выбирать для представления состояний амплитуду f_{pb} при $p = 0$. Тогда состояния в случае вырождения можно классифицировать по собственным значениям оператора момента количества движения. Отметим также, что при фиксированных относительных координатах состояния $|p, b\rangle$ не дает вклада в $K'_+(x_1, x_2; y_1, y_2)$ при $Y_0 > X_0$, так как матричный элемент $\langle \Psi_0 | T(\tilde{\psi}(x_1) \tilde{\psi}(x_2)) | p, b \rangle$ равен нулю в силу законов сохранения (например, из-за сохранения заряда или числа барионов). Следовательно, зависимость функции распространения от $X - Y$ (при произвольных X_0, Y_0) можно выразить формулой

$$K'_+(X - Y; x, y) = \sum_b \int d^4p e^{-ip(X-Y)} \frac{f_{pb}(x) f_{pb}^\dagger(y)}{p_0 - \sqrt{p^2 + (M_b - i\epsilon)^2}} + \\ + \text{Члены, регулярные при } p_0 = \sqrt{p^2 + M_b^2}. \quad (17.326)$$

Подставим теперь выражение (17.326) для K'_+ в уравнение (17.316). Но прежде заметим, что уравнение (17.316), которое сокращенно можно представить как $K'_+ = K_0 + K_0 G K'_+$, в силу трансляционной инвариантности теории записывается в виде

$$\int d^4p e^{-ip \cdot (X-Y)} K'_+(p; x, y) = \\ = \int d^4p e^{-ip(X-Y)} \{K_0(p; x, y) + (K_0 G K'_+)(p; x, y)\}. \quad (17.327)$$

Интегрирование по d^4p можно опустить. Если получившееся выражение умножить на $p_0 - \sqrt{p^2 + M_b^2}$ и перейти к пределу при $p_0 \rightarrow \sqrt{p^2 + M_b^2}$, то неоднородный член $K_0(p; x, y)$ и части функции распространения, не имеющие особенности при $p_0 = \sqrt{p^2 + M_b^2}$, выпадают, так что $\chi_{pb}(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\chi_{pb}(x_1, x_2) = -i \int d^4x_5 \int d^4x_6 \int d^4x_7 \int d^4x_8 \times \\ \times K'_+(x_1 - x_5) K'_+(x_2 - x_6) G(x_5, x_6; x_7, x_8) \chi_{pb}(x_7, x_8). \quad (17.328)$$

Именно это уравнение получили Солпитер и Бете, используя несколько более интуитивные аргументы, основанные на адиабатическом включении взаимодействия. В случае задачи рассеяния левая часть (17.328) заменяется на $\chi_{pa}(x_1, x_2) - \Phi_{pa}(x_1, x_2)$, где Φ_{pa} — произведение двух дираковских волновых функций для свободных частиц. Функцию Φ_{pa} можно рассматривать как падающую плоскую волну.

Можно получить дифференциальное уравнение, применимое и к рассеянию, и к рассмотрению свойств связанных состояний. Для этого вспомним, что $K'_+ = -\frac{1}{2} S'_F$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{1}{2} S'_F(x - x') = -\frac{1}{2} S_F(x - x') + \\ + \int d^4y \int d^4y' \frac{1}{2} S_F(x - y) \Sigma^*(y - y') \frac{1}{2} S'_F(y' - x'). \quad (17.329)$$

Поддействовав оператором Дирака на (17.329), получаем

$$(-i\gamma_\mu \partial^\mu + m) S'_F(x - x') = 2i\delta^{(4)}(x - x') + \int d^4y \Sigma^*(x - y) \frac{1}{2} S_F(y - x'). \quad (17.330)$$

Применим теперь к уравнению (17.328) дифференциальные операторы $-i\gamma_\mu \partial^\mu + m$ для каждой из частиц. Тогда имеем

$$\left(-i\gamma^{a\mu} \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} + m_a\right) \left(-i\gamma^{b\mu} \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} + m_b\right) \chi_{pa}(x_1, x_2) = \\ = - \int d^4x_7 \int d^4x_8 G(x_1, x_2; x_7, x_8) \chi_{pa}(x_7, x_8) - \\ - i \int d^4x_5 \int d^4x_6 \int d^4x_7 \int d^4x_8 \int d^4y \int d^4y' \times \\ \times \left[\Sigma^*(x_1 - y) \frac{1}{2} S'_F(y - x_5) \right]_a \left[\Sigma^*(x_2 - y') \frac{1}{2} S'_F(y' - x_6) \right]_b \times \\ \times G(x_5, x_6; x_7, x_8) \chi_{pa}(x_7, x_8). \quad (17.331)$$

Если опустить части собственной энергии фермиона, то уравнение (17.331) принимает особенно простой вид, так как последний член в правой части исчезает. Если к тому же ограничиться взаимодействием в низшем порядке, т. е. лестничным приближением, то амплитуда χ_{pa} будет удовлетворять уравнению

$$(-i\gamma \cdot \partial_1 + m)_a (-i\gamma \cdot \partial_2 + m)_b \chi_{pa}(x_1, x_2) = \\ = -ie^2 \gamma^{a\mu} D_F(x_1 - x_2) \gamma_\mu^b \chi_{pa}(x_1, x_2). \quad (17.332)$$

Достигнутый существенный прогресс заключается в том, что уравнение (17.328) есть полностью релятивистское волновое уравнение для

системы двух частиц. Кроме того, это уравнение позволяет применить к вычислению энергии связи связанного состояния метод диаграмм Фейнмана и Дайсона и их рецепты перенормировки. Однако это достигнуто некоторой ценой, связанной с физической интерпретацией амплитуды. В частности, не имеет непосредственного физического толкования зависимость амплитуды от относительного времени $x_{10} - x_{20}$.

Вик [848] и Куткоский [147] достигли существенного успеха в выяснении этих непривычных черт уравнения Бете—Солпитера. Вик указал, что из определения (16.322) амплитуды Бете—Солпитера и простых требований стабильности получается дополнительное условие для амплитуды. Здесь мы кратко изложим аргументацию Вика для случая атома водорода.

Из формулы (17.323) следует, что если система находится в покое, т. е. $p^{(\alpha)} = 0$, то двухчастичная амплитуда $\chi_{pa}(x_1, x_2)$ имеет вид

$$\chi_{pa}(x_1, x_2) = e^{-iET} f_{pa}(x), \quad (17.333)$$

где E — полная энергия системы; T — временная координата центра масс; x — относительная координата двух частиц, $x = x_1 - x_2$. Введем теперь энергию связи B рассматриваемого связанного состояния $E = m_e + M_p - B$ и заметим, что

$$E = m_e + M_p - B < m_e + M_p; \quad (17.334)$$

здесь m_e и M_p — массы электрона и протона.

Если в равенство (17.320а), определяющее $\chi_{pa}(x_1, x_2)$, ввести полный набор состояний, то при $x_{10} > x_{20}$ получим

$$\chi_{pa}(x_1, x_2) = \sum_{|n\rangle} \langle \Psi_0 | \Psi_e(x_1) | n \rangle \langle n | \Psi_p(x_2) | p \alpha \rangle. \quad (17.335)$$

Состояния $|n\rangle$, дающие не равный нулю вклад в χ_{pa} , принадлежат к особому классу состояний. Ясно, что они должны быть собственными функциями оператора полного заряда с собственным значением $-e$. Далее, в системе координат, где полный импульс равен нулю, они должны быть собственными функциями оператора полного момента количества движения с собственным значением $-1/2 \hbar$. Все известные в природе состояния с полным зарядом $-e$ и моментом количества движения в системе покоя, равным $1/2 \hbar$, удовлетворяют условию

$$E_n^2 - p_n^2 \geq m_e^2, \quad (17.336a)$$

где E_n и p_n — полная энергия и полный импульс состояния $|n\rangle$. Знак равенства имеет место лишь для физического одноэлектронного состояния, т. е. для состояния, в котором есть один и только один физический электрон. Приведенное неравенство Вик называет условием стабильности для электрона. Затем он предполагает, что физическое одноэлектронное состояние [для которого в соотношении (17.336a) нужно брать знак равенства] обладает наименьшей энергией среди всех состояний, дающих вклад в сумму (17.335).

Аналогичным образом получаем, что состояния $|n'\rangle$, которые дают вклад в амплитуду при отрицательном относительном времени x_0 , характеризуются, в частности, такими собственными значениями энергии и импульса, что

$$E_{n'}^2 - p_{n'}^2 \geq M_p^2. \quad (17.336b)$$

Это соотношение Вика называют условием стабильности для протона. Три неравенства (17.334), (17.336а) и (17.336б) служат основой для последующего обсуждения. Из (17.335) и (17.323) легко установить, что $f_{p\alpha}(x)$ при $x_0 > 0$ имеет следующую структуру:

$$f_{p\alpha}(x) = \sum_{|n\rangle} \langle \Psi_0 | \psi_e(0) | n \rangle \langle n | \psi_p(0) | p, \alpha \rangle e^{-i\left(p^{(n)} - \frac{m_e}{M_p + m_e} p\right) \cdot x}, \quad (17.337)$$

где p — вектор энергии-импульса состояния $|p, \alpha\rangle$. Используя неравенства (17.334), (17.336а) и (17.336б), находим

$$p^{(n)0} - \frac{m_e}{m_e + M_p} p^0 \geq \frac{m_e}{M_p + m_e} B > 0. \quad (17.338)$$

Отсюда вытекает, что при $x_0 > 0$ амплитуда $f_{p\alpha}(x)$ содержит только положительные частоты. Таким же образом следует, что при $x_0 < 0$ $f_{p\alpha}(x)$ является суперпозицией членов только с отрицательными частотами. Поэтому $f_{p\alpha}(x)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам фейнмановской функции распространения.

Итак, при $x_0 > 0$ можно написать

$$f_{p\alpha}(x) = \int d^3q \int_{\omega_{\min}}^{\infty} d\omega g_{p\alpha}(q, \omega) e^{i(q \cdot x - \omega x_0)}, \quad (17.339)$$

где

$$\omega_{\min} = \frac{m_e}{m_e + M_p} B + (m_e^2 + p^2)^{1/2} - m_e. \quad (17.340)$$

Рассматривая $f_{p\alpha}(x)$ как функцию комплексного переменного x_0 , можно аналитически продолжить ее в нижнюю полуплоскость, в область $0 \geq \arg x_0 > -\pi$. Аналогично, отправляясь от $f_{p\alpha}(x)$ на действительной отрицательной оси, можно продолжить эту функцию в верхнюю полуплоскость, в область $\pi \geq \arg x_0 > 0$. Кроме того, поскольку $B > 0$, $f_{p\alpha}(x)$ стремится к нулю, когда $x_0 \rightarrow \infty$ в верхней или нижней полуплоскости по любому направлению, не совпадающему с действительной осью.

Если записать $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = 0$ при $x_0 < 0$, а $f_2(x) = 0$ при $x_0 > 0$, тогда, вводя в импульсном пространстве функции

$$\Phi_1(q, q_0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3x e^{-iq \cdot x} \int_0^{\infty} dx_0 e^{iq_0 x_0} f(x), \quad (17.341)$$

$$\Phi_2(q, q_0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3x e^{-iq \cdot x} \int_{-\infty}^0 dx_0 e^{iq_0 x_0} f(x) \quad (17.342)$$

и используя (17.338), легко получить

$$\Phi_1(q, q_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_{\min}}^{\infty} \frac{g(q, \omega)}{\omega - q_0 - i\epsilon} d\omega, \quad (17.343)$$

где ϵ — бесконечно малая положительная добавка. Из этого представления следует, что $\Phi_1(q, q_0)$ — аналитическая функция в комплексной плоскости q_0 при условии

$$2\pi > \arg(q_0 - \omega_{\min}) \geq 0. \quad (17.344)$$

Аналогичные утверждения справедливы и для φ_2 . Можно показать, что функция $\varphi(q) = \varphi(\mathbf{q}, q_0) = \varphi_1(q) + \varphi_2(q)$ определена в комплексной плоскости переменной q_0 с двумя разрезами, идущими от ω_{\min} до $+\infty$ и от $-\infty$ до ω_{\max} , где

$$-\omega_{\max} = \frac{M_p}{M_p + m_e} B + (M_p^2 + p^2)^{1/2} - M_p. \quad (17.345)$$

Поэтому функцию φ можно аналитически продолжить через промежуток между разрезами из верхней полуплоскости в нижнюю. Существование этого промежутка связано с тем, что $B > 0$.

Указанные аналитические свойства волновых функций можно использовать, чтобы, повернув путь интегрирования в комплексной плоскости, преобразовать уравнение Бете — Солпитера в уравнение с чисто мнимой переменной q_0 (или чисто мнимым относительным временем). Тогда можно оперировать в евклидовом пространстве, в результате чего достигаются значительные математические упрощения. Кеммер и Салам [440] показали, что такое аналитическое продолжение возможно и в случае переменной двухчастичного уравнения к задачам рассеяния. Используя переход к евклидову пространству в уравнении Бете — Солпитера, записанном в лестничном приближении для случая двух скалярных бозонов, взаимодействующих через скалярные фотоны, Вик и Кутковский сумели получить полный набор решений, соответствующих связанным состояниям. Для анализа этих вопросов читатель отсылается к их статьям (см. также [359, 330, 701, 702, 337]).

Существует обширная литература, в которой рассматриваются свойства уравнения Бете — Солпитера и применения этого уравнения к задачам двух тел. Здесь мы лишь упомянем, что Манделстам [530] показал, как матричные элементы любой динамической переменной между двумя связанными состояниями выражаются через амплитуды Бете — Солпитера. Полученные результаты позволили ему найти нормировку и свойства ортогональности для этих амплитуд, что в свою очередь ведет к условиям, которые должны быть наложены на особенности амплитуд в начале координат (при $x = 0$) (см. также [578, 580] и [5, 6]).

Солпитер [697, 698] и Арновит [882] использовали уравнение Бете — Солпитера для расчета массовых поправок к тонкой и сверхтонкой структуре атома водорода (см. также [898]). Карплус и Клейн [427] и Фултон и Мартин [290] применили это уравнение к описанию атома позитрония. Работы Идена [207—212], который обобщил уравнение Бете — Солпитера, чтобы учесть возможность распада из возбужденного состояния, позволяют в этих рамках вычислять времена жизни возбужденных состояний.

Леви [497, 498], Клейн [446, 447] и Макке [523] положили начало применению ковариантного двухчастичного уравнения к проблеме ядерных сил. Литературу по этой теме можно проследить по статье Клейна и Мак-Кормика [452].

Аксиоматическая формулировка

Введение

Применение методов теории возмущений и изучение простых моделей позволили пролить свет на структуру квантовой теории поля. Основываясь на предположении о релятивистской инвариантности теории и на спектральных условиях, удалось выяснить некоторые общие свойства релятивистских теорий поля. Несмотря на все эти успехи, не удалось дать сколь угодно убедительный ответ на главный вопрос релятивистской квантовой теории: существуют ли решения перенормированных уравнений квантовой электродинамики или мезонных теорий? Даже если бы уравнения были существенно более простыми, то и тогда вряд ли можно было бы ответить на этот вопрос, так как метод перенормировок почти целиком выходит за рамки традиционной математики. Поэтому фактически нет никаких оснований считать правильным изложенный в предыдущих главах современный способ описания взаимодействий между элементарными частицами при помощи понятий локальной релятивистской теории поля.

Отсутствие убедительных и математически строгих доказательств для многих результатов, полученных в рамках рассматривавшейся нами до сих пор формулировки теории поля, побудило в последние годы предпринять ряд важных исследований по общей структуре локальной теории поля. В настоящей главе мы изложим в общих чертах некоторые из этих исследований, главным образом работы Уайтмана [852] и Лемана, Симанзика и Циммермана [491, 493]. Обе формулировки основываются на некоторых общих постулатах, таких, как лоренц-инвариантность, спектральные условия и локальность, причем такое понятие, как лагранжиан (или гамилтониан), не используется. Для этого подхода характерно, что вообще не делается никаких предположений о виде уравнений поля или взаимодействий. Главная цель этих исследований — выяснить, существуют ли в принципе какие-либо локальные релятивистские теории поля. Для этого изучают те свойства наблюдаемых величин, которые следуют из предположения о локальности теории, т. е. из предположения об обращении в нуль коммутатора (для полей с целым спином) или антикоммутатора (для полей с полуцелым спином) двух локальных операторов поля, когда их пространственно-временные аргументы разделяет пространственно-подобный интервал.

Во всех проведенных исследованиях делались следующие предположения о свойствах теории (в качестве которой обычно для простоты берется теория нейтрального скалярного поля):

I. В теории справедливы обычные постулаты квантовой механики, т. е. состояния любой системы представляются векторами в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} , а наблюдаемые системы могут быть представлены самосопряженными операторами в \mathfrak{H} .

II. Теория инвариантна относительно неоднородных преобразований Лоренца.

III. Спектр оператора 4-импульса имеет разумную структуру.

Предположение о лоренц-инвариантности подразумевает существование представления ортохронной неоднородной группы Лоренца унитарными операторами $U(a, \Lambda)$, при котором пространство \mathfrak{H} унитарно. Отсюда следует, что существуют эрмитовы операторы¹⁾ сдвига P_μ со свойствами

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (18.1a)$$

$$[P_\mu, F(x)] = i\partial_\mu F(x), \quad (18.16)$$

где $F(x)$ — любой гейзенберговский оператор, не зависящий явно от пространственно-временных координат. В представлении, в котором операторы P_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) диагональны, а гильбертово пространство \mathfrak{H} натягивается на базисные векторы $|p, \alpha\rangle$

$$P_\mu |p, \alpha\rangle = p_\mu |p, \alpha\rangle, \quad (18.2)$$

постулат III может быть сформулирован точно. Он гласит:

III (a). Существует единственное инвариантное состояние — вакуум $|\Psi_0\rangle$, характеризующееся тем, что

$$U(a, \Lambda) |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle. \quad (18.3a)$$

III (б). Для всех остальных состояний $|p, \alpha\rangle$ собственные значения p_μ являются времени-подобными или изотропными с положительной временной компонентой p_0 .

Из (18.3a), рассматривая бесконечно малое преобразование, можно вывести

$$P_\mu |\Psi_0\rangle = M_{\mu\nu} |\Psi_0\rangle = 0. \quad (18.3б)$$

Наконец, в этих исследованиях также обычно предполагают, что

IV. Теория локальна, т. е. полевая наблюдаемая в точке x коммутирует с полевой наблюдаемой в точке x' , если точки x и x' разделены пространственно-подобным интервалом $(x - x')^2 < 0$.

Для определенности возьмем теорию нейтрального скалярного поля, описываемого с помощью оператора поля $\varphi(x)$, который при преобразованиях неоднородной группы Лоренца преобразуется как скаляр

$$\varphi^*(x) = \varphi(x), \quad (18.4)$$

$$U(a, \Lambda) \varphi(x) U^{-1}(a, \Lambda) = \varphi(\Lambda x + a). \quad (18.5)$$

Тогда постулат IV означает, что

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = 0 \quad \text{при } (x - x')^2 < 0. \quad (18.6)$$

Это требование, иногда называемое принципом микропричинности, есть математическое выражение факта, что точки, разделенные простран-

¹⁾ В настоящей главе мы будем иметь дело исключительно с перенормированными гейзенберговскими операторами и векторами состояния. Поэтому обозначение их при помощи светлых символов не приведет к недоразумению.

ственно-подобным интервалом, не могут обмениваться никакими сигналами, и, следовательно, измерения в этих точках не могут интерферировать. Вопрос о том, можно ли объяснить свойства и взаимодействия физических частиц, описывая их при помощи локальных операторов, в настоящее время остается открытым. В § 4 мы подробно разберем следствия условия локальности, касающиеся аналитического поведения амплитуд рассеяния.

Теперь мы дадим краткое изложение формулировок теории поля Уайтмана и Лемана, Симанзика и Циммермана (ЛСЦ). Подходы Уайтмана [852] и ЛСЦ [491, 493] отличаются тем, что Уайтман исследует теорию с помощью средних по вакууму от произведений операторов, тогда как ЛСЦ проводят свой анализ при помощи средних по вакууму либо от хронологически упорядоченных произведений операторов [491], либо от запаздывающих произведений операторов [493]. Аксиомы теории, главным образом аксиомы релятивистской инвариантности, спектральности и локальности, могут быть выражены как некоторые свойства этих средних по вакууму и как некоторые соотношения между ними. Точнее говоря, если теория анализируется при помощи средних по вакууму или от произведений операторов поля (функции Уайтмана), или от запаздывающих произведений операторов поля (r -функции), то требования релятивистской инвариантности и локальности, а также условия спектральности выражаются линейными соотношениями для этих функций. С другой стороны, соотношения неотрицательности для функций Уайтмана и условие унитарности для r -функций являются нелинейными соотношениями между этими функциями. Это деление теории на линейную и нелинейную части является важной чертой аксиоматического подхода. В противоположность лагранжеву подходу, когда любая линейная теория тривиальна, а любая представляющая интерес теория неизбежно имеет нелинейные уравнения поля, сложность которых препятствует каким-либо строгим заключениям о свойствах их решений, при аксиоматическом подходе линейные соотношения имеют нетривиальное содержание.

В первых двух параграфах мы дадим очерк этих формулировок. В § 3 рассматривается представление Дайсона — Йоста — Лемана для матричного элемента причинного коммутатора. Это представление позволит нам в § 4 обсудить аналитические свойства двухчастичной амплитуды для упругого рассеяния и ввести понятие дисперсионных соотношений. В § 5 мы попытаемся подвести итоги и наметить перспективы дальнейшего развития теории.

§ 1. Формулировка Уайтмана

Один из наиболее важных результатов аксиоматической формулировки принадлежит Уайтману [852], который показал, что теория поля может быть переформулирована в терминах средних по вакууму от произведений операторов поля

$$W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\Psi_0, \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) \Psi_0). \quad (18.7)$$

Свойства функций Уайтмана $W^{(n)}$ прямо связаны с перечисленными выше постулатами I — IV. Этим функциям можно придать точный математический смысл, и их можно изучать строгим и лишенным какого-либо произвола образом. Важное значение функций обусловлено тем, что, как показал Уайтман, задавая последовательность функций $W^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих некоторым определенным условиям,

можно восстановить теорию поля, для которой $W^{(n)}$ будут средними по вакууму. Поэтому при изучении релятивистских теорий поля можно ограничиться рассмотрением только этих средних по вакууму. Мы здесь кратко изложим программу Уайтмана для случая нейтрального скалярного поля $\varphi(x)$, взаимодействующего с самим собой. Хотя наше рассмотрение будет касаться только скалярного поля со спином 0, однако метод легко обобщить на случай произвольных полей. То же самое относится и к выводу Уайтмана, что теория однозначно определяется своими средними по вакууму.

Функции Уайтмана определяются, согласно (18.7), как средние по вакууму от произведений операторов поля. Эти функции следует понимать как линейные функционалы¹⁾, которые каждой бесконечно дифференцируемой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, равной нулю вне ограниченной области $4n$ -мерного пространственно-временного континуума, ставят в соответствие комплексное число

$$W^{(n)}[f] = \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n).$$

Это можно рассматривать как математическое отражение того факта, что наблюдаемыми являются только средние по некоторой области пространства-времени от оператора поля $\varphi(x)$, т. е. только операторы вида

$$\varphi(f) = \int d^4x f(x) \varphi(x). \quad (18.8)$$

В качестве класса функций $f(x)$ (обычно называемых основными функциями), на котором предполагаются определенными функционалы $\varphi(f)$, берется класс \mathcal{D} всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным пространственно-временным носителем²⁾ (что отражает возможность проведения измерений поля в конечных пространственно-временных областях). Тогда величина $W_{\Psi}[f] = (\Psi, \varphi(f) \Psi)$ является линейным функционалом относительно f . Чтобы придать функционалу $W_{\Psi}[f]$ более строгий математический смысл, требуют далее, чтобы $W_{\Psi}[f_n] \rightarrow 0$, если последовательность основных функций $\{f_n\}$ сходится к нулю. О последовательности говорят, что она сходится к нулю, если носители всех функций f_n содержатся внутри компактного множества и если функции f_n , а также их производные равномерно сходятся к нулю³⁾. Линейный функционал T на \mathcal{D} , который обладает указанным выше свойством непрерывности, когда $T[f_n]$ сходится к нулю для любой сходящейся к нулю последовательности $\{f_n\}$, называют обобщенной функцией (см. книгу Шварца [707] и статью Гёрдинга и Лайонса [294]). Таким образом, среднее

$$W_{\Psi}[f] = (\Psi, \varphi(f) \Psi) \quad (18.9)$$

1) Функционал T на некотором пространстве \mathcal{S} есть операция, которая каждому элементу f из \mathcal{S} ставит в соответствие комплексное число, обозначаемое $T[f]$. Функционал на \mathcal{S} называют линейным, если

а) $T[f_1 + f_2] = T[f_1] + T[f_2]$ для f_1 и f_2 из \mathcal{S} ,

б) $T[af] = aT[f]$ для всех f из \mathcal{S} и каждого комплексного числа a .

2) Носитель для f есть дополнение (замыкание) наибольшего открытого множества, на котором f равна нулю, т. е. в сущности оно является множеством, на котором f отлична от нуля. Для наших целей под компактным множеством достаточно понимать замкнутое и ограниченное множество.

3) Равномерная сходимость требуется только для производных любого фиксированного порядка, но не всех порядков сразу.

есть обобщенная функция на пространстве \mathcal{D} всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Более того, n -точечное среднее по вакууму

$$W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (\Psi_0, \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \Psi_0) \quad (18.10)$$

является обобщенной функцией в отдельности по каждой переменной x_i :

$$W^{(n)}[f_1, \dots, f_n] = (\Psi_0, \varphi(f_1) \dots \varphi(f_n) \Psi_0). \quad (18.11)$$

Она обладает единственным продолжением, превращающим ее в обобщенную функцию во всем пространстве $4n$ измерений. Таким образом, символу $W^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ придается точный смысл при помощи бесконечно дифференцируемых основных функций $f(x_1, \dots, x_n)$, равных нулю вне ограниченной области $4n$ -мерного пространства. Хотя с достаточной строгостью определены только обобщенные функции $W^{(n)}[f_1, \dots, f_n]$, или более обще, $W^{(n)}[f]$, тем не менее мы будем продолжать работать с функциями Уайтмана $W^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$. Более строгое рассмотрение читатель может найти в других работах Уайтмана [853, 854] (см. также статьи Шмидта и Баумана [704] и Гёрдинга и Лайонса [294]).

Пусть теория лоренц-инвариантна, т. е. инвариантна относительно преобразований

$$U(a, \Lambda) |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle, \quad (18.12a)$$

$$U(a, \Lambda) \varphi(x) U^{-1}(a, \Lambda) = \varphi(\Lambda x + a). \quad (18.12b)$$

Инвариантность относительно ортохронных преобразований Лоренца означает, что функция Уайтмана обладает свойством

$$\begin{aligned} W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (\Psi_0, \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) \Psi_0) = \\ &= (U(a, \Lambda) \Psi_0, U(a, \Lambda) \varphi(x_1) U^{-1}(a, \Lambda) U(a, \Lambda) \dots \\ &\dots U(a, \Lambda) \varphi(x_n) U^{-1}(a, \Lambda) U(a, \Lambda) \Psi_0) = \\ &= W^{(n)}(\Lambda x_1 + a, \Lambda x_2 + a, \dots, \Lambda x_n + a) \end{aligned} \quad (18.13)$$

(при преобразованиях без обращения времени).

Если преобразование Λ содержит обращение времени, в связи с чем оператор U антиунитарный, тогда

$$W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \overline{W^{(n)}(\Lambda x_1 + a, \Lambda x_2 + a, \dots, \Lambda x_n + a)} \quad (18.14)$$

(при преобразованиях с обращением времени).

Из трансляционной инвариантности следует, что функция $W^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ зависит только от разностей координат:

$$W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = W^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \quad (18.15a)$$

где

$$\xi_1 = x_1 - x_2$$

$$\vdots$$

$$\xi_j = x_j - x_{j+1}$$

$$\vdots$$

$$\xi_{n-1} = x_{n-1} - x_n. \quad (18.15b)$$

Тогда инвариантность относительно однородных преобразований Лоренца означает, что

$$W^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = W^{(n)}(\Lambda \xi_1, \dots, \Lambda \xi_{n-1}). \quad (18.16)$$

Из предположения об эрмитовости оператора поля $\varphi(x) = \varphi^*(x)$ следует

$$\begin{aligned} \overline{(\Psi_0, \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \Psi_0)} &= (\Psi_0, \varphi^*(x_n) \dots \varphi^*(x_1) \Psi_0) = \\ &= (\Psi_0, \varphi(x_n) \dots \varphi(x_1) \Psi_0). \end{aligned} \quad (18.17)$$

При помощи функций Уайтмана это равенство записывается в виде

$$\overline{W^{(n)}(x_1, \dots, x_n)} = W^{(n)}(x_n, \dots, x_1). \quad (18.18)$$

Предположим, что существуют фурье-образы функций $W^{(n)}$ и, следовательно, эти функции представимы интегралом Фурье

$$W^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \int d^4 p_1 \dots \int d^4 p_{n-1} e^{-i \sum_{j=1}^{n-1} p_j \cdot \xi_j} \tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) \quad (18.19)$$

(для этого требуется, чтобы функции $W^{(n)}$ имели на бесконечности не более чем полиномиальный рост). Поскольку множество физических состояний не содержит состояний с пространственно-подобными импульсами или с отрицательной энергией, то отсюда следует, что функция $\tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1})$ равна нулю вне области значений $p_i^2 \geq 0$ и $p_{i0} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Доказательство: По предположению существует полная система состояний $|p, \alpha\rangle$, которые являются собственными функциями оператора энергии-импульса P_μ и соответствуют его собственным значениям p_μ , таким, что $p^2 \geq 0$, $p_0 \geq 0$. Поэтому, вставляя с помощью соотношения полноты $\sum_{|p\alpha\rangle} |p\alpha\rangle \langle p\alpha| = 1$ суммы $\sum_{|p\alpha\rangle} |p\alpha\rangle \langle p\alpha|$ по полной системе состояний в выражение (18.7), определяющее функции $W^{(n)}$, получаем,

$$\begin{aligned} W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{|p_1\alpha_1\rangle \dots |p_{n-1}\alpha_{n-1}\rangle} \langle \Psi_0 | \varphi(x_1) | p_1\alpha_1 \rangle \langle p_1\alpha_1 | \varphi(x_2) | p_2\alpha_2 \rangle \dots \langle p_{n-1}\alpha_{n-1} | \varphi(x_n) | \Psi_0 \rangle = \\ &= \sum_{|p_1\alpha_1\rangle \dots |p_{n-1}\alpha_{n-1}\rangle} \langle \Psi_0 | \varphi(0) | p_1\alpha_1 \rangle \dots \langle p_{n-1}\alpha_{n-1} | \varphi(0) | \Psi_0 \rangle \times \\ &\quad \times e^{-i p_1 \cdot (x_1 - x_2)} e^{-i p_2 \cdot (x_2 - x_3)} \dots e^{-i p_{n-1} \cdot (x_{n-1} - x_n)}, \end{aligned} \quad (18.20a)$$

так что

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) &= \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \\ \text{при фиксированных} \\ p_1, \dots, p_{n-1}}} \langle \Psi_0 | \varphi(0) | p_1\alpha_1 \rangle \langle p_1\alpha_1 | \varphi(0) | p_2\alpha_2 \rangle \dots \langle p_{n-1}\alpha_{n-1} | \varphi(0) | \Psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (18.20b)$$

Из формулы (18.20b) вытекает, что функция $\tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) = 0$ вне области значений $p_{i0} \geq 0$ и $p_i^2 \geq 0$, так как в (18.20b) p_i есть 4-импульс физических состояний. Отсюда следует, что функции $W^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ являются граничными значениями аналитических функций. Это утверждение доказывается следующим образом. Запишем векторы

$$\zeta_j = \xi_j - i\eta_j \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (18.21)$$

где 4-векторы η_j предполагаются лежащими внутри светового конуса будущего. Определенная таким образом открытая $8(n-1)$ -мерная

область $8(n-1)$ -мерного пространства векторов $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ называется трубой будущего T_n . Очевидно, что функция $W^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, определяемая выражением

$$\begin{aligned} W^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) &= W^{(n)}(\xi_1 - i\eta_1, \dots, \xi_{n-1} - i\eta_{n-1}) = \\ &= \int d^4 p_1 \dots \int d^4 p_{n-1} e^{-i \sum_{j=1}^{n-1} p_j \cdot (\xi_j - i\eta_j)} \tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}), \end{aligned} \quad (18.22)$$

является аналитической функцией по каждой переменной $\xi_{j\mu}$ (произведение $p_j \cdot \eta_j$ всегда больше нуля, и этим обеспечивается сходимость определяющего интеграла для широкого класса функций $\tilde{W}^{(n)}$). Таким образом, функция $W^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ является граничным значением функции, аналитичной в трубе будущего.

Локальные перестановочные соотношения $[\varphi(x), \varphi(x')] = 0$ при $(x - x')^2 < 0$ означают, что

$$W^{(n)}(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = W^{(n)}(x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_n), \quad (18.23)$$

если точки x_j и x_{j+1} разделяет пространственно-подобный интервал. При помощи аналитического продолжения эти соотношения можно распространить на аналитические функции $W^{(n)}(\xi_j)$.

Наконец, поскольку длина любого вектора в гильбертовом пространстве положительна или равна нулю, то

$$\begin{aligned} &\| \alpha_0 f_0 \Psi_0 + \alpha_1 \int d^4 x_1 f_1(x_1) \varphi(x_1) \Psi_0 + \dots \\ &\dots + \alpha_n \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n f_n(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \Psi_0 + \dots \|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (18.24)$$

при всех значениях $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ и для всех основных функций $f_1(x_1), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n), \dots$. Из неравенства (18.24) выводится бесконечная последовательность неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{j,i} \bar{\alpha}_j \alpha_i \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_i \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_j \bar{f}_i(x_1, x_2, \dots, x_i) \times \\ \times W^{(i+j)}(x_i, x_{i-1}, \dots, x_1, y_1, \dots, y_j) f_j(y_1, \dots, y_j) \geq 0. \end{aligned} \quad (18.25)$$

Уайтман называет совокупность неравенств (18.25) условием положительной определенности¹⁾.

Важное значение приведенной выше формулировки релятивистской теории поля связано со следующей теоремой Уайтмана [852]:

Теорема. Пусть $W^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, есть последовательность обобщенных функций в пространстве $4n$ измерений, и пусть они удовлетворяют условиям релятивистской инвариантности (18.13), (18.14), эрмитовости (18.18), локальной коммутативности (18.23) и неотрицательности (18.25). Тогда существует гильбертово пространство \mathfrak{H} , представление неоднородной группы Лоренца $U(a, \Lambda)$, состояние вакуума $|\Psi_0\rangle$ и нейтральное скалярное поле $\varphi(x)$, такие, что n -точечное среднее по вакууму от произведения операторов $\varphi(x)$ будет равно $W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1) Точнее говоря, это условие «неотрицательности». — *Прим. ред.*

Другими словами, в этой теореме утверждается, что если задана последовательность обобщенных функций, удовлетворяющих условиям (18.13), (18.14), (18.18) и (18.25), то тогда можно восстановить теорию поля, имеющую в качестве средних по вакууму эти обобщенные функции. Поэтому можно ограничиться изучением только средних по вакууму. Преимущество такого подхода состоит в том, что функции Уайтмана $W^{(n)}$ есть корректно определенные математические величины и, кроме того, c -числа.

Заметим далее, что соотношение (18.13), вместе с соотношением (18.19), определяющим фурье-образ $\tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1})$ функции $W^{(n)}$, показывает, что из инвариантности относительно преобразований Лоренца вытекают следующие свойства $\tilde{W}^{(n)}$:

$$\tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) = \tilde{W}^{(n)}(\Lambda p_1, \dots, \Lambda p_{n-1}), \quad (18.26a)$$

если Λ не содержит обращения времени, и

$$\tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) = \overline{W^{(n)}(-\Lambda p_1, \dots, -\Lambda p_{n-1})}, \quad (18.26b)$$

если Λ содержит обращение времени. Соотношения (18.26a) и (18.22) позволяют утверждать, что функция $W^{(n)}(\zeta)$ имеет однозначное аналитическое продолжение на область, которая называется расширенной трубой (см. статью Холла и Уайтмана [355]). Расширенная труба T'_n состоит из всех точек вида $\Lambda \zeta_1, \dots, \Lambda \zeta_{n-1}$, где Λ — произвольное комплексное собственное преобразование Лоренца¹⁾, а векторы $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ лежат в трубе будущего. Кроме того, эта аналитически продолженная функция при значениях $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ из расширенной трубы удовлетворяет

¹⁾ Группа комплексных собственных преобразований Лоренца $L_+(C)$ есть совокупность всех комплексных матриц Λ (т. е. матриц, элементы которых суть комплексные числа), удовлетворяющих соотношениям $\Lambda^T g \Lambda = g$ и $\det \Lambda = +1$, где $(g)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ — метрический тензор.

Получно укажем также, как осуществляется это расширение области аналитичности. Из соотношений (18.26a) и (18.22) следует, что

$$W^{(n)}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) = W^{(n)}(\Lambda \zeta_1, \dots, \Lambda \zeta_{n-1}) \quad (18.26b)$$

для векторов ζ_i ($i=1, 2, \dots, n-1$), лежащих в трубе будущего, и действительных преобразований Лоренца Λ . Вместе с тем функция $W^{(n)}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$ аналитична в трубе будущего. Поэтому для векторов $\Lambda \zeta_1, \dots, \Lambda \zeta_{n-1}$, лежащих вне трубы будущего, соотношение (18.26b) определяет аналитическое продолжение функции $W^{(n)}$. Затем используется то обстоятельство, что в окрестности любой точки группового многообразия группы Лоренца можно ввести 6 действительных аналитических параметров и что, следовательно, группа Лоренца есть группа Ли. Матричные элементы Λ аналитичны по этим параметрам. В частности, в окрестности N тождественного преобразования группы L_+ можно ввести 6 таких параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_6$, что элементы матрицы Λ в этой окрестности будут представимы степенными рядами по $\lambda_1, \dots, \lambda_6$. Так как аналитическая функция $W^{(n)}$ от аналитических функций $\Lambda \zeta_i$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) снова является аналитической функцией, то в окрестности единицы функция $W^{(n)}(\Lambda \zeta_1, \dots, \Lambda \zeta_{n-1})$ будет аналитической функцией от Λ . Когда область изменения параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ расширяется на комплексные значения, функция $W^{(n)}(\Lambda \zeta_1, \dots, \Lambda \zeta_{n-1})$ от Λ остается постоянной и равной $W^{(n)}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$, поскольку функция $W^{(n)}(\Lambda \zeta_1, \dots, \Lambda \zeta_{n-1}) - W^{(n)}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$ равна нулю в действительном окружении единицы $N \subset L_+$ и должна оставаться равной нулю при аналитическом продолжении, пока обе функции будут аналитическими. Далее можно показать, что в действительности существует *однозначное* аналитическое продолжение до любого элемента Λ комплексной группы Лоренца (см. работу Холла и Уайтмана [355]).

соотношению

$$W^{(n)}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) = W^{(n)}(\Lambda\zeta_1, \dots, \Lambda\zeta_{n-1}) \quad (18.27)$$

при всех действительных и комплексных Λ с $\det \Lambda = +1$, т. е. она инвариантна относительно преобразований комплексной собственной группы Лоренца $L_+(C)$.

Труба будущего, т. е. совокупность векторов ζ_i ($i = 1, \dots, n-1$) с $-\infty \leq \xi_i \leq +\infty$, $\eta_{i0} > 0$, $\eta_i^2 > 0$, по определению, не содержит действительных точек. Однако расширенная труба, т. е. совокупность точек $\Lambda\zeta_i$ [где Λ — элементы комплексной группы Лоренца $L_+(C)$, а ζ_i лежат в трубе будущего], уже содержит действительные точки. Действительные точки расширенной трубы были найдены Йостом [404] и характеризуются следующей теоремой:

Теорема. Действительные точки q_1, \dots, q_{n-1} лежат в расширенной трубе тогда и только тогда, когда выпуклая оболочка q_1, \dots, q_{n-1} содержит только пространственно-подобные векторы.

Под выпуклой оболочкой точек (q_1, \dots, q_{n-1}) понимается совокупность всех векторов вида $\lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_{n-1} q_{n-1}$, когда λ_i принимают все действительные значения, совместимые с условиями $\lambda_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1$.

Таким образом, действительные точки расширенной трубы это как раз те точки, для которых любая выпуклая линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i q_i$ ($\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1$) всегда пространственно-подобна. Легко доказать необходимость этого утверждения.

Доказательство: Поскольку совокупность точек (q_1, \dots, q_{n-1}) лежит в расширенной трубе, то существуют комплексное преобразование Лоренца Λ и совокупность точек $(\zeta_1 = \xi_1 - i\eta_1, \zeta_2 = \xi_2 - i\eta_2, \dots, \zeta_{n-1} = \xi_{n-1} - i\eta_{n-1})$ трубы будущего, такие, что $\Lambda\zeta_i = q_i$. Далее, при действительных λ_i , совместимых с условиями $\lambda_i \geq 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_i \lambda_i q_i\right)^2 &= \left(\sum_i \lambda_i \Lambda\zeta_i\right)^2 = \left(\sum_i \lambda_i \zeta_i\right)^2 = \\ &= \left(\sum_i \lambda_i \xi_i\right)^2 - \left(\sum_i \lambda_i \eta_i\right)^2 - 2i \left(\sum_j \lambda_j \xi_j\right) \cdot \left(\sum_i \lambda_i \eta_i\right). \end{aligned} \quad (18.28)$$

Так как, по предположению, левая часть (18.28) вещественна, то

$$\left(\sum_i \lambda_i \xi_i\right) \cdot \left(\sum_j \lambda_j \eta_j\right) = 0. \quad (18.29)$$

Конус будущего является выпуклым, поскольку если η_j — времени-подобные векторы с $\eta_{j0} > 0$, то вектор $\sum_j \lambda_j \eta_j$ также будет времени-подобным при всех $\lambda_j > 0$, т. е. $\left(\sum_j \lambda_j \eta_j\right)^2 > 0$. Так как векторы η_j действительно лежат внутри конуса будущего, то из соотношения (18.29) следует, что вектор $\sum_i \lambda_i \xi_i$ должен быть пространственно-подобным, т. е. $\left(\sum_j \lambda_j \xi_j\right)^2 < 0$. Отсюда

$$\left(\sum_i \lambda_i q_i\right)^2 = \left(\sum_i \lambda_i \xi_i\right)^2 - \left(\sum_i \lambda_i \eta_i\right)^2 < 0, \quad (18.30)$$

т. е. векторы $\sum_i \lambda_i Q_i$ должны быть пространственно-подобными. По поводу доказательства достаточности читатель отсылается к статье Йоста [404]. Мы будем называть действительные точки расширенной трубы «точками Йоста». Можно далее показать, что каждая точка Йоста имеет *действительную* окрестность в расширенной трубе и что эта окрестность образует действительное окружение в $(n-1)$ -мерном пространстве комплексных 4-векторов. Это значит, что если имеются две аналитичные в расширенной трубе функции $f_1(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$ и $f_2(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$, которые совпадают в некоторой действительной окрестности расширенной трубы, т. е.

$$f_1(\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}) = f_2(\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}) \quad (18.31a)$$

в точках $\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}$ внутри действительной окрестности точки Йоста, тогда

$$f_1(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) = f_2(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) \quad (18.31б)$$

во всех точках $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ внутри расширенной трубы (см. книгу Бохнера и Мартина [63, стр. 34]¹⁾). В частности, переходя к граничным значениям, получаем

$$f_1(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = f_2(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \quad (18.31в)$$

при *всех* действительных точках ξ_1, \dots, ξ_{n-1} .

Теперь становится понятным важное значение определения действительных точек расширенной трубы (точек Йоста). При отыскании этих точек выясняется, что существует целая область точек Q_1, \dots, Q_{n-1} (где Q_1, \dots, Q_{n-1} пространственно-подобны), которая лежит внутри расширенной трубы, но на границе трубы будущего. Следовательно, функция Уайтмана $W^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ при $x_1 - x_2 = Q_1, \dots, x_{n-1} - x_n = Q_{n-1}$ является аналитической функцией от Q_1, \dots, Q_{n-1} , т. е. разложимой по этим переменным в сходящийся степенной ряд. Согласно сказанному выше, это в свою очередь означает, что если среднее по вакууму известно в окрестности точки Йоста (т. е. когда аргументы разделены пространственно-подобным интервалом), то оно однозначно определено при *всех* значениях своих аргументов. Поскольку при $n = 1, 2, 3, 4$ совокупности действительных точек Q_1, \dots, Q_{n-1} с $Q_{i0} = 0$, т. е. совокупности одновременных точек, образуют действительные окружения в расширенной трубе, то в этих случаях справедлив более сильный результат: если функции $W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)}$ и $W^{(4)}$ известны в области, в которой все аргументы имеют одну и ту же фиксированную временную компоненту, то этим функции $W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)}$ и $W^{(4)}$ определены везде.

Холл и Уайтман [355] доказали далее следующую важную теорему:

Теорема. Функция f от n 4-векторных переменных ζ_1, \dots, ζ_n , аналитичная в трубе будущего, определяемой согласно

$$\zeta_j = \xi_j - i\eta_j, \quad -\infty < \operatorname{Re} \zeta_{j\mu} < +\infty, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \\ (\operatorname{Im} \zeta_j)^2 > 0, \quad (\operatorname{Im} \zeta_{j0}) < 0,$$

и инвариантная относительно ортохронной группы Лоренца

$$f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = f(\Lambda \zeta_1, \dots, \Lambda \zeta_n)$$

¹⁾ В русском издании стр. 51. — Прим. ред.

является функцией скалярных произведений $\zeta_j \cdot \zeta_k = \zeta_{j\mu} \zeta_k^\mu$. Она аналитична на многообразии \mathfrak{M}_n , которое пробегает скалярные произведения, когда векторы ζ_1, \dots, ζ_n пробегают все значения в трубе будущего.

Теорема Холла и Уайтмана показывает, что как следствие основных свойств инвариантности, выражаемых соотношением (18.27), аналитическая функция $4n$ -комплексных переменных $W^{(n+1)}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ может быть представлена как функция скалярных произведений

$$W^{(n+1)}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = W^{(n+1)}(\zeta_1^2, \zeta_1 \cdot \zeta_2, \dots, \zeta_n^2, \dots). \quad (18.32)$$

Эта функция аналитична в области \mathfrak{M}_n значений скалярных произведений $\zeta_i \cdot \zeta_j$. Область \mathfrak{M}_n есть отображение трубы будущего T'_n . Обращает на себя внимание уменьшение числа переменных. Так, при $n=2$ функция $W^{(2)}(\zeta)$ является аналитической функцией одной комплексной переменной $z = \zeta^2$ вместо четырех; при $n=3$ функция $W^{(3)}$ выражается как аналитическая функция трех комплексных переменных вместо восьми. Не говоря уже об очевидных упрощениях, при такой записи в явном виде проявляются свойства инвариантности функций $W^{(n)}$ и становится возможным компактное выражение следствий локальной коммутативности поля ϕ . Однако не все скалярные произведения независимы. Поэтому иногда бывает удобнее работать не со скалярными произведениями, а с переменными ζ_1, \dots, ζ_n .

Приведенных теорем достаточно, чтобы дать простое доказательство *CPT*-теоремы Паули, Людерса и Швингера, принадлежащее Йосту [404]. В теореме *CPT* утверждается примерно следующее. В локальной теории поля, инвариантной относительно собственных преобразований Лоренца, существует антиунитарный оператор $V = CPT$ и возможен такой выбор фазового множителя η в законе преобразования

$$V\phi(x)V^{-1} = \eta\phi^*(-x), \quad |\eta|^2 = 1, \quad (18.33)$$

что теория будет инвариантной относительно этого преобразования. При помощи средних по вакууму теорема *CPT* выражается равенством¹⁾

$$\begin{aligned} (\Psi_0, \phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n) \Psi_0) &= (\Psi_0, \phi_1^*(-x_1) \dots \phi_n^*(-x_n) \Psi_0) = \\ &= (\Psi_0, \phi_n(-x_n) \dots \phi_1(-x_1) \Psi_0). \end{aligned} \quad (18.34)$$

Теперь мы покажем, что соотношение (18.34) фактически является следствием *локальности* теории, приведенных выше спектральных условий, а также инвариантности теории относительно собственных ортохронных неоднородных преобразований Лоренца. Обозначим через $W^{\phi_1 \dots \phi_n}(x_1, \dots, x_n)$ среднее по вакууму от произведения $\phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n)$

$$W^{\phi_1 \dots \phi_n}(x_1, \dots, x_n) = (\Psi_0, \phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n) \Psi_0). \quad (18.35)$$

Тогда вследствие трансляционной инвариантности функция $W^{\phi_1 \dots \phi_n}$ зависит только от разностей переменных x_1, \dots, x_n , т. е. $W^{\phi_1 \dots \phi_n} = W^{\phi_1 \dots \phi_n}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, а на основании спектральных условий функция $W^{\phi_1 \dots \phi_n}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ является граничным значением аналитической функции $W^{\phi_1 \dots \phi_n}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$, аналитичной, когда векторы $\zeta_j = \xi_j - i\eta_j$

1) Отметим, что мы здесь не ограничиваемся случаем только одного поля и не предполагаем эрмитовости полей. Однако для простоты мы рассматриваем только скалярные поля. Обобщение на спинорные поля осуществляется непосредственно (см. работу Йоста [404]).

лежат в трубе будущего (т. е. когда $-\infty < \xi_j < +\infty$, а векторы η_j лежат внутри конуса будущего). Кроме того, в силу лоренц-инвариантности $W^\varphi(\xi)$ имеет единое аналитическое продолжение на расширенную трубу (т. е. на множество точек ξ_1, \dots, ξ_{n-1} , таких, что $\xi_i = \Lambda \xi'_i$, где ξ'_i лежат в трубе будущего, а Λ — элемент комплексной группы Лоренца с $\det \Lambda = +1$).

Пусть теперь точка q_1, \dots, q_{n-1} будет точкой Йоста (т. е. действительной точкой в расширенной трубе). Из теоремы Холла и Уайтмана, а именно из того, что функция $W^{\varphi_1 \dots \varphi_n} = W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ является функцией скалярных произведений $\xi_i \cdot \xi_j$ и притом аналитической функцией на комплексном многообразии, которое пробегает скалярные произведения, когда векторы ξ_1, \dots, ξ_{n-1} пробегают расширенную трубу, следует

$$W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(-\xi_1, \dots, -\xi_{n-1}), \quad (18.36a)$$

и отсюда¹⁾

$$W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(q_1, \dots, q_{n-1}) = W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(-q_1, \dots, -q_{n-1}). \quad (18.36b)$$

Из условия эрмитовости

$$\begin{aligned} (\Psi_0, \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \Psi_0) &= \overline{(\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \Psi_0, \Psi_0)} = \\ &= \overline{(\Psi_0, \varphi_n^*(x_n) \dots \varphi_1^*(x_1) \Psi_0)} \end{aligned} \quad (18.37)$$

вытекает

$$W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \overline{W^{\varphi_n^* \dots \varphi_1^*}(-\xi_{n-1}, \dots, -\xi_1)} \quad (18.38)$$

при всех действительных ξ_1, \dots, ξ_{n-1} . В частности, это соотношение справедливо в действительной окрестности расширенной трубы. Поэтому во всей расширенной трубе справедливо соотношение

$$W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \overline{W^{\varphi_n^* \dots \varphi_1^*}(-\xi_{n-1}, \dots, -\xi_1)}. \quad (18.39)$$

Соотношение (18.39) позволяет переписать формулу (18.36b) в форме

$$W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(q_1, \dots, q_{n-1}) = \overline{W^{\varphi_n^* \dots \varphi_1^*}(q_{n-1}, \dots, q_1)}. \quad (18.40)$$

Сравним этот результат с записью теоремы *CPT* в виде (18.34). Соотношение (18.34) при помощи функций Уайтмана записывается в виде

$$W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \overline{W^{\varphi_n^* \dots \varphi_1^*}(+\xi_{n-1}, \dots, +\xi_1)} = \overline{W^{\varphi_1^* \dots \varphi_n^*}(-\xi_1, \dots, -\xi_{n-1})} \quad (18.41)$$

Если в (18.41) точки x_1, \dots, x_n выбраны так, что $x_k - x_{k+1} = q_k$, то сравнение с (18.40) дает необходимое условие для справедливости теоремы *CPT*:

$$W^{\varphi_1^* \dots \varphi_n^*}(q_1, \dots, q_{n-1}) = \overline{W^{\varphi_n^* \dots \varphi_1^*}(-q_{n-1}, \dots, -q_1)}, \quad (18.42)$$

¹⁾ К этому же заключению можно прийти и на основании того, что преобразование $\Lambda = -1$ является элементом комплексной группы Лоренца с $\det \Lambda = +1$; поэтому соотношение (18.36) можно вывести из лоренц-инвариантности функций Уайтмана: в формуле (18.27) положим $\Lambda = -1$ и заметим, что множество действительных точек, для которых комплексное преобразование Лоренца можно выбрать так, чтобы $\Lambda q = -q$, как раз и есть множество точек Йоста.

или, что то же,

$$(\Psi_0, \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \Psi_0) = (\Psi_0, \varphi_n(x_n) \dots \varphi_1(x_1) \Psi_0) \quad (18.43)$$

во всех точках x_1, \dots, x_n , для которых Q_1, \dots, Q_{n-1} находятся в расширенной трубе.

О совокупности полей, удовлетворяющих условию (18.43) при значениях x_1, \dots, x_n , совместимых с условиями

$$\left(\sum_i^{n-1} \lambda_i \xi_i\right)^2 < 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (\xi_i = x_i - x_{i+1}),$$

говорят, что эти поля *слабо локальны* друг относительно друга. Отметим, что совокупность полей, *локальных* друг относительно друга, т. е. таких, которые коммутируют при пространственно-подобном разделении, $[\varphi_j(x), \varphi_l(x')] = 0$ при $(x - x')^2 < 0$, заведомо удовлетворяет условиям слабой локальности их друг относительно друга. В самом деле, из локальности следует, что

$$\begin{aligned} W^{\varphi_1 \dots \varphi_j \varphi_{j+1} \dots \varphi_n}(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= W^{\varphi_1 \dots \varphi_{j+1} \varphi_j \dots \varphi_n}(x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_n) \quad \text{при } (x_j - x_{j+1})^2 < 0. \end{aligned} \quad (18.44)$$

О совокупности операторов поля $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ говорят, что они обладают свойством слабой локальной коммутативности (СЛК) на множестве действительных точек $(\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1})$, если равенство

$$(\Psi_0, \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \Psi_0) = (\Psi_0, \varphi_n(x_n) \dots \varphi_1(x_1) \Psi_0), \quad (18.45a)$$

или, что то же, равенство

$$W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = W^{\varphi_n \dots \varphi_1}(-\xi_{n-1}, \dots, -\xi_1) \quad (18.45b)$$

справедливо при всех x_1, \dots, x_n , таких, что разности ξ_1, \dots, ξ_{n-1} ($\xi_j = x_j - x_{j+1}$) лежат в некоторой действительной окрестности точки $\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}$.

Йост показал, что верна также и обратная теорема, т. е. если совокупность полей в окрестности некоторой действительной точки расширенной трубы (в окрестности точки Йоста) обладает свойством СЛК, тогда справедлива теорема СРТ и СЛК [соотношение (18.45б)] имеет место во всех действительных точках расширенной трубы.

Доказательство: Условие СЛК в точке ξ_1, \dots, ξ_{n-1} можно записать в виде

$$\begin{aligned} (\Psi_0, \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \Psi_0) &= (\Psi_0, \varphi_n(x_n) \dots \varphi_1(x_1) \Psi_0) = \\ &= \overline{(\Psi_0, \varphi_1^*(x_1) \dots \varphi_n^*(x_n) \Psi_0)}, \end{aligned} \quad (18.46a)$$

или, что то же, при помощи функций Уайтмана

$$W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \overline{W^{\varphi_1^* \dots \varphi_n^*}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})}. \quad (18.46b)$$

По предположению, соотношение (18.46б) справедливо в действительной окрестности точки Йоста. С помощью (18.46б) и (18.36a) получаем

$$W^{\varphi_1^* \dots \varphi_n^*}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \overline{W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(-\xi_1, \dots, -\xi_{n-1})} \quad (18.47)$$

для точек $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, лежащих в действительной окрестности точки Йоста $(\varrho_1, \dots, \varrho_{n-1})$. Очевидно, что в силу релятивистской инвариантности и спектральных условий функция Уайтмана

$$W^{\varphi_1^* \dots \varphi_n^*}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = (\Psi_0, \varphi_1^*(x_1) \dots \varphi_n^*(x_n) \Psi_0) \quad (18.48)$$

обладает теми же аналитическими свойствами, что и функция $W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. Таким образом, соотношение (18.47) имеет аналитическое продолжение на расширенную трубу, поскольку если точка $(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{n-1})$ лежит в трубе будущего, тогда это же верно и для точки $(-\bar{\xi}_1, \dots, -\bar{\xi}_{n-1})$. Следовательно, соотношение (18.47) переходит в соотношение, связывающее функции $W^{\varphi_1^* \dots \varphi_n^*}$ и $W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}$ во всей расширенной трубе. Так как труба будущего является только частью расширенной трубы, то соотношение (18.47) справедливо и в трубе будущего. В частности, в точках границы трубы будущего справедливо соотношение

$$W^{\varphi_1^* \dots \varphi_n^*}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \overline{W^{\varphi_1 \dots \varphi_n}(-\xi_1, \dots, -\xi_{n-1})}, \quad (18.49)$$

или, что то же,

$$\overline{(\Psi_0, \varphi_1^*(-x_1) \dots \varphi_n^*(-x_n) \Psi_0)} = (\Psi_0, \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \Psi_0). \quad (18.50)$$

А это соотношение и является выражением теоремы *CPT* с помощью средних по вакууму. Что и требовалось доказать.

Дайсон [203] доказал приведенное ниже следствие теоремы *CPT*. Если справедлива теорема *CPT*, то функция Уайтмана будет аналитической и однозначной на действительном множестве пространственно-временных точек тогда и только тогда, когда поле обладает свойством слабой локальной коммутативности на этом множестве точек.

Это указывает на связь между требованием локальной коммутативности и требованием аналитичности в некоторой области. В действительности, как показали Штейнман и Йост [740], локальная коммутативность при всех пространственно-подобных разделениях следует из локальной коммутативности в окрестности какой-либо точки Йоста. В частности, в случае функций $W^{(2)}$, $W^{(3)}$ и $W^{(4)}$ требование, чтобы $[\varphi(x), \varphi(y)] = 0$ при $x_0 = y_0$ в некоторой окрестности трехмерного пространства, является достаточным, чтобы локальная коммутативность осуществлялась при *всех* пространственно-подобных разделениях.

Прежде чем переходить к дальнейшему изложению формулировки Уайтмана, проиллюстрируем все сказанное выше на примере двухточечной функции Уайтмана W^{AB} в случае двух скалярных полей $A(x)$ и $B(x)$. Дальнейший анализ представляет собой незначительное обобщение анализа Лемана, изложенного в гл. 17. Интересующее нас среднее по вакууму имеет вид

$$W^{AB}(x-y) = \langle \Psi_0 | A(x) B(y) | \Psi_0 \rangle, \quad (18.51)$$

где записью $W^{AB}(x, y) = W^{AB}(x-y)$ отражена трансляционная инвариантность теории. Лоренц-инвариантность означает далее, что

$$W^{AB}(\xi) = W^{AB}(\Lambda\xi); \quad \xi = x-y. \quad (18.52)$$

Фурье-образ $\tilde{W}^{AB}(p)$ функции $W^{AB}(\xi)$ определяется

$$\begin{aligned} W^{AB}(\xi) &= \sum_{\rho\alpha} \langle \Psi_0 | A(0) | \rho\alpha \rangle \langle \rho\alpha | B(0) | \Psi_0 \rangle e^{-i\rho \cdot (x-y)} = \\ &= \int d^4 p e^{-i\rho \cdot (x-y)} \tilde{W}^{AB}(p), \end{aligned} \quad (18.53a)$$

$$\tilde{W}^{AB}(p) = \sum_{\alpha} \langle \Psi_0 | A(0) | \rho\alpha \rangle \langle \rho\alpha | B(0) | \Psi_0 \rangle. \quad (18.53b)$$

при фиксированном p

На основании обычных соображений об отсутствии состояний с отрицательной энергией и пространственно-подобными импульсами заключаем, что фурье-образ обладает свойством $\tilde{W}^{AB}(p) = 0$ вне области с $p_0 \geq 0$ и $p^2 > 0$. При преобразованиях Лоренца

$$\tilde{W}^{AB}(p) = \tilde{W}^{AB}(\Lambda p) \quad (18.54)$$

и, следовательно, \tilde{W}^{AB} является функцией только p^2 . Функция Уайтмана $W^{AB}(\xi)$ является граничным значением аналитической функции $W^{AB}(\zeta)$

$$W^{AB}(\zeta) = \int d^4 p e^{-i\rho \cdot (\xi - i\eta)} \tilde{W}^{AB}(p), \quad \zeta = \xi - i\eta, \quad (18.55)$$

где η — времени-подобный вектор, лежащий внутри светового конуса будущего. В силу лоренц-инвариантности $W^{AB}(\zeta) = W^{AB}(\Lambda\zeta)$, и, следовательно, функция $W^{AB}(\xi)$ фактически является граничным значением аналитической функции $W^{AB}(z)$, регулярной при всех комплексных значениях z , которые могут быть записаны в виде

$$z = (\xi - i\eta)^2, \quad (18.56)$$

где $\eta_0 > 0$, $\eta^2 > 0$. В этом состоит содержание теоремы Холла и Уайтмана для случая инвариантной функции одной переменной. Поскольку $z = \xi^2 - 2i\eta \cdot \xi - \eta^2$ и, следовательно,

$$\operatorname{Re} z = \xi^2 - \eta^2, \quad (18.57a)$$

$$\operatorname{Im} z = -2\xi \cdot \eta, \quad (18.57b)$$

то каждая точка плоскости z , не лежащая на положительной действительной полуоси, представима в виде (18.56). Таким образом, когда вектор ξ пробегает все значения в пространстве-времени, а вектор η лежит внутри светового конуса будущего, точка z принимает все значения на комплексной плоскости z , за исключением положительной действительной полуоси и начала координат. Случай $\eta \rightarrow 0$ иллюстрируется на фиг. 145, где указаны также значения z для характерных положений вектора ξ . Таким образом, функция Уайтмана $W^{AB}(z)$ будет аналитической в плоскости с разрезом, идущим вдоль положительной действительной полуоси от точки $z = 0$ до ∞ .

Очевидно, что среднее по вакууму

$$W^{BA}(x' - x) = \langle \Psi_0 | B(x') A(x) | \Psi_0 \rangle \quad (18.58)$$

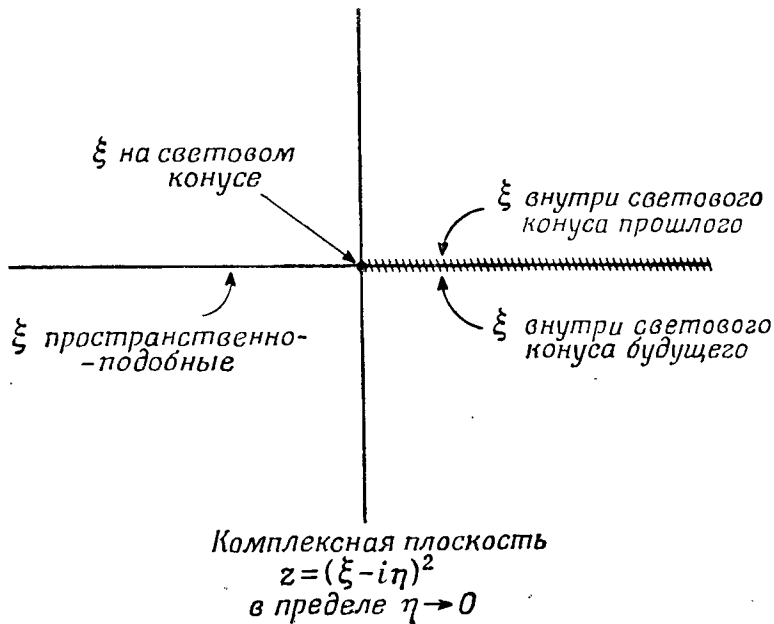
аналогичным образом определяет аналитическую функцию $W^{BA}(z)$,

которая снова регулярна во всех точках вида

$$z = (-\xi - i\eta)^2 \quad (\eta \text{ внутри конуса будущего}), \quad (18.59a)$$

$$\xi = x - x'. \quad (18.59b)$$

Поскольку формулы (18.59) и (18.56) определяют одно и то же множество, то функции $W^{BA}(z)$ и $W^{AB}(z)$ имеют одну и ту же область



Ф и г. 145.

аналитичности. Если теория локальна, т. е. $[A(x), B(x')] = 0$ при $(x - x')^2 < 0$, тогда

$$\langle \Psi_0 | A(x) B(x') | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | B(x') A(x) | \Psi_0 \rangle \quad \text{при} \quad (x - x')^2 < 0 \quad (18.60)$$

и, следовательно, $W^{AB}(z) = W^{BA}(z)$, когда z лежит на отрицательной действительной полуоси. А так как обе функции $W^{AB}(z)$ и $W^{BA}(z)$ являются аналитическими, то $W^{AB}(z) = W^{BA}(z)$ во всех точках области их аналитичности, т. е.

$$W^{AB}(z) = W^{BA}(z) \text{ в плоскости с разрезом.} \quad (18.61)$$

В применении к частному случаю $A(x) = \varphi(x)$ и $B(x) = \varphi^*(x)$ сделанных выводов достаточно для доказательства того, что для скалярного поля (поля со спином 0) исключена возможность неправильной связи спина со статистикой, при которой $[\varphi(x), \varphi^*(x')]_+ = 0$, если точки разделены пространственно-подобным интервалом (см. работы Буржойона [93] и Людерса и Зумино [519]). Предположим, что мы приняли эти «неправильные» перестановочные соотношения. Тогда вместо (18.60) мы получили бы соотношение

$$W^{\varphi\varphi^*}(\xi) + W^{\varphi^*\varphi}(-\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi^2 < 0 \quad (18.62a)$$

и, следовательно, с учетом аналитичности,

$$W^{\varphi\varphi^*}(z) = -W^{\varphi^*\varphi}(z) \quad (18.626)$$

во всей области аналитичности. Рассмотрим теперь векторы $\varphi(f)|\Psi_0\rangle$ и $\varphi^*(g)|\Psi_0\rangle$. Сумма норм этих векторов равна

$$\begin{aligned} & \|\varphi(f)|\Psi_0\rangle\|^2 + \|\varphi^*(g)|\Psi_0\rangle\|^2 = \\ & = \int d^4x \int d^4y \{ \bar{f}(x) (\varphi(x)\Psi_0, \varphi(y)\Psi_0) f(y) + \bar{g}(x) (\varphi^*(x)\Psi_0, \varphi^*(y)\Psi_0) g(y) \} = \\ & = \int d^4x \int d^4y \{ \bar{f}(x) W^{\varphi\varphi^*}(x-y) f(y) + \bar{g}(-x) W^{\varphi\varphi^*}(y-x) g(-y) \}. \end{aligned} \quad (18.63)$$

Выбирая $f(x) = g(-x)$ и учитывая, что при неправильной связи спина со статистикой $W^{\varphi\varphi^*}(\xi) + W^{\varphi\varphi^*}(-\xi) = 0$ при всех ξ , получаем из (18.63), что¹⁾

$$\varphi(f)|\Psi_0\rangle = \varphi^*(f)|\Psi_0\rangle = 0 \quad \text{при всех } f. \quad (18.64)$$

Следовательно, все средние по вакууму от произведений φ и φ^* равны нулю, а тогда, согласно Уайтману, само поле тождественно равно нулю. Таким образом, возможна только правильная связь спина со статистикой. Доказательство для полей более высоких спинов (целых или полуцелых) проводится аналогичным образом [93]. Отметим, что это доказательство связи спина со статистикой не опирается на какой-либо частный вид уравнений движения для поля φ , в противоположность доказательству Паули [627, 628], которое существенным образом опиралось на линейность уравнений поля. Следует также отметить, что в приведенном выше доказательстве, основанном на аксиоматической формулировке теории поля, использовались только линейные соотношения для функций Уайтмана.

Вернемся к нашему обсуждению функций Уайтмана $W^{AB}(\xi)$ и $W^{BA}(\xi)$. Если поля локальные, то из (18.61) следует

$$\tilde{W}^{AB}(p) = \tilde{W}^{BA}(p). \quad (18.65)$$

Среднее по вакууму от коммутатора дается выражением

$$\langle \Psi_0 | [A(x), B(x')] | \Psi_0 \rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0} \{ W^{AB}((x-x'-i\eta)^2) - W^{BA}((x-x'+i\eta)^2) \}. \quad (18.66)$$

Запись фурье-образа функции $W^{AB}(\xi)$ в виде

$$\tilde{W}^{AB}(p) = \varrho^{AB}(p^2) \theta(p) \quad (18.67)$$

явным образом учитывает трансформационные свойства фурье-образа при преобразованиях Лоренца и то, что он обращается в нуль при $p_0 < 0$. Отсюда среднее по вакууму от коммутатора операторов $A(x)$

1) Отметим, что к этому заключению можно прийти только в случае положительной определенности нормы в пространстве векторов физических состояний, т. е. если состояния представляются векторами в гильбертовом пространстве, снабженном эрмитовым скалярным произведением.

и $B(x')$ имеет следующее представление:

$$\langle \Psi_0 | [A(x), B(x')] | \Psi_0 \rangle = \int d^4 p Q^{AB}(p^2) \varepsilon(p) e^{-ip \cdot \xi},$$

$$\xi = x - x'. \quad (18.68)$$

Из (18.68) легко получить представление для среднего по вакууму от запаздывающего произведения

$$R(A(x) B(x')) = -i\theta(x - x') [A(x), B(x')]. \quad (18.69)$$

Для этого нужно воспользоваться интегральным представлением для функции θ

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tau x_0}}{\tau + i\delta} d\tau. \quad (18.70)$$

Среднее по вакууму от запаздывающего произведения операторов $A(x)$ и $B(x')$ обозначим $r^{AB}(x; x')$:

$$r^{AB}(x; x') = \langle \Psi_0 | R(A(x) B(x')) | \Psi_0 \rangle. \quad (18.71)$$

Так как, по предположению, $A(x)$ и $B(x')$ коммутируют, когда точки разделены пространственно-подобным интервалом, то запаздывающее произведение $R(A(x) B(x'))$ равно нулю, когда вектор $x - x'$ находится вне светового конуса будущего. В связи с этим при ортохронных преобразованиях Лоренца запаздывающее произведение преобразуется по закону

$$U(a, \Lambda) R(A(x) B(x')) U^{-1}(a, \Lambda) =$$

$$= -i\theta(\Lambda(x - x')) [A(\Lambda x + a), B(\Lambda x' + a)] =$$

$$= R(A(\Lambda x + a) B(\Lambda x' + a)), \quad (18.72)$$

поскольку при таких преобразованиях времени-подобный вектор остается времени-подобным, а знак его временной компоненты есть инвариант. Для средних по вакууму из этого закона вытекают следствия

$$r^{AB}(x; x') = r^{AB}(x - x') \quad (18.73a)$$

$$r^{AB}(\xi) = r^{AB}(\Lambda \xi). \quad (18.73b)$$

При помощи интегрального представления (18.70) находим для r^{AB} следующее представление:

$$r^{AB}(\xi) = - \int d^4 p e^{-ip \cdot \xi_0} e^{ip \cdot \xi} Q^{AB}(p^2) \varepsilon(p) \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\tau \xi_0} \frac{1}{\tau + i\delta} =$$

$$= - \int d^4 p e^{-ip \cdot \xi} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{Q^{AB}((p_0 - \tau)^2 - p^2)}{\tau + i\delta} \varepsilon(p_0 - \tau) =$$

$$= \int d^4 p e^{-ip \cdot \xi} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \tilde{r}^{AB}(p^2, p_0, \delta), \quad (18.74)$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}^{AB}(p^2, p_0, \delta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{\varrho^{AB}((p_0 - \tau)^2 - p^2)}{\tau + i\delta} \varepsilon(p_0 - \tau) = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{\varrho^{AB}(\tau^2 - p^2)}{p_0 - \tau + i\delta} \varepsilon(\tau) = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tau \varrho^{AB}(\tau^2 - p^2) \left[\frac{1}{-\tau + p_0 + i\delta} - \frac{1}{\tau + p_0 + i\delta} \right] = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tau^2 \varrho^{AB}(\tau^2 - p^2) \frac{1}{\tau^2 - (p_0 + i\delta)^2} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tau^2 \varrho^{AB}(\tau^2) \frac{1}{\tau^2 + p^2 - (p_0 + i\delta)^2}. \quad (18.75)
 \end{aligned}$$

Выражение (18.75) показывает, что фурье-образ $\tilde{r}^{AB}(p^2)$ среднего по вакууму от $R(A(x)B(x'))$

$$\langle \Psi_0 | R(A(x')B(x)) | \Psi_0 \rangle = \int d^4p \tilde{r}^{AB}(p^2) e^{-ip \cdot \xi} \quad (18.76)$$

является граничным значением аналитической функции

$$\tilde{r}^{AB}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tau^2 \frac{\varrho^{AB}(\tau^2)}{\tau^2 - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{da \varrho^{AB}(a)}{a - z}, \quad (18.77)$$

которая регулярна в плоскости z с разрезом вдоль действительной положительной полуоси от $z=0$ до $z=+\infty$.

Аналогичные вычисления с хронологически упорядоченным произведением $T(A(x)B(x'))$ приводят к выводу, что среднее по вакууму от $T(A(x)B(x'))$ допускает представление

$$\begin{aligned}
 \tau^{AB}(x-x') &= \langle \Psi_0 | T(A(x)B(x')) | \Psi_0 \rangle = \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int d^4p e^{-ip \cdot \xi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{da \varrho^{AB}(a)}{a - p^2 - i\delta}, \quad (18.78)
 \end{aligned}$$

и, следовательно, фурье-образ среднего по вакууму от хронологически упорядоченного произведения является другим граничным значением той же самой аналитической функции $\tilde{r}^{AB}(z)$. Как уже было отмечено в гл. 17, предположение о том, что $W^{AB}(\xi)$ не слишком сингулярна при $\xi=0$, эквивалентно предположению, согласно которому поведение $\varrho^{AB}(a)$ на бесконечности таково, что интеграл по a , входящий в определение функции $\tilde{r}^{AB}(z)$ (18.77), сходится. В перенормируемой теории поля предполагают, что если не сходится интеграл (18.77), то либо сходится интеграл

$$\tilde{r}^{AB}(z) - \tilde{r}^{AB}(0) = \frac{z}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{da}{a} \frac{\varrho^{AB}(a)}{a - z}, \quad (18.79)$$

либо, в общем случае, сходится интеграл, представляющий $\tilde{r}^{AB}(z)$ после дальнейших вычитаний [которые добавляются в знаменатель (18.79) новые степени a]. Точное число вычитаний зависит от числа контрчленов, входящих в теорию.

В последние годы проводилось интенсивное исследование общих аналитических свойств трехточечного среднего по вакууму (которое связано с вершинными операторами) и общего случая аналитических свойств n -точечных средних по вакууму, связанных с амплитудами процессов (см., в частности, работы Челлена и Уайтмана [417], Челлена и Вильгельмсона [418], Стритера [743]). Челлен и Уайтман [417] предприняли детальное изучение аналитических свойств трехточечной функции Уайтмана:

$$\langle \Psi_0 | A(x_1) B(x_2) C(x_3) | \Psi_0 \rangle = W^{ABC}(x_1, x_2, x_3) = W^{ABC}(x_1 - x_2, x_2 - x_3) = \\ = \int e^{-ip_1 \cdot (x_1 - x_2) - ip_2 \cdot (x_2 - x_3)} \tilde{W}^{ABC}(p_1, p_2) d^4 p_1 d^4 p_2. \quad (18.80)$$

Фурье-образ $\tilde{W}^{ABC}(p_1, p_2)$ отличен от нуля только тогда, когда оба вектора p_1 и p_2 лежат внутри светового конуса будущего. Как было отмечено ранее, из этого факта следует, что функция $W^{ABC}(x_1 - x_2, x_2 - x_3)$ есть граничное значение аналитической функции двух комплексных векторов $\zeta_1 = x_1 - x_2 - i\eta_1 = \xi_1 - i\eta_1$ и $\zeta_2 = x_2 - x_3 - i\eta_2 = \xi_2 - i\eta_2$, где векторы η_1 и η_2 независимо принимают значения внутри светового конуса будущего. Теорема Холла и Уайтмана для этого случая гласит, что аналитическая функция $W^{ABC}(\zeta_1, \zeta_2)$ зависит только от трех лоренц-инвариантных переменных:

$$z_1 = (x_1 - x_2 - i\eta_1)^2 = (\xi_1 - i\eta_1)^2 = \zeta_1^2, \quad (18.81a)$$

$$z_2 = (x_2 - x_3 - i\eta_2)^2 = (\xi_2 - i\eta_2)^2 = \zeta_2^2, \quad (18.81b)$$

$$z_3 = (x_1 - x_3 - i(\eta_1 + \eta_2))^2 = (\zeta_1 + \zeta_2)^2. \quad (18.81в)$$

Когда векторы ζ_1 и ζ_2 пробегают свои трубы будущего, каждая переменная z_1, z_2 и z_3 изменяется на открытом множестве комплексной плоскости z_i , а в целом пространстве (z_1, z_2, z_3) заполняется некоторая открытая область \mathfrak{M}_2^{ABC} . Поскольку переменные z_i не независимы, то определение области \mathfrak{M}_2^{ABC} — довольно трудная задача, требующая искусства для своего решения. Челлен и Уайтман показали, что граница области \mathfrak{M}_2^{ABC} состоит из четырех кусков, так называемых «аналитических гиперповерхностей»¹⁾. Далее они показали, что как следствие локальной коммутативности область аналитичности функции W^{ABC} может быть расширена дальше. Это видно из следующего. Выше было указано, что функция $W^{ABC}(\xi_1, \xi_2)$ есть граничное значение аналитической функции $W^{ABC}(z_1, z_2, z_3)$ от переменных z_1, z_2, z_3 , определенных формулами (18.81a) — (18.81в). Аналогичные соображения показывают, что функция

$$W^{BAC}(x_2, x_1, x_3) = \langle \Psi_0 | B(x_2) A(x_1) C(x_3) | \Psi_0 \rangle \quad (18.82)$$

есть граничное значение функции $W^{BAC}(z_1, z_3, z_2)$, аналитической в области \mathfrak{M}_2^{BAC} . Область \mathfrak{M}_2^{BAC} в действительности может быть полу-

¹⁾ «Аналитической гиперповерхностью» Челлен и Уайтман назвали поверхность, определяемую уравнением вида $F(z_R, r) = 0$, где F — аналитическая функция комплексных переменных z_R , зависящая также от одного действительного параметра r .

чена из области \mathfrak{M}_2^{ABC} путем перестановки в (18.81) переменных z_2 и z_3 . Далее, если поля A и B локальны по отношению друг к другу, т. е. если $[A(x), B(x')] = 0$ при $(x-x')^2 < 0$, то

$$W^{BAC}(x_2, x_1, x_3) = W^{ABC}(x_1, x_2, x_3) \quad \text{при} \quad \xi_1^2 = (x_1 - x_2)^2 < 0. \quad (18.83)$$

Для обеих функций $W^{ABC}(z_1, z_2, z_3)$ и $W^{BAC}(z_1, z_3, z_2)$ множество $\xi_1^2 < 0$ лежит внутри расширенной трубы и образует действительное окружение. Поскольку две аналитические функции $W^{ABC}(z_1, z_2, z_3)$ и $W^{BAC}(z_1, z_3, z_2)$ совпадают в этой действительной окрестности, то они совпадают всюду в объединении областей их аналитичности. Таким образом, функция W^{ABC} имеет аналитическое продолжение на объединение областей \mathfrak{M}_2^{ABC} и \mathfrak{M}_2^{BAC} . Аналогично можно показать, что если $[B(x_2), C(x_3)] = 0$ при $(x_2 - x_3)^2 < 0$, то функция $W^{ACB}(z_3, z_2, z_1)$ равна функции $W^{ABC}(z_1, z_2, z_3)$, как бы они ни были определены. Следовательно, функция $W^{ABC}(z_1, z_2, z_3)$ аналитична также в области \mathfrak{M}_2^{ACB} , которую можно получить из области \mathfrak{M}_2^{ABC} путем перестановки в (18.81) переменных z_1 и z_3 . Подобное же рассуждение можно повторить и по поводу функции $W^{CBA}(z_2, z_1, z_3)$ и т. д.

Таким образом, локальная коммутативность означает, что все шесть средних по вакууму $W^{ABC}(\xi_1, \xi_2), \dots, W^{CBA}(-\xi_2, -\xi_1)$ есть граничные значения одной и той же аналитической функции $W^{ABC}(z_1, z_2, z_3)$, которая аналитична в области \mathfrak{M}_2 , являющейся объединением трех областей: области, определяемой при помощи формул (18.81а), (18.81б) и (18.81в), когда ξ_1 и ξ_2 принимают все значения в трубе будущего, и двух других областей, получаемых из первой путем перестановок z_3 с z_2 и z_1 .

Итак, можно показать, что функция Уайтмана W^{ABC} должна быть аналитической функцией трех комплексных переменных z_1, z_2, z_3 в некоторой области \mathfrak{M}_2 . В теории одной комплексной переменной z хорошо известно, что для всякой области \mathcal{D} всегда найдется такая функция $f(z)$, что граница \mathcal{D} будет ее естественной границей, т. е. f будет аналитична в \mathcal{D} и будет иметь особенности в каждой точке границы, так что ее невозможно будет продолжить за пределы области \mathcal{D} . Однако в теории аналитических функций от большего, чем одна, числа комплексных переменных оказывается, что, вообще говоря, не всякая область \mathcal{D}_n в $2n$ -мерном пространстве n комплексных переменных может служить естественной областью аналитичности для какой-то аналитической функции. В действительности *любую* аналитическую функцию, регулярную в \mathcal{D}_n , можно продолжить на некоторую более широкую область, называемую оболочкой голоморфности. Область, равную ее оболочке голоморфности, именуют естественной областью голоморфности.

Челлен и Уайтман показали, что объединение областей, получаемых путем перестановок, $\mathfrak{M}_2^{ABC} \cup \mathfrak{M}_2^{BAC} \cup \dots$, не есть область голоморфности. Вместе с тем они вычислили эту наиболее широкую область, в которой аналитична *любая* функция $W(z_1, z_2, z_3)$, удовлетворяющая требованиям релятивистской инвариантности, спектральности и локальности.

В теории аналитических функций многих комплексных переменных существует теорема, в которой утверждается, что всюду внутри такой области эту наиболее общую функцию $W(z_1, z_2, z_3)$ можно представить в виде интеграла от самой функции, помноженной на некоторое ядро, причем интеграл берется по некоторым подмножествам меньшей размерности, состоящим из точек границы. Имея в виду физические приложения, можно было бы надеяться, что эти подмножества могут быть выбраны соответ-

ствующими физическим точкам, т. е. множествам значений аргументов, которые отвечают действительным векторам ξ_1 и ξ_2 . Челлен и Толл [419] показали, что это действительно так.

Челлен и Вильгельмсон [418] положили начало решению общей задачи определения области аналитичности функции Уайтмана $W^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ (см. также работы Стритера [743, 744]). Некоторые частные результаты для случаев $n = 4, 5$ были получены Бремерманом, Оме и Тэйлором [84], а также Клейтманом [457]. Важное значение этих исследований обусловлено тесной связью функций Уайтмана с амплитудами процессов, форм-факторами и другими наблюдаемыми (так, функция $W^{(3)}$ связана с вершинной функцией, $W^{(4)}$ — с двухчастичной амплитудой рассеяния и т. д.). Представление функции $W^{(n)}$, которое достаточно прозрачным образом выявляло бы ее сингулярности (как функции инвариантов $\zeta_i \cdot \zeta_j$), разрешенные условиями локальности, спектральности и релятивистской инвариантности, могло бы оказаться полезным также в качестве первого шага в построении нетривиальной последовательной локальной теории поля.

Очень важно выяснить, какие ограничения на функции W накладывают условия неотрицательности (т. е. нелинейные соотношения). Однако здесь, сверх замечаний Уайтмана [852, 854], прогресс был незначительным. Из этих условий следует, что фурье-образ двухточечной функции $\tilde{W}^{(2)}$ должен быть неотрицательным и не слишком быстро возрастать. Что касается трехточечной функции, то некоторые ограничения на поведение форм-факторов и вершинных функций, полученные ЛСЦ [492] (см. также статью Дрелла и Захариазена [186]), в сущности являются следствиями неравенств, выражающих неотрицательность.

Условия неотрицательности, будучи нелинейными, связывают друг с другом все функции W , и в этом состоит трудность обращения с ними. Оказывается, следствия этих нелинейных соотношений несколько легче изучать при помощи другой системы функций, которые также характеризуют теорию поля, а именно при помощи запаздывающих функций. Эти функции составляют основу формулировки теории поля, которая была дана ЛСЦ и к изложению которой мы сейчас переходим.

§ 2. Формулировка Лемана, Симанзика и Циммермана (ЛСЦ)

Множество функций Уайтмана $W^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, удовлетворяющих соотношениям (18.13), (18.14), (18.18) и (18.25), определяет локальную теорию поля. Однако если такая теория поля предназначается для описания физических явлений, то она, кроме полевых наблюдаемых $\phi(x)$, должна содержать еще наблюдаемые частиц. Минимальное требование заключается в том, чтобы теория давала все те предсказания для экспериментов по изучению столкновений, которые охватываются обычной формулировкой S -матрицы. В настоящее время стандартный подход для обеспечения этого состоит в наложении на поле $\phi(x)$ асимптотических условий. Асимптотическое условие — это требование, чтобы теория поля допускала интерпретацию в терминах асимптотических наблюдаемых, соответствующих частицам с определенными массой и зарядом. Математически асимптотическое условие выражается как требование существования пределов

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\Phi, \phi^j(t) \Psi) = (\Phi, \phi_{\text{out}}^j \Psi), \quad (18.84)$$

где $|\Phi\rangle, |\Psi\rangle$ — любые векторы пространства, в котором действуют операторы, а

$$\varphi'(t) = i \int \left\{ \varphi(x) \frac{\partial \bar{f}(x)}{\partial x^0} - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^0} \bar{f}(x) \right\} d^3x. \quad (18.85)$$

Здесь f — любое нормируемое решение уравнения Клейна — Гордона с массой μ

$$(\square + \mu^2) f(x) = 0. \quad (18.86)$$

Кроме того, молчаливо предполагается, что если $f'(x)$ — любое нормируемое решение уравнения Клейна — Гордона с массой $\mu' \neq \mu$, то предел $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\Phi, \varphi'(t) \Psi)$ равен нулю. Асимптотическое условие означает далее, что поля $\varphi_{in}(x)$ и $\varphi_{out}(x)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям и перестановочным соотношениям теории свободного поля

$$(\square + \mu^2) \varphi_{in}(x) = (\square + \mu^2) \varphi_{out}(x) = 0, \quad (18.87)$$

$$[\varphi_{in}(x), \varphi_{in}(x')] = [\varphi_{out}(x), \varphi_{out}(x')] = i\Delta(x - x'; \mu); \quad (18.88)$$

здесь μ — масса частицы, описываемой этими асимптотическими полями¹⁾.

Если поля $\varphi_{in}(x)$ и $\varphi_{out}(x)$ неприводимы и на векторы $|\Psi_0\rangle, \varphi_{in}^j |\Psi_0\rangle, \dots, \varphi_{in}^1 |\Psi_0\rangle, \varphi_{in}^2 |\Psi_0\rangle, \dots, \varphi_{in}^j |\Psi_0\rangle, \dots$ натягивается все гильбертово пространство \mathfrak{H} физических состояний, тогда соотношения (18.88) обуславливают существование унитарного оператора S (S -матрицы), такого, что

$$\varphi_{out}(x) = S^{-1} \varphi_{in}(x) S, \quad (18.89)$$

$$S^* S = S S^* = 1. \quad (18.90)$$

¹⁾ Гришберг [338] при помощи функций Уайтмана исследовал вопрос, какими дополнительными свойствами должно обладать поле, чтобы выполнялись асимптотические условия. Он показал примерно следующее. Если функции Уайтмана $\tilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1})$ ведут себя вблизи значений $p_i^2 = \mu^2$ (вблизи масс свободных частиц) не хуже δ -функции или полюса в смысле главного значения и если, кроме того, поля удовлетворяют локальным перестановочным соотношениям, т. е. если коммутатор $[\varphi(x), \varphi(y)]$ при $x_0 = y_0$ пропорционален $\delta^{(3)}(x - y)$, тогда поле будет удовлетворять асимптотическим условиям (см. также работы Циммермана [876] и Редмонда и Урецкого [663]).

Асимптотическое условие при $t \rightarrow \pm\infty$ можно рассматривать как требование, чтобы эффективное взаимодействие между двумя частицами обращалось в нуль, когда расстояние между ними $R \rightarrow \infty$. Поэтому асимптотическому условию для $t \rightarrow \pm\infty$ можно придать вид асимптотического условия для больших R при конечных временах (см. работы Гаага [349, 351]). Араки [12] доказал, что при обычных предположениях аксиоматического подхода (включая локальность) усеченные функции Уайтмана с равными временами экспоненциально стремятся к нулю, когда наибольшее расстояние R между точками стремится к бесконечности, причем показатель степени равен mR , где m — наименьшая масса, имеющаяся в теории (см. также статью Делль Антонио и Гюльманелли [160]). Усеченные функции Уайтмана $W_T^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ суть такие средние по вакууму от произведений операторов, из которых симметричным образом вычтен вклад от вакуумных промежуточных состояний:

$$W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = W_T^{(n)}(x_1, \dots, x_n) + \sum W_T^{(k)}(x_1, \dots, x_k) \dots W_T^{(n-k)}(\dots, x_n).$$

В этой рекуррентной формуле сумма распространяется по всем разбиениям n точек x_1, \dots, x_n на более чем одну группу, причем порядок точек x_1, \dots, x_n в правой части тот же, что и в левой.

Леман, Симанзик и Циммерман [491, 493] провели анализ релятивистских теорий поля, в которых выполнены аксиомы I—IV и асимптотические условия, с помощью средних по вакууму как от хронологически упорядоченных, так и от запаздывающих произведений операторов поля, поскольку эти произведения более удобны для изучения следствий из асимптотических условий. Асимптотические условия приводят к некоторым рекуррентным соотношениям для матричных элементов этих произведений. Некоторые свойства этих произведений вытекают из релятивистской инвариантности, спектральности и локальности, как и в случае функций Уайтмана. Кроме того, для этих средних по вакууму можно вывести систему зацепляющихся уравнений — аналог соотношений неотрицательности в формулировке Уайтмана. При выводе этих зацепляющихся уравнений явно используются асимптотические условия и то, что многообразие физических состояний образует гильбертово пространство.

Изложить формализм ЛСЦ можно двумя путями. Во-первых, можно принять аксиомы формулировки Уайтмана (о существовании гильбертова пространства \mathfrak{H} , трансформационных свойствах операторов поля и локальности) и дополнить их предположением (или постулатом), что операторы поля удовлетворяют асимптотическим условиям. Дальнейший анализ будет состоять в изучении следствий этих аксиом для функций

$$\tau^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (\Psi_0, T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) \Psi_0), \quad (18.91)$$

называемых хронологически упорядоченными, или τ -функциями, или для функций

$$r^{(n+1)}(x; x_1, \dots, x_n) = (-i)^n \sum_{\text{по перестановкам}} \theta(x - x_1) \dots \\ \dots \theta(x_{n-1} - x_n) (\Psi_0, [\dots [\varphi(x), \varphi(x_1)], \dots \varphi(x_n)] \Psi_0), \quad (18.92)$$

называемых запаздывающими, или r -функциями. [В выражении (18.92) сумма распространяется по всем перестановкам чисел $1, \dots, n$.] В частности, можно попытаться выяснить, будет ли для τ - или r -функций справедлива теорема, подобная той, которую доказал Уайтман для функций W , а именно можно ли по заданной системе r - и τ -функций, удовлетворяющих определенным условиям, восстановить теорию поля, в которой эти функции были бы средними по вакууму от запаздывающих или хронологически упорядоченных произведений операторов поля. Такой подход развивается в ЛСЦ I [491]. При этом в качестве основных величин берутся гейзенберговские операторы. Во-вторых, можно попытаться, следуя оригинальной идее Гейзенберга [372, 373], основывать формализм целиком на требованиях, налагаемых на S -матрицу, т. е. рассматривать ин- и аут-поля как основные величины, а гейзенберговские поля как производные. Этот подход был принят в ЛСЦ II [493] (см. также работы Боголюбова и др. [65, 66, 67]).

Изложим кратко второй подход. Цель теории в этом случае — релятивистски инвариантно описать только окончательные результаты экспериментов, в которых в начале и в конце частицы не взаимодействуют. Поэтому начальные и конечные состояния представляются векторами, соответствующими свободным частицам. S -матрица есть унитарный оператор, который отображает гильбертово пространство ин-состояний $|\Psi\rangle_{\text{in}}$ на пространство аут-состояний $|\Psi\rangle_{\text{out}}$. При помощи этой матрицы обычным образом вычисляются амплитуды переходов. Для простоты мы

изложим формулировку ЛСЦ на примере модели, в которой имеется один сорт стабильных нейтральных частиц с массой μ и спином 0. (Отметим, что масса и спин рассматриваются как заданные параметры!) Будем предполагать также, что нет связанных состояний. Что касается математической стороны теории, то вводятся два поля: $\varphi_{\text{in}}(x) = \varphi_{\text{in}}^*(x)$ и $\varphi_{\text{out}}(x) = \varphi_{\text{out}}^*(x)$, которые удовлетворяют свободным уравнениям

$$(\square + \mu^2) \varphi_{\text{in}}(x) = (\square + \mu^2) \varphi_{\text{out}}(x) = 0 \quad (18.93a)$$

и перестановочным соотношениям

$$[\varphi_{\text{in}}(x), \varphi_{\text{in}}(y)] = [\varphi_{\text{out}}(x), \varphi_{\text{out}}(y)] = i\Delta(x-y; \mu). \quad (18.93b)$$

Эти поля описывают асимптотически свободные приходящие (ин-) и уходящие (аут-) частицы. Так как ин- и аут-поля удовлетворяют свободным уравнениям (18.93), то они представляются следующими интегралами Фурье:

$$\varphi_{\text{out}}^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k e^{-ik \cdot x} \delta(k^2 - \mu^2) \tilde{\varphi}_{\text{out}}^*(k), \quad (18.94)$$

где, согласно предположению об эрмитовости операторов $\varphi_{\text{in}}(x)$,

$$\tilde{\varphi}_{\text{out}}^*(k) = \tilde{\varphi}_{\text{in}}(-k). \quad (18.95)$$

С помощью этих операторов можно построить полную систему приходящих и уходящих (ин- и аут-) состояний. В частности, приходящее (ин-) состояние n частиц с импульсами $k_1 = (\sqrt{k_1^2 + \mu^2}, \mathbf{k}_1)$, k_2, \dots, k_n записывается как результат действия ин-операторов на вакуумное состояние $|\Psi_0\rangle$

$$|k_1, \dots, k_n\rangle_{\text{in}} = \frac{1}{\sqrt{n!}} a_{\text{in}}^*(k_1) \dots a_{\text{in}}^*(k_n) |\Psi_0\rangle. \quad (18.96)$$

Оператор $a_{\text{in}}^*(k)$ определяют, представляя поле $\varphi_{\text{in}}(x)$ в виде следующего инвариантного интеграла Фурье:

$$\varphi_{\text{in}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{2k_0} \{a_{\text{in}}(k) e^{-ik \cdot x} + a_{\text{in}}^*(k) e^{+ik \cdot x}\}. \quad (18.97)$$

Сравнивая (18.97) с (18.94), находим

$$a_{\text{in}}(k) = \tilde{\varphi}_{\text{in}}(k), \quad k_0 > 0, \quad (18.98a)$$

$$a_{\text{in}}^*(k) = \tilde{\varphi}_{\text{in}}(-k), \quad k_0 > 0. \quad (18.98b)$$

Перестановочные соотношения для операторов a_{in} такие же, как для соответствующих операторов свободного поля:

$$[a_{\text{in}}(k), a_{\text{in}}^*(k')] = 2k_0 \delta^{(3)}(k - k'), \quad (18.99a)$$

$$[a_{\text{in}}(k), a_{\text{in}}(k')] = [a_{\text{in}}^*(k), a_{\text{in}}^*(k')] = 0. \quad (18.99b)$$

Аналогично можно ввести аут-операторы a_{out} и определить уходящие (аут-) состояния. Разложение по плоским волнам (18.97) даст ненормируемые векторы состояния $|k_1, \dots, k_n\rangle_{\text{in}}$. Часто бывает удобно, а для математической (и физической!) строгости и необходимо заменить континуум амплитуд плоских волн в интеграле (18.97) дискретной последо-

вательностью $\{f_\alpha\}$ положительно-частотных решений уравнения Клейна — Гордона. Свойства этой последовательности $\{f_\alpha\}$ следующие:

а) ортонормированность

$$-i \int d^3x \left\{ f_\alpha(x) \frac{\partial \bar{f}_\beta(x)}{\partial x^0} - \frac{\partial f_\alpha(x)}{\partial x^0} \bar{f}_\beta(x) \right\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (18.100)$$

б) полнота

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} f_\alpha(x) \bar{f}_\alpha(x') = i\Delta^{(+)}(x-x'; \mu). \quad (18.101)$$

Произвольный эрмитов оператор $A(x)$ раскладывается по функциям $f_\alpha(x)$ следующим образом:

$$A(x) = \sum_{\alpha} \{ f_\alpha(x) A^\alpha(x_0) + \bar{f}_\alpha(x) A^{\alpha*}(x_0) \}, \quad (18.102)$$

где

$$A^\alpha(x_0) = i \int d^3x A(x) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} \bar{f}_\alpha(x). \quad (18.103)$$

В случае $A(x) = \varphi_{\text{out}}^{\text{in}}(x)$ оператор $\varphi_{\text{in}}^{\alpha}(x_0)$ от времени не зависит и будет обозначаться $\varphi_{\text{out}}^{\alpha}$. Эти операторы рождают приходящие (уходящие) частицы в состоянии f_α . Для состояний, получающихся при действии этих операторов на вакуум и образующих полный набор, примем обозначение

$$|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\rangle_{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \varphi_{\text{in}}^{\alpha_1*} \varphi_{\text{in}}^{\alpha_2*} \dots \varphi_{\text{in}}^{\alpha_n*} | \Psi_0 \rangle. \quad (18.104)$$

S -матрица есть унитарный оператор, связывающий приходящие (ин-) и уходящие (аут-) состояния:

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle_{\text{in}} = S |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle_{\text{out}}, \quad (18.105)$$

или, равносильно,

$$\varphi_{\text{out}}(x) = S^{-1} \varphi_{\text{in}}(x) S, \quad (18.106)$$

причем

$$S^* S = S S^* = 1. \quad (18.107)$$

Такая теория является феноменологической в том смысле, что она определяется заданием S -матрицы. По соображениям математического удобства введем оператор η

$$S = e^{i\eta}. \quad (18.108)$$

Оператор фазы η эрмитов, вследствие чего S -матрица унитарна. Конкретная реализация S -матрицы осуществляется путем задания c -числовых функций $h_n(x_1, \dots, x_n)$, через которые оператор фазы η записывается в виде

$$\eta = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n h_n(x_1, \dots, x_n) : \varphi_{\text{out}}(x_1) \dots \varphi_{\text{out}}(x_n) :. \quad (18.109)$$

Сумма в (18.109) начинается с $n=4$, так как первым реальным процессом, который должна описывать S -матрица, является упругое рассеяние частицы на частице. Мы будем предполагать, что функции $h_n(x_1, \dots, x_n)$

ведут себя достаточно хорошо, так что существуют их фурье-образы $\tilde{h}'_n(k_1, \dots, k_n)$, определяемые согласно

$$h_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{5n/2}} \int d^4k_1 \dots \int d^4k_n e^{i \sum_{j=1}^n k_j \cdot x_j} \tilde{h}'_n(k_1, \dots, k_n). \quad (18.110)$$

Если в формулу (18.109) подставить это представление h_n интегралом Фурье и такое же представление (18.94) для операторов $\Phi_{\text{in}}^{\text{out}}$, то матрица η запишется в виде

$$\eta = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4k_1 \dots \int d^4k_n \times \\ \times \tilde{h}'_n(k_1, \dots, k_n) \delta(k_1^2 - \mu^2) \dots \delta(k_n^2 - \mu^2) : \tilde{\Phi}_{\text{in}}(k_1) \dots \tilde{\Phi}_{\text{in}}(k_n) :. \quad (18.111)$$

Существенно, как это видно из выражения (18.111), что в определение S -матрицы величины \tilde{h}'_n входят взятыми только на массовой поверхности ($k_i^2 = \mu^2$). Вне массовой поверхности эти функции могут быть выбраны произвольным образом. Другими словами, задание S -матрицы не определяет функции $h_n(x_1, \dots, x_n)$ однозначно.

Предположение об инвариантности S -матрицы относительно произвольных неоднородных преобразований Лоренца

$$U(a, \Lambda) S U^{-1}(a, \Lambda) = S \quad (18.112)$$

означает, что

$$\tilde{h}'_n(k_1, \dots, k_n) = \delta(k_1 + \dots + k_n) \tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n) \quad (18.113a)$$

(трансляционная инвариантность),

$$\tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n) = \tilde{h}_n(\Lambda k_1, \dots, \Lambda k_n). \quad (18.113b)$$

Отсюда следует, что функции \tilde{h}_n зависят только от скалярных произведений $k_i \cdot k_j$. Кроме того, очевидно, что в силу эрмитовости оператора фазы η и оператора поля Φ

$$\overline{\tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n)} = \tilde{h}_n(-k_1, \dots, -k_n), \quad (18.114)$$

а также что благодаря свойству симметрии нормального произведения функция $\tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n)$ симметрична:

$$\tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n) = \mathcal{P} \tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n), \quad (18.115)$$

где \mathcal{P} — оператор любой перестановки совокупности чисел $1, 2, \dots, n$. Если теория SPT -инвариантна, то функция \tilde{h}_n будет действительной и в силу (18.114)

$$\tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n) = \tilde{h}_n(-k_1, \dots, -k_n). \quad (18.116)$$

Наконец, чтобы наблюдаемые величины, такие, как эффективные сечения рассеяния и реакций, были конечными, функции $\tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n)$ не должны содержать каких-либо четырехмерных δ -функций; кроме того, функции $\tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n)$ должны быть непрерывными функциями своих инвариантных переменных. Требования к функциям \tilde{h}_n формулировались выше только на массовой поверхности, т. е. когда $k_i^2 = \mu^2$. Однако поскольку за пределы массовой поверхности можно экстраполировать их

как угодно, то можно потребовать, чтобы свойства симметрии и ответственности соблюдались и вне массовой поверхности.

Пусть заданы ин-поле φ_{in} и S -матрица, которая, кстати, также может быть представлена в виде

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \sigma_n(x_1, \dots, x_n) : \varphi_{\text{in}}(x_1) \dots \varphi_{\text{in}}(x_n) :, \quad (18.117)$$

где функции σ_n имеют свойства, аналогичные обсуждавшимся выше свойствам функций h_n ¹⁾. Аут-поле $\varphi_{\text{out}}(x)$ связано с полем $\varphi_{\text{in}}(x)$ согласно

$$\varphi_{\text{out}}(x) = S^{-1} \varphi_{\text{in}}(x) S. \quad (18.118)$$

Это соотношение можно также переписать в виде

$$\varphi_{\text{out}}(x) = \varphi_{\text{in}}(x) + S^{-1} [\varphi_{\text{in}}(x), S]. \quad (18.119)$$

В силу перестановочных соотношений $[\varphi_{\text{in}}(x), \varphi_{\text{in}}(x')] = i\Delta(x - x'; \mu)$ для любой операторной функции O от φ_{in} формально можно написать

$$[\varphi_{\text{in}}(x), O] = i \int d^4x' \Delta(x - x'; \mu) \frac{\delta}{\delta \varphi_{\text{in}}(x')} O. \quad (18.120)$$

(Вспомните определение функциональной производной в § 5 гл. 7.) В частном случае $O = \varphi_{\text{in}}(y)$

$$\frac{\delta}{\delta \varphi_{\text{in}}(x')} \varphi_{\text{in}}(y) = \delta^{(4)}(x' - y), \quad (18.121)$$

и соотношение (18.120) приводит к правильному выражению для коммутатора. С помощью операции функционального дифференцирования соотношение (18.119) можно записать в виде

$$\varphi_{\text{out}}(x) = \varphi_{\text{in}}(x) + i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x' \Delta(x - x') S^{-1} \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\text{in}}(x')} \quad (18.122a)$$

$$= \varphi_{\text{in}}(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x' \Delta(x - x') j(x'), \quad (18.122b)$$

где оператор тока $j(x)$ определен при помощи равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x' \Delta(x - x') j(x) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x' \Delta(x - x') S^{-1} \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\text{in}}(x')}. \quad (18.123)$$

Следует подчеркнуть, что для того, чтобы определить оператор тока $j(x)$ выражением

$$j(x) = -i S^{-1} \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\text{in}}(x)}, \quad (18.124)$$

нужно конкретизировать экстраполяцию функций \tilde{h}_n или $\tilde{\sigma}_n$ за пределы массовой поверхности [тогда как, если задан оператор S , величина $\int \Delta(x - x') S^{-1} \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\text{in}}(x')}$ определена однозначно].

¹⁾ Однако требование унитарности не выражается через σ_n простым образом. Оно принимает вид нелинейного соотношения, перепутывающего все функции σ_n .

Доказательство: Если воспользоваться соотношением

$$\int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} [e^{-i\lambda\eta} \varphi_{\text{in}}(x) e^{i\lambda\eta}] = i \int_0^1 d\lambda e^{-i\lambda\eta} [\varphi_{\text{in}}(x), \eta] e^{i\lambda\eta} = \\ = \varphi_{\text{out}}(x) - \varphi_{\text{in}}(x), \quad (18.125)$$

то уравнение (18.1226) можно также записать в виде

$$\varphi_{\text{out}}(x) = \varphi_{\text{in}}(x) - \int_0^1 d\lambda \int \Delta(x-x') e^{-i\lambda\eta} \vartheta(x') e^{i\lambda\eta} d^4x', \quad (18.126)$$

где

$$\vartheta(x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n h_{n+1}(x', x_1, \dots, x_n) : \varphi_{\text{in}}(x_1) \dots \varphi_{\text{in}}(x_n) :. \quad (18.127)$$

Из этого последнего выражения¹⁾ видно, что для того, чтобы ток $j(x)$ был определен при всех x , функции $\tilde{h}_{n+1}(k, k_1, \dots, k_n)$ ($n=0, 1, \dots$) должны быть определены и при $k^2 \neq \mu^2$. Пока эта экстраполяция за пределы массовой поверхности не была ограничена ничем, кроме требования, чтобы все соотношения симметрии, справедливые на массовой поверхности, выполнялись всюду.

Леман, Симанзик и Циммерман определили далее оператор поля

$$\varphi(x) = \varphi_{\text{in}}(x) + \int d^4x' \Delta_R(x-x') j(x'), \quad (18.128a)$$

$$j(x) = (\square + \mu^2) \varphi(x). \quad (18.128b)$$

Этот оператор, по-видимому, определен корректно, поскольку ни одна из операций, используемых для построения его из S и φ_{in} , не ведет к каким-либо расходимостям. Если функции $\tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n)$ вне массовой поверхности удовлетворяют условиям симметрии (18.113) — (18.116), то тогда поле $\varphi(x)$ при преобразованиях Лоренца будет преобразовываться, как скаляр, и будет эрмитовым. Кроме того, благодаря требованиям непрерывности, предъявляемым к $\tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n)$ и к процедуре экстраполяции, оператор $\varphi(x)$ будет удовлетворять асимптотическому условию

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\Phi, \varphi^f(t) \Psi) = (\Phi, \varphi_{\text{in}}^f \Psi), \quad (18.129a)$$

где

$$\varphi^f(t) = i \int d^3x \left\{ \varphi(x) \frac{\partial \bar{f}(x)}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_0} \bar{f}(x) \right\}. \quad (18.129b)$$

В формуле (18.129b) функция $f(x)$ есть любое нормируемое решение уравнения Клейна — Гордона с массой μ . Существование этого предела является теперь простым следствием леммы Римана — Лебега для интегралов Фурье и вытекает из предполагаемой непрерывности функций $\tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n)$ вблизи массовой поверхности. Однако подчеркнем, что при заданной

1) Хотя функции $\tilde{h}_j(k_1, \dots, k_j)$ с номерами $j=1, 2, 3$ на массовой поверхности равны нулю, не обязательно, конечно, чтобы и их экстраполированные значения также тождественно равнялись нулю. Поэтому в соотношении (18.127) сумма начинается с $n=0$.

S -матрице соотношение (18.128) определяет поле $\varphi(x)$ неоднозначно. Эта неоднозначность отражает произвол в экстраполяции функций \tilde{h}_n за пределы массовой поверхности. Существует много интерполирующих взаимодействующих полей, соответствующих данной S -матрице и удовлетворяющих слабому асимптотическому условию $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi'(t) = \varphi_{\text{in}}^{\text{out}}$. Последнее

требование означает, что функции $\tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n)$ должны быть конечными и непрерывными вблизи $k_i^2 = \mu^2$. Однако, вообще говоря, интерполирующие поля не будут локальными. Но дальнейшее требование, предъявляемое к $\tilde{h}_n(k_1, \dots, k_n)$ и к процедуре экстраполяции за пределы массовой поверхности, чтобы получить

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = 0 \quad \text{при} \quad (x - x')^2 < 0, \quad (18.130)$$

оказывается весьма жестким. Как уже отмечалось выше, известно (см. работы Циммермана [876], Редмонда и Урецкого [663], Каплуна [432, 433], а также диссертацию Гринберга [338]), что если имеется локальное гейзенберговское поле, подчиняющееся каноническим перестановочным соотношениям, т. е. одновременно $(x_0 = x'_0)$ коммутатор $[\varphi(x), \varphi(x')]$ есть c -число, пропорциональное $\delta^{(3)}(x - x')$, то ин-поле, определяемое согласно

$$\varphi_{\text{in}}(x) = \varphi(x) - \int d^4x' \Delta_R(x - x') (\square_{x'} + \mu^2) \varphi(x'), \quad (18.131)$$

удовлетворяет перестановочным соотношениям для свободного поля. (По самому определению ин-поля (18.131) оно удовлетворяет свободному уравнению.) Таким образом, локальность и канонические перестановочные соотношения суть достаточные условия для существования асимптотических полей. Однако эти условия не необходимы, так как известно (по крайней мере в наименьшем нетривиальном порядке теории возмущений), что асимптотический предел существует даже в нелокальных теориях поля (см. работу Кристенсена и Меллера [463]).

S -матрицу называют причинной, если существует хотя бы одна экстраполяция, приводящая к локальному интерполирующему полю $\varphi(x)$. В настоящее время не известно, существует ли вообще какая-либо матрица рассеяния, порождающая локальную теорию поля с оператором $\varphi(x)$, кроме тривиального случая $S = 1$ и $\varphi(x) = \varphi_{\text{in}}(x) = \varphi_{\text{out}}(x)$. Однако вопрос, к каким следствиям для наблюдаемых величин приводит гипотеза о локальности интерполирующего поля $\varphi(x)$, поддается изучению. До сих пор мы излагали «феноменологический» вариант формализма ЛСЦ, в котором за основу принимаются ин- и аут-поля, а затем по ним находится интерполирующее поле $\varphi(x)$. Однако подход, при котором за основу берется гейзенберговское поле, более фундаментален и представляется более подходящим для штурма проблемы описания взаимодействий между элементарными частицами. При таком подходе естественней всего начать с изучения теории, в которой операторы поля с самого начала предполагаются локальными. Поэтому вместе с ЛСЦ перейдем к изучению общих свойств релятивистски инвариантных локальных теорий поля, удовлетворяющих асимптотическим условиям. ЛСЦ выяснили, и это один из важнейших их результатов, что как следствие асимптотических условий могут быть выведены так называемые формулы приведения для R - и T -произведений операторов гейзенберговского поля.

Запаздывающее произведение двух операторов определяется так:

$$R(x; y) = R(\varphi(x) \varphi(y)) = -i\theta(x - y) [\varphi(x), \varphi(y)]. \quad (18.132)$$

Как обобщение запаздывающее произведение $n + 1$ операторов определяется ¹⁾:

$$n = 0, R(x) = \varphi(x),$$

$$n \geq 1, R(x; x_1, \dots, x_n) = (-i)^n \sum_P \theta(x - x_1) \dots \theta(x_{n-1} - x_n) \times \\ \times [\dots [\varphi(x), \varphi(x_1)], \varphi(x_2)], \dots \varphi(x_n)], \quad (18.133)$$

где суммирование идет по всем перестановкам n координат x_i . Среднее по вакууму от $R(x; x_1, \dots, x_n)$ будет обозначаться через $r(x; x_1, \dots, x_n)$:

$$r(x; x_1, \dots, x_n) = (\Psi_0, R(x; x_1, \dots, x_n) \Psi_0). \quad (18.134)$$

Непосредственно из определения R -функций вытекают следующие их свойства:

а) *свойство запаздывания*: функция $R(x; x_1, \dots, x_n)$ равна нулю, если какое-либо из времен x_{i_0} больше x_0 ;

б) *свойство симметрии*: функция $R(x; x_1, \dots, x_n)$ симметрична по x_1, \dots, x_n ;

в) *свойство эрмитовости*: R -произведение эрмитовых операторов эрмитово.

Кроме того, запаздывающее произведение лоренц-ковариантных и локальных операторов поля $\varphi(x)$ ковариантно относительно преобразований Лоренца.

Доказательство: Для простоты сперва рассмотрим запаздывающее произведение двух операторов $R(x; y)$. По предположению,

$$U(a, \Lambda) \varphi(x) U^{-1}(a, \Lambda) = \varphi(\Lambda x + a). \quad (18.135)$$

Очевидно, что при сдвигах $\theta(x - y) = \theta(x + a - y - a)$ и

$$U(a, 1) R(x; y) U^{-1}(a, 1) = R(x + a; y + a), \quad (18.136)$$

так что, например, $r(x; y) = r(x - y)$. И вообще благодаря трансляционной инвариантности все функции $r(x; x_1, \dots, x_n)$ зависят только от разностей координат $x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_n$

$$r(x; x_1, \dots, x_n) = r(x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_n). \quad (18.137)$$

Далее, при однородных преобразованиях Лоренца пространственно-подобный вектор остается пространственно-подобным, а времени-подобный — времени-подобным. Кроме того, при ортохронных преобразованиях времени-подобного вектора $x - y$ имеем $\theta(x - y) = \theta(\Lambda(x - y))$. Поскольку произведение $R(x; y)$ отлично от нуля, только когда $x - y$ — времени-подобный или изотропный вектор, то с учетом локальности оператора $\varphi(x)$ ($[\varphi(x), \varphi(y)] = 0$ при $(x - y)^2 < 0$) получаем

$$U(\Lambda) R(x; y) U^{-1}(\Lambda) = -i\theta(x - y) [\varphi(\Lambda x), \varphi(\Lambda y)] = \\ = -i\theta(\Lambda(x - y)) [\varphi(\Lambda x), \varphi(\Lambda y)] = R(\Lambda x; \Lambda y), \quad (18.138)$$

¹⁾ Запаздывающее произведение различных Бозе-полей определяется согласно $R^{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{n+1}}(x_1; x_2, \dots, x_{n+1}) =$

$$= (-i)^n \sum_P \theta(x_1 - x_{i_2}) \dots \theta(x_{i_n} - x_{i_{n+1}}) [\dots [\varphi_1(x_1), \varphi_{i_2}(x_{i_2})], \dots \varphi_{i_{n+1}}(x_{i_{n+1}})],$$

где суммирование проводится по всем перестановкам P чисел $2, \dots, n+1$. Заметим, что поле φ_1 снова выделено.

так что

$$r(x; y) = r(\Lambda x; \Lambda y) = r(\Lambda(x - y)). \quad (18.139)$$

Доказательство ковариантности запаздывающего произведения более чем двух операторов относительно однородных преобразований Лоренца нетривиально и требует многократного применения тождеств Якоби. На самом деле удобным инструментом для доказательства релятивистской инвариантности запаздывающего произведения более чем двух операторов, а также для изучения формальных аспектов теории в целом являются производящие функционалы (см. работы Швингера [715, 722], Симанзика [760, 764] и книгу Боголюбова и Ширкова [67]). Вообще говоря, для производящих функционалов не предполагается какой-либо иной смысл, кроме формального. Производящий функционал для запаздывающего произведения операторов можно получить из унитарного функционала

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{J\} &= T \exp\left(i \int d^4x J(x) \varphi(x)\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n J(x_1) \dots J(x_n) T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)), \end{aligned} \quad (18.140)$$

где $J(x)$ — функция источников, которая играет чисто вспомогательную роль (см., однако, работы Швингера [715, 722]), а T — оператор хронологического упорядочивания Вика. Попутно напомним, что операция хронологического упорядочивания релятивистски инвариантна, если $[\varphi(x), \varphi(x')] = 0$ при $(x - x')^2 < 0$. При применении функционала $\mathfrak{F}\{J\}$ заранее предполагается, что произведения

$$T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{перестановкам}}} \theta(x_1 - x_2) \dots \theta(x_{n-1} - x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \quad (18.141)$$

хорошо определены. Оказывается, что для того, чтобы эти произведения были хорошо определены, достаточно иметь хорошо определенные средние по вакууму от обычных произведений операторов, т. е. функции Уайтмана, а, говоря более точно, последние произведения должны быть обобщенными функциями умеренного роста [876, 13, 764, 740].

Запаздывающее произведение операторов $R(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n))$ можно теперь получить из функционала

$$\Re(x; J) = -i \mathfrak{F}^* \{J\} \frac{\delta}{\delta J(x)} \mathfrak{F}\{J\} \quad (18.142)$$

как результат функционального дифференцирования

$$R(x; x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \Re(x; J)}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (18.143)$$

Для иллюстрации этих замечаний сперва рассмотрим случай $n=0$. Поскольку

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \mathfrak{F}\{J\} = iT(\varphi(x) \mathfrak{F}\{J\}), \quad (18.144)$$

то

$$\begin{aligned} R(x) &= \Re(x; J) \Big|_{J=0} = \\ &= -i \mathfrak{F}^* \{J\} iT(\varphi(x) \mathfrak{F}\{J\}) \Big|_{J=0} = \\ &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (18.145)$$

Аналогично и при $n = 1$, поскольку

$$\frac{\delta \Re(x; J)}{\delta J(x_1)} = -i \left(\frac{\delta \mathfrak{X}^* \{J\}}{\delta J(x_1)} \frac{\delta \mathfrak{X} \{J\}}{\delta J(x)} + \mathfrak{X}^* \{J\} \frac{\delta^2 \mathfrak{X} \{J\}}{\delta J(x_1) \delta J(x)} \right), \quad (18.146)$$

то

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \Re(x; J)}{\delta J(x_1)} \right|_{J=0} &= -i [\varphi(x_1) \varphi(x) - T(\varphi(x_1) \varphi(x))] = \\ &= -i \theta(x - x_1) [\varphi(x), \varphi(x_1)] \end{aligned} \quad (18.147)$$

и т. д. Трансформационные свойства функционала $\mathfrak{X} \{J\}$

$$U(a, \Lambda) \mathfrak{X} \{J\} U^{-1}(a, \Lambda) = T \left(i \int d^4 x J(\Lambda^{-1}(x - a)) \varphi(x) \right) \quad (18.148)$$

позволяют сразу же сделать вывод, что

$$U(\Lambda) R(x; x_1, \dots, x_n) U^{-1}(\Lambda) = R(\Lambda x; \Lambda x_1, \dots, \Lambda x_n) \quad (18.149a)$$

и, следовательно,

$$r(x; x_1, \dots, x_n) = r(\Lambda x; \Lambda x_1, \dots, \Lambda x_n). \quad (18.149b)$$

Таким образом, функции $r(x; x_1, \dots, x_n)$ являются лоренц-инвариантными обобщенными функциями. Кроме того, благодаря свойству запаздывания r -функции $r(x; x_1, \dots, x_n) = r(x - x_1, \dots, x - x_n)$ равны нулю, когда векторы $\xi_1 = x - x_1, \dots, \xi_n = x - x_n$ лежат вне светового конуса будущего. В силу таких свойств сосредоточенности¹⁾ r -функции в пространстве-времени ее фурье-образ

$$\tilde{r}(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int d^4 \xi_1 \dots \int d^4 \xi_n e^{i \sum p_j \cdot \xi_j} r(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (18.150)$$

является граничным значением аналитической функции. Область аналитичности этой функции в пространстве переменных z_{ij} , являющихся скалярными произведениями комплексных векторов p_1, \dots, p_n , по меньшей мере такая же, как область аналитичности функции Уайтмана $W^{(n+1)}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ в пространстве переменных $z_{ij} = \xi_i \cdot \xi_j$. Это было непосредственно показано Челленом и Уайтманом [417] для случая $n = 3$ и Клейтманом [457] для случаев $n = 4$ и 5. Араки [13] провел систематическое исследование общего случая и нашел также необходимые и достаточные условия, при которых запаздывающие функции можно получить из функций Уайтмана (см. также работы Циммермана [878] и Штейнмана [740]).

Дополнительно к приведенным выше (линейным) свойствам запаздывающие функции удовлетворяют системе нелинейных уравнений, которые связывают функции различных порядков и являются следствием операторного тождества

$$\begin{aligned} R(x; y, x_1, \dots, x_n) - R(y; x, x_1, \dots, x_n) = \\ = \sum_{i_1, \dots, i_n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} [R(x; x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), R(y; x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n})]. \end{aligned} \quad (18.151)$$

Соотношение (18.151) можно проверить, если учесть что функционал $\Re(x; J)$ на основании его определения (18.142) удовлетворяет следу-

¹⁾ Термин «свойства сосредоточенности» («support properties») означает, что функция имеет носитель, не совпадающий со всем пространством. — Прим. ред.

ющему функциональному уравнению:

$$\frac{\delta \Re(x; J)}{\delta J(y)} - \frac{\delta \Re(y; J)}{\delta J(x)} = -[\Re(x; J), \Re(y; J)]. \quad (18.152)$$

Доказательство: Для доказательства нужно воспользоваться соотношением (18.146) и учесть, что функционал $\mathfrak{F}\{J\}$ является унитарным, т. е. что $\mathfrak{F}^*\{J\} = \mathfrak{F}^{-1}\{J\}$, и, следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} (\mathfrak{F}^*\{J\} \mathfrak{F}\{J\}) = 0. \quad (18.153)$$

Прежде чем продолжать характеризовать запаздывающие функции, выведем рекуррентные соотношения ЛСЦ, вытекающие из асимптотических условий. Сначала докажем соотношение

$$[R(x; x_1, \dots, x_n), \Phi_{in}(z)] = i \int d^4 z' \Delta(z - z') K_z R(x; x_1, \dots, x_n, z'), \quad (18.154)$$

где $K_x = \square + \mu^2$.

Доказательство: Рассмотрим матричный элемент

$$\begin{aligned} (\Phi, [R(x; x_1, \dots, x_n), \Phi_{in}^*] \Psi) &= \\ &= i \int d^3 z (\Phi, [R(x; x_1, \dots, x_n), \Phi_{in}(z)] \Psi) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_0}} f_\alpha(z). \end{aligned} \quad (18.155)$$

Асимптотические условия позволяют переписать правую часть (18.155) следующим образом:

$$\begin{aligned} i \int d^3 z (\Phi, [R(x; x_1, \dots, x_n), \Phi_{in}(z)] \Psi) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_0}} f_\alpha(z) &= \\ &= i \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} \int d^3 z (\Phi, [R(x; x_1, \dots, x_n), \Phi(z)] \Psi) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_0}} f_\alpha(z) \end{aligned} \quad (18.156a)$$

$$= - \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} \int d^3 z (\Phi, R(x; x_1, \dots, x_n, z) \Psi) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_0}} f_\alpha(z) \quad (18.156b)$$

При получении (18.156b) мы учли, что z_0 стремится к $-\infty$ и поэтому предшествует всем временам x_0, \dots, x_{0n} , так что в подынтегральное выражение в правой части (18.156a) можно добавить множитель $\theta(x - z)$. Для получения $R(x; x_1, \dots, x_n, z)$ нужно к $[R(x; x_1, \dots, x_n), \Phi(z)]$ добавить еще ряд членов (соответствующих перестановкам x_1, \dots, x_n, z), которые, однако, равны нулю, поскольку z_0 предшествует всем временам $x_0, x_{10}, \dots, x_{n0}$. При помощи процедуры, уже применявшейся в § 4 гл. 17, можно теперь записать

$$\begin{aligned} \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} \int d^3 z (\Phi, R(x; x_1, \dots, x_n, z) \Psi) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_0}} f_\alpha(z) &= \\ &= \lim_{z_0 \rightarrow +\infty} \int d^3 z (\Phi, R(x; x_1, \dots, x_n, z) \Psi) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_0}} f_\alpha(z) - \\ &- \int d^3 z \int_{-\infty}^{+\infty} dz_0 \frac{\partial}{\partial z_0} \left\{ (\Phi, R(x; x_1, \dots, x_n, z) \Psi) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_0}} f_\alpha(z) \right\}. \end{aligned} \quad (18.157)$$

Первый член в правой части (18.157) вклада не вносит, так как в нем $z_0 \rightarrow +\infty$, а запаздывающее произведение $R(x; x_1, \dots, x_n, z)$ равно

нулю, если какое-либо из времен $x_{10}, \dots, x_{n_0, z_0}$ больше x_0 . Учтя это и выполняя указанное дифференцирование, получаем

$$\begin{aligned} (\Phi, [R(x; x_1, \dots, x_n), \varphi_{in}^{\alpha*}] \Psi) = \\ = \int d^4 z f_{\alpha}(z) K_z (\Phi, R(x; x_1, \dots, x_n, z) \Psi). \end{aligned} \quad (18.158)$$

При выводе формулы (18.158) вторая производная $\frac{\partial^2 f_{\alpha}(z)}{\partial z_0^2}$ с помощью уравнения Клейна—Гордона, которому удовлетворяет $f_{\alpha}(z)$, была заменена выражением

$$\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} f_{\alpha}(z) = (\nabla^2 - \mu^2) f_{\alpha}(z) \quad (18.159)$$

и после этого было выполнено интегрирование по частям. Умножая формулу (18.158) на $\bar{f}_{\alpha}(x)$, суммируя по α и складывая результат с выражением, комплексно сопряженным ему, окончательно приходим к формуле (18.154). При помощи итераций формулы (18.154) получим

$$\begin{aligned} [\dots [R(x; x_1, \dots, x_m), \Phi_{in}(z_1)], \Phi_{in}(z_2)], \dots, \Phi_{in}(z_n)] = \\ = i^n \int d^4 z'_1 \dots \int d^4 z'_n \Delta(z_1 - z'_1) \dots \Delta(z_n - z'_n) K_{z'_1} \dots K_{z'_n} R(x; x_1, \dots, x_m, z'_1, \dots, z'_n). \end{aligned} \quad (18.160)$$

Нужно отметить, что эти рекуррентные формулы содержат дифференцирование запаздывающих производных, что приводит к появлению δ -функций. Поэтому если даже среднее по вакууму от R -произведения и определяет обобщенную функцию, совершенно не ясно, будет ли определять обобщенную функцию производная R -произведения. [Известно, что в перенормируемых теориях соотношение (18.160) может рассматриваться только как символическое и, чтобы придать ему строгий смысл, нужно сопроводить его некоторыми перенормировочными предписаниями.]

Как простейшее применение процедуры, приведшей к соотношению (18.154), можно вывести уравнение Янга и Фелдмана, связывающее ин- и аут-поля. Из асимптотических условий следует, что

$$\begin{aligned} (\Phi, \varphi_{in}^f \Psi) = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} (\Phi, \varphi^f(t) \Psi) = \\ = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} i \int d^3 x (\Phi, \varphi(x) \Psi) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_0}} \bar{f}(x) = \\ = \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} i \int d^3 x (\Phi, \varphi(x) \Psi) \frac{\partial}{\partial x_0} \bar{f}(x) - \\ - i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ (\Phi, \varphi(x) \Psi) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_0}} \bar{f}(x) \right\} = \\ = (\Phi, \varphi_{out}^f \Psi) + i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x \bar{f}(x) K_x (\Phi, \varphi(x) \Psi), \end{aligned} \quad (18.161)$$

откуда, поступая так же, как при выводе соотношения (18.154), находим

$$\varphi_{out}(x) = \varphi_{in}(x) - \int \Delta(x - x') K_{x'} \varphi(x') d^4 x'. \quad (18.162)$$

Теперь, комбинируя соотношения (18.162) и (18.154), легко вывести перестановочные соотношения между ин- и аут-полями. Так, образуя коммутатор обеих частей формулы (18.162) с $\varphi_{\text{in}}(y)$, получаем

$$[\varphi_{\text{out}}(x), \varphi_{\text{in}}(y)] = i\Delta(x-y) - \int d^4x' \Delta(x-x') K_{x'} [\varphi(x'), \varphi_{\text{in}}(y)]. \quad (18.163)$$

Далее соотношение (18.154) для $R(x) = \varphi(x)$ имеет вид

$$[\varphi(x'), \varphi_{\text{in}}(y)] = i \int d^4y' \Delta(y-y') K_{y'} R(x'; y'), \quad (18.164)$$

откуда

$$[\varphi_{\text{out}}(x), \varphi_{\text{in}}(y)] = i\Delta(x-y) - \\ - i \int d^4x' \int d^4y' \Delta(x-x') \Delta(y-y') K_{x'} K_{y'} R(x'; y'). \quad (18.165)$$

Попутно отметим, что Циммерман [876] доказал, что порядок интегрирования в (18.165) можно изменять тогда и только тогда, когда приходящее (ин-) и уходящее (аут-) поля удовлетворяют одним и тем же перестановочным соотношениям. Если в формулу (18.165) подставить интеграл Фурье (18.97), выражающий φ_{in} через a_{in} и a_{in}^* , то можно получить

$$[a_{\text{out}}(k), a_{\text{in}}^*(k')] = \\ = 2k_0 \delta^{(3)}(k-k') - \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4x \int d^4x' e^{-i(k' \cdot x' - k \cdot x)} K_x K_{x'} R(x; x'), \quad (18.166a)$$

$$[a_{\text{out}}(k), a_{\text{in}}(k')] = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4x \int d^4x' e^{+i(k \cdot x - k' \cdot x')} K_x K_{x'} R(x; x'). \quad (18.166b)$$

Теперь мы в состоянии получить систему зацепляющихся уравнений, которые вместе со свойствами запаздывания, действительности, симметрии и ковариантности характеризуют запаздывающие функции $r(x; x_1, \dots, x_n)$. Среднее по вакууму от обеих частей соотношения (18.151) равно

$$r(x; y, x_1, \dots, x_n) - r(y; x, x_1, \dots, x_n) = \\ = \sum_{i_1 \dots i_n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_l} (\Psi_0, R(x; x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \Phi_{\text{in}}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}) \times \\ \times (\Phi_{\text{in}}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} R(y; x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \Psi_0) - X \quad (18.167)$$

(X — член, получаемый путем взаимной перестановки $x \longleftrightarrow y$), где

вставлена сумма по полной системе состояний

$$|\Phi_{\text{in}}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \Phi_{\text{in}}^{\alpha_1^*} \dots \Phi_{\text{in}}^{\alpha_n^*} |\Psi_0\rangle. \quad (18.168)$$

Наконец, с помощью рекуррентного соотношения

$$(\Psi_0, R(x; x_1, \dots, x_n) \Phi_{\text{in}}^{\alpha_1^*} \dots \Phi_{\text{in}}^{\alpha_n^*} \Psi_0) = \\ = \int d^4z_1 \dots \int d^4z_n f_{\alpha_1}(z_1) \dots f_{\alpha_n}(z_n) K_{z_1} \dots K_{z_n} R(x; x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n) \quad (18.169)$$

получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 & r(x; y, x_1, \dots, x_n) - r(y; x, x_1, \dots, x_n) = \\
 & = \sum_{i_1, \dots, i_n} \sum_{k=0}^n \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^l}{k! (n-k)! l!} \int d^4 u_1 \dots \int d^4 u_l \int d^4 v_1 \dots \int d^4 v_l \times \\
 & \times K_{u_1} \dots K_{u_l} r(x; x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, u_1, \dots, u_l) \Delta^{(+)}(u_1 - v_1) \dots \Delta^{(+)}(u_l - v_l) \times \\
 & \times K_{v_1} \dots K_{v_l} r(y; x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}, v_1, \dots, v_l) - (x \longleftrightarrow y). \quad (18.170)
 \end{aligned}$$

Эти зацепляющиеся нелинейные интегральные уравнения¹⁾ для r -функций являются аналогом неравенств для функций Уайтмана, выражающих условия неотрицательности. Нужно заметить, что при выводе уравнений явно использовалось соотношение полноты для ин-состояний, и поэтому уравнения в том виде, как они записаны, не будут справедливы, когда существуют связанные состояния (однако см. статью Баумана [36]). Эти уравнения выражают абсорбционную часть каждой r -функции как сумму квадратичных членов, возникающих от разных промежуточных состояний, и могут рассматриваться как «обобщенные условия унитарности». В § 4 мы увидим, что соотношения (18.170) играют существенную роль при доказательстве дисперсионных соотношений для амплитуд рассеяния (см. работу Йоста [406]).

Для свободного поля

$$r(x; x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{при } n > 1. \quad (18.171)$$

Уравнение, которому удовлетворяет функция $r(x; x_1) = r(\xi_1)$ ($\xi_1 = x - x_1$), есть

$$\begin{aligned}
 r(x - y) - r(y - x) &= \int d^4 u \int d^4 v K_{ur}(x - u) \Delta^{(+)}(u - v) K_{vr}(y - v) - \\
 &- \int d^4 u \int d^4 v K_{ur}(y - u) \Delta^{(+)}(u - v) K_{vr}(x - v) = \\
 &= \int d^4 u \int d^4 v K_{ur}(x - u) \Delta(u - v) K_{vr}(y - v), \quad (18.172)
 \end{aligned}$$

где $\Delta(x) = \Delta^{(+)}(x) - \Delta^{(+)}(-x) = \Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x)$. Единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее трем граничным условиям (симметрии, вещественности и запаздывания), имеет вид

$$r(x; y) = -\Delta_R(x - y) = \theta(x - y) \Delta(x - y). \quad (18.173)$$

Если теперь попытаться решать зацепляющиеся уравнения (18.170) по теории возмущений в виде ряда по некоторому параметру, выбирая в качестве нулевого приближения r -функции для свободного поля, то единственным образом приходим к перенормированным разложениям теории возмущений, согласующимся с предполагаемым типом стабильной частицы [347, 586, 878]. Произвол, связанный в лагранжевой формулировке с неоднозначностью в выборе лагранжиана взаимодействия, про-

¹⁾ Нишижима [585] рассматривал эти уравнения как условия самосогласованности рекуррентных соотношений. Существование решения у уравнения (18.170) равносильно внутренней непротиворечивости аксиом и асимптотических условий.

является в том, что здесь решения $r(x; y, x_1, \dots, x_n)$ определяются не однозначно, а только с точностью до членов вида

$$\begin{aligned} P \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \delta(x-y) \delta(x-x_1) \delta(x-x_2) \dots \delta(x-x_n) = \\ = c_0 \delta(x-y) \delta(x-x_1) \dots \delta(x-x_n) + \\ + c_1 \sum_i^n \square_i \delta(x-y) \delta(x-x_1) \dots \delta(x-x_n) + \dots, \end{aligned} \quad (18.174)$$

где P — инвариантный, симметричный полином по операторам дифференцирования. С точностью до численных множителей константы c_0, c_1, \dots связаны с константами связи различных взаимодействий. И наоборот, различные константы интегрирования, входящие в решение уравнений (18.170), соответствуют константам связи лагранжева подхода.

Наконец, отметим, что в случае, когда приходящие (ин-) и уходящие (аут-) операторы образуют неприводимое представление перестановочных соотношений для свободного поля, т. е. в случае когда и векторы $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle_{in}$ и векторы $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle_{out}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) образуют базис всего гильбертова пространства, любой оператор L может быть разложен по ин- (или аут-) операторам:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \mathcal{L}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) : \Phi_{in}(x_1) \dots \Phi_{in}(x_n) :. \quad (18.175)$$

Коэффициенты разложения $\mathcal{L}^{(n)}$ можно определить, если вспомнить, что среднее по вакууму от нормального произведения операторов равно нулю. Поскольку

$$\begin{aligned} [L, \Phi_{in}(y_1)] = i \int d^4y'_1 \Delta(y-y'_1) \frac{\delta L}{\delta \Phi(y'_1)} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \int d^4y'_1 \mathcal{L}^{(n+1)}(x_1, \dots, x_n; y'_1) \times \\ \times i \Delta(y_1 - y'_1) : \Phi_{in}(x_1) \dots \Phi_{in}(x_n) : \end{aligned} \quad (18.176)$$

и по индукции

$$\begin{aligned} [\dots [L, \Phi_{in}(y_1)] \dots \Phi_{in}(y_m)] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \int d^4y'_1 \dots \int d^4y'_m i^n \Delta(y_1 - y'_1) \dots \Delta(y_m - y'_m) \times \\ \times \mathcal{L}^{(n+m)}(x_1, \dots, x_n, y'_1, \dots, y'_m) : \Phi_{in}(x_1) \dots \Phi_{in}(x_n) :, \end{aligned} \quad (18.177)$$

то

$$\begin{aligned} (\Psi_0, [\dots [L, \Phi_{in}(y_1)], \dots \Phi_{in}(y_m)] \Psi_0) = \\ = i^n \int d^4y'_1 \dots \int d^4y'_m \Delta(y_1 - y'_1) \dots \Delta(y_m - y'_m) \mathcal{L}^{(m)}(y'_1, \dots, y'_m). \end{aligned} \quad (18.178)$$

Если представить $\mathcal{L}^{(n)}$ интегралом Фурье

$$\mathcal{L}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{5n/2}} \int d^4k_1 \dots \int d^4k_n e^{-i \sum_{j=1}^n k_j \cdot x_j} \tilde{\mathcal{L}}^{(n)}(k_1, \dots, k_n), \quad (18.179)$$

то, взяв фурье-образ от обеих частей (18.178), получаем

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \varepsilon(k_1) \dots \varepsilon(k_n) (\Psi_0, [\dots [L, \tilde{\Phi}_{\text{in}}(k_1)] \dots \tilde{\Phi}_{\text{in}}(k_n)] \Psi_0). \quad (18.180)$$

Таким образом,

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4k_1 \dots \int d^4k_n (\Psi_0, [\dots [L, \tilde{\Phi}_{\text{in}}(-k_1)] \dots \tilde{\Phi}_{\text{in}}(-k_n)] \Psi_0) \times \\ \times \varepsilon(k_1) \dots \varepsilon(k_n) \delta(k_1^2 - \mu^2) \dots \delta(k_n^2 - \mu^2) : \tilde{\Phi}_{\text{in}}(k_1) \dots \tilde{\Phi}_{\text{in}}(k_n) :. \quad (18.181)$$

В частном случае, когда в качестве L взят гейзенберговский оператор поля $\varphi(x)$, воспользовавшись рекуррентной формулой (18.160), можно записать

$$\varepsilon(k_1) \dots \varepsilon(k_n) (\Psi_0, [\dots [\varphi(x), \tilde{\Phi}_{\text{in}}(-k_1)], \dots \tilde{\Phi}_{\text{in}}(-k_n)] \Psi_0) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \int d^4k_1 \dots \int d^4k_n e^{+i \sum_j k_j \cdot x_j} K_{x_1} \dots K_{x_n} r(x; x_1, \dots, x_n). \quad (18.182)$$

и тогда найдем разложение (18.175) для гейзенберговского оператора $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \Phi_{\text{in}}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \times \\ \times K_{x_1} \dots K_{x_n} r(x; x_1, \dots, x_n) : \Phi_{\text{in}}(x_1) \dots \Phi_{\text{in}}(x_n) :. \quad (18.183)$$

При выводе представления (18.183) были использованы следующие тождества:

$$(\Psi_0, \varphi(x) \Psi_0) = 0, \quad (18.184a)$$

$$\int d^4k (\Psi_0, [\varphi(x), \tilde{\Phi}_{\text{in}}(-k)] \Psi_0) \varepsilon(k) \delta(k^2 - \mu^2) \tilde{\Phi}_{\text{in}}(k) = \Phi_{\text{in}}(x). \quad (18.184b)$$

Соотношение (18.184b) легко доказать. В силу релятивистской инвариантности и спектральных условий среднее по вакууму от коммутатора $\varphi(x)$ и $\Phi_{\text{in}}(y)$ имеет следующее лемановское представление:

$$(\Psi_0, [\varphi(x), \Phi_{\text{in}}(y)] \Psi_0) = i \int_0^{\infty} d\kappa^2 \varrho(\kappa^2) \Delta(x-y; \kappa^2). \quad (18.185)$$

Поскольку $(\square + \mu^2) \Phi_{\text{in}}(x) = 0$, то $\varrho(\kappa^2) = a \delta(\kappa^2 - \mu^2)$ и

$$(\Psi_0, [\varphi(x), \Phi_{\text{in}}(y)] \Psi_0) = i \Delta(x-y; \mu^2), \quad (18.186)$$

где значение $+1$ для постоянной a было фиксировано при помощи асимптотического условия.

Глазер, Леман и Циммерман [319] с помощью разложения (18.183) доказали две теоремы, которыми, в сущности, решается вопрос, каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять запазды-

вающие функции $r(x; x_1, \dots, x_n)$ для того, чтобы они определяли локальную теорию поля, удовлетворяющую асимптотическим условиям. Они показали следующее. Пусть задана последовательность произвольных функций $r(x; x_1, \dots, x_n)$ ($n=0, 1, \dots$), обладающих свойствами:

- все r -функции являются вещественными, симметричными и инвариантными функциями переменных $\xi_i = x - x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$);
- все они являются запаздывающими, т. е. $r(\xi_1, \dots, \xi_n)$ равны нулю, если хотя бы один из векторов ξ_i лежит вне светового конуса будущего;
- они удовлетворяют уравнениям (18.170);
- фурье-образ $\tilde{f}(k_1, \dots, k_n)$ функции $f(x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_n) = K_x K_{x_1} \dots K_{x_n} r(x - x_1, \dots, x - x_n)$ конечен на массовой поверхности $k_i^2 = \mu^2$, $(\sum_i k_i)^2 = \mu^2$ и не зависит от порядка, в котором

совершается переход к пределу $k_i^2 \rightarrow \mu^2$, $(\sum k_i)^2 \rightarrow \mu^2$.

Тогда если определить оператор $\Phi(x)$ формулой (18.183), то функции $r(x; x_1, \dots, x_n)$ будут средними по вакууму от запаздывающих произведений этих операторов, и, кроме того, так определенный оператор $\Phi(x)$ удовлетворяет асимптотическому условию, является локальным и лоренц-ковариантным. Эта теорема является аналогом теоремы Уайтмана, в которой утверждается, что последовательность функций Уайтмана, обладающих некоторыми конкретными свойствами, определяет локальную теорию поля.

Формулировку теории поля, очень близкую к той, которая была приведена выше, можно дать в терминах средних по вакууму от хронологически упорядоченных произведений операторов поля—ЛСЦ I [491]¹⁾. Хронологически упорядоченное произведение операторов поля определяется согласно

$$\begin{aligned} T(\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)) &= T(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \sum_P \theta(x_{i_1} - x_{i_2}) \theta(x_{i_2} - x_{i_3}) \dots \theta(x_{i_{n-1}} - x_{i_n}) \Phi(x_{i_1}) \dots \Phi(x_{i_n}). \end{aligned} \quad (18.187)$$

Суммирование в (18.187) проводится по всем перестановкам i_1, \dots, i_n чисел $1, 2, \dots, n$. Средние по вакууму от T -произведений обычно называют τ -функциями:

$$\tau^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (\Psi_0, T(\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)) \Psi_0). \quad (18.188)$$

Через τ -функции можно выразить S -матрицу. Чтобы это доказать, сперва выведем следующую формулу приведения:

$$\begin{aligned} [S \cdot T(\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)), \Phi_{in}(z)] &= \\ &= - \int d^4 z' \Delta(z - z') K_z S \cdot T(\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \Phi(z')). \end{aligned} \quad (18.189)$$

Доказательство: Рассмотрим матричный элемент коммутатора $[S \cdot T(x_1, \dots, x_n), \Phi_{in}^\alpha]$ между произвольными нормируемыми состояниями

¹⁾ См. также [920].—Прим. ред.

$\langle \Psi \rangle$ и $\langle \Phi \rangle$. Как следствие асимптотических условий снова получаем

$$\langle \Psi, [S \cdot T(x_1, \dots, x_n), \varphi_{\text{in}}^{\alpha*}] \Phi \rangle = \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} \langle \Psi, [S \cdot T(x_1, \dots, x_n), \varphi^{\alpha*}(z_0)] \Phi \rangle \quad (18.190a)$$

$$= i \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} \int \langle \Psi, [S \cdot T(x_1, \dots, x_n), \varphi(z)] \Phi \rangle \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_0}} f_\alpha(z) d^3z \quad (18.190b)$$

$$= i \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} \int d^3z \{ \langle \Psi, S \cdot T(x_1, \dots, x_n, z) \Phi \rangle - \langle \Psi, S \varphi_{\text{out}}(z) T(x_1, \dots, x_n) \Phi \rangle \} \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_0}} f_\alpha(z). \quad (18.190b)$$

При выводе формулы (18.190b) было использовано, что z_0 предшествует всем временам x_{10}, \dots, x_{n0} , так что $\varphi(z)$ можно внести под знак T -произведения. Мы также воспользовались тем, что $\varphi_{\text{in}}(z) S = S \varphi_{\text{out}}(z)$. Продолжим вывод. Снова используя

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz_0 \frac{\partial}{\partial z_0} F(z) = \lim_{z_0 \rightarrow +\infty} F(z) - \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} F(z), \quad (18.191)$$

получаем

$$\langle \Psi, [S \cdot T(x_1, \dots, x_n), \varphi_{\text{in}}^{\alpha*}] \Phi \rangle = -i \int d^4z \frac{\partial}{\partial z_0} \left\{ \langle \Psi_0, S \cdot T(x_1, \dots, x_n, z) \Phi \rangle \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_0}} f_\alpha(z) \right\} \quad (18.192a)$$

$$= +i \int d^4z f_\alpha(z) K_z \langle \Psi, S \cdot T(x_1, \dots, x_n, z) \Phi \rangle, \quad (18.192b)$$

что и требовалось доказать. В (18.192a) члены $\lim_{z_0 \rightarrow +\infty} S \cdot T(x_1, \dots, x_n, z)$ и $\lim_{z_0 \rightarrow +\infty} S \varphi_{\text{out}}(z) T(x_1, \dots, x_n)$ сократились на основании определения T -произведения и предельного перехода к асимптотике. Не вносит вклада и член $\frac{\partial}{\partial z_0} \left\{ S \varphi_{\text{out}}(z) T(x_1, \dots, x_n) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_0}} f_\alpha(z) \right\}$, так как и $\varphi_{\text{out}}(z)$, и $f_\alpha(z)$ удовлетворяют уравнению Клейна—Гордона. Формула приведения (18.189) получается из формулы (18.192b) с помощью уже знакомой процедуры.

Если ин-поля неприводимы, то по ним снова можно разложить S -матрицу:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \sigma_n(x_1, \dots, x_n) : \varphi_{\text{in}}(x_1) \dots \varphi_{\text{in}}(x_n) : \quad (18.193a)$$

или в импульсном пространстве

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4k_1 \dots \int d^4k_n \tilde{\sigma}_n(k_1, \dots, k_n) \times \\ \times \delta(k_1^2 - \mu^2) \delta(k_2^2 - \mu^2) \dots \delta(k_n^2 - \mu^2) : \tilde{\varphi}_{\text{in}}(k_1) \dots \tilde{\varphi}_{\text{in}}(k_n) :. \quad (18.193b)$$

Образуя повторные коммутаторы S с $\Phi_{in}(z_1), \dots, \Phi_{in}(z_n)$ и т. д. и беря среднее по вакууму, находим

$$\tilde{\sigma}_n(k_1, \dots, k_n) = \varepsilon(k_1) \dots \varepsilon(k_n) (\Psi_0, [\dots [S, \tilde{\Phi}_{in}^*(k_1)], \dots, \tilde{\Phi}_{in}^*(k_n)] \Psi_0). \quad (18.194)$$

Используя соотношение (18.192б) и совершая преобразование обратно в координатное пространство, окончательно получаем

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \times \\ \times K_{x_1} \dots K_{x_n} (\Psi_0, T(x_1, \dots, x_n) \Psi_0) : \Phi_{in}(x_1) \dots \Phi_{in}(x_n) : \quad (18.195)$$

и, следовательно,

$$\sigma_n(x_1, \dots, x_n) = K_{x_1} \dots K_{x_n} \tau(x_1, \dots, x_n). \quad (18.196)$$

Для хронологических и антихронологических произведений можно записать соотношение, аналогичное соотношению (18.151), которому удовлетворяют запаздывающие произведения. Антихронологический оператор T можно определить так:

$$T^\dagger(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) = \\ = \sum_P \theta(x_{i_n} - x_{i_{n-1}}) \theta(x_{i_{n-1}} - x_{i_{n-2}}) \dots \theta(x_{i_2} - x_{i_1}) \varphi(x_{i_1}) \varphi(x_{i_2}) \dots \varphi(x_{i_n}). \quad (18.197)$$

Тогда искомым соотношением является

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-i)^n (-1)^k}{k! (n-k)!} T^\dagger(x_1, \dots, x_k) T(x_{k+1}, \dots, x_n) = 0. \quad (18.198)$$

Если взять среднее по вакууму от (18.198), получим систему зацепляющихся интегральных уравнений для τ - и τ^\dagger -функций:

$$0 = \tau(x_1, \dots, x_n) + \tau^\dagger(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i_1 \dots i_n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l}{l! k! (n-k)!} \times \\ \times \int d^4u_1 \dots \int d^4u_l \int d^4v_1 \dots \int d^4v_l K_{u_1} K_{u_2} \dots K_{u_l} \tau(x_1, \dots, x_k, u_1, \dots, u_l) \times \\ \times \Delta^{(+)}(u_1 - v_1) \dots \Delta^{(+)}(u_l - v_l) K_{v_1} \dots K_{v_l} \tau^\dagger(x_{k+1}, \dots, x_n, v_1, \dots, v_l). \quad (18.199)$$

Эти зацепляющиеся уравнения являются «обобщенными соотношениями унитарности» для τ -функций. Их связь с унитарностью S -матрицы становится очевидной, если в соотношения $SS^* = S^*S = 1$ подставить разложение (18.195) для S и в получившейся формуле использовать соотношение полноты

$$\sum_{|\alpha\rangle} |\alpha\rangle_{in} {}_{in} \langle \alpha| = 1.$$

По поводу τ -функций можно сделать замечания, аналогичные тем, которые делались по поводу r -функций [586]. Последние несколько более удобны, так как требование локальности, предъявляемое к операторам, выражается простым свойством r -функций — свойством запаздывания. Однако свойство локальности не столь легко выразить в виде линейного

свойства τ -функции. Тем не менее тесная связь τ -функций с S -матрицей делает их предметом интенсивного изучения. В перенормируемых теориях поля фурье-образы τ этих $\tilde{\tau}$ -функций

$$\tilde{\tau}(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n e^{-i \sum_{j=1}^n p_j \cdot x_j} \tau(x_1, \dots, x_n), \quad (18.200)$$

вычисляемые по теории возмущений, содержат особенности вида $\delta(p)$, $\delta(p^2 - m^2)$ и $P(p^2 - m^2)^{-1}$ по любой переменной $p = \sum_{\nu}^{r \leq n} p_{\nu}$.

Особенности вида $\delta(p)$ возникают от промежуточных вакуумных состояний; особенности вида $\delta(p^2 - m^2)$ и $P(p^2 - m^2)^{-1}$ — от промежуточных одночастичных состояний с дискретным значением массы m . Мы уже видели, что эти одночастичные особенности играют важную роль в теории рассеяния и что соответствующие им вычеты связаны с константами связи [126]. В рамках формулировки теории поля ЛСЦ одночастичные особенности τ -функций были подробно исследованы Циммерманом [877]. Одночастичные полюсы часто находятся в нефизической области значений импульсных переменных [например, в случае рассеяния π -мезонов на нуклонах имеется полюс при $(p \pm k)^2 = M^2$]. Вообще же говоря, для многочастичных процессов они могут соответствовать физическим значениям импульсов частиц. Появление этих одночастичных полюсов связано с ограничениями, налагаемыми условием причинности.

В заключение настоящего параграфа отметим, что рассмотренный здесь в общих чертах формализм может быть обобщен на физические ситуации, когда имеются стабильные связанные состояния или составные частицы [876, 585, 36]. Подход состоит в том, что для каждой составной частицы или связанного состояния определяют свой оператор поля. Массы и другие характеристики этих составных систем входят в теорию как задаваемые феноменологические постоянные. Оператор для каждой составной системы может быть в явном виде выражен через первоначальные гейзенберговские операторы поля и удовлетворяет асимптотическому условию, соответствующему частице, которую он описывает. Далее можно вывести формулы приведения, являющиеся обобщением формул (18.154) и (18.189), и получить S -матрицу, которая будет описывать также рождение и аннигиляцию составных и связанных систем¹⁾.

§ 3. Интегральные представления причинного коммутатора

Теперь мы на время прервем наше изложение аксиоматической формулировки релятивистских теорий поля и остановимся на работах Йоста и Лемана [405] и Дайсона [203, 204], посвященных выводу представления для матричного элемента причинного коммутатора между произвольными физическими состояниями. Это представление является обобщением представления Лемана для среднего по вакууму от коммутатора двух операторов, которое рассматривалось в гл. 17 и в § 1 настоящей главы. Как мы увидим в § 4, представление окажется очень полезным при исследовании аналитических свойств амплитуды рассеяния.

¹⁾ Техника приведения, отличная от изложенной в настоящем параграфе, разрабатывалась Толлом [925]. — *Прим. ред.*

Наша цель — получить представление обобщенной функции

$$F_{PQ}(x, x') = \langle P\alpha | [A(x), B(x')] | Q\beta \rangle, \quad (18.201)$$

которое охватывало бы как можно больше свойств этого матричного элемента, следующих из условий релятивистской инвариантности, локальности и спектральности. Результат будет совершенно общим и не будет зависеть ни от какого-либо частного вида лагранжиана, ни от какого-либо приближенного метода (такого, как теория возмущений). Для простоты возьмем скалярные поля A и B :

$$U(a, \Lambda) A(x) U^{-1}(a, \Lambda) = A(\Lambda x + a), \quad (18.202a)$$

$$U(a, \Lambda) B(x) U^{-1}(a, \Lambda) = B(\Lambda x + a). \quad (18.202b)$$

По предположению, эти поля локальны друг относительно друга, т. е.

$$[A(x), B(x')] = 0, \text{ когда } (x - x')^2 < 0, \quad (18.203)$$

так что $F_{PQ}(x, x')$ обращается в нуль при $(x - x')^2 < 0$. Векторы P и Q , которые входят в состав квантовых чисел, характеризующих состояния $|P\alpha\rangle$ и $|Q\beta\rangle$, являются импульсами физических состояний и поэтому лежат внутри светового конуса будущего. Благодаря трансляционной инвариантности

$$\begin{aligned} \langle P\alpha | [A(x), B(x')] | Q\beta \rangle &= \\ &= \langle P\alpha | U^{-1}(a, I) U(a, I) [A(x), B(x')] U^{-1}(a, I) U(a, I) | Q\beta \rangle = \\ &= e^{-i(Q-P)\cdot a} \langle P\alpha | [A(x+a), B(x'+a)] | Q\beta \rangle \end{aligned} \quad (18.204)$$

и, следовательно,

$$F_{PQ}(x, x') = e^{-i(Q-P)\cdot a} F_{PQ}(x+a, x'+a), \quad (18.205)$$

где вектор a произвольный. Выбирая $a = -\frac{x+x'}{2}$, находим

$$F_{PQ}(x, x') = e^{+i(Q-P)\cdot \frac{x+x'}{2}} F_{PQ}\left(\frac{x-x'}{2}, -\frac{x-x'}{2}\right). \quad (18.206)$$

Поэтому достаточно рассмотреть матричный элемент

$$f_{PQ}(x) = \langle P\alpha | \left[A\left(\frac{x}{2}\right), B\left(-\frac{x}{2}\right) \right] | Q\beta \rangle, \quad (18.207)$$

который благодаря локальности операторов обладает свойством

$$f_{PQ}(x) = 0 \text{ при } x^2 < 0. \quad (18.208)$$

В дальнейшем матричный элемент f_{PQ} будет просто обозначаться через f . Разобьем теперь матричный элемент f на две части

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x), \quad (18.209)$$

такие, что

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \langle P\alpha | A\left(\frac{x}{2}\right) B\left(-\frac{x}{2}\right) | Q\beta \rangle = \\ &= \sum_{|K\delta\rangle} \langle P\alpha | A(0) | K\delta \rangle \langle K\delta | B(0) | Q\beta \rangle e^{-iK\cdot x} e^{i(Q+P)\cdot \frac{x}{2}} \end{aligned} \quad (18.210)$$

и

$$f_2(x) = \langle P\alpha | B \left(-\frac{x}{2} \right) A \left(\frac{x}{2} \right) | Q\beta \rangle = \\ = \sum_{|K\delta\rangle} \langle P\alpha | B(0) | K\delta \rangle \langle K\delta | A(0) | Q\beta \rangle e^{+iK \cdot x} e^{-i(Q+P) \cdot \frac{x}{2}}, \quad (18.211)$$

где $|K\delta\rangle$ — физические состояния, образующие полную систему. Выполняя суммирование по всем состояниям с фиксированным импульсом K и вводя обозначения

$$G_{PQ}^{(1)}(K) = \sum_{\delta} \langle P\alpha | A(0) | K\delta \rangle \langle K\delta | B(0) | Q\beta \rangle, \quad (18.212a)$$

$$G_{PQ}^{(2)}(K) = \sum_{\delta} \langle P\alpha | B(0) | K\delta \rangle \langle K\delta | A(0) | Q\beta \rangle, \quad (18.212b)$$

можно записать функции f_1 и f_2 следующим образом:

$$f_1(x) = \int d^4q e^{-iq \cdot x} e^{i(Q+P) \cdot \frac{x}{2}} G_{PQ}^{(1)}(q) = \\ = \int d^4q e^{-iq \cdot x} G_{PQ}^{(1)} \left(q + \frac{1}{2}(Q+P) \right), \quad (18.213a)$$

$$f_2(x) = \int d^4q e^{-iq \cdot x} G_{PQ}^{(2)} \left(-q + \frac{1}{2}(Q+P) \right). \quad (18.213b)$$

В силу спектральных условий для физических состояний функции $G^{(1)}(K)$ и $G^{(2)}(K)$ равны нулю, когда импульс K лежит вне светового конуса будущего. Если ввести фурье-образы $\tilde{f}_1(q)$ и $\tilde{f}_2(q)$ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$

$$f_1(x) = \int e^{-iq \cdot x} \tilde{f}_1(q) d^4q, \quad (18.214a)$$

$$f_2(x) = \int e^{-iq \cdot x} \tilde{f}_2(q) d^4q, \quad (18.214b)$$

то, сравнивая формулу (18.214a) с формулой (18.213a), заключаем, что фурье-образ $\tilde{f}_1(q)$ равен нулю, когда вектор $\frac{1}{2}(Q+P) + q$ не является импульсом физического состояния, т. е. когда вектор $\frac{1}{2}(Q+P) + q$ лежит вне конуса будущего. Аналогично, сравнивая формулу (18.214b) с формулой (18.213b), выясняем, что фурье-образ $\tilde{f}_2(q)$ равен нулю, когда вектор $\frac{1}{2}(Q+P) - q$ лежит вне конуса будущего. Конкретнее, фурье-образ $\tilde{f}_1(q)$ отличен от нуля только тогда, когда вектор $\frac{1}{2}(P+Q) + q$ является 4-импульсом такого состояния $|n_1\rangle$, что

$$\langle P\alpha | A(0) | n_1 \rangle \neq 0, \quad \langle n_1 | B(0) | Q\beta \rangle \neq 0, \quad (18.215)$$

а фурье-образ $\tilde{f}_2(q)$ отличен от нуля только тогда, когда вектор $\frac{1}{2}(P+Q) - q$ есть 4-импульс такого состояния $|n_2\rangle$, что

$$\langle P\alpha | B(0) | n_2 \rangle \neq 0, \quad \langle n_2 | A(0) | Q\beta \rangle \neq 0. \quad (18.216)$$

Предположим, что наименьшее значение массы для состояний, удовлетворяющих условию (18.215), равно m_1 , а для состояний, удовлетворяющих (18.216), равно m_2 . Тогда в системе координат, в которой

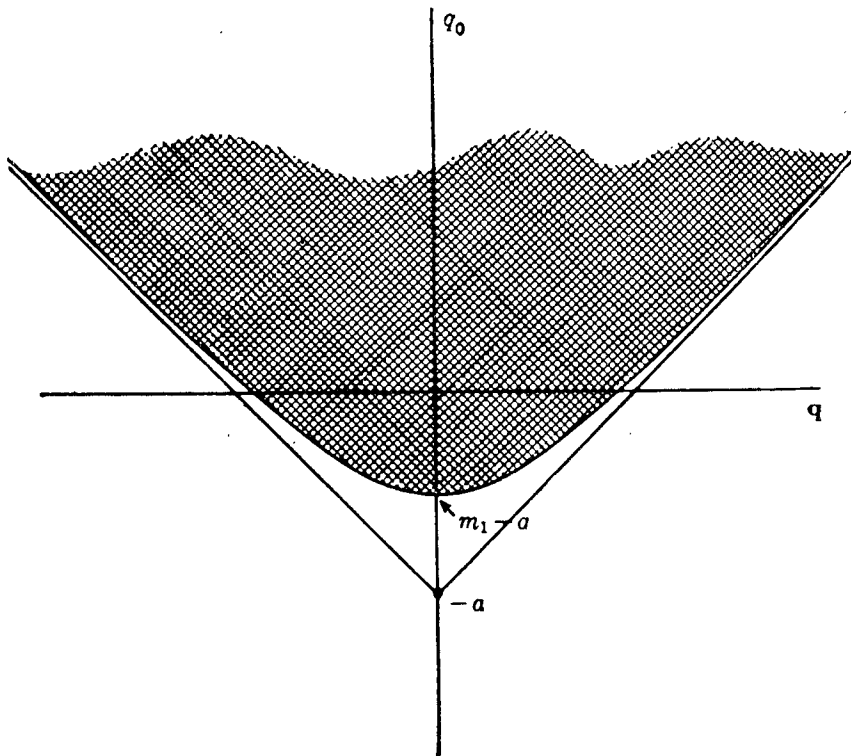
$$\frac{1}{2}(P+Q) = (a, 0, 0, 0), \quad (18.217)$$

$f_1(q) \neq 0$ при всех $q = (q_0, \mathbf{q})$, удовлетворяющих неравенствам

$$(q_0 + a) \geq 0, \quad (18.218a)$$

$$(q_0 + a)^2 - \mathbf{q}^2 \geq m_1^2, \quad (18.218b)$$

т. е. внутри гиперboloида, который заштрихован на фиг. 146. Другими словами, $\tilde{f}_1(q) = 0$ при всех $q = (q_0, \mathbf{q})$, удовлетворяющих неравенству



Ф и г. 146.

$q_0 < -a + \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_1^2}$. Аналогично, $\tilde{f}_2 \neq 0$ при всех q , удовлетворяющих неравенствам

$$(a - q_0) \geq 0, \quad (18.219a)$$

$$(a - q_0)^2 - \mathbf{q}^2 \geq m_2^2, \quad (18.219b)$$

или, что то же, $\tilde{f}_2 = 0$, когда q удовлетворяет неравенству

$$q_0 > a - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_2^2}.$$

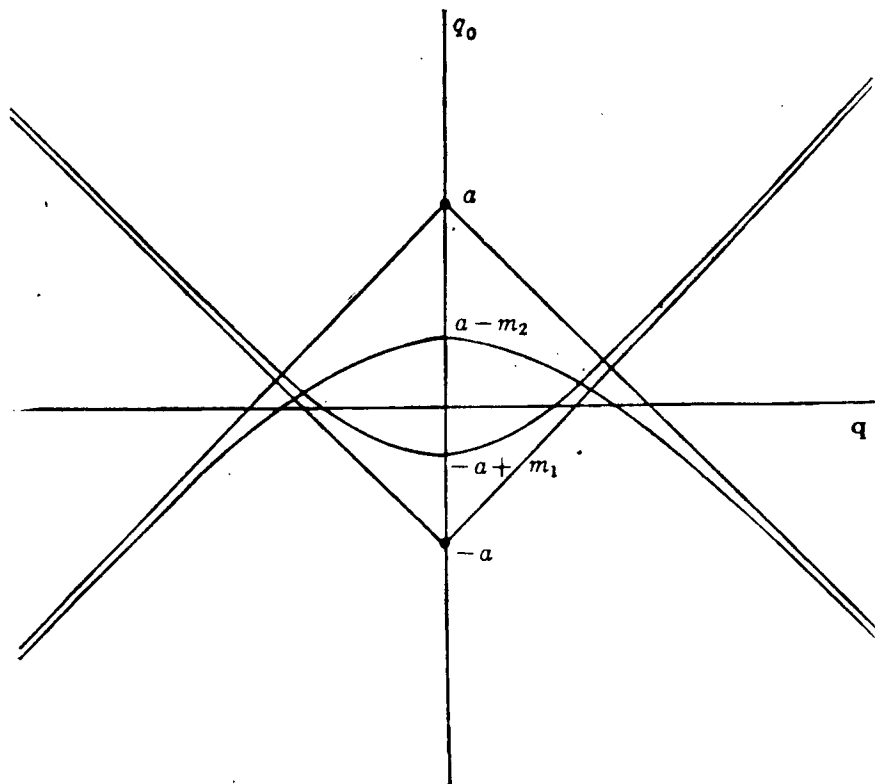
Таким образом, вследствие спектральных условий фурье-образ $\tilde{f}(q) = \tilde{f}_1(q) - \tilde{f}_2(q)$ равен нулю при всех значениях q , удовлетворяющих

$$a - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_2^2} < q_0 < -a + \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_1^2}, \quad (18.220)$$

т. е. вне двух гиперboloидов, изображенных на фиг. 147. Если $a > \frac{m_1 + m_2}{2}$,

то эти гиперboloиды пересекаются. (Мы принимаем $a > \frac{1}{2}|m_1 - m_2|$. Это неравенство выполняется в приложениях.)

Решение математической проблемы нахождения наиболее общей функции $f(x)$, равной нулю вне светового конуса $x^2 \geq 0$ и имеющей фурье-образ, равный нулю в некоторой области R импульсного пространства, было дано Дайсоном [203, 204]. Сейчас мы перейдем к изложению его



Ф и г. 147.

решения. Основная идея состоит в переходе к 6-мерному псевдоевклидову пространству и установлении связи между функциями $f(x)$, равными нулю при $x^2 < 0$ в 4-мерном пространстве, и функциями, определенными на световом конусе в 6-мерном пространстве¹⁾. Представление Дайсона есть нетривиальное обобщение представления, полученного Йостом и Леманом [405] для функции, также равной нулю вне светового конуса, но имеющей носитель в импульсном пространстве, симметричный по q_0 , т. е. такой, что $m_1 = m_2$.

¹⁾ В действительности число добавляемых измерений несущественно. Однако добавление двух пространственных координат кажется удобным потому, что в пространствах с нечетным числом пространственных измерений справедлив принцип Гюйгенса. (В. Я. Файнберг [928] показал, что для получения представления Дайсона вообще нет необходимости увеличивать число измерений. — Прим. ред.)

Обозначим через z 6-вектор ($z_0 = x_0, z_1 = x_1, z_2 = x_2, z_3 = x_3, z_4 = y_1, z_5 = y_2$), а еадь r 6-вектор ($r_0 = q_0, r_1 = q_1, r_2 = q_2, r_3 = q_3, r_4 = p_1, r_5 = p_2$). Метрику в 6-мерном z -пространстве определим согласно-

$$z \cdot z = z^2 = x^2 - y^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - y_1^2 - y_2^2. \quad (18.221)$$

Рассмотрим теперь функцию $F(z)$, определяемую заданием функции $f(x)$ в 4-мерном пространстве:

$$F(z) = 4\pi f(x) \delta(x^2 - y^2), \quad (18.222a)$$

$$= 4\pi f(x) \delta(z^2). \quad (18.222b)$$

Как видно из (18.222б), функция $F(z)$ определена только на световом конусе 6-мерного z -пространства. Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 dy_2 F(z) = 4\pi f(x) \cdot 2\pi \int_0^{\infty} dy^2 \frac{1}{2} \delta(x^2 - y^2) =$$

$$= 4\pi^2 f(x) \theta(x^2), \quad (18.223a)$$

$$= \begin{cases} 4\pi^2 f(x) & \text{при } x^2 \geq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 < 0, \end{cases} \quad (18.223b)$$

приходим к заключению, что если $f(x)$ равна нулю при $x^2 < 0$, то функции $F(z)$ и $f(x)$ определяют друг друга: функцию $f(x)$ можно получить, интегрируя функцию $F(z)$:

$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) dy_1 dy_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} F(z) dy^2. \quad (18.224)$$

В дальнейшем специальный 6-вектор ($q_0, q_1, q_2, q_3, 0, 0$) будет обозначаться \hat{q} , а фурье-образ функции $F(z)$ — через $\tilde{F}(r)$:

$$\tilde{F}(r) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int e^{ir \cdot z} F(z) d^6z. \quad (18.225)$$

Подставляя в формулу (18.225) выражение для $F(z)$ (18.222б), получаем

$$\tilde{F}(r) = \frac{4\pi}{(2\pi)^6} \int d^6z e^{ir \cdot z} \delta(z^2) \int d^4q e^{-i\hat{q} \cdot z} \tilde{f}(q) =$$

$$= \frac{4\pi}{(2\pi)^6} \iint d^6z e^{i(r - \hat{q}) \cdot z} \delta(z^2) \tilde{f}(q) d^4q =$$

$$= \int D^{(1)}(r - \hat{q}) \tilde{f}(q) d^4q, \quad (18.226)$$

где

$$D^{(1)}(r) = D^{(1)}(r^2) = \frac{2}{(2\pi)^6} \int e^{-ir \cdot z} \delta(z^2) d^6z = \quad (18.227a)$$

$$= \frac{1}{\pi^3} P \frac{1}{(r^2)^2} \quad (18.227b)$$

(символ P обозначает главное значение) есть четная инвариантная функция в пространстве шести измерений. Из (18.227б) и (18.226) окончательно находим

$$\tilde{F}(r) = \frac{1}{\pi^3} \int d^4q \frac{\tilde{f}(q)}{[(r - \hat{q})^2]^2} = \frac{1}{\pi^3} \int d^4q \frac{\tilde{f}(q)}{[(u - q)^2 - s]^2} =$$

$$= \tilde{F}(u, s), \quad (18.228)$$

где $r = (r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) = (u_0, u_1, u_2, u_3, p_1, p_2)$, а $s = p_1^2 + p_2^2$. Отсюда видно, что фурье-образ $\tilde{F}(r)$ функции $F(z) = 4\pi f(x) \delta(z^2)$, сосредоточенной в пространстве z на световом конусе, инвариантен относительно вращений в плоскости r_4 - r_5 (т. е. зависит от r_4 и r_5 только через $s = r_4^2 + r_5^2$). Далее, $D^{(1)}(r)$ удовлетворяет волновому уравнению в r -пространстве:

$$\square_6 D^{(1)}(r) = 0, \quad (18.229a)$$

$$\square_6 = \frac{\partial^2}{\partial r_0^2} - \sum_{j=1}^5 \frac{\partial^2}{\partial r_j^2} \quad (18.229b)$$

[что явно видно из представления (18.227a)]. Представление (18.226) показывает, что $\tilde{F}(r)$ также удовлетворяет волновому уравнению в пространстве шести измерений:

$$\square_6 \tilde{F}(r) = 0. \quad (18.230)$$

Наконец, заметим, что если функция $f(x)$ равна нулю при $x^2 < 0$, то тогда образ $\tilde{f}(q)$ является граничным значением функции $\tilde{F}(r)$ на плоскости $s = 0$, т. е. $\tilde{F}(\hat{q}) = \tilde{f}(q)$.

Доказательство:

$$\tilde{F}(\hat{q}) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int e^{iq \cdot z} 4\pi \delta(x^2 - y^2) f(x) d^6 z \quad (18.231a)$$

$$= \frac{2\pi}{(2\pi)^6} \cdot \frac{1}{2} \int e^{iq \cdot x} 4\pi \theta(x^2) f(x) d^4 x. \quad (18.231b)$$

Выражение (18.231b) равно $\tilde{f}(q)$ тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ равна нулю при $x^2 < 0$. Таким образом, решения интегрального уравнения

$$\tilde{f}(q) = \int d^4 q' \frac{\tilde{f}(q')}{[(q - q')^2]^2} \quad (18.232)$$

образуют класс C функций, фурье-образы которых $f(x)$ равны нулю при $x^2 < 0$.

Итак, мы показали, что для того, чтобы $f(x)$ равнялась нулю вне светового конуса, необходимо, чтобы фурье-образ $\tilde{f}(q)$ был граничным значением, которое на плоскости $s = 0$ принимает решение $\tilde{F}(q, s)$ волнового уравнения $\square_6 \tilde{F}(r) = 0$, инвариантно относительно вращений в плоскости 4-5. Следует отметить, что плоскость $s = 0$ является *времени-подобной* поверхностью, так что граничное значение, принимаемое решением гиперболического уравнения $\square_6 \tilde{F}(r) = 0$ на этой поверхности, не является произвольной функцией.

Обратно, рассмотрим функцию $\tilde{F}(r)$, удовлетворяющую волновому уравнению $\square_6 \tilde{F}(r) = 0$ и инвариантную относительно вращений в плоскости 4-5. Ее фурье-образ

$$F(z) = \int e^{-ir \cdot z} \tilde{F}(r) d^6 r \quad (18.233)$$

обладает следующими свойствами. Поскольку $\square_6 \tilde{F}(r) = 0$, то $F(z) = \delta(z^2) G(z)$, т. е. $F(z)$ сосредоточена на световом конусе в простран-

стве z . Кроме того, благодаря предполагаемой симметрии $\tilde{F}(r)$ в плоскости 4-5

$$\begin{aligned} F(z) &= \int e^{-ir \cdot z} \tilde{F}(u, |p|) d^6r = \\ &= \int d^4u e^{-iu \cdot x} \int_0^\infty dp p \int_0^{2\pi} d\theta e^{ip|y|\cos\theta} \tilde{F}(u, p) = \\ &= 2\pi \int d^4u e^{-iu \cdot x} \int_0^\infty ds J_0(\sqrt{s} |y|) \tilde{F}(u, s). \end{aligned} \quad (18.234)$$

Поскольку функция

$$J_0(\sqrt{s} |y|) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(sy^2)^n}{(n!)^2} \quad (18.235)$$

зависит только от y^2 , то отсюда следует, что $F(z)$ является функцией только x и y^2 , т. е.

$$F(z) = \delta(z^2) G_1(x, y^2) = \delta(x^2 - y^2) G_1(x, y^2). \quad (18.236)$$

А поскольку функция $F(z)$ сосредоточена на световом конусе $y^2 = x^2$, то она должна иметь вид

$$F(z) = \delta(x^2 - y^2) f(x) = \delta(z^2) f(x) \quad (18.237)$$

[однако $f(x)$ еще не обязана равняться нулю при $x^2 < 0$]. Если же дальше потребовать, чтобы $\tilde{F}(\hat{q}) = \tilde{f}(q)$, тогда функция $f(x)$ вне светового конуса будет равна нулю.

Таким образом, для того чтобы функция $f(x)$ была равна нулю вне светового конуса, необходимо и достаточно, чтобы ее фурье-образ $\tilde{f}(q)$ был граничным значением, которое на поверхности $s=0$ принимает решение уравнения $\square_6 \tilde{F}(r) = 0$, инвариантное относительно вращений в плоскости 4-5. Решение волнового уравнения $\square_6 \tilde{F}(r) = 0$ можно записать через заданные на пространственно-подобной поверхности значения самого решения и его нормальной производной. Для этого нужна сингулярная функция $D(r)$, удовлетворяющая однородному волновому уравнению в пространстве шести измерений

$$\square_6 D(r) = 0 \quad (18.238)$$

■ начальным условиям

$$D(r_0 = 0, r_1, \dots, r_5) = 0, \quad (18.239a)$$

$$\left. \frac{\partial D(r)}{\partial r_0} \right|_{r_0=0} = \prod_{i=1}^5 \delta(r_i). \quad (18.239b)$$

В явном виде

$$\begin{aligned}
 D(r) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^6 z e^{-ir \cdot z} \varepsilon(z) \delta'(z^2) = \\
 &= \frac{-2i}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{d}{d\varrho} \right) \int_0^\infty d\zeta \sin r_0 \zeta \sin \varrho \zeta = \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \varepsilon(r_0) \delta'(r^2). \tag{18.240}
 \end{aligned}$$

Если Σ — пространственно-подобная поверхность, на которой заданы начальные данные, а именно $\tilde{F}(r')$ и $\frac{\partial \tilde{F}(r')}{\partial r'_\alpha} n^\alpha(r')$ (n^α — нормаль к поверхности Σ), то соответствующее решение волнового уравнения $\square_\varepsilon \tilde{F}(r) = 0$ записывается в виде

$$\tilde{F}(r) = \int_\Sigma d\Sigma_\alpha \left[\tilde{F}(r'), \frac{\partial}{\partial r'_\alpha} D(r' - r) \right], \tag{18.241}$$

где

$$\left[\tilde{F}, \frac{\partial}{\partial r'_\alpha} D \right] = \tilde{F} \frac{\partial D}{\partial r'_\alpha} - D \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r'_\alpha}, \tag{18.242}$$

а $d\Sigma_\alpha$ — элемент поверхности ($d\Sigma_\alpha$ есть 6-вектор, нормальный к пространственно-подобной поверхности Σ). Решение $\tilde{F}(r)$, обладающее нужными свойствами симметрии, можно получить при помощи подходящего выбора в формуле (18.241) поверхности Σ и начальных значений. Полагая $\tilde{F}(\hat{q}) = \tilde{f}(q)$, получаем следующее интегральное представление для фурье-образа $\tilde{f}(q)$ функции $f(x)$, которая равна нулю вне светового конуса:

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(q) &= \int_\Sigma d\Sigma'_\alpha \left[\tilde{F}(r'), \frac{\partial}{\partial r'_\alpha} D(r' - \hat{q}) \right] = \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_\Sigma d\Sigma_\alpha \left[\tilde{F}(r), \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \cdot \varepsilon(u_0 - q_0) \delta'((u - q)^2 - s) \right] \tag{18.243}
 \end{aligned}$$

Это представление будет служить основой для дальнейшего обсуждения. Представление (18.243) — единственное в том смысле, что если заданы функция $\tilde{f}(q)$ [для которой $f(x) = 0$ при $x^2 < 0$] и поверхность Σ и если функция $\tilde{f}(q)$ представима в виде (18.243) с этой поверхностью Σ и с некоторой функцией $\tilde{F}(r) = \tilde{F}(u, s)$, удовлетворяющей уравнению $\square_\varepsilon \tilde{F}(r) = 0$ и зависящей от r_4 и r_5 только в комбинации $s = r_4^2 + r_5^2$, то тогда функция $\tilde{F}(r)$ тождественно равна функции, определяемой согласно (18.226), т. е.

$$\tilde{F}(r) = \int D^{(1)}(r - \hat{q}) \tilde{f}(q) d^4 q. \tag{18.244}$$

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между функциями $\tilde{f}(q)$ класса C и такими решениями $\tilde{F}(r)$ волнового уравнения в 6-мерном пространстве, которые инвариантны относительно вращений в плоскости 4-5.

Дальнейшая задача состоит в применении представления (18.243) [гарантирующего, что $f(x) = 0$ при $x^2 < 0$] для того, чтобы с помощью подходящего выбора функции $\tilde{F}(u, s)$ и поверхности Σ получить представление для функции $\tilde{f}(q)$, обладающей определенными свойствами сосредоточенности в импульсном пространстве.

Предположим, что $\tilde{f}(q) = 0$ в области R q -пространства, которая ограничена двумя пространственно-подобными поверхностями σ_1 и σ_2 . Конкретнее, пусть область R определяется согласно

$$R: \quad s_1(\mathbf{q}) < q_0 < s_2(\mathbf{q}), \quad (18.245)$$

где s_1 и s_2 — функции, удовлетворяющие неравенствам

$$|s_1(\mathbf{q}) - s_1(\mathbf{q}')| < |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|, \quad (18.246a)$$

$$|s_2(\mathbf{q}) - s_2(\mathbf{q}')| < |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|, \quad (18.246b)$$

которые гарантируют, что поверхности $q^0 = s_1(\mathbf{q})$ и $q^0 = s_2(\mathbf{q})$ являются пространственно-подобными. Обозначим через C_R класс функций со свойствами $f(x) = 0$ при $x^2 < 0$ и $\tilde{f}(q) = 0$ при q в R .

Вместе с Дайсоном гиперboloид

$$(q - u)^2 - s = 0 \quad (18.247)$$

в q -пространстве будем называть *допустимым*, если его верхняя пола проходит не ниже σ_2 , а нижняя пола — не выше σ_1 . Такие гиперboloиды соответствуют точкам $r = (u_0, u_1, u_2, u_3, p_1, p_2)$, $s = p_1^2 + p_2^2$, лежащим в некоторой области S r -пространства. Поскольку всякий раз, когда точка r принадлежит области S , а точка q — области R , функция $D(r - \hat{q}) = (2\pi^2)^{-1} \varepsilon(u_0 - q_0) \delta'((u - q)^2 - s)$ обращается в нуль, то можно ожидать, что для функций $\tilde{f}(q)$ класса C_R справедливо представление (18.243), где точки r лежат в области S . Очевидно, что всякая функция $\tilde{f}(q)$, определенная выражением (18.243), где все точки r поверхности Σ лежат только в области S , принадлежит к классу C_R . Дайсон показал, что верно также и обратное, а именно что для всякой функции $\tilde{f}(q)$ класса C_R имеется представление, использующее только допустимые гиперboloиды. Для того чтобы гиперboloид $(q - u)^2 - s = 0$ был допустимым, он не должен пересекать поверхности $q_0 = s_1(\mathbf{q})$ и $q_0 = s_2(\mathbf{q})$. Рассмотрим верхнюю полу гиперboloида, т. е. ветвь $q_0 = u_0 + \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{u})^2 + s}$. Она не будет пересекать поверхность σ_2 при некотором фиксированном значении \mathbf{q} , если

$$u_0 + \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{u})^2 + s} \geq s_2(\mathbf{q}), \quad (18.248)$$

и не будет пересекать σ_2 вообще, если

$$u_0 \geq \underset{\mathbf{q}}{\text{Max}} \{s_2(\mathbf{q}) - \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{u})^2 + s}\} = m(\mathbf{u}, s). \quad (18.249)$$

Аналогично, нижняя пола $q_0 = u_0 - \sqrt{(q-u)^2 + s}$ не будет пересекать поверхность σ_1 , если

$$u_0 \leq \underset{q}{\text{Min}} \{s_1(q) + \sqrt{(q-u)^2 + s}\} = M(u, s). \quad (18.250)$$

Поэтому область S в r -пространстве определяется

$$S: \quad m(u, s) \leq u_0 \leq M(u, s). \quad (18.251)$$

Она ограничена в r -пространстве двумя поверхностями Σ_1 и Σ_2 . Поскольку эти поверхности являются оболочками двух семейств гиперboloидов, то они также пространственно-подобны. Обозначим через T дополнение¹⁾ области S , т. е. такое множество точек в r -пространстве, которое определяется согласно

$$T: \quad M(u, s) < u_0 < m(u, s). \quad (18.252)$$

Дайсон доказал [204], что для того, чтобы выражение (18.243) представляло функцию $\tilde{f}(q)$ класса C_R , функция $\tilde{F}(r)$ должна равняться нулю в каждой точке r области T .

Пусть в (18.243) в качестве Σ выбрана пространственно-подобная поверхность, расположенная между поверхностями Σ_1 и Σ_2 , например поверхность

$$u_0 = \frac{1}{2} [m(u, s) + M(u, s)]. \quad (18.253)$$

Согласно (18.251) и (18.252), каждая точка такой поверхности Σ принадлежит либо области S , либо области T . Функция $\tilde{F}(r)$ равна нулю в каждой точке r области T . Поэтому функция $\tilde{f}(q)$ будет принадлежать к классу C_R тогда и только тогда, когда она представима (и притом единственным образом) в виде

$$\tilde{f}(q) = \int_{\Sigma(S)} d\Sigma_\alpha \left[\tilde{F}(r), \frac{\partial}{\partial r_\alpha} D(r - \hat{q}) \right], \quad (18.254)$$

где интеграл распространен только по тем точкам r пространственно-подобной поверхности Σ , которые принадлежат области S , причем область S определена формулами (18.249), (18.250) и (18.251). Если не заботиться о единственности представления, т. е. допускать, что, например, две различные функции $\tilde{F}(r)$ могут приводить к одной и той же функции $\tilde{f}(q)$, и это оправдано в большинстве приложений, то тогда ответом к общей задаче, поставленной в начале настоящего параграфа, служит следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы функция $\tilde{f}(q)$ была равна нулю в области $s_1(q) < q_0 < s_2(q)$ и имела фурье-образ $f(x)$, равный нулю вне светового конуса, необ-

¹⁾ На самом деле, по-видимому, область T нельзя называть дополнением области S ; область S состоит из дважды допустимых гиперboloидов (18.247), а область T состоит из дважды недопустимых гиперboloидов (т. е. из таких, у которых верхняя пола проходит ниже поверхности σ_2 , а нижняя — выше поверхности σ_1). Но в r -пространстве существуют также области, заполняемые гиперboloидами, у которых недопустима только одна пола [928]. — *Прим. ред.*

ходимо и достаточно, чтобы для нее существовало представление

$$\tilde{f}(q) = \int d^4u \int_0^\infty ds e(q_0 - u_0) \delta[(q - u)^2 - s] \Phi(u, s), \quad (18.255)$$

где $\Phi(u, s)$ — функция, равная нулю вне области S , определяемой согласно (18.249), (18.250) и (18.251), но в остальном произвольная.

Другими словами, если в представление (18.255) подставить функцию $\Phi(u, s)$, равную нулю при тех u, s , при которых равенству $(u - q)^2 = s$ удовлетворяет хотя бы один вектор q из области R , но в остальном произвольную, то тогда формула (18.255) воспроизведет функцию $\tilde{f}(q)$ с нужными свойствами сосредоточенности в импульсном и в конфигурационном пространствах. Представление (18.255) можно понять более глубоко, если с помощью преобразования Фурье записать его в x -пространстве:

$$f(x) = \int_0^\infty ds \Delta(x; s) \tilde{\Phi}(x; s), \quad (18.256)$$

где $\tilde{\Phi}(x; s)$ — фурье-образ функции $\Phi(u, s)$ по u , а $\Delta(x; s)$ — нечетная инвариантная функция, соответствующая массе \sqrt{s} и равная нулю при $x^2 < 0$ и $-\frac{1}{2\pi} \delta(x^2) + \frac{S}{4\pi} \frac{J_1(\sqrt{sx^2})}{\sqrt{sx^2}}$ при $x_0 \gg |x|$. Формула (18.256) представляет разложение функции $f(x)$ по функциям $\Delta(x; s)$. (Система функций $\Delta(x; s)$ является полной во времени-подобном направлении при интегрировании по массе s .) Такое разложение автоматически обеспечивает свойство $f(x) = 0$ при $x^2 < 0$.

В частном случае, когда пространственно-подобные поверхности σ_1 и σ_2 определены согласно (18.220), т. е.

$$s_1(\mathbf{q}) = a - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_2^2}, \quad (18.257a)$$

$$s_2(\mathbf{q}) = -a + \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_1^2}, \quad (18.257b)$$

область S определяется при помощи неравенств (18.251), где

$$m(\mathbf{u}, s) = \text{Max}_{\mathbf{q}} \{ \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_2^2} - a - \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{u})^2 + s} \}, \quad (18.258)$$

$$M(\mathbf{u}, s) = \text{Min}_{\mathbf{q}} \{ a - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_2^2} + \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{u})^2 + s} \}. \quad (18.259)$$

Выражение в фигурных скобках в (18.258) имеет экстремум при том значении \mathbf{q} , при котором обращается в нуль градиент по \mathbf{q} . Это происходит, когда

$$\mathbf{q} = \frac{m_1 \mathbf{u}}{m_1 - \kappa}, \quad (18.260)$$

где \sqrt{s} обозначен при помощи κ :

$$\kappa = \sqrt{s} \geq 0. \quad (18.261)$$

Если $m_1 > \kappa$, то вектор \mathbf{q} параллелен вектору \mathbf{u} и тогда значению (18.260) соответствует максимум; следовательно,

$$m(\mathbf{u}, \kappa^2) = \sqrt{\mathbf{u}^2 + (m_1 - \kappa)^2} - a \quad \text{при } m_1 > \kappa > 0. \quad (18.262)$$

Если $\kappa > m_1$, то значению (18.260) соответствует минимум. Никаких других экстремальных точек при конечных значениях \mathbf{q} нет. Второй экстремум выражения в фигурных скобках в (18.258) достигается при $\mathbf{q} = \lambda \mathbf{u}$, когда $\lambda \rightarrow \infty$. В этом пределе выражение в скобках в (18.258) принимает значение $|\mathbf{u}| - a$, которое при $\kappa > m_1$ является максимумом. Таким образом,

$$m(\mathbf{u}, \kappa^2) = |\mathbf{u}| - a \quad \text{при } \kappa > m_1. \quad (18.263)$$

Если провести аналогичные вычисления минимума в (18.259), то придем к выводу, что при $m_1 < m_2$ область S определяется неравенствами

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{u}^2 + (m_1 - \kappa)^2} - a < u_0 < a - \sqrt{\mathbf{u}^2 + (m_2 - \kappa)^2} & \quad \text{при } 0 < \kappa < m_1, \\ |\mathbf{u}| - a < u_0 < a - \sqrt{\mathbf{u}^2 + (m_2 - \kappa)^2} & \quad \text{при } m_1 < \kappa < m_2, \\ |\mathbf{u}| - a < u_0 < a - |\mathbf{u}| & \quad \text{при } \kappa > m_2. \end{aligned} \quad (18.264)$$

Более полезна такая запись этих неравенств, определяющих область S , когда пределы интегрирования по u_0 и $|\mathbf{u}|$ не зависят от κ ,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}| - a < u_0 < a - |\mathbf{u}|, \\ |\mathbf{u}| < a, \end{aligned}$$

$$\kappa \geq \text{Max} \{0, m_2 - \sqrt{(u_0 - a)^2 - \mathbf{u}^2}, m_1 - \sqrt{(u_0 + a)^2 - \mathbf{u}^2}\}. \quad (18.265)$$

Неравенства (18.265), характеризующие область S , легче всего получить¹⁾, находя максимальное значение $s = \kappa^2$ при фиксированном значении вектора (u_0, \mathbf{u}) таким образом, чтобы гиперболоид $(q - u)^2 = s$ только касался пространственно-подобных поверхностей $q_0 = s_1(\mathbf{q})$ и $q_0 = s_2(\mathbf{q})$. В случае функций s_1 и s_2 , задаваемых формулами (18.257а) и (18.257б), отыскивая экстремум выражения $(q - u)^2 + \lambda [(q_0 - a)^2 - \mathbf{q}^2 - m_2^2]$ (λ — множитель Лагранжа), находим

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{макс.}} &= \text{Max} \{m_2 - \sqrt{(u_0 - a)^2 - \mathbf{u}^2}, 0\} \quad \text{при } |u_0| + |\mathbf{u}| < a, \\ &= \infty \quad \text{при } |u_0| + |\mathbf{u}| > a, \end{aligned} \quad (18.266)$$

причем $\tilde{F}(r) = 0$ в области, где $\kappa < \kappa_{\text{макс.}}$. Аналогичный результат получается и для s_2 , однако теперь функция $\tilde{F}(r)$ отлична от нуля при $\kappa < \kappa_{\text{макс.}}$. Отсюда и следуют неравенства (18.265). Очевидно, что в лоренц-

¹⁾ Вместо этого читатель может очень легко проверить, что неравенства (18.264) и (18.265) выводятся друг из друга и, следовательно, эквивалентны. — *Прим. ред.*

инвариантной форме это определение области S записывается в виде

$$\left(\frac{P+Q}{2} + u\right) \in L^+,$$

$$\left(\frac{P+Q}{2} - u\right) \in L^+,$$

$$x \geq \text{Max} \left\{ 0, m_1 - \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2} + u\right)^2}, m_2 - \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2} - u\right)^2} \right\}, \quad (18.267)$$

где через L^+ обозначен световой конус будущего.

Представление запаздывающего произведения, т. е. функции

$$f_R(x) = \theta(x) f(x), \quad (18.268)$$

где $f(x) = 0$ при $x^2 < 0$ и $\tilde{f}(q) = 0$ при q в R , формально можно получить, используя представление (18.70) для $\theta(x)$ и поступая дальше так же, как при выводе представления (18.75). Этот формальный путь приводит к следующему представлению для фурье-образа $\tilde{f}_R(q)$ функции $f_R(x)$:

$$\tilde{f}_R(q) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dq'_0 \tilde{f}(q'_0, \mathbf{q})}{q'_0 - q_0}, \quad \text{Im } q_0 > 0, \quad (18.269)$$

а если использовать (18.255) — то к представлению

$$\tilde{f}_R(q) = -\frac{1}{2\pi} \int d^4u \int_0^\infty dx^2 \frac{\Phi(u, x^2)}{(q-u)^2 - x^2}. \quad (18.270)$$

Если интеграл (18.270) существует, т. е. если Φ достаточно хорошо ведет себя по x^2 , то выражение (18.270) и дает нужное представление для $\tilde{f}_R(q)$. Однако, вообще говоря, произведение $\theta(x) f(x)$ не обязано вести себя хорошо (поскольку это произведение двух обобщенных функций), и для получения сходящегося интеграла, возможно, потребуется разделить $\Phi(u, x^2)$ на полином некоторой конечной (скажем, n -й) степени по x^2 . В этом случае функция $\tilde{f}_R(q)$ будет определена только с точностью до произвольного полинома n -й степени по x^2 (см. статью Йоста и Лемана [405]).

§ 4. Дисперсионные соотношения

Главная задача аксиоматического подхода в квантовой теории поля заключается в получении наблюдаемых следствий из условия локальности, т. е. из предположения, что локальные полевые наблюдаемые коммутируют (или антикоммутируют) при пространственно-подобном разделении. В более общем плане проблема состоит в том, чтобы, основываясь только на общих аксиомах, получить спектральные представления для всех наблюдаемых величин (таких, как элементы матрицы рассеяния) и непосредственно сопоставить эти представления и их следствия с экспериментальными данными. В настоящем параграфе мы прежде всего займемся энергетической зависимостью двухчастичной амплитуды рассеяния. Хотя Манделстам [531] и предложил некоторое представление, которое явным образом выражает свойства аналитичности амплитуды рассеяния как функции инвариантных переменных (по сути дела, энергии и передачи импульса), но это представление все еще не доказано на основании общих аксиом. (Правда, Иден [213—215] доказал,

что при некоторых предположениях это представление справедливо в каждом порядке теории возмущений¹⁾.) Однако еще в 1956 г. Боголюбов и другие показали, что можно дать доказательство аналитичности амплитуды рассеяния как функции энергии при фиксированном значении передачи импульса и что можно строго вывести дисперсионные соотношения, связывающие действительную и мнимую части амплитуды рассеяния (при фиксированной передаче импульса). Эти дисперсионные соотношения были применены в π -мезонной физике для феноменологического и полужфеноменологического анализа экспериментальных данных.

Своим возникновением теория дисперсионных соотношений в первую очередь обязана работам Голдбергера и его сотрудников. Голдбергер первым дал эвристическое доказательство дисперсионных соотношений для бозон-фермионного рассеяния [322] и сравнил эти дисперсионные соотношения с экспериментальными данными по рассеянию π -мезонов на нуклонах [323]. Ему также принадлежит заслуга применения метода дисперсионных соотношений для вычисления характеристик систем сильно взаимодействующих частиц (например, форм-фактора нуклона, форм-факторов для β -распада, времени жизни π^0 -мезона и т. д.).

Вкратце проиллюстрируем сделанные замечания на примере вывода аналитических свойств амплитуды рассеяния фотона вперед. Именно для этого процесса дисперсионные соотношения впервые были выведены при помощи методов теории поля (работа Гелл-Манна, Голдбергера и Тирринга [305]; обзор дисперсионных соотношений Крамерса — Кронига, см. в работах Толла [780, 781]).

В § 5 гл. 17 получена замкнутая форма нужной нам амплитуды рассеяния. Амплитуда для рассеяния вперед (т. е. при $k' = k$, $p' = p$) определяется величиной

$$T_{\nu\mu}(k) = i \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle ps' | \{ [j_\mu(x), j_\nu(0)] \theta(x) - \delta(x_0) [j_\mu(x), \dot{A}_\nu(0)] \} | ps \rangle = \\ = T_{\nu\mu}(k; s's), \quad (18.271a)$$

а именно для процесса рассеяния фотона, имеющего начальное состояние поляризации $\varepsilon^{(\lambda)}(k)$ и переходящего в состояние поляризации $\varepsilon^{(\lambda')}(k)$ [$\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) k^\mu = \varepsilon_\mu^{(\lambda')}(k) k^\mu = 0$], в то время как рассеиватель (протон) переходит из состояния $|ps\rangle$ в состояние $|ps'\rangle$, элемент S -матрицы равен $\varepsilon_\mu^{(\lambda')} T^{\mu\nu}(k; s's) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}$. По поводу представления (18.271a) для амплитуды рассеяния вперед следует отметить два обстоятельства. Во-первых, вся зависимость от k содержится только в экспоненте

$$e^{ik \cdot x} = e^{i\omega(t - \mathbf{e} \cdot \mathbf{x})}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad (18.271б)$$

и, во-вторых, величина $\theta(x) [j_\mu(x), j_\nu(0)]$ равна нулю не только при $x_0 < 0$, но на основании требования причинности также и при $x^2 < 0$. Таким образом, $T_{\mu\nu}(\omega)$ есть фурье-образ функции, равной нулю вне светового конуса будущего, и поэтому он обладает определенными свойствами аналитичности как функция комплексной переменной $\omega = \omega_1 + i\omega_2$.

Здесь для вычисления величин, входящих в формулу (18.271a), удобно выбрать определенную лоренцеву систему отсчета. Это не ведет

¹⁾ Доказательство Идена было опровергнуто Наканиши [908]. До сих пор представление Манделштама не доказано даже в теории возмущений. — *Прим. ред.*

к потере общности, так как фактически с точностью до кинематических множителей T является инвариантом. В качестве системы отсчета выберем лабораторную систему, в которой $p=0$. Предположим, что состояние $|ps\rangle$ имеет определенную четность. В этом предположении легко вывести следующее свойство симметрии величины T :

$$T_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{k}; s's) = T_{\mu\nu}(\omega, -\mathbf{k}; s's), \quad (18.272)$$

где $k_0 = \omega$ и, конечно, $\omega = |\mathbf{k}|$, поскольку мы имеем в виду рассеяние физического фотона. Таким образом, $T_{\mu\nu}$ является четной функцией от \mathbf{k} , и множитель $\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$ можно заменить на $\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$. Отсюда следует, что амплитуда $T_{\mu\nu}$ зависит от \mathbf{k} только через посредство $k^2 = \omega^2$ (поскольку $\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})^2 \pm \dots$), и ее можно рассматривать как функцию только переменной ω .

Для дальнейших ссылок отметим здесь, что зависимость от ω у члена, содержащего $\delta(x_0) [j_\mu(x), \dot{A}_\nu(0)]$, легко найти. Если записать

$$\int d^4x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta(x_0) \langle ps' | [j_\mu(x), \dot{A}_\nu(0)] | ps \rangle = \int d^4x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} G_{\mu\nu}^{s's}(p, x), \quad (18.273)$$

то из требования локальности следует, что функция $G_{\mu\nu}^{s's}(p, x)$ равна нулю при $x \neq 0$ и что она должна иметь вид

$$G_{\mu\nu}^{s's}(p, x) = \sum_{l=1}^n g_{\mu\nu}^{s's}(p; l) \delta^{(l)}(x), \quad (18.274)$$

где число n является конечным¹⁾. Отсюда

$$\int d^4x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta(x_0) \langle ps' | [j_\mu(x), \dot{A}_\nu(0)] | ps \rangle = \sum_{l=1}^n g_{\mu\nu}^{s's}(p; l) \omega^l. \quad (18.275)$$

Таким образом, вклад члена (18.275) в $T_{\mu\nu}(\omega)$ есть полином по ω конечной степени. Поскольку мы интересуемся только аналитическими свойствами амплитуды T как функции ω , то в дальнейшем мы будем опускать член с $\delta(x_0)$, так как характер его зависимости от ω нам теперь известен. Отметим также соотношение

$$\overline{T_{\mu\nu}(\omega; ss')} = T_{\mu\nu}(-\omega; s's), \quad (18.276)$$

которое означает, что если $T_{\mu\nu}$ рассматривать как матрицу с индексами s, s' (т. е. в спиновом пространстве нуклонов), то замена ω на $-\omega$ превращает матрицу $T_{\mu\nu}$ в эрмитово сопряженную матрицу.

Благодаря свойству запаздывания у величины $\theta(x) [j_\mu(x), j_\nu(0)]$ первый член подынтегрального выражения в (18.271а) отличен от нуля только при $t > |\mathbf{x}|$, а поэтому правая часть (18.271а) определяет функцию $T_{\mu\nu}(\omega)$ комплексной переменной $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, аналитичную в верхней полуплоскости ω . Если предположить, что матричный элемент коммутатора является непрерывным внутри светового конуса, тогда по лемме Римана — Лебега асимптотическое поведение амплитуды $T(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ определяется особенностями коммутатора на световом конусе. Если игнорировать возможность особенностей при $\omega = \infty$, возник-

¹⁾ Допущение о присутствии производных только конечного порядка можно рассматривать как существенное дополнение к определению локального поля.

кающих за счет полиномиальной зависимости T от ω , то эти аналитические свойства можно выразить при помощи соотношения Гильберта

$$T_{\mu\nu}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega' \operatorname{Im} T_{\mu\nu}(\omega')}{\omega' - \omega - i\epsilon}. \quad (18.277a)$$

Если предположить, что в пределе $\omega \rightarrow \infty$ мнимая часть $\operatorname{Im} T_{\mu\nu}(\omega')$ ведет себя как постоянная, тогда будет справедливо соотношение Гильберта с вычитанием:

$$T_{\mu\nu}(\omega) - T_{\mu\nu}(0) = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega' \operatorname{Im} T_{\mu\nu}(\omega')}{\omega'(\omega' - \omega - i\epsilon)}. \quad (18.277b)$$

Чтобы не затемнять внутреннюю простоту вывода дисперсионных соотношений для рассеяния фотона на нуклоне алгебраическими деталями, связанными с наличием спинорных и векторных индексов, мы ограничимся в дальнейшем случае амплитуды чисто когерентного рассеяния, т. е. случае, когда $k = k'$, $p = p'$, $s = s'$ и $\lambda = \lambda'$. Элемент матрицы рассеяния $\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)} T^{\mu\nu}(\omega) \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)}$ обозначим через $M_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega)$. Для того чтобы записать соотношение (18.277b) как дисперсионное соотношение, связывающее действительную и мнимую части M , взятые только при физических значениях ω , нужно выяснить некоторые дальнейшие свойства $\operatorname{Im} T_{\mu\nu}^{ss}(\omega)$ и, в частности, является ли она при изменении знака ω четной или нечетной. Прежде всего отметим, что при $s = s'$ из соотношения (18.276) следует

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T_{\mu\nu}^{ss}(\omega) &= \frac{1}{2i} (T_{\mu\nu}^{ss}(\omega) - \overline{T_{\mu\nu}^{ss}(\omega)}) = \\ &= \frac{1}{2i} (T_{\mu\nu}^{ss}(\omega) - T_{\mu\nu}^{ss}(-\omega)) = \\ &= -\operatorname{Im} T_{\mu\nu}^{ss}(-\omega). \end{aligned} \quad (18.278)$$

Отметим также, что $\operatorname{Im} T_{\mu\nu}^{ss}(\omega)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T_{\mu\nu}^{ss}(\omega) &= \frac{1}{2} \int d^4x e^{ik \cdot x} \{ \langle ps | [j_{\mu}(x), j_{\nu}(0)] | ps \rangle \theta(x) - \\ &\quad - \langle ps | [j_{\mu}(-x), j_{\nu}(0)] | ps \rangle \theta(-x) \}. \end{aligned} \quad (18.279)$$

В силу трансляционной инвариантности

$$\langle ps | [j_{\mu}(-x), j_{\nu}(0)] | ps \rangle = \langle ps | [j_{\mu}(0), j_{\nu}(x)] | ps \rangle, \quad (18.280)$$

и с учетом того, что $\theta(x) + \theta(-x) = 1$, получаем

$$\operatorname{Im} M_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega) = -\operatorname{Im} M_{\lambda\lambda}^{ss}(-\omega) \quad (18.281a)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle ps | [\varepsilon^{(\lambda)} \cdot j(x), \varepsilon^{(\lambda)} \cdot j(0)] | ps \rangle. \quad (18.281b)$$

Если в (18.271) подставить $\theta(x) = \frac{1}{2}(\varepsilon(x) + 1)$, то тогда амплитуда разобьется на две части:

$$M_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega) = D_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega) + iA_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega), \quad (18.282a)$$

где

$$A_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega) = \operatorname{Im} M_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega), \quad (18.282b)$$

$$D_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega) = \frac{i}{2} \int d^4x e^{ik \cdot x} \varepsilon(x) \langle ps | [\varepsilon^{(\lambda)} \cdot j(x), \varepsilon^{(\lambda)} \cdot j(0)] | ps \rangle. \quad (18.282b)$$

$A_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega)$ и $D_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega)$ — абсорбционная и дисперсивная части амплитуды рассеяния. В абсорбционную часть при $\omega > 0$

$$A_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega) = \text{Im } M_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{|p_n \alpha\rangle} \int d^4 x e^{i h \cdot x} |\langle p_S | \varepsilon^{(\lambda)} \cdot j(0) | p_n \alpha \rangle|^2 e^{i(p-p_n) \cdot x} \quad (18.283a)$$

$$= \pi \sum_{p_{n0}, \alpha} |\langle p_S | \varepsilon^{(\lambda)} \cdot j(0) | p_{n0}, \mathbf{p} + \mathbf{k}; \alpha \rangle|^2 \delta(p_{n0} - \omega - E_p) \quad (18.283b)$$

вносят вклад только реальные промежуточные состояния (реальность этих состояний обусловлена тем, что δ -функция гарантирует сохранение энергии и импульса). В сумму (18.283b) вносят вклад состояния, соответствующие всем возможным упругим и неупругим процессам взаимодействия начальных частиц. С другой стороны, в D вносят вклад виртуальные (не сохраняющие энергию) состояния. Следует отметить, что дисперсивная и абсорбционная части являются действительной и мнимой частями амплитуды только в когерентном случае.

В некогерентном случае ситуация несколько более сложная. Абсорбционная и дисперсивная части по-прежнему определяются разложением $\theta(x) = \frac{1}{2}(\varepsilon(x) + 1)$, однако благодаря наличию синовых переменных протона и фотона функции A и D не являются больше действительными¹⁾.

Если воспользоваться соотношением (18.281a), то в формуле (18.277a) можно исключить отрицательные значения ω , и мы получим

$$M_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \text{Im } M_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega') \left[\frac{1}{\omega' - \omega - i\epsilon} + \frac{1}{\omega + \omega'} \right]. \quad (18.284a)$$

Дисперсионные соотношения с одним вычитанием в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ будут иметь вид

$$D_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega) - D_{\lambda\lambda}^{ss}(0) = \text{Re } M_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega) - \text{Re } M_{\lambda\lambda}^{ss}(0) = \frac{2\omega^2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{A_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega') d\omega'}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)}. \quad (18.284b)$$

По оптической теореме (11.97), которая является следствием унитарности S -матрицы, имеем при $\omega > 0$

$$\text{Im } M_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega) = A_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega) = \frac{\omega}{4\pi} \sigma_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega), \quad (18.285)$$

так что окончательно дисперсионные соотношения запишутся в виде

$$D_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega) - D_{\lambda\lambda}^{ss}(0) = \frac{\omega^2}{2\pi^2} P \int_0^{\infty} \frac{\sigma_{\lambda\lambda}^{ss}(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (18.286a)$$

¹⁾ Абсорбционная A и дисперсивная D части всегда являются эрмитовой и антиэрмитовой частями S -матрицы $S = -A + iD$.

Если же ввести амплитуду рассеяния T соотношением $S = 1 + iT$ ($T = D + iA$), то D и A будут эрмитовой и антиэрмитовой частями амплитуды T [65—67] — *Прим. ред.*

В § 5 гл. 17 было показано, что

$$D_{\lambda\lambda}^{\text{ss}}(0) = -\frac{e^2}{M}, \quad (18.286\text{a})$$

и, следовательно, соотношение (18.286а) можно переписать в виде

$$D_{\lambda\lambda}^{\text{ss}}(\omega) = -\frac{e^2}{M} + \frac{\omega^2}{2\pi^2} P \int_0^\infty d\omega' \frac{\sigma_{\lambda\lambda}^{\text{ss}}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (18.286\text{b})$$

Аналогичные дисперсионные соотношения справедливы также для рассеяния фотона на системе со спином 0. В случае комптоновского рассеяния на протонах в числе состояний $|p, \alpha\rangle$, вносящих вклад в $A_{\lambda\lambda}^{\text{ss}}(\omega)$ [формула (18.283)], будут состояния, содержащие, кроме протона, еще фотоны и электронно-позитронные пары, а также состояния с мезонами и нуклон-антинуклонными парами.

Состояния с двумя или более фотонами или с электронно-позитронными парами имеют порядок не ниже e^4 , и, следовательно, если пренебречь членами, начиная с порядка e^4 , то при $\omega \gg \mu$ наименьшим состоянием, вносящим вклад в $A_{\lambda\lambda}^{\text{ss}}$, будет мезон-нуклонное состояние. Ниже порога фоторождения мезона ($\omega < \mu$) в пренебрежении членами, начиная с порядка e^4 , абсорбционная часть амплитуды $A_{\lambda\lambda}^{\text{ss}}$ равна нулю. Поэтому можно ожидать, что полное сечение вблизи порога хорошо аппроксимируется сечением фоторождения (сравнение таких дисперсионных соотношений с экспериментальными данными можно найти в работах Каппса [106, 107] и Мэтьюза [547]).

Простота вывода дисперсионных соотношений для процессов с фотонами обусловлена тем, что у фотона $|\mathbf{k}| = \omega$, и на основании предположения о причинности множитель $\exp(i\omega t)$ в формуле (18.271б) преобладает над множителем $\exp(-i\omega \epsilon \cdot \mathbf{x})$. В случае частицы с конечной массой ($\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$) с областью энергий $0 < \omega < \mu$ связаны значительные трудности. Однако прежде, чем переходить к случаю рассеяния частиц с ненулевой массой, отметим, что дисперсионные соотношения можно выводить не только для амплитуд рассеяния, во и для других величин.

Рассмотрим величину

$$M_\mu(qi, kj) = \langle 0 | j_\mu(0) | qi, kj \rangle_{\text{in}}, \quad (18.287)$$

где q и k — импульсы; i и j — изотопические переменные двухмезонного состояния $|qi, kj\rangle_{\text{in}}$; $j_\mu(x)$ — оператор 4-вектора плотности электромагнитного тока. Выражение (18.287) определяет электромагнитный форм-фактор мезона. [С такой же легкостью можно было бы рассмотреть и матричный элемент $\langle qi | j_\mu(0) | kj \rangle_+$, с которым матричный элемент (18.287) тесно связан.] Инвариантность относительно преобразований Лоренца означает, что

$$M_\mu(q, i; k, j) = \Lambda_\mu^\nu M_\nu(\Lambda q, i; \Lambda k, j) \quad (18.288)$$

и, следовательно,

$$M_\mu(qi; kj) = (a q_\mu + b k_\mu) M_{ij}((q+k)^2). \quad (18.289)$$

(Мы опустили у M_{ij} зависимость от k^2 и q^2 , поскольку импульсы k и q соответствуют физическим мезонам $k^2 = q^2 = \mu^2$.) Калибровочная инвариантность, или требование $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$, подразумевает, что

$$(q+k)^\mu \langle 0 | j_\mu(0) | qi, kj \rangle_{\text{in}} = 0 \quad (18.290)$$

и, следовательно,

$$M_{\mu}(qi, kj) = (g - k)_{\mu} M_{ij}((g + k)^2), \quad (18.291)$$

поскольку $(g - k)(g + k) = g^2 - k^2 = 0$. Наконец, инвариантность матричного элемента относительно любых вращений вокруг оси \hat{z} в изотопическом пространстве означает, что

$$M_{ij}((g + k)^2) = \varepsilon_{zij} M((g + k)^2). \quad (18.292)$$

Объединяя полученные выше следствия требований симметрии, можно записать матричный элемент $M_{\mu}(qi; kj)$ в виде

$$M_{\mu}(qi, kj) = i \frac{e}{\sqrt{2}} \varepsilon_{zij} (g - k)_{\mu} M((g + k)^2). \quad (18.293)$$

С помощью асимптотических условий матричный элемент (18.287) можно привести следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{\mu}(qi, kj) &= \langle 0 | j_{\mu}(0) a_{j_{in}}^*(k) | qi \rangle = \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} i \int d^3x \langle 0 | j_{\mu}(0) \varphi_j(x) | qi \rangle \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x) = \\ &= -i \int d^4x f_k(x) K_x \langle 0 | T(j_{\mu}(0) \varphi_j(x)) | qi \rangle. \end{aligned} \quad (18.294)$$

При действии оператора K_x на T -произведение снова возникает одновременно коммутатор, приводящий к членам, которые по соображениям инвариантности и предполагаемой локальности теории должны иметь вид произведения вектора $(g - k)_{\mu}$ на полином от $(g + k)^2$. Мы временно опустим эти члены и просто запишем

$$M_{\mu}(qi, kj) = i \int d^4x e^{-ik \cdot x} \langle 0 | T(j_{\mu}(0) J_j(x)) | qi \rangle, \quad (18.295)$$

где $J_j(x) = K_x \varphi_j(x)$. Расписав

$$T(j_{\mu}(0) J_j(x)) = \theta(-x) [j_{\mu}(0), J_j(x)] + J_j(x) j_{\mu}(0),$$

отметим, что член

$$\begin{aligned} &\int d^4x e^{-ik \cdot x} \langle 0 | J_j(x) j_{\mu}(0) | qi \rangle = \\ &= (2\pi)^4 \sum_{|p_n \alpha \rangle} \delta^{(4)}(k + p_n) \langle 0 | J_j(0) | p_n \alpha \rangle \langle p_n \alpha | j_{\mu}(0) | qi \rangle \end{aligned} \quad (18.296)$$

при $k_0 > \mu$ обращается в нуль, так как p_{n0} должна быть энергией физического состояния. Поэтому мы перейдем к изучению представления для форм-фактора

$$M_{\mu}(qi, kj) = i \int d^4x e^{-ik \cdot x} \langle 0 | [j_{\mu}(0), J_j(x)] | qi \rangle \theta(-x), \quad (18.297)$$

которое при $q^2 = k^2 = \mu^2$ совпадает с выражением (18.295). Причинность означает, что $[j_{\mu}(0), J_j(x)] = 0$ при пространственно-подобных x и, следовательно, M_{μ} есть фурье-образ функции, равной нулю всюду вне светового конуса прошлого. Предполагая, что состояние $|qi\rangle$ имеет определенную четность при пространственных отражениях [а $J_j(x)$ приобретает при отражении тот же фазовый множитель, что и $|qi\rangle$], снова приходим к заключению, что $M_{\mu}(qi; \omega, \mathbf{k}, j) = M_{\mu}(qi; \omega, -\mathbf{k}, j)$. Отсюда следует, что снова можно множитель $\exp(ik \cdot x)$ заменить множителем $\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ и рас-

смагивать величину $M_\mu(qi; \omega, \mathbf{k}, j)$ при фиксированном значении q как функцию только переменной ω (ибо $\mathbf{k}^2 = \omega^2 - \mu^2$). Опять вся зависимость M_μ от ω сосредоточилась в экспоненте

$$\exp i(\omega t - \sqrt{\omega^2 - \mu^2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}.$$

Все эти соображения означают, что можно получить дисперсионные соотношения для M_μ , или, точнее, для скалярной функции $M((q+k)^2)$. Эту функцию можно выделить из M_μ , свернув выражение (18.297) с $\varepsilon_{3ij} (q-k)^\mu$ по индексам i, j и μ . В результате получаем

$$\begin{aligned} [4\mu^2 - (q+k)^2] M((q+k)^2) &= \\ &= \frac{i}{2} \sum_{ij} \int d^4x e^{-ik \cdot x} \varepsilon_{3ij} (q-k)^\mu \langle 0 | [j_\mu(0), J_j(x)] | qi \rangle \theta(-x). \end{aligned} \quad (18.298)$$

Благодаря калибровочной инвариантности $q_\mu M^\mu = -k_\mu M^\mu$ и, следовательно, множитель $(q-k)_\mu$ можно заменить на $2q_\mu$, а этот множитель в свою очередь в применении к матричному элементу $\langle 0 | [j_\mu(0), J_j(x)] | qi \rangle$ можно представить в виде $-2i\partial^\mu$. В лоренцевой системе отсчета, в которой $\mathbf{q} = 0$, матричный элемент $\sum_{ij} \varepsilon_{3ij} \partial^\mu \langle 0 | [j_\mu(0), J_j(x)] | qi \rangle$ является скалярной функцией от $x^2 = x_0^2 - r^2$ и x_0^1 . Поэтому в выражении для M можно выполнить интегрирование по пространственным угловым переменным:

$$\begin{aligned} i[4\mu^2 - (q+k)^2] M((q+k)^2) &= \int_0^\infty 2\pi r dr \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} r}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} \int_{-\infty}^0 dt e^{-i\omega t} \sum_{ij} \varepsilon_{3ij} \partial^\mu \times \\ &\quad \times \langle 0 | [j_\mu(0), J_j(x)] | qi \rangle \quad (18.299a) \\ &= \int_0^\infty 2\pi r dr M'_r(\omega), \quad (18.299b) \end{aligned}$$

где выражение

$$M'_r(\omega) = \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} r}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} \int_{-\infty}^0 dt e^{-i\omega t} \sum_{ij} \varepsilon_{3ij} \partial^\mu \langle 0 | [j_\mu(0), J_j(x)] | qi \rangle \quad (18.300)$$

следует понимать как среднее по углам. Функция $M'_r(\omega)$ аналитична в верхней полуплоскости ω . (Поскольку $[j_\mu(0), J_j(x)] = 0$ при $r > |t|$, то множитель $\sin(kr) \cdot \exp(-i\omega t)$ ($t < 0$) при $\omega = i\infty$ обрезает интеграл; далее, поскольку $\frac{\sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} r}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}$ — четная функция $\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$, то при $\omega = \pm \mu$ точек ветвления нет.) Если игнорировать возможность особенностей на бесконечности от опущенных в (18.294) (или в аналогичном выражении с T , замененным на R) одновременных членов и возможность особенностей типа δ -функции у запаздывающего коммутатора на световом конусе при фиксированном r , то тогда для $M'_r(\omega)$ можно за-

¹ По соображениям инвариантности матричный элемент является функцией только переменных $q^2 = \mu^2$, x^2 и $q \cdot x$. Совершая переход в систему покоя $q=0$, приходим к указанному заключению.

писать следующее соотношение Гильберта:

$$M'_r(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega' \operatorname{Im} M'_r(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon}. \quad (18.301)$$

Чтобы получить дисперсионное соотношение для M , нужно проинтегрировать соотношение (18.301) по r . Для этого мы разобьем интеграл на две части, соответствующие $|\omega| > \mu$ и $|\omega| < \mu$. Ниже мы увидим, что $\operatorname{Im} M'_r(\omega)$ также содержит множитель $\sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} r$. В области $|\omega| < \mu$ корень $\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ является мнимым, и, следовательно, $\sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} r$ экспоненциально растет при больших r . Поэтому изменение порядка интегрирования по r и ω' незаконно. (У фотона $\omega = |\mathbf{k}|$, в связи с чем при выводе дисперсионных соотношений для рассеяния фотона вперед такая трудность не возникала, и это делало вывод намного более простым.) Интегрируя по r с учетом всего сказанного, получаем

$$M(\omega) = \int_0^{\infty} 2\pi r dr \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} M'_r(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} \quad (18.302a)$$

$$= \int_0^{\infty} 2\pi r dr \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\mu}^{+\mu} \frac{d\omega' \operatorname{Im} M'_r(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \left(\int_{\mu}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\mu} \right) \frac{d\omega' \operatorname{Im} M'_r(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} \right\}. \quad (18.302b)$$

Как показал Оме [592, 593], из P -инвариантности следует, что мнимая, или абсорбционная, часть M получается путем замены в формуле (18.297) множителя $i\theta(-x)$ множителем $1/2$:

$$\operatorname{Im} M_{\mu}(qi, kj) = \frac{1}{2} \int d^4x e^{-ik \cdot x} \langle 0 | j_{\mu}(0), J_j(x) | qi \rangle. \quad (18.303)$$

Несколько более длинное, но более прозрачное доказательство получается, если в определение (18.300) для $M'_r(\omega)$ вставить сумму $\sum |n\rangle \langle n|$ по полной системе состояний и выполнить интегрирование по времени (при этом мы добавляем множитель $\exp(\varepsilon t)$, чтобы придать смысл интегрированию до $t = -\infty$). В системе отсчета, где $\mathbf{q} = 0$, для $M'_r(\omega)$ получается следующее выражение:

$$M'_r(\omega) = \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} r}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} \sum_{|n\rangle} \sum_{ij} \varepsilon_{zij} \frac{\sin |p_n| r}{|p_n| r} \times \\ \times \left\{ \langle 0 | j_0(0) | n \rangle \langle n | J_j(0) | qi \rangle \left[P \frac{1}{\mu - p_{n0} + \omega} - i\pi \delta(\mu - p_{n0} + \omega) \right] - \right. \\ \left. - \langle 0 | J_j(0) | n \rangle \langle n | j_0(0) | qi \rangle \left[P \frac{1}{p_{n0} + \omega} - i\pi \delta(p_{n0} + \omega) \right] \right\}. \quad (18.304)$$

Состояния $|n\rangle$ удобно понимать как полусуммы ин- и аут-состояний. Тогда TP -инвариантность позволяет заключить, что матричные элементы, входящие в формулу (18.304), действительны.

Отметим также, что множители $\exp(\pm i p_n \cdot x)$ были заменены средними по углам $\exp(\pm i p_n \cdot x) \rightarrow \frac{\sin |p_n| r}{|p_n| r}$, к чему, как мы уже видели выше, сводится интегрирование по угловым переменным.

Таким образом, мнимую часть $M'_r(\omega)$ составляют члены с δ -функциями:

$$\begin{aligned} \text{Im } M'_r(\omega) = \pi \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} r}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} \sum_{|n\rangle} \sum_{ij} \varepsilon_{zij} \frac{\sin |p_n| r}{|p_n| r} \times \\ \times [\langle 0 | j_0(0) | n \rangle \langle n | J_j(0) | qi \rangle \delta(\mu - p_{n0} + \omega) - \\ - \langle 0 | J_j(0) | n \rangle \langle n | j_0(0) | qi \rangle \delta(p_{n0} + \omega)]. \end{aligned} \quad (18.305)$$

Состояния $|n\rangle$, вносящие вклад в $\text{Im } M'_r(\omega)$, должны иметь равным нулю барионное квантовое число (число тяжелых частиц минус число тяжелых античастиц). Наимизшие состояния, которые могут вносить вклад, — одномезонные состояния с $p_{n0} \geq \mu$. При описании нашей системы мы предполагаем, что четность является хорошим квантовым числом и что мезоны являются псевдоскалярными. Учитывая это в первой группе членов в (18.305) и наличие δ -функций во второй, приходим к заключению, что

$$\text{Im } M'_r(\omega) = 0 \quad \text{при } |\omega| < \mu. \quad (18.306)$$

Следовательно, доставляющая беспокойство нефизическая область $|\omega| < \mu$ на самом деле не дает вклада в дисперсионный интеграл (18.3026). Кроме того, если выполнить интегрирование по r , то сохранение импульса оставит во второй группе членов в (18.305) (членов вида $\langle 0 | J_j(0) | n \rangle \langle n | j_0(0) | qi \rangle$) только вклад от состояний с импульсом $-k$. Для этих состояний должно иметь место $p_n^2 = k^2 = \omega^2 - \mu^2$, а с учетом δ -функции $\delta(p_{n0} + \omega)$ и $p_{n0} = \omega^2$. Таким образом, масса этих состояний равна μ , и, следовательно, они одномезонные. Однако такие состояния вклада не дают, так как

$$\begin{aligned} \langle 0 | J_j(0) | n \rangle &= (\square + \mu^2) \langle 0 | \varphi_j(x) | n \rangle \Big|_{x=0} = \\ &= (\square + \mu^2) \langle 0 | \varphi_{j \text{ in}}(x) | n \rangle \Big|_{x=0} = 0, \end{aligned} \quad (18.307)$$

когда $|n\rangle$ — одномезонное состояние.

Итак, нам нужно рассматривать лишь ту часть $\text{Im } M'_r(\omega)$, которая дается выражением

$$\begin{aligned} \text{Im } M_r(\omega) = \pi \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} r}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} \sum_{|n\rangle} \sum_{ij} \varepsilon_{zij} \frac{\sin |p_n| r}{|p_n| r} \times \\ \times \langle 0 | j_0(0) | n \rangle \langle n | J_j(0) | qi \rangle \delta(\mu - p_{n0} + \omega) \end{aligned} \quad (18.308)$$

и которая обладает свойством

$$\text{Im } M_r(\omega) = 0 \quad (\omega < 2\mu), \quad (18.309)$$

поскольку по соображениям сохранения четности наимизшими по массе состояниями, вносящими вклад в сумму (18.308), являются двухмезонные состояния. Таким образом, дисперсионное соотношение записывается в виде

$$M(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{2\mu}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im } M(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon}. \quad (18.310)$$

Возвращаясь к инвариантной переменной $(q+k)^2 = 2\mu^2 + 2\mu\omega$, мы можем переписать дисперсионное соотношение для M в виде

$$M((q+k)^2) = \frac{1}{\pi} \int_{\mu^2}^{\infty} d\zeta \frac{\text{Im } M(\zeta)}{\zeta - (q+k)^2 - i\varepsilon}. \quad (18.311)$$

При записи соотношения (18.311) мы предположили, что у величины M нет полюса при $(q+k)^2 = 4\mu^2$. Если отброшенные раньше члены таковы, что требуется одно вычитание (т. е. $\frac{\text{Im } M(\omega)}{\omega} \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$), то дисперсионное соотношение с одним вычитанием запишется

$$M((q+k)^2) = M(0) + \frac{(q+k)^2}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} d\zeta \frac{\text{Im } M(\zeta)}{\zeta(\zeta - (q+k)^2 - i\epsilon)}. \quad (18.312)$$

Дисперсионное соотношение (18.312) выражает аналитические свойства форм-фактора мезона, которые вытекают из причинности и спектральных условий.

Важно подчеркнуть, что теория дисперсионных соотношений позволяет сформулировать приближенный метод вычисления $M((q+k)^2)$. Мы видели, что абсорбционная часть $\text{Im } M$ связана с величиной

$$A_\mu = \pi \sum_{|n\rangle} \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle n | J_j(0) | qi \rangle \delta(p_n - k - q), \quad (18.313)$$

где наименьшими по массе состояниями $|n\rangle$, которые могут вносить вклад, являются двух- π -мезонные состояния. Предположим, что мы ограничились этими двух- π -мезонными промежуточными состояниями. Тогда правая часть формулы (18.313) будет равна сумме

$$\sum_{|q'i', k'j'\rangle} \langle 0 | j_\mu(0) | q'i', k'j' \rangle \langle q'i', k'j' | J_j(0) | qi \rangle \delta(q' + k' - k - q),$$

которая снова содержит M_μ . Таким образом, в этом приближении соотношение (18.312) превращается в интегральное уравнение для форм-фактора $M((q+k)^2)$, ядро которого $\langle q'i', k'j' | J_j(0) | qi \rangle$ пропорционально амплитуде рассеяния π -мезонов на π -мезонах и может быть выражено через фазы π - π -рассеяния (см. работу Федербуша, Голдбергера и Траймана [232]).

Аналогичные попытки были сделаны и для вывода дисперсионных соотношений для форм-факторов нуклона $F_{1,2}$, которые в наименьшем порядке по электрическому заряду определяются выражением [вспомним соотношение (17.266)]

$$\langle p' | j_\mu(0) | p \rangle = \sqrt{\frac{M^2}{E_p E_{p'}}} \tilde{u}(p') [F_1(q^2) \gamma_\mu + F_2(q^2) \sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\nu] u(p) \quad (q = p' - p), \quad (18.314)$$

где $|p'\rangle$ и $|p\rangle$ — однонуклонные состояния. Если рассматривать функции $F_{1,2}$ как операторы в пространстве изотопического спина нуклона, то их можно разбить на изоскалярную и изовекторную части:

$$F_1 = F_1^S + \tau_3 F_1^V, \quad (18.315a)$$

$$F_2 = F_2^S + \tau_3 F_2^V. \quad (18.315b)$$

Мы уже видели, что

$$F_1^S(0) = F_1^V(0) = \frac{e}{2}, \quad (18.316a)$$

$$F_2^S(0) = \frac{\Delta\mu_p + \Delta\mu_n}{2}, \quad (18.316b)$$

$$F_2^V(0) = \frac{\Delta\mu_p - \Delta\mu_n}{2}, \quad (18.316b)$$

где e — заряд протона, а $\Delta\mu_n$ и $\Delta\mu_p$ — статические аномальные магнитные моменты нейтрона и протона.

Строгий вывод дисперсионных соотношений

$$F_1^{S, V}(q^2) = \frac{e}{2} + \frac{q^2}{2} \int_{m_S^2, V}^{\infty} d\sigma^2 \frac{\varrho_1^{S, V}(\sigma^2)}{\sigma^2(\sigma^2 - q^2 - i\epsilon)}, \quad (18.317)$$

$$F_2^{S, V}(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{m_S^2, V}^{\infty} d\sigma^2 \frac{\varrho_2^{S, V}(\sigma^2)}{\sigma^2 - q^2 - i\epsilon}, \quad (18.318)$$

где

$$\varrho_1(\sigma^2) = \text{Im } F_1(\sigma^2), \quad (18.319a)$$

$$\varrho_2(\sigma^2) = \text{Im } F_2(\sigma^2) \quad (18.319б)$$

и

$$m_S^2 = (3\mu)^2, \quad m_V^2 = (2\mu)^2, \quad (18.319в)$$

является намного более трудным, чем в случае форм-фактора мезона. Эта задача связана с проблемой строгого доказательства дисперсионных соотношений для вершинной функции (см. работу Оме и Тэйлора [596]). Дисперсионные соотношения (18.317) и (18.318) можно получить, только когда $\frac{\mu}{M} > \sqrt{2} - 1$, т. е. лишь при этом условии доказывается аналитичность форм-факторов по переменной q^2 в плоскости с разрезом от $(2\mu)^2$ до ∞ . С другой стороны, Намбу [573] показал, что *каждый* член ряда теории возмущений является аналитичным в этой плоскости с разрезом. Однако для того чтобы на основании этого результата делать заключения, не зависящие от теории возмущений, необходимо доказать равномерную сходимость ряда теории возмущений.

В практических целях часто те или иные дисперсионные соотношения, например соотношения (18.317) и (18.318), принимают без доказательства, причем мнимую часть записывают как сумму вкладов от реальных промежуточных состояний [125, 232, 59]. Затем пытаются вычислить вклады от наимизших по массе состояний с надеждой, что другие состояния несущественны (обзор проблемы форм-факторов нуклона см. в книге Дрелла и Захариазена [188]).

Как указывалось ранее, главная цель настоящего параграфа состоит в выяснении аналитических свойств двухчастичной амплитуды рассеяния, которые позволили бы записать дисперсионные соотношения для этой амплитуды. Теперь мы вернемся к проблеме доказательства этих дисперсионных соотношений.

Перестановочные соотношения между ин- и аут-операторами, введенные в § 2 настоящей главы с помощью асимптотических условий, позволяют дать простой вывод замкнутого выражения для амплитуды упругого рассеяния двух частиц. Сперва амплитуду рассеяния запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{out}\langle p'k' | pk \rangle_{\text{in}} &= \text{out}\langle p' | a_{\text{out}}(k') a_{\text{in}}^*(k) | p \rangle_{\text{in}} = \\ &= \text{out}\langle p' | a_{\text{in}}^*(k) a_{\text{out}}(k') | p \rangle_{\text{in}} + \text{out}\langle p' | [a_{\text{out}}(k'), a_{\text{in}}^*(k)] | p \rangle_{\text{in}}. \end{aligned} \quad (18.320)$$

Напомним теперь, что в обеих ортонормированных совокупностях состояний $|k_1, \dots, k_n\rangle_{in}$ и $|k_1, \dots, k_n\rangle_{out}$ вакуум и одночастичные состояния одинаковы (стабильность вакуума и одночастичных состояний):

$$|p\rangle_{out} = |p\rangle_{in}, \quad (18.321)$$

$$|\Psi_0\rangle_{out} = |\Psi\rangle_{in} = |\Psi_0\rangle = |0\rangle, \quad (18.322)$$

и поэтому первый член в правой части (18.320) равен нулю, так как $a_{in}(k)|p\rangle_{in} = 0$. Подставляя в (18.320) выражение (18.166а) для коммутатора, получаем

$$\begin{aligned} \text{out}\langle p'k' | pk\rangle_{in} &= 4k_0 p_0 \delta^{(3)}(p-p') \delta^{(3)}(k-k') - \\ &- \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4x \int d^4x' e^{-i(k \cdot x - k' \cdot x')} K_x K_{x'} \text{out}\langle p' | R(x'; x) | p\rangle_{in}, \end{aligned} \quad (18.323a)$$

где

$$R(x; x') = -i\theta(x-x') [\varphi(x), \varphi(x')]. \quad (18.323б)$$

При получении выражения (18.323а) для амплитуды рассеяния не было сделано никаких предположений относительно природы частицы мишени, т. е. не использовались никакие конкретные свойства одночастичных состояний $|p\rangle$, $|p'\rangle$, кроме предположения $a_{in}(k)|p\rangle_{in} = 0$. Амплитуда рассеяния (18.323а) все еще остается совершенно общей. При помощи ее можно описывать взаимодействие двух бозонов, если состояния $|p\rangle$ и $|p'\rangle$ понимать как однобозонные состояния, так что $|p\rangle_{in} = a_{in}^*(p)|0\rangle$. Если же в качестве состояний $|p\rangle$ и $|p'\rangle$ выбрать однонуклонные состояния с импульсами p и p' и с массой M ($p^2 = p'^2 = M^2$), то эта амплитуда будет описывать рассеяние мезонов на нуклонах.

Следует также отметить, что дальнейшее приведение элемента S -матрицы позволяет выразить его через среднее по вакууму от запаздывающего произведения операторов или от хронологически упорядоченного произведения. Чтобы показать это, напомним, что элемент S -матрицы иначе можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{out}\langle p'k' | pk\rangle_{in} &= 4p_0 k_0 \delta^{(3)}(p-p') \delta^{(3)}(k-k') + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x \int d^4x' e^{-i(k \cdot x - k' \cdot x')} K_x K_{x'} \text{out}\langle p' | T(\varphi(x)\varphi(x')) | p\rangle_{in}, \end{aligned} \quad (18.324)$$

и с помощью процедуры приведения начальных и конечных состояний (в качестве которых берутся состояния «скалярных» нуклонов с массой M) получаем

$$\begin{aligned} \text{out}\langle p'k' | pk\rangle_{in} &= \text{out}\langle p'k' | pk\rangle_{out} + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x \int d^4x' \int d^4y \int d^4y' e^{-i(k \cdot x + p \cdot y - k' \cdot x' - p' \cdot y')} \times \\ &\times D_y D_{y'} K_x K_{x'} \langle 0 | T(\varphi(x)\varphi(x')\psi(y)\psi^*(y')) | 0\rangle, \end{aligned} \quad (18.325a)$$

где

$$D_y = \square_y + M^2. \quad (18.325б)$$

Для выяснения свойств аналитичности амплитуды рассеяния $\text{out}\langle p'k' | pk\rangle_{in}$ более удобна запись (18.323), а не (18.324). Это связано с тем, что постулат о локальности в применении к запаздывающему произведению операторов означает, что подынтегральное выраже-

ние (18.323) равно нулю в определенной области пространства-времени, откуда следует вывод об аналитичности импульсного представления (18.323). Этот вывод не сразу получается из выражения (18.324). Точно так же для учета локальности более удобно не выражение (18.325а), а аналогичное выражение, содержащее запаздывающее произведение вместо T -произведения.

При дальнейшем анализе аналитических свойств амплитуды как функции кинематических переменных переменные обычного и изотопического спинов не играют существенной роли. Учет их делает вычисления только более громоздкими. Сейчас мы не будем учитывать эти переменные. В дальнейшем для простоты рассматривается рассеяние нейтрального «скалярного» мезона с импульсом k и массой μ на «тяжелом» скалярном нуклоне с импульсом p и массой M . Мы будем предполагать, что для нуклонов соблюдается закон сохранения числа тяжелых частиц. Проблема состоит в получении максимальной информации о свойствах аналитичности амплитуд $\text{out}\langle p'k' | pk \rangle_{\text{in}}$, которую способны дать аксиомы релятивистской инвариантности, спектральности и локальности¹⁾. Наиболее естественный подход состоял бы в изучении среднего по вакууму от запаздывающего произведения четырех операторов, через которое можно выразить амплитуду рассеяния. Однако до сих пор не решена проблема получения такого представления для четырехточечного среднего по вакууму, которое объединяло бы в себе все перечислявшиеся выше общие свойства теории (см. в этой связи работы Бремермана, Оме и Тэйлора [84] и Стритера [745]). Поэтому большую часть сведений об амплитуде $\text{out}\langle p'k' | pk \rangle_{\text{in}}$ до сих пор получают на основе представления (18.323).

Если в этом выражении для амплитуды выполнить дифференцирование, получим

$$\text{out}\langle p'k' | pk \rangle_{\text{in}} = \text{in}\langle p'k' | pk \rangle_{\text{in}} - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x' \int d^4x e^{-i(k \cdot x - k' \cdot x')} \times \\ \times \langle p' | \theta(x' - x) [j(x'), j(x)] + \delta^{(4)}(x_0 - x'_0) [j(x'), \partial_0 \varphi(x)] | p \rangle, \quad (18.326a)$$

где

$$K_x \varphi(x) = j(x). \quad (18.326b)$$

При получении выражения (18.326a) члены вида $\delta^{(4)}(x_0 - x'_0) [\varphi(x), \varphi(x')]$ и $\delta^{(4)}(x_0 - x'_0) [j(x), \varphi(x')]$ были приравнены нулю на основании предположения о локальности поля $\varphi(x)$.

В дальнейшем мы будем пренебрегать осложнениями, которые возникают из-за того, что

$$K_x K_y T(\varphi(x') \varphi(x)) \neq T(j(x') j(x)), \quad (18.327a)$$

или

$$K_x K_y R(\varphi(x') \varphi(x)) \neq R(j(x') j(x)). \quad (18.327b)$$

Это оправдано тем, что нас в первую очередь интересуют аналитические свойства амплитуды рассеяния, а разность между правой и левой

1) В этой связи нужно отметить, что сомнительно, чтобы при таком анализе удалось получить все результаты теории возмущений, если не привлечь условия унитарности («нелинейную» часть теории). Это определено так в случае вершинной функции. Йост [406] показал, что если основываться на условиях причинности, лоренц-инвариантности и спектральности, т. е. только на «линейной» части теории, то дисперсионные соотношения для вершинной π - N -функции нельзя вывести,

если $\frac{\mu}{M} < \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$.

частями (18.327а) [или (18.327б)] составляют члены, зависимость которых от переменных k , k' , p и p' легко установить.

Из локальности и инвариантности следует, что они имеют структуру $\sum_1^n g_i [(p-p')^2] (k+k')^{2i}$ с конечным n , т. е. что вклад этих членов в амплитуду рассеяния есть полином по $(k+k')^2$ конечной степени. На этом же основании мы снова исключим из рассмотрения вклад члена $\delta(x_0 - x'_0) [j(x'), \partial_0 \phi(x)]$. В силу трансляционной инвариантности теории

$$\begin{aligned} \langle p' | [j(x'), j(x)] | p \rangle &= \langle p' | U^*(a) U(a) [j(x'), j(x)] U^*(a) U(a) | p \rangle = \\ &= e^{-i(p'-p) \cdot a} \langle p' | [j(x'+a), j(x+a)] | p \rangle. \end{aligned} \quad (18.328)$$

Выбор $a = -x$ позволяет переписать матрицу рассеяния в виде

$$\begin{aligned} \text{out} \langle p' k' | p k \rangle_{\text{in}} - \text{in} \langle p' k' | p k \rangle_{\text{in}} &= \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 \xi \int d^4 \eta e^{-i(k+p-k'-p') \cdot \eta} e^{-i(-k-k'+p'-p) \cdot \frac{\xi}{2}} \theta(\xi) \langle p' | [j(\xi), j(0)] | p \rangle, \end{aligned} \quad (18.329)$$

где введены координаты $x' - x = \xi$ и $1/2(x + x') = \eta$. Выполняя интегрирование по η , получаем

$$\text{out} \langle p' k' | p k \rangle_{\text{in}} - \text{in} \langle p' k' | p k \rangle_{\text{in}} = 2\pi i \delta^{(4)}(p+k-p'-k') R(p', k'; p, k), \quad (18.330)$$

где

$$R(p', k'; p, k) = i \int d^4 x e^{ik' \cdot x} \theta(x) \langle p' | [j(x), j(0)] | p \rangle = \quad (18.331a)$$

$$= i \int d^4 x e^{i(k+k') \cdot \frac{x}{2}} \theta(x) \langle p' | \left[j\left(\frac{x}{2}\right), j\left(-\frac{x}{2}\right) \right] | p \rangle. \quad (18.331b)$$

Выражения (18.331а) и (18.331б) для R определены только при $p+k=p'+k'$. Если бы для амплитуды рассеяния было взято выражение (18.324), то тогда величина R имела бы вид

$$R(p', k'; p, k) = i \int d^4 x e^{ik' \cdot x} \langle p' | T(j(x) j(0)) | p \rangle. \quad (18.332)$$

В равенстве обоих этих выражений на массовой поверхности для импульсов, т. е. когда $p^2 = p'^2 = M^2$, $k^2 = k'^2 = \mu^2$, легко убедиться, если принять во внимание, что

$$T(j(x) j(0)) = \theta(x) [j(x), j(0)] + j(0) j(x) \quad (18.333)$$

и что произведение $j(0) j(x)$ дает в R вклад вида

$$\begin{aligned} \int d^4 x e^{ik' \cdot x} \langle p' | j(0) j(x) | p \rangle &= \\ &= \sum_{|p_n \alpha\rangle} \int d^4 x e^{-i(k'+p_n-p) \cdot x} \langle p' | j(0) | p_n \alpha \rangle \langle p_n \alpha | j(0) | p \rangle = \\ &= (2\pi)^4 \sum_{|p_n \alpha\rangle} \delta(k'+p_n-p) \langle p' | j(0) | p_n \alpha \rangle \langle p_n \alpha | j(0) | p \rangle. \end{aligned} \quad (18.334)$$

Поскольку $|p'\rangle$ есть однопуклонное состояние, а $j(0)$ сохраняет барионное квантовое число, то и у состояний $|p_n \alpha\rangle$ барионное квантовое число

должно быть равно $+1$. Так как векторы p , p' и k , k' суть 4-импульсы одночастичных состояний, то квадрат массы промежуточного состояния $|p_n \alpha\rangle$ благодаря наличию δ -функции должен быть равен

$$M_n^2 = p_n^2 = (p - k')^2 = M^2 + \mu^2 - 2p \cdot k'. \quad (18.335)$$

В системе координат, в которой $p = (M, 0, 0, 0)$ (т. е. в лабораторной системе), имеем

$$\begin{aligned} M_n^2 &= M^2 + \mu^2 - 2M\omega_{k'} = \\ &= (M - \mu)^2 - 2M(\omega_{k'} - \mu) < M^2. \end{aligned} \quad (18.336)$$

Однако поскольку состояния с барионным квантовым числом $+1$ не могут иметь массу, меньшую M , то член $j(0)j(x)$ вклада в R не дает и выражения (18.332) и (18.331а) при $k^2 = k'^2 = \mu^2$ и $p'^2 = p^2 = M^2$ равны тождественно. Вне массовой поверхности правые части формул (18.331) и (18.332) определяют две функции, которые, вообще говоря, отличаются друг от друга. Так как физический смысл имеет только представление на массовой поверхности, то можно выбрать то выражение, которое наиболее удобно для применения этих функций вне массовой поверхности. Для выяснения свойств аналитичности амплитуды наиболее удобным оказывается выражение (18.331а). Это выражение и будет использоваться в последующем исследовании.

В силу релятивистской инвариантности амплитуда R является инвариантной функцией инвариантных скалярных произведений кинематических переменных p , p' , k и k' , характеризующих рассеяние. Поскольку величина R определена только при $p + k = p' + k'$, то только три из этих четырех векторов являются линейно независимыми. В качестве независимых можно принять p , k и p' ($k' = p + k - p'$). Таким образом, имеется шесть различных скалярных произведений: $p \cdot k$, $p \cdot p'$, $k \cdot p'$, p^2 , k^2 , p'^2 . Равенством $k'^2 = (k + p - p')^2$ удобно воспользоваться, чтобы выразить скалярное произведение $k \cdot p'$ через k'^2 и другие пять скалярных произведений, так что в качестве шести скалярных произведений можно взять $k \cdot p$, $p \cdot p'$, k^2 , k'^2 , p^2 и p'^2 . Поскольку в физических приложениях $p^2 = p'^2$ и $k^2 = k'^2$, то число независимых скалярных произведений равно четырем. В действительности амплитуда R будет интересоваться нас только при фиксированном значении $p^2 = p'^2$, взятом на массовой поверхности, т. е. при $p^2 = p'^2 = M^2$. Следует также отметить, что выражение (18.331б) определяет R при любых значениях векторов k , k' (эти переменные входят только в экспоненту и им можно придавать какие угодно значения). В дальнейшем будет удобно считать k и k' произвольными действительными векторами, на которые наложены только ограничения $k + p = k' + p'$, $p^2 = M^2$, $p'^2 = M^2$ и $k^2 = k'^2 = \zeta$. Амплитуда рассеяния получается при значении $\zeta = \mu^2$. Таким образом, останется три линейно независимых скалярных произведения, а именно $k \cdot p$, $p \cdot p'$ и $k^2 = k'^2$. Можно воспользоваться и другим набором переменных:

$$W^2 = (p + k)^2 = (p + k) \cdot (p' + k'), \quad (18.337а)$$

$$\Delta^2 = -\left(\frac{k - k'}{2}\right)^2 = -\left(\frac{p' - p}{2}\right)^2 \quad (18.337б)$$

и

$$\zeta = k^2 = k'^2. \quad (18.337в)$$

¹⁾ Попутно отметим, что если $k'^2 = k^2$, то величина $(k + k') \cdot (p - p') = 0$.

При случае мы будем использовать также переменные

$$\omega = \frac{(k+k') \cdot (p+p')}{2\sqrt{(p+p')^2}} \quad (18.338)$$

и

$$K^2 = \frac{(W^2 + M^2 - \zeta)^2 - 4M^2W^2}{4W^2}. \quad (18.339)$$

Хотя ω выражается через W^2 , Δ^2 и ζ , однако удобно сохранить для нее особое обозначение. Переменная ω связана с другими переменными следующим образом. Поскольку

$$(p+p')^2 = (p-p')^2 + 4p \cdot p', \quad (18.340)$$

так что

$$2p \cdot p' = 4\Delta^2 + 2M^2, \quad (18.341a)$$

и аналогично

$$2k \cdot k' = 4\Delta^2 + 2\zeta, \quad (18.341b)$$

то отсюда

$$(p+p')^2 = 4(\Delta^2 + M^2), \quad (18.342a)$$

$$(k+k')^2 = 4(\Delta^2 + \zeta), \quad (18.342b)$$

и, таким образом, получаем

$$\begin{aligned} W^2 &= (p+k) \cdot (p+k) = \frac{1}{4}(p+k+p'+k') \cdot (p+k+p'+k') = \\ &= \frac{1}{2}(p+p') \cdot (k+k') + \frac{1}{4}(p+p')^2 + \frac{1}{4}(k+k')^2 = \\ &= 2\omega\sqrt{\Delta^2 + M^2} + 2\Delta^2 + M^2 + \zeta. \end{aligned} \quad (18.343)$$

Функция R , определенная с помощью (18.331b), может теперь рассматриваться как функция переменных ω , Δ^2 и ζ , причем амплитуда рассеяния дается $R(\omega, \Delta^2; \zeta = \mu^2)$. Нужно отметить, что величина R инвариантна относительно перестановки $p \rightarrow p'$, $p' \rightarrow p$, поскольку относительно нее инвариантны переменные ω и Δ^2 . Легко выяснить физический смысл введенных переменных. Например, в системе центра масс $p = -k$, $p' = -k'$ и $W = p_0 + k_0$ и, следовательно, W есть полная энергия в системе центра масс. В системе центра масс $p_0^2 - k_0^2 = M^2 - \zeta$, так что

$$\begin{aligned} K^2 &= \frac{(W^2 + M^2 - \zeta)^2 - 4M^2W^2}{4W^2} = \\ &= \frac{[(p_0 + k_0)^2 + (p_0 + k_0)(p_0 - k_0)]^2 - 4M^2(p_0 + k_0)^2}{4(p_0 + k_0)^2} = \\ &= p_0^2 - M^2 = p^2, \end{aligned} \quad (18.344)$$

и, таким образом, переменная K есть импульс частицы, а величина $1 - \frac{2\Delta^2}{K^2}$ связана с углом рассеяния θ :

$$\cos \theta = 1 - \frac{2\Delta^2}{K^2}. \quad (18.345)$$

Для физического процесса рассеяния область изменения этих переменных есть

$$\left. \begin{aligned} 0 < \Delta^2 < \infty \\ \omega > \sqrt{\Delta^2 + \mu^2} \\ K^2 > \Delta^2 \end{aligned} \right\} \text{физическая область,} \quad (18.346)$$

что соответствует положительной энергии частиц и действительным углам рассеяния.

Как указывалось выше, наша цель заключается в выяснении свойств аналитичности амплитуды $R(\omega, \Delta^2, \zeta = \mu^2)$ как функции ω , Δ^2 и ζ . Эти свойства будут выяснены при помощи представления

$$R(\omega, \Delta^2, \zeta) = i \int d^4x e^{i(k+k') \cdot \frac{x}{2}} \theta(x) \langle p' | [j(\frac{x}{2}), j(-\frac{x}{2})] | p \rangle, \quad (18.347)$$

где переменная ζ предполагается произвольной. Кроме этого выражения для R , нам также понадобится выражение для $\text{Im } R$, содержащее информацию, связанную с унитарностью. Нужное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Im } R(\omega, \Delta^2, \zeta) &= \frac{1}{2i} (R - \bar{R}) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x e^{i(k+k') \cdot \frac{x}{2}} \langle p' | [j(\frac{x}{2}), j(-\frac{x}{2})] | p \rangle, \end{aligned} \quad (18.348)$$

где был использован тот факт, что величина $\overline{R(\omega, \Delta^2, \zeta)}$ инвариантна относительно перестановки $p \rightarrow p'$ и $p' \rightarrow p$ и что $\theta(x) + \theta(-x) = 1$. Определим вещественную величину

$$M(\omega, \Delta^2, \zeta) = \int d^4x e^{i(k+k') \cdot \frac{x}{2}} \langle p' | j(\frac{x}{2}) j(-\frac{x}{2}) | p \rangle = \overline{M(\omega, \Delta^2, \zeta)}, \quad (18.349)$$

где действительные векторы k и k' ограничены лишь соотношениями $k + p = p' + k'$, $k^2 = k'^2 = \zeta$. Мнимая часть $\text{Im } R$ выражается через величину $M(\omega, \Delta^2, \zeta)$ следующим образом:

$$\text{Im } R(\omega, \Delta^2, \zeta) = \frac{1}{2} [M(\omega, \Delta^2, \zeta) - M(-\omega, \Delta^2, \zeta)], \quad (18.350a)$$

$$= -\text{Im } R(-\omega, \Delta^2, \zeta). \quad (18.350b)$$

Это свойство нечетности $\text{Im } R$ как функции ω есть следствие предположения о нейтральном и скалярном характере частиц, описываемых полем $\phi(x)$ (скалярным в пространстве-времени и в пространстве изотопического спина). Если бы частицы имели еще какие-либо дополнительные степени свободы, то в общем случае два члена коммутатора относились бы к различным процессам, но это не изменило бы существенным образом математическую сторону дела. Попутно заметим, что если записать

$$\begin{aligned} R &= \text{Re } R + i \text{Im } R = \\ &= D + iA, \end{aligned} \quad (18.351)$$

тогда, как отмечалось выше, величина $A = \text{Im } R$ дается формулой (18.350), в то время как

$$\text{Re } R = D = \int d^4 x e^{i(k+k') \cdot \frac{x}{2}} \varepsilon(x) \langle p' | \left[j\left(\frac{x}{2}\right), j\left(-\frac{x}{2}\right) \right] | p \rangle. \quad (18.352)$$

Величина $\text{Re } R = D$ является дисперсивной частью амплитуды, поскольку если вставить в (18.352) сумму $\sum |n\rangle \langle n|$ по полной системе состояний и выполнить интегрирование по x , то в D внесут вклад виртуальные процессы, не сохраняющие 4-импульс. С другой стороны, абсорбционная часть $A = \text{Im } R$ является суммой по состояниям, переход в которые из начальных состояний совершается через реальные процессы, в которых энергия сохраняется.

Величина $M(\omega, \Delta^2, \zeta)$ может быть преобразована при помощи асимптотических условий. Вставим в правую часть сумму $\sum |p_n \alpha\rangle_{\text{in}} \langle p_n \alpha|$ по полной системе состояний $|p_n \alpha\rangle_{\text{in}}$ и, воспользовавшись трансляционной инвариантностью, выполним интегрирование по x . В результате получим

$$\begin{aligned} M(\omega, \Delta^2, \zeta) &= (2\pi)^4 \sum_{|p_n \alpha\rangle_{\text{in}}} \delta(p_n - p - k) \langle p' | j(0) | p_n \alpha \rangle_{\text{in}} \langle p_n \alpha | j(0) | p \rangle = \\ &= (2\pi)^4 \sum_{\alpha} \langle p' | j(0) | p+k, \alpha \rangle_{\text{in}} \langle p+k, \alpha | j(0) | p \rangle. \end{aligned} \quad (18.353)$$

Пусть теперь $\psi_{\text{in}}(p')$ — оператор уничтожения для приходящего нуклона с импульсом p' , тогда

$$\begin{aligned} \langle p' | j(0) | p+k, \alpha \rangle_{\text{in}} &= \langle 0 | \psi_{\text{in}}(p') j(0) | p+k, \alpha \rangle_{\text{in}} = \\ &= \langle 0 | [\psi_{\text{in}}(p'), j(0)] | p+k, \alpha \rangle_{\text{in}} \text{ при } (p+k-p')^2 = k'^2 < m_1^2, \end{aligned} \quad (18.354б)$$

где m_1 — масса наимизшего по массе состояния с полным импульсом k' , для которого еще $\langle 0 | j(0) | k' \rangle \neq 0$. (В псевдоскалярной мезонной теории m_1 было бы равно 3μ .) При получении (18.354б) мы учли, что оператор $\psi_{\text{in}}(p')$ уменьшает импульс состояния на p' так, что состояние $\psi_{\text{in}}(p') | p+k, \alpha \rangle_{\text{in}}$ есть состояние с импульсом $p+k-p'$, который в силу закона сохранения энергии равен k' . Аналогично можно записать второй множитель в (18.353):

$$\begin{aligned} {}_{\text{in}} \langle p+k, \alpha | j(0) | p \rangle &= {}_{\text{in}} \langle p+k, \alpha | j(0) \psi_{\text{in}}^*(p) | 0 \rangle = \\ &= {}_{\text{in}} \langle p+k, \alpha | [j(0), \psi_{\text{in}}^*(p)] | 0 \rangle \text{ при } k^2 < m_1^2. \end{aligned} \quad (18.355)$$

Воспользуемся теперь рекуррентной формулой (18.154), которая, [будучи обобщена на случай двух полей, имеет вид

$$[\psi_{\text{in}}(p), j(0)] = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 x e^{-ip' \cdot x} \theta(-x) [j(0), f(x)], \quad (18.356)$$

где $f(x)$ — источник в уравнении движения для поля ψ : $(\square + M^2)\psi = f$.

Тогда при $k^2, k'^2 < m_1^2$ получаем окончательно

$$M(\omega, \Delta^2, \xi) = 2\pi \int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{-i(k' \cdot p') \cdot \frac{x_1}{2} + i(k \cdot p) \cdot \frac{x_2}{2}} \times \\ \times \sum_{\alpha} \langle 0 | R \left(j \left(\frac{x_1}{2} \right) f \left(-\frac{x_1}{2} \right) \right) | p+k, \alpha \rangle_{\text{in}} \times \\ \times \langle p+k, \alpha | R \left(j \left(\frac{x_2}{2} \right) f^* \left(-\frac{x_2}{2} \right) \right) | 0 \rangle. \quad (18.357)$$

Представление (18.357) для $\text{Im} R$ по сравнению с представлением (18.3316) для R содержит дополнительную полезную информацию о том, является ли взаимодействие полей ψ и ϕ причинным, т. е. являются ли поля ψ и ϕ локальными по отношению друг к другу. Эта информация не используется в выражении (18.331), где о наличии нуклонов свидетельствуют только векторы состояния $|p\rangle, |p'\rangle$. Свойство взаимодействия быть локальным или нет выражается при помощи соответствующего свойства коммутаторов гейзенберговских полей. Чтобы воспользоваться такой информацией, необходимо перейти от описания частиц при помощи векторов состояний к описанию их при помощи операторов. Разумеется, это свойство учитывалось бы, если бы использовалось выражение

$$2\pi i \delta^{(4)}(p+k-p'-k') R = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4x \int d^4x' \int d^4y \int d^4y' \times \\ \times e^{-i(k \cdot x + p \cdot y - k' \cdot x' - p' \cdot y')} K_x^\mu K_y^M K_{x'}^\mu K_{y'}^M \langle 0 | R(\phi(x)\phi(x')\psi(y)\psi^*(y')) | 0 \rangle. \quad (18.358)$$

Формула (18.350), (18.357) для $\text{Im} R(\omega, \Delta^2, \xi)$ выражает то, что называют «обобщенным условием унитарности»¹⁾. Чтобы убедиться в этом, вспомним, что если

$$S = 1 + iR, \quad (18.359)$$

$$\text{in} \langle n | R | m \rangle_{\text{in}} = 2\pi \delta^{(4)}(p_n - p_m) R(n; m), \quad (18.360)$$

то условие унитарности $S^*S = SS^* = 1$ представляется в виде

$$i(R^* - R) + R^*R = 0. \quad (18.361)$$

В частности, для амплитуды упругого рассеяния соотношение (18.361) записывается в виде

$$\text{in} \langle p'k' | R^* - R | pk \rangle_{\text{in}} = i \sum_{|n\rangle} \text{in} \langle p'k' | R^* | n \rangle \langle n | R | pk \rangle_{\text{in}}, \quad (18.362)$$

или, что то же,

$$\overline{R(pk; p'k')} - R(p'k'; pk) = 2\pi i \sum_{|n\rangle} \delta(p' + k' - p_n) \overline{R(n; p'k')} R(n; pk). \quad (18.363)$$

В случае когерентного рассеяния вперед, когда $p' = p$ и $k' = k$, соотно-

¹⁾ Сравните формулу (18.348) вместе с формулами (18.350) и (18.357) с обобщением соотношения (18.170) на случай двух полей. Отметим попутно, что связь (18.359) между R и S отличается знаком минус от данной в гл. 10.

шение (18.363) сводится к оптической теореме

$$\text{Im } R(pk, pk) = \frac{|k|}{4\pi} \sigma. \quad (18.364)$$

Далее отметим, что если бы мы выполнили однократное приведение амплитуды рассеяния ${}_{\text{out}}\langle p'k'; pk \rangle_{\text{in}}$, то получили бы

$$\begin{aligned} 2\pi\delta(p+k-p'-k') R(p'k'; pk) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x e^{-ih \cdot x} K_{x \text{ out}} \langle p'k' | \varphi(x) | p \rangle = \\ &= (2\pi)^{5/2} {}_{\text{out}}\langle p'k' | j(0) | p \rangle \delta(p'+k'-k-p). \end{aligned} \quad (18.365)$$

И вообще амплитуда любого процесса $p+k \rightarrow n$ записывается в виде

$$\delta(p_n - p - k) R(n; pk) = (2\pi)^{3/2} {}_{\text{out}}\langle n | j(0) | p \rangle \delta(p_n - p - k). \quad (18.366)$$

С помощью формулы (18.366), пользуясь трансляционной инвариантностью для проведения интегрирования по x , можно переписать формулу (18.348) в виде

$$\begin{aligned} R(p'k'; pk) - \overline{R(pk; p'k')} &= \\ &= 2\pi i \sum_{|n\rangle} \{ \delta(p'+k'-p_n) R(p'k'; n) \overline{R(pk; n)} - \\ &\quad - \delta(p-k'-p_n) R(p', -k; n) \overline{R(p, -k'; n)} \}. \end{aligned} \quad (18.367)$$

Очевидно, что первый член в правой части формулы (18.367) совпадает с правой частью соотношения (18.363). Рассмотрим поэтому вклад второго члена в правой части (18.367), когда импульсы частиц находятся на массовой поверхности. Нужно напомнить, что соотношение (18.363) было получено из условия $SS^* = 1$, которое предполагалось верным *только* на массовой поверхности, т. е. когда $p^2 = p'^2 = M^2$, $k^2 = k'^2 = \mu^2$. Благодаря наличию δ -функции вклад во второй группе членов будут вносить только те состояния $|n\rangle$, у которых $p_n = p - k'$. Поэтому массы этих состояний равны

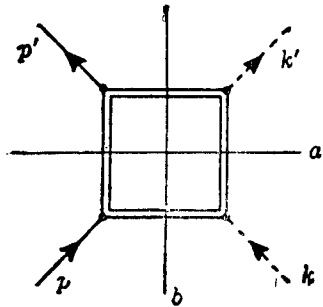
$$M_n^2 = p_n^2 = (p - k')^2. \quad (18.368a)$$

В лабораторной системе квадрат этой инвариантной массы равен

$$\begin{aligned} M_n^2 &= M^2 + \mu^2 - 2Mk_0 = \\ &= (M - \mu)^2 - 2M(k_0 - \mu), \end{aligned} \quad (18.368b)$$

так что масса M_n всегда меньше $M - \mu$. Однако с самого начала было сделано предположение, что в теории соблюдается закон сохранения числа тяжелых частиц. Поэтому барионное квантовое число для промежуточных состояний должно быть равно $+1$, поскольку оператор $j(x)$ сохраняет число тяжелых частиц. Кроме того, предполагается, что наимизшее по массе состояние, обладающее барионным квантовым числом $+1$, есть однонуклонное состояние с массой M (условие стабильности нуклона), и поэтому вклад упомянутых состояний при $p^2 = p'^2 = M^2$ и $k^2 = k'^2 = \mu^2$ равен нулю. С другой стороны, если рассмотреть реакцию $p + (-k') \rightarrow p' + (-k) + (-k_0, -k'_0 > 0)$, в которой начальными являются частицы p и k' , тогда на массовой поверхности будет вносить вклад только второй член, а первый не будет.

Если представить рассматриваемый матричный элемент упругого рассеяния частицы на частице при помощи диаграммы Фейнмана, изображенной на фиг. 148, и если p и k — импульсы начальных частиц, то тогда вклад в $\text{Im} R(p'k'; pk)$ (при $p^2 = p'^2 = M^2$, $k^2 = k'^2 = \mu^2$) будут



Ф и г. 148.

давать только те промежуточные состояния, которые соответствуют рассеению диаграммы вдоль линии a . Это как раз те состояния, которые вносят вклад в сумму первых членов в правой части формулы (18.367). Аналогично, если импульсами начальных частиц являются p и k' (так что $-k'_0 > 0$), тогда на массовой поверхности в физической области вклад в $\text{Im} R$ будет вносить только второй член в правой части (18.367). Наконец, если начальные частицы есть частицы с импульсами p и p' (и $-p'_0 > 0$), то следует ожидать, что вклад в $\text{Im} R$ внесут только те состояния, которые соответствуют рассеению диаграммы фиг. 148 вдоль линии b . И это действительно так. Если

привести амплитуду ${}_{\text{out}}\langle p'k' | pk \rangle_{\text{in}}$ по одному ин- и одному аут-полю, то получим следующие два выражения:

$$R(p'k'; pk) = i \int d^4x e^{i(p'+k') \cdot \frac{x}{2}} \theta(x) \langle k' | \left[f\left(\frac{x}{2}\right), j\left(-\frac{x}{2}\right) \right] | p \rangle \quad (18.369a)$$

и

$$R(p'k'; pk) = i \int d^4x e^{i(p+k') \cdot \frac{x}{2}} \theta(x) \langle p' | \left[j\left(\frac{x}{2}\right), f^*\left(-\frac{x}{2}\right) \right] | k \rangle. \quad (18.369b)$$

Первую формулу можно также переписать в виде

$$\overline{R(pk; p'k')} = -i \int d^4x e^{i(p+k') \cdot \frac{x}{2}} \theta(-x) \langle p' | \left[j\left(\frac{x}{2}\right), f^*\left(-\frac{x}{2}\right) \right] | k \rangle, \quad (18.370)$$

так что

$$\begin{aligned} R(p'k'; pk) - \overline{R(pk; p'k')} &= \\ &= i \int d^4x e^{i(p+k') \cdot \frac{x}{2}} \langle p' | \left[j\left(\frac{x}{2}\right), f^*\left(-\frac{x}{2}\right) \right] | k \rangle = \\ &= (2\pi)^4 i \sum_{|n\rangle} \{ \delta(p_n - p - k) \langle p' | j(0) | n \rangle \langle n | f^*(0) | k \rangle - \\ &\quad - \delta(p_n - p' + p) \langle p' | f^*(0) | n \rangle \langle n | j(0) | k \rangle \}. \quad (18.371) \end{aligned}$$

В сумму (18.371) вносят вклад следующие промежуточные состояния $|n\rangle$. Если начальными импульсами являются p и k , то остается сумма только первых членов, а состояния $|n\rangle$ соответствуют сечению a . Если начальными являются импульсы p и p' , то промежуточными состояниями будут как раз те состояния, которые соответствуют сечению b . Попутно отметим, что поскольку амплитуды можно также представить в виде

$$R(n; pk) \delta(p_n - p - k) = (2\pi)^{3/2} {}_{\text{out}}\langle n | f^*(0) | k \rangle \delta(p_n - p - k), \quad (18.372)$$

то условие унитарности (18.371) запишется

$$R(p'k'; pk) - \overline{R(pk; p'k')} = \\ = 2\pi i \sum_{|n\rangle} \{ \delta(p_n - p - k) R(p'k'; n) \overline{R(pk; n)} - \\ - \delta(p - p' + p_n) R(p', -p; n) \overline{R(k, -k'; n)} \}. \quad (18.373)$$

Ряд указанных выше соображений играет важную роль при «выводе представления Манделстама для амплитуды ${}_{\text{out}}\langle p'k'; pk \rangle_{\text{in}}$.

Подведем итоги проведенному исследованию двухчастичной амплитуды $R(\omega, \Delta^2, \zeta)$. Мы показали, что для нее имеется представление (18.347) и что для $\text{Im} R(\omega, \Delta^2, \zeta)$ имеется представление (18.350), (18.357), которое выражает то, что мы назвали обобщенным соотношением унитарности. Теперь уже можно легко проанализировать зависимость $R(\omega, \Delta^2, \zeta)$ от ω при фиксированных значениях Δ^2 и ζ . Однако прежде, чем переходить к выводу дисперсионных соотношений при $\Delta^2 \neq 0$, дадим набросок вывода дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния вперед, когда $\Delta^2 = 0$. В этом случае амплитуду рассеяния мезона на нуклоне можно записать в виде

$$R(pk; pk) = \int d^4x e^{ip \cdot x} (\square + M^2)^2 \langle k | R(\psi(x) \psi^*(0)) | k \rangle, \quad (18.374) \\ p^2 = M^2; \quad k^2 = \mu^2,$$

где p и k — импульсы нуклона и мезона соответственно. Подчеркнем, что мы выполнили приведение по нуклонным переменным (см. работы Симанзика [761, 762]). В лоренцевой системе отсчета, в которой мезон покоится ($\mathbf{k} = 0, k_0 = \mu$), представление для амплитуды запишется в виде

$$R(pk, pk) = i \int_0^\infty dt \int d^3x e^{ip_0 x_0 - i \sqrt{p_0^2 - M^2} \cdot x} f(x^2, x_0), \quad (18.375)$$

где функция $f(x^2, x_0)$ равна нулю при $x_0 < |\mathbf{x}|$. Снова выполняя интегрирование по угловым переменным, получаем

$$R(pk; pk) = 4\pi i \int_0^\infty dr r^2 \int_r^\infty dt e^{i\omega t} \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - M^2} r}{\sqrt{\omega^2 - M^2} r} \langle k | [f(x), f^*(0)] | k \rangle \quad (18.376a)$$

$$= \int_0^\infty dr F(\omega, r), \quad (18.376b)$$

где

$$F(\omega, r) = 4\pi i r \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - M^2} r}{\sqrt{\omega^2 - M^2}} e^{i\omega r} \int_r^\infty dt e^{i\omega(t-r)} \langle k | [f(x), f^*(0)] | k \rangle, \quad (18.377a)$$

$$\omega = \frac{p \cdot k}{\mu}. \quad (18.377b)$$

Отметим, что выражение (18.377a) определяет величину $F(\omega, r)$ при всех значениях ω в полуплоскости $\text{Im} \omega \geq 0$. Более того, при $\text{Im} \omega \geq 0$ правая часть формулы (18.377a) определяет аналитическую функцию. [При $\omega = \pm M$ точек ветвления нет, поскольку $\frac{\sin \sqrt{\omega^2 - M^2} r}{\sqrt{\omega^2 - M^2} r}$ есть четная функция переменной $\sqrt{\omega^2 - M^2} r$. При значениях $\omega < M$ множитель $\exp(i\omega r)$

компенсирует рост функции $\sin \sqrt{\omega^2 - M^2} r$. Поскольку, по предположению, матричный элемент коммутатора *внутри* светового конуса непрерывен, то по лемме Римана — Лебега асимптотическое поведение $F(\omega, r)$ при $\omega \rightarrow \infty$ определяется особенностями коммутатора *на* световом конусе. Если $\langle k | [f(x), f^*(0)] | k \rangle$ ведет себя на световом конусе как производная n -го порядка ($n \geq 0$) функции $\delta(x^2)$, тогда функция $F(\omega, r)$ при больших ω будет вести себя как ω^{n-1} . Как указывалось выше, при строгом выводе следовало бы в связи с этим исследовать функцию
$$\frac{F(\omega, r)}{\prod_{j=1}^n [(w + ia_j)^2 - b_j^2]}.$$

Однако поскольку в конечном счете это эквивалентно некоторому числу вычитаний в соотношении Гильберта для $F(\omega, r)$, то мы будем продолжать дальнейшее исследование так, как если бы функция $F(\omega, r)$ убывала при $\omega \rightarrow \infty$ достаточно быстро, чтобы можно было записать соотношение

$$F(\omega, r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } F(\omega', r)}{\omega' - \omega - i\varepsilon} d\omega'. \quad (18.378)$$

Функция $F(\omega, r)$ обладает свойством

$$F(\omega, r) = \overline{F(-\omega, r)}, \quad (18.379)$$

которое легко проверить при помощи представления (18.377a) и из которого вытекает

$$\text{Im } F(\omega, r) = -\text{Im } F(-\omega, r), \quad (18.380)$$

и, следовательно, соотношение (18.378) можно переписать в виде

$$F(\omega, r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \text{Im } F(\omega', r) \left\{ \frac{1}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \frac{1}{\omega' + \omega + i\varepsilon} \right\}, \quad (18.381a)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^M d\omega' \text{Im } F(\omega', r) \frac{\omega'}{\omega'^2 - (\omega + i\varepsilon)^2} + \frac{2}{\pi} \int_M^{\infty} d\omega' \text{Im } F(\omega', r) \frac{\omega'}{\omega'^2 - (\omega + i\varepsilon)^2}. \quad (18.381b)$$

Чтобы получить дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния $R(pk; pk)$, нужно проинтегрировать выражение (18.381b) по r . С этой целью исследуем свойства мнимой части $\text{Im } F(\omega', r)$, чтобы выяснить, законно ли изменение порядка интегрирования по r и ω . Из (18.374) следует, что

$$\text{Im } R(pk; pk) = \frac{1}{2} \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle k | [f(x), f^*(0)] | k \rangle, \quad (18.382)$$

так что, снова выполняя интегрирование по углам, получаем для $\text{Im } R$ представление

$$\text{Im } R(pk; pk) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dr 4\pi r \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - M^2} r}{\sqrt{\omega^2 - M^2}} \times \times \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle k | [f(x), f^*(0)] | k \rangle, \quad (18.383)$$

которое после подстановки суммы $\sum | \rangle \langle |$ по полной системе состояний и выполнения интегрирования по t принимает вид

$$\begin{aligned} \text{Im } F(\omega, r) &= 2\pi r \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - M^2} r}{\sqrt{\omega^2 - M^2}} \times \\ &\times \sum_{|n\rangle} \frac{\sin |p_n| r}{|p_n| r} | \langle k | f(0) | n \rangle |^2 \{ \delta(\omega + p_{n0} - \mu) - \delta(\omega + \mu - p_{n0}) \}. \end{aligned} \quad (18.384)$$

[В выражении (18.384) множители $\exp(\pm i p_n \cdot x)$ заменены своими средними по углам.] Из представления (18.384) видно, что в области $|\omega| < M$ порядок интегрирования по r и ω изменять нельзя, так как в этой области величина $\sqrt{\omega^2 - M^2} r$ является мнимой, и при $r \rightarrow \infty$ функция $\sin \sqrt{\omega^2 - M^2} r$ стремится к бесконечности. Однако в сумму (18.384) вносят вклад только те состояния, у которых барионное квантовое число равно $+1$. В частности, в области $0 \leq \omega < M$ вклад вносят только однопуклонные состояния.

Выполняя в (18.382) интегрирование по пространственным и временной переменным, можно записать $\text{Im } R(pk; pk)$ в виде

$$\begin{aligned} \text{Im } R(pk; pk) &= \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_{|n\rangle} | \langle k | f(0) | n \rangle |^2 \times \\ &\times \{ \delta^{(4)}(p + k - p_n) - \delta^{(4)}(p - k + p_n) \}, \end{aligned} \quad (18.385)$$

Проблема изменения порядка интегрирования может быть решена несколькими путями. Если бы мы выяснили аналитические свойства матричного элемента $\langle k | f(0) | q \rangle = \varphi((k - q)^2)$ как функции переменной $\frac{q \cdot k}{\mu}$ (где $|q\rangle$ — однопуклонное состояние, $q^2 = M^2$), тогда можно было бы попытаться подходящим образом деформировать в (18.3816) контур интегрирования по ω . Это и было сделано Симанзником [761, 762] и позволило оправдать изменение порядка интегрирования по r и ω . Другое решение проблемы дает подход Лемана [494], примененный им для доказательства дисперсионных соотношений при $\Delta^2 \neq 0$. Здесь прежде всего доказывается, что $\text{Im } R$ является аналитической функцией переменной M^2 в полосе, идущей вдоль вещественной оси до $-\infty$. [Это демонстрируется при помощи представления (18.350а), (18.357) для $\text{Im } R$ и представления Дайсона для запаздывающих коммутаторов, вошедших в выражение (18.357).] Поэтому теперь можно рассмотреть $\text{Im } R$ при больших отрицательных значениях M^2 , когда нет трудности с изменением порядка интегрирования по ω и r . Затем функцию можно аналитически продолжить на массовую поверхность. Еще один путь — следуя Боголюбову, вместо функции $R(pk; pk)$ исследовать функцию

$$R_1(pk; pk) = [(k + p)^2 - M^2] [(k - p)^2 - M^2] R(pk; pk). \quad (18.386)$$

Из представления (18.385) для $\text{Im } R(pk; pk)$ легко видеть, что умножение амплитуды R на множители $[(k + p)^2 - M^2]$ и $[(k - p)^2 - M^2]$ устраняет одночастичные особенности, так что новая функция R_1 обладает свойством

$$\text{Im } R_1(pk; pk) = 0 \quad \text{при } |\omega| < M. \quad (18.387)$$

Очевидно, что, поступая так же, как и выше, можно показать, что функция $R_1(pk; pk)$ имеет аналитическое продолжение на верхнюю полу-

плоскость комплексной переменной ω . Поэтому для R_1 как функции переменной $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ можно записать дисперсионные соотношения с двумя вычитаниями. [В силу свойства (18.387) теперь нет препятствий для изменения порядка интегрирования по r и ω !] Необходимость вычитаний вызвана тем, что, как ясно из определения (18.386), порядок роста функции R_1 по ω на две степени выше, чем у функции R . После того как выяснены аналитические свойства функции R_1 , аналитические свойства функции R можно установить при помощи соотношения (18.386). Отсюда ясно, что, кроме разреза, идущего от $-M$ до $-\infty$ и от M до $+\infty$, функция R имеет два простых полюса при $\omega = \pm \frac{\mu}{2}$. Поэтому можно записать

$$\operatorname{Re} R(\omega) = \frac{c}{\left(\omega - \frac{\mu}{2}\right)\left(\omega + \frac{\mu}{2}\right)} + \frac{2}{\pi} P \int_M^\infty d\omega' \frac{\omega' \operatorname{Im} R(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (18.388)$$

Сопоставляя соотношение (18.388) и выражение (18.385), можно легко получить значение константы c (см., например, работу Циммермана [877]). Эта постоянная тесно связана с перенормированной константой связи лагранжевой формулировки. Итак, вывод дисперсионного соотношения для $R(\omega)$ окончен. Оказывается, что этот метод работает также и в том случае, когда приводятся мезонные переменные, т. е. когда используется представление

$$R(pk; pk) = \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle p | R(j(x)j(0)) | p \rangle. \quad (18.389)$$

Можно доказать, что в лабораторной системе ($\mathbf{p} = 0$) эта амплитуда $R(\omega)$, где $\omega = \frac{p \cdot k}{M} = \frac{\mu}{M} \omega$, удовлетворяет следующему дисперсионному соотношению:

$$\operatorname{Re} R(\omega) = \frac{a}{\left(\omega + \frac{\mu}{2M}\right)\left(\omega - \frac{\mu}{2M}\right)} + \frac{2}{\pi} P \int_\mu^\infty d\omega' \frac{\omega' \operatorname{Im} R(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (18.390)$$

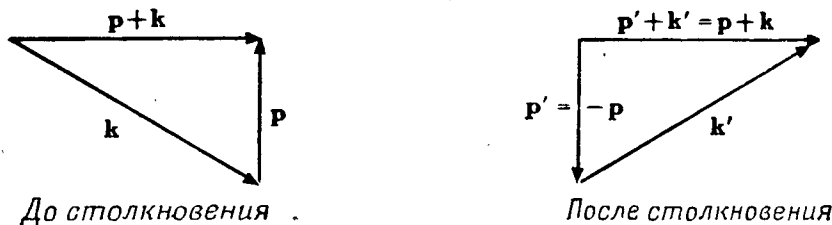
(Символ P обозначает, что при $\omega' = \omega$ интеграл берется в смысле главного значения.) Константа a теперь связана с матричным элементом $|\langle p | j(0) | q \rangle|^2$ при значении $(p - q)^2 = \mu^2$, т. е. с константой связи Ватсона — Лепора. Значением этой константы a характеризуется мезонное поле нуклона на больших расстояниях. Потенциал поля аппроксимируется там потенциалом Юкавы, пропорциональным константе a . Обсуждение этой константы связи мы продолжим в конце настоящего параграфа. Вернемся теперь к выводу дисперсионных соотношений для $R(\omega, \Delta^2, \zeta)$ при фиксированном значении Δ^2 .

Для этого нужно выяснить аналитические свойства $R(\omega, \Delta^2, \zeta)$ как функции ω при фиксированном значении Δ^2 . Общий путь — выбрать такую систему координат, чтобы вся зависимость от переменной, по которой мы хотим записать дисперсионные соотношения, сосредоточилась (хотя бы формально) в экспоненте, входящей в представление амплитуды рассеяния. Так, выражение (18.347) наиболее удобно для получения информации о зависимости от ω , а представление

$$R = i \int d^4x e^{i(k' - p') \cdot x} \theta(x) \langle 0 | \left[j\left(\frac{x}{2}\right), f\left(-\frac{x}{2}\right) \right] | pk \rangle_{\text{in}} \quad (18.391)$$

наиболее удобно для получения информации относительно зависимости от передачи импульса, так как в системе центра масс эта переменная войдет в (18.391) только в экспоненту.

Выберем лоренцеву систему отсчета, в которой $\mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0$ — так называемая система Брейта. Рассмотрим кинематику в этой системе. Поскольку $\mathbf{P} = -\mathbf{P}'$, то $p_0 = p'_0 = E(\mathbf{p}) = E(\mathbf{p}') = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2}$: и на основании закона сохранения энергии $k_0 = k'_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \zeta} = \sqrt{\mathbf{k}'^2 + \zeta}$.



Ф и г. 149.

откуда также следует, что $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$. Сохранение импульса означает, что $|\mathbf{p} + \mathbf{k}| = |\mathbf{p}' + \mathbf{k}'|$ и, следовательно, что $\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{k}'$, а отсюда с учетом равенства $p^2 = p'^2$

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} &= -(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}' = -(\mathbf{p}' + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{p}' = \\ &= -(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} = 0. \end{aligned} \tag{18.392}$$

Таким образом, вектор $\mathbf{p} + \mathbf{k}$ ортогонален к вектору \mathbf{p} (фиг. 149). Если через \mathbf{e} обозначить единичный вектор, перпендикулярный \mathbf{p} ($\mathbf{e} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}' = 0$), а через Δ — передачу импульса

$$\Delta = \frac{1}{2}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = \mathbf{p}', \tag{18.393}$$

тогда

$$\mathbf{k} = \varrho \mathbf{e} + \Delta, \tag{18.394a}$$

$$\mathbf{k}' = \varrho \mathbf{e} - \Delta, \tag{18.394б}$$

где ϱ — абсолютное значение полного импульса системы в системе отсчета Брейта. Поскольку $\mathbf{e} \cdot \Delta = 0$ и $(\varrho \mathbf{e} + \Delta)^2 = \mathbf{k}^2$, то отсюда

$$\varrho^2 + \Delta^2 = \mathbf{k}^2. \tag{18.395}$$

В итоге в системе Брейта

$$p = \{E_{\Delta}, -\Delta\} = p_{-\Delta}, \quad E_{\Delta}^2 = \Delta^2 + M^2, \tag{18.396a}$$

$$p' = \{E_{\Delta}, \Delta\} = p_{\Delta};$$

$$\begin{aligned} k &= \{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \zeta}, \varrho \mathbf{e} + \Delta\}, \\ k' &= \{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \zeta}, \varrho \mathbf{e} - \Delta\}, \end{aligned} \tag{18.396б}$$

причем $\mathbf{e} \cdot \Delta = 0$, $\mathbf{e}^2 = 1$, $\varrho^2 = \mathbf{k}^2 - \Delta^2$ и, следовательно,

$$\frac{1}{2}(p + p') = \{E_{\Delta}, 0\}, \tag{18.397a}$$

$$\frac{1}{2}(k + k') = Q = \{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \zeta}, \varrho \mathbf{e}\}, \tag{18.397б}$$

а также

$$\Delta^2 = \Delta'^2, \quad (18.398)$$

$$\omega = \frac{(p+p') \cdot (k+k')}{2\sqrt{(p+p')^2}} = \sqrt{k^2 + \zeta}. \quad (18.399)$$

Таким образом, величина ω при $\zeta = \mu^2$ превращается в энергию мезона. В системе отсчета Брейта амплитуда рассеяния записывается в виде

$$R(\omega, \Delta^2, \zeta) = \\ = i \int d^3x \int_0^\infty dt e^{i\omega t - i\sqrt{\omega^2 - \Delta^2 - \zeta} \cdot x} \langle E_\Delta, \Delta | \left[j\left(\frac{x}{2}\right), j\left(-\frac{x}{2}\right) \right] | E_\Delta, -\Delta \rangle \quad (18.400a)$$

$$= i \int d^3x \int_0^\infty dt e^{i\omega t - i\sqrt{\omega^2 - \Delta^2 - \zeta} \cdot x} f(p \cdot p', p \cdot x, p' \cdot x, x^2). \quad (18.400б)$$

Важным следствием этого выбора системы координат является то, что вся зависимость R от ω сосредоточивается в экспоненте. Причинность означает, что коммутатор при $t^2 < x^2$ равен нулю, а благодаря наличию множителя $\theta(x_0)$ интеграл по t распространяется только на положительные значения $t > |x|$. Определим функцию $R(\omega, \Delta^2, \zeta)$ при комплексных значениях $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ с помощью правой части (18.400a). Поскольку при произвольных действительных положительных ε

$$\text{Im} \sqrt{\omega^2 - \varepsilon} > \text{Im} \omega, \quad (18.401)$$

то при действительных положительных значениях переменной ζ функция $R(\omega, \Delta^2, \zeta)$ не обязательно будет аналитична в верхней полуплоскости комплексной переменной ω — интеграл может расходиться. Если же мы будем считать и переменную ζ комплексной $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$, тогда выражение (18.400a) определяет аналитическую функцию $R'(\omega, \Delta^2, \zeta)$ от ω и ζ , регулярную в области \mathcal{R} :

$$\{\mathcal{R}\}: \quad \text{Im} \omega > |\text{Im} \sqrt{\omega^2 - \Delta^2 - \zeta}|, \\ \text{Im} \omega > 0. \quad (18.402)$$

Более детально эта область характеризуется неравенствами

$$\omega_2 > 0, \quad \omega_1^2 > \zeta_1 + \Delta^2, \quad (18.403a)$$

$$2\omega_2 (\omega_1 - \sqrt{\omega_1^2 - \zeta_1 - \Delta^2}) < \zeta_2 < 2\omega_2 (\omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 - \zeta_1 - \Delta^2}). \quad (18.403б)$$

При ζ , действительном и удовлетворяющем неравенству $\zeta = \zeta_1 < -\Delta^2$, функция R регулярна в полуплоскости $\text{Im} \omega > 0$. Если функция R убывает на бесконечности должным образом, то можно написать

$$R(\omega, \Delta^2, \zeta_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im} R(\omega', \Delta^2, \zeta_1)}{\omega' - \omega - i\varepsilon}. \quad (18.404)$$

В случае, когда функция R не обладает требуемыми свойствами при больших ω для законности соотношения (18.404), всегда можно поделить R на полином по ω , не имеющий нулей в верхней полуплоскости.

скости. Соответственно можно записать

$$R(\omega, \Delta^2, \zeta_1) - R(\omega_0, \Delta^2, \zeta_1) = \frac{\omega - \omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\text{Im} R(\omega', \Delta^2, \zeta_1)}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)}, \quad (18.405)$$

где ω_0 — некоторое фиксированное значение. Если необходимо, то сходимость интеграла в правой части можно улучшить при помощи дальнейших вычитаний¹⁾. С помощью представления (18.350а) для $\text{Im} R$ соотношение (18.404) можно переписать следующим образом:

$$R(\omega, \Delta^2, \zeta_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega' M(\omega', \Delta^2, \zeta_1) \left[\frac{1}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \frac{1}{\omega' + \omega} \right]. \quad (18.406)$$

Если работать в системе отсчета Брейта и ввести обозначение $\frac{1}{2}(k + k') = Q = \{\sqrt{k^2 + \zeta_1}, q\}$, то функцию $M(\omega, \Delta^2, \zeta_1)$ можно распisać в виде

$$\begin{aligned} M(\omega, \Delta^2, \zeta_1) &= \int d^4x e^{i(k+k') \cdot \frac{x}{2}} \langle p_{\Delta} | j\left(\frac{x}{2}\right) j\left(-\frac{x}{2}\right) | p_{-\Delta} \rangle = \\ &= (2\pi)^4 \sum_{|p_n \alpha\rangle} \langle p_{\Delta} | j(0) | p_n \alpha \rangle \langle p_n \alpha | j(0) | p_{-\Delta} \rangle \cdot \delta\left(-p_n + \frac{k+k'}{2} + \frac{p_{\Delta} + p_{-\Delta}}{2}\right) = \\ &= (2\pi)^4 \sum_{p_{n_0}, \alpha} \langle p_{\Delta} | j(0) | p_{n_0}, Q, \alpha \rangle \langle p_{n_0}, Q, \alpha | j(0) | p_{-\Delta} \rangle \cdot \delta(p_{n_0} - E_{\Delta} - \omega). \end{aligned} \quad (18.407)$$

Далее, поскольку $p_{n_0} \geq 0$, то

$$\delta(p_{n_0} - E_{\Delta} - \omega) = 2p_{n_0} \delta(p_{n_0}^2 - (E_{\Delta} + \omega)^2), \quad (18.408)$$

так что если ввести переменную $\sigma^2 = p_{n_0}^2 - p_n^2 = p_{n_0}^2 - q^2$, тогда

$$\delta(p_{n_0}^2 - (E_{\Delta} + \omega)^2) = \delta(\sigma^2 + q^2 - (E_{\Delta} + \omega)^2). \quad (18.409)$$

Кроме того, учитывая, что $q^2 = k^2 - \Delta^2$, эту δ -функцию можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \delta(p_{n_0}^2 - (E_{\Delta} + \omega)^2) &= \delta(\sigma^2 + k^2 - \Delta^2 - (E_{\Delta} + \omega)^2) = \\ &= \delta(\sigma^2 - M^2 - \zeta_1 - 2\Delta^2 - 2E_{\Delta}\omega), \end{aligned} \quad (18.410)$$

и, наконец, после замены $\sum_{p_{n_0}} 2p_{n_0} \rightarrow \int_0^{\infty} dp_{n_0} 2p_{n_0} = \int_0^{\infty} d\sigma^2$ получаем для $M(\omega, \Delta^2, \zeta_1)$ представление

$$M(\omega, \Delta^2, \zeta_1) = \int_0^{\infty} d\sigma^2 \mu(\sigma^2, \Delta^2, \zeta_1) \delta(\sigma^2 - M^2 - \zeta_1 - 2\Delta^2 - 2E_{\Delta}\omega), \quad (18.411)$$

¹⁾ Симанзик [761, 762] исследовал поведение амплитуды R при больших ω на модели одномерного рассеяния. Он показал, что в этом случае при больших ω амплитуда R ведет себя как ω^n (где n — конечное число).

где

$$\mu(\sigma^2, \Delta^2, \zeta_1) = 2\pi \sum_{\alpha} \langle p_{\Delta} | j(0) | \sigma^2, \varrho_{\Delta}(\zeta_1), \alpha \rangle \langle \sigma^2, \varrho_{\Delta}(\zeta_1), \alpha | j(0) | p_{-\Delta} \rangle \quad (18.412)$$

и

$$\varrho_{\Delta}(\zeta_1) = \sqrt{\omega_{\Delta}^2(\sigma) - \zeta_1 - \Delta^2}, \quad (18.413a)$$

$$\omega_{\Delta}(\sigma^2) = \frac{1}{2E_{\Delta}} (\sigma^2 - \Delta^2 - E_{\Delta}^2 - \zeta_1). \quad (18.413b)$$

Если в сумме по α выделить вклад однонуклонного состояния, которому соответствует $\sigma^2 = M^2$, то

$$\mu(\sigma^2, \Delta^2, \zeta_1) = \delta(\sigma^2 - M^2) g(\zeta_1) \overline{g(\zeta_1)} + \Theta(\sigma^2, \Delta^2, \zeta_1) \theta(\sigma^2 - (M + \mu)^2), \quad (18.414a)$$

где

$$g(\zeta_1) = \langle p_{\Delta} | j(0) | \sigma^2 = M^2, \varrho_{\Delta} e \rangle \quad (18.414b)$$

есть матричный элемент оператора тока между однонуклонными состояниями с импульсами Δ и $\varrho_{\Delta} e$, где ϱ_{Δ} дается формулами (18.413a) и (18.413b) с $\sigma^2 = M^2$. В силу релятивистской инвариантности функция g зависит только от $p_{\Delta}^2 = M^2$, $p_n^2 = M^2$ (здесь $p_n = \{p_{n_0}, \varrho_{\Delta} e\}$; $p_{n_0}^2 - \varrho_{\Delta}^2 = M^2$) и от $(p_{\Delta} - p_n)^2$. Однако

$$\begin{aligned} (p_{\Delta} - p_n)^2 &= (E_{\Delta} - p_{n_0})^2 - (\Delta - \varrho_{\Delta} e)^2 = \\ &= [E_{\Delta} - (E_{\Delta} + \omega)]^2 - \Delta^2 - \varrho_{\Delta}^2 = \\ &= \omega_{\Delta}^2 - \Delta^2 - \varrho_{\Delta}^2 = \zeta_1, \end{aligned} \quad (18.415)$$

откуда $g = g(\zeta_1)$. Таким образом, функция $M(\omega, \Delta^2, \zeta_1)$ имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} M(\omega, \Delta^2, \zeta_1) &= \frac{|g(\zeta_1)|^2}{2E_{\Delta}} \delta\left(\omega + \frac{\zeta_1 + 2\Delta^2}{2E_{\Delta}}\right) + \\ &+ \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} d\sigma^2 \Theta(\sigma^2, \Delta^2, \zeta_1) \delta(\sigma^2 - M^2 - \zeta_1 - 2\Delta^2 - 2E_{\Delta}\omega), \end{aligned} \quad (18.416a)$$

так что зависимость функции $M(\omega, \Delta^2, \zeta_1)$ от ω такова, что она отлична от нуля только при значениях

$$\omega = -\frac{\zeta_1 + 2\Delta^2}{2E_{\Delta}} \quad (18.416b)$$

и в области

$$\omega \geq \frac{(M + \mu)^2 - \zeta_1 - M^2 - 2\Delta^2}{2E_{\Delta}}. \quad (18.416b')$$

Когда $\zeta_1 < -2\Delta^2$, значения ω , при которых функция $M(\omega, \Delta^2, \zeta_1)$ отлична от нуля, расположены так, как это показано на фиг. 150. Обратим внимание на существование щели между дискретным значением ω (вклад в M однонуклонного состояния) и вкладами более высоких по массе состояний. Подставляя выражение (18.416a) в соотноше-

ние (18.406), получаем

$$R(\omega, \Delta^2, \zeta_1) = \frac{|g(\zeta_1)|^2}{2\pi} \left[-\frac{1}{\zeta_1 + 2\Delta^2 + 2\omega E_\Delta} + \frac{1}{\zeta_1 + 2\Delta^2 - 2\omega E_\Delta} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} d\sigma^2 \Theta(\sigma^2, \Delta^2, \zeta_1) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\sigma^2 - M^2 - \zeta_1 - 2\Delta^2 - 2\omega E_\Delta} + \frac{1}{\sigma^2 - M^2 - \zeta_1 - 2\Delta^2 + 2\omega E_\Delta} \right] \quad (18.417a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{M^2}^{\infty} d\sigma^2 M(\sigma^2, \Delta^2, \zeta_1) \times$$

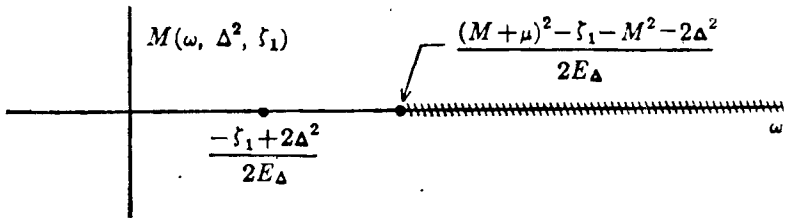
$$\times \left[\frac{1}{\sigma^2 - 2\Delta^2 - M^2 - \zeta_1 - 2\omega E_\Delta} + \frac{1}{\sigma^2 - 2\Delta^2 - M^2 - \zeta_1 + 2\omega E_\Delta} \right]. \quad (18.417b)$$

Если ввести переменную $W^2 = 2\omega E_\Delta + 2\Delta^2 + M^2 + \zeta_1$, то тогда соотношение (18.417б) можно записать в виде

$$R(W, \Delta^2, \zeta_1) = \frac{|g(\zeta_1)|^2}{2\pi} \left[\frac{1}{W^2 - 4\Delta^2 - M^2 - 2\zeta_1} - \frac{1}{W^2 - M^2} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} dW'^2 M(W'^2, \Delta^2, \zeta_1) \left[\frac{1}{W'^2 - W^2} + \frac{1}{W'^2 - 2M^2 - 2\zeta_1 - 4\Delta^2 + W^2} \right]. \quad (18.418)$$

Действительная часть (18.418) была бы дисперсионным соотношением, но для нефизических отрицательных значений ζ . Чтобы получить



Ф и г. 150.

дисперсионные соотношения при $\zeta = \mu^2$, нужно показать, что функция $R(\omega, \Delta^2, \zeta)$, определяемая правой частью формулы (18.417б), является аналитической функцией от ζ в полосе вдоль действительной оси и что ее можно аналитически продолжить вплоть до μ^2 . Затем нужно показать, что такая функция, полученная в результате аналитического продолжения по ζ , при действительных положительных значениях ω совпадает с первоначальной амплитудой рассеяния.

Боголюбов [67] показал, что при помощи такого аналитического продолжения из формулы (18.417б) действительно получаются дисперсионные соотношения для амплитуды $R(\omega, \Delta^2, \mu^2)$ (см. также работу Владимирова и Логунова [811]). На основе теории многих комплексных переменных он доказал, что при $\Delta^2 \geq 0$ и $\sigma^2 \geq M^2$ величина $M(\sigma^2, \Delta^2, \zeta)$

является аналитической функцией ζ , регулярной при $\text{Re } \zeta = \zeta_1 \leq \mu^2$ в окрестности действительной оси, $|\text{Im } \zeta| < \delta$. Раз так, то тогда выражение (18.417б) определяет аналитическую функцию $R''(\omega, \Delta^2, \zeta)$ от переменных ω и ζ , регулярную в области \mathcal{R}'' , определяемой неравенствами $\zeta_1 \leq \mu^2$, $|\zeta_2| < \delta$, $|\zeta_2| < 2E\Delta \text{Im } \omega$. При ζ , действительных с $\zeta_1 < -\Delta^2$,

$$R'(\omega, \Delta^2, \zeta_1) = R''(\omega, \Delta^2, \zeta_1). \quad (18.419)$$

Далее, граничное значение, принимаемое функцией R'' в результате предельного перехода $\omega_2 = \text{Im } \omega \rightarrow 0$ при $\zeta = \mu^2$ и $\omega_1 > \sqrt{\Delta^2 + \mu^2}$, есть физическая амплитуда рассеяния $R(\omega, \Delta^2)$, определенная формулой (18.331), так как это граничное значение может быть достигнуто вдоль пути, проходящего по пересечению областей \mathcal{R}' и \mathcal{R}'' . (Строгое доказательство двух последних пунктов см. в работах [65, 66, 84, 554].)

Леман [494, 495] доказал требующиеся для вывода дисперсионных соотношений с $\zeta = \mu^2$ аналитические свойства функции $M(\omega, \Delta^2, \zeta)$ по переменной ζ , не используя теорию функций многих комплексных переменных. Доказательство Лемана основано на применении представления Дайсона для причинных коммутаторов, которые входят в выражение (18.357), определяющее функцию $M(\omega, \Delta^2, \zeta)$ при $\zeta < m_1^2$. Здесь мы в общих чертах будем следовать доказательству Лемана.

Каждому запаздывающему коммутатору в (18.357) соответствует весовая функция $\Phi_\alpha(u, \kappa^2, p+k)$, которая равна нулю вне области

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(p+k) + u \in L^+; \quad \frac{1}{2}(p+k) - u \in L^+, \\ \kappa \geq \text{Max} \left\{ 0; m_1 - \sqrt{\left(\frac{p+k}{2} + u\right)^2}; m_2 - \sqrt{\left(\frac{p+k}{2} - u\right)^2} \right\} \end{array} \right. \quad (18.420)$$

Для рассеяния π -мезона на нуклоне $m_1 = 3\mu$ и $m_2 = M + \mu$. Если эти весовые функции перемножить и взять сумму по α , то получим полную весовую функцию

$$\Phi(u_1, u_2, \kappa_1, \kappa_2; p+k) = \sum_a \Phi_\alpha(u_1, \kappa_1; p+k) \overline{\Phi_\alpha(u_2, \kappa_2; p+k)}, \quad (18.421)$$

которая удовлетворяет условиям (18.420) по каждой паре переменных u_i, κ_i ($i=1, 2$) в отдельности. Эта весовая функция есть действительная и инвариантная функция от векторов $u_1, u_2, p+k$ и, следовательно, зависит только от их скалярных произведений. Важнейшее значение для дальнейшего имеет то обстоятельство, что функция Φ зависит только от одной кинематической переменной $W^2 = (p+k)^2$ и не зависит от ζ иным путем. Если в выражении (18.357) матричные элементы от запаздывающих коммутаторов заменить соответствующими представлениями Дайсона, то после выполнения суммирования (18.421) по α получим для $M(W^2, \Delta^2, \zeta)$ представление

$$M(W^2, \Delta^2, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^4 u_1 d^4 u_2 d\kappa_1^2 d\kappa_2^2 \Phi(u_1, u_2, \kappa_1, \kappa_2; p+k)}{\left[\left(\frac{k' - p'}{2} - u_1 \right)^2 - \kappa_1^2 \right] \left[\left(\frac{k - p}{2} - u_2 \right)^2 - \kappa_2^2 \right]}. \quad (18.422)$$

Поскольку вес Φ зависит только от одной кинематической переменной W , то вся зависимость от Δ^2 и ζ содержится в знаменателе подын-

тегрального выражения (18.422). Вычисления в формуле (18.422) легче всего проводятся в системе центра масс ($\mathbf{p} + \mathbf{k} = 0$), когда весовая функция Φ становится функцией переменных $u_1, u_2, u_1^2, u_2^2, u_{10}, u_{20}, \kappa_1^2, \kappa_2^2$ и W . Если выбрать систему координат так, чтобы

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= K(1, 0, 0), \\ \mathbf{k}' &= K(\cos \theta, \sin \theta, 0), \\ u_1 &= u_1(\cos \varphi_1 \sin \vartheta_1, \sin \varphi_1 \sin \vartheta_1, \cos \vartheta_1), \\ u_2 &= u_2(\cos \varphi_2 \sin \vartheta_2, \sin \varphi_2 \sin \vartheta_2, \cos \vartheta_2), \end{aligned} \quad (18.423)$$

а в качестве переменных интегрирования принять $\chi = \varphi_1$ и $\alpha = \varphi_1 - \varphi_2$, то тогда по некоторым переменным можно проинтегрировать [494, 495]. При интегрировании полезно считать, что вес Φ есть функция переменных $u_{10}, u_{20}, u_1^2, u_2^2, \frac{u_1 \cdot u_2}{|u_1| |u_2|}, \kappa_1^2, \kappa_2^2$ и W . После перехода к переменным (18.423) получаем

$$\begin{aligned} M(W^2, \Delta^2, \zeta) &= \frac{1}{8\pi K^2} \int du_{10} \int du_{20} \int u_1 du_1 \int u_2 du_2 \int d\kappa_1^2 \int d\kappa_2^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \times \\ &\times \int_0^\pi d\vartheta_1 \int_0^\pi d\vartheta_2 \int_0^{2\pi} d\chi \frac{\Phi(u_{10}, u_2^2, \kappa_2^2, \cos \alpha \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2, W)}{|x_1(\zeta) - \cos(\theta - \chi)| |x_2(\zeta) - \cos(\chi - \alpha)|}, \end{aligned} \quad (18.424)$$

где

$$x_i(\zeta) = \frac{K^2 + u_i^2 + \kappa_i^2 - \left(u_{i0} + \frac{M^2 - \zeta^2}{2W}\right)^2}{2Ku_i \sin \vartheta_i} \quad (18.425a)$$

и

$$K^2 = \frac{(W^2 + M^2 - \zeta^2)^2 - 4M^2W^2}{4W^2}, \quad (18.425b)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{2\Delta^2}{K^2}. \quad (18.425b)$$

Вводя новые переменные интегрирования u'_i и $\kappa_i'^2$

$$u'_i = u_i \sin \vartheta_i, \quad (18.426a)$$

$$u_i'^2 + \kappa_i'^2 = u_i^2 + \kappa_i^2 \quad (18.426b)$$

[для исключения из знаменателя в (18.424) зависимости от ϑ_i] и учитывая, что

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{|x_1 - \cos(\theta - \chi)| |x_2 - \cos(\chi - \alpha)|} = \\ &= 2\pi \frac{\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 1}}}{x_1 x_2 + \sqrt{x_1^2 - 1} \sqrt{x_2^2 - 1} - \cos(\theta - \alpha)}, \end{aligned} \quad (18.427)$$

можно проинтегрировать по переменным ϑ_i и χ . После замены переменных (18.426) переменные ϑ_i будут входить только в весовую функцию Φ , так что интегрирование по ним просто будет давать новую весовую

функцию $\Phi'(u_{i0}, u_i, \kappa_i^2, \cos \alpha, W)$. Попутно отметим, что область изменения переменных u_i, κ_i та же, что и переменных u_i, κ_i . Таким образом получаем (штрихи опущены)

$$M(W, \Delta^2, \zeta) = \int \dots \int du_{i0} du_i du_{20} du_2 d\kappa_1^2 d\kappa_2^2 \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\alpha \Phi'(u_{i0}, u_i, u_{20}, u_2, \kappa_1^2, \kappa_2^2, \cos \alpha, W) \times \\ \times \frac{\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 - K^2}} + \frac{y_2}{\sqrt{y_2^2 - K^2}}}{y_1 y_2 + \sqrt{y_1^2 - K^2} \sqrt{y_2^2 - K^2} - K^2 \cos(\theta - \alpha)}, \quad (18.428a)$$

где

$$y_i = \frac{K^2 + u_i^2 + \kappa_i^2 - \left(u_{i0} + \frac{M^2 - \zeta}{2W}\right)^2}{2u_i}, \quad (18.428b)$$

а переменные u_{i0}, u_i и κ_i изменяются в области

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u_i \leq \frac{W}{2}; \quad |u_{i0}| \leq \frac{W}{2} - u_i, \\ \kappa_i \geq \text{Max} \left\{ 0; m_1 - \sqrt{\left(\frac{W}{2} + u_{i0}\right)^2 - u_i^2}; \quad m_2 - \sqrt{\left(\frac{W}{2} - u_{i0}\right)^2 - u_i^2} \right\}. \end{array} \right. \quad (18.428b)$$

Снова подчеркнем важное значение представления (18.428) для $M(W, \Delta^2, \zeta)$; в нем вся зависимость от угла θ (или от передачи Δ^2) и от переменной ζ содержится в явном выражении, стоящем в третьей строке формулы (18.428a). Величина $M(W, \Delta^2, \zeta)$ будет иметь особенности по этим переменным, когда

$$y_i^2 - K^2 = 0$$

и (или)

$$y_1 y_2 + \sqrt{y_1^2 - K^2} \sqrt{y_2^2 - K^2} - K^2 \cos(\theta - \alpha) = 0,$$

при условии, что переменные u_i, u_{i0} и κ_i принимают значения в области (18.428a). Можно проверить, что при $K^2 \geq 0$ и $\zeta \leq \mu^2$ минимальное значение величины $y_i^2 - K^2$, когда переменные u_{i0}, u_i и κ_i изменяются в области (18.428b), есть

$$\text{Min} \{y_i^2 - K^2\} = \frac{(m_1^2 - \mu^2)(m_2^2 - M^2)}{W^2 - (m_1 - m_2)^2}. \quad (18.429)$$

Поэтому величина $y_i^2 - K^2$ никогда не обратится в нуль, если $m_1 > \mu$, $m_2 > M$ и $W^2 > (m_2 - m_1)^2$, что всегда выполнено в физических приложениях. Подобным же образом и вторая возможность при $\zeta \leq \mu^2$ не приводит к особенностям, пока $\Delta^2 \leq \Delta_{\text{марс}}^2$, где

$$\Delta_{\text{марс}}^2 = \text{Min}_W \left\{ K^2 + \frac{(m_1^2 - \mu^2)(m_2^2 - M^2)}{W^2 - (m_1 - m_2)^2} \right\}. \quad (18.430)$$

(Подробности, касающиеся доказательства этих утверждений, см. в работах

Лемана [494, 495].) В случае рассеяния π -мезонов на нуклонах¹⁾

$$\Delta_{\text{макс}}^2 = \frac{8}{3} \frac{2M + \mu}{2M - \mu} \mu^2 \sim 3\mu^2. \quad (18.431)$$

Пока Δ^2 меньше этого значения $\Delta_{\text{макс}}^2$, функция $M(W, \Delta^2, \zeta)$ аналитична по ζ в полосе $|\text{Im } \zeta| < \delta$, $\text{Re } \zeta = \zeta_1 \leq \mu^2$. Поэтому правую часть формулы (18.406) можно продолжить до значения на массовой поверхности $\zeta_1 = \mu^2$ (однако строгое доказательство см. в работе [554]). Этот же подход можно применить и для доказательства того, что функция $g(\zeta)$, определенная формулой (18.414б), имеет аналитическое продолжение в точку $\zeta = \mu^2$. Величина $g(\mu^2)$ играет роль константы связи [596].

Однако наша цель еще не достигнута, поскольку дисперсионный интеграл в дисперсионных соотношениях (18.417) или (18.418) при $\Delta^2 \neq 0$ (т. е. в случае рассеяния не вперед) всегда распространяется и на некоторую нефизическую область, соответствующую значениям $\omega' < \sqrt{\Delta^2 + \mu^2}$ в (18.417а)²⁾ или $W'^2 < (\sqrt{\Delta^2 + M^2} + \sqrt{\Delta^2 + \mu^2})^2$ в (18.418). Подынтегральное выражение $M(W, \Delta^2) = 2 \text{Im } R(W, \Delta^2)$ в этой нефизической области пока еще не было выражено через экспериментальные величины.

1) При рассеянии нуклонов на нуклонах, когда $m_1 = m_2 = M + \mu$ и $W \geq 2\mu$,

$$\Delta_{\text{макс}}^2 = \mu(2M + \mu) - M^2,$$

а эта величина положительна, только если

$$\frac{\mu}{M} > \sqrt{2} - 1.$$

Это означает, что обсуждаемые методы позволяют доказать дисперсионные соотношения для рассеяния нуклонов на нуклонах вперед, только когда отношение μ/M удовлетворяет этому неравенству. С другой стороны, Симанзик [763] доказал, что каждый член ряда теории возмущений для амплитуды рассеяния нуклонов на нуклонах $R(p'q'; pq)$ удовлетворяет дисперсионным соотношениям по W при фиксированной передаче Δ^2 , пока $\Delta \leq \mu/2$ (см. также статью Тэйлора [924]). Обсуждение свойств аналитичности амплитуды рассеяния и вершинных функций в теории возмущений можно найти у Намбу [572], Наканиши [563], Симанзика [761, 762], Карплуса Сомерфилда и Уичмэна [430], Тарского [770], Бьоркена [57], Ландау [476] и особенно у Идена [213—215].

2) В формуле (18.417а) переменная интегрирования ω не употребляется. Правда, если принять ω в качестве переменной интегрирования, будем иметь в качестве нижнего предела [см. формулу (18.416в) при $\zeta = \mu^2$]

$$\frac{(M + \mu)^2 - \mu^2 - M^2 - 2\Delta^2}{2E_{\Delta}} = \frac{(M + \mu)^2 - (\sqrt{\Delta^2 + M^2} + \sqrt{\Delta^2 + \mu^2})^2}{2E_{\Delta}} + \sqrt{\Delta^2 + \mu^2} < \sqrt{\Delta^2 + \mu^2}.$$

В то же время минимальное физическое значение ω при заданной передаче Δ равно $\omega_{\text{мин}} = \sqrt{k_{\text{мин}}^2 + \mu^2} = \sqrt{\Delta^2 + \mu^2}$. [Минимальное значение $k_{\text{мин}}^2$ легко находится по формуле (18.395) как значение, достигаемое при равном нулю полном импульсе системы нуклон-мезон q] Что касается переменной $\sigma^2 \equiv W^2$, действительно употребляемой в формулах (18.417) и (18.418), то при фиксированной передаче ее минимальное физическое значение находится следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{мин}}^2 &\equiv W_{\text{мин}}^2 = \text{Min} \{ (E + \omega)^2 - q^2 \} = \\ &= \text{Min}_{q^2} \{ (\sqrt{\Delta^2 + M^2} + \sqrt{\Delta^2 + q^2 + \mu^2})^2 - q^2 \} = \\ &= (\sqrt{\Delta^2 + M^2} + \sqrt{\Delta^2 + \mu^2})^2. \end{aligned}$$

[Здесь использованы формулы (18.395) и (18.396).] Если передача не фиксирована, то для минимума получается меньшее значение: $\sigma_{\text{мин}}^2 = W_{\text{мин}}^2 = (M + \mu)^2$, а оно-то и служит нижним пределом интегрирования в формулах (18.417а) и (18.418). — Прим. ред.

Леман показал [494], что мнимая часть амплитуды упругого рассеяния π -мезонов на нуклонах $\text{Im } R(W, \Delta^2)$ в нефизической области однозначно определяется если известна амплитуда в области малых передач (рассеяние почти вперед) при том же значении энергии. А именно она определяется при помощи аналитического продолжения по переменной передачи импульса Δ^2 . Такая ситуация имеет место всегда, когда отсутствует нефизическая область для рассеяния вперед. Говоря конкретнее, Леман показал, что на массовой поверхности $\xi = \mu^2$ для функции $M(W, \Delta^2)$ имеется следующее представление:

$$M(W, \Delta^2) = \int_{2z_0^2-1}^{\infty} dz \int_{-1}^{+1} d(\cos \alpha) \frac{\Phi(W, \cos \alpha, z)}{z - \cos(\theta - \alpha)} \quad (18.432a)$$

$$= 2 \text{Im } R(W, \Delta^2) \quad (18.432b)$$

Оно получается, если в выражении (18.428) ввести новую переменную интегрирования

$$z = \frac{y_1 y_2 + \sqrt{y_1^2 - K^2} \sqrt{y_2^2 - K^2}}{K^2}. \quad (18.433)$$

В формуле (18.432a)

$$z_0 = \sqrt{1 + \frac{(m_1^2 - \mu^2)(m_2^2 - m^2)}{K^2 [W^2 - (m_1 - m_2)^2]}}. \quad (18.434)$$

Таким образом, функция $M(W, \Delta^2)$ будет обладать определенными свойствами аналитичности по переменной $\cos \theta$ (θ — угол рассеяния). Эти свойства очевидным образом следуют из представления (18.432a), поскольку угол θ входит в него только через ядро $\frac{1}{z - \cos(\theta - \alpha)}$. Точнее говоря, $M(W, \Delta^2)$ есть аналитическая функция переменной $\cos \theta$, регулярная в эллипсе с фокусами в точках $\cos \theta = \pm 1$ и с полуосями, равными $2z_0^2 - 1$ и $2z_0 \sqrt{z_0^2 - 1}$, где значение z_0 дается формулой (18.434). Внутри этого эллипса содержится физическая область $-1 \leq \cos \theta \leq +1$ и область, в которой доказаны дисперсионные соотношения. Конечно, это благоприятный результат.

Фактически уже с помощью представления (18.391) для $R(W, \Delta^2, \mu^2)$ можно доказать, что $R(W, \Delta^2, \mu^2)$ есть аналитическая функция переменной $\cos \theta$, регулярная на плоскости $\cos \theta$ внутри эллипса с центром в начале координат и с полуосями $z_0, \sqrt{z_0^2 - 1}$. Этот результат получается после подстановки в выражение для амплитуды (18.391) представления Дайсона для запаздывающего коммутатора (см. [494]), что придает выражению (18.391) вид

$$R(W, \Delta^2, \mu^2) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^4 u \, d\kappa^2 \Psi(u, \kappa^2, p, k)}{\left[\frac{k' - p' - u}{2} - \kappa^2 \right]^2}, \quad (18.435)$$

где весовая функция Ψ есть инвариантная функция векторов u, p, k , равная нулю вне области

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < u \leq \frac{W}{2}; \quad -\frac{W}{2} + u < u_0 < \frac{W}{2} - u, \\ \kappa \geq \text{Max} \left\{ 0; m_1 - \sqrt{\left(\frac{W}{2} + u_0\right)^2 - u^2}; m_2 - \sqrt{\left(\frac{W}{2} - u_0\right)^2 - u^2} \right\}. \end{array} \right. \quad (18.436)$$

В системе центра масс ($\mathbf{p} + \mathbf{k} = 0$) при помощи подходящего выбора переменных интегрирования указанному выше представлению можно придать вид

$$R(W, \Delta^2, \mu^2) = \int_{z_0}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\Psi(z, \cos \alpha)}{z - \cos(\theta - \alpha)}. \quad (18.437a)$$

Знаменатель в выражении (18.437a) можно записать в следующем виде:

$z - \cos \theta \cos \alpha - \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \sin \alpha$. Казалось бы, что благодаря наличию квадратного корня нужно сделать разрез на плоскости $\cos \theta$. Однако, разбивая область интегрирования по переменной α на две части — от 0 до π и от π до 2π , и делая во второй области замену переменной $\alpha = 2\pi - \alpha$, можно переписать выражение (18.437a) в виде

$$R(W, \Delta^2, \mu^2) = \int_{z_0}^{\infty} dz \int_0^{\pi} d\alpha \frac{\Psi(z, \cos \alpha) (z - \cos \theta \cdot \cos \alpha)}{(z - \cos \theta \cos \alpha)^2 - \sin^2 \theta \sin^2 \alpha}. \quad (18.437b)$$

Эта форма делает очевидным, что амплитуда R зависит от θ только через $\cos \theta$ и что $\sin \theta$ не дает ветвления. Особенности амплитуды R как функции θ могут возникать только в тех случаях, когда обращается в нуль знаменатель, т. е. когда $\cos \theta = z \cos \alpha \pm i \sin \alpha \sqrt{z^2 - 1}$. Если принять, что $\cos \theta = u + iv$, то тогда особенности будут лежать на эллипсе или вне его:

$$\frac{u^2}{z^2} + \frac{v^2}{z^2 - 1} = 1, \quad z_0 \leq z \leq \infty. \quad (18.438)$$

Результат этого исследования Лемана [494] состоит в том, что $R(W, \Delta^2)$, а поэтому также и $\text{Re } R(W, \Delta^2)$ и $\text{Im } R(W, \Delta^2)$ являются аналитическими функциями, регулярными на плоскости $\cos \theta$ внутри эллипса с центром в начале координат и с полюсами z_0 и $\sqrt{z_0^2 - 1}$, где значение z_0 дается формулой (18.434).

Попутно отметим, что хотя представление (18.435) и дает информацию о зависимости $R(W, \Delta^2)$ от θ или Δ^2 , но оно не дает никакой информации относительно области аналитичности R по переменной ζ , поскольку весовая функция зависит от $k^2 = \zeta$ неизвестным образом. Отметим также, что представление (18.428) для $\text{Im } R(W, \Delta^2)$ показывает, что $\text{Im } R(W, \Delta^2)$ является аналитической функцией в более широкой области на плоскости комплексной переменной $\cos \theta$, чем это обнаруживается из представления (18.391).

Полученные выше результаты означают, что разложение амплитуды $R(W^2, \Delta^2)$ в ряд по парциальным волнам

$$R(W^2, \Delta^2) = \frac{1}{\pi^2} \frac{W}{K} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l(W) P_l \left(1 - \frac{2\Delta^2}{K^2} \right), \quad (18.439a)$$

$$C_l(W) = \frac{\pi^2 K}{2W} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) R(W^2, \cos \theta) P_l(\cos \theta), \quad (18.439b)$$

сходится внутри эллипса с полюсами z_0 и $\sqrt{z_0^2 - 1}$. Поэтому можно сперва найти коэффициенты $C_l(W)$ по известной физической амплитуде, а затем определить $\text{Im } R$ в нефизической области при помощи аналити-

ческого продолжения мнимой части выражения (18.439а). Суммируя все полученные выше результаты, заключаем, что дисперсионные соотношения без вычитаний записываются в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} R(W, \Delta^2) = & \frac{g^2(\mu^2)}{2\pi} \left[-\frac{1}{W^2 - M^2} + \frac{1}{W^2 - 4\Delta^2 - M^2 - 2\mu^2} \right] + \\ & + \frac{1}{\pi} P \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} dW'^2 \operatorname{Im} R(W'^2, \Delta^2) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{W'^2 - W^2} + \frac{1}{W'^2 - 4\Delta^2 - 2(M^2 + \mu^2) + W^2} \right\}. \end{aligned} \quad (18.440)$$

Разложение (18.439а) для амплитуды рассеяния, в сущности, является фазовым анализом амплитуды. Можно было бы предпринять попытку выяснить, удовлетворяют ли экспериментальные данные дисперсионным соотношениям для рассеяния не вперед (18.440), или, точнее, их непосредственным обобщениям на более реальные ситуации, когда рассеиваются заряженные частицы со спином. При этом фазы, по-видимому, пришлось бы получать с помощью экспериментально измеренного дифференциального сечения. Однако, как показал Дайсон (не опубликовано, но цитируется у Тирринга [777, 778]), фазы, найденные экспериментально, не позволят выяснить, удовлетворяют ли экспериментальные данные этим дисперсионным соотношениям или нет. Дело в том, что сколь угодно малая ошибка в определении фаз в физической области приводит к слишком широкому произволу при продолжении в нефизическую область (см. также работу Олкока [7]). На самом деле из числа допустимых продолжений всегда можно выбрать такое, чтобы дисперсионные соотношения удовлетворялись даже в том случае, если бы истинная амплитуда (если бы она была известна!) не удовлетворяла дисперсионным соотношениям. Математическая формулировка утверждения Дайсона состоит в следующем. Если заданы две произвольные функции $A(k)$, $D(k)$, интервал d и малое положительное число δ , то всегда можно найти функции $A'(k)$ и $D'(k)$, которые удовлетворяют дисперсионным соотношениям и аппроксимируют $A(k)$ и $D(k)$ в интервале d с точностью δ , т. е. такие, что

$$\begin{aligned} |A'(k) - A(k)| &< \delta, \\ |D'(k) - D(k)| &< \delta \quad \text{при } k \text{ в } d. \end{aligned} \quad (18.441)$$

Итак, экспериментальная проверка дисперсионных соотношений может быть выполнена только для рассеяния вперед, и в особенности в тех случаях, когда у амплитуды рассеяния вперед нет нефизической области, как, например, при рассеянии π -мезонов на нуклонах.

Нами было показано, как можно дать строгое доказательство дисперсионных соотношений, а теперь мы кратко остановимся на чисто эвристическом выводе дисперсионных соотношений для рассеяния мезонов на нуклонах вперед (см. работы Голдбергера [322, 323]). При этом особое внимание обратим на формальную сторону, связанную с наличием изотопического спина. Пусть мезон с 4-импульсом k и индексом изотопического спина α претерпевает рассеяние вперед на нуклоне с импульсом p и с индексом изотопического спина i , и пусть индексы изотопического спина в конечном состоянии равны β и j . Тогда соответствующая амплитуда для рассеяния вперед есть

$$\begin{aligned} R_{\beta\alpha}^{ji}(pk; pk) = & +i \int d^4x e^{ik \cdot x} \theta(x) \langle p^j | [j_\beta(x), j_\alpha(0)] | p^i \rangle, \\ p^2 = & M^2, \quad k^2 = \mu^2 \end{aligned} \quad (18.442)$$

[где $j_\beta(x) = (\square + \mu^2) \varphi_\beta(x)$], и снова опущены вклады от одновременных членов. Напомним, что операторы φ_α ($\alpha = 1, 2, 3$) эрмитовы, причем оператор $\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$ рождает π^+ -мезон, оператор $\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2)$ рождает π^- -мезон, а оператор φ_3 описывает π^0 -мезон. Мы будем явно предполагать, что теория инвариантна относительно пространственных отражений, а также относительно любых вращений в пространстве изотопического спина (зарядовая независимость). Благодаря предположению о зарядовой независимости теории достаточно рассмотреть амплитуды рассеяния заряженных мезонов на протонах, поскольку по этим амплитудам можно восстановить амплитуды рассеяния в состояниях с изотопическим спином $T = 3/2$ и $T = 1/2$. В связи с этим мы будем предполагать, что зарядовое состояние нуклона не изменяется, т. е. $j = i$, и, еще более конкретно, что это квантовое число соответствует протону. В дальнейшем мы будем опускать индексы i и j у амплитуды R и у векторов начального и конечного состояний нуклона $|pi\rangle, |pj\rangle$.

Если перейти к лабораторной системе отсчета ($p = 0, p_0 = M$), то снова можно выполнить интегрирование по углам, поскольку матричный элемент $\langle p | [j_\beta(x), j_\alpha(0)] | p \rangle$ есть скалярная функция x^2 и x_0 . Отметим, что если рассматривать $\langle p | [j_\beta(x), j_\alpha(0)] | p \rangle$ как матрицу в пространстве обычного спина, действующую на спинорные амплитуды нуклона, то при этом не возникнет член вида $\sigma \cdot x$, так как он при отражениях ведет себя как псевдоскаляр. Таким образом, получаем

$$R_{\beta\alpha}(\omega) = \int_0^\infty dr 2\pi r R_{\beta\alpha}(\omega, r), \quad (18.443)$$

где

$$\omega = \frac{p \cdot k}{M} = k_0, \quad |k| = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} \quad (18.444)$$

и

$$R_{\beta\alpha}(\omega, r) = +i \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} r}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} \int_r^\infty dt e^{i\omega t} \langle p | [j_\beta(x), j_\alpha(0)] | p \rangle. \quad (18.445)$$

В формуле (18.445) величина $\langle p | [j_\beta(x), j_\alpha(0)] | p \rangle$ снова понимается как среднее по углам, поскольку она является функцией только $r = |x|$. Представление (18.445) позволяет с помощью уже знакомых нам аргументов заключить, что функция $R_{\beta\alpha}(\omega, r)$ является аналитической в полуплоскости $\text{Im } \omega \geq 0$. Следовательно, она удовлетворяет соотношению Гильберта, из которого мы выводим, что

$$\text{Re } R_{\beta\alpha}(\omega) = \int_0^\infty 2\pi r dr \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega' \text{Im } R_{\beta\alpha}(\omega', r)}{\omega' - \omega}, \quad (18.446a)$$

$$= \int_0^\infty 2\pi r dr \frac{P}{\pi} \left\{ \int_{-\mu}^{+\mu} \frac{d\omega' \text{Im } R_{\beta\alpha}(\omega', r)}{\omega' - \omega} + \left(\int_{\mu}^\infty + \int_{-\infty}^{-\mu} \right) \frac{d\omega' \text{Im } R_{\beta\alpha}(\omega', r)}{\omega' - \omega} \right\}. \quad (18.446b)$$

Прежде чем переходить к вычислению выражения (18.446), рассмотрим свойства симметрии функции $R_{\beta\alpha}$.

В представлении

$$R_{\beta\alpha}(\omega) = +i \int d^3x \int_0^\infty dt e^{i\omega t - i\sqrt{\omega^2 - \mu^2} e \cdot x} \langle pj | [j_\beta(x), j_\alpha(0)] | pi \rangle \quad (18.447)$$

благодаря P -инвариантности множитель $\exp(-i\sqrt{\omega^2 - \mu^2} e \cdot x)$ можно заменить множителем $\cos\sqrt{\omega^2 - \mu^2} e \cdot x$. Отсюда

$$\overline{R_{\beta\alpha}^{ji}(\omega)} = R_{\beta\alpha}^{ij}(-\omega). \quad (18.448)$$

Поэтому если рассматривать амплитуду $R_{\beta\alpha}^{ji}(\omega)$ как ji -й матричный элемент оператора $R_{\beta\alpha}(\omega)$, действующего в пространстве изотопического спина нуклона, то соотношение (18.448) можно записать в виде

$$R_{\beta\alpha}^*(\omega) = R_{\beta\alpha}(-\omega). \quad (18.449)$$

Далее, в силу зарядовой независимости можно представить $R_{\alpha\beta}(\omega)$ разложением

$$R_{\alpha\beta}(\omega) = T_1(\omega) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} T_2(\omega) [\tau_\alpha, \tau_\beta], \quad (18.450)$$

где коэффициенты $T_1(\omega)$ и $T_2(\omega)$ благодаря условию (18.449) удовлетворяют соотношениям

$$T_1(\omega) = \overline{T_1(-\omega)}, \quad (18.451a)$$

$$T_2(\omega) = -\overline{T_2(-\omega)}. \quad (18.451b)$$

Соотношение (18.451b) для $T_2(\omega)$ обусловлено антиэрмитовостью матрицы $[\tau_\alpha, \tau_\beta]$. Эти амплитуды можно также разложить по амплитудам, соответствующим состояниям с определенным полным изотопическим спином,

$$T_1(\omega) = \frac{1}{3} [T_{1/2}(\omega) + 2T_{3/2}(\omega)] = \frac{1}{2} [T_+(\omega) + T_-(\omega)], \quad (18.452a)$$

$$T_2(\omega) = \frac{1}{3} [T_{1/2}(\omega) - T_{3/2}(\omega)] = \frac{1}{2} [-T_+(\omega) + T_-(\omega)], \quad (18.452b)$$

где через $T_{1/2}(\omega)$ и $T_{3/2}(\omega)$ обозначены амплитуды рассеяния в состояниях с полным изотопическим спином $1/2$ и $3/2$, а через T_+ и T_- — амплитуды когерентного π^+ - p -рассеяния и π^- - p -рассеяния.

Доказательство: Запишем $R_{\alpha\beta}(\omega)$ в виде

$$R_{\alpha\beta}(\omega) = \sum_{t=1/2, 3/2} T_t(\omega) [P_t]_{\alpha\beta}, \quad (18.453)$$

где P_t — операторы проектирования, проектирующие на состояния с полным изотопическим спином $1/2$ и $3/2$. Так как

$$P_{1/2} = \frac{1}{3} (1 - \tau \cdot t), \quad (18.454a)$$

$$P_{3/2} = \frac{1}{3} (2 + \tau \cdot t) \quad (18.454b)$$

(t — оператор изотопического спина мезона), то разложение (18.453) можно записать в виде

$$R_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{3} [T_{1/2}(\omega) + 2T_{3/2}(\omega)] \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} [T_{3/2}(\omega) - T_{1/2}(\omega)] (\tau \cdot t)_{\alpha\beta}. \quad (18.455)$$

Поскольку

$$(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t})_{\alpha\beta} = -i\varepsilon_{\alpha\beta\delta}\tau_\delta = -\frac{1}{2} [\tau_\alpha, \tau_\beta], \quad (18.456)$$

то сразу получаются соотношения (18.452а) и (18.452б). Отметим также, что

$$T_1(\omega) \delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [R_{\alpha\beta}(\omega) + R_{\beta\alpha}(\omega)], \quad (18.457)$$

$$\frac{1}{2} T_2(\omega) [\tau_\alpha, \tau_\beta] = \frac{1}{2} [R_{\alpha\beta}(\omega) - R_{\beta\alpha}(\omega)]. \quad (18.458)$$

Получим теперь дисперсионное соотношение для $T_1(\omega)$. Согласно (18.457), $T_1(\omega) = R_{\alpha\alpha}(\omega)$ (без суммирования по α), так что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_1(\omega) = \int_0^\infty 2\pi r dr \frac{P}{\pi} \left\{ \int_{-\mu}^{+\mu} \frac{d\omega' \operatorname{Im} R_{\alpha\alpha}(\omega', r)}{\omega' - \omega} + \right. \\ \left. + \left(\int_{-\infty}^{-\mu} + \int_{\mu}^{\infty} \right) d\omega' \frac{\operatorname{Im} R_{\alpha\alpha}(\omega', r)}{\omega' - \omega} \right\}. \quad (18.459) \end{aligned}$$

В представлении (18.445) для $R_{\alpha\alpha}(\omega, r)$ проинтегрируем по t , используя трансляционную инвариантность по времени. Замечая далее, что $|\langle p | j_\alpha(0) | n \rangle|^2$ — величина действительная, без труда получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} R_{\alpha\alpha}(\omega, r) = \pi \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} r}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} \sum_n \frac{\sin |p_n| r}{|p_n| r} \times \\ \times |\langle p | j_\alpha(0) | n \rangle|^2 \{ \delta(\omega + E_n - M) - \delta(\omega - E_n + M) \}, \quad (18.460) \end{aligned}$$

и, следовательно, $\operatorname{Im} R_{\alpha\alpha}$ — нечетная функция:

$$\operatorname{Im} R_{\alpha\alpha}(\omega, r) = -\operatorname{Im} R_{\alpha\alpha}(-\omega, r). \quad (18.461)$$

Разложение (18.460) записано в лабораторной системе ($\mathbf{p} = 0$, $p_0 = M$). Снова очевидно, что при $|\omega'| > \mu$ изменение порядка интегрирования по r и ω законно. При $|\omega| < \mu$ в сумму в формуле (18.460) вносят вклад только однонуклонные состояния $|n\rangle$ с импульсом $\mathbf{p}_N^2 = \omega(\omega + 2M)$. Состояние с одним нуклоном и n мезонами ($n = 1, 2, \dots$) вклада в этой области ($|\omega| < \mu$) не дают, поскольку для таких состояний должно иметь место $|E_n - M| > \mu$, что запрещается δ -функцией. (Здесь мы предположили, что у системы мезон — нуклон нет связанных состояний с массой, меньшей $M + \mu$.) Таким образом, при $|\omega| < \mu$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} R_{\alpha\alpha}(\omega) = \pi \frac{\sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} r}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} \frac{\sin |p_N| r}{|p_N| r} \sum_{p_N, \gamma} |\langle p | j_\alpha(0) | p_N, \gamma \rangle|^2 \times \\ \times \{ \delta(\omega + E_N - M) - \delta(\omega - E_N + M) \} \quad \text{при } |\omega| < \mu. \quad (18.462) \end{aligned}$$

Поэтому изменение порядка интегрирования по r и ω в формуле (18.459) априори не является законным. Здесь можно либо воспользоваться аргументами Лемана для оправдания изменения порядка интегрирования, либо рассмотреть (как мы уже поступали в настоящем параграфе раньше) амплитуду

$$R'_{\alpha\alpha}(\omega) = \left[\omega^2 - \left(\frac{\mu}{2M} \right)^2 \right] R_{\alpha\alpha}(\omega). \quad (18.463)$$

Из представления

$$\begin{aligned} \text{Im } T_1(\omega) &= \frac{1}{2} \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle p | [j_\alpha(x), j_\alpha(0)] | p \rangle = \\ &= \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_{|n\rangle} |\langle p | j_\alpha(0) | n \rangle|^2 \{ \delta^{(4)}(k+p-p_n) - \delta^{(4)}(k+p_n-p) \} \quad (18.464) \end{aligned}$$

следует, что в области $\mu > \omega \geq 0$ необходимо рассматривать только член со второй δ -функцией в скобках, причем, как отмечалось выше, вклад в сумму вносят только однонуклонные состояния $|N\rangle$. Выполняя интегрирование по p_N , находим, что в лабораторной системе величина $\text{Im } T_1(\omega)$ при $0 \leq \omega < \mu$ имеет следующую конструкцию:

$$\text{Im } T_1(\omega) = -\pi \sum_{\substack{\gamma = (\text{спин} \\ \text{изоспин})}} |\langle p | j_\alpha(0) | -k = e \sqrt{\omega^2 - \mu^2}, \gamma \rangle|^2 \delta(\omega + E_k - M), \quad |0 \leq \omega < \mu|, \quad (18.465)$$

где $| -k, \gamma \rangle$ — однонуклонное состояние с импульсом $-k$, энергией $E_k = \sqrt{k^2 + M^2} = \sqrt{M^2 - (\mu^2 - \omega^2)}$ и спиновым и изоспиновым квантовыми числами, конкретизируемыми заданием γ . Между прочим, отметим, что импульс нуклона k мнимый. Это показывает, что рассматриваемая область нефизическая. Множитель $\delta(\omega + \sqrt{\omega^2 - \mu^2 + M^2} - M)$ в формуле (18.465) можно переписать в виде $\frac{1}{M} \left(M - \frac{\mu^2}{2M} \right) \delta\left(\omega - \frac{\mu^2}{2M}\right)$. Подобным же образом в области $-\mu < \omega < 0$ вклад в мнимую часть $\text{Im } T_1(\omega)$ будет иметь вид $\delta\left(\omega + \frac{\mu^2}{2M}\right)$, помноженной на константу, причем, согласно (18.451а), она совпадает с константой, на которую умножалась функция $-\delta\left(\omega - \frac{\mu^2}{2M}\right)$ при вычислении $\text{Im } T_1(\omega)$ в области $\mu > \omega \geq 0$. Таким образом, для $\text{Im } T_1(\omega)$ в области $-\mu < \omega < \mu$ получается следующее представление:

$$\begin{aligned} \text{Im } T_1(\omega) &= -\pi \sum_{\gamma} |\langle p | j_\alpha(0) | k = e \sqrt{\omega^2 - \mu^2}, \gamma \rangle|^2 \times \\ &\times \left\{ \delta\left(\omega - \frac{\mu^2}{2M}\right) - \delta\left(\omega + \frac{\mu^2}{2M}\right) \right\}, \quad |-\mu < \omega < \mu|. \quad (18.466) \end{aligned}$$

Из этого представления ясно, что свойства аналитичности амплитуды $R'_{\alpha\alpha}(\omega)$, определяемой согласно (18.463):

$$T'_1(\omega) = R'_{\alpha\alpha}(\omega) = \left(\omega + \frac{\mu^2}{2M}\right) \left(\omega - \frac{\mu^2}{2M}\right) R_{\alpha\alpha}(\omega),$$

такие же, как и у функции $R_{\alpha\alpha}(\omega)$, с той лишь разницей, что она дополнительно обладает нужным свойством

$$\text{Im } T'_1(\omega) = 0 \quad \text{при } |\omega| < \mu. \quad (18.467)$$

Поскольку свойства функции $R'_{\alpha\alpha}(\omega)$ относительно замены $\omega \rightarrow -\omega$ такие же, как и у функции $R_{\alpha\alpha}(\omega)$, то сразу же приходим к выводу, что для функции $T'_1(\omega)$ справедливо (с точностью до вычитаний) следующее дисперсионное соотношение:

$$\text{Re } T'_1(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \frac{\omega' \text{Im } T'_1(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (18.468)$$

(поскольку в случае функции $T'_1(\omega)$ нет затруднений с изменением порядка интегрирования по r и ω). Функция $T_1(\omega)$, помимо тех особенностей, которыми обладает функция $T'_1(\omega)$ [согласно (18.468) и (18.451a)], у $T_1(\omega)$ имеются разрезy, идущие от $-\infty$ до $-\mu$ и от $+\mu$ до ∞], имеет еще простые полюсы в точках $\omega = \pm \frac{\mu^2}{2M}$. Таким образом, для функции $T_1(\omega)$ можно записать [в предположении, что $\omega T_1(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$] дисперсионное соотношение

$$\operatorname{Re} T_1(\omega) = \frac{a}{\omega - \frac{\mu^2}{2M}} + \frac{b}{\omega + \frac{\mu^2}{2M}} + \frac{2}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \frac{\omega' \operatorname{Im} T_1(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (18.469)$$

Константа a в (18.469) есть вычет в полюсе при $\omega = \mu^2/2M$ и, очевидно, равна

$$a = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\mu^2}{2M}} \left(\omega - \frac{\mu^2}{2M} \right) \operatorname{Re} T_1(\omega). \quad (18.470)$$

Аналогично,

$$b = \lim_{\omega \rightarrow -\frac{\mu^2}{2M}} \left(\omega + \frac{\mu^2}{2M} \right) \operatorname{Re} T_1(\omega). \quad (18.471)$$

Для вычисления этих констант мы возвратимся к выражению (18.442), определяющему амплитуду $T_1(\omega)$. Из него следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_1(\omega) &= +i \int d^4x e^{i\omega t - \mathbf{e} \cdot \mathbf{x} \sqrt{\omega^2 - \mu^2}} \varepsilon(\mathbf{x}) \langle p | [j_{\alpha}(\mathbf{x}), j_{\alpha}(0)] | p \rangle = \\ &= \frac{\sum_{\gamma} |\langle p | j_{\alpha}(0) | \mathbf{k} = \mathbf{e} \sqrt{\omega^2 - \mu^2}, \gamma \rangle|^2}{E_{\mathbf{k}} - M - \omega} - \frac{\sum_{\gamma} |\langle p | j_{\alpha}(0) | -\mathbf{k} = -\mathbf{e} \sqrt{\omega^2 - \mu^2}, \gamma \rangle|^2}{M - \omega - E_{\mathbf{k}}} + \dots, \end{aligned} \quad (18.472a)$$

где точки стоят вместо членов, возникающих за счет более высоких по массе промежуточных состояний ($M_n \gg M + \mu$). Эти состояния не могут давать вклад в полюсные члены при $|\omega| < \mu$.

С помощью представления (18.472a) и определений (18.470) и (18.471) находим

$$a = \frac{M - \frac{\mu^2}{2M}}{M} \sum_{\gamma} |\langle p | j_{\alpha}(0) | -\mathbf{k} = -\mathbf{e} \sqrt{\omega^2 - \mu^2}, \gamma \rangle|^2, \quad (18.472б)$$

$$b = -\frac{M - \frac{\mu^2}{2M}}{M} \sum_{\gamma} |\langle p | j_{\alpha}(0) | \mathbf{k} = \mathbf{e} \sqrt{\omega^2 - \mu^2}, \gamma \rangle|^2. \quad (18.472в)$$

Теперь из тензорных свойств величины $j_{\alpha}(0)$, а именно из того, что она является вектором в изотопическом пространстве и псевдоскаляром в пространстве-времени, следует, что матричный элемент $\langle p | j_{\alpha}(0) | p' \rangle$ между однонуклонными состояниями $|p\rangle$ и $|p'\rangle$ ($p^2 = p'^2 = M^2$) имеет следующую структуру:

$$\langle p | j_{\alpha}(0) | p' \rangle = i \sqrt{\frac{M^2}{E_p E_{p'}}} g \tilde{u}(p) \tau_{\alpha} \gamma_{5u}(p') K(p^2, p'^2, (p - p')^2), \quad (18.473)$$

где величина K связана с перенормированным вершинным оператором $\Gamma_5(p^2, p'^2, (p-p')^2)$, введенным в гл. 16:

$$K(p^2 = p'^2 = M^2, (p-p')^2) = [(p-p')^2 - \mu^2] \Delta_{F_1}(p-p') \Gamma_5(p^2 = p'^2 = M^2, (p-p')^2). \quad (18.474)$$

Поскольку в обсуждаемом случае $p = (M, 0)$, $p' = \{\sqrt{\omega^2 + M^2 - \mu^2}, \pm e\sqrt{\omega^2 - \mu^2}\}$, причем $\omega^2 = \left(\frac{\mu^2}{2M}\right)^2$, то

$$(p-p')^2 = (M - \sqrt{\omega^2 - \mu^2 + M^2})^2 - \omega^2 - \mu^2 \Big|_{\omega^2 = \left(\frac{\mu^2}{2M}\right)^2} = \mu^2. \quad (18.475)$$

Если величину K нормировать при помощи условия $K(M^2, M^2, \mu^2) = 1$, то g будет перенормированной константой связи Ватсона—Лепора. Далее,

$$\sum_{\gamma=(\delta, i)} \tilde{u}(p) \tau_\alpha \gamma_5 u^\delta(p') \tilde{u}^\delta(p') \tau_\alpha \gamma_5 u(p) \Big|_{p=(M, 0)} = \quad (18.476a)$$

$$= \tilde{u}(p) \gamma_5 \frac{\gamma \cdot p' + M}{2M} \gamma_5 u(p) \Big|_{p=(M, 0)} = \quad (18.476б)$$

$$= \frac{1}{2M} (p'_0 - M) = -\frac{\mu^2}{(2M)^2}, \quad (18.476в)$$

где волновые функции нуклонов $|i\rangle$ в пространстве изотопического спина не выписывались явно. При переходе от (18.476a) к (18.476б)

было учтено, что $\sum_{i=1}^2 |i\rangle \langle i| = 1$ и что $(\tau_\alpha)^2 = 1$. Собирая различные множители, получаем

$$a = -g^2 \left(\frac{\mu}{2M}\right)^2, \quad (18.477)$$

$$b = +g^2 \left(\frac{\mu}{2M}\right)^2. \quad (18.478)$$

В формулах (18.477) и (18.478) мы пренебрегли членами более высокого порядка по μ^2/M^2 . Этому выводу следует доверять с известной долей осторожности [например, формула (18.476) свидетельствует о том, что сумма $\sum | \cdot |^2$ есть отрицательная величина]. Тем не менее он приводит к тем же результатам, что и более строгий подход, при котором исследуются свойства аналитичности вершинной части $\Gamma_5(M^2, M^2, \zeta)$ как функции ζ (см. работу Оме и Тэйлора [596]). Подставляя значения (18.477) и (18.478) в соотношение (18.469), окончательно получаем

$$\text{Re } T_1(\omega) = \frac{f^2}{\omega + \frac{\mu^2}{2M}} - \frac{f^2}{\omega - \frac{\mu^2}{2M}} + \frac{2}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \omega' \frac{\text{Im } T_1(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}, \quad (18.479)$$

где $f^2 = g^2 \left(\frac{\mu}{2M}\right)^2$ — так называемая перенормированная константа псевдовекторной связи. Дисперсионные соотношения с одним вычитанием записываются в виде

$$\text{Re } T_1(\omega) - \text{Re } T_1(\mu) = \frac{1}{M} \frac{f^2 k^2}{\left(\omega^2 - \frac{\mu^2}{4M^2}\right) \left(1 - \frac{\mu^2}{4M^2}\right)} + \frac{2k^2}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \omega' \frac{\text{Im } T_1(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \mu^2)}. \quad (18.480)$$

Этот же метод может быть применен для вывода дисперсионного соотношения для амплитуды $T_2(\omega)$ с той лишь разницей, что в данном случае $T_2(\omega) = -T_2(-\omega)$. Дисперсионное соотношение теперь будет иметь вид

$$\operatorname{Re} T_2(\omega) = \frac{2\omega f^2}{\left(\omega + \frac{\mu^2}{2M}\right)\left(\omega - \frac{\mu^2}{2M}\right)} + \frac{2\omega}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} T_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (18.481)$$

Нужно отметить, что интеграл в соотношении (18.481) сходится лучше, и поэтому можно надеяться, что для обеспечения его сходимости вычитания не потребуются. Так или иначе, дисперсионное соотношение с одним вычитанием запишется в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_2(\omega) - \frac{\omega}{\mu} \operatorname{Re} T_2(\mu) &= \\ &= -\frac{2f^2\omega k^2}{\left(\omega^2 - \frac{\mu^2}{4M^2}\right)\left(1 - \frac{\mu^2}{4M^2}\right)} + \frac{2k^2\omega}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} T_2(\omega')}{(\omega'^2 - \mu^2)(\omega'^2 - \omega^2)}. \end{aligned} \quad (18.482)$$

Дисперсионные соотношения (с вычитанием) для амплитуд $T_+(\omega)$ и $T_-(\omega)$ можно получить, подставляя в (18.480) и (18.482) амплитуды $T_{1,2}(\omega)$, выраженные по формулам (18.452а) и (18.452б) через амплитуды $T_{\pm}(\omega)$. Если $\sigma_+(\omega)$ и $\sigma_-(\omega)$ — полные сечения всех процессов, которые могут идти при столкновении положительных и отрицательных π -мезонов с протонами, то тогда, согласно условию унитарности, при $\omega \geq \mu$

$$\sigma_{\pm}(\omega) = \frac{4\pi}{|k|} \operatorname{Im} T_{\pm}(\omega), \quad (18.483)$$

где $|k| = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$. Поэтому дисперсионные соотношения для амплитуд $T_{\pm}(\omega)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_+(\omega) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\mu}\right) D_+(\mu) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega}{\mu}\right) D_-(\mu) &= \\ &= 2 \frac{f^2}{\mu^2} \frac{k^2}{\omega - \frac{\mu^2}{2M}} + \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega'}{|k'|} \left\{ \frac{\sigma_+(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{\sigma_-(\omega')}{\omega' + \omega} \right\} \end{aligned} \quad (18.484)$$

и

$$\begin{aligned} D_-(\omega) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\mu}\right) D_-(\mu) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega}{\mu}\right) D_+(\mu) &= \\ &= -2 \frac{f^2}{\mu^2} \frac{k^2}{\omega + \frac{\mu^2}{2M}} + \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega'}{|k'|} \left\{ \frac{\sigma_-(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{\sigma_+(\omega')}{\omega' + \omega} \right\}, \end{aligned} \quad (18.485)$$

где мы пренебрегли членами порядка (μ^2/M^2) и приняли обычно применяемое в литературе обозначение

$$\operatorname{Re} T_{\pm}(\omega) = D_{\pm}(\omega). \quad (18.486)$$

Габер-Шайм [352] впервые применил дисперсионные соотношения (18.484) и (18.485) для определения значения константы f^2 и нашел, что $f^2 \sim 0,08$. Если рассматривать угол рассеяния θ как бесконечно малый, то метод, аналогичный применявшемуся выше, позволяет

получить дисперсионные соотношения для амплитуд рассеяния с переворачиванием спина¹⁾ [592, 593]. При помощи этих дисперсионных соотношений Девидон и Голдбергер [154] и Гильберт и Скритон [316] показали непригодность набора фаз Янга для рассеяния мезонов на нуклонах при низких энергиях.

Пушпи и Стангеллини [655] сравнили дисперсионные соотношения (18.484) и (18.485) прямо с экспериментальными данными по рассеянию π -мезонов на нуклонах. Основываясь на имевшихся в 1957 г. данных по рассеянию π -мезонов на нуклонах, они пришли к выводу, что между дисперсионными соотношениями для амплитуды рассеяния вперед и экспериментальными данными имеется очевидное расхождение. Однако позднее было показано, что некоторые из использованных ими экспериментальных данных не были достаточно точными и что, если использовать более точные данные, расхождение почти полностью исчезает (см., например, [705, 591]).

Померанчук [646] (см. также работу Амати, Фирца и Глезера [9]) показал, что из дисперсионных соотношений (18.484), (18.485) и из некоторых правдоподобных предположений относительно поведения полных сечений при очень высоких энергиях следует, что разность сечений для зарядово сопряженных частиц при одной и той же мишени стремится к нулю на бесконечности. Точнее говоря, Померанчук показал, что если для полных сечений $\sigma^+(E)$ и $\sigma^-(E)$ рассеяния π^+ - и π^- -мезонов с энергией E на протонах в лабораторной системе справедливо и

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \sigma^+(E) = \sigma^+(\infty) = \text{const}, \quad (18.487a)$$

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \sigma^-(E) = \sigma^-(\infty) = \text{const}, \quad (18.487b)$$

то

$$\sigma^+(\infty) = \sigma^-(\infty). \quad (18.488)$$

Наиболее полное обсуждение дисперсионных соотношений для рассеяния π -мезонов на нуклонах не вперед содержится в статье Чу, Голдбергера, Лоу и Намбу [124]. Они предположили, что вклад области больших энергий в дисперсионный интеграл мал, что существует резонанс в 3-3-состоянии, который вносит исчерпывающий вклад в дисперсионные интегралы, и что фазы S - и D -волн малы (меньше малой фазы P -волны). В этих предположениях Чу, Голдбергер, Лоу и Намбу показали, что из дисперсионных соотношений для рассеяния не вперед можно получить систему динамических уравнений, которые в пределе $M \rightarrow \infty$ сводятся к уравнениям Чу — Лоу для статической модели Чу.

¹⁾ Напомним, что на основании соображений инвариантности амплитуда рассеяния в системе центра масс должна иметь вид

$$R_{\beta\alpha}(\omega, \theta) = A_{\beta\alpha}(\omega, \theta) + iB_{\beta\alpha}(\omega, \theta) \sigma \cdot \mathbf{n},$$

где θ — угол рассеяния; $\cos \theta = \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{|\mathbf{k}_1| |\mathbf{k}_2|}$; \mathbf{n} — некоторый аксиальный вектор, что требуется для обеспечения инвариантности относительно пространственных отражений. Единственным аксиальным вектором, который можно построить, является вектор $[\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2]$, перпендикулярный плоскости рассеяния. Поэтому вектор $[\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2]$ и следует взять в качестве вектора \mathbf{n} . Если вектор \mathbf{k}_1 принят за ось z и за ось квантования для спина протона, то тогда произведение $\sigma \cdot \mathbf{n}$ содержит только матрицы σ_1 и σ_2 и, следовательно, переворачивает спин. Поэтому о $B_{\beta\alpha}$ говорят как об амплитуде рассеяния с переворачиванием спина.

Укажем, что член $\sigma \cdot [\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2] B_{\beta\alpha}(\omega, \theta)$ обращается в нуль для рассеяния вперед, т. е. когда $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$.

Тем не менее их попытка построить динамическую теорию рассеяния мезонов на нуклонах, основывающуюся на дисперсионных соотношениях по одной переменной, потерпела неудачу, так как они не смогли конкретизировать зависимость амплитуд рассеяния от передачи импульса. Однако Манделстам [531] обратил внимание на то, что в родственном процессе $\pi + \pi \rightarrow N + \bar{N}$ переменная передачи импульса Δ играет роль энергии, и структура матричного элемента в этом случае наводит на мысль о существовании дисперсионных соотношений также по Δ . Учитывая свойства аналитичности, которые выражаются этими дисперсионными соотношениями, Манделстам предложил [531—533] «двойные дисперсионные» соотношения для амплитуды рассеяния мезонов на нуклонах. Содержание двойных дисперсионных соотношений может быть выражено словами: амплитуда рассеяния π -мезонов на нуклонах является граничным значением функции двух комплексных переменных, которая регулярна всюду, за исключением разрезов вдоль определенных гиперплоскостей, содержащих куски действительных осей. Манделстам [531] надеялся, что это представление и его обобщения на многочастичные процессы вместе с условием унитарности заменят более обычные уравнения теории поля и позволят вычислять все наблюдаемые величины, выражая их через конечное число констант связи и масс без какого-либо специального введения лагранжиана [532, 533]. Превосходное изложение этой программы, а также введение в ее математическую формулировку читатель может найти в работах Чу [126, 128], а также Чу и Манделстама [127].

С целью иллюстрации представления Манделстама для двухчастичной амплитуды рассеяния рассмотрим процесс рассеяния с двумя входящими и двумя уходящими частицами. Припишем этим частицам 4-импульсы p_1, p_2, p_3 и p_4 , причем для удобства формально будем считать, что все они соответствуют входящим частицам. Таким образом, из числа этих импульсов два импульса, соответствующих уходящим частицам, будут отрицательными времени-подобными векторами ($p_0 \leq 0$), а два других, соответствующих входящим частицам, — положительными времени-подобными векторами ($p_0 \geq 0$). Закон сохранения энергии-импульса гласит:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0. \quad (18.489)$$

Импульсы p_i есть импульсы физических частиц, и поэтому

$$p_i^2 = m_i^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (18.490)$$

Вообще говоря, амплитуда $T(p_1, p_2, p_3, p_4)$ описывает различные процессы в зависимости от того, какие из переменных p_1, \dots, p_4 относятся к начальным частицам, а какие — к конечным. Если бы нам больше ничего не было известно, то эта амплитуда состояла бы из некоторого числа независимых функций, относящихся к различным процессам. Однако, как мы уже видели, причинность означает, что в действительности эти функции тесно связаны в том смысле, что они являются граничными значениями одной и той же аналитической функции комплексных переменных. Эту функцию мы также будем обозначать через $T(p_1, p_2, p_3, p_4)$.

Релятивистская инвариантность амплитуды станет явной, если рассматривать ее как функцию трех инвариантных кинематических переменных:

$$s_1 = (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2, \quad (18.491)$$

$$s_2 = (p_2 + p_4)^2 = (p_1 + p_3)^2, \quad (18.492)$$

$$s_3 = (p_3 + p_4)^2 = (p_1 + p_2)^2. \quad (18.493)$$

Каждая из этих переменных есть квадрат полной энергии в системе центра масс для некоторого частного выбора пар приходящих и уходящих частиц. Если, например, p_1 и p_2 есть импульсы приходящих, а p_3 и p_4 — уходящих частиц, то тогда s_3 — полная энергия в системе центра масс, s_1 и s_2 — квадраты передаваемых 4-импульсов. Эти переменные в силу ограничений (18.489) и (18.490) не независимы и связаны соотношением

$$s_1 + s_2 + s_3 = \sum_{i=1}^4 m_i^2. \quad (18.494)$$

Амплитуду рассеяния T можно теперь рассматривать как функцию двух из трех переменных s_1, s_2, s_3 . Тем не менее мы будем писать $T = T(s_1, s_2, s_3)$, считая, что третья переменная выражена через две другие с помощью соотношения (18.494).

Ранее мы отмечали, что амплитуда будет иметь особенности при физических, а также при нефизических значениях переменных s_1, s_2, s_3 .¹⁾ При разложении амплитуды по промежуточным состояниям эти особенности соответствуют возможным промежуточным состояниям. Вычеты в полюсах связаны с константами связи. Имеется следующее «правило», определяющее положение полюсов амплитуды рассеяния в случае, когда в начале и в конце имеется по две частицы: если две приходящие и две уходящие частицы можно «соединить» при помощи стабильной частицы с массой m_0 , то тогда существует полюс при $s = m_0^2$, где переменная s — квадрат полного 4-импульса для этого процесса. При этом подразумевается, что «соединение» возможно, когда начальное и конечное двухчастичные состояния имеют те же квантовые числа, что и одночастичное промежуточное состояние. Из предположения о стабильности промежуточной частицы следует, что хотя такие одночастичные полюсы и лежат на действительной оси, тем не менее они не могут находиться в физической области значений рассматриваемой переменной s . (В противном случае промежуточная частица могла бы распадаться на две частицы, которые составляют начальное или конечное состояние!) Так, амплитуда рассеяния π -мезонов на нуклонах $T(s_1, s_2, s_3)$ должна иметь вид

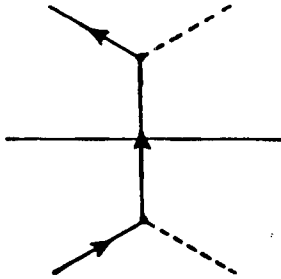
$$T(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{s_1 - M^2} \frac{1}{s_3 - M^2} T_1(s_1, s_2, s_3). \quad (18.495)$$

Это можно выяснить следующим образом. Для рассеяния π -мезонов на нуклонах $s_3 = (p_1 + p_2)^2$ есть квадрат начального 4-импульса. Возможное одночастичное промежуточное состояние показано на фиг. 151. Поэтому имеется полюс при $s_3 = M^2$. Отметим, что процесс $N + \bar{N} \rightarrow 2\pi$ описывается также и диаграммой фиг. 152. В этом случае квадратом начального 4-импульса является переменная $s_2 = (p_2 + p_4)^2$. Однако поскольку нет одночастичного промежуточного состояния, которое могло бы «соединить» начальное и конечное состояния, то нет и полюса по переменной s_2 . По переменной s_1 амплитуда снова имеет однонуклонный полюс при $s_1 = M^2$, соответствующий однонуклонному состоянию, соединяющему начальное и конечное состояния системы π -мезон—нуклон. Функция $T_1(s_1, s_2, s_3)$ в (18.495) при $s_1 = s_3 = M^2$ является регулярной.

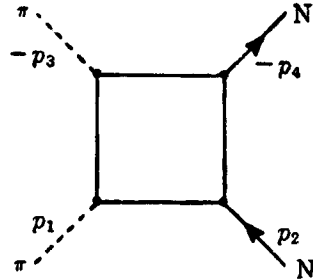
Ранее мы уже указывали, что амплитуда $T(s_1, s_2, s_3)$ подчиняется дисперсионному соотношению по переменной s_3 при фиксированном зна-

¹⁾ Фактически предмет теории дисперсионных соотношений можно определить как изучение природы и расположения особенностей амплитуды рассеяния.

чений переменной s_2 ($s_1 = \sum_{i=1}^4 m_i^2 - s_2 - s_3$). Аналогично, рассматривая процессы, в которых квадратом полным начального 4-импульса являются переменные s_1 или s_2 , можно высказать предположение, что для амплитуды T и по этим переменным s_1 и s_2 справедливы дисперсионные соотношения, хотя их и не смогли доказать [531]. Эти дисперсионные соотношения делают правдоподобной мысль, что амплитуда рассеяния как функция комплексных переменных s_1, s_2, s_3 аналитична по каждой переменной в плоскости с разрезом. Теперь возникает вопрос, каковы ее свойства аналитичности как функции одновременно двух переменных.



Ф и г. 151.



Ф и г. 152.

Манделстам [531] высказал предположение, что амплитуда рассеяния (с точностью до вычитаний, необходимых, если интегралы расходятся) может быть представлена следующим образом:

$$T(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{\pi^2} \int \int ds'_1 ds'_2 \frac{\rho_{12}(s'_1, s'_2)}{(s'_1 - s_1)(s'_2 - s_2)} + \frac{1}{\pi^2} \int \int ds'_1 ds'_3 \frac{\rho_{13}(s'_1, s'_3)}{(s'_1 - s_1)(s'_3 - s_3)} + \frac{1}{\pi^2} \int \int ds'_2 ds'_3 \frac{\rho_{32}(s'_2, s'_3)}{(s'_2 - s_2)(s'_3 - s_3)}, \quad (18.496)$$

где весовые функции ρ_{ij} являются действительными, и интегрирование по каждой переменной s' проводится вдоль положительной действительной полуоси и распространяется до бесконечности. Говоря точнее, функции ρ_{ij} отличны от нуля только тогда, когда каждый аргумент равен квадрату массы реальной физической системы, которая имеет те же квантовые числа, что и соответствующий канал. Представление также учитывает то, что можно назвать обобщенными соотношениями «перекрестной симметрии», которые являются обобщением соотношений типа (18.350).

Представление Манделстама явилось обобщением представления, предложенного Намбу [571], исходя из теории возмущений. Однако представление Намбу оказалось неправильным, так как оно противоречило унитарности. Представление Манделстама лишено этих недостатков. Более того, Иден [213—215] доказал, что представление Манделстама для амплитуды рассеяния верно в каждом порядке теории возмущений. (Доказательство применимо для любой системы, у которой нет так называемых «аномальных порогов» [429, 430]¹⁾.) Перечислим некоторые следствия и возможности представления Манделстама:

1. Дисперсионные соотношения по энергетической переменной справедливы при любых значениях передачи импульса.

¹⁾ См. наше примечание на стр. 736. — *Прим. ред.*

2. Абсорбционные части амплитуды рассеяния удовлетворяют дисперсионным соотношениям по передаче импульса при фиксированной энергии, т. е. $\text{Im}T$ есть аналитическая функция передачи импульса всюду, за исключением разрывов вдоль действительной оси.

3. Можно вывести дисперсионные соотношения для фиксированного угла рассеяния, или, точнее, для фиксированного значения $\cos \theta$ [136].

4. Можно выяснить свойства аналитичности парциальных амплитуд (см., например, [521]).

Чу и Манделстам предложили сделать представление основной динамической теории сильных взаимодействий. Практически же они использовали представление совместно с двухчастичной аппроксимацией условия унитарности. Обзор работ этого направления читатель найдет в Трудах Рочестерской конференции по физике высоких энергий 1960 г.

Этими краткими замечаниями по поводу представления Манделстама мы окончим наше изложение теории дисперсионных соотношений. Дальнейшие подробности, касающиеся представления Манделстама, его приложений и условий применимости, содержатся в превосходных обзорных статьях Чу [126, 128], Чу и Манделстама [127] и Газиоровича [297]. Полный обзор теории дисперсионных соотношений можно найти у Голдбергера и Оме [328] (см. также лекции Голдбергера [327]).

§ 5. Перспективы

Мы завершили наше изложение современной теории поля. Несмотря на все трудности и ограничения, несомненно, что из нее вырисовывается некая «истина». Более того, современная теория в некотором смысле должна рассматриваться как грубое приближение к правильному физическому описанию взаимодействий «элементарных» частиц. Ведь успех квантовой электродинамики не может быть случайным, так же как и то, что одна и та же константа связи способна объяснить три низких энергии и взаимодействие π -мезонов с нуклонами и взаимодействие нуклонов с нуклонами.

Безусловно заманчиво пометать о том, какой будет будущая формулировка теории поля, и исследовать возможную связь ее с дисперсионным подходом, основывающимся на аксиоматической формулировке. Станем на оптимистическую точку зрения и поверим, что программа Манделстама осуществима. Предположим, что для всех амплитуд можно получить спектральные представления, которые выражают их аналитические свойства как функций основных кинематических инвариантов, и что эти амплитуды удовлетворяют обобщенным дисперсионным соотношениям и соотношениям перекрестной симметрии (см., например, [586]). Предположим, кроме того, что эти дисперсионные соотношения вместе с условием унитарности в самом деле могут заменить обычные уравнения теории поля и могут быть использованы для вычисления всех наблюдаемых величин и выражения их через конечное число констант связи и масс [310]. Тогда вполне возможно [532, 533, 127], что наблюдаемые следствия такой теории будут совпадать с теми, которые выводятся из локальной, перенормируемой теории поля в рамках лагранжева подхода. Это правдоподобно, так как хотя дисперсионные соотношения и основываются только на общих принципах квантовой теории поля и при этом не делается никаких предположений относительно лагранжиана, кроме предположений о локальности и лоренц-инвариантности, однако требование перенормируемости, которое можно рассматривать как некое условие самосогласованности

теории, фактически конкретизирует вид лагранжиана с точностью до небольшого числа констант связи.

Тем не менее даже успешное осуществление этой программы, по-видимому, оставило бы необъясненным наблюдаемый спектр масс «фундаментальных» частиц, а также симметрии и силу взаимодействий между ними, которые наблюдаются экспериментально.

Несомненно, что в будущем дальнейшие усилия будут направлены на попытки установить критерий, отличающий «элементарные» частицы от связанных состояний, и выяснить, не являются ли некоторые из гиперонов «связанными состояниями» других элементарных частиц. Вероятно, окажется необходимым в этом плане прояснить связь между «условием микропричинности» (равенство нулю коммутаторов полевых «наблюдаемых», когда пространственно-временные точки разделены пространственно-подобным интервалом) и реальными процессами измерений.

Можно надеяться, что окончательному решению загадки элементарных частиц и их взаимодействий поможет новая информация, которая будет получена на вводимых в ближайшие годы ускорителях на большие энергии и со встречными пучками. Не исключена возможность, что, в частности, удастся выяснить, правильны ли сами понятия пространства и времени, на которых основывается современная теория поля.

Вопросы и литература для дальнейшего изучения

Глава I

1. Принцип суперпозиции гласит, что каждая линейная комбинация состояний системы снова является некоторым состоянием системы.

а) Подробно обсудить это допущение в рамках нерелятивистской квантовой механики, уделяя особое внимание возможностям экспериментального приготовления суперпозиции состояний.

б) Пусть даны два состояния атома водорода $|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_2\rangle$. Можете ли Вы придумать экспериментальные условия, при которых осуществилось бы состояние $\alpha|\Psi_1\rangle + \beta|\Psi_2\rangle$?

2. Фейнман [250] выдвинул формулировку квантовой механики, в которой в явной форме выражена идея, что квантовая теория в основном описывает *процессы*. В ней дается правило для вычисления амплитуды вероятности a заданного процесса посредством «интегрирования по путям», причем вероятность процесса равна $|a|^2$.

а) Показать, что можно провести соответствие между этой формулировкой квантовой механики и обычной формулировкой на языке векторов в гильбертовом пространстве.

б) Продумать, является ли формулировка Фейнмана более общей, чем обычная, и насколько на самом деле необходимо соответствие между ними.

в) Опираясь на формулировку Фейнмана, ответить на вопросы: как могла бы измениться нерелятивистская квантовая механика, если бы измерения интервалов времени, меньших Δt , были невозможны и если бы измерения событий, разделенных пространственными расстояниями, меньшими $|\Delta l|$, были бы невозможны? Какие ограничения налагает галилеева инвариантность на такую формулировку?

3. Пусть операторы T , N и S подчиняются перестановочным соотношениям

$$[T_i, T_m] = i\epsilon_{lmk} T_k,$$

$$[N, T] = [N, S] = [S, T] = 0.$$

Найти для этой алгебры нетривиальное представление наименьшей размерности. Можете ли Вы указать и другие представления обсуждаемой алгебры? Помимо книг, отмеченных в тексте, о применениях теории групп в квантовой механике см., например, книгу Хейне [361].

В настоящее время готовится к изданию книга Баргмана, Вигнера и Уайтмана о релятивистской инвариантности в квантовой механике. Ее содержание кратко изложено в статье Уайтмана [855].

Обзор литературы по принципам симметрии и элементарным частицам дан Мелвином [548] и Романом [670].

Глава 2

1. Показать, что знак скалярного произведения для двух вещественных времени-подобных 4-векторов $x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ определяется знаком произведения их временных компонент $x_0 y_0$.

2. а) Показать, что если $v^\mu w_\mu = 0$ и $v^2 > 0$, то $w^2 < 0$.

б) Показать, что если $v^\mu w_\mu = 0$ и $v^2 = 0$, то вектор w либо пространственно-подобен, либо параллелен вектору v , т. е. либо $w^2 < 0$, либо $w = cv$, где $c = \text{const}$.

3. Показать, что если четыре вектора $v_\mu^{(1)}, v_\mu^{(2)}, v_\mu^{(3)}$ и $v_\mu^{(4)}$ попарно ортогональны и линейно независимы, то один из них времени-подобный, а три — пространственно-подобные.

4. Рассмотрите собственные функции и собственные значения преобразования Лоренца Λ .

5. Обратите внимание, что если с координатами пространственно-временной точки x_μ связать матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

то $\det X = D(X)$ имеет величину $D(X) = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$.

а) Пусть матрица

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

с комплексными элементами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ имеет определитель, равный единице, и пусть

$$W^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix}$$

есть эрмитова сопряженная ей матрица. Доказать, что соотношение

$$X' = W X W^*$$

определяет собственное преобразование Лоренца $x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu$ [т. е. доказать, что $\det \Lambda = +1$, $\Lambda_0^0 \geq 1$, все матричные элементы $\Lambda_{\mu\nu}$ — вещественные числа и $D(X) = D(X')$].

б) Рассмотрите преобразования, порождаемые матрицами W вида

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\det W = 1,$$

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\det W = 1.$$

6. Пусть $x_1 \dots x_n$ и $y_1 \dots y_n$ — такие две системы вещественных 4-векторов, что

а) $x_i \cdot x_j = y_i \cdot y_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$);

б) каждый из векторов x_i и y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) лежит в переднем световом конусе или на нем;

в) если все векторы x_i изотропны, то они не все коллинеарны.

Доказать, что тогда существует такое преобразование Лоренца Λ , $\Lambda \in L_\uparrow$, при котором

$$\Lambda x_i = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

7. Подробно продумайте свойства, которые имели бы:

а) частицы с отрицательной массой и отрицательной энергией;

б) частицы с положительной массой, но пространственно-подобными импульсами, если бы такие частицы существовали.

Об интересном отступлении от обычного соответствия между неприводимыми представлениями и элементарными частицами, при котором принимается во внимание существование античастиц для каждой из частиц, см. статью Экстейна [219].

Глава 3

1. Получить явное представление волновой функции Ньютона—Вигнера в конфигурационном пространстве для частицы с нулевым спином, локализованной в момент времени y_0 вблизи точки y ;

2. а) Вычислить вероятность обнаружения частицы Клейна—Гордона в точке y в момент времени y_0 , если известно, что в момент времени $t=0$ она была локализована в начале координат. Получить явные выражения для случая $|y| \gg y_0$ и для случая $|y| < y_0$.

б) Обсудить полученный для случая $|y| \gg y_0$ результат в свете релятивистского принципа причинности, который утверждает, что ни один сигнал не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света.

3. а) Получить решения уравнения Клейна—Гордона в однородном постоянном внешнем электромагнитном поле, тензор $F_{\mu\nu}$ которого имеет только одну отличную от нуля компоненту.

б) По возможности полнее обсудить решения «квадратного» уравнения для этих случаев.

Глава 4

1. а) Показать, что матрицы Дирака $i\gamma^\mu$, удовлетворяющие соотношению $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}$, могут быть выбраны так, чтобы каждая из матриц $i\gamma^\mu$ ($\mu=0, 1, 2, 3$) была вещественной (представление Майорана [527]).

б) Получить явное представление этих матриц.

в) Матрицы

$$\gamma'^\mu = (a - ib\gamma_5) \gamma^\mu,$$

где

$$a^2 - b^2 = 1,$$

подчиняются перестановочным соотношениям $[\gamma'^\mu, \gamma'^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}$. Получить явное представление преобразования подобия S , которое связывает матрицы γ'^μ и γ^μ :

$$\gamma'^\mu = S^{-1} \gamma^\mu S.$$

2. а) Показать, что решения уравнения Дирака с положительной энергией, нормированные согласно $\bar{u}u = 1$, могут быть записаны в виде

$$u = \sqrt{\frac{E+M}{2M}} \left[1 - \frac{\gamma_0 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{E+M} \right] u_0,$$

где u_0 — это либо $\begin{pmatrix} \alpha_+ \\ 0 \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} \beta_- \\ 0 \end{pmatrix}$, причем α_+ и β_- — обычные двухкомпонентные спиноры Паули, соответствующие проекции спина $+1/2$ и $-1/2$.

б) Найти в явном виде средние значения операторов $O_i = \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5$ в состояниях $u^s(p)$ и $v^s(p)$ (т. е. вычислить величины $\bar{u}^s O_i u^s$ и $\bar{v}^s O_i v^s$). Проанализировать полученные ответы для того случая, когда $\mathbf{p} = (0, 0, p)$.

3. Получить в явном виде представления для матричных элементов операторов $O_i = \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5$ между спинорами $u^s(p_2)$ и $u^r(p_1)$. Подробно проанализировать случай, когда

$$p_1 = (E, 0, 0, p),$$

$$p_2 = (E, 0, 0, -p),$$

т. е. вычислить величину $\tilde{u}^s(p_2) O_i u^r(p_1)$.

4. В некоторой лоренцевой системе отсчета электрон претерпевает рассеяние из состояния с импульсом p_1 в состояние с импульсом p_2 . Показать, что существует такая лоренцева система отсчета, в которой это рассеяние сводится только к обращению направления движения.

5. а) Вычислить следы:

$$\text{Sp} \{ \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5 \},$$

$$\text{Sp} \{ \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^5 \},$$

$$\text{Sp} \{ \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\epsilon \gamma^5 \}.$$

б) Доказать, что

$$\text{Sp} \{ a_1 a_2 \dots a_n \} = 4 \sum_p \delta_p (a_{p_1} \cdot a_{p_2}) (a_{p_3} \cdot a_{p_4}) \dots (a_{p_{n-1}} \cdot a_{p_n}),$$

где суммирование распространяется на все возможные способы объединения векторов в пары с ограничением, что $p_1 < p_2, p_3 < p_4, \dots$, причем $\delta_p = \pm 1$, в зависимости от того, является ли $(p_1 p_2 \dots p_n)$ четной или нечетной перестановкой чисел $(1 2 3 \dots n)$. Показать, что имеется $(2m)!/2^m m!$ членов ($n = 2m$).

6. Большие и малые компоненты решения уравнения Дирака $(\not{p} - m)\psi = V\psi$ определяются как $\psi_\pm = 1/2 (1 \pm \gamma_0)\psi$. (Выбрано такое представление, в котором матрица $\gamma_0 = \beta$ диагональна.)

а) Найти уравнение для ψ_+ и показать, что когда кинетическая энергия частицы T ($p_0 = m + T$) мала, $T \ll m$, то ψ_+ сводится к нерелятивистской шредингеровской волновой функции. (Отметим, однако, что «гамильтониан» в точном уравнении для ψ_+ не обязательно эрмитов. Почему?)

б) Получить перерелятивистский предел уравнения, которому удовлетворяет волновая функция ψ_+ для следующих случаев:

$$(1) V = \gamma_\mu A^\mu; \quad (2) V = \gamma_5 U; \quad (3) V = i\gamma_5 \gamma_\mu U^\mu;$$

$$(4) V = \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}; \quad (5) V = \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}; \quad (6) V = i\gamma_5 \gamma_\mu \partial^\mu U.$$

7. а) Получить решения уравнения Дирака для электрона в кулоновском поле, используя, что оператор $\mathbf{J} = \mathbf{L} + 1/2 \Sigma$ и оператор пространственного отражения $P = \beta R$ (R — оператор, который изменяет знак пространственных координат x_1, x_2, x_3) являются интегралами движения.

б) Обсудить связь между операторами $K = \beta(\Sigma \cdot \mathbf{L} + 1)$ и P .

в) Классифицировать состояния, используя операторы \mathbf{J}^2, J_3 и K .

г) Подробно рассмотреть $S_{1/2}, P_{1/2}, P_{3/2}$ - и $D_{3/2}$ -состояния и выразить для них в явном виде дираковские спиноры.

8. Найти решения уравнения Дирака в

а) однородном не зависящем от времени электрическом поле;

б) однородном не зависящем от времени магнитном поле. Показать, что в этом случае существуют состояния с энергией $E = m$.

9. Найти операторы проектирования, выделяющие состояния с определенными спиральностью и импульсом, в случае уравнения Дирака для свободной частицы.

О релятивистском описании поляризации частицы со спином $1/2$ см. статьи Мишеля [551] и Бушиа [80].

10. Получить представления матриц γ_5 , γ^μ , $\sigma^{\mu\nu}$, $\gamma_5\gamma^\mu$ и $\Sigma \cdot p$ в представлениях Фолди—Вотхойзена и Чини—Тушека.

11. В связи с тем, что внешнее поле выделяет некоторую лоренцеву систему отсчета, обсудить смысл понятия «релятивистская инвариантность» в применении к уравнению Дирака во внешнем поле. (См. статьи Эддингтона [205, 206] и Дирака, Найерлса и Прайса [175].)

Глава 5

Относительно разных формулировок теории двухкомпонентного нейтрино см. статьи Кейза [113], Мак-Леннана [525] и Тейса [773].

1. В данной лоренцевой системе отсчета L можно описывать фотон, летящий в направлении оси z и поляризованный вдоль оси x , при помощи 4-потенциала:

$$A_\mu(x) = \varepsilon_\mu^{(1)} e^{-ik_\mu x^\mu},$$

$$k_\mu \varepsilon^{\mu(1)} = 0,$$

причем

$$\varepsilon^{\mu(1)} = (0, 1, 0, 0),$$

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega).$$

Указать описание этого фотона с точки зрения наблюдателя, движущегося вдоль оси x со скоростью v относительно системы отсчета L .

Глава 6

1. Рассмотреть операторы a_k , a_k^* , которые подчиняются перестановочным соотношениям

$$[a_k a_k^*] = \delta_{kk'},$$

$$[a_k^*, a_{k'}^*] = [a_k, a_{k'}] = 0,$$

и ввести систему операторов

$$b_k = \text{ch } \lambda a_k + \text{sh } \lambda a_k^*,$$

$$b_k^* = \text{sh } \lambda a_k + \text{ch } \lambda a_k^*.$$

а) Найти перестановочные соотношения для операторов b .

б) Показать, что если система операторов a_k конечна (т. е. $k=1, 2, \dots, n$), то существует такое унитарное преобразование

$$V_{(n)} = e^{iT_{(n)}},$$

что

$$V_{(n)} a_k V_{(n)}^* = b_k.$$

Выразить в явном виде операторы $T_{(n)}$ через операторы a .

в) Доказать, что в пределе $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Psi | V_{(n)} | \Phi) \rightarrow 0,$$

где $|\Psi\rangle$ и $|\Phi\rangle$ — любые состояния вида $\Pi a_i^* |0\rangle$.

2. Рассмотреть вторично-квантованную формулировку теории бесспиновых нерелятивистских частиц, взаимодействующих попарно, причем потенциал взаимодействия $V = V(|x-y|)$ убывает быстрее, чем $\frac{1}{r}$ ($r = |x-y|$).

Пусть $f_\alpha(x, t)$ — нормируемое (типа волнового пакета) решение уравнения Шредингера

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) f_\alpha(x, t) = 0.$$

Построим оператор

$$\Psi_\alpha^*(t) = \int d^3x f_\alpha(x, t) \Psi^*(x, t).$$

а) Доказать, что состояние

$$|\alpha\rangle = \Psi_\alpha^*(t) |0\rangle$$

не зависит от времени и, кроме того, что, если система $\{f_\alpha(x, t)\}$ ортонормирована, то

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

б) Допустим, что потенциал V может привести к образованию связанных двухчастичных систем. Обозначим шредингеровские волновые функции этих связанных двухчастичных состояний через $\Phi_b(x_1, x_2, t)$. Найти уравнение движения для двухчастичного оператора

$$\Psi_b^{B*}(t) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \int d^3x \int d^3y \Phi(x, y, t) \Psi^*(x, t) \Psi^*(y, t).$$

в) Доказать, что состояние $|b\rangle = \Psi_b^{B*}(t) |0\rangle$ не зависит от времени.

г) Доказать, что если потенциал имеет предположенное выше асимптотическое поведение, то существуют пределы операторов

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Psi_\alpha^*(t) = \Psi_{\alpha \text{ in}, \text{out}}^*$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Psi_b^{B*}(t) = \Psi_{b \text{ in}, \text{out}}^{B*}$$

д) Вычислить

$$(1) \quad \langle 0 | \Psi_{\alpha \text{ out}} \Psi_{\beta \text{ in}}^* | 0 \rangle,$$

$$(2) \quad \langle 0 | \Psi_{\alpha \text{ out}} \Psi_{\beta \text{ out}} \Psi_b^{B*} | 0 \rangle.$$

Теория взаимодействующих нерелятивистских частиц за последние годы усиленно разрабатывалась и в ней были достигнуты значительные успехи. В [166], а также в записках Летней школы в Брандейсе за 1959 г. читатель может найти хорошее введение во многие вопросы этой теории. Более формальный подход к этим вопросам можно найти в статье Мартина и Швингера [535].

Главы 7 и 8

1. Проверить, что оператор момента количества движения для скалярного поля определяется формулой

$$M = -\frac{1}{2} \int d^3x [\pi(x, t), [x \times \nabla] \varphi(x, t)]_+$$

и что он удовлетворяет перестановочным соотношениям

$$[M_l, M_j] = i\epsilon_{ljk} M_m.$$

Обсуждение свойств системы из N мезонов можно найти в статье Пайса [616].

2. Получить оператор момента количества движения для дираковского поля. Найти его собственные значения для одночастичного состояния, импульс которого равен нулю.

3. а) Найти явные представления операторов $U(i_s)$, $U(i_t)$ и U_c для квантованных теорий поля частиц со спином $1/2$.

б) Рассмотреть трансформационные свойства дираковского оператора $\psi(x)$ при преобразовании U_c , используя майорановское представление γ -матриц.

4. Исследовать двухкомпонентную теорию нейтрино в импульсном представлении в пространстве Фока [773].

5. Рассмотреть в конфигурационном пространстве (пространстве Фока) систему нуклонов со спином $1/2$, описываемых операторами $\psi_\tau(x)$ (τ —индекс изотопического спина).

Формулировка теории поля, в которой используется принцип Фейнмана [250], описана, например, в статьях Полкингхорна [645] и Мэтьюза и Салама [546].

Глава 9

1. Найти оператор момента количества движения для фотонного поля и рассмотреть его собственные значения в однофотонном состоянии.

2. Обсудить свойства двухфотонных состояний при преобразованиях T , C , P и CPT .

О формулировке квантованной теории электромагнитного поля в кулоновской калибровке см., например, статьи Швингера [718, 719], Валатина [798] и Озаки [607].

Изложение квантованной теории поля частиц со спином 1 можно найти у Паули [629] и Вентцеля [836].

Глава 10

О возможной связи между сильными и слабыми взаимодействиями см. статью Гелл-Манна и Леви [315].

О теории сильных взаимодействий, основанной на идеологии Янга—Миллса, см. интересную статью Сакураи [687] ¹).

Глава 11

1. Распространить формализм Липпмана—Швингера и формализм общей теории рассеяния на случай, когда гамильтониан H_0 имеет связанные состояния.

2. Доказать, что при рассеянии нерелятивистской частицы на потенциале V

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi} T_{kn, k},$$

где единичный вектор $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ характеризует направление, под которым производится наблюдение.

3. Показывать, что вследствие унитарности S -матрицы приведенная S -матрица s , определяемая согласно

$$(E_b, \gamma_b | S | E_a, \gamma_a) = \delta(E_a - E_b) s_{\gamma_b \gamma_a}(E_a) = \delta(E_a - E_b) (\gamma_b | s(E_a) | \gamma_a),$$

может быть преобразована к диагональной форме. Обозначая через Γ наблюдаемые в соответствующем представлении, определим δ_Γ соотношением

$$(\Gamma' | s | \Gamma) = e^{2i\delta_\Gamma} \delta_{\Gamma\Gamma'}.$$

а) Показать, что тогда приведенная R -матрица будет иметь вид

$$(\Gamma' | t | \Gamma) = -\frac{1}{\pi} e^{i\delta_\Gamma} \sin \delta_\Gamma \delta_{\Gamma\Gamma'}.$$

¹) О правильной интерпретации теорий Янга—Миллса как теорий, предназначенных для описания частиц со спином 1 в реальных и виртуальных состояниях, см. в [915].—Прим. ред.

б) Доказать, что для рассеяния бесспиновой нерелятивистской частицы на сферически симметричном потенциале V величины δ_l являются фазами. Доказать, что фазы зависят только от асимптотических свойств $\psi_{klm}^+(r) = \langle rlm | \psi_{\mathbf{k}}^+ \rangle$. При доказательстве сначала следует убедиться, что

$$-\frac{1}{\pi} e^{i\delta_l} \sin \delta_l = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\hbar}{2m} r^2 \left\{ \overline{\varphi_{klm}(r)} \frac{\partial \psi_{klm}^+(r)}{\partial r} - \frac{\partial \overline{\varphi_{klm}(r)}}{\partial r} \psi_{klm}^+(r) \right\}.$$

4. Доказать, что если $\delta(p)$ есть фаза рассеяния для заданного момента количества движения, а m и m_0 — числа связанных состояния гамильтонианов H и H_0 для тех же моментов количества движения, то (см. [393])

$$\delta(\infty) - \delta(0) = (m_0 - m) \pi.$$

5. Доказать, что

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t-t') \exp[-i(E_a - E_b)t'] dt' = \exp[-i(E_a - E_b)t] P \frac{i}{E_a - E_b},$$

где $\varepsilon(t) = t/|t|$. (Обзор теории рассеяния см. в статьях Глаубера [321] и Вренига и Хаага [85].)

Глава 12

1. Показать, что в нейтральной скалярной теории вероятность найти вблизи нуклона n (виртуальных) мезонов дается распределением Пуассона

$$p_n = \int d^3k_1 \dots \int d^3k_n |\langle k_1, \dots, k_n | \Psi_{(1)} \rangle|^2.$$

Показать, что в пределе точечного нуклона вероятность p_n равна нулю.

2. Вычислить среднее значение оператора мезонного поля в физическом одно-нуклонном состоянии в случае нейтральной скалярной теории.

3. Получить гейзенберговские уравнения движения для операторов поля в модели нейтрального скалярного поля. Вычислить вакуумное среднее значение произведения гейзенберговских операторов $\psi(\mathbf{p}, t)$ и $\psi^*(\mathbf{p}', t')$:

$$\langle 0 | \psi(\mathbf{p}, t) \psi^*(\mathbf{p}', t') | 0 \rangle = G(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t - t') \quad \text{для } t > t'.$$

Рассмотреть аналитические свойства фурье-образа по $t-t'$ функции G в комплексной ω -плоскости. Аналогичным образом вычислить и обсудить

$$\langle 0 | \varphi(\mathbf{k}, t) \varphi(\mathbf{k}', t') | 0 \rangle = \mathcal{G}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t - t').$$

4. Вычислить результат действия $U_\alpha(0, -\infty)$ на двухнуклонное состояние $\psi^*(\mathbf{p}_1) \psi^*(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle$ в нейтральной скалярной теории.

5. а) Показать, что перенормированный гейзенберговский оператор нуклонного поля в скалярной модели

$$\psi_R(t) = \sqrt{Z} \psi(t)$$

имеет конечные матричные элементы между физическими состояниями (т. е. собственными состояниями гамильтониана H) даже в пределе $v(\mathbf{k}^2) \rightarrow 1$ при всех \mathbf{k} .

б) Показать, что в пределе точечного источника $\psi_R^*(t) (t \neq 0)$ при действии на вакуумное состояние не приводит к вектору в гильбертовом пространстве.

в) Вычислить $\|\psi_R^*(t) \Psi\|^2$ и $\|\psi_R(t) \Psi\|^2$, где $|\Psi\rangle$ — произвольное состояние. Показать, что одна из этих двух величин пропорциональна Z^{-1} и поэтому становится бесконечной в пределе $f \rightarrow 1$.

6. По возможности полнее рассмотреть модель Ли, в которой θ -частица имеет только одну степень свободы и гамильтониан которой имеет вид

$$H_0 = (m_V + \delta m) V^* V + m_N N^* N + \mu \theta^* \theta,$$

$$H_I = g (V^* N \theta + N^* V \theta^*),$$

а перестановочные соотношения для операторов суть

$$[V^*, V]_+ = [N^*, N]_+ = [\theta, \theta^*] = 1,$$

$$[\theta, \theta] = [V, N]_+ = [N, V]_+ = \dots [V^*, N^*]_+ = 0.$$

7. Рассмотреть модель Ли для одиночных V- и N-частиц

$$H = m_V V^* V + m_N N^* N + \int d^3k \omega_k a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + g_0 \int (V^* N a(\mathbf{k}) + N^* V a^*(\mathbf{k})) f(\mathbf{k}) d^3k.$$

Показать, что взаимодействие V- и N-частиц с θ -частицами осуществляется только в состояниях с нулевым моментом количества движения. Записать гамильтониан через операторы рождения и уничтожения мезонов в состоянии с $l=0$.

8. Амплитуду $\Phi_{p', k'}(\mathbf{k}; \mathbf{p}) = \langle 0 | a_{\mathbf{k}} N(\mathbf{p}) | p', k' \rangle_+$ можно рассматривать как волновую функцию N- θ системы, подвергающейся рассеянию. Исследуя матричный элемент $\langle 0 | [H, a_{\mathbf{k}} N(\mathbf{p})] | p', k' \rangle_+$, получить уравнение движения для этой амплитуды. Решить этим способом задачу рассеяния.

9. Рассмотрим гамильтониан

$$H = \int d^3k \omega_k (a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}) - g \int d^3k f(\mathbf{k}) [(a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^*) \tau_+ + (a_{\mathbf{k}}^* + b_{\mathbf{k}}) \tau_-],$$

соответствующий взаимодействию заряженных скалярных мезонов с бесконечно тяжелым нуклоном.

а) Получить уравнения, которым удовлетворяют амплитуды в пространстве Фока

$$\langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m | \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \langle 0 | a_{\mathbf{k}_1} \dots a_{\mathbf{k}_n} b_{\mathbf{q}_1} \dots b_{\mathbf{q}_m} | \rangle.$$

если $| \rangle$ представляет:

- 1) состояние физического нуклона $| t \rangle_+$;
 - 2) состояние рассеяния системы мезон—нуклон $| \mathbf{k}; t \rangle_+$ или $| \mathbf{q}; t \rangle_+$.
- Сразу же напрашиваются следующие два приближенных метода:

I. Предположить, что $\langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m | \rangle$ может быть аппроксимировано выражением

$$\langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m | \rangle = c_{nm} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \varphi(\mathbf{k}_i) \psi(\mathbf{q}_j) \quad (n, m=0, 1, 2, \dots),$$

где функции φ и ψ заданные. Затем определить коэффициенты c_{nm} так, чтобы они минимизировали среднее значение гамильтониана. Этот метод известен как метод промежуточной связи Томонага (см. Progr. Theor. Phys., Suppl. No. 2).

II. Предположить, что существенны только амплитуды

$$\langle \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n | \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m | \rangle \quad \text{с } n \leq N \text{ и } m \leq M,$$

а амплитуды с $n > N$ и $m > M$ положить равными нулю. Этот метод известен как метод Тамма—Данкова (см., например, работу Бете [54] и обзор Силина и Файнберга [731]).

б) Дать формулировку этих приближенных методов для модели Чу.

в) Показать, что метод Томонаги в общем случае равносильно предположению, что занято только несколько одномезонных состояний, но в этих состояниях может находиться произвольное число мезонов. Показать, что это приближение может

быть сделано непосредственно в гамильтониане путем определения новых операторов

$$A_{il}^* = \int d^3ka_i^*(\mathbf{k}) \varphi_l(\mathbf{k}),$$

где индекс i относится к квантовому числу заряда, а $\varphi_l(\mathbf{k})$ соответствуют волновым функциям тех одночастичных состояний, которые предполагаются занятыми [528].

г) Получить уравнения для c_{nm} в случае заряженной скалярной теории.

д) Решить в модели Чу задачу мезон-нуклонного рассеяния в приближении Тамма—Данкова, оставляя только те амплитуды, которые содержат не более двух мезонов. Показать, что в этом приближении нарушается перекрестная симметрия.

10. Доказать, что

$$|s, t\rangle_{\pm} = |s, t\rangle_{\pm} = \Omega^{\pm} |s, t\rangle,$$

где Ω^{\pm} —матрица Мёллера, а $|s, t\rangle$ —состояние «голового» нуклона. Для этого в явном виде вычислить матрицу Ω^{\pm} .

11. Доказать, что операторы проектирования $\mathcal{Y}_J(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)$, определенные формулами (12.258) и (12.259), удовлетворяют уравнению

$$\left[\frac{\sigma}{2} + I_2 \right] \mathcal{Y}_J(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) = J(J+1) \mathcal{Y}_J(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1),$$

где $I_2 = -i[\mathbf{k}_2 \times \nabla_{\mathbf{k}_2}]$ —оператор момента количества движения, связанного с импульсом \mathbf{k}_2 .

12. а) При нерелятивистском описании нуклона в модели Чу можно учесть отдачу при помощи следующего гамильтониана:

$$H = \frac{p^2}{2M} + \sum_{i=1}^3 \int d^3ka_{ik}^* a_{ik} \omega_{\mathbf{k}} + H_I.$$

Замечая, что оператор полного импульса

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \sum_{i=1}^3 \int d^3k a_{ik}^* a_{ik} \mathbf{k}$$

коммутирует с гамильтонианом, показать, что в системе центра масс эффективный гамильтониан имеет вид

$$H' = \int d^3k \sum_{i=1}^3 a_{ik}^* a_{ik} \left(\omega_{\mathbf{k}} + \frac{\mathbf{k}^2}{2M} \right) + H_I + \frac{1}{2M} \int d^3k \int d^3k' \sum_{ij=1}^3 a_{ik}^* a_{jk}^* a_{ik} a_{jk} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'.$$

б) Инвариантна ли эта теория относительно преобразований Галилея?

в) Оценить величину поправок на отдачу для фазы δ_{33} .

13. Получить модифицированное уравнение Чу—Лоу для случая, когда к гамильтониану добавлено взаимодействие $(\varphi \cdot \varphi)^2$ (соответствующее π - π -взаимодействию) [757].

О другом подходе к рассеянию мезонов на нуклонах при малых энергиях, при котором вычисляются составляющие состояния рассеяния системы мезон—нуклон $|\Psi\rangle_+$, относящиеся к состояниям, которые содержат один физический нуклон и один свободный мезон, $a_{ki}^* |s, t\rangle_+$, см. статью Боско, Фубини и Стангеллини [78].

14. Вывести и решить уравнения Лоу для скалярного поля, взаимодействующего с фиксированными источниками.

15. а) Вывести уравнения Лоу для заряженного скалярного поля, взаимодействующего с фиксированным нуклоном.

б) Решить в одномезонном приближении уравнение Лоу для рассеяния мезона.

16. Вывести уравнения Лоу для модели Ли.

17. Рассмотрим класс гамильтонианов, имеющих вид

$$H = H_0 + H_I,$$

$$H_0 = \int dk a^*(k) \omega(k) a(k) + \sum_{i=1}^N \psi_i^* M_i \psi_i,$$

$$H_I = g \sum_{j=1}^3 \sum_{u=1}^N \psi_u^* \sigma_{\tau j} \psi_1 \cdot \int \nabla \varphi_j(x) \varrho(x) dx.$$

Гамильтонианы такого вида представляют взаимодействие с мезонным полем «нуклона», который способен существовать в N возбужденных состояниях.

а) Показать, что если разности $M_i - M_1$ достаточно велики по сравнению с массой мезона μ , то возбужденные состояния невозмущенного нуклона не приводят ни к каким дополнительным связанным состояниям в спектре полного гамильтониана H .

б) Показать, что для любого гамильтониана из указанного выше класса получается одно и то же уравнение Лоу.

Глава 13

1. Выразить каждую из сингулярных функций D , S и Δ через известные функции (Бесселя, Ханкеля и Неймана).

2. Вывести однородные или неоднородные уравнения, которым подчиняются каждая из сингулярных функций.

3. Найти функции, представляющие спаривание

а) нуклонных операторов $\psi_{\tau}(x)$,

б) мезонных операторов $\varphi_i(x)$,

в) гиперонных операторов в рассмотренных в гл. 10 теориях сильных взаимодействий.

Глава 14

1. а) Показать, что в приближении $(A^e)^2$ возникает различие в рассеянии позитронов и электронов на внешнем поле, и проследить природу механизма, ответственного за это различие.

б) Обсудить степень расходимости несвязных диаграмм с петлями в теории взаимодействия электронно-позитронного поля с внешним полем.

в) Обсудить связь между вероятностью обнаружения пар и компонентами с отрицательной энергией амплитуды $\langle 0 | \psi^e(x) | 1 \text{ электрон} \rangle = \chi(x)$ в ее разложении по решениям свободного уравнения Дирака.

2. а) Доказать, что в низшем порядке теории возмущений число пар бозонов, образованных в единичном объеме пространства-времени внешним электрическим полем $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0 \cos \omega t, 0, 0)$, равно

$$\frac{e \mathcal{E}_0^2}{48\pi} \frac{(\omega^2 - 4\mu^2)^{3/2}}{\omega^3} \theta(\omega - 2\mu).$$

б) Получить выражение для полной переданной энергии и связать эту величину с мнимой частью комплексной диэлектрической постоянной «вакуума» заряженного бозонного поля.

в) Вычислить вещественную часть, предполагая, что диэлектрическая постоянная подчиняется дисперсионному соотношению (см. статьи Уилера и Ювима [225] и Толла [781]).

г) Повторить эти вычисления для электронно-позитронного случая.

3. Получить правила Фейнмана для

а) псевдоскалярной мезонной теории (ψ —изотопический спинор, α Φ —изотопический вектор),

б) теории β -распада Ферми,

в) рассмотренных в гл. 10 теорий сильных взаимодействий,

г) теории нерелятивистских (шредингеровских) фермионов с двухчастичным потенциалом взаимодействия (см., например, статьи Дюбуа [189, 190]),

д) теории нерелятивистских бозонов с двухчастичным потенциалом взаимодействия.

В каждом случае подробно исследовать роль несвязных диаграмм типа замкнутой петли. Показать, что в релятивистски инвариантной теории величина $\langle \Phi_0 | S | \Phi_0 \rangle_C$ является мнимой.

4. а) Запишем матричный элемент S -матрицы для комптоновского рассеяния в виде

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) \left(\frac{M^2}{4\omega_1 \omega_2 E_1 E_2} \right)^{1/2} \tilde{u} T_{fi} u.$$

Доказать, что величина $\tilde{u} T_{fi} u$ релятивистски инвариантна.

б) Получить соотношение между дифференциальным эффективным сечением комптоновского рассеяния в лабораторной системе и системе центра масс.

5. а) В низшем порядке теории возмущений вычислить амплитуду и эффективное сечение для рассеяния фотона на частице со спином $1/2$, имеющей заряд e , массу M и аномальный магнитный момент λ . (Вершинный оператор в этом случае приобретает вид

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu - \frac{\lambda}{2M} i \sigma_{\mu\nu} q^\nu,$$

где q —четырёхмерный импульс, переданный в этой вершине [649].

б) Найти предел малых энергий для этой амплитуды рассеяния и эффективного сечения.

6. Вычислить в низшем порядке теории возмущений рассеяние электрона на частице со спином $1/2$, имеющей заряд e , массу M и аномальный магнитный момент λ (формула Розенблюта [674]).

7. Найти в низшем порядке теории возмущений амплитуды рассеяния и эффективные сечения для $\pi^+ \pi^-$ - и $\pi^\pm \pi^\pm$ -рассеяний, учитывая только электромагнитные взаимодействия.

8. В низшем порядке теории возмущений найти амплитуды следующих процессов:

- | | |
|--|---|
| а) аннигиляции $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ | } (с учетом только электромагнитного взаимодействия), |
| б) аннигиляции $\pi^+ + \pi^- \rightarrow 2\gamma$ | |
| в) аннигиляции $p^+ + p^- \rightarrow 2\pi$ | (в $PS-PS$ -теории). |

Вычислить в каждом случае время жизни.

9. Обсудить связь между амплитудами процессов

$$\pi^+ + \pi^- \rightarrow 2\gamma$$

$$\pi^\pm + \gamma \rightarrow \pi^\pm + \gamma$$

(а также процессов $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ и $e^\pm + \gamma \rightarrow e^\pm + \gamma$).

и

10. Найти в низшем порядке теории возмущений амплитуды рассеяния π -мезонов на нуклонах в $PS-PS$ -теории. Сравнить их с амплитудами этих же процессов в $PS-PV$ -теории.

11. Вычислить в низшем порядке теории возмущений эффективные сечения для образования

а) электронно-позитронной пары,

б) пары $\mu^+ - \mu^-$,

в) пары $\pi^+ - \pi^-$,

при рассеянии на ядре свинца

а) фотона,

б) электрона,

в) μ -мезона.

Считать ядро свинца бесконечно тяжелым и учитывать только электромагнитные взаимодействия.

Исследовать зависимость этих эффективных сечений от состояния поляризации падающей частицы.

12. Вычислить время жизни нейтрального псевдоскалярного π^0 -мезона относительно распада на 2γ -кванта в предположении, что взаимодействие имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \frac{G}{M} \frac{\alpha}{m} \varphi \mathcal{E} \cdot \mathcal{H},$$

где φ — оператор π^0 -мезонного поля, а \mathcal{E} и \mathcal{H} — операторы напряженностей квантованных электрического и магнитного полей. Показать, что фотоны поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях.

13. Показать, что если для объяснения распада $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu + \bar{\nu}$ использовать гамильтониан

$$\tilde{G} \tilde{\nu} \gamma_\alpha \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \tilde{\mu} \tilde{\epsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \nu + \text{с.},$$

то в случае распада поляризованного μ^+ -мезона позитрон и антинейтрино будут иметь тенденцию вылетать в противоположных направлениях, а нейтрино — в направлении, противоположном направлению спина μ^+ -мезона.

14. а) Показать, что инвариантность гамильтониана относительно преобразований симметрии в общем случае влечет за собой инвариантность вероятности перехода относительно некоторых «кинематических» преобразований квантовых чисел в начальном и конечном состояниях. (Пример. Из инвариантности гамильтониана и относительно пространственных отражений вытекает инвариантность вероятности перехода относительно изменения знаков всех импульсов в начальном и конечном состояниях.)

б) Обсудить свойства вероятности перехода, вытекающие из инвариантности гамильтониана H относительно антиунитарных преобразований T и CPT .

15. Показать, что распад 3S_1 -состояния позитрония на 2γ -кванта запрещается законом сохранения момента количества движения.

16. а) Изучить свойства амплитуды процесса $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, вытекающие из инвариантности относительно преобразований Лоренца и CPT -, PC -, TP -, T -, P -, C -преобразований (см. статью Бернштейна и Мишеля [48]).

б) Рассмотреть ограничения, вытекающие из инвариантности относительно обращения времени, на следующие типы распадов:

$$1) \quad K_S^0 \rightarrow 2\pi \quad [823],$$

$$2) \quad K^+ \rightarrow \mu^+ + \pi^0 + \nu \quad [686].$$

17. Зададим плотность лагранжиана взаимодействия для β -распада нуклонов в виде

$$\mathcal{L}_I(x) = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} (\tilde{\Psi}_p(x))_\alpha (\Psi_n(x))_\beta (\tilde{\Psi}_e(x))_\gamma (\Psi_\nu(x))_\delta + \text{с.},$$

где $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — константы (вообще говоря, комплексные). Провести систематическое исследование вида $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ при условии, что плотность лагранжиана \mathcal{L}_I должна быть инвариантной относительно

- а) однородных собственных преобразований Лоренца,
- б) преобразования CPT ,
- в) T или PC .

18. Пусть $a_{i, t_3}^*(\mathbf{k})$ — оператор рождения частицы с полным изотопическим спином $t(t+1)$, третьей компонентой изотопического спина t_3 и импульсом \mathbf{k} , а $a_{i, t_3}(\mathbf{k})$ — оператор рождения соответствующей античастицы. Тогда эти операторы будут подчиняться перестановочным соотношениям

$$[T_{\pm}, a_{i, t_3}^*(\mathbf{k})] = \sqrt{(t \mp t_3)(t \pm t_3 + 1)} a_{i, t_3 \pm 1}^*(\mathbf{k})$$

и

$$[T_3, a_{i, t_3}^*(\mathbf{k})] = t_3 a_{i, t_3}^*(\mathbf{k}),$$

и связь между операторами частицы и античастицы выразится в виде

$$a_{i, t_3}^*(\mathbf{k}) = C a_{i, t_3}(\mathbf{k}) C^{-1}$$

(исключая фазовый множитель). (C — унитарный оператор зарядового сопряжения.)

а) Определить из указанных выше соотношений трансформационные свойства T при зарядовом сопряжении.

б) Определить трансформационные свойства операторов a_{i, t_3} , a_{i, t_3}^* и T при преобразовании

$$R = e^{i\pi T_2},$$

соответствующем вращению на 180° вокруг оси 2 в изотопическом пространстве.

в) Обсудить трансформационные свойства операторов при преобразовании

$$G = CR.$$

Показать, что $CR = RC$.

г) Рассмотреть связь между собственными состояниями $|T', T'_3\rangle$ операторов T и T_3 и состояниями $G|T', T'_3\rangle$.

д) Найти собственные значения операторов R^2 и G^2 для состояний $|T', T'_3\rangle$.

19. а) Получить явные представления операторов G , C , R и их квадратов для систем, состоящих из

- 1) свободных нуклонов,
- 2) свободных π -мезонов,
- 3) взаимодействующих π -мезонов и нуклонов.

б) Обсудить следствия, вытекающие из требования, чтобы теория сильных взаимодействий была инвариантной относительно преобразования G .

20. Получить правила отбора для аннигиляции N и \bar{N} на π -мезоны в G -инвариантной теории.

21. Показать, что если T — антиунитарный оператор обращения времени, а $|j, m\rangle$ — собственные функции операторов полного момента количества движения J^2 и его проекции J_3 , то

$$T|j, m\rangle = \eta(-1)^m |j, -m\rangle,$$

где η — фазовый множитель. (Следует учесть, что с точностью до фазового множителя $TJT^{-1} = -J$.)

Глава 15

1. а) Используя гамильтониан (15.45), вычислить время жизни атома водорода в $2P$ -состоянии.

б) При помощи гамильтониана (15.56) найти в дипольном приближении, но с учетом спин-орбитальной связи в V формулу для времени жизни атома водорода в $2S$ -состоянии относительно двухфотонного распада.

в) Оценить это время жизни и рассмотреть влияние каскадного распада $2S \rightarrow 2P_{1/2} \rightarrow 1S$.

2. Обсудить сходимость метода Бете вычисления лэмбовского сдвига в том случае, когда используется гамильтониан (15.56), но не делается дипольного приближения.

3. а) Используя гамильтониан (15.56) в дипольном приближении, получить дифференциальное сечение для упругого рассеяния фотона на атоме водорода в основном состоянии.

б) Показать, что в «пределе высоких энергий» (но все еще при $k < m$) полное эффективное сечение, усредненное по поляризациям, равно томсоновскому эффективному сечению $\frac{8\pi r_0^2}{3}$.

в) Показать, что в пределе малых энергий полное эффективное сечение определяется формулой рассеяния Релея и $\sigma_{\text{полн}} \sim k^4$.

г) Сформулировать метод Тамма—Данкова для случая резонансного рассеяния, уделяя особое внимание связи между шириной резонанса и собственной энергией резонансного состояния.

4. Показать, что в низшем приближении по электромагнитным эффектам поправка к массе протона и нейтрона может быть записана в виде

$$\Delta M = M_0 [A + B\mu + C\mu^2],$$

где μ —статический аномальный магнитный момент. Коэффициенты A , B и C —постоянные числа, и их значение зависит от принятой модели сильных взаимодействий. Показать, что для нейтрона коэффициенты A и B равны нулю [255].

5. Пусть M —масса бариона в теории сильных взаимодействий Гелл-Манна, когда не учитываются взаимодействия с K -мезонами. Показать, что во втором порядке по константам связи с K -мезонами (но при точном учете взаимодействий с π -мезонами)

$$M_N = M + (g_{N\Lambda K}^2 + 3g_{N\Sigma K}^2) \Delta,$$

$$M_\Lambda = M + 2(g_{N\Lambda K}^2 + g_{\Xi\Lambda K}^2) \Delta,$$

$$M_\Sigma = M + 2(g_{N\Sigma K}^2 + g_{\Xi\Sigma K}^2) \Delta,$$

$$M_\Xi = M + (g_{\Xi\Lambda K}^2 + 3g_{\Xi\Sigma K}^2) \Delta,$$

где Δ во всех случаях представляется одним и тем же интегралом, и что поэтому независимо от величин констант связи K -мезонов с барионами имеет место соотношение

$$\frac{M_N + M_\Xi}{2} = \frac{M_\Lambda + 3M_\Sigma}{4}.$$

Относительно $\Sigma^+ - \Sigma^-$ разности масс см., например, статью Като и Такеда [434].

6. а) Найти унитарное преобразование, переводящее из калибровки Фейнмана, в которой функция распространения фотона есть $g_{\mu\nu}k^{-2}$, в калибровку Ландау, в которой функция распространения фотона есть $(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu k^{-2})k^{-2}$.

б) Показать, что перенормировку заряда можно при помощи канонического преобразования включить в переопределение внешнего поля A^e .

7. а) Вычислить радиационные поправки низшего порядка к одно- и двухфотонным вершинам для заряженных частиц со спином 0.

б) Вычислить в низшем порядке теории возмущений эффекты поляризации вакуума, обусловленные $\pi^+ - \pi^-$ -петлями.

8. Рассматривая рассеяние протона и нейтрона на внешнем электромагнитном поле, вычислить статические магнитные моменты нейтрона и протона в низшем приближении по мезонным взаимодействиям в

- а) скалярной теории со скалярной связью,
- б) PS — PS -теории,
- в) PS — PV -теории.

9. а) Вычислить в явном виде форм-факторы заряда и магнитного момента электрона в первом порядке по α .

б) Найти соответствующие распределения в конфигурационном пространстве.

10. Вычислить форм-факторы заряда и магнитного момента нейтрона и протона в низшем порядке по мезонным эффектам в PS — PS -теории.

11. Обсудить электромагнитные поправки к распаду $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu + \bar{\nu}$ (см. статью Бермана [45]).

О радиационных эффектах при рассеянии электрона на электроне при высоких энергиях см. статью Тсаи [786]. Обзор вопроса о рассеянии электронов при высоких энергиях можно найти в Трудах Киевской конференции по высоким энергиям (1959 г.).

12. а) Получить S_F^e для случаев:

- 1) однородного постоянного магнитного поля,
- 2) однородного постоянного электрического поля.

б) Используя эти результаты, вычислить в низшем порядке возмущений собственную энергию электрона в однородном не зависящем от времени магнитном поле и получить выражение для его магнитного момента [298, 299].

в) Как можно было бы использовать этот подход для получения магнитного момента протона и нейтрона?

Обзор состояния теории ядерных сил на 1956 г. можно найти в *Prog. Theor. Phys., Suppl.* № 3 (1956), и, в частности, в статье Нишиджимы [583]. О достижениях в этой области по состоянию на 1959 г. см. статью Филлипса [639]. Подход, в котором используется теория дисперсионных соотношений, освещен в обзоре Голдбергера [326].

Глава 16

1. Обсудить, соблюдается ли тождество Уорда для протон-фотонной вершины. (Рассмотреть систему мезон—нуклон в PS — PS -теории при наличии электромагнитных взаимодействий.)

2. Получить тождество Уорда в теории заряженных мезонов, взаимодействующих с электромагнитным полем.

3. Вывести тождество Такахаша (обобщенное тождество Уорда) для указанных выше случаев.

Глава 17

1. Вычислить спектральную функцию $\rho(m^2)$ для мезонного «двухточечника» в низшем порядке по константе связи в нейтральных скалярной и псевдоскалярной теориях со скалярной и псевдовекторной связями.

2. а) Обобщить анализ Лемана на случай, когда мезонные операторы являются векторами в изотопическом пространстве. При этом предположить инвариантность теории относительно произвольных вращений в изотопическом пространстве и относительно зарядового сопряжения.

б) Сделать то же самое для нуклонного «двухточечника».

3. Сформулировать теорию возмущений для спектральных функций в случае $PS-PS$ -мезонной теории.

4. а) Показать, что метод суммирования весовых функций Редмонда—Боголюбова не изменяет содержания теории, если в точных решениях рассматриваемой теории нет «духовых» состояний.

б) Показать, что в теории, имеющей «духовые» состояния, этот метод можно рассматривать как модифицирование исходного лагранжиана нелокальным образом.

5. Показать, что в силу леммы Римана—Лебега

$$\lim_{x_0 \rightarrow \pm\infty} (\Psi, \varphi(x) \Phi) = 0,$$

что дает еще один повод рассматривать операторы $\varphi^f(t)$ при определении асимптотического предела.

6. Получить выражение для сечения комптоновского рассеяния в пределе низких энергий, если предполагается только инвариантность относительно CPT -преобразования.

7. Вывести уравнение Бете—Солпитера для $p-\bar{p}$ - и $p-\bar{n}$ -систем. Обсудить лестничное приближение для этих систем (см. статью Окубо и Фелдмана [598]).

8. Определяет ли в принципе точное уравнение Бете—Солпитера высшие возбужденные состояния атома водорода?

9. Получить выражение для сечения упругого рассеяния фотона на атоме водорода в основном состоянии. Связать эту величину с выражением, содержащим амплитуду Бете—Солпитера для основного состояния.

Глава 18

1. Найти функции Уайтмана для теории свободных частиц со спином $1/2$.

2. Показать, что если двухточечная функция Уайтмана $W(\xi)$ для скалярного поля $\varphi(x)$ совпадает с двухточечной функцией Уайтмана $W_{(0)}(\xi)$ для свободного поля при $\xi_0=0$, то $\varphi(x)$ является свободным полем. (Это утверждение называют теоремой Хаага [347]; см. также статьи Холла и Уайтмана [355], Гринберга [340] и Федербуша [233, 234].)

3. Рассмотрим двухточечную функцию Уайтмана $W_{\alpha_1\alpha_2}^{\psi\tilde{\psi}}(x_1, x_2)$ для спинорного поля $\psi(x)$.

а) Найти вытекающие из релятивистской инвариантности требования и показать, что

$$W^{\psi\tilde{\psi}}(-\xi) = -W^{\tilde{\psi}\psi}(\xi).$$

б) Дать доказательство теоремы о связи между спином и статистикой для случая спина, равного $1/2$.

4. Что утверждает CPT -теорема относительно одновременных перестановочных соотношений для различных фермионных полей?

5. а) Показать, что функцию Уайтмана для вакуумного среднего от произведения трех операторов можно записать в виде

$$W^{ABC}(x-x', x'-x'') = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4p \int d^4p' e^{-ip(x-x')-ip'(x'-x'')} \times \\ \times \int_0^\infty da \int_0^\infty db \int_{\sqrt{ab}}^\infty dc \delta(p^2-a) \delta(p'^2-b) \delta(p \cdot p' - c) \theta(p) \theta(p') G^{ABC}(a, b, c),$$

если в полной мере использовать спектральные условия и релятивистскую инвариантность.

б) Провести интегрирование по p и выявить зависимость функций

$$\Delta^+(x-x', x'-x'', a, b, c) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4p \int d^4p' e^{-ip \cdot (x-x') - ip' \cdot (x'-x'')} \times \\ \times \theta(p) \theta(p') \delta(p^2 - a) \delta(p'^2 - b) \delta(p \cdot p' - c)$$

от аргументов $x-x'$ и $x'-x''$.

в) Найти $G^{ABC}(a, b, c)$ для случая, когда $A(x) = B(x) = C(x)$ являются свободными скалярными полями.

6. Найти такие ограничения на коэффициентные функции σ_n в разложении S -матрицы (18.117), которые обеспечивают стабильность вакуумного и одночастичного состояний.

7. Что характеризует теорию свободного скалярного поля на языке τ -функций? Отправляясь от системы свободных полей, получить приближенные решения уравнения (18.199) методом теории возмущений. В чем заключается связь этих решений с решениями по теории возмущений и теории поля с взаимодействием вида $C_1\varphi^4(x) + C_2\varphi^6(x) + \dots$ [491, 586]?

8. Сформулировать метод Дайсона вывода представлений для причинных функций при помощи перехода в пятимерное гиперболическое пространство.

9. Показать, что гейзенберговские операторы $\varphi(x)$, фурье-образы которых $\tilde{\varphi}(k)$ удовлетворяют перестановочному соотношению

$$[\tilde{\varphi}(k), \tilde{\varphi}(q)] = \int_0^\infty dx^2 \int d^4u \delta\left(\left[u + \frac{1}{2}(k-q)^2\right]^2 - \kappa^2\right) \varepsilon\left(u - \frac{1}{2}(k-q)\right) \times \\ \times \tilde{\Phi}\left(\kappa^2, u + \frac{1}{2}(k+q), -u + \frac{1}{2}(k+q)\right),$$

где оператор $\tilde{\Phi}$ зависит от переменных κ^2 , u и $(k+q)$, являются локальными.

10. а) Вывести формулы приведения для T - и R -произведений операторов частиц со спином $1/2$. С помощью этих формул вывести, в частности, замкнутые выражения для амплитуд рассеяния следующих процессов:

- 1) $N + \pi \rightarrow N + \pi$,
- 2) $N + N \rightarrow N + N$,
- 3) $N + \bar{N} \rightarrow N + \bar{N}$,
- 4) $N + \bar{N} \rightarrow \pi + \pi$,
- 5) $\bar{N} + \pi \rightarrow \bar{N} + \pi$,
- 6) $\pi + N \rightarrow 2\pi + N$,

в которых нуклоны (N) рассматриваются как частицы со спином $1/2$ (как в обычном, так и в изотопическом пространствах), а π -мезоны — как частицы со спином 0 и изотопическим спином 1.

б) Получить выражение для абсорбционной части амплитуды рассеяния для каждого из перечисленных выше процессов.

в) Обсудить соотношение (18.348) вместе с соотношениями (18.350) и (18.357) в связи с обобщением соотношения (18.170) на случай двух полей.

С теорией дисперсионных соотношений для нерелятивистских шредингеровских амплитуд рассеяния, которая не затрагивалась в тексте, можно ознакомиться по статьям Хури [442], Клейна и Земаха [453] и Бланкенбеклера и др. [60].

Весьма полная сводка литературных данных по дисперсионным соотношениям, так же как изложение состояния теории дисперсионных соотношений по состоянию на 1958 г., содержится в лекциях Тэйлора [771].

11. Предположим, что поля Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 взаимодействуют с промежуточными полями Φ_a , Φ_b , Φ_c следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g_1 \Phi_1 \Phi_b \Phi_c + g_2 \Phi_2 \Phi_a \Phi_c + g_3 \Phi_3 \Phi_a \Phi_b.$$

Массы соответствующих квантов равны m_1 , m_2 , m_3 и m_a , m_b , m_c , и критерии стабильности заключаются в том, что

$$m_1 < m_b + m_c,$$

$$m_2 < m_a + m_c,$$

$$m_3 < m_a + m_b.$$

а) Показать, что фурье-образ $T(p_1^2, p_2^2, p_3^2)$ вершинной части $\langle 0 | T(\Phi_1(x_1) \Phi_2(x_2) \Phi_3(x_3)) | 0 \rangle$ в низшем порядке теории возмущений имеет следующее представление:

$$T(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \text{const} \int_0^1 \frac{\delta(1-\alpha-\beta-\gamma) d\alpha d\beta d\gamma}{[p_1^2 \beta \alpha + p_2^2 \gamma \alpha + p_3^2 \alpha \beta - m_a^2 \alpha - m_b^2 \beta - m_c^2 \gamma]}.$$

б) Обсудить аналитические свойства T как функции p_1^2 , когда p_2^2 и p_3^2 находятся на своих энергетических поверхностях. Выразить эти аналитические свойства на языке дисперсионных соотношений.

12. а) Ограничимся при вычислении величины

$$\text{Im } T(\omega, \Delta^2) = \dot{M}(\omega, \Delta^2) \quad (\omega > 0)$$

только вкладом от состояний из одного мезона и нуклона. Показать, что, применяя к этому выражению формулы приведения, можно получить нелинейное интегральное уравнение для T . Обсудить связь этого уравнения с выведенными для модели Чу уравнениями Лоу.

б) Вывести уравнения Лоу для мезон-нуклонной амплитуды и обсудить их связь с теорией дисперсионных соотношений (см. [602]).

13. Найти решения сингулярного интегрального уравнения

$$u'(x) = f(x) + \frac{1}{\pi} \int_a^\infty \frac{\bar{h}(x') u(x') dx'}{x' - x - i\epsilon},$$

где функции $f(x)$ и $h(x)$ заданы. Для этого рассмотреть аналитические свойства функции

$$U(z) = f(z) + \frac{1}{\pi} \int_a^\infty \frac{\bar{h}(x') u(x') dx'}{x' - z}.$$

(Предполагается, что функция $f(x)$ может быть аналитически продолжена и ее аналитическое продолжение $f(z)$ является регулярной функцией в комплексной плоскости с разрезом вдоль вещественной оси от a до $+\infty$ [108, 603].)

По поводу подробного анализа задачи минимализации, встречающейся при определении области аналитичности функции $T(W, \Delta^2, \zeta)$, см. статьи Салама [695] и Стритера [742].

14. Найти максимальное значение передачи импульса $\Delta_{\text{макс}}$, при котором можно доказать дисперсионные соотношения для реакции $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$. Обсудить возможности доказательства дисперсионных соотношений для процессов [325]

$$K + N \rightarrow K + N$$

и

$$\pi + D \rightarrow \pi + D.$$

О применении методов теории дисперсионных соотношений к вычислению собственной энергии электрона и перенормировочных констант волновых функций см. [456].

Литература

1. Abraham M., Becker R., Theorie der Electricität, 6th ed., Leipzig, 1933 (гл. 15, § 1). (Имеется перевод: М. Абрагам, Р. Беккер, Теория электричества, М. — Л., 1939.)
2. Ахизер А., Померанчук И., Phys. Zs. Sowjetunion, **11**, 478 (1937), (гл. 16, § 1).
3. Ахизер А., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, М., 1953 (гл. 4, § 8; гл. 15, § 7). (Имеется второе издание: М., 1959.)
4. Akiba T., Sato I., Prog. Theor. Phys. (Japan), **19**, 93 (1958) (гл. 18, § 4).
5. Allcock G. R., Phys. Rev., **104**, 1799 (1956) (гл. 17, § 6).
6. Allcock G. R., Hooton D. J., Nuovo Cim., **8**, 590 (1958) (гл. 17, § 6).
7. Allcock G. R., Nucl. Phys., **14**, 177 (1959/60) (гл. 18, § 4).
8. Amati D., Vitale B., Fort. d. Phys., **7**, 375 (1959) (гл. 10, § 5).
9. Amati D., Fierz M., Glaser V., Phys. Rev. Lett., **4**, 89 (1960) (гл. 18, § 4).
10. Anderson C. D., Phys. Rev., **41**, 405 (1932) (гл. 4, § 7).
11. Araki H., Munakata Y., Kawaguchi M., Goto T., Prog. Theor. Phys. (Japan), **17**, 419 (1957) (гл. 12, § 2).
12. Araki H., Ann. of Phys., **11**, 260 (1960) (гл. 18, § 2).
13. Araki H., Journ. Math. Phys., **2**, 163 (1961) (гл. 18, § 2).
14. Arnous E., Heitler W., Proc. Roy. Soc., **A220**, 290 (1953) (гл. 15, § 1).
15. Arnous E., Heitler W., Nuovo Cim., **2**, 1282 (1955) (гл. 15, § 1).
16. Arnowitz R., Deser S., Phys. Rev., **100**, 349 (1955) (гл. 16, § 1).
17. Ascoli R., Nuovo Cim., **2**, 413 (1955) (гл. 15, § 4).
18. Ascoli R., Nuovo Cim., **2**, 1 (1955) (гл. 15, § 4).
19. Ascoli R., Minardi E., Nucl. Phys., **9**, 242 (1958/59) (гл. 12, § 2).
20. Ashkin J., Fazzini T., Fidecaro G., Merrison A. W., Paul H., Tollestrup A. V., Nuovo Cim., **13**, 1240 (1959) (гл. 14, § 5).
21. Ashkin J., Nuovo Cim., **14**, Suppl., No. 2, 221, 310 (1959) (гл. 10, § 1).
22. Ashkin J., Proc. of Tenth Annual High Energy Conference at Rochester, New York, 1960 (гл. 10, § 1).
23. Bade W. L., Jehle H., Rev. Mod. Phys., **25**, 714 (1953) (гл. 4, § 3).
24. Baranger M., Диссертация, Cornell University, 1951 (гл. 15, § 2).
25. Baranger M., Phys. Rev., **84**, 866 (1951) (гл. 15, § 2).

Примечание. В скобках в конце ссылки указываются главы и параграфы, к которым относится данная работа. Раздел «Вопросы и литература для дальнейшего изучения» сокращенно обозначается словом «Вопросы».

(В ссылках на русские переводы периодические сборники «Проблемы современной физики» сокращенно именуются ПСФ. Непериодические тематические сборники включены в список литературы, добавленной при переводе. — Прим. ред.)

26. Baranger M., Bethe H. A., Feynman R. P., Phys. Rev., 92, 482 (1953) (гл. 15, § 2, 4, 7).
27. Baranger M., Dyson F. J., Salpeter E. E., Phys. Rev., 88, 680 (1953) (гл. 15, § 5).
28. Bardeen J., Phys. Rev., 49, 653 (1936) (гл. 6, § 10).
29. Bargmann V., Zs. f. Phys., 99, 576 (1936) (гл. 1, § 6).
30. Bargmann V., Ann. of Math., 48, 568 (1947) (гл. 2, § 2, 3).
31. Bargmann V., Wigner E. P., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 34, 211 (1948) (гл. 1, § 4; гл. 2, § 3).
32. Bargmann V., Mimeographed lecture notes on Advanced Quantum Mechanics, Princeton, 1951 (гл. 6).
33. Bargmann V., Wigner E. P., Wightman A. S., Рукопись, посвященная представлениям группы Лоренца в связи с квантовой теорией поля (не опубликована) (гл. 1, § 1, 4, 5).
34. Bargmann V., Ann. of Math., 59, 1 (1954) (гл. 1, § 5).
35. Barshay S., Phys. Rev., 103, 1102 (1956) (гл. 12, § 4).
36. Bauman K., Zs. f. Phys., 152, 448 (1958) (гл. 18, § 2).
37. Baum G., Phys. Rev., 117, 886 (1960) (гл. 17, § 1).
38. Beard D. B., Bethe H. A., Phys. Rev., 83, 1106 (1951) (гл. 16, § 1).
39. Becker R., Göttingen Nachrichten, 1945 (гл. 4, § 6).
40. Becker R., Leibfried, Phys. Rev., 69, 34 (1946) (гл. 6).
41. Becker R., Leibfried, Zs. f. Phys., 125, 347 (1948) (гл. 6).
42. Belinfante F. J., Physika, 6, 887 (1939) (гл. 7, § 4, 7).
43. Belinfante F. J., Physika, 7, 305 (1940) (гл. 7, § 4).
44. Berger J. M., Foldy L. L., Osborn R. K., Phys. Rev., 87, 1061 (1952) (гл. 10, § 7).
45. Berman S. M., Phys. Rev., 112, 267 (1958) («Вопросы»).
46. Bernardini G., Encyclopedia of Physics, 2d ed., vol. 43, Berlin, 1956 (гл. 12, § 4).
47. Bernstein A. M., Mann A. K., Phys. Rev., 110, 805 (1958) (гл. 16, § 1).
48. Bernstein J., Michel L., Phys. Rev., 118, 871 (1960) («Вопросы»).
49. Bethe H. A., Oppenheimer J. M., Phys. Rev., 70, 451 (1946) (гл. 15, § 4, 6).
50. Bethe H. A., Phys. Rev., 72, 339 (1947) (гл. 15, § 2). (Имеется перевод в [1919], стр. 82.)
51. Bethe H. A., Rapports du 8e Conseil, Solvay 1948, Bruxelles, 1950 (гл. 15, § 2).
52. Bethe H. A., Brown L. M., Stehn J. R., Phys. Rev., 77, 370 (1950) (гл. 15, § 2).
53. Bethe H. A., Rohrlich F., Phys. Rev., 86, 10, 1952 (гл. 16, § 1).
54. Bethe H. A., de Hoffmann, Mesons and Fields, Vol. II, Evanston, 1955 (гл. 7, § 8; гл. 8, § 4; гл. 10, § 4; гл. 12, § 4; гл. 13, § 2; «Вопросы»). (Имеется перевод: Г. Бете, Ф. [де Гофман, Мезоны и поля, т. 2: Мезоны, ИЛ, 1957.)
55. Bethe H. A., Hamilton J., Nuovo Cim., 4, 1 (1956).
56. Bethe H. A., Salpeter E. E., Handbuch der Physik, Bd. XXXV/1, Berlin, 1957 (гл. 4, § 8). (Имеется перевод: Г. Бете, Э. Солпитеер, Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, М.—Л., 1960.)
57. Björken J. D., Диссертация, Stanford University, 1959 (гл. 17, § 2; гл. 18, § 4).
58. Bincer A. M., Phys. Rev., 105, 1399 (1957) (гл. 12, § 4).
59. Bincer A. M., Phys. Rev., 118, 855 (1960) (гл. 18, § 4).
60. Blankenbeller R., Goldberger M. L., Khuri N. N., Treiman S. V., Ann. of Phys., 10, 62 (1960) («Вопросы»).
61. Bleuler K., Helv. Phys. Acta, 23, 567 (1950) (гл. 9, § 2).
62. Bloch F., Nordstieck, Phys. Rev., 52, 54 (1937) (гл. 15, § 3, 4, 6).

63. B o c h n e r S., M a r t i n W. T., *Several Complex Variables*, Princeton, 1948 (гл. 18, § 1). (Имеется перевод: С. Б о х н е р, У. Т. М а р т и н, *Функции многих комплексных переменных*, ИЛ, 1951.)
64. Б о г о л ю б о в Н. Н., Ш и р к о в Д. В., *Nuovo Cim.*, 3, 77 (1956) (гл. 16, § 2, 8).
65. Б о г о л ю б о в Н. Н., М е д в е д е в Б. В., П о л и в а н о в М. К., *Вопросы теории дисперсионных соотношений*, М.—Л., 1958 (гл. 18, § 2).
66. Б о г о л ю б о в Н. Н., М е д в е д е в Б. В., П о л и в а н о в М. К., *Fort. d. Phys.*, 6, 169 (1958) (гл. 18, § 2).
67. Б о г о л ю б о в Н. Н., Ш и р к о в Д. В., *Введение в теорию квантованных полей*, М.—Л., 1957 (гл. 15, § 5, 7; гл. 16, § 1, 2, 8; гл. 18, § 2, 4).
68. Б о г о л ю б о в Н. Н., Л о г у н о в А. А., Ш и р к о в Д. В., *ЖЭТФ*, 37, 805 (1959) (гл. 17, § 3).
69. B o h r N., R o s e n f e l d L., *Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd.*, 12, No. 8 (1933) (гл. 9, § 2; гл. 13, § 1; гл. 17).
70. B o h r N., R o s e n f e l d L., *Phys. Rev.*, 78, 794 (1950) (гл. 7, § 6; гл. 9, § 2; гл. 13, § 1; гл. 17).
71. B o n n e v a y G., *Nuovo Cim.*, 14, 593 (1959) (гл. 12, § 4).
72. B o r r F., *Ann. d. Phys.*, 38, 345 (1940) (гл. 15, § 1).
73. B o r r F., *Ann. d. Phys.*, 42, 473 (1942/43) (гл. 15, § 1).
74. B o r n M., *Proc. Roy. Soc.*, A143, 410 (1934) (гл. 15, § 1).
75. B o r n M., I n f e l d L., *Proc. Roy. Soc.*, A144, 425 (1934) (гл. 15, § 1).
76. B o r n M., *Ann. de l'Institut Henri Poincaré*, 7, 155 (1937) (гл. 15, § 1).
77. B o r o w i t z S., K o h n W., *Phys. Rev.*, 86, 985 (1952) (гл. 15, § 1).
78. B o s c o B., F u b i n i S., S t a n g h e l l i n i A., *Nucl. Phys.*, 10, 663 (1959) («Вопросы»).
79. B o s e S. K., G a m b a A., S u d a r s h a n E. C. G., *Phys. Rev.*, 113, 1661 (1959) (гл. 4, § 6).
80. B o u c h i a t C., M i c h e l L., *Nucl. Phys.*, 5, 416 (1958) («Вопросы»).
81. B r e i t G., *Phys. Rev.*, 72, 984 (L) (1947) (гл. 15, § 4).
82. B r e i t G., *Phys. Rev.*, 73, 1410 (L) (1948) (гл. 15, § 4).
83. B r e i t G., *Phys. Rev.*, 74, 656 (1948) (гл. 15, § 4).
84. B r e m e r m a n H., O e h m e R., T a y l o r J. G., *Phys. Rev.*, 109, 2178 (1958) (гл. 18, § 1, 4).
85. B r e n i g W., H a a g R., *Fort. d. Phys.*, 7, 183 (1959) (гл. 11, § 1, 3; «Вопросы»).
86. B r e n n e r S., B r o w n G. E., *Proc. Roy. Soc.*, A218, 422 (1953) (гл. 4, § 8).
87. B r e n n e r S., B r o w n G. E., W o o d w a r d J. B., *Proc. Roy. Soc.*, A227, 59 (1954) (гл. 4, § 8).
88. B r o w n G. E., M e y e r s D. F., *Proc. Roy. Soc.*, A234, 387 (1955) (гл. 4, § 8).
89. B r o w n G. E., M e y e r s D. F., *Proc. Roy. Soc.*, A242, 89 (1957) (гл. 4, § 8).
90. B r o w n G. E., L a n g e r J. S., S c h a f f e r G. W., *Proc. Roy. Soc.*, A251, 92 (1959); A251, 105 (1959) (гл. 4, § 8).
91. B r o w n L. M., F e y n m a n R. P., *Phys. Rev.*, 85, 231 (1952) (гл. 15, § 4, 6).
92. B r o w n L. M., *Phys. Rev.*, 111, 462 (1958) (гл. 4, § 5).
93. B u r g o y n e N., *Nuovo Cim.*, 8, 604 (1958) (гл. 18; § 1).
94. B u r t o n W. K., T o u s c h e k B. F., *Phil. Mag.*, 44, 161 (1953) (гл. 17, § 1).
95. C a i a n i e l l o E. R., F u b i n i S., *Nuovo Cim.*, 9, 1218 (1952) (гл. 4, § 5).
96. C a i a n i e l l o E. R., *Nuovo Cim.*, 10, 1634 (1953) (гл. 16, § 8).
97. C a i a n i e l l o E. R., *Nuovo Cim.*, 11, 492 (1954) (гл. 16, § 8).
98. C a i a n i e l l o E. R., *Nuovo Cim.*, 12, 561 (1954) (гл. 16, § 8).
99. C a i a n i e l l o E. R., *Nuovo Cim.*, 2, 186 (1955) (гл. 16, § 8).
100. C a i a n i e l l o E. R., *Nuovo Cim.*, 3, 223 (1956) (гл. 16, § 8).
101. C a i a n i e l l o E. R., *Nuovo Cim.*, 5, 739 (1957) (гл. 16, § 8).

102. Caianiello E. R., Buccafurri A., Nuovo Cim., 8, 170 (1958) (гл. 16, § 8).
103. Caianiello E. R., Nuovo Cim., 13, 637 (1959) (гл. 16, § 8).
104. Caianiello E. R., Nuovo Cim., 14, 185 (1959) (гл. 16, § 8).
105. Cap F., Fort. d. Physik, 2, Heft 5, 207 (1955) (гл. 4, § 3).
106. Carps R. H., Phys. Rev., 106, 1031 (1957) (гл. 18, § 4).
107. Carps R. H., Phys. Rev., 108, 1032 (1957) (гл. 18, § 4).
108. Caribbo N., Gatto R., Nuovo Cim., 13, 1086 (1959) («Вопросы»).
109. Cartan E., Leçons sur la Théorie des Spineurs I, II, Paris, 1938 (гл. I, § 5).
(Имеется перевод: Э. Картан, Теория спиноров, ИЛ, 1957.)
110. Case K. M., Phys. Rev., 76, 1 (1949) (гл. 10, § 7).
111. Case K. M., Phys. Rev., 76, 14 (1949) (гл. 10, § 7).
112. Case K. M., Phys. Rev., 95, 1323 (1954) (гл. 3, § 4).
113. Case K. M., Phys. Rev., 107, 307 (1957) («Вопросы»).
114. Cassen B., Condon E. U., Phys. Rev., 50, 846 (1936) (гл. 10, § 3).
115. Castillejo L., Dalitz R. H., Dyson F. J., Phys. Rev., 101, 453 (1956)
(гл. 12, § 4).
116. Charap J. M., Fubini S. F., Nuovo Cim., 14, 540 (1959) (гл. 15, § 8).
117. Charap J. M., Fubini S. F., Nuovo Cim., 15, 73 (1960) (гл. 15, § 8).
118. Charap J. M., Tausner M., Nuovo Cim., 18, 316 (1960) (гл. 15, § 8).
119. Chevalier A., Rideau G., Nuovo Cim., 10, 228 (1958) (гл. 12, § 3).
120. Chew G. F., Phys. Rev., 94, 1748 (1954) (гл. 12, § 4).
121. Chew G. F., Low F. F., Phys. Rev., 101, 1571 (1956) (гл. 12, § 4).
122. Chew G. F., Low F. E., Phys. Rev., 101, 1579 (1956) (гл. 12, § 4).
123. Chew G. F., Encyclopedia of Physics, 2d ed., vol. 43, Berlin, 1956 (гл. 12, § 4).
124. Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E., Nambu Y., Phys. Rev.,
106, 1337 (1957) (гл. 12, § 4; гл. 18, § 4).
125. Chew G. F., Gasiorowicz S., Karplus R., Zachariasen F.,
Phys. Rev., 110, 265 (1958) (гл. 12, § 4; гл. 18, § 4).
126. Chew G. F., Ann. Rev. Nucl. Sci., 9, 29 (1959) (гл. 18, § 4). (Имеется перевод
в [913], стр. 35.)
127. Chew G. F., Mandelstam S., Phys. Rev., 119, 467 (1960) (гл. 18, § 4).
(Имеется перевод в [913], стр. 249.)
128. Chew G. F., Double Dispersion Relations and Unitarity as the Basis for a Dynamical Theory of Strong Interactions, UCRL-9289, 1960 (гл. 18, § 4).
129. Chisholm J. S. R., Proc. Camb. Phil. Soc., 48, 300 (1952). (См. исправления:
Proc. Camb. Phil. Soc., 48, 518 (1952) (гл. 17, § 2).)
130. Chrétien M., Peierls R. E., Nuovo Cim., 10, 668 (1953) (гл. 15, § 1).
131. Chrétien M., Peierls R. E., Proc. Roy. Soc., A223, 468 (1954) (гл. 15, § 1).
132. Chrétien M., Phys. Rev., 98, 1515 (1955) (гл. 15, § 6).
133. Christy R. F., Proc. of Seventh Annual Rochester Conference on High Energy
Physics, New York, 1957 (гл. 10, § 1).
134. Cini M., Nuovo Cim., 9, 1025 (L) (1953) (гл. 17, § 1).
135. Cini M., Touschek B., Nuovo Cim., 7, 422 (1958) (гл. 4, § 6).
136. Cini M., Fubini S., Stanghellini A., Phys. Rev., 114, 1633 (1959)
(гл. 18, § 1). (Имеется перевод в [913], стр. 301.)
137. Cini M., Fubini S., Ann. of Phys., 3, 352 (1960) (гл. 18, § 4). (Имеется пере-
вод в [913], стр. 198.)
138. Claesson A., Kgl. Fysiograf. Sällskap. Lund Forh., 27, No. 1 (1957) (гл. 16, § 1).
139. Coester F., Jauch J. M., Phys. Rev., 78, 149 (1950) (гл. 14, § 2).
140. Coester F., Phys. Rev., 89, 619 (1953) (гл. 14, § 6).
141. Cohen S., Диссертация, Cornell University, 1954 (гл. 4, § 8).
142. Cohen S., Phys. Rev., 118, 489 (1960) (гл. 4, § 8).
143. Corinaldesi E., Jost R., Helv. Phys. Acta, 21, 183 (1948) (гл. 15, § 6).

144. Corina ldesi E., Nuovo Cim., 8, 494 (1951) (гл. 13, § 1).
145. Corina ldesi E., Nuovo Cim., 10, Suppl., No. 2 (1953) (гл. 9, § 2; гл. 13, § 1).
146. Costa G., Dellaporta N., Nuovo Cim., 2, 519 (1955) (гл. 10, § 6).
147. Cutkosky R. E., Phys. Rev., 96, 1135 (1954) (гл. 17, § 6).
148. Cutkosky R. E., Zachariasen F., Phys. Rev., 103, 1108 (1956) (гл. 12, § 4).
149. Dalitz R. H., Proc. Roy. Soc., A206, 509 (1951) (гл. 14, § 1).
150. Dalitz R. H., Proc. Roy. Soc., A206, 521 (1951) (гл. 15, § 5, 6).
151. Dalitz R. H., Reports on Progress in Phys., 20, 163 (1957) (гл. 10, § 1).
152. Dalitz R. H., Proc. of Ninth Annual International Conference on High Energy Phys., CERN, Geneva, 1959 (гл. 10, § 5; гл. 12, § 5).
153. Darwin C. G., Proc. Roy. Soc., A118, 654 (1928) (гл. 4, § 8).
154. Davidson W. C., Goldberger M. L., Phys. Rev., 104, 119 (1956) (гл. 18, § 4).
155. de Benedetti S., Nuovo Cim., 4, Suppl., No. 3, 1234 (1956), (гл. 4, § 7).
156. de Celles P., Phys. Rev., 121, 304 (1961) («Вопросы»).
157. de Donder T., van Dungen H., Compt. Rend. (July 1926) (гл. 3, § 1).
158. Dellaporta N., Costa G., Nuovo Cim., 2, 519 (1955) (гл. 10, § 6).
159. Delbrück M., Zs. f. Phys., 84, 144 (1933) (гл. 16, § 1).
160. Dell'Antonio G. F., Gulmanelli P., Nuovo Cim., 12, 38 (1959) (гл. 18, § 2).
161. d'Espagnat B., Prentki J., Nucl. Phys., 1, 33 (1956) (гл. 10, § 5).
162. d'Espagnat B., Prentki J., Elementary Particles and Cosmic Ray Physics, vol. 4, Amsterdam, 1958 (гл. 10, § 5). (Имеется перевод в кн. «Физика элементарных частиц и космических лучей», ИЛ, 1960, стр. 11.)
163. Deutsch M., Phys. Rev., 82, 455 (L) (1951) (гл. 4, § 7).
164. Deutsch M., Dulit E., Phys. Rev., 84, 601 (L) (1951) (гл. 4, § 7).
165. de Witt B. S., Phys. Rev., 100, 905 (1955) (гл. 11, § 2).
166. The Many Body Problem, Lecture Notes on Courses Given at les Houshes, ed. by de Witt B. S., New York, 1959 («Вопросы»).
167. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A112, 661 (1926) (гл. 11, § 3).
168. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A114, 243 (1927) (гл. 11, § 3).
169. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A117, 610 (1928) (гл. 4, § 1, 8).
170. Dirac P. A. M., Proc. Cambr. Phil. Soc., 26, 376 (1930) (гл. 4, § 8).
171. Dirac P. A. M., Rapports du 7e Conseil Solvay, 1933, Bruxelles, 1934 (гл. 15, § 5).
172. Dirac P. A. M., Proc. Cambr. Phil. Soc., 30, 150 (1934) (гл. 15, § 5).
173. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A167, 148 (1938) (гл. 15, § 1).
174. Dirac P. A. M., Ann. de l'Institut Henri Poincaré, 9, 13 (1938) (гл. 15, § 1).
175. Dirac P. A. M., Peierls R. E., Prysce M. H. L., Proc. Cambr. Phil. Soc., 38, 193 (1942) («Вопросы»).
176. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, 3d ed., Oxford 1947 (гл. 11, § 2).
177. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A209, 291 (1951) (гл. 15, § 1).
178. Dirac P. A. M., Ann de l'Institut Henri Poincaré, 13, 1 (1952) (гл. 15, § 1).
179. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A212, 330 (1952) (гл. 15, § 1).
180. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A223, 438 (1954) (гл. 15, § 1).
181. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, 4th ed., Oxford, 1958 (гл. 1, § 1, 2). (Имеется перевод: П. А. М. Д и р а к, Принципы квантовой механики, М.— Л., 1960.)
182. Drell S. D., Phys. Rev., 79, 220 (1950) (гл. 15, § 1).
183. Drell S. D., Henley E. M., Phys. Rev., 88, 1053 (1952) (гл. 10, § 6, 7; гл. 12, § 4).
184. Drell S. D., Friedman M., Zachariasen F., Phys. Rev., 104, 236 (1956) (гл. 12, § 4).

185. Drell S. D., Ann. of Phys., 4, 75 (1958) (гл. 16, § 1).
186. Drell S. D., Zachariassen F., Phys. Rev., 111, 1727 (1959) (гл. 17, § 3; гл. 18, § 1).
187. Drell S. D., Zachariassen F., Phys. Rev., 119, 463 (1960) (гл. 17, § 3).
188. Drell S. D., Zachariassen F., Electromagnetic Structure of Nucleons, Oxford, 1961 (гл. 18, § 4). (Имеется перевод: С. Дрелл, Ф. Захарьясен, Электромагнитная структура нуклонов, ИЛ, 1962.)
189. Du Bois D. F., Ann. of Phys., 7, 174 (1959) («Вопросы»).
190. Du Bois D. F., Ann. of Phys., 8, 24 (1959) («Вопросы»).
191. Duffin R., Phys. Rev., 77, 242 (1950) (гл. 4, § 5).
192. Dyson F. J., Phys. Rev., 73, 929 (1948) (гл. 10, § 7).
193. Dyson F. J., Phys. Rev., 75, 486 (1949) (гл. 11, § 6). (Имеется перевод в [919], стр. 94.)
194. Dyson F. J., Phys. Rev., 75, 1736 (1949) (гл. 11, § 6; гл. 15, § 3; гл. 16, § 1, 2, 3, 6). (Имеется перевод в [911].)
195. Dyson F. J., Advanced Quantum Mechanics, Lithoprinted Notes, Cornell University, 1951 (гл. 13, § 3; гл. 15, § 3).
196. Dyson F. J., Phys. Rev., 82, 428 (1951) (гл. 13, § 1, 3; гл. 16, § 1).
197. Dyson F. J., Phys. Rev., 83, 608 (1951) (гл. 13, § 1).
198. Dyson F. J., Proc. Roy. Soc., A207, 395 (1951) (гл. 13, § 1).
199. Dyson F. J., Phys. Rev., 83, 1207 (1951) (гл. 13, § 1).
200. Dyson F. J., Phys. Rev., 85, 631 (1952) (гл. 16, § 8).
201. Dyson F. J., Phys. Rev., 91, 1543 (1953) (гл. 13, § 1). [Имеется перевод: ПСФ, № 10, 181 (1955).]
202. Dyson F. J., Phys. Rev., 106, 157 (1957) (гл. 12, § 4).
203. Dyson F. J., Phys. Rev., 110, 579 (1958) (гл. 18, § 1).
204. Dyson F. J., Phys. Rev., 110, 1460 (1958) (гл. 18, § 3). [Имеется перевод: ПСФ, № 1, 3 (1959).]
205. Eddington A., Proc. Cambr. Phil. Soc., 35, 186 (1939) («Вопросы»).
206. Eddington A., Proc. Cambr. Phil. Soc., 38, 201 (1942) («Вопросы»).
207. Eden R. J., Proc. Roy. Soc., A210, 388 (1952) (гл. 16, § 1; гл. 17, § 6).
208. Eden R. J., Proc. Roy. Soc., A215, 133 (1952) (гл. 17, § 6).
209. Eden R. J., Proc. Roy. Soc., A217, 390 (1953) (гл. 17, § 6).
210. Eden R. J., Rickayzen G., Proc. Roy. Soc., A219, 109 (1953) (гл. 17, § 6).
211. Eden R. J., Proc. Roy. Soc., A219, 516 (1953) (гл. 17, § 6).
212. Eden R. J., Proc. Cambr. Phil. Soc., 50, 592 (1954) (гл. 17, § 6).
213. Eden R. J., Phys. Rev., 119, 1763 (1960) (гл. 17, § 3).
214. Eden R. J., Phys. Rev. Lett., 5, 213 (1960) (гл. 18, § 4).
215. Eden R. J., Proc. of Tenth Annual High Energy Conference at Rochester, New York, 1960 (гл. 18, § 4).
216. Edmonds A. R., Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton, 1957 (гл. 12, § 4). (Имеется перевод в сб. «Деформация атомных ядер», ИЛ, 1958, стр. 305.)
217. Edwards S. F., Phys. Rev., 90, 284 (1953) (гл. 16, § 2). (Имеется перевод в [911], стр. 378.)
218. Eisenbud L., Journ. Frankl. Inst., 261, 409 (1956) (гл. 11, § 1).
219. Ekstein H., Phys. Rev., 120, 1917 (1960) («Вопросы»).
220. Eliezer C. J., Rev. Mod. Phys., 19, 147 (1947) (гл. 15, § 1).
221. Enz C. P., Nuovo Cim., 3, Suppl., No. 3, 363 (1950) (гл. 12, § 3).
222. Epstein S. T., Phys. Rev., 73, 177 (L) (1948); Phys. Rev., 73, 630 (L) (1948) (гл. 15, § 3).
223. Euler E., Kockel B., Naturwiss., 23, 246 (1935) (гл. 16, § 1).
224. Euler E., Ann. d. Phys., 26, 398 (1936) (гл. 16, § 1).

225. E u w e m a R. W., W h e e l e r J. A., *Phys. Rev.*, **103**, 803 (1956) («Вопросы»).
226. E z a w a H., U m e z a w a H., *Phys. Rev.*, **116**, 463 (1959) («Вопросы»).
227. F a i r l i e D. B., P o l k i n g h o r n e J. C., *Nuovo Cim.*, **8**, 345 (1958) (гл. 12, § 4).
228. F a i r l i e D. B., P o l k i n g h o r n e J. C., *Nuovo Cim.*, **8**, 555 (1958) (гл. 12, § 4).
229. F a l k D. S., *Phys. Rev.*, **115**, 1069 (1959) (гл. 17, § 2).
230. F a z z i n i *et al.*, *Nuovo Cim.*, **13**, 1240 (1959) (гл. 14, § 5).
231. F e d e r b u s h P. G., G r i s a r u M. T., *Nuovo Cim.*, **9**, 1058 (1958) (гл. 7, § 3).
232. F e d e r b u s h P. G., G o l d b e r g e r M. L., T r e i m a n S. B., *Phys. Rev.*, **112**, 642 (1958) (гл. 18, § 4).
233. F e d e r b u s h P. G., *Nuovo Cim.*, **15**, 932 (1960) («Вопросы»).
234. F e d e r b u s h P. G., J o h n s o n K. A., *Phys. Rev.*, **120**, 1926 (1960) («Вопросы»).
235. F e i n b e r g G., *Phys. Rev.*, **108**, 878 (1957) (гл. 10, § 2).
236. F e i n b e r g G., W e i n b e r g S., *Nuovo Cim.*, **14**, 571 (1959) (гл. 10, § 5; гл. 14, § 6).
237. F e l d B., *Ann. of Phys.*, **7**, 323 (1959) (гл. 10, § 1).
238. F e l d m a n D., *Phys. Rev.*, **76**, 1369 (1949) (гл. 15, § 5).
239. F e l d m a n D., *Phys. Rev.*, **103**, 254 (1956) (гл. 10, § 1).
240. F e r m i E., *Atti. Acad. Lincei*, **9**, 881 (1929) (гл. 9, § 1).
241. F e r m i E., *Atti. Acad. Lincei*, **12**, 431 (1930) (гл. 9, § 1).
242. F e r m i E., *Rev. Mod. Phys.*, **4**, 87 (1932) (гл. 9, § 1).
243. F e r m i E., *Zs. f. Phys.*, **88**, 161 (1934) (гл. 10, § 6).
244. F e r m i E., Y a n g C. N., *Phys. Rev.*, **76**, 1739 (1949) (гл. 10, § 1).
245. F e r r e t t i B., *Nuovo Cim.*, **8**, 108 (1951) (гл. 16, § 8).
246. F e r r e t t i B., *Nuovo Cim.*, **12**, 393 (1959) (гл. 12, § 2).
247. F e s h b a c h H., V i l l a r s F., *Rev. Mod. Phys.*, **30**, 24 (1958) (гл. 3, § 4).
248. F e y n m a n R. P., *Phys. Rev.*, **74**, 1430 (1948) (гл. 15, § 1).
249. F e y n m a n R. P., *Phys. Rev.*, **76**, 939 (1948) (гл. 15, § 1, 2, 7).
250. F e y n m a n R. P., *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 367 (1948) (гл. 4, § 8; «Вопросы»). (Имеется перевод в сб. «Вопросы причинности в квантовой механике», 1955, ИЛ, стр. 167.)
251. F e y n m a n R. P., *Phys. Rev.*, **76**, 749 (1949) (гл. 4, § 1; гл. 14, § 1; гл. 17, § 6). (Имеется перевод в [911], стр. 138.)
252. F e y n m a n R. P., *Phys. Rev.*, **76**, 769 (1949) (гл. 14, § 1; гл. 15, § 3, 5; гл. 16, § 1; гл. 17, § 6). (Имеется перевод в [911], стр. 161.)
253. F e y n m a n R. P., *Phys. Rev.*, **80**, 440 (1950) (гл. 14, § 1).
254. F e y n m a n R. P., *Phys. Rev.*, **84**, 108 (1951) (гл. 15). [Имеется перевод: ПСФ, № 3, 37 (1955).]
255. F e y n m a n R. P., S p r e i s m a n G., *Phys. Rev.*, **94**, 500 (1954) (гл. 8, § 4; гл. 16, § 1; «Вопросы»).
256. F e y n m a n R. P., G e l l - M a n n M., *Phys. Rev.*, **109**, 193 (1958) (гл. 4, § 8; гл. 10, § 6). [Имеется перевод: ПСФ, № 4, 3 (1958).]
257. F i e r z M., *Helv. Phys. Acta*, **23**, 731 (1950) (гл. 13, § 3). (Имеется перевод в [911], стр. 239.)
258. F i e r z M., *Proc. of Fifth Annual Rochester Conference on High Energy Physics*, New York, 1955, p. 67 (гл. 17, § 1).
259. F i n k e l s t e i n R. J., *Phys. Rev.*, **75**, 1079 (1949); F i n k e l s t e i n R. J., L e L é v i e r R., R u d e r m a n M., *Phys. Rev.*, **83**, 326 (1951) (гл. 15, § 1).
260. Ф о к В., *Zs. f. Phys.*, **38**, 242 (1926) (гл. 3, § 1).
261. Ф о к В., *Zs. f. Phys.*, **39**, 226 (1926) (гл. 3, § 1).
262. Ф о к В., *Zs. f. Phys.*, **61**, 126 (1930) (гл. 6, § 10).
263. Ф о к В., *Zs. f. Phys.*, **75**, 622 (1932) (гл. 6).
264. Ф о к В., *Phys. Zs. Sowjetunion*, **6**, 425 (1934) (гл. 7, § 5).
265. Ф о к В., *Zs. f. Phys.*, **98**, 145 (1936) (гл. 1, § 6).

266. Foldy L. L., Wouthuysen S. A., Phys. Rev., 78, 29 (1950) (гл. 4, § 6, 8).
267. Foldy L. L., Phys. Rev., 84, 168 (1951) (гл. 10, § 7).
268. Foldy L. L., Phys. Rev., 87, 688 (1952) (гл. 4, § 8).
269. Foldy L. L., Eriksen E., Phys. Rev., 98, 775 (1955) (гл. 4, § 7).
270. Foldy L. L., Phys. Rev., 102, 568 (1956) (гл. 2, § 3).
271. Ford K. W., Hill D. L., Ann. Rev. Nucl. Sci., 5, 25 (1955) (гл. 4, § 8).
272. Ford K. W., Phys. Rev., 105, 320 (1957) (гл. 12, § 2; гл. 17, § 3).
273. Frank R. M., Phys. Rev., 83, 1189 (1951) (гл. 16, § 1).
274. Franklin J., Phys. Rev., 105, 1101 (1957) (гл. 12, § 4).
275. Franzinetti C., Morpugo G., Nuovo Cim., 6, Suppl., 469 (1957) (гл. 10, § 1).
276. Frautschi S. C., Prog. Theor. Phys., 8, Suppl., 21 (1958) (гл. 16, § 1).
277. Freese E., Zs. f. Naturforsch., 8a, 775 (1953) (гл. 17, § 6).
278. Freese E., Acta Phys. Austriaca, 8, 289 (1954) (гл. 17, § 6).
279. Freese E., Nuovo Cim., 2, 50 (1955) (гл. 17, § 6).
280. French J. B., Weisskopf V., Phys. Rev., 75, 1240 (1949) (гл. 15, § 2, 4, 7). [Имеется перевод в [919], стр. 123.]
281. Fried B. D., Phys. Rev., 88, 1142 (1952) («Вопросы»).
282. Fried H. M., Yennie D. R., Phys. Rev., 112, 1391 (1958) (гл. 15, § 3, 4, 7).
283. Fried H. M., Phys. Rev., 115, 220 (1959) (гл. 16, § 2).
284. Fried H. M., Yennie D. R., Phys. Rev. Lett., 4, 580 (1960) (гл. 15, § 2, 4).
285. Friedrichs K., Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields, New York, 1953 (гл. 7, § 1).
286. Fronsdal C., Phys. Rev., 113, 1367 (1959) (гл. 2, § 3; гл. 5, § 1).
287. Fukuda H., Hayakawa S., Miyamoto Y., Progr. Theor. Phys. (Japan) 5, 283 (1950) (гл. 16, § 1).
288. Fukuda H., Hayakawa S., Miyamoto Y., Progr. Theor. Phys. (Japan) 5, 352 (1950) (гл. 16, § 1).
289. Fukuda H., Kovacs J. S., Phys. Rev., 104, 1784 (1956) (гл. 12, § 4).
290. Fulton T., Martin P. C., Phys. Rev., 93, 903 (1954) (гл. 17, § 6).
291. Furry W. H., Phys. Rev., 51, 125 (1937) (гл. 14, § 1).
292. Furry W. H., Phys. Rev., 81, 115 (1951) (гл. 15, § 5, 7).
293. Gårding L., Wightman A. S., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 40, 612 (1954) (гл. 7, § 1).
294. Gårding L., Lions J. L., Functional Analysis, Nuovo Cim., 14, ser. X, Suppl., No. 1 (1959) (гл. 18, § 1).
295. Gartenhaus S., Phys. Rev., 100, 900 (1955) (гл. 15, § 8).
296. Gasiorowicz S. G., Yennie D. R., Suura H., Phys. Rev. Lett., 2, No. 12, 513 (1959) (гл. 17, § 3).
297. Gasiorowicz S. G., Fort. d. Phys., 8, Heft 12, 665 (1960) (гл. 18, § 4).
298. Géhéniau J., Physica, 16, 822 (1950) («Вопросы»).
299. Géhéniau J., Demeur M., Physica, 17, 71 (1951) («Вопросы»).
300. Гельфанд И. М., Шапиро З. Я., УМН, 7, вып. 1 (1952) (гл. 1, § 5).
301. Gell-Mann M., Low F., Phys. Rev., 84, 350 (1951) (гл. 11, § 6; гл. 17, § 1, 6). [Имеется перевод: ПСФ, № 10, 43 (1955).]
302. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Phys. Rev., 91, 398 (1953) (гл. 11, § 2, 3, 5).
303. Gell-Mann M., Phys. Rev., 92, 833 (1953) (гл. 10, § 4, 5).
304. Gell-Mann M., Low F., Phys. Rev., 95, 1300 (1954) (гл. 17, § 2, 3). [Имеется перевод: ПСФ, № 3, 145 (1955).]
305. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Thirring W., Phys. Rev., 95, 1612 (1954) (гл. 12, § 4; гл. 18, § 4). [Имеется перевод: ПСФ № 2, 62 (1957).]
306. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Phys. Rev., 96, 1433 (1954) (гл. 17, § 5).

307. Gell-Mann M., Pais A., Proc. of the 1954 Glasgow Conf. on Nuclear and Meson Physics, London, 1955 (гл. 10, § 4).
308. Gell-Mann M., Pais A., Phys. Rev., **97**, 1387 (1955) (гл. 10, § 5).
309. Gell-Mann M., Nuovo Cim., **4**, Suppl., **2**, 848 (1956) (гл. 10, § 1, 3, 4, 6).
310. Gell-Mann M., Proc. of Sixth Annual Rochester High Energy Conf., 1956, New York, 1956 (гл. 12, § 6; гл. 18, § 5).
311. Gell-Mann M., Brueckner K., Phys. Rev., **106**, 364 (1957) (гл. 6, § 11).
312. Gell-Mann M., Phys. Rev., **106**, 367 (1957) (гл. 6, § 11).
313. Gell-Mann M., Phys. Rev., **106**, 1296 (1957) (гл. 10, § 1, 4, 5).
314. Gell-Mann M., Rosenfeld A. H., Ann. Rev. Nucl. Sci., **7**, 407 (1957) (гл. 10, § 1, 4). [Имеется перевод: ПСФ, № 4, 14 (1958).]
315. Gell-Mann M., Lévy M., Nuovo Cim., **16**, 705 (1960) («Вопросы»).
316. Gilbert W., Screation G. R., Phys. Rev., **104**, 1158 (1956) (гл. 18, § 4).
317. Glaser V., Zimmermann W., Zs. f. Phys., **134**, 346 (1952) (гл. 16, § 8).
318. Glaser V., Källén G., Nucl. Phys., **2**, 706 (1956/57) (гл. 12, § 2).
319. Glaser V., Lehmann H., Zimmermann W., Nuovo Cim., **6**, 1122 (1957) (гл. 18, § 2).
320. Glauber R. J., Phys. Rev., **84**, 395 (1951) (гл. 15, § 3, 4).
321. Glauber R. J., Boulder Summer School Lecture Notes. Vol. I of Lectures in Theoretical Physics, ed. by W. E. Brittin and L. G. Dunham, New York, 1959 («Вопросы»).
322. Goldberger M. L., Phys. Rev., **97**, 508 (1955) (гл. 18, § 4). [Имеется перевод: ПСФ, № 2, 82 (1957).]
323. Goldberger M. L., Phys. Rev., **99**, 979 (1955) (гл. 18, § 4). [Имеется перевод: ПСФ, № 2, 110 (1957).]
324. Goldberger M. L., Nambu Y., Oehme R., Ann. of Phys., **2**, 226 (1957) (гл. 18, § 4).
325. Goldberger M. L., Proc. of Eighth Annual High Energy Nuclear Phys. Conference at CERN, p. 207, CERN, Geneva, 1958 (гл. 10, § 6).
326. Goldberger M. L., Proc. of the Midwest Conference on Theoretical Physics, p. 60, Purdue University, 1960 («Вопросы»).
327. Goldberger M. L., Lectures Given at les Houches, Summer, 1960 (гл. 18, § 4).
328. Goldberger M. L., Oehme R., The Theory and Applications of Dispersion Relations (в печати) (гл. 18, § 4).
329. Goldhaber M., Phys. Rev., **101**, 433 (1956) (гл. 10, § 1).
330. Goldstein J. S., Phys. Rev., **91**, 1516 (1953) (гл. 17, § 6).
331. Good R. H., Rev. Mod. Phys., **27**, 187 (1955) (гл. 4, § 2).
332. Gordon W., Zs. f. Phys., **40**, 117 (1926) (гл. 3, § 1).
333. Gordon W., Zs. f. Phys., **40**, 121 (1926) (гл. 3, § 1).
334. Gordon W., Zs. f. Phys., **48**, 11 (1928) (гл. 4, § 8).
335. Goursat E., Hedrick E. R., A Course in Mathematical Analysis, Vol. 1, Boston, 1904 (гл. 15, § 1). (Имеется перевод: Е. Гурса, Курс математического анализа, том 1, М.—Л., 1933, части 1 и 2.)
336. Grawert G., Lüders G., Rollnik H., Fort. d. Phys., **7**, 291 (1959) (гл. 14, § 6). [Имеется перевод: УФН, **71**, 289 (1960).]
337. Green H. S., Biswas S. N., Progr. Theor. Phys. (Japan), **18**, 121 (1957) (гл. 17, § 6).
338. Greenberg O. W., Диссертация, Princeton University, 1956 (гл. 18, § 2).
339. Greenberg O. W., Schweber S. S., Nuovo Cim., **8**, 378 (1958) (гл. 12, § 1, 3).
340. Greenberg O. W., Phys. Rev., **115**, 706 (1959) («Вопросы»).
341. Gupta S. N., Proc. Phys. Soc., **A63**, 681 (1950) (гл. 9, § 1 и 2).
342. Gupta S. N., Phys. Rev., **77**, 294L (1950) (гл. 15, § 1).

343. Gupta S. N., Proc. Phys. Soc., A64, 426 (1951) (гл. 16, § 8).
344. Gupta S. N., Phys. Rev., 117, 1146 (1960) (гл. 15, § 8).
345. Güttinger W., Nuovo Cim., 10, 1 (1958) (гл. 16, § 1).
346. Güttinger W., Nucl. Phys., 9, 429 (1958) (гл. 16, § 1).
347. Haag R., Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd., 29, No. 12 (1955) (гл. 2, § 3; гл. 7, § 1; гл. 17, § 4; гл. 18, § 2; «Вопросы»).
348. Haag R., Nuovo Cim., 5, 203 (1957) (гл. 12, § 4).
349. Haag R., Phys. Rev., 112, 669 (1958) (гл. 18, § 2).
350. Haag R., Luzzatto G., Nuovo Cim., 13, 415 (1959) (гл. 12, § 4).
351. Haag R., Nuovo Cim., 14, Suppl., No. 1, 131 (1959) (гл. 18, § 2).
352. Haber-Schaim U., Phys. Rev., 104, 1113 (1956) (гл. 18, § 4).
353. Hack M. N., Phys. Rev., 96, 196 (1954) (гл. 11, § 3).
354. Hagedorn R., Nuovo Cim., 12, Ser. X, Suppl., 73 (1959) (гл. 1, § 4).
355. Hall D., Wightman A. S., Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd., 31, No. 5 (1957) (гл. 18, § 1; «Вопросы»).
356. Halpern O., Phys. Rev., 44, 855 (1934) (гл. 16, § 1).
357. Harriman J. M., Phys. Rev., 101, 594 (1956) (гл. 15, § 2).
358. Hartree D. R., Proc. Cambr. Phil. Soc., 24, 89 (1928) (гл. 6, § 11).
359. Hayashi C., Munakata Y., Progr. Theor. Phys. (Japan), 7, 481 (1952) (гл. 17, § 6). [См. исправления: *ibid*, 8, 142 (1952).]
360. Heine V., Phys. Rev., 107, 620 (1957) (гл. 2, § 2).
361. Heine V., Group Theory in Quantum Mechanics, London, 1960 («Вопросы»). (Имеется перевод: В. Хейне, Теория групп в квантовой механике, ИЛ, 1963.)
362. Heisenberg W., Pauli W., Zs. f. Phys., 56, 1 (1929) (гл. 15, § 1).
363. Heisenberg W., Pauli W., Zs. f. Phys., 59, 168 (1930) (гл. 6; гл. 15, § 1).
364. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 65, 4 (1930) (гл. 11, § 3).
365. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 77, 1 (1932) (гл. 10, § 4).
366. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 90, 209 (1934) (гл. 4, § 7; гл. 15, § 5).
367. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 92, 692 (1934) (гл. 4, § 7; гл. 15, § 5). (См. также [369], где даны некоторые исправления.)
368. Heisenberg W., Leipziger Berichten, 86, 317 (1934) (гл. 13, § 1; гл. 15, § 5).
369. Heisenberg W., Euler E., Zs. f. Phys., 98, 714 (1936) (гл. 15, § 5; гл. 16, § 1).
370. Heisenberg W., Ann. d. Phys., 32, 20 (1938) (гл. 11, § 3).
371. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 120, 513 (1943) (гл. 11, § 3, гл. 13, § 1).
372. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 120, 673 (1943) (гл. 11, § 3; гл. 13, § 1).
373. Heisenberg W., Rev. Mod. Phys., 29, No. 3, 269 (1957) (гл. 10, § 1). (Имеется перевод в [909], стр. 221.)
374. Heisenberg W., Nucl. Phys., 4, 532 (1957) (гл. 12, § 2). (Имеется перевод в [909], стр. 175.)
375. Heitler W., Proc. Roy. Irish Acad., 49, 1 (1943) (гл. 3, § 4).
376. Heitler W., The Quantum Theory of Radiation, 2d ed., Oxford, 1944 (гл. 14; § 5; гл. 15, § 1). (Имеется перевод 3-го изд.: Гайтлер В., Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.)
377. Hill E. L., Rev. Mod. Phys., 23, 253 (1951) (гл. 7, § 7).
378. Hofstadter R., Ann. Rev. Nucl. Sci., 7, 231 (1957) (гл. 2, § 3; гл. 4, § 8; гл. 14, § 1; гл. 16, § 1).
379. Hofstadter R., Bumiller F., Yearian M. R., Rev. Mod. Phys., 30, 482 (1958) (гл. 17, § 5).
380. Hofstadter R., Proc. of Tenth Annual Rochester High Energy Conference, New York, 1960 (гл. 17, § 5).
381. Höhler G., Zs. f. Phys., 152, 546 (1958) (гл. 12, § 2).
382. Horwitz L., Phys. Rev., 108, 886 (1957) (гл. 12, § 4).
383. Huff L. D., Phys. Rev., 38, 501 (1931) (гл. 4, § 8).

384. Hurst C. A., Phys. Rev., 85, 920L (1952) (гл. 17, § 6).
385. Hurst C. A., Proc. Roy. Soc., A214, 44 (1952) (гл. 17, § 6).
386. Hurst C. A., Proc. Cambr. Phil. Soc., 48, 625 (1952) (гл. 17, § 6).
387. Hülleraas E. A., Zs. f. Phys., 140, 626 (1955) (гл. 4, § 8).
388. Jackson J. D., The Physics of Elementary Particles, Princeton, 1958 (гл. 10).
389. Jahn H., Fort. d. Phys., 7, 451 (1959) («Вопросы»).
390. Jauch J. M., Rohrlich F., Helv. Phys. Acta, 27, 613 (1954) (гл. 16, § 6).
391. Jauch J. M., Rohrlich F., Phys. Rev., 98, 181 (1955) (гл. 15, § 4).
392. Jauch J. M., Rohrlich F., The Theory of Photons and Electrons, Cambridge, 1955 (гл. 15, § 7).
393. Jauch J. M., Helv. Phys. Acta, 30, 143 (1957) («Вопросы»).
394. Jean M., Ann. de phys., 8, 338 (1953) (гл. 7).
395. Johnson K., Phys. Rev., 112, 1367 (1958) (гл. 17, § 3).
396. Johnson M. H., Lippmann B. A., Phys. Rev., 76, 828 (1949) (гл. 4, § 8).
397. Jordan P., Klein O., Zs. f. Phys., 45, 751 (1927) (гл. 6).
398. Jordan P., Pauli W., Zs. f. Phys., 47, 151 (1928) (гл. 9, § 1).
399. Jordan P., Wigner E. P., Zs. f. Phys., 47, 631 (1928) (гл. 6, гл. 8, § 1).
400. Jost R., Phys. Rev., 72, 815 (1947) (гл. 15, § 4, 6).
401. Jost R., Luttinger J. M., Helv. Phys. Acta, 23, 201 (1950) (гл. 16, § 1, 2).
402. Jost R., Luttinger J. M., Slotnick M., Phys. Rev., 80, 189 (1950) (гл. 14, § 5).
403. Jost R., Pais A., Phys. Rev., 82, 840 (1951) (гл. 16, § 8).
404. Jost R., Helv. Phys. Acta, 30, 409 (1957) (гл. 18, § 1).
405. Jost R., Lehmann H., Nuovo Cim., 5, 1598 (1957) (гл. 18, § 3).
406. Jost R., Helv. Phys. Acta, 31, 263 (1958) (гл. 18, § 2, 4).
407. Källén G., Helv. Phys. Acta, 22, 637 (1949) (гл. 15, § 5).
408. Källén G., Arkiv f. Phys., 2, No. 37, 371 (1950) (гл. 13, § 1; гл. 15, § 5; гл. 17, § 4).
409. Källén G., Helv. Phys. Acta, 25, 417 (1952) (гл. 16, § 8; гл. 17, § 1, 2).
410. Källén G., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., 27, No. 12 (1953) (гл. 16, § 7).
411. Källén G., Helv. Phys. Acta, 26, 755 (1953) (гл. 16, § 7).
412. Källén G., Physica, 19, 850 (1953) (гл. 17, § 4).
413. Källén G., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., 27, No. 12 (1954) (гл. 17, § 3).
414. Källén G., Sabry A., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., 29, No. 17 (1955) (гл. 15, § 5).
415. Källén G., Pauli W., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., 30, No. 7 (1955) (гл. 12, § 2).
416. Källén G., CERN Theoretical Division Tech. Report 57-43 (гл. 12, § 2).
417. Källén G., Wightman A. S., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., 1, No. 6 (1958) (гл. 18, § 1, 2).
418. Källén G., Wilhelmsson H., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Skr., 1, No. 9 (1959) (гл. 17, § 3; гл. 18, § 1).
419. Källén G., Toll J. S., Helv. Phys. Acta, 23, 753 (1960) (гл. 18, § 1).
420. Kanewawa S., Tomonaga S., Progr. Theor. Phys. (Japan), 3, 1 (1948) (гл. 14, § 3).
421. Kanewawa S., Tomonaga S., Progr. Theor. Phys. (Japan), 3, 101 (1948) (гл. 14, § 3).
422. Karplus R., Kroll N. M., Phys. Rev., 77, 536 (1950) (гл. 15, § 3, 4 и 6; гл. 16, § 3 и 5).
423. Karplus R., Neuman M., Phys. Rev., 80, 380 (1950) (гл. 16, § 1).
424. Karplus R., Neuman M., Phys. Rev., 83, 776 (1950) (гл. 16, § 1).

425. Karplus R., Klein A., Phys. Rev., 85, 972 (1952) (гл. 15, § 7). (Имеется перевод в [911], стр. 284.)
426. Karplus R., Klein A., Schwinger J., Phys. Rev., 86, 288 (1952) (гл. 15, § 2, 4, 7). (Имеется перевод в [911], стр. 305.)
427. Karplus R., Klein A., Phys. Rev., 87, 848 (1952) (гл. 15; гл. 17, § 6).
428. Karplus R., Ruderman M., Phys. Rev., 98, 771 (1955) (гл. 18, § 4). [Имеется перевод: ПСФ, № 2, 87 (1957).]
429. Karplus R., Sommerfield C., Wichmann E. H., Phys. Rev., 111, 1187 (1958) (гл. 18, § 4).
430. Karplus R., Sommerfield C. M., Wichmann E. H., Phys. Rev., 114, 376 (1959) (гл. 18, § 4).
431. Karzas W. J., Watson W. K. R., Zachariazen F., Phys. Rev., 110, 253 (1958) (гл. 12, § 4).
432. Kashlun F., Nuovo Cim., 12, 541 (1959) (гл. 18, § 2).
433. Kashlun F., Препринт ОИЯИ Е-485, Дубна (1960) (гл. 18, § 2).
434. Kato M., Takeda G., Suppl., Progr. Theor. Phys. (Japan), No. 7, 35 (1959) («Вопросы»).
435. Kazes E., Phys. Rev., 107, 1131 (1957) (гл. 12, § 4).
436. Kazes E., Nuovo Cim., 13, 1226 (1959) (гл. 16, § 5; гл. 17, § 5).
437. Kelly E. J., Phys. Rev., 79, 399 (1950) (гл. 10, § 7).
438. Kemmer N., Helv. Phys. Acta, 10, 112 (1937) (гл. 16, § 1).
439. Kemmer N., Ludwig G., Helv. Phys. Acta, 10, 182 (1937) (гл. 16, § 1).
440. Kemmer N., Salam A., Proc. Roy. Soc., A230, 266 (1955) (гл. 17, § 6).
441. Kemmer N., Pursey D. L., Polkinghorne J. C., Reports on Progress in Physics, 22, 368 (1959) (гл. 10, § 1, 5).
442. Khuri N. N., Phys. Rev., 107, 1148 (1957) («Вопросы»).
443. Kibble T. W. B., Polkinghorne J. C., Nuovo Cim., 8, 74 (1958) (гл. 4, § 8).
444. Kinoshita T., Progr. Theor. Phys. (Japan), 5, 473 (1950) (гл. 14, § 3).
445. Kinoshita T., Nambu Y., Progr. Theor. Phys. (Japan), 5, 749 (1950) (гл. 14, § 3).
446. Klein A., Phys. Rev., 90, 1101 (1953) (гл. 17, § 6).
447. Klein A., Phys. Rev., 92, 1017 (1953) (гл. 17, § 6).
448. Klein A., Mesormick B., Phys. Rev., 98, 1428 (1955) (гл. 12, § 3).
449. Klein A., Phys. Rev., 99, 998 (1955) (гл. 17, § 5).
450. Klein A., Phys. Rev., 104, 1131 (1956) [см. также Phys. Rev., 104, 1136 (1956)] (гл. 12, § 4).
451. Klein A., Progr. Theor. Phys. (Japan), 20, 257 (1958) (гл. 17, § 6).
452. Klein A., Mesormick B., Progr. Theor. Phys. (Japan), 20, 876 (1958) (гл. 17, § 6).
453. Klein A., Journ. Math. Phys., 1, 41 (1960) («Вопросы»).
454. Klein O., Zs. f. Phys., 37, 895 (1926) (гл. 3, § 1).
455. Klein O., Nishina Y., Zs. f. Phys., 52, 853 (1929) (гл. 14, § 5).
456. Klein O., Nature, 161, 897 (1948) (гл. 10, § 6).
457. Kleitman D., Nucl. Phys., 11, 459 (1959) (гл. 18, § 1 и 2).
458. Клернер А., McIntosh H. V., The Theory of the Three-Dimensional Rotation Group, Rias Technical Reports 58—5, 6, 7, 1958 (гл. 1, § 6).
459. Koba Z., Progr. Theor. Phys., (Japan), 4, 319 (1949) (гл. 15, § 3).
460. Конорински Е. J., Ann. Rev. Nucl. Sci., 9, Annual Review, Stanford (1959) (гл. 10, § 6).
461. Kramers H. A., Proc. Kgl. Ned. Acad. Wet., 40, 814 (1937) (гл. 4, § 7).
462. Kramers H. A., Rapports du 8e Conseil Solvay 1948, p. 241, Bruxelles, 1950 (гл. 15, § 1).

463. Kristensen P., Møller C., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., **27**, No. 7 (1952) (гл. 18, § 2).
464. Kroll N. M., Lamb W. E., Phys. Rev., **75**, 388 (1949) (гл. 15, § 2, 7).
465. Kroll N. M., Phys. Rev., **75**, 1321A (1949) (гл. 13, § 1).
466. Kroll N. M., Pollock F., Phys. Rev., **86**, 876 (1952) (гл. 15, § 4, 7).
467. Kroll N. M., Ruderман M. A., Phys. Rev., **93**, 233 (1954) (гл. 17, § 5).
[Имеется перевод: ПСФ, № 3, 167 (1955).]
468. Kudar J., Ann. d. Phys., **81**, 632 (1926) (гл. 3, § 1).
469. Lamb W. E., Retherford R. C., Phys. Rev., **72**, 241 (1947) (гл. 15, § 2).
(Имеется перевод в [919], стр. 45.)
470. Lamb W. E., Reports on Progress in Physics, **14**, 23 (1951) (гл. 15, § 2).
471. Ландау Л. Д., Peierls R., Zs. f. Phys., **62**, 188 (1930) (гл. 6).
472. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М., ДАН СССР, **95**, 773 (1954); **96**, 261 (1954) (гл. 15, § 5).
473. Ландау Л. Д., Халатников И. М., ЖЭТФ, **29**, 89 (1955). (гл. 15, § 5).
474. Ландау Л. Д., в сб. «Niels Bohr and the Development of Physics», New York, 1955. (Имеется перевод: «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, 1958, стр. 75.)
475. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **32**, 405 (1957); Nucl. Phys., **3**, 127 (1957) (гл. 5, § 1; гл. 10, § 1, 2, 6).
476. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **37**, 62 (1959); Nucl. Phys., **13**, 181 (1959) (гл. 17, § 2; гл. 18, § 4).
477. Landé A., Thomas L., Phys. Rev., **60**, 121 (1941) (гл. 15, § 1).
478. Landé A., Thomas L., Phys. Rev., **60**, 514 (1941) (гл. 15, § 1).
479. Landé A., Thomas L., Phys. Rev., **65**, 175 (1944) (гл. 15, § 1).
480. Landé K., Booth E. T., Impeduglia J., Lederman L. M., Chiniowski W., Phys. Rev., **103**, 1901 (1956); а также Phys. Rev., **105**, 1925 (1957) (гл. 10, § 5).
481. Lauzer A. J., Phys. Rev. Lett., **4**, 580 (1960) (гл. 15, § 2, 4, 7).
482. Lee T. D., Phys. Rev., **95**, 1329 (1954) (гл. 12, § 2, 4).
483. Lee T. D., Phys. Rev., **99**, 337 (1955) (гл. 10, § 1).
484. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **102**, 290 (1956) (гл. 5, § 1; гл. 10, § 3).
485. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **104**, 254 (1956) (гл. 5, § 1; гл. 10, § 3).
(Имеется перевод в [912], стр. 13.)
486. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **104**, 822 (1956) (гл. 5, § 1; гл. 10, § 3).
487. Lee T. D., Yang C. N., Nuovo Cim., **3**, 749 (1956) («Вопросы»).
488. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **105**, 1671 (1957) (гл. 5, § 1; гл. 10, § 2, 3)
(Имеется перевод в [912], стр. 46.)
489. Lee T. D., Oehme R., Yang C. N., Phys. Rev., **106**, 340 (1957) (гл. 14, § 6)
(Имеется перевод в [912], стр. 31.)
490. Lehmann H., Nuovo Cim., **11**, 342 (1954) (гл. 17, § 2). [Имеется перевод: ПСФ, № 3, 133 (1955).]
491. Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W., Nuovo Cim., **1**, 205 (1955) (гл. 16, § 1; гл. 17, § 4; гл. 18, § 2; «Вопросы»).
492. Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W., Nuovo Cim., **2**, 425 (1955) (гл. 17, § 3; гл. 18, § 1).
493. Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W., Nuovo Cim., **6**, 319 (1957) (гл. 11, § 3; гл. 18; гл. 18, § 2).
494. Lehmann H., Nuovo Cim., **10**, 579 (1958) (гл. 18, § 4). [Имеется перевод: ПСФ, № 3, 57 (1959).]
495. Lehmann H., Nuovo Cim., **14**, Suppl. No. 1, 153 (1959) (гл. 18, § 4).
496. Lepage J. V., Phys. Rev., **88**, 750 (1952) (гл. 10, § 7).

497. Lévy M. M., Phys. Rev., 88, 72 (1952) (гл. 17, § 6). [Имеется перевод: ПСФ, № 10, 51 (1955).]
498. Lévy M. M., Phys. Rev., 88, 725 (1952) (гл. 17, § 6). [Имеется перевод: ПСФ, № 10, 68 (1955).]
499. Lévy M. M., Marshak R. E., Nuovo Cim., 11, 366 (1954) (гл. 10, § 1).
500. Lévy M. M., Nuovo Cim., 13, 115 (1959) (гл. 12, § 2).
501. Lévy M. M., Nuovo Cim., 14, 612 (1959) (гл. 12, § 2).
502. Lewis H. W., Phys. Rev., 73, 173 (1948) (гл. 15, § 3).
503. Lippmann B. A., Schwinger J., Phys. Rev., 79, 469 (1950) (гл. 11, § 2; гл. 14, § 4).
504. Логунов А. А., Исаев П. С., Nuovo Cim., 10, 917 (1958) (гл. 18, § 4).
505. Lomon E. L., Nucl. Phys., 1, 101 (1956).
506. Lomon E. L., Phys. Rev., 113, 726 (1959) (гл. 15, § 4).
507. Lopuszanski J., Physica, 25, 745 (1959) (гл. 12, § 3).
508. Lorentz H. A., The Theory of Electrons, Leipzig, 1916 (гл. 15, § 1). (Имеется перевод: Г. А. Лоренц, Теория электронов, М.—Л., 1956.)
509. Lorentz H. A., The Collected Papers of Lorentz, Haag (1937) (гл. 15, § 1).
510. Low F., Phys. Rev., 88, 53 (1952) (гл. 15, § 7; гл. 17, § 6).
511. Low F., Phys. Rev., 96, 1428 (1954) (гл. 17, § 5).
512. Low F., Phys. Rev., 97, 1392 (1955) (гл. 11, § 4; гл. 12, § 4; гл. 17, § 4).
513. Low F., Rev. Mod. Phys., 29, 216 (1957) (гл. 12, § 4).
514. Low F., Phys. Rev., 110, 974 (1958) (гл. 17, § 5).
515. Lüders G., Zs. f. Phys., 133, 325 (1952) (гл. 7, § 6, гл. 8, § 3).
516. Lüders G., Zs. f. Naturforsch., 7a, 206 (1952) (гл. 15, § 3).
517. Lüders G., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., 28, No. 5 (1954) (гл. 7, § 6; гл. 8, § 3; гл. 10, § 2; гл. 14, § 6).
518. Lüders G., Ann. of Phys., 2, 1 (1957) (гл. 7, § 6; гл. 8, § 3; гл. 10, § 2; гл. 14, § 6).
519. Lüders G., Zuminо B., Phys. Rev., 110, 1450 (1958) (гл. 18, § 1).
520. Luttinger J. M., Phys. Rev., 74, 893 (1948) (гл. 15, § 4). (Имеется перевод в [919], стр. 86.)
521. MacDowell S. W., Phys. Rev., 116, 774 (1959) (гл. 18, § 4).
522. MacGregor M. H., Moravcsik M. J., Starr H. P., Phys. Rev., 116, 1248 (1959) (гл. 15, § 8).
523. Macke W., Zs. f. Naturforsch., 8a, 599 (1953); 8a, 615 (1953) (гл. 17, § 6).
524. McKinley W. A., Feshbach H., Phys. Rev., 74, 1759 (1948) (гл. 14, § 1).
525. McLennan J. A., Phys. Rev., 106, 821 (1957) («Вопросы»).
526. McManus H., Proc. Roy. Soc., A195, 323 (1948) (гл. 15, § 1).
527. Majorana E., Nuovo Cim., 14, 171 (1937) (гл. 4, § 8; гл. 8, § 3; «Вопросы»).
528. Maki Z., Sato M., Tomonaga S., Progr. Theor. Phys. (Japan), 9, 607 (1953) («Вопросы»).
529. Маленка В. J., Primakoff H., Phys. Rev., 105, 338 (1957) (гл. 8, § 4).
530. Mandelstam S., Proc. Roy. Soc., A233, 248 (1955) (гл. 17, § 6).
531. Mandelstam S., Phys. Rev., 112, 1344 (1958) (гл. 18, § 4). (Имеется перевод в [913], стр. 87.)
532. Mandelstam S., Phys. Rev., 115, 1741 (1959) (гл. 18, § 4). (Имеется перевод в [913], стр. 137).
533. Mandelstam S., Phys. Rev., 115, 1752 (1959) (гл. 18, § 4). (Имеется перевод в [913], стр. 166.)
534. Марков М. А., О систематике элементарных частиц, Изд. АП СССР, 1955; Report to the Sixth Annual Rochester Conference on High Energy Nuclear Physics 1956, New York 1956 (гл. 10, § 1

535. Martin P. C., Schwinger J., Phys. Rev., **115**, 1342 (1959) («Вопросы»).
(Имеется перевод: П. Мартин, Ю. Швингер, Теория систем многих частиц; Ю. Швингер, Броуновское движение квантового осциллятора, ИЛ, 1962.)
536. Matthews J., Диссертация, California Institute of Techn., 1957 (гл. 18, § 4).
537. Matthews J., Phys. Rev., **113**, 381 (1959) (гл. 17, § 2).
538. Matthews P. T., Phys. Rev., **75**, 1270 (1949) (гл. 13, § 1).
539. Matthews P. T., Phys. Rev., **76**, 684L (1949) [см. исправления: **76**, 1489 (L) (1949)] (гл. 14, § 3).
540. Matthews P. T., Phys. Rev., **80**, 292 (1950) (гл. 16, § 8).
541. Matthews P. T., Phil. Mag., **42**, 221 (1951) (гл. 16, § 8).
542. Matthews P. T., Phys. Rev., **81**, 936 (1951) (гл. 16, § 8).
543. Matthews P. T., Salam A., Phys. Rev., **86**, 715 (1952) (гл. 15, § 7; гл. 16, § 8).
544. Matthews P. T., Salam A., Proc. Roy. Soc., **A221**, 128 (1954) (гл. 16, § 8).
[Имеется перевод: ИСФ, № 10, 198 (1955).]
545. Matthews P. T., Salam A., Phys. Rev., **94**, 185 (1954) (гл. 16, § 8).
546. Matthews P. T., Salam A., Nuovo Cim., **2**, 120 (1955) («Вопросы»).
547. Matthews P. T., Nuovo Cim., **6**, 642 (1957) (гл. 10, § 5).
548. Melvin M. A., Rev. Mod. Phys., **32**, No. 3 (1960) («Вопросы»).
549. Michel L., Nuovo Cim., **10**, 319 (1953) (гл. 14, § 6).
550. Michel L., Wightman A. S., Phys. Rev., **98**, 1190 (1955) (гл. 14, § 5).
551. Michel L., Nuovo Cim., **14**, Suppl. No. 1, 95 (1959) («Вопросы»).
552. Mie G., Ann. d. Phys., **85**, 711 (1928) (гл. 7, § 4).
553. Mills R. L., Kroll N. M., Phys. Rev., **98**, 1489 (1955) (гл. 15, § 4, 7; гл. 17, § 6).
554. Minguzzi A., Streater R. F., Nuovo Cim., **17**, 946 (1960) (гл. 18, § 4).
555. Mitra A., Nature, **169**, 1009 (1952) (гл. 15, § 6).
556. Mitra A., Narayanaswamy P., Pande L. K., Nucl. Phys., **10**, 629 (1959) (гл. 15, § 6).
557. Miyazawa H., Phys. Rev., **101**, 1564 (1956) (гл. 12, § 4).
558. Moffat J., Stringfellow M. W., Proc. Roy. Soc., **A254**, 242 (1960) (гл. 16, § 1).
559. Moldauer P., Case K. M., Phys. Rev., **91**, 459A (1953) (гл. 10, § 7).
560. Møller C., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., **23**, No. 1 (1945) (гл. 11, § 3, 4).
561. Møller C., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., **26**, No. 19 (1946) (гл. 11, § 3, 4).
562. Møller C., Ann. de l'Institut Henri Poincaré, **11**, 251 (1949) (гл. 3, § 3; гл. 7, § 4, 7).
563. Møller C., Commun. Dublin Inst. Advanced Stud., **4**, No. 5 (1949) (гл. 3, § 3; гл. 7, § 4, 7).
564. Møller C., The Theory of Relativity, Oxford, 1952 (гл. 3, § 3; гл. 7, § 4 и 7).
565. Mott N. F., Proc. Roy. Soc., **A124**, 425 (1929) (гл. 4, § 8).
566. Mott N. F., Massey H. S. W., The Theory of Atomic Collisions, 2d ed., Oxford, 1949 (гл. 4, § 8). (Имеется перевод: Н. Мотт, Г. Мессия, Теория атомных столкновений, ИЛ, 1951.)
567. Nafe J. E., Nelson E. B., Rabi I. I., Phys. Rev. **71**, 914 (1947) (гл. 15, § 4). (Имеется перевод в [919], стр. 49.)
568. Nakaniishi N., Progr. Theor. Phys. (Japan), **17**, 401 (1957) (гл. 17, § 2; гл. 18, § 1, 4).
569. Nakaniishi N., Progr. Theor. Phys. (Japan), **19**, 159 (1958) (гл. 15, § 4).
570. Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, УМН, **9**, 19 (1954) (гл. 2, § 2, 3).
571. Nambu Y., Phys. Rev., **100**, 394 (1955) (гл. 18, § 4). [Имеется перевод: ИСФ, № 2, 136 (1957.)]
572. Nambu Y., Nuovo Cim., **6**, 1064 (1957) (гл. 17, § 2).

573. Nambu Y., Nuovo Cim., **9**, 610 (1958) (гл. 17, § 2).
574. Newton R., Phys. Rev., **97**, 1162 (1955) (гл. 15, § 6).
575. Newton R., Phys. Rev., **98**, 1514 (1955) (гл. 15, § 6).
576. Newton T. D., Wigner E. P., Rev. Mod. Phys., **21**, 400 (1949) (гл. 2, § 3; гл. 3, § 3; гл. 4, § 6).
577. Nishijima K., Progr. Theor. Phys. (Japan), **6**, 37 (1951) (гл. 16, § 8).
578. Nishijima K., Progr. Theor. Phys. (Japan), **10**, 549 (1953) (гл. 17, § 6).
579. Nishijima K., Nakano T., Progr. Theor. Phys. (Japan), **10**, 581 (1953) (гл. 10, § 4).
580. Nishijima K., Progr. Theor. Phys. (Japan), **12**, 107 (1954) (гл. 10, § 4).
581. Nishijima K., Progr. Theor. Phys. (Japan), **13**, 285 (1955) [см. там же, **14**, 527 (1955)] (гл. 10, § 4).
582. Nishijima K., Fort. d. Phys., **4**, 519 (1956) (гл. 10, § 1).
583. Nishijima K., Progr. Theor. Phys. (Japan), Suppl., No. 3, 438 (1956) («Вопросы»).
584. Nishijima K., Progr. Theor. Phys. (Japan), **17**, 765 (1957) (гл. 18, § 2).
585. Nishijima K., Progr. Theor. Phys. (Japan), **11**, 995 (1958) (гл. 18, § 2).
586. Nishijima K., Phys. Rev., **119**, 485 (1960) (гл. 18, § 2, 4; «Вопросы»).
587. Nishina Y., Zs. f. Phys., **52**, 869 (1929) (гл. 14, § 5).
588. Norton R. E., Klein A., Phys. Rev., **109**, 584 (1958) (гл. 12, § 4).
589. Norton R. E., Klein A., Phys. Rev., **109**, 991 (1958) (гл. 12, § 4).
590. Новожиллов Ю. В., Тулуб А. В., УФН, **61**, 53 (1957) (гл. 7, § 5).
591. Noyes H. P., Edwards D. N., Phys. Rev., **118**, 1409 (1960) (гл. 18, § 4).
592. Oehme R., Phys. Rev., **102**, 1174 (1955) (гл. 18, § 4). [Имеется перевод: ПСФ, № 2, 194 (1957).]
593. Oehme R., Phys. Rev., **100**, 1503 (1955) (гл. 18, § 4). [Имеется перевод: ПСФ, № 2, 167 (1957).]
594. Oehme R., Nuovo Cim., **10**, 1316 (1956) (гл. 18, § 4).
595. Oehme R., Nuovo Cim., **13**, 778 (1958) (гл. 18, § 4).
596. Oehme R., Taylor J. G., Phys. Rev., **113**, 37 (1959) (гл. 18, § 4).
597. Okubo S., Progr. Theor. Phys. (Japan), **11**, 80 (1954) (гл. 10, § 2).!
598. Okubo S., Feldman D., Phys. Rev., **117**, 279, 292 (1960) («Вопросы»).
599. Окунь Л. Б., Report to the 1958 Ann. Intern. Conf. on High Energy Physics at CERN, Geneva, 1958 (гл. 10, § 1).
600. Окунь Л. Б., УФН, **68**, 449 (1959); Ann. Rev. Nucl. Sci., **9**, Ann. Rev., Palo Alto, Calif. (1959) (гл. 10, § 1).
601. Окунь Л. Б., Рудник А. П., Nucl. Phys., **15**, 264 (1960) (гл. 17, § 2; гл. 18, § 4).
602. Omnes R., Nuovo Cim., **5**, 983 (1957) («Вопросы»).
603. Omnes R., Nuovo Cim., **8**, 316 (1958) («Вопросы»).
604. Oppenheimer J. R., Phys. Rev., **35**, 461 (1930) (гл. 15, § 1).
605. Oppenheimer J. R., Phys. Rev., **35**, 939 (1930) (гл. 4, § 7).
606. Osborn R. K., Phys. Rev., **86**, 340 (1952) (гл. 12, § 4).
607. Ozaki S., Progr. Theor. Phys. (Japan), **14**, 511 (1955) («Вопросы»).
608. Pao Pong Y., Progr. Theor. Phys. (Japan), **21**, 640 (1959) (гл. 4, § 6).
609. Pais A., On the Theory of Elementary Particles, Amsterdam, Verh. Kgl. Aca., Vol. 19, 1947 (гл. 15, § 1).
610. Pais A., Epstein S. T., Rev. Mod. Phys., **21**, 445 (1949) (гл. 15, § 1).
611. Pais A., Phys. Rev., **86**, 633 (1952) (гл. 10, § 1, 4, 5; гл. 14, § 6).
612. Pais A., Jost R., Phys. Rev., **87**, 871 (1952) (гл. 14, § 6; гл. 16, § 1).
613. Pais A., Piccioni O., Phys. Rev., **100**, 1487 (1955) (гл. 10, § 5).
614. Pais A., Phys. Rev., **110**, 574 (1958) (гл. 10, § 5; гл. 12, § 5).
615. Pais A., Phys. Rev., **110**, 1480 (1958) (гл. 10, § 5; гл. 12, § 5).
616. Pais A., Ann. of Phys., **9**, 548 (1960) («Вопросы»).

617. P a k e G. E., Feenberg E., Notes on the Theory of Angular Momentum, Cambridge, 1953 (гл. 12, § 4).
618. P a n d i t L. K., Nuovo Cim., 11, Ser. X, Suppl. (1959) (гл. 9, § 2; гл. 12, § 2).
619. P a p a r e t r o u A., Acad. Athens., 14, 540 (1939) (гл. 3, § 3).
620. P a u l i W., Relativitätstheorie, *Enz. der Math. Wiss.*, 5, 539 (1921) (гл. 15, § 1).
(Имеется перевод: В. П а у л и, Теория относительности, М.—Л., 1947.)
621. P a u l i W., *Zs. f. Phys.*, 43, 601 (1927) (гл. 4, § 6).
622. P a u l i W., *Handbuch der Physik*, Bd. 24/1, Berlin, 1933 (гл. 8, § 1). (Имеется перевод: В. П а у л и, Общие принципы волновой механики, М.—Л., 1948.)
623. P a u l i W., W e i s s k o r f V., *Helv. Phys. Acta*, 7, 709 (1934) (гл. 3, § 1; гл. 4, § 1; гл. 7).
624. P a u l i W., *Zeeman Verhandelingen*, 31, Haag, 1935 (гл. 4, § 2, 8).
625. P a u l i W., *Ann. de l'Institut Henri Poincaré*, 6, 137 (1936) (гл. 4, § 2).
626. P a u l i W., F i e r z M., *Nuovo Cim.*, 15, 167 (1938) (гл. 15, § 4).
627. P a u l i W., *Phys. Rev.*, 58, 716 (1940) (гл. 8, § 1; гл. 18, § 1).
628. P a u l i W., B e l i n f a n t e F. J., *Physica*, 7, 177 (1940) (гл. 8, § 1; гл. 18, § 1).
629. P a u l i W., *Rev. Mod. Phys.*, 13, 203 (1941) (гл. 4, § 8; гл. 7, § 7; «Вопросы»)
(Имеется перевод: В. П а у л и, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947.)
630. P a u l i W., *Rev. Mod. Phys.*, 15, 175 (1943) (гл. 12, § 2).
631. P a u l i W., V i l l a r s F., *Rev. Mod. Phys.*, 21, 434 (1949) (гл. 15, § 1, 5). (Имеется перевод в сборнике [919].)
632. P a u l i W., В сб. «Niels Bohr and the Development of Physics», New York, 1955
(гл. 10, § 2; гл. 14, § 6). (Имеется перевод: «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, 1958.)
633. P a u l i W., *Continuous Groups in Quantum Mechanics*, CERN Report 56-31, Geneva (гл. 1, § 5, 6).
634. P a u l i W., *Handbuch der Physik*, Bd. V, Berlin, 1958 (гл. 1, § 1).
635. P e i e r l s R. E., M e m a n u s H., *Phys. Rev.*, 70, 795A (1946) (гл. 15, § 1).
636. P e i e r l s R. E., *Proc. Roy. Soc.*, 214A, 143 (1952) (гл. 17, § 1).
637. P e t e r m a n n A., *Helv. Phys. Acta*, 30, 407 (1957) (гл. 15, § 4, 5).
638. P e t e r m a n n A., *Fort. d. Phys.*, 6, 505 (1958) (гл. 15, § 2, 7).
639. P h i l l i p s R. J. N., *Reports on Progress in Physics*, XXII, 562 (1959) (гл. 15, § 8; «Вопросы»).
640. P i n e s D., *Solid State Physics*, 1, 368 (1955).
641. P i r e n n e J., *Physica*, 15, 1023 (1949) (гл. 6).
642. P o i n c a r é H., *Compt. Rend.*, 40, 1504 (1905) (гл. 15, § 1).
643. P o i n c a r é H., *Rend. Palermo*, 21 (1906) (гл. 15, § 1).
644. P o i n c a r é H., *La Mécanique Nouvelle*, Paris, 1924 (гл. 15, § 1).
645. P o l k i n g h o r n e J. C., *Proc. Roy. Soc.*, A230, 272 (1955) («Вопросы»).
646. П о м е р а н ч у к И. Я., *ЖЭТФ*, 34, 725 (1958) (гл. 18, § 4).
647. P o n d T. A., D i c k e R. H., *Phys. Rev.*, 85, 489 L (1952) (гл. 4, § 7).
648. П о н т р я г и н Л. С., *Непрерывные группы*, М.—Л., 1938; (имеется дополненное издание, М., 1954) (гл. 1, § 5).
649. P o w e l l J. L., *Phys. Rev.*, 75, 32 (1949) («Вопросы»).
650. P r a n g e R., *Phys. Rev.*, 110, 240 (1958) (гл. 15, § 4).
651. P r o s p e r i G. M., S c o t t i A., *Nuclear Physics*, 13, 140 (1959) («Вопросы»).
652. P r u s e M. H. L., *Proc. Roy. Soc.*, A195, 62 (1948) (гл. 3, § 3; гл. 7, § 4, 7).
653. P u r r i G., *Nuovo Cim.*, 5, 505 (1948) (гл. 12, § 6).
654. P u r r i G., *Nuovo Cim.*, 6, ser. IX, 194 (1949) (гл. 10, § 6).
655. P u r r i G., S t a n g h e l l i n i A., *Nuovo Cim.*, 5, 1305 (1957) (гл. 18, § 4).
656. R a b i I. I., *Zs. f. Phys.*, 49, 7 (1928) (гл. 4, § 8).
657. R a s a h G., *Nuovo Cim.*, 14, 322 (1937) (гл. 4, § 8; гл. 8, § 3).

658. R a s a h G., Phys. Rev., 70, 406 (1946) (гл. 16, § 1).
659. R a s a h G., Nuovo Cimento, 14, Suppl., 75 (1959) (гл. 1, § 6).
660. R a v e n h a l l D. G., Rev. Mod. Phys., 30, 430 (1958) (гл. 4, § 8).
661. R e d m o n d P. J., Phys. Rev., 112, 1404 (1958) (гл. 17, § 2, 3).
662. R e d m o n d P. J., U r e t s k i J. L., Phys. Rev., Lett., 1, 147 (1958) (гл. 16, § 8; гл. 17, § 3).
663. R e d m o n d P. J., U r e t s k i J. L., Ann. of Phys., 9, 106 (1960) (гл. 17, § 3).
664. R i v i e r D., Helv. Phys. Acta., 22, 265 (1949) (гл. 15, § 1).
665. R o d b e r g L. S., Phys. Rev., 106, 1090 (1957) (гл. 12, § 4).
666. R o h r l i c h F., Phys. Rev., 77, 357 (1950) (гл. 15, § 1).
667. R o h r l i c h F., Phys. Rev., 80, 666 (1950) (гл. 14, § 3, гл. 16, § 1).
668. R o h r l i c h F., G l u c k s t e r n R. L., Phys. Rev., 86, 1 (1952) (гл. 16, § 1).
669. R o h r l i c h F., Am. Journ. of Physics, 28, 639 (1960) (гл. 15, § 1).
670. R o m a n P., Theory of Elementary Particles, Amsterdam, 1960 (гл. 1, § 6; «Вопросы»).
671. R o s e M. E., Elementary Theory of Angular Momentum, New York, 1957 (гл. 12, § 4).
672. R o s e n N., Phys. Rev., 55, 94 (1939) (гл. 15, § 1).
673. R o s e n N., M e n i u s A., Phys. Rev., 62, 436 (1942) (гл. 15, § 1).
674. R o s e n b l u t h M. N., Phys. Rev., 79, 615 (1950) («Вопросы»).
675. R o s e n f e l d L., Zs. f. Phys., 70, 454 (1931) (гл. 15, § 1).
676. R o s e n f e l d L., Physica, 19, 859 (1953) (гл. 7, § 5; гл. 8, § 2; гл. 9, § 2).
677. R o s e n f e l d L., В сб. «Niels Bohr and the Development of Physics», New York, 1955 (гл. 8, § 2, гл. 9, § 2). (Имеется перевод: «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, 1958.)
678. R u i j g r o k Th. W., V a n H o v e L., Physica, 22, 880 (1956) (гл. 12, § 3).
679. R u i j g r o k Th. W., Physica, 24, 185 (1958) (гл. 12, § 3).
680. R u i j g r o k Th. W., Physica, 24, 205 (1958) (гл. 12, § 3).
681. R u i j g r o k Th. W., Physica, 25, 357 (1959) (гл. 12, § 3).
682. S a c h s R. G., Phys. Rev., 87, 1100 (1952) (гл. 7, § 6).
683. S a k a t a S., T a k e t a n i M., Proc. Phys. Math. Soc. (Japan), 22, 757 (1940) (гл. 3, § 4).
684. S a k a t a S., Progr. Theor. Phys. (Japan), 16, 686 (1956) (гл. 10, § 1).
685. S a k u r a i J. J., Nuovo Cim., 7, 1306 (1958) (гл. 10, § 6).
686. S a k u r a i J. J., Phys. Rev., 109, 980 (1958) («Вопросы»).
687. S a k u r a i J. J., Ann. of Phys., 11, 1 (1960) («Вопросы»).
688. S a l a m A., Phys. Rev., 79, 910 (1950) (гл. 16, § 8).
689. S a l a m A., Phys. Rev., 82, 217 (1951) (гл. 16, § 1, 4, 8).
690. S a l a m A., Phys. Rev., 84, 426 (1951) (гл. 16, § 1, 4, 8).
691. S a l a m A., Phys. Rev., 86, 731 (1952) (гл. 16, § 8).
692. S a l a m A., M a t t h e w s P. T., Phys. Rev., 90, 690 (1953) (гл. 15, § 7).
693. S a l a m A., P o l k i n g h o r n e J. C., Nuovo Cim., 2, 685 (1955) (гл. 10, § 5).
694. S a l a m A., Nuovo Cim., 5, 299 (1957) (гл. 5, § 1). (Имеется перевод в [912].)
695. S a l a m A., Lectures on the Analytic Properties of Expectation Values of Products of Field Operators, University of Rochester, 1958, AT (30—1)-875, NYO-8796 («Вопросы»).
696. S a l p e t e r E. E., B e t h e H. A., Phys. Rev., 84, 1232 (1951) (гл. 17, § 6). (Имеется перевод в [911].)
697. S a l p e t e r E. E., N e w c o m b W. A., Phys. Rev., 87, 150 (1952) (гл. 17, § 6).
698. S a l p e t e r E. E., Phys. Rev., 87, 328 (1952) (гл. 17, § 6). (Имеется перевод в [911].)
699. S a l z m a n G., Phys. Rev., 99, 973 (1955) (гл. 12, § 4; гл. 15, § 4).
700. S a u t e r F., Zs. f. Phys., 69, 742 (1931) (гл. 4, § 8).
701. S c a r f F. L., Phys. Rev., 100, 912 (1955) (гл. 17, § 6).
702. S c a r f F. L., Phys. Rev., 100, 913 (1955) (гл. 17, § 6)

703. Schiff L. I., Quantum Mechanics, New York, 1949 (гл. 3, § 4). (Имеется перевод с издания 1955 г.: Л. Шифф, Квантовая механика, ИЛ, 1957.)
704. Schmidt K., Bauman K., Nuovo Cim., 4, 860 (1956) (гл. 18, § 1).
705. Schnitzer H. J., Salzman G., Phys. Rev., 112, 1802 (1958); Phys. Rev., 113, 1153 (1959) (гл. 18, § 4).
706. Schurr A. A., Pidd R. W., Crane H. R., Phys. Rev., 121, 1 (1961) (гл. 15, § 4).
707. Schwartz L., Théorie des Distributions, Actualités Scientifiques et Industriels, No. 1091, 1122, Paris, 1950/51 (гл. 18, § 1).
708. Schweber S. S., Nuovo Cim., 2, 397 (1955) (гл. 13, § 1).
709. Schwinger J., Phys. Rev., 73, 416L (1948) (гл. 15, § 4).
710. Schwinger J., Weisskopf V., Phys. Rev., 73; 1272A (1948) (гл. 15, § 2).
711. Schwinger J., Phys. Rev., 74, 1439 (1948) (гл. 13, § 1, 4; гл. 17, § 1). (Имеется перевод в [911].)
712. Schwinger J., Phys. Rev., 75, 651 (1949) (гл. 7, § 3; гл. 13, § 4). (Имеется перевод в [911].)
713. Schwinger J., Phys. Rev., 76, 790 (1949) (гл. 13, § 4; гл. 15, § 2, 5, 6). (Имеется перевод в [911].)
714. Schwinger J., Phys. Rev., 82, 664 (1951) (гл. 8, § 3; гл. 10, § 1, 2; гл. 15, § 5, 7; гл. 16, § 1). (Имеется перевод в [911].)
715. Schwinger J., Proc. Nat. Acad. of Sciences (USA), 37, 452 (1951) (гл. 10, § 1; гл. 15, § 7; гл. 16, § 2; гл. 17, § 1, 6). [Имеется перевод: ПСФ, № 3 (1955).]
716. Schwinger J., Phys. Rev., 82, 914 (1951) (гл. 8, § 3). (Имеется перевод в [911].)
717. Schwinger J., Phys. Rev., 91, 713 (1953) (гл. 10, § 1; гл. 17, § 1). (Имеется перевод в [929].)
718. Schwinger J., Phys. Rev., 91, 728 (1953) (гл. 10, § 1; гл. 14, § 1; гл. 15, § 3). (Имеется перевод в [929].)
719. Schwinger J., Phys. Rev., 92, 1283 (1953) (гл. 10, § 1; гл. 14, § 1; гл. 15, § 3). (Имеется перевод в [929].)
720. Schwinger J., Phil. Mag., 44, 1171 (1953) (гл. 17, § 1). (Имеется перевод в [929].)
721. Schwinger J., Phys. Rev., 93, 615 (1954) (гл. 14, § 1). (Имеется перевод в [929].)
722. Schwinger J., The Theory of Coupled Fields, Lecture notes ed. by L. Rodberg, F. Zachariasen and A. C. Zemach (гл. 7, § 5; гл. 18, § 2).
723. Schwinger J., Ann. of Phys., 2, 407 (1957) (гл. 10, § 5).
724. Schwinger J., Quantum Electrodynamics, New York, 1958 (гл. 15).
725. Series G. W., The Spectrum of Atomic Hydrogen, Oxford, 1957 (гл. 4, § 8).
726. Широков Ю. М., ЖЭТФ, 33, 861 (1957) (гл. 1, § 4; гл. 2, § 3).
727. Широков Ю. М., ЖЭТФ, 33, 1196 (1957) (гл. 1, § 4; гл. 2, § 3).
728. Широков Ю. М., ЖЭТФ, 33, 1208 (1957) (гл. 1, § 4; гл. 2, § 3).
729. Широков Ю. М., Nucl. Phys., 15, 1 (1960) (гл. 2, § 2).
730. Широков Ю. М., Nucl. Phys., 15, 13 (1960) (гл. 2, § 2).
731. Силин В. П., Файнберг В. Я., УФН, 50, 325 (1953) («Вопросы»).
732. Slater J. C., Phys. Rev., 35, 210 (1930) (гл. 6, § 11).
733. Slater J. C., Phys. Rev., 81, 385 (1951) (гл. 6, § 11).
734. Snyder H. S., Weinberg J., Phys. Rev., 57, 307 (1940) (гл. 15, § 6).
735. Соловьев В. Г., Nucl. Phys., 6, 618 (1958) (гл. 10, § 2).
736. Sommerfield C., Phys. Rev., 107, 328 (1957) (гл. 17, § 4).
737. Sommerfield C., Ann. of Phys., 5, 26 (1958) (гл. 15, § 4, 7).
738. Stearns M. B., Progress in Nuclear Physics, 6 (1957) (гл. 4, § 7).
739. Steinberger J., Phys. Rev., 76, 1180 (1949) (гл. 16, § 1).
740. Steinmann O., Helv. Phys. Acta 33, 257, 347 (1960) (гл. 18, § 1, 2).
741. Sternheimer R. M., Advances in Electronics and Electron Physics, vol. XI, New York, 1959 (гл. 14, § 5).

742. Streater R. F., *Nuovo Cim.*, **13**, 57 (1959), («Вопросы»).
743. Streater R. F., *Proc. Roy. Soc.*, **A256**, 39 (1960) (гл. 18, § 1).
744. Streater R. F., *Nuovo Cim.*, **15**, 937 (1960) (гл. 18, § 1).
745. Streater R. F., *Journ. Math. Phys.*, **1**, 230 (1960) [см. исправления: **1**, 452 (1960)] (гл. 18, § 4).
746. Stückelberg E. C. G., *Nature*, **144**, 118 (1939) (гл. 15, § 1).
747. Stückelberg E. C. G., *Helv. Phys. Acta*, **14**, 51 (1941) (гл. 15, § 1).
748. Stückelberg E. C. G., *Helv. Phys. Acta*, **18**, 21 (1945) (гл. 11, § 3).
749. Stückelberg E. C. G., *Helv. Phys. Acta*, **18**, 195 (1945) (гл. 11, § 3).
750. Stückelberg E. C. G., Rivier D., *Phys. Rev.*, **74**, 986 (1948) (гл. 15, § 1).
751. Stückelberg E. C. G., Rivier D., *Phys. Rev.*, **74**, 218 (1948) (гл. 15, § 1).
752. Stückelberg E. C. G., Rivier D., *Helv. Phys. Acta*, **13**, 215 (1949) (гл. 13, § 3).
753. Stückelberg E. C. G., *Phys. Rev.*, **81**, 130 (1951) (гл. 13, § 1).
754. Stückelberg E. C. G., Green T. A., *Helv. Phys. Acta*, **24**, 153 (1951) (гл. 13, § 1).
755. Sucher J., *Phys. Rev.*, **107**, 1148 (1957) (гл. 11, § 6).
756. Sudarshan E. C. G., Marshak R. E., *Phys. Rev.*, **109**, 1860 (1958) (гл. 10, § 6).
757. Sugawara M., Kanazawa A., *Phys. Rev.*, **115**, 1310 (1959). («Вопросы»).
758. Suura H., *Phys. Rev.*, **99**, 1020 (1955) (гл. 15, § 6).
759. Suura H., Wichmann E. H., *Phys. Rev.*, **105**, 1030 (1957) (гл. 15, § 5).
760. Symanzik K., *Zs. f. Naturforsch.*, **9a**, No. 10 (1954) (гл. 7, § 5; гл. 18, § 2).
761. Symanzik K., *Phys. Rev.*, **105**, 743 (1957) (гл. 18, § 4).
762. Symanzik K., *Nuovo Cim.*, **5**, 659 (1957) (гл. 18, § 4).
763. Symanzik K., *Progr. Theor. Phys. (Japan)*, **20**, 690 (1958) (гл. 17, § 2).
764. Symanzik K., *Journ. Math. Phys.*, **1**, 249 (1960) (гл. 18, § 2).
765. Takahashi Y., Umezawa H., *Progr. Theor. Phys. (Japan)*, **11**, 251 (1952) (гл. 15, § 1).
766. Takahashi Y., *Nuovo Cim.*, **6**, 370 (1957) (гл. 16, § 5).
767. Takeda G., *Progr. Theor. Phys. (Japan)*, **7**, 359 (1952) (гл. 16, § 4, 8).
768. Тамм И., *Zs. f. Phys.*, **62**, 545 (1930) (гл. 14, § 5).
769. Tani S., *Progr. Theor. Phys. (Japan)*, **6**, 267 (1951) (гл. 4, § 6).
770. Tarski J., *Journ. Math. Phys.*, **1**, 149 (1960) (гл. 18, § 4).
771. Taylor J. G., *Lectures on Dispersion Relations in Quantum Field Theory and Related Topics*, University of Maryland, Technical Report 115, vol. I, II, III, 1958 («Вопросы»); *Phys. Rev.*, **117**, 267 (1960) (гл. 18, § 4).
772. Telegdi V. L., Burgy M. T., Krohn V. E., Novey T. B., Ringo G. R., *Phys. Rev.*, **110**, 1214 (1958) (гл. 14, § 5).
773. Theis W. R., *Fort. d. Phys.*, **7**, 559 (1959) («Вопросы»).
774. Thirring W., *Phil. Mag.*, **41**, 1193 (1950) (гл. 15, § 5; гл. 16, § 7).
775. Thirring W., Touschek B., *Phil. Mag.*, **42**, 244 (1951) (гл. 15, § 3).
776. Thirring W., *Principles of Quantum Electrodynamics*, New York, 1958 (гл. 15, § 7).
777. Thirring W., *Nuovo Cim.*, **14**, Suppl., 385 (1959) (гл. 18, § 4).
778. Thirring W., *Nuovo Cim.*, **14**, Suppl., 415 (1959) (гл. 10, § 4).
779. Tiomno J., *Nuovo Cim.*, **1**, 226 (1955) (гл. 8, § 3; гл. 10, § 6).
780. Toll J. S., Диссертация, Princeton University, 1952 (гл. 16, § 1; гл. 18, § 4).
781. Toll J. S., *Phys. Rev.*, **104**, 1760 (1950) (гл. 12, § 4; гл. 18, § 4; «Вопросы»).
782. Томонага С., *Progr. Theor. Phys. (Japan)*, **1**, 27 (1946) (гл. 13, § 1). (Имеется перевод в [911].)
783. Treiman S. B., Sachs R. G., *Phys. Rev.*, **103**, 435 (1956) (гл. 12, § 4)

784. Treiman S. B., Goldberger M. L., Blankenbckler R., Khuri N. N., *Ann. of Phys.*, **10**, 62 (1960) («Вопросы»).
785. Triebwasser S., Dayhoff E. S., Lamb W. E., *Phys. Rev.*, **89**, 98 (1953) (гл. 15, § 2).
786. Tsai, Yung Su, *Phys. Rev.*, **120**, 269 (1960) (гл. 15, § 6; «Вопросы»).
787. Uehling E. A., *Phys. Rev.*, **48**, 55 (1935) (гл. 4, § 7; гл. 15, § 5).
788. Umezawa H., Kawabe R., *Progr. Theor. Phys. (Japan)*, **4**, 420, 423 (1949) (гл. 14, § 3; гл. 15, § 5).
789. Umezawa H., Kawabe R., *Progr. Theor. Phys. (Japan)*, **4**, 443 (1949) (гл. 14, § 3).
790. Umezawa H., Kawabe R., *Progr. Theor. Phys. (Japan)*, **4**, 461 (1949) (гл. 15, § 5).
791. Umezawa H., Kawabe R., *Progr. Theor. Phys. (Japan)*, **5**, 266 (1950) (гл. 14, § 3).
792. Umezawa H., Kametuchi S., *Progr. Theor. Phys. (Japan)*, **6**, 543 (1951) (гл. 15, § 5).
793. Umezawa H., Tomozawa Y., Konuma M., Kametuchi S., *Nuovo Cim.*, **3**, 772 (1956) (гл. 17, § 3).
794. Umezawa H., Kametuchi S., *Nuovo Cim.*, **3**, 1060 (1956) (гл. 16, § 2, гл. 17, § 3).
795. Umezawa H., Konuma M., *Nuovo Cim.*, **4**, 1461 (1956) (гл. 16, § 2).
796. Utiyama R., Sunakawa S., Imamura T., *Progr. Theor. Phys. (Japan)*, **8**, 77 (1952) (гл. 16, § 1). [Имеется перевод: ПСФ, № 3 (1955).]
797. Utiyama R., *Phys. Rev.*, **101**, 1597 (1956) (гл. 10, § 3, 5).
798. Valatin J. C., *Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd.*, **26**, No. 13 (1951) («Вопросы»).
799. Valatin J. C., *Proc. Roy. Soc.*, **A222**, 93 (1954) (гл. 16, § 8).
800. Valatin J. C., *Proc. Roy. Soc.*, **A228**, 228 (1954) (гл. 16, § 8).
801. Valatin J. C., *Proc. Roy. Soc.*, **A225**, 534 (1954) (гл. 16, § 8).
802. Valatin J. C., *Proc. Roy. Soc.*, **A226**, 254 (1954) (гл. 16, § 8).
803. Valatin J. C., *Les Problèmes Mathématiques de la Théorie Quantique des Champs, Colloques Intern. du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1959* (гл. 16, § 8).
804. Van Hove L., *Acad. Roy. de Belgique Bulletin*, **37**, 1055 (1951) (гл. 13, § 1).
805. Van Hove L., *Physica*, **18**, 145 (1952) (гл. 12, § 1; гл. 13, § 1).
806. Van Hove L., *Physica*, **21**, 901 (1955) [см. также **22**, 343 (1956); **23**, 441 (1957)] (гл. 11, § 2; гл. 12, § 2).
807. Van Hove L., *Physica*, **25**, 365 (1959) (гл. 12, § 3).
808. Van der Waerden B. L., *Göttingen Nachrichten*, **100** (1929) (гл. 4, § 3).
809. Van der Waerden B. L., *Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Berlin, 1932* (гл. 2, § 2).
810. Villars F., *Phys. Rev.*, **79**, 122 (1950) (гл. 15, § 1).
811. Владимиров В. С., Логунов А. А., Препринт ОИЯИ Р-260, Дубна (1959); *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **23**, 661 (1959) (гл. 18, § 4).
812. Volkow D. M., *Zs. f. Phys.*, **94**, 25 (1935) (гл. 4, § 8).
813. Von Neumann J., *Math. Ann.*, **104**, 570 (1931) (гл. 1, § 1; гл. 7, § 1).
814. Waller I., *Zs. f. Phys.*, **62**, 673 (1930) (гл. 15, § 1).
815. Ward J. C., *Phys. Rev.*, **77**, 293L (1950) (гл. 15, § 3; гл. 16, § 1, 5).
816. Ward J. C., *Phys. Rev.*, **78**, 182L (1950) (гл. 15, § 3; гл. 16, § 4, 5).
817. Ward J. C., *Proc. Phys. Soc.*, **A64**, 54 (1951) (гл. 16, § 2, § 4 6).
818. Ward J. C., *Phys. Rev.*, **84**, 897 (1951) (гл. 16, § 8).
819. Warnock R. L., *Phys. Rev.*, **118**, 1447 (1960) («Вопросы»).
820. Watanabe S., *Phys. Rev.*, **84**, 1008 (1951) (гл. 2, § 2).
821. Watanabe S., *Rev. Mod. Phys.*, **27**, 26 (1955) (гл. 2, § 2).
822. Watson K. M., Lepage J. V., *Phys. Rev.*, **76**, 1157 (1949) (гл. 15, § 8).
823. Weinberg S., *Phys. Rev.*, **110**, 782 (1958) («Вопросы»).

824. Weinberg S., Phys. Rev., 118, 838 (1960) (гл. 16, § 4).
825. Weisskopf V., Zs. f. Phys., 89, 27 (1934) (гл. 15, § 1).
826. Weisskopf V., Zs. f. Phys., 90, 817 (1934) (гл. 15, § 1).
827. Weisskopf V., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., 14, No. 6 (1936) (гл. 15, § 5).
828. Weisskopf V., Phys. Rev., 56, 72 (1939) (гл. 15, § 1).
829. Weisskopf V., Rev. Mod. Phys., 21, 305 (1949) (гл. 15, § 3). (Имеется перевод в [919].)
830. Welton T., Phys. Rev., 74, 1157 (1948) (гл. 15, § 3).
831. Weneser J., Bersohn R., Kroll N. M., Phys. Rev., 91, 1257 (1953) (гл. 15, § 4, 6).
832. Wentzel G., Zs. f. Phys., 68, 479 (1933) (гл. 15, § 1).
833. Wentzel G., Zs. f. Phys., 87, 726 (1934) (гл. 15, § 1).
834. Wentzel G., Zs. f. Phys., 118, 277 (1941) (гл. 12, § 3).
835. Wentzel G., Helv. Phys. Acta, 15, 111 (1942) (гл. 12, § 3).
836. Wentzel G., Quantum Theory of Fields, New York, 1949 (гл. 7, § 4; гл. 15, § 1; «Вопросы»). (Имеется перевод: Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей, М.-Л., 1947.)
837. Wentzel G., Phys. Rev., 86, 802 (1952) (гл. 10, § 7).
838. West D., Reports on Progress in Physics, 21 (1958) (гл. 4, § 7).
839. Weyl H., Zs. f. Phys., 56, 330 (1929) (гл. 4, § 8).
840. Weyl H., Gruppentheorie und Quanten Mechanik, 2d ed., Leipzig, 1931 (гл. 4, § 7).
841. Wheeler J. A., Phys. Rev., 52, 1107 (1937) (гл. 11, § 3).
842. Wheeler J. A., Feynman R. P., Rev. Mod. Phys., 17, 157 (1945) (гл. 15, § 1).
843. Wheeler J. A., Feynman R. P., Rev. Mod. Phys., 21, 425 (1949) (гл. 15, § 1).
844. Wichmann E. H., Kroll N. M., Phys. Rev., 101, 843 (1956) (гл. 4, § 8; гл. 15, § 5).
845. Wick G. C., Atti. Accad. Lincei, 21, 170 (1935) (гл. 10, § 3).
846. Wick G. C., Phys. Rev., 80, 268 (1950) (гл. 13, § 3). (Имеется перевод в [911].)
847. Wick G. C., Wightman A. S., Wigner E. P., Phys. Rev., 88, 101 (1952) (гл. 1, § 1).
848. Wick G. C., Phys. Rev., 96, 1124 (1954) (гл. 17, § 6).
849. Wick G. C., Rev. Mod. Phys., 27, 339 (1955) (гл. 12, § 4).
850. Wick G. C., Ann. Rev. Nucl. Sci., 9 (1959) (гл. 1, § 4). [Имеется перевод: УФН, 68, 201 (1959).]
851. Wightman A. S., Schweber S., Phys. Rev., 98, 812 (1955) (гл. 7, § 1; гл. 8, § 2).
852. Wightman A. S., Phys. Rev., 101, 860 (1956) (гл. 16, § 1; гл. 17, § 2; гл. 18, § 1).
853. Wightman A. S., Лекции, прочитанные на Faculté des Sciences, Université de Paris. Les Problèmes Mathématiques de la Théorie Quantique des Champs (гл. 18, § 1).
854. Wightman A. S., Les Problèmes Mathématiques de la Théorie Quantique des Champs, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1959 (гл. 17, § 4; гл. 18, § 1). [Имеется перевод в сборнике «Математика», 6, № 4, 96 (1962).]
855. Wightman A. S., Nuovo Cim., 14, ser. X, Suppl. No. 1, 81 (1959) (гл. 1, § 4).
856. Wigner E. P., Göttingen Nachrichten, 31, 546 (1932) (гл. 7, § 3).
857. Wigner E. P., Ann. of Math., 40, No. 1 (1939) (гл. 1, § 4; гл. 2, § 3).
858. Wigner E. P., Zs. f. Phys., 124, 665 (1947) (гл. 2, § 3).

859. Wigner E. P., Proc. Amer. Phil. Soc., 93, 521 (1949) (гл. 1, § 4).
 860. Wigner E. P., Zs. f. Phys., 133, 101 (1952) (гл. 1, § 1).
 861. Wigner E. P., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 38, 449 (1952) (гл. 10, § 5).
 862. Wigner E. P., Jubilee of Relativity Theory, Bern, 1955; Basel, 1956 (гл. 1, § 4).
 863. Wigner E. P., Nuovo Cim., 3, 517 (1956) (гл. 1, § 4; гл. 2, § 3; гл. 5, § 2).
 864. Wigner E. P., Rev. Mod. Phys., 29, No. 3, 255 (1957) (гл. 1, § 4; гл. 5, § 2; гл. 10, § 1). [Имеется перевод: УФН, 65, 257 (1958).]
 865. Wigner E. P., Group Theory, New York, 1959 (гл. 1, § 4, 5). (Имеется перевод: Е. Вигнер, Теория групп, ИЛ, 1961.)
 866. Wolfenstein L., Ravenhall D. G., Phys. Rev., 88, 279 (1952) (гл. 4, § 7; гл. 14, § 6; гл. 16, § 1).
 867. Wu C. S., Ambler E., Hayward R. W., Hoppes D. D., Hudson R. P., Phys. Rev., 105, 1413 (1957) (гл. 10, § 6). (Имеется перевод в [912].)
 868. Yamagata T. O., Auerbach L. B., Bernardini G., Filosofo L., Hansen A. O., Odian A. C., Bull. Am. Phys. Soc., Ser. II, 1, 350 (1956) (гл. 18, § 4).
 869. Yang C. N., Phys. Rev., 77, 242 (1950) (гл. 4, § 7; гл. 16, § 1).
 870. Yang C. N., Tjornho J., Phys. Rev., 79, 495 (1950) (гл. 1, § 5, гл. 8, § 3).
 871. Yang C. N., Feldman D., Phys. Rev., 79, 972 (1950) (гл. 13, § 1; гл. 17, § 4).
 872. Yang C. N., Mills R. L., Phys. Rev., 96, 191 (1956) (гл. 10, § 3, 5; гл. 16, § 1).
 873. Yennie D. R., Suura H., Phys. Rev., 105, 1378 (1957) (гл. 15, § 6).
 874. Yennie D. R., Gartenhaus S., Nuovo Cim., 9, 59 (1958) (гл. 16, § 8).
 875. Yennie D. R., Frautchi S. C., Suura H., Ann. of Phys., 13, 379 (1961) (гл. 15, § 4, 6; гл. 16, § 6).
 876. Zimmermann W., Nuovo Cim., 10, 567 (1958) (гл. 18, § 2).
 877. Zimmermann W., Nuovo Cim., 13, 503 (1959) (гл. 18, § 2, 4).
 878. Zimmermann W., Nuovo Cim., 16, 690 (1960) (гл. 18, § 2).
 879. Zumino B., Journ. Math. Phys., 1, 1 (1960) (гл. 9, § 2; гл. 15, § 5; гл. 17, § 3).

Литература, добавленная при переводе

880. Арбузов Б. А., Логунов А. А., Тавхелидзе А. Н., Фаустов Р. Н., Препринт ОИЯИ Е-1030, Дубна (гл. 16, § 8).
 881. Арбузов Б. А., Логунов А. А., Тавхелидзе А. Н., Фаустов Р. Н.; Phys. Rev., Lett. 2, 150 (1962) (гл. 16, § 8).
 882. Arnowitz R., Phys. Rev., 92, 1002 (1953) (гл. 17, § 6).
 883. Ахиезер А., Phys. Zs. d. Sowjetunion, 11, 263 (1937) (гл. 16, § 1).
 884. Берж К., Теория графов и ее применения, ИЛ, 1962 (гл. 12, § 4).
 885. Brown G. E., Peierls R. E., Woodward I. B., Proc. Roy. Soc., 227A, 51 (1954).
 886. Brown G. E., Woodward J. B., Proc. Phys. Soc., A65, 977 (1952).
 887. Ваняшин В. С., ЖЭТФ, 43, 699 (1962).
 888. Cooper L. N., Phys. Rev., 100, 362 (1955) (гл. 16, § 1).
 889. Evans L., Диссертация, The Johns Hopkins University, 1960 (гл. 17, § 3).
 890. Evans L., Feldman G., Matthews P. T., Ann. of Phys., 13, 268 (1961) (гл. 17, § 3).
 891. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, М.—Л., 1958 (гл. 2, § 2).
 892. Жарков Г., ЖЭТФ, 20, 492 (1950) (гл. 8, § 3).
 893. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Phys. Rev., 96, 1433 (1954) (гл. 17, § 5).
 894. Gell-Mann M., Low F., (не опубликовано, 1956) (гл. 16, § 1).
 895. Glashow S. L., Gell-Mann M., Ann. of Phys., 15, 437 (1961) (гл. 16, § 1).
 896. Gupta S. N., Phys. Rev., 98, 1507 (1955); 99, 1015 (1955) (гл. 15, § 6).

897. Hadamard J., Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Yale University Press, 1923. (Перездано, Dover Publ., 1952.)
Le problem de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques, Paris, 1932 (гл. 16, § 8).
898. Iddings C. K., Platzman P. M., Phys. Rev., **113**, 192 (1959); **115**, 919 (1959) (гл. 17, § 6).
899. Jost R., Helv. Phys. Acta, **20**, 256 (1947) (гл. 17).
900. Källén, Handbuch der Physik, 5, I, Berlin, 1958.
901. Lee T. D., Yang C. N., A Theory of Charged Vector Mesons, Interacting [with Electromagnetic Field, Preprint, 1962.
902. Mandelstam S., Nuovo Cim., **15**, 658 (1950).
903. Марков М. А., Гипероны и К-мезоны, М., 1958.
904. Marshak R. E., Sudarshan E., Introduction to Elementary Particle Physics, New York—London, 1961. (Имеется перевод: Р. Маршак, Э. Сударшан, Введение в физику элементарных частиц, ИЛ, 1962.)
905. Matthews P. T., The Relativistic Quantum Theory of Elementary Particle Interactions, New York, 1957 (гл. 7, § 6). (Имеется перевод: П. Мэтьюс, Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц, ИЛ, 1959.)
906. Nagle D. E., Julian R. S., Zacharias J. R., Phys. Rev., **72**, 971 (1947).
907. Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, М.—Л., 1958 (гл. 2, § 2).
908. Nakaniishi N., Progr. Theory Phys. (Japan), **25**, 155 (1961) (гл. 18, § 4).
909. Нелинейная квантовая теория поля, сборник статей, ИЛ, 1959.
910. Neuman W., Furry W., Phys. Rev., **76**, 1677 (1949).
911. Новейшее развитие квантовой электродинамики, сборник статей, ИЛ, 1954.
912. Новые свойства симметрии элементарных частиц, сборник статей, ИЛ, 1957.
913. Новый метод в теории сильных взаимодействий, сборник статей, ИЛ, 1960.
914. Огневцкий В. И., Полубаринов И. В., ЖЭТФ, **41**, 247 (1961) (гл. 16, § 1).
915. Огневцкий В. И., Полубаринов И. В., Nuovo Cim., **23**, 173 (1962) Препринт ОИЯИ Р-1241, Дубна (1963) (гл. 9, § 1; «Вопросы»).
916. Окунь Л. Б., Лекции по теории слабых взаимодействий элементарных частиц, Препринт ОИЯИ Р-833, Дубна.
917. Rosen N., Phys. Rev., **85**, 257 (1952); **87**, 940 (1952).
918. Salam A., Phys. Rev., **127**, 331 (1962) (гл. 16, § 1).
919. Сдвиг уровней атомных электронов, сборник статей, ИЛ, 1950.
920. Schweber S. S., Nuovo Cim., **2**, 173 (1955) (гл. 18, § 2).
921. Streater R. E., Nuovo Cim., **15**, 937 (1960) (гл. 18, § 4).
922. Stueckerberg E. C. G., Petermann A., Helv. Phys. Acta, **26**, 499 (1953) (гл. 16, § 8).
923. Tautfest G. W., Panofski W. K. H., Phys. Rev., **105**, 1356 (1957).
924. Taylor J. C., Phys. Rev., **117**, 261 (1960) (гл. 18, § 4).
925. Toll J. S., Proc. of the 1960 Annual International Conference on High Energy Physics at Rochester, University of Rochester, p. 259 (гл. 18, § 2).
926. Томонага С., Progr. Theor. Phys. (Japan), Suppl., No. 2 (1955).
927. Умезава Н., Quantum Field Theory, Amsterdam, 1956 (гл. 16, § 1). (Имеется перевод: Х. Умэдзава, Квантовая теория поля, ИЛ, 1958.)
928. Файнберг В. Я., ЖЭТФ, **36**, 1503 (1959) (гл. 18, § 3).
929. Schwinger J., Phys. Rev., **91**, 713 (1953); **91**, 728 (1953); **92**, 1283 (1953); **93**, 615 (1954); **94** 1362 (1954); Phil. Mag., **44**, 1171 (1953). (См. перевод: Ю. Швингер, Теория квантованных полей, ИЛ, 1956.)
930. Смородинский Я. А., ЖЭТФ, **43**, 2217 (1962).

Предметный указатель

- Адиабатическая гипотеза и определение физического вакуума 325, 619
— — и перенормировка волновой функции 511—513
— — — S -матрица 312, 313, 323, 324
— — — уравнение для связанных состояний 317, 676
- Аксиоматическая формулировка теории поля 680—722
— — — Лемана—Симанзика—Циммермана (ЛСЦ) 701—722
— — — Уайтмана 682—701
- Аннигиляции оператор: *см. также* Уничтожения оператор
- Аномальный магнитный момент мюона 529
— — — нуклона 570
— — — электрона 514
- Антикоммутационные соотношения: *см. также* Перестановочные соотношения и Канонические перестановочные соотношения
— — для перенормированных операторов 639
— — — фермионных операторов в картине Дирака 220—223, 405
— — и статистика Ферми—Дирака 140—142
- Антисимметризатор 128, 129
- Антисимметричные волновые функции и пространство чисел заполнения 140—142
— — — статистика Ферми—Дирака 127—129
- Античастица 72, 102, 192, 217
- Асимптотические условия 648
— — и аксиоматическая формулировка теории поля 701—703
- «Аут»-операторы 399—402
— — и асимптотические условия 701, 702
— — связь с гейзенберговскими операторами поля 649
— — — «ин»-операторами 649, 702
- Барions 254
— закон сохранения 254
— свойства 254
- Бета-распада теория возможные виды связей 287—293
— — — вычисления 473—475
— — — неперенормируемость 586
- Бете—Солпитера уравнение; *см. также* Релятивистские уравнения для связанных состояний
— — — вывод из теории поля 674—676
— — — граничные условия 677—679
- Бозе—Эйнштейна статистика и перестановочные соотношения Иордана—Клейна 133—135
— — — симметрия волновых функций частиц 127—131
- Борна—Ивфельда теория 489
- Борна приближение в теории рассеяния 324
— — для кулоновского рассеяния электронов 433—436
— — и определение констант перенормировки 351, 601, 605
- Брейта система 761, 762
- «b»-расходимости 586
- Вакуума поляризация в современной квантовой электродинамике 520—529
— — и лэмбовский сдвиг 524
— — теория дырок 104
- Вакуума собственная энергия для взаимодействующих полей 447, 448
— — при наличии внешнего электромагнитного поля 436—440
— состоянии для взаимодействующих полей 616
— — системы квантов со спином 0 158, 192
— — — — — — — — $1/2$ 216—218
— — — — — — — нерелятивистских частиц 135, 139
— — — — фотонов 238, 239, 245
- Вакуумные средние значения операторов в картине Гейзенберга 618—621
— — — — — Дирака 422
- Вейля уравнение для нейтрино 114
- Вентцеля парная модель 357
- Вершинный оператор в квантовой электродинамике 505, 508—510, 573, 583, 584
— — — псевдоскалярной мезонной теории 544—546

- Вершинная часть 573
 — — выделение расходимостей 583, 584
 Взаимодействие с электромагнитным полем заряженного поля со спином 0 267, 268
 — — — — — $1/2$ 269, 270
 — — — и *CP*-инвариантность 270, 271
 — — — лагранжиан 265—277
 — — — нуклонного поля 271, 272
 — — — π -мезонного поля 272
 — — — системы π -мезонного и нуклонного полей 277
 — — — частицы Дирака 105—110
 — — — Клейна—Гордона 70, 71
 Взаимодействие между полями 251—298; *см. также* Связь между полями
 — — — бозонными и фермионными 259—264
 — — — мезонными и барионными 278—286
 — — — π -мезонным и нуклонным 273—277
 — — — и лагранжеев формализм 251—253
 — — — правила для диаграмм Фейнмана 449—460
 — — — и *PC*-инвариантность 262—264, 270, 271
 — — — симметрии 253, 254
 — — — *CPT*-инвариантность 261
 — — — уравнения поля 267
 — — — сильное 278—286
 — — — слабое 286—293
 — — — теорема эквивалентности 293—298
 Взаимодействия картина; *см. также* Дирака картина
 Вика теорема 416—423
 Водорода атом, лэмбовский сдвиг 503, 517—519
 — — уравнение Дирака 110
 — — энергетические уровни 109
 Волновой функции константы перенормировки в квантовой электродинамике 511—514
 — — — — модели Ли 343—345
 — — — — Чу—Лоу 363—369
 — — — для скалярного поля, взаимодействующего с фиксированными нуклонами 331, 332
 Возмущений теория и диаграммы Фейнмана 428
 — — инвариантная 320—324
 Возмущенные и невозмущенные собственные состояния и соотношение между ними 325—327
 Вращения группа в трехмерном евклидовом пространстве 27—41
 — — четырехмерном евклидовом пространстве 41—44
 Вторичного квантования формализм для нерелятивистских частиц 125—155
 — — — релятивистских частиц 156
 Времени обращение, свойства решений уравнения Дирака 86, 112, 113
 — — — Клейна—Гордона 173
 Времени обращение. Трансформационные свойства операторов заряженного поля со спином 0 202
 — — — — — нейтрального поля со спином 0 173, 174
 — — — — — $1/2$ 230, 231
 — — — — — 1 247
 Гайтлера уравнение 319
 Галилея инвариантность 23, 24
 Гамильтониан для вещественного скалярного поля 188
 — — комплексного скалярного поля 197
 — — нерелятивистского электрона, взаимодействующего с полем излучения 498
 — — нуклонного поля 232
 — — поля Дирака 214—217
 — — со спином $1/2$ 215—217, 230
 — — системы взаимодействующих нерелятивистских частиц 150
 — — частицы со спином $1/2$ 75
 — — электромагнитного поля 234, 235
 — — и канонические переменные 188
 — — определение из лагранжиана 188
 — — плотность 186
 Гамильтонов формализм 186—188
 Гамма-матриц свойства 76—80
 Гелл-Манна—Пуппи тетраэдр 290
 Гейзенберга картина 18, 19
 — — в квантовой электродинамике 614
 — — *S*-матрица 401
 — — уравнения движения для операторов поля 147—149
 Гильберта соотношения 396
 Гипероны 254
 Грина функции 621, 622
 — — асимптотическое поведение 630, 631
 — — и константы перенормировки 599
 Группа неоднородных преобразований Лоренца 53—61
 — однородных преобразований Лоренца 46—53
 — трехмерных вращений и ее представления 27—40
 Гупта—Блейлера формализм 236—246
 Движения уравнения, вывод из плотности лагранжиана 184, 185
 — — для взаимодействующих полей в картине Гейзенберга 614, 629
 — — — — — Дирака 405
 Действия на расстоянии, теория и электродинамика 488, 489
 — — наименьшего, принцип в классической теории поля 184
 Дельбрюка рассеяния 561
 Дирака картина, определение 307, 308
 — — *S*-матрица 309
 — — матриц, свойства 76—80
 — — уравнение 73—113

- Дирака картина, во внешнем электромагнитном поле 105—113
 — — инвариантность 81—90
 — — квантование 213—226
 — — решения 90—92
- Дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния мезона на нуклоне вперед 757—760, 773—776
 — — — двухчастичной амплитуды рассеяния 746—772
 — — — комптоновского рассеяния на нуклоне 736—739
 — — — электромагнитного форм-фактора мезона 740—745
 — — — электромагнитного форм-фактора нуклона 745, 746
- Дырок теория 102, 103
- Запаздывающие функции 709, 710
 — — и аксиоматическая формулировка теории поля 709—719
 — — — свойства 710—714
- Заряда и тока плотность; см. также Тока 4-вектор
 — — для поля со спином 0 196, 267
 — — — — — $1/2$ 223, 224, 270, 614
 — — — — уравнения Дирака 75, 78
 — — — — Клейна—Гордона 63, 71
 — — — — определение из лагранжиана 206, 207, 265
 — — перенормировка в квантовой электродинамике 527, 599—602
 — — — мезонной теории; см. Связи константа, перенормировка
 — — и калибровочная инвариантность в квантовой электродинамике 520—526
 — — — комптоновское рассеяние 603
 — — кулоновский потенциал между двумя зарядами 633
 — — — мёллеровское рассеяние 526, 527
 — — — эффекты поляризации вакуума 520—529
 — — — смысл перенормировки заряда 603—605, 633
 — — — сохранение и калибровочная инвариантность лагранжиана 206, 207, 265, 266
 — — — — правила суперотбора 16
- Зарядового сопряжения оператор для поля со спином 0 202, 203
 — — — — — $1/2$ 222
- Зарядовое сопряжение и диаграммы типа замкнутой петли в квантовой электродинамике 436—440
 — — инвариантность квантовой электродинамики 476, 477
 — — — теории поля 202, 203, 229, 230
 — — — трансформационные свойства заряженных полей со спином 0 202, 203, 261, 275
 — — — — — — — $1/2$ 229, 230, 261
 — — — — — нейтральных полей со спином 0 261
- Зарядово-сопряженные решения уравнения Дирака 111—113
 — — — — Клейна—Гордона 72
- Измеримость и перестановочные соотношения 14, 735
 — операторов поля 404, 405, 683
- Изотопический спин и классификация «элементарных» частиц 273, 274, 278, 279
- Изотопического спина оператор в теории Чу—Лоу 361
 — — — для нуклонового поля 231—233
 — — — — π -мезонного поля 209
 — — — — системы мезонного и нуклонного полей 276
- Импульс канонический 16, 19—22
 — оператор и тензор энергии импульса 205, 206
 — — — сохранение в хронологически упорядоченных диаграммах Фейнмана 452, 455, 459
- Инвариантная теория возмущений 320—323
 — — — и диаграммы Фейнмана 428, 429
- Инвариантности принцип 24, 25
 — — и представления групп 24—27
- Инвариантность Галилея 23, 24
 — — и лагранжев формализм 203—207
 — — — локализованная волновая функция 57, 68, 69
 — — — Лоренца 24—27; см. также Лоренца инвариантность
- Инвариантные сингулярные функции для поля со спином 0 176—181
 — — — — — $1/2$ 221, 222
 — — — — представления 423—427
- «Ин»-операторы 400—402
 — — и асимптотические условия 648, 649, 701
 — — — S -матрица 705—707
 — — — перестановочные соотношения с «ау»-операторами 715
 — — — связь с гейзенберговскими операторами 646—652, 701—703
- Интегральное представление двухточечной функции Уайтмана 693—696
 — — инвариантных сингулярных функций 423—427
 — — — причинного коммутатора 722—735
- Исключения принцип и перестановочные соотношения Иордана—Вигнера 140—142
 — — — — — рассеяние фермионов 445—447, 451
- Иоста точки 688, 689
- Калибровочная инвариантность и вершинный оператор 583
 — — — квантование электромагнитного поля 236—2

- Калибровочная инвариантность и классическая электромагнитная теория 234—236
- — — лагранжиан формализм 265—273
 - — — рассеяние света на свете 559, 560
 - — — собственная энергия фотона 527, 528
 - — — тождество Уорда 592, 593
 - — — 4-вектор тока 265—270
- Калибровочные преобразования 236, 241
- — генератор 245, 246
- Канонические переменные для поля 185, 186, 197
- — — частицы 16, 19, 20
- Канонические перестановочные соотношения; см. также Антикмутационные соотношения и Перестановочные соотношения.
- — — для вещественного поля со спином 0 181, 188
 - — — заряженного поля со спином 0 199
 - — — квантовой электродинамики 614, 615
 - — — спинорного поля 220, 221
- Квантование и перестановочные соотношения 188
- скалярного поля 181—198
 - спинорного поля 211—226
 - электромагнитного поля 236—246
- Квантовая электродинамика 481—542
- — аномальный магнитный момент электрона 514—517
 - — вершинный оператор 505, 508—510
 - — в картине Дирака 505
 - — — Гейзенберга 614, 615
 - — — Фарри 534
 - — и калибровочная инвариантность 505—507, 520—528
 - — инфракрасные расходимости 519, 520, 530—533
 - — константы перенормировки 599—602
 - — лагранжиан 267
 - — лэмбовский сдвиг 497, 518
 - — нелинейные эффекты 559—561
 - — поляризация вакуума 520—529
 - — радиационные поправки к расхождению 503, 530
 - — расходимости 482, 503—534, 555—580
 - — собственная энергия фотона 526, 527
 - — — — электрона 486
 - — уравнения движения для операторов поля 267, 269, 614
 - — устранение расходимостей 503—534, 573—602
- Квантовая механика и симметрии 23—27
- — обзор 13—23
- Клейна—Гордона уравнение 62—72; см. также Уравнение для частиц со спином 0
- — — квантование 181—190
 - — — оператор тока 63, 71
 - — — решения 63—65, 71, 72
- Клейна—Гордона уравнение трансформационные свойства 62
- K -матрица 318—320
 - K -мезонов нейтральных свойства 280, 281
- Коммутационные соотношения; см. также Перестановочные соотношения
- Комплексное преобразование Лоренца 687, 688
 - Комплексное преобразование Лоренца 687, 688
 - Комптоновское рассеяние и перенормировка заряда в квантовой электродинамике 603—605
 - — на частице со спином 0 468, 469
 - — — — — $1/2$ 463—468, 603, 658—665
 - — оператор комптоновского рассеяния 593, 603, 604
 - — соответствующие диаграммы Фейнмана 464
 - — функции Грина 622
- Контрчлены в лагранжиане для перенормировки заряда 605—607
- — — — — массы 484
- Координаты оператор для нерелятивистской частицы 19, 20
- — — релятивистской частицы со спином 0 68—70
 - — — — — $1/2$ 100, 101
 - — — частицы с нулевой массой и спином $1/2$ 118
 - — и волновые функции локализованных состояний 63—70
- Корпускулярная интерпретация теории поля 190
- Кoshi теорема и функции, аналитичные в полуплоскости 395, 396
- Лагранжиан вещественного скалярного поля 188
- заряженного поля со спином 0 197, 198
 - — — — — взаимодействующего с электромагнитным полем 267
 - — — — — $1/2$ 213
 - — — — — взаимодействующего с электромагнитным полем 269
 - максвелловского поля 234, 235
 - нуклонного поля 232
 - λ -мезонного поля 208
 - сильных взаимодействий 283
 - системы λ -мезонного и нуклонного полей 276
 - слабых взаимодействий 287
 - плотность 183, 184
 - трансформационные свойства 251, 260—262
- Лемана спектральные представления для среднего по вакууму произведения двух бозонных операторов 623—627
- — — — — спинорных операторов 634—636
- Лемана—Симаэника—Циммермана (ЛСЦ) формулировка теории поля 701
- Лептоны, закон сохранения 256
- свойства 255

- Скалярное поле, взаимодействующее с фиксированными нуклонами 323—340
 — — — — — облаченные операторы 336
 — — — — — перенормировка волновой функции 331, 332
 — — — — — перенормировка массы 331
 — — — — — потенциал взаимодействия между двумя нуклонами 337
 Слабая локальная коммутативность 692
 Слабые взаимодействия 256
 — — — описание в теории поля 286—293
 Следов произведений γ -матриц вычисление 97, 98
 S-матрица
 — — в картине Дирака 309, 313
 — — — Гейзенберга 401, 402, 645—657
 — — и адиабатическая гипотеза 323, 324, 607, 608
 — — — диаграммы Фейнмана 428—463
 — — — «ин-аут» формализм 400—403
 — — — принципы симметрии 475—480
 — — — расходимости в теории поля 551—573
 — — — связанные состояния 317, 318, 325—327, 607
 — — — теория рассеяния 309—320
 — — — сходимость разложения в ряд теории возмущений 608, 609
 — — — унитарность 315—317
 Собственная энергия бозона 555
 — — вакуума 405, 406, 436, 437, 447, 448
 — — и перенормировка массы 484
 — — попытки сделать ее конечной 486—492
 — — степень расходимости 486, 487, 580—584
 — — фермиона 482, 493—496
 — — фотона 527, 528, 582
 — — электрона 485, 486, 581
 Собственно-энергетическая часть 574
 — — — отделение расходимостей неприводимых диаграмм 580—584
 — — — приводимых диаграмм 584—590
 Собственные функции оператора заряда 270
 — — — импульса 615, 616
 — — — координаты 69, 70
 Сохранения законы изотопического спина 209, 210, 233
 — — и классификация взаимодействий 256, 257
 — — — принципы инвариантности 204—207
 — — тензора момента количества движения 205
 — — электрического заряда 206, 207
 Спектральные условия в релятивистских теориях поля 616, 617, 625, 626
 — — — теории Чу—Лоу 381
 Спин и вращения 39, 89
 — — перенормируемость 567, 568
 — — статистика 695, 696
 Спина оператор для нерелятивистской частицы со спином $1/2$ 39—41
 — — — релятивистской частицы со спином $1/2$ 89, 90, 101
 Спиноры и группа вращений 35—37
 — — — однородная группа Лоренца 52
 CPT-теорема 261, 262, 478, 479
 — — и аксиоматическая формулировка теории поля 690—693
 — — — S-матрица 479, 480
 Странности квантовое число 279
 Тока 4-вектор для комплексного скалярного поля 196, 268
 — — — — — со спином $1/2$ 223, 270
 — — — уравнения Дирака 75, 78
 — — — — — Клейна—Гордона 63, 71
 — — — определение через плотность лагранжиана 206, 207, 265, 266
 Томонага—Швингера уравнение 402—404
 Томсона рассеяние 467
 — — и перенормировка заряда в квантовой электродинамике 603, 605
 Трансформационные свойства операторов поля со спином 0 при зарядовом сопряжении 202, 203
 — — — — — неоднородных преобразованиях Лоренца 165, 166, 175, 259
 — — — — — — — — обращении времени 174, 175, 202
 — — — — — — — — пространственном отражении 172, 173, 175
 — — — — — — — — $1/2$ при зарядовом сопряжении 229, 230
 — — — — — — — — неоднородных преобразованиях Лоренца 226, 227, 259
 — — — — — — — — обращении времени 230, 231
 — — — — — — — — пространственном отражении 228, 229
 — — — — — — — — 1 при зарядовом сопряжении 247
 — — — — — — — — неоднородных преобразованиях Лоренца 246
 — — — — — — — — обращении времени 247
 — — — — — — — — пространственном отражении 246
 Труба будущего 685, 686
 — — расширенная 687
 — — действительные точки 688, 689
 Уайтмана формулировка теории поля 682—701
 — — функции 682
 — — свойства 682—685
 Универсальное взаимодействие Ферми 287, 288
 Унитарности условие и дисперсионные соотношения 754—756
 — — — оптическая теорема 315, 739, 779

- Унитарности условие и теория Чу—Лоу 380, 386, 387
 — обобщенные условия для запаздывающих функций 716
 — — для τ -функций 721
 — — и дисперсионные соотношения 754, 755
 Унитарность S -матрицы 315—317
 Унитарные теории поля 489, 490
 Уничтожения оператор 133—137
 — для квантов со спином 0 157, 192
 — — — — $1/2$ 215, 216
 — — — — 1 (фотонов) 237, 238
 — графическое представление 407, 428, 429, 442
 Уорда тождество 590—593
 — и калибровочная инвариантность 592, 593
 Уравнение для частиц со спином 0; см. также Клейна—Гордона уравнение
 — — — — ковариантная форма 62
 — — — — при наличии электромагнитного поля 71, 72
 Уравнение для частиц со спином $1/2$; см. также Дирака уравнение
 — — — — во внешнем электромагнитном поле 105—110
 — — — — как уравнение для операторов поля 213—226
 — — — — ковариантная форма 77, 78
 U -матрица 308
 — и связанные состояния 317, 318, 325—327
 — разложение в ряд теории возмущений 320—324
 — свойства 320—322
 — связь с S -матрицей 313
 Фарри картина взаимодействия для связанных состояний 534—536
 — — — — перенормировка 533, 539
 — теорема 439, 557
 Фейнмана диаграммы 428—461
 — в квантовой электродинамике 428—445
 — мезонной теории 445—450
 — для вершинной части 573
 — — собственно-энергетической части 574
 — и правила для получения матричных элементов 449, 450, 455, 456, 459, 460
 — — разложение S -матрицы 428—461
 — неприводимые 576
 — несобственные 576
 — примитивно расходящиеся 554
 — приводимые 576
 — связанные 573
 — скелетные 576
 Фейнмана диаграммы собственные 576
 — — хронологически упорядоченные 407, 408
 — обозначения, определение перечеркнутого символа 77
 Ферми—Дирака статистика и антисимметрии волновой функции 127
 — — и перестановочные соотношения 140—142
 Фока пространство; см. также Представление операторов поля в пространстве Фока
 — для нерелятивистских частиц 137—140
 — — частиц со спином 0 158—162, 170—172
 — — — — $1/2$ 225, 226
 — — — — 1 239, 240
 Фолди—Вотхойзена представление уравнения Дирака 98—102
 — — для нейтрино 118
 Фотон; см. также Квантование электромагнитного поля
 — дельбрюкковское рассеяние 561
 — комптоновское рассеяние 463—469, 658—664
 — уравнения Движения 122, 235
 Формальная теория рассеяния 299—320
 Форм-фактор мезона 741—745
 — — нуклона 663, 664
 — — электрона 514, 515
 Хартри—Фока метод 151—155
 Холла—Уайтмана теорема 689, 690
 Хронологический оператор Вика 417
 — — Дайсона 321, 322
 Хронологическое произведение операторов и определение волновых функций частиц 667
 — — — — распространения частиц 441—445, 667, 671
 — — — — τ -функций 719, 720
 Частицы с нулевой массой покоя состояния поляризации 119—121
 — — — — уравнение для случая спина $1/2$ 114—118
 — — — — — 1 122
 — со спином 0, нерелятивистское уравнение для не взаимодействующих частиц 22, 23
 — — — — оператор координаты для релятивистских частиц 68—70
 — — — — релятивистское уравнение для не взаимодействующих частиц 62
 — — — — статистика 695, 696
 — — — — формализм вторичного квантования 156—163
 — — — — $1/2$, релятивистское уравнение 73, 74, 77, 78
 — — — — свойства 39, 40, 88, 89
 — — — — статистика 695, 696
 — — — — электромагнитные свойства релятивистских частиц 105—109

Оглавление

От редактора русского издания	5
Предисловие	7
От автора	9

Часть первая

ОДНОЧАСТИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 1. Квантовая механика и принципы симметрии	13
§ 1. Квантовомеханический формализм	13
§ 2. Шредингеровская и гейзенберговская картины движения	17
§ 3. Нерелятивистское уравнение для свободной частицы	19
§ 4. Симметрии и квантовая механика	23
§ 5. Вращения и внутренние степени свободы	27
§ 6. Четырехмерная группа вращений	41
Глава 2. Группа Лоренца	45
§ 1. Релятивистские обозначения	45
§ 2. Однородная группа Лоренца	46
§ 3. Неоднородная группа Лоренца	53
Глава 3. Уравнение Клейна — Гордона	62
§ 1. Исторический обзор	62
§ 2. Свойства решений уравнения Клейна — Гордона	63
§ 3. Оператор координаты	68
§ 4. Заряженные частицы	70
Глава 4. Уравнение Дирака	73
§ 1. Исторический обзор	73
§ 2. Свойства матриц Дирака	78
§ 3. Релятивистская инвариантность	81
§ 4. Решения уравнения Дирака	90
§ 5. Соотношения нормировки и ортогональности. Следы	92
§ 6. Представление Фолди — Вотхойзена	98
§ 7. Состояния с отрицательной энергией	102
§ 8. Уравнение Дирака во внешнем поле. Зарядовое сопряжение	105
Глава 5. Уравнения для частиц с массой, равной нулю	114
§ 1. Двухкомпонентная теория нейтрино	114
§ 2. Состояния поляризации частиц с массой, равной нулю	118
§ 3. Уравнение для фотона ¹	122

Часть вторая

ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ

Глава 6. Вторичное квантование. Нерелятивистская теория	125
§ 1. Перестановки и транспозиции	125
§ 2. Симметричные и антисимметричные волновые функции	127
§ 3. Пространство чисел заполнения	129
§ 4. Случай симметричных волновых функций	131
§ 5. Операторы рождения и уничтожения	133
§ 6. Пространство Фока	137
§ 7. Случай антисимметричных волновых функций	140
§ 8. Представление операторов	142
§ 9. Гейзенберговская картина	147
§ 10. Системы из многих невзаимодействующих частиц	149
§ 11. Метод Хартри — Фока	151
Глава 7. Релятивистские методы в пространстве Фока	156
§ 1. Случай нейтральных бозонов со спином, равным нулю	156
§ 2. Лоренц-инвариантность	163
§ 3. Конфигурационное пространство	167
§ 4. Связь с теорией поля	181
§ 5. Квантованное поле	190
§ 6. Заряженное скалярное поле	192
§ 7. Законы сохранения и лагранжев формализм	203
§ 8. π -мезоны	203
Глава 8. Квантование поля Дирака	213
§ 1. Перестановочные соотношения	213
§ 2. Конфигурационное пространство	219
§ 3. Трансформационные свойства	226
§ 4. Описание нуклонов в теории поля	231
Глава 9. Квантование электромагнитного поля	234
§ 1. Лагранжиан классической теории	234
§ 2. Квантование. Формализм Гупта — Блейлера	236
§ 3. Трансформационные свойства	246

Часть третья

ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ

Глава 10. Взаимодействие между полями	251
§ 1. Симметрии и взаимодействия	251
§ 2. Ограничения, обусловленные пространственно-временными симметриями	258
§ 3. Электромагнитные взаимодействия	265
§ 4. Взаимодействие мезонов с нуклонами	273
§ 5. Сильные взаимодействия	278
§ 6. Слабые взаимодействия	286
§ 7. Теорема эквивалентности	293
Глава 11. Формальная теория рассеяния	299
§ 1. Потенциальное рассеяние	300

§ 2. Уравнения Липпмана — Швингера	305
§ 3. Картина Дирака	307
§ 4. Унитарность S -матрицы	315
§ 5. R -матрица	318
§ 6. U -матрица	320
Глава 12. Простые модели в теории поля	328
§ 1. Скалярное поле	328
§ 2. Модель Ли	340
§ 3. Другие простые модели	357
§ 4. Теория Чу и Лоу	358
Глава 13. Приведение S-матрицы к нормальной форме	398
§ 1. Вводные замечания общего характера	398
§ 2. Рассеяние нейтрального мезона на нуклоне	409
§ 3. Теорема Вика	416
§ 4. Интегральные представления для инвариантных функций	423
Глава 14. Диаграммы Фейнмана	428
§ 1. Взаимодействие с внешним электромагнитным полем	428
§ 2. Диаграммы Фейнмана для взаимодействующих полей	445
§ 3. Диаграммы Фейнмана в импульсном пространстве	450
§ 4. Эффективные сечения	461
§ 5. Примеры	463
§ 6. Принципы симметрии и S -матрица	475
Глава 15. Квантовая электродинамика	481
§ 1. Собственная энергия фермиона	482
§ 2. Перенормировка массы и лэмбовский сдвиг в нерелятивистском приближении	497
§ 3. Радиационные поправки к рассеянию	503
§ 4. Аномальный магнитный момент и лэмбовский сдвиг	514
§ 5. Поляризация вакуума	520
§ 6. Применения	529
§ 7. Картина Фарри	534
§ 8. Перенормировка в мезонной теории	542
Глава 16. Количественная теория перенормировок	551
§ 1. Примитивно расходящиеся диаграммы	551
§ 2. Перенормируемость квантовой электродинамики	573
§ 3. Отделение расходимостей неприводимых диаграмм	580
§ 4. Отделение расходимостей приводимых диаграмм	584
§ 5. Тожество Уорда	590
§ 6. Доказательство перенормируемости	593
§ 7. Смысл перенормировки заряда	603
§ 8. Общие замечания	605

Часть четвертая

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ФОРМАЛИЗМА

Глава 17. Гейзенберговская картина	613
§ 1. Средние по вакууму от гейзенберговских операторов	614

§ 2. Спектральное представление Лемана	622
§ 3. Величина перенормировочных констант	640
§ 4. S -матрица в гейзенберговской картине	645
§ 5. Предельные теоремы для низких энергий	658
§ 6. Проблема связанных состояний	665
Г л а в а 18. Аксиоматическая формулировка	680
Введение	680
§ 1. Формулировка Уайтмана	682
§ 2. Формулировка Лемана, Симанзика и Циммермана (ЛСЦ)	701
§ 3. Интегральные представления причинного коммутатора	722
§ 4. Дисперсионные соотношения	735
§ 5. Перспективы	784
Вопросы и литература для дальнейшего изучения	786
Литература	805
Предметный указатель	829