Ю. Швингер

ЧАСТИЦЫ | ИСТОЧНИКИ | ПОЛЯ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО КАНД. ФИЗ.-МАТ. НАУК А. И. НАУМОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ. А. М. БРОДСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1973

Julian Schwinger
Harvard University

PARTICLES, SOURCES, and FIELDS

Addison-Wesley Publishing Company
Reading, Massachusetts. Menlo Park, Califor
Don Mills, Ontario.
1970

УДК 539.12+530.145

Книга написана выдающимся физиком-теоретиком Ю. Швингером, который излагает в ней свой подход к теории элементарных частиц. Она написана с большим педагогическим мастерством и может служить введением в общий курс теории элементарных частиц и квантовой теории поля

Книга рассчитана на физиков-теоретиков, а также студентов и аспирантов, специализирующихся в области теоретической физики.

Редакция литературы по физике

Ш $\frac{0232-062}{041(01)-73}$

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Нет, очевидно, никакой необходимости ни сколько-нибудь подробно разбирать важность проблем, рассматриваемых в книге, которая предлагается вниманию читателей в русском переводе, ни специально представлять ее автора. Всем интересующимся физикой хорошо известно принципиальное значение теории релятивистских полей и элементарных, или, как некоторым больше теперь нравится, фундаментальных, частиц. Автор книги — лауреат Нобелевской премии Ю. Швингер — один из наиболее популярных современных физиков-теоретиков. Работы Ю. Швингера в области квантовой электродинамики наряду с работами Р. Фейнмана привели к наиболее успешным количественным результатам из числа тех, которыми может похвастаться (и которые может привести в свое оправдание) релятивистская квантовая теория поля. Уже сказанного достаточно для того, чтобы мотивировать интерес к монографии по теории элементарных частиц, написанной Ю. Швингером. Прежде всего интересна его личная реакция на современное, явно неудовлетворительное состояние теории, которая значительно отстает от быстро развивающегося эксперимента. Эта реакция очень четко формулируется в следующем высказывании Швингера, которое может служить хорошим эпиграфом ко всей книге: «...разочарование в операторной теории поля с ее математической непоследовательностью и слишком опосредствованной связью с физикой, недовольство чрезмерно математическим и умозрительным характером более, как считается, близкой к физике теории S-матрицы, недовольство притязаниями алгебры токов на роль не просто низкоэнергетической феноменологии, а некой фундаментальной схемы».

Из приведенной весьма неутешительной характеристики наиболее широко разрабатываемых сейчас направлений теории, которым посвящаются ежегодно тысячи публикаций, вытекает следующее естественное заключение. Необходимо прежде всего вновь пересмотреть и четко сформулировать те результаты, которые непосредственно следуют из общих физических принципов, таких, как релятивистская инвариантность, причинность, соответствие с нерелятивистской квантовой механикой. Такое заключение нельзя назвать оригинальным: им мотивируется также развитие аксиоматической теории поля и той же теории S-матрицы. Особенностью предлагаемого Швингером подхода, которому посвящена данная монография, является попытка реализовать указанную программу в рамках теории источников. Основное преимущество такой теории состоит, как считает Швингер, в сохранении связи с пространственно-временным описанием, теряющейся в том случае, если начальные и конечные состояния характеризуют только импульсными переменными. При этом источник, сопоставляемый определенным частицам, есть некая абстракция, позволяющая учесть то обстоятельство, что рождение и уничтожение частиц происходит в ограниченных областях координатного и импульсного пространств. Вне областей уничтожения и рождения частицы фактически характеризуются квантовыми числами неприводимых представлений группы Пуанкаре. С учетом дополнительных соображений равноправности всех точек пространства-времени и причинности удается получить некоторые общие ограничения на источники, не зависящие от их конкретной природы. Такие ограничения, сводящиеся к равенству нулю некоторых дивергенций источников, естественным образом интерпретируются как законы сохранения, например электрического заряда или энергии-импульса. В число вторичных, выводимых из исходных положений заключений входит также условие унитарности в отличие от аналитической теории S-матрицы, где расширенное условие унитарности вводится в качестве первичного динамического принципа. В данном отношении, так же как и в стремлении к детальному пространственно-временному описанию, теория источников Швингера сближается с квантовой теорией поля. Швингер как бы с особой гордостью несколько раз повторяет, что он нигде не обращается к постулатам об аналитичности.

В то же время ограничения, накладываемые на источники, не определяют полностью динамику взаимодействия. Так же как и теория S-матрицы без дополнительных постулатов об аналитических свойствах, теория источников сохраняет определенные черты полуфеноменологической схемы, которая может быть в дальнейшем усовершенствована путем включения дополнительных динамических принципов. Таким образом, теория источников занимает промежуточное положение между теорией квантованных полей и теорией S-матрицы.

Следует подчеркнуть, что далеко не все в излагаемой Швингером теории носит оригинальный характер. Кинематическая классификация и характеристика частиц по представлениям группы Пуанкаре с записью ковариантных уравнений, включающих дополнительные условия, неоднократно подробно рассматривалась ранее [1]), в том числе и самим Швингером, в рамках обычной теории поля. Многие приведенные выводы были получены в так называемой теории калибровочных (или компенсирующих) полей и при доказательстве теоремы о связи спина со статистикой. Сопоставление статическому взаимодействию определенных частиц восходит еще к периоду зарождения квантовой

---

[1]) См., например, *Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров*, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; *Y. Takahashi*, An Introduction to Field Quantization, New York, 1969.

теории поля. Приведенные замечания необходимы потому, что сложная и находящаяся сейчас на критическом этапе история теории элементарных частиц в книге Швингера, которая предлагается им в качестве учебного руководства, вообще не затрагивается. Почти единственная явная литературная ссылка дана в своеобразной форме диалога с воображаемым читателем, который задает автору вопрос: не совпадают ли в определенных пунктах его рассуждения с содержанием работ Фейнмана? В предисловии Швингер аргументирует отказ от исторических комментариев тем, что постоянные ссылки на аппарат, который в данной книге не используется, отвлекал бы внимание читателя. Такую аргументацию можно понять, но с ней трудно согласиться, так как критический разбор различных теорий позволил бы глубже понять объективно существующие трудности.

Из-за отсутствия литературных ссылок очень трудно выделить тот оригинальный вклад в теорию, который внес Швингер при написании данной монографии. Несомненно только, что этот вклад весьма значителен. Помимо мотивировки самого общего подхода к теории источников и отдельных разбросанных по всей книге интересных и часто глубоких замечаний можно указать, например, на широкое эффективное использование так называемого постулата об евклидовости и на своеобразное рассмотрение гравитационных эффектов.

В заключение можно выразить убеждение, что книга Швингера несомненно вызовет интерес у широкого круга читателей.

В процессе перевода были исправлены замеченные опечатки.

А. М. Бродский

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга — учебник, но она представляет собой и оригинальный научный труд. В ней отражена сугубо личная реакция автора на кризис в физике частиц высоких энергий: разочарование в операторной теории поля с ее математической непоследовательностью и слишком опосредствованной связью с физикой, недовольство чрезмерно математическим и умозрительным характером более, как считается, близкой к физике теории S-матрицы, недовольство притязаниями алгебры токов на роль не просто низкоэнергетической феноменологии, а некой фундаментальной схемы.

Результатом явились точка зрения и аппарат, в которых главный упор делается на единство физики частиц высоких энергий с электродинамикой, теорией гравитации и теорией многочастичных коллективных явлений. Концепция физического источника, лежащая в основе такого построения, ведет свое математическое происхождение от операторной теории поля. Но лишь весной 1966 г., когда я читал лекции для аспирантов в Гарвардском университете, я вдруг понял, каким образом можно очистить понятие феноменологического источника от операторной субструктуры и взять за основу совершенно независимого построения с гораздо более тесной связью с экспериментом.

Реконструкция электродинамики шла быстро — летом того же года в Калифорнийском университете и при повторении гарвардского курса, который, однако, на этот раз был полностью посвящен новому подходу. Чрезвычайно успешное применение нового подхода при анализе явлений пионной физики (зимой 1966—1967 гг.) убедило по крайней мере меня самого в его огромных преимуществах — математической простоте и прозрачности концепций. Отсутствие должной оценки со стороны других физиков было удручающим, но объяснимым. Изменить такое положение могло лишь подробное изложение идей и методов теории источников, и к концу лета 1968 г. я начал писать данную книгу.

Как учебник, она рассчитана на любого студента, знакомого с нерелятивистской квантовой механикой и желающего изучить релятивистскую квантовую механику. По моему мнению, чрезвычайно важно, чтобы студент познакомился с освободительными идеями теории источников раньше, чем одна из господствующих ныне теорий деформирует его взгляды далее предела упругости. В предисловии к своей монографии по теории S-матрицы один автор говорит о желательности определенной невинности студента по отношению к операторной теории поля [1]). Я откликаюсь на этот грустный призыв, но расширяю сферу невинности, так чтобы в нее входила и теория S-матрицы.

При написании книги я не старался давать по ходу изложения, как обычно принято, исторические комментарии со ссылками на то, кто, что и когда сделал первым. Может быть, я стал слишком чувствителен к тем искажениям, которые неизбежны, когда упрощенно приписывают идеи и методы определенным лицам. Но имеется и более веская причина. Хотя общая критика существующих взглядов и необходима при обосновании излагаемой точки зрения, все же, если бы развитие нового подхода сопровождалось постоянными ссылками на аппарат, который предполагается

---

[1]) По-видимому, имеется в виду следующее высказывание Дж. Чью: «...опыт работы с теорией поля в лагранжевой формулировке может даже, наоборот, затруднить попытку изучения теории S-матрицы» [*G. F. Chew*, The analytic S-matrix, New York, 1966 (см. перевод: *Дж. Чью*, Аналитическая теория S-матрицы, изд-во «Мир», 1968)].— *Прим. ред.*

устаревшим, это слишком рассеивало бы внимание. Специалист приходит с готовым мнением о том, что уже было сделано раньше. Для студента же важно лишь то, что для него ново, и я надеюсь, что из страниц этой книги он почерпнет много полезного для себя.

Книга никогда не была бы завершена (я поставил мировой рекорд по количеству незаконченных первых глав), если бы моя жена не проявила столько чуткости и терпения.

Ю. Швингер

БЕЛМОНТ, ШТ. МАССАЧУСЕТС
ОКТЯБРЬ 1969

Глава 1 | ЧАСТИЦЫ

Понятие частицы подверглось коренным изменениям и обобщениям в процессе исторического развития, которое привело от атома к атомному ядру, а затем к субъядерным явлениям. Это развитие сопровождалось также переходом от существенно нерелятивистских явлений к ультрарелятивистской области. Интересно выяснить, как много кинематических характеристик частиц вытекает уже из структуры постулируемой нами группы относительности, состоящей из всех преобразований перехода между эквивалентными координатными системами. В качестве подготовительного этапа этого анализа мы рассмотрим сначала некоторые свойства квантовомеханических унитарных преобразований.

§ 1 УНИТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Квантовая механика является символической формой выражения закономерностей процесса микроскопического измерения. Состояния, или ситуации с оптимальной информацией, представляются векторами в комплексном пространстве (левыми $\langle\ |$ и правыми векторами $|\ \rangle$), а физические характеристики — линейными эрмитовыми операторами, действующими в этом пространстве, $A|\ \rangle$ и $\langle\ |A$. Свобода в физическом описании соответствует произволу в выборе математического представления — переход от одного представления к другому осуществляется унитарным оператором. Последние определяются с использованием операции эрмитова сопряжения $\dagger$:

$$U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = 1, \tag{1.1}$$

или

$$U^{\dagger} = U^{-1}. \tag{1.2}$$

Преобразуем все векторы и операторы по формулам:

$$\overline{\langle\ |} = \langle\ |U, \overline{|\ \rangle} = U^{-1}|\ \rangle, \qquad \overline{X} = U^{-1}XU. \tag{1.3}$$

Тогда все численные соотношения и соотношения сопряжения между векторами и операторами не изменятся. Действительно,

$$\overline{\langle a'|}\,\overline{|b'\rangle} = \langle a'|b'\rangle, \qquad \overline{\langle a'|}\,\overline{X}\,\overline{|b'\rangle} = \langle a'|X|b'\rangle, \tag{1.4}$$

а соотношение сопряжения

$$\langle a'| = |a'\rangle^{\dagger} \tag{1.5}$$

переходит в следующее:

$$\overline{\langle a'|} = \langle a'|U = (U^{-1}|a'\rangle)^{\dagger} = \overline{|a'\rangle}^{\dagger}; \tag{1.6}$$

равенство

$$\overline{X}^{\dagger}=U^{-1}X^{\dagger}U \tag{1.7}$$

показывает, что эрмитов оператор A отображается в эрмитов же оператор $\overline{A}$.

Полный набор состояний $\langle a'|$ образует базис, или координатную систему. Произвольный вектор $|\ \rangle$ задается своими компонентами $\langle a'|\ \rangle$, вычисленными в этом базисе. В результате унитарного преобразования получается другой базис

$$\langle\overline{a'}| = \langle a'|U, \tag{1.8}$$

в котором данный вектор будет иметь новый набор компонент

$$\langle\overline{a'}|\ \rangle = \langle a'|U|\ \rangle. \tag{1.9}$$

Эти величины можно иначе рассматривать как компоненты нового вектора $U|\ \rangle$, вычисленные в исходном базисе. Аналогичное соотношение имеет место и для матричных элементов операторов:

$$\langle\overline{a'}|X|\overline{a''}\rangle=\langle a'|UXU^{-1}|a''\rangle. \tag{1.10}$$

Два последовательных преобразования базиса

$$\langle a'|\ \rangle \xrightarrow{U_1} \langle a'|U_1|\ \rangle \xrightarrow{U_2} \langle a'|U_2U_1|\ \rangle \tag{1.11}$$

можно совершить в один прием, подействовав оператором U_2U_1, порядок сомножителей в котором отражает последовательность преобразований. Противоположной последовательности преобразований отвечает оператор U_1U_2. По определению, сравнение двух операторов осуществляется таким унитарным оператором, который необходим, чтобы перевести вторую последовательность в первую [1]):

$$U_{[12]}U_1U_2 = U_2U_1. \tag{1.12}$$

Этот оператор равен:

$$U_{[12]}=U_2U_1U_2^{-1}U_1^{-1}=U_{[21]}^{-1}. \tag{1.13}$$

Инфинитезимальное унитарное преобразование есть преобразование из бесконечно малой окрестности единицы. Оно записывается так:

$$U = 1 + iG, \qquad U^{\dagger} = U^{-1} = 1 - iG, \tag{1.14}$$

где G — инфинитезимальный эрмитов оператор. Сравнивая два таких преобразования, получаем

$$U_{[12]} = 1 + iG_{[12]}, \tag{1.15}$$

---

[1]) В теории групп такой оператор называется коммутатором элементов U_1^{-1} и U_2^{-1}.— *Прим. ред.*

где оператор

$$G_{[12]} = -G_{[21]} = \frac{1}{i}[G_1, G_2] \tag{1.16}$$

вводит коммутатор операторов G_1 и G_2. Действие инфинитезимального унитарного преобразования на оператор описывается формулой

$$UXU^{-1} = X + \delta X, \tag{1.17}$$

где

$$\delta X = \frac{1}{i}[X, G]; \tag{1.18}$$

соотношение (1.17) эквивалентно равенству

$$\overline{X} = U^{-1}XU = X - \delta X. \tag{1.19}$$

Записывая $U_{[12]}XU_{[12]}^{-1}$ двумя разными способами:

$$U_{[12]}XU_{[12]}^{-1} = X + \delta_{[12]}X = U_2U_1U_2^{-1}U_1^{-1}XU_1U_2U_1^{-1}U_2^{-1}, \tag{1.20}$$

мы получаем

$$\delta_{[12]}X = \delta_2\delta_1X - \delta_1\delta_2X. \tag{1.21}$$

Будучи записанным через двойные коммутаторы:

$$[X, [G_1, G_2]] = [[X, G_1], G_2] - [[X, G_2], G_1], \tag{1.22}$$

это соотношение называется тождеством Якоби.

Рассмотрим теперь группу унитарных преобразований с n вещественными непрерывными параметрами λ_a $(a = 1, \ldots, n)$, всю совокупность которых мы будем обозначать символом λ. Если $U(\lambda_{1,2})$ — типичные операторы группы, то требуется, чтобы выполнялось равенство

$$U(\lambda_2)\,U(\lambda_1) = U(\lambda_a), \tag{1.23}$$

где

$$\lambda_a = \lambda_a(\lambda_1, \lambda_2) \tag{1.24}$$

— параметры какого-то другого элемента группы. Для унитарных операторов существование обратного и единичного операторов обеспечено по определению. Инфинитезимальные преобразования из группы с параметрами $\delta\lambda_a$ строятся из n конечных эрмитовых операторов G_a:

$$G = \sum_{a=1}^{n} \delta\lambda_a G_a, \tag{1.25}$$

называемых генераторами группы. Ничто не мешает переопределить генераторы посредством вещественных несингулярных линейных преобразований с соответствующим переопределением параметров. Подвергнув оператор инфинитезимального преобразования $U(\delta\lambda)$ произвольному унитарному преобразованию из группы, мы должны получить некоторое другое инфинитезимальное преобразование. Это утверждение выражается равенством

$$U(\lambda)^{-1} G_a U(\lambda) = \sum_b u_{ab}(\lambda) G_b, \tag{1.26}$$

где числа $u_{ab}(\lambda)$ вещественны. Используя матричные обозначения в n-мерном пространстве параметров, предыдущее равенство можно записать в виде

$$U(\lambda)^{-1} G U(\lambda) = u(\lambda) G. \tag{1.27}$$

Действие унитарных преобразований можно представить также другим способом:

$$U(\lambda) G_b U(\lambda)^{-1} = \sum_a G_a \hat{u}_{ab}(\lambda), \tag{1.28}$$

или

$$U(\lambda) G U(\lambda)^{-1} = G\hat{u}(\lambda). \tag{1.29}$$

Два введенных набора матриц связаны соотношением

$$\hat{u} = (u^T)^{-1}, \tag{1.30}$$

где T означает операцию транспонирования. Заметим, что, поскольку матрицы u вещественны, для них транспонирование эквивалентно эрмитову сопряжению.

Соответствие, установленное между унитарным оператором $U(\lambda)$ и матрицами $u(\lambda)$, $\hat{u}(\lambda)$, сохраняется и при умножении:

$$U(\lambda_1)^{-1} U(\lambda_2)^{-1} G U(\lambda_2) U(\lambda_1) = U(\lambda_1)^{-1} [u(\lambda_2) G] U(\lambda_1) = \\ = u(\lambda_2) u(\lambda_1) G, \tag{1.31}$$

$$U(\lambda_2) U(\lambda_1) G U(\lambda_1)^{-1} U(\lambda_2)^{-1} = U(\lambda_2) [G\hat{u}(\lambda_1)] U(\lambda_2)^{-1} = \\ = G\hat{u}(\lambda_2)\hat{u}(\lambda_1). \tag{1.32}$$

Так как единичный оператор соответствует единичной матрице, мы имеем

$$u(\delta\lambda) = 1 + i\sum_a \delta\lambda_a g_a, \quad \hat{u}(\delta\lambda) = 1 + i\sum_a \delta\lambda_a \hat{g}_a, \tag{1.33}$$

где

$$\hat{g}_a = -g_a^T = g_a^{T*}. \tag{1.34}$$

Это дает

$$[G, G_b] = g_b G = -G\hat{g}_b. \tag{1.35}$$

Вводя для мнимых элементов матрицы g_b обозначение

$$(g_b)_{ac} = g_{abc}, \tag{1.36}$$

мы получаем коммутационные соотношения для генераторов группы в явном виде:

$$[G_a, G_b] = \sum_c g_{abc} G_c. \qquad (1.37)$$

Между прочим, отсюда видно, что

$$g_{abc} = -g_{bac}. \qquad (1.38)$$

Ввиду мультипликативного соответствия между $U(\lambda)$ и $u(\lambda)$ [или $\hat{u}(\lambda)$] матрицы g_a [$\hat{g}_a$] удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям:

$$[g_a, g_b] = \sum_c g_{abc} g_c. \qquad (1.39)$$

Последние представляют собой систему квадратичных ограничений, которым должны удовлетворять числа g_{abc}, называемые структурными константами группы:

$$\sum_d [g_{abd} g_{dce} + g_{bcd} g_{dae} + g_{cad} g_{dbe}] = 0. \qquad (1.40)$$

Это циклическое соотношение сразу же следует и из тождества Якоби, записанного в циклической форме:

$$[[G_a, G_b], G_c] + [[G_b, G_c], G_a] + [[G_c, G_a], G_b] = 0. \qquad (1.41)$$

Структурные константы задают композиционные свойства бесконечно малых параметров. Пусть $\delta_{[12]}\lambda_a$ — параметры инфинитезимального преобразования, связывающего два произведения преобразований с параметрами $\delta_1\lambda_a$ и $\delta_2\lambda_a$, которые производятся в противоположном порядке. Согласно коммутационным соотношениям для генераторов группы, эти параметры задаются равенством

$$\delta_{[12]}\lambda_c = -\delta_{[21]}\lambda_c = \sum_{ab} \delta_1\lambda_a \delta_2\lambda_b \frac{1}{i} g_{abc}. \qquad (1.42)$$

При дальнейшем анализе мы будем рассматривать композиционные свойства группы с геометрической точки зрения. Необходимо четко представлять себе, что соответствующая унитарная группа может и не быть точным образом исходной геометрической группы. Это — следствие произвола, свойственного любому квантовомеханическому описанию, в силу которого все состояния можно снабдить общим фазовым множителем, т. е. подвергнуть унитарному преобразованию, которое генерировано единичным оператором. Рассмотрим в качестве примера коммутативную (абелеву) группу трансляций в пространстве двух измерений. Пусть δx_1 и δx_2 — параметры двух независимых инфинитезимальных смещений, а p_1 и p_2 — соответствующие эрмитовы операторы смещений; тогда

$$G = p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2. \qquad (1.43)$$

Из нечувствительности результата последовательных смещений к порядку, в котором они производятся, должна следовать коммутативность операторов p_1 и p_2. Однако в действительности от коммутатора требуется только то, чтобы он генерировал унитарное преобразование, не приводящее ни к каким физическим следствиям. Поэтому при соответствующей нормировке операторов смещений будем иметь

$$\frac{1}{i}[p_1, p_2] = 1. \tag{1.44}$$

При этом действие унитарного преобразования $U(\delta x)$ на операторы $p_{1,2}$ сводится к преобразованию

$$\delta p_1 = \frac{1}{i}[p_1, G] = \delta x_2, \qquad \delta p_2 = \frac{1}{i}[p_2, G] = -\delta x_1, \tag{1.45}$$

откуда видно, что операторы смещений служат также операторами координат:

$$x_1 = -p_2 \equiv q, \qquad x_2 = p_1 \equiv p. \tag{1.46}$$

В приведенном примере нетрудно узнать свойства фазового пространства переменных q, p, связанного с одной квантовой степенью свободы. Трансляции в этом двумерном пространстве описываются трехпараметрической унитарной группой, имеющей следующий явный вид:

$$G = p\delta q - q\delta p + \delta\varphi 1. \tag{1.47}$$

Соответствие между унитарными операторами $U(\lambda)$ и конечными матрицами $u(\lambda)$, $\hat{u}(\lambda)$ вовсе не предполагает унитарности последних. [Заметим, что если $u(\lambda)$ — унитарные матрицы, или вещественные ортогональные матрицы, то $u(\lambda) = \hat{u}(\lambda)$; тогда g_a будут эрмитовыми, или мнимыми антисимметричными, матрицами, причем $g_a = \hat{g}_a$.] Так как структуру матриц g можно изменять, изменяя базис из генераторов в пространстве параметров, полезно было бы иметь инвариантный критерий, позволяющий судить о возможности выбора эрмитовых матриц g или унитарных матриц $u(\lambda)$. Если набор n генераторов G заменить их линейно независимыми комбинациями λG, то матрицы g подвергнутся тому же самому линейному преобразованию, а кроме того, еще и преобразованию подобия, порождаемому несингулярной матрицей λ. Поскольку след произведения матриц не меняется при преобразовании подобия, мы рассмотрим вещественную квадратичную форму

$$\sum_{ab} x_a \operatorname{Sp}(g_a g_b) x_b = \operatorname{Sp}\left(\sum_a x_a g_a\right)^2, \tag{1.48}$$

которая должна быть положительно-определенной, если матрицы g_a можно представить в виде линейно-независимых эрмитовых матриц. Если это свойство отсутствует, то такие эрмитовы матрицы g и унитарные матрицы $u(\lambda)$ не существуют. Именно так обстоит дело с генераторами q, p, 1 в примере, который мы только что рассмотрели. В этом случае квадратичная форма тождественно равна нулю, так как единичному оператору отвечает нулевая матрица, а у матриц, связанных с q и p, отличны от нуля лишь по одному недиагональному элементу, причем такому, что все произведения матрицы обращаются в нуль. Положительная определенность вещественной симметричной матрицы

$$\gamma_{ab} = \mathrm{Sp}\,(g_a g_b) \tag{1.49}$$

не только необходима, но и достаточна для эквивалентности g_a набору линейно-независимых эрмитовых матриц. Так как элементы матрицы γ не меняются при преобразовании подобия

$$u(\lambda)^{-1} g_a u(\lambda) = \sum_b u_{ab}(\lambda)\, g_b, \tag{1.50}$$

мы имеем

$$\gamma = u(\lambda)\, \gamma u(\lambda)^T. \tag{1.51}$$

Вещественную, симметричную, положительно-определенную матрицу γ всегда можно представить в виде квадрата некоторой другой матрицы с такими же свойствами; мы обозначим ее через $\gamma^{1/2}$. Тогда

$$[\gamma^{-1/2} u(\lambda)\, \gamma^{1/2}]\, [\gamma^{-1/2} u(\lambda)\, \gamma^{1/2}]^T = 1, \tag{1.52}$$

откуда становится ясной структура преобразования подобия, которое приводит к унитарным (ортогональным) матрицам $u(\lambda)$ и к эрмитовым (антисимметричным) матрицам g. В новом базисе матрица γ кратна единичной.

Предположим, что операторы G_a допускают реализацию в виде конечномерных линейно-независимых эрмитовых матриц. Это означает существование вещественной симметричной положительно-определенной матрицы

$$\gamma'_{ab} = \mathrm{Sp}\,(G_a G_b). \tag{1.53}$$

Неизменность этих величин при унитарных преобразованиях операторов снова приводит к равенству

$$\gamma' = u(\lambda)\, \gamma' u(\lambda)^T, \tag{1.54}$$

означающему, что в качестве матриц $u(\lambda)$ можно взять унитарные матрицы. Если исключить не представляющую интереса возможность, когда группа содержит в качестве сомножителя некоторую абелеву группу, то соответствующие эрмитовы матрицы g_a будут линейно-независимыми. Они служат примером конечномерной реализации операторов G_a, тогда как $u(\lambda)$ дают конечномерную унитарную реализацию операторов $U(\lambda)$. Наоборот, если матрица γ_{ab} не является положительно-определенной, то никакая конечномерная унитарная (эрмитова) реализация операторов $U(\lambda)$ $[G_a]$ невозможна. Наличие конечномерной реализации группы означает, что найдется такое конечное число состояний, которые при всех операциях группы преобразуются только друг через друга. В общем случае действие унитарного оператора на состояние приводит к новому состоянию, причем при повторном его применении процесс порождения дополнительных состояний продолжается дальше. При этом число состояний будет конечным, если повторное применение групповых операций в конце концов перестает порождать новые операторы, т. е. когда пространство параметров группы является замкнутым. Наиболее известным примером различия между замкнутым и открытым групповыми многообразиями является различие между вращениями и трансляциями.

Если матрицы g_a эрмитовы, то структурные константы g_{abc} антисимметричны по a и c, а также по a и b, что означает также антисимметрию по b и c. Такая полная антисимметрия возможна только при $n \geqslant 3$. В случае $n = 3$ мнимые структурные константы соответствующей нормировкой всегда приводятся к виду

$$g_{abc} = i\varepsilon_{abc}, \tag{1.55}$$

где ε_{abc} — полностью антисимметричный символ, фиксированный условием $\varepsilon_{123} = +1$. Возникающие при этом групповые коммутационные соотношения

$$[G_1, G_2] = iG_3, \qquad [G_2, G_3] = iG_1, \qquad [G_3, G_1] = iG_2, \tag{1.56}$$

или

$$[G_a, G_b] = i\sum_c \varepsilon_{abc}G_c, \tag{1.57}$$

хорошо известны из теории трехмерного углового момента и из теории изоспина. Трехмерные матрицы g удовлетворяют таким же коммутационным соотношениям, а матрица γ кратна единичной.

§ 2. ГАЛИЛЕЕВСКАЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ

Пространственно-временные координаты появляются в квантовой механике в качестве некоторой абстракции, служащей для описания роли макроскопических измерительных приборов. Все экспериментальные данные подтверждают эквивалентность двух координатных систем, которые отличаются одна от другой началом пространственных координат, началом отсчета времени, направлением пространственных осей или наличием постоянной относительной скорости. Совокупность соответствующих преобразований образует группу относительности или, точнее, подгруппу тех ее преобразований, которые непрерывным образом связаны с единицей. Когда все частицы движутся медленно (их скорость мала по сравнению со скоростью света), временная координата имеет абсолютный смысл и изменяется лишь при сдвиге начала ее отсчета. Это и есть галилеевская относительность. Она характеризуется инфинитезимальными координатными преобразованиями $\mathbf{r}, t \to \bar{\mathbf{r}}, \bar{t}$, где

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \delta\mathbf{r}, \qquad \bar{t} = t - \delta t, \tag{2.1}$$

$$\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \delta\mathbf{v}\cdot t. \tag{2.2}$$

Заметим, что при таком соглашении о знаках, скажем, под $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ понимается сдвиг начала пространственной системы координат, относительно которой рассматривается данная точка. Если же на $\delta\mathbf{r}$ сдвигается сама эта точка, то ее новое положение относительно фиксированной системы координат будет задаваться вектором $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$. Композиционные свойства рассматриваемой 10-параметрической группы определяются путем сравнения результата последовательности преобразований

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}} &= \mathbf{r} - \delta_1\mathbf{r}, & \bar{t} &= t - \delta_1 t,\\ \bar{\bar{\mathbf{r}}} &= \bar{\mathbf{r}} - \delta_2\bar{\mathbf{r}}, & \bar{\bar{t}} &= \bar{t} - \delta_2\bar{t} \end{aligned} \tag{2.3}$$

с результатом последовательности тех же преобразований, произведенных в противоположном порядке. Совершая последовательно инфинитезимальные преобразования 1, 2, 1^{-1}, 2^{-1} или преобразования 1^{-1}, 2^{-1}, 1, 2, получаем:

$$\begin{aligned} &\delta_{[12]}\mathbf{r} = \delta_{[12]}\boldsymbol{\varepsilon} + \delta_{[12]}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \delta_{[12]}\mathbf{v}\cdot t,\\ &\delta_{[12]}t = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{[12]}\boldsymbol{\varepsilon} &= \delta_1\boldsymbol{\omega} \times \delta_2\boldsymbol{\varepsilon} - \delta_2\boldsymbol{\omega} \times \delta_1\boldsymbol{\varepsilon} + \delta_1\mathbf{v}\cdot\delta_2 t - \delta_2\mathbf{v}\cdot\delta_1 t,\\ \delta_{[12]}\boldsymbol{\omega} &= \delta_1\boldsymbol{\omega} \times \delta_2\boldsymbol{\omega},\\ \delta_{[12]}\mathbf{v} &= \delta_1\boldsymbol{\omega} \times \delta_2\mathbf{v} - \delta_2\boldsymbol{\omega} \times \delta_1\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Инфинитезимальное унитарное преобразование $U = 1 + iG$, порождаемое инфинитезимальным координатным преобразованием, задается формулой

$$G = \frac{1}{\hbar}[\delta\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{P} + \delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J} + \delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{N} - \delta t\cdot H] + \delta\varphi 1. \tag{2.6}$$

В дальнейшем квантовая единица действия $\hbar = 1{,}0545\cdot10^{-27}$ эрг·с будет заменяться единицей, что соответствует выбору атомных единиц измерения. Генераторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{J}$ обычно называют операторами импульса и углового момента, а H — оператором энергии или гамильтонианом. Генераторы, отвечающие бесконечно малым изменениям скорости, ранее не имели особого названия. Но в наш ракетный век преобразования, соответствующие конечной скорости, стали именовать «бустами». Поэтому оператор $\mathbf{N}$ следовало бы, может быть, называть «бустером» [1]). Мы должны теперь установить композиционные свойства группы для нового скалярного параметра $\delta\varphi$. Общий вид билинейной формы $\delta_{[12]}\varphi = -\delta_{[21]}\varphi$ следующий:

$$\delta_{[12]}\varphi = K\,(\delta_1\boldsymbol{\omega}\cdot\delta_2\boldsymbol{\varepsilon} - \delta_2\boldsymbol{\omega}\cdot\delta_1\boldsymbol{\varepsilon}) + L\,(\delta_1\boldsymbol{\omega}\cdot\delta_2\mathbf{v} - \delta_2\boldsymbol{\omega}\cdot\delta_1\mathbf{v}) + M\,(\delta_1\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\delta_2\mathbf{v} - \delta_2\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\delta_1\mathbf{v}), \tag{2.7}$$

где K, L, M — некоторые константы. Применяя тождество Якоби к трем совокупностям инфинитезимальных преобразований, получаем:

$$\begin{gathered} K\,[\delta_{[12]}\boldsymbol{\omega}\cdot\delta_3\boldsymbol{\varepsilon} - \delta_3\boldsymbol{\omega}\cdot\delta_{[12]}\boldsymbol{\varepsilon} + \text{цикл. перест.}] + \\ + L\,[\delta_{[12]}\boldsymbol{\omega}\cdot\delta_3\mathbf{v} - \delta_3\boldsymbol{\omega}\cdot\delta_{[12]}\mathbf{v} + \text{цикл. перест.}] + \\ + M\,[\delta_{[12]}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\delta_3\mathbf{v} - \delta_3\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\delta_{[12]}\mathbf{v} + \text{цикл. перест.}] = 0. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Легко убедиться в том, что множитель при M тождественно равен нулю, но коэффициенты при K и L в нуль не обращаются. Поэтому должны равняться нулю сами K и L, и мы приходим к следующему простому выражению:

$$\delta_{[12]}\varphi = M\,(\delta_1\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\delta_2\mathbf{v} - \delta_2\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\delta_1\mathbf{v}). \tag{2.9}$$

Не в качестве доказательства справедливости выражения (2.9), а лишь как некоторое наводящее соображение к нему, обратим внимание на то, что величина $\delta\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\delta\mathbf{v}$ есть скаляр, тогда как $\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\delta\mathbf{v}$ — псевдоскаляры.

Полный набор коммутационных соотношений для генераторов имеет вид

$$\begin{gathered} [J_k, J_l] = i\varepsilon_{klm}J_m, \quad [P_k, J_l] = i\varepsilon_{klm}P_m, \quad [N_k, J_l] = i\varepsilon_{klm}N_m, \\ [P_k, P_l] = 0, \quad [N_k, N_l] = 0, \quad [P_k, N_l] = i\delta_{kl}M \end{gathered} \tag{2.10}$$

и

$$[P_k, H] = 0, \quad [J_k, H] = 0, \quad [N_k, H] = -iP_k, \tag{2.11}$$

где принято правило суммирования по повторяющимся индексам, в рассматриваемом случае по индексу m, пробегающему значения 1, 2, 3.

---

[1]) В тексте использованы (как это стало уже почти традиционным в научной литературе) английские слова «boost» и «booster». Они употребляются не только в ракетной технике, как можно подумать на основании слов автора. Их значение приводится в англо-русских словарях. В ракетной же технике бустер — ракетный ускоритель, стартовый двигатель, а буст — тяга такого двигателя.— *Прим. ред.*

Коммутатор двух генераторов можно интерпретировать, причем двумя разными способами, как результат действия инфинитезимального унитарного преобразования на оператор:

$$\delta_{[12]}G = \frac{1}{i}[G_1, G_2] = \delta_2 G_1 = -\delta_1 G_2. \tag{2.12}$$

Коммутаторы, в которые входит оператор углового момента, можно записать, например, в виде

$$\begin{aligned} \delta_\omega \mathbf{J} &= \frac{1}{i}[\mathbf{J}, \mathbf{J}\cdot\delta\boldsymbol{\omega}] = \delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}, \\ \delta_\omega \mathbf{P} &= \frac{1}{i}[\mathbf{P}, \mathbf{J}\cdot\delta\boldsymbol{\omega}] = \delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{P}, \\ \delta_\omega \mathbf{N} &= \frac{1}{i}[\mathbf{N}, \mathbf{J}\cdot\delta\boldsymbol{\omega}] = \delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{N}; \end{aligned} \tag{2.13}$$

этим устанавливается изменение вектора при бесконечно малом вращении. Соотношение же

$$\delta_\omega H = \frac{1}{i}[H, \mathbf{J}\cdot\delta\boldsymbol{\omega}] = 0 \tag{2.14}$$

характеризует H как скаляр по отношению к вращениям. В случае же когда в коммутаторы входит оператор импульса, т. е. когда изменение физических величин обусловлено трансляцией, имеем

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \mathbf{J} &= \frac{1}{i}[\mathbf{J}, \mathbf{P}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}] = \delta\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{P}, \\ \delta_\varepsilon \mathbf{P} &= \frac{1}{i}[\mathbf{P}, \mathbf{P}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}] = 0, \\ \delta_\varepsilon \mathbf{N} &= \frac{1}{i}[\mathbf{N}, \mathbf{P}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}] = -M\delta\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.15}$$

и

$$\delta_\varepsilon H = \frac{1}{i}[H, \mathbf{P}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}] = 0. \tag{2.16}$$

Характер изменения углового момента при трансляциях находится в соответствии с тем, что последний является моментом вектора импульса, и указывает на существование векторного оператора положения $\mathbf{R}$ со свойством

$$\frac{1}{i}[\mathbf{R}, \mathbf{P}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}] = \delta\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.17}$$

или

$$[R_k, P_l] = i\delta_{kl}. \tag{2.18}$$

Следовательно, мы можем написать

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}\times\mathbf{P} + \mathbf{S}, \tag{2.19}$$

где $\mathbf{S}$ — трансляционно-инвариантный вклад в угловой момент, т. е. внутренний угловой момент, или спин. Такая конструкция обеспечивает правильный характер изменения оператора $\mathbf{P}$ при вращениях. Правильно будет изменяться при вращениях и оператор $\mathbf{R}$, если его компоненты коммутируют друг с другом и если $\mathbf{S}$ коммутирует с $\mathbf{R}$ и с $\mathbf{P}$. Чтобы получить правильное поведение самого оператора $\mathbf{S}$ относительно вращений, необходимо, чтобы его компоненты удовлетворяли коммутационным соотношениям для компонент углового момента, которые можно записать также в виде

$$\mathbf{S} \times \mathbf{S} = i\mathbf{S}. \tag{2.20}$$

Характер изменения оператора N при трансляциях указывает на то, что его можно отождествить с $-M\mathbf{R}$, добавив к этому оператору трансляционно-инвариантный член. Так как движению с постоянной скоростью отвечает линейно-возрастающая со временем трансляция, то

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}t - M\mathbf{R}. \tag{2.21}$$

При таком построении операторы $\mathbf{J}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}$ удовлетворяют всем необходимым коммутационным соотношениям друг с другом.

Если $|\ \rangle$ есть динамически возможное состояние, а U — преобразование из группы относительности, то $U|\ \rangle$ будет также динамически возможным состоянием, так как вектор $U|\ \rangle$ имеет те же самые компоненты, что и вектор $|\ \rangle$ при переходе к преобразованному базису. Это означает, что генераторы группы относительности являются интегралами движения. Это следует также из коммутационных соотношений, в которые входит H, если учесть, что $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{S}$ не зависят явно от t:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{1}{i}[\mathbf{P}, H] = 0, \qquad \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{1}{i}[\mathbf{J}, H] = 0, \tag{2.22}$$

тогда как

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} + \frac{1}{i}[\mathbf{N}, H] = 0 \qquad \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = \mathbf{P}\right). \tag{2.23}$$

Конечно, в случае изолированной динамической системы H не зависит явно от t. Факт сохранения $\mathbf{N}$ можно записать также в виде

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{P} - M\frac{d\mathbf{R}}{dt} = 0, \tag{2.24}$$

откуда ясно, что параметр M следует отождествить с постоянной массой системы. Вектор положения $\mathbf{R}$ описывает движение с постоянной скоростью:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\mathbf{P}}{M}. \tag{2.25}$$

Структура оператора H до некоторой степени определяется различными законами сохранения. Заметим, что

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\frac{1}{i}[\mathbf{P}, H]=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{R}}=0, \qquad \frac{d\mathbf{R}}{dt}=\frac{1}{i}[\mathbf{R}, H]=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}=\frac{\mathbf{P}}{M} \tag{2.26}$$

и

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt}=\frac{d\mathbf{S}}{dt}=\frac{1}{i}[\mathbf{S}, H]=0. \tag{2.27}$$

Следствием этих соотношений является равенство

$$H=\frac{\mathbf{P}^2}{2M}+H_{\text{внутр}}, \tag{2.28}$$

которое дает нам разбиение H на энергию движения системы как целого и на внутреннюю энергию. Выражение для последней обычно содержит внутренние динамические переменные, коммутирующие с $\mathbf{R}$ и $\mathbf{P}$; эти переменные входят в гамильтониан $H_{\text{внутр}}$ таким образом, что он оказывается инвариантным относительно вращений, генерируемых внутренним угловым моментом $\mathbf{S}$.

Элементарная частица представляет собой систему без внутренней энергии или по крайней мере систему, внутренняя энергия которой при рассматриваемых ограничениях на физические условия эффективно никак не проявляется. Рассмотрим n элементарных частиц, каждая из которых описывается, как и выше, переменными $\mathbf{r}_a$, $\mathbf{p}_a$, $\mathbf{s}_a$ и массой m_a, где $a=1, \ldots, n$. Операторы, связанные с различными частицами, коммутируют. Генераторы кинематических преобразований системы как целого будут тогда аддитивными:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}&=\sum_{a=1}^{n}\mathbf{p}_a, \\ \mathbf{J}&=\sum_{a=1}^{n}(\mathbf{r}_a\times\mathbf{p}_a+\mathbf{s}_a)=\mathbf{R}\times\mathbf{P}+\mathbf{S}, \\ \mathbf{N}&=\sum_{a=1}^{n}(\mathbf{p}_a t-m_a\mathbf{r}_a)=\mathbf{P}t-M\mathbf{R}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

где

$$M=\sum_a m_a, \qquad \mathbf{R}=\sum_a\frac{m_a}{M}\mathbf{r}_a \tag{2.30}$$

и

$$\mathbf{S}=\sum_a\left[(\mathbf{r}_a-\mathbf{R})\times\left(\mathbf{p}_a-\frac{m_a}{M}\mathbf{P}\right)+\mathbf{s}_a\right]. \tag{2.31}$$

Операторы полной системы обладают всеми необходимыми свойствами. Заметим, что введенные здесь внутренние переменные не являются линейно-независимыми:

$$\sum_a m_a (\mathbf{r}_a - \mathbf{R}) = 0, \qquad \sum_a \left(\mathbf{p}_a - \frac{m_a}{M}\mathbf{P}\right) = 0, \tag{2.32}$$

о чем говорит также и коммутационное соотношение

$$\frac{1}{i}\left[(\mathbf{r}_a - \mathbf{R})_k, \ \left(\mathbf{p}_b - \frac{m_b}{M}\mathbf{P}\right)_l\right] = \delta_{kl}\left(\delta_{ab} - \frac{m_b}{M}\right). \tag{2.33}$$

Если разные частицы динамически-независимы, то оператор энергии тоже аддитивен. В более общем случае, когда рассматриваются взаимодействующие системы,

$$H = \sum_a \frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_a} + V = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + H_{\text{внутр}}, \tag{2.34}$$

где внутренняя энергия системы равна:

$$H_{\text{внутр}} = \sum_a \frac{\left(\mathbf{p}_a - \frac{m_a}{M}\mathbf{P}\right)^2}{2m_a} + V; \tag{2.35}$$

V — скалярная функция внутренних координат $\mathbf{r}_a - \mathbf{R}$, $\mathbf{p}_a - (m_a/M)\mathbf{P}$ и $\mathbf{s}_a$, которая может зависеть также и от некоторых других переменных.

Если не считать весьма специальных случаев, то число рассматриваемых частиц не может быть динамической переменной. Пусть имеется несколько разных сортов частиц с массами m_α. Тогда

$$M = \sum_\alpha m_\alpha N_\alpha, \tag{2.36}$$

где N_α — число частиц сорта α. Так как между массами различных частиц, вообще говоря, не существует никаких рациональных соотношений, постоянство M означает постоянство N_α для каждого сорта частиц. Исключение имеет место для нестабильных частиц, например для α-нестабильных атомных ядер (кинетические энергии α-частиц могут быть достаточно малыми, так что нерелятивистский характер движения нарушаться здесь не будет). При этом масса нестабильного ядра оказывается чрезвычайно близкой к сумме масс α-частицы и образовавшегося ядра.

Основываясь на общей характеристике взаимодействующих систем, мы можем получить простое описание поведения частицы, на которую влияет контролируемое макроскопическое окружение. Так как в основе измерения характеристик свободных частиц лежит классическая теория таких взаимодействий, возникает необходимость в некотором критерии самосогласованности. Разобьем гамильтониан системы частиц на две части: гамильтониан H_p, включающий все члены, которые содержат переменные данной частицы, и гамильтониан H_{-p}, включающий все прочие члены, описывающие систему, которая получается, если из исходной удалить интересующую нас частицу. Ради простоты будем считать, что H_p содержит лишь члены взаимодействия, линейные по скорости и по спину, а билинейные члены и члены, описывающие спин-орбитальную связь, мы в него включать не будем. Несмотря на то что взаимодействие не обязательно является электромагнитным, мы будем использовать обозначения, подобные принятым в случае такого взаимодействия:

$$H_p = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \left[e\varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2(\mathbf{r}, t) \right] - \\ - \frac{\mathbf{p}}{mc}\cdot e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{s}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}, t). \tag{2.37}$$

Подразумевается, что произведение некоммутирующих операторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ симметризовано с тем, чтобы оно было эрмитовым. Явная зависимость от времени появилась здесь в качестве эффективной замены истинной зависимости от переменных внешней системы; это ясно из равенства

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{i}[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t), H_{-p}]. \tag{2.38}$$

Уравнения движения имеют вид

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{m}\left[\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right], \qquad \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{s}\times\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \tag{2.39}$$

и

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H} + \nabla(\mathbf{s}\cdot\mathbf{F}), \tag{2.40}$$

где

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{H} = \nabla\times\mathbf{A}. \tag{2.41}$$

При выводе второго уравнения мы отбросили коммутаторы типа $[(e/c)\,\mathbf{A}, e\varphi]$. Это отбрасывание обосновывается не тем, что мы рассматриваем классическое приближение, а тем, что мы пренебрегаем обратной динамической реакцией частицы на внешнюю систему. Приведем также коммутационное соотношение

$$\mathbf{v}\times\mathbf{v} = i\frac{e}{m^2c}\mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \tag{2.42}$$

Собственно электромагнетизм мы получим, приравнивая $\mathbf{F}$ величине, кратной $\mathbf{H}$:

$$F = g\frac{e}{2mc}\mathbf{H}, \tag{2.43}$$

что даст нам внутренний магнитный дипольный момент частицы:

$$\mu = g\frac{e}{2mc}\mathbf{s}. \tag{2.44}$$

Аналогичный этой характеристике электрический дипольный момент не был обнаружен. Одно из значений гиромагнитного отношения g играет особую роль. В однородном магнитном поле векторы скорости и спина прецессируют вокруг направления этого поля, причем скорости обеих прецессий совпадают при $g = 2$. Экспериментально измеренные гиромагнитные отношения чрезвычайно близки к значению $g = 2$ (лишь чуть-чуть превышая его) в случае электрона $(2 \cdot 1{,}001160)$ и мюона $(2 \cdot 1{,}001166)$; для других же частиц они весьма сильно отличаются от этой величины.

В дальнейшем нас будет интересовать движение бесспиновой заряженной частицы в магнитном поле, создаваемом закрепленным магнитным зарядом. Пусть начало системы координат совмещено с этим зарядом, так что

$$\mathbf{H} = g\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{2.45}$$

(теперь через g будет обозначаться величина магнитного заряда в гауссовой системе единиц). Нашу систему характеризует уравнение движения

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{eg}{c}\mathbf{v}\times\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{2.46}$$

(произведение считается симметризованным), дополненное коммутационными соотношениями

$$[\mathbf{r}_k,\ (m\mathbf{v})_l] = i\delta_{kl} \tag{2.47}$$

и

$$\mathbf{v}\times\mathbf{v} = i\frac{eg}{m^2c}\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{2.48}$$

Как это следует из тождества Якоби

$$0 = [[\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2],\ \mathbf{v}_3] + \text{цикл. перест.} = \frac{eg}{m^3c}\nabla^2\frac{1}{r}, \tag{2.49}$$

равенство (2.48) не будет внутренне противоречивым лишь в том случае, когда частица все время остается на некотором удалении от магнитного заряда, т. е. при $r > 0$. Уравнение моментов, записанное через симметризованное произведение, имеет вид

$$\mathbf{r}\times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{eg}{c}\left(\mathbf{v}\frac{1}{r} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right). \tag{2.50}$$

Однако, так как зависимость гамильтониана от импульса не сильнее квадратичной, используя симметризованное произведение, можно написать:

$$\frac{df(\mathbf{r})}{dt}=\frac{1}{i}[f(\mathbf{r}),\,H]=\nabla f(\mathbf{r})\cdot\frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}}=\mathbf{v}\cdot\nabla f(\mathbf{r}),\tag{2.51}$$

и тем самым мы получаем сохраняющийся вектор углового момента

$$\mathbf{J}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}-\frac{eg}{c}\frac{\mathbf{r}}{r}.\tag{2.52}$$

Как нетрудно убедиться, он является генератором вращений, откуда вытокает одно важное следствие. Рассмотрим координатную волновую функцию $\langle\,\mathbf{r}t|\;\rangle$, описывающую состояние частицы, и повернем систему координат вокруг оси, задаваемой вектором $\mathbf{r}$. Инфинитезимальное вращение будет задаваться вектором

$$\delta\boldsymbol{\omega}=\frac{\mathbf{r}}{r}\,\delta\varphi,\tag{2.53}$$

и соответствующий ему генератор равен просто

$$\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}=-\frac{eg}{c}\,\delta\varphi.\tag{2.54}$$

Следовательно, в результате конечного вращения волновая функция изменится по закону

$$\langle\mathbf{r}t|\;\rangle\to e^{-i(eg/c)\varphi}\langle\mathbf{r}t|\;\rangle\tag{2.55}$$

и обычное требование ее однозначности или двузначности при повороте на 2π радиан означает, что величина eg/c равна либо целому, либо полуцелому числу.

Конечно, мы далеко не полно рассмотрели вопрос о магнитном заряде и о возможности его существования. Но вскоре мы в связи с самыми различными физическими проблемами вновь встретимся со специальной системой операторов, фигурирующих в соотношениях (2.47), (2.48) и (2.52).

§ 3. ЭЙНШТЕЙНОВСКАЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ

Учет конечной величины скорости света c приводит к отказу от абсолютного характера одновременности. В этом случае соответствующее инфинитезимальное преобразование заменяется на

$$\delta ct=\delta\varepsilon^0+\frac{1}{c}\,\delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{r},\tag{3.1}$$

где $\delta\varepsilon^0$ — смещение начала отсчета переменной ct. В дальнейшем вся совокупность пространственно-временных координат будет обозначаться через $x^\mu=ct$, $\mathbf{r}$, где $x^0=-x_0=ct$, а $x^k=x_k=\mathbf{r}_k$. Инфинитезимальные координатные преобразования из эйнштейновской группы относительности имеют вид

$$\bar{x}^\nu=x^\nu-\delta x^\nu,\qquad \delta x^\nu=\delta\varepsilon^\nu+\delta\omega^{\mu\nu}x_\mu,\tag{3.2}$$

где

$$\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu}. \tag{3.3}$$

Шесть независимых параметров этого четырехмерного вращения связаны с $\delta\omega$ и δv соотношениями

$$\delta\omega_{kl} = \varepsilon_{klm}\delta\omega_m, \qquad \delta\omega_{0k} = \frac{1}{c}\,\delta v_k. \tag{3.4}$$

Композиционные свойства 10-параметрической группы описываются равенствами

$$\begin{aligned} \delta_{[12]}\varepsilon^\nu &= \delta_1\omega^{\mu\nu}\delta_2\varepsilon_\mu - \delta_2\omega^{\mu\nu}\delta_1\varepsilon_\mu, \\ \delta_{[12]}\omega^{\mu\nu} &= \delta_1\omega^{\mu\nu}\delta_2\omega^\nu{}_\lambda - \delta_2\omega^{\mu\lambda}\delta_1\omega^\nu{}_\lambda. \end{aligned} \tag{3.5}$$

В оператор G, который определяет унитарное преобразование, порожденное инфинитезимальным координатным преобразованием, генераторы входят следующим образом:

$$G = P^\mu\delta\varepsilon_\mu + \frac{1}{2}\,J^{\mu\nu}\delta\omega_{\mu\nu} + \delta\varphi 1. \tag{3.6}$$

Их соответствие с галилеевскими генераторами устанавливается соотношениями

$$J_{kl} = \varepsilon_{klm}J_m, \qquad \frac{1}{c}\,J^{0k} = N_k \tag{3.7}$$

и

$$cP^0 = H + Mc^2. \tag{3.8}$$

Вскоре мы выясним необходимость сдвига начала отсчета энергии при переходе от релятивистской области к нерелятивистской (чтобы для галилеевского и эйнштейновского случаев получались общепринятые обозначения). По поводу композиционного свойства скалярного параметра $\delta\varphi$ интересно отметить, что в четырехмерном пространстве Минковского из векторов $\delta_{1,2}\,\varepsilon^\mu$ и тензоров $\delta_{1,2}\,\omega^{\mu\nu}$ невозможно образовать ни одной билинейной скалярной формы $\delta_{[12]}\varphi = -\delta_{[21]}\varphi$. В соответствии с этим

$$\delta_{[12]}\varphi = 0 \tag{3.9}$$

и полный набор коммутационных соотношений для генераторов имеет вид

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0, \\ &\frac{1}{i}\,[P_\mu, J_{\varkappa\lambda}] = g_{\mu\lambda}P_\varkappa - g_{\mu\varkappa}P_\lambda, \\ &\frac{1}{i}\,[J_{\mu\nu}, J_{\varkappa\lambda}] = g_{\mu\varkappa}J_{\nu\lambda} - g_{\nu\varkappa}J_{\mu\lambda} + g_{\nu\lambda}J_{\mu\varkappa} - g_{\mu\lambda}J_{\nu\varkappa}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор:

$$g_{\mu\nu}: \qquad g_{00} = -1, \qquad g_{0k} = 0, \qquad g_{kl} = \delta_{kl}. \tag{3.11}$$

Коммутационные соотношения можно записать также в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\left[P^{\nu},\ \frac{1}{2}J^{\varkappa\lambda}\delta\omega_{\varkappa\lambda}\right]&=\delta\omega^{\mu\nu}P_{\mu},\\ \frac{1}{i}\left[J^{\mu\nu},\ \frac{1}{2}J^{\varkappa\lambda}\delta\omega_{\varkappa\lambda}\right]&=\delta\omega^{\lambda\mu}J_{\lambda}{}^{\nu}+\delta\omega^{\lambda\nu}J^{\mu}{}_{\lambda},\end{aligned}\tag{3.12}$$

указывающем характер изменения векторов и тензоров при инфинитезимальных лоренцевских вращениях (которые включают трехмерные вращения и движения с постоянными скоростями), и в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}[P^{\nu},\ P^{\lambda}\delta\varepsilon_{\lambda}]&=0,\\ \frac{1}{i}[J^{\mu\nu},\ P^{\lambda}\delta\varepsilon_{\lambda}]&=\delta\varepsilon^{\mu}P^{\nu}-\delta\varepsilon^{\nu}P^{\mu},\end{aligned}\tag{3.13}$$

задающем изменение этих операторов при трансляциях. Будучи записанными в трехмерных обозначениях, все эти коммутаторы, за двумя исключениями:

$$\frac{1}{i}[P_k,\ N_l]=\delta_{kl}\frac{P_0}{c},\qquad \frac{1}{i}[N_k,\ N_l]=-\frac{1}{c^2}J_{kl},\tag{3.14}$$

имеют галилеевский вид. При переходе к случаю галилеевской относительности опускают оператор $\mathbf{J}/c^2$ и пренебрегают гамильтонианом H по сравнению с Mc^2, в результате чего оператор P_0/c заменяется числом M. Далее мы будем пользоваться атомной системой единиц, в которой $c=1$.

Коммутационные соотношения (3.10) для всех десяти генераторов могут, очевидно, иметь реализацию

$$P^{\mu}|\ \rangle=0,\qquad J^{\mu\nu}|\ \rangle=0,\tag{3.15}$$

в которой выражается факт полной инвариантности бесструктурного вакуумного состояния. Любое другое состояние представляет собой некоторое возбуждение системы, характеризуемое неравенством $P^0>0$. Скаляр, образованный из трансляционно-инвариантного вектора P^{μ},

$$M^2=-P^{\mu}P_{\mu}\tag{3.16}$$

инвариантен относительно всех преобразований из группы Лоренца (мы рассматриваем лишь такие преобразования, которые непрерывным образом связаны с единицей, т. е. собственную ортохронную группу Лоренца). В зависимости от того, положительна, равна нулю или отрицательна величина M^2, четырехмерный вектор P^{μ} будет времени-подобным, изотропным или пространственно-подобным. Если импульс времени-подобен, то неравенство

$$P^0=+(\mathbf{P}^2+M^2)^{1/2}>0\tag{3.17}$$

инвариантно. В случае $M = 0$ неравенство

$$P^0 = +|\mathbf{P}| > 0 \tag{3.18}$$

также не меняется при преобразованиях Лоренца. Если же вектор пространственно-подобен, то выбором системы координат знак его временной компоненты можно сделать любым. Таким образом, случай $M^2 < 0$ никакого интереса для физики не представляет. Неотрицательная величина $(M^2)^{1/2}$ есть масса системы.

Другим трансляционно-инвариантным объектом является псевдовектор

$$W^\mu = {}^*J^{\mu\nu}P_\nu = P_\nu\, {}^*J^{\mu\nu}, \tag{3.19}$$

где величина

$${}^*J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}J_{\varkappa\lambda} \tag{3.20}$$

представляет собой тензор, дуальный тензору $J^{\mu\nu}$, т. е. построенный из $J^{\mu\nu}$ и полностью антисимметричного тензора, определяющегося условием

$$\varepsilon^{0123} = +1. \tag{3.21}$$

Указанное свойство инвариантности вытекает из закона изменения $J^{\mu\nu}$ при трансляциях и из антисимметрии тензора $\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}$:

$$\frac{1}{i}[W^\mu, P^\alpha\delta\varepsilon_\alpha] = \delta^{\mu\nu\varkappa\lambda}\delta\varepsilon_\varkappa P_\lambda P_\nu = 0. \tag{3.22}$$

Отметим также, что

$$P_\mu W^\mu = 0. \tag{3.23}$$

Скаляр

$$W^2 = W^\mu W_\mu \geqslant 0 \tag{3.24}$$

инвариантен относительно всех преобразований Лоренца. Как и должно быть, вектор W^μ, являясь вектором, ортогональным к P^μ, не может быть времени-подобным. Коммутационные соотношения для компонент вектора W^μ имеют вид

$$\frac{1}{i}[W^\mu, W^\nu] = {}^*(W^\mu P^\nu - W^\nu P^\mu). \tag{3.25}$$

Поведение физических величин при пространственных трансляциях, иллюстрируемое равенствами

$$\frac{1}{i}[\mathbf{J}, \mathbf{P}\cdot\delta\varepsilon] = \delta\varepsilon \times \mathbf{P}, \qquad \frac{1}{i}[\mathbf{N}, \mathbf{P}\cdot\delta\varepsilon] = -\delta\varepsilon P^0, \tag{3.26}$$

опять-таки указывает на существование оператора положения $\mathbf{R}$, который удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{i}[\mathbf{R}, \mathbf{P}\cdot\delta\varepsilon] = \delta\varepsilon, \tag{3.27}$$

или

$$\frac{1}{i}[R_k, P_l] = \delta_{kl}. \tag{3.28}$$

(Не следует, однако, торопиться и вводить оператор времени, сопряженный с оператором P^0,— это противоречило бы физической природе энергетического спектра.) Одна из возможных форм операторов **J** и **N**, в которой отсутствуют дополнительные трансляционно-инвариантные величины, такова:

$$\mathbf{J} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{P}x^0 - P^0\mathbf{R}. \tag{3.29}$$

Операторы **R** и $\mathbf{P}^0$ не коммутируют:

$$\frac{1}{i}[\mathbf{R}, P^0] = \frac{\partial P^0}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\mathbf{P}}{P^0}, \tag{3.30}$$

и поэтому под $P^0\mathbf{R}$ в равенствах (3.29) понимается симметризованное произведение. Если положить

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = 0, \tag{3.31}$$

то все рассматриваемые операторы будут правильно вести себя при операциях пространственного вращения. Другой характерный для эйнштейновской относительности коммутатор записывается в данном случае так:

$$i\mathbf{N} \times \mathbf{N} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}. \tag{3.32}$$

Чтобы выполнялось это коммутационное соотношение, нам не нужно ничего более делать, так как

$$i[P^0R_k, P^0R_l] = R_kP_l - R_lP_k. \tag{3.33}$$

Простота этого результата, получающегося несмотря на наличие симметризованных произведений, связана с тем, что коммутаторы **R** с функциями от **P** не дают никаких других коммутаторов и поэтому в процессе эрмитовой симметризации обязательно исчезают. В подобной ситуации информация об операторе энергии, которую можно получить из закона сохранения **N**, т. е. из равенства

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx^0} = \frac{\mathbf{P}}{P^0}, \tag{3.34}$$

уже содержится в соотношении $P^0 = (\mathbf{P}^2 + M^2)^{1/2}$.

Добавим теперь внутренний угловой момент:

$$\mathbf{J} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}. \tag{3.35}$$

По самой своей природе оператор **S** обязан коммутировать с **R** и **P**, а его компоненты должны удовлетворять коммутационным соотношениям, свойственным угловому моменту. Чтобы в коммутаторе $i\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ возникло спиновое слагаемое:

$$i\mathbf{N} \times \mathbf{N} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}, \tag{3.36}$$

к оператору $\mathbf{N}$ также необходимо добавить некоторый дополнительный член. Соответствующее выражение для $\mathbf{N}$ имеет вид

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}x^0 - P^0\mathbf{R} + a(P^0)\mathbf{S} \times \mathbf{P}. \tag{3.37}$$

Раскрывая коммутатор $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, получаем

$$-iP^0\mathbf{R} \times [a(\mathbf{S} \times \mathbf{P})] - i[a(\mathbf{S} \times \mathbf{P})] \times P^0\mathbf{R} + a^2 i(\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \times (\mathbf{S} \times \mathbf{P}) =$$
$$= \frac{da}{dP^0}\mathbf{P} \times (\mathbf{S} \times \mathbf{P}) + 2P^0 a\mathbf{S} - a^2[\mathbf{P}^2\mathbf{S} - \mathbf{P} \times (\mathbf{S} \times \mathbf{P})]. \tag{3.38}$$

Нужный нам результат получится в том случае, если

$$\frac{da}{dP^0} + a^2 = 0, \qquad 2P^0 a - \mathbf{P}^2 a^2 = 1, \tag{3.39}$$

или

$$\frac{1}{dP^0}\left(\frac{1}{a} - P^0\right) = 0, \qquad \left(\frac{1}{a} - P^0\right)^2 = M^2. \tag{3.40}$$

Из этих уравнений мы заключаем, что

$$a(P^0) = (P^0 + M)^{-1}, \tag{3.41}$$

так как выбор другого знака приводит к величине $(P_0 - M)^{-1}$, которая сингулярна в точке $\mathbf{P} = 0$, $P^0 = M$. Итак, мы приходим к следующим окончательным выражениям:

$$\begin{gathered} \mathbf{J} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}, \\ \mathbf{N} = \mathbf{P}x^0 - P^0\mathbf{R} + \frac{1}{P^0 + M}\mathbf{S} \times \mathbf{P}, \end{gathered} \tag{3.42}$$

которые показывают, между прочим, что оператор $\mathbf{S}^2$ является лоренцевским инвариантом. Следует отметить, что и наоборот, операторы со свойствами, установленными для $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$, можно построить из лоренцевских генераторов ($x^0 = 0$):

$$\begin{gathered} M\mathbf{R} = -\mathbf{N} + \frac{1}{P^0(P^0 + M)}\mathbf{P}\mathbf{P}\cdot\mathbf{N} + \frac{1}{P^0 + M}\mathbf{J} \times \mathbf{P}, \\ M\mathbf{S} = P^0\mathbf{J} - \frac{1}{P^0 + M}\mathbf{P}\mathbf{P}\cdot\mathbf{J} + \mathbf{N} \times \mathbf{P}, \end{gathered} \tag{3.43}$$

откуда становится очевидной особая роль случая $M = 0$.

Компоненты псевдовектора W^μ таковы:

$$W^0 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{J}, \qquad \mathbf{W} = P^0\mathbf{J} - \mathbf{P} \times \mathbf{N}, \tag{3.44}$$

или

$$\begin{gathered} W^0 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{S}, \\ \mathbf{W} = P^0\mathbf{S} - \frac{1}{P^0 + M}\mathbf{P} \times (\mathbf{S} \times \mathbf{P}) = M\mathbf{S} + \frac{1}{P^0 + M}\mathbf{P}\mathbf{P}\cdot\mathbf{S}. \end{gathered} \tag{3.45}$$

Последнее соотношение можно переписать также в виде

$$\mathbf{W}-\frac{\vec{\mathbf{P}}}{P^0+M}W^0=M\mathbf{S}. \tag{3.46}$$

Инварианты связаны друг с другом равенством

$$W^2 = M^2\mathbf{S}^2. \tag{3.47}$$

Все изложенное выше относится, вообще говоря, к случаю $M^2 > 0$. Рассмотрим теперь предел $M^2 \to 0$ при фиксированном $\mathbf{S}^2$. Возникающему при этом соотношению

$$\mathbf{W}=\mathbf{P}\frac{W^0}{P^0} \tag{3.48}$$

можно придать ковариантную форму

$$W^\mu=\lambda P^\mu, \tag{3.49}$$

где

$$\lambda=\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{S}}{P^0} \tag{3.50}$$

— лоренцевский инвариант. Эта величина представляет собой компоненту спина вдоль направления движения, т. е. спиральность частицы. Инвариантность спиральности приводит к тому, что физическая система должна иметь лишь одно значение этой величины; если же для взаимодействий в рассматриваемой системе имеет смысл пространственная четность, то псевдоскаляр λ может принимать два значения $\pm s$. Примером последнему может служить фотон, имеющий $s = 1$, тогда как в случае нейтрино, для которого $s = {}^1/_2$, значения $\lambda = +s$ и $\lambda = -s$ соответствуют уже существенно различным частицам. Если смысл имеет только одно значение спиральности или даже если при $s \geqslant 1$ реализуются оба значения $\lambda = s$ и $\lambda = -s$, то существуют не все $2s + 1$ состояния, различающиеся спиновым магнитным квантовым числом. В соответствии с этим оператор $\mathbf{S}$ в пределе $M \to 0$ становится неопределенным (не считая двух исключений), и в такой ситуации следует перейти к новым переменным.

Чтобы избавиться от $\mathbf{S}$, введем новый оператор положения

$$\hat{\mathbf{R}}=\mathbf{R}-\frac{\mathbf{S}\times\mathbf{P}}{(P^0)^2}, \tag{3.51}$$

такой, что

$$\hat{\mathbf{R}}\times\mathbf{P}=\mathbf{R}\times\mathbf{P}+\mathbf{S}-\frac{\mathbf{P}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{S})}{(P^0)^2}. \tag{3.52}$$

Тогда

$$\mathbf{J}=\hat{\mathbf{R}}\times\mathbf{P}+\lambda\frac{\mathbf{P}}{P^0}, \qquad \mathbf{N}=\mathbf{P}x^0-P^0\hat{\mathbf{R}}, \tag{3.53}$$

и, чтобы окончательно убедиться в том, что в подобную схему явно входит только λ, приведем коммутатор

$$\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} = -\frac{i\lambda \mathbf{P}}{(P^0)^3} = i\lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \frac{1}{|\mathbf{P}|}. \tag{3.54}$$

В результате мы получаем ту систему операторов, о которой говорили, когда речь шла о магнитном заряде. Соответствие устанавливается формулами

$$\hat{\mathbf{R}} \leftrightarrow m\mathbf{v}, \qquad \mathbf{P} \leftrightarrow -\mathbf{r}, \qquad \lambda \leftrightarrow \frac{eg}{c}, \tag{3.55}$$

причем требование $r > 0$ здесь выполняется благодаря лоренц-инвариантности энергии, $P^0 > 0$. Отсутствие некоторых определенных значений спиральности становится теперь очевидным следствием некоммутативности компонент $\hat{\mathbf{R}}$. Эта внутренняя нелокальность, присущая безмассовым частицам, описывается соотношением неопределенностей

$$\Delta \hat{R}_k \Delta \hat{R}_l \geqslant \frac{|\lambda|}{2} \left| \left\langle \frac{P_m}{(P^0)^3} \right\rangle \right|, \qquad k \neq l \neq m, \tag{3.56}$$

или в случае состояния, для которого в какой-то степени определено направление импульса

$$(\Delta \hat{\mathbf{R}})^2 \geqslant |\lambda| \left\langle \frac{1}{(P^0)^2} \right\rangle. \tag{3.57}$$

Последнее соотношение говорит о том, что, грубо говоря, масштаб пространственной протяженности задается средней длиной волны. Заметим попутно, что при подстановке явных выражений операторов $\mathbf{J}$ и $\mathbf{N}$ в формулы для $M\mathbf{R}$ и $M\mathbf{S}$ последние, так же как и $M\hat{\mathbf{R}}$, обращаются в нуль.

В только что рассматривавшемся случае $W^2 = 0$, но логически возможен и другой случай. Считая, что $\lambda = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}/P^0$ имеет одно из допустимых конечных значений, устремим $\mathbf{S}^2$ к бесконечности при $M^2 \to 0$ с тем, чтобы получить предел

$$M\mathbf{S} \to \mathbf{T}. \tag{3.58}$$

Из свойств $\mathbf{S}$ вытекают следующие соотношения для этих операторов:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{T} \times \mathbf{T} = 0, \qquad \frac{1}{i} [\lambda, \mathbf{T}] = \mathbf{T} \times \frac{\mathbf{P}}{P^0} \tag{3.59}$$

и

$$[\lambda, \mathbf{T}^2] = 0. \tag{3.60}$$

Инварианту

$$\mathbf{T}^2 = W^2 \tag{3.61}$$

можно приписать любое положительное значение. При действии компонент $\mathbf{T}$ величина λ изменяется на ± 1, причем этот процесс можно продолжать беспредельно. Имеем далее

$$W^0 = \lambda P^0, \qquad \mathbf{W} = \lambda \mathbf{P} + \mathbf{T}. \tag{3.62}$$

Коммутационные соотношения между компонентами W^μ, которые при $\mathbf{T} = 0$ удовлетворялись тривиальным образом, теперь требуют, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{1}{i}[\lambda P^0, \mathbf{T}] = \mathbf{T} \times \mathbf{P}, \qquad \frac{1}{i}(\lambda \mathbf{P} + \mathbf{T}) \times (\lambda \mathbf{P} + \mathbf{T}) = P^0 \mathbf{T}, \tag{3.63}$$

и для $\mathbf{T}$ они действительно выполняются. Мы по-прежнему будем пользоваться вектором положения

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} - \frac{1}{(P^0)^2} \mathbf{S} \times \mathbf{P} \tag{3.64}$$

и его свойствами

$$[\lambda, \hat{\mathbf{R}}] = 0, \qquad \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} = -\frac{i\lambda \mathbf{P}}{(P^0)^3}, \tag{3.65}$$

но теперь нужна осторожность, так как при $M \to 0$ мы имеем

$$\frac{1}{P^0 + M} \mathbf{S} \times \mathbf{P} - \frac{1}{P^0} \mathbf{S} \times \mathbf{P} \to -\frac{1}{(P^0)^2} \mathbf{T} \times \mathbf{P}. \tag{3.66}$$

Это дает

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{P} + \frac{\lambda \mathbf{P}}{P^0}, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{P} x^0 - P^0 \hat{\mathbf{R}} - \frac{1}{(P^0)^2} \mathbf{T} \times \mathbf{P}. \tag{3.67}$$

Мы получаем теперь равенство

$$M\mathbf{R} = \frac{1}{(P^0)^2} \mathbf{T} \times \mathbf{P}, \tag{3.68}$$

являющееся аналогом соотношения $M\mathbf{S} \to \mathbf{T}$; кроме того, $\mathbf{R}^2 \to \infty$ при $M \to 0$ (однако $M\hat{\mathbf{R}} = 0$). Коммутационные соотношения $i\mathbf{N} \times \mathbf{N} = \mathbf{J}$, несмотря на включение слагаемого $\mathbf{T}$, по-прежнему удовлетворяются, так как

$$\hat{\mathbf{R}} \times \frac{\mathbf{T} \times \mathbf{P}}{(P^0)^2} + \frac{\mathbf{T} \times \mathbf{P}}{(P^0)^2} \times \hat{\mathbf{R}} = 0. \tag{3.69}$$

В это равенство входит коммутатор

$$\frac{1}{i}[\hat{R}_k, T_l] = -\frac{T_k P_l}{(P^0)^2}, \tag{3.70}$$

который используется также при проверке того, что $\mathbf{J}$ порождает вращения вектора $\mathbf{T}$. Весьма существенно, что λ уже не является лоренцевским инвариантом:

$$\frac{1}{i}[\lambda, \mathbf{N}] = \frac{\mathbf{T}}{P^0}. \tag{3.71}$$

Это обстоятельство совместно с неограниченностью спектра λ, пробегающего все целые или все полуцелые числа, указывает на существование таких физически достижимых состояний, для которых величина $(\Delta\hat{\mathbf{R}})^2$ сколь угодно велика.

Мы примем для безмассовых частиц следующий принцип: частица с нулевой массой не может быть полностью локализована, но возможна некоторая конечная степень ее локализации. Из этого принципа вытекает ряд согласующихся с реальностью следствий. Во-первых, не существует бесспиновой частицы с нулевой массой, так как для ее описания подходил бы коммутативный вектор положения $\mathbf{R}$. По той же причине исключаются и безмассовые частицы с $s = {}^1/_2$, для которых имеет смысл пространственная четность. Кроме того, следует отбросить и всю совокупность только что упоминавшихся систем с $W^2 > 0$, так как для них возможны состояния со сколь угодно большой степенью делокализации. Все известные или с большой вероятностью существующие безмассовые частицы допускают простое описание — их спины даются формулой $s = 2^\sigma$, где $\sigma = -1,\ 0,\ +1$.

В релятивистской механике понятие элементарной частицы сохраняет тот смысл, что при заданных физических условиях возбуждения оказывается возможным приписать массе, спину и другим инвариантным характеристикам физической системы некоторые строго определенные значения. Для совокупности n невзаимодействующих частиц лоренцевские генераторы всей системы в целом задаются в следующей аддитивной форме:

$$\begin{gathered}\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{n} \mathbf{p}_a, \qquad P^0 = \sum_{a=1}^{n} p_a^0, \qquad \mathbf{J} = \sum_{a=1}^{n} (\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a + \mathbf{s}_a), \\ \mathbf{N} = \sum_{a=1}^{n} \left(\mathbf{p}_a x^0 - p_a^0 \mathbf{r}_a + \frac{1}{p_a^0 + m_a} \mathbf{s}_a \times \mathbf{p}_a \right).\end{gathered} \tag{3.72}$$

Чтобы получить операторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ для полной системы, следует исходить из конструкции (3.43); их построение на основе априорного определения представляется маловероятным. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например, выражение

$$\begin{aligned} M\mathbf{R} = \sum_a \left(p_a^0 \mathbf{r}_a - \frac{1}{p_a^0 + m_a} \mathbf{s}_a \times \mathbf{p}_a \right) - \\ - \frac{1}{P^0 (P^0 + M)} \mathbf{P}\mathbf{P} \cdot \sum_a \left(p_a^0 \mathbf{r}_a - \frac{1}{p_a^0 + m_a} \mathbf{s}_a \times \mathbf{p}_a \right) + \\ + \frac{1}{P^0 + M} \left[\sum_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a + \mathbf{s}_a) \right] \times \mathbf{P}. \end{aligned} \tag{3.73}$$

К вопросу о взаимодействии частиц мы подойдем путем релятивистского обобщения нерелятивистских соотношений для частицы, движущейся в макроскопическом окружении. Чтобы ковариантность проявлялась в более явном виде, введем производную по собственному времени

$$\frac{dF}{ds}=\frac{1}{i}\left[F,\ \frac{(p^0)^2}{2m}\right]+\frac{p^0}{m}\frac{\partial F}{\partial x^0}, \tag{3.74}$$

где подразумевается, что последнее слагаемое, как обычно, симметризовано. Таким образом, для одной изолированной частицы имеем

$$m\frac{dx^\mu}{ds}=p^\mu, \qquad m\frac{d^2x^\mu}{ds^2}=0 \tag{3.75}$$

и

$$-\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx_\mu}{ds}=1. \tag{3.76}$$

Если ограничиться случаем однородного электромагнитного поля, то ковариантно-обобщенные уравнения (2.39) и (2.40) будут иметь вид

$$\begin{aligned} &m\frac{d^2x^\mu}{ds^2}=eF^{\mu\nu}\frac{dx_\nu}{dx},\\ &\frac{dw^\mu}{ds}=g\frac{e}{2m}F^{\mu\nu}w_\nu+(g-2)\frac{e}{2m}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}F_{\lambda\nu}w^\nu. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Ограничения

$$-\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx_\mu}{ds}=1, \qquad \frac{dx^\mu}{ds}w_\mu=0, \qquad w^\mu w_\mu=m^2s(s+1) \tag{3.78}$$

совместимы с уравнениями движения, по крайней мере с точностью до линейных по напряженности поля членов; сюда входят только коммутационные соотношения для свободной частицы.

Почему мы не начали с общей теории взаимодействующих частиц, описываемых переменными $\mathbf{r}_a$, $\mathbf{p}_a$, $\mathbf{s}_a$ $(a=1,\ldots,n)$, и не перешли затем к рассмотрению движения одной частицы под действием других, как это делалось в нерелятивистском случае? По той простой причине, что никакой общей теории такого рода не существует. Не говоря уже о колоссальных алгебраических трудностях при установлении релятивистских условий, которые накладываются на члены взаимодействия (малые отклонения от нерелятивистского поведения проблемы не создают), такая попытка терпит провал из-за несостоятельности предположения о существовании фиксированного числа частиц. Релятивистская и нерелятивистская энергии могут быть связаны соотношением

$$P^0=\sum_a m_a+H=\sum_\alpha m_\alpha N_\alpha+H. \tag{3.79}$$

В нерелятивистском пределе, когда изменения энергии H малы по сравнению с каждой массой m_α, закон сохранения P^0 требует, вообще говоря, сохранения каждой величины N_α, а тем самым и сохранения H. Но если кинетическая энергия и энергия взаимодействия, входящие в H, становятся сравнимыми с отдельными значениями масс m_α, то мы уже не можем говорить, что величины N_α остаются постоянными. Характерной особенностью релятивистской динамики частиц является как раз то, что частицы могут рождаться и уничтожаться в процессе столкновений при высоких энергиях.

§ 4. КРИТИКА ТЕОРИЙ ЧАСТИЦ

Таким образом, теория утверждает, а эксперимент с несомненностью подтверждает, что понятие частицы как неизменного объекта теряет свой смысл, когда взаимодействие приобретает резко выраженный релятивистский характер. Реакцией на такое положение были две крайние точки зрения. Обе они соответствуют отказу от детального пространственно-временного описания, основанного на представлении о частицах, поскольку первая настаивает на возможности детального пространственно-временного описания, но на основе понятия, более фундаментального, нежели понятие частицы, а вторая отвергает возможность детального пространственно-временного описания, отрицая наличие каких-либо понятий, более фундаментальных, нежели понятие частицы. Ниже мы кратко изложим обе точки зрения.

1. Носителями физических свойств, более фундаментальными, чем частицы, являются элементы объема самого трехмерного пространства. Поскольку скорость передачи сигнала всегда ограничена скоростью света, неперекрывающиеся объемы, рассматриваемые в один и тот же момент времени, физически независимы, и потому их вклады в полную энергию и импульс аддитивны. Производя очевидный предельный переход, напишем:

$$P^0 = \int (d\mathbf{x})\, T^{00}(x), \qquad P^k = \int (d\mathbf{x})\, T^{0k}(x), \tag{4.1}$$

где $T^{00}(x)$ и $T^{0k}(x)$ — некоторые функции динамических переменных в момент времени x^0, которые отражают физическую ситуацию в бесконечно малой окрестности точки $\mathbf{x}$. Динамические переменные, будучи операторными функциями пространственных и временной координат, образуют операторные поля, так что подход, о котором идет речь, можно назвать операторной теорией поля. Принятая система обозначений такова, что описание можно сделать явно ковариантным, отождествив элемент объема $(d\mathbf{x})$ с временной компонентой ориентированного элемента площади плоской пространственно-подобной поверхности четырехмерного пространства. Тогда получим

$$P^{\nu} = \int\limits_{\sigma} d\sigma_{\mu} T^{\mu\nu}(x), \tag{4.2}$$

причем эти интегралы благодаря сохранению P^{ν} не зависят от выбора поверхности σ. Записывая равную нулю разность двух таких интегралов в виде эквивалентного ей объемного интеграла,

$$0 = \Big(\int\limits_{\sigma_1} - \int\limits_{\sigma_2} \Big) d\sigma_{\mu} T^{\mu\nu} = \int (dx)\, d_{\mu} T^{\mu\nu}, \tag{4.3}$$

мы придем к следующему достаточному локальному условию:

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu}(x) = 0. \tag{4.4}$$

Сохранение шести остальных лоренцевских генераторов, которые рассматриваются как моменты импульсов,

$$J^{\mu\nu} = \int\limits_{\sigma} d\sigma_{\lambda} (x^{\mu} T^{\lambda\nu} - x^{\nu} T^{\lambda\mu}), \tag{4.5}$$

будет гарантировано при условии, что

$$T^{\mu\nu}(x) = T^{\nu\mu}(x). \tag{4.6}$$

В трехмерной форме записи эти операторы выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} J_k &= \int (d\mathbf{x})\, \varepsilon_{klm} (x_l T^0{}_m - x_m T^0{}_l), \\ N_k &= P_k x^0 - \int (d\mathbf{x})\, x_k T^{00}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

При инфинитезимальном преобразовании Лоренца тензор натяжений $T^{\mu\nu}(x)$ изменяется как и всякий тензор:

$$\begin{aligned} \overline{T}^{\mu\nu}(\overline{x}) &= T^{\mu\nu}(x) + \delta\omega^{\mu\varkappa} T_{\varkappa}{}^{\nu}(x) + \delta\omega^{\nu\lambda} T^{\mu}{}_{\lambda}(x) = \\ &= \overline{T}^{\mu\nu}(x) - \delta x^{\lambda} \partial_{\lambda} T^{\mu\nu}(x). \end{aligned} \tag{4.8}$$

К новой системе операторов

$$\overline{T}^{\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}(x) - \delta T^{\mu\nu}(x) \tag{4.9}$$

можно перейти посредством соответствующего унитарного преобразования, откуда вытекают коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} &[T^{\mu\nu}(x),\ P_{\lambda}] = \frac{1}{i} \partial_{\lambda} T^{\mu\nu}(x), \\ &[T^{\mu\nu}(x),\ J_{\varkappa\lambda}] = \frac{1}{i} (x_{\varkappa} \partial_{\lambda} - x_{\lambda} \partial_{\varkappa}) T^{\mu\nu}(x) + \\ &+ \frac{1}{i} (\delta^{\mu}_{\varkappa} T_{\lambda}{}^{\nu} - \delta^{\mu}_{\lambda} T_{\varkappa}{}^{\nu} + \delta^{\nu}_{\varkappa} T^{\mu}{}_{\lambda} - \delta^{\nu}_{\lambda} T^{\mu}{}_{\varkappa})(x). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Интегрируя их по некоторой пространственно-подобной поверхности, учитывая установленные выше свойства величины $T^{\mu\nu}$ и используя интеграционную теорему для системы, замкнутой в пространственно-подобных направлениях,

$$\int\limits_{\sigma} (d\sigma_\mu \partial_\nu - d\sigma_\nu \partial_\mu) f(x) = 0, \tag{4.11}$$

мы воспроизведем все коммутаторы для десяти лоренцевских генераторов.

В коммутаторах квантовой механики находит свое выражение взаимосвязь процессов измерения двух рассматриваемых характеристик системы. Поэтому в силу физической независимости объемов, разделенных пространственно-подобным интервалом, должно выполняться условие

$$[T^{\mu\nu}(x),\ T^{\varkappa\lambda}(x')] = 0 \quad \text{при} \quad (x - x')^2 > 0. \tag{4.12}$$

Если система координат выбрана таким образом, что $x^0 = x^{0\prime}$, то в выражение для подобного рода коммутаторов, справедливое во всей области изменения переменных, должна входить функция $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ или конечное число ее производных. Плотности энергии и импульса, которые являются компонентами тензора $T^{\mu\nu}$, используемого при построении лоренцевских генераторов, удовлетворяют следующим одновременным коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}[T^{00}(x),\ T^{00}(x')] &= -(T^{0k}(x) + T^{0k}(x'))\,\partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \\
&\quad + \partial_m \partial_n \partial'_p \partial'_q (f^{mn,\,pq}(x)\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')), \\
\frac{1}{i}[T^{0k}(x),\ T^{00}(x')] &= -T^{00}(x)\,\partial^k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \\
&\quad - T^{kl}(x')\,\partial_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \\
&\quad + \partial_m \partial'_p \partial'_q (g^{km,\,pq}(x)\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')), \\
\frac{1}{i}[T^{0k}(x),\ T^{0l}(x')] &= -T^{0l}(x)\,\partial^k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \\
&\quad - T^{0k}(x')\,\partial^l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \\
&\quad + \partial_m \partial'_p (h^{km,\,lp}(x)\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')),
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Члены, содержащие две или более производные, не дают никакого вклада при интегрировании, необходимом для построения лоренцевских генераторов. Мы указали лишь минимальное число необходимых производных; к более общему случаю можно перейти, обобщив соответствующим образом f, g и h. Все эти три функции симметричны по отдельным индексам внутри их пар так, что, например,

$$f^{mn,\,pq} = f^{nm,\,pq} = f^{mn,\,qp}, \tag{4.14}$$

но из них функции f и h антисимметричны по парам индексов, например,

$$f^{mn,\,pq} = -f^{pq,\,mn}. \tag{4.15}$$

Выполняется также равенство

$$-\partial_0 f^{mn,\,pq}(x) = g^{mn,\,pq}(x) - g^{pq,\,mn}(x). \tag{4.16}$$

Можно привести простой пример системы, для которой не возникает ни одного дополнительного члена с производными. Будем исходить из выражений для плотностей энергии и импульса, соответствующих классическому электромагнитному полю:

$$T^{00} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \qquad T^0{}_k = (\mathbf{E}\times\mathbf{H})_k. \tag{4.17}$$

Если считать, что оператор плотности импульса записан в виде симметризованного произведения, то, чтобы получить для коммутатора плотности энергии выражение

$$\frac{1}{i}[T^{00}(x),\ T^{00}(x')] = -(T^{ck}(x) + T^{ck}(x'))\,\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{4.18}$$

достаточно постулировать следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{gathered}[E_k(x),\ E_l(x')] = [H_k(x),\ H_l(x')] = 0,\\ \frac{1}{i}[E_k(x),\ H_l(x')] = -\varepsilon_{klm}\partial_m\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').\end{gathered} \tag{4.19}$$

При доказательстве этого следует воспользоваться формальным свойством дельта-функции

$$(E_k(x) - E_k(x'))\,(H_l(x) - H_l(x'))\,\partial_m\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = 0. \tag{4.20}$$

Коммутаторы для компонент плотности импульса также не будут содержать членов с высшими производными, но, чтобы получить для них такого рода выражения, нужно потребовать выполнения условий

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(x) = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{H}(x) = 0, \tag{4.21}$$

совместимых с коммутационными соотношениями. В этом случае необходимую форму будут иметь и коммутаторы плотности энергии с плотностями импульса, причем для компонент тензора натяжений T_{kl} мы получим обычные выражения, в частности

$$T_{kk} = T^{00}. \tag{4.22}$$

Хотя мы исходили из положений классической физики, подобный анализ представляет собой независимый способ проверки утверждений, касающихся поведения лоренц-инвариантной квантованной системы. Все остальные ее свойства можно установить исходя из структуры лоренцевских генераторов. Из P^0 выводятся уравнения движения для операторов поля, которые оказываются однородными уравнениями Максвелла. Напряженности поля будут вести себя при преобразованиях Лоренца так же, как и антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$. Для примера рассмотрим коммутатор

$$[E_k(x),\ J^{0l}] = \\ = \frac{1}{i}(x^0\partial^l + x^l\partial^0)E_k(x)\left[E_k(x),\ \int (d\mathbf{x}')(x^{l'} - x^l)T^{00}(x')\right]. \quad (4.23)$$

Поскольку

$$\frac{1}{i}[E_k(x),\ T^{00}(x')] = \varepsilon_{klm}\partial_l\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')H_m(x'), \quad (4.24)$$

мы получим, что при инфинитезимальном преобразовании

$$\delta\mathbf{E}(x) = -\delta\mathbf{v}\cdot(x^0\nabla + \mathbf{x}\partial_0)\,\mathbf{E}(x) - \delta\mathbf{v}\times\mathbf{H}(x). \quad (4.25)$$

Остановимся кратко на более близких к реальности случаях, когда электромагнитное поле взаимодействует с другими динамическими переменными. Если нам необходимо сохранить геометрические трансформационные свойства величины $F_{\mu\nu}$, то дополнительные члены в T^{00} должны быть такими, чтобы они не сказывались на только что проведенных выкладках. Тем самым из коммутатора $[E_k(x),\ T^{00}(x')]$ исключаются всякие дополнительные члены с первой производной дельта-функции, и мы приходим к следующему общему выражению:

$$\frac{1}{i}[E_k(x),\ T^{00}(x')] = \varepsilon_{klm}\partial_l\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')H_m(x') - \\ - j_k(x')\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \partial_l'\partial_m'(\varphi_k{}^{lm}(x)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')). \quad (4.26)$$

Теперь уже дивергенция вектора $\mathbf{E}$ не обязана обращаться в нуль, и, записывая

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = j^0, \quad (4.27)$$

мы будем иметь

$$\frac{1}{i}[j^0(x),\ T^{00}(x')] = -j^k(x')\,\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \partial_k\partial_l'\partial_m'\times \\ \times(\varphi^{k,\,lm}(x)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')). \quad (4.28)$$

Среди следствий из этих соотношений (которые получаются путем интегрирования последних по переменной $\mathbf{x}'$) отметим неоднородные уравнения Максвелла, правая часть которых $j^\mu = (j^0, \mathbf{j})$ отождествляется с вектором электрического тока, локальный закон сохранения заряда

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (4.29)$$

и закон изменения j^μ при преобразованиях Лоренца, соответствующий тому, что эта величина является четыре-вектором.

Существуют взаимодействующие системы, для которых в коммутаторе для плотности энергии не возникают слишком сингулярные члены, но при этом приходится накладывать строгие ограничения на выбор динамических переменных. По сути дела допустимыми оказываются лишь скалярное, векторное и простое спинорное поля. Проблематичной здесь является непротиворечивость гипотезы операторного поля, согласно которой придается определенный смысл, хотя и в несколько идеализированной форме, физическим характеристикам четко очерченного геометрического объема. Чтобы исследовать этот вопрос, усредним плотность энергии в заданный момент времени с помощью двух различных весовых функций:

$$T_{1,2}=\int (d\mathbf{x})\, v_{1,2}(\mathbf{x})\, T^{00}(x) \tag{4.30}$$

и построим коммутатор

$$\frac{1}{i}[T_1,\ T_2]=-\int (d\mathbf{x})\, T^{0k}(x)\,(v_1(\mathbf{x})\,\partial_k v_2(\mathbf{x})-v_2(\mathbf{x})\,\partial_k v_1(\mathbf{x}))+\\+\int (d\mathbf{x})\, f^{mn,\,pq}(x)\,\partial_m\partial_n v_1(\mathbf{x})\,\partial_p\partial_q v_2(\mathbf{x}). \tag{4.31}$$

Он является основой принципа неопределенности, содержащего утверждение о точности, с которой в данном состоянии величинам T_1 и T_2 можно приписать какие-то значения. Рассмотрим сначала случай, когда из-за своей антисимметрии по двум наборам индексов функция $f^{mn,pq}$ в выражение для коммутатора не входит. Пусть T_1 и T_2 — две величины, из которых складывается полный оператор энергии, так что

$$v_1(\mathbf{x})+v_2(\mathbf{x})=1. \tag{4.32}$$

Поскольку производные функций v_1 и v_2 различаются только знаком, мы получим просто

$$\frac{1}{i}[T_1,\ T_2]=\int (d\mathbf{x})\, T^{0k}(x)\,\partial_k v_1(\mathbf{x}). \tag{4.33}$$

Выберем теперь в качестве $v_1(\mathbf{x})$ единичную ступенчатую функцию, определяющую полубесконечную область, отделенную от остального объема [дополнительного к первому и описываемого функцией $v_2(\mathbf{x})$] некоторой поверхностью. Обозначив через $d\mathbf{S}$ элемент площади с нормалью, направленной в сторону первого объема, получим

$$\frac{1}{i}[T_1,\ T_2]=\int dS_k T^{0k}(x). \tag{4.34}$$

Мы получили правильное выражение для скорости изменения энергии в каждом отдельном объеме, обусловленного потоком энергии через общую поверхность. Если считать, что сначала области, определяемые функциями v_1 и v_2, разделены некоторым объемом, а в результате некоторого предельного перехода они приводятся в контакт, то в правой части мы получим нуль. Если же первоначально эти объемы перекрываются, выходя за предполагаемую границу, а затем общая часть объема стремится к нулю, то предельное значение правой части окажется вдвое больше полученного выше. Таким образом, другой способ расчета — взять среднее этих двух предельных значений. Выбирая другие весовые функции

$$v_1(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}), \qquad v_2(\mathbf{x}) = x_k v(\mathbf{x}), \tag{4.35}$$

получаем

$$\frac{1}{i}[T_1, T_2] = -\int (d\mathbf{x})\, T^{0k}(x)\,(v(\mathbf{x}))^2 + \\ +2\int (d\mathbf{x})\, f^{mn,\,kp}(x)\partial_m \partial_n v(\mathbf{x})\,\partial_p v(\mathbf{x}). \tag{4.36}$$

Если $v(\mathbf{x})$ — единичная ступенчатая функция, определяющая четко очерченный конечный объем, то оператор T_1 будет иметь смысл энергии, заключенной в этом объеме, а T_2 — ее первого момента. Но в таком случае приписать какой-либо смысл произведению $\partial_m \partial_n v\, \partial_p v$ не удается, что подвергает серьезному сомнению состоятельность всякой операторной теории поля, для которой $f^{mn,pq}(x) \neq 0$. Это ставит в привилегированное положение тот ограниченный класс фундаментальных полевых переменных, для которых $f^{mn,pq}$ обращается в нуль.

Значимость этого результата лишь в малой мере ослабляется следующим свойством физической системы с ненулевым $f^{mn,pq}$: функция

$$g^{mn,\,pq}(x) = g^{pq,\,mn}(x) \tag{4.37}$$

не может равняться нулю, а поэтому нельзя одновременно задать с любой конечной степенью точности полную энергию и компоненту полного импульса, связанные с резко очерченным объемом. [Термин физическая система напоминает нам о том, что вакуумное состояние со всеми присущими ему свойствами должно согласоваться с предполагаемыми характеристиками системы. В частности, вакуумному состоянию $|\,\rangle$ инвариантным образом приписываются нулевые энергия и импульс, откуда вытекают требования

$$\langle T^{00}\rangle = 0, \qquad \langle T^{0k}\rangle = 0 \tag{4.38}$$

и

$$\langle T^{kl}\rangle = 0. \tag{4.39}$$

К компонентам тензора $T^{\mu\nu}$ можно добавлять произвольные константы, но, как явствует из структуры коммутатора $[T^{0k}(x), T^{00}(x')]$, произвол ограничивается тем, что мы можем добавлять к $T^{\mu\nu}$ лишь тензор, кратный тензору $g^{\mu\nu}$. Таким образом, нетривиальным будет требование

$$\langle (T^{00} + \frac{1}{3} T_{kk}) \rangle = 0. \tag{4.40}$$

В примере с электромагнитным полем, когда $T_{kk} = T^{00}$, в силу положительной определенности оператора $T^{00} = {}^1/_2 (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)$ требованию ${}^4/_3 \langle T^{00} \rangle = 0$ удовлетворить невозможно; поэтому свободное электромагнитное поле не является физической системой. Можно по крайней мере думать, что свойствами вакуума ограничивается круг возможных динамических переменных и их взаимодействий и это выделяет наш реальный мир.

Рассмотрим коммутатор функционала плотности энергии

$$T = \int (d\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, T^{00}(x) \tag{4.41}$$

его первой производной

$$\partial_0 T = -\int (d\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, \partial_k T^{0k}(x). \tag{4.42}$$

Для него получается следующее значение вакуумного среднего:

$$\langle [i\partial_0 T, T] \rangle = \int (d\mathbf{x})\, \partial_k \partial_m v(\mathbf{x}) \langle g^{km,\, pq} \rangle\, \partial_p \partial_q v(\mathbf{x}) = 2 \langle T P^0 T \rangle. \tag{4.43}$$

В этом выражении мы узнаем математическое ожидание для энергии в отличном от вакуума состоянии $T \mid \rangle$. Поскольку оно обязательно положительно, числа $\langle g^{mn,pq} \rangle$ образуют положительно-определенную матрицу, но нет никакой гарантии, что эти числа являются ограниченными. Однако из приведенных рассуждений ясно, что любое утверждение относительно плотности импульса есть утверждение и относительно производной по времени от плотности энергии, а такого рода дополнительное динамическое условие может быть не обязательным для самосогласованности теории.

В операторной теории поля понятие частицы — производное динамическое понятие. Эта теория претендует на построение иэ нескольких фундаментальных полевых переменных сравнительно большого числа стабильных или квазистабильных возбуждений — частиц. Пусть $\chi(x)$ — алгебраическая комбинация фундаментальных полевых переменных, сконструированная таким образом, чтобы закон ее изменения при преобразованиях Лоренца был достаточно простым. Это означает, что при $\mathbf{x} = 0$ закон преобразования при вращениях должен соответствовать наличию определенного внутреннего углового момента, или спина, а закон преобразования при трансляциях должен определяться зависимостью от координат x^μ:

$$[\chi(x),\ P_\mu] = \frac{1}{i}\partial_\mu\chi(x). \tag{4.44}$$

Используя конечный унитарный оператор, соотношение (4.44) можно представить в виде

$$\chi(x) = e^{-iPx}\chi e^{iPx}, \tag{4.45}$$

где $Px = P^\mu x_\mu$, а χ — значение, взятое в начале координат. Состояние $\chi(x) \mid \rangle$ получается из вакуумного состояния посредством некоторого локализованного возбуждения. Чтобы изучить это возбуждение в корпускулярном аспекте, исследуем характеристики его распространения в пространстве-времени, рассматривая корреляцию с аналогичным возбуждением, локализованным в другой точке:

$$\langle\chi(x)\chi(x')\rangle = \langle\chi e^{iP(x-x')}\chi\rangle. \tag{4.46}$$

Унитарный оператор, описывающий сдвиг из x' в x, можно выразить через его собственные значения и соответствующие ему неотрицательные эрмитовы проекционные операторы

$$e^{iP(x-x')} = \int\frac{dp}{(2\pi)^3}e^{ip(x-x')}F(p), \tag{4.47}$$

где

$$dp = dp_0\, dp_1\, dp_2\, dp_3. \tag{4.48}$$

Те значения p^μ, которые дают вклад в интеграл, т. е. для которых $F(p) \neq 0$, должны удовлетворять физическим спектральным условиям

$$-p^2 = M^2 \geqslant 0, \qquad p^0 > 0. \tag{4.49}$$

При заданном трехмерном импульсе $d(p^0)^2 = dM^2$, так что

$$\frac{dp}{(2\pi)^3} = \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p^0}dM^2 \equiv d\omega_p\, dM^2. \tag{4.50}$$

Дифференциал $d\omega_p$ задает инвариантную меру на гиперповерхности $-p^2 = M^2$ импульсного пространства. В результате получаем

$$\langle\chi(x)\chi(x')\rangle = \int dM^2\, d\omega_p e^{ip(x-x')}f(p), \tag{4.51}$$

где

$$f(p) = \langle\chi F(p)\chi\rangle \tag{4.52}$$

— вещественная неотрицательная функция. Состояние $\chi \mid \rangle$ выделяет из $F(p)$ подпространство со свойствами углового момента, определяемыми поведением χ при вращениях, а неравенство $f(p) \neq 0$ при $-p^2 = M^2$ свидетельствует о существовании возбуждения с соответствующими этим свойствам физическими характеристиками. Единственно для простоты мы рассмотрим только случай скалярного поля χ, когда величина $f(p)$ зависит лишь от скаляра $-p^2$.

Для функции $f(p) = f(M^2)$ возможны три качественно разных варианта.

а. В спектре имеется некоторое изолированное значение массы

$$M \sim m: \qquad f(M^2) = f\delta(M^2 - m^2), \qquad f > 0. \tag{4.53}$$

При заданном пространственном импульсе зависимость от времени полевой корреляционной функции будет определяться одной фиксированной частотой $p^0 = +(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$. Такое возбуждение соответствует стабильной частице. Заметим, что если $\chi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению конечного порядка

$$\varphi(-\partial^2)\,\chi(x) = 0, \tag{4.54}$$

то мы получим

$$\varphi(M^2)\,f(M^2) = 0, \tag{4.55}$$

и $f(M^2)$ будет целиком состоять из дельта-функций.

б. У функции $f(M^2)$ на гладком фоне имеется резко выраженный максимум с центром в точке $M = m$ и с массовой шириной $\Gamma \ll m$. При фиксированном импульсе зависимость от времени, связанная с этим участком массового спектра, дается формулой ($t = x^0 - x^{0\prime}$)

$$\int dM^2 \exp\left[-ip^0(M)\,t\right] f(M^2) \approx$$
$$\approx \exp(-ip^0 t) \int dM^2 \exp\left[-i\left(\frac{t}{2p^0}\right)(M^2 - m^2)\right] f(M^2), \tag{4.56}$$

где p^0 — энергия, соответствующая массе m. Благодаря деструктивной интерференции через время

$$t \sim \frac{p^0}{m}\frac{1}{\Gamma} \tag{4.57}$$

амплитуда этих колебаний будет существенно меньше своего начального значения. Этот случай соответствует нестабильной частице, распадающейся на несколько других частиц с собственным временем жизни порядка $1/\Gamma$.

в. Функция $f(M^2)$ — гладкая. В этой части спектра мы имеем несколько частиц, не объединяющихся в одну нестабильную частицу.

Из корреляционной функции можно извлечь некоторые сведения о полевых одновременных коммутационных соотношениях. Так, например,

$$x^0 = x^{0\prime}: \qquad \langle[\chi(x),\ \chi(x')]\rangle = 0,$$
$$\langle[i\,\partial_0\chi(x),\ \chi(x')]\rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int dM^2 f(M^2), \tag{4.58}$$

где

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \int d\omega_p 2p^0 \exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')]. \tag{4.59}$$

Если поле $\chi(x)$ — фундаментальная динамическая переменная, то его одновременные коммутационные соотношения носят кинематический характер. Скалярному полю отвечают коммутационные соотношения

$$[\chi(x), \chi(x')] = 0, \quad \int [i\,\partial_0\chi(x), \chi(x')] = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{4.60}$$

а из второго из них вытекает следующее правило сумм:

$$\int dM^2 f(M^2) = 1. \tag{4.61}$$

Теперь представим себе, что связь поля $\chi(x)$ со всеми другими полями разорвана, так что оно удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, которое дает $f(M^2) = \delta(M^2 - m_0^2)$. Предположим далее, что после восстановления физических связей по-прежнему существует некоторая стабильная частица. За счет взаимодействия ее масса будет претерпевать сдвиг $m_0 \to m$, а в функцию $f(M^2)$ наряду с дискретным массовым членом $f\delta(M^2 - m^2)$ войдут многочастичные вклады. Тем самым правило сумм приводит к требованию $f < 1$. Если нас не интересуют детали конкретного возбуждения, порождающего частицу, и мы стремимся к описанию лишь самой физической частицы, то можно отбросить вклад непрерывного распределения масс в величину $\langle\chi(x)\,\chi(x')\rangle$, подогнав соответствующим образом масштаб корреляционной функции, т. е. опустив множитель f. Это пример общей процедуры, которая позволяет перенести внимание с фундаментальных полевых динамических переменных на вторичные образования — наблюдающиеся частицы. Такая процедура называется перенормировкой.

Более сложные полевые корреляционные функции дают информацию о взаимодействии частиц. Рассмотрим, например, функцию

$$\langle \chi_a(x)\,\chi_b(x')\,\chi_c(x'')\,\chi_d(x''')\rangle, \tag{4.62}$$

где различные поля представляют собой алгебраические комбинации фундаментальных динамических переменных, содержащих в своем спектре возбуждения частицы a, b, c и d. Чтобы можно было говорить о конкретной реакции $c + d \to a + b$ (здесь не рассматриваются такие характеристики, как электрический заряд, которые вносят различие между частицами и античастицами), следует соответствующим образом выбрать области, к которым отнесены координаты. Точки x и x' расположены в далеком будущем по отношению к точкам x'' и x''', а точка x отделена от точки x', так же, как точка x'' от точки x''', большим пространственным расстоянием. При таких условиях перенормировки, выделяющие физические частицы, можно делать независимо, и получающаяся в результате функция характеристик частиц будет давать амплитуду физической реакции. Вспомним теперь, что в квантовой механике все динамические переменные естественным образом распадаются на два класса, один из которых характеризуется свойством коммутативности, а другой — свойством антикоммутативности переменных, относящихся к разным степеням свободы и рассматриваемых в заданный момент времени. В операторной теории поля роль таких степеней свободы играют как раз точки, разделенные пространственно-подобными интервалами. Если пространственное расстояние между точками x и x' столь велико, что детали сложной структуры частиц можно не учитывать, то

$$\chi_a(x)\,\chi_b(x') = (-1)^{n_a n_b}\,\chi_b(x')\,\chi_a(x), \tag{4.63}$$

где n_a и n_b — числа антикоммутирующих фундаментальных полевых переменных, из которых строятся операторы $\chi_a(x)$ и $\chi_b(x')$. Существенно лишь, четны или нечетны эти числа, а знаковый множитель всегда, кроме случая, когда оба числа n_a и n_b нечетны, равен $+1$. Если частицы a и b относятся к одному и тому же типу, то в зависимости от того, четно или нечетно число антикоммутирующих фундаментальных переменных, полевые операторы, связанные с парой пространственно-разделенных точек, будут коммутировать или антикоммутировать. В соответствии с этим двухчастичное состояние, полученное путем перенормировки из $\chi(x)\,\chi(x')|\ \rangle$, будет либо симметричным, либо антисимметричным по переменным, описывающим частицы, что соответствует частицам, подчиняющимся статистике Бозе — Эйнштейна, и частицам, подчиняющимся статистике Ферми — Дирака. Те же зависящие от типа статистики характеристики входят и в аналогичные реакции, отличающиеся от рассматриваемой лишь тем, что в них некоторые из начальных и конечных частиц поменялись местами. Например, амплитуду реакции $b + d \to a + c$ можно найти, пользуясь полевой корреляционной функцией

$$\langle \chi_a(x)\,\chi_c(x'')\,\chi_b(x')\,\chi_d(x''') \rangle. \tag{4.64}$$

Если две упомянутые корреляционные функции известны во всей объединенной пространственно-временной области их определения, то они известны и в тех участках этой области, в которых точки x' и x'' разделены пространственно-подобными интервалами. Но здесь в зависимости от типа статистики частиц b и c эти функции либо равны, либо различаются знаком. Таким образом, одна из них есть результат пространственно-временной экстраполяции, или продолжение, другой; вытекающие отсюда соотношения между амплитудами разных реакций называют обычно кроссинг-соотношениями.

В операторной теории поля динамика выступает в явном виде.

Она находит свое выражение в нелинейной структуре полевых уравнений, которым удовлетворяют фундаментальные динамические переменные. Такие уравнения в свою очередь приводят к уравнениям, связывающим различные полевые корреляционные функции и в принципе позволяющим определить эти функции. На практике возможны два совершенно разных случая. В первом из них взаимодействие достаточно слабое, так что интересующие нас частицы появляются в спектре возбуждения самих фундаментальных переменных. Так обстоит дело, как принято считать, в квантовой электродинамике, где частицы — это фотон и электрон (или мюон). Уравнения, которым удовлетворяют полевые корреляционные функции, можно решать методами теории возмущений или методом итераций, основанными на малой величине характерной для этой теории константы связи $\alpha = 1/137{,}04$. Результаты можно представлять двояко — либо на стадии неперенормированных полей, либо на уровне перенормированных частиц. Полевой вариант содержит расходящиеся интегралы, тогда как результаты перенормированной теории конечны и исключительно хорошо согласуются с экспериментом. Довольно быстрая сходимость перенормированных выражений означает, что эксперименты не прощупывают область очень высоких импульсов или же очень малых расстояний. Имеющиеся данные не позволяют судить, верна ли лежащая в основе операторной теории поля гипотеза о пригодности основных ее понятий для описания явлений на сколь угодно малых расстояниях. Эта гипотеза входит в неперенормированные, т.е. в полевые, результаты, но означает ли отсутствие смысла у получающихся выражений несостоятельность гипотезы или всего лишь неадэкватность применяемых при расчетах методов теории возмущений, в настоящее время не известно. Не исключено, что в вопросе о физическом смысле сколь угодно малых элементов объема операторная теория поля излишне догматична. Может быть, при очень больших импульсах вступают в силу совершенно новые закономерности, не затрагивающие уже достигнутых практических успехов.

Со вторым случаем мы имеем дело в физике сильных взаимодействий. Здесь гипотеза о том, что целые семейства частиц представляют собой динамическое проявление нескольких фундаментальных полевых переменных, не допускает такой возможности, чтобы спектр возбуждения последних по отдельности содержал известные частицы. Они должны порождаться комбинациями основных переменных. Не зная истинной полной динамики фундаментальных динамических переменных и не располагая методами расчета, которые позволяли бы выводить следствия из этой динамики, если бы она была известна, мы можем лишь умозрительно гадать о сложной полевой структуре известных частиц. Подобные умозрительные догадки вплетаются в более близкие задачи, возникающие на феноменологическом уровне. А нельзя ли отделить феноменологию частиц от предположений о их структуре?

2. Если первичной структурой является частица, то в областях интенсивного взаимодействия, где нарушается характерная аддитивность вкладов независимых частиц, какое бы то ни было детальное описание становится невозможным. Единственное, что мы можем делать, это сопоставлять состояние невзаимодействующих частиц после столкновения с состоянием какого-то другого числа невзаимодействующих частиц до их столкновения. В операторной теории возникающие при этом связи поля служат предметом вычислений. В рассматриваемом же подходе такие связи представляют собой нечто фундаментальное, и, постулируя их свойства, мы приходим к полной формулировке динамики частиц. Написав

$$\langle f \mid = \langle i \mid S, \tag{4.65}$$

где i и f — символы начального (initial) и конечного (final) состояний, мы введем преобразование от одного полного набора невзаимодействующих частиц к другому аналогичному набору. Следовательно, оператор S унитарен:

$$S^\dagger S = SS^\dagger = 1. \tag{4.66}$$

Этот оператор неизменно называют S-матрицей, или матрицей рассеяния, возможно, потому, что мы в состоянии иметь дело всего лишь с некоторой малой совокупностью матричных элементов. Эти матричные элементы входят в выражение для амплитуды вероятности:

$$\langle f \mid i' \rangle = \langle i \mid S \mid i' \rangle. \tag{4.67}$$

Квадрат модуля $|\langle i \mid S \mid i' \rangle|^2$ интерпретируется как вероятность перехода $i' \to i$ за бесконечный промежуток времени. Отвращение ко всякому подобию детального описания развития во времени заставляет ограничить класс наблюдающихся частиц лишь стабильными частицами. Точно так же отвергаются и какие бы то ни было ссылки на пространственное описание, и для характеристики состояний допускаются наряду со спинами и другими величинами подобного рода только импульсы.

В том случае, когда частицы не взаимодействуют, S — единичный оператор. Поэтому более интересен не оператор S, а оператор $S - 1$, условие унитарности для которого имеет вид

$$(S-1) + (S-1)^\dagger + (S-1)^\dagger (S-1) = 0. \tag{4.68}$$

Учитывая, что при столкновении должны сохраняться полные энергия и импульс, напишем:

$$\langle p_1, \ldots, p_n \mid S-1 \mid p_1', \ldots, p_{n'}' \rangle = \\ = (2\pi)^4 \delta\Big(\sum_{a=1}^{n} p_a - \sum_{a=1}^{n'} p_a'\Big) i \langle p_1, \ldots, p_n \mid T \mid p_1', \ldots, p_{n'}' \rangle. \tag{4.69}$$

Это соотношение служит определением матрицы переходов T. В нем явно указаны только импульсы, причем дельта-функция четырехмерна:

$$\delta(p-p')=\delta(p_0-p_0')\,\delta(p_1-p_1')\,\delta(p_2-p_2')\,\delta(p_3-p_3'). \quad (4.70)$$

В итоге условие унитарности принимает вид нелинейного соотношения, связывающего матричные элементы оператора $i\,(T-T^{\dagger})$ с произведениями матричных элементов операторов $T^{\dagger}$ и T. Вероятности переходов должны иметь лоренц-инвариантный смысл, и поэтому утверждается, что матричные элементы оператора S, а значит, и оператора T, обязаны быть инвариантными функциями своих переменных. Это условие выглядит особенно просто, если все частицы бесспиновые, так как тогда оно сводится к требованию, чтобы матричные элементы оператора T были функциями только независимых скаляров (возможность появления псевдоскаляров мы не рассматриваем), которые можно образовать из $N = n + n'$ импульсов, удовлетворяющих массовым соотношениям $-p_a^2 = m_a^2$. Число такого рода скалярных комбинаций равно $3N - 10$, где вычитаемое соответствует числу параметров, определяющих преобразования Лоренца. Таким образом, в двухчастичных реакциях, когда $N = 2 + 2$, имеются лишь две независимые переменные, которые соответствуют энергии и углу рассеяния в системе центра масс.

Конструктивным принципом в теории S-матрицы является постулат аналитичности. Предполагается, что амплитуды физических реакций как функции скалярных переменных являются граничными значениями некоторых аналитических функций соответствующих комплексных переменных. Поскольку аналитические функции однозначно характеризуются типом и положением своих сингулярностей, определив последние, мы получим всю физику, которая может содержаться в теории S-матрицы. В этой связи приведем высказывания некоторых энтузиастов: «Одним из наиболее замечательных открытий в физике элементарных частиц явилось открытие существования комплексной плоскости»; «...теория функций комплексных переменных играет роль не просто математического аппарата, а фундаментального метода описания природы, неотделимого от физики...». С точки зрения аналитических функций различие между матричными элементами операторов T и $T^{\dagger}$ сводится к различию между граничными значениями единой аналитической функции, которые получаются при подходе к вещественным осям рассматриваемых комплексных переменных с противоположных сторон. Условие унитарности вносит свой вклад в определение сингулярностей матрицы переходов тем, что из него вытекают утверждения относительно скачков, возникающих при указанной процедуре. Но, кроме того, сфера действия условия унитарности расширяется постулатом аналитичности, который вводит в рассмотрение так называемые перекрестные реакции. Превращение некоторой начальной (падающей) частицы в конечную (рассеянную) частицу формально описывается, как об этом можно судить по вкладу в суммарный баланс энергии-импульса, подстановкой $p^\mu \to -p^\mu$. Она должна достигаться путем аналитического продолжения, и поэтому условия унитарности для различных реакций, связанных кроссинг-соотношениями, будут давать информацию о сингулярностях единой аналитической функции в различных областях изменения ее комплексных переменных. Достаточна ли информация такого рода? «S-матрица — это лоренц-инвариантная аналитическая функция своих импульсных переменных, которая обладает лишь сингулярностями, диктуемыми условием унитарности».

В теории S-матрицы никаких явных утверждений, касающихся динамики, не содержится. И возможность рассматривать некоторые частицы в качестве фундаментальных, а другие, вторичные, частицы в качестве связанных состояний отвергается как неприемлемая, ибо тогда в понятие частицы были бы внесены элементы структуры, различение элементарных и составных частиц. Но именно чтобы исключить возможность такого рода различения, и было высказано предположение о том, что независимо от вида частиц, используемых для построения составных объектов, полный спектр частиц всегда должен быть одним и тем же. Такой взгляд на динамическую самосогласованность обычно именуется гипотезой бутстрепа (или «зашнуровки»).

Анализ, проведенный в §§ 1—3, указывает на излишнюю догматичность теории S-матрицы в том отношении, что она отвергает какие бы то ни было ссылки на микроскопическое пространственно-временное описание. Хотим мы это осознавать или не хотим, но структура самой группы Лоренца придает смысл понятиям пространственной локализуемости и развития во времени вне областей интенсивного взаимодействия. В само понятие столкновения входит мера причинного соотношения в пространстве-времени, а допустимость хотя бы ограниченного микроскопического пространственно-временного описания делает маловероятным, чтобы причинность существовала только на макроскопическом уровне. Широко принято считать, что в основе абстрактного математического утверждения об аналитичности должно лежать интуитивное физическое представление о причинности в пространстве-времени. Но нельзя ли ввести причинность в явном виде и использовать ее как конструктивный принцип, а тем самым низвести аналитичность на роль вторичного, выводимого утверждения? Что же касается основной гипотезы теории S-матрицы о том, что частица есть первичная, неразложимая на составные части сущность, то мы еще раз спрашиваем: нельзя ли отделить феноменологию частиц от предположений об их структуре?

Глава 2 | ИСТОЧНИКИ

Критические замечания, высказанные выше, послужат нам отправным пунктом для построения новой теории частиц. Это феноменологическая теория, которая должна описывать наблюдающиеся частицы независимо от того, стабильные они или нестабильные. Никаких предположений о внутренней структуре частиц в ней не делается, но при этом оставлен открытым путь к построению какой-то более фундаментальной теории. Не изобретается никакого абстрактного определения частицы; вместо этого теория пользуется символическими идеализациями тех реальных процедур, благодаря которым понятие частицы приобретает физический смысл. Поэтому теория прочно стоит на почве пространства-времени, т. е. ее арена — та самая, на которой экспериментатор оперирует со своими приборами; однако вопрос о пределе возможностей микроскопического пространственно-временного описания оставляется открытым — его должен решить эксперимент. В соответствии с этим никакая операторная теория поля не используется. Дополнительное описание в импульсном пространстве играет важную роль, но не исключается, что его возможности могут быть ограниченными, причем мы не апеллируем к аналитичности по импульсным переменным. Новая теория строится на двух принципах, подсказываемых интуицией,— принципах причинности и равноправности всех точек в пространстве-времени. Результатом построения оказывается теория, занимающая промежуточное положение между операторной теорией поля и теорией S-матрицы. Отвергая догмы той и другой, она благодаря этому становится более простой и более наглядной, так что вполне может претендовать на место прежних теорий.

Понятие «частицы» в связи с новыми и новыми экспериментальными открытиями все время расширялось в сторону все более короткоживущих возбуждений со все большей энергией — от стабильных электрона и протона к долгоживущему нейтрону, к быстро распадающимся частицам π и Δ, к чрезвычайно нестабильным частицам ρ и N^*. Теперь стало нормой, что для того, чтобы изучить частицу, ее сначала нужно создать. В общем это справедливо и для стабильных частиц с очень высокой энергией, создаваемых в ускорителях. Акты подобного рождения частиц можно рассматривать как столкновения. Суть столкновения в том, что в конечной и до некоторой степени контролируемой пространственно-временной области другие частицы объединяются, чтобы передать данной частице те свойства, без которых она не может существовать и которые однозначно ее характеризуют. Экспериментаторы считают (это входит в их символ веры), что новому резонансу нельзя давать полного статуса частицы до тех пор, пока он не будет обнаружен с одними и теми же характеристиками в ряде разных реакций. Таким образом, раз частица определяется столкновениями, в которых она рождается, детали конкретной реакции не имеют существенного значения и роль других частиц, участвующих в столкновении, можно идеализировать, считая, что они просто обеспечивают необходимый баланс физических характеристик — составляют *источник* интересующей нас частицы. При такой идеализации остается лишь задание пространственно-временной области, в которой действует источник и которая количественно характеризуется некой функцией $S(x)$, и задание способности источника порождать различные импульсы, которая характеризуется другой функцией — $S(p)$. Эти две функции источника не могут быть независимыми, поскольку в них должна находить отражение квантовомеханическая дополнительность этих описаний — чем больше деталей содержится в одном из них, тем менее детальным должно быть другое.

Пока мы говорили лишь о рождении частиц, но не менее важное значение имеет и их детектирование. Оно всегда производится путем преобразования характеристик частицы в какие-то другие, более подходящие формы. В общем частица в процессе ее детектирования уничтожается. Здесь мы тоже имеем столкновения и их контролируемые пространственно-временные условия, с которыми связаны в принципе те же самые механизмы, что и при порождении частицы. Радиоприемник неизбежно излучает, а π-мезон, порождаемый при столкновении нуклонов, захватывается ядрами. Долгоживущие частицы могут распадаться, и их можно детектировать по распаду за счет механизма, слишком слабого, чтобы его можно было использовать как механизм порождения этих частиц, но экспериментатор всегда вправе отказаться от такой возможности — ведь нейтрон обычно регистрируют не по его β-распаду. Процессы столкновений, используемые для детектирования частицы, можно идеализированно представлять себе как стоки, которым передаются характеристики частиц и которые в известном смысле допускают в какой-то степени пространственно-временное и импульсное описание. Но стоки и источники — это, очевидно, лишь разные стороны одного и того же идеализированного представления, и мы объединим их под общим названием «источник». Теперь перейдем к количественным характеристикам понятия источника и начнем с простого случая стабильных бесспиновых частиц.

§ 1. ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 0, СЛАБЫЙ ИСТОЧНИК

Элементарные акты, которые рассматриваются как результат действия источников,— это рождение одиночной частицы там, где раньше ничего не было, и уничтожение такой одиночной частицы.

Поскольку мы абстрагируемся от присутствия в реальных столкновениях каких-то других частиц, описывая их источником, состояния, которые входят в соответствующие квантовомеханические амплитуды $\langle 1_p|0_-\rangle^K$ и $\langle 0_+|1_p\rangle^K$, таковы: $|0_-\rangle$ — вакуумное состояние до действия источника K; $|0_+\rangle$ — вакуумное состояние после действия источника (стока) K; $\langle 1_p|$ и $|1_p\rangle$ — одночастичные состояния с импульсом, лежащим в элементе объема $(d\mathbf{p})$. Эти дискретные обозначения связаны с символикой, при которой импульсные состояния задаются непрерывными переменными, следующим образом:

$$\langle 1_p| = (d\mathbf{p})^{1/2}\langle p|, \quad |1_p\rangle = |p\rangle (d\mathbf{p})^{1/2}. \tag{1.1}$$

Отдельные акты рождения и уничтожения не разлагаются на составные процессы; по определению, источник характеризует весь процесс в целом, что находит свое выражение в записи

$$\begin{aligned} \langle p|0_-\rangle^K &\sim (p^0)^{-1/2} K_e(p), \\ \langle 0_+|p\rangle^K &\sim (p^0)^{-1/2} K_a(p) \end{aligned} \tag{1.2}$$

(мы допускаем, что здесь может появиться некоторый переменный множитель). Мы временно ввели индексы e и a, которые служат для того, чтобы различать, испускает ли источник или поглощает. Термин «слабый источник» означает, что наши определения относятся к случаю, когда амплитуды вероятностей, соответствующие рождению и уничтожению сразу нескольких частиц, сравнительно малы. Теперь мы займемся уточнением этих определений.

Состояния $\langle p|$ и $|p\rangle$ относятся к определенному моменту времени, или, в более ковариантной формулировке, к определенной пространственно-подобной поверхности. Если начало отсчета пространственно-временной системы координат сместить на X^μ, то соответствующие состояния будут получаться в результате унитарного преобразования

$$\overline{\langle p|} = \langle p| e^{iP^\mu X_\mu} = e^{ipX}\langle p|, \qquad \overline{|p\rangle} = e^{-iP^\mu X_\mu}|p\rangle = |p\rangle e^{-ipX}. \tag{1.3}$$

Поскольку эти состояния играют в новой системе координат аналогичную роль, они соответствуют пространственно-подобной поверхности, смещенной на X^μ в исходной системе координат. Так как вакуумные состояния инвариантны, для амплитуд вероятностей $\langle p|0_-\rangle^K$ и $\langle 0_+|p\rangle^K$ существенно лишь взаимное положение пространственно-подобной поверхности и источников. Смещению поверхности на X^μ эквивалентно смещение источника на $-X^\mu$. Это находит свое выражение в замене $K \to \overline{K}$, где

$$\overline{K}(x) = K(x+X), \tag{1.4}$$

или

$$\overline{K}(\bar{x}) = K(x), \qquad \bar{x}^\mu = x^\mu - X^\mu. \tag{1.5}$$

Далее, соответственно сказанному выше

$$\overline{K}_e(p) = e^{ipX}K_e(p), \qquad \overline{K}_a(p) = e^{-ipX}K_a(p), \tag{1.6}$$

откуда явствует, что связь между дополнительными координатным и импульсным описаниями задается преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} K_e(p) &= \int (dx)\, e^{-ipx}K_e(x), \\ K_a(p) &= \int (dx)\, e^{ipx}K_a(x). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Начало отсчета пространственно-временных координат, входящих в эти экспоненты, лежит на пространственно-подобной поверхности, но, как правило, мы не будем указывать этого в явном виде.

Посмотрим далее, как ведет себя источник при однородных преобразованиях Лоренца. Закон изменения одночастичных состояний при инфинитезимальных преобразованиях такого рода дается равенствами

$$\begin{aligned} \delta\, \langle p | &= i\, \langle p\, |\, (\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J} + \delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}), \\ \delta\, | p \rangle &= -i\, (\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J} + \delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{N})\, | p \rangle, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где, согласно соотношению (3.29) из гл. 1,

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \qquad \mathbf{N} = -\,(p^0)^{1/2}\, \mathbf{r}\, (p^0)^{1/2}. \tag{1.9}$$

В выражении для $\mathbf{N}$ мы положили $x^0 = 0$, что соответствует специальному выбору начала отсчета времени, и использовали симметризованную форму записи произведения $\mathbf{r}$ и p^0. Оператор координаты в импульсном описании имеет вид

$$\langle p | \mathbf{r} = i\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \langle p |, \qquad \mathbf{r} | p \rangle = -i\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} | p \rangle, \tag{1.10}$$

и поэтому

$$\delta\, [(p^0)^{1/2} \langle p |] = -\left[-\delta\boldsymbol{\omega}\cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \times \mathbf{p} + \delta\mathbf{v}\cdot p^0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] (p^0)^{1/2} \langle p |, \tag{1.11}$$

причем аналогичную формулу можно написать для $(p^0)^{1/2}\, | p \rangle$. Наличие здесь квадратного корня позволяет переписать это соотношение в виде

$$\delta K_e(p) = \left[-\delta\boldsymbol{\omega}\cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \times \mathbf{p} + \delta\mathbf{v}\cdot p^0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] K_e(p), \tag{1.12}$$

и то же самое относится к $K_a(p)$. Отсюда вытекает следующий закон изменения функций $K_e(x)$ и $K_a(x)$ при инфинитезимальных преобразованиях:

$$\begin{aligned} \delta K(x) &= [\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nabla} + \delta\mathbf{v}\cdot(\mathbf{r}\partial_0 + x^0\boldsymbol{\nabla})]\, K(x) = \\ &= \delta x^\nu \partial_\nu K(x), \end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$\delta x^{\nu} = \delta\omega^{\mu\nu} x_{\mu}. \tag{1.14}$$

Этот результат в форме

$$\overline{K}(x) = K(x + \delta x), \tag{1.15}$$

или

$$\overline{K}(\overline{x}) = K(x), \qquad \overline{x}^{\mu} = x^{\mu} - \delta x^{\mu}, \tag{1.16}$$

будучи объединенным с законом изменения при трансляциях, говорит о том, что при преобразованиях из группы Лоренца функции источника бесспиновых частиц $K(x)$ ведут себя как скалярные функции.

Весьма существенно, что если в качестве $K(x)$ взять вещественную функцию, то этот выбор будет иметь лоренц-инвариантный смысл в противоположность нерелятивистскому случаю, переход к которому осуществляется заменами $\mathbf{N} \to -m\mathbf{r}$ и $p^0 \to \mathbf{p}^2/2m$. Рассматривая для простоты только преобразования, соответствующие движению с постоянной скоростью, получаем

$$\delta K_e(p) = m\delta\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} K_e(p) \tag{1.17}$$

и

$$\delta K_e(\mathbf{r}, t) = \delta\mathbf{v}\cdot(-im\mathbf{r} + t\nabla) K_e(\mathbf{r}, t). \tag{1.18}$$

Отсюда вытекает следующий закон изменения при конечных преобразованиях:

$$\begin{aligned}\overline{K}_e(\mathbf{r}, t) &= \exp[\mathbf{v}\cdot(-im\mathbf{r} + t\nabla)] K_e(\mathbf{r}, t) = \\ &= \exp\left[-im\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} + \frac{i}{2} m\mathbf{v}^2 t\right] K_e(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t),\end{aligned} \tag{1.19}$$

или

$$\begin{aligned}\overline{K}_e(\overline{\mathbf{r}}, t) &= \exp\left[-i\left(m\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} - \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 t\right)\right] K_e(\mathbf{r}, t), \\ \overline{\mathbf{r}} &= \mathbf{r} - \mathbf{v}t.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Теперь очевидно, что вещественный излучающий или поглощающий источник не имеет галилеевски-инвариантного смысла. Заметим, что, преобразуя соотношение (1.19), мы воспользовались простым частным случаем формулы $p = -i\partial/\partial q$:

$$e^{i\lambda[p + f'(q)]} = e^{i[f(q+\lambda) - f(q)]} e^{i\lambda p} = e^{i\lambda p} e^{i[f(q) - f(q-\lambda)]}. \tag{1.21}$$

Чтобы установить точную связь между излучательной и поглощательной способностями источника, достаточно воспользоваться ортогональностью вакуумного и одночастичных состояний до действия на них источников совместно с условием полноты всевозможных конечных состояний частиц. В результате получим

$$0=\langle 0_-\,|\,1_p\rangle=\langle 0_-\,|\,0_+\rangle^K\langle 0_+\,|\,1_p\rangle^K+\sum_{p'}\langle 0_-\,|\,1_{p'}\rangle^K\langle 1_{p'}\,|\,1_p\rangle^K+\ldots, \quad (1.22)$$

где при условии слабости источника всеми дополнительными членами можно пренебречь. Кроме того, для сомножителей

$$\langle 0_+|1_p\rangle^K \quad \text{и} \quad \langle 0_-|1_{p'}\rangle^K=\langle 1_{p'}\,|\,0_-\rangle^{K*}$$

достаточно воспользоваться значениями, которые получаются в отсутствие источников, а именно

$$K=0: \quad \langle 0_-|0_+\rangle=\langle 0_+|0_-\rangle^*=1, \quad (1.23)$$

что отражает инвариантность вакуумного состояния, и

$$K=0: \quad \langle 1_{p'}|1_p\rangle=\delta_{pp'}. \quad (1.24)$$

Здесь следует учесть лишь фазовые множители, которые служат исключительно для того, чтобы в получающемся соотношении

$$\langle 0_+\,|\,1_p\rangle^K=-\langle 1_p\,|\,0_-\rangle^{K*} \quad (1.25)$$

оба одночастичных состояния относились к одной и той же пространственно-подобной поверхности. Соотношение между амплитудами вероятностей рождения и уничтожения можно представить также в виде

$$i\,\langle 0_+\,|\,1_p\rangle^K=[i\,\langle 1_p\,|\,0_-\rangle^K]^*. \quad (1.26)$$

Таким образом, с точностью до произвольных фаз функции источников $K_e(x)$ и $K_a(x)$ комплексно сопряжены друг другу. Самое простое — это выбрать вещественную функцию

$$K_e(x)=K_a(x)=K(x), \quad (1.27)$$

с чего мы и начнем. Объединяя теперь все результаты, введем следующие явные определения:

$$\langle 1_p\,|\,0_-\rangle^K=iK_p, \qquad \langle 0_+\,|\,1_p\rangle^K=iK_p^*, \quad (1.28)$$

где

$$K_p=(d\omega_p)^{1/2}K(p), \qquad d\omega_p=\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p^0} \quad (1.29)$$

и

$$K(p)=\int(dx)\,e^{-ipx}K(x), \qquad K(p)^*=K(-p). \quad (1.30)$$

Основным инструментом экспериментатора является пучок частиц. Очень слабый пучок бесспиновых частиц допускает следующее причинное описание. Начнем с вакуумного состояния. Пусть затем включается слабый источник $K_2(x)$, занимающий конечную пространственно-временную область. В большинстве случаев эффект его действия будет нулевым, чему соответствует амплитуда вероятности $\langle 0_+ \mid 0_-\rangle^{K_2} \sim 1$, и лишь изредка он будет порождать одну частицу соответственно амплитуде $\langle 1_p \mid 0_-\rangle^{K_2}$. После прекращения действия излучающего источника возникшее вакуумное или одночастичное состояние остается неизменным до тех пор, пока мы не вступим в пространственно-временную область поглощающего источника $K_1(x)$. Детектирование одиночной частицы этим источником описывается амплитудой $\langle 0_+ \mid 1_p\rangle^{K_1}$, и тем самым мы возвращаемся к вакуумному состоянию. Полный процесс описывается амплитудой

$$\langle 0_+ | 0_-\rangle^{K_1+K_2} = \langle 0_+ | 0_-\rangle^{K_1} \langle 0_+ | 0_-\rangle^{K_2} + \\ + \sum_p \langle 0_+ | 1_p\rangle^{K_1} \langle 1_p | 0_-\rangle^{K_2} + \ldots , \tag{1.31}$$

где индексы у вакуумных состояний, отражающие причинную последовательность событий, относятся к указанным тут же источникам. Каждая из вакуумных амплитуд имеет вид

$$\langle 0_+ \mid 0_-\rangle^K = 1 + f(K), \quad f(0) = 0. \tag{1.32}$$

Подставив явные выражения для амплитуд вероятностей рождения и уничтожения одной частицы, получим

$$\langle 0_+ | 0_-\rangle^{K_1+K_2} \approx 1 + f(K_1) + f(K_2) + \\ + i \int (dx)(dx') K_1(x) \left[i \int d\omega_p e^{ip(x-x')} \right] K_2(x'), \tag{1.33}$$

где знак приближенного равенства соответствует ограничению слабым источником. В этом случае функции $K_1(x)$ и $K_2(x)$ являются отдельными частями полного источника, для которого

$$K(x) = K_1(x) + K_2(x). \tag{1.34}$$

При едином описании составные части источника не должны отличаться ничем, кроме как указанием на занимаемые ими пространственно-временные области. Тем самым утверждается равноправность точек пространства-времени, которая означает, что $\langle 0_+ \mid 0_-\rangle^K$ зависит только от K, а явное воплощение находит в том, что эта амплитуда обладает билинейной структурой по K_1 и K_2. Таким образом, можно написать

$$\langle 0_+ | 0_-\rangle^K \approx 1 + \frac{1}{2} i \int (dx)(dx') K(x) \Delta_+(x - x') K(x'). \tag{1.35}$$

Трансляционно-инвариантную функцию $\Delta_+(x - x')$, являющуюся ядром квадратичной формы, без потери общности можно выбрать симметричной:

$$\Delta_+(x - x') = \Delta_+(x' - x). \tag{1.36}$$

Тогда, взяв два эквивалентных вклада типа K_1K_2, мы придем к следующей структуре функции Δ_+ для причинно-упорядоченной пары точек:

$$x^0 > x^{0\prime}: \qquad \Delta_+(x-x') = i \int d\omega_p e^{ip(x-x')}. \tag{1.37}$$

[Напомним, что p^μ — вектор энергии-импульса и поэтому $p^0 = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$.] Из сказанного о функции $\Delta_+ (x - x')$ мы заключаем, что

$$x^0 < x^{0\prime}: \qquad \Delta_+(x-x') = i \int d\omega_p e^{ip(x'-x)}. \tag{1.38}$$

Может показаться, что подобной структурой $\Delta_+ (x - x')$ обладает лишь для причинно-упорядоченных, т. е. связанных времени-подобными интервалами, точек x и x'. Но в действительности приведенными выше выражениями эта функция определяется во всем пространстве. Единственная возможная трудность в том, что для точек x и x', разделенных пространственно-подобными интервалами, когда причинность не имеет инвариантного смысла, могут получаться разные значения в зависимости от выбора системы координат. Но этого не происходит. Поскольку $d\omega_p$ и $e^{\pm ip(x-x')}$ — инвариантные структуры, без всякого ущерба можно ограничиться выбором системы координат, для которой $x^0 = x^{0\prime}$, а на выражении

$$x^0 = x^{0\prime}: \qquad \Delta_+'(x-x') = i \int d\omega_p e^{\pm i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \tag{1.39}$$

неопределенность знака не сказывается, так как интеграл зависит только от $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 = (x - x')^2$. В результате выражение (1.35) уже не будет содержать никаких указаний о начальном причинном упорядочении источников, и эта структура оказывается пригодной для их произвольного расположения. Правда, такая пространственно-временная экстраполяция должна удовлетворять жесткому критерию. Теперь мы в состоянии вычислить вероятность того, что, несмотря на вмешательство источника, вакуумное состояние останется неизменным. Она равна

$$|\langle 0_+ | 0_- \rangle^K|^2 \approx 1 - \int (dx)(dx') K(x) \operatorname{Re} \frac{1}{i} \Delta_+(x-x') K(x'), \tag{1.40}$$

где во всей области изменения переменных

$$\operatorname{Re} \frac{1}{i} \Delta_+(x-x') = \operatorname{Re} \int d\omega_p e^{ip(x-x')}, \tag{1.41}$$

причем символ вещественной части можно опустить, поскольку вещественность диктуется симметричностью квадратичной формы. В силу вероятностных соображений должно также выполняться соотношение

$$|\langle 0_+|0_-\rangle^K|^2 \approx 1 - \sum_p |\langle 1_p|0_-\rangle^K|^2. \quad (1.42)$$

Никаких трудностей здесь не возникает, ибо

$$\int (dx)(dx')K(x)\left[\int d\omega_p e^{ip(x-x')}\right]K(x') =$$
$$= \int d\omega_p |K(p)|^2 = \sum_p |\langle 1_p|0_-\rangle^K|^2. \quad (1.43)$$

Казалось бы, функцию $\Delta_+(x-x')$ можно определенным образом изменять, сохраняя при этом все ее необходимые физические свойства. Действительно, добавим к $\Delta_+(x-x')$ некоторую вещественную функцию, отличную от нуля лишь тогда, когда вектор $(x-x')^\mu$ пространственно-подобен. Она не будет давать вклада ни в причинный обмен частицами между источниками, ни в вероятность того, что вакуумное состояние останется неизменным. Но возможность такого видоизменения исключается в силу предположения о равноправности точек пространства-времени, не допускающего существования особых взаимосвязей между источниками. Заметим, что этому предположению можно придать более точную, хотя и довольно абстрактную форму, рассматривая четырехмерное евклидово пространство, которое связано с пространством Минковского комплексным преобразованием

$$x_4 = ix^0. \quad (1.44)$$

В евклидовом пространстве нет никакого аналога различию между времени-подобными и пространственно-подобными интервалами, свойственному пространству Минковского. В соответствии с этим определенные пространственно-временные структуры можно исключить, лишь предположив, что при отображении пространства Минковского на евклидово пространство инвариантная вакуумная амплитуда, описывающая полный физический процесс, сохраняет как свой смысл, так и инвариантность. Это утверждение будем называть евклидовым постулатом.

Евклидов постулат будет представляться вполне естественным, если отметить, что функция $\Delta_+(x-x')$ обладает всеми необходимыми свойствами; оказывается, что существует связанная с ней евклидово-инвариантная функция $\Delta_E(x-x')$, которая определена почти во всем пространстве (при $x \neq x'$). Ее можно получить из интегрального представления

$$\Delta_+(x-x') = i\int d\omega_p \exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - ip^0|x^0 - x^{0\prime}|] \quad (1.45)$$

путем подстановки

$$i\,|x^0 - x^{0'}| \rightarrow |x_4 - x_4'|, \tag{1.46}$$

требующей, чтобы упорядоченная пара вещественных чисел x^0, $x^{0'}$ отображалась в какую-то упорядоченную пару вещественных чисел x_4, x_4'. Определяя функцию $\Delta_E\,(x - x')$, мы отбросим множитель i:

$$\frac{1}{i}\,\Delta_+(x - x') \rightarrow \Delta_E(x - x'), \tag{1.47}$$

и в результате получим

$$\Delta_E(x - x') = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2p^0}\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - p^0\,|x_4 - x_4'|\,\right]. \tag{1.48}$$

Используя интегральное соотношение

$$\frac{1}{2p^0}\,e^{-p^0|x_4 - x_4'|} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_4}{2\pi}\,\frac{e^{ip_4(x_4 - x_4')}}{(p_4)^2 + (p^0)^2}, \tag{1.49}$$

представим эту функцию в форме, в которой евклидова инвариантность выступает в явном виде:

$$\Delta_E(x - x') = \int \frac{(dp)_E}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip_\mu(x - x')_\mu}}{(p_\mu)^2 + m^2}, \qquad (dp)_E = dp_1\,\ldots\,dp_4, \tag{1.50}$$

где обозначения, не различающие контравариантные и ковариантные компоненты, подчеркивают евклидовость этой структуры. Выяснив, что $\Delta_E\,(x - x')$ — евклидово-инвариантная функция, зависящая лишь от

$$[(x - x')_\mu]^2 = R \geqslant 0, \tag{1.51}$$

мы можем вернуться к формуле (1.45) и, выбрав евклидову систему координат, получить вещественное положительное выражение

$$\Delta_E(x - x') = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_m^\infty dp^0\,[(p^0)^2 - m^2]^{1/2}\,e^{-p^0 R}, \tag{1.52}$$

которое является одной из разновидностей однопараметрических интегральных представлений. Прямым следствием из него будут два предельных соотношения:

$$\begin{aligned} mR \ll 1:&\qquad \Delta_E(x - x') \approx \frac{1}{4\pi^2 R^2},\\ mR \gg 1:&\qquad \Delta_E(x - x') \approx \frac{(2m)^{1/2}}{(4\pi R)^{3/2}}\,e^{-mR}. \end{aligned} \tag{1.53}$$

Укажем также на простое неравенство

$$\Delta_E(x - x') < \frac{1}{4\pi^2}\left(-\frac{d}{dR}\right)\frac{e^{-mR}}{R}, \tag{1.54}$$

которое еще лучше представить в форме

$$\Delta_E(x-x') < \frac{1}{4\pi^2}\frac{e^{-mR}}{R^2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\pi mR\right)^{1/2}\right], \tag{1.55}$$

поскольку при этом воспроизводятся правильные предельные соотношения. Связь между описаниями в пространстве Минковского и в евклидовом пространстве можно установить, приравнивая интенсивности источника, связанные с соответствующими элементами объема

$$\begin{gathered}(dx)\ K\ (x) \to (dx)_E K_E\ (x),\\ (dx)_E = dx_1\ \ldots\ dx_4,\end{gathered} \tag{1.56}$$

и сохраняя при этом вещественность функции источника. В результате получим

$$\langle 0_+|0_-\rangle^K \to 1-\frac{1}{2}\int [(dx)(dx')K(x)\Delta(x-x')K(x')]_E, \tag{1.57}$$

где правая часть представляет собой число, меньшее единицы.

Можно совершить также и обратный переход от евклидова описания к физической вакуумной амплитуде, для чего следует произвести комплексные подстановки

$$x_4 \to ix^0, \qquad p_4 \to -ip^0, \tag{1.58}$$

если только понимать их как предел комплексных вращений при стремлении угла поворота к $\pi/2$ снизу:

$$x_4 \to \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]x^0, \qquad p_4 \to \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]p_0, \quad \varepsilon\to+0. \tag{1.59}$$

Такая осторожность необходима потому, что у выражений, которые возникают при переходе к пространству Минковского, имеются сингулярности: сингулярность в координатном пространстве на световом конусе $(x-x')^2=0$ или сингулярность в импульсном пространстве на массовой поверхности частицы $p^2+m^2=0$. Итак, получаем

$$\begin{aligned}(p_\mu)^2+m^2 &\to \mathbf{p}^2+m^2-p_0^2(1+2i\varepsilon) = p^\mu p_\mu+m^2-i\varepsilon,\\ (x_\mu-x'_\mu)^2 &\to (\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2-(x^0-x^{0\prime})^2(1-2i\varepsilon) =\\ &= (x-x')^\mu(x-x')_\mu+i\varepsilon,\end{aligned} \tag{1.60}$$

где величина ε, несмотря на изменения ее масштаба, по-прежнему сохраняет смысл некоторого параметра, стремящегося к нулю со стороны положительных значений. В результате для $\Delta_+(x-x')$ получается следующее четырехмерное представление:

$$\Delta_+(x-x') = \int \frac{dp}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2-i\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon\to+0}, \quad dp=dp_0\ \ldots\ dp_3, \tag{1.61}$$

где

$$\left.\frac{1}{x-i\varepsilon}\right|_{\varepsilon\to+0}=P\,\frac{1}{x}+\pi i\delta(x), \tag{1.62}$$

а P — символ главного значения интеграла в смысле Коши. Метод контурного интегрирования дает

$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\,\frac{e^{ip_0(x^0-x^{0\prime})}}{\mathbf{p}^2+m^2-i\varepsilon-p_0^2}\right|_{\varepsilon\to 0}=i\,\frac{e^{-i(\mathbf{p}^2+m^2)^{1/2}\,|x^0-x^{0\prime}|}}{2\,(\mathbf{p}^2+m^2)^{1/2}}, \tag{1.63}$$

и мы вновь приходим к функции (1.45). Предельное выражение для нее в координатном пространстве имеет вид

$$m^2\,|(x-x')^2|\ll 1:$$

$$\Delta_+(x-x')\approx\frac{i}{4\pi^2}\,\frac{1}{(x-x')^2+i\varepsilon}=\frac{i}{4\pi^2}\,P\frac{1}{(x-x')^2}+\frac{1}{4\pi}\,\delta\,[(x-x')^2]. \tag{1.64}$$

Приведем асимптотические выражения для этой функции при больших пространственно-подобных интервалах $[(x-x')^2]^{1/2}=R>0$ и при больших времени-подобных интервалах $[-(x-x')^2]^{1/2}=T>0$ (они связаны друг с другом подстановкой $R\leftrightarrow iT$):

$$\begin{aligned} mR\gg 1:&\qquad \Delta_+(x-x')\approx i\,\frac{(2m)^{1/2}}{(4\pi R)^{3/2}}\,e^{-mR},\\ mT\gg 1:&\qquad \Delta_+(x-x')\approx e^{-i\pi/4}\,\frac{(2m)^{1/2}}{(4\pi T)^{3/2}}\,e^{-imT}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Рассмотрим теперь более общий случай, когда $K(x)$ — комплексная функция. В этом случае функции, описывающие излучательную и поглощательную способность источника, комплексно сопряжены друг другу. Если все сказанное выше дополнить лишь этим обстоятельством, то одночастичный член полной вакуумной амплитуды примет вид

$$i\int(dx)\,(dx')\,K_1^*(x)\left[i\int d\omega_p e^{ip(x-x')}\right]K_2(x'). \tag{1.66}$$

Правда, это, очевидно, неполное выражение, поскольку слагаемое, содержащее источник, предполагается линейным по

$$K(x)=K_1(x)+K_2(x) \tag{1.67}$$

и линейным по

$$K^*(x)=K_1^*(x)+K_2^*(x), \tag{1.68}$$

а для этого нужно, чтобы в него давал вклад также причинный член

$$i\int(dx)\,(dx')\,K_1(x')\left[i\int d\omega_p e^{ip(x'-x)}\right]K_2^*(x), \tag{1.69}$$

соответствующий испусканию и последующему поглощению частицы какого-то другого сорта. Какова масса этой частицы? Если бы две массы были неодинаковы, то структура новой функции $\Delta_+ (x - x')$, которая входит в вакуумную амплитуду

$$\langle 0_+ \mid 0_- \rangle^K = \\ = 1 + i \int (dx)\,(dx')\,K^*(x)\,\Delta_+ (x - x')\,K(x), \qquad (1.70)$$

по-прежнему определялась бы соотношениями (1.37) и (1.38), но в эти два причинных выражения входили бы разные массы. В таком случае мы не могли бы уже говорить, что для функции $\Delta_+ (x - x')$ возможна лишь однозначная экстраполяция в пространственно-подобные области. Именно в силу принципа равноправности всех точек пространства-времени массы двух частиц, которые отождествляются с частицей и античастицей, должны быть одинаковы. Тот же самый вывод следует из евклидова постулата: поскольку нет какого-либо инвариантного критерия, который позволял бы провести различие между областями $x_4 - x_4' > 0$ и $x_4 - x_4' < 0$, возможен лишь один массовый параметр.

В свете сказанного определения, устанавливающие связь источников с амплитудами вероятностей рождения и уничтожения, следует расширить:

$$\langle 1_{p\pm} \mid 0_- \rangle^K = iK_{p\pm}, \qquad \langle 0_+ \mid 1_{p\pm} \rangle^K = iK^*_{p\pm}, \qquad (1.71)$$

где знаки $\pm$ относятся к частице и античастице, а

$$K_{p+} = (d\omega_p)^{1/2}\,K(p), \qquad K_{p-} = (d\omega_p)^{1/2}\,K^*(p). \qquad (1.72)$$

Здесь необходима осторожность, поскольку имеется различие между

$$K^*(p) = \int (dx)\,e^{-ipx}K^*(x) \qquad (1.73)$$

и

$$K(p)^* = \left[\int (dx)\,e^{-ipx}K(x)\right]^* = K^*(-p). \qquad (1.74)$$

Соответственно этому мы имеем

$$K^*_{p+} = (d\omega_p)^{1/2}\,K^*(-p), \qquad K^*_{p-} = (d\omega_p)^{1/2}\,K(-p). \qquad (1.75)$$

Таким образом, испускание и поглощение в соответствии с балансом энергии-импульса различаются знаком переменной p в фурье-образе, а частице и античастице соответствуют символы K и K^*. Именно, источник K описывает порождение частицы и уничтожение античастицы, а источник K^*, наоборот,— порождение античастицы и уничтожение частицы.

По аналогии с тем, как источники увеличивают или уменьшают запас энергии системы, мы можем представлять себе, что

K увеличивает, а K^* уменьшает некоторую величину, которая должна принимать противоположные значения для частицы и античастицы. Как нам известно, этим свойством обладает электрический заряд, и мы приходим к выводу, что частица и античастица всегда различаются некоторой зарядово-подобной характеристикой. Все сказанное находит свое формальное выражение в инвариантности вакуумной амплитуды относительно фазовых преобразований комплексных источников:

$$K(x) \to e^{i\varphi}K(x), \qquad K^*(x) \to e^{-i\varphi}K^*(x). \tag{1.76}$$

Если рассмотреть закон изменения амплитуд вероятностей $\langle 1_{p\pm} \mid 0_-\rangle^K$ при таких фазовых преобразованиях, дополненных преобразованием смещения источника как целого на X^μ, то мы получим

$$\langle 1_{p\pm} \mid 0_-\rangle^K \to e^{\pm i\varphi} e^{ipX} \langle 1_{p\pm} \mid 0_-\rangle^K, \tag{1.77}$$

откуда становятся ясными механические и «зарядовые» характеристики одночастичных состояний.

Можно также заменить комплексный источник $K(x)$ двумя вещественными источниками K_1 и K_2:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[K_{(1)}(x) - iK_{(2)}(x)], \qquad K^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[K_{(1)}(x) + iK_{(2)}(x)]. \tag{1.78}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\langle 0_+ \mid 0_-\rangle^K \approx 1 &+ \frac{i}{2}\int (dx)(dx')\, K_{(1)}(x)\,\Delta_+(x-x')\,K_{(1)}(x') + \\ &+ \frac{i}{2}\int (dx)(dx')\, K_{(2)}(x)\,\Delta_+(x-x')\,K_{(2)}(x') = \\ &= \langle 0_+ \mid 0_-\rangle^{K(1)} \langle 0_+ \mid 0_-\rangle^{K(2)}.\end{aligned} \tag{1.79}$$

Теперь мы имеем два независимых источника вместе с соответствующими им частицами. Но равенство масс (и спинов) этих частиц означает, что разбиение на два источника можно произвести бесчисленным множеством способов, которые соответствуют фазовым преобразованиям комплексных источников, выступающим теперь в качестве двумерных евклидовых вращений:

$$\left.\begin{aligned} K_{(1)}(x) &\to \cos\varphi\, K_{(1)}(x) + \sin\varphi\, K_{(2)}(x), \\ K_{(2)}(x) &\to -\sin\varphi\, K_{(1)}(x) + \cos\varphi\, K_{(2)}(x). \end{aligned}\right\} \tag{1.80}$$

Эти соотношения можно переписать также в матричных обозначениях:

$$K(x) \to e^{iq\varphi}\, K(x), \tag{1.81}$$

где

$$K(x)=\begin{pmatrix}K_{(1)}(x)\\ K_{(2)}(x)\end{pmatrix}, \tag{1.82}$$

а

$$q=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}. \tag{1.83}$$

Эта мнимая и антисимметричная матрица отождествляется с матрицей заряда. Ее собственные значения равны $+1$ и -1, а соответствующие собственные векторы — комплексные источники $K(x)$ и $K^*(x)$. Вещественные источники

$$K_{(1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[K(x)+K^*(x)], \qquad K_{(2)}(x)=\frac{i}{\sqrt{2}}[K(x)-K^*(x)] \tag{1.84}$$

не порождают одночастичных состояний с определенным зарядом. Они связаны с другим свойством зарядовой симметрии — при взаимной замене положительного и отрицательного зарядов состояния переходят сами в себя или изменяют свой знак. В матричных обозначениях это преобразование записывается так:

$$K(x)\to r_qK(x), \tag{1.85}$$

где вещественная матрица

$$r_q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{1.86}$$

обладает свойством

$$r_qq=-qr_q. \tag{1.87}$$

Для этой операции обращения знака заряда часто используется символ C.

В двухкомпонентных матричных обозначениях вакуумная амплитуда формально выглядит точно так же, как и в случае одного вещественного источника:

$$\langle 0_+|0_-\rangle^K=1+\frac{i}{2}\int(dx)(dx')K(x)\Delta_+(x-x')K(x'). \tag{1.88}$$

Это справедливо и для ее евклидова аналога

$$\langle 0_+|0_-\rangle^K\to 1-\frac{1}{2}\int[(dx)(dx')K(x)\Delta(x-x')K(x')]_E, \tag{1.89}$$

который может быть записан также через комплексные источники:

$$\langle 0_+|0_-\rangle^K\to 1-\int[(dx)(dx')K^*(x)\Delta(x-x')K(x')]_E. \tag{1.90}$$

Совокупность всех евклидовых преобразований распадается на две связные компоненты, соответствующие собственным и несобственным преобразованиям. В противоположность этому полная группа Лоренца содержит четыре связные компоненты, что обусловлено разрывным характером причинного различия между областями $x^0 > 0$ и $x^0 < 0$. Таким образом, наличие более широкой группы инвариантности, которая вводится евклидовым постулатом, дает возможность выполнить некоторые из разрывных преобразований Лоренца посредством непрерывных евклидовых преобразований. Наиболее важным примером такого рода служит собственное преобразование

$$\bar{x}_\mu = -x_\mu, \tag{1.91}$$

которое в пространстве Минковского является преобразованием обращения времени. Формальная инвариантность вакуумной амплитуды относительно преобразования

$$K(x) \to K(-x) \tag{1.92}$$

есть прямое следствие симметрии

$$\Delta_+(x-x') = \Delta_+(-x+x'), \tag{1.93}$$

но общим основанием для этой инвариантности служит именно евклидов постулат. При изменении знака временной координаты причинная последовательность источников меняется на обратную, а рождение заменяется уничтожением, и наоборот. Это явствует из преобразования источника в импульсной форме

$$K(p) \to K(-p), \tag{1.94}$$

откуда

$$K_{p+} \leftrightarrow K^*_{p-}, \qquad K_{p-} \leftrightarrow K^*_{p+}, \tag{1.95}$$

т. е.

$$\langle 1_{p\pm} | 0_- \rangle^K \leftrightarrow \langle 0_+ | 1_{p\mp} \rangle^K. \tag{1.96}$$

Такое преобразование, состоящее из обращения времени (T) и пространственного отражения (P), которое приводит также к замене частицы на античастицу и наоборот, часто называют TCP-преобразованием, но можно встретиться и с любой другой перестановкой из этих трех символов.

§ 2. ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 0, СИЛЬНЫЙ ИСТОЧНИК

В пучке, с которым имеет дело экспериментатор, в каждый момент времени содержится множество частиц, которые можно считать невзаимодействующими, так как они разделены пространственными расстояниями, большими по сравнению с микроскопическим радиусом взаимодействия. В принципе пучок заряженных частиц представляет в этом отношении некоторое исключение, но практически, выбирая соответствующим образом плотность пучка, возмущения, вносимые дальнодействием, можно сделать достаточно малыми. При теоретическом описании такой ситуации мы воспользуемся направленностью действия источников как одним из аспектов дополнительности $K(x)$- и $K(p)$-представлений. Источник, который размазан в пространстве и обладает подходящей когерентностью (если пользоваться терминологией теории антенн), может создавать пучок с высокой степенью направленности, и если должна обеспечиваться эффективная связь с детектирующим источником, то возможные положения последнего будут резко ограничены. Мы мысленно рассматриваем некоторое произвольное число таких пар слабых источников направленного испускания и поглощения, действующих один рядом с другим при пренебрежимо слабой перекрестной связи между ними. Если для всех пар источников приближенно принять одинаковый причинный порядок, то мы получим, что в некоторый промежуток времени между областями испускания и поглощения существует произвольное число частиц, которые не взаимодействуют друг с другом, поскольку пространственные расстояния между ними велики.

Рассмотрим сначала вещественные источники и обозначим через $K_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ отдельные слабые источники, соответствующие одному изолированному процессу испускания и поглощения. Физическая независимость всевозможных актов такого рода, которая обеспечивается нашим выбором источников, находит свое выражение в том, что для получения вакуумной амплитуды, описывающей полную систему, нужно просто перемножить отдельные амплитуды вероятностей:

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^K = \prod_\alpha \left[1 + \frac{i}{2} \int (dx)(dx') K_\alpha(x) \Delta_+(x-x') K_\alpha(x') \right]. \quad (2.1)$$

Все источники $K_\alpha(x)$, вместе взятые, составляют полный источник

$$K(x) = \sum_\alpha K_\alpha(x). \quad (2.2)$$

Принцип равноправности точек пространства-времени не допускает каких бы то ни было специфических различий между отдельными компонентами источника $K(x)$. Короче говоря, вакуумная амплитуда должна зависеть только от $K(x)$. Это обеспечивается, если предположить, что

$$\alpha \neq \beta: \qquad \int (dx)(dx') K_\alpha(x) \Delta_+(x-x') K_\beta(x') = 0, \quad (2.3)$$

т. е. что связь между разными областями одночастичного обмена отсутствует. Тогда, поскольку отдельные источники являются слабыми,

$$\langle 0_+|0_-\rangle^K = \prod_\alpha \exp\left[\frac{i}{2}\int (dx)(dx')K_\alpha(x)\Delta_+(x-x')K_\alpha(x')\right] =$$

$$= \exp\left[\sum_\alpha \frac{i}{2}\int (dx)(dx')K_\alpha(x)\Delta_+(x-x')K_\alpha(x')\right] =$$

$$= \exp\left[\sum_{\alpha,\beta} \frac{i}{2}\int (dx)(dx')K_\alpha(x)\Delta_+(x-x')K_\beta(x')\right], \qquad (2.4)$$

или

$$\langle 0_+|0_-\rangle^K = \exp\left[\frac{i}{2}\int (dx)(dx')K(x)\Delta_+(x-x')K(x')\right]. \qquad (2.5)$$

То же самое выражение пригодно и для двухкомпонентных вещественных источников, а в случае комплексных источников оно принимает вид

$$\langle 0_+ | 0_-\rangle^K =$$

$$= \exp\left[i\int (dx)(dx')K^*(x)\Delta_+(x-x')K(x')\right]. \qquad (2.6)$$

Мы будем считать, что эти экспоненциальные выражения для вакуумной амплитуды описывают любую систему источников произвольной интенсивности, единственное требование к которым — чтобы между частицами отсутствовало эффективное взаимодействие. Для проверки правильности этого утверждения рассмотрим простую причинную структуру

$$K(x) = K_1(x) + K_2(x), \qquad (2.7)$$

где мы по-прежнему принимаем, что K_1 соответствует физическим процессам, протекающим после того, как закончились аналогичные процессы, описываемые функцией K_2. Для случая вещественных источников имеем

$$\langle 0_+|0_-\rangle^K = \langle 0_+|0_-\rangle^{K_1} \times$$

$$\times \exp\left[i\int (dx)(dx')K_1(x)\Delta_+(x-x')K_2(x')\right]\langle 0_+|0_-\rangle^{K_2}, \qquad (2.8)$$

где в соответствии с причинным расположением источников

$$i\int (dx)(dx')K_1(x)\Delta_+(x-x')K_2(x') =$$

$$= i\int (dx)(dx')K_1(x)\left[i\int d\omega_p e^{ip(x-x')}\right]K_2(x') = \sum_p iK_{1p}^* iK_{2p}. \qquad (2.9)$$

Причинная упорядоченность позволяет нам также разбить полный процесс на первоначальный акт многочастичного испускания, описываемый амплитудой вероятности $\langle\{n\}|0_-\rangle^{K_2}$ и на последующий акт поглощения, которому соответствует амплитуда $\langle 0_+ \mid \{n\}\rangle^{K_1}$ (здесь символом $\{n\}$ обозначена совокупность физических характеристик, которыми различаются всевозможные n-частичные состояния). В результате возникает следующее причинное разбиение вакуумной амплитуды:

$$\langle 0_+ \mid 0_-\rangle^K = \sum_{\{n\}} \langle 0_+ \mid \{n\}\rangle^{K_1} \langle \{n\} \mid 0_-\rangle^{K_2}. \qquad (2.10)$$

Чтобы получить из этой формулы явное выражение для вакуумной амплитуды

$$\langle 0_+ \mid 0_-\rangle^K = \langle 0_+ \mid 0_-\rangle^{K_1} \exp\left[\sum_p iK^*_{1p} iK_{2p}\right] \langle 0_+ \mid 0_-\rangle^{K_2}, \qquad (2.11)$$

достаточно обратиться к разложению экспоненциальной функции

$$\exp\left[\sum_p iK^*_{1p} iK_{2p}\right] = \prod_p \exp\left[iK^*_{1p} iK_{2p}\right] =$$

$$= \prod_p \sum_{n_p=0} \frac{(iK^*_{1p})^{n_p}}{(n_p!)^{1/2}} \frac{(iK_{2p})^{n_p}}{(n_p!)^{1/2}}. \qquad (2.12)$$

Это позволяет нам провести необходимое отождествление членов разложения:

$$\langle \{n\} \mid 0_-\rangle^K = \langle 0_+ \mid 0_-\rangle^K \prod_p \frac{(iK_p)^{n_p}}{(n_p!)^{1/2}}, \quad \langle 0_+ \mid \{n\}\rangle^K = \langle 0_+ \mid 0_-\rangle^K \prod_p \frac{(iK^*_p)^{n_p}}{(n_p!)^{1/2}}, \qquad (2.13)$$

где многочастичное состояние описывается набором целых чисел $\{n_p\}$. Очевидно, что числа n_p следует интерпретировать как числа заполнения, связанные с соответствующими характеристиками частиц. Это подтверждается и законом изменения многочастичных состояний при трансляции источника $K(x) \to K(x + X)$, который дает

$$\langle \{n\} \mid 0_-\rangle^K \to e^{iPX} \langle \{n\} \mid 0_-\rangle^K, \qquad \langle 0_+ \mid \{n\}\rangle^K \to \langle 0_+ \mid \{n\}\rangle^K e^{-iPX}. \qquad (2.14)$$

Полученное таким образом выражение для полной энергии-импульса

$$P^\mu = \sum_p n_p p^\mu \qquad (2.15)$$

указывает на аддитивность вкладов частиц, присутствующих в рассматриваемом состоянии.

Амплитуды вероятностей должны удовлетворять следующему условию полноты:

$$\sum_{\{n\}} |\langle \{n\} \mid 0_-\rangle^K|^2 = |\langle 0_+ \mid 0_-\rangle^K|^2 \exp\left[\sum_p |K_p|^2\right] = 1: \qquad (2.16)$$

и действительно,

$$|\langle 0_+ | 0_- \rangle^K|^2 = \exp\left[- \int (dx)(dx') K(x) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\right) \Delta_+(x-x') K(x') \right] =$$
$$= \exp\left[- \sum_p |K_p|^2 \right]. \tag{2.17}$$

Отметим, что вакуумная амплитуда использовалась выше двояким образом. Из анализа причинной упорядоченности следует, что относительные многочастичные амплитуды имеют вид

$$\frac{\langle \{n\} | 0_- \rangle^K}{\langle 0_+ | 0_- \rangle^K} = \prod_p \frac{(iK_p)^{n_p}}{(n_p!)^{1/2}}, \tag{2.18}$$

а из условия полноты многочастичных состояний вытекает, что

$$\frac{1}{|\langle 0_+ | 0_- \rangle^K|^2} = \exp\left[\sum_p |K_p|^2 \right]. \tag{2.19}$$

Следовательно, вакуумную амплитуду можно брать непосредственно в качестве амплитуды вероятности, не вступая при этом ни в какие противоречия.

Обобщение на случай пары вещественных источников или эквивалентного ему комплексного источника не составляет никакого труда. Для этого нужно суммирование по импульсам в разложении (2.12) дополнить суммированием по двум сортам частиц и результаты представить в виде соотношений, аналогичных следующему:

$$\langle \{n\} | 0_- \rangle^K = \langle 0_+ | 0_- \rangle^K \prod_p \frac{(K_{p+})^{n_{p+}}}{(n_{p+}!)^{1/2}} \frac{(K_{p-})^{n_{p-}}}{(n_{p-}!)^{1/2}} =$$
$$= \langle 0_+ | 0_- \rangle^K \prod_{p,\,q} \frac{(K_{p,\,q})^{n_{pq}}}{(n_{pq}!)^{1/2}}, \tag{2.20}$$

где $q = \pm 1$ — зарядовый индекс, различающий частицу и античастицу. При комбинированном преобразовании трансляции источника и сдвига фазы эти состояния изменяются по закону

$$\langle \{n\} 0_- \rangle^K \to e^{iQ\varphi} e^{iPX} \langle \{n\} | 0_- \rangle^K, \quad \langle 0_+ | \{n\} \rangle^K \to \langle 0_+ | \{n\} \rangle^K e^{-iQ\varphi} e^{-iPX}, \tag{2.21}$$

где величины

$$Q = \sum_{p,\,q} n_{pq} q, \qquad P^\mu = \sum_{p,\,q} n_{pq} p^\mu \tag{2.22}$$

показывают нам, какова структура многочастичного состояния $\{n\}$ с точки зрения его полных заряда и энергии-импульса.

Состояния отдельных частиц можно описывать не только посредством импульсных переменных. Для этой цели можно использовать и угловой момент. Переход к соответствующим обозначениям производится путем преобразования

$$K_p = \sum_{l,\, m} (d\Omega)^{1/2} Y_{lm}(\mathbf{p}) K_{p^0 lm}, \tag{2.23}$$

где

$$K_{p^0 lm} = \left[\frac{|\mathbf{p}|\, dp^0}{\pi}\right]^{1/2} i^{-l} \int (dx)\, e^{ip^0 x^0} j_l(|\mathbf{p}|\,|\mathbf{x}|)\, Y^*_{lm}(\mathbf{x}) K(x),$$

$$|\mathbf{p}| = [(p^0)^2 - m^2]^{1/2}, \tag{2.24}$$

а j_l и Y_{lm} — обычные символы, принятые для обозначения сферических бесселевых функций и сферических гармоник. Непрерывная ориентация вектора импульса, или, точнее, плотное множество дискретных значений внутри бесконечно малых телесных углов $d\Omega$, заменяется теперь дискретным набором квантовых чисел углового момента

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad m = l,\ l-1,\ \ldots,\ -l. \tag{2.25}$$

Таким образом,

$$\sum_p K^*_{1\mathbf{p}} K_{2p} = \sum_{p^0 l m} K^*_{1p^0 lm} K_{2p^0 lm}, \tag{2.26}$$

и, чтобы получить описание этих новых многочастичных состояний, достаточно изменить индексы в соотношениях (2.13). Обобщение на случай комплексного источника оказывается столь же простым. В силу того, что зависимость величины $Y_{lm}(\mathbf{x})$ от азимутального угла имеет вид $\exp(im\varphi)$, поворот источника

$$K(\ldots, \varphi) \to K(\ldots, \varphi + \alpha) \tag{2.27}$$

приводит к замене

$$K_{p^0 lm} \to e^{im\alpha} K_{p^0 lm}, \tag{2.28}$$

и производимое при этом преобразование

$$\langle \{n\} | 0_- \rangle^K \to e^{iM\alpha} \langle \{n\} | 0_- \rangle^K \tag{2.29}$$

показывает, что полное магнитное квантовое число многочастичного состояния дается равенством

$$M = \sum_{p^0,\, l,\, m} n_{p^0 lm} m. \tag{2.30}$$

Теперь TCP-соотношение между испусканием и поглощением в случае вещественных источников принимает вид

$$K_{p^0 lm} \leftrightarrow (-1)^m K^*_{p^0,\, l,\, -m}. \tag{2.31}$$

В случае же комплексных источников его следует дополнить обращением знака заряда.

Возможно также и аксиальное описание, переход к которому осуществляется посредством разложения

$$K_p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\varphi}{2\pi}\right)^{1/2} e^{im\varphi} K_{p_+p_-m}, \tag{2.32}$$

где

$$K_{p_+p_-m} = \frac{1}{4\pi} (dp_+ dp_-)^{1/2} i^{-m} \int (dx)\, e^{i(p_+x_- + p_-x_+)} J_m(|\mathbf{p}_\perp| |\mathbf{x}_\perp|)\, e^{-im\varphi} K(x). \tag{2.33}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$p_\pm = p^0 \pm p_3, \qquad x_\pm = \frac{1}{2}(x_0 \pm x_3), \qquad |\mathbf{p}_\perp| = (p_+p_- - m^2)^{1/2}, \tag{2.34}$$

а $\mathbf{x}_\perp$ — проекция радиуса-вектора на плоскость, перпендикулярную третьей оси, и φ — азимутальный угол, соответствующий этой оси. Теперь TCP-преобразование имеет вид

$$K_{p_+p_-m} \leftrightarrow (-1)^m K^*_{p_+p_--m}. \tag{2.35}$$

Обмен причинно-упорядоченных источников частицами можно естественным образом описывать также на пространственно-временном языке. Непосредственное разложение в степенной ряд дает

$$\exp\left[i \int (dx)(dx') K_1(x) \Delta_+(x-x') K_2(x')\right] =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int \frac{(dx_1)\dots(dx_n)}{n!} \frac{(dx_1')\dots(dx_n')}{n!} \times$$

$$\times K_1(x_1)\dots K_1(x_n)\,[\mathrm{perm}_{(n)} \Delta_+(x_i - x_j')]\, K_2(x_1')\dots K_2(x_n'), \tag{2.36}$$

где величина

$$\mathrm{perm}_{(n)} \Delta_+(x_i - x_j') = \sum \Delta_+(x_1 - x_{j_1}')\dots \Delta_x(x_n - x_{j_n}') \tag{2.37}$$

(суммирование по всем $n!$ перестановкам) есть так называемый «перманент», т. е. определитель без знаков минус. Здесь наряду с эффективными источниками n-частичного испускания и поглощения явным образом выделена функция, соответствующая распространению n невзаимодействующих частиц. Она симметризована по пространственно-временным координатам, и совместно с отсутствием ограничений на числа заполнения $n_p = 0, 1, 2, \dots$ это отвечает тому, что мы имеем дело с частицами, подчиняющимися статистике Бозе — Эйнштейна.

Все известные нам свойства этой статистики выявляются также, когда мы ставим вопрос, чему равны амплитуды вероятностей общего вида $\langle\{n\} \mid \{n\}'\rangle^K$. Ответить на него, значит сказать, каким образом влияют на эффективность испускания и поглощения частиц источником уже имеющиеся частицы. Рассмотрим следующую причинно-упорядоченную структуру. Пусть сначала действует сильный источник $K_2(x)$, порождающий частицы, затем на эти частицы оказывает воздействие зондирующий источник $K_0(x)$ и, наконец, частицы поглощаются детектирующим источником $K_1(x)$:

$$K(x) = K_1(x) + K_0(x) + K_2(x). \tag{2.38}$$

Ограничиваясь случаем вещественных источников, напишем

$$\langle 0_+ | 0_-\rangle^K = \langle 0_+ | 0_-\rangle^{K_1+K_2} \exp\left[i \int (dx)(dx') K_1(x) \Delta_+(x-x') K_0(x') + \right.$$
$$\left. + i \int (dx)(dx') K_0(x) \Delta_+(x-x') K_2(x')\right] \langle 0_+ | 0_-\rangle^{K_0}. \tag{2.39}$$

Причинную последовательность можно иначе выразить соотношением

$$\langle 0_+ | 0_-\rangle^K = [\sum_{\{n\}} \langle 0_+ | \{n\}\rangle^{K_1} \langle\{n\} | 0_-\rangle^{K_2}] \exp[\sum_p (iK_{1p}^* iK_{0p} + iK_{0p}^* iK_{2p})] \times$$
$$\times \langle 0_+ | 0_-\rangle^{K_0} = \sum_{\{n\},\{n'\}} \langle 0_+ | \{n\}\rangle^{K_1} \langle\{n\}_+ | \{n'\}_-\rangle^{K_0} \langle\{n'\} | 0_-\rangle^{K_2}, \tag{2.40}$$

из которого можно получить необходимые нам амплитуды вероятностей, относящиеся к зондирующему источнику K_0. Рассмотрим сначала слабый зондирующий источник и в соответствии с этим оставим лишь члены, линейные по K_0. Тогда, поскольку

$$iK_p \langle\{n\} | 0_-\rangle^K = (n_p + 1)^{1/2} \langle\{n + 1_p\} | 0_-\rangle^K, \tag{2.41}$$
$$\langle 0_+ | \{n\}\rangle^K iK_p^* = \langle 0_+ | \{n + 1_p\}\rangle^K (n_p + 1)^{1/2},$$

что сразу же указывает на мономиальность этих амплитуд вероятностей, мы получаем

$$\langle\{n + 1_p\}_+ | \{n\}_-\rangle^K \approx (n_p + 1)^{1/2} iK_p, \tag{2.42}$$
$$\langle\{n - 1_p\}_+ | \{n\}_-\rangle^K \approx (n_p)^{1/2} iK_p^*.$$

Эти равенства служат обобщением исходных определений (1.28) при сохранении условия слабости источника. В частности, выражение для вероятности испускания еще одной частицы

$$|\langle\{n + 1_p\}_+ | \langle n\}_-\rangle^K|^2 = (n_p + 1) \, | K_p |^2 \tag{2.43}$$

указывает на наличие дополнительного вынужденного испускания, характерного для статистики Бозе — Эйнштейна.

Чтобы получить некоторое предварительное представление о структуре амплитуд переходов общего вида, построим амплитуду вероятности $\langle\{n_+\} | \{n_-\}\rangle^K$, в которую входят одинаковые начальная и конечная конфигурации и которая в этом смысле служит обобщением вакуумной амплитуды. Чтобы выделить эту амплитуду, в разложении следует оставить лишь члены с одинаковыми степенями K_{1p}^* и K_{2p}:

$$\exp[\sum_p (iK_{1p}^* iK_{0p} + iK_{0p}^* iK_{2p})] \to \prod_p [1 + iK_{1p}^* iK_{0p} iK_{0p}^* iK_{2p} + \ldots]. \quad (2.44)$$

Здесь можно добиться весьма полезного упрощения, если заметить, что при достаточно малом $d\omega_p$ высшие члены данного разложения пренебрежимо малы. При этом рассматривается только зависимость от зондирующего источника:

$$|K_{0p}|^2 \sim d\omega_p, \qquad (|K_{0p}|^2)^2 \sim (d\omega_p)^2, \ \ldots .$$

Заметим также, что для каждой отдельно взятой импульсной ячейки справедливы независимые соотношения

$$\sum_{\{n\}} \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{K_1} iK_{1p}^* iK_{2p} \langle \{n\} | 0_- \rangle^{K_2} = \sum_{\{n\}} \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{K_1} n_p \langle \{n\} | 0_- \rangle^{K_2}. \quad (2.45)$$

Тогда для интересующих нас процессов

$$\exp[\sum_p (iK_{1p}^* iK_{0p} + iK_{0p}^* iK_{2p})] \to \prod_p [1 + iK_{0p}^* n_p iK_{0p}] = $$
$$= \exp[\sum_p iK_{0p}^* n_p iK_{0p}], \quad (2.46)$$

и мы приходим к выводу, что

$$\langle \{n\}_+ | \{n\}_- \rangle^K = \exp\left[\frac{i}{2} \int (dx)(dx') K(x) \Delta_{\{n\}+}(x-x') K(x')\right], \quad (2.47)$$

$$\Delta_{\{n\}+}(x-x') = \Delta_+(x-x') + i \int d\omega_p n_p [e^{ip(x-x')} + e^{-ip(x-x')}]. \quad (2.48)$$

Последнее слагаемое мы представили в такой форме с тем, чтобы сохранить симметрию по x и x'. Причинные функции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & x^0 > x^{0\prime}: \\ & \Delta_{\{n\}+}(x-x') = i \int d\omega_p [(n_p + 1) e^{ip(x-x')} + n_p e^{-ip(x-x')}], \\ & x^0 < x^{0\prime}: \\ & \Delta_{\{n\}+}(x-x') = i \int d\omega_p [n_p e^{ip(x-x')} + (n_p + 1) e^{-ip(x-x')}]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Заметим, что в случае $K = 0$ амплитуда вероятности $\langle \{n\}_+ | \{n_-\} \rangle^K$ сводится к единице. Это означает, что начальное и конечное многочастичные состояния относятся к одной и той же времени- или пространственно-подобной поверхности, как и должно быть, коль скоро зондирующий источник в значительной мере локализован.

При отыскании амплитуд вероятностей с несовпадающими начальным и конечным состояниями мы не будем возвращаться к общей конструкции (2.40), а воспользуемся непосредственно величиной $\langle\{n\}_+|\{n\}_-\rangle^K$, обращаясь с ней примерно так же, как с вакуумной амплитудой. Итак, рассмотрим причинно-упорядоченную пару источников

$$K(x) = K_1(x) + K_2(x), \tag{2.50}$$

для которой имеем

$$\langle\{n\}_+|\{n_-\}\rangle^K = \langle\{n\}_+|\{n\}_-\rangle^{K_1}\times$$
$$\times\exp\left[i\int(dx)(dx')K_1(x)\Delta_{\{n\}+}(x-x')K_2(x')\right]\langle\{n\}_+|\{n\}_-\rangle^{K_2} =$$
$$= \sum_{\{n'\}}\langle\{n\}_+|\{n'\}_-\rangle^{K_1}\langle\{n'\}_+|\{n\}_-\rangle^{K_2}. \tag{2.51}$$

Связь между отдельными компонентами источника устанавливается теперь соотношением

$$\exp\left[i\int(dx)(dx')K_1(x)\Delta_{\{n\}+}(x-x')K_2(x')\right] =$$
$$= \exp\left[\sum_p\{iK_{1p}^*(n_p+1)iK_{2p}+iK_{1p}n_piK_{2p}^*\}\right] =$$
$$= \prod_p[1+iK_{1p}^*(n_p+1)iK_{2p}+iK_{1p}n_piK_{2p}^*+\ldots]. \tag{2.52}$$

Здесь отдельные члены, отвечающие определенному импульсу, описывают разные процессы: когда число частиц не изменяется или испускается одна дополнительная частица, или поглощается исходная частица. При достаточно малом $d\omega_p$ члены высших степеней, которые описывают более сложные процессы с участием нескольких частиц, пренебрежимо малы. Например, вероятность испускания двух частиц с импульсом, лежащим в интервале $d\omega_p$, пропорциональна $(d\omega_p)^2$. Однако это упрощение, представляющееся внешне совершенно безобидным, требует все же определенных комментариев. Если пространственные интервалы чрезвычайно велики, то благодаря наличию экспоненты $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$ все выражения будут крайне чувствительными к изменениям импульса $\mathbf{p}$ и величину $d\omega_p$ уже нельзя будет рассматривать просто как бесконечно малую. Чтобы это было яснее с точки зрения физики, вспомним, что мы имеем дело с пучком частиц, взаимодействующих с зондирующим источником. Указанное выше приближение будет законным в том случае, когда этот источник находится в глубине пучка, где наверняка нет существенной зависимости от его положения. Но оно не будет справедливым, если зондирующий источник расположен вне границ пучка или вблизи них. Все это должно напомнить нам, что за любым импульсным описанием кроется рассмотрение причинной последовательности в пространстве-времени.

С учетом сказанного найдем теперь, пользуясь соотношением (2.52), амплитуды вероятностей тех процессов, в которых рождается или уничтожается одна частица. Результат таков:

$$\begin{aligned}\frac{\langle\{n+1_e-1_a\}_+\,|\,\{n\}_-\rangle^K}{\langle\{n\}_+\,|\,\{n\}_-\rangle^K}&=\prod_e\,[(n_p+1)^{1/2}\,iK_p]\prod_a\,[n_p^{1/2}iK_p^*],\\ \frac{\langle\{n\}_+\,|\,\{n+1_a-1_e\}_-\rangle^K}{\langle\{n\}_+\,|\,\{n\}_-\rangle^K}&=\prod_e\,[n_p^{1/2}iK_p]\prod_a\,[(n_p+1)^{1/2}\,iK_p^*],\end{aligned}\qquad(2.53)$$

где произведения берутся по всевозможным испускаемым (e) или поглощаемым (a) частицам. Поскольку $d\omega_p$ — бесконечно малая величина, можно считать, что различие между амплитудами $\langle\{n+1_p\}_+\,|\{n+1_p\}_-\rangle^K$ и $\langle\{n\}_+\,|\{n\}_-\rangle^K$ пренебрежимо мало, и тогда два приведенных равенства будут эквивалентными. Теперь мы можем провести проверку на основе двух разных способов использования амплитуд вероятностей. Из условия полноты конечных или начальных состояний мы заключаем, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\langle\{n\}_+\,|\,\{n_-\}\rangle^K|^2}&=\prod_p\,[1+(n_p+1)\,|\,K_p\,|^2+n_p\,|\,K_p\,|^2]=\\ &=\exp\Big[\sum_p\,(2n_p+1)\,|\,K_p\,|^2\Big],\end{aligned}\qquad(2.54)$$

тогда как прямые вычисления дают

$$|\langle\{n\}_+\,|\,\{n\}_-\rangle^K|^2=\exp\Big[-\int(dx)\,(dx')\,K(x)\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{i}\,\Delta_{\{n\}+}(x-x')\,K(x')\Big]\qquad(2.55)$$

и

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{i}\,\Delta_{\{n\}+}(x-x')=\mathrm{Re}\int d\omega_p\,(2n_p+1)\,e^{ip(x-x')}.\qquad(2.56)$$

Таким образом, проверка говорит об отсутствии противоречий.

Обобщить сказанное на случай комплексных источников и заряженных частиц очень просто — достаточно кроме импульса p ввести зарядовый индекс q. Отметим лишь одно обстоятельство. При построении амплитуды вероятности $\langle\{n\}_+\,|\{n\}_-\rangle^K$ у нас, так же как в формуле (2.46), появляется множитель

$$\exp\,[\sum_{p,\,q}\,iK_{0pq}^*n_{pq}iK_{0pq}]\qquad(2.57)$$

и в результате

$$\langle\{n\}_+\,|\,\{n\}_-\rangle^K=\exp\Big[i\int(dx)\,(dx')\,K^*(x)\,\Delta_{\{n\}+}(x-x')\,K(x')\Big].\qquad(2.58)$$

Теперь, однако, функция распространения $\Delta_{\{n\}+}(x-x')$ имеет следующий смысл:

$$\Delta_{\{n\}+}(x-x') = \Delta_+(x-x') + i\int d\omega_p\,[n_{p+}e^{ip(x-x')} + n_{p-}e^{-ip(x-x')}], \tag{2.59}$$

и она больше уже не обязана быть симметричной по x и x'. По-прежнему имеет место TCP-симметрия, в которой преобразование $x^\mu \to -x^\mu$ сочетается с обращением знака заряда

$$n_{p+} \leftrightarrow n_{p-}. \tag{2.60}$$

В явном виде причинная структура функции распространения дается выражениями

$$\begin{aligned} &x^0 > x^{0\prime}: \\ &\qquad i\int d\omega_p\,[(n_{p+}+1)\,e^{ip(x-x')} + n_{p-}e^{-ip(x-x')}], \\ &x^0 < x^{0\prime}: \\ &\qquad i\int d\omega_p\,[n_{p+}e^{ip(x-x')} + (n_{p-}+1)\,e^{-ip(x-x')}]. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Заметим, что эта функция будет симметричной по x и x', если при всех импульсах падающий пучок нейтрален, т. е. при $n_{p+} = n_{p-}$. Только в этом случае можно ввести вещественные источники $K_{(1)}$ и $K_{(2)}$ и связать с ними два независимых типа частиц.

Мы видели, каким образом принцип причинности и принцип равноправности точек пространства-времени выступают в качестве конструктивных принципов. Кроме того, выше проверялось физическое требование полноты, или унитарности; оно не является независимым принципом.

Сейчас мы исследуем эту связь более подробно, но сначала вернемся к вакуумной амплитуде для вещественных источников и рассмотрим комплексно-сопряженную ей величину

$$\begin{aligned} \langle 0_+|0_-\rangle^{K*} &= \langle 0_-|0_+\rangle^{K} = \\ &= \exp\left[-\frac{i}{2}\int (dx)\,(dx')\,K(x)\,\Delta_-(x-x')\,K(x')\right], \end{aligned} \tag{2.62}$$

где

$$\Delta_-(x-x') = \Delta_+(x-x')^*. \tag{2.63}$$

Чтобы получить единое представление для функции распространения $\Delta_\pm$, введем положительно- и отрицательно-частотные функции $\Delta^{(\pm)}$:

$$\Delta^{(+)}(x-x') = \int d\omega_p e^{ip(x-x')}, \qquad \Delta^{(-)}(x-x') = \int d\omega_p e^{-ip(x-x')}, \tag{2.64}$$

определенные всюду и связанные друг с другом соотношениями

$$\Delta^{(-)}(x-x') = \Delta^{(+)}(x'-x) = \Delta^{(+)}(x-x')^*. \tag{2.65}$$

Тогда наши две функции распространения будут записываться так:

$$\begin{aligned} \Delta_+(x-x') &= \begin{cases} x^0 > x^{0\prime}: & i\Delta^{(+)}(x-x'), \\ x^0 < x^{0\prime}: & i\Delta^{(-)}(x-x'); \end{cases} \\ \Delta_-(x-x') &= \begin{cases} x^0 > x^{0\prime}: & -i\Delta^{(-)}(x-x'), \\ x^0 < x^{0\prime}: & -i\Delta^{(+)}(x-x'). \end{cases} \end{aligned} \tag{2.66}$$

Заметим, что во всей рассматриваемой области выполняется соотношение

$$\Delta_+(x-x') - \Delta_-(x-x') = i\,[\Delta^{(+)}(x-x') + \Delta^{(-)}(x-x')]. \tag{2.67}$$

Интеграл по импульсам

$$\Delta_-(x-x') = \\ = -i\int d\omega_p \exp\,[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + ip^0\,|\,x^0 - x^{0\prime}\,|], \tag{2.68}$$

полученный из интеграла (1.45) путем комплексного сопряжения, дает ту же евклидову функцию, что и раньше,

$$\Delta_-(x-x') \to \Delta_E(x-x'), \tag{2.69}$$

при подстановке

$$-i\,|x^0 - x^{0\prime}| \to |x_4 - x_4'|. \tag{2.70}$$

Тогда мы будем иметь евклидово выражение

$$\langle 0_-\,|\,0_+\rangle^K \to \exp\left[-\frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,K(x)\,\Delta(x-x')\,K(x')\right]_E, \tag{2.71}$$

совпадающее с тем, которое получается из амплитуды $\langle 0_+\,|\,0_-\rangle^K$ в результате обобщения равенства (1.57) на случай сильного источника. Евклидов аналог вакуумной амплитуды представляет собой вещественное число, лежащее в интервале от 0 до 1. Чтобы вернуться к вакуумной амплитуде $\langle 0_-\,|\,0_+\rangle^K$, достаточно произвести подстановку

$$x_4 \to \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]x^0, \qquad p_4 \to \exp\left[+i\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]p_0, \\ \varepsilon \to +0, \tag{2.72}$$

что, кстати, приводит к следующему инвариантному представлению:

$$\Delta_-(x-x') = \int \frac{dp}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2+i\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon\to+0}. \tag{2.73}$$

Из существования единого евклидова описания вытекает еще одна связь между вакуумными амплитудами, комплексно-сопряженными друг другу. Рассматривая евклидово представление в качестве некоторого промежуточного этапа, мы будем иметь

$$\begin{gathered}
\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]x^0 \to x_4 \to \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]x^0: \\
(1-i\varepsilon)\,x^0 \to -(1+i\varepsilon)\,x^0, \\
\exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]p_0 \to p_4 \to \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]p_0: \\
(1+i\varepsilon)\,p_0 \to -(1-i\varepsilon)\,p_0,
\end{gathered} \tag{2.74}$$

в результате чего получаем

$$\Delta_+(x-x') \to -\Delta_-(x-x'), \qquad \langle 0_+ | 0_-\rangle^K \to \langle 0_- | 0_+\rangle^K. \tag{2.75}$$

Непосредственно в этом убедиться можно, заметив, что

$$p^2 - i\varepsilon \to p^2 + i\varepsilon, \qquad x^2 + i\varepsilon \to x^2 - i\varepsilon, \qquad \varepsilon \to +0, \tag{2.76}$$

где масштаб для ε, как и всегда в таких случаях, соответствующим образом изменен. Следует вспомнить также, что при указанном преобразовании характер упорядоченности переменных не изменяется. Следовательно, пределы интегрирования останутся прежними и

$$\int dp \to -\int dp, \qquad \int dx \to -\int dx, \tag{2.77}$$

между тем как

$$|x^0 - x^{0\prime}| \to -|x^0 - x^{0\prime}|, \tag{2.78}$$

что несколько иначе подтверждает указанные выше преобразования.

Теперь, пользуясь причинной структурой теории, мы приведем полный вывод условия унитарности. Конечно, он будет сделан для физической системы весьма частного вида, но совершенно ясно, что такого рода вывод носит общий характер. Будет удобней изменить индексы, отражающие причинную упорядоченность, и обозначить K_1 и K_2 через $K_{(-)}$ и $K_{(+)}$. (Нам могут возразить, что знаки $\pm$ несут и другую смысловую нагрузку, но, как мы увидим, все полностью согласуется с обозначениями $\Delta_\pm$.) Пусть T — момент времени, расположенный между пространственно-временными областями, которые определяются двумя компонентами источника. Для интервала $x^0 > T$ введем новую временную координату, совершив отражение относительно T:

$$x^0 - T = T - \bar{x}^0, \tag{2.79}$$

а затем преобразуем этот промежуток времени так, как только что говорилось:

$$x_0 - T \to e^{-i\pi}(T - \bar{x}^0). \tag{2.80}$$

Непосредственным результатом такого преобразования будет замена x^0 на $\bar{x}^0$; момент $\bar{x}^0$ наступает настолько раньше T, насколько исходный момент времени наступает позже T. До указанного преобразования вакуумная амплитуда имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}\langle 0_+ | 0_- \rangle^K = \exp\Big[\frac{i}{2}\int (dx)(dx') K_{(-)}(x)\Delta_+(x-x')K_{(-)}(x') + \\ + \frac{i}{2}\int (dx)(dx') K_{(+)}(x)\Delta_+(x-x')K_{(+)}(x') + \\ + i\int (dx)(dx') K_{(-)}(x)\, i\Delta^{(+)}(x-x')K_{(+)}(x')\Big],\end{aligned} \tag{2.81}$$

где появление последнего слагаемого свидетельствует о причинной упорядоченности. Когда совершается преобразование, квадратичный по $K_{(+)}$ член по-прежнему не будет ведать, что будет твориться потом, квадратичный по $K_{(-)}$ член трансформируется известным образом ($\Delta_+ \to -\Delta_-$), не затрагивая других слагаемых, а у последнего члена появляется лишь знак минус благодаря замене

$$\int dx \to -\int dx, \tag{2.82}$$

обусловленной наличием множителя $e^{-i\pi}$, который не компенсируется отражением (чтобы при таком преобразовании сохранялась положительность меры, необходимо переставить пределы интегрирования). В результате получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}\langle 0_+ | 0_- \rangle^K \to \exp\Big[-\frac{i}{2}\int (dx)(dx') K_{(-)}(x)\Delta_-(x-x')K_{(-)}(x') + \\ + \frac{i}{2}\int (dx)(dx') K_{(+)}(x)\Delta_+(x-x')K_{(+)}(x') + \\ + \int (dx)(dx')(-i) K_{(-)}(x)\Delta^{(+)}(x-x')\, iK_{(+)}(x')\Big],\end{aligned} \tag{2.83}$$

в которое не входит T — произвольный момент времени после прекращения действия обоих источников. Физический смысл этой комбинации становится ясным из разложения

$$\begin{aligned}\exp\Big[\int (dx)(dx')(-i)K_{(-)}(x)\Delta^{(+)}(x-x')K_{(+)}(x')\Big] = \\ = \exp\Big[\sum_p (iK_{(-)p})^*(iK_{(+)p})\Big] = \\ = \prod_p \sum_{n_p=0} \frac{[(iK_{(-)p})]^{*n_p}}{(n_p!)^{1/2}} \frac{[(iK_{(+)p})]^{n_p}}{(n_p!)^{1/2}},\end{aligned} \tag{2.84}$$

ибо, пользуясь тем, что

$$\langle\{n\}\,|\,0_-\rangle^{K*} = \langle 0_-\,|\,\{n\}\rangle^{K}, \tag{2.85}$$

мы получим

$$\langle 0_-\,|\,0_+\rangle^{K_{(-)}} \exp\left[\int (dx)\,(dx')\,(-i)\,K_{(-)}(x)\,\Delta^{(+)}(x-x')\,iK_{(+)}(x')\right]\times$$
$$\times\langle 0_+\,|\,0_-\rangle^{K_{(+)}} = \sum_{\{n\}} \langle 0_-\,|\,\{n\}\rangle^{K_{(-)}}\langle\{n\}\,|\,0_-\rangle^{K_{(+)}} \equiv \langle 0_-\,|\,0_-\rangle^{K_{(-)},\,K_{(+)}}. \tag{2.86}$$

Как явствует из обозначений, мы получаем, что система развивается во времени из начального вакуумного состояния под действием источника $K_{(+)}(x)$, а затем возвращается в то же начальное состояние при наличии источника $K_{(-)}(x)$. Не следует думать, конечно, что сама физическая система движется вспять во времени,— обращается причинная последовательность сравниваемых состояний. Если оба источника одинаковы, то мы должны вернуться к исходному состоянию, т. е. равенство

$$K_{(-)}(x) = K_{(+)}(x) = K(x) \tag{2.87}$$

означает, что выполняется условие полноты, или унитарности:

$$\langle 0_-\,|\,0_-\rangle^{K,\,K} = \sum_{\{n\}} \langle 0_-\,|\,\{n\}\rangle^{K}\langle\{n\}\,|\,0_-\rangle^{K} = 1. \tag{2.88}$$

Соответственно экспоненциальной форме выражения (2.83) оно выполняется при условии

$$i\,[\Delta_+(x-x') - \Delta_-(x-x')] + \Delta^{(+)}(x-x') + \Delta^{(-)}(x-x') = 0, \tag{2.89}$$

где последние слагаемые представлены в такой форме, которая обеспечивает необходимую симметрию по x и x'. Мы узнаем в этом равенстве тождество (2.67).

Полную формулировку условия унитарности мы получим, рассматривая порождение источниками $K_{(\pm)}$ произвольных многочастичных состояний. Запишем

$$K_{(+)} = K + K_2, \qquad K_{(-)} = K + K_{2'}, \tag{2.90}$$

где действие источников K_2 и $K_{2'}$ предшествует действию источника K, и введем соответствующее причинное разложение:

$$\begin{aligned} \langle\{n\}\,|\,0_-\rangle^{K_{(+)}} &= \sum_{\{n''\}} \langle\{n\}_+\,|\,\{n''\}_-\rangle^{K}\langle\{n''\}\,|\,0_-\rangle^{K_2}, \\ \langle 0_-\,|\,\{n\}\rangle^{K_{(-)}} &= \sum_{\{n'\}} \langle 0_-\,|\,\{n'\}\rangle^{K_{2'}}\langle\{n'\}_-\,|\,\{n\}_+\rangle^{K}. \end{aligned} \tag{2.91}$$

Нам нужно убедиться, что в соотношении (2.86) источник $K(x)$ в действительности исчезает, а остается лишь

$$\langle 0_-\,|\,0_-\rangle^{K_{2'},\,K_2} = \sum_{\{n'\}} \langle 0_-\,|\,\{n'\}\rangle^{K_{2'}}\langle\{n'\}\,|\,0_-\rangle^{K_2}, \tag{2.92}$$

поскольку это и означает условие унитарности, отвечающее действию источника K:

$$\sum_{\{n\}} \langle\{n'\}_-|\{n\}_+\rangle^K \langle\{n\}_+|\{n''\}_-\rangle^K = \delta(\{n'\}, \{n''\}). \tag{2.93}$$

Помимо уже использовавшегося соотношения (2.89), для этого следует потребовать, чтобы выполнялось равенство

$$\int (dx)(dx')\,[-iK(x)\,\Delta_-(x-x')\,K_{2'}(x') + iK(x)\,\Delta_+(x-x')\,K_2(x') + K(x)\,\Delta^{(-)}(x-x')\,K_{2'}(x') + K(x)\,\Delta^{(+)}(x-x')\,K_2(x')] = 0. \tag{2.94}$$

Но при рассматриваемых причинных связях $\Delta_- \to -i\Delta^{(-)}$ и $\Delta_+ \to i\Delta^{(+)}$, чем и завершается наша проверка.

Амплитуда вероятности $\langle 0_- \mid 0_-\rangle^{K_{(-)},\, K_{(+)}}$ пригодна и для прямого вычисления различных математических ожиданий. Пусть, например,

$$K_{(-)}(x) = K(x), \qquad K_{(+)}(x) = K(x+X). \tag{2.95}$$

Тогда вместо соотношения (2.88), соответствующего случаю $X = 0$, мы получим

$$\sum_n \langle 0_-|\{n\}\rangle^K e^{iPX} \langle\{n\}|0_-\rangle^K = \langle e^{iPX}\rangle_0^K. \tag{2.96}$$

Эта величина представляет собой математическое ожидание e^{iPX} для состояний, порождаемых из вакуума действием источника K. Поскольку смысл имеет лишь относительный сдвиг двух источников, мы имеем

$$\begin{aligned}\langle e^{iPX}\rangle_0^K &= \exp\left[\int (dx)(dx')\,K(x)\,(\Delta^{(+)}(x-x'+X) - \Delta^{(+)}(x-x'))\,K(x')\right] = \\ &= \exp\left[\int d\omega_p\,(e^{iPX}-1)\,|K(p)|^2\right] = \\ &= \exp\left[\sum_p (e^{iPX}-1)\,|K_p|^2\right].\end{aligned} \tag{2.97}$$

Рассматривая инфинитезимальные смещения, мы получаем соотношение

$$\begin{aligned}\langle P^\mu\rangle_0^K &= \int (dx)(dx')\,K(x)\,\frac{1}{i}\,\partial^\mu\Delta^{(+)}(x-x')\,K(x') = \\ &= \int d\omega_p p^\mu\,|K(p)|^2 = \sum_p p^\mu\,|K_p|^2,\end{aligned} \tag{2.98}$$

или, при очевидном отождествлении отдельных членов, равенство

$$\langle n_p \rangle_0^K = |K_p|^2. \tag{2.99}$$

Полное же число частиц есть

$$N = \sum_p n_p. \tag{2.100}$$

Таким образом, учитывая (2.17), мы приходим к выводу, что среднее значение полного числа порождаемых частиц и вероятность вакуумного перехода связаны простым соотношением

$$|\langle 0_+ | 0_- \rangle^K|^2 = \exp[-\langle N \rangle_0^K]. \tag{2.101}$$

Анализ флуктуаций упрощается, если написать (всевозможные индексы здесь опущены):

$$\begin{aligned} &\langle e^{i(P-\langle P \rangle)X} \rangle = \\ &= \exp\Big[\int (dx)(dx')\, K(x) \big(\Delta^{(+)}(x-x'+X) - \Delta^{(+)}(x-x') - \\ &- X^\mu \partial_\mu \Delta^{(+)}(x-x')\big) K(x')\Big] = \\ &= \exp\Big[\sum_p (e^{ipX} - 1 - ipX)\, |K_p|^2\Big]. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Простейший пример — соотношение

$$\begin{aligned} &\langle (P-\langle P \rangle)_\mu (P - \langle P \rangle)_\nu \rangle = \langle P_\mu P_\nu \rangle - \langle P_\mu \rangle \langle P_\nu \rangle = \\ &= \int (dx)(dx')\, K(x) \frac{1}{i} \partial_\mu \frac{1}{i} \partial_\nu \Delta^{(+)}(x-x') K(x') = \\ &= \sum_p p_\mu p_\nu |K_p|^2, \end{aligned} \tag{2.103}$$

которое также можно интерпретировать как равенство

$$\langle n_p n_{p'} \rangle - \langle n_p \rangle \langle n_{p'} \rangle = \delta_{pp'} \langle n_p \rangle. \tag{2.104}$$

Одним из следствий формулы (2.104) является равенство

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle N \rangle. \tag{2.105}$$

Сведения о полном числе частиц можно получить и непосредственно, рассматривая источники

$$K_{(-)}(x) = K(x), \qquad K_{(+)}(x) = \lambda K(x). \tag{2.106}$$

В соответствии со структурой амплитуд относительных вероятностей мы будем иметь

$$\sum_{\{n\}} \langle 0_- | \{n\}\rangle^K \lambda^N \langle \{n\} | 0_-\rangle^K =$$

$$= \exp\left[(\lambda-1)\int (dx)(dx')\, K(x)\, \Delta^{(+)}(x-x')\, K(x')\right]. \quad (2.107)$$

Дифференцируя по λ и полагая $\lambda=1$, получаем

$$\langle N\rangle_0^K = \int (dx)(dx')\, K(x)\, \Delta^{(+)}(x-x')\, K(x') = \sum_p |K_p|^2. \quad (2.108)$$

Коэффициент при λ^N в сумме (2.107) представляет собой вероятность испускания N частиц без их дальнейшего детектирования. Сравнение со степенным рядом для экспоненты дает нам

$$P(N,\, 0)^K = \frac{\langle N\rangle^N}{N!}\, e^{-\langle N\rangle}. \quad (2.109)$$

Известно, что для этого распределения Пуассона характерна как раз флуктуационная формула (2.105). Все прочие характеристики такого рода получаются из равенства

$$\langle \lambda^N\rangle = \exp\,[(\lambda-1)\,\langle N\rangle] \quad (2.110)$$

путем его дифференцирования по λ:

$$\langle N(N-1)\ \ldots\ (N-\nu+1)\rangle = \langle N\rangle^\nu. \quad (2.111)$$

Чтобы обобщить все сказанное на случай амплитуды $\langle\{n\}_-|\{n\}_-\rangle^{K_{(-)},\,K_{(+)}}$, следует лишь ввести функцию $\Delta_{\{n\}+}(x-x')$ и связанные с ней функции

$$\Delta_{\{n\}-}(x-x') = \Delta_-(x-x') - i\int d\omega_p n_p\,[e^{ip(x-x')} + e^{-ip(x-x')}],$$

$$\Delta_{\{n\}}^{(+)}(x-x') = \int d\omega_p\,[(n_p+1)\,e^{ip(x-x')} + n_p e^{-ip(x-x')}], \quad (2.112)$$

$$\Delta_{\{n\}}^{(-)}(x-x') = \int d\omega_p\,[n_p e^{ip(x-x')} + (n_p+1)\,e^{-ip(x-x')}].$$

Причинные соотношения между этими функциями остаются такими же, как и в случае вакуумных амплитуд, хотя, скажем, функция $\Delta_{\{n\}}^{(+)}(x-x')$ содержит уже не только положительные частоты. Чтобы получить математические ожидания, нужно учесть, что при трансляции $K(x)\to K(x+X)$ амплитуда $\langle\{n'\}_+|\{n\}_-\rangle^K$ приобретает множитель

$$\exp\,[i\,(P\,\{n'\} - P\,\{n\})\,X], \quad (2.113)$$

поскольку теперь в преобразовании участвует как начальное, так и конечное состояние. Для примера приведем следующие два результата:

$$\langle (n'_p - n_p) \rangle_n^K = |K_p|^2 \tag{2.114}$$

и

$$\langle n'_p n'_{p'} \rangle - \langle n'_p \rangle \langle n'_{p'} \rangle = \delta_{pp'} \langle (n'_p - n_p) \rangle (2n_p + 1). \tag{2.115}$$

Точно так же рассматривается случай комплексных источников и заряженных частиц. Для вакуумной амплитуды, описывающей замкнутый во времени цикл, получим выражение

$$\begin{aligned}\langle 0_- | 0_- \rangle^{K_{(-)},\,K_{(+)}} = \exp \Big[&-i \int (dx)(dx') K^*_{(-)}(x) \Delta_-(x-x') K_{(-)}(x') + \\ &+ i \int (dx)(dx') K^*_{(+)}(x) \Delta_+(x-x') K_{(+)}(x') + \\ &+ \int (dx)(dx') K^*_{(-)}(x) \Delta^{(+)}(x-x') K_{(+)}(x') + \\ &+ \int (dx)(dx') K_{(-)}(x) \Delta^{(+)}(x-x') K^*_{(+)}(x') \Big], \end{aligned} \tag{2.116}$$

которое в случае $K_{(-)}(x) = K_{(+)}(x)$ сводится к единице. Выбрав источники в виде

$$K_{(-)}(x) = K(x), \qquad K_{(+)}(x) = \lambda e^{i\varphi} K(x+X) \tag{2.117}$$

с вещественным λ, мы будем иметь

$$\begin{aligned}&\langle \lambda^N e^{iQ\varphi} e^{iPX} \rangle_0^K = \\ &= \exp \Big\{ \int (dx)(dx') K^*(x) [\lambda e^{i\varphi} \Delta^{(+)}(x-x'+X) - \Delta^{(+)}(x-x')] K(x)' + \\ &+ \int (dx)(dx') K(x) [\lambda e^{-i\varphi} \Delta^{(+)}(x-x'+X) - \Delta^{(+)}(x-x')] K^*(x') \Big\} = \\ &= \exp \Big[\sum_{p,\,q} (\lambda e^{iq\varphi} e^{ipX} - 1) |K_{pq}|^2 \Big]. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Можно также ввести полное число положительно и отрицательно заряженных частиц

$$N_+ = \frac{1}{2}(N+Q), \qquad N_- = \frac{1}{2}(N-Q) \tag{2.119}$$

и переписать формулу для математического ожидания в виде

$$\begin{aligned}\langle \lambda_+^{N_+} \lambda_-^{N_-} e^{iPX} \rangle_0^K = \exp \Big[&\sum_p (\lambda_+ e^{ipX} - 1) |K_{p+}|^2 + \\ &+ \sum_p (\lambda_- e^{ipX} - 1) |K_{p-}|^2 \Big]. \end{aligned} \tag{2.120}$$

В соответствии с этим

$$\langle N_+ \rangle_0^K = \sum_p |K_{p+}|^2, \qquad \langle N_- \rangle_0^K = \sum_p |K_{p-}|^2, \tag{2.121}$$

между тем как отдельные вероятности таковы:

$$p(N_+N_-,\ 0)^K = \frac{\langle N_+\rangle^{N_+}}{N_+!}\,\frac{\langle N_-\rangle^{N_-}}{N_-!}\,e^{-\langle N\rangle}. \qquad (2.122)$$

Упрощенная формула, несущая информацию только об электрическом заряде, имеет вид

$$\langle e^{iQ\varphi}\rangle_0^K = \exp\left[(e^{i\varphi}-1)\langle N_+\rangle + (e^{-i\varphi}-1)\langle N_-\rangle\right], \qquad (2.123)$$

откуда мы получаем следующие выражения для отдельных вероятностей:

$$p(Q,\ 0)^K = \left(\frac{\langle N_+\rangle}{\langle N_-\rangle}\right)^{(1/2)Q} I_Q\left[2\left(\langle N_+\rangle\langle N_-\rangle\right)^{1/2}\right]e^{-\langle N\rangle}. \qquad (2.124)$$

(Здесь использовано обычное разложение функции Бесселя в ряд.) Вводя функцию распространения (2.59) и другие связанные с ней функции, мы обобщим формулу (2.116) на случай амплитуды вероятности $\langle \{n\}_- \mid \{n\}_- \rangle^{K_{(-)},K_{(+)}}$.

§ 3. ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1, ФОТОН

Прежде чем рассматривать частицы с произвольным спином, мы остановимся на элементарном анализе некоторых конкретных примеров, чрезвычайно важных с физической точки зрения. В экспоненциальной форме вакуумной амплитуды, установленной в случае бесспиновых частиц, выражается физическая возможность любого числа независимых актов одночастичного испускания и поглощения. Такие пространственно-временные свойства не связаны со значением спина частицы. Он может оказывать влияние лишь на детали, касающиеся структуры источника. Совершенно ясно, что если частицы со спином 0 описываются скалярным источником, то частицам с единичным и более высокими спинами должны отвечать источники, преобразующиеся как векторы или как тензоры различных рангов. Очевидно, что на роль источника, описывающего частицы с единичным спином, может претендовать векторный источник, который мы будем обозначать через $J^\mu(x)$. Правда, здесь возможны возражения. У такого источника четыре компоненты, тогда как с тремя спиновыми состояниями, возможными в случае частицы ненулевой массы, следовало бы ассоциировать три независимых источника. Это означает, очевидно, что $J^\mu(x)$ представляет собой некоторую смесь источника частиц с единичным спином и источника бесспиновых частиц,— такая ситуация соответствует тому, что путем дифференцирования мы можем образовать скалярную функцию $\partial_\mu J^\mu(x)$. Имеется и другое серьезное возражение, физического характера. Если ограничиться лишь заменой вещественного скалярного источника на вещественный векторный источник $J^\mu(x)$:

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = \exp\left[\frac{i}{2}\int (dx)(dx')\, J^\mu(x)\,\Delta_+(x-x')\,J_\mu(x')\right], \qquad (3.1)$$

то мы получим

$$|\langle 0_+ | 0_- \rangle^J|^2 = \exp\left[-\int d\omega_p J^\mu(p)^* J_\mu(p)\right], \qquad (3.2)$$

и нет никакой гарантии, что эта вероятность будет меньше единицы, поскольку величина

$$J^\mu(p)^* J_\mu(p) = |\mathbf{J}(p)|^2 - |J^0(p)|^2 \qquad (3.3)$$

может иметь любой знак.

Оба возражения отпадают, если для частицы с массой $m \neq 0$ принять следующую инвариантную структуру:

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = \exp\left[\frac{i}{2}\int (dx)(dx')\,\big(J^\mu(x)\,\Delta_+(x-x')\,J_\mu(x') + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{m^2}\,\partial_\mu J^\mu(x)\,\Delta_+(x-x')\,\partial'_\nu J^\nu(x')\big)\right]. \qquad (3.4)$$

При вычислении вероятности вакуумного перехода нам теперь встретится величина

$$J^\mu(p)^* J_\mu(p) + \frac{1}{m^2}\,p_\mu J^\mu(p)^*\,p_\nu J^\nu(p) =$$

$$= J^\mu(p)^*\left[g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\,p_\mu p_\nu\right] J^\nu(p). \qquad (3.5)$$

Поскольку она представляет собой инвариантную комбинацию, для выяснения ее свойств можно воспользоваться удобной в данном случае системой покоя, отвечающей времени-подобному вектору p^μ, в которой

$$p^k = 0, \qquad p^0 = m. \qquad (3.6)$$

В этой системе отсчета компоненты симметричного тензора, входящего в выражение (3.5), имеют следующие значения:

$$g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\,p_\mu p_\nu = \begin{cases} 0 \text{ при } \mu = \nu = 0, \\ 0 \text{ при } \mu = k, \quad \nu = 0, \\ \delta_{kl} \text{ при } \mu = k, \quad \nu = l. \end{cases} \qquad (3.7)$$

В результате мы получаем просто $|\mathbf{J}|^2$. Эта величина положительна и содержит три независимые компоненты источника, при преобразованиях пространственного вращения выражающиеся только друг через друга, что соответствует единичному спину.

Заметим, что величина $(1/m)p^\mu$ есть единичный времени-подобный вектор, который можно дополнить тремя ортогональными пространственно-подобными векторами $e^\mu_{p\lambda}$, удовлетворяющими условиям

$$p_\mu e^\mu_{p\lambda}=0, \qquad e^{\mu *}_{p\lambda} e_{\mu p\lambda'}=\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{3.8}$$

Это позволит записать метрический тензор в диадном виде:

$$g^{\mu\nu}=-\frac{1}{m^2}p^\mu p^\nu+\sum_\lambda e^\mu_{p\lambda}e^{\nu *}_{p\lambda}. \tag{3.9}$$

Симметрия тензора $g^{\mu\nu}$ свидетельствует о том, что комплексное сопряжение трех векторов $e^\mu_{p\lambda}$ порождает некоторое унитарное преобразование на этом множестве. Если ввести величину

$$J_{p\lambda}=(d\omega_p)^{1/2}e^{\mu *}_{p\lambda}J_\mu(p), \tag{3.10}$$

то для вероятности вакуумного перехода мы получим

$$|\langle 0_+|0_-\rangle^J|^2=\exp\Big[-\sum_{p,\lambda}|J_{p\lambda}|^2\Big]. \tag{3.11}$$

Рассмотрим теперь причинно-упорядоченную пару источников

$$J^\mu(x)=J^\mu_1(x)+J^\mu_2(x). \tag{3.12}$$

Для нее

$$\langle 0_+|0\rangle^J=\langle 0_+|0_-\rangle^{J_1}\exp\Big[\int d\omega_p iJ^\mu_1(p)^*(g_{\mu\nu}+m^{-2}p_\mu p_\nu)\,iJ^\nu_2(p)\Big]\times$$
$$\times\langle 0_+|0_-\rangle^{J_2}=\langle 0_+|0_-\rangle^{J_1}\exp\Big[\sum_{p,\lambda}iJ^*_{1p\lambda}iJ_{2p\lambda}\Big]\langle 0_+|0_-\rangle^{J_2}. \tag{3.13}$$

Это обычное выражение приводит нас к следующим формулам для многочастичных состояний:

$$\langle\{n\}|0_-\rangle^J=\langle 0_+|0_-\rangle^J\prod_{p,\lambda}\frac{(iJ_{p\lambda})^{n_{p\lambda}}}{(n_{p\lambda}!)^{1/2}},$$
$$\langle 0_+|\{n\}\rangle^J=\langle 0_+|0_-\rangle^J\prod_{p,\lambda}\frac{(iJ^*_{p\lambda})^{n_{p\lambda}}}{(n_{p\lambda}!)^{1/2}}, \tag{3.14}$$

где $n_{p\lambda}=0, 1, 2, \ldots$, что снова указывает на статистику Бозе — Эйнштейна. Таким образом, два разных способа использования вакуумной амплитуды дают одинаковые результаты.

Единичные пространственно-подобные векторы $e^\mu_{p\lambda}$ можно выбрать вещественными. Условие ортогональности

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_{p\lambda}=p^0e^0_{p\lambda} \tag{3.15}$$

говорит о том, что импульс $\mathbf{p}$ играет роль вектора, задающего некоторое выделенное направление, от которого ведется отсчет. Если вектор $\mathbf{e}_{p\lambda}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{p}$ то его временная компонента $e^0_{p\lambda}$ равна нулю. Пусть $\mathbf{e}_{p1}$ — один из таких единичных вещественных векторов:

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_{p1}=0,\qquad (\mathbf{e}_{p1})^2=1,\qquad e^0_{p1}=0. \tag{3.16}$$

Тогда другим таким вектором будет вектор:

$$\mathbf{e}_{p2}=\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\times\mathbf{e}_{p1},\qquad (\mathbf{e}_{p2})^2=1,\qquad e^0_{p2}=0, \tag{3.17}$$

а вводя еще вектор

$$\mathbf{e}_{p3}=\frac{p^0}{m}\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|},\qquad e^0_{p3}=\frac{|\mathbf{p}|}{m}, \tag{3.18}$$

мы получаем их полный набор. Попутно заметим, что

$$\begin{aligned} e^{\mu}_{p3}J_{\mu}(p)&=\frac{p^0}{m|\mathbf{p}|}\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{J}(p)-\frac{|\mathbf{p}|^2}{p^0}J^0(p)\right)=\\ &=\frac{p^0}{|\mathbf{p}|}\left(\frac{1}{m}p^{\mu}J_{\mu}(p)+\frac{m}{p^0}J^0(p)\right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

При рассмотрении углового момента возникает необходимость в выборе комплексных векторов. Когда совершается инфинитезимальное однородное преобразование Лоренца

$$\bar{x}^{\mu}=x^{\mu}+\delta\omega^{\mu\nu}x_{\nu}, \tag{3.20}$$

вектор $J^{\mu}(x)$ изменяется по закону

$$\bar{J}^{\mu}(\bar{x})=J^{\mu}(x)+\delta\omega^{\mu\nu}J_{\nu}(x), \tag{3.21}$$

или

$$\delta J^{\lambda}(x)=\delta\omega^{\mu\nu}x_{\mu}\partial_{\nu}J^{\lambda}(x)+\delta\omega^{\lambda\nu}J_{\nu}(x). \tag{3.22}$$

Для трехмерных вращений отсюда получаем

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{J}(x)&=\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x}\times\nabla\,\mathbf{J}(x)-\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}(x),\\ \delta J^0(x)&=\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x}\times\nabla\,J^0(x), \end{aligned} \tag{3.23}$$

или в эквивалентной записи

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{J}(p)&=\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{p}\times\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\mathbf{J}(p)-\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}(p),\\ \delta J^0(p)&=\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{p}\times\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}J^0(p). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Рассмотрим теперь поворот вокруг оси, направленной по импульсу, когда

$$\delta\boldsymbol{\omega}=\delta\varphi\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}. \tag{3.25}$$

Одночастичное состояние со спиральностью λ, для которого

$$\delta J_{p\lambda} = i\lambda\, \delta\varphi J_{p\lambda}, \tag{3.26}$$

мы имеем в том случае, если

$$-\mathbf{e}^*_{p\lambda} \times \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = i\lambda \mathbf{e}^*_{p\lambda}. \tag{3.27}$$

Нулевой спиральности соответствует вектор $\mathbf{e}$, параллельный $\mathbf{p}$, и поэтому мы введем для e^{μ}_{p3} новое обозначение:

$$\mathbf{e}_{p0} = \frac{p^0}{m}\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \qquad e^0_{p0} = \frac{|\mathbf{p}|}{m}. \tag{3.28}$$

Спиральные состояния с $\lambda = \pm 1$ соответствуют комплексным комбинациям

$$\mathbf{e}^*_{p,\,+1} = \frac{-\mathbf{e}_{p1} + i\mathbf{e}_{p2}}{\sqrt{2}}, \qquad \mathbf{e}^*_{p,\,-1} = \frac{\mathbf{e}_{p1} + i\mathbf{e}_{p2}}{\sqrt{2}}, \tag{3.29}$$

которые выбраны таким образом, чтобы соотношение

$$-\mathbf{e}^*_{p\lambda} \times \delta\boldsymbol{\omega} = i \sum_{\lambda'=-\lambda}^{+1} (\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{S})_{\lambda\lambda'} \mathbf{e}^*_{p\lambda'} \tag{3.30}$$

приводило к стандартным матричным элементам оператора единичного спина.

Источники и состояния частиц можно классифицировать по значениям полного углового момента. Для этого мы сначала, как и в случае нулевого спина, введем разложение

$$(d\omega_p)^{1/2} J^{\nu}(p) = \sum_{l,\,m} (d\Omega)^{1/2} Y_{lm}(\mathbf{p}) J^{\nu}_{p^0 lm}, \tag{3.31}$$

где

$$J^{\nu}_{p^0 lm} = \left(\frac{|\mathbf{p}|\,dp^0}{\pi}\right)^{1/2} i^{-l} \int (dx)\, e^{ip^0x^0} j_l(|\mathbf{p}|\cdot|\mathbf{x}|)\, Y^*_{lm}(\mathbf{x})\, J^{\nu}(x). \tag{3.32}$$

Для временной компоненты J^0, являющейся по отношению к трехмерным вращениям скалярной функцией, больше ничего делать не нужно. Но единичному спину отвечают три компоненты вектора $\mathbf{J}$, которые нужно соответствующим образом объединить с орбитальным моментом, чтобы получить состояния с определенными значениями полного момента. Это достигается путем введения следующей ортонормированной системы векторов, заменяющей набор скалярных сферических гармоник:

$$\begin{aligned}\sum_{l,\,m} Y_{lm}(\mathbf{p})\, \mathbf{J}_{p^0 lm} = \sum_{j,\,m} \Big[& (j(j+1))^{1/2} \mathbf{L} Y_{jm}(\mathbf{p})\, \mathbf{J}_{p^0 jm1} + \\ & + (j(j+1))^{-1/2} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \times \mathbf{L} Y_{jm}(\mathbf{p})\, J_{p^0 jm2} + \\ & + \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} Y_{jm}(\mathbf{p}) \left(\frac{m}{p^0} J_{p^0 jm3} + \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} J^0_{p^0 jm} \right) \Big],\end{aligned} \tag{3.33}$$

где

$$\mathbf{L} = i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \times \mathbf{p}. \tag{3.34}$$

Символ m, используемый в качестве индекса для обозначения магнитного квантового числа, не следует путать с символом m, выступающим в его обычной роли массы частицы. Введенные нами величины удовлетворяют равенству

$$\sum_{l,m} \mathbf{J}^*_{p^0lm} \cdot \mathbf{J}_{p^0lm} = \sum_{j,\, m} \Big[J^*_{p^0jm1} J_{p^0jm1} + J^*_{p^0jm2} J_{p^0jm2} + \\ + \left(\frac{m}{p^0} J_{p^0jm3} + \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} J^0_{p^0jm} \right)^* \left(\frac{m}{p^0} J_{p^0jm3} + \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} J^0_{p^0jm} \right) \Big]. \tag{3.35}$$

Отметим также соотношение

$$\sum_{l,m} Y_{lm}(\mathbf{p}) \left(\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \mathbf{J}_{p^0lm} - \frac{p^0}{m} J^0_{p^0lm} \right) = \sum_{j,m} Y_{jm}(\mathbf{p}) \left(\frac{|\mathbf{p}|}{p^0} J_{p^0jm3} - \frac{m}{p_0} J^0_{p^0jm} \right). \tag{3.36}$$

Объединяя все эти вклады, мы и получаем требуемый результат:

$$\int d\omega_p J^\mu(p)^* \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} p_\mu p_\nu \right) J^\nu(p) = \sum_{p^0jm\lambda} J^*_{p^0jm\lambda} J_{p^0jm\lambda}, \tag{3.37}$$

где индексом $\lambda = 1, 2, 3$ различаются три возбуждения с квантовыми числами полного момента j, m.

Можно найти и явные выражения для этих источников. Пользуясь, например, свойством ортогональности векторов, мы получаем формулу

$$J_{p^0jm1} = \left(\frac{|\mathbf{p}|\, dp^0}{\pi} \right)^{1/2} \int \frac{d\Omega}{4\pi} Y^*_{jm}(\mathbf{p}) (j(j+1))^{-1/2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{p}), \tag{3.38}$$

которую можно преобразовать к виду

$$J_{p^0jm1} = \left(\frac{|\mathbf{p}|\, dp^0}{\pi} \right)^{1/2} i^{-j} \int (dx) e^{ip^0x^0} j_j(|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{x}|) Y^*_{jm}(\mathbf{x}) (j(j+1))^{-1/2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{J}(x), \tag{3.39}$$

где теперь

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \frac{1}{i} \nabla. \tag{3.40}$$

(К сожалению, при сохранении двух общепринятых систем обозначений у нас возникают комбинации вида j_j.) Отметим, кстати, что такого рода источник в случае $j = 0$ обращается в нуль. Совершенно аналогично

$$J_{p^0jm2} = \left(\frac{|\mathbf{p}|\, dp^0}{\pi} \right)^{1/2} i^{-j} \int (dx) e^{ip^0x^0} j_j(|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{x}|) \times \\ \times Y^*_{jm}(\mathbf{x}) (j(j+1))^{-1/2} \left(\frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{1}{i} \nabla \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{J}(x) \right), \tag{3.41}$$

и этот источник также обращается в нуль при $j=0$. Наконец,

$$J_{p^0jm3} = \left(\frac{|\mathbf{p}|\,dp^0}{\pi}\right)^{1/2} i^{-j} \int (dx)\, e^{ip^0x^0} j_j(|\mathbf{p}|\cdot|\mathbf{x}|) \times$$
$$\times Y^*_{jm}(\mathbf{x}) \frac{p^0}{m|\mathbf{p}|} \left(\frac{1}{i} \nabla\cdot\mathbf{J}(x) - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p^0} J^0(x)\right). \qquad (3.42)$$

Из приведенных выражений явствует, что источники с индексами $\lambda = 1, 2$ зависят только от величины $\mathbf{J}(x)$, которая входит в виде комбинации $\nabla \times \mathbf{J}(x)$, тогда как для источника третьего типа возможна следующая эквивалентная замена:

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{i}\nabla\cdot\mathbf{J}(x) - \frac{|\mathbf{p}|^2}{p^0} J^0(x)\right) \to \frac{1}{m}\frac{1}{i}\partial_\mu J^\mu(x) + \frac{m}{p^0} J^0(x). \qquad (3.43)$$

При обобщениях типа тех, которые проводились для частиц нулевого спина,— на случаи заряженных частиц, многочастичных начальных и конечных состояний, циклического развития во времени — никаких затруднений не возникает, а ход рассуждений оказывается настолько похожим, что его можно не воспроизводить. Вместо этого мы обратимся к одному важному специальному случаю, а именно к пределу нулевой массы (фотона).

Из равенства (3.4) ясно, что если величина $\partial_\mu J^\mu(x)$ не равна нулю, то предела нулевой массы не существует. Можно было бы написать

$$\partial_\mu J^\mu(x) = mK(x) \qquad (3.44)$$

и считать $K(x)$ в пределе $m \to 0$ источником безмассовых частиц с нулевым спином. Но последние были бы совершенно не связаны с фотонным источником, а поскольку частицы с $m = 0$ и $s = 0$ экспериментально не обнаружены, мы будем рассматривать только фотоны, считая, что источник описывается следующим образом:

$$\langle 0_+|0_-\rangle^J = \exp\left[\frac{i}{2}\int (dx)(dx')\, J^\mu(x) D_+(x-x') J_\mu(x')\right], \qquad (3.45)$$
$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0.$$

Здесь символ D_+ указывает на то, что мы имеем дело с частицами нулевой массы.

Понятие источника частиц того или иного сорта есть результат обобщения наших представлений о реальных процессах рождения и уничтожения таких частиц. В нем соединены общие черты всех подобных процессов, а специфические особенности каждого из них отброшены. Всякое общее требование к источнику, обусловленное конкретной природой частицы, должно относиться ко всем процессам и потому имеет смысл некоторого физического закона. Рассматривая фотон и исходя из равенства нулю его массы, мы пришли к выводу, что векторный источник должен удовлетворять определенным требованиям: его дивергенция должна равняться нулю. Такое требование есть локальная формулировка закона сохранения некоторой величины. Относительно природы этой сохраняющейся физической величины не может быть никаких сомнений: это электрический заряд.

Исходя из разных способов описания состояния безмассовых частиц, можно убедиться в том, что у них пропадает одна степень возбуждения. Так, например, если в равенстве (3.19) принять, что $m \to 0$, то при условии

$$p_\mu J^\mu(p) = 0 \tag{3.46}$$

мы придем к выводу, что

$$J_{p3} = 0, \tag{3.47}$$

а два оставшихся источника $J_{p1,2}$ соответствуют двум поперечным линейным поляризациям, которыми могут обладать фотоны. Если пользоваться индексом спиральности, то мы будем иметь эквивалентное равенство

$$J_{p0} = 0, \tag{3.48}$$

а источники $J_{p,\pm 1}$ будут соответствовать двум круговым поляризациям. Обращаясь теперь к состояниям с определенным угловым моментом, из соотношения (3.43) совершенно аналогично получаем

$$J_{p^0 jm3} = 0. \tag{3.49}$$

Поскольку момент $j = 0$ не входит в источники двух других типов, это равенство эквивалентно утверждению об отсутствии нулевой спиральности.

К выводу о существовании двух состояний поляризации (или двух спиральных состояний) мы пришли путем предельного перехода, отправляясь от частиц с конечной массой и единичным спином. Получим теперь этот результат непосредственным путем, используя описание фотонного источника (3.45). Причинная последовательность пары источников

$$J^\mu(x) = J_1^\mu(x) + J_2^\mu(x) \tag{3.50}$$

означает, что

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J_1} \exp\left[\int d\omega_p i J_1^\mu(p)^* g_{\mu\nu} J_2^\nu(p)\right] \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J_2}. \tag{3.51}$$

Диадное представление тензора $g_{\mu\nu}$, даваемое формулой (3.9), здесь не годится, поскольку p^μ теперь изотропный вектор:

$$p^2 = 0. \tag{3.52}$$

Введем вектор $\bar{p}^\mu$, полученный из вектора p^μ обращением направления движения фотона:

$$\bar{p}^0 = p^0, \qquad \bar{p}^k = -p^k, \qquad \bar{p}^2 = 0. \tag{3.53}$$

Тогда $p^\mu + \bar{p}^\mu$ будет времени-подобным, а $p^\mu - \bar{p}^\mu$ — пространственно-подобным вектором. Их можно дополнить двумя ортогональными единичными пространственно-подобными векторами $e^\mu_{p\lambda}$:

$$e^{\mu *}_{p\lambda} e_{\mu p \lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, \qquad p_\mu e^\mu_{p\lambda} = 0, \qquad \bar{p}_\mu e^\mu_{p\lambda} = 0 \tag{3.54}$$

и получить следующее диадное представление:

$$g^{\mu\nu} = \frac{(p^\mu + \bar{p}^\mu)(p^\nu + \bar{p}^\nu)}{2p\bar{p}} - \frac{(p^\mu - \bar{p}^\mu)(p^\nu - \bar{p}^\nu)}{2p\bar{p}} + \sum_\lambda e^\mu_{p\lambda} e^{\nu *}_{p\lambda} =$$

$$= \frac{p^\mu \bar{p}^\nu + p^\nu \bar{p}^\mu}{p\bar{p}} + \sum_\lambda e^\mu_{p\lambda} e^{\nu *}_{p\lambda}. \tag{3.55}$$

Учитывая теперь, что фотонный источник должен удовлетворять условиям

$$p_\mu J^\mu(p) = 0, \qquad p_\mu J^\mu(p)^* = 0, \tag{3.56}$$

мы получаем искомое соотношение

$$\int d\omega_p J^\mu_1(p)^* g_{\mu\nu} J^\nu_2(p) = \int d\omega_p J^\mu_1(p)^* \sum_\lambda e_{\mu p\lambda} e^*_{\nu p\lambda} J^\nu_2(p) =$$

$$= \sum_{p,\lambda} J^*_{1p\lambda} J_{2p\lambda}, \tag{3.57}$$

которое описывает обмен частицами. Из условий (3.54) следует также, что временные компоненты двух векторов $e^\mu_{p\lambda}$ равны нулю, а их пространственные части перпендикулярны импульсу **p**. Тем самым мы приходим к замкнутому описанию двух поперечных возбуждений, возможных для фотонов.

Ранее было установлено, что понятие безмассовой частицы с определенной спиральностью инвариантно относительно собственных ортохронных преобразований Лоренца. Желательно было бы сделать так, чтобы это свойство спиральных состояний фотона стало более очевидным. Кроме того, хотелось бы также понять, почему у нас оказалось, что спиральные состояния появляются парами, хотя о пространственном отражении явно нигде не упоминалось. Заметим сначала, что требование сохранения, предъявляемое к источнику $J^\mu(x)$, будет удовлетворяться тождественно, если

$$J^\mu(x) = \partial_\nu M^{\mu\nu}(x), \tag{3.58}$$

где

$$M^{\mu\nu}(x) = -M^{\nu\mu}(x). \tag{3.59}$$

Введем также понятие тензора, дуального данному антисимметричному тензору:

$${}^*M^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} M_{\kappa\lambda}(x), \tag{3.60}$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}$ — полностью антисимметричный тензор, нормированный условием

$$\varepsilon^{0123} = +1. \tag{3.61}$$

Операция дуализации обладает свойством

$$^{**}M^{\mu\nu}(x) = -M^{\mu\nu}(x). \tag{3.62}$$

Используя дуальный тензор, напишем

$$J^{\mu}(x) = \partial_{\nu} M^{\mu\nu}_{+1}(x) + \partial_{\nu} M^{\mu\nu}_{-1}(x), \tag{3.63}$$

где величины

$$M^{\mu\nu}_{\pm 1}(x) = \frac{1}{2}(M^{\mu\nu}(x) \mp i^{*}M^{\mu\nu}(x)) \tag{3.64}$$

таковы, что

$$^{*}M^{\mu\nu}_{\pm 1}(x) = \pm iM^{\mu\nu}_{\pm 1}(x). \tag{3.65}$$

Последнее равенство указывает на существование у каждого из этих объектов лишь трех независимых компонент, например:

$$M^{12}_{+1} = iM^{03}_{+1}, \qquad M^{12}_{-1} = -iM^{03}_{-1}. \tag{3.66}$$

Эти компоненты, конечно, комплексны, причем

$$M^{\mu\nu}_{-1}(x) = M^{\mu\nu}_{+1}(x)^{*}. \tag{3.67}$$

Если речь идет о непрерывных преобразованиях систем координат, то разложение (3.63), которое мы напишем в виде

$$J^{\mu}(x) = J^{\mu}_{+1}(x) + J^{\mu}_{-1}(x), \tag{3.68}$$

будет иметь инвариантный смысл. В трехмерных обозначениях

$$\mathbf{J}_{\pm 1}(x) = \nabla \times \mathbf{M}_{\pm 1}(x) \pm i\partial_0 \mathbf{M}_{\pm 1}(x) \tag{3.69}$$

и

$$\mathbf{J}_{\pm 1}(p) = i\mathbf{p} \times \mathbf{M}_{\pm 1}(p) \pm p^0 \mathbf{M}_{\pm 1}(p). \tag{3.70}$$

Учитывая соотношение (3.27), получаем, что эффективность испускания этими источниками фотонов со спиральностью λ измеряется величиной ($p^0 = |\mathbf{p}|$):

$$\begin{aligned} e^{*}_{p\lambda} \cdot \mathbf{J}_{\pm 1}(p) &= p^0 \left[i\mathbf{e}^{*}_{p\lambda} \times \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \pm \mathbf{e}^{*}_{p\lambda} \right] \cdot \mathbf{M}_{\pm 1}(p) = \\ &= p^0 (\lambda \pm 1)\, \mathbf{e}^{*}_{p\lambda} \cdot \mathbf{M}_{\pm 1}(p). \end{aligned} \tag{3.71}$$

Таким образом, из того, что спиральность λ фигурирует здесь в комбинации с числами ± 1, следует, что индексы ± 1 у компонент источников действительно относятся к единственным значениям спиральности испускаемых или поглощаемых ими фотонов.

Почему же нельзя, отбросив, скажем, источники $J^{\nu}_{-1}(x)$, получить теорию, в которой фигурировали бы только фотоны с положительной спиральностью? По той же причине, по которой невозможна теория, содержащая только положительно заряженные частицы,— в ней нарушался бы принцип равноправности всех точек пространства-времени. Чтобы подробней в этом разобраться, рассмотрим вклад в вакуумную амплитуду от испускания и последующего поглощения фотона с положительной спиральностью, т. е. величину

$$i \int (dx)\,(dx')\, J^{\mu}_{+1}(x)^*_1 \left[i \int d\omega_p e^{ip(x-x')} \right] g_{\mu\nu} J^{\nu}_{+1}(x')_2, \qquad (3.72)$$

где для большей ясности мы вынесли причинные индексы 1, 2. Появление здесь тензора $g_{\mu\nu}$ является вполне оправданным, так как в силу равенства (3.71) суммирование по двум эквивалентным векторам поляризации приводит к соответствующим членам с положительной спиральностью. Полная связь источников должна быть линейной по

$$J^{\nu}_{+1}(x) = J^{\nu}_{+1}(x)_1 + J^{\nu}_{+1}(x)_2 \qquad (3.73)$$

и линейной по

$$J^{\mu}_{+1}(x)^* = J^{\mu}_{+1}(x)^*_1 + J^{\mu}_{+1}(x)^*_2. \qquad (3.74)$$

Казалось бы, вывод о существовании другой связи, в которую входят $J^{\nu}_{+1}(x')_1$ и $J^{\mu}_{+1}(x)^*_2$, не является строго обязательным, так как мы можем ввести в рассмотрение пространственно-временную экстраполяцию выражения (3.72), дополненного множителем

$$\eta(x^0 - x^{0\prime}) = \begin{cases} 1 & \text{при } x^0 > x^{0\prime}, \\ 0 & \text{при } x^0 < x^{0\prime}, \end{cases} \qquad (3.75)$$

назначение которого состоит в том, чтобы исключить такую последовательность источников, при которой J^{ν}_{+1} и $J^{\mu *}_{+1}$ поменялись бы своими причинными ролями. Эта ступенчатая функция действительно имеет инвариантный смысл, когда x и x' разделены времениподобным или нулевым интервалом, но в случае пространственноподобных интервалов она не инвариантна и ее введением нарушался бы принцип равноправности всех точек пространства-времени. Выходит, мы не можем избавиться от присутствия дополнительного члена с причинной связью

$$i \int (dx)\,(dx')\, J^{\nu}_{+1}(x')_1 \left[i \int d\omega_p e^{ip(x'-x)} \right] g_{\mu\nu} J^{\mu}_{+1}(x')^*_2 \qquad (3.76)$$

и при условии однозначности пространственно-временной экстраполяции частицы, описываемые этим членом, также должны обладать нулевой массой. Такие античастицы — это фотоны с отрицательной спиральностью:

$$J^{\mu}_{+1}(x)^* = J^{\mu}_{-1}(x), \qquad (3.77)$$

и дополнительный член можно переписать в виде

$$i\int (dx)\,(dx')\,J^{\mu}_{-1}(x)^*_1\left[i\int d\omega_p e^{ip(x-x')}\right]g_{\mu\nu}J^{\nu}_{-1}(x')^*_2. \tag{3.78}$$

Кроме того, аналогичные комбинации, содержащие $J^{\mu *}_{+1}$, J^{ν}_{-1} и $J^{\mu *}_{-1}$, J^{ν}_{+1}, равны нулю, так как при суммировании по векторам поляризации будет обращаться в нуль какой-то один из множителей. В результате мы возвращаемся к вещественному источнику

$$J^{\nu}(x)=J^{\nu}_{+1}(x)+J^{\nu}_{-1}(x), \tag{3.79}$$

фигурирующему в комбинации

$$i\int (dx)\,(dx')\,J^{\mu}(x)_1\left[i\int d\omega_p e^{ip(x-x')}\right]g_{\mu\nu}J^{\nu}(x')_2, \tag{3.80}$$

которая в качестве члена, отвечающего причинному обмену частицами, входит в выражение

$$\frac{i}{2}\int (dx)\,(dx')\,J^{\mu}(x)\,D_+(x-x')\,J_{\mu}(x'). \tag{3.81}$$

Из сказанного следует, что источники

$$^*J^{\mu}_{+1}(x)=iJ^{\mu}_{+1}(x),\qquad {}^*J^{\mu}_{-1}(x)=-iJ^{\mu}_{-1}(x) \tag{3.82}$$

эквивалентным образом описывают процессы испускания и поглощения фотонов. Такой новый источник можно представить в виде

$$^*J^{\mu}(x)=\partial_{\nu}{}^*M^{\mu\nu}(x). \tag{3.83}$$

На характер преобразования указывает также соотношение

$$^*J_{p\lambda}=(d\omega_p)^{1/2}\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\times \mathbf{e}^*_{p\lambda}\cdot\mathbf{J}(p), \tag{3.84}$$

из которого становится ясным, что при таком переходе векторы поляризации поворачиваются на угол $\pi/2$ вокруг оси, совпадающей с направлением движения фотона. Если угол поворота равен φ, то преобразование принимает вид

$$J^{\mu}(x)\to J^{\mu}(x)\cos\varphi+{}^*J^{\mu}(x)\sin\varphi. \tag{3.85}$$

При замене J^{μ} на $^*J^{\mu}$ источники с определенными значениями момента подвергаются столь же простому преобразованию. Заметим сначала, что

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(x)&=\nabla\times\mathbf{M}(x)+\partial_0{}^*\mathbf{M}(x)\to\\&\to\nabla\times\mathbf{M}(x)-ip^0\,{}^*\mathbf{M}(x),\end{aligned} \tag{3.86}$$

где последняя подстановка имеет тот смысл, что она не изменяет значений интегралов, которыми определяются величины $J_{p^0jm\lambda}$.

Подобным же образом имеем

$$\frac{i}{p^0}\nabla\times\mathbf{J}(x)=\nabla\times{}^*\mathbf{M}(x)+\frac{i}{p^0}(\nabla\nabla\cdot-\nabla^2)\mathbf{M}(x)\to$$
$$\to\nabla\times{}^*\mathbf{M}(x)+ip^0\mathbf{M}(x),\qquad(3.87)$$

где произведена замена $-\nabla^2\to\mathbf{p}^2=(p^0)^2$, не изменяющая интегралов, и учтено равенство $\mathbf{L}\cdot\nabla=0$. При подстановке $J^\mu\to{}^*J^\mu$, которая эквивалентна преобразованию $\mathbf{M}\to{}^*\mathbf{M}$, ${}^*\mathbf{M}\to-\mathbf{M}$, выписанные векторные комбинации переходят друг в друга, так что два источника будут преобразовываться по закону

$$J_{p^0jm1}\to J_{p^0jm2},\qquad J_{p^0jm2}\to-J_{p^0jm1}.\qquad(3.88)$$

Более общая подстановка (3.85) приводит к повороту

$$\begin{aligned}J_{p^0jm1}&\to J_{p^0jm1}\cos\varphi+J_{p^0jm2}\sin\varphi,\\ J_{p^0jm2}&\to-J_{p^0jm1}\sin\varphi+J_{p^0jm2}\cos\varphi.\end{aligned}\qquad(3.89)$$

Источники, которые входят в общее выражение для вакуумной амплитуды (3.45), записанное через пространственно-временные переменные, вовсе не обязательно должны испускать и поглощать фотоны — если они меняются во времени слишком медленно, то такие процессы оказываются невозможными. Таким образом, существует единое физическое описание процессов столкновения, при которых высвобождается энергия, достаточная для порождения частицы, и аналогичных им процессов, которые, однако, отличаются тем, что в них выделяется недостаточное количество энергии. Подобное единство в каком-то смысле противоположных процессов обеспечивается как раз принципом равноправности всех точек пространства-времени. Чтобы показать, какую физическую информацию можно получить таким путем, рассмотрим фотонные источники, чрезвычайно медленно меняющиеся во времени. Для этого напишем

$$\int(dx)(dx')J^\mu(x)D_+(x-x')J_\mu(x')=$$
$$=\int(d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')dx^0\,d\tau J^\mu\left(\mathbf{x},x_0+\frac{\tau}{2}\right)D_+(\mathbf{x}-\mathbf{x}',\tau)J_\mu\left(\mathbf{x}',x^0-\frac{\tau}{2}\right),\qquad(3.90)$$

где, как следует из (1.45),

$$D_+(\mathbf{x}-\mathbf{x}',\tau)=\frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\int\limits_0^\infty dp^0\sin(p^0|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)\,e^{-ip^0|\tau|}.\qquad(3.91)$$

Из этого выражения видно, что масштаб ощутимых изменений переменной τ задается величиной $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$. Если за промежутки времени, соответствующие характерным размерам мгновенного распределения, источники изменяются мало, то можно пренебречь зависимостью величины $J^\mu(\mathbf{x}, x^0 \pm \tau/2)$ от τ и провести интегрирование по этой переменной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau D_+(\mathbf{x}-\mathbf{x}', \tau) = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\int_0^\infty dp^0 \frac{\sin p^0|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{p^0} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{3.92}$$

Это приводит к следующему выражению для вакуумной амплитуды:

$$\langle 0_+|0_-\rangle^J = \exp\left[-i\int dx^0 E(x^0)\right], \tag{3.93}$$

где

$$E(x^0) = -\frac{1}{2}\int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')J^\mu(\mathbf{x}, x^0)\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}J_\mu(\mathbf{x}', x^0). \tag{3.94}$$

Таким образом, мы видим, что этой амплитудой определяется суммарное изменение фазы состояния с меняющейся во времени энергией $E(x^0)$. Когда установится стационарный режим, ему будет соответствовать энергия

$$E = \frac{1}{2}\int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')\frac{J^0(\mathbf{x})J^0(\mathbf{x}') - \mathbf{J}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \tag{3.95}$$

а это не что иное, как законы Кулона и Ампера для взаимодействий зарядов и токов. Мы видим, каким образом на основе принципа равноправности всех точек пространства-времени устанавливается логическая связь между свойствами фотонов и характеристиками квазистационарных распределений заряда.

Здесь имеется одна тонкость, которую не следует упускать из виду. Дело в том, что невозможно создать совершенно произвольное статическое распределение заряда. Если источники локализованы в конечной области пространства, то локальный закон сохранения $\partial_\mu J^\mu = 0$ будет означать сохранение полного заряда

$$Q = \int d\sigma_\mu J^\mu(x). \tag{3.96}$$

Поскольку в начальном вакуумном состоянии полный заряд равен нулю, он будет оставаться таким и во все последующие моменты времени. Мы можем представить себе, что сначала имеются два взаимно компенсирующихся распределения положительных и отрицательных зарядов, движущихся отдельно и независимо одно от другого, а затем рекомбинирующих. Но ввести распределение заряда в некоторую пустую область пространства можно и другим способом. Для этого нужно представлять себе более четко, чем обычно, что физическое описание относится лишь к той конечной пространственно-временной области, которая контролируется экспериментатором. Начальное и конечное вакуумные состояния соотносятся с некоторой ограниченной трехмерной областью, а вне ее стен жизнь идет своим чередом. Таким образом, мы приходим к выводу, что произвольное распределение заряда в интересующей нас области может создаваться за счет его втекания через ограничивающую ее поверхность и что это распределение заряда может в конце концов рассосаться за счет его вытекания через границу.

§ 4. ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 2, ГРАВИТОН

Следующим по сложности после скалярного и векторного источников является вещественный симметричный тензорный источник

$$T^{\mu\nu}(x) = T^{\nu\mu}(x). \tag{4.1}$$

У него десять компонент, но среди них 3 + 1 компонент векторного источника $\partial_\mu T^{\mu\nu}(x)$ и один скалярный источник

$$T(x) = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}(x). \tag{4.2}$$

Если их исключить, то оставшаяся мультиплетность будет равна пяти; она соответствует частицам со спином 2, имеющим отличную от нуля массу m. Чтобы сделать это, мы воспользуемся своим опытом, приобретенным в случае частиц с единичным спином, и сразу напишем необходимое с физической точки зрения выражение для вероятности вакуумного перехода:

$$|\langle 0_+ | 0_- \rangle^T|^2 = \exp\left[- \int d\omega_p \overline{T}^{\mu\nu}(p)^* \bar{g}_{\mu\varkappa}(p)\, \bar{g}_{\nu\lambda}(p)\, \overline{T}^{\varkappa\lambda}(p) \right], \tag{4.3}$$

где

$$\bar{g}^{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} p_\mu p_\nu, \qquad p^\mu \bar{g}_{\mu\nu}(p) = 0, \qquad g^{\mu\nu} \bar{g}_{\mu\nu}(p) = 3 \tag{4.4}$$

и

$$\overline{T}^{\mu\nu}(p) = T^{\mu\nu}(p) - \frac{1}{3} g^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma}(p)\, T^{\rho\sigma}(p), \tag{4.5}$$

причем

$$\bar{g}_{\mu\nu}(p)\, \overline{T}^{\mu\nu}(p) = 0. \tag{4.6}$$

В системе покоя, соответствующей импульсу p^μ, тензор $\bar{g}_{\mu\nu}(p)$ будет проектором на трехмерное пространство [см. (3.7)]. Поэтому вклад в выражение (4.3) дадут только шесть компонент источника $\overline{T}_{kl}$, причем в силу соотношения (4.6) сумма диагональных элементов этого тензора равна нулю. Таким образом, мультиплетность здесь равна пяти, т. е. как раз соответствует спину 2.

Выражение, входящее в (4.3), можно переписать и в другом виде:

$$\overline{T}^{\mu\nu}(p)^* \bar{g}_{\mu\varkappa}(p)\, \bar{g}_{\nu\lambda}(p)\, \overline{T}^{\varkappa\lambda}(p) = T^{\mu\nu}(p)^* \Pi_{\mu\nu,\,\varkappa\lambda}(p)\, T^{\varkappa\lambda}(p), \tag{4.7}$$

где

$$\Pi_{\mu\nu,\,\varkappa\lambda}(p)=\frac{1}{2}\left[\bar{g}_{\mu\varkappa}(p)\,\bar{g}_{\nu\lambda}(p)+\bar{g}_{\nu\varkappa}(p)\bar{g}_{\mu\lambda}(p)\right]-\frac{1}{3}\,\bar{g}_{\mu\nu}(p)\,\bar{g}_{\varkappa\lambda}(p). \tag{4.8}$$

Этот тензор имеет, в частности, следующие свойства:

$$g^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu,\,\varkappa\lambda}(p)=0, \qquad g^{\mu\varkappa}g^{\nu\lambda}\Pi_{\mu\nu,\,\varkappa\lambda}(p)=5 \tag{4.9}$$

и

$$\Pi_{\mu\nu,\,\varkappa\lambda}(p)\,\Pi^{\varkappa\lambda}{}_{\rho\sigma}(p)=\Pi_{\mu\nu,\,\rho\sigma}(p). \tag{4.10}$$

Тензор $\Pi_{\mu\nu,\,\rho\sigma}(p)$ построен из проекционных матриц, откуда следует диадное представление

$$\Pi^{\mu\nu,\,\rho\sigma}(p)=\sum_{\lambda}e^{\mu\nu}_{\rho\lambda}e^{\rho\sigma*}_{\rho\lambda}, \tag{4.11}$$

где пять симметричных тензоров $e^{\mu\nu}_{p\lambda}$ удовлетворяют условиям:

$$p_\mu e^{\mu\nu}_{p\lambda}=0, \qquad g_{\mu\nu}e^{\mu\nu}_{p\lambda}=0, \qquad e^{\mu\nu*}_{p\lambda}e_{\mu\nu p\lambda'}=\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{4.12}$$

Введем теперь источники определенных состояний.

$$T_{p\lambda}=(d\omega_p)^{1/2}e^{\mu\nu*}_{p\lambda}T_{\mu\nu}(p). \tag{4.13}$$

Если в диаде, построенной из векторов, использовать спиральные состояния:

$$\bar{g}^{\mu\nu}(p)=\sum_{\lambda=-1}^{+1}e^{\mu}_{p\lambda}e^{\nu*}_{p\lambda}, \qquad e^{\nu*}_{p\lambda}=(-1)^{\lambda}\,e^{\nu}_{p,\,-\lambda}, \tag{4.14}$$

то мы получим

$$\Pi^{\mu\nu,\,\rho\sigma}(p)=\sum_{\lambda,\,\lambda'}e^{\mu\nu}_{p\lambda\lambda'}e^{\rho\sigma*}_{p\lambda\lambda'}, \tag{4.15}$$

где величины

$$e^{\mu\nu}_{p\lambda\lambda'}=\frac{1}{2}\left(e^{\mu}_{p\lambda}e^{\nu}_{p\lambda'}+e^{\mu}_{p\lambda'}e^{\nu}_{p\lambda}\right)-\frac{1}{3}(-1)^{\lambda}\,\delta_{-\lambda\lambda'}\sum_{\lambda_1}(-1)^{\lambda_1}e^{\mu}_{p\lambda_1}e^{\nu}_{p,\,-\lambda_1} \tag{4.16}$$

удовлетворяют соотношению

$$\sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}e^{\mu\nu}_{p,\,-\lambda\lambda}=-2e^{\mu\nu}_{p,\,+1,\,-1}+e^{\mu\nu}_{p00}=0. \tag{4.17}$$

Тогда спиральные состояния спина 2 будут такими:

$$\begin{aligned}
e^{\mu\nu}_{p\pm 2}&=e^{\mu\nu}_{p\pm1\pm1}=e^{\mu}_{p\pm1}e^{\nu}_{p\pm1},\\
e^{\mu\nu}_{p\pm 1}&=\sqrt{2}\,e^{\mu\nu}_{p\pm10}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\mu}_{p\pm1}e^{\nu}_{p0}+e^{\mu}_{p0}e^{\nu}_{p\pm1}\right),\\
e^{\mu\nu}_{p0}&=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,e^{\mu\nu}_{p00}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(e^{\mu}_{p,\,+1}e^{\nu}_{p,\,-1}+e^{\mu}_{p,\,-1}e^{\nu}_{p,\,+1}+2e^{\mu}_{p0}e^{\nu}_{p0}\right).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Полное выражение для вакуумной амплитуды, приводящей к вероятности (4.3), имеет вид

$$\langle 0_+ \mid 0_- \rangle = \exp\,[iW(T)], \tag{4.19}$$

где

$$\begin{aligned} W(T)=\frac{1}{2}\int (dx)(dx')\Big[&T^{\mu\nu}(x)\,\Delta_+(x-x')\,T_{\mu\nu}(x')+\\ &+\frac{2}{m^2}\,\partial_\nu T^{\mu\nu}(x)\,\Delta_+(x-x')\,\partial'_\lambda T_{\mu\lambda}(x')+\\ &+\frac{1}{m^4}\,\partial_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu}(x)\,\Delta_+(x-x')\,\partial'_\varkappa\partial'_\lambda\,T^{\varkappa\lambda}(x')-\\ &-\frac{1}{3}\Big(T(x)-\frac{1}{m^2}\,\partial_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu}(x)\Big)\,\Delta_+(x-x')\,\Big(T(x')-\\ &-\frac{1}{m^2}\,\partial'_\varkappa\partial'_\lambda T^{\varkappa\lambda}(x')\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Чтобы это выражение сохраняло свой смысл и в пределе при $m \to 0$, нужно положить

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}(x)=\frac{m}{\sqrt{2}}\,J^\mu(x), \qquad \partial_\mu J^\mu(x)=m\left[\sqrt{3}\,K(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\,T(x)\right], \tag{4.21}$$

где $J^\mu(x)$ и $T(x)$ — независимые источники частиц с $m = 0$. Такая линейная комбинация двух скалярных источников $K(x)$ и $T(x)$ выбрана с тем, чтобы исключить всякую связь между ними. Это становится очевидным, если учесть, что в процессе предельного перехода

$$\begin{aligned} W(T)\to\frac{1}{2}\int (dx)(dx')\Big[&T^{\mu\nu}(x)\,D_+(x-x')\,T_{\mu\nu}(x')-\\ &-\frac{1}{2}\,T(x)\,D_+(x-x')\,T(x')+J^\mu(x)\,D_+(x-x')\,J_\mu(x')+\\ &+K(x)\,D_+(x-x')\,K(x')\Big], \end{aligned} \tag{4.22}$$

где

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0, \qquad \partial_\mu J^\mu(x) = 0. \tag{4.23}$$

Таким образом, мы приходим к инвариантному разложению, в котором пять спиральных состояний, свойственных частице с конечной массой и спином 2, в пределе при $m \to 0$ распадаются на три группы со значениями спиральностей ± 2, ± 1, 0.

Мы будем считать, что безмассовая частица со спиральностями ± 2 — это гравитон. Для него

$$W(T)=\frac{1}{2}\int (dx)(dx')\Big[T^{\mu\nu}(x)D_+(x-x')T_{\mu\nu}(x')-$$
$$-\frac{1}{2}T(x)D_+(x-x')T(x')\Big],$$
$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x)=0. \qquad (4.24)$$

Мы будем рассматривать гравитоны, исходя из этих соотношений. Из причинной последовательности источников

$$T^{\mu\nu}(x)=T_1^{\mu\nu}(x)+T_2^{\mu\nu}(x) \qquad (4.25)$$

следует обычное свойство факторизуемости вакуумной амплитуды:

$$\langle 0_+|0_-\rangle^T=\langle 0_+|0_-\rangle^{T_1}\exp\Big[\int d\omega_p iT_1^{\mu\nu}(p)^*\Big(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-$$
$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}\Big)iT_2^{\rho\sigma}(p)\Big]\langle 0_+|0_-\rangle^{T_2}, \qquad (4.26)$$

где каждая компонента источника удовлетворяет условию

$$p_\mu T^{\mu\nu}(p)=0. \qquad (4.27)$$

Комбинируя это требование к источнику с диадным представлением (3.55), мы приходим к выводу, что можно сделать следующую эквивалентную замену:

$$\frac{1}{2}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma}-g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma})\to\sum_{\lambda\lambda'}e^{\mu\nu}_{p\lambda\lambda'}e^{\rho\sigma*}_{p\lambda\lambda'}, \qquad (4.28)$$

где тензоры, входящие в правую часть, записываются через спиральные состояния с $\lambda=\pm 1$ как

$$e^{\mu\nu}_{p\lambda\lambda'}=\frac{1}{2}\Big(e^{\mu}_{p\lambda}e^{\nu}_{p\lambda'}+e^{\mu}_{p\lambda'}e^{\nu}_{p\lambda}-\delta_{-\lambda\lambda'}\sum_{\lambda_1}e^{\mu}_{p\lambda_1}e^{\nu}_{p,-\lambda_1}\Big). \qquad (4.29)$$

Фигурирующие здесь три независимых тензора имеют вид

$$e^{\mu\nu}_{p,+1,-1}=0 \qquad (4.30)$$

и

$$e^{\mu\nu}_{p,\pm 2}=e^{\mu\nu}_{p,\pm 1,\pm 1}=e^{\mu}_{p,\pm 1}e^{\nu}_{p,\pm 1}, \qquad (4.31)$$

и тем самым они описывают два спиральных состояния гравитона.

Гравитон экспериментально пока еще не обнаружен. Тем не менее мы примем эту частицу со всеми предполагаемыми ее свойствами в качестве отправного пункта при построении теории гравитационных явлений в полной аналогии с тем, как фотон с его характеристиками служит основой теории электромагнитных явлений. Хотя данные, свидетельствующие о существовании гравитона, носят косвенный характер, они выглядят весьма убедительно. Чтобы уяснить себе положение дел, представим себе такую картину: «Законы квантовой механики и теории относительности твердо установлены, но о взаимодействии электрических зарядов нам известно лишь то, что относится к случаю квазистатических условий. Два физика, Макс Стоун и Ихиро Идо, указывают, что все сведения о таком взаимодействии можно получить, основываясь на принципах теории источников, из постулата о существовании некой частицы. Они утверждают, что эта частица когда-нибудь будет открыта. Другие физики не согласны с этим предположением, считая его ничем не обоснованным. Вопрос остается открытым.»

Постулируя существование гравитона, мы прежде всего приходим к условию $\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0$, которому должен удовлетворять источник и которое, как и в случае фотона, указывает на наличие некоторого общего физического закона. Это закон сохранения вектора

$$P^\nu = \int d\sigma_\mu T^{\mu\nu}(x). \tag{4.32}$$

Уже из самих обозначений явствует, что в качестве такой векторной величины мы можем взять только энергию-импульс. В отличие от фотонных источников, для интенсивности которых имеется единственный масштаб, связанный с представлением об электрическом заряде, при рассмотрении гравитационных источников возникает независимый масштаб, связанный с механическим смыслом тензора $T^{\mu\nu}$. Чтобы установить связь между двумя характеристиками, введем эмпирический множитель, записав

$$T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = \varkappa^{1/2} T^{\mu\nu}_{\text{мех}}. \tag{4.33}$$

Кроме того, в противоположность электрическому заряду энергия (или масса) по самой своей сути является положительной величиной. Поэтому, если сначала система находилась в вакуумном состоянии, то распределение гравитационных источников в интересующей нас области может устанавливаться лишь за счет переноса энергии и импульса через поверхность, ограничивающую эту область. Рассматривая медленно меняющееся распределение гравитационных источников, для энергии в полной аналогии с формулой (3.94) получаем выражение

$$E(x^0) = -\frac{\varkappa}{8\pi} \int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}') \left[T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, x^0) \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', x^0) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} T(\mathbf{x}, x^0) \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} T(\mathbf{x}', x^0) \right], \tag{4.34}$$

где интенсивность гравитационных источников измеряется в механических единицах.

Ниже, в астрономических приложениях, мы будем рассматривать взаимодействие двух тел, размеры одного из которых (Солнца) таковы, что его можно заменить материальной точкой, причем оно характеризуется одной-единственной компонентой источника $T^{00}(\mathbf{x})$, такой, что

$$\int (d\mathbf{x})\, T^{00}(\mathbf{x}) = M. \tag{4.35}$$

Энергия взаимодействия между Солнцем, находящимся в начале координат, и пробным телом с распределением источников $t_{\mu\nu}(\mathbf{x}, x^0)$ равна:

$$E_{\text{вз}}(x^0) = -\frac{\varkappa}{8\pi} M \int (d\mathbf{x}) \frac{1}{|\mathbf{x}|} [2t^{00}(\mathbf{x}, x^0) + t(\mathbf{x}, x^0)], \tag{4.36}$$

где

$$2t^{00} + t = t^{00} + t_{kk}. \tag{4.37}$$

Если движущееся без деформаций тело имеет импульс p^μ, то

$$t^{\mu\nu} = \sigma p^\mu p^\nu, \tag{4.38}$$

где σ — некоторая инвариантная характеристика распределения массы. Для покоящегося тела с массой m, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием от начала координат R, мы получаем

$$E_{\text{вз}} = -\frac{\varkappa}{8\pi} \frac{Mm}{R}. \tag{4.39}$$

Эта величина совпадает с ньютоновской потенциальной энергией взаимного притяжения двух масс, причем

$$\frac{\varkappa}{8\pi} = G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2 = \tag{4.40}$$
$$= (1{,}62 \cdot 10^{-33}\ \text{см})^2.$$

Вторая строка в этом равенстве отвечает выбору атомной системы единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

Выведем теперь путем элементарных рассуждений четыре экспериментально наблюдающихся эффекта, которые рассматриваются как подтверждение эйнштейновского обобщения ньютоновской теории.

1. Если атом с массой m медленно движется в окрестности тела с массой M, то полная энергия этого атома будет равна $m - (GM/R)\,m$. Таким образом, энергия, высвобождающаяся в процессе его внутренних превращений, уменьшается в $1 - (GM/R)$ раз. А это есть не что иное, как гравитационное красное смещение.

2. Пусть пробным телом будет световой пучок. Для него $t = \sigma p^2 = 0$, и поэтому энергия взаимодействия с Солнцем пре-

вышает соответствующее ньютоновское значение (которое получается при замене массы полной энергией) в 2 раза. В результате увеличится и угол отклонения светового луча по сравнению с его ньютоновским значением, что также вытекает из теории Эйнштейна. Чтобы убедиться в этом путем прямого вычисления, сравним приобретаемый пучком поперечный импульс с его продольным импульсом, считая, что луч проходит на расстоянии ρ от Солнца. Угол отклонения будет равен

$$\Delta\varphi = 2GM\left(-\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(z^2+\rho^2)^{1/2}} = \frac{4GM}{\rho}. \tag{4.41}$$

3. Из-за того же самого взаимодействия скорость света уменьшается в $1-2\,(GM/R)$ раз, так как энергия фотона равна $|\,\mathbf{p}\,|\,(1-2GM/R)$, а скорость получается ее дифференцированием по $\mathbf{p}$. Этот эффект обнаружили, измеряя время запаздывания радиосигналов, отраженных от внутренних планет солнечной системы. Рассмотрим наиболее благоприятное расположение планеты относительно визирной линии, проведенной от Земли и проходящей на расстоянии ρ от Солнца. Тогда дополнительное время запаздывания отраженного сигнала должно быть равным

$$\Delta t = 4GM\int_0^{z_e}\frac{dz}{(z^2+\rho^2)^{1/2}} + 4GM\int_0^{z_p}\frac{dz}{(z^2+\rho^2)^{1/2}} =$$
$$= 4GM\ln\left(\frac{2z_e}{\rho}\,\frac{2z_p}{\rho}\right), \tag{4.42}$$

где z_e — расстояние от наиболее близкой к Солнцу точки до Земли, а z_p — до рассматриваемой планеты. Оказалось, что коэффициент в дифференциальном соотношении

$$-\frac{d(\Delta t)}{d\rho} = \frac{8GM}{\rho} \tag{4.43}$$

хорошо согласуется с экспериментом.

4. Наиболее тонкая и интересная проверка эйнштейновской теории основана, конечно, на прецессии перигелиев планетных орбит. Рассмотрим сначала поправку к ньютоновской потенциальной энергии

$$V = -\frac{GMm}{R}, \tag{4.44}$$

обусловленную движением планеты. При малых скоростях, т. е. при

$$T = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \ll m, \tag{4.45}$$

мы имеем

$$t_{kk} \approx \left(\frac{\mathbf{p}}{m}\right)^2 t^{00} = \frac{2T}{m} t^{00}, \tag{4.46}$$

где

$$\int (d\mathbf{x})\, t^{00}_{\text{кин}}(\mathbf{x}) = m + T. \tag{4.47}$$

Эти эффекты приводят к тому, что ньютоновская потенциальная энергия заменяется величиной

$$V\left(1+\frac{2T}{m}\right)\left(1+\frac{T}{m}\right) \approx V\left(1+\frac{3T}{m}\right). \tag{4.48}$$

Кроме того, нужно учесть примерно того же порядка релятивистскую поправку к кинетической энергии:

$$(\mathbf{p}^2+m^2)^{1/2} - m \approx T - \frac{T^2}{2m}. \tag{4.49}$$

И наконец, имеется вклад в плотность энергии t^{00}, связанный с гравитационным взаимодействием планеты с Солнцем. Его нельзя приписать какой-то определенной массе, он распределен во всем пространстве так, что его можно вычислить с достаточной точностью по формуле для напряженности ньютоновского поля

$$\nabla\left[\frac{M}{|\mathbf{x}|} + \frac{m}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}|}\right]. \tag{4.50}$$

Плотность энергии взаимодействия пропорциональна произведению этих слагаемых и равна

$$t^{00}_{\text{вз}}(\mathbf{x}) = -\frac{G}{4\pi} \nabla \frac{M}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla \frac{m}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}|}, \tag{4.51}$$

в чем можно убедиться путем интегрирования:

$$V = -\frac{G}{4\pi}\int (d\mathbf{x})\, \nabla \frac{M}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla \frac{m}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}|} =$$

$$= \frac{G}{4\pi}\int (d\mathbf{x})\, \frac{M}{|\mathbf{x}|} \nabla^2 \frac{m}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}|} = -\frac{GMm}{R}. \tag{4.52}$$

Энергия взаимодействия массы M с этим распределением массы равна:

$$-GM\int (d\mathbf{x})\, \frac{1}{|\mathbf{x}|}\left(-\frac{GMm}{4\pi}\right) \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}|} =$$

$$= \frac{G^2M^2m}{4\pi}\int (d\mathbf{x})\, \frac{1}{2} \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}|} = \frac{1}{2}\frac{G^2M^2m}{R^2} = \frac{V^2}{2m}. \tag{4.53}$$

Собирая все дополнительные члены взаимодействия, получаем

$$V\frac{3T}{m} - \frac{T^2}{2m} + \frac{V^2}{2m}. \tag{4.54}$$

Это выражение можно упростить, воспользовавшись нерелятивистской формулой для энергии $E = T + V$, которая позволяет исключить T, выразив его через V. Дополнительное слагаемое, пропорциональное V, не приводит к прецессии перигелия — оно лишь несколько изменяет размеры орбиты. Существенную поправку к ньютоновскому потенциалу дает член с V^2, которым и обусловлена прецессия перигелия. Получающаяся в результате эффективная потенциальная энергия равна

$$V_{\text{эфф}} = V - \frac{3V^2}{m}. \tag{4.55}$$

Итак, мы можем написать следующее уравнение орбиты:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{1}{L_1^2}\frac{d}{du}\frac{V_{\text{эфф}}}{m}, \tag{4.56}$$

где

$$u = \frac{1}{R}, \tag{4.57}$$

а L_1 — угловой момент, приходящийся на единицу массы планеты (его часто обозначают через h). Здесь мы имеем

$$\frac{d}{du}\left(\frac{V_{\text{эфф}}}{m}\right) = -GM - 6G^2M^2u, \tag{4.58}$$

и поэтому

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left(1 - \frac{6G^2M^2}{L_1^2}\right)u = \frac{GM}{L_1^2}. \tag{4.59}$$

Отсюда видно, что самым существенным отклонением от ньютоновских соотношений будет уменьшение углового масштаба в $1 - 3G^2M^2/L_1^2$ раз, которое приводит к тому, что угол между двумя последовательными прохождениями перигелия будет больше 2π. Этот угол прецессии перигелия равен

$$\Delta\varphi = 6\pi G^2M^2/L_1^2, \tag{4.60}$$

что в точности совпадает с результатом Эйнштейна. [Он выразил этот угол через большую полуось a, период T и эксцентриситет e. Связь устанавливается соотношением

$$\frac{GM}{L_1} = 2\pi\frac{a}{T}(1 - e^2)^{-1/2}.]$$

§ 5. ЧАСТИЦЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЦЕЛЫМ СПИНОМ

В случае частиц с единичным спином естественно было заменить скалярный источник бесспиновых частиц векторным, а в случае частиц со спином 2 — тензорным источником. Закон изменения векторного источника, например, при инфинитезимальном однородном преобразовании Лоренца дается формулой (3.22), которую мы напишем в виде

$$\delta J^{\lambda}(x)=\frac{i}{2}\delta\omega^{\mu\nu}\left[\left(x_{\mu}\frac{1}{i}\partial_{\nu}-x_{\nu}\frac{1}{i}\partial_{\mu}\right)J^{\lambda}(x)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{i}\left(\delta_{\mu}^{\lambda}g_{\nu\varkappa}-\delta_{\nu}^{\lambda}g_{\mu\varkappa}\right)J^{\varkappa}(x)\right]. \qquad (5.1)$$

Здесь орбитальный и спиновый моменты взяты в четырехмерном виде. Это частный случай общего линейного закона изменения многокомпонентного объекта

$$\bar{S}(\bar{x})=L(l)\,S(x), \qquad (5.2)$$

при неоднородном преобразовании Лоренца

$$\bar{x}^{\mu}=l^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}-\varepsilon^{\mu}, \qquad l^{\mu}{}_{\varkappa}g_{\mu\nu}l^{\nu}{}_{\lambda}=g_{\varkappa\lambda}. \qquad (5.3)$$

Элементы соответствующего многокомпонентного источника всегда можно выбрать вещественными, причем благодаря вещественности матрицы преобразования $L(l)$ это свойство носит инвариантный характер. В соответствии с законом композиции двух последовательно выполняемых преобразований Лоренца

$$\bar{\bar{x}}^{\mu}=l_1{}^{\mu}{}_{\nu}\bar{x}^{\nu}-\varepsilon_1{}^{\mu}, \qquad \bar{x}^{\nu}=l_2{}^{\nu}{}_{\lambda}x^{\lambda}-\varepsilon_2{}^{\nu}, \qquad (5.4)$$

который имеет вид

$$\bar{\bar{x}}^{\mu}=(l_1l_2)^{\mu}{}_{\lambda}x^{\lambda}-(\varepsilon_1{}^{\mu}+l_1{}^{\mu}{}_{\nu}\varepsilon_2{}^{\nu}), \qquad (l_1l_2)^{\mu}{}_{\lambda}=l_1{}^{\mu}{}_{\nu}l_2{}^{\nu}{}_{\lambda}, \qquad (5.5)$$

мы получим

$$\bar{\bar{S}}(\bar{\bar{x}})=L(l_1)\,\bar{S}(\bar{x}), \qquad \bar{S}(\bar{x})=L(l_2)\,S(x) \qquad (5.6)$$

и

$$\bar{\bar{S}}(\bar{\bar{x}})=L(l_1)\,L(l_2)\,S(x)=L(l_1l_2)\,S(x). \qquad (5.7)$$

Именно в этом смысле конечные матрицы $L(l)$ образуют матричное представление однородной группы Лоренца.

Для инфинитезимальных преобразований

$$l^{\mu}{}_{\nu}=\delta_{\nu}^{\mu}+\delta\omega_{\nu}^{\mu}, \qquad \delta\omega_{\mu\nu}=-\delta\omega_{\nu\mu} \qquad (5.8)$$

можно написать

$$L(l)=1+\frac{i}{2}\delta\omega^{\mu\nu}s_{\mu\nu}, \qquad (5.9)$$

и мы приходим к выводу, что матрицы $s_{\mu\nu}=-s_{\nu\mu}$, мнимые при вещественном $L(l)$, удовлетворяют коммутационным соотношениям, в которых находит свое выражение закон композиции для элементов шестипараметрической однородной группы [ср. с соотношениями (3.10) из гл. 1]:

$$\frac{1}{i}[s_{\mu\nu}, s_{\varkappa\lambda}] = g_{\mu\varkappa}s_{\nu\lambda} - g_{\nu\varkappa}s_{\mu\lambda} + g_{\nu\lambda}s_{\mu\varkappa} - g_{\mu\lambda}s_{\nu\varkappa}. \tag{5.10}$$

В полном виде закон изменения $S(x)$ при инфинитезимальных преобразованиях Лоренца записывается следующим образом:

$$\delta S(x) = i\delta\varepsilon^{\mu}\frac{1}{i}\partial_{\mu}S(x) + \\ + \frac{i}{2}\delta\omega^{\mu\nu}\left[x_{\mu}\frac{1}{i}\partial_{\nu} - x_{\nu}\frac{1}{i}\partial_{\mu} + s_{\mu\nu}\right]S(x). \tag{5.11}$$

Сравнивая это выражение с (5.1), мы получаем в качестве примера четырехрядные мнимые спиновые матрицы $s_{\mu\nu}$:

$$(s_{\mu\nu})^{\lambda}{}_{\varkappa} = \frac{1}{i}(\delta^{\lambda}_{\mu}g_{\nu\varkappa} - \delta^{\lambda}_{\nu}g_{\mu\varkappa}). \tag{5.12}$$

Отсюда видно, в частности, что

$$(s_{12})^{1}{}_{2} = -(s_{12})^{2}{}_{1} = -i, \qquad (s_{03})^{0}{}_{3} = +(s_{03})^{3}{}_{0} = -i, \tag{5.13}$$

т. е. матрицы s_{kl} антисимметричны, а следовательно, эрмитовы, тогда как матрицы s_{0k} симметричны и антиэрмитовы. Невозможность выбрать все матрицы $s_{\mu\nu}$ эрмитовыми предопределена заранее, ибо, как показывает анализ, проведенный в гл. 1, § 1, незамкнутостью многообразия группы Лоренца исключается существование какой бы то ни было конечномерной реализации данной группы. Этот запрет не распространяется на связанную с ней евклидову группу, и действительно, соответствие ($x_4 = ix^0$)

$$s_{0k} = -is_{k4}, \quad (s_{\mu\nu})^{0}{}_{k} = -i(s_{\mu\nu})_{4k}, \quad (s_{\mu\nu})^{k}{}_{0} = i(s_{\mu\nu})_{k4} \tag{5.14}$$

приводит к евклидовым спиновым матрицам

$$(s_{\mu\nu})_{\lambda\varkappa} = \frac{1}{i}(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\varkappa} - \delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\varkappa}) \tag{5.15}$$

которые все мнимы, антисимметричны и эрмитовы.

Такого рода реализация лоренцевских генераторов дифференциальными операторами и матрицами резко отличается от операторных выражений (3.42) и (3.72) из гл. 1, так как в последние вместо конечных антиэрмитовых матриц s_{0k} входят эрмитовы операторы, являющиеся функциями импульса. Возникает вопрос, каким образом согласовать между собой эти совершенно различные структуры. Должно существовать некоторое связывающее их преобразование, которое сохраняло бы коммутационные соотношения, но нарушало эрмитовость, т. е. было бы неунитарным. Требуемый ответ подсказывается следующим преобразованием, которое соответствует медленно движущейся частице ($p^0 \sim m$):

$$\exp\left[\pm\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{m}\right)\right](-m\mathbf{r})\exp\left[\mp\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{m}\right)\right]=$$

$$=-m\mathbf{r}\pm[\mathbf{r},\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{s}]-\frac{1}{2m}[[\mathbf{r},\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{s}],\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{s}]+\ldots\approx$$

$$\approx -m\mathbf{r}\pm i\mathbf{s}-\frac{1}{2m}\mathbf{s}\times\mathbf{p}, \tag{5.16}$$

или

$$\exp\left[\pm\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{m}\right)\right]\left(-m\mathbf{r}+\frac{1}{2m}\mathbf{s}\times\mathbf{p}\right)\exp\left(\mp\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{m}\right)\right]\approx$$

$$\approx -m\mathbf{r}\pm i\mathbf{s}. \tag{5.17}$$

Здесь мы видим, каким образом за счет введения антиэрмитовых операторов можно исключить зависимость от импульса. Аналогичное преобразование для произвольного импульса имеет следующий вид:

$$\exp\left[\pm\theta\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{p}|}\right)\right]\left(-\mathbf{r}p^0+\frac{1}{p^0+m}\mathbf{s}\times\mathbf{p}\right)\exp\left[\mp\theta\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{p}|}\right)\right]=$$

$$=-\mathbf{r}p^0\pm i\mathbf{s}, \tag{5.18}$$

где

$$\operatorname{sh}\theta=\frac{|\mathbf{p}|}{m},\qquad \operatorname{ch}\theta=\frac{p^0}{m}. \tag{5.19}$$

Проверка этого утверждения сильно упростится, если рассматривать компоненту, параллельную вектору $\mathbf{p}$, и компоненту, перпендикулярную ему. В первом случае мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\theta(|\mathbf{p}|)}{d|\mathbf{p}|}=\frac{1}{p^0}, \tag{5.20}$$

определяющее θ, а во втором — соотношение

$$\exp\left[\pm\theta\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{p}|}\right)\right]\mathbf{s}\exp\left[\mp\theta\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{p}|}\right)\right]=\frac{1}{m}\left[p^0\mathbf{s}-\frac{\mathbf{p}\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{p^0+m}\pm i\mathbf{s}\times\mathbf{p}\right], \tag{5.21}$$

которое описывает поведение вектора $\mathbf{s}$ при «вращении», задаваемом углом θ. Попутно отметим, что если частица имеет импульс $\mathbf{p}$, направленный вдоль третьей оси, то переход к системе покоя этой частицы осуществляется путем преобразования

$$\begin{aligned}\bar{x}^3 &= x^3\operatorname{ch}\theta - x^0\operatorname{sh}\theta,\\ \bar{x}^0 &= -x^3\operatorname{sh}\theta + x^0\operatorname{ch}\theta.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Появление $\pm is_k$ в роли

$$n_k = s^0{}_k \tag{5.23}$$

имеет очень простое объяснение. Коммутационные соотношения для $s_{\mu\nu}$ упрощаются, если ввести линейные комбинации вида

$$\begin{aligned} s_3^{(1)} &= \frac{1}{2}(s_{12}+i^*s_{12}) = \frac{1}{2}(s_{12}+is_{03}), \\ s^{(2)} &= \frac{1}{2}(s_{12}-i^*s_{12}) = \frac{1}{2}(s_{12}-is_{03}) \end{aligned} \tag{5.24}$$

и величины, получающиеся из них путем циклической перестановки. Все четырехмерные коммутационные соотношения содержатся в трехмерных коммутационных соотношениях для двух независимых угловых моментов:

$$\mathbf{s}^{(1)} \times \mathbf{s}^{(1)} = i\mathbf{s}^{(1)}, \qquad \mathbf{s}^{(2)} \times \mathbf{s}^{(2)} = i\mathbf{s}^{(2)} \tag{5.25}$$

И наоборот, мы можем построить величины $(s_{12} = s_3, \ldots)$

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{(1)} + \mathbf{s}^{(2)}, \qquad \mathbf{n} = i(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}), \tag{5.26}$$

причем, если для $\mathbf{s}^{(1,\,2)}$ использовать обычные эрмитовы матричные представления, то матрицы $\mathbf{s}$ будут эрмитовыми, а матрицы $\mathbf{n}$ — антиэрмитовыми. В соотношении (5.18) мы сталкиваемся с частным случаем, когда или $\mathbf{s}^{(2)} = 0$, или $\mathbf{s}^{(1)} = 0$. В более общем случае, соответствующем равенствам (5.18), следует считать, что спин $\mathbf{s}$ возникает как результат сложения каких-то других спинов. Поскольку его часто бывает удобнее строить из еще более элементарных спинов, мы сформулируем следующую общую теорему. Обозначим через λ_α любые коммутирующие объекты, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_\alpha^2 = 1, \tag{5.27}$$

а через

$$\mathbf{s} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \mathbf{s}_\alpha \tag{5.28}$$

— суперпозицию независимых спинов; тогда

$$B^{-1}\left(-\mathbf{r}p^0 + \frac{1}{p^0+m}\,\mathbf{s}\times\mathbf{p}\right)B = -\mathbf{r}p^0 + i\sum_\alpha \lambda_\alpha \mathbf{s}_\alpha, \tag{5.29}$$

где

$$B(p) = \exp\left[-\theta\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\mathbf{p}}\right)\cdot\sum_\alpha \lambda_\alpha \mathbf{s}_\alpha\right]. \tag{5.30}$$

Чтобы доказать это утверждение, нужно, как и раньше, воспользоваться соотношениями

$$B^{-1}\mathbf{s}_\alpha B = \frac{1}{m}\left[p^0\mathbf{s}_\alpha - \frac{\mathbf{p}\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}_\alpha}{p^0+m} + i\lambda_\alpha \mathbf{s}_\alpha \times \mathbf{p}\right]. \tag{5.31}$$

Ясно, что матрицы общего вида

$$\mathbf{s} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \mathbf{s}_\alpha, \qquad \mathbf{n} = i\sum_{\alpha=1}^{\nu} \lambda_\alpha \mathbf{s}_\alpha \tag{5.32}$$

удовлетворяют всем необходимым коммутационным соотношениям, в том числе и такому:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n} = -i\mathbf{s}. \tag{5.33}$$

Заметим, что антиэрмитовость $\mathbf{n}$ сохраняется при использовании в качестве λ_α наряду с числами ± 1 также и эрмитовых матриц.

Мы не излагаем здесь полностью процедуру симметризации по $\mathbf{r}$ и p^0, так как она совершенно аналогична соответствующей процедуре в случае нулевого спина. Закон изменения состояния $\langle p|$ при инфинитезимальном преобразовании Лоренца теперь выглядит следующим образом:

$$\delta\left((p^0)^{1/2}\langle p|\right) = \left[i\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\left(i\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\times\mathbf{p}+\mathbf{s}\right)+i\delta\mathbf{v}\cdot\left(-p^0 i\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{p^0+m}\mathbf{s}\times\mathbf{p}\right)\right](p^0)^{1/2}\langle p|, \tag{5.34}$$

где спиновые операторы заменены спиновыми матрицами, что находит свое выражение в записи

$$\langle p|\mathbf{s} = \mathbf{s}\langle p|, \tag{5.35}$$

причем матрицы действуют на невыписанные индексы вектора состояния $\langle p|$. После подстановки

$$(p^0)^{1/2}\langle p|\,0_-\rangle^S \sim B(p)\,S(p), \tag{5.36}$$

в которой следует еще уточнить численные множители, мы получим

$$\delta S(p) = \left[\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\mathbf{p}\times\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}+i\mathbf{s}\right)+\delta\mathbf{v}\cdot\left(p^0\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}+i\mathbf{n}\right)\right]S(p). \tag{5.37}$$

Записывая

$$S(p) = \int (dx)\, e^{-ipx} S(x), \tag{5.38}$$

будем иметь

$$\delta S(x) = \frac{1}{2}\,\delta\omega^{\mu\nu}\left(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + is_{\mu\nu}\right)S(x), \tag{5.39}$$

где $s_{\mu\nu}$ — матрицы, определяемые формулами (5.32). Аналогичная конструкция для $\langle 0_+\,|\,p\rangle^S$ имеет вид [см. формулу (1.25)]

$$(p^0)^{1/2}\langle 0_+\,|\,p\rangle^S \sim S(p)^*\,B(p), \tag{5.40}$$

что предполагает эрмитовость $B(p)$. При инфинитезимальных преобразованиях Лоренца величина $S(x)^*$ будет вести себя так же, как и $S(x)$, но с заменой матриц $s_{\mu\nu}$ на $-s^*_{\mu\nu}$. Как уже упоминалось выше, вещественность величины $S(x)$ приводит к необходимости использования матричных представлений с мнимыми $s_{\mu\nu}$.

Компактные обозначения, применяемые в формуле (5.36), могут завуалировать одно существенное обстоятельство. Описывая частицу с определенным значением спина, мы прибегаем к конструкциям типа (5.26), но при этом ее приходится рассматривать как часть некоторой более широкой системы. Поэтому перед произведением $B(p)\,S(p)$ должен стоять какой-то множитель, который выделял бы явным образом интересующие нас состояния. Чтобы проиллюстрировать эту ситуацию и в то же время привести простой пример связи между рассматриваемым здесь матричным подходом и описанными ранее методами, положим

$$\mathbf{s}^{(1,2)}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{(1,2)}. \tag{5.41}$$

При сложении двух спинов $^1/_2$ получается либо $s=1$, либо $s=0$. Если мы хотим рассматривать частицы с единичным спином, то их следует выделить из этой более широкой системы. Хорошо известно, что спиновые функции триплета $s=1$ можно записать как

$$\begin{gathered}\chi_{\pm1}(\sigma^{(1)}\sigma^{(2)})=\left\langle\sigma^{(1)}\left|\frac{1}{2}(1\pm\sigma_3)\right|\sigma^{(2)}\right\rangle,\\ \chi_0(\sigma^{(1)}\sigma^{(2)})=\langle\sigma^{(1)}\,|\,2^{-1/2}\sigma_1\,|\,\sigma^{(2)}\rangle,\end{gathered} \tag{5.42}$$

или в другом варианте, сохраняющем вещественность и симметрию этих функций, как

$$\chi_\lambda(\sigma^{(1)}\sigma^{(2)})^*=-i2^{-1/2}\langle\sigma^{(2)}\,|\,\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_\lambda^*\,|\,\sigma^{(1)}\rangle, \tag{5.43}$$

где

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_{+1}^*=2^{-1/2}(-\sigma_1+i\sigma_2),\qquad \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_{-1}^*=2^{-1/2}(\sigma_1+i\sigma_2),\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_0^*=\sigma_3.\end{gathered} \tag{5.44}$$

Три определенных таким образом пространственных вектора образуют ортонормированную систему, т. е.

$$\mathbf{e}_\lambda^*\cdot\mathbf{e}_{\lambda'}=\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{5.45}$$

Приведем также выражение для синглетной функции:

$$\chi_0(\sigma^{(1)}\sigma^{(2)})^*=-i2^{-1/2}\langle\sigma^{(2)}\,|\,\sigma_2\,|\,\sigma^{(1)}\rangle. \tag{5.46}$$

При этом мы исходим из антисимметрии матрицы Паули σ_2, тогда как выражения (5.43) основываются на симметрии трех произведений $\sigma_2\sigma_k$. Все эти свойства симметрии можно записать также в виде

$$-\sigma_k{}^T=\sigma_2\sigma_k\sigma_2. \tag{5.47}$$

Соответствующее разложение четырехкомпонентного источника на синглетную и триплетные функции удобно представить в форме

$$S_{\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}}(p)=-2^{-1/2}\langle\sigma^{(1)}\,|\,\sigma^\mu J_\mu(p)\,\sigma_2\,|\,\sigma^{(2)}\rangle, \tag{5.48}$$

где

$$\sigma_0 = -\sigma^0 = 1. \tag{5.49}$$

Исследуем теперь выражение для источника частиц с единичным спином

$$J_{p\lambda} = -i\,(d\omega_p)^{1/2}\,\chi_\lambda^* B(p)\,S(p), \tag{5.50}$$

в котором предусмотрены все необходимые множители. Применяя последовательно матричную символику, получаем:

$$(d\omega_p)^{-1/2} J_{p\lambda} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,[\sigma\cdot\mathbf{e}_\lambda^* b(p)\,\sigma^\mu J_\mu(p)\,b(p)] = e_{p\lambda}^{\mu *} J_\mu(p), \tag{5.51}$$

где

$$b(p) = \exp\left[-\frac{{}^1\!/_2\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right]. \tag{5.52}$$

Прежде всего заметим, что величины

$$e_{p\lambda}^{\mu *} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_\lambda^* b(p)\,\sigma^\mu b(p)] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,[\sigma^\mu b(p)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_\lambda^* b(p)] \tag{5.53}$$

удовлетворяют равенствам

$$p_\mu e_{p\lambda}^{\mu *} = 0, \tag{5.54}$$

так как

$$p^\mu \sigma_\mu = m\left(\mathrm{ch}\,\theta + \frac{\mathrm{sh}\,\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right) = m\,[b(p)^{-1}]^2 \tag{5.55}$$

и

$$\mathrm{Sp}\,\sigma_k = 0. \tag{5.56}$$

Рассмотрим далее выражение

$$e_{p\lambda}^{\mu *} e_{\mu p\lambda'} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\sigma^\mu b\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_\lambda^* b)\,\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\sigma_\mu b\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_{\lambda'} b), \tag{5.57}$$

в котором вид второго сомножителя диктуется эрмитовостью матриц $b(p)$ и σ_μ. Четыре матрицы $2^{-1/2}\sigma_\mu$ играют роль ортонормированного базиса в пространстве квадратных матриц второго порядка, о чем свидетельствует тождество

$$\begin{aligned}(\mathrm{Sp}\,\sigma^\mu X)(\mathrm{Sp}\,\sigma_\mu Y) &= (\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\sigma}X)\cdot(\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{\sigma}Y) - (\mathrm{Sp}\,X)(\mathrm{Sp}\,Y) = \\ &= 2\,[\mathrm{Sp}\,(XY) - (\mathrm{Sp}\,X)(\mathrm{Sp}\,Y)] = \\ &= \det(X-Y) - \det(X+Y).\end{aligned} \tag{5.58}$$

Мультипликативные свойства определителей и равенство

$$\det b(p) = 1, \tag{5.59}$$

вытекающие из (5.56), позволяют исключить $b(p)$ из выражения (5.57), и в результате мы получаем

$$e_{p\lambda}^{\mu *} e_{\mu p\lambda'} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_\lambda^*\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_{\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{5.60}$$

Рассмотрим, наконец, сумму

$$\sum_{\lambda} e_{p\lambda}^{\mu *} e_{p\lambda}^{\nu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(b\sigma^{\mu} b\sigma)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\sigma b\sigma^{\nu} b) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\sigma^{\mu} b^2)\,\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\sigma^{\nu} b^2) + \frac{1}{2}\,[\mathrm{Sp}\,(\sigma^{\mu}\sigma^{\nu}) - (\mathrm{Sp}\,\sigma^{\mu})\,(\mathrm{Sp}\,\sigma^{\nu})]. \qquad (5.61)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,[\sigma^{\mu} b\,(p)^2] = -\frac{p^{\mu}}{m}, \qquad (5.62)$$

$$\frac{1}{2}\,[\mathrm{Sp}\,(\sigma^{\mu}\sigma^{\nu}) - (\mathrm{Sp}\,\sigma^{\mu})\,(\mathrm{Sp}\,\sigma^{\nu})] = g^{\mu\nu}, \qquad (5.63)$$

будем иметь

$$\sum_{\lambda} e_{p\lambda}^{\mu *} e_{p\lambda}^{\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\,p^{\mu} p^{\nu} = \bar{g}^{\mu\nu}(p). \qquad (5.64)$$

Итак, мы снова приходим ко всем ковариантным свойствам трех векторов поляризации, отвечающих единичному спину. Если в формуле (5.44) отождествить третью ось с направлением вектора импульса $\mathbf{p}$, то явные выражения, получаемые из (5.53), будут в точности совпадать с векторами (3.28) и (3.29), нумеруемыми спиральными индексами. Заметим, что если вместо триплетных взять синглетную функцию, то мы получим величину

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\sigma^{\mu} b\,(p)^2)\,J_{\mu}(p) = -\frac{1}{m}\,p^{\mu} J_{\mu}(p), \qquad (5.65)$$

т. е. такую скалярную комбинацию, которой и следовало ожидать.

В качестве основы аналогичного анализа в случае произвольного целого спина рассмотрим следующие комбинации спинов:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{2}\,\sigma_{\alpha}^{(1)}, \qquad \mathbf{s}^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{2}\,\sigma_{\alpha}^{(2)}, \qquad (5.66)$$

где каждая из матриц действует на соответствующий индекс источника

$$S_{\sigma_1^{(1)}, \ldots, \sigma_n^{(1)} \sigma_1^{(2)}, \ldots, \sigma_n^{(2)}}(p). \qquad (5.67)$$

Поскольку все матрицы $\sigma_{\alpha}^{(1,2)}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ выступают на совершенно равной основе, мы наложим непротиворечивое условие симметрии, потребовав, чтобы величина (5.67) не изменялась при любой перестановке индексов, при которой $\sigma_{\alpha}^{(1)}$ и $\sigma_{\alpha}^{(2)}$ рассматриваются в качестве некоторого единого комплекса. Таким образом, при $n = 2$ мы будем иметь

$$S_{\sigma_1^{(1)}\sigma_2^{(1)}\sigma_1^{(2)}\sigma_2^{(2)}} = S_{\sigma_2^{(1)}\sigma_1^{(1)}\sigma_2^{(2)}\sigma_1^{(2)}}. \qquad (5.68)$$

Проще всего заменить каждый парный индекс $\sigma_\alpha^{(1)}\sigma_\alpha^{(2)}$, принимающий четыре значения, одним четырехмерным векторным индексом μ_α так, как подробно говорилось в случае единичного спина. В результате мы придем к эквивалентному источнику

$$S_{\mu_1\ldots\mu_n}(p), \tag{5.69}$$

не меняющемуся при перестановках индексов α.

Тензор ранга n в том виде, как он введен здесь, описывает систему, более широкую, чем частицы с определенным значением спина. Необходимая редукция частично обеспечивается наличием в соотношении

$$S_1^{\mu_1\ldots\mu_n}(p)^*\,\bar{g}_{\mu_1\nu_1}(p)\ldots\bar{g}_{\mu_n\nu_n}(p)\,S_2^{\nu_1\ldots\nu_n}(p)\to S^*_{1k_1\ldots k_n}S_{2k_1\ldots k_n} \tag{5.70}$$

(величина, стоящая справа, вычислена в системе покоя импульса p^μ), выражающем связь между источниками, проекционных множителей $\bar{g}_{\mu\nu}(p)$, сопоставляемых каждому векторному индексу. Число независимых компонент у симметричного трехмерного тензора $S_{k_1\ldots k_n}$, равное $^1/_2\,(n+1)\,(n+2)$, согласуется с числом состояний, свойственных симметричному набору n единичных спинов. Полное спиновое квантовое число лежит в пределах от $s=n$, принимая значения $s=n-2,\ n-4,\ \ldots$, до 1 или до 0 в зависимости от того, четно или нечетно n; при этом

$$\sum(2s+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Случай, когда при сложении двух единичных спинов получается спин 0, соответствует тому, что берется след по паре индексов, как в тензоре $S_{kkk_3\ldots k_n}$. Чтобы исключить такую возможность, оставив тем самым лишь значение спина $s=n$, следует образовать тензор $S_{k_1\ldots k_n}$, любой след которого равен нулю. Вычитая соответствующее число ограничений, мы получаем, что число независимых компонент равно:

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}(n-1)\,n=2n+1, \tag{5.71}$$

как этого и следовало ожидать для спина $s=n$.

Результат последовательного вычитания следов можно представить в следующей симметричной форме:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{k_1\ldots k_n}x_{k_1}\ldots x_{k_n}={}&S_{k_1\ldots k_n}x_{k_1}\ldots x_{k_n}+\\&+c_{n1}x^2S_{kkk_3\ldots k_n}x_{k_3}\ldots x_{k_n}+\\&+c_{n2}(x^2)^2S_{kkk'k'k_5\ldots k_n}x_{k_5}\ldots x_{k_n}+\ldots,\end{aligned} \tag{5.72}$$

где $x^2=(x_k)^2$ и требуется, чтобы выполнялось условие

$$\bar{S}_{kkk_3\ldots k_n}=0. \tag{5.73}$$

Благодаря полной симметрии тензора это условие обеспечивает обращение в нуль следа по любой паре индексов. Таким образом, мы приходим к хорошо известной задаче. Как это следует из равенства (5.73), полином степени n, определяемый формулой (5.72), является решением уравнения Лапласа. Если положить x^2 равным единице, то он будет сферической гармоникой степени n. Чтобы найти коэффициенты c_{nm}, достаточно рассмотреть случай, когда отлична от нуля единственная компонента $S_{33\ldots 3} = 1$. Положив $x^2 = 1$, $x_3 = \mu$, мы получим полином

$$\mu^n + c_{n1}\mu^{n-2} + \ldots, \tag{5.74}$$

который должен быть пропорциональным полиному Лежандра $P_n(\mu)$. Следовательно,

$$m \leqslant \frac{1}{2} n: \quad c_{nm} = \frac{(-1)^m}{m!}\frac{(2n-2m)!}{(2m)!}\frac{n!}{(n-m)!}\frac{n!}{(n-2m)!}. \tag{5.75}$$

В произвольной системе отсчета можно написать

$$\begin{aligned}\bar{S}_{\mu_1\ldots\mu_n}(p)\, x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n} &= S_{\mu_1\ldots\mu_n}(p)\, x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n} + \\ &+ c_{n1}x^\lambda x_\lambda \bar{g}^{\mu_1\mu_2}(p)\, S_{\mu_1\mu_2\mu_3\ldots\mu_n}(p)\, x^{\mu_3}\ldots x^{\mu_n} + \ldots .\end{aligned} \tag{5.76}$$

Тем самым мы обобщили конструкцию (2.45), отвечающую случаю $\mu = 2$, и получили симметричные тензоры ранга n, удовлетворяющие условию

$$\bar{g}^{\mu_1\mu_2}\bar{S}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}(p) = 0, \tag{5.77}$$

если только считать, что при использовании такого рода тензоров в действительности следует выделять их трехмерные части, т. е. совершать переход (5.70).

Теперь связь между источниками можно представить в другой форме:

$$\begin{aligned}\bar{S}_1^{\mu_1\ldots\mu_n}(p)^*\, \bar{g}_{\mu_1\nu_1}(p)\ldots \bar{g}_{\mu_n\nu_n}(p)\, \bar{S}_2^{\nu_1\ldots\nu_n}(p) &= \\ = S_1^{\mu_1\ldots\mu_n}(p)^*\, \Pi_{\mu_1\ldots\mu_n,\,\nu_1\ldots\nu_n}(p)\, S_2^{\nu_1\ldots\nu_n}(p).\end{aligned} \tag{5.78}$$

Проекционный тензор Π дается равенством

$$\begin{aligned}x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n}\Pi_{\mu_1\ldots\mu_n,\,\nu_1\ldots\nu_n}(p)\, y^{\nu_1}\ldots y^{\nu_n} &= \\ = (x\cdot y)^n + c_{n1}(x\cdot x)(x\cdot y)^{n-2}(y\cdot y) + \ldots &= \\ = [(x\cdot x)(y\cdot y)]^{n/2}\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}P_n(\mu),\end{aligned} \tag{5.79}$$

где, например,

$$x\cdot y = x^\mu \bar{g}_{\mu\nu}(p)\, y^\nu \tag{5.80}$$

и

$$\mu = \frac{x\cdot y}{[(x\cdot x)(y\cdot y)]^{1/2}}. \tag{5.81}$$

В силу теоремы сложения для сферических гармоник мы приходим к факторизации вида

$$x^{\mu_1} \ldots x^{\mu_n} \Pi_{\mu_1 \ldots \mu_n, \nu_1 \ldots \nu_n}(p) y^{\nu_1} \ldots y^{\nu_n} = \\ = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{\lambda=-n}^{n} Y_{n\lambda}(x) Y_{n\lambda}(y)^*, \tag{5.82}$$

хотя здесь и входят символы $Y_{n\lambda}$, обозначающие сферические функции в четырехмерном пространстве. Отсюда мы заключаем, что имеет место следующее диадное представление:

$$\Pi^{\mu_1 \ldots \mu_n, \nu_1 \ldots \nu_n}(p) = \sum_{\lambda=-n}^{n} e_{p\lambda}^{\mu_1 \ldots \mu_n} e_{p\lambda}^{\nu_1 \ldots \nu_n *}, \tag{5.83}$$

в котором

$$e_{p\lambda}^{\mu_1 \ldots \mu_n} x_{\mu_1} \ldots x_{\mu_n} = \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{4\pi}{2n+1} \right]^{1/2} Y_{n\lambda}(x). \tag{5.84}$$

Сферические функции используются здесь в несколько символическом смысле. Их можно исключить, введя производящую функцию

$$\frac{(\nu \cdot x)^n}{n!} = \left(\frac{4\pi}{2n+1} \right)^{1/2} \sum_{\lambda=-n}^{n} \frac{\xi_+^{n+\lambda} \xi_-^{n-\lambda}}{[(n+\lambda)!\,(n-\lambda)!]^{1/2}} Y_{n\lambda}(x), \tag{5.85}$$

где в двухкомпонентной матричной символике

$$\nu_\mu = -\frac{i}{2} (\xi \sigma_2 \sigma_\mu \xi). \tag{5.86}$$

Вводя для простоты сокращенное обозначение

$$\psi_{n\lambda}(\xi) = \left[\frac{(2n)!}{(n+\lambda)!\,(n-\lambda)!} \right]^{1/2} \xi_+^{n+\lambda} \xi_-^{n-\lambda}, \tag{5.87}$$

при произвольном n получим

$$\sum_{\lambda=-n}^{n} \psi_{n\lambda}(\xi) e_{p\lambda}^{\mu_1 \ldots \mu_n} x_{\mu_1} \ldots x_{\mu_n} = (2^{1/2} \nu \cdot x)^n; \tag{5.88}$$

в частности, при $n = 1$

$$\sum_{\lambda=-1}^{1} \psi_{1\lambda}(\xi) e_{p\lambda}^{\mu} x_\mu = 2^{1/2} \nu \cdot x. \tag{5.89}$$

Таким образом, мы можем строить векторы поляризации для спина n из векторов поляризации для единичного спина:

$$\sum_{\lambda=-n}^{n} \psi_{n\lambda}(\xi) e_{p\lambda}^{\mu_1 \ldots \mu_n} x_{\mu_1} \ldots x_{\mu_n} = \Big[\sum_{\lambda=-1}^{1} \psi_{1\lambda}(\xi) e_{p\lambda}^{\mu} x_\mu \Big]^n. \tag{5.90}$$

Отсюда сразу же следуют уже известные нам соотношения (4.18) для случая $n = 2$. Нетрудно убедиться, что $2n + 1$ тензоров поляризации образуют ортонормированную систему. Для этого нужно взять одно из таких выражений и умножить его на комплексно-сопряженное другому, заменив в последнем x^μ на $\partial/\partial x_\mu$. Это дает

$$\sum_{\lambda, \lambda'} \psi_{n\lambda}(\xi^*)\, e_{p\lambda}^{\mu_1 \dots \mu_n *} e_{\mu_1 \dots \mu_n p\lambda'} \psi_{n\lambda'}(\eta) = (\xi^* \eta)^{2n}, \tag{5.91}$$

откуда

$$e_{p\lambda}^{\mu_1 \dots \mu_n *} e_{\mu_1 \dots \mu_n p\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{5.92}$$

Итак, источник, испускающий частицу, которая находится в определенном состоянии $p\lambda$, имеет вид

$$S_{p\lambda} = (d\omega_p)^{1/2}\, e_{p\lambda}^{\mu_1 \dots \mu_n *} S_{\mu_1 \dots \mu_n}(p). \tag{5.93}$$

Полное описание процессов многочастичного испускания и поглощения частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, дает нам вакуумная амплитуда

$$\langle 0_+ \mid 0_- \rangle^S = \exp\left[iW(S)\right]. \tag{5.94}$$

Чтобы написать $W(S)$ в максимально компактной форме, воспользуемся четырехмерным представлением (1.61) функции $\Delta_+(x - x')$; в результате получим

$$W(S) = \frac{1}{2} \int \frac{dp}{(2\pi)^4} S^{\mu_1 \dots \mu_n}(-p) \frac{\Pi_{\mu_1 \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_n}(p)}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} S^{\nu_1 \dots \nu_n}(p). \tag{5.95}$$

Тензор $\Pi(p)$ сохраняет свою алгебраическую структуру (5.79) и является четным по p полиномом степени $2n$. Примером записи функции $W(S)$ через переменные координатного пространства служат равенства (3.4) и (4.20), отвечающие случаям $n = 1$ и $n = 2$. Все обобщения, о которых говорилось ранее в связи с конкретными примерами, могут быть проведены и в случае произвольного целого спина.

Мы ни разу не упоминали о четности, как о независимой характеристике состояний частиц. Это объясняется тем, что состояния частиц, которые мы строили, автоматически приобретали определенную четность. Геометрическая операция обращения направлений трех пространственных осей координат представляется унитарным оператором R_s. На операторы $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$ отдельной частицы он действует по закону

$$R_s^{-1}\mathbf{r}R_s = -\mathbf{r}, \qquad R_s^{-1}\mathbf{p}R_s = -\mathbf{p}, \qquad R_s^{-1}\mathbf{s}R_s = \mathbf{s}. \tag{5.96}$$

Преобразованному одночастичному состоянию

$$\langle\overline{1}_p| = \langle 1_p|\, R_s \tag{5.97}$$

соответствует пространственный импульс $-\mathbf{p}$. Поэтому оно может быть собственным вектором оператора R_s, т. е. состоянием с определенной четностью, только при $\mathbf{p} = 0$. Как и в случае непрерывных преобразований Лоренца, амплитуда вероятности $\langle 1_p \mid 0\rangle^s$ устанавливает связь между описанием состояния частицы и характеристиками источника. Преобразованному состоянию частицы соответствует преобразованный источник; в данном случае преобразование источника, иллюстрирующее общий линейный закон изменения (5.2), имеет вид

$$\begin{gathered}\overline{S}\,(\overline{x}) = r_s S\,(x),\\ \overline{x^0} = x^0, \qquad \overline{x_k} = -x_k.\end{gathered} \tag{5.98}$$

Если источники выбраны вещественными, то и матрица отражения r_s должна быть вещественной. Результатом ее действия на спиновые индексы будет геометрическое преобразование

$$r_s^{-1}\mathbf{s}r_s = \mathbf{s}, \qquad r_s^{-1}\mathbf{n}r_s = -\mathbf{n}, \tag{5.99}$$

или, как это следует из формулы (5.26),

$$r_s^{-1}\mathbf{s}^{(1)}r_s = \mathbf{s}^{(2)}, \qquad r_s^{-1}\mathbf{s}^{(2)}r_s = \mathbf{s}^{(1)}. \tag{5.100}$$

Если не считать возможности появления дополнительного знака минус, совместимой с простым геометрическим свойством

$$r_s^2 = 1, \tag{5.101}$$

то действие матрицы r_s на $S_{\sigma_1^{(1)}\ldots\sigma_n^{(1)}\sigma_1^{(2)}\ldots\sigma_n^{(2)}}$ будет сводиться к замене $\sigma_\alpha^{(1)}$ на $\sigma_\mu^{(2)}$, и наоборот. При перестановке единственной пары спиновых индексов синглетная и триплетные комбинации ведут себя противоположным образом — это соответствует тому, что при пространственном отражении временная и пространственные компоненты четырехмерного вектора также будут вести себя противоположным образом. В этом, поскольку у нас остается свобода в выборе общего знака в законе изменения рассматриваемой величины при отражении, выражается различие между вектором и псевдовектором (аксиальным вектором). Поведение тензора $S_{\mu_1\ldots\mu_n}$ определяется числом его векторных индексов, а также общим множителем ± 1. Понятие четности относится к системе покоя, где остаются лишь компоненты $S_{k_1\ldots k_n}$, которые меняются при пространственном отражении как единое целое. В случае истинного вектора четность будет равна $(-1)^n$. Это приводит к последовательности частиц с целыми спинами и с чередующимися значениями четности, имеющей вид $0^+, 1^-, 2^+, \ldots$. Другая последовательность будет такова: $0^-, 1^+, 2^-, \ldots$.

Хотя мы уже говорили обо всех известных или гипотетических безмассовых частицах с целым спином, мы, тем не менее, рассмотрим все безмассовые частицы с целым спином с единой точки зрения. Как и выше в конкретных примерах, ясно, что в формуле (5.95) невозможно совершить предельный переход $m \to 0$, если только при $m = 0$ не выполняется условие

$$p_{\mu_1} S^{\mu_1 \ldots \mu_n}(p) = 0, \qquad \partial_{\mu_1} S^{\mu_1 \ldots \mu_n}(x) = 0. \tag{5.102}$$

Если бы мы совершали предельный переход так, как только что было показано, то нам пришлось бы разложить $2n + 1$ спиновых состояний на пары спиральных состояний с $\lambda = \pm n, \pm(n-1), \ldots$ $\ldots, \pm 1$ и на состояние с $\lambda = 0$. Но на этот раз мы сразу выделим состояния с $\lambda = \pm n$. В инвариантной форме такая связь источников записывается следующим образом:

$$S_1^{\mu_1 \ldots \mu_n}(p)^* \Pi_{\mu_1 \ldots \mu_n, \nu_1 \ldots \nu_n} S_2^{\nu_1 \ldots \nu_n}(p), \tag{5.103}$$

где структура проекционного тензора Π определяется равенством

$$x^{\mu_1} \ldots x^{\mu_n} \Pi_{\mu_1 \ldots \mu_n, \nu_1 \ldots \nu_n} y^{\nu_1} \ldots y^{\nu_n} = \\ = (xy)^n + d_{n1}(xx)(xy)^{n-2}(yy) + \ldots, \tag{5.104}$$

в котором фигурируют обычные четырехмерные произведения, образованные из векторов x^μ и y^μ. Если, подобно тому, как это делается в равенстве (5.79), каким-то способом ввести вектор p^μ, то в силу ограничения (5.102), накладываемого на источник, он не будет давать никакого вклада. Воспользуемся теперь этим обстоятельством и заменим тензор Π другим тензором, эквивалентным ему с точки зрения выражения (5.103). Для этого сделаем следующую подстановку:

$$x^\mu \to \left[g^{\mu\nu} - \frac{\bar{p}^\mu p^\nu}{p\bar{p}} \right] x_\nu \tag{5.105}$$

(и аналогично для y^μ), где $\bar{p}^\mu$ — произвольный изотропный вектор с $\bar{p}^0 > 0$, такой, что $p\bar{p} \neq 0$. Отсутствие каких бы то ни было изменений при условии $p^\nu x_\nu = 0$ гарантирует, что в интересующих нас приложениях оба рассматриваемых выражения будут эквивалентными друг другу. В новом варианте тензор Π будет определяться равенством

$$x^{\mu_1} \ldots x^{\mu_n} \Pi_{\mu_1 \ldots \mu_n, \nu_1 \ldots \nu_n}(p, \bar{p}) y^{\nu_1} \ldots y^{\nu_n} = \\ = (x \cdot y)^n + d_{n1}(x \cdot x)(x \cdot y)^{n-2}(y \cdot y) + \ldots. \tag{5.106}$$

где, например,

$$x \cdot y = x^\mu \bar{g}_{\mu\nu}(p, \bar{p}) x^\nu, \tag{5.107}$$

а

$$\bar{g}_{\mu\nu}(p, \bar{p}) = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu \bar{p}_\nu + p_\nu \bar{p}_\mu}{p\bar{p}}. \tag{5.108}$$

Если рассматривается обмен безмассовой частицей, то $\bar{p}^\mu$ будет также изотропным вектором и $\bar{g}_{\mu\nu}(p, \bar{p})$ будет проектировать на подпространство, ортогональное к p^μ и $\bar{p}^\mu$:

$$p^\mu \bar{g}_{\mu\nu}(p, \bar{p}) = 0, \qquad \bar{p}^\mu \bar{g}_{\mu\nu}(p, p) = 0. \tag{5.109}$$

В системе покоя времени-подобного вектора $p^\mu + \bar{p}^\mu$ у ортогонального ему вектора $p^\mu - \bar{p}^\mu$ имеются лишь пространственные компоненты, которые вдвое больше компонент импульса частицы, и мы приходим к выводу, что подпространством, выделяемым тензором $\bar{g}_{\mu\nu}$, будет двумерная евклидова плоскость, перпендикулярная импульсу частицы.

Если в выражение (5.103), описывающее связь между источниками, должны входить только спиральности $\lambda = \pm n$, то тензор Π нужно взять таким, чтобы он был неприводимым по отношению к образованию следов в двумерном евклидовом пространстве:

$$\bar{g}^{\mu_1\mu_2}(p, \bar{p}) \Pi_{\mu_1 \ldots \mu_n, \nu_1 \ldots \nu_n}(p, \bar{p}) = 0. \tag{5.110}$$

Это эквивалентно утверждению, что величина (5.106) как функция переменных x и y, характеризующих положение точки плоскости, является однородным решением уравнения Лапласа с показателем однородности n. Соответствующие двумерные гармонические функции имеют вид

$$[(x \cdot x)(y \cdot y)]^{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} T_n(\mu), \tag{5.111}$$

где

$$\mu = \frac{x \cdot y}{[(x \cdot x)(y \cdot y)]^{1/2}} = \cos\varphi, \tag{5.112}$$

а $T_n(\mu)$ — полином Чебышева:

$$T_n(\mu) = \cos(n \arccos \mu) = \cos n\varphi. \tag{5.113}$$

Взяв явное выражение для коэффициентов этого полинома, получим

$$m \leqslant \frac{1}{2}n: \qquad d_{nm} = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{n}{4^m} \frac{(n-m-1)!}{(n-2m)!}, \tag{5.114}$$

в частности, при $n \geqslant 2$

$$d_{n1} = -\frac{1}{4}n. \tag{5.115}$$

Значение $-{}^1/_2$, получаемое в случае $n = 2$, согласуется с выражением (4.24).

Тождество

$$\cos n\varphi = \frac{1}{2}\left[e^{in\varphi_1}e^{-in\varphi_2} + e^{-in\varphi_1}e^{in\varphi_2}\right], \qquad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \tag{5.116}$$

дает нам соответствующую теорему сложения. Она означает, что имеет место следующее диадное представление:

$$\Pi^{\mu_1 \ldots \mu_n, \nu_1 \ldots \nu_n}(p, \bar{p}) = \sum_{\lambda = \pm n} e_{p\lambda}^{\mu_1 \ldots \mu_n} e_{p\lambda}^{\nu_1 \ldots \nu_n *}, \tag{5.117}$$

где

$$e_{p, \pm n}^{\mu_1 \ldots \mu_n} x_{\mu_1} \ldots x_{\mu_n} = \left(\frac{1}{2} x \cdot x\right)^{n/2n} i^{n \pm n} e^{\pm in\varphi}. \tag{5.118}$$

Фазы выбраны таким образом, чтобы при $n = 1$ соотношением

$$e_{p, \pm 1}^{\mu} x_{\mu} = \left(\frac{1}{2} x \cdot x\right)^{1/2} e^{1 \pm 1} e^{\pm i\varphi} \tag{5.119}$$

воспроизводились базисные орты (3.29). Итак, мы имеем

$$e_{p, \pm n}^{\mu_1 \ldots \mu_n} x_{\mu_1} \ldots x_{\mu_n} = \left[e_{p, \pm 1}^{\mu} x_{\mu}\right]^n \tag{5.120}$$

и следующее явное выражение:

$$e_{p, \pm n}^{\mu_1 \ldots \mu_n} = e_{p, \pm 1}^{\mu_1} \ldots e_{p, \pm 1}^{\mu_n}, \tag{5.121}$$

которое является обобщением равенств (4.31), соответствующих случаю $n = 2$.

Формула, описывающая пространственно-временную структуру источника безмассовых частиц со спиральностью 3, имеет вид

$$W(S) = \frac{1}{2} \int (dx)(dx') \Big[S^{\lambda\mu\nu}(x) D_+(x - x') S_{\lambda\mu\nu}(x') - \\ - \frac{3}{4} S^{\lambda}(x) D_+(x - x') S_{\lambda}(x') \Big], \tag{5.122}$$

где

$$\partial_\lambda S^{\lambda\mu\nu}(x) = 0 \tag{5.123}$$

и

$$S^{\lambda}(x) = g_{\mu\nu} S^{\lambda\mu\nu}(x). \tag{5.124}$$

Обычная материя не имеет никаких физических характеристик, которые можно было бы отождествить с величинами, описываемыми локальным законом сохранения (5.123), и это справедливо при любом $n \geqslant 3$. То, что невозможно построить соответствующие источники, вполне согласуется с тем фактом, что такие частицы не обнаружены экспериментально. Но не следует исключать полностью возможность того, что при каких-то условиях, недостижимых в настоящее время, мы все же когда-нибудь столкнемся с такого рода величинами и связанными с ними частицами.

§ 6. ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ $^1/_2$, СТАТИСТИКА ФЕРМИ — ДИРАКА

Возможны два простых описания частиц со спином $^1/_2$ по типу равенств (5.26), а именно:

$$\begin{aligned} &\mathbf{s}^{(1)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}, \qquad &\mathbf{s}^{(2)} = 0; \\ &\mathbf{s}^{(1)} = 0, \qquad &\mathbf{s}^{(2)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Они переходят одно в другое при отражении пространственных координат, а поэтому удобнее более симметричная схема, охватывающая обе эти возможности. Кроме того, комплексные источники, на которые действуют квадратные матрицы Паули второго порядка, удобнее заменить эквивалентными им вещественными источниками. Короче говоря, для описания частиц со спином $^1/_2$ выгодно взять четыре вещественных источника. Символ $\boldsymbol{\sigma}$ мы будем использовать теперь в других целях, и поэтому исходные квадратные матрицы второго порядка будем обозначать через τ_k, а другой независимый их набор — через τ'_k. Вещественные антисимметричные матрицы $i\sigma_k$ можно построить из $i\tau_k$, заменяя всякий появляющийся в них множитель i алгебраически эквивалентной ему вещественной антисимметричной матрицей $i\tau'_2$. Таким образом,

$$i\sigma_1 = i\tau_2\tau_1, \qquad i\sigma_2 = i\tau_2, \qquad i\sigma_3 = i\tau'_2\tau_3, \tag{6.2}$$

причем это действительно вещественные антисимметричные квадратные матрицы четвертого порядка. У них сохраняются алгебраические свойства спиновых матриц:

$$\frac{1}{2}\{\sigma_k, \sigma_l\} = \delta_{kl}, \qquad i\sigma_1 i\sigma_2 i\sigma_3 = 1, \tag{6.3}$$

и мы положим

$$s_k = \frac{1}{2}\sigma_k. \tag{6.4}$$

Первоначально в роли n_k выступают матрицы $i\lambda^1/_2\tau_k$, где λ теперь некоторая квадратная матрица второго порядка, которая коммутирует с τ_k и имеет собственные значения ± 1. После преобразования $\tau_k \to \sigma_k$ возникают три, и только три, матрицы, которые можно было бы взять в качестве $i\lambda$:

$$i\rho_1 = i\tau_2\tau'_1 \qquad i\rho_2 = i\tau'_2, \qquad i\rho_3 = i\tau_2\tau'_3. \tag{6.5}$$

Они аналогичны матрицам $i\sigma_k$, отличаясь от них перестановкой τ и τ'. Оба набора содержат по три антикоммутирующие матрицы, которые коммутируют друг с другом. Шесть антисимметричных матриц σ_k, ρ_k и десять симметричных матриц 1, $\sigma_k\rho_l$ образуют базис в пространстве всех квадратных матриц четвертого порядка.

Поскольку три матрицы ρ_k совершенно равноправны, мы произвольным образом отождествим λ с ρ_2 и напишем

$$n_k = \frac{1}{2} i\alpha_k, \tag{6.6}$$

где множители

$$\alpha_k = \rho_2 \sigma_k \tag{6.7}$$

представляют собой вещественные симметричные матрицы. Они обладают следующими алгебраическими свойствами:

$$\frac{1}{2}\{\alpha_k, \alpha_l\} = \delta_{kl}, \qquad \left[\alpha_k, \frac{1}{2}\sigma_l\right] = i\varepsilon_{klm}\alpha_m, \qquad \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\alpha} = 2i\boldsymbol{\sigma}, \tag{6.8}$$

последнее из которых имеет вид соотношения (5.33). Так как пространственное отражение заменяет $\mathbf{n}$ на $-\mathbf{n}$, не затрагивая $\mathbf{s}$, ему соответствует матрица, коммутирующая с $\boldsymbol{\sigma}$ и антикоммутирующая с ρ_2. Такими свойствами обладают только матрицы ρ_1 и ρ_3. Мы возьмем последнюю из них, умножив эту антисимметричную матрицу на i с тем, чтобы получить вещественную матрицу пространственного отражения

$$r_s = i\rho_3, \tag{6.9}$$

обладающую свойством

$$r_s^2 = -1. \tag{6.10}$$

Другие функции матрицы пространственного отражения становятся ясными из рассмотрения вещественной матрицы, соответствующей инфинитезимальному преобразованию Лоренца [см. формулу (5.9)]:

$$L = 1 + \frac{i}{2}\,\delta\omega^{\mu\nu}s_{\mu\nu} = 1 + i\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} - \delta\mathbf{v}\cdot\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\alpha}. \tag{6.11}$$

Учитывая свойства симметрии матриц, мы получим, что транспозиция приводит к следующему результату:

$$L^T = 1 - i\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} - \delta\mathbf{v}\cdot\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\alpha}, \tag{6.12}$$

тогда как

$$L^{-1} = 1 - i\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{}{2}\,\boldsymbol{\sigma} + \delta\mathbf{v}\cdot\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\alpha}. \tag{6.13}$$

Используя r_s, можно написать

$$L^T = r_s L^{-1} r_s^{-1}, \tag{6.14}$$

или

$$L^T r_s L = r_s. \tag{6.15}$$

Справедливость этого утверждения для конечных преобразований из собственной ортохронной группы вытекает из закона композиции двух последовательно осуществляемых преобразований:

$$(L_1L_2)^T r_s L_1 L_2 = L_2^T L_1^T r_s L_1 L_2 = L_2^T r_s L_2 = r_s. \qquad (6.16)$$

Соотношение (6.15) сохраняет свою силу и для преобразования пространственного отражения, поскольку в равенстве

$$r_s^T r_s = 1 \qquad (6.17)$$

объединяются антисимметрия матрицы r_s и ее свойство (6.10). Соотношение (6.15), в которое входит матрица r_s, свидетельствует о том, что она играет фундаментальную роль, выступая в качестве метрической величины. Она является аналогом метрического тензора в равенстве

$$l^\mu{}_\varkappa g_{\mu\nu} l^\nu{}_\lambda = g_{\varkappa\lambda}, \qquad (6.18)$$

или, в матричных обозначениях,

$$l^T g l = g, \qquad (6.19)$$

так как тензор $(\pm)\, g$, приписывающий противоположные знаки временной и пространственным компонентам, тоже является матрицей пространственного отражения для векторов.

Посмотрим теперь на матрицы инфинитезимального преобразования (6.11) и (6.12) с точки зрения их действия на вещественные симметричные матрицы α_k и на

$$\alpha^0 = 1. \qquad (6.20)$$

Имеют место равенства

$$L^T \boldsymbol{\alpha} L = \boldsymbol{\alpha} - \delta\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\alpha} - \delta\mathbf{v}\alpha^0, \qquad L^T\alpha^0 L = \alpha^0 - \delta\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}, \qquad (6.21)$$

которые можно объединить, написав

$$L^T \alpha^\mu L = (\delta_\nu^\mu + \delta\omega^\mu{}_\nu)\,\alpha^\nu. \qquad (6.22)$$

Это не что иное, как закон изменения вектора при инфинитезимальном однородном преобразовании Лоренца. Повторное применение таких преобразований приводит к следующему закону изменения при конечном преобразовании:

$$L^T \alpha^\mu L = l^\mu{}_\nu \alpha^\nu. \qquad (6.23)$$

Он справедлив и для несобственного преобразования пространственного отражения, порождаемого матрицей $L = r_s$. Заметим, что симметрия α^μ и антисимметрия r_s, так же как и их вещественность, сохраняются при преобразованиях Лоренца.

Рассмотрим теперь связь между источниками, соответствующую одночастичному обмену, когда отдельные акты испускания и поглощения описываются выражениями (5.36) и (5.40), в которых

$$B(p)=\exp\left[-\frac{1}{2}\,\theta\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right]. \tag{6.24}$$

Как это явствует из существования трех матриц ρ_k, коммутирующих с σ, рамки такого подхода оказываются слишком широкими для описания частицы со спином $^1/_2$. Следует исключить две из четырех компонент, вставив между двумя сомножителями $B(p)$, которые связаны с индивидуальными процессами, некоторую не зависящую от спина проекционную матрицу. В действительности три матрицы ρ_k дают только два возможных варианта в зависимости от того, коммутирует или антикоммутирует используемая матрица ρ с α. В первом случае мы имеем

$$B(p)\frac{1}{2}(1+\rho_2)B(p)=\frac{1}{2}(1+\rho_2)B(p)^2=$$
$$=\frac{1+\rho_2}{2m}(p^0-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})=-\frac{1+\rho_2}{2m}\alpha^\mu p_\mu, \tag{6.25}$$

а вторую ситуацию иллюстрирует равенство

$$B(p)\frac{1}{2}(1+\rho_3)B(p)=\frac{1}{2}B(p)^2+\frac{1}{2}\rho_3=$$
$$=\frac{1}{2m}[p^0-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+m\rho_3]=\frac{1}{2m}[m\rho_3-\alpha^\mu p_\mu]. \tag{6.26}$$

Источники частиц со спином $^1/_2$ будем обозначать через $\eta(x)$, $\eta(p)$ или, для большей ясности,— через $\eta_\zeta(x)$, $\eta_\zeta(p)$. При пространственно-временной экстраполяции связи источников мы придем к двум разным выражениям:

$$-\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\,\eta(x)(1+\rho_2)\alpha^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\Delta_+(x-x')\,\eta(x') \tag{6.27}$$

и

$$\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\,\eta(x)\left[m\rho_3-\alpha^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\right]\Delta_+(x-x')\,\eta(x'), \tag{6.28}$$

где, как мы уже несколько раз в этом убеждались, использование функции распространения $\Delta_+(x-x')$ диктуется требованием равноправности точек пространства-времени, или евклидовым постулатом. Приведенные нами выражения представляют собой частные случаи квадратичной формы

$$\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\,\eta_\zeta(x)K_{\zeta\zeta'}(x,x')\,\eta_{\zeta'}(x')=$$
$$=\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\,\eta_{\zeta'}(x')K_{\zeta\zeta'}(x',x)\,\eta_\zeta(x). \tag{6.29}$$

Функция $K_{\zeta\zeta'}(x, x')$, будучи неприводимым ядром квадратичной формы, при транспозиции индексов ζ и ζ', а также переменных x и x' должна вести себя как некое единое целое. В первом случае, которому соответствует выражение (6.27), это требование не выполняется, так как 1 и ρ_2 при транспозиции ведут себя противоположным образом. Поэтому проекционный множитель $1 + \rho_2$ не годится, ибо вклад в квадратичную форму будет давать только одно из слагаемых. Второе ядро при транспозиции действительно ведет себя как единое целое:

$$\left[\left(m\rho_3-\alpha^\mu \frac{1}{i}\,\partial'_\mu\right)\Delta_+(x-x')\right]^T = -\left(m\rho_3-\alpha^\mu \frac{1}{i}\,\partial_\mu\right)\Delta_+(x-x'). \tag{6.30}$$

Оно антисимметрично!

Можно было бы попытаться, вводя в рассмотрение частицы и античастицы, превратить это ядро в симметричную величину, не нарушая при этом описания спина. При такой процедуре необходимо снабдить источник дополнительным индексом, принимающим два значения, что позволило бы ввести в ядро антисимметричную зарядовую матрицу q. Возникающее при этом ядро будет симметричным, но знак его может быть любым, так как при зарядовом сопряжении q переходит в $-q$. Этот вывод прямо противоречит физическому требованию к вероятности вакуумного перехода

$$|e^{iW}|^2 = e^{-2\,\mathrm{Im}\,W} \leqslant 1, \tag{6.31}$$

которое означает, что мнимая часть квадратичной формы должна быть положительной. Таким образом, в случае спина $^1/_2$ неизбежно возникает совершенно новая ситуация. Вместо того чтобы пытаться модифицировать характер симметрии ядра, подгоняя его под алгебраические свойства источника, нам следует согласовать алгебраические свойства источника с антисимметрией ядра. Сравнивая два эквивалентных выражения (6.29) со свойством антисимметрии

$$K_{\zeta\zeta'}(x', x) = -K_{\zeta\zeta'}(x, x'), \tag{6.32}$$

мы придем не к парадоксу, а к тождеству, если

$$\eta_{\zeta'}(x')\,\eta_\zeta(x) = -\eta_\zeta(x)\,\eta_{\zeta'}(x'). \tag{6.33}$$

Таким образом, при описании спина $^1/_2$ мы вынуждены отказаться от обычных числовых коммутативных источников со статистикой Бозе — Эйнштейна и ввести источники нового типа и некоторую новую статистику. Вскоре будет показано, что это статистика Ферми — Дирака.

Проведенный анализ свойств симметрии облегчался тем, что использовались матрицы с определенной симметрией — симметричные α^μ и антисимметричная ρ_3. Однако при дальнейшем рассмотрении более существенными будут единообразие алгебраических свойств и поведение при преобразованиях Лоренца. С точки зрения алгебры весьма неудобно иметь дело с антикоммутирующими матрицами α_k, которые коммутируют с α^0; в то же время закон изменения α^μ при преобразовании Лоренца, имеющий вид $L^T\alpha^\mu L$, не является преобразованием подобия, а произведения $\alpha^\mu\alpha^\nu$ не обладают тензорными трансформационными свойствами. Чтобы устранить последний недостаток, нужно заменить L^T на L^{-1}. Этого можно добиться, воспользовавшись соотношением (6.14), которое приводит к новой форме закона преобразования векторов:

$$L^{-1}(r_s^{-1}\alpha^\mu)L = l^\mu{}_\nu(r_s^{-1}\alpha^\nu). \tag{6.34}$$

Удобно ввести новые матрицы

$$\gamma^\mu = ir_s^{-1}\alpha^\mu, \tag{6.35}$$

для которых

$$L^{-1}\gamma^\mu L = l^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \tag{6.36}$$

а также

$$L^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu L = l^\mu{}_\varkappa l^\nu{}_\lambda\gamma^\varkappa\gamma^\lambda, \tag{6.37}$$

и так далее. Алгебраическое свойство $r_s^2 = -1$ и равенство $\alpha^0 = 1$ дают нам

$$(\gamma^0)^2 = 1 \tag{6.38}$$

и

$$r_s = i\gamma^0, \tag{6.39}$$

откуда следует также, что

$$\gamma^0 = \rho_3. \tag{6.40}$$

Матрицы γ не обладают единой симметрией. Из определения (6.35) вытекает, что

$$\gamma^{\mu T} = -i\alpha^\mu r_s^{-1}, \tag{6.41}$$

или

$$\gamma^{\mu T} = -r_s\gamma^\mu r_s^{-1}. \tag{6.42}$$

Это равенство еще раз подтверждает антисимметрию матрицы γ^0, которая коммутирует с $r_s = i\gamma^0$, и показывает, что матрицы γ_k — симметричные антиэрмитовы матрицы, так как они антикоммутируют с матрицей пространственного отражения:

$$\{\gamma^0, \gamma_k\} = 0. \tag{6.43}$$

Для γ_k получаются следующие алгебраические соотношения:

$$\frac{1}{2}\{\gamma_k, \gamma_l\} = -\frac{1}{2}\{\alpha_k, \alpha_l\} = -\delta_{kl}. \tag{6.44}$$

Всевозможные свойства матриц γ_μ, которые содержатся в равенствах (6.38), (6.43) и (6.44), можно свести воедино, написав

$$\frac{1}{2}\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -g_{\mu\nu}. \qquad (6.45)$$

В соответствии с тем, что

$$L^{-1}\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} L = -l^\mu{}_\varkappa l^\nu{}_\lambda g^{\varkappa\lambda} = -g^{\mu\nu}, \qquad (6.46)$$

это унифицированное алгебраическое утверждение инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Матрицы γ позволяют также представить в единой форме величины

$$s_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}. \qquad (6.47)$$

Представим сначала $\boldsymbol{\sigma} = (^1/_2 i)\,\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\alpha}$ в виде

$$\sigma_{kl} = \frac{1}{2i}[\alpha_k, \alpha_l] = \frac{i}{2}[\gamma_k, \gamma_l] \qquad (6.48)$$

и затем учтем, что

$$\sigma^0_k = i\alpha_k = i\gamma^0\gamma_k. \qquad (6.49)$$

Эти матрицы можно представить в виде единой величины

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \qquad (6.50)$$

которая преобразуется как антисимметричный тензор:

$$L^{-1}\sigma^{\mu\nu}L = l^\mu{}_\varkappa l^\nu{}_\lambda \sigma^{\varkappa\lambda}. \qquad (6.51)$$

Свойства симметрии мнимых матриц $\sigma_{\mu\nu}$ определяются соотношением

$$\sigma^T_{\mu\nu} = -r_s\sigma_{\mu\nu}r_s^{-1} \qquad (6.52)$$

из которого следует, что матрицы σ_{kl} антисимметричны и эрмитовы, а матрицы σ_{0k} симметричны и антиэрмитовы.

Процесс перемножения различных γ-матриц обрывается на

$$\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \qquad (6.53)$$

или ($\mu \neq \nu \neq \varkappa \neq \lambda$)

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varkappa\gamma^\lambda = \varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}\gamma_5. \qquad (6.54)$$

Эта матрица вещественна, а поскольку

$$\gamma_5^T = r_s(\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0)\,r_s^{-1} = r_s\gamma_5 r_s^{-1} = -\gamma_5, \qquad (6.55)$$

то она антиэрмитова. Каждая из матриц γ_μ антикоммутирует с γ_5:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0; \qquad (6.56)$$

кроме того,

$$\gamma_5^2 = -1. \tag{6.57}$$

Матрицу γ_5 можно факторизовать и другими способами:

$$\gamma_5 = \sigma_{01}\sigma_{23} = \sigma_{02}\sigma_{31} = \sigma_{03}\sigma_{12}, \tag{6.58}$$

или

$$\sigma_{0k} = \gamma_5\sigma_k = \sigma_k\gamma_5, \tag{6.59}$$

что приводит, в частности, к следующей идентификации:

$$i\gamma_5 = \rho_2. \tag{6.60}$$

Закон изменения γ_5 при преобразованиях Лоренца вытекает из соотношения (6.54):

$$L^{-1}\gamma_5 L = l^0{}_\mu l^1{}_\nu l^2{}_\varkappa l^3{}_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}\gamma_5 = (\det l)\,\gamma_5, \tag{6.61}$$

откуда видно, что γ_5 — псевдоскаляр. Эта матрица инвариантна относительно собственных преобразований ($\det l = +1$) и меняет свой знак при несобственных преобразованиях, или отражениях ($\det l = -1$). Последнее свойство является непосредственным следствием антикоммутативности γ^0 и γ_5, о чем, в частности, свидетельствует соотношение (6.55). Отметим также, что $i\gamma^\mu\gamma_5$ — псевдовектор (аксиальный вектор):

$$L^{-1} i\gamma^\mu\gamma_5 L = (\det l)\; l^\mu{}_\nu i\gamma^\nu\gamma_5. \tag{6.62}$$

Компоненты произведения $i\gamma^\mu\gamma_5$ получаются путем перемножения четырьмя возможными способами трех различных γ-матриц.

Соответственно своему поведению при преобразованиях Лоренца 16 независимых элементов описываемой алгебры Клиффорда — Дирака распадаются на пять классов:

$$1, \quad \gamma_\mu, \quad \sigma_{\mu\nu}, \quad i\gamma_\mu\gamma_5, \quad \gamma_5, \tag{6.63}$$

число членов в которых таково: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$. Тесно связанной с предыдущей, но отличающейся от нее является группировка по свойствам симметрии. Конструкция

$$\alpha^\mu = \gamma^0\gamma^\mu \tag{6.64}$$

наводит на мысль рассмотреть произведения $\gamma^0\Gamma$, где Γ означает любой из классов (6.63). Мы имеем

$$(\gamma^0\Gamma)^T = -\Gamma^T\gamma^0 = -\gamma^0 r_s^{-1}\Gamma^T r_s, \tag{6.65}$$

и наличие разного рода соотношений эквивалентности между транспозицией и пространственным отражением указывает на то, что эти матрицы обладают какой-то определенной симметрией. И действительно, среди шестнадцати матриц

$$\gamma^0\,(1,\ \gamma_\mu,\ \sigma_{\mu\nu},\ i\gamma_\mu\gamma_5,\ \gamma_5) \tag{6.66}$$

содержится $4+6=10$ симметричных матриц $\gamma^0\gamma_\mu$, $\gamma^0\sigma_{\mu\nu}$ и $1+4+1=6$ антисимметричных матриц γ^0, $\gamma^0 i\gamma_\mu\gamma_5$, $\gamma^0\gamma_5$. Все они эрмитовы.

При построении вакуумной амплитуды для произвольного четырехкомпонентного спинорного источника частиц со спином $^1/_2$ мы будем исходить из выражения (6.28), заменив входящие в него ρ_3 и α^μ соответствующими γ-матрицами:

$$\begin{gathered}\langle 0_+|0_-\rangle_\eta=\exp[iW(\eta)],\\ W(\eta)=\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\,\eta(x)\,\gamma^0G_+(x-x')\,\eta(x'),\end{gathered}\tag{6.67}$$

где

$$G_+(x-x')=\left(m-\gamma^\mu\frac{1}{i}\,\partial_\mu\right)\Delta_+(x-x'),\tag{6.68}$$

а источники — антикоммутирующие вещественные объекты:

$$\{\eta_\zeta(x),\ \eta_{\zeta'}(x')\}=0,\tag{6.69}$$

представляющие собой элементы грассмановой (внешней) алгебры.

Проанализируем теперь причинно-упорядоченную пару источников

$$\eta(x)=\eta_1(x)+\eta_2(x).\tag{6.70}$$

Важно отметить, что четные комбинации антикоммутирующих источников коммутируют друг с другом и что два слагаемых, в которые входят η_1 и η_2, равны, поскольку антикоммутативность источников компенсируется антисимметрией ядра. В соответствии с этим мы получим:

$$\begin{aligned}\langle 0_+|0_-\rangle^\eta=\langle 0_+|0_-\rangle^{\eta_1}\exp\Big[i\int(dx)(dx')\,\eta_1(x)\,\gamma^0G_+\times\\ \times(x-x')\,\eta_2(x')\Big]\langle 0_+|0_-\rangle^{\eta_2},\end{aligned}\tag{6.71}$$

где

$$x^0>x^{0\prime}:\qquad G_+(x-x')=i\int d\omega_p e^{ip(x-x')}(m-\gamma p),\tag{6.72}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}i\int(dx)(dx')\,\eta_1(x)\,\gamma^0G_+(x-x')\,\eta_2(x')=\\ =\int d\omega_p i\eta_1(p)^*\gamma^0(m-\gamma p)\,i\eta_2(p).\end{aligned}\tag{6.73}$$

Матричный множитель в этом выражении в точности совпадает с величиной (6.26), записанной в новых обозначениях:

$$\begin{aligned}&\gamma^0(m-\gamma p)=m\gamma^0+p^0-\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}=\\ &\quad=\exp\left[-\frac{^1/_2\theta\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right]m(1+\gamma^0)\exp\left[\frac{-^1/_2\theta\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right];\end{aligned}\tag{6.74}$$

напомним, что здесь

$$\operatorname{ch}\theta=\frac{p^0}{m},\qquad \operatorname{sh}\theta=\frac{|\mathbf{p}|}{m}. \tag{6.75}$$

Используя любую пару ортонормированных собственных векторов v_λ,

$$\gamma^0 v_\lambda = v_\lambda,\qquad v_\lambda^* v_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, \tag{6.76}$$

для проекционной матрицы $^1/_2\,(1+\gamma^0)$ можно написать следующее диадное представление:

$$\frac{1}{2}(1+\gamma^0)=\sum_\lambda v_\lambda v_\lambda^*. \tag{6.77}$$

Для проверки мультиплетности достаточно взять след обеих частей этого матричного равенства:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Sp}1=2=\sum_\lambda 1, \tag{6.78}$$

где учтено, что след матрицы γ^0 равен нулю (вследствие ее антисимметрии). Отметим, что имеет место и более общее утверждение:

$$\operatorname{Sp}\gamma_\mu=-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\gamma_5\{\gamma_\mu,\ \gamma_5\}=0. \tag{6.79}$$

При конкретном выборе в качестве v_λ можно взять собственные векторы одной из компонент $\boldsymbol{\sigma}$, скажем, матрицы σ_3:

$$\sigma_3 v_\sigma = \sigma v_\sigma,\qquad \sigma=\pm 1. \tag{6.80}$$

Потребуем также, чтобы при действии на эти собственные векторы стандартными комбинациями спиновых операторов они переходили один в другой:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1+i\sigma_2)\,v_-=v_+,\qquad \frac{1}{2}(\sigma_1-i\sigma_2)\,v_+=v_-. \tag{6.81}$$

Остальные соотношения, являющиеся следствием мнимости используемых матриц γ^0 и σ, а именно

$$\gamma^0 v_\sigma^*=-v_\sigma^*,\qquad \sigma_3 v_\sigma^*=-\sigma v_\sigma^*,\qquad -\frac{1}{2}(\sigma_1\pm i\sigma_2)\,v_\mp^*=v_\pm^*, \tag{6.82}$$

будут удовлетворяться, если положить

$$v_{-\sigma}^* = i\sigma\gamma_5 v_\sigma. \tag{6.83}$$

Поскольку v_σ^* — собственный вектор матрицы γ^0, принадлежащий собственному значению -1, имеют место соответствующие соотношения ортогональности:

$$v_\sigma v_{\sigma'}=0,\qquad v_\sigma^* v_{\sigma'}^*=0. \tag{6.84}$$

Подставив в равенство (6.74) величину $^1/_2(1+\gamma^0)$, выраженную через собственные векторы, мы получим

$$\gamma^0(m-\gamma p)=2m\sum_\sigma \gamma^0 u_{p\sigma}u^*_{p\sigma}\gamma^0, \tag{6.85}$$

где

$$\begin{aligned} u_{p\sigma} &= \exp\left[\frac{1}{2}\theta\gamma^0\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right]v_\sigma,\\ u^*_{p\sigma} &= v^*_\sigma \exp\left[\frac{1}{2}\theta\gamma^0\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right]; \end{aligned} \tag{6.86}$$

здесь учтены антикоммутативность произведения $\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ с матрицей γ^0 и то обстоятельство, что v_σ — собственный вектор матрицы γ^0. Те же свойства используются и при проверке условия ортонормированности этих векторов, которое имеет вид

$$u^*_{p\sigma}\gamma^0 u_{p\sigma'}=v^*_\sigma v_{\sigma'}=\delta_{\sigma\sigma'}. \tag{6.87}$$

Далее, в соответствии с (6.59),

$$\gamma^0\boldsymbol{\gamma}=i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}. \tag{6.88}$$

Комбинируя это равенство с соотношениями для гиперболических функций, которые дают

$$\operatorname{ch}\frac{1}{2}\theta=\left(\frac{p^0+m}{m}\right)^{1/2},\qquad \operatorname{sh}\frac{1}{2}\theta=\left(\frac{p^0-m}{2m}\right)^{1/2}, \tag{6.89}$$

мы получаем

$$u_{p\sigma}=\left[\left(\frac{p^0+m}{2m}\right)^{1/2}+\left(\frac{p^0-m}{2m}\right)^{1/2}i\gamma_5\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right]v_\sigma. \tag{6.90}$$

Отсюда видно, что, когда мы определяем v_σ, за выделенное направление спина весьма удобно выбрать направление вектора $\mathbf{p}$. Тогда величину $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ можно заменить собственным значением σ, которое будет спиральным индексом. Если воспользоваться соотношением (6.83), то рассматриваемые векторы примут совсем простой вид

$$u_{p\sigma}=\left(\frac{p^0+m}{2m}\right)^{1/2}v_\sigma+\left(\frac{p^0-m}{2m}\right)^{1/2}\sigma v^*_{-\sigma}. \tag{6.91}$$

Их связь с комплексно-сопряженными величинами устанавливается равенством

$$u^*_{p,\,-\sigma}=i\sigma\gamma_5 u_{p\sigma}. \tag{6.92}$$

Объединяя соотношение (6.85), переписанное в виде

$$\frac{m-\gamma p}{2m}=\sum_\sigma u_{p\sigma}u^*_{p\sigma}\gamma^0, \tag{6.93}$$

с условиями ортонормированности (6.87), мы придем к выводу, что эта неэрмитова матрица обладает алгебраическим свойством проекционного оператора:

$$\left(\frac{m-\gamma p}{2m}\right)^2=\frac{m-\gamma p}{2m}. \qquad (6.94)$$

Это эквивалентно равенству

$$(m-\gamma p)(m+\gamma p)=0, \qquad (6.95)$$

в справедливости которого можно убедиться и непосредственно, так как

$$(\gamma p)^2=\frac{1}{2}\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} p^\mu p^\nu=-p^2=m^2. \qquad (6.96)$$

Кроме того, мы видим, что $u_{p\sigma}$ и $u^*_{p\sigma}\gamma^0$ удовлетворяют уравнениям

$$(\gamma p+m)\, u_{p\sigma}=0, \qquad u^*_{p\sigma}\gamma^0(\gamma p+m)=0. \qquad (6.97)$$

Возвращаясь к связи источников (6.73), напишем

$$i\int (dx)(dx')\,\eta_1(x)\,\gamma^0 G_+(x-x')\,\eta_2(x')=$$
$$=2m\int d\omega_p \sum_\sigma i\eta_1(p)^*\gamma^0 u_{p\sigma}u^*_{p\sigma}\gamma^0 i\eta_2(p)=\sum_{p\sigma} i\eta^*_{1p\sigma} i\eta_{2p\sigma}, \qquad (6.98)$$

где

$$\eta_{p\sigma}=(2m\, d\omega_p)^{1/2}\, u^*_{p\sigma}\gamma^0\eta(p), \qquad \eta^*_{p\sigma}=(2m\, d\omega_p)^{1/2}\,\eta(p)^*\,\gamma^0 u_{p\sigma}; \qquad (6.99)$$

непротиворечивость этих двух определений вытекает из эрмитовости матрицы γ^0. Они служат точными определениями источников одночастичного испускания и поглощения, которые строятся из различных сомножителей. Так, например, $B(p)$ входит в $\gamma^0 u_{p\sigma}$. В системе покоя частицы величина $u_{p\sigma}$ сводится к v_σ, которая является собственным вектором матрицы γ^0, а значит, и матрицы пространственного отражения $r_s=i\gamma^0$. Таким образом, одночастичные состояния обладают вполне определенной, хотя и мнимой, четностью. Кстати, мы не задумывались над этим вопросом, когда при построении r_s и проекционного множителя $^1/_2(1+\rho_3)$ использовали одну и ту же матрицу ρ_3. Теперь становится ясным, что этот проекционный множитель заодно выделяет и состояния с определенной четностью, в соответствии с чем и должна определяться матрица отражения.

Источники частиц $\eta_{p\sigma}$ и $\eta^*_{p\sigma}$, являющиеся линейными функциями $\eta_\zeta(x)$, также будут антикоммутативными:

$$\{\eta_{p\sigma}, \eta_{p'\sigma'}\}=\{\eta_{p\sigma}, \eta^*_{p'\sigma'}\}=\{\eta^*_{p\sigma}, \eta^*_{p'\sigma'}\}=0; \qquad (6.100)$$

в частности,

$$(\eta_{p\sigma})^2 = 0, \qquad (\eta^*_{p\sigma})^2 = 0. \tag{6.101}$$

Воспользовавшись коммутативностью четных функций от источников, напишем

$$\exp\left[\sum_{p\sigma} i\eta^*_{1p\sigma} i\eta_{2p\sigma}\right] = \prod_{p\sigma} \exp\left(i\eta^*_{1p\sigma} i\eta_{2p\sigma}\right) = \\ = \prod_{p\sigma} \sum_{n_{p\sigma}} \frac{1}{n_{p\sigma}!} \left(i\eta^*_{1p\sigma} i\eta_{2p\sigma}\right)^{n_{p\sigma}}. \tag{6.102}$$

Это выражение имеет точно такой же вид, как и в случае статистики Бозе — Эйнштейна, но теперь степенной ряд содержит только два члена. Действительно, поменяв местами два сомножителя, мы увидим, что

$$(i\eta^*_{1p\sigma} i\eta_{2p\sigma})^2 = i\eta^*_{1p\sigma} i\eta_{2p\sigma} i\eta^*_{1p\sigma} i\eta_{2p\sigma} = -(i\eta^*_{1p\sigma})^2 (i\eta_{2p\sigma})^2 = 0, \tag{6.103}$$

и все разложение будет обрываться на члене с $n_{p\sigma} = 1$. Таким образом, максимальное значение величин, очевидным образом отождествляемых с числами заполнения частиц, равно единице. Это ограничение составляет содержание Принципа Запрета, характерного для статистики Ферми — Дирака.

Причинная упорядоченность источников находит свое выражение в следующем причинном разложении вакуумной амплитуды:

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^\eta = \sum_{\{n\}} \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{\eta_1} \langle \{n\} | 0_- \rangle^{\eta_2}. \tag{6.104}$$

В каждом слагаемом выражения, описывающего связь источников, все сомножители действительно можно расположить в нужном нам порядке, но при этом следует внимательно следить за числом возникающих знаков минус. Все упрощает следующий прием, который мы проиллюстрируем на примере двухчастичных состояний, обозначаемых символами a и b:

$$(i\eta^*_{1a} i\eta_{2a})(i\eta^*_{1b} i\eta_{2b}) = (i\eta^*_{1b} i\eta^*_{1a})(i\eta_{2a} i\eta_{2b}). \tag{6.105}$$

Всякий раз, когда источники смещаются на четное число сомножителей, никаких знаков минус не возникает. В результате мы придем к такому разбиению на множители, в котором излучающие источники перемножаются в определенном порядке и читать их нужно слева направо, тогда как поглощающие источники стоят в том же самом порядке, но читать их следует справа налево. Оно будет совпадать с приведенным выше выражением общего вида, если для многочастичных состояний положить

$$\begin{aligned}\langle\{n\}|\,0_-\rangle^\eta &= \langle 0_+|\,0_-\rangle^\eta \prod_{p\sigma}(i\eta_{p\sigma})^{n_{p\sigma}},\\ \langle 0_+|\{n\}\rangle^\eta &= \langle 0_+|\,0_-\rangle^\eta \prod_{p\sigma}^{T}(i\eta^*_{p\sigma})^{n_{p\sigma}},\end{aligned} \qquad (6.106)$$

где $\prod^T$ — символ произведения, под знаком которого сомножители располагаются в порядке, обратном по сравнению с $\prod$, а для нумерации бесконечного счетного множества состояний частиц можно воспользоваться любой стандартной последовательностью. Как и в случае статистики Бозе — Эйнштейна, интерпретация чисел $n_{p\sigma}$ как чисел заполнения частиц подтверждается законом изменения при трансляции источника, т. е. при преобразовании $\eta(x) \to \eta(x+X)$, которая дает

$$\langle\{n\}|\,0_-\rangle^\eta \to e^{iPX}\langle\{n\}|\,0_-\rangle^\eta, \qquad \langle 0_+|\{n\}\rangle^\eta \to \langle 0_+|\{n\}\rangle^\eta e^{-iPX}, \qquad (6.107)$$

где

$$P^\mu = \sum_{p\sigma} n_{p\sigma}p^\mu, \qquad (6.108)$$

что указывает на аддитивность вкладов от различных имеющихся частиц.

Требование полноты многочастичных состояний можно сформулировать разными способами: либо как

$$\sum_{\{n\}} \langle 0_-|\{n\}\rangle^\eta \langle\{n\}|\,0_-\rangle^\eta = \langle 0_-|\,0_-\rangle = 1, \qquad (6.109)$$

где

$$\langle 0_-|\{n\}\rangle^\eta = \langle\{n\}|\,0_-\rangle^{\eta *}, \qquad (6.110)$$

либо как

$$\sum_{\{n\}} \langle 0_+|\{n\}\rangle^\eta \langle\{n\}|\,0_+\rangle^\eta = \langle 0_+|\,0_+\rangle = 1, \qquad (6.111)$$

где

$$\langle\{n\}|\,0_+\rangle^\eta = \langle 0_+|\{n\}\rangle^{\eta *}. \qquad (6.112)$$

Записывая эти соотношения, мы старались быть более аккуратными, чем в случае статистики Бозе — Эйнштейна, так как теперь приходится иметь дело с функциями антикоммутирующих переменных. Но в случае вакуумной амплитуды, являющейся четной функцией, никаких предосторожностей не требуется, и мы сформулируем два условия полноты в виде

$$\begin{aligned}1 &= |\langle 0_+|\,0_-\rangle^\eta|^2 \sum_{\{n\}} \Big[\prod_{p\sigma}(\eta_{p\sigma})^{n_{p\sigma}}\Big]^* \Big[\prod_{p\sigma}(\eta_{p\sigma})^{n_{p\sigma}}\Big],\\ 1 &= |\langle 0_+|\,0_-\rangle^\eta|^2 \sum_{\{n\}} \Big[\prod_{p\sigma}^{T}(\eta^*_{p\sigma})^{n_{p\sigma}}\Big] \Big[\prod_{p\sigma}^{T}(\eta^*_{p\sigma})^{n_{p\sigma}}\Big]^*,\end{aligned} \qquad (6.113)$$

где скомпенсировавшиеся множители i и $-i$ опущены. Сравнение этих двух соотношений подсказывает нам правило комплексного сопряжения источников Ферми — Дирака, которое оказывается внутренне непротиворечивым: комплексное сопряжение обращает также порядок следования сомножителей, что иллюстрируется примером

$$(\eta_a\eta_b)^* = \eta_b^*\eta_a^*. \tag{6.114}$$

В таком случае мы придем к единой формулировке условия полноты:

$$\begin{aligned} |\langle 0_+ | 0_-\rangle|^{-2} &= \sum_{\{n\}} \Big[\prod_{p\sigma}^{T} (\eta_{p\sigma}^*)^{n_{p\sigma}}\Big] \Big[\prod_{p\sigma} (\eta_{p\sigma})^{n_{p\sigma}}\Big] = \\ &= \sum_{\{n\}} \prod_{p\sigma} (\eta_{p\sigma}^*\eta_{p\sigma})^{n_{p\sigma}} = \prod_{p\sigma} \sum_{n_{p\sigma}} (\eta_{p\sigma}^*\eta_{p\sigma})^{n_{p\sigma}} = \\ &= \prod_{p\sigma} \exp(\eta_{p\sigma}^*\eta_{p\sigma}), \end{aligned} \tag{6.115}$$

или

$$|\langle 0_+ | 0_-\rangle^\eta|^{-2} = \exp\Big[\sum_{p\sigma} \eta_{p\sigma}^*\eta_{p\sigma}\Big]; \tag{6.116}$$

по существу эта выкладка обратна процедуре факторизации, применяемой при анализе причинного разложения.

Мы должны подтвердить этот вывод из условия полноты непосредственным расчетом величины $|\langle 0_+ | 0_-\rangle^\eta|^2$. Важно уяснить себе, что правило комплексного сопряжения источников Ферми — Дирака приводит к мнимости произведения двух вещественных источников:

$$(\eta_\zeta(x)\,\eta_{\zeta'}(x'))^* = \eta_{\zeta'}(x')\,\eta_\zeta(x) = -\eta_\zeta(x)\,\eta_{\zeta'}(x'). \tag{6.117}$$

Следовательно, произведение $\eta(x)\gamma^0\eta(x')$ вещественно, так как γ^0 — мнимая матрица. Это другой аспект сопоставления статистики спину. Поскольку матрицы $(1/i)\gamma^\mu$ вещественны, единственной комплексной величиной в W будет $\Delta_+(x-x')$ и поэтому

$$2\,\mathrm{Im}\,W = \int (dx)(dx')\,\eta(x)\gamma^0\Big(m-\gamma\frac{1}{i}\partial\Big)\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{i}\Delta_+(x-x')\,\eta(x'). \tag{6.118}$$

Тогда соотношение

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{i}\Delta_+(x-x') = \mathrm{Re}\int d\omega_p e^{ip(x-x')} \tag{6.119}$$

будет давать

$$2\,\mathrm{Im}\,W = \mathrm{Re}\int d\omega_p \eta(-p)\gamma^0(m-\gamma p)\eta(p) =$$
$$= \mathrm{Re}\,2m\int d\omega_p \sum_\sigma \eta(p)^* u_{p\sigma}u^*_{p\sigma}\gamma^0\eta(p) =$$
$$= \mathrm{Re}\sum_{p\sigma}\eta^*_{p\sigma}\eta_{p\sigma}. \qquad (6.120)$$

Символ Re здесь излишен, так как имеет место равенство

$$(\eta^*_{p\sigma}\eta_{p\sigma})^* = \eta^*_{p\sigma}\ \eta_{p\sigma}, \qquad (6.121)$$

существенной основой которого служит правило комплексного сопряжения. Полученный результат

$$|\langle 0_+ | 0_-\rangle^\eta|^2 = \exp\left[-\sum_{p\sigma}\eta^*_{p\sigma}\eta_{p\sigma}\right] \qquad (6.122)$$

и подтверждает условие полноты.

Евклидов постулат мы ввели в качестве наиболее четкой формулировки принципа равноправности всех точек пространства-времени. Если интерпретировать его таким образом, что в рамках евклидова описания не может существовать никаких указаний на исходное пространство Минковского, то для частиц со спином $^1/_2$ этот постулат будет приводить к новым интересным выводам. При евклидовом описании частиц с целым спином все ссылки на пространство Минковского действительно исчезают, но в случае спина $^1/_2$ возникает новая ситуация. Когда речь шла, например, о частицах с единичным спином, мы видели, что в результате преобразования, связанного с заменой $J_4 = iJ^0$, эрмитовы вещественные симметричные матрицы $s_{k4} = is_{0k}$ превращаются в эрмитовы мнимые антисимметричные матрицы, объединяясь тем самым с s_{kl}. Заметим, что в это преобразование входит квадратный корень из матрицы пространственного отражения или из матрицы, противоположной ей по знаку. Чтобы проделать то же самое с вещественными симметричными матрицами $\sigma_{k4} = \gamma^0\gamma_k$ и в результате объединить их с мнимыми антисимметричными матрицами $\sigma_{kl} = i\gamma_k\gamma_l$, мы должны отыскать подходящее унитарное преобразование, коммутирующее с этими последними матрицами. Унитарная матрица может иметь только следующий вид:

$$\exp\,[i\varphi\,(\gamma^0,\ i\gamma_5,\ \gamma^0\gamma_5)]. \qquad (6.123)$$

Но все такие матрицы вещественны, и поэтому они не могут изменить вещественность σ_{k4}. Таким образом, если мы посмотрим на вещественность или на симметрию матриц $\sigma_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, \ldots, 4$), у нас не останется никаких сомнений относительно того, какая из евклидовых осей соответствует временной оси пространства Минковского. Это нарушение евклидова постулата.

Мы уже указывали, что симметрию матриц можно обратить, не затрагивая при этом их пространственно-временного характера, если воспользоваться независимой антисимметричной матрицей

$$q = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.124}$$

которая действует на дополнительный индекс источника, принимающий два значения. Тогда мы сможем построить комплексную унитарную матрицу, умножив вещественную матрицу отражения $r_s = i\gamma^0$ на мнимую матрицу q и извлекая затем по аналогии со случаем единичного спина квадратный корень. Такое преобразование имеет вид

$$\sigma_{\mu\nu E} = e^{(i\pi/4)q\gamma^0}\sigma_{\mu\nu}e^{-(i\pi/4)q\gamma^0}, \tag{6.125}$$

и действительно, все величины

$$\sigma_{klE} = \sigma_{kl}, \qquad \sigma_{k4E} = iq\gamma_k \tag{6.126}$$

оказываются мнимыми антисимметричными матрицами. Переход от пространства Минковского к евклидову пространству для источников соответствует преобразованию

$$e^{(i\pi/4)(q\gamma^0-1)}\eta(x)(dx) \to \eta(x)(dx)|_E. \tag{6.127}$$

Если применить это преобразование к вакуумной амплитуде, то возникнет следующая матрица (заметим, что матрица $q\gamma^0$ симметрична):

$$e^{-(i\pi/4)(q\gamma^0-1)}\gamma^0\left(m - \gamma_\mu \frac{1}{i}\,\partial_\mu\right)e^{-(i\pi/4)(q\gamma^0-1)} = qm - \alpha_\mu\partial_\mu, \tag{6.128}$$

где остальные компоненты

$$\alpha_\mu = e^{-(i\pi/4)q\gamma^0}\gamma^0\gamma_\mu e^{-(i\pi/4)q\gamma^0} \tag{6.129}$$

равны ($\gamma_4 = i\gamma^0$):

$$\alpha_k = \gamma^0\gamma_k, \qquad \alpha_4 = q\gamma^0. \tag{6.130}$$

Все они являются вещественными симметричными матрицами, удовлетворяющими соотношениям

$$\frac{1}{2}\{\alpha_\mu, \alpha_\nu\} = \delta_{\mu\nu} \tag{6.131}$$

и

$$\sigma_{\mu\nu E} = \frac{1}{2i}[\alpha_\mu, \alpha_\nu]. \tag{6.132}$$

В результате для вакуумной амплитуды частиц со спином $^1/_2$ в евклидовом представлении мы получим выражение

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^\eta \to \exp \left[-\frac{1}{2} \int (dx)(dx')\, \eta(x)(qm - \alpha_\mu \partial_\mu)\, \Delta(x-x')\, \eta(x') \right]_E, \tag{6.133}$$

которое вещественно, если используются вещественные евклидовы источники.

Таким образом, из евклидова постулата вытекает наличие у каждой частицы со спином $^1/_2$ некоторой зарядово-подобной характеристики, что полностью согласуется со всей совокупностью экспериментальных данных. Хотя безмассовые нейтрино требуют специального рассмотрения, общий вывод, следующий из экспериментальных данных, таков, что у всех фермионов (частиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака), в том числе и электрически нейтральных, имеются двойники в виде соответствующих им античастиц, тогда как ни одному из электрически нейтральных бозонов (частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна) такая дублетность не свойственна [1]). Объявляя v_σ и $u_{p\sigma}$ собственными векторами зарядовой матрицы с собственными значениями q, мы приписываем состояниям частиц со спином $^1/_2$ дополнительный зарядовый индекс $q = \pm 1$. Поскольку зарядовая матрица мнима, при комплексном сопряжении q переходит в $-q$ и приводившиеся ранее формулы соответствующим образом модифицируются; в частности,

$$u^*_{p,\,-\sigma,\,-q} = i\sigma\gamma_5 u_{p\sigma q} \tag{6.134}$$

и

$$u_{p\sigma q} = \left(\frac{p^0+m}{2m}\right)^{1/2} v_{\sigma q} + \left(\frac{p^0-m}{2m}\right)^{1/2} v^*_{-\sigma,\,-q}. \tag{6.135}$$

Источники частиц теперь будут определяться соотношениями

$$\eta_{p\sigma q} = (2m\, d\omega_p)^{1/2} u^*_{p\sigma q}\gamma^0 \eta(p), \qquad \eta^*_{p\sigma q} = (2m\, d\omega_p)^{1/2}\, \eta(p)^*\, \gamma^0 u_{p\sigma q}. \tag{6.136}$$

Проведенный нами анализ евклидова постулата подводит нас к рассмотрению TCP-преобразования. Посредством евклидовой группы, связанной с группой Лоренца, мы можем выполнить преобразование

$$\bar{x}^\mu = -x^\mu \tag{6.137}$$

---

[1]) Не считая K^0-мезона (и его резонансов), который, правда, по отношению к слабым взаимодействиям ведет себя как некоторая суперпозиция соответствующей частицы и античастицы, различающихся гиперзарядом.— *Прим. ред.*

в виде

$$\bar{\eta}(\bar{x}) = r_{st}\eta(x), \tag{6.138}$$

где матрица

$$r_{st} = e^{(i\pi/2)\sigma_{12}}e^{(i\pi/2)\sigma_{34}} = e^{(i\pi/2)\sigma_{23}}e^{(i\pi/2)\sigma_{14}} = e^{(i\pi/2)\sigma_{31}}e^{(i\pi/2)\sigma_{24}} = -i\gamma_5 \tag{6.139}$$

описывает эквивалентные вращения на угол π в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Эта матрица антисимметричная, мнимая и удовлетворяет требованию

$$r_{st}^2 = 1. \tag{6.140}$$

Инвариантность вакуумной амплитуды сразу же следует из соотношения

$$\begin{aligned} i\gamma_5\gamma^0 \left(m - \gamma^\mu \frac{1}{i}(-\partial_\mu)\right)(-i\gamma_5)\Delta_+(-x+x') = \\ = \gamma^0 \left(m - \gamma^\mu \frac{1}{i}\partial_\mu\right)\Delta_+(x-x'). \end{aligned} \tag{6.141}$$

Правда, в силу мнимости r_{st} это достигается за счет того, что вещественный источник η заменяется мнимым $\bar{\eta}$. Если мы будем настаивать на вещественности $\bar{\eta}$, взяв для этого преобразование

$$\bar{\eta}(\bar{x}) = \gamma_5\eta(x), \tag{6.142}$$

то W перейдет в $-W$. Изменение знака можно скомпенсировать, изменив порядок перемножения всех источников на обратный, ибо порядок сомножителей соответствует причинной последовательности событий.

При подстановке

$$\eta(p) \to \gamma_5\eta(-p) \tag{6.143}$$

отдельные излучающие и поглощающие источники преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_{p\sigma q} &\to (2m\,d\omega_p)^{1/2} u^*_{pq\sigma}\gamma^0\gamma_5\eta(-p) = \\ &= (2m\,d\omega_p)^{1/2}\eta(p^*)\gamma^0 u_{p,\,-\sigma,\,-q}(-i\sigma), \end{aligned} \tag{6.144}$$

или

$$\eta_{p\sigma q} \to -i\sigma\eta^*_{p,\,-\sigma,\,-q}; \tag{6.145}$$

точно так же

$$\eta^*_{p\sigma q} \to i\sigma\eta_{p,\,-\sigma,\,-q}. \tag{6.146}$$

В результате мы получаем следующее соответствие между процессами многочастичного испускания и поглощения:

$$\begin{aligned} \langle\{n\}\,|\,0_-\rangle^\eta &\to \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\sum n_{p\sigma q}\sigma\right)\langle 0_+\,|\,\{n'\}\rangle^\eta, \\ \langle 0_+\,|\,\{n\}\rangle^\eta &\to \exp\left(\frac{i\pi}{2}\sum n_{p\sigma q}\sigma\right)\langle\{n'\}\,|\,0_-\rangle^\eta, \end{aligned} \tag{6.147}$$

где

$$n'_{p\sigma q} = n_{p,\,-\sigma,\,-q}, \tag{6.148}$$

а преобразование источников, представляющее собой часть всего TCP-преобразования, будет обеспечивать необходимое обращение порядка сомножителей.

§ 7. ЕЩЕ РАЗ О ЧАСТИЦАХ СО СПИНОМ $^1/_2$, НЕЙТРИНО

Прежде чем говорить о квантовых числах углового момента как характеристиках состояний частиц, мы рассмотрим вопрос о сложении орбитального момента со спином $^1/_2$. Состояния с квантовыми числами полного момента $j = l \pm {}^1/_2$ выделяются из подпространства состояний с орбитальным квантовым числом l эрмитовыми проекционными операторами

$$M_{lj} = \frac{l + \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2} + \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)}{2l+1} = \frac{j + \frac{1}{2} \pm \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2j+1 \mp 1}. \tag{7.1}$$

Они удовлетворяют равенствам

$$M_{lj}M_{lj'} = \delta_{jj'}M_{lj}, \qquad \sum_j M_{lj} = 1 \tag{7.2}$$

и имеют след, согласующийся с мультиплетностью:

$$\mathrm{Sp}\, M_{lj} = 2j + 1. \tag{7.3}$$

Введем ортонормированные спин-угловые функции [1])

$$Z_{ljm} = M_{lj}Y_{l,\,m-1/2}v_+ \left\langle lm - \frac{1}{2} + \left| M_{lj} \right| lm - \frac{1}{2} + \right\rangle^{-1/2}, \tag{7.4}$$

которые в явном виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} & l = j - \frac{1}{2}: \\ & \quad \left(\frac{j+m}{2j}\right)^{1/2} Y_{j-1/2,\,m-1/2}v_+ + \left(\frac{j-m}{2j}\right)^{1/2} Y_{j-1/2,\,m+1/2}v_-, \\ & l = j + \frac{1}{2}: \\ & \quad \left(\frac{j+1-m}{2j+2}\right)^{1/2} Y_{j+1/2,\,m-1/2}v_+ - \left(\frac{j+1+m}{2j+2}\right)^{1/2} Y_{j+1/2,\,m+1/2}v_-. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Здесь также существует оператор, переводящий эти две функции одна в другую:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}Z_{j\mp 1/2\, jm} = Z_{j\pm 1/2\, jm}, \tag{7.6}$$

---

[1]) Они называются также сферическими функциями со спином, спинорными шаровыми функциями или шаровыми спинорами.— *Прим. ред.*

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, которым определяются угловые переменные сферических гармоник. При доказательстве этого равенства используются следующие свойства оператора $\sigma\cdot\mathbf{n}$: он коммутирует с вектором полного момента, но изменяет орбитальный момент на единицу; он не нарушает ортонормированности спин-угловых функций, так как его квадрат равен единице. Это говорит о том, что левая и правая части (7.6) совпадают с точностью до фазового множителя, который не может зависеть от m. В таком случае достаточно взять вектор $\mathbf{n}$ параллельным третьей оси и положить $m = 1/2$. Единственная остающаяся при этом гармоника

$$Y_{l0} = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}$$

выделит состояния v_+, что и доказывает равенство (7.6).

Из соотношений (6.73) и (6.74) следует, что выражение, описывающее связь между источниками, которая обусловлена одночастичным обменом, имеет вид (причинные индексы для простоты опущены)

$$\int d\omega_p i\eta(p)^* \exp\left[-\frac{1}{2}\,0i\gamma_5\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right] 2m\,\frac{1}{2}(1+\gamma^0)\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}\,0i\gamma_5\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right]\eta(p). \qquad (7.7)$$

В качестве предварительного шага введем преобразование

$$(2m\,d\omega_p)^{1/2}\eta(p) = \sum_{lm}(d\Omega)^{1/2}Y_{lm}(\mathbf{p})\,\eta_{p^0lm}, \qquad (7.8)$$

где величина

$$\eta_{p^0lm} = \left(\frac{2m\,|\mathbf{p}|\,dp^0}{\pi}\right)^{1/2} i^{-l}\int(dx)\,e^{ip^0x^0}j_l(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|)\,Y_{lm}(\mathbf{x})^*\,\eta(x) \qquad (7.9)$$

имеет и неуказанный здесь индекс, соответствующий индексу многокомпонентного источника $\eta(x)$. Проекционная матрица $1/2(1+\gamma^0)$ выделяет часть этих компонент, а матрица $1/2(1+\gamma^0)\,i\gamma_5 = i\gamma_5\,1/2(1-\gamma^0)$ осуществляет их дополнительный отбор. Чтобы отразить эту процедуру, мы будем снабжать величины η_{p^0lm} дополнительными значками плюс и минус. Оставшиеся спиновые компоненты, объединяясь с $Y_{lm}(\mathbf{p})$, дают нам спин-угловые функции, которые вводятся равенством

$$\sum_{lm}(d\Omega)^{1/2}Y_{lm}(\mathbf{p})\,\eta_{\pm p^0lm} = \sum_{ljm}(d\Omega)^{1/2}Z_{ljm}\eta_{\pm p^0ljm}, \qquad (7.10)$$

где считается, что различие между орбитальным магнитным квантовым числом m, принимающим целые значения, и полным магнитным квантовым числом m, являющимся полуцелым, должно быть ясным из контекста. В выражение (7.7) входит комбинация

(j и m фиксированы)

$$\cos\frac{1}{2}\theta\sum_l (d\Omega)^{1/2} Z_{ljm}\eta_{+p^0ljm}-\sin\frac{1}{2}\theta\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\sum_l (d\Omega)^{1/2} Z_{ljm}\eta_{-p^0ljm}=$$
$$=\sum_l (d\Omega)^{1/2} Z_{ljm}\left[\cos\frac{1}{2}\theta\eta_{+p^0ljm}-\sin\frac{1}{2}\theta\eta_{-p^0\bar{l}jm}\right] \qquad (7.11)$$

и комплексно-сопряженная ей величина; здесь

$$\bar{l}=2j-l \qquad (7.12)$$

указывает на то изменение орбитального момента, которое обусловлено действием оператора $\sigma\cdot\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. Используя ортонормированность функций Z_{ljm} в подпространстве, на которое проектирует матрица $^1/_2(1+\gamma^0)$, мы для величины (7.7) окончательно получаем выражение

$$\sum_{p^0ljm} i\eta^*_{p^0ljm} i\eta_{p^0ljm}, \qquad (7.13)$$

где

$$\eta_{p^0ljm}=\left(\frac{p^0+m}{2m}\right)^{1/2}\eta_{+p^0ljm}-\left(\frac{p^0-m}{2m}\right)^{1/2}\eta_{-p^0\bar{l}jm}, \qquad (7.14)$$

причем здесь еще не указан зарядовый индекс.

Если скомбинировать различные преобразования, то эти одночастичные источники будут выглядеть следующим образом:

$$\eta_{p^0ljmq}=\int (dx)\,\psi_{p^0ljmq}(x)^*\gamma^0\eta(x), \qquad (7.15)$$

где

$$\psi_{p^0ljmq}(x)=\left(\frac{|\mathbf{p}|\,dp^0}{\pi}\right)^{1/2} e^{-ip^0x^0}\left[(p^0+m)^{1/2} i^l j_l(|\mathbf{p}|\cdot|\mathbf{x}|)Z_{ljmq}+\right.$$
$$\left.+(p^0-m)^{1/2} i^{\bar{l}} j_{\bar{l}}(|\mathbf{p}|\cdot|\mathbf{x}|)\,i\gamma_5 Z_{\bar{l}jmq}\right], \qquad (7.16)$$

причем функции Z_{ljmq}, как и в выражениях (7.5), строятся из собственных векторов $v_{\sigma q}$, а сферические гармоники зависят от углов, задаваемых единичным вектором в координатном пространстве. Сравнивая (7.13) и (7.15) с левой частью (6.73), получаем

$$x^0>x^{0\prime}: \qquad G_+(x-x')=i\sum_{p^0ljmq}\psi_{p^0ljmq}(x)\,\psi_{p^0ljmq}(x')^*\gamma^0, \qquad (7.17)$$

а антисимметрия матрицы $\gamma^0G(x-x')$ позволяет также написать

$$x^0<x^{0\prime}: \qquad G_+(x-x')=-i\sum_{p^0ljmq}\psi_{p^0ljmq}(x)^*\,\psi_{p^0ljmq}(x')\gamma^0. \qquad (7.18)$$

В отличие от состояний общего вида, задаваемых импульсом, состояниям с квантовыми числами углового момента можно приписать пространственную четность. Закон изменения источников частиц

$$\eta(x^0, \mathbf{x}) \to i\gamma^0\eta(x^0, -\mathbf{x}) \tag{7.19}$$

приводит к следующим трансформационным свойствам:

$$\gamma^0\psi_{p^0 ljmq}(x^0, -\mathbf{x}) = (-1)^l\,\psi_{p^0 ljmq}(x^0, \mathbf{x}). \tag{7.20}$$

Это равенство вытекает из однородности сферических гармоник

$$Y_{lm}(-\mathbf{x}) = (-1)^l\,Y_{lm}(\mathbf{x}) \tag{7.21}$$

и из того, что функции Z_{ljmq} являются собственными векторами матрицы γ^0 с собственным значением $+1$. Хотя функциям $i\gamma_5 Z_{\bar{l}jmq}$ и соответствует собственное значение -1 матрицы γ^0, это изменение знака компенсируется множителем $(-1)^{\bar{l}} = -(-1)^l$. В результате мы получаем

$$\eta_{p^0 ljmq} \to i(-1)^l\,\eta_{p^0 ljmq}, \tag{7.22}$$

так что пространственная четность имеет вид произведения двух сомножителей — внутренней четности i и переменной орбитальной четности $(-1)^l$. Поскольку в $\psi_{p^0 ljmq}$ входят оба орбитальных момента l и $\bar{l}$, индекс l у этой функции нужно понимать в том смысле, что четность равна $(-1)^l$. В случае спина $^1/_2$ два состояния с одинаковыми j, m можно различить по (противоположным) значениям их четности. Согласно формуле (2.24), в случае бесспиновых частиц четность также представляется в виде произведения орбитальной четности $(-1)^l$ и внутренней четности, равной $+1$ для скалярного источника и -1 для псевдоскалярного источника. Но здесь было бы излишним указывать четность в качестве индекса, так как состояния полностью определяются квантовыми числами углового момента. В случае же частиц с единичным спином четности недостаточно для идентификации всех трех состояний с заданными квантовыми числами полного момента. Кроме множителя, соответствующего внутренней четности и равного -1 для вектора и $+1$ для аксиального вектора, состояние (3.39) характеризуется орбитальной четностью $(-1)^j$, которая отвечает значению $l = j$, тогда как два состояния (3.41) и (3.42) характеризуются орбитальной четностью $-(-1)^j$, общей для всех значений $l = j \pm 1$. Но у безмассового фотона имеется только два типа состояний с заданным значением квантового числа полного момента $j \geqslant 1$. Состояние фотона, порождаемое источником $J_{p^0 jm1}$, имеет четность $-(-1)^j$, а состояние, порождаемое источником $J_{p^0 jm2}$, — четность $(-1)^j$. Источник первого вида обычно называют магнитным, а второго — электрическим мультипольным моментом.

Прежде чем переходить к исследованию действия TCP-преобразования на состояния с заданными квантовыми числами углового момента, мы рассмотрим свойства вещественности функций $\psi_{p^0 ljmq}(x)$. Заметим, что

$$Z^*_{ljmq} = (-1)^{l+j+m}\, i\gamma_5 Z_{l,\,j,\,-m,\,-q}, \tag{7.23}$$

где использовано свойство сферических гармоник

$$Y^*_{lm} = (-1)^m Y_{l,\,-m} \tag{7.24}$$

и закон изменения $v_{\sigma q}$ при комплексном сопряжении [т. е. соотношение (6.134) при $p^0 = m$]. При переходе к величине комплексно-сопряженной функции $\psi_{p^0 ljmq}$ дополнительный знак минус, возникающий из-за наличия множителя, можно скомпенсировать посредством пространственно-временного отражения $x^\mu \to -x^\mu$:

$$\psi_{p^0 ljmq}(-x)^* = (-1)^{l+j+m}\, i\gamma_5 \psi_{p^0,\,l,\,j,\,-m,\,-q}(x). \tag{7.25}$$

Связь между двумя причинными представлениями $G_+(x - x')$, устанавливаемая этим соотношением, находит свое выражение в свойстве инвариантности

$$\gamma^0 G_+(x - x') = -i\gamma_5 \gamma^0 G_+(-x + x')\, i\gamma_5, \tag{7.26}$$

совпадающем с (6.141). Произведя в формуле (7.15) подстановку

$$\eta(x) \to \gamma_5 \eta(-x), \tag{7.27}$$

мы получим

$$\begin{aligned}\eta_{p^0 ljmq} &\to \int (dx)\, \psi_{p^0 ljmq}(-x)^* \gamma^0\gamma_5 \eta(x) = \\ &= i(-1)^{l+j+m} \eta^*_{p^0,\,l,\,j,\,-m,\,-q},\end{aligned} \tag{7.28}$$

а затем

$$\eta^*_{p^0 ljmq} \to -i(-1)^{l+j+m} \eta_{p^0,\,l,\,j,\,-m,\,-q}. \tag{7.29}$$

Этим полностью устанавливается соответствие между актами одночастичного испускания и поглощения. Для многочастичных процессов оно выглядит аналогичным образом, причем изменение порядка сомножителей оказывается одной из сторон TCP-преобразования.

Пространственно-временное описание процессов многочастичного обмена между источниками будет даваться следующим разложением в степенной ряд:

$$\begin{aligned}&\exp\left[i \int (dx)(dx')\, \eta_1(x)\, \gamma^0 G_+(x - x')\, \eta_2(x') \right] = \\ &= 1 + \sum_{n=1} i^n \int \frac{(dx_1)\ldots(dx_n)}{n!} \frac{(dx'_1)\ldots(dx'_n)}{n!} \times \\ &\times \eta_1(x_n)\ldots\eta_1(x_1)\, [\det_{(n)} \gamma^0 G_+(x_i - x'_j)]\, \eta_2(x'_1)\ldots\eta_2(x'_n),\end{aligned} \tag{7.30}$$

где считается, что дискретные индексы источников и функций распространения объединены с явно выписанными пространственно-временными координатами. В противоположность «перманенту» (2.37), в симметрии которого находит свое выражение коммутативность источников Бозе — Эйнштейна, антисимметричный определитель

$$\det_{(n)} \gamma^0 G_+ (x_i - x'_j) = \sum \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \gamma^0 G_+ (x_1 - x'_{j_1}) \dots \gamma^0 G_+ (x_n - x'_{j_n}) \tag{7.31}$$

(сумма берется по всем $n!$ перестановкам) выражает антикоммутативность источников Ферми — Дирака. Мы видим здесь простую и необходимую связь между свойствами симметрии, которыми характеризуются два типа статистики, и элементарными алгебраическими свойствами, которыми различаются два вида источников. Соответствующим образом симметризованные произведения отдельных функций распространения дают нам пространственно-временное описание системы многих невзаимодействующих частиц.

Теперь остановимся на тех обобщениях, к которым приводит замена конечных вакуумных состояний многочастичными состояниями. Рассмотрим для этого причинно-упорядоченные излучающий источник η_2, зондирующий источник η_0 и детектирующий источник η_1:

$$\eta(x) = \eta_1(x) + \eta_0(x) + \eta_2(x). \tag{7.32}$$

Вакуумная амплитуда записывается в виде

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta} = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta_1+\eta_2} \exp\Big[i \int (dx)(dx')\, \eta_1(x) \gamma^0 G_+ (x - x')\, \eta_0(x') + \\ + i \int (dx)(dx')\, \eta_0(x) \gamma^0 G_+ (x - x')\, \eta_2(x') \Big] \langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta_0} = \\ = \Big[\sum_{\{n\}} \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{\eta_1} \langle \{n\} | 0_- \rangle^{\eta_2} \Big] \times \\ \times \exp\Big[\sum_r i\eta^*_{1r} i\eta_{0r} + i\eta^*_{0r} i\eta_{2r} \Big] \langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta_0}, \end{aligned} \tag{7.33}$$

где через r обозначена любая совокупность одночастичных индексов, скажем $p\sigma q$. Причинное разложение для этой вакуумной амплитуды записывается в виде

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta} = \sum_{\{n\},\, \{n'\}} \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{\eta_1} \langle \{n\}_+ | \{n'\}_- \rangle^{\eta_0} \langle \{n'\} | 0_- \rangle^{\eta_2}, \tag{7.34}$$

откуда можно получить подробную информацию о действии зондирующего источника. Чтобы описать слабый зондирующий источник, мы должны интерпретировать произведение $i\eta_r \langle \{n\} | 0_- \rangle^{\eta}$. Если одночастичное состояние типа r уже занято, т. е. $n_r = 1$, то мы получим нуль, так как $(\eta_r)^2 = 0$. Это не что иное, как принцип запрета, не позволяющий переводить еще одну частицу в уже занятое состояние. В противоположном случае имеем

$$n_r = 0: \qquad i\eta_r \langle \{n\} \mid 0_- \rangle^\eta = (-1)^{n_{<r}} \langle \{n + 1_r\} \mid 0_- \rangle^\eta, \tag{7.35}$$

где $n_{<r}$ — число занятых состояний, предшествующих r при их стандартном расположении; оно равно числу множителей $\langle \{n\} \mid 0_- \rangle^\eta$, описывающих источники, через которые нужно пронести $i\eta_r$, чтобы поставить его на свое собственное место. Аналогично

$$n_r = 0: \qquad \langle 0_+ \mid \{n\} \rangle^\eta \, i\eta_r^* = \langle 0_+ \mid \{n + 1_r\} \rangle^\eta (-1)^{n_{<r}}, \tag{7.36}$$

и для слабого источника мы получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} n_r = 0: &\qquad \langle \{n + 1_r\}_+ \mid \{n\}_- \rangle^\eta \approx (-1)^{n_{<r}} \, i\eta_r, \\ n_r = 1: &\qquad \langle \{n - 1_r\}_+ \mid \{n\}_- \rangle^\eta \approx (-1)^{n_{<r}} \, i\eta_r^*. \end{aligned} \tag{7.37}$$

Чтобы построить амплитуду вероятности $\langle \{n\}_+ \{n\}_- \rangle^\eta$, нужно в разложении (7.33) оставить лишь члены с одинаковыми степенями η_{1r}^* и η_{2r}:

$$\exp\left[\sum_r i\eta_{1r}^* i\eta_{0r} + i\eta_{0r}^* i\eta_{2r}\right] \to \prod_r \left[1 + i\eta_{1r}^* i\eta_{0r} i\eta_{0r}^* i\eta_{2r}\right]. \tag{7.38}$$

В противоположность случаю статистики Бозе — Эйнштейна ряд будет обрываться на этом произведении. Обратившись к формулам (7.35) и (7.36), мы увидим, что

$$\sum_{\{n\}} \langle 0_+ \mid \{n\} \rangle^{\eta_1} i\eta_{1r}^* i\eta_{2r} \langle \{n\} \mid 0_- \rangle^{\eta_2} = \sum_{\{n\}} \langle 0_+ \mid \{n\} \rangle^{\eta_1} n_r \langle \{n\} \mid 0_- \rangle^{\eta_2}, \tag{7.39}$$

где наличие множителя n_r свидетельствует о том. что слагаемое с $n_r = 0$ отсутствует. Теперь можно произвести следующую эффективную замену:

$$\begin{aligned} &\exp\left[\sum_r (i\eta_{1r}^* i\eta_{0r} + i\eta_{0r}^* i\eta_{2r})\right] \to \\ &\to \prod_r \left[1 + i\eta_{0r} n_r i\eta_{0r}^*\right] = \exp\left[\sum_r i\eta_{0r} n_r i\eta_{0r}^*\right]. \end{aligned} \tag{7.40}$$

При любом способе описания состояний линейную связь между $\eta(x)$ и излучающими и поглощающими источниками можно представить в форме

$$\eta_r = \int (dx)\, \psi_r(x)^* \gamma^0 \eta(x), \qquad \eta_r^* = \int (dx)\, \eta(x) \gamma^0 \psi_r(x). \tag{7.41}$$

Так, например,

$$\psi_{p\sigma q}(x) = (2m\, d\omega_p)^{1/2} u_{p\sigma q} e^{ipx}; \tag{7.42}$$

другой пример дает нам соотношение (7.16). Соответствующее выражение для функции распространения имеет вид, аналогичный виду формул (7.17) и (7.18):

$$
\begin{aligned}
x^0 > x^{0\prime}: &\quad G_+(x-x') = i\sum_r \psi_r(x)\,\psi_r(x')^*\,\gamma^0,\\
x^0 < x^{0\prime}: &\quad G_+(x-x') = -i\sum_r \psi_r(x)^*\,\psi_r(x')\,\gamma^0.
\end{aligned}
\tag{7.43}
$$

Теперь мы получаем

$$
\langle\{n\}_+|\{n\}_-\rangle^\eta = \exp\left[\frac{i}{2}\int (dx)(dx')\,\eta(x)\,\gamma^0 G_{\{n\}+}(x-x')\,\eta(x')\right], \tag{7.44}
$$

где

$$
\begin{aligned}
G_{\{n\}+}(x-x') = G_+(x-x') - i\sum_r n_r \times\\
\times[\psi_r(x)\,\psi_r(x')^* - \psi_r(x)^*\,\psi_r(x')]\,\gamma^0.
\end{aligned}
\tag{7.45}
$$

Структурой второго члена обеспечивается антисимметричность $\gamma^0 G_{\{n\}+}(x-x')$. Явный вид причинной функции таков:

$$
\begin{aligned}
x^0 > x^{0\prime}: &\quad i\sum_r [(1-n_r)\,\psi_r(x)\,\psi_r(x')^* + n_r\psi_r(x)^*\,\psi_r(x')]\,\gamma^0,\\
x^0 < x^{0\prime}: &\quad -i\sum_r [n_r\psi_r(x)\,\psi_r(x')^* +\\
&\quad +(1-n_r)\,\psi_r(x)^*\,\psi_r(x')]\,\gamma^0.
\end{aligned}
\tag{7.46}
$$

Сравнение с (2.49) указывает на важную роль статистики: статистика Бозе — Эйнштейна стимулирует, а статистика Ферми — Дирака подавляет испускание еще одной частицы.

Вернемся теперь к вакуумной амплитуде (7.33) и заметим, что в общем случае имеет место соотношение

$$
\begin{aligned}
\exp\left[\sum_r i\eta_{1r}^* i\eta_{0r} + i\eta_{0r}^* i\eta_{2r}\right] = \prod_r [1 + i\eta_{1r}^* i\eta_{0r} + i\eta_{0r}^* i\eta_{2r}]\times\\
\times\prod_r [1 + i\eta_{1r}^* i\eta_{0r} i\eta_{0r}^* i\eta_{2r}].
\end{aligned}
\tag{7.47}
$$

Подставив его в (7.33), получим

$$
\begin{aligned}
\langle 0_+|0_-\rangle^\eta = \sum_{\{n\}} \langle 0_+|\{n\}\rangle^{\eta_1}\,\langle\{n\}_+|\{n\}_-\rangle^{\eta_0}\times\\
\times\prod_r [1 + i\eta_{1r}^* i\eta_{0r} + i\eta_{0r}^* i\eta_{2r}]\,\langle\{n\}|0_-\rangle^{\eta_2}.
\end{aligned}
\tag{7.48}
$$

Типичный член произведения $\prod_r$ в формуле (7.48) имеет вид

$$
\prod_e{}^T (i\eta_{1r}^*)\prod_e (i\eta_{0r})\prod_a{}^T (i\eta_{0r}^*)\prod_a (i\eta_{2r}), \tag{7.49}
$$

где мы выделили две совокупности состояний с индексами a и e, поскольку отдельные сомножители, описывающие состояния, линейны по η_{2r} и по η_{1r}^*. Если неисчезающий член должен приводить к формуле (7.48), то необходимо, чтобы выполнялись равенства $n_a = n_e = 0$. Тогда состояниями типа a (поглощение) будут такие состояния, которые заняты в начале процесса, т. е.

$$\prod_a (i\eta_r) \langle\{n\} \mid 0_-\rangle^\eta = \prod_a (-1)^{n_{<r}} \langle\{n + 1_a\} \mid 0_-\rangle^\eta, \tag{7.50}$$

и свободны в конце его, а состояниями типа e (испускание) — такие состояния, которые оказываются занятыми в конце процесса,

$$\langle 0_+ \mid \{n\}\rangle^\eta \prod_e^T (i\eta_r^*) = \langle 0_+ \mid \{n + 1_e\}\rangle^\eta \prod_e (-1)^{n_{<r}}, \tag{7.51}$$

но были свободными в начале его. В результате мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} &n_a = n_e = 0: \\ &\langle\{n + 1_e\}_+ \mid \{n + 1_a\}_-\rangle^\eta = \\ &\qquad = \langle\{n\}_+ \mid \{n\}_-\rangle^\eta \prod_e [(-1)^{n_{<r}} i\eta_r] \prod_a^T [(-1)^{n_{<r}} i\eta_r^*], \end{aligned} \tag{7.52}$$

которое представляет собой обобщенное соотношение (7.37).

Для проверки полноты многочастичных состояний в рамках такого общего рассмотрения умножим (7.52) слева на комплексно-сопряженную величину и представим результат в форме, восстанавливающей $\{n\}$ в правах произвольного начального состояния:

$$\begin{aligned} &n_a = 1, \qquad n_e = 0: \\ &\langle\{n\}_- \mid \{n + 1_e - 1_a\}_+\rangle^\eta \langle\{n + 1_e - 1_a\}_+ \mid \{n\}_-\rangle^\eta = \\ &\qquad = |\langle\{n\}_+ \mid \{n\}_-\rangle^\eta|^2 \prod_e (\eta_r^*\eta_r) \prod_a (\eta_r\eta_r^*). \end{aligned} \tag{7.53}$$

Сумма по всем конечным состояниям записывается в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{\{n'\}} \langle\{n\}_- \mid \{n'\}_+\rangle^\eta \langle\{n'\}_+ \mid \{n\}_-\rangle^\eta = \\ &\quad = |\langle\{n\}_+ \mid \{n\}_-\rangle|^2 \prod_r [(1 + (1 - n_r)\eta_r^*\eta_r)(1 + n_r\eta_r\eta_r^*)] = \\ &\quad = |\langle\{n\}_+ \mid \{n\}_-\rangle|^2 \exp\Big[\sum_r (1 - 2n_r)\eta_r^*\eta_r\Big], \end{aligned} \tag{7.54}$$

где учтена антикоммутативность источников. Но согласно формулам (7.44) и (7.45),

$$\langle\{n\}_+ \mid \{n\}_-\rangle^\eta = \langle 0_+ \mid 0_-\rangle^\eta \exp\Big[\sum_r n_r\eta_r^*\eta_r\Big], \tag{7.55}$$

и поэтому, используя аналог равенства (6.122), соответствующий произвольному способу описания состояний, а именно

$$|\langle 0_+ \mid 0_-\rangle^\eta|^2 = \exp\Big[-\sum_r \eta_r^*\eta_r\Big], \tag{7.56}$$

мы получаем

$$|\langle\{n\}_+|\{n\}_-\rangle^\eta|^2 = \exp\left[-\sum_r (1-2n_r)\,\eta_r^*\eta_r\right]. \qquad (7.57)$$

Этим и доказывается, что левая часть равенства (7.54) равна единице. Чтобы получить равенство (7.56), исходя непосредственно из выражения (7.43) для функции распространения, заметим, что каждая из ее составляющих удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{Re}\gamma^0 G_+(x-x') = \operatorname{Re} i\sum \gamma^0\psi_r(x)\,\psi_r(x')^*\,\gamma^0, \qquad (7.58)$$

которое справедливо при всех $x-x'$. Но величина $i\eta(x)\,\eta(x')$ вещественна, и поэтому, как и предполагалось,

$$|\langle 0_+|0_-\rangle^\eta|^2 = \exp\left[-\operatorname{Re}\sum_r\int (dx)(dx')\,\eta(x)\,\gamma^0\psi_r(x)\,\psi_r(x')^*\,\gamma^0\eta(x')\right] =$$

$$= \exp\left[-\sum_r \eta_r^*\eta_r\right]. \qquad (7.59)$$

В случае частиц со спином $^1/_2$ унитарность можно свести к причинности, следуя той же схеме, что и в случае бесспиновых частиц. Рассмотрим систему, которая выходит из начального вакуумного состояния под действием источника $\eta_{(+)}(x)$, а затем снова возвращается в начальное состояние под действием источника $\eta_{(-)}(x)$. Процесс эволюции системы определяется функцией распространения $\Delta_+(x-x')$, и в качестве аналога формулы (2.83) мы получаем

$$\langle 0_-|0_-\rangle^{\eta_{(-)},\,\eta_{(+)}} = \exp\Big[-\frac{i}{2}\int (dx)(dx')\,\eta_{(-)}(x)\,\gamma^0 G_-(x-x')\,\eta_{(-)}(x') +$$

$$+\frac{i}{2}\int (dx)(dx')\,\eta_{(+)}(x)\,\gamma^0 G_+(x-x')\,\eta_{(+)}(x') +$$

$$+\int (dx)(dx')\,\eta_{(-)}(x)\,\gamma^0 G^{(+)}(x-x')\,\eta_{(+)}(x')\Big], \qquad (7.60)$$

где

$$G_-(x-x') = \left(m-\gamma^\mu\frac{1}{i}\,\partial_\mu\right)\Delta_-(x-x'),$$
$$G^{(\pm)}(x-x') = \left(m-\gamma^\mu\frac{1}{i}\,\partial_\mu\right)\Delta^{(\pm)}(x-x'). \qquad (7.61)$$

Приведем некоторые соотношения для этих матричных функций:

$$G_-(x-x') = G_+(x-x')^*, \qquad G^{(-)}(x-x') = G^{(+)}(x-x')^*,$$
$$-[\gamma^0 G^{(+)}(x'-x)]^T = \gamma^0 G^{(-)}(x-x') \qquad (7.62)$$

и

$$G_+(x-x')=\begin{cases} x^0>x^{0\prime}: & iG^{(+)}(x-x'),\\ x^0<x^{0\prime}: & iG^{(-)}(x-x');\end{cases}$$
$$G_-(x-x')=\begin{cases} x^0>x^{0\prime}: & -iG^{(-)}(x-x'),\\ x^0<x^{0\prime}: & -iG^{(+)}(x-x').\end{cases} \tag{7.63}$$

При произвольном способе задания одночастичных состояний имеем

$$G^{(+)}(x-x')=\sum_r \psi_r(x)\,\psi_r(x')^*\,\gamma^0,$$
$$G^{(-)}(x-x')=-\sum_r \psi_r(x)^*\,\psi_r(x')\,\gamma^0. \tag{7.64}$$

Кроме того, различные функции связаны тождеством

$$i\,[G_+(x-x')-G_-(x-x')]+G^{(+)}(x-x')+G^{(-)}(x-x')=0. \tag{7.65}$$

Согласно причинному разложению

$$\langle 0_-|0_-\rangle^{\eta_{(-)},\,\eta_{(+)}}=\sum_{\{n\}}\langle 0_-|\{n\}\rangle^{\eta_{(-)}}\langle\{n\}|0_-\rangle^{\eta_{(+)}}, \tag{7.66}$$

для проверки полноты, или унитарности, достаточно убедиться в том, что при совпадающих источниках $\eta_{(-)}(x)$ и $\eta_{(+)}(x)$ величина (7.60) становится равной единице. Но это как раз и составляет содержание тождества (7.65), если его скомбинировать с третьим соотношением (7.62). Чтобы обобщить сказанное на амплитуду $\langle\{n\}_-|\{n\}_-\rangle^{\eta_{(-)},\,\eta_{(+)}}$, нужно заменить $G_+(x-x')$ функцией $G_{\{n\}+}(x-x')$. Для нее сохраняются все те же самые соотношения, но основываются они на новых определениях:

$$G_n^{(+)}(x-x')=\sum_r[(1-n_r)\,\psi_r(x)\,\psi_r(x')^*+n_r\psi_r(x)^*\,\psi_r(x')]\,\gamma^0,$$
$$G_n^{(-)}(x-x')=-\sum_r[n_r\psi_r(x)\,\psi_r(x')^*+(1-n_r)\,\psi_r(x)^*\,\psi_r(x')]\,\gamma^0. \tag{7.67}$$

Как и в случае нулевого спина, в ходе общего доказательства условия унитарности для порождения произвольных начальных и конечных состояний используются источники $\eta_{(\pm)}$. Чтобы полностью исключить всякие указания на действующий затем источник $\eta(x)$, необходимы дополнительные соотношения

$$\int(dx)\,(dx')\,\eta(x)\,\gamma^0\,[iG_+(x-x')+G^{(+)}(x-x')]\,\eta_{(+)}(x')=0,$$
$$\int(dx)\,(dx')\,\eta(x)\,\gamma^0\,[-iG_-(x-x')+G^{(-)}(x-x')]\,\eta_{(-)}(x')=0, \tag{7.68}$$

которые действительно оказываются справедливыми при рассматриваемых причинных связях.

При первоначальном рассмотрении частиц со спином $^1/_2$ зарядовая характеристика, существование которой диктуется евклидовым постулатом, никакой роли не играет. Но тогда возникает вопрос, не может ли быть других частиц со спином $^1/_2$, при описании которых зарядовая матрица появлялась бы сразу же в явном виде. Мы здесь примем без доказательства, что при движении частицы от испускающего к поглощающему источнику ее зарядовая характеристика остается неизменной. Тогда функция распространения может зависеть от зарядовой матрицы q, но матрица зарядового сопряжения r_q входить в нее не должна. Общий вид такой функции распространения следующий:

$$\gamma^0 G_+(x-x') = \gamma^0 \Big[m_1 + m_2\gamma_5 - a\gamma^\mu \frac{1}{i}\partial_\mu - \\ - a\lambda\gamma^\mu iq\gamma_5 \frac{1}{i}\partial_\mu \Big] \Delta_+(x-x'), \qquad (7.69)$$

где отсутствуют лишь матрицы $\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$. Поскольку матрицы γ^0 и $\gamma^0\gamma_5$ антисимметричны, а матрицы $\gamma^0\gamma^\mu$ симметричны, их нельзя умножать на антисимметричную матрицу q, но она нужна для того, чтобы обратить антисимметрию матриц $\gamma^0\gamma^\mu i\gamma_5$. Приведенное нами выражение следует согласовать со схемой одночастичных функций, описываемой соотношениями (7.63) и (7.64), так как она связана только с определенной комбинацией единичных актов испускания и поглощения. Важное значение имеет свойство положительности

$$\int (dx)(dx')\,\varphi(x)^*\,\gamma^0 G^{(+)}(x-x')\,\varphi(x') = \\ = \sum_r \Big| \int dx\,\varphi(x)^*\,\gamma^0\psi_r(x) \Big|^2 \geqslant 0, \qquad (7.70)$$

где $\varphi(x)$ — произвольная комплексная числовая функция. Применительно к (7.69) оно эквивалентно требованию положительности эрмитовой матрицы

$$\gamma^0 [m_1 + m_2\gamma_5 - a\gamma p - a\lambda iq\gamma_5\gamma p] \geqslant 0 \qquad (7.71)$$

при любом значении импульса частицы p^μ, откуда, в частности, следует вещественность констант m_1, m_2, a и λ. В системе покоя частицы с массой $m > 0$ это условие принимает вид

$$ma + ma\lambda iq\gamma_5 + m_1\gamma^0 + m_2\gamma^0\gamma_5 \geqslant 0. \qquad (7.72)$$

Три матрицы $iq\gamma_5$, γ^0, $\gamma^0\gamma_5$ антикоммутируют друг с другом, и квадрат каждой из них равен единице, откуда вытекают следующие числовые неравенства:

$$ma \pm [(ma\lambda)^2 + m_1^2 + m_2^2]^{1/2} \geqslant 0. \tag{7.73}$$

Сделав вывод о положительности константы a, мы сверх того отметим, что проекционная матрица будет получаться в том случае, когда неравенства превращаются в равенства, в соответствии с чем

$$m^2a^2(1-\lambda^2) = m_1^2 + m_2^2. \tag{7.74}$$

На всем открытом интервале $\lambda^2 < 1$ константу a можно нормировать условием

$$a^2(1-\lambda^2) = 1, \tag{7.75}$$

откуда следует, что

$$m_1^2 + m_2^2 = m^2. \tag{7.76}$$

Эти соотношения можно представить в виде

$$a = \operatorname{ch}\theta, \qquad a\lambda = \operatorname{sh}\theta; \qquad m_1 = m\cos\varphi, \qquad m_2 = m\sin\varphi.$$

Тогда нетрудно убедиться, что

$$\gamma^0 G_+(x-x') = e^{-1/2\varphi\gamma_5}e^{1/2\theta iq\gamma_5}\times$$
$$\times\left[\gamma^0\left(m-\gamma^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\right)\Delta_+(x-x')\right]e^{1/2\theta iq\gamma_5}e^{1/2\varphi\gamma_5}. \tag{7.78}$$

В силу антисимметрии матрицы γ_5 и симметрии матрицы $q\gamma_5$ эти матричные множители всегда можно включить в две функции источника, которые входят в W. Таким образом, хотя в самом начале у нас и появились матрицы q и γ_5, после соответствующего переопределения источника они исчезают, и мы вновь приходим к функциям (6.67) и (6.68).

Осталось еще рассмотреть случай

$$\lambda^2 = 1, \qquad m_1 = m_2 = 0. \tag{7.79}$$

Если теперь положить

$$a = \frac{1}{2}, \tag{7.80}$$

то мы получим

$$\gamma^0 G_+(x-x') = -\frac{1+i\lambda q\gamma_5}{2}\gamma^0\gamma^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\Delta_+(x-x') =$$
$$= \frac{1+i\lambda q\gamma_5}{2}\gamma^0\left(m-\gamma^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\right)\Delta_+(x-x')\frac{1+i\lambda q\gamma_5}{2}. \tag{7.81}$$

Первый вариант записи говорит о том, что мы возвращаемся к функции (6.27), причем возражение, связанное с антисимметрией матрицы $\rho_2 = i\gamma_5$, снимается здесь благодаря наличию дополнительной антисимметричной матрицы q. Второй вариант соответствует стандартному выражению для $\gamma^0 G_+$, так как симметричные матричные множители можно включить в источники. Но эти множители представляют собой сингулярные проекционные матрицы, и поэтому к новым источникам предъявляется требование, чтобы выполнялось равенство

$$(1 - i\lambda q\gamma_5)\,\eta\,(x) = 0. \tag{7.82}$$

Наличие такого требования свидетельствует о существовании какой-то универсальной характеристики, относящейся ко всем реальным механизмам, с которыми связаны процессы рождения или уничтожения данной частицы. Вопрос о том, могут ли механизмы взаимодействия частиц, несущих спин $^1/_2$, удовлетворять указанному требованию, можно рассматривать здесь только для одного особого класса таких частиц — нейтрино.

Экспериментально наблюдается лишь один тип взаимодействия нейтрино, а именно процессы, в которых эти частицы рождаются совместно с заряженным лептоном (электроном или мюоном). Нейтрино, связанное с электроном, отличается от нейтрино, связанного с мюоном. Массы нейтрино малы по сравнению с массами соответствующих им лептонов, но неизвестно, равны ли они нулю в том же смысле, что и массы фотона и гравитона, обратные величины масс которых должны превышать чрезвычайно большие макроскопические расстояния. Оба нейтрино обладают одним-единственным значением спиральности, которое определяется только электрическим зарядом соответствующего лептона и меняет свой знак при изменении знака этого заряда. Естественной схемой, в рамках которой описываются эти свойства, может служить только что рассмотренная схема для частиц со спином $^1/_2$. (Эта схема предложена по существу уже задолго до экспериментального обнаружения двух нейтрино, так что их существование было предсказано теоретически.) Во избежание путаницы с электрическим зарядом мы будем обозначать зарядовую характеристику нейтрино через l и называть ее лептонным зарядом. Двум возможным корням уравнения $\lambda^2 = 1$ соответствуют два типа частиц, которые различаются проекционным множителем

$$\frac{1}{2}(1 \pm il\gamma_5). \tag{7.83}$$

Если рассматривается нейтрино с импульсом p^μ, то второй из матричных множителей, фигурирующих в формуле (7.81), принимает вид

$$-\gamma^0\gamma^\mu p_\mu = p^0 - i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} = p^0 \mp l\,|\mathbf{p}|\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \tag{7.84}$$

где мы воспользовались тем, что благодаря наличию матрицы (7.83) величины $i\gamma_5$ и $\pm l$ почти эквивалентны. Когда энергия нейтрино велика по сравнению с массой, которая не обязана ни равняться нулю, ни быть одинаковой для двух сортов этих частиц, будет выделяться одно-единственное значение спиральности:

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\to\mp l. \tag{7.85}$$

В силу закона сохранения лептонного заряда электрически заряженный лептон, соответствующий данному нейтрино, должен нести лептонный заряд, противоположный лептонному заряду нейтрино:

$$l+l_{\text{заряж. лепт}}=0. \tag{7.86}$$

Примем теперь естественную гипотезу, что одна из функций лептонного заряда состоит в том, чтобы различать два лептона с обычным электрическим зарядом q:

$$l_{\text{заряж. лепт}}=\mp q. \tag{7.87}$$

Из этой гипотезы вытекает (экспериментально установленная) эквивалентность между спиральностью нейтрино и электрическим зарядом соответствующего ему лептона:

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\to -q. \tag{7.88}$$

Для полноты найдем функции источников определенных нейтринных состояний при упрощающем предположении, что масса нейтрино равна нулю. Воспользуемся диадным представлением

$$\frac{1}{2}(1+il\gamma_5)\frac{1}{2}\left(1-l\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)=\sum_{l'=-1}^{+1}u_{pl'}u_{pl'}^{*}, \tag{7.89}$$

где

$$u_{pl'}^{*}u_{pl''}=\delta_{l'l''} \tag{7.90}$$

и

$$u_{pl}^{*}=u_{p,-l}. \tag{7.91}$$

Эти собственные векторы удовлетворяют также уравнениям

$$\begin{gathered}(i\gamma_5-l)\,u_{pl}=0,\qquad u_{pl}^{*}(i\gamma_5-l)=0,\\ \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}+l\right)u_{pl}=0,\qquad u_{pl}^{*}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}+l\right)=0.\end{gathered} \tag{7.92}$$

Источники нейтрино первого типа имеют вид

$$\eta_{pl}=(2p^0\,d\omega_p)^{1/2}\,u_{pl}^{*}\eta(p),\qquad \eta_{pl}^{*}=(2p^0\,d\omega_p)^{1/2}\,\eta(p)^{*}\,u_{pl}, \tag{7.93}$$

а источники второго типа получаются из них путем отражения:

$$u_{pl}\to r_l u_{pl},\qquad u_{pl}^{*}\to u_{pl}^{*}r_l, \tag{7.94}$$

где r_l — вещественная симметричная матрица обращения знака лептонного заряда. При подстановке

$$\eta(p) \to \gamma_5 \eta(-p), \tag{7.95}$$

соответствующей TCP-преобразованию, источники (7.93), описывающие испускание нейтрино и поглощение антинейтрино, переходят друг в друга:

$$\eta_{pl} \to (il)\,\eta^*_{p,\,-l}, \qquad \eta^*_{pl} \to (il)\,\eta_{p,\,-l}. \tag{7.96}$$

В случае нейтрино другого типа появляется дополнительный знак минус.

Остановимся, наконец, кратко на евклидовом представлении вакуумной амплитуды, которая отвечает функции распространения (7.81) (с заменой λq на $\pm l$). Оно имеет вид

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^\eta \to \exp\left[-\frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,\eta(x)\,\frac{1}{2}(1 \pm l\alpha_5)\times\right.$$
$$\left.\times(-\alpha_\mu\partial_\mu)\,\Delta(x-x')\,\eta(x')\right]_E, \tag{7.97}$$

где матрица

$$\alpha_5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \tag{7.98}$$

дополняет совокупность вещественных симметричных антикоммутирующих матриц с квадратами, равными единице. В отличие от того, что мы имели в пространстве Минковского, матрица $l\alpha_5$ антисимметрична и антикоммутирует с матрицами α_μ. Появление здесь мнимой матрицы l означает, что взятые по отдельности евклидовы выражения не будут вещественными. Но если массы двух нейтрино одинаковы (равны нулю?), то при комплексном сопряжении евклидовы функции распространения переходят одна в другую. Тогда можно считать, что два нейтринных источника являются проекциями одного общего источника и полная евклидова вакуумная амплитуда будет вещественной, причем в (7.97) множитель $^1/_2\,(1 \pm l\alpha_5)$ входить не будет.

§ 8. ЧАСТИЦЫ С ПОЛУЦЕЛЫМ СПИНОМ

В случае частиц со спином $^3/_2$ можно описание единичного спина с помощью четырехмерных векторов скомбинировать с описанием спина $^1/_2$ посредством четырехкомпонентных спиноров. Возникающий при этом спин-векторный источник $\eta^\mu_\xi(x)$ имеет 16 компонент, не считая дополнительных компонент, связанных с зарядом. Выделение интересующей нас подсистемы из этой более широкой системы частично осуществляется проекционными матрицами, которые соответствуют ее составным элементам: $\bar{g}_{\mu\nu}(p)$ для спина 1 и $m - \gamma p$ для спина $^1/_2$. Если связь источников, отвечающую одночастичному обмену, рассматривать в системе покоя частицы, то в результате этой процедуры мы получим эффективный источник $^1/_2\,(1+\gamma^0)\,\eta_k$, который имеет шесть компонент. Окончательное выделение четырех компонент, свойственных спину $^3/_2$, осуществляется проекционной матрицей (7.1) при $l=1$, $j={}^3/_2$. Через трехкомпонентные векторы и двухкомпонентные спиноры она записывается как

$$(M_{3/2})_{kl}=\delta_{kl}-\frac{1}{3}\,\sigma_k\sigma_l. \tag{8.1}$$

То, что эта матрица является проекционным оператором, эквивалентно равенствам

$$\sigma_k\,(M_{3/2})_{kl}=(M_{3/2})_{kl}\,\sigma_l=0, \tag{8.2}$$

а правильность выбранного конкретного выражения для нее подтверждается вычислением следа по индексам шестимерного пространства. Получающаяся в результате связь источников в системе покоя имеет вид

$$\eta_k^*\,\frac{1}{2}\,(1+\gamma^0)\left(\delta_{kl}-\frac{1}{3}\,\sigma_k\sigma_l\right)\eta_l=\bar{\eta}_k^*\,\frac{1}{2}\,(1+\gamma^0)\,\bar{\eta}_k, \tag{8.3}$$

где величины

$$\bar{\eta}_k=\eta_k-\frac{1}{3}\,\sigma_k\sigma_l\eta_l \tag{8.4}$$

удовлетворяют соотношению

$$\sigma_k\bar{\eta}_k=0, \tag{8.5}$$

откуда сразу видно, что спин $^1/_2$ из составной системы исключен.

Переход к произвольной системе отсчета облегчается, если написать

$$\sigma_k\sigma_l=\gamma_k i\gamma_5\gamma_l i\gamma_5, \tag{8.6}$$

так что прямым обобщением выражения (8.3) (с точностью до множителя $2m$) будет выражение

$$\eta^\mu(p)^*\,\gamma^0\,(m-\gamma p)\left[\bar{g}_{\mu\nu}(p)-\frac{1}{3}\,\bar{g}_{\mu\varkappa}(p)\,\gamma^\varkappa i\gamma_5\bar{g}_{\nu\lambda}(p)\,\gamma^\lambda i\gamma_5\right]\eta^\nu(p). \tag{8.7}$$

Второе слагаемое несколько упростится, если учесть следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
&(m-\gamma p)\,\bar{g}_{\mu\varkappa}(p)\,\gamma^\varkappa i\gamma_5\bar{g}_{\nu\lambda}(p)\,\gamma^\lambda i\gamma_5=\\
&=\bar{g}_{\mu\varkappa}(p)\,\gamma^\varkappa i\gamma_5\,(m-\gamma p)\,\bar{g}_{\nu\lambda}(p)\,\gamma^\lambda i\gamma_5=\\
&=-\bar{g}_{\mu\varkappa}(p)\,\gamma^\varkappa\,(m+\gamma p)\,\bar{g}_{\nu\lambda}(p)\,\gamma^\lambda=\\
&=-\left(\gamma_\mu+\frac{1}{m}\,p_\mu\right)(m+\gamma p)\left(\gamma_\nu+\frac{1}{m}\,p_\nu\right).
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Первое преобразование представляет собой другую форму записи коммутативности $1+\gamma^0$ с σ_k, второе основано на свойствах $i\gamma_5$, а в третьем мы воспользовались наличием множителя $m+\gamma p$ и подставили m вместо γp. Возможна и другая форма записи, при которой $\gamma_\mu + (1/m)\,p_\mu$ заменяется на $-(i/m)\,\sigma_{\mu\lambda}p^\lambda$. Получающееся в результате выражение для вакуумной амплитуды

$$\langle 0_+|0_-\rangle^\eta = \exp\,[iW(\eta)], \tag{8.9}$$

записанное для краткости в четырехмерном импульсном пространстве, будет задаваться равенством

$$\begin{aligned} W(\eta) = \frac{1}{2}\int \frac{dp}{(2\pi)^4}\,\eta^\mu(-p)\,\gamma^0 \times \\ \times\Big[(m-\gamma p)\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\gamma_\mu+\frac{p_\mu}{m}\right)(m+\gamma p)\times \\ \times\left(\gamma_\nu+\frac{p_\nu}{m}\right)\Big]\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}\,\eta^\nu(p). \end{aligned} \tag{8.10}$$

Ядро этой квадратичной формы антисимметрично по отношению к транспозиции матричных и векторных индексов, дополненной подстановкой $p^\mu \to -p^\mu$, откуда вытекает соответствующее требование антикоммутативности источников Ферми — Дирака.

Чтобы записать в явном виде источники испускания и поглощения частиц, в частности те из них, которые отвечают четырем спиральным состояниям с заданным импульсом, рассмотрим причинно-упорядоченную пару источников и исследуем член в iW, описывающий их связь:

$$\begin{aligned} \int d\omega_p\, i\eta_1^\mu(p)^*\,\gamma^0\Big[(m-\gamma p)\sum_\lambda e_{p\lambda\mu}e^*_{p\lambda\nu} - \\ -\frac{1}{3}\sum_\lambda e_{p\lambda\mu}e^{\alpha *}_{p\lambda}\gamma_\alpha i\gamma_5(m-\gamma p)\sum_{\lambda'}\gamma_\beta i\gamma_5 e^\beta_{p\lambda'}e^*_{p\lambda'\nu}\Big]\, i\eta_2^\nu(p), \end{aligned} \tag{8.11}$$

где мы снова вернулись к форме записи (8.7) и воспользовались представлением тензора $\bar{g}_{\mu\nu}(p)$ в виде диады. Вводя диадное спинорное представление и для величины $(m-\gamma p)/2m$, получаем выражение

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda\sigma} e^\mu_{p\lambda}u_{p\sigma}u^*_{p\sigma}\gamma^0 e^{\nu *}_{p\lambda} - \frac{1}{3}\sum_{\lambda\sigma\lambda'} e^\mu_{p\lambda}e^{\alpha *}_{p\lambda}\gamma_\alpha i\gamma_5 u_{p\sigma}u^*_{p\sigma}\gamma^0\gamma_\beta i\gamma_5 e^\beta_{p\lambda'}e^{\nu *}_{p\lambda'} = \\ = \sum_{\lambda=-3/2}^{3/2} u^\mu_{p\lambda}u^{\nu *}_{p\lambda}\gamma^0, \end{aligned} \tag{8.12}$$

позволяющее идентифицировать четыре собственных вектора $u^\mu_{p\lambda}$ $(\lambda = {}^3/_2, \ldots, -{}^3/_2)$. Чтобы написать их в явном виде, воспользуемся равенством

$$e^{\alpha *}_{p\lambda}\gamma_\alpha i\gamma_5 u_{p\sigma} = (\sigma - 2\lambda)\left(1 - \lambda^2 + \sqrt{2}\lambda^2\right) u_{p,\,\sigma-2\lambda}, \tag{8.13}$$

которое следует понимать в том смысле, что значения спинорного индекса ограничены условием $\sigma = \pm 1$. Эту формулу легко проверить, переходя к системе покоя, где ее левая часть переходит в $\mathbf{e}^*_\lambda \cdot \sigma v_\sigma$. Если

$$e^{\mu *}_{p\lambda}\gamma^0\gamma_\mu = \exp\left[-\frac{1}{2}\theta i\gamma_5 \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right] i\gamma_5 \mathbf{e}^*_\lambda\cdot\sigma \exp\left[-\frac{1}{2}\theta i\gamma_5\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right], \tag{8.14}$$

то, согласно (6.86), она будет справедлива и в произвольной системе отсчета. Но нетрудно убедиться, что это соотношение фактически совпадает с (5.53), если в последнем заменить матрицы σ алгебраически эквивалентным им набором матриц $i\gamma_5\sigma$.

Собственные векторы с определенными значениями спиральности имеют вид

$$\begin{aligned}
u^\nu_{p,\,3/2} &= e^\nu_{p,+1}\, u_{p+},\\
u^\nu_{p,\,1/2} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[e^\nu_{p,+1}\, u_{p-} + \sqrt{2}\, e^\nu_{p0} u_{p+}\right],\\
u^\nu_{p,\,1/2} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[e^\nu_{p,-1}\, u_{p+} + \sqrt{2}\, e^\nu_{p0} u_{p-}\right],\\
u^\nu_{p,-3/2} &= e^\nu_{p,-1}\, u_{p-}
\end{aligned} \tag{8.15}$$

и представляют собой обычные комбинации состояний с угловыми моментами 1 и $^1/_2$. Они удовлетворяют условиям ортонормированности

$$u^{\nu *}_{p\lambda} u_{p\lambda'\nu} = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{8.16}$$

В результате мы приходим к следующему определению источников:

$$\eta_{p\lambda} = (2m\, d\omega_p)^{1/2} u^{\nu *}_{p\lambda}\gamma^0\eta_\nu(p), \qquad \eta^*_{p\lambda} = (2m\, d\omega_p)^{1/2}\eta_\nu(p)^*\gamma^0 u^\nu_{p\lambda}, \tag{8.17}$$

причем эти величины можно снабдить и зарядовым индексом. Учитывая поведение составных элементов при операции комплексного сопряжения, получаем соотношение

$$u^{\nu *}_{p,\,-\lambda} = (-1)^{3/2+\lambda}\, i\gamma_5 u^\nu_{p\lambda}. \tag{8.18}$$

Поэтому подстановка

$$\eta^\mu(p) \to \gamma_5\eta^\mu(-p), \tag{8.19}$$

соответствующая TCP-преобразованию, будет приводить к замене

$$\eta_{p\lambda} \to i(-1)^{3/2-\lambda}\eta^*_{p,\,-\lambda}, \qquad \eta^*_{p\lambda} \to -i(-1)^{3/2-\lambda}\eta_{p,\,-\lambda}; \tag{8.20}$$

в эти соотношения можно обычным способом ввести и зарядовый индекс.

Анализ безмассовых частиц со спином $^3/_2$ в основных своих чертах следует схеме, развитой для случая единичного спина. Если написать

$$\partial_\mu \eta^\mu (x) = m\eta (x), \tag{8.21}$$

то окажется, что в пределе при $m \to 0$ значения спиральности $\pm ^3/_2$ не будут связаны с ее значениями $\pm ^1/_2$, которые соответствуют источнику частиц со спином $^1/_2$, имеющему вид $\eta(x) - (i/2)\gamma_\nu \eta^\nu (x)$. Безмассовые частицы со спиральностями $\pm ^3/_2$ описываются функцией

$$W = \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\eta^\mu(x)\gamma^0\left[g_{\mu\nu}\left(-\gamma^\lambda \frac{1}{i}\partial_\lambda\right)D_+(x-x') - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\gamma_\mu\left(-\gamma^\lambda\frac{1}{i}\partial_\lambda\right)D_+(x-x')\gamma_\nu\right]\eta^\nu(x'), \tag{8.22}$$

где

$$\partial_\mu \eta^\mu (x) = 0. \tag{8.23}$$

В случае причинно-упорядоченной пары источников в iW войдет следующее выражение, описывающее их связь:

$$\int d\omega_p i\eta_1^\mu(p)^* \gamma^0\left[g_{\mu\nu}(-\gamma p) - \frac{1}{2}g_{\mu\alpha}\gamma^\alpha(-\gamma p)\gamma^\beta g_{\beta\nu}\right] i\eta_2^\nu(p). \tag{8.24}$$

Тензор $g_{\mu\nu}$ можно всюду заменить двумя слагаемыми диады, соответствующими значениям спиральности ± 1:

$$g^{\mu\nu} \to \sum_{\lambda=\pm 1} e^\mu_{p\lambda} e^{\nu *}_{p\lambda}, \tag{8.25}$$

так как

$$p_\mu \eta^\mu (p) = 0, \qquad (\gamma p)^2 = 0. \tag{8.26}$$

Воспользуемся также соотношением

$$\gamma^0(-\gamma p) = 2p^0\frac{1}{2}\left(1 - i\gamma_5\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right) = 2p^0\sum_{\sigma'=\pm 1} u_{p\sigma'}u^*_{p\sigma'}, \tag{8.27}$$

где

$$\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} - \sigma'\right)u_{p\sigma'} = (i\gamma_5 + \sigma')u_{p\sigma'} = 0, \tag{8.28}$$

и алгебраическими свойствами

$$\{e^{\alpha *}_{p\lambda}\gamma_\alpha,\ \gamma p\} = 0,$$
$$e^{\alpha *}_{p\lambda}\gamma_\alpha\gamma_\beta e^\beta_{p\lambda'} = -\delta_{\lambda\lambda'}\left(1 - \lambda\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right). \tag{8.29}$$

В результате (8.24) заменится выражением

$$\int d\omega_p i\eta_1^{\mu}(p)^* \, 2p^0 \left[\sum_{\lambda\sigma} e_{p\lambda\mu} u_{p\sigma} \frac{1}{2}(1+\lambda\sigma) e^*_{p\lambda\nu} u^*_{p\sigma} \right] i\eta_2^{\nu}(p), \tag{8.30}$$

в котором множитель $^1/_2(1+\lambda\sigma)$ выделяет только состояния со значениями спиральности $\pm\,^3/_2$. Две функции одночастичных состояний имеют вид

$$u^{\nu}_{p,\pm 3/2} = e^{\nu}_{p,\pm 1}\, u_{p\pm}, \tag{8.31}$$

а соответствующие им источники определяются равенствами

$\lambda = \pm \dfrac{3}{2}$:

$$\eta_{p\lambda} = (2p^0\, d\omega_p)^{1/2}\, u^{\nu *}_{p\lambda} \eta_\nu(p),$$

$$\eta^*_{p\lambda} = (2p^0\, d\omega_p)^{1/2}\, \eta_\nu(p)^*\, u^{\nu}_{p\lambda}. \tag{8.32}$$

Как и при анализе нейтрино со спином $^1/_2$, можно провести дополнительное разложение, в результате которого спиральность будет однозначным образом связана с зарядом.

Прежде чем обобщать этот подход на любые частицы со спином $s = n + {}^1/_2$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, вернемся к выражению для спиновой проекции в системе покоя

$$\bar{\eta}_k = \eta_k - \frac{1}{3}\sigma_k\sigma_l\eta_l \tag{8.33}$$

и заметим, что

$$\bar{\eta}_k = \frac{2}{5}\sigma_p \Pi_{kp,\,lq}\sigma_q\eta_l, \tag{8.34}$$

где величина

$$\Pi_{kp,\,lq} = \frac{1}{2}(\delta_{kl}\delta_{pq} + \delta_{kq}\delta_{lp}) - \frac{1}{3}\delta_{kp}\delta_{lq} \tag{8.35}$$

представляет собой проекционный тензор, определяемый в общем случае равенством (5.79), который вычислен в системе покоя и соответствует значению $n = 2$. Свойства этого тензора таковы, что

$$\sigma_k\bar{\eta}_k = \frac{2}{5}\sigma_k\sigma_p\Pi_{kp,\,lq}\sigma_q\eta_l = \frac{2}{5}\Pi_{kk,\,lq}\sigma_q\eta_l = 0. \tag{8.36}$$

Этот анализ, проводимый в системе покоя, обобщается путем введения симметричных спин-тензорных источников

$$\bar{\eta}_{k_1\ldots k_n} = \frac{n+1}{2n+3}\sigma_p \Pi_{k_1\ldots k_n p,\, l_1\ldots l_n q}\sigma_q\eta_{l_1\ldots l_n}. \tag{8.37}$$

Хотя и так очевидно, что следы $\bar{\eta}_{k_1\ldots k_n}$ равны нулю, это свойство можно рассматривать как следствие соотношения

$$\sigma_{k_1}\bar{\eta}_{k_1\ldots k_n} = 0, \tag{8.38}$$

ибо

$$0 = \sigma_{k_2}\sigma_{k_1}\bar{\eta}_{k_1k_2k_3\ldots k_n} = \bar{\eta}_{kkk_3\ldots k_n}. \tag{8.39}$$

Поскольку здесь мы имеем дело с двухкомпонентными спинорами, легко видеть, что число независимых компонент равно

$$2\left[\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)\right]=2\left(n+\frac{1}{2}\right)+1, \tag{8.40}$$

т. е. оно соответствует значению спина $s = n + {}^1/_2$. Численный множитель, входящий в (8.37), можно получить исходя из того, что при замене $\eta_{l_1\ldots l_n}$ на $\bar{\eta}_{l_1\ldots l_n}$ это определение должно превращаться в тождество. В таком случае проекционный тензор сводится к симметризованной единичной матрице, соответствующей $n+1$ индексам. Все компоненты этого тензора можно разбить на два класса — компоненты, для которых $p = q$ и число которых равно $n!$, и остальные компоненты с $p = l_j$, $q = k_i$, число которых равно $n\,(n!)$. Первые из них умножаются на $(\sigma_p)^2 = 3$, а вторые на 2, так как

$$\sigma_p\sigma_q = 2\delta_{qp} - \sigma_q\sigma_p \tag{8.41}$$

и $\sigma_{lj}\bar{\eta}_{l_1\ldots l_n} = 0$. Следовательно,

$$\sigma_p\Pi_{k_1\ldots k_np,\, l_1\ldots l_nq}\sigma_q\bar{\eta}_{l_1\ldots l_n} = \\ = \frac{1}{(n+1)!}[3(n!)+2n(n!)]\bar{\eta}_{k_1\ldots k_n} = \frac{2n+3}{n+1}\bar{\eta}_{k_1\ldots k_n} \tag{8.42}$$

в полном соответствии с (8.37). В то же время нетрудно убедиться, что след проекционной матрицы, действующей в пространстве n трехкомпонентных векторов и двухкомпонентных спиноров, равен, как это и должно быть, $2\,(n + {}^1/_2) + 1$:

$$\mathrm{Sp}_{(2)}\left[\frac{n+1}{2n+3}\sigma_p\Pi_{k_1\ldots k_np,\, k_1\ldots k_nq}\sigma_q\right] = \\ = \frac{2n+2}{2n+3}\Pi_{k_1\ldots k_{n+1},\, k_1\ldots k_{n+1}} = 2n+2, \tag{8.43}$$

так как след проекционной матрицы, соответствующей $n+1$ трехмерным векторным индексам, равен $2\,(n+1)+1$.

Частицу со спином $s = n + {}^1/_2$ можно описывать симметричным спин-тензорным источником $\eta_\xi^{\mu_1\ldots\mu_n}(x)$. Функция W следующим образом выражается через переменные четырехмерного импульсного пространства:

$$W = \frac{1}{2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\eta^{\mu_1\ldots\mu_n}(-p)\,\gamma^0\frac{n+1}{2n+3}i\gamma^\alpha\gamma_5(m-\gamma p)\times \\ \times\Pi_{\mu_1\ldots\mu_n\alpha,\,\nu_1\ldots\nu_n\beta}(p)\cdot i\gamma^\beta\gamma_5\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}\eta^{\nu_1\ldots\nu_n}(p). \tag{8.44}$$

Но это выражение нельзя принимать так, как оно есть: прежде чем осуществлять пространственно-временную экстраполяцию, воплощенную в четырехмерной форме записи, необходимо провести алгебраические упрощения. В исходную комбинацию, описывающую причинную связь, входит проекционная матрица $(m+\gamma p)/2m$, которая выделяет состояния с $\gamma p = m$, позволяя тем самым исключить два импульса, фигурирующих в выражении $\gamma^{\varkappa}p_{\varkappa}(m+\gamma p)\,p_{\lambda}\gamma^{\lambda}$. Таким образом, степень матричного полинома по p, входящего в (8.44), равна $2n+1=2s$. Эту ситуацию иллюстрирует функция (8.10), которая отвечает случаю $n=1$, $s={}^3/_2$.

Взяв для описания причинно-упорядоченной пары источников прямое обобщение функции (8.44) и вводя диадные представления для спинорной и тензорной проекционных матриц, мы придем к спин-тензорной диаде

$$\frac{n+1}{2n+3}\sum_{\lambda\sigma} e_{p\lambda}^{\mu_1\ldots\mu_n\alpha}\gamma_\alpha i\gamma_5 u_{p\sigma}u_{p\sigma}^*\gamma^0\gamma_\beta i\gamma_5 e_{p\lambda}^{\nu_1\ldots\nu_n\beta*}=\sum_{\lambda=-s}^{s}u_{p\lambda}^{\mu_1\ldots\mu_n}u_{p\lambda}^{\nu_1\ldots\nu_n^*}\gamma^0, \tag{8.45}$$

где в соответствии со свойствами этой конструкции

$$u_{p\lambda}^{\nu_1\ldots\nu_n^*}\gamma^0 u_{\nu_1\ldots\nu_n p\lambda'}=\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{8.46}$$

Нетрудно выделить член с максимальным значением спиральности $\lambda=s$:

$$u_{ps}^{\nu_1\ldots\nu_n}=e_{pn}^{\nu_1\ldots\nu_n}u_{p+}, \tag{8.47}$$

который входит в правую часть равенства (8.45) с коэффициентом

$$\frac{n+1}{2n+3}\left(2+\frac{1}{n+1}\right)=1. \tag{8.48}$$

Другие спиральные функции очень легко получить из выписанной функции путем вращения, используя для этого алгебраическую конструкцию

$$\sum_{\lambda=-s}^{s}\psi_{s\lambda}(\xi)\,u_{p\lambda}^{\nu_1\ldots\nu_n}=\Big(\sum_{\lambda=-n}^{n}\psi_{n\lambda}(\xi)\,e_{p\lambda}^{\nu_1\ldots\nu_n}\Big)\Big(\sum_{\sigma}\xi_\sigma u_{p\sigma}\Big), \tag{8.49}$$

где функции $\psi_{s\lambda}(\xi)$ определяются формулой (5.87), в которой n нужно заменить на s. В частности, таким способом сразу же воспроизводятся результаты (8.15) для случая $s={}^3/_2$. Источники спиральных состояний этих частиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака, имеют вид

$$\begin{aligned}\eta_{p\lambda}&=(2m\,d\omega_p)^{1/2}\,u_{p\lambda}^{\nu_1\ldots\nu_n^*}\gamma^0\eta_{\nu_1\ldots\nu_n}(p),\\ \eta_{p\lambda}^*&=(2m\,d\omega_p)^{1/2}\,\eta_{\nu_1\ldots\nu_n}(p)^*\gamma^0u_{p\lambda}^{\nu_1\ldots\nu_n}.\end{aligned} \tag{8.50}$$

В заключение этого параграфа рассмотрим безмассовые частицы со значениями спиральности $\pm(n+{}^1/_2)$ (хотя такие частицы неизвестны). Представляется довольно очевидным, что необходимое требование к спин-тензорному источнику

$$\partial_{\mu_1}\eta^{\mu_1\ldots\mu_n}(x)=0 \tag{8.51}$$

должно сопровождаться появлением соответствующего проекционного тензора, определяемого равенством (5.104), и действительно, общее выражение записывается в виде

$$W=\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\,\eta^{\mu_1\ldots\mu_n}(x)\,\gamma^0\gamma^\alpha\left(-\gamma^\lambda\frac{1}{i}\partial_\lambda\right)D_+(x-x')\times$$
$$\times\frac{1}{2}\Pi_{\mu_1\ldots\mu_n\alpha,\,\nu_1\ldots\nu_n\beta}\gamma^\beta\eta^{\nu_1\ldots\nu_n}(x'). \tag{8.52}$$

В случае $n=1$, когда

$$\Pi_{\mu\alpha,\,\nu\beta}=\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}+g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})-\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}, \tag{8.53}$$

как нетрудно убедиться, таким способом воспроизводится функция (8.22), хотя не следует забывать и о существовании эквивалентного выражения

$$W=\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\,\eta^\mu(x)\,\gamma^0\frac{1}{2}\gamma_\nu\left(-\gamma^\lambda\frac{1}{i}\partial_\lambda\right)D_+(x-x')\,\gamma_\mu\eta^\nu(x'). \tag{8.54}$$

Из (8.52) следует, что член в iW, описывающий связь причинно-упорядоченной пары источников, имеет вид

$$\int d\omega_p\,i\eta_1^{\mu_1\ldots\mu_n}(p)^*\,\gamma^0\gamma^\alpha(-\gamma p)\,\frac{1}{2}\Pi_{\mu_1\ldots\mu_n,\,\nu_1\ldots\nu_n\beta}(p,\bar{p})\,\gamma^\beta i\eta_2^{\nu_1\ldots\nu_n}(p), \tag{8.55}$$

где мы ввели новый проекционный тензор, определяемый равенством (5.106), что вполне оправданно, так как имеют место соотношения

$$p_{\nu_1}\eta^{\nu_1\ldots\nu_n}(p)=0,\qquad(\gamma p)^2=0. \tag{8.56}$$

Используя диадное представление (5.117) совместно с конструкцией (5.121), мы приведем матрицу, входящую в (8.55), к виду

$$\frac{1}{2}\sum_{\pm}e_{p\pm n}^{\mu_1\ldots\mu_n}\gamma_\alpha e_{p\pm1}^{\alpha}\gamma^0\gamma p\gamma_\beta e_{p\pm1}^{\beta*}e_{p\pm n}^{\nu_1\ldots\nu_n^*} \tag{8.57}$$

(тензорные индексы здесь для ясности подняты), где, как это следует из (8.29) и (8.27),

$$\frac{1}{2}\gamma_\alpha e_{p,\pm1}^{\alpha}\gamma^0\gamma p\gamma_\beta e_{p,\pm1}^{\beta*}=-\frac{1}{2}\gamma_\alpha e_{p,\pm1}^{\alpha}\gamma_\beta e_{p,\pm1}^{\beta*}\gamma^0(-\gamma p)=$$
$$=2p^0\sum_{\sigma'}\frac{1}{2}(1\pm\sigma')\,u_{p\sigma'}u_{p\sigma'}^*. \tag{8.58}$$

Множитель $^1/_2\,(1 \pm \sigma')$ переплетает спиральность, отвечающую спину $^1/_2$, с другими ее значениями, и в результате мы приходим к следующему обобщению конструкции (8.31) на случай $s = n + {}^1/_2$:

$$u^{\nu}_{p,\,\pm s} = e^{\nu_1 \ldots \nu_n}_{p,\,\pm n} u_{p\pm}, \tag{8.59}$$

с соответствующими ему определениями источников

$$\lambda = \pm s: \quad \begin{aligned} \eta_{p\lambda} &= (2p^0\, d\omega_p)^{1/2}\, u^{\nu_1 \ldots \nu_n^*}_{p\lambda}\, \eta_{\nu_1 \ldots \nu_n}(p), \\ \eta^*_{p\lambda} &= (2p^0\, d\omega_p)^{1/2}\, \eta_{\nu_1 \ldots \nu_n}(p)^*\, u^{\nu_1 \ldots \nu_n}_{p\lambda}. \end{aligned} \tag{8.60}$$

§ 9. ЕДИНОЕ ОПИСАНИЕ ВСЕХ СПИНОВ И ТИПОВ СТАТИСТИКИ

Те методы, которым мы следовали при описании частиц с различными спинами, основаны на элементарных свойствах углового момента. Спин $s = n$ ($n = 2, 3, \ldots$) можно построить из n единичных спинов, а чтобы получить последовательность $s = n + {}^1/_2$ ($n = 1, 2, \ldots$), достаточно добавить один-единственный спин $^1/_2$. Но все эти спины можно построить и комбинируя достаточное число раз (четное для целого спина, нечетное для полуцелого) фундаментальную систему со спином $^1/_2$. В соответствии с этим мы заменим тензор (мультивектор), описывающий результат сложения единичных спинов, а также связанный с ним спин-тензор универсальным мультиспинором, который соответствует композиции некоторого числа составляющих со спинами $^1/_2$. Мультиспинорный источник мы обозначим через $S_{\zeta_1 \ldots \zeta_n}(x)$, но индексы у него часто будем опускать. Все элементарные спины совершенно равноправны, и поэтому к мультиспинору можно предъявить дополнительные требования симметрии, наиболее важным из которых является условие полной симметрии:

$$S_{\zeta_1 \ldots \zeta_n}(x) = S_{\zeta_{\alpha_1} \ldots \zeta_{\alpha_n}}(x), \tag{9.1}$$

где $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ — произвольная перестановка чисел $1 \ldots n$.

Мультиспинор описывает более широкую систему, чем нам необходимо, и поэтому нужно ввести проекционные матрицы даже в простейшем случае $n = 1$, $s = {}^1/_2$. В самом деле, достаточно подействовать такой проекционной матрицей, отвечающей спину $^1/_2$, на каждый спинорный индекс, и в результате мы выделим необходимую физическую систему со спином s:

$$s = \frac{1}{2}\, n. \tag{9.2}$$

В системе покоя частицы с конечной массой проекционной матрицей будет

$$\prod_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{2}\,(1 + \gamma^0)_\alpha, \tag{9.3}$$

где α — спинорный индекс, на который действует соответствующая матрица. Это действие состоит в том, что область изменения каждого спинорного индекса сводится к двум числам. Симметричная функция n индексов, каждый из которых принимает два значения, имеет число независимых компонент, равное

$$n + 1 = 2s + 1, \tag{9.4}$$

как это и предполагалось. Таким способом получаются следующие значения спинов:

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \text{ или } s = {}^1/_2,\ 1,\ {}^3/_2,\ \ldots, \tag{9.5}$$

и здесь отсутствует лишь значение $s = 0$. Чтобы получить его, достаточно положить $n = 2$ и взять антисимметричный спинор

$$S_{\zeta_1\zeta_2}(x) = -S_{\zeta_1\zeta_2}(x). \tag{9.6}$$

Антисимметричная функция двух индексов, каждый из которых принимает фактически два значения, имеет только одну независимую компоненту.

Все сказанное находит свое выражение в вакуумной амплитуде

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^S = \exp\left[iW(S)\right], \tag{9.7}$$

где в переменных четырехмерного импульсного пространства

$$W(S) = \frac{1}{2}\int \frac{dp}{(2\pi)^4} S(-p) \prod_{\alpha=1}^{n} [\gamma^0(m - \gamma p)]_\alpha \frac{1}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} S(p). \tag{9.8}$$

Ядро этой квадратичной формы обладает определенной симметрией относительно транспозиции матриц, рассматриваемой совместно с подстановкой $p^\mu \to -p^\mu$:

$$\prod_{\alpha=1}^{n} [\gamma^0(m + \gamma p)]_\alpha^T = (-1)^n \prod_{\alpha=1}^{n} [\gamma^0(m - \gamma p)]_\alpha. \tag{9.9}$$

Следовательно, если алгебраические свойства источника отражают свойства симметрии ядра, то мы должны иметь

n четное, s целое: $[S(x), S(x')] = 0$, статистика Бозе — Эйнштейна

(9.10)

n нечетное, s полуцелое: $\{S(x), S(x')\} = 0$, статистика Ферми — Дирака.

Это — общее утверждение относительно связи спина со статистикой. Но доказательство можно будет считать законченным лишь после того, как мы покажем, что любая попытка обращения указанных естественных связей приводит к нарушению условия полноты многочастичных состояний.

Рассмотрим причинно-упорядоченную пару источников
$$S(x) = S_1(x) + S_2(x), \tag{9.11}$$
для которой
$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^S = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{S_1} \exp\left[\int d\omega_p iS_1(p)^* \prod_\alpha [\gamma^0(m-\gamma p)]_\alpha iS_2(p) \right] \times$$
$$\times \langle 0_+ | 0_- \rangle^{S_2}. \tag{9.12}$$

Используя для каждого спинорного индекса равенство (6.93), мы получаем матрицу
$$\prod_{\alpha=1}^{n} [\gamma^0(m-\gamma p)]_\alpha = (2m)^n \prod_{\alpha=1}^{n} [\sum_\sigma \gamma^0 u_{p\sigma} u_{p\sigma}^* \gamma^0]_\alpha, \tag{9.13}$$
которую, вообще говоря, следует спроектировать на пространство симметричных спиноров. Рассматривая для определенности спиральные спиновые функции, мы увидим, что максимальное значение спиральности, входящее в (9.13), а именно $\lambda = 1/2\, n$, описывается функцией
$$u_{ps} = \prod_{\alpha=1}^{n} (u_{p+})_\alpha, \tag{9.14}$$
а весь набор в целом порождается конструкцией
$$\sum_{\lambda=-s}^{s} \psi_{s\lambda}(\xi)\, u_{p\lambda} = \prod_{\alpha=1}^{n} (\sum_\sigma \xi_\sigma u_{p\sigma})_\alpha. \tag{9.15}$$

В частном случае антисимметричного спинора с $n = 2$ единственным собственным вектором будет
$$u_p = \frac{1}{\sqrt{2}} [(u_{p+})_1 (u_{p-})_2 - (u_{p-})_1 (u_{p+})_2]. \tag{9.16}$$

Условие ортонормированности спиральных функций, записываемое в виде
$$u_{p\lambda}^* [\prod_\alpha \gamma_\alpha^0]\, u_{p\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, \tag{9.17}$$
представляется с помощью (9.15) в форме
$$\sum_{\lambda\lambda'} \psi_{s\lambda}(\eta^*)\, u_{p\lambda}^* [\prod_\alpha \gamma_\alpha^0]\, u_{p\lambda'} \psi_{s\lambda'}(\xi) = (\eta^*\xi)^{2s} = \sum_{\lambda=-s}^{s} \psi_{s\lambda}(\eta^*)\, \psi_{s\lambda}(\xi). \tag{9.18}$$

Если ввести обозначения
$$\begin{aligned} S_{p\lambda} &= ((2m)^n d\omega_p)^{1/2}\, u_{p\lambda}^* [\prod_\alpha \gamma_\alpha^0]\, S(p), \\ S_{p\lambda}^* &= ((2m)^n d\omega_p)^{1/2}\, S(p)^* [\prod_\alpha \gamma_\alpha^0]\, u_{p\lambda}, \end{aligned} \tag{9.19}$$

то равенство (9.12) примет вид

$$\langle 0_+|0_-\rangle^S = \langle 0_+|0_-\rangle^{S_1} \exp\Big[\sum_{p\lambda} iS^*_{1p\lambda} iS_{2p\lambda}\Big] \langle 0_+|0_-\rangle^{S_2} =$$

$$= \langle 0_+|0_-\rangle^{S_1} \prod_{p\lambda} \sum_{n_{p\lambda}} \frac{(iS^*_{1p\lambda} iS_{2p\lambda})^{n_{p\lambda}}}{n_{p\lambda}!} \langle 0_+|0_-\rangle^{S_2}, \qquad (9.20)$$

где мы воспользовались коммутативностью четных функций источников для любого типа статистики. Причинное разложение

$$\langle 0_+|0_-\rangle^S = \sum_{\{n\}} \langle 0_+|\{n\}\rangle^{S_1} \langle\{n\}|0_-\rangle^{S_2} \qquad (9.21)$$

приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \langle\{n\}|0_-\rangle^S &= \langle 0_+|0_-\rangle^S \prod_{p\lambda} \frac{(iS_{p\lambda})^{n_{p\lambda}}}{(n_{p\lambda}!)^{1/2}}, \\ \langle 0_+|\{n\}\rangle^S &= \langle 0_+|0_-\rangle^S \prod_{p\lambda}{}^T \frac{(iS^*_{p\lambda})^{n_{p\lambda}}}{(n_{p\lambda}!)^{1/2}}; \end{aligned} \qquad (9.22)$$

порядок сомножителей в одном из этих произведений обратен порядку в другом. Два типа статистики различаются только предполагаемыми для них алгебраическими свойствами источников:

$$\begin{aligned} &\text{статистика Бозе — Эйнштейна: } [S_{p\lambda}, S_{p'\lambda'}] = 0, \\ &\text{статистика Ферми — Дирака: } \{S_{p\lambda}, S_{p'\lambda'}\} = 0. \end{aligned} \qquad (9.23)$$

В частности, алгебраическое свойство

$$\text{статистика Ферми — Дирака: } S^2_{p\lambda} = 0 \qquad (9.24)$$

приводит к характерному для статистики Ферми — Дирака ограничению $n_{p\lambda} = 0,\ 1$.

Два условия полноты

$$\sum_{\{n\}} \langle 0_-|\{n\}\rangle^S \langle\{n\}|0_-\rangle^S = 1, \qquad \sum_{\{n\}} \langle 0_+|\{n\}\rangle^S \langle\{n\}|0_+\rangle^S = 1 \qquad (9.25)$$

теперь переходят в равенства

$$|\langle 0_+|0_-\rangle^S|^2 \sum_{\{n\}} \Big[\prod_{p\lambda} \frac{(iS_{p\lambda})^{n_{p\lambda}}}{(n_{p\lambda}!)^{1/2}}\Big]^* \Big[\prod_{p\lambda} \frac{(iS_{p\lambda})^{n_{p\lambda}}}{(n_{p\lambda}!)^{1/2}}\Big] = 1, \qquad (9.26)$$

$$\langle 0_+|0_-\rangle^S|^2 \sum_{\{n\}} \Big[\prod_{p\lambda}{}^T \frac{(iS^*_{p\lambda})^{n_{p\lambda}}}{(n_{p\lambda}!)^{1/2}}\Big] \Big[\prod_{p\lambda}{}^T \frac{(iS^*_{p\lambda})^{n_{p\lambda}}}{(n_{p\lambda}!)^{1/2}}\Big]^* = 1. \qquad (9.27)$$

Если вещественный источник $S(x)$ удовлетворяет соотношению

$$(S(x)\,S(x'))^* = S(x')\,S(x), \tag{9.28}$$

то равенства (9.26) и (9.27) тождественны друг другу. В таком случае остается единственное условие полноты, которое записывается в виде

$$|\langle 0_+|0_-\rangle^S|^{-2} = \sum_{\{n\}}\left[\prod_{p\lambda}{}^{T}\frac{(S^*_{p\lambda})^{n_{p\lambda}}}{(n_{p\lambda}!)^{1/2}}\right]\left[\prod_{p\lambda}\frac{(S_{p\lambda})^{n_{p\lambda}}}{(n_{p\lambda}!)^{1/2}}\right]=$$

$$=\sum_{\{n\}}\prod_{p\lambda}\frac{(S^*_{p\lambda}S_{p\lambda})^{n_{p\lambda}}}{n_{p\lambda}!}=\exp\Big[\sum_{p\lambda}S^*_{p\lambda}S_{p\lambda}\Big]. \tag{9.29}$$

Для непосредственного вычисления величины $|\langle 0_+|0_-\rangle^S|^2$ вернемся к (9.8) и заметим, что комплексное сопряжение переводит $S(p)$ в $S(-p)$ и наоборот, обращая при этом порядок следования сомножителей. Поэтому, учитывая также эрмитовость каждой матрицы $\gamma^0(m-\gamma p)$, получаем

$$[S(-p)\prod_{\alpha=1}^{n}[\gamma^0(m-\gamma p)]_\alpha S(p)]^* = S(-p)\prod_{\alpha=1}^{n}[\gamma^0(m-\gamma p)]_\alpha S(p). \tag{9.30}$$

Это свойство вещественности дает

$$|\langle 0_+|0_-\rangle^S|^2 = \exp\Big[-\int\frac{dp}{(2\pi)^4}S(-p)\times$$

$$\times\prod_\alpha[\gamma^0(m-\gamma p)]_\alpha S(p)\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}\Big], \tag{9.31}$$

где соотношение

$$\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}=\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\,\pi\delta(p^2+m^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\int d\omega_p\Big|_{p^2+m^2=0,\ p^0>0}+\frac{1}{2}\int d\omega_p\Big|_{p^2+m^2=0,\ p^0<0}, \tag{9.32}$$

которое следует понимать в смысле утверждения относительно соответствующих интегралов, свидетельствует о наличии ограничивающего условия $p^0=\pm(\mathbf{p}^2+m^2)^{1/2}$. При подстановке $p^\mu\to -p^\mu$, при которой подынтегральное выражение в (9.31) не меняется, эти два слагаемых переходят одно в другое. Поэтому, обозначив через p^μ физический импульс, для которого $p^0>0$, мы получим (все эти выкладки проделываются в импульсном пространстве — они полностью эквивалентны неоднократно проводившимся вычислениям с использованием пространственно-временных переменных):

$$|\langle 0_+|0_-\rangle^S|^2 = \exp\Big[-\int d\omega_p S(p)^* \prod_\alpha [\gamma^0(m-\gamma p)]_\alpha S(p)\Big] =$$

$$= \exp\Big[-\sum_{p\lambda} S^*_{p\lambda} S_{p\lambda}\Big], \qquad (9.33)$$

что согласуется с условием полноты.

Выясним теперь, каким образом изменится этот результат, если изменить естественную связь спина со статистикой тем, что ввести в (9.8) антисимметричную матрицу

$$q = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad (9.34)$$

действующую на независимый индекс и потому не нарушающую полученной ранее классификации по спину. Многочастичные состояния определяются из рассмотрения причинно-упорядоченной пары источников точно так же, как и раньше; единственное отличие состоит в том, что спиральные векторы $u_{p\lambda}$ теперь следует заменить на $u_{p\lambda q}$, где $q = \pm 1$. Чтобы получить окончательные выражения, достаточно в (9.22) произвести подстановку

$$S_{p\lambda} \to e^{(i\pi/4)(1-q)} S_{p\lambda q}, \qquad S^*_{p\lambda} \to e^{(i\pi/4)(1-q)} S^*_{p\lambda q}, \qquad (9.35)$$

где произведение дополнительных постоянных фазовых множителей равно q. Однако в процессе непосредственной проверки условия полноты эти постоянные фазовые множители, а также множители i пропадают, и в результате мы приходим в точности к соотношению (9.29) с дополнительным индексом q:

$$|\langle 0_+|0_-\rangle^S|^{-2} = \exp\Big[\sum_{p\lambda q} S^*_{p\lambda q} S_{p\lambda q}\Big]. \qquad (9.36)$$

Если же обратиться к самой вакуумной амплитуде, то мы увидим, что свойство вещественности (9.30) сохранится и при наличии матрицы q, причем эта матрица останется в (9.33), и мы получим

$$|\langle 0_+|0_-\rangle^S|^2 = \exp\Big[-\sum_{p\lambda q} S^*_{p\lambda q} q S_{p\lambda q}\Big]. \qquad (9.37)$$

Это соотношение находится в явном противоречии с (9.36), чем и завершается общее доказательство теоремы о связи спина со статистикой.

При каждом значении спина TCP-преобразование определяется как подстановка

$$S(p) \to i\Big[\prod_{\alpha=1}^{n} \gamma_{5\alpha}\Big] S(-p), \qquad (9.38)$$

дополненная обращением порядка перемножения всех источников. Действие этой подстановки на W сводится к тому, что каждая матрица γ^0 дает при γ_5-преобразовании знак минус, в результате чего функция W умножается на $(-1)^n$. Обращение порядка сомножителей в зависимости от типа статистики либо не изменяет W, либо приводит к появлению дополнительного знака минус. Благодаря связи спина со статистикой функция W (а следовательно, и вакуумная амплитуда) инвариантна относительно полного TCP-преобразования.

Чтобы выяснить, каким образом изменяются при TCP-преобразовании отдельные излучающие и поглощающие источники, заметим прежде всего, что обобщением правила комплексного сопряжения (6.92), отвечающего спину $^1/_2$, является вытекающее из мультипликативной структуры $u_{p\lambda}$ соотношение

$$u^*_{p,-\lambda} = e^{i\pi\lambda}\Big[\prod_\alpha \gamma_{5\alpha}\Big] u_{p\lambda}. \tag{9.39}$$

В таком случае мы будем иметь

$$S_{p\lambda} \to e^{-i\pi\lambda} S^*_{p,-\lambda}, \qquad S^*_{p\lambda} \to e^{i\pi\lambda} S_{p,-\lambda}, \tag{9.40}$$

куда известным нам способом можно добавить и зарядовый индекс. Соответствующее преобразование для многочастичных состояний имеет вид

$$\begin{gathered} \langle\{n\}\,|\,0_-\rangle^S \to e^{-i\pi\sum\lambda n_{p\lambda}} \langle 0_+\,|\,\{n'\}\rangle^S, \\ \langle 0_+\,|\,\{n\}\rangle^S \to e^{i\pi\sum\lambda n_{p\lambda}} \langle\{n'\}\,|\,0_-\rangle^S, \end{gathered} \tag{9.41}$$

где

$$n'_{p\lambda} = n_{p,-\lambda}. \tag{9.42}$$

Мы проанализировали некоторые проблемы, касающиеся единого описания частиц, при котором конкретная природа рассматриваемой системы неявным образом определяется заданием значения n, т. е. числа индексов у мультиспинора. Но если рассматривать мультиспинорные источники с точки зрения евклидова постулата, то станет ясным, что между двумя типами статистики, или между частицами с целым и полуцелым спином, имеется фундаментальное различие. При евклидовом преобразовании

$$\rho^{-1} S(p) \to S(p)_E, \tag{9.43}$$

где ρ — некоторая матрица, которую следует еще определить, ядро квадратичной формы (9.8) заменяется на

$$\rho^T \Big[\prod_{\alpha=1}^n \gamma^0_\alpha\Big] \rho \prod_{\alpha=1}^n (m - \rho^{-1}\gamma_\mu \rho p_\mu)_\alpha. \tag{9.44}$$

Матрицы γ^0, отражающие индефинитность метрики Минковского, следует исключить из преобразования, осуществляющего переход к евклидову представлению. В случае четного n этого можно добиться, выбрав симметричную матрицу

$$\rho = \exp\left[\frac{i\pi}{4}\left(1 - \prod_{\alpha=1}^{n} \gamma_\alpha^0\right)\right], \tag{9.45}$$

для которой

$$\rho^T \left[\prod_\alpha \gamma_\alpha^0\right] \rho = 1, \tag{9.46}$$

тогда как все матрицы

$$\rho^{-1}\gamma_{k\alpha}\rho = \left[\prod_{\beta=1}^{n} \gamma_\beta^0\right] i\gamma_{k\alpha}, \qquad \rho^{-1}\gamma_{4\alpha}\rho = i\gamma_\alpha^0 \tag{9.47}$$

вещественные и антисимметричные и удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{2}\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -\delta_{\mu\nu}, \tag{9.48}$$

где преобразованные матрицы мы по-прежнему обозначаем через γ_μ. Комбинируя эти свойства с преобразованием интегралов по импульсам

$$-i\int \frac{dp}{(2\pi)^4} \to \int \frac{dp}{(2\pi)^4}\bigg|_E, \tag{9.49}$$

мы придем к соответствию

s — целое:

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^S \to \exp\left[-\frac{1}{2}\int \frac{dp}{(2\pi)^4} S(-p) \prod_{\alpha=1}^{n} (m - \gamma_\mu p_\mu)_\alpha \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{p^2+m^2} S(p)\right]_E. \tag{9.50}$$

Преобразование (9.46) оказалось возможным потому, что левая часть этого равенства представляет собой симметричную матрицу. При нечетном n эта матрица будет антисимметричной. Поскольку последняя должна приводить к евклидовой метрике, она обязана быть инвариантной относительно евклидовых преобразований, совпадая поэтому по сути дела с зарядовой матрицей q. Таким образом, евклидов постулат требует, чтобы каждая частица с полуцелым спином обладала некоторой зарядово-подобной характеристикой. Если использовать (9.45) в том же виде и при нечетном n, то мы получим $\rho^T\rho = i$, так что исключить матрицы γ^0 в этом случае не удалось бы. Если n нечетно, то матрицу ρ можно определить следующим образом:

$$\rho=\exp\left[\frac{i\pi}{4}\left(1-q\prod_{\alpha=1}^{n}\gamma_\alpha^0\right)\right], \tag{9.51}$$

и теперь

$$\rho^T\left[\prod_\alpha \gamma_\alpha^0\right]\rho=q. \tag{9.52}$$

Преобразованные матрицы γ_μ:

$$\rho^{-1}\gamma_{k\alpha}\rho=q\left[\prod_{\beta=1}^{n}\gamma_\beta^0\right]i\gamma_{k\alpha},\qquad \rho^{-1}\gamma_{4\alpha}\rho=i\gamma_\alpha^0 \tag{9.53}$$

— это по-прежнему вещественные антисимметричные матрицы, которые удовлетворяют алгебраическим соотношениям (9.48). Таким образом, при нечетном n вакуумная амплитуда в евклидовом представлении имеет вид

s — полуцелое:

$$\langle 0_+|0_-\rangle^S\to\exp\left[-\frac{1}{2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}S(-p)q\prod_{\alpha=1}^{n}(m-\gamma_\mu p_\mu)_\alpha\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{p^2+m^2}S(p)\right]_E. \tag{9.54}$$

Например, при $n=1$ матрицы γ_μ, получаемые путем преобразования (9.53), связаны с вещественными симметричными матрицами α_μ, которые определяются равенством (6.129), соотношением

$$\alpha_\mu=-iq\gamma_\mu. \tag{9.55}$$

Преобразование пространственного отражения определяется в общем случае как

$$\bar{S}(\bar{x})=r_sS(x),\qquad \bar{x}^0=x^0,\qquad \bar{x}_k=-x_k, \tag{9.56}$$

где

$$r_s=(\pm)\prod_{\alpha=1}^{n}(i\gamma_\alpha^0). \tag{9.57}$$

Эта вещественная матрица обладает, в частности, свойствами

$$r_s^T=(-1)^n r_s,\qquad r_s^2=(-1)^n, \tag{9.58}$$

которыми различаются целый и полуцелый спины; кроме того, для любого спина справедливо равенство

$$r_s^Tr_s=1. \tag{9.59}$$

Единый выбор матриц, при котором в системе покоя $\gamma^{0'} = +1$, приводит к определенным значениям четности, равным $(\pm)\, i^n$ и вещественным в случае целого спина. Два варианта, возможные при $n = 2$ (симметричный и антисимметричный спиноры), соответствуют значениям спина и четности, равным 0^- и 1^- или 0^+ и 1^+ в зависимости от того, какой знак выбран в формуле (9.57). Во всех остальных случаях, где всегда используются симметричные спиноры, частицы целого спина распадаются на два класса, соответствующие значениям четности $(\pm)\,(-1)^s$.

Для безмассовых частиц никакой системы покоя не существует. В этом случае ядро квадратичной формы (9.12), описывающей причинно-упорядоченную пару источников, принимает вид

$$\prod_{\alpha=1}^{n} (-\gamma^0\gamma p)_\alpha = (2p^0)^n \prod_{\alpha=1}^{n} \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{i\gamma_5 \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)\right]_\alpha. \tag{9.60}$$

Теперь состояния частицы задаются собственными значениями отдельных спиральных матриц $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ и связанных с ними матриц γ_5. Чтобы получить систематическую классификацию почти всех спиральностей, используя симметричные спинорные источники, достаточно определить собственное значение каждой матрицы $i\gamma_5$, а тем самым и каждой отдельной спиральной матрицы. Для этого введем симметричную вещественную проекционную матрицу

$$\Pi_{\gamma_5} = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_{51} i\gamma_{52}) \;\ldots\; \frac{1}{2}(1 + i\gamma_{5,n-1} i\gamma_{5n}). \tag{9.61}$$

Тогда мы будем иметь

$$\prod_{\alpha=1}^{n} \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{i\gamma_5 \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)\right]_\alpha \Pi_{\gamma_5} = \sum_{\lambda=\pm {}^1/_2 n} u_{p\lambda} u_{p\lambda}^*, \tag{9.62}$$

где

$$u_{p\lambda}^* u_{p\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{9.63}$$

В том, что у нас действительно остается только два спиральных состояния, можно убедиться, вычислив след левой части (9.62); при этом можно пользоваться полным 4^n-мерным пространством мультиспиноров, и в результате мы будем иметь

$$4^n \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

Среди всех спиральностей, получаемых таким способом ($\lambda = \pm {}^1/_2, \pm 1, \pm {}^3/_2, \ldots$), отсутствует только значение $\lambda = 0$.

Чтобы получить его, можно положить $n = 2$, заменить проекционный множитель γ_5 на $^1/_2\,(1 - i\gamma_{51} i\gamma_{52})$ и использовать антисимметричный спинор. Излучающие и поглощающие источники определяются следующим образом:

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} n: \qquad \begin{aligned} S_{p\lambda} &= [(2p^0)^n\, d\omega_p]^{1/2}\, u^*_{p\lambda} S(p), \\ S^*_{p\lambda} &= [(2p^0)^n\, d\omega_p]^{1/2}\, S(p)^*\, u_{p\lambda}. \end{aligned} \tag{9.64}$$

Хотя все сказанное справедливо не только при четных, но и при нечетных n, во втором случае, когда λ полуцелое, обязательно должна существовать характеристика типа заряда, а потому необходимо продолжить классификацию и установить связь спиральности со значением заряда. Для этого заменим матрицу (9.61) симметричной вещественной проекционной матрицей

$$\Pi_{\gamma_5} = \prod_{\alpha=1}^{n} \left[\frac{1}{2} (1 \pm q i \gamma_5) \right]_\alpha, \tag{9.65}$$

где возможен выбор того или иного знака, общего для всех множителей. При заданном значении q след полной проекционной матрицы теперь будет равен

$$4^n \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Существуют только два состояния, различающихся индексом $q = \pm 1$, причем их спиральность равна:

$$\lambda = (\mp)\, q \frac{1}{2} n, \tag{9.66}$$

где знак выбирается соответственно знаку, выбранному в формуле (9.65). В том и другом случае

$$\prod_{\alpha=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{i\gamma_5 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right) \frac{1}{2} (1 \pm q i \gamma_5) \right]_\alpha = \sum_{q' = \pm 1} u_{pq'} u^*_{pq'} \tag{9.67}$$

и

$$\begin{aligned} S_{pq} &= [(2p^0)^n\, d\omega_p]^{1/2}\, u^*_{pq} S(p), \\ S^*_{pq} &= [(2p^0)^n\, d\omega_p]^{1/2}\, S(p)^*\, u_{pq}. \end{aligned} \tag{9.68}$$

Все сказанное нами здесь носит менее общий характер, нежели рассуждения, проведенные ранее в случае нейтрино при $n = 1$, так как здесь мы предполагали, что масса равна нулю, а там этого не требовалось.

В заключение параграфа мы исследуем связь между мультиспинорным и тензорным подходами к описанию частиц с целым спином, ограничиваясь простейшим случаем спинора второго ранга $S_{\zeta_1\zeta_2}$. Последний удобнее рассматривать как матрицу, в соответствии с чем мы перепишем функцию W в виде

$$W=\frac{1}{2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}S_{\zeta_1\zeta_2}(-p)\,[\gamma^0(m-\gamma p)]_{\zeta_1\zeta_1'}\,[\gamma^0(m-\gamma p)]_{\zeta_2\zeta_2'}\,S_{\zeta_1'\zeta_2'}(p)\times$$
$$\times\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}=\frac{1}{2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}S_{\zeta_1\zeta_2}(-p)\,[\gamma^0(m-\gamma p)]_{\zeta_1\zeta_1'}S_{\zeta_1'\zeta_2'}(p)\times$$
$$\times[\gamma^0(-m-\gamma p)]_{\zeta_2'\zeta_2}\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}=\frac{1}{2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\ \mathrm{Sp}\,[(-m-\gamma p)\times$$
$$\times S(-p)^T\gamma^0(m-\gamma p)\,S(p)\,\gamma^0]\,\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}. \tag{9.69}$$

Антисимметричную и симметричную матрицы всегда можно представить в виде

$$\begin{aligned}2S_a(p)&=i\gamma^0S_1(p)+i\gamma_5\gamma^0S_2(p)+\gamma_5\gamma^\mu\gamma^0S_\mu(p),\\ 2S_s(p)&=\gamma^\mu\gamma^0S_\mu(p)+\frac{1}{2}\,\sigma^{\mu\nu}\gamma^0S_{\mu\nu}(p),\end{aligned} \tag{9.70}$$

причем каждая из входящих в эти выражения отдельных матриц вещественна. Отметим следующее полезное алгебраическое преобразование:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Sp}\,[(-m-\gamma p)\,S(-p)^T\gamma^0(m-\gamma p)\,S(p)]=\\ &\quad=-(p^2+m^2)\,\mathrm{Sp}\,\{S(-p)^T\gamma^0S(p)\,\gamma^0\}+\\ &\quad+m\,\mathrm{Sp}\,\{S(-p)^T\gamma^0\,[\gamma p,\ S(p)\,\gamma^0]\}+\\ &\quad+\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\{[\gamma p,\ S(-p)^T\gamma^0]\,[\gamma(p),\ S(p)\,\gamma^0]\},\end{aligned} \tag{9.71}$$

где для двух противоположных типов симметрии

$$\begin{aligned}&[\gamma p,\ S_a(p)\,\gamma^0]=\gamma^\mu i\gamma_5p_\mu S_2(p)+\gamma_5p_\mu S^\mu(p),\\ &[\gamma p,\ S_s(p)\,\gamma^0]=-\frac{1}{2}\,\sigma^{\mu\nu}i\,\{p_\mu S_\nu(p)-p_\nu S_\mu(p)\}-\gamma^\nu ip^\mu S_{\mu\nu}(p).\end{aligned} \tag{9.72}$$

Весь расчет сводится к вычислению следов матриц, получаемых при перемножении линейных комбинаций матриц Дирака. Эти 16 матриц ортогональны, если произведение понимается в смысле взятия следа. В зависимости от того, эрмитовы или антиэрмитовы соответствующие матрицы, их нормы имеют разные знаки, которые определяются пространственно-временной метрикой. Таким образом, матрицы γ_μ обладают следующими алгебраическими свойствами:

$$\frac{1}{4}\ \mathrm{Sp}\ \gamma_\mu\gamma_\nu=\frac{1}{4}\ \mathrm{Sp}\ \gamma_\mu\gamma_5\gamma_\nu\gamma_5=-g_{\mu\nu}, \tag{9.73}$$

тогда как

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\varkappa\lambda}=g_{\mu\varkappa}g_{\nu\lambda}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\varkappa}. \tag{9.74}$$

В результате мы получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Sp}[(m+\gamma p)\, S_a(-p)\,\gamma^0 (m-\gamma p)\, S_a(p)\,\gamma^0] &= \\ = -(p^2+m^2)\,[S_1(-p)\,S_1(p) &+ S_2(-p)\,S_2(p) + \\ + S^\mu(-p)\,S_\mu(p)] &+ K(-p)\,K(p),\end{aligned} \tag{9.75}$$

где

$$K(x) = \sqrt{2}\,[mS_2(x) + \partial_\mu S^\mu(x)], \tag{9.76}$$

а также

$$\begin{aligned}\operatorname{Sp}[(-m-\gamma p)\, S_s(-p)\,\gamma^0 (m-\gamma p)\, S(p)] &= \\ = -(p^2+m^2)\,[S^\mu(-p)\,S_\mu(p) &+ \frac{1}{2} S^{\mu\nu}(-p)\,S_{\mu\nu}(p)] + \\ + J^\mu(-p)\,J_\mu(p) &+ \frac{1}{m^2} p_\mu J^\mu(-p)\,p_\nu J^\nu(p),\end{aligned} \tag{9.77}$$

причем в этом равенстве

$$J^\nu(x) = \sqrt{2}\,(mS^\nu(x) + \partial_\mu S^{\mu\nu}(x)). \tag{9.78}$$

Величины K и J и являются искомыми источниками частиц со спином 0 и 1. Но кроме них имеются и дополнительные члены, из-за которых вакуумная амплитуда приобретает множитель типа

$$\exp\left[-i\int (dx)\, S(x)\, S(x)\right], \tag{9.79}$$

где через S обозначены S_1, S_2, S_μ, $S_{\mu\nu}$. Это — эквивалентный способ описания. Действительно, дополнительный фазовый множитель не изменяет вероятности вакуумного перехода и не дает вклада в выражение, описывающее причинно-упорядоченную пару источников. Кроме того, его наличие не сказывается и на доступных наблюдению эффектах, связанных с энергией, соответствующей квазистатическому распределению источников, поскольку все они представляют собой эффекты относительного смещения двух разделенных в пространстве-времени частей системы. Физические эффекты, обусловленные наличием таких членов (перекрытием источников), могут появиться лишь при дальнейшем развитии и конкретизации общей теории источников.

При $m = 0$ следует выделить частицы с единичной спиральностью, вводя для этого проекционную матрицу Π_{γ_5}. В матричных обозначениях ее действие на спинор второго ранга сводится к преобразованию

$$\Pi_{\gamma_5} S(p) \to \frac{1}{2}\,[S(p) - i\gamma_5\, S(p)\, i\gamma_5]. \tag{9.80}$$

Первое слагаемое в симметричном спиноре (9.70) коммутирует, а второе антикоммутирует с матрицей γ_5. Проекционная матрица оставляет только последнее из них, а член с $S_\mu(p)$ в результате ее действия обращается в нуль. Тогда дивергенция векторного источника $J^\nu(x)$, как это следует из (9.78), становится тождественно равной нулю, и мы вновь приходим к описанию фотона. Просто положить в формуле (9.78) $m \to 0$ было бы недостаточно, поскольку необходимо также условие $(1/m)\,\partial_\nu J^\nu \to 0$. Как мы уже отмечали, антисимметричный спинор следует также снабдить проекционным множителем из матриц γ_5, который будет отличаться от (9.80) соотношением знаков двух слагаемых. В результате в S_a останутся только члены, коммутирующие с γ_5, а таковым в (9.70) будет единственное слагаемое, отвечающее вкладу аксиального вектора. Но теперь достаточно положить $m = 0$ в эффективном источнике (9.76). Таким образом, источник безмассовых частиц со спином 0 принимает вид дивергенции некоторого вектора, что является, по-видимому, специфической особенностью спиноров второго ранга.

Глава 3 | ПОЛЯ

§ 1. ПОНЯТИЕ ПОЛЯ, ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 0

Источники вводятся для того, чтобы можно было идеализированно описывать процессы порождения и детектирования частиц. Но все это необходимо не само по себе, а для изучения свойств частиц в интервале между теми областями, в которых протекают начальный акт порождения и конечный акт детектирования частицы. Поэтому нужно иметь какую-то удобную характеристику интенсивности возбуждения, создаваемого в области, удаленной от его источников. Естественный способ получить такого рода характеристику — исследовать воздействие, которое испытывает зондирующий (или пробный) источник, помещенный в интересующую нас область. Поэтому мы, описывая частицы со спином 0 вещественными скалярными источниками соответственно формуле

$$W(K) = \frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,K(x)\,\Delta_+(x-x')\,K(x'), \tag{1.1}$$

рассмотрим эффект включения дополнительного слабого источника $\delta K(x)$. Он дается выражением

$$\delta W(K) = \int (dx)\,\delta K(x)\,\varphi(x), \tag{1.2}$$

где

$$\varphi(x) = \int (dx')\,\Delta_+(x-x')\,K(x'). \tag{1.3}$$

Такую комбинацию источника с функцией распространения, характеризующую воздействие уже имеющихся источников на слабый пробный источник, мы назовем *полем* источников. Точно так же поле определяется для частиц любого вида:

$$\delta W(S) = \int (dx)\,\delta S(x)\,\chi(x). \tag{1.4}$$

Функция распространения $\Delta_+(x-x')$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} x > x^{0\prime}:&\qquad \Delta_+(x-x') = i\int d\omega_p e^{ip(x-x')},\\ x < x^{0\prime}:&\qquad \Delta_+(x-x') = i\int d\omega_p e^{ip(x'-x)}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

или, что то же самое, интегралом по четырехмерному импульсу

$$\Delta_+(x-x') = \int \frac{dp}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2-i\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon\to+0}. \tag{1.6}$$

Как мы сейчас увидим, она удовлетворяет простому неоднородному дифференциальному уравнению. Это проще всего показать, исходя из выражения (1.6): при действии дифференциального оператора $-\partial^2 + m^2$ на экспоненту $\exp[ip(x - x')]$ возникает множитель $p^2 + m^2$, сокращающийся со знаменателем, и в результате остается четырехмерная дельта-функция

$$\delta(x-x') = \int \frac{dp}{(2\pi)^4} e^{ip(x-x')}, \tag{1.7}$$

или

$$(-\partial^2 + m^2)\,\Delta_+(x - x') = \delta(x - x'). \tag{1.8}$$

Можно также исходить из выражений (1.5) и написать

$$x \neq x': \qquad (-\partial^2 + m^2)\,\Delta_+(x - x') = 0, \tag{1.9}$$

поскольку в этих интегралах $p^2 + m^2 = 0$; в то же время скачок производной по времени при $x^0 = x^{0\prime}$, равный

$$\partial_0 \Delta_+(x-x')\Big|_{x^0 = x^{0\prime} - 0}^{x^0 = x^{0\prime} + 0} = \int d\omega_p 2p^0 \exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')] = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{1.10}$$

эквивалентен наличию четырехмерной дельта-функции в уравнении (1.8).

Из дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция $\Delta_+(x - x')$, видно, что она является функцией Грина для дифференциального оператора $-\partial^2 + m^2$. Она представляет собой частное решение, содержащее при $x^0 > x^{0\prime}$ только положительные частоты ($e^{-ip^0x^0}$, $p^0 > 0$), а при $x^0 < x^{0\prime}$ — только отрицательные частоты ($e^{ip^0x^0}$). Это граничное условие проще всего получить, рассматривая соответствующую евклидову функцию Грина. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$[-(\partial_\mu)^2 + m^2]\,\Delta_E(x - x') = \delta_E(x - x'), \tag{1.11}$$

где соотношение

$$(dx)\,\delta(x - x') \leftrightarrow (dx)\,\delta(x - x')|_E, \tag{1.12}$$

или ($x_4 = ix^0$)

$$\frac{1}{i}\,\delta(x - x') \leftrightarrow \delta_E(x - x'), \tag{1.13}$$

вновь приводит к соответствию

$$\frac{1}{i}\,\Delta_+(x - x') \leftrightarrow \Delta_E(x - x'). \tag{1.14}$$

В противоположность тому, что мы имеем в пространстве Минковского, два фундаментальных решения евклидова дифференциального уравнения резко различаются своим асимптотическим поведением $\sim e^{\pm mR}$. Таким образом, требование ограниченности при $x \neq x'$ будет однозначно отбирать только одно решение.

Последнее получается автоматически, если искать решение уравнения (3.11) в виде интеграла Фурье

$$\Delta_E(x-x') = \int \frac{dp_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu(x-x')_\mu}}{(p_\mu)^2+m^2}, \tag{1.15}$$

а функция $\Delta_+(x-x')$ восстанавливается из него изложенными ранее методами. Можно также накладывать граничные условия непосредственно на дифференциальное уравнение, которое описывает поле произвольного источника:

$$(-\partial^2+m^2)\,\varphi(x) = K(x). \tag{1.16}$$

При исследовании амплитуды $\langle 0_-|0_-\rangle^{K_{(-)},\,K_{(+)}}$ замкнутого во времени цикла, исходящего из вакуумного начального состояния, возникают другие типы полей и функций Грина. Эта амплитуда определяется функцией

$$\begin{aligned} W(K_{(-)}, K_{(+)}) = \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,K_{(+)}(x)\,\Delta_x(x-x')\,K_{(+)}(x') - \\ -\frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,K_{(-)}(x)\,\Delta_-(x-x')\,K_{(-)}(x') + \\ +\int (dx)(dx')\,K_{(-)}(x)(-i)\,\Delta^{(+)}(x-x')\,K_{(+)}(x'). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Ее изменение при включении пробного источника таково:

$$\delta W = \int (dx)\,\delta K_+(x)\,\varphi_{(+)}(x) - \int (dx)\,\delta K_{(-)}(x)\,\varphi_{(-)}(x), \tag{1.18}$$

где знак минус у второго слагаемого служит нам напоминанием того, что этот член описывает необходимое развитие системы вспять во времени. Два поля, появившихся здесь, имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_{(+)}(x) &= \int (dx')\,\Delta_+(x-x')\,K_{(+)}(x') - \\ &\quad - i\int (dx')\,\Delta^{(-)}(x-x')\,K_{(-)}(x'), \\ \varphi_{(-)}(x) &= \int (dx')\,\Delta_-(x-x')\,K_{(-)}(x') + \\ &\quad + i\int (dx')\,\Delta^{(+)}(x-x')\,K_{(+)}(x'). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Исследуем эти поля в частном случае, когда

$$K_{(-)}(x) = K_{(+)}(x) = K(x). \tag{1.20}$$

Тогда мы будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_{(+)}(x) &= \int (dx')\,[\Delta_+(x-x') - i\Delta^{(-)}(x-x')]\,K(x'), \\ \varphi_{(-)}(x) &= \int (dx')\,[\Delta_-(x-x') + i\Delta^{(+)}(x-x')]\,K(x'), \end{aligned} \tag{1.21}$$

и, воспользовавшись соотношениями

$$\Delta_+(x-x')=\begin{cases} x^0>x^{0\prime}: & i\Delta^{(+)}(x-x'),\\ x^0<x^{0\prime}: & i\Delta^{(-)}(x-x'),\end{cases} \tag{1.22}$$

$$\Delta_-(x-x')=\begin{cases} x^0>x^{0\prime}: & -i\Delta^{(-)}(x-x'),\\ x^0<x^{0\prime}: & -i\Delta^{(+)}(x-x'),\end{cases} \tag{1.23}$$

в которых

$$\Delta^{(+)}(x-x')=\Delta^{(-)}(x'-x)=\int d\omega_p e^{ip(x-x')}, \tag{1.24}$$

мы увидим, что

$$\varphi_{(-)}(x)=\varphi_{(+)}(x)=\varphi_{\text{зап}}(x), \tag{1.25}$$

где

$$\varphi_{\text{зап}}(x)=\int (dx')\,\Delta_{\text{зап}}(x-x')\,K(x') \tag{1.26}$$

и

$$\Delta_{\text{зап}}(x-x')=\Delta_+(x-x')-i\Delta^{(-)}(x-x')=\Delta_-(x-x')+ \\ +i\Delta^{(+)}(x-x')= \\ =\begin{cases} x^0>x^{0\prime}: & i\Delta^{(+)}(x-x')-i\Delta^{(-)}(x-x'),\\ x^0<x^{0\prime}: & 0.\end{cases} \tag{1.27}$$

Последнее выражение свидетельствует о том, что это — запаздывающая функция Грина. Она вещественна, поскольку при комплексном сопряжении $\Delta^{(+)}$ переходит в $\Delta^{(-)}$ и наоборот. Три функции Грина Δ_+, Δ_-, $\Delta_{\text{зап}}$ соответствуют одному и тому же неоднородному дифференциальному уравнению, так как $\Delta^{(\pm)}$ являются решениями однородного уравнения

$$(-\partial^2+m^2)\,\Delta^{(\pm)}(x-x')=0, \tag{1.28}$$

и, следовательно,

$$(-\partial^2+m^2)\,\varphi_{\text{зап}}(x)=K(x). \tag{1.29}$$

Запаздывающее поле произвольного источника можно найти, решив это уравнение с граничным условием, согласно которому до начала действия источников поле равно нулю. Интересно, что для получения этого классического граничного условия требуется рассматривать систему, развивающуюся по замкнутой во времени траектории. Заметим кстати, что при условиях (1.20) δW принимает вид

$$\delta W=\int (dx)\,\{\delta K_{(+)}(x)-\delta K_{(-)}(x)\}\,\varphi_{\text{зап}}(x), \tag{1.30}$$

напоминая нам, что $W=0$ при $K_{(-)}(x)=K_{(+)}(x)$ и что это свойство сохраняется, если действие пробного источника не нарушает равенства источников $K_{(\pm)}(x)$.

Обращаясь к общему случаю, которому соответствуют поля (1.19), мы увидим, что они подчиняются дифференциальным уравнениям

$$(-\partial^2 + m^2)\,\varphi_{(+)}(x) = K_{(+)}(x),$$
$$(-\partial^2 + m^2)\,\varphi_{(-)}(x) = K_{(-)}(x), \tag{1.31}$$

решения которых характеризуются следующими граничными условиями: до начала действия каких бы то ни было источников $\varphi_{(+)}(x)$ содержит только отрицательные частоты, а $\varphi_{(-)}(x)$ — только положительные частоты; после прекращения действия всех источников $\varphi_{(+)}(x)$ и $\varphi_{(-)}(x)$ становятся равными. Начальные граничные условия станут очевидными, если написать

$$\varphi_{(+)}(x) = \int (dx')\,\Delta_+(x-x')\,[K_{(+)}(x') - K_{(-)}(x') +$$
$$+ \int (dx')\,\Delta_{\text{зап}}(x-x')\,K_{(-)}(x-x'),$$
$$\varphi_{(-)}(x) = \int (dx')\,\Delta_-(x-x')\,[K_{(-)}(x') - K_{(+)}(x')] +$$
$$+ \int (dx')\,\Delta_{\text{зап}}(x-x')\,K_{(+)}(x'). \tag{1.32}$$

Заметив далее, что

$$\Delta_+(x-x') + \Delta_-(x-x') = \Delta_{\text{зап}}(x-x') + \Delta_{\text{опер}}(x-x'), \tag{1.33}$$

где

$$\Delta_{\text{опер}}(x-x') = \Delta_+(x-x') - i\Delta^{(+)}(x-x') = \Delta_-(x-x') + i\Delta^{(-)}(x-x') =$$
$$= \begin{cases} x^0 > x^{0\prime}: & 0 \\ x^0 < x^{0\prime}: & i\Delta^{(-)}(x-x') - i\Delta^{(+)}(x-x'), \end{cases} \tag{1.34}$$

мы получим

$$\varphi_{(+)}(x) - \varphi_{(-)}(x) = \int (dx')\,\Delta_{\text{опер}}(x-x')\,[K_{(+)}(x') - K_{(-)}(x')], \tag{1.35}$$

откуда становится очевидным конечное граничное условие.

При замене вакуумного состояния произвольным многочастичным состоянием возникают новые поля и функции Грина. Вместо того чтобы использовать какое-то конкретное многочастичное состояние, мы рассмотрим некоторую их параметризованную смесь вида

$$\sum_{\{n\}} \langle\{n\}_+ | \{n\}_-\rangle^K p_\beta(\{n\}) = \exp[iW_\beta(K)], \tag{1.36}$$

где

$$p_\beta(\{n\}) = C \exp\left[-\sum_p \beta_\mu p^\mu n_p\right], \qquad \sum_{\{n\}} p_\beta(\{n\}) = 1, \tag{1.37}$$

а β_μ — произвольный времени-подобный вектор с $\beta_0 > 0$. Вспоминая анализ амплитуды $\langle\{n\}_+ \mid \{n\}_-\rangle^K$, в частности соотношение (2.46) из гл. 2, мы увидим, что она линейна по каждому из чисел заполнения n_p, которые в формуле (1.36) заменяются просто средними значениями

$$\langle n_p\rangle_\beta = \sum_{\{n\}} n_p p_\beta(\{n\}) = \frac{\partial}{\partial(-\beta p)} \ln\left[\sum_{\{n\}} \exp\left(-\sum_p \beta p n_p\right)\right] = \frac{1}{e^{\beta p}-1}. \tag{1.38}$$

В соответствии с этим мы будем иметь

$$W_\beta(K) = \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\, K(x)\, \Delta_\beta(x-x')\, K(x'), \tag{1.39}$$

где

$$\Delta_\beta(x-x') = \Delta_+(x-x') + i\int d\omega_p \langle n_p\rangle_\beta \left[e^{ip(x-x')} + e^{-ip(x-x')}\right]. \tag{1.40}$$

Разложив функцию $\exp\left[iW_\beta(K)\right]$ в ряд (1.36), мы сможем восстановить отдельные амплитуды $\langle\{n\}_+ | \{n\}_-\rangle^K$. Поле

$$\varphi_\beta(x) = \int (dx')\, \Delta_\beta(x-x')\, K(x'), \tag{1.41}$$

определяющееся равенством

$$\delta W_\beta(K) = \int (dx)\, \delta K(x)\, \varphi_\beta(x), \tag{1.42}$$

подчиняется тому же самому дифференциальному уравнению

$$(-\partial^2 + m^2)\, \varphi_\beta(x) = K(x), \tag{1.43}$$

так как $\Delta_\beta(x-x')$ представляет собой еще одну функцию Грина дифференциального оператора $-\partial^2 + m^2$.

Чтобы установить граничные условия, характеризующие эту функцию Грина, напишем ее в виде

$$\Delta_\beta(x-x') = \begin{cases} x^0 > x^{0\prime}: & i\Delta_\beta^{(+)}(x-x'), \\ x^0 < x^{0\prime}: & i\Delta_\beta^{(-)}(x-x'), \end{cases} \tag{1.44}$$

где функции

$$\begin{aligned} \Delta_\beta^{(+)}(x-x') &= \int d\omega_p \left[(\langle n_p\rangle_\beta + 1)\, e^{ip(x-x')} + \langle n_p\rangle_\beta\, e^{-ip(x-x')}\right], \\ \Delta_\beta^{(-)}(x-x') &= \int d\omega_p \left[\langle n_p\rangle_\beta\, e^{ip(x-x')} + (\langle n_p\rangle_\beta + 1)\, e^{-ip(x-x')}\right] \end{aligned} \tag{1.45}$$

связаны друг с другом соотношением

$$\Delta_\beta^{(-)}(x-x') = \Delta_\beta^{(+)}(x'-x). \tag{1.46}$$

Заметив, что

$$\langle n_p\rangle_\beta + 1 = e^{\beta p}\langle n_p\rangle_\beta, \tag{1.47}$$

мы увидим, что имеют место следующие формальные связи:

$$\Delta_\beta^{(+)}(x-x') = \Delta_\beta^{(-)}(x-x'-i\beta), \qquad \Delta_\beta^{(-)}(x-x') = \Delta_\beta^{(+)}(x-x'+i\beta). \tag{1.48}$$

Все эти равенства можно объединить, если ввести функцию

$$\begin{aligned}\Delta_\beta^{(+)}\left(x-x'+\frac{1}{2}i\beta\right) &= \Delta_\beta^{(+)}\left(x'-x+\frac{1}{2}i\beta\right) = \\ &= \Delta_\beta^{(-)}\left(x-x'-\frac{1}{2}i\beta\right) = \\ &= \Delta_\beta^{(-)}\left(x'-x-\frac{1}{2}i\beta\right),\end{aligned} \tag{1.49}$$

которая вещественна. По аналогии с преобразованием перехода от евклидова представления к представлению, использующему пространство Минковского, удобно осуществить экстраполяцию, вводя вещественное времени-подобное смещение

$$i\beta_\mu \to X_\mu, \tag{1.50}$$

где

$$X^0 > 0. \tag{1.51}$$

Для ограниченной во времени области, задаваемой неравенствами

$$0 < x^0 - x^{0\prime} < X^0 \tag{1.52}$$

или неравенствами

$$-X^0 < x^0 - x^{0\prime} < 0, \tag{1.53}$$

которые можно объединить, написав

$$|x^0 - x^{0\prime}| < X^0, \tag{1.54}$$

соотношения (1.48) превратятся в утверждения относительно функции распространения

$$\Delta_\beta(x-x') = \Delta_\beta(x-x'), \tag{1.55}$$

а именно

$$\Delta_\beta(x-x') = \Delta_\beta(x-x' \pm X). \tag{1.56}$$

Таким образом, граничным условием для этих функций является требование периодичности.

Если мы желаем убедиться в том, что условие периодичности действительно приводит к требуемому решению дифференциального уравнения для функций Грина, то для этого удобнее перейти к системе покоя времени-подобного вектора X^μ, вводя обозначение $X^0 = T$, и удовлетворить условию периодичности по x^0, используя разложение в ряд Фурье по этой переменной и сохраняя в то же время для пространственных координат интеграл Фурье. В результате для функции Грина мы получим следующее выражение:

$$\Delta_T(x-x') = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(2\pi i n/T)(x^0-x^{0\prime})}}{\mathbf{p}^2+m^2-(2\pi n/T)^2}. \qquad (1.57)$$

Ряд Фурье в этом выражении не представляет собой ничего необычного:

$$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(2\pi i n/T)(x^0-x^{0\prime})}}{(p^0)^2-(2\pi n/T)^2} =$$

$$= \frac{i}{2p^0} \frac{e^{(i/2)p^0T} e^{-ip^0|x^0-x^{0\prime}|} + e^{-(i/2)p^0T} e^{i|p^0x^0-x^{0\prime}}}{e^{(i/2)p^0T} - e^{-(i/2)p^0T}}. \qquad (1.58)$$

Если теперь произвести в системе покоя подстановку

$$T \to -i\beta_0, \qquad (1.59)$$

обратную подстановке (1.50), и перейти затем к произвольной системе отсчета, мы действительно придем к функции $\Delta_\beta(x-x')$. Те же результаты можно получить и прямо из дифференциального уравнения для $\varphi_\beta(x)$, накладывая на его решение граничное условие периодичности

$$\varphi_\beta(x) = \varphi_\beta(x \pm X). \qquad (1.60)$$

Чтобы распространить все сказанное на функцию

$$\sum_{\{n\}} \langle\{n\}_- | \{n\}_-\rangle^{K_{(-)},\, K_{(+)}} p_\beta(\{n\}) = \exp[iW_\beta(K_{(-)}, K_{(+)})], \qquad (1.61)$$

описывающую замкнутый во времени цикл, следует ввести в рассмотрение аналог функции $\Delta_{\{n\}-}(x-x')$:

$$\Delta_{-\beta}(x-x') = \begin{cases} x^0 > x^{0\prime}: & -i\Delta_\beta^{(-)}(x-x'), \\ x^0 < x^{0\prime}: & -i\Delta_\beta^{(+)}(x-x'). \end{cases} \qquad (1.62)$$

Обозначение, принятое здесь для этой функции, основано на следующем формальном свойстве усредненных чисел заполнения:

$$\langle n_p\rangle_{-\beta} = -(\langle n_p\rangle_\beta + 1), \qquad (1.63)$$

откуда следует, что

$$\Delta_{-\beta}^{(+)}(x-x') = -\Delta_{\beta}^{(-)}(x-x'), \qquad \Delta_{-\beta}^{(-)}(x-x') = -\Delta_{\beta}^{(+)}(x-x'). \tag{1.64}$$

Необходимое нам обобщение равенства (1.17) имеет вид

$$\begin{aligned} W_\beta(K_{(-)}, K_{(+)}) = \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,K_{(+)}(x)\,\Delta_\beta(x-x')\,K_{(+)}(x') - \\ -\frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,K_{(-)}(x)\,\Delta_{-\beta}(x-x')\,K_{(-)}(x') + \\ +\int (dx)(dx')\,K_{(-)}(x)\,(-i)\,\Delta_\beta^{(+)}(x-x')\,K_{(+)}(x'). \end{aligned} \tag{1.65}$$

Поля, определяющиеся формулой

$$\begin{aligned} \delta W_\beta(K_{(-)}, K_{(+)}) = \int (dx)\,\delta K_{(+)}(x)\,\varphi_{\beta(+)}(x) - \\ -\int (dx)\,\delta K_{(-)}(x)\,\varphi_{\beta(-)}(x), \end{aligned} \tag{1.66}$$

даются выражениями

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta(+)}(x) = \int (dx')\,\Delta_\beta(x-x')\,K_{(+)}(x') - i\int (dx')\,\Delta_\beta^{(-)}(x-x')\,K_{(-)}(x'), \\ \varphi_{\beta(-)}(x) = \int (dx')\,\Delta_{-\beta}(x-x')\,K_{(-)}(x') + i\int (dx')\,\Delta_\beta^{(+)}(x-x')\,K_{(+)}(x'). \end{aligned} \tag{1.67}$$

В частном случае, когда

$$K_{(-)}(x) = K_{(+)}(x) = K(x), \tag{1.68}$$

эти поля принимают вид

$$\varphi_{\beta(-)}(x) = \varphi_{\beta(+)}(x) = \varphi_{\text{зап}}(x), \tag{1.69}$$

так как ни в одно из причинных соотношений между функциями Δ величина β не входит; например, согласно формуле (1.45),

$$\Delta_\beta^{(+)}(x-x') - \Delta_\beta^{(-)}(x-x') = \Delta^{(+)}(x-x') - \Delta^{(-)}(x-x'). \tag{1.70}$$

Отказываясь от ограничения (1.68), по тем же причинам мы получим

$$\varphi_{\beta(+)}(x) - \varphi_{\beta(-)}(x) = \int (dx')\,\Delta_{\text{опер}}(x-x')\,[K_{(+)}(x') - K_{(-)}(x')]. \tag{1.71}$$

Можно также написать

$$\varphi_{\beta(+)}(x)-\varphi_{(+)}(x)=\varphi_{\beta(-)}(x)-\varphi_{(-)}(x)=$$
$$=i\int(dx')\,[\Delta_{\beta}^{(+)}(x-x')-\Delta^{(+)}(x-x')]\,[K_{(+)}(x')-K_{(-)}(x')] \qquad (1.72)$$

или эквивалентное этому выражение, содержащее функции $\Delta^{(-)}$.

При выводе этих результатов непосредственно из дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}(-\partial^2+m^2)\,\varphi_{\beta(+)}(x)&=K_{(+)}(x),\\ (-\partial^2+m^2)\,\varphi_{\beta(-)}(x)&=K_{(-)}(x)\end{aligned} \qquad (1.73)$$

следует потребовать, чтобы после прекращения действия источников эти две функции совпадали. До начала действия каких бы то ни было источников два поля связаны между собой соотношением

$$\varphi_{\beta(-)}(x+X)=\varphi_{\beta(+)}(x), \qquad (1.74)$$

которое представляет собой разновидность условия периодичности.

Некоторые из полученных результатов после соответствующего обобщения определения поля будут сохранять свой формальный вид и при рассмотрении заряженных частиц, если последние описывать парой вещественных источников. В случае же многочастичных начальных и конечных состояний гораздо удобнее пользоваться комплексными источниками, и поэтому мы подробнее остановимся на таком варианте. Исходя из вакуумной амплитуды

$$\langle 0_+|0_-\rangle^K=\exp[iW(K)], \qquad (1.75)$$
$$W(K)=\int(dx)\,(dx')\,K^*(x)\,\Delta_+(x-x')\,K(x')$$

и вводя зондирующие источники, мы придем к следующему определению двух полей:

$$\delta W(K)=\int(dx)\,[\delta K^*(x)\,\varphi(x)+\delta K(x)\,\varphi^*(x)]. \qquad (1.76)$$

Эти поля таковы:

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\int(dx')\,\Delta_+(x-x')\,K(x'),\\ \varphi^*(x)&=\int(dx')\,\Delta_+(x-x')\,K^*(x').\end{aligned} \qquad (1.77)$$

Здесь звездочка не означает, что два поля связаны друг с другом операцией комплексного сопряжения. Правда, она имеет такой смысл в отношении дифференциальных уравнений, которым они подчиняются:

$$(-\partial^2+m^2)\,\varphi(x)=K(x),\quad (-\partial^2+m^2)\,\varphi^*(x)=K^*(x), \qquad (1.78)$$

но решать оба уравнения нужно при одних и тех же граничных условиях: поля должны содержать волны, расходящиеся во времени, что означает присутствие только положительных частот после прекращения действия источников и только отрицательных частот до начала их действия.

Исследуем структуру этих полей в двух асимптотических по времени областях. Если поля вычисляются в некоторый момент времени после прекращения действия источников, то условие причинности будет находить свое выражение в замене $\Delta_+(x-x')$ на $i\Delta^{(+)}(x-x')$. Таким образом ($x>K$ означает причинную упорядоченность), в соответствии с определениями (1.77) имеем:

$$x>K: \qquad \varphi(x)=i\int(dx')\left[\int d\omega_p e^{ip(x-x')}\right]K(x')=$$
$$=\sum_p (d\omega_p)^{1/2} e^{ipx} iK_{p+}, \tag{1.79}$$

$$x>K: \qquad \varphi^*(x)=i\int(dx')\left[\int d\omega_p e^{ip(x-x')}\right]K^*(x')=$$
$$=\sum_p (d\omega_p)^{1/2} e^{ipx} iK_{p-}. \tag{1.80}$$

В другом случае, когда поля вычисляются до начала действия источников, $\Delta_+(x-x')$ заменяется на $i\Delta^{(-)}(x-x')$:

$$\left.\begin{aligned} x<K: \qquad \varphi(x)&=i\int(dx')\left[\int d\omega_p e^{-ip(x-x')}\right]K(x')=\\ &=\sum_p (d\omega_p)^{1/2} e^{-ipx} iK^*_{p-},\\ x<K: \qquad \varphi^*(x)&=i\int(dx')\left[\int d\omega_p e^{-ip(x-x')}\right]K^*(x')=\\ &=\sum_p (d\omega_p)^{1/2} e^{-ipx} iK^*_{p+}. \end{aligned}\right\} \tag{1.81}$$

Первый случай соответствует процессу испускания, а второй — процессу поглощения частицы. При этом каждому отдельному акту испускания сопоставляется поле $(d\omega_p)^{1/2}e^{ipx}$, а акту поглощения — поле $(d\omega_p)^{1/2}e^{-ipx}$. В соответствии с интерпретацией комплексных источников эти поля дают нам частицы с определенным знаком заряда. В зависимости от причинной последовательности поле $\varphi(x)$ описывает испускаемые положительно заряженные частицы или поглощаемые отрицательно заряженные частицы, а поле $\varphi^*(x)$ — испускаемые отрицательно заряженные частицы или поглощаемые положительно заряженные частицы.

Для вакуумной амплитуды замкнутого во времени цикла имеем:

$$\langle 0_- | 0_- \rangle^{K_{(-)}, K_{(+)}} = \exp [iW (K_{(-)}, K_{(+)})],$$
$$\begin{aligned} W (K_{(-)}, K_{(+)}) = \int (dx) (dx') K^*_{(+)} (x) \Delta_+ (x-x') K_{(+)} (x') - \\ - \int (dx) (dx') K^*_{(-)} (x) \Delta_- (x-x') K_{(-)} (x') - \\ - i \int (dx) (dx') K^*_{(-)} (x) \Delta^{(+)} (x-x') K_{(+)} (x') - \\ - i \int (dx) (dx') K_{(-)} (x) \Delta^{(+)} (x-x') K^*_{(+)} (x'). \end{aligned} \tag{1.82}$$

Поля определяются формулой

$$\begin{aligned} \delta W (K_{(-)}, K_{(+)}) = \int (dx) [\delta K^*_{(+)} (x) \varphi_{(+)} (x) + \delta K_{(+)} (x) \varphi^*_{(+)} (x) - \\ - \delta K^*_{(-)} (x) \varphi_{(-)} (x) - \delta K_{(-)} (x) \varphi^*_{(-)} (x)]. \end{aligned} \tag{1.83}$$

Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{(+)} (x) = \int (dx') \Delta_+ (x-x') K_{(+)} (x') - \\ - i \int (dx') \Delta^{(-)} (x-x') K_{(-)} (x'), \\ \varphi^*_{(+)} (x) = \int (dx') \Delta_+ (x-x') K^*_{(+)} (x') - \\ - i \int (dx') \Delta^{(-)} (x-x') K^*_{(-)} (x'), \end{aligned} \tag{1.84}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{(-)} (x) = \int (dx') \Delta_- (x-x') K_{(-)} (x') + \\ + i \int (dx') \Delta^{(+)} (x-x') K_+ (x'), \\ \varphi^*_{(-)} (x) = \int (dx') \Delta_- (x-x') K^*_{(-)} (x') + \\ + i \int (dx') \Delta^{(+)} (x-x') K^*_{(+)} (x'). \end{aligned} \tag{1.85}$$

Отсюда видно, что поля, ранее определявшиеся формулами (1.19), здесь удваиваются, но проведенный там анализ сохраняет свою силу, причем его нужно дополнить подстановками $K \to K^*$, $\varphi \to \varphi^*$. В частности, если имеют место равенства

$$K_{(-)}(x) = K_{(+)} (x) = K (x) \tag{1.86}$$

и, следовательно, аналогичные равенства для комплексно-сопряженных источников, то мы получим

$$\varphi_{(-)} (x) = \varphi_{(+)} (x) = \varphi_{\text{зап}}(x), \tag{1.87}$$
$$\varphi^*_{(-)} (x) = \varphi^*_{(+)} (x) = \varphi^*_{\text{зап}} (x). \tag{1.88}$$

Теперь два запаздывающих поля комплексно-сопряжены друг с другом, так как функция $\Delta_{\text{зап}}(x - x')$ вещественна. Смысл этого в том, что всякое малое отклонение функции $W(K_{(-)}, K_{(+)})$ от нуля вещественно:

$$\delta W(K_{(-)}, K_{(+)}) = \\ = \int (dx) [(\delta K^*_{(+)}(x) - \delta K^*_{(-)}(x))\, \varphi_{\text{зап}}(x) + (\delta K_{(+)}(x) - \\ - \delta K_{(-)}(x))\, \varphi^*_{\text{зап}}(x)] = \delta W(K_-, K_+)^*. \tag{1.89}$$

Это утверждение представляет собой частный случай соотношения

$$[iW(K_{(-)}, K_{(+)})]^* = iW(K_{(+)}, K_{(-)}), \tag{1.90}$$

которое прямо следует из интерпретации вакуумной амплитуды для замкнутого во времени цикла, соответствующей формуле (2.86) из гл. 2.

При замене вакуумного состояния общим многочастичным состоянием мы можем, как и в формуле (1.36), ввести параметризацию, взяв весовую функцию

$$p_{\alpha\beta}(\{n\}) = C \exp\left[-\sum_{pq} (\alpha q + \beta_\mu p^\mu)\, n_{pq}\right], \\ \sum_{\{n\}} p_{\alpha\beta}(\{n\}) = 1. \tag{1.91}$$

Как и ранее, найдем усредненные числа заполнения

$$\langle n_{pq}\rangle_{\alpha\beta} = \sum_{\{n\}} n_{pq} p_{\alpha\beta}(\{n\}) = \frac{1}{e^{\alpha q + \beta p} - 1}, \tag{1.92}$$

а согласно равенству (2.59) и гл. 2, функция $\Delta_+(x - x')$ перейдет в функцию

$$\Delta_{\alpha\beta}(x - x') = \Delta_+(x - x') + \\ + i \int d\omega_p\, [\langle n_{p+}\rangle_{\alpha\beta}\, e^{ip(x-x')} + \langle n_{p-}\rangle_{\alpha\beta}\, e^{-ip(x-x')}]. \tag{1.93}$$

Еще раз отметим, что эта функция не симметрична по x и x', но она будет симметричной, если дополнительно заменять положительные заряды отрицательными и наоборот. Последняя перестановка соответствует преобразованию одного из параметров, а именно $\alpha \to -\alpha$, и поэтому

$$\Delta_{\alpha\beta}(x - x') = \Delta_{-\alpha\beta}(x' - x). \tag{1.94}$$

Функции $\Delta^{(\pm)}_{\alpha\beta}(x - x')$, определяемые, как и обычно, формулой

$$\Delta_{\alpha\beta}(x - x') = \begin{cases} x^0 > x^{0\prime}: & i\Delta^{(+)}_{\alpha\beta}(x - x'), \\ x^0 < x^{0\prime}: & i\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x - x'), \end{cases} \tag{1.95}$$

имеют вид:

$$\Delta^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x') = \int d\omega_p\,[(\langle n_{p+}\rangle_{\alpha\beta}+1)\,e^{ip(x-x')} + \langle n_{p-}\rangle_{\alpha\beta}\,e^{-ip(x-x')}],$$
$$\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x') = \int d\omega_p\,[\langle n_{p+}\rangle_{\alpha\beta}\,e^{ip(x-x')} + (\langle n_{p-}\rangle_{\alpha\beta}+1)\,e^{-ip(x-x')}], \tag{1.96}$$

причем

$$\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x') = \Delta^{(+)}_{-\alpha\beta}(x'-x). \tag{1.97}$$

Кроме того, из равенств

$$\langle n_{p+}\rangle_{\alpha\beta} + 1 = e^{\alpha+\beta p}\,\langle n_{p+}\rangle_{\alpha\beta},$$
$$\langle n_{p-}\rangle_{\alpha\beta} + 1 = e^{-\alpha+\beta p}\,\langle n_{p-}\rangle_{\alpha\beta} \tag{1.98}$$

следуют соотношения

$$\Delta^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x') = e^{\alpha}\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x'-i\beta),$$
$$\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x') = e^{-\alpha}\Delta^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x'+i\beta). \tag{1.99}$$

Соответственно этому условие периодичности модифицируется следующим образом:

$$\Delta_{\alpha\beta}(x-x') = e^{\alpha}\Delta_{\alpha\beta}(x-x'-X) = e^{-\alpha}\Delta_{\alpha\beta}(x-x'+X). \tag{1.100}$$

Хотя мы и не будем останавливаться на этом подробно, но граничное условие для функции распространения $\Delta_{\alpha\beta}(x-x')$ совместно с дифференциальным уравнением, которому она удовлетворяет, приводят как раз к исходной функции.

Замене функции $\Delta_+(x-x')$ многочастичной функцией $\Delta_{\alpha\beta}(x-x')$ эквивалентна замена

$$\Delta_-(x-x') \to \Delta_{\alpha\beta}(x'-x)^* = \Delta_{-\alpha,-\beta}(x-x'). \tag{1.101}$$

Для функции, описывающей замкнутый во времени цикл, т. е. комбинацию вида

$$\sum_{\{n\}} \langle\{n\}_-\,|\,\{n\}_-\rangle^{K_{(-)},\,K_{(+)}}\,p_{\alpha\beta}(\{n\}) = \exp\,[iW_{\alpha\beta}(K_{(-)}, K_{(+)})], \tag{1.102}$$

имеем

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}(K_{(-)}, K_{(+)}) = &\int (dx)(dx')\,K^*_{(+)}(x)\,\Delta_{\alpha\beta}(x-x')\,K_{(+)}(x') - \\ &- \int (dx)(dx')\,K^*_{(-)}(x)\,\Delta_{-\alpha,-\beta}(x-x')\,K_{(-)}(x') - \\ &- i\int (dx)(dx')\,K^*_{(-)}(x)\,\Delta^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x')\,K_{(+)}(x') - \\ &- i\int (dx)(dx')\,K^*_{(+)}(x)\,\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x')\,K_{(-)}(x'). \end{aligned} \tag{1.103}$$

Заметим, что если бы мы пожелали записать последнее слагаемое другим способом, воспользовавшись функцией $\Delta^{(+)}$, то, согласно соотношению (1.97), необходимо было бы заменить α на $-\alpha$. Поля, определяемые тем же способом, что и в (1.83), теперь будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta(+)}(x) &= \int (dx')\,\Delta_{\alpha\beta}(x-x')\,K_{(+)}(x') - \\ &\quad - i\int (dx')\,\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x')\,K_{(-)}(x'), \\ \varphi^*_{\alpha\beta(+)}(x) &= \int (dx')\,\Delta_{-\alpha\beta}(x-x')\,K^*_{(+)}(x') - \\ &\quad - i\int (dx')\,\Delta^{(-)}_{-\alpha\beta}(x-x')\,K^*_{(-)}(x'), \end{aligned} \tag{1.104}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta(-)}(x) &= \int (dx')\,\Delta_{-\alpha,-\beta}(x-x')\,K_{(-)}(x') + \\ &\quad + i\int (dx')\,\Delta^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x')\,K_{(+)}(x'), \\ \varphi^*_{\alpha\beta(-)}(x) &= \int (dx')\,\Delta_{\alpha,-\beta}(x-x')\,K^*_{(-)}(x') + \\ &\quad + i\int (dx')\,\Delta^{(+)}_{-\alpha\beta}(x-x')\,K^*_{(+)}(x') \end{aligned} \tag{1.105}$$

Структура этих полей такова же, как и в приведенных выше формулах (1.67), но теперь все функции Δ несут дополнительный индекс α или $-\alpha$, причем при подстановке $K\to K^*$, $\varphi\to\varphi^*$ эти индексы переходят один в другой. Если снабдить индексом α поля, то можно будет применять соотношения (1.69) и (1.71), а также соотношения, получающиеся из них при подстановке $K\to K^*$, $\varphi\to\varphi^*$. Индекс α можно ввести и во все члены, фигурирующие в равенстве (1.72), но при переходе к источникам и полям со звездочкой его нужно в функции $\Delta^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x')$ заменить на $-\alpha$. Заметим, наконец, что граничные условия для полей, которые следует наложить на дифференциальные уравнения, имеют вид

$$e^{-\alpha}\varphi_{\alpha\beta(-)}(x+X) = \varphi_{\alpha\beta(+)}(x), \quad e^{\alpha}\varphi^*_{\alpha\beta(-)}(x+X) = \varphi^*_{\alpha\beta(+)}(x). \tag{1.106}$$

§ 2. ПОНЯТИЕ ПОЛЯ, ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ $^1/_2$

Для рассматриваемой системы вакуумная амплитуда равна

$$\langle 0_+|0_-\rangle^{\eta} = \exp[iW(\eta)],$$

$$W(\eta) = \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,\eta(x)\,\gamma^0 G_+(x-x')\,\eta(x'), \tag{2.1}$$

где

$$G_+(x-x') = \left(m - \gamma^{\mu}\frac{1}{i}\partial_{\mu}\right)\Delta_+(x-x'). \tag{2.2}$$

Отметим сразу же, что из алгебраических свойств матриц γ^{μ}

следует равенство

$$\left(\gamma^\mu \frac{1}{i}\,\partial_\mu + m\right) G_+ (x - x') = (-\partial^2 + m^2)\, \Delta_+ (x - x') = \\ = \delta (x - x'), \tag{2.3}$$

т. е. функция $G_+ (x - x')$ является функцией Грина для дифференциального оператора, содержащего матрицы Дирака. В соответствии со структурой функции $\Delta_+ (x - x')$ эта функция Грина удовлетворяет граничным условиям, требующим, чтобы она содержала только расходящиеся во времени волны. Здесь мы определим поле следующим образом:

$$\delta W (\eta) = \int (dx)\, \delta\eta (x)\, \gamma^0 \psi (x) = \int (dx)\, \psi (x)\, \gamma^0 \delta\eta (x). \tag{2.4}$$

Введение антисимметричной матрицы γ^0 компенсирует антикоммутативность пробного источника $\delta\eta (x)$ с полем $\psi (x)$, которое строится из полностью антикоммутирующих источников $\eta (x)$:

$$\psi (x) = \int (dx')\, G_+ (x - x')\, \eta (x') \tag{2.5}$$

и поэтому имеет такую же алгебраическую природу. Полезно отметить также, что

$$\psi (x)\, \gamma^0 = \int (dx')\, \eta (x')\, \gamma^0 G_+ (x' - x); \tag{2.6}$$

это равенство прямо следует из определения или из свойства антисимметрии

$$[\gamma^0 G_+ (x' - x)]^T = -\gamma^0 G_+ (x - x'). \tag{2.7}$$

Решение дифференциального уравнения (2.3) для функции Грина записывается в виде двух эквивалентных интегралов по четырехмерному импульсу

$$G_+ (x - x') = \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-x')}}{\gamma p + m - i\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon\to+0} = \\ = \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{m - \gamma p}{p^2 + m^2 - i\varepsilon}\, e^{ip(x-x')}\bigg|_{\varepsilon\to+0}, \tag{2.8}$$

причем ε в двух этих выражениях имеет разный масштаб. Но можно также построить функцию Грина из решений однородного уравнения Дирака:

$$G_+ (x - x') = \begin{cases} x^0 > x^{0\prime}: & iG^{(+)} (x - x'), \\ x^0 < x^{0\prime}: & iG^{(-)} (x - x'), \end{cases} \tag{2.9}$$

где [см. формулы (7.43) из гл. 2]

$$G^{(+)} (x - x') = \int d\omega_p\, (m - \gamma p)\, e^{ip(x-x')} = \\ = \sum_{p\sigma q} \psi_{p\sigma q} (x)\, \psi_{p\sigma q} (x')^* \gamma^0,$$

$$G^{(-)}(x-x') = \int d\omega_p (m+\gamma p) e^{-ip(x-x')} = \\ = -\sum_{p\sigma q} \psi_{p\sigma q}(x)^* \psi_{p\sigma q}(x') \gamma^0, \tag{2.10}$$

причем [см. формулу (7.42) из гл. 2]

$$\psi_{p\sigma q}(x) = (2m\, d\omega_p)^{1/2} u_{p\sigma q} e^{ipx}. \tag{2.11}$$

Зарядовый индекс появился здесь потому, что заряд является общей характеристикой всех частиц со спином $^1/_2$. Неоднородный член дифференциального уравнения (2.3) эквивалентен скачку по временной переменной:

$$\gamma^0 \frac{1}{i} G_+(x-x') \Big|_{x^0-x^{0\prime}=-0}^{x^0-x^{0\prime}=+0} = \\ = \gamma^0 [G^{(+)}(x-x') - G^{(-)}(x-x')]_{x^0=x^{0\prime}} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{2.12}$$

Интегралы по импульсам в формуле (2.10) удовлетворяют этому требованию; кроме того, оно находит свое выражение в равенстве $x^0 = x^{0\prime}$:

$$\sum_{p\sigma q} [\psi_{p\sigma q}(x) \psi_{p\sigma q}(x')^* + \psi_{p\sigma q}(x)^* \psi_{p\sigma q}(x')] = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{2.13}$$

которое представляет собой формулировку условия полноты для волновых функций с положительными и отрицательными частотами $\psi_{p\sigma q}(x)$ и $\psi_{p\sigma q}(x)^*$.

Поле в причинных областях — после прекращения действия источника и до начала его действия — вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} x > \eta: \quad & \psi(x) = \int (dx') \Big[i \sum_{p\sigma q} \psi_{p\sigma q}(x) \psi_{p\sigma q}(x')^* \gamma^0 \Big] \eta(x') = \\ & = \sum_{p\sigma q} \psi_{p\sigma q}(x)\, i\eta_{p\sigma q}, \\ x < \eta: \quad & \psi(x) = \int (dx') \Big[-i \sum_{p\sigma q} \psi_{p\sigma q}(x)^* \psi_{p\sigma q}(x') \gamma^0 \Big] \eta(x') = \\ & = \sum_{p\sigma q} \psi_{p\sigma q}(x)^*\, i\eta^*_{p\sigma q}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

где [см. формулу (7.41) из гл. 2]

$$\eta^*_{p\sigma q} = \int (dx)\, \eta(x) \gamma^0 \psi_{p\sigma q}(x) = -\int (dx)\, \psi_{p\sigma q}(x) \gamma^0 \eta(x). \tag{2.15}$$

Как прямо следует из соотношения (2.6), выражение для поля при $x < \eta$ можно представить также в форме

$$x < \eta: \qquad \psi(x)\gamma^0 = \int (dx')\,\eta(x')\,\gamma^0 \Big[i \sum_{p\sigma q} \psi_{p\sigma q}(x')\,\psi_{p\sigma q}(x)^*\,\gamma^0 \Big] = \\ = \sum_{p\sigma q} i\eta^*_{p\sigma q}\psi_{p\sigma q}(x)^*\,\gamma^0. \qquad (2.16)$$

Поле, соответствующее времени после прекращения действия источника, описывает испущенные ранее частицы, связывая волновую функцию $\psi_{p\sigma q}(x)$ с отдельным актом испускания; поле же, соответствующее времени до начала действия источника, описывает поглощающиеся впоследствии частицы, связывая волновую функцию $\psi_{p\sigma q}(x)^*$ с отдельным актом поглощения.

Отметим, что частицы с положительным и отрицательным зарядами допускают у нас единую трактовку. Это обусловлено тем, что мы использовали вещественные источники, а задача выбора того или иного значения заряда перекладывалась на многокомпонентные функции $u_{p\sigma q}$ или $\psi_{p\sigma q}(x)$. Здесь, в противоположность случаю нулевого спина, такой подход вполне естествен, так как уже само описание спина $^1/_2$ требует наличия четырехкомпонентной величины $u_{p\sigma}$. Но можно также пойти по другому пути — заранее отбирать то или иное значение заряда, используя комплексные источники. Построим из пары четырехкомпонентных вещественных источников $\eta_{(1)}(x)$ и $\eta_{(2)}(x)$ величины

$$\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_{(1)}(x) - i\eta_{(2)}(x)), \qquad \eta(x)^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_{(1)}(x) + i\eta_{(2)}(x)). \qquad (2.17)$$

Тогда вакуумная амплитуда будет даваться функцией

$$W(\eta) = \int (dx)\,(dx')\,\bar{\eta}(x)\,G_+(x - x')\,\eta(x'), \qquad (2.18)$$

где мы ввели обозначение

$$\bar{\eta}(x) = \eta(x)^*\,\gamma^0, \qquad (2.19)$$

а поля будут определяться формулой

$$\delta W(\eta) = \int (dx)\,[\delta\bar{\eta}(x)\,\psi(x) + \bar{\psi}(x)\,\delta\eta(x)]. \qquad (2.20)$$

Эти поля таковы:

$$\psi(x) = \int (dx')\,G_+(x - x')\,\eta(x'), \\ \bar{\psi}(x) = \int (dx')\,\bar{\eta}(x')\,G_+(x' - x). \qquad (2.21)$$

Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \left(\gamma^\mu \frac{1}{i} \partial_\mu + m\right) \psi(x) &= \eta(x), \\ \overline{\psi}(x) \left(\gamma^\mu \frac{1}{i} \partial_\mu^T + m\right) &= \overline{\eta}(x), \end{aligned} \tag{2.22}$$

во втором из которых введено обозначение

$$\overline{\psi}(x)\, \partial_\mu^T = -\partial_\mu \overline{\psi}(x) \tag{2.23}$$

и использовано то обстоятельство, что функция

$$G_+(x-x') = \left(m + \gamma \frac{1}{i} \partial\right) \Delta_+(x-x') \tag{2.24}$$

удовлетворяет уравнению

$$G_+(x'-x)\left(\gamma \frac{1}{i} \partial^T + m\right) = \left(m + \gamma \frac{1}{i} \partial\right)\left(m - \gamma \frac{1}{i} \partial\right) \Delta_+(x-x') = \\ = \delta(x-x'). \tag{2.25}$$

Теперь в соответствии с новыми обозначениями напишем

$$G^{(+)}(x-x') = \sum_{p\sigma} \psi_{p\sigma}(x)\, \overline{\psi}_{p\sigma}(x'), \tag{2.26}$$

где

$$\psi_{p\sigma}(x) = (2m\, d\omega_p)^{1/2} u_{p\sigma} e^{ipx}, \quad \overline{\psi}_{p\sigma}(x) = (2m\, d\omega_p)^{1/2} e^{-ipx}\, \overline{u}_{p\sigma}, \tag{2.27}$$

$$\overline{u}_{p\sigma} = u_{p\sigma}^* \gamma^0. \tag{2.28}$$

В таком случае мы должны также написать

$$G^{(-)}(x-x') = \gamma^0 \left[\sum_{p\sigma} \overline{\psi}_{p\sigma}(x)\, \psi_{p\sigma}(x')\right] \gamma^0, \tag{2.29}$$

что снова приводит к свойству (2.7). Поля, вычисленные в двух причинных областях, имеют вид

$$\begin{aligned} x > \eta: \quad \psi(x) &= \int (dx') \left[i \sum_{p\sigma} \psi_{p\sigma}(x)\, \overline{\psi}_{p\sigma}(x')\right] \eta(x') = \\ &= \sum_{p\sigma} \psi_{p\sigma}(x)\, i\eta_{p\sigma+}, \\ \overline{\psi}(x) &= \int (dx')\, \overline{\eta}(x')\, \gamma^0 \left[i \sum_{p\sigma} \overline{\psi}_{p\sigma}(x')\, \psi_{p\sigma}(x)\right] \gamma^0 = \\ &= \sum_{p\sigma} \psi_{p\sigma}(x)\, \gamma^0 i\eta_{p\sigma-}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

где

$$\eta_{p\sigma+} = \int (dx)\, \overline{\psi}_{p\sigma}(x)\, \eta(x), \qquad \eta_{p\sigma-} = \int (dx)\, \overline{\eta}(x)\, \gamma^0 \overline{\psi}_{p\sigma}(x), \tag{2.31}$$

и

$$x<\eta:\qquad \psi(x)=\int(dx')\gamma^0\Big[i\sum_{p\sigma}\bar\psi_{p\sigma}(x)\,\psi_{p\sigma}(x')\Big]\gamma^0\eta(x')=$$
$$=\sum_{p\sigma}\bar\psi_{p\sigma}(x)\,\gamma^0 i\eta^*_{p\sigma-},$$
$$\bar\psi(x)=\int(dx')\,\bar\eta(x')\Big[i\sum_{p\sigma}\psi_{p\sigma}(x')\,\bar\psi_{p\sigma}(x)\Big]=$$
$$=\sum_{p\sigma}\bar\psi_{p\sigma}(x)\,i\eta^*_{p\sigma+},\tag{2.32}$$

где

$$\eta^*_{p\sigma+}=\int(dx)\,\bar\eta(x)\,\psi_{p\sigma}(x),\qquad \eta^*_{p\sigma-}=\int(dx)\,\eta(x)\,\gamma^0\psi_{p\sigma}(x).\tag{2.33}$$

Детальные характеристики источников частиц вытекают из проведенного ранее анализа, если $\psi(x)$ идентифицировать с проекциями восьмикомпонентного поля на подпространство положительного, а $\bar\psi(x)\gamma^0$ — на подпространство отрицательного зарядов. Разумеется, оперировать с полями $\psi(x)$ и $\bar\psi(x)$ — общепринятый и самый привычный способ применения уравнения Дирака. Но асимметрия выражений (2.30) и (2.32), которой они отличаются от выражений (2.14), служит, по нашему мнению, достаточным основанием для того, чтобы в общем случае пользоваться вещественными источниками и многокомпонентными полями, определяемыми в пространстве заряда и спина, а не парами комплексных источников и связанными с ними полями.

Вакуумная амплитуда для замкнутого во времени цикла

$$\langle 0_+|0_-\rangle^{\eta_{(-)},\,\eta_{(+)}}=\exp\left[iW(\eta_{(-)},\eta_{(+)})\right]\tag{2.34}$$

дается функцией [см. формулу (7.60) из гл. 2]

$$W(\eta_{(-)},\eta_{(+)})=\frac{1}{2}\int(dx)\,(dx')\,[\eta_{(+)}(x)\,\gamma^0G_+(x-x')\,\eta_{(+)}(x')-$$
$$-\eta_{(-)}(x)\,\gamma^0G_-(x-x')\,\eta_{(-)}(x')-$$
$$-i\eta_{(-)}(x)\,\gamma^0G^{(+)}(x-x')\,\eta_{(+)}(x')-$$
$$-i\eta_{(+)}(x)\,\gamma^0G^{(-)}(x-x')\,\eta_{(-)}(x')].\tag{2.35}$$

Поля, определяемые равенством

$$\delta W(\eta_{(-)},\eta_{(+)})=\int(dx)\,[\delta\eta_{(+)}(x)\,\gamma^0\psi_{(+)}(x)-$$
$$-\delta\eta_{(-)}(x)\,\gamma^0\psi_{(-)}(x)],\tag{2.36}$$

имеют вид

$$\psi_{(+)}(x) = \int (dx')\, G_{+}(x - x')\, \eta_{(+)}(x') - \\ - i \int (dx')\, G^{(-)}(x - x')\, \eta_{(-)}(x'), \tag{2.37}$$

$$\psi_{(-)}(x) = \int (dx')\, G_{-}(x - x')\, \eta_{(-)}(x') + \\ + i \int (dx')\, G^{(+)}(x - x')\, \eta_{(+)}(x').$$

В соответствии с тем, что [см. формулу (7.65) из гл. 2]

$$i\,[G_{+}(x - x') - G_{-}(x - x')] + G^{(+)}(x - x') + \\ + G^{(-)}(x - x') = 0, \tag{2.38}$$

функция $G_{-}(x - x')$ удовлетворяет тому же неоднородному дифференциальному уравнению, что и $G_{+}(x - x')$, а поэтому введенные поля будут удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\left(\gamma \frac{1}{i}\,\partial + m\right) \psi_{(+)}(x) = n_{(+)}(x),$$

$$\left(\gamma \frac{1}{i}\,\partial + m\right) \psi_{(-)}(x) = \eta_{(-)}(x). \tag{2.39}$$

Эти решения можно записать и по-другому:

$$\psi_{(+)}(x) = \int (dx')\, G_{\text{зап}}(x - x')\, \eta_{(+)}(x') + \\ + i \int (dx')\, G^{(-)}(x - x')\, [\eta_{(+)}(x') - \eta_{(-)}(x')], \tag{2.40}$$

$$\psi_{(-)}(x) = \int (dx')\, G_{\text{зап}}(x - x')\, \eta_{(-)}(x') + \\ + i \int (dx')\, G^{(+)}(x - x')\, [\eta_{(+)}(x') - \eta_{(-)}(x')],$$

тогда как

$$\psi_{(+)}(x) - \psi_{(-)}(x) = \int (dx')\, G_{\text{опер}}(x - x')\, [\eta_{(+)}(x') - \eta_{(-)}(x')]. \tag{2.41}$$

Введенные здесь функции являются вещественными функциями Грина:

$$G_{\text{зап}}(x - x') = G_{+}(x - x') - iG^{(-)}(x - x') = G_{-}(x - x') + iG^{(+)}(x - x') = \\ = \begin{cases} x^0 > x^{0\prime}: & iG^{(+)}(x - x') - iG^{(-)}(x - x'), \\ x^0 < x^{0\prime}: & 0 \end{cases} \tag{2.42}$$

и

$$G_{\text{опер}}(x-x') = G_+(x-x') - iG^{(+)}(x-x') =$$
$$= G_-(x-x') + iG^{(-)}(x-x') =$$
$$= \begin{cases} x^0 > x^{0\prime}: & 0 \\ x^0 < x^{0\prime}: & iG^{(-)}(x-x') - iG^{(+)}(x-x'). \end{cases} \tag{2.43}$$

Из этих выражений явствует, что до начала действия источников функция $\psi_{(+)}(x)$ содержит только отрицательные частоты, а функция $\psi_{(-)}(x)$ — только положительные частоты и что после прекращения действия источников $\psi_{(+)}(x) = \psi_{(-)}(x)$. Эти утверждения представляют собой граничные условия, которыми следует дополнить дифференциальные уравнения (2.39). Кстати, из формул (1.27) и (1.34) сразу видно, что запаздывающую и опережающую функции Грина можно представить также в виде

$$G_{\text{зап, опер}}(x-x') = \left(m - \gamma\frac{1}{i}\partial\right)\Delta_{\text{зап, опер}}(x-x'). \tag{2.44}$$

Очевидно, что в частном случае, когда

$$\eta_{(-)}(x) = n_{(+)}(x) = \eta(x), \tag{2.45}$$

мы будем иметь

$$\psi_{(-)}(x) = \psi_{(+)}(x) = \psi_{\text{зап}}(x), \tag{2.46}$$

где поле

$$\psi_{\text{зап}}(x) = \int (dx')\, G_{\text{зап}}(x-x')\,\eta(x') \tag{2.47}$$

является вещественным решением дифференциального уравнения

$$\left(\gamma\frac{1}{i}\partial + m\right)\psi_{\text{зап}}(x) = \eta(x), \tag{2.48}$$

равным нулю до начала действия источника. Функция W при малых отклонениях источников от их значений, удовлетворяющих условию (3.45), имеет вид

$$\delta W = \int (dx)\,[\delta\eta_{(+)}(x) - \delta\eta_{(-)}(x)]\,\gamma^0\psi_{\text{зап}}(x). \tag{2.49}$$

Если смесь многочастичных амплитуд, параметризованную согласно (1.91), применить к системе частиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака, когда $n_{pq} = 0,\ 1$, то усредненные числа заполнения будут таковы:

$$\langle n_{pq}\rangle_{\alpha\beta} = \frac{e^{-(\alpha q+\beta p)}}{1+e^{-(\alpha q+\beta p)}} = \frac{1}{e^{\alpha q+\beta p}+1}. \tag{2.50}$$

Обратившись к формуле (7.45) из гл. 2, мы увидим, что в этом случае $G_+(x-x')$ заменится функцией

$$G_{\alpha\beta}(x-x') = G_+(x-x') - \\ - i\sum_{p\sigma q}\langle n_{pq}\rangle_{\alpha\beta}\,[\psi_{p\sigma q}(x)\,\psi_{p\sigma q}(x')^* - \psi_{p\sigma q}(x)^*\,\psi_{p\sigma q}(x')]\,\gamma^0, \tag{2.51}$$

причем эта функция Грина входит в величину

$$W_{\alpha\beta}(\eta) = \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,\eta(x)\,\gamma^0 G_{\alpha\beta}(x-x')\,\eta(x'), \tag{2.52}$$

определяя тем самым комбинацию

$$\sum \langle\{n\}_+\,|\,\{n\}_-\rangle^{\eta}\,p_{\alpha\beta}(\{n\}) = \exp[iW_{\alpha\beta}(\eta)]. \tag{2.53}$$

Для простоты мы не вводили никаких параметров, которые различали бы всевозможные спиновые состояния. Функции, определяющиеся равенством

$$G_{\alpha\beta}(x-x') = \begin{cases} x^0 > x^{0\prime}: & iG^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x'), \\ x^0 < x^{0\prime}: & iG^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x'), \end{cases} \tag{2.54}$$

имеют следующий явный вид:

$$\begin{aligned} G^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x') &= \sum_{p\sigma q}[(1-\langle n_{pq}\rangle_{\alpha\beta})\,\psi_{p\sigma q}(x)\,\psi_{p\sigma q}(x')^* + \\ &\quad + \langle n_{pq}\rangle_{\alpha\beta}\,\psi_{p\sigma q}(x)^*\,\psi_{p\sigma q}(x')]\,\gamma^0, \\ G^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x') &= -\sum_{p\sigma q}[\langle n_{pq}\rangle_{\alpha\beta}\,\psi_{p\sigma q}(x)\,\psi_{p\sigma q}(x')^* + \\ &\quad + (1-\langle n_{pq}\rangle_{\alpha\beta})\,\psi_{p\sigma q}(x)^*\,\psi_{p\sigma q}(x)]\,\gamma^0, \end{aligned} \tag{2.55}$$

причем имеет место соотношение

$$[\gamma^0 G^{(+)}_{\alpha\beta}(x'-x)]^T = -\gamma^0 G^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x'), \tag{2.56}$$

которым выражается необходимая антисимметрия $\gamma^0 G_{\alpha\beta}(x-x')$ относительно одновременной перестановки пространственно-временных координат и всех дискретных индексов. Соотношение

$$1-\langle n_{pq}\rangle_{\alpha\beta} = e^{\alpha q+\beta p}\,\langle n_{pq}\rangle_{\alpha\beta} \tag{2.57}$$

означает, что

$$\begin{aligned} G^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x') &= -e^{\alpha q}G^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x'-i\beta), \\ G^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x') &= -e^{-\alpha q}G^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x'+i\beta), \end{aligned} \tag{2.58}$$

где символом q обозначается теперь антисимметричная зарядовая матрица. Соответствующее свойство для функции Грина имеет вид

$$G_{\alpha\beta}(x-x') = -e^{\alpha q}G_{\alpha\beta}(x-x'-X) = \\ = -e^{-\alpha q}G_{\alpha\beta}(x-x'-X). \tag{2.59}$$

Если параметр α положить равным нулю или вообще включить в функцию $G_{\alpha\beta}$ путем переопределения ее координатной зависимости, то граничное условие, накладываемое на $G_{\alpha\beta}(x - x')$, будет сводиться к изменению знака при смещении координат на X^μ; это свойство можно было бы назвать антипериодичностью. По поводу обобщения этих результатов на замкнутый во времени цикл мы ограничимся замечанием, что многочастичным аналогом $G_-(x - x')$ является функция $G_{-\alpha, -\beta}(x - x')$. Это утверждение эквивалентно соотношениям

$$G^{(+)}_{-\alpha,-\beta}(x-x') = -G^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x'), \quad G^{(-)}_{-\alpha,-\beta}(x-x') = -G^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x'), \tag{2.60}$$

причём они вытекают из следующего равенства для средних чисел заполнения:

$$\langle n_{pq}\rangle_{-\alpha,-\beta} = 1 - \langle n_{pq}\rangle_{\alpha\beta}. \tag{2.61}$$

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ЗНАЧЕНИЯ СПИНА

Спин 1. Согласно формуле (3.4) из гл. 2, частицы с единичным спином и массой $m \neq 0$ описываются функцией

$$W(J) = \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\Big[J^\mu(x)\Delta_+(x-x')J_\mu(x') + \\ + \frac{1}{m^2}\partial_\mu J^\mu(x)\Delta_+(x-x')\partial'_\nu J^\nu(x')\Big]. \tag{3.1}$$

Рассматривая пробный источник, мы введем векторное поле:

$$\delta W(J) = \int (dx)\,\delta J^\mu(x)\,\varphi_\mu(x), \tag{3.2}$$

и представим его в виде

$$\varphi_\mu(x) = \int (dx')\,\Delta_+(x-x')J_\mu(x') - \frac{1}{m^2}\partial_\mu\int (dx')\Delta_+(x-x')\partial'_\nu J^\nu(x'). \tag{3.3}$$

Дивергенция векторного поля такова:

$$\partial_\mu\varphi_\mu(x) = \int (dx')\Delta_+(x-x')\partial'_\mu J^\mu(x') - \\ - \frac{1}{m^2}\partial^2\int (dx')\Delta_+(x-x')\partial'_\nu J^\nu(x') = \frac{1}{m^2}\partial_\mu J^\mu(x), \tag{3.4}$$

причем получающееся таким образом скалярное поле обращается в нуль вне области, занятой источником. Дифференциальное уравнение, вытекающее из равенства (3.3),

$$(-\partial^2 + m^2)\varphi_\mu(x) = J_\mu(x) - \frac{1}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu J^\nu(x) \tag{3.5}$$

можно, пользуясь соотношением (3.4), представить также в форме

$$(-\partial^2 + m^2)\,\varphi_\mu(x) + \partial_\mu \partial_\nu \varphi^\nu(x) = J_\mu(x). \tag{3.6}$$

В другой записи это дифференциальное уравнение для поля имеет вид

$$\partial_\nu G^{\mu\nu}(x) + m^2 \varphi^\mu(x) = J^\mu(x), \tag{3.7}$$

где

$$G_{\mu\nu}(x) = -G_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \varphi_\nu(x) - \partial_\nu \varphi_\mu(x). \tag{3.8}$$

Если дифференциальные уравнения, связывающие векторное поле с его источником, дополнить соответствующими граничными условиями, то эти уравнения в свою очередь будут определять само это поле. Взяв дивергенцию от обеих частей векторного уравнения, мы вновь придем к соотношению (3.4), а тем самым и к уравнению (3.5). Решение последнего с граничным условием, требующим, чтобы существовала только расходящаяся во времени волна, представляет собой не что иное, как поле (3.3), из которого мы исходили. В прямой аналогии со случаем нулевого спина в этом и во всех прочих примерах систем, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, можно также пользоваться самыми разнообразными граничными условиями.

Спин 2. Частицы с конечной массой и спином 2 описываются функцией [см. формулу (4.20) из гл. 2]

$$\begin{aligned} W(T) = \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\Big[& T^{\mu\nu}(x)\,\Delta_+(x-x')\,T_{\mu\nu}(x') + \\ & + \frac{2}{m^2}\,\partial_\nu T^{\mu\nu}(x)\,\Delta_+(x-x')\,\partial^{\lambda\prime} T_{\mu\lambda}(x') + \\ & + \frac{1}{m^4}\,\partial_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu}(x)\,\Delta_+(x-x')\,\partial'_\varkappa \partial'_\lambda T^{\varkappa\lambda}(x') - \\ & - \frac{1}{3}\left(T(x) - \frac{1}{m^2}\,\partial_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu}(x)\right) \times \\ & \times \Delta_+(x-x')\left(T(x') - \frac{1}{m^2}\,\partial'_\varkappa \partial'_\lambda T^{\varkappa\lambda}(x')\right)\Big], \end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$T(x) = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}(x). \tag{3.10}$$

Симметричное тензорное поле, определяемое равенством

$$\delta W(T) = \int (dx)\,\delta T^{\mu\nu}(x)\,\varphi_{\mu\nu}(x), \tag{3.11}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu\nu}(x) = & \\ = & \int (dx')\,\Delta_+(x-x')\,T_{\mu\nu}(x') - \\ & - \frac{1}{m^2}\,\partial_\mu \int (dx')\,\Delta_+(x-x')\,\partial^{\lambda\prime} T_{\lambda\nu}(x') - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{m^2}\partial_\nu\int(dx')\,\Delta_+(x-x')\,\partial^{\lambda'}T_{\mu\lambda}(x')+$$
$$+\frac{1}{m^4}\partial_\mu\partial_\nu\int(dx')\,\Delta_+(x-x')\,\partial'_\varkappa\partial'_\lambda T^{\varkappa\lambda}(x')-$$
$$-\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu}-\frac{1}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu\right)\times$$
$$\times\int(dx')\,\Delta_+(x-x')\left(T(x')-\frac{1}{m^2}\partial'_\varkappa\partial'_\lambda T^{\varkappa\lambda}(x')\right). \qquad (3.12)$$

Дивергенция этого тензорного поля является вектором

$$\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}(x)=\frac{1}{m^2}\partial^\mu T_{\mu\nu}(x)-\frac{1}{3m^2}\partial_\nu\left[T(x)+\frac{2}{m^2}\partial_\varkappa\partial_\lambda T^{\varkappa\lambda}(x)\right], \qquad (3.13)$$

обращающимся в нуль в свободных от источников областях. Это утверждение справедливо и для скалярного поля

$$\varphi(x)=g_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu}(x)=-\frac{1}{3m^2}\left[T(x)+\frac{2}{m^2}\partial_\varkappa\partial_\lambda T^{\varkappa\lambda}(x)\right], \qquad (3.14)$$

а также для комбинации

$$\partial^\mu\varphi_{\mu\nu}(x)-\partial_\nu\varphi(x)=\frac{1}{m^2}\partial^\mu T_{\mu\nu}(x). \qquad (3.15)$$

Дифференциальное уравнение, вытекающее из (3.12), имеет вид

$$(-\partial^2+m^2)\,\varphi_{\mu\nu}(x)=T_{\mu\nu}(x)-\frac{1}{m^2}\left[\partial_\mu\partial^\lambda T_{\lambda\nu}(x)+\partial_\nu\partial^\lambda T_{\mu\lambda}(x)\right]+$$
$$+g_{\mu\nu}\frac{1}{m^2}\partial_\varkappa\partial_\lambda T^{\varkappa\lambda}(x)-$$
$$-\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu}-\frac{1}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu\right)\left[T(x)+\frac{2}{m^2}\partial_\varkappa\partial_\lambda T^{\varkappa\lambda}(x)\right]. \qquad (3.16)$$

Заменив векторную и скалярную комбинации источников эквивалентными им величинами, построенными из поля, мы придем к следующему дифференциальному уравнению:

$$(-\partial^2+m^2)\,\varphi_{\mu\nu}(x)+\partial_\mu\partial^\lambda\varphi_{\lambda\nu}(x)+\partial_\nu\partial^\lambda\varphi_{\mu\lambda}(x)-\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x)-$$
$$-g_{\mu\nu}\left[(-\partial^2+m^2)\,\varphi(x)+\partial_\varkappa\partial_\lambda\varphi^{\varkappa\lambda}(x)\right]=T_{\mu\nu}(x). \qquad (3.17)$$

Используя далее информацию, которая получается, если взять след обеих частей этого уравнения:

$$(-\partial^2+m^2)\,\varphi(x)+\partial_\varkappa\partial_\lambda\varphi^{\varkappa\lambda}(x)=-\frac{1}{2}\left[T(x)+m^2\varphi(x)\right], \qquad (3.18)$$

его можно будет представить в форме

$$(-\partial^2+m^2)\,\varphi_{\mu\nu}(x)+\partial_\mu\partial^\lambda\varphi_{\lambda\nu}(x)+\partial_\nu\partial^\lambda\varphi_{\mu\lambda}(x)-$$
$$-\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x)+g_{\mu\nu}\frac{m^2}{2}\varphi(x)=T_{\mu\nu}(x)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T(x). \qquad (3.19)$$

Это дифференциальное уравнение можно записать еще в двух вариантах:

$$\partial^\lambda G_{\mu\nu\lambda}(x) - \partial_\nu G_{\mu\lambda}{}^\lambda(x) + m^2\left[\varphi_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi(x)\right] = \\ = T_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T(x), \tag{3.20}$$

где

$$G_{\mu\lambda\nu}(x) = -G_{\nu\lambda\mu}(x) = \partial_\mu\varphi_{\lambda\nu}(x) - \partial_\nu\varphi_{\lambda\mu}(x), \tag{3.21}$$

и

$$\partial^\lambda H_{\mu\nu\lambda}(x) - \partial_\nu H_{\mu\lambda}{}^\lambda(x) + m^2\left[\varphi_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi(x)\right] = \\ = T_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T(x), \tag{3.22}$$

где

$$\begin{gathered} H_{\mu\nu\lambda}(x) = H_{\nu\mu\lambda}(x) = \partial_\mu\varphi_{\nu\lambda}(x) + \partial_\nu\varphi_{\mu\lambda}(x) - \partial_\lambda\varphi_{\mu\nu}(x), \\ H_{\mu\lambda}{}^\lambda(x) = \partial_\mu\varphi(x). \end{gathered} \tag{3.23}$$

Наоборот, дифференциальное уравнение для поля, дополненное граничным условием, согласно которому должны существовать только расходящиеся во времени волны, имеет единственное решение, задаваемое формулой (3.12).

В случае спина 2 оказывается еще вполне возможным установить в явном виде пространственно-временную связь между полем и источником, но при более высоких значениях спина эта процедура будет чрезвычайно громоздкой. Она до некоторой степени упрощается, если перейти в четырехмерное импульсное пространство, что мы и проиллюстрируем для начала на примере спина 2. Общее выражение (5.95) из гл. 2 в этом случае принимает вид

$$W(T) = \frac{1}{2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}T^{\mu\nu}(-p)\frac{\bar g_{\mu\varkappa}(p)\bar g_{\nu\lambda}(p) - \frac{1}{3}\bar g_{\mu\nu}(p)\bar g_{\varkappa\lambda}(p)}{p^2+m^2-i\varepsilon}T^{\varkappa\lambda}(p), \tag{3.24}$$

где

$$\bar g_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}p_\mu p_\nu. \tag{3.25}$$

Этот тензор обладает, в частности, свойствами

$$\begin{gathered} p^\mu\bar g_{\mu\nu}(p) = \frac{p^2+m^2}{m^2}p_\nu, \qquad \bar g^\nu{}_\nu(p) = 3 + \frac{p^2+m^2}{m^2}, \\ \bar g_{\mu\lambda}(p)\,\bar g^\lambda{}_\nu(p) = \bar g_{\mu\nu}(p) + \frac{p^2+m^2}{m^2}\frac{1}{m^2}p_\mu p_\nu. \end{gathered} \tag{3.26}$$

Поле, определяемое равенством

$$\delta W(T)=\int \frac{dp}{(2\pi)^4}\delta T^{\mu\nu}(-p)\,\varphi_{\mu\nu}(p), \tag{3.27}$$

будет иметь вид

$$\varphi_{\mu\nu}(p)=\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}\left[\bar{g}_{\mu\varkappa}(p)\,\bar{g}_{\nu\lambda}(p)-\frac{1}{3}\bar{g}_{\mu\nu}(p)\,\bar{g}_{\varkappa\lambda}(p)\right]T^{\varkappa\lambda}(p). \tag{3.28}$$

Получаемые из него векторное и скалярное поля даются формулами:

$$p^{\mu}\varphi_{\mu\nu}(p)=\frac{1}{m^2}\left[p_{\varkappa}\bar{g}_{\nu\lambda}(p)-\frac{1}{3}p_{\nu}\bar{g}_{\varkappa\lambda}(p)\right]T^{\varkappa\lambda}(p) \tag{3.29}$$

и

$$\varphi(p)=\frac{1}{m^2}\left[\frac{1}{m^2}p_{\varkappa}p_{\lambda}-\frac{1}{3}\bar{g}_{\varkappa\lambda}(p)\right]T^{\varkappa\lambda}(p). \tag{3.30}$$

Тогда алгебраическая комбинация

$$(p^2+m^2)\,\varphi_{\mu\nu}(p)-p_{\mu}p^{\lambda}\varphi_{\lambda\nu}(p)=\left[g_{\mu\varkappa}\bar{g}_{\nu\lambda}(p)-\frac{1}{3}g_{\mu\nu}\bar{g}_{\varkappa\lambda}(p)\right]T^{\varkappa\lambda}(p), \tag{3.31}$$

ее след

$$(p^2+m^2)\,\varphi(p)-p^{\varkappa}p^{\lambda}\varphi_{\varkappa\lambda}(p)=-\frac{1}{3}\bar{g}_{\varkappa\lambda}(p)\,T^{\varkappa\lambda}(p) \tag{3.32}$$

и дополнительная комбинация

$$p_{\nu}p^{\lambda}\varphi_{\mu\lambda}(p)-p_{\mu}p_{\nu}\varphi(p)=g_{\mu\varkappa}\frac{1}{m^2}p_{\nu}p_{\lambda}T^{\varkappa\lambda}(p) \tag{3.33}$$

приведут непосредственно к уравнению

$$(p^2+m^2)\,\varphi_{\mu\nu}(p)-p_{\mu}p^{\lambda}\varphi_{\lambda\nu}(p)-p_{\nu}p^{\lambda}\varphi_{\mu\lambda}(p)+p_{\mu}p_{\nu}\varphi(p)-\\-g_{\mu\nu}\left[(p^2+m^2)\,\varphi(p)-p^{\varkappa}p^{\lambda}\varphi_{\varkappa\lambda}(p)\right]=T_{\mu\nu}(p), \tag{3.34}$$

представляющему собой уравнение (3.17), записанное в импульсном пространстве.

Спин 3. В примерах частиц со спинами 0, 1 и 2, исходя из конструкции, задаваемой в общем случае равенством (5.95) из гл. 2, мы получали поля, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям второго порядка, в правую часть которых входил только сам источник. При более высоких значениях спина дело обстоит уже иначе — здесь не удается полностью исключить производные от функции источника. Но и в этом случае можно добиться упрощения, если воспользоваться произволом в определении функции W, который позволяет добавлять к ней вещественные слагаемые в виде произведения разных источников, взятых в одной и той же точке пространства-времени. Как уже указывалось в § 9 гл. 2, такого рода контактные члены не дают никакого вклада ни в вероятность вакуумного перехода, ни в связь причинно-упорядоченных источников. Вопрос о необходимости их введения в том или ином конкретном случае можно решить только на основании дополнительных соображений относительно структуры полевых уравнений. Если нам желательно сохранить форму неоднородного уравнения поля, которую мы теперь считаем стандартной, то для этого также необходимо ввести определенные вспомогательные поля, исчезающие вне тех областей, где расположены источники.

Все сказанное мы поясним на примере спина 3, а для простоты сначала рассмотрим случай безмассовых частиц. В случае спинов 1 и 2 мы этого не делали, потому что столь важные с физической точки зрения примеры заслуживают отдельного подробного исследования. Отметим, однако, что соответствующие полевые уравнения можно получить, просто положив в уравнениях (3.6) и (3.19) $m = 0$. Кроме того, необходимые с физической точки зрения требования к источникам, а именно требования равенства нулю их дивергенций, являются алгебраическими следствиями уравнений поля, в чем можно убедиться, переходя в формулах (3.4) и (3.15) к пределу $m = 0$. Но об этом мы подробнее поговорим позднее. Безмассовым частицам со спином 3 соответствует функция [см. формулу (5.122) из гл. 2]

$$W(S)=\frac{1}{2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2-i\varepsilon}\left[S^{\lambda\mu\nu}(-p)\,S_{\lambda\mu\nu}(p)-\frac{3}{4}S^{\lambda}(-p)\,S_{\lambda}(p)\right], \tag{3.35}$$

где

$$S^{\lambda}(p)=S^{\lambda\nu}{}_{\nu}(p), \tag{3.36}$$

а симметричный тензор третьего ранга должен удовлетворять условию

$$p_\nu S^{\lambda\mu\nu}(p)=0. \tag{3.37}$$

Последнее означает, что поле, определяемое равенством

$$\delta W(S)=\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\,\delta S^{\lambda\mu\nu}(-p)\,\varphi_{\lambda\mu\nu}(p), \tag{3.38}$$

задается теперь неоднозначно, так как любой дополнительный член в нем, содержащий в качестве множителей p_λ, p_μ или p_ν, в силу требования к источнику (3.37) не будет давать вклада в величину (3.38). Следовательно, общее выражение для поля имеет вид

$$\varphi_{\lambda\mu\nu}(p)=\frac{1}{p^2-i\varepsilon}\left[S_{\lambda\mu\nu}(p)-\frac{1}{4}(g_{\mu\nu}S_\lambda(p)+g_{\nu\lambda}S_\mu(p)+g_{\lambda\mu}S_\nu(p)\right]+\\+p_\lambda\varphi_{\mu\nu}(p)+p_\mu\varphi_{\nu\lambda}(p)+p_\nu\varphi_{\lambda\mu}(p), \tag{3.39}$$

где присутствие членов, получающихся один из другого путем циклических перестановок индексов, диктуется требованием полной симметрии тензора $\varphi_{\lambda\mu\nu}$. Новый симметричный тензор $\varphi_{\mu\nu}(p)$ определяется требованием, предъявляемым к источнику. Чтобы воспользоваться последним, заметим сначала, что

$$\varphi_\lambda(p)=\varphi_{\lambda\nu}{}^{\nu}(p)=\frac{1}{p^2-i\varepsilon}\left(-\frac{1}{2}\right)S_\lambda(p)+p_\lambda\varphi(p)+2p^\nu\varphi_{\lambda\nu}(p), \tag{3.40}$$

где

$$\varphi(p)=\varphi^\nu{}_\nu(p). \tag{3.41}$$

Умножив затем выражение (3.39) на p^λ, мы получим как раз комбинацию вида $^1/_2\,(\varphi_\lambda-p_\lambda\varphi)$, так что в результате будем иметь

$$p^2\varphi_{\mu\nu}=p^\lambda\varphi_{\lambda\mu\nu}-\frac{1}{2}(p_\mu\varphi_\nu+p_\nu\varphi_\mu)+p_\mu p_\nu\varphi. \tag{3.42}$$

Чтобы вывести уравнение для $\varphi(p)$, скомбинируем равенства

$$p^\lambda p^\mu p^\nu\varphi_{\lambda\mu\nu}=3p^2p^\mu p^\nu\varphi_{\mu\nu}, \tag{3.43}$$

$$p^2p^\mu p^\nu\varphi_{\mu\nu}=p^\lambda p^\mu p^\nu\varphi_{\lambda\mu\nu}-p^2p^\lambda\varphi_\lambda+(p^2)^2\varphi \tag{3.44}$$

и получим

$$(p^2)^2\varphi=p^2p^\lambda\varphi_\lambda-\frac{2}{3}p^\lambda p^\mu p^\nu\varphi_{\lambda\mu\nu}. \tag{3.45}$$

Далее, в импульсном пространстве полевое уравнение, которому удовлетворяет функция $\varphi_{\lambda\mu\nu}(p)$, имеет вид

$$p^2\varphi_{\lambda\mu\nu}-p_\lambda p^{\lambda'}\varphi_{\lambda'\mu\nu}-p_\mu p^{\mu'}\varphi_{\lambda\mu'\nu}-p_\nu p^{\nu'}\varphi_{\lambda\mu\nu'}+p_\mu p_\nu\varphi_\lambda+p_\nu p_\lambda\varphi_\mu+$$
$$+p_\lambda p_\mu\varphi_\nu-3p_\lambda p_\mu p_\nu\varphi=S_{\lambda\mu\nu}-\frac{1}{4}(g_{\mu\nu}S_\lambda+g_{\nu\lambda}S_\mu+g_{\lambda\mu}S_\nu). \tag{3.46}$$

Выражение для $\varphi(p)$, соответствующее уравнению (3.45), можно получить прямо из уравнения (3.46), умножив его на $p^\lambda p^\mu p^\nu$. Может показаться, что мы не достигли намеченной цели и не вывели полевых дифференциальных уравнений второго порядка, так как φ дифференцируется трижды и это скалярное поле удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка. Но в уравнение входит только комбинация полей вида

$$\varphi_{\lambda\mu\nu}(p)-3\frac{p_\lambda p_\mu p_\nu}{p^2-i\varepsilon}\varphi(p), \tag{3.47}$$

поскольку

$$p_\lambda p^{\lambda'}(p_{\lambda'}p_\mu p_\nu)-p_\mu p_\nu(p_\lambda p^2)=0. \tag{3.48}$$

Комбинация (3.47) есть вполне допустимое переопределение поля $\varphi_{\lambda\mu\nu}(p)$, а это означает, что можно исключить $\varphi(p)$ путем такого преобразования.

Таким образом, нашей окончательной системой полевых уравнений будет система (3.46) с $\varphi = 0$, или, в эквивалентной записи,

$$p^2\varphi_{\lambda\mu\nu} - p_\lambda p^{\lambda'}\varphi_{\lambda'\mu\nu} - \ldots + p_\mu p_\nu \varphi_\lambda + \ldots -$$
$$- g_{\mu\nu}\left(p^2\varphi_\lambda + \frac{1}{2} p_\lambda p^{\lambda'}\varphi_{\lambda'} - p^{\mu'}p^{\nu'}\varphi_{\lambda\mu'\nu'}\right) - \ldots = S_{\lambda\mu\nu}, \qquad (3.49)$$

где многоточием обозначены слагаемые, которые получаются из приведенных членов путем циклической перестановки индексов. Алгебраическим следствием этого уравнения оказывается соотношение

$$p^\lambda S_{\lambda\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu}\frac{1}{4}p^\lambda S_\lambda(p), \qquad (3.50)$$

которое не противоречит требованию, чтобы дивергенция источника была равна нулю, но столь же хорошо выполняется и в противном случае.

Рассмотрим теперь частицу с конечной массой и спином 3. Сначала будем ее описывать, как и раньше, функцией (5.95) из гл. 2:

$$W(S) = \frac{1}{2}\int \frac{dp}{(2\pi)^4} S^{\lambda\mu\nu}(-p)\frac{\Pi_{\lambda\mu\nu,\,\lambda'\mu'\nu'}(p)}{p^2+m^2-i\varepsilon} S^{\lambda'\mu'\nu'}(p), \qquad (3.51)$$

где в соответствии с формулой (5.79) из гл. 2, в которой мы положим $c_{31} = -{}^3/_5$,

$$\Pi_{\lambda\mu\nu,\,\lambda'\mu'\nu'} = \bar{g}_{\lambda\lambda'}\bar{g}_{\mu\mu'}\bar{g}_{\nu\nu'} -$$
$$-\frac{1}{5}[\bar{g}_{\lambda\mu}\bar{g}_{\nu\nu'}\bar{g}_{\lambda'\mu'} + \bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}_{\lambda\lambda'}\bar{g}_{\mu'\nu'} + \bar{g}_{\nu\lambda}\bar{g}_{\mu\mu'}\bar{g}_{\nu'\lambda'}], \qquad (3.52)$$

причем раньше необходимая симметризация по индексам λ', μ', ν' правой части этого равенства в явном виде не проводилась. Этот тензор обладает, в частности, свойствами

$$p^\lambda\Pi_{\lambda\mu\nu,\,\lambda'\mu'\nu'} = \frac{p^2+m^2}{m^2}\left[p_{\lambda'}\bar{g}_{\mu\mu'}\bar{g}_{\nu\nu'} -\right.$$
$$\left. -\frac{1}{5}(p_\mu\bar{g}_{\nu\nu'}\bar{g}_{\lambda'\mu'} + p_{\lambda'}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}_{\mu'\nu'} + p_\nu\bar{g}_{\mu\mu'}\bar{g}_{\nu'\lambda'})\right] \qquad (3.53)$$

и

$$g^{\mu\nu}\Pi_{\lambda\mu\nu,\,\lambda'\mu'\nu'} = \frac{p^2+m^2}{m^2}\left[\frac{p_{\mu'}p_{\nu'}}{m^2}\bar{g}_{\lambda\lambda'} -\right.$$
$$\left. -\frac{1}{5}\left(\frac{p_\lambda p_{\nu'}}{m^2}\bar{g}_{\lambda'\mu'} + \bar{g}_{\lambda\lambda'}\bar{g}_{\mu'\nu'} + \frac{p_\lambda p_{\mu'}}{m^2}\bar{g}_{\nu'\lambda'}\right)\right]. \qquad (3.54)$$

Для поля, определяемого равенством

$$\delta W(S) = \int \frac{dp}{(2\pi)^4}\delta S^{\lambda\mu\nu}(-p)\,\varphi_{\lambda\mu\nu}(p), \qquad (3.55)$$

получаем

$$\varphi_{\lambda\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}\,\Pi_{\lambda\mu\nu,\,\lambda'\mu'\nu'}(p)\,S^{\lambda'\mu'\nu'}(p). \qquad (3.56)$$

Присутствие в этом выражении симметричной функции источника приводит к необходимости симметризации по индексам λ', μ', ν'. Чтобы не проводить эту процедуру в явном виде и для индексов λ, μ, ν, мы введем вспомогательный симметричный тензор $s^{\lambda\mu\nu}$ и напишем для поля

$$s^{\lambda\mu\nu}(p^2+m^2)\,\varphi_{\lambda\mu\nu} = s^{\lambda\mu\nu}\left[\bar g_{\lambda\lambda'}\bar g_{\mu\mu'}\bar g_{\nu\nu'} - \frac{3}{5}\,\bar g_{\lambda\mu}\bar g_{\nu\nu'}\bar g_{\lambda'\mu'}\right]S^{\lambda'\mu'\nu'}. \qquad (3.57)$$

Аналогично этому имеем

$$s^{\lambda\mu\nu}p_\lambda p^{\lambda'}\varphi_{\lambda'\mu\nu} = s^{\lambda\mu\nu}\left[\frac{p_\lambda p^{\lambda'}}{m^2}\,\bar g_{\mu\mu'}\bar g_{\nu\nu'} - \frac{2}{5}\,\frac{p_\lambda p_\mu}{m^2}\,\bar g_{\nu\nu'}\bar g_{\lambda'\mu'} - \frac{1}{5}\,\frac{p_\lambda p_{\lambda'}}{m^2}\,\bar g_{\mu\nu}g_{\mu'\nu'}\right]S^{\lambda'\mu'\nu'} \qquad (3.58)$$

и

$$s^{\lambda\mu\nu}p_\mu p_\nu\varphi_\lambda = s^{\lambda\mu\nu}\left[\frac{p_\mu p_{\mu'}}{m^2}\,\frac{p_\nu p_{\nu'}}{m^2}\,\bar g_{\lambda\lambda'} - \frac{2}{5}\,\frac{p_\lambda p_\mu}{m^2}\,\frac{p_\nu p_{\nu'}}{m^2}\,\bar g_{\lambda'\mu'} - \frac{1}{5}\,\frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\,\bar g_{\lambda\lambda'}\bar g_{\mu'\nu'}\right]S^{\lambda'\mu'\nu'}. \qquad (3.59)$$

По аналогии с левой частью уравнения (3.46) (при $\varphi = 0$) образуем комбинацию

$$\begin{aligned} s^{\lambda\mu\nu}&\left[(p^2+m^2)\,\varphi_{\lambda\mu\nu} - 3p_\lambda p^{\lambda'}\varphi_{\lambda'\mu\nu} + 3p_\mu p_\nu\varphi_\lambda\right] = \\ &= s^{\lambda\mu\nu}\left[g_{\lambda\lambda'}g_{\mu\mu'}g_{\nu\nu'} - \frac{3}{5}\,g_{\mu\nu}g_{\lambda\lambda'}g_{\mu'\nu'} - \frac{3}{5}\,g_{\mu\nu}g_{\lambda\lambda'}\,\frac{p_{\mu'}p_{\nu'}}{m^2} - \right. \\ &\left. - \frac{3}{5}\,\frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\,\frac{p_\lambda p_{\lambda'}}{m^2}\,g_{\mu'\nu'} + \frac{2}{5}\,\frac{p_\lambda p_\mu p_\nu}{m^3}\,\frac{p_{\lambda'}p_{\mu'}p_{\nu'}}{m^3}\right]S^{\lambda'\mu'\nu'}. \end{aligned} \qquad (3.60)$$

Кроме того, что здесь появляются многочисленные производные, действующие на источник, коэффициент при S_λ не совпадает по своему значению с соответствующим коэффициентом в уравнении (3.46). Это можно исправить, рассматривая также величину

$$\begin{aligned} s^{\lambda\mu\nu}m^2 g_{\mu\nu}\varphi_\lambda = s^{\lambda\mu\nu}&\left[-\frac{1}{5}\,g_{\mu\nu}g_{\lambda\lambda'}g_{\mu'\nu'} + \frac{4}{5}\,g_{\mu\nu}g_{\lambda\lambda'}\,\frac{p_{\mu'}p_{\nu'}}{m^2} - \right. \\ &\left. - \frac{3}{5}\,g_{\mu\nu}\,\frac{p_\lambda p^{\lambda'}}{m^2}\,g_{\mu'\nu'} + \frac{2}{5}\,g_{\mu\nu}\,\frac{p_\lambda p_{\lambda'}}{m^2}\,\frac{p_{\mu'}p_{\nu'}}{m^2}\right]S^{\lambda'\mu'\nu'}, \end{aligned} \qquad (3.61)$$

поскольку тогда

$$s^{\lambda\mu\nu}\left[(p^2+m^2)\varphi_{\lambda\mu\nu}-3p_\lambda p^{\lambda'}\varphi_{\lambda'\mu\nu}+3p_\mu p_\nu\varphi_\lambda+\frac{3}{4}m^2g_{\mu\nu}\varphi_\lambda\right]=$$
$$=s^{\lambda\mu\nu}\left[g_{\lambda\lambda'}g_{\mu\mu'}g_{\nu\nu'}-\frac{3}{4}g_{\mu\nu}g_{\lambda\lambda'}g_{\mu'\nu'}\right]S^{\lambda'\mu'\nu'}+$$
$$+s^{\lambda\mu\nu}\left(\frac{3}{4}g_{\mu\nu}p_\lambda+\frac{p_\lambda p_\mu p_\nu}{m^2}\right)\Sigma, \quad (3.62)$$

где

$$m^2\Sigma(p)=\frac{2}{5}\left(\frac{p_{\lambda'}p_{\mu'}p_{\nu'}}{m^2}-\frac{3}{2}p_{\lambda'}g_{\mu'\nu'}\right)S^{\lambda'\mu'\nu'}(p). \quad (3.63)$$

Кроме того, из уравнения для φ_λ получаем

$$(p^2+2m^2)\,\Sigma(p)-m^2p^\lambda\varphi_\lambda(p)=-p^\lambda S_\lambda(p). \quad (3.64)$$

Если (3.62) рассматривать как дифференциальное уравнение, то оно будет содержать третьи производные вспомогательного скалярного поля Σ. Взяв в качестве соответствующего вспомогательного поля градиент скалярного поля, мы понизим порядок этих производных до второго, и тогда дифференциальное уравнение второго порядка, которому удовлетворяет векторное поле, будет содержать вторые производные функции источника.

Это и служит основанием для того, чтобы добавить к функции W определенный член, описывающий специфическую контактную связь:

$$W_{\text{конт}}(S)=\frac{1}{2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{4m^2}\Sigma(-p)\,p_\lambda S^\lambda(p)-\right.$$
$$-\frac{1}{4m^2}p_\lambda S^\lambda(-p)\,\Sigma(p)-$$
$$\left.-\frac{1}{40m^6}(5m^2-p^2)\,p_\varkappa S^\varkappa(-p)\,p_\lambda S^\lambda(p)\right]. \quad (3.65)$$

Он приводит к появлению у поля дополнительного слагаемого

$$s^{\lambda\mu\nu}\varphi_{\lambda\mu\nu}\big|_{\text{конт}}=s^{\lambda\mu\nu}\left[\frac{1}{10m^6}\left(-p_\lambda p_\mu p_\nu+\frac{p^2+m^2}{4}g_{\mu\nu}p_\lambda\right)p_\varkappa S^\varkappa-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4m^2}g_{\mu\nu}p_\lambda\Sigma\right], \quad (3.66)$$

вклад которого в полевое уравнение таков:

$$s^{\lambda\mu\nu}\left[(p^2+m^2)\,\varphi_{\lambda\mu\nu}-3p_\lambda p^{\lambda'}\varphi_{\lambda'\mu\nu}+3p_\mu p_\nu\varphi_\lambda+\frac{3}{4}m^2g_{\mu\nu}\varphi_\lambda\right]_{\text{конт}}=$$
$$=s^{\lambda\mu\nu}\left[-\left(\frac{3}{4}g_{\mu\nu}p_\lambda+\frac{1}{m^2}p_\lambda p_\mu p_\nu\right)\Sigma-g_{\mu\nu}p_\lambda\frac{1}{2}\,im\Phi\right], \quad (3.67)$$

где

$$im\Phi=-\frac{1}{4}\Sigma-\frac{1}{40m^4}(5m^2-p^2)\,p_\lambda S^\lambda=$$
$$=\frac{1}{10m^4}\left[\frac{1}{4}(p^2+m^2)\,p_\lambda S^\lambda-p_\lambda p_\mu p_\nu S^{\lambda\mu\nu}\right]. \quad (3.68)$$

Добавив эти члены к правой части уравнения (3.62), мы исключим третьи производные Σ, заменив их первыми производными Φ. Кроме того, возникает и дополнительный вклад в (3.64), который можно добавить к левой части этого уравнения; он имеет вид

$$m^2 p_\lambda \varphi^\lambda |_{\text{конт}} = -\frac{1}{2} p^2 \Sigma + \frac{1}{20m^4} p^2 (m^2 - p^2) p_\lambda S^\lambda. \qquad (3.69)$$

Если заменить в этом уравнении Σ на Φ, то все члены с источниками исчезнут. Таким образом, мы выполнили то, что намечали, и получили пару дифференциальных уравнений:

$$(-\partial^2 + m^2)\varphi_{\lambda\mu\nu} + \partial_\lambda \partial^{\lambda'} \varphi_{\lambda'\mu\nu} + \ldots - \partial_\mu \partial_\nu \varphi_\lambda - \ldots +$$
$$+ \frac{1}{4} m^2 g_{\mu\nu} \varphi_\lambda + \ldots + \frac{1}{6} m (g_{\mu\nu} \partial_\lambda + \ldots) \Phi = S_{\lambda\mu\nu} - \frac{1}{4}(g_{\mu\nu} S_\lambda + \ldots),$$
$$(-\partial^2 + 4m^2)\Phi(x) = \frac{1}{2} m \partial_\lambda \varphi^\lambda (x). \qquad (3.70)$$

Заметим, что в пределе при $m \to 0$ скалярное поле в действительности исчезает и мы вновь приходим к уравнению (3.46). Если систему уравнений (3.70) дополнить граничными условиями, требующими, чтобы существовала только расходящаяся во времени волна, то ее единственным решением будет поле $\varphi_{\lambda\mu\nu}$, определяемое выражением (3.56).

Спин $^3/_2$. Согласно формуле (8.10) из гл. 2, такая система описывается функцией

$$W(\eta) = \frac{1}{2} \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \eta^\mu(-p) \gamma^0 \Big[(m - \gamma p) \bar{g}_{\mu\nu}(p) +$$
$$+ \frac{1}{3} \left(\gamma_\mu + \frac{1}{m} p_\mu\right)(m + \gamma p)\left(\gamma_\nu + \frac{1}{m} p_\nu\right)\Big] \frac{1}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} \eta^\nu(p).$$
$$(3.71)$$

Следовательно, поле, определяющееся равенством

$$\delta W(\eta) = \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \delta\eta^\mu(-p) \gamma^0 \psi_\mu(p), \qquad (3.72)$$

будет иметь вид

$$\psi_\mu(p) = \frac{1}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} \Big[(m - \gamma p) \bar{g}_{\mu\nu}(p) +$$
$$+ \frac{1}{3} \left(\gamma_\mu + \frac{1}{m} p_\mu\right)(m + \gamma p)\left(\gamma_\nu + \frac{1}{m} p_\nu\right)\Big] \eta^\nu(p). \qquad (3.73)$$

Из него можно образовать два поля:

$$p^\mu \psi_\mu = \frac{1}{m^2} \left[(m - \gamma p) p_\nu + \frac{1}{3} \gamma p (m\gamma_\nu + p_\nu) \right] \eta^\nu \qquad (3.74)$$

и

$$\gamma^\mu\psi_\mu = \frac{1}{m^2}\left[p_\nu - \frac{1}{3}(m\gamma_\nu + p_\nu)\right]\eta^\nu, \tag{3.75}$$

которые дают следующие линейные комбинации:

$$p^\mu\psi_\mu + \gamma p\gamma^\mu\psi_\mu = \frac{1}{m}\; p_\nu\eta^\nu \tag{3.76}$$

и

$$-p^\mu\psi_\mu + (m-\gamma p)\,\gamma^\mu\psi_\mu = -\frac{1}{3m}(m\gamma_\nu + p_\nu)\,\eta^\nu. \tag{3.77}$$

Используя любое из тождеств

$$\begin{aligned}(m+\gamma p)(m\gamma_\mu + p_\mu) &= (m\gamma_\mu - p_\mu)(m-\gamma p),\\ (m\gamma_\mu + p_\mu)(m+\gamma p) &= (m-\gamma p)(m\gamma_\mu - p_\mu),\end{aligned} \tag{3.78}$$

мы придем к уравнению

$$\begin{aligned}(\gamma p + m)\,\psi_\mu = \eta_\mu + \frac{1}{3}\;\gamma_\mu\left(\gamma_\nu + \frac{1}{m}p_\nu\right)\eta^\nu +\\ + \frac{1}{m^2}p_\mu\left[p_\nu - \frac{1}{3}(m\gamma_\nu + p_\nu)\right]\eta^\nu,\end{aligned} \tag{3.79}$$

из которого сразу же получим

$$(\gamma p + m)\,\psi_\mu - p_\mu\gamma^\nu\psi_\nu - \gamma_\mu p^\nu\psi_\nu + \gamma_\mu(m-\gamma p)\,\gamma^\nu\psi_\nu = \eta_\mu. \tag{3.80}$$

Так же как полевое уравнение для частиц со спином $^1/_2$, это—дифференциальное уравнение первого порядка (точнее, его эквивалент, записанный в импульсном пространстве) с источником в правой части. Решением этого уравнения с граничным условием, требующим, чтобы существовала только расходящаяся во времени волна, будет поле, даваемое формулой (3.73). Переходя в равенстве (3.76) к пределу при $m \to 0$, мы увидим, что необходимое для безмассовых частиц требование к источнику

$$p_\mu\eta^\mu(p) = 0 \tag{3.81}$$

является алгебраическим следствием полевого уравнения, соответствующего случаю $m = 0$. Уравнение (3.80) можно написать в очень компактной форме. Действительно, учитывая коммутативность матрицы γ_μ с матрицей $m - \gamma p$ и соотношения

$$\psi_\mu + \gamma_\mu\gamma^\nu\psi_\nu = -i\sigma_{\mu\nu}\psi^\nu, \qquad p_\mu\gamma_\nu - p_\nu\gamma_\mu = -\frac{i}{2}[\sigma_{\mu\nu}, \gamma_p], \tag{3.82}$$

мы получаем

$$-\frac{i}{2}\{\sigma_{\mu\nu}, \gamma p + m\}\,\psi^\nu = \eta_\mu. \tag{3.83}$$

Имея перед собой примеры спинов 2, 3 и $^3/_2$, нетрудно убедиться, что возможно такое простое алгебраическое переопределение источников, при котором общая структура полевых уравнений сохраняется, но в функцию W вводятся новые или модифицируются уже имеющиеся контактные члены. Так, например, рассмотрим преобразование

$$T_{\mu\nu}(x) = T'_{\mu\nu}(x) - a g_{\mu\nu} T'(x), \tag{3.84}$$

которое можно обратить, написав

$$T'_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(x) + \frac{a}{1-4a} g_{\mu\nu} T(x). \tag{3.85}$$

При подстановке этого нового определения в выражение для $W(T)$, скажем (3.24), дополнительные слагаемые с $g_{\mu\nu}$ дадут только вклады контактного вида. Мы получим

$$W(T) = W(T') - \frac{a}{3m^4}\int \frac{dp}{(2\pi)^4}\left[T'(-p)\,p^\mu p^\nu T'_{\mu\nu}(p) + p^\mu p^\nu T'_{\mu\nu}(-p)\,T'(p)\right] + \frac{1}{3m^2}\int \frac{dp}{(2\pi)^4} T'(-p) \times \left[\frac{p^2}{m^2}a^2 - a(2a-1)\right] T'(p), \tag{3.86}$$

где $W(T')$ — функция того же вида, что и $W(T)$. Отсюда следует, что поле, определяемое равенствами

$$\delta W(T) = \int \frac{dp}{(2\pi)^4}\,\delta T^{\mu\nu}(-p)\,\varphi_{\mu\nu}(p) = \int \frac{dp}{(2\pi)^4}\,\delta T'^{\mu\nu}(-p)\,\varphi'_{\mu\nu}(p), \tag{3.87}$$

будет преобразовываться по закону

$$\varphi'_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} - a g_{\mu\nu}\varphi \tag{3.88}$$

или

$$\varphi_{\mu\nu} = \varphi'_{\mu\nu} + \frac{a}{1-4a} g_{\mu\nu}\varphi'. \tag{3.89}$$

Так как поле и источник преобразуются по линейному закону, причем это преобразование является локальным в пространстве-времени, дифференциальное уравнение сохранит свою общую форму, но коэффициенты его станут другими. Так, например, в случае $a = 1/2$, когда

$$\varphi'_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\varphi, \qquad \varphi_{\mu\nu} = \varphi'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\varphi \tag{3.90}$$

и аналогичные соотношения выполняются для источников, дифференциальное уравнение принимает вид

$$(m^2 - \partial^2)\varphi'_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial^\lambda\varphi'_{\lambda\nu} + \partial_\nu\partial^\lambda\varphi'_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(2m^2 - \partial^2)\varphi' = T'_{\mu\nu}. \tag{3.91}$$

В случае безмассовых частиц из этого дифференциального уравнения будет следовать равенство нулю дивергенции, но уже не самого источника $T'_{\mu\nu}$, а комбинации

$$T'_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}T'=T_{\mu\nu}. \tag{3.92}$$

В отношении спина 3 мы ограничимся замечанием, что источник и поле переопределяются следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{\lambda\mu\nu} &= S'_{\lambda\mu\nu}-a\,(g_{\mu\nu}S'_{\lambda}+g_{\nu\lambda}S'_{\mu}+g_{\lambda\mu}S'_{\nu}),\\ \varphi'_{\lambda\mu\nu} &= \varphi_{\lambda\mu\nu}-a\,(g_{\mu\nu}\varphi_{\lambda}+g_{\nu\lambda}\varphi_{\mu}+g_{\lambda\mu}\varphi_{\nu}). \end{aligned} \tag{3.93}$$

При такой замене общая структура полевых уравнений сохраняется, а контактные члены изменяются, но полностью устранить их не удается. Как мы видим, дифференциальные уравнения второго порядка, не содержащие производных источника, получить в отсутствие контактных членов невозможно.

Возвращаясь к спину $^3/_2$, заметим, что линейное преобразование источника

$$\eta_{\mu}(p)=\eta'_{\mu}(p)+a\gamma_{\mu}\gamma^{\nu}\eta'_{\nu}(p) \tag{3.94}$$

приводит к следующим контактным членам:

$$\begin{aligned} W(\eta) = W(\eta') &+ \frac{a}{3m^2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\,[\eta'^{\mu}(-p)\,\gamma^0\gamma_{\mu}p_{\nu}\eta'^{\nu}(p)+\\ &+p_{\mu}\eta'^{\mu}(-p)\,\gamma^0\gamma_{\nu}\eta'^{\nu}(p)]+\frac{1}{3m^2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\,\eta'^{\mu}(-p)\,\gamma^0\gamma_{\mu}\times\\ &\times[\gamma p a^2+ma\,(2a-1)]\,\gamma_{\nu}\eta'^{\nu}(p). \end{aligned} \tag{3.95}$$

Преобразование для поля, вытекающее из равенств

$$\delta W(\eta)=\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\,\delta\eta^{\mu}(-p)\,\psi_{\mu}(p)=\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\,\delta\eta'^{\mu}(-p)\,\psi'_{\mu}(p), \tag{3.96}$$

можно написать в виде

$$\psi'_{\mu}=\psi_{\mu}+a\gamma_{\mu}\gamma^{\nu}\psi_{\nu} \tag{3.97}$$

или

$$\psi_{\mu}=\psi'_{\mu}+\frac{1}{2}\,(1-\alpha)\,\gamma_{\mu}\gamma^{\nu}\psi'_{\nu}, \tag{3.98}$$

где

$$\alpha=\frac{1-2a}{1-4a}. \tag{3.99}$$

В результате такого преобразования полевое уравнение (3.80) переходит в уравнение

$$(\gamma p+m)\,\psi'_{\mu}-\alpha\,(p_{\mu}\gamma^{\nu}\psi'_{\nu}+\gamma_{\mu}p^{\nu}\psi'_{\nu})+\gamma_{\mu}\,(\alpha' m-\alpha''\gamma p)\,\gamma^{\nu}\psi'_{\nu}=\eta'_{\mu}, \tag{3.100}$$

где

$$\alpha'=3\alpha\,(\alpha-1)+1,\qquad \alpha''=\frac{1}{2}\,(3\alpha^2-2\alpha+1). \tag{3.101}$$

Заметим, что возможны только два случая, когда

$$\alpha = \alpha' = \alpha'', \tag{3.102}$$

а именно

$$\alpha = 1, \qquad a = 0; \qquad \alpha = \frac{1}{3}, \qquad a = 1. \tag{3.103}$$

В первом из них мы приходим к первоначальному уравнению поля, а во втором — к уравнению

$$(\gamma p + m)\,\psi'_\mu - \frac{1}{3}\,(p_\mu \gamma^\nu \psi'_\nu + \gamma_\mu p^\nu \psi'_\nu) + \frac{1}{3}\,\gamma_\mu (m - \gamma p)\,\gamma^\nu \psi'_\nu = \eta'_\mu. \tag{3.104}$$

При другом простом выборе параметров

$$\alpha = 0, \qquad a = \frac{1}{2} \tag{3.105}$$

мы получим

$$(\gamma p + m)\,\psi'_\mu + \frac{1}{2}\,\gamma_\mu\,(2m - \gamma p)\,\gamma^\nu \psi'_\nu = \eta'_\mu \tag{3.106}$$

При $m = 0$ из полевых уравнений следует равенство нулю дивергенции величины, получаемой путем преобразования исходной функции источника.

Спин $^5/_2$. Здесь тоже самый простой способ выяснить структуру полевого уравнения — начать со случая безмассовых частиц. Общая формула (8.52) из гл. 2 в рассматриваемом частном случае дает

$$W(\eta) = \frac{1}{2} \int \frac{dp}{(2\pi)^4}\, \frac{1}{p^2 - i\varepsilon} \Big[\eta^{\mu\nu}(-p)\,\gamma^0 (-\gamma p)\,\eta_{\mu\nu}(p) - \\ - \frac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}(-p)\,\gamma^0 \gamma_\mu (-\gamma p)\,\gamma^\lambda \eta_{\lambda\nu}(p) - \frac{1}{4}\,\eta(-p)\,\gamma^0(-\gamma p)\,\eta(p) \Big], \tag{3.107}$$

где

$$\eta(p) = g_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}(p) \tag{3.108}$$

и

$$p_\mu \eta^{\mu\nu}(p) = 0. \tag{3.109}$$

В силу требования (3.109), предъявляемого к источнику, поле неоднозначно определяется равенством

$$\delta W(\eta) = \int \frac{dp}{(2\pi)^4}\, \delta\eta^{\mu\nu}(-p)\,\psi_{\mu\nu}(p). \tag{3.110}$$

Оно имеет следующий общий вид:

$$\psi_{\mu\nu}=\frac{1}{p^2-i\varepsilon}\Big[-\gamma p\eta_{\mu\nu}-\frac{1}{4}\gamma_\mu(-\gamma p)\gamma^\lambda\eta_{\lambda\nu}-\frac{1}{4}\gamma_\nu(-\gamma p)\gamma^\lambda\eta_{\mu\lambda}-$$
$$-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}(-\gamma p)\eta(p)\Big]+p_\mu\psi_\nu+p_\nu\psi_\mu, \tag{3.111}$$

где спин-вектор ψ_μ следует определять, исходя из требования к источнику. Мы не будем подробно останавливаться на выводе полевого уравнения, ограничившись лишь замечанием, что здесь, как и в случае спина 3, появляются высшие производные, которые, однако, можно устранить путем допустимого переопределения поля

$$\psi_{\mu\nu}+2p_\mu p_\nu\frac{\gamma p}{p^2}\gamma^\lambda\psi_\lambda\to\psi_{\mu\nu}. \tag{3.112}$$

Окончательно полевое уравнение принимает следующий вид:

$$\gamma p\psi_{\mu\nu}-(p_\mu\gamma^{\mu'}\psi_{\mu'\nu}+\gamma_\mu p^{\mu'}\psi_{\mu'\nu}+p_\nu\gamma^{\nu'}\psi_{\mu\nu'}+\gamma_\nu p^{\nu'}\psi_{\mu\nu'})-$$
$$-(\gamma_\mu\gamma p\gamma^{\mu'}\psi_{\mu'\nu}+\gamma_\nu\gamma p\gamma^{\nu'}\psi_{\mu\nu'})+g_{\mu\nu}\gamma^{\mu'}p^{\nu'}\psi_{\mu'\nu'}+$$
$$+\frac{1}{2}(\gamma_\mu p_\nu+\gamma_\nu p_\mu-g_{\mu\nu}\gamma p)\psi=\eta_{\mu\nu}. \tag{3.113}$$

Алгебраическое следствие этого уравнения

$$p^\mu\eta_{\mu\nu}+\frac{1}{4}\gamma_\nu\gamma^{\mu'}p^{\nu'}\eta_{\mu'\nu'}=0 \tag{3.114}$$

не противоречит требованию, предъявляемому к источнику, но последнее из него не следует.

Руководствуясь тем, что было сказано в § 8 гл. 2, мы придем к следующей функции, описывающей частицы с конечной массой и спином $^5/_2$:

$$W(\eta)=\frac{1}{2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\eta^{\mu\nu}(-p)\gamma^0\frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}\times$$
$$\times\Big[(m-\gamma p)\Big(\bar g_{\mu\mu'}\bar g_{\nu\nu'}-\frac{1}{5}\bar g_{\mu\nu}\bar g_{\mu'\nu'}\Big)+$$
$$+\frac{2}{5}\Big(\gamma_\mu+\frac{1}{m}p_\mu\Big)(m+\gamma p)\Big(\gamma_{\mu'}+\frac{1}{m}p_{\mu'}\Big)\bar g_{\nu\nu'}\Big]\eta^{\mu'\nu'}(p). \tag{3.115}$$

Укажем здесь также те дополнительные контактные члены, которые необходимы, чтобы привести полевые уравнения к дифференциальным уравнениям первого порядка, не содержащим производных источника. Они получаются из функции

$$W_{\text{конт}}(\eta)=\frac{1}{10m^4}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\eta^{\mu\nu}(-p)\gamma^0p_\mu p_\nu\Big[\gamma_{\mu'}p_{\nu'}\eta^{\mu'\nu'}(p)+\frac{m}{4}\eta(p)\Big]+$$
$$+\frac{1}{20m^4}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\eta^{\mu\nu}(-p)\gamma^0\gamma_\mu p_\nu\frac{1}{4}(\gamma p-5m)\gamma_{\mu'}p_{\nu'}\eta^{\mu'\nu'}(p)+$$

$$+\frac{1}{10m^3}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\eta(-p)\frac{1}{16}(\gamma p-9m)\gamma_\mu p_\nu\eta^{\mu\nu}(p)+$$
$$+\frac{1}{20m^2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\eta(-p)\gamma^0\frac{1}{64}(\gamma p-13m)\eta(p). \qquad (3.116)$$

Полевые уравнения имеют вид

$$(\gamma p+m)\psi_{\mu\nu}-(p_\mu\gamma^{\mu'}\psi_{\mu'\nu}+\gamma_\mu p^{\mu'}\psi_{\mu'\nu}+p_\nu\gamma^{\nu'}\psi_{\mu\nu'}+\gamma_\nu p^{\nu'}\psi_{\mu\nu'})+$$
$$+\gamma_\mu(m-\gamma p)\gamma^{\mu'}\psi_{\mu'\nu}+\gamma_\nu(m-\gamma p)\gamma^{\nu'}\psi_{\mu\nu'}+$$
$$+g_{\mu\nu}\gamma^{\mu'}p^{\nu'}\psi_{\mu'\nu'}+\frac{1}{2}[\gamma_\mu p_\nu+\gamma_\nu p_\mu-g_{\mu\nu}(\gamma p+m)]\psi-$$
$$-g_{\mu\nu}m\Psi=\eta_{\mu\nu}, \qquad (3.117)$$
$$(\gamma p-3m)\Psi+\frac{5}{12}m\psi=0$$

и при $m\to 0$ сводятся к уравнениям (3.113). Читатель может сам убедиться в справедливости полевых уравнений (3.117), решив их совместно с граничным условием, требующим, чтобы существовала только расходящаяся во времени волна, и получив при этом поле $\psi_{\mu\nu}$, соответствующее функциям (3.115) и (3.116), а также следующее выражение для вспомогательного поля:

$$\Psi(p)=\frac{1}{8m^3}\Big[p_\mu p_\nu\eta^{\mu\nu}(p)+\frac{1}{4}(\gamma p-m)\gamma_\mu p_\nu\eta^{\mu\nu}(p)+$$
$$+\frac{m}{16}(\gamma p-5m)\eta(p)\Big]. \qquad (3.118)$$

§ 4. МУЛЬТИСПИНОРНЫЕ ПОЛЯ

Мультиспинорное описание дает нам единый подход ко всем значениям спина, при котором образцом полевых уравнений служит дифференциальное уравнение первого порядка, отвечающее спину $^1/_2$. Но при этом во всех случаях, кроме случая спина $^1/_2$, необходимо вводить контактные члены. Рассмотрим для примера описание единичного спина посредством симметричного спинора второго ранга, входящего в функцию

$$W(\eta)=\frac{1}{2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\eta(-p)\gamma_1^0\gamma_2^0\frac{1}{2m}\left[\frac{(m-\gamma_1^\mu p_\mu)(m-\gamma_2^\mu p_\mu)}{p^2+m^2-i\varepsilon}+1\right]\eta(p). \qquad (4.1)$$

Здесь уже введен соответствующий контактный член, причем нормировка источника отличается от той, которая использовалась в формуле (9.8) из гл. 2; это различие в общем случае описывается соотношением

$$\eta(p)=(2m)^{1/2(n-1)}S(p). \qquad (4.2)$$

Поле определяется равенством

$$\delta W(\eta) = \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \delta\eta(-p)\gamma_1^0\gamma_2^0\psi(p), \tag{4.3}$$

откуда

$$\psi(p) = \frac{1}{2m}\left[\frac{(m-\gamma_1 p)(m-\gamma_2 p)}{p^2+m^2-i\varepsilon} + 1\right]\eta(p). \tag{4.4}$$

Замечая далее, что

$$\begin{aligned}(\gamma_1 p + m)\psi(p) &= \frac{1}{2m}[m - \gamma_2 p + m + \gamma_1 p]\eta(p),\\ (\gamma_2 p + m)\psi(p) &= \frac{1}{2m}[m - \gamma_1 p + m + \gamma_2 p]\eta(p),\end{aligned} \tag{4.5}$$

и складывая эти равенства, получаем

$$\left[\frac{1}{2}\left(\gamma_1^\mu + \gamma_2^\mu\right)p_\mu + m\right]\psi(p) = \eta(p). \tag{4.6}$$

Будучи записанным в координатном пространстве, это соотношение представляет собой полевое дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\gamma_1^\mu + \gamma_2^\mu\right)\frac{1}{i}\partial_\mu + m\right]\psi(x) = \eta(x). \tag{4.7}$$

Другое следствие равенств (4.5), а именно

$$(\gamma_1^\mu - \gamma_2^\mu)p_\mu\psi(p) = \frac{1}{m}(\gamma_1^\mu - \gamma_2^\mu)p_\mu\eta(p), \tag{4.8}$$

также содержится в уравнении (4.6), в чем нетрудно убедиться, умножив его на $\gamma_1 p - \gamma_2 p$ и воспользовавшись тем, что

$$(\gamma_1 p)^2 = (\gamma_2 p)^2. \tag{4.9}$$

Это последнее простое алгебраическое свойство дает элементарный и всегда пригодный способ проверки наших выкладок. Для собственных значений это соотношение принимает вид $\gamma_1 p = \pm\gamma_2 p$, что представляет собой инвариантную форму записи двух возможных случаев $\gamma_1^0 = \pm\gamma_2^0$ в системе покоя, причем, выбирая знак плюс, мы выделяем для описания частицы соответствующее подпространство. Соответственно этому, если положить $\gamma_2 p = \gamma_1 p$ в уравнении (4.6), то оно примет вид уравнения Дирака для спина $^1/_2$, тогда как, выбрав $\gamma_2 p = -\gamma_1 p$, мы фактически исключим производные по координатам и получим поле, обращающееся в нуль вне области, занятой источниками. Теперь структура функции (4.1) становится более ясной, так как при $\gamma_2 p = \gamma_1 p$ мы придем к выражению

$$\frac{(m-\gamma_1 p)^2}{p^2+m^2-i\varepsilon} = \frac{m-\gamma_1 p}{\gamma_1 p + m - i\varepsilon} = \frac{2m}{\gamma_1 p + m - i\varepsilon} - 1, \tag{4.10}$$

оправдывающему появление контактного члена и изменение нормировки, необходимых для того, чтобы получить уравнение (4.6).

Эффективность подобного подхода становится еще более очевидной, если обратиться к мультиспинору ранга 3. Положив $\gamma_1 p = \gamma_2 p = \gamma_3 p$, мы получим конструкцию вида

$$\frac{(m-\gamma_1 p)^2}{p^2+m^2-i\varepsilon} = \frac{(m-\gamma_1 p)^2}{\gamma_1 p+m-i\varepsilon} = \frac{(2m)^2}{\gamma_1 p+m-i\varepsilon} - 3m+\gamma_1 p, \qquad (4.11)$$

которая говорит о том, что соответствующим отправным пунктом будет

$$W(\eta) = \frac{1}{2}\int \frac{dp}{(2\pi)^4}\eta(-p)\gamma_1^0\gamma_2^0\gamma_3^0\frac{1}{(2m)^2}\left[\frac{(m-\gamma_1 p)(m-\gamma_2 p)(m-\gamma_3 p)}{p^2+m^2-i\varepsilon}+\right.$$
$$\left.+3m-\frac{1}{3}(\gamma_1 p+\gamma_2 p+\gamma_3 p)\right]\eta(p). \qquad (4.12)$$

Эта функция приводит к полю

$$\psi(p) = \frac{1}{(2m)^2}\left[\frac{\prod (m-\gamma p)_\alpha}{p^2+m^2-i\varepsilon}+3m-\frac{1}{3}\sum \gamma_\alpha p\right]\eta(p), \qquad (4.13)$$

которое определяется равенством

$$\delta W(\eta) = \int \frac{dp}{(2\pi)^4}\delta\eta(-p)\prod(\gamma_\alpha^0)\psi(p). \qquad (4.14)$$

Для $\gamma_\alpha p$ возможны только два общих случая — либо все эти величины равны, либо одна противоположна по знаку двум другим. В первом случае мы будем иметь

$\gamma_1 p = \gamma_2 p = \gamma_3 p$:

$$\psi = \frac{1}{\gamma_1 p+m-i\varepsilon}\eta, \qquad \left[\frac{1}{3}\sum \gamma_\alpha p+m\right]\psi = \eta, \qquad (4.15)$$

а во втором получим, например,

$\gamma_2 p = -\gamma_3 p$:

$$\psi = \frac{1}{m^2}\left(m-\frac{1}{3}\gamma_1 p\right)\eta, \qquad \left[\frac{1}{3}\sum \gamma_\alpha p+m\right]\psi =$$
$$= \left(1+\frac{1}{(3m)^2}p^2\right)\eta. \qquad (4.16)$$

Как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, все эти уравнения можно объединить, написав

$$\left[\frac{1}{3}\sum \gamma_\alpha p+m\right]\psi = \left[1-\frac{1}{(3m)^2}\frac{1}{2}\sum_{\alpha<\beta}\left(\frac{1}{2}(\gamma_\alpha p-\gamma_\beta p)\right)^2\right]\eta. \quad (4.17)$$

Заметим, что формулу для поля (4.16) можно представить также в виде не ограниченного никаким дополнительным условием уравнения

$$\frac{1}{2}(\gamma_2 p-\gamma_3 p)\psi=\frac{1}{m^2}\left(m-\frac{1}{3}\gamma_1 p\right)\frac{1}{2}(\gamma_2 p-\gamma_3 p)\eta. \tag{4.18}$$

Если затем ввести поля типа

$$\psi_{[23]}=\frac{1}{(6m)^2}(\gamma_2 p-\gamma_3 p)\eta, \tag{4.19}$$

антисимметричные по соответствующим парам индексов, то мы придем к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{gathered}\left[\frac{1}{3}\sum\gamma_\alpha p+m\right]\psi+\sum_{\alpha<\beta}\frac{1}{2}(\gamma_\alpha p-\gamma_\beta p)\psi_{[\alpha\beta]}=\eta,\\ (\gamma_1 p-3m)\psi_{[23]}+\left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{2}(\gamma_2 p-\gamma_3 p)\psi=0,\end{gathered} \tag{4.20}$$

причем последнее из них эквивалентно трем уравнениям, получающимся одно из другого в результате циклической перестановки индексов.

Полезно также исключить три вспомогательных поля, представив полевое уравнение в форме

$$\left\{\frac{1}{3}\sum\gamma_\alpha p+m-\frac{1}{6}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}(\gamma_2 p-\gamma_3 p)\right)^2}{\gamma_1 p-3m}+\ldots\right]\right\}\psi=\eta, \tag{4.21}$$

где многоточием обозначены два аналогичных выражения, получающихся из выписанного при циклической перестановке. Чтобы убедиться в том, что одно это уравнение позволяет реконструировать исходное поле, достаточно рассмотреть два частных случая:

$$\begin{aligned}&\gamma_1 p=\gamma_2 p=\gamma_3 p: && (\gamma_1 p+m)\psi=\eta\\ &\gamma_2 p=-\gamma_3 p: && \left[\frac{1}{3}\gamma_1 p+m-\frac{1}{3}\frac{(\gamma_1 p)^2}{\gamma_1 p-3m}\right]\psi=\eta,\end{aligned} \tag{4.22}$$

которые действительно содержат результаты, приведенные в формулах (4.15) и (4.16). Уравнение (4.21) можно записать и по-другому, заметив, что

$$\left[m-\frac{1}{3}\sum\gamma_\alpha p\right]\frac{1}{2}(\gamma_2 p-\gamma_3 p)=\left(m-\frac{1}{3}\gamma_1 p\right)\frac{1}{2}(\gamma_2 p-\gamma_3 p). \tag{4.23}$$

В результате мы придем к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\begin{aligned}\left[(3m)^2-\left(\sum\gamma_\alpha p\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha<\beta}\left(\frac{1}{2}(\gamma_\alpha p-\gamma_\beta p)\right)^2\right]\psi&=\\ =3\left(3m-\sum\gamma_\alpha p\right)\eta,&\end{aligned} \tag{4.24}$$

или, иначе,

$$\left[p^2+m^2-\frac{9}{8}\left\{p^2+\left(\frac{1}{3}\sum\gamma_\alpha p\right)^2\right\}\right]\psi=\left(m-\frac{1}{3}\sum\gamma_\alpha p\right)\eta. \quad (4.25)$$

Последнее уже можно сравнивать с дифференциальным уравнением второго порядка для единичного спина:

$$\left[p^2+m^2-\left\{p^2+\left(\frac{1}{2}\sum\gamma_\alpha p\right)^2\right\}\right]\psi=\left(m-\frac{1}{2}\sum\gamma_\alpha p\right)\eta, \quad (4.26)$$

и для спина $^1/_2$

$$(p^2+m^2)\psi=(m-\gamma p)\eta. \quad (4.27)$$

Анализ мультиспинора четвертого ранга мы начнем с алгебраического тождества

$$\frac{(m-\gamma_1 p)^4}{p^2+m^2-i\varepsilon}=\frac{(2m)^3}{\gamma_1 p+m-i\varepsilon}-7m^2+4m\gamma_1 p-(\gamma_1 p)^2. \quad (4.28)$$

Но теперь при более общей интерпретации величины $(\gamma_1 p)^2$ возникает некоторая неоднозначность, так как не ясно, следует ли считать эту величину равной $-p^2$ или $^1/_6 \sum\limits_{\alpha<\beta}\gamma_\alpha p\gamma_\beta p$. На самом деле мы будем пользоваться вполне определенной линейной комбинацией этих величин, выбирая ее таким образом, чтобы в выражении для ψ степени импульсов были минимальными. Исходя из этих соображений, положим

$$W=\frac{1}{2}\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\eta(-p)\prod(\gamma_\alpha^0)\psi(p),$$

$$\psi(p)=\frac{1}{(2m)^3}\left[\frac{\prod(m-\gamma p)_\alpha}{p^2+m^2-i\varepsilon}+7m^2-m\sum\gamma_\alpha p+p^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\sum_{\alpha<\beta}\gamma_\alpha p\gamma_\beta p\right]\eta. \quad (4.29)$$

Для $\gamma_\alpha p$ возможны следующие соотношения:

$\gamma_1 p=\gamma_2 p=\gamma_3 p=\gamma_4 p$:

$$\psi=\frac{1}{\gamma_1 p+m-i\varepsilon}\eta, \qquad \left[\frac{1}{4}\sum\gamma_\alpha p+m\right]\psi=\eta, \quad (4.30)$$

$\gamma_1 p=\gamma_2 p=\gamma_3 p=-\gamma_4 p$:

$$\psi=\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{2m}\gamma_1 p\right)\eta, \qquad \left[\frac{1}{4}\sum\gamma_\alpha p+m\right]\psi=\left(1+\frac{1}{4m^2}p^2\right)\psi, \quad (4.31)$$

$\gamma_1 p=\gamma_2 p=-\gamma_3 p=-\gamma_4 p$:

$$\psi=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{3m^2}p^2\right)\eta, \qquad \left[\frac{1}{4}\sum\gamma_\alpha p+m\right]\psi=\left(1+\frac{1}{3m^2}p^2\right)\eta. \quad (4.32)$$

Выбрав соответствующие функции в виде (4.29), мы добились того, что выражение для поля в случае (4.31) стало более простым — в него не входит член с p^2, который мог бы, вообще говоря, и появиться. Все эти три полевых уравнения можно объединить, написав

$$\left[\frac{1}{4}\sum\gamma_\alpha p+m\right]\psi=\left[1-\frac{1}{12m^2}\sum_{\alpha<\beta}\left(\frac{1}{2}(\gamma_\alpha p-\gamma_\beta p)\right)^2\right]\eta. \qquad (4.33)$$

К единому описанию можно прийти и другим способом, взяв уравнение

$$(\gamma_1 p-\gamma_4 p)\psi=\frac{1}{m}\left[1-\frac{1}{4m}(\gamma_2 p+\gamma_3 p)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{12m^2}(\gamma_2 p-\gamma_3 p)^2\right](\gamma_1 p-\gamma_4 p)\eta \qquad (4.34)$$

и его очевидные обобщения на случаи любого иного расположения индексов. Используя определения антисимметричных функций типа

$$\psi_{[14]}=\frac{1}{24m^2}(\gamma_1 p-\gamma_4 p)\eta,$$
$$\psi_{[14][23]}=\frac{1}{72m^3}(\gamma_1 p-\gamma_4 p)(\gamma_2 p-\gamma_3 p)\eta, \qquad (4.35)$$

можно будет записать следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left[\frac{1}{4}\sum\gamma_\alpha p+m\right]\psi+\sum_{\alpha<\beta}\frac{1}{2}(\gamma_\alpha p-\gamma_\beta p)\psi_{[\alpha\beta]}=\eta,$$
$$\left[\frac{1}{2}(\gamma_2 p+\gamma_3 p)-2m\right]\psi_{[14]}+\left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{2}(\gamma_1 p-\gamma_4 p)\psi+$$
$$+\frac{1}{2}(\gamma_2 p-\gamma_3 p)\psi_{[14][23]}=0, \qquad (4.36)$$
$$3m\psi_{[14][23]}=(\gamma_2 p-\gamma_3 p)\psi_{[14]},$$

последние два из которых являются представителями целой совокупности аналогичных им уравнений.

Исключая вспомогательные поля, мы получим одно-единственное (многокомпонентное) полевое уравнение

$$\left\{\frac{1}{4}\sum\gamma_\alpha p+m+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}(\gamma_1 p-\gamma_4 p)\right)^2}{2m-\frac{1}{2}(\gamma_2 p+\gamma_3 p)-\frac{1}{6m}(\gamma_2 p-\gamma_3 p)^2}+\ldots\right]\right\}\psi=\eta, \qquad (4.37)$$

где многоточием обозначена сумма слагаемых типа приведенного здесь по всем парам индексов. Различные возможные варианты иллюстрируются следующими примерами:

$$\gamma_1 p = \ldots = \gamma_4 p\text{:} \qquad (\gamma_1 p + m)\psi = \eta,$$

$$\gamma_1 p = \gamma_2 p = \gamma_3 p = -\gamma_4 p\text{:}$$

$$\left(\frac{1}{2}\gamma_1 p + m + \frac{\frac{1}{2}(\gamma_1 p)^2}{m - \frac{1}{2}\gamma_1 p}\right)\psi = \eta,$$

$$\gamma_1 p = \gamma_2 p = -\gamma_3 p = -\gamma_4 p\text{:} \qquad \left(m - \frac{\frac{1}{3}p^2}{m + \frac{1}{3m}p^2}\right)\psi = \eta, \tag{4.38}$$

которые вновь приводят к выражениям для поля (4.30) — (4.32). В другой форме записи уравнение имеет вид

$$\left[p^2 + m^2 - \frac{4}{3}\left\{p^2 + \left(\frac{1}{4}\sum \gamma_\alpha p\right)^2\right\} + \frac{1}{m^2 + \frac{1}{3}p^2}\frac{1}{18} \times \right.$$
$$\left. \times \sum \left(\frac{1}{2}(\gamma_\alpha p - \gamma_\beta p)\right)^2 \left(\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha'} p - \gamma_{\beta'} p)\right)^2\right]\psi =$$
$$= \left[m - \frac{1}{4}\sum \gamma_\alpha p\right]\eta, \tag{4.39}$$

где последнее суммирование распространяется на все различные неповторяющиеся пары индексов: $\alpha < \beta$, $\alpha' < \beta'$, $\alpha \neq \alpha'$, $\beta \neq \beta'$. Это уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению четвертого порядка.

Обращаясь к мультиспинорам пятого ранга, отметим прежде всего, что

$$\frac{(m - \gamma_1 p)^5}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} = \frac{(2m)^4}{\gamma_1 p + m - i\varepsilon} - 15m^3 + 11m^2\gamma_1 p - 5m(\gamma_1 p)^2 + (\gamma_1 p)^3. \tag{4.40}$$

Возникающая здесь неоднозначность устраняется тем, что поле выбирается в виде

$$\psi = \frac{1}{(2m)^4}\left[\frac{\prod (m - \gamma p)_\alpha}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} + 15m^3 - \frac{11}{5}m^2 \sum \gamma_\alpha p + 5mp^2 + \right.$$
$$\left. + m\sum_{\alpha<\beta} \gamma_\alpha p \gamma_\beta p - \frac{1}{5}p^2 \sum \gamma_\alpha p - \frac{1}{5}\sum_{\alpha<\beta<\gamma} \gamma_\alpha p \gamma_\beta p \gamma_\gamma p\right]\eta. \tag{4.41}$$

При этом возможны следующие случаи:

$$\gamma_1 p = \ldots = \gamma_5 p: \qquad \psi = \frac{1}{\gamma_1 p + m - i\varepsilon}\,\eta, \qquad \left[\frac{1}{5}\sum \gamma_\alpha p + m\right]\psi = \eta; \tag{4.42}$$

$$\gamma_1 p = \ldots = \gamma_4 p = -\gamma_5 p:$$

$$\psi = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{3}{5m}\gamma_1 p\right)\eta, \qquad \left[\frac{1}{5}\sum \gamma_\alpha p + m\right]\psi = \left[1 + \left(\frac{3}{5m}\right)^2 p^2\right]\eta; \tag{4.43}$$

$$\gamma_1 p = \ldots = \gamma_3 p = -\gamma_4 p = -\gamma_5 p:$$

$$\begin{gathered} \psi = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{5m}\gamma_1 p\right)\left(1 + \frac{1}{2m^2}p^2\right)\eta, \\ \left[\frac{1}{5}\sum \gamma_\alpha p + m\right]\psi = \left[1 + \frac{1}{(5m)^2}p^2\right]\left(1 + \frac{1}{2m^2}p^2\right)\eta = \\ = \left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{5m}\right)^2 p^2 + \frac{1}{50m^4}(p^2)^2\right]\eta. \end{gathered} \tag{4.44}$$

В общем случае справедливо равенство

$$\begin{gathered} \left[\frac{1}{5}\sum \gamma_\alpha p + m\right]\psi = \left[1 - \left(\frac{3}{10m}\right)^2 \sum_{\alpha<\beta}\left(\frac{1}{2}(\gamma_\alpha p - \gamma_\beta p)\right)^2 + \right. \\ + \left(\frac{1}{10m^2}\right)^2 \frac{1}{3}\sum \left(\frac{1}{2}(\gamma_\alpha p - \gamma_\beta p)\right)^2 \times \\ \left. \times \left(\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha'} p - \gamma_{\beta'} p)\right)^2\right]\eta, \end{gathered} \tag{4.45}$$

где в сумму не следует включать члены с повторяющимися парами индексов, а также равенство

$$\begin{gathered} (\gamma_\alpha p - \gamma_\beta p)\,\psi = (\gamma_\alpha p - \gamma_\beta p)\left(1 - \frac{1}{5m}\sum{}' \gamma_{\alpha'} p\right) \times \\ \times \left[1 - \frac{1}{4m^2}\sum_{\alpha'<\beta'}\left(\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha'} p - \gamma_{\beta'} p)\right)^2\right]\eta, \end{gathered} \tag{4.46}$$

где суммирование, обозначенное символом $\sum{}'$, распространяется на все значения индексов, отличные от α и β.

Вспомогательные поля

$$\psi_{[\alpha\beta]} = \left(\frac{3}{10m}\right)^2\left[1 - \frac{1}{(3m)^2}\frac{1}{6}\sum_{\alpha'<\beta'}{}' \left(\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha'} p - \gamma_{\beta'} p)\right)^2\right] \times \frac{1}{2}(\gamma_\alpha p - \gamma_\beta p)\,\eta \tag{4.47}$$

и, например,

$$\psi_{[23][45]} = \frac{5}{(12m^2)^2}\left(m - \frac{1}{5}\gamma_1 p\right)\frac{1}{2}(\gamma_2 p - \gamma_3 p)\frac{1}{2}(\gamma_4 p - \gamma_5 p)\eta \tag{4.48}$$

приводят к полевым уравнениям

$$\begin{gathered}\left[\frac{1}{5}\sum \gamma_\alpha p + m\right]\psi + \sum_{\alpha<\beta}\frac{1}{2}(\gamma_\alpha p - \gamma_\beta p)\psi_{[\alpha\beta]} = \eta,\\ \left[\frac{1}{3}\sum{}' \gamma_{\alpha'} p + m\right]\psi_{[\alpha\beta]} + \left(\frac{3}{20}\right)\frac{1}{2}(\gamma_\alpha p - \gamma_\beta p)\psi + \\ + \sum_{\alpha'<\beta'}{}' \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha'} p - \gamma_{\beta'} p)\psi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']} = 0.\end{gathered} \tag{4.49}$$

Чтобы замкнуть систему, нам необходимо дифференциальное уравнение для функций $\psi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}$, связывающее их с $\psi_{[\alpha\beta]}$. Имеем

$$(\gamma_1 p + 5m)\psi_{[23][45]} = \left(\frac{5}{12m}\right)^2\left(1 + \frac{1}{25m^2}p^2\right)\times \\ \times\frac{1}{2}(\gamma_2 p - \gamma_3 p)\frac{1}{2}(\gamma_4 p - \gamma_5 p)\eta, \tag{4.50}$$

тогда как

$$\frac{1}{2}(\gamma_4 p - \gamma_5 p)\psi_{[23]} = \left(\frac{3}{10m}\right)^2\left(1 + \frac{1}{27m^2}p^2\right)\frac{1}{2}(\gamma_2 p - \gamma_3 p)\times \\ \times\frac{1}{2}(\gamma_4 p - \gamma_5 p)\eta, \tag{4.51}$$

и, поскольку $1/25 \neq 1/27$, прямой связи нет. Но возникает мысль ввести другой набор вспомогательных полей, например поля

$$\chi_{[23][45]} = \frac{1}{(12m^2)^2}\gamma_1 p\frac{1}{2}(\gamma_2 p - \gamma_3 p)\frac{1}{2}(\gamma_4 p - \gamma_5 p)\eta, \tag{4.52}$$

которые удовлетворяют уравнению

$$(\gamma_1 p - 5m)\chi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']} + \gamma_1 p\psi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']} = 0 \tag{4.53}$$

и позволяют написать

$$(\gamma_1 p + 5m)\psi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']} + \frac{2}{27}\gamma_1 p\chi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']} - \\ - \left(\frac{25}{18}\right)^2\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha'} p - \gamma_{\beta'} p)\psi_{[\alpha\beta]} = 0. \tag{4.54}$$

Полная система дифференциальных уравнений второго порядка дается формулами (4.49), (4.53) и (4.54). Вспомогательные поля можно исключить, получив тем самым для ψ одно-единственное уравнение, представимое в различных эквивалентных формах, но все они слишком громоздки, так что приводить их не имеет никакого смысла.

Эту методику можно распространить и на спиноры более высокого ранга. Не останавливаясь подробно на решении этой общей проблемы, мы ограничимся лишь тем, что включим уже полученные результаты в рамки более широкой схемы, соответствующей мультиспинору ранга n. Обобщая формулы (4.6), (4.20), (4.36) и (4.49), мы придем к следующим двум первым уравнениям системы:

$$\begin{gathered}\left[\frac{1}{n}\sum\gamma_\alpha p+m\right]\psi+\sum_{\alpha<\beta}\frac{1}{2}(\gamma_\alpha p-\gamma_\beta p)\,\psi_{[\alpha\beta]}=\eta,\\ \left[\frac{1}{n-2}\sum{}'\,\gamma_{\alpha'}p-\frac{n}{n-2}m\right]\psi_{[\alpha\beta]}+\frac{n-2}{n(n-1)}\frac{1}{2}\times\\ \times(\gamma_\alpha p-\gamma_\beta p)\,\psi+\sum_{\alpha'<\beta'}{}'\,\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha'}p-\gamma_{\beta'}p)\,\psi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}=0,\end{gathered}\tag{4.55}$$

откуда следует, что

$$\begin{gathered}\gamma_1 p=\ldots=\gamma_n p:\qquad \psi=\frac{1}{\gamma_1 p+m-i\varepsilon}\eta;\\ \gamma_1 p=\ldots=\gamma_{n-1}p=-\gamma_n\gamma:\\ \psi=\frac{1}{m}\left(1-\frac{n-2}{n}\frac{1}{m}\gamma_1 p\right)\eta.\end{gathered}\tag{4.56}$$

Далее мы получим уравнения

$$\begin{gathered}\left[\frac{1}{n-4}\sum{}'\,\gamma_{\alpha''}p+\frac{n}{n-4}m\right]\psi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}+\\ +\frac{1}{2}\frac{(n-1)(n-4)^2}{(n-2)^3}\sum{}'\,\gamma_{\alpha''}p\chi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}-\\ -\frac{1}{2}\frac{(n-3)n^4}{(n-1)(n-2)^4(n-4)}\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha'}p-\gamma_{\beta'}p)\,\psi_{[\alpha\beta]}+\ldots=0,\qquad(4.57)\\ \left[\frac{1}{n-4}\sum{}'\,\gamma_{\alpha''}p-\frac{n}{n-4}m\right]\chi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}+\sum{}'\,\gamma_{\alpha''}p\psi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}+\ldots=0,\end{gathered}$$

где невыписанные слагаемые отвечают трем разным парам индексов. Эта система уравнений обладает следующим свойством:

$$\begin{gathered}\gamma_1 p=\ldots=\gamma_{n-2}p=-\gamma_{n-1}p=-\gamma_n p:\\ \psi=\frac{1}{m}\left(1-\frac{n-4}{n}\frac{1}{m}\gamma_1 p\right)\left(1+\frac{n-3}{n-1}\frac{1}{m^2}p^2\right)\eta,\end{gathered}\tag{4.58}$$

которое сохраняется даже при $n=3$.

Полностью симметричный мультиспинор ранга $n=1, 2, 3, \ldots$ описывает частицы со спином $s={}^1/_2 n={}^1/_2,\ 1,\ {}^3/_2,\ \ldots$. Как уже указывалось, пополнить этот перечень значением $s=0$ можно, рассмотрев случай $n=2$ и заменив симметричный спинор антисимметричным. Все уравнения, соответствующие $n=2$, пригодны и при измененном типе симметрии. Впрочем, это замечание носит совершенно общий характер. В той системе уравнений, о которой речь шла выше, операторы, действующие на поля, полностью симметричны по спинорным индексам. Поэтому поле ψ будет приобретать все те свойства симметрии, которыми обладает источник η. Наиболее существенные особенности описания частицы в системе покоя проявляются в подпространстве, соответствующем выбору $\gamma_1^0 = \ldots = \gamma_n^0$. Следовательно, значение спина частицы будет определяться симметрией, общей для источника и поля. В случае полной симметрии спин равен $s = {}^1/_2 n$; если же имеет место антисимметрия по одной паре индексов и полная симметрия по всем остальным индексам, то он будет равен $s = {}^1/_2 (n - 2) = {}^1/_2 n - 1$ и т. д. Поэтому, выбрав соответствующим образом симметрию, мы можем применять уравнения для спинора третьего ранга к спинам $s = {}^3/_2$ или ${}^1/_2$, уравнения для спинора четвертого ранга к спинам $s = 2, 1, 0$ и т. д.

§ 5. ДЕЙСТВИЕ

В символической форме все сказанное выше можно сформулировать следующим образом:

$$W = \frac{1}{2} \int S\gamma G S, \tag{5.1}$$

$$\delta W = \int \delta S \gamma \chi = \int \chi \gamma \delta S, \tag{5.2}$$

$$\chi = GS, \tag{5.3}$$

$$F\chi = S. \tag{5.4}$$

Это означает, что мы исходим из квадратичного по источникам выражения для W, в котором наличие матриц γ отражает характер метрики, и определяем поля, рассматривая бесконечно малый пробный источник. В таком случае нелокальная по пространственно-временным переменным связь между полем и источником, задаваемая оператором G, превращается в локальную дифференциальную связь, осуществляемую оператором F. Функцию W можно записать и по-другому:

$$W = \frac{1}{2} \int S\gamma\chi = \frac{1}{2} \int \chi\gamma S, \tag{5.5}$$

или

$$W = \frac{1}{2} \int \chi\gamma F\chi = \frac{1}{2} \int F\chi\gamma\chi. \tag{5.6}$$

Особенно важное значение имеет линейная комбинация

$$W = \int \left(S\gamma\chi - \frac{1}{2} \chi\gamma F\chi \right). \tag{5.7}$$

До сих пор поле χ было некой производной величиной, чем-то вроде удобного сокращенного обозначения для произведения GS.

Теперь же оно становится в некотором роде независимой величиной. В самом деле, забудем на время про всякие связи между χ и S и будем варьировать эти величины в (5.7) независимо друг от друга. Тогда мы получим

$$\delta W = \int_{\Sigma_1} \delta S \gamma \chi + \int (\delta \chi \gamma S - \delta \chi \gamma F \chi). \tag{5.8}$$

Но $\delta W = \int \delta S \gamma \chi$, и поэтому добавочный член должен обращаться в нуль, что действительно имеет место, поскольку $F\chi = S$. Это означает, что если выражение (5.7) рассматривать как функционал от χ при фиксированном S, то его первая вариация будет равна нулю; иными словами, этот функционал стационарен при той единственной конфигурации поля, к которой приводят полевые уравнения совместно с наложенными на них граничными условиями. Это придает величине W характер *действия*, из которого, пользуясь принципом стационарного действия, можно получить полевые уравнения. Теперь мы проиллюстрируем все сказанное примерами разных значений спина.

Спин 0. Полевое уравнение имеет вид

$$(-\partial^2 + m^2)\, \varphi(x) = K(x), \tag{5.9}$$

и выражение для действия (5.7) записывается так:

$$W = \int (dx) \left[K(x)\, \varphi(x) - \frac{1}{2}\, \varphi(x)\, (-\partial^2 + m^2)\, \varphi(x) \right]. \tag{5.10}$$

Его можно представить в более симметричной форме, содержащей только первые производные. При интегрировании по частям никаких дополнительных поверхностных интегралов не возникает, в чем проще всего убедиться, перейдя к евклидову представлению. Здесь на больших расстояниях от источника поля убывают по экспоненциальному закону, поскольку таким свойством обладает функция $\Delta_E(x - x')$ при $m \neq 0$. Даже в случае безмассовых частиц зависимость вида $(x - x')^{-2}$ оказывается достаточно сильной для того, чтобы вклады интегралов по бесконечно удаленным поверхностям обращались в нуль. В соответствии с этим мы напишем

$$W = \int (dx)\, [K(x)\, \varphi(x) + \mathcal{L}(\varphi(x))], \tag{5.11}$$

где зависящую от поля величину

$$\mathcal{L}(\varphi(x)) = -\frac{1}{2}\, [\partial^\mu \varphi(x)\, \partial_\mu \varphi(x) + m^2 (\varphi(x))^2] \tag{5.12}$$

можно назвать функцией Лагранжа системы.

Отметим, что полевое уравнение можно представить также в виде системы уравнений первого порядка:

$$\partial_\mu \varphi(x) - \varphi_\mu(x) = K_\mu(x), \qquad -\partial_\mu \varphi^\mu(x) + m^2 \varphi(x) = K(x). \tag{5.13}$$

Исключив векторное поле φ_μ, мы получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$(-\partial^2 + m^2)\,\varphi(x) = K(x) - \partial_\mu K^\mu(x), \tag{5.14}$$

содержащее тот же самый эффективный скалярный источник, с которым мы уже встречались в формуле (9.76) из гл. 2. Соответствующее выражение для действия имеет вид

$$W = \int (dx)\,[K(x)\,\varphi(x) + K^\mu(x)\,\varphi_\mu(x) + \mathscr{L}(\varphi(x),\ \varphi_\mu(x))], \tag{5.15}$$

где

$$\mathscr{L} = -\varphi^\mu \partial_\mu \varphi + \frac{1}{2}(\varphi^\mu \varphi_\mu - m^2 \varphi^2). \tag{5.16}$$

Если первое из уравнений (5.13) рассматривать как определение, то φ_μ уже не будет независимым полем, и мы вновь вернемся к выражению (5.11) для действия, но в него войдет также эффективный скалярный источник, фигурирующий в (5.14), и дополнительный контактный член $-\int (dx)\,(1/2)\,K^\mu K_\mu$.

Спин 1. Из полевого уравнения

$$(-\partial^2 + m^2)\,\varphi_\mu(x) + \partial_\mu \partial^\nu \varphi_\nu(x) = J_\mu(x) \tag{5.17}$$

мы получаем действие

$$W = \int (dx)\,[J^\mu(x)\,\varphi_\mu(x) + \mathscr{L}(\varphi_\mu(x))] \tag{5.18}$$

с функцией Лагранжа

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu)(\partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu) + m^2 \varphi^\mu \varphi_\mu\right]. \tag{5.19}$$

При этом мы воспользовались формулами

$$\int (dx)\,\varphi^\mu(-\partial^2)\,\varphi_\mu = \int (dx)\,\partial^\nu \varphi^\mu \partial_\nu \varphi_\mu \tag{5.20}$$

и

$$\int (dx)\,\varphi^\mu \partial_\mu \partial^\nu \varphi_\nu = -\int (dx)\,\partial^\nu \varphi^\mu \partial_\mu \varphi_\nu. \tag{5.21}$$

Но последнюю из них можно было бы заменить формулой

$$\int (dx)\,\varphi^\mu \partial_\mu \partial^\nu \varphi_\nu = -\int (dx)\,\partial_\mu \varphi^\mu\,\partial^\nu \varphi_\nu, \tag{5.22}$$

в результате чего мы получили бы другую функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left[\partial^\nu\varphi^\mu\partial_\nu\varphi_\mu - (\partial_\mu\varphi^\mu)^2 + m^2\varphi^\mu\varphi_\mu\right]. \tag{5.23}$$

Таким образом, то, что мы ограничиваемся первыми производными, еще не гарантирует однозначности функции Лагранжа. Вообще говоря, две функции Лагранжа, соответствующие одной и той же системе, связаны одна с другой соотношением вида

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 + \partial_\mu f^\mu, \tag{5.24}$$

так как локальный член, имеющий вид дивергенции, не дает вклада в действие, получаемое путем интегрирования. В нашем случае выражение (5.23) перейдет в (5.19), если положить

$$f^\mu = \frac{1}{2}(\varphi^\nu\partial_\nu\varphi^\mu - \varphi^\mu\partial_\nu\varphi^\nu). \tag{5.25}$$

Система уравнений первого порядка имеет вид

$$\partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu - G_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}, \qquad \partial_\nu G^{\mu\nu} + m^2\varphi^\mu = J^\mu. \tag{5.26}$$

Эти уравнения вытекают из действия

$$W \int (dx)\left[J^\mu\varphi_\mu + \frac{1}{2}M^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \mathscr{L}(\varphi_\mu, G_{\mu\nu})\right] \tag{5.27}$$

с функцией Лагранжа

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}G^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - m^2\varphi^\mu\varphi_\mu\right). \tag{5.28}$$

Рассматривая первое из уравнений (5.26) как определение величины $G_{\mu\nu}$, мы снова получим действие (5.18) с эффективным векторным источником $J^\mu + \partial_\nu M^{\mu\nu}$, аналогичным источнику (9.78) из гл. 2, и с дополнительным контактным членом $-\int (dx)\, {}^1/_4\, M^{\mu\nu}M_{\mu\nu}$.

Спин 2. Полевые уравнения имеют вид

$$(-\partial^2 + m^2)\varphi_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial^\lambda\varphi_{\lambda\nu} + \partial_\nu\partial^\lambda\varphi_{\mu\lambda} - \partial_\mu\partial_\nu\varphi -$$
$$- g_{\mu\nu}\left[(-\partial^2 + m^2)\varphi + \partial_\varkappa\partial_\lambda\varphi^{\varkappa\lambda}\right] = T_{\mu\nu}, \tag{5.29}$$

и одной из возможных функций Лагранжа в действии

$$W = \int (dx)\left[T^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} + \mathscr{L}\right] \tag{5.30}$$

будет функция

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left[\partial^\lambda\varphi^{\mu\nu}\partial_\lambda\varphi_{\mu\nu} + m^2\varphi^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} - \partial^\lambda\varphi\partial_\lambda\varphi - m^2\varphi^2\right] -$$
$$- \partial_\mu\varphi^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi + \partial_\mu\varphi^{\mu\nu}\partial^\lambda\varphi_{\lambda\nu}, \tag{5.31}$$

причем последнее слагаемое можно заменить величиной

$$\partial^{\lambda}\varphi^{\mu\nu}\partial_{\mu}\varphi_{\lambda\nu} \tag{5.32}$$

или какой-то линейной комбинацией обеих величин.

Дифференциальные уравнения первого порядка можно получить двумя разными способами, которые дают две разные системы уравнений. Одна из них связана с действием

$$W = \int (dx)\left[T^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{2}K^{\lambda\mu\nu}G_{\lambda\mu\nu} + \mathcal{L}\right], \tag{5.33}$$

где

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}G^{\lambda\mu\nu}(\partial_{\lambda}\varphi_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\varphi_{\lambda\mu}) - G^{\lambda}(\partial^{\mu}\varphi_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}\varphi) + \\ + \frac{1}{2}[G^{\lambda\mu\nu}G_{\lambda\mu\nu} - G^{\lambda}G_{\lambda} - m^2(\varphi^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} - \varphi^2)], \tag{5.34}$$

поля $K_{\lambda\mu\nu}$ и $G_{\lambda\mu\nu}$ антисимметричны по λ и ν и

$$G_{\lambda} = G_{\lambda\nu}{}^{\nu}. \tag{5.35}$$

В этом случае полевые уравнения имеют вид

$$\partial^{\lambda}G_{\mu\nu\lambda} - \partial_{\nu}G_{\mu} + m^2\left(\varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi\right) = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T, \tag{5.36}$$

где левая часть подразумевается симметризованной по μ и ν, а

$$\partial_{\lambda}\varphi_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\varphi_{\lambda\mu} - G_{\lambda\mu\nu} = K'_{\lambda\mu\nu}. \tag{5.37}$$

Эффективный источник в последнем уравнении

$$K'_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(K_{\lambda\mu\nu} + K_{\mu\lambda\nu} - K_{\mu\nu\lambda} - K_{\lambda}g_{\mu\nu} + K_{\nu}g_{\lambda\mu}), \\ K_{\lambda} = K_{\lambda\nu}{}^{\nu} \tag{5.38}$$

указывает нам, какую нужно произвести перегруппировку членов, чтобы прийти к уравнениям в форме (5.37), отправляясь от уравнений, которые вытекают из принципа стационарного действия. В связи с (5.36) полезно отметить также, что

$$\int (dx)T^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} = \int (dx)\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right)\left(\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi\right). \tag{5.39}$$

Если смотреть на $G_{\lambda\mu\nu}$ как на производную величину, то мы получим функцию Лагранжа, равную среднему арифметическому двух выражений, соответствующих формулам (5.31) и (5.32). Роль источника в таком действии будет играть величина $T_{\mu\nu} + \partial^{\lambda}K_{\mu\nu\lambda}$, где подразумевается симметризация по μ и ν, и будет существовать дополнительный контактный член.

Вторая система дифференциальных уравнений получается из действия

$$W=\int (dx)\,[T^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}+L^{\mu\nu\lambda}H_{\mu\nu\lambda}+\mathscr{L}], \tag{5.40}$$

где

$$\mathscr{L}=H^{\mu\nu\lambda}\partial_\lambda\varphi_{\mu\nu}-H^{\nu}\partial^{\mu}\varphi_{\mu\nu}+\frac{1}{2}(H^{\lambda}-{}^{\lambda}H)\partial_\lambda\varphi-$$
$$-\frac{1}{2}\left[H^{\mu\nu\lambda}H_{\lambda\mu\nu}-{}^{\lambda}HH_\lambda+m^2(\varphi^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}-\varphi^2)\right], \tag{5.41}$$

поле $H_{\mu\nu\lambda}$ симметрично по μ и ν и

$${}^{\lambda}H=H_{\nu}{}^{\nu\lambda},\qquad H^{\lambda}=H^{\lambda\nu}{}_{\nu}. \tag{5.42}$$

Полевые уравнения будут вида

$$\partial^{\lambda}H_{\mu\nu\lambda}-\partial_\nu H_\mu+m^2\left(\varphi_{\mu\nu}+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi\right)=T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \tag{5.43}$$

с симметризованной по μ и ν левой частью (в частности, с симметризованным $\partial_\nu H_\mu$) и

$$\partial_\mu\varphi_{\lambda\nu}+\partial_\nu\varphi_{\lambda\mu}-\partial_\lambda\varphi_{\mu\nu}-H_{\mu\nu\lambda}=L'_{\mu\nu\lambda}, \tag{5.44}$$

где

$$L'_{\mu\nu\lambda}=L_{\mu\nu\lambda}-L_{\lambda\mu\nu}-L_{\lambda\nu\mu}+g_{\mu\nu}L_\lambda-$$
$$-\frac{1}{3}(g_{\lambda\nu}L_\mu+g_{\lambda\mu}L_\nu)+\frac{1}{2}(g_{\lambda\mu}\,{}_{\nu}L+g_{\lambda\mu}\,{}_{\nu}L-g_{\mu\nu}\,{}_{\lambda}L). \tag{5.45}$$

Если считать равенство (5.44) определением величины $H_{\mu\nu\lambda}$, то функция Лагранжа превратится в функцию Лагранжа, содержащую слагаемое (5.32). Эффективный источник будет вида

$$T_{\mu\nu}+\partial^{\lambda}L_{\mu\nu\lambda}-\partial^{\lambda}L_{\lambda\mu\nu}-\partial^{\lambda}L_{\lambda\nu\mu} \tag{5.46}$$

с дополнительными контактными членами.

Спин 3. Мы уже видели, что для функции Лагранжа можно выбирать разные выражения. Но в этом довольно сложном случае мы ограничимся только одним. Действие имеет вид

$$W=\int (dx)\,[S^{\lambda\mu\nu}\varphi_{\lambda\mu\nu}+\mathscr{L}], \tag{5.47}$$

где

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\Big[\partial^{\varkappa}\varphi^{\lambda\mu\nu}\partial_{\varkappa}\varphi_{\lambda\mu\nu}+m^2\varphi^{\lambda\mu\nu}\varphi_{\lambda\mu\nu}-$$
$$-3\partial_{\varkappa}\varphi^{\varkappa\mu\nu}\partial^{\lambda}\varphi_{\lambda\mu\nu}+6\partial_{\mu}\varphi^{\lambda\mu\nu}\partial_{\nu}\varphi_{\lambda}-3\partial^{\lambda}\varphi^{\nu}\partial_{\lambda}\varphi_{\nu}-$$
$$-3m^2\varphi^{\nu}\varphi_{\nu}-\frac{3}{2}(\partial_\nu\varphi^{\nu})^2\Big]+\frac{1}{2}m(\varphi^{\nu}\partial_\nu\Phi-$$
$$-\Phi\partial_\nu\varphi^{\nu})+\partial^{\nu}\Phi\partial_\nu\Phi+4m^2\Phi^2, \tag{5.48}$$

причем вспомогательную функцию Φ следует варьировать в принципе стационарного действия независимым образом.

Спин $^1/_2$. Здесь достаточно сказать лишь несколько слов. Полевое уравнение

$$\left(\gamma^\mu \frac{1}{i}\,\partial_\mu + m\right)\psi(x) = \eta(x) \tag{5.49}$$

вытекает из действия

$$W = \int (dx)\,[\eta(x)\,\gamma^0\psi(x) + \mathscr{L}(\psi(x))] \tag{5.50}$$

с функцией Лагранжа

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\,\psi\gamma^0\left(\gamma^\mu \frac{1}{i}\,\partial_\mu + m\right)\psi. \tag{5.51}$$

На первый взгляд, здесь допускается произвол, поскольку производную можно перенести с правого поля на левое, изменив при этом знак. Но в действительности при этом ничто не меняется:

$$\psi(x)\,\gamma^0\gamma^\mu\,\partial_\mu\psi(x) = -\partial_\mu\psi(x)\,\gamma^0\gamma^\mu\psi(x), \tag{5.52}$$

так как матрицы $\gamma^0\gamma^\mu$ симметричны, а $\psi(x)$ антикоммутирует с $\partial_\mu\psi(x)$.

Спин $^3/_2$. Уравнения для спин-векторного поля имеют вид

$$\left[\gamma^\lambda \frac{1}{i}\,\partial_\lambda + m\right]\psi_\mu - \frac{1}{i}\,\partial_\mu\gamma^\nu\psi_\nu - \gamma_\mu \frac{1}{i}\,\partial^\nu\psi_\nu + \\ + \gamma_\mu\left[m - \gamma^\lambda \frac{1}{i}\,\partial_\lambda\right]\gamma^\nu\psi_\nu = \eta_\mu. \tag{5.53}$$

Им соответствует действие

$$W = \int (dx)\,[\eta^\mu\gamma^0\psi_\mu + \mathscr{L}] \tag{5.54}$$

с функцией Лагранжа

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left\{\psi^\mu\gamma^0\left[\gamma^\lambda \frac{1}{i}\,\partial_\lambda + m\right]\psi_\mu - \psi^\mu\gamma^0 \frac{1}{i}\,\partial_\mu\gamma^\mu\psi_\nu - \right. \\ \left. - \psi^\nu\gamma^0\gamma_\nu \frac{1}{i}\,\partial^\mu\psi_\mu + \psi^\mu\gamma^0\gamma_\mu\left[m - \gamma^\lambda \frac{1}{i}\,\partial_\lambda\right]\gamma^\nu\psi_\nu\right\}. \tag{5.55}$$

Второе и третье слагаемые обеспечивают в явном виде симметрию по действию оператора дифференцирования направо и налево:

$$-\partial_\mu\psi^\mu\gamma^0\gamma^\nu\psi_\nu = \psi^\nu\gamma^0\gamma_\nu\partial_\mu\psi^\mu \tag{5.56}$$

Для первого и последнего слагаемых (5.55) это обеспечивается автоматически.

Спин $^5/_2$. В случае симметричного спин-тензорного поля $\psi_{\mu\nu}$ действие имеет следующий вид:

$$W = \int (dx)\,[\eta^{\mu\nu}\gamma^0\psi_{\mu\nu} + \mathscr{L}], \tag{5.57}$$

где

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\Big\{&\psi^{\mu\nu}\gamma^0\Big[\gamma^\lambda \frac{1}{i}\,\partial_\lambda + m\Big]\psi_{\mu\nu} - 2\psi^{\mu\nu}\gamma^0\frac{1}{i}\,\partial_\mu\gamma^\lambda\psi_{\lambda\nu} - \\ &- 2\psi^{\mu\nu}\gamma^0\gamma_\mu\frac{1}{i}\,\partial^\lambda\psi_{\lambda\nu} + 2\psi^{\mu\nu}\gamma^0\gamma_\mu\Big[m - \gamma^\varkappa\frac{1}{i}\,\partial_\varkappa\Big]\gamma^\lambda\psi_{\lambda\nu} + \\ &+ \psi\gamma^0\gamma^\mu\,\frac{1}{i}\,\partial^\nu\psi_{\mu\nu} + \psi^{\mu\nu}\gamma^0\gamma_\mu\frac{1}{i}\,\partial_\nu\psi - \frac{1}{2}\,\psi\gamma^0\Big[\gamma^\lambda\frac{1}{i}\partial_\lambda + m\Big]\psi\Big\} + \\ &+ \frac{1}{2}\,m\,(\psi\gamma^0\Psi - \Psi\gamma^0\psi) - \frac{6}{5}\,\Psi\gamma^0\Big[\gamma^\lambda\frac{1}{i}\,\partial_\lambda - 3m\Big]\Psi.\end{aligned} \tag{5.58}$$

Применяя принцип стационарного действия, вспомогательный спинор Ψ следует варьировать независимо.

Спины 0, $^1/_2$, 1, $^3/_2$, 2, $^5/_2$, ... Здесь мы имеем в виду описание разных спинов посредством мультиспиноров. Так, например, в случае спинов 0 или 1 применимы следующие действие и функция Лагранжа:

$$\begin{aligned}W &= \int (dx)\,[\eta\gamma_1^0\gamma_2^0\psi + \mathscr{L}], \\ \mathscr{L} &= -\frac{1}{2}\,\psi\gamma_1^0\gamma_2^0\Big[\frac{1}{2}\,(\gamma_1^\mu + \gamma_2^\mu)\,\frac{1}{i}\,\partial_\mu + m\Big]\,\psi.\end{aligned} \tag{5.59}$$

Не следует забывать, что эти спиноры четного ранга являются коммутирующими величинами (статистика Бозе — Эйнштейна) соответственно симметрии матрицы $\gamma_1^0\gamma_2^0$ и антисимметрии матриц $\gamma_1^0\gamma_2^0\,(\gamma_1^\mu + \gamma_2^\mu)$. В качестве основы для принципа действия можно принять также дифференциальное уравнение второго порядка (4.26). Напишем его в виде

$$\Big[-\Big(\frac{1}{2}\sum_\alpha \gamma_\alpha^\mu\frac{1}{i}\,\partial_\mu\Big)^2 + m^2\Big]\,\psi(x) = \zeta(x), \tag{5.60}$$

где

$$\zeta(x) = \Big[m - \frac{1}{2}\sum_\alpha \gamma_\alpha^\mu\frac{1}{i}\,\partial_\mu\Big]\,\eta(x). \tag{5.61}$$

Затем построим действие

$$\begin{aligned}W(\zeta) &= \frac{1}{2m}\int (dx)\,[\zeta\gamma_1^0\gamma_2^0\psi + \mathscr{L}], \\ \mathscr{L} &= -\frac{1}{2}\Big[-\partial_\mu\psi\gamma_1^0\gamma_2^0\,\frac{1}{2}\sum_\alpha\gamma_\alpha^\mu\,\frac{1}{2}\sum_\beta\gamma_\beta^\nu\partial_\nu\psi + m^2\psi\gamma_1^0\gamma_2^0\psi\Big],\end{aligned} \tag{5.62}$$

где множитель $1/2m$ введен для того, чтобы можно было непосредственно сравнивать два выражения для действия; в других случаях его можно включить в общий масштабный множитель поля и источника. Из формул (5.62) вытекает другое выражение для W:

$$W(\zeta)=\frac{1}{2}\frac{1}{2m}\int(dx)\,\zeta(x)\,\gamma_1^0\gamma_2^0\psi(x)=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2m}\int(dx)\,\eta(x)\,\gamma_1^0\gamma_2^0\left[m-\frac{1}{2}\sum\gamma_\alpha^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\right]\psi(x)=$$
$$=\frac{1}{2}\int(dx)\,\eta(x)\,\gamma_1^0\gamma_2^0\psi(x)-\frac{1}{4m}\int(dx)\,\eta(x)\,\gamma_1^0\gamma_2^0\eta(x). \qquad (5.63)$$

Отсюда видно, что оба действия различаются только контактным членом. Он компенсирует тот контактный член, который был добавлен в формуле (4.1). Такого же рода замечание можно сделать, основываясь на коммутативности симметричной матрицы $i\gamma_{51}i\gamma_{52}$ с матрицами $\gamma_1^0\gamma_2^0$, а также с матрицами $(\gamma^0\gamma^\mu)_\alpha$. Если с помощью проекционных матриц $^1/_2\,(1\pm i\gamma_{51}i\gamma_{52})$ разложить ψ и ζ на компоненты, то выражение для действия (5.62) разобьется на две совершенно независимые части. Тогда можно будет пользоваться принципом действия в редуцированной форме, имея дело лишь с одной из этих компонент поля и с соответствующим ей источником. Чтобы сохранить масштаб для источников и полей, такое действие следует умножить на два. В том, что в результате всего этого изменяются только контактные члены, легко убедиться, написав

$$W=\frac{1}{2}\frac{1}{2m}\int(dx)\,\zeta\gamma_1^0\gamma_2^0(1\pm i\gamma_{51}i\gamma_{52})\,\psi=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2m}\int(dx)\,\eta\gamma_1^0\gamma_2^0\left\{\left[m-\frac{1}{2}\sum\gamma_\alpha^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\right]\psi\pm\right.$$
$$\left.\pm\, i\gamma_{51}i\gamma_{52}\left[m+\frac{1}{2}\sum\gamma_\alpha^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\right]\psi\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\int(dx)\,\eta\gamma_1^0\gamma_2^0\psi-\frac{1}{4m}\int(dx)\,\eta\gamma_1^0\gamma_2^0(1\mp i\gamma_{51}i\gamma_{52})\,\eta. \qquad (5.64)$$

Между прочим, аналогичным образом можно описывать и спин $^1/_2$, рассматривая дифференциальное уравнение второго порядка

$$(-\partial^2+m^2)\,\psi(x)=\xi(x), \qquad \xi(x)=\left[m-\gamma^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\right]\eta(x) \qquad (5.65)$$

и действие

$$W(\zeta)=\frac{1}{2m}\int(dx)\,[\zeta(x)\,\gamma^0\psi(x)+\mathscr{L}(\psi(x))],$$
$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\,[\partial^\mu\psi\gamma^0\partial_\mu\psi+m^2\psi\gamma^0\psi]. \qquad (5.66)$$

И снова мы видим, что функция

$$W(\zeta)=\frac{1}{2}\frac{1}{2m}\int(dx)\,\zeta(x)\,\gamma^0\psi(x)=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2m}\int(dx)\,\eta(x)\,\gamma^0\left[m-\gamma^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\right]\psi(x)=$$
$$=\frac{1}{2}\int(dx)\,\eta(x)\,\gamma^0\psi(x)-\frac{1}{4m}\int(dx)\,\eta(x)\,\gamma^0\eta(x) \tag{5.67}$$

отличается от исходного действия только контактным членом. Предположим далее, что в (5.66) вводится одна из удвоенных проекционных матриц

$$\frac{1}{2}(1\pm i\gamma_5)=\left[\frac{1}{2}(1\pm i\gamma_5)\right]^2, \tag{5.68}$$

причем так, что всюду она стоит справа от γ^0. Тогда, поскольку

$$\gamma^0\left[\frac{1}{2}(1\pm i\gamma_5)\right]^2=\left[\frac{1}{2}(1\pm i\gamma_5)\right]^T\gamma^0\left[\frac{1}{2}(1\pm i\gamma_5)\right], \tag{5.69}$$

поле и источник будут проектироваться на одно и то же подпространство. Новое действие будет иметь вид

$$W=\frac{1}{2}\frac{1}{2m}\int(dx)\,\zeta(x)\,\gamma^0(1\pm i\gamma_5)\,\psi(x)=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2m}\int(dx)\,\eta(x)\,\gamma^0\left\{\left[m-\gamma^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\right]\psi(x)\pm\right.$$
$$\left.\pm i\gamma_5\left[m+\gamma^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\right]\psi(x)\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\int(dx)\,\eta(x)\,\gamma^0\psi(x)-\frac{1}{4m}\int(dx)\,\eta(x)\,\gamma^0(1\mp i\gamma_5)\,\eta(x), \tag{5.70}$$

откуда видно, что изменился лишь контактный член, а описывается та же самая физическая система. На вопросе о том, дает ли какие-либо практические преимущества такое описание спина $^1/_2$ уравнением второго порядка, мы здесь не будем останавливаться, а ограничимся только одним замечанием. Контактный член в формуле (5.70), содержащий матрицу γ_5, есть мнимая величина (матрица $\gamma^0 i\gamma_5$ антисимметрична и вещественна), и чтобы полностью сохранить физическую эквивалентность двух способов описания, его следует вычесть из действия второго порядка. Поскольку такое вычитаемое представляет собой контактный член, выраженный через источник η, а не через ζ, уравнения второго порядка нельзя рассматривать как фундаментальный способ описания частиц со спином $^1/_2$.

Спинам $^1/_2$ или $^3/_2$ соответствует действие

$$W=\int(dx)\,[\eta\gamma\psi+\mathscr{L}], \tag{5.71}$$

где

$$\gamma = \prod \gamma_\alpha^0 = \gamma_1^0\gamma_2^0\gamma_3^0 \tag{5.72}$$

и

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{2}\psi\gamma\left[\frac{1}{3}\sum\gamma_\alpha^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu+m\right]\psi-\\ &-\frac{1}{2}\sum_{\alpha<\beta}\left[\psi\gamma\frac{1}{2}(\gamma_\alpha^\mu-\gamma_\beta^\mu)\frac{1}{i}\partial_\mu\psi_{[\alpha\beta]}+\psi_{[\alpha\beta]}\gamma\frac{1}{2}(\gamma_\alpha^\mu-\gamma_\beta^\mu)\frac{1}{i}\partial_\mu\psi\right]-\\ &-3\psi_{[23]}\gamma\left[\gamma_1^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu-3m\right]\psi_{[23]}-\ldots.\end{aligned} \tag{5.73}$$

Помимо ψ в это выражение входят три вспомогательные функции $\psi_{[23]}, \ldots,$ которые варьируются в принципе действия независимым образом. В формулировке, включающей производные второго порядка,

$$\begin{aligned}&W(\zeta)=\frac{1}{2m}\int(dx)\,[\zeta\gamma\psi+\mathscr{L}],\\ &\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{8}\partial^\mu\psi\gamma\partial_\mu\psi-\frac{1}{8}\partial_\mu\psi\gamma\sum_{\alpha\beta}\gamma_\alpha^\mu\gamma_\beta^\nu\partial_\nu\psi+m^2\psi\gamma\psi\right],\end{aligned} \tag{5.74}$$

где

$$\zeta=\left[m-\frac{1}{3}\sum\gamma_\alpha^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\right]\eta. \tag{5.75}$$

В этом случае мы будем иметь

$$\begin{aligned}W(\zeta)&=\frac{1}{2}\frac{1}{2m}\int(dx)\,\zeta(x)\,\gamma\psi(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{2m}\int(dx)\,\eta\gamma\times\\ &\times\left[m-\frac{1}{3}\sum\gamma_\alpha^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu\right]\psi=\\ &=\frac{1}{2}\int(dx)\,\eta\gamma\psi-\frac{1}{4m}\int(dx)\,\eta\gamma\eta+\\ &+\frac{1}{4m}\int(dx)\,\eta\gamma\sum_{\alpha<\beta}\frac{1}{2}(\gamma_\alpha^\mu-\gamma_\beta^\mu)\frac{1}{i}\partial_\mu\psi_{[\alpha\beta]},\end{aligned} \tag{5.76}$$

причем последнее слагаемое можно представить также в виде [см. формулу (4.19)]

$$9m\int(dx)\sum_{\alpha>\beta}\psi_{[\alpha\beta]}\gamma\psi_{[\alpha\beta]}. \tag{5.77}$$

Этот член — контактного вида, так как $\psi_{[\alpha\beta]}$ можно включить в источник. Кроме того, если в формуле (5.74) все матрицы γ умножить справа на одну из проекционных матриц $1 \pm \prod(i\gamma_5)_\alpha$, то при этом изменятся только контактные члены. Такое описание с использованием производных второго порядка физически эквивалентно описанию посредством уравнений первого порядка.

Мы не будем останавливаться на спинорах четвертого и пятого рангов, а сразу сформулируем принцип действия для спиноров ранга n. Соответствующая неполная функция Лагранжа, написанная без симметризации производных, которая используется, например, в формуле (5.73), имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}\psi\gamma\left[\frac{1}{n}\sum\gamma^{\mu}_{\alpha}\frac{1}{i}\partial_{\mu}+m\right]\psi-\sum\psi\gamma\frac{1}{2}(\gamma^{\mu}_{\alpha}-\gamma^{\mu}_{\beta})\frac{1}{i}\partial_{\mu}\psi_{[\alpha\beta]}-\\
&-\frac{n(n-1)}{n-2}\frac{1}{2}\sum\psi_{[\alpha\beta]}\gamma\left[\frac{1}{n-2}\sum{}'\gamma^{\mu}_{\alpha'}\frac{1}{i}\partial_{\mu}-\frac{n}{n-2}m\right]\psi_{[\alpha\beta]}-\\
&-\frac{n(n-1)}{n-2}\sum\psi_{[\alpha\beta]}\gamma\frac{1}{2}(\gamma^{\mu}_{\alpha'}-\gamma^{\mu}_{\beta'})\frac{1}{i}\partial_{\mu}\psi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}+\\
&+2\frac{(n-1)^2(n-2)^3(n-4)}{n^3(n-3)}\frac{1}{2}\sum\psi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}\gamma\times\\
&\times\left[\frac{1}{n-4}\sum{}'\gamma^{\mu}_{\alpha''}\frac{1}{i}\partial_{\mu}+\frac{n}{n-4}m\right]\psi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}+\\
&+\frac{(n-1)^3(n-4)^3}{n^3(n-3)}\sum\psi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}\gamma\sum{}'\gamma^{\mu}_{\alpha''}\frac{1}{i}\partial_{\mu}\chi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}+\\
&+\frac{(n-1)^3(n-4)^3}{n^3(n-3)}\frac{1}{2}\sum\chi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}\gamma\times\\
&\times\left[\frac{1}{n-4}\sum{}'\gamma^{\mu}_{\alpha''}\frac{1}{i}\partial_{\mu}-\frac{n}{n-4}m\right]\chi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}+\ldots\,.
\end{aligned}\tag{5.78}$$

Суммирование здесь следует проводить только по парам неповторяющихся индексов.

Интересно было бы выявить связь между мультиспинорной формулировкой действия и формулировкой, в которой используются тензоры или спин-тензоры. Мы ограничимся тем, что рассмотрим мультиспиноры только низшего (второго) ранга. Спиноры второго ранга нам будет удобнее представлять в виде матриц. В таких обозначениях существенные для дальнейшего комбинации записываются как

$$\begin{aligned}
\eta\gamma^0_1\gamma^0_2\psi &= \eta_{\zeta_1\zeta_2}\gamma^0_{\zeta_1\zeta_1'}\gamma^0_{\zeta_2\zeta_2'}\psi_{\zeta_1'\zeta_2'}=\\
&=\eta_{\zeta_1\zeta_2}\gamma^0_{\zeta_2\zeta_2'}\psi^T_{\zeta_2'\zeta_1'}(-\gamma^0)_{\zeta_1'\zeta_1}=-\mathrm{Sp}(\eta\gamma^0\psi^T\gamma^0),\\
\psi\gamma^0_1\gamma^0_2(\gamma^{\mu}_1+\gamma^{\mu}_2)\psi &= \psi_{\zeta_1\zeta_2}[(\gamma^0\gamma^{\mu})_{\zeta_1\zeta_1'}\gamma^0_{\zeta_2\zeta_2'}+\\
&+\gamma^0_{\zeta_1\zeta_1'}(\gamma^0\gamma^{\mu})_{\zeta_2\zeta_2'}]\psi_{\zeta_1'\zeta_2'}=-\mathrm{Sp}(\psi\gamma^0[\gamma^{\mu},\psi^T\gamma^0]),
\end{aligned}\tag{5.79}$$

в соответствии с чем действие (5.59) переписывается в виде

$$W=\int(dx)\,\mathrm{Sp}\left(-\eta\gamma^0\psi^T\gamma^0+\frac{1}{4}\psi\gamma^0\frac{1}{i}\partial_{\mu}[\gamma^{\mu},\psi^T\gamma^0]+\frac{1}{2}m\psi\gamma^0\psi^T\gamma^0\right).\tag{5.80}$$

Симметричные спиноры, описывающие поле и источник единичного спина, даются общими выражениями

$$
\begin{aligned}
2m^{-1/2}\psi &= \gamma^\mu\gamma^0\varphi_\mu + \frac{1}{2m}\sigma^{\mu\nu}\gamma^0 G_{\mu\nu}, \\
2m^{1/2}\eta &= \gamma^\mu\gamma^0 J_\mu - \frac{m}{2}\sigma^{\mu\nu}\gamma^0 M_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{5.81}
$$

которые в несколько иных обозначениях уже появлялись раньше [см. вторую строку формулы (9.70) из гл. 2]. Раскрывая коммутаторы и вычисляя следы методом, изложенным в § 9, гл. 2, мы сразу же получаем:

$$
\begin{aligned}
W &= \int (dx)\left[J^\mu\varphi_\mu + \frac{1}{2}M^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \mathscr{L}\right], \\
\mathscr{L} &= -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu) - \frac{1}{2}\varphi^\mu\partial^\nu G_{\mu\nu} + \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2\varphi^\mu\varphi_\mu.
\end{aligned} \tag{5.82}
$$

С точностью до симметризации по действию операторов дифференцирования на векторное и тензорное поля эти функции совпадают с функциями (5.27) и (5.28), порождающими уравнения первого порядка. Аналогично этому антисимметричные спиноры, которые описывают нулевой спин, представляются в виде

$$
\begin{aligned}
2m^{-1/2}\psi &= i\gamma_5\gamma^0\varphi - \frac{1}{m}\gamma^\mu\gamma_5\gamma^0\varphi_\mu, \\
2m^{1/2}\eta &= i\gamma_5\gamma^0 K + m\gamma^\mu\gamma_5\gamma^0 K_\mu,
\end{aligned} \tag{5.83}
$$

и мы получаем действие

$$
\begin{aligned}
W &= \int (dx)\,[K\varphi + K^\mu\varphi_\mu + \mathscr{L}], \\
\mathscr{L} &= -\frac{1}{2}\varphi^\mu\partial_\mu\varphi + \frac{1}{2}\varphi\partial_\mu\varphi^\mu + \frac{1}{2}\varphi^\mu\varphi_\mu - \frac{1}{2}m^2\varphi^2,
\end{aligned} \tag{5.84}
$$

фактически совпадающее с действием (5.15), (5.16).

Из матричной формы записи

$$
i\gamma_{51} i\gamma_{52}\psi \to -i\gamma_5\psi i\gamma_5 \tag{5.85}
$$

видно, что слагаемое в матрице ψ, которое коммутирует (или антикоммутирует) с $i\gamma_5$, является собственным вектором матрицы $i\gamma_{51}i\gamma_{52}$ с собственным значением -1 (или $+1$). В выражениях (5.81) и (5.83) представлены оба эти собственные значения. Если взять действие вида (5.62), приводящее к уравнению второго порядка, то вполне допустимо пользоваться отдельными проекциями поля и источника. В случае спина 1 и 0 примером могут служить соотношения

$$
2m^{-1/2}\psi = \gamma^\mu\gamma^0\varphi_\mu, \qquad 2m^{-1/2}\zeta = \gamma^\mu\gamma^0(J_\mu + \partial^\nu M_{\mu\nu}), \tag{5.86}
$$

$$
2m^{-1/2}\psi = i\gamma_5\gamma^0\varphi, \qquad 2m^{-1/2}\zeta = i\gamma_5\gamma^0(K - \partial_\mu K^\mu), \tag{5.87}
$$

где под ζ понимаются соответствующие проекции величины (5.61). Тогда действие (5.62) примет вид

$$W=\frac{1}{m}\int(dx)\,\mathrm{Sp}\Big(-\zeta\gamma^0\psi^T\gamma^0+$$
$$+\frac{1}{8}[\gamma^\mu,\partial_\mu\psi\gamma^0][\gamma^\nu,\partial_\nu\psi^T\gamma^0]+\frac{1}{2}m^2\psi\gamma^0\psi^T\gamma^0\Big),\qquad(5.88)$$

где добавлен множитель 2 и подразумевается, что поля и источники редуцированы. Вычислив следы матриц, мы для действия сразу же получим приводившиеся выше формулы (5.18), (5.19) и (5.11), (5.12) с эффективными векторным и скалярным источниками, фигурирующими в равенствах (5.86), (5.87). Можно также взять и другие проекции, и тогда действие, отвечающее спинам 1 и 0, будет записываться в виде

$$W=\int(dx)\left[\frac{1}{2}M^{\mu\nu}G_{\mu\nu}+\frac{1}{2m^2}\partial_\nu G^{\mu\nu}\partial^\lambda G_{\mu\lambda}+\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}\right]\qquad(5.89)$$

и

$$W=\int(dx)\left[K^\mu\varphi_\mu+\frac{1}{2m^2}(\partial_\mu\varphi^\mu)^2+\frac{1}{2}\varphi^\mu\varphi_\mu\right].\qquad(5.90)$$

Здесь эффективные источники имеют вид

$$M_{\mu\nu}-\frac{1}{2m^2}(\partial_\mu J_\nu-\partial_\nu J_\mu)\quad\text{и}\quad K_\mu-\frac{1}{m^2}\partial_\mu K.$$

Мы закончим этот параграф замечаниями разного рода. Прежде всего напомним, что хотя соответствующие примеры здесь и не приводились, имеется возможность переопределения источников и полей путем некоторых их линейных преобразований, изменяющих структуру полевых уравнений, а следовательно, и функций Лагранжа. Далее отметим, что весь наш анализ относился к вакуумной амплитуде $\langle 0_+|0_-\rangle^S$. Если исходить из других функций преобразования, то это найдет свое отражение в граничных условиях в принципе действия. Рассмотрим для определенности функцию преобразования $\langle 0_-|0_-\rangle^{S_-,\,S_+}$, описывающую замкнутый во времени цикл. В этом случае действие распадается на два сходных слагаемых, имеющих противоположные знаки и связанных с двумя разными направлениями развития во времени:

$$W(S_-,S_+)=\int\Big(S_+\gamma\chi_+-\frac{1}{2}\chi_+\gamma^F\chi_+\Big)-$$
$$-\int\Big(S_-\gamma\chi_--\frac{1}{2}\chi_-\gamma^F\chi_-\Big).\qquad(5.91)$$

Граничные условия здесь требуют, чтобы до начала действия источников поле χ_+ содержало только отрицательные частоты, а поле χ_- — только положительные частоты и чтобы после выключения источников поля χ_+ и χ_- были равны друг другу. Из последнего условия вытекает следующий результат. Хотя можно считать, что интегрирование в формуле (5.91) проводится по всему пространству-времени, вклады от областей, более поздних по отношению к действию источников, полностью взаимно уничтожаются. Поэтому область интегрирования можно сделать полубесконечной, ограничив ее произвольной пространственно-подобной поверхностью, в будущем по отношению к которой все пространство свободно от источников. Наше последнее замечание касается связи между функциями Лагранжа для частиц с конечной и нулевой массой.

Как известно, совокупность состояний частицы со спином s распадается при $m \to 0$ на состояния с разными значениями спиральности: $\pm s$, $\pm (s-1)$, ... Поэтому описание всех безмассовых частиц со спиральностями $\leqslant s$, различающимися на целые числа, должно содержаться в описании частицы с конечной массой и спином s. Об этом кратко говорилось в главе, посвященной источникам. Здесь же мы хотим проследить соответствующее разложение для поля на примере двух важных частных случаев. Зададим векторное поле и источник частиц с единичным спином и массой m равенствами

$$\varphi_\mu = A_\mu - \frac{1}{m}\,\partial_\mu\varphi, \qquad \partial_\mu J^\mu = mK, \tag{5.92}$$

последнее из которых представляет собой соотношение (3.44) из гл. 2. Тогда действие (5.18), (5.19) примет вид

$$W = \int (dx) \Big[J^\mu A_\mu + K\varphi - \frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - \\ - \frac{1}{2}(mA^\mu - \partial^\mu\varphi)(mA_\mu - \partial_\mu\varphi)\Big]. \tag{5.93}$$

В пределе при $m \to 0$ это действие распадается на две части. Одна из них имеет вид

$$W(J) = \int dx \Big[J^\mu A_\mu - \frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\Big], \\ \partial_\mu J^\mu = 0 \tag{5.94}$$

и, как об этом более подробно будет говориться позднее, описывает фотон, а другая равна

$$W(K) = \int (dx) \Big[K\varphi - \frac{1}{2}\,\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi \Big] \tag{5.95}$$

и соответствует безмассовой частице с нулевым спином (спиральностью). Заметим, что происхождение функции Лагранжа для бесспиновой частицы целиком связано с массовым членом исходной функции Лагранжа и, если в (5.19) просто положить $m = 0$, то мы ее проглядели бы.

Другой пример — спин 2, для которого мы напишем тензорное поле и его источник в виде

$$\varphi_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\frac{1}{\sqrt{2}\,m}(\partial_\mu A_\nu+\partial_\nu A_\mu)+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{2}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu\varphi+g_{\mu\nu}\varphi\right), \qquad (5.96)$$

и

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}=\frac{m}{\sqrt{2}}J^\mu, \quad \partial_\mu J^\mu=m\left(\sqrt{3}K-\frac{1}{\sqrt{2}}T\right), \qquad (5.97)$$

где два последних равенства представляют собой соотношения (4.21) из гл. 2. Эти величины обладают тем свойством, что

$$\int (dx)\,T^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}=\int (dx)\left[T^{\mu\nu}h_{\mu\nu}+J^\mu A_\mu+K\varphi\right]. \qquad (5.98)$$

Подставив (5.96) в действие (5.30) и (5.31) и перейдя к пределу при $m\to 0$, мы получим три независимых члена. Два из них вновь приводят к выражениям для действия в случае единичной (5.94) и нулевой (5.95) спиральности, а третий имеет вид

$$W(T)=\int (dx)\Big[T^{\mu\nu}h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}(\partial^\lambda h^{\mu\nu}\partial_\lambda h_{\mu\nu}-\partial^\lambda h\partial_\lambda h)-$$
$$-\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h+\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial^\lambda h_{\lambda\nu}\Big],$$
$$\partial_\mu T^{\mu\nu}=0. \qquad (5.99)$$

Это выражение позднее мы также рассмотрим подробнее и увидим, что оно представляет собой действие (или одно из действий) для гравитационного поля. На этот раз, как видно из соотношения

$$\int (dx)\left[-\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu+\partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu+\partial_\nu A_\mu)+(\partial_\mu A^\mu)^2\right]=$$
$$=\int (dx)\left(-\frac{1}{4}\right)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu), \qquad (5.100)$$

происхождение фотонной функции Лагранжа целиком обязано массовому члену частицы со спином 2, но в действие для скалярного поля дают вклад обе части исходной функции Лагранжа. Таким образом, открывается интересная возможность объединить действия для безмассовых частиц с разными спиральностями, связав их с одним выражением для действия частицы с конечной массой. Кроме того, между различными спинами существуют такие соотношения, которые позволяют прийти к общему во всех случаях описанию заданной спиральности.

§ 6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ И ПОТОКИ; ЗАРЯД

Вакуумная амплитуда $\langle 0_+|0_-\rangle^s$ не изменяется при трансляциях или вращениях источников как целого; в случае заряженных частиц она остается неизменной при едином фазовом преобразовании источников. Физическую информацию получают, рассматривая относительное преобразование разных частей распределения источника. Относительная трансляция дает информацию об энергии-импульсе, относительное вращение — об угловом моменте, а относительное смещение фазы несет сведения о заряде. Если распределение источника состоит из причинно-упорядоченных неперекрывающихся частей, рассматриваемых в качестве его составных элементов, то мы получим сведения об интегральных физических характеристиках — о полной энергии и о полном заряде. На следующем этапе рассматриваются преобразования, произвольным образом меняющиеся в пространстве-времени и поэтому снабжающие нас более локализованными данными о различных физических величинах. Поля служат инструментом для передачи этой информации.

Для иллюстрации рассмотрим бесспиновые заряженные частицы с массой m, описываемые действием

$$W = \int (dx)\, [K(x)\, \varphi(x) + \mathcal{L}], \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2}[\partial^\mu\varphi\, \partial_\mu\varphi + m^2\varphi^2], \tag{6.1}$$

где $K(x)$ и $\varphi(x)$ будут теперь двухкомпонентными объектами в соответствующем евклидовом зарядовом пространстве. Инвариантность относительно постоянного фазового преобразования источника

$$\overline{K}(x) = e^{iq\alpha}K(x), \tag{6.2}$$

вытекает из существования компенсирующего преобразования поля

$$\overline{\varphi}(x) = e^{iq\alpha}\varphi(x), \tag{6.3}$$

так как все евклидовы произведения в формуле (6.1) не меняются при общем вращении. Пусть теперь α становится произвольной функцией точки. Для простоты мы рассмотрим инфинитезимальное фазовое преобразование, обобщив преобразование (6.2) следующим образом:

$$\delta K(x) = -iq\delta\alpha(x)\, K(x). \tag{6.4}$$

Соответствующая вариация действия равна:

$$\delta W = \int (dx)\, \varphi(x)\, \delta K(x) = \int (dx)\, \varphi(x)\, iqK(x)\, \delta\alpha(x). \tag{6.5}$$

Но мы опять можем ввести компенсирующее преобразование поля

$$\delta\varphi(x) = iq\delta\alpha(x)\, \varphi(x), \tag{6.6}$$

при котором $K\varphi$ и φ^2 остаются неизменными, а инвариантность W нарушается только из-за пространственно-временных производных, которые теперь действуют на $\delta\alpha(x)$:

$$\delta(\partial_\mu\varphi(x)) = iq\delta\alpha(x)\, \partial_\mu\varphi(x) + iq\varphi(x)\, \partial_\mu\delta\alpha(x). \tag{6.7}$$

Таким образом, этот метод расчета дает

$$\delta W = -\int (dx)\, j^\mu (x)\, \partial_\mu \delta\alpha (x), \tag{6.8}$$

где

$$j^\mu (x) = \partial^\mu \varphi (x)\, iq\varphi (x). \tag{6.9}$$

Проводя интегрирование по частям и сравнивая результаты, полученные двумя разными способами, мы будем иметь

$$\partial_\mu j^\mu (x) = \varphi (x)\, iqK (x). \tag{6.10}$$

В справедливости этого равенства можно убедиться и непосредственно, используя полевые уравнения. Если его правая часть обращается в нуль, что справедливо в областях, свободных от источников, то мы придем к локальной формулировке некоторого закона сохранения. Диагонализуя зарядовую матрицу q и вводя комплексные источники, мы для действия получим

$$W = \int (dx)\, [K^*\varphi + K\varphi^* - \partial^\mu\varphi^*\, \partial_\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi], \tag{6.11}$$

а для j^μ будем иметь

$$j^\mu = i\, (\partial^\mu\varphi^*\varphi - \varphi^*\, \partial^\mu\varphi), \qquad \partial_\mu j^\mu = i\, (\varphi^* K - K^*\varphi), \tag{6.12}$$

где

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\sqrt{2}} (K_{(1)} - iK_{(2)}), \qquad & K^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (K_{(1)} + iK_{(2)}), \\ \varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{(1)} - i\varphi_{(2)}), \qquad & \varphi^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{(1)} + i\varphi_{(2)}), \end{aligned} \tag{6.13}$$

причем следует напомнить, что φ^* не является величиной, комплексно-сопряженной с φ. Совершенно аналогичные выводы справедливы в случае действия, отвечающего замкнутому во времени вакуумному циклу; при этом у δW появляются соответствующие алгебраические знаки, которые указывают на направление хода времени.

Используя изложенную нами более общую схему, мы теперь заново исследуем причинно-упорядоченную пару источников $K = K_1 + K_2$, считая, что фаза у K_2 изменяется на постоянную величину, а фаза у K_1 остается фиксированной. Как мы знаем, для рассматриваемого инфинитезимального преобразования

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | 0_- \rangle^K &= \sum_{\{n\}} \langle 0_+ | \{n\}\rangle^{K_1} \langle \{n\} | 0_- \rangle^{K_2} \to \\ &\to \sum \langle 0_+ | \{n\}\rangle^{K_1} [1 + i\delta\alpha Q]\, \langle \{n\} | 0_- \rangle^{K_2}, \end{aligned} \tag{6.14}$$

где

$$Q(\{n\}) = \sum_{pq} q n_{pq}, \tag{6.15}$$

или

$$\delta \langle 0_+ | 0_- \rangle^K = i\delta\alpha \sum \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{K_1} Q \langle \{n\} | 0_- \rangle^{K_2}. \tag{6.16}$$

Это средневзвешенное значение заряда похоже на его математическое ожидание. И действительно, эти две величины совпадают, если мы рассматриваем функцию для замкнутого во времени цикла, смещая фазу у $K_{(+)}$, а затем отождествляя оба источника с K:

$$\delta \langle 0_- | 0_- \rangle^{K_{(-)}, K_{(+)}} = i\delta\alpha \sum \langle 0_- | \{n\} \rangle^K Q \langle \{n\} | 0_- \rangle^K = \\ = i\delta\alpha \langle Q \rangle_0^K; \tag{6.17}$$

эта величина будет совпадать, например, с левой частью формулы (2.123) из гл. 2, если последнюю написать для инфинитезимального преобразования. Чтобы применить к такому причинному расположению источников соотношение (6.8), разделим K_1 и K_2 некоторой пространственно-подобной поверхностью, которая во всех остальных отношениях произвольна, и положим $\delta\alpha(x)$ равным нулю в будущем этой поверхности и равным константе $\delta\alpha$ в ее прошлом. Из-за наличия производной ступенчатой функции $-\partial_\mu \delta\alpha(x)$ все интегрирование сведется к интегрированию по поверхности, и мы получим

$$\frac{\delta \langle 0_+ | 0_- \rangle^K}{\langle 0_+ | 0_- \rangle^K} = i\delta W = i\delta\alpha \int d\sigma_\mu j^\mu(x), \tag{6.18}$$

что приводит к следующему отождествлению:

$$\int d\sigma_\mu j^\mu = \frac{\sum \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{K_1} Q \langle \{n\} | 0_- \rangle^{K_2}}{\langle 0_+ | 0_- \rangle^K}. \tag{6.19}$$

При описании замкнутого во времени цикла все интегрирования проводятся по полубесконечной области, ограниченной некоторой пространственно-подобной поверхностью, расположенной в будущем по отношению к действию источников. В таком случае, полагая $\delta\alpha_-(x) = 0$, $\delta\alpha_+(x) = \delta\alpha$, получаем

$$\delta W = -\int (dx)\, j^\mu(x)\, \partial_\mu \delta\alpha_+(x) + \int (dx)\, j^\mu(x)\, \partial_\mu \delta\alpha_-(x) = \\ = \delta\alpha \int d\sigma_\mu j^\mu, \tag{6.20}$$

что приводит к следующему отождествлению:

$$\int d\sigma_\mu j^\mu = \langle Q \rangle_0^K. \tag{6.21}$$

В последнем случае величина $j^\mu(x)$ строится из вещественных или взаимно-сопряженных запаздывающих полей и является вещественной функцией.

Очевидно, что величина $j^\mu(x)$ дает нам пространственно-временное описание распределения и движения заряда — она представляет собой вектор потока заряда, или вектор тока. Вычислим ее для одночастичного состояния. Обращаясь к формулам (1.79) — (1.81), мы увидим, что в области, расположенной между излучающим источником K_2 и поглощающим источником K_1, поля, соответствующие положительно заряженной частице с импульсом p, имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (d\omega_p)^{1/2} e^{ipx} iK_{2p+}, \\ \varphi^*(x) &= (d\omega_p)^{1/2} e^{-ipx} iK^*_{1p+}, \end{aligned} \tag{6.22}$$

и если имеется только такое возбуждение, то

$$j^\mu(x) = 2p^\mu d\omega_p (iK^*_{1p+})(iK_{2p+}). \tag{6.23}$$

Входящие сюда в качестве сомножителей источники соответствуют актам испускания и поглощения [см. соотношение (6.19)]; ток, связанный с самой частицей, равен $2p^\mu\, d\omega_p$. Мы можем проверить этот результат, убедившись, что полный заряд равен единице. Сначала подчеркнем, что постоянный ток — это некоторая идеализация, которая допустима во внутренней области пучка, но теряет свою силу вблизи его границ. Разумеется, импульс нельзя задать с произвольной степенью точности, как в формуле (6.22); можно лишь говорить, что он лежит в некоторой ячейке малых, но конечных размеров, имеющей инвариантную меру $\Delta\omega_p$. Таким образом, чтобы обеспечить правильное описание, нужно произвести замену

$$(d\omega_p)^{1/2} e^{ipx} \to \frac{1}{(\Delta\omega_p)^{1/2}} \int\limits_{\Delta\omega_p} d\omega_p e^{ipx}. \tag{6.24}$$

Чтобы найти полный заряд, можно проинтегрировать плотность заряда $j^0(x)$ по всему пространству в фиксированный момент времени:

$$\begin{aligned} Q(1_{p+}) &= \frac{2p^0}{\Delta\omega_p} \int (d\mathbf{x}) \left| \int\limits_{\Delta\omega_p} d\omega_p \exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}) \right|^2 = \\ &= \frac{1}{\Delta\omega_p} \int\limits_{\Delta\omega_p} d\omega_\mathbf{p} (d\mathbf{p}') \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = 1. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Точно так же для отрицательно заряженной частицы

$$\varphi^*(x) = (d\omega_p)^{1/2} e^{ipx} iK_{2p-}, \qquad \varphi(x) = (d\omega_p)^{1/2} e^{-ipx} iK^*_{1p-}, \tag{6.26}$$

и

$$j^\mu(x) = -2p^\mu d\omega_p (iK^*_{1p-})(iK_{2p-}), \tag{6.27}$$

причем тем же способом легко убедиться в том, что полный заряд частицы равен —1. Запаздывающие поля, возникающие при описании замкнутого во времени цикла, которые связаны с определенным значением импульса и с положительным или отрицательным зарядом, даются равенствами [см. формулы (1.84)]

$$\varphi(x) = (d\omega_p)^{1/2} e^{ipx} i K_{p+}, \tag{6.28}$$

и

$$\varphi^*(x) = (d\omega_p)^{1/2} e^{ipx} i K_{p-}, \tag{6.29}$$

а также комплексно-сопряженными им выражениями. В этом случае вещественные токи имеют вид

$$j^\mu(x) = \pm 2p^\mu d\omega_p |K_{p\pm}|^2. \tag{6.30}$$

Каждая такая величина, равная произведению тока одной частицы на среднее число частиц данного типа, испущенных источником, представляют собой вклад в математическое ожидание тока, приписываемый определенным импульсу и заряду. Заметим, что, рассматривая одно-единственное значение импульса, мы не должны забывать про интерференционные члены, которые появляются в этих квадратичных по полю выражениях при наличии нескольких частиц с разными импульсами. Подобные интерференционные члены исчезают в ходе пространственных интегрирований, необходимых при вычислении полного заряда.

Уравнения несохранения (6.10) и (6.12) устанавливают связь между частицами и зарядами, наблюдающимися после действия источника, и интенсивностью источника. Рассмотрим их в физических условиях замкнутого во времени цикла, полагая $K_{(-)} = K_{(+)} = K$. Проводя интегрирование по области, занятой источником, получаем

$$\langle Q\rangle_0^K = \int d\sigma_\mu j^\mu = i\int (dx)(\varphi^*_{\text{зап}} K - K^* \varphi_{\text{зап}}), \tag{6.31}$$

где поверхностный интеграл берется по произвольной пространственно-подобной поверхности, расположенной в будущем по отношению к области, занятой источником. На любой поверхности, предшествующей во времени действию источника, запаздывающие поля и ток равны нулю. Переписав правую часть последнего равенства в явном виде, будем иметь

$$\langle Q\rangle_0^K = \int (dx)(dx') K^*(x)\, i\,[\Delta_{\text{зап}}(x'-x) - \Delta_{\text{зап}}(x-x')]\, K(x'). \tag{6.32}$$

Но, согласно соотношениям (1.27) и (1.34),

$$\frac{1}{i}[\Delta_{\text{зап}}(x-x') - \Delta_{\text{зап}}(x'-x)] = \frac{1}{i}[\Delta_{\text{зап}}(x-x') - \Delta_{\text{опер}}(x-x')] =$$
$$= \Delta^{(+)}(x-x') - \Delta^{(-)}(x-x'), \tag{6.33}$$

и мы приходим к результату

$$\langle Q\rangle_0^K = \int d\omega_p [\,|K(p)|^2 - |K^*(p)|^2] = \\ = \sum_p [\,|K_{p+}|^2 - |K_{p-}|^2], \tag{6.34}$$

который и следовало ожидать.

Мы еще не говорили о неоднозначности вектора тока, определяемого в общем случае равенством (6.8). К заданному вектору $j^\mu(x)$ можно добавить произвольное выражение вида $\partial_\nu m^{\mu\nu}(x)$, где $m^{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор, ибо

$$-\int (dx)\,\partial_\nu m^{\mu\nu}(x)\,\partial_\mu\delta\alpha(x) = \int (dx)\,\partial_\mu\partial_\nu m^{\mu\nu}(x)\,\delta\alpha(x) = 0. \tag{6.35}$$

Дополнительное слагаемое в плотности заряда, равное $\nabla\cdot\mathbf{n}(x)$, где $n_k = m^0{}_k$, приводит к тому, что к заряду, связанному с трехмерным объемом, добавляется интеграл по двумерной поверхности:

$$\int (d\mathbf{x})\,\nabla\cdot\mathbf{n}(x) = \int d\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}(x). \tag{6.36}$$

Следовательно, полный заряд системы не изменяется, а также не приписывается никакого вектора потока однородному распределению, поскольку он фиксируется на основе тех же соображений, что и полный заряд. Почему же нельзя игнорировать эту неоднозначность и просто брать то выражение для тока, которое естественным образом связано с функцией Лагранжа? Потому что разные функции Лагранжа могут давать разные токи. Для иллюстрации рассмотрим пример единичного спина.

Функция Лагранжа второго порядка (5.19) дает выражения

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= (\partial^\mu\varphi^\nu(x) - \partial^\nu\varphi^\mu(x))\,iq\varphi_\nu(x), \\ \partial_\mu j^\mu(x) &= \varphi^\mu(x)\,iqJ_\mu(x), \end{aligned} \tag{6.37}$$

а функция Лагранжа первого порядка (5.28) — выражения

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= G^{\mu\nu}(x)\,iq\varphi_\nu(x), \\ \partial_\mu j^\mu(x) &= \varphi^\mu(x)\,iqJ_\nu(x) + \frac{1}{2}G^{\mu\nu}(x)\,iqM_{\mu\nu}(x). \end{aligned} \tag{6.38}$$

В отсутствие источника $M_{\mu\nu}$ эти выражения для тока эквивалентны. Но если взять функцию Лагранжа (5.23), то мы получим

$$j^\mu = \partial^\mu\varphi^\nu iq\varphi_\nu + \varphi^\mu iq\partial_\nu\varphi^\nu = (\partial^\mu\varphi^\nu - \partial^\nu\varphi^\mu)\,iq\varphi_\nu + \partial_\nu(\varphi^\mu iq\varphi^\nu), \tag{6.39}$$

где величина $\varphi^\mu iq\varphi^\nu$ действительно представляет собой антисимметричный тензор. Последнее выражение для тока оказывается несколько более простым, так как вне области, занятой источниками, величина $\partial_\nu \varphi^\nu$ обращается в нуль и полный заряд можно вычислять как

$$\int d\sigma_\mu j^\mu = \int d\sigma_\mu \partial^\mu \varphi^\nu iq\varphi_\nu. \tag{6.40}$$

Применим это выражение к области, расположенной между двумя причинно-разделенными источниками J_1^μ и J_2^μ, в которой поля [см. формулу (3.3)] таковы:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(x) &= i\int (dx')\left[\int d\omega_p e^{ip(x-x')}\left(g_{\mu\nu}+\frac{1}{m^2}p_\mu p_\nu\right)\right]J_2^\nu(x') + \\ &+ i\int (dx')\left[\int d\omega_p e^{-ip(x-x')}\left(g_{\mu\nu}+\frac{1}{m^2}p_\mu p_\nu\right)\right]J_1^\nu(x') = \\ &= \sum_{p\lambda q}(d\omega_p)^{1/2} e_{\mu p\lambda q} e^{ipx} iJ_{2p\lambda q} + \sum_{p\lambda q}(d\omega_p)^{1/2} e^*_{\mu p\lambda q} e^{-ipx} iJ^*_{1p\lambda q}. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Свойства собственных векторов

$$qe^\mu_{p\lambda q'} = q' e^\mu_{p\lambda q'}, \quad e^{\mu *}_{p\lambda q'} q = e^{\mu *}_{p\lambda q'} q' \tag{6.42}$$

и условие нормировки

$$e^{\mu *}_{p\lambda q} e_{\mu p\lambda q} = 1 \tag{6.43}$$

гарантируют, что вклад в j^μ от определенного состояния частицы будет равен

$$j^\mu = q2p^\mu d\omega_p (iJ^*_{1p\lambda q})(iJ_{2p\lambda q}). \tag{6.44}$$

Очевидно, что выражение для потока $2p^\mu d\omega_p$, приходящегося на одну частицу, обладает универсальной применимостью. Как мы уже упоминали, оно фиксируется условием нормировки, точным выражением которого является процедура, описанная при выводе равенства (6.25).

Можно подумать, что неоднозначность в выражениях для тока свойственна функциям Лагранжа второго порядка, в которых по-разному расставляются входящие в них две производные, и что она не возникала бы, если бы брались функции Лагранжа первого порядка. Чтобы рассеять эту иллюзию, достаточно рассмотреть заряженные частицы со спином 2, для которых имеются две разные конструкции первого порядка. Из функции Лагранжа (5.34) мы получим

$$\begin{aligned} j^\lambda &= G^{\lambda\mu\nu} iq\varphi_{\mu\nu} + G_\mu iq\varphi^{\lambda\mu} - G^\lambda iq\varphi \rightarrow \\ &\rightarrow \partial^\lambda \varphi^{\mu\nu} iq\varphi_{\mu\nu} - \partial^\nu(\varphi^{\lambda\mu} iq\varphi_{\mu\nu}), \end{aligned} \tag{6.45}$$

причем последнее выражение применимо в области, не занятой источниками; в то же время (5.41) дает

$$\begin{aligned} j^\lambda &= -H^{\mu\nu\lambda} iq\varphi_{\mu\nu} + H_\mu iq\varphi^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}(H^\lambda - {}^\lambda H)\, iq\varphi \rightarrow \\ &\rightarrow \partial^\lambda \varphi^{\mu\nu} iq\varphi_{\mu\nu} - 2\partial^\nu(\varphi^{\lambda\mu} iq_{\mu\nu}). \end{aligned} \tag{6.46}$$

Применив метод фазовых преобразований к действию (3.50) и (3.51) для спина $^1/_2$, мы получим ток

$$j^\mu(x) = \frac{1}{2}\psi(x)\gamma^0\gamma^\mu q\psi(x) \tag{6.47}$$

вместе с соотношением

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \psi(x)\gamma^0 iq\eta(x), \tag{6.48}$$

которое следует и из полевых уравнений. Поле в интервале между причинно-разделенными источниками η_1 и η_2 равно [см. формулы (2.14)]

$$\psi(x) = \sum_{p\sigma q}[\psi_{p\sigma q}(x)\, i\eta_{2p\sigma q} + \psi_{p\sigma q}(x)^*\, i\eta^*_{1p\sigma q}]; \tag{6.49}$$

напомним, что здесь

$$\begin{gathered}\psi_{p\sigma q}(x) = (2m\, d\omega_p)^{1/2}\, u_{p\sigma q}e^{ipx},\\ u^*_{p\sigma q}\gamma^0 u_{p\sigma q} = 1.\end{gathered} \tag{6.50}$$

Вклад в ток j^μ, обязанный одночастичному состоянию, равен

$$j^\mu(x) = q\psi_{p\sigma q}(x)^*\gamma^0\gamma^\mu\psi_{p\sigma q}(x)\,(i\eta^*_{1p\sigma q})\,(i\eta_{2p\sigma q}), \tag{6.51}$$

что приводит к следующему значению потока, приходящегося на одну частицу:

$$\psi_{p\sigma q}(x)^*\gamma^0\gamma^\mu\psi_{p\sigma q}(x) = 2m\, d\omega_p u^*_{p\sigma q}\gamma^0\gamma^\mu u_{p\sigma q} = 2p^\mu\, d\omega_p. \tag{6.52}$$

К этому результату, который и следовало ожидать, приводит соотношение

$$u^*_{p\sigma q}\gamma^0\gamma^\mu u_{p\sigma q} = \frac{p^\mu}{m}, \tag{6.53}$$

вывод которого основан на использовании условия нормировки (6.50) [см. также уравнения (6.97) из гл. 2]:

$$0 = u^*_{p\sigma q}\gamma^0\{\gamma p + m,\ \gamma^\mu\}\, u_{p\sigma q} = -2p^\mu + 2mu^*_{p\sigma q}\gamma^0\gamma^\mu u_{p\sigma q}. \tag{6.54}$$

Вместо того, чтобы при вычислении зарядов интегрировать по поверхности вектор j^μ, можно также рассматривать объемные интегралы от $\partial_\mu j^\mu$ по области, занятой источником η_2. Поле, связанное с этим источником, при таком расчете не дает никакого вклада:

$$\int (dx)\,(dx')\,\eta_2(x)\, iq\gamma^0 G_+(x-x')\,\eta_2(x') = 0, \tag{6.55}$$

так как из-за наличия антисимметричной матрицы q соответствие между антикоммутативностью источников и антисимметрией ядра

$\gamma^0 G_+(x-x')$ нарушается. Следовательно,

$$\int d\sigma_\mu j^\mu = \int (dx) \left[\sum_{p\sigma q'} \psi_{p\sigma q'}(x)^* i\eta^*_{1p\sigma q'}\right] \gamma^0 i q \eta_2(x) =$$

$$= \sum_{p\sigma q} (i\eta^*_{1p\sigma q})\, q\, (i\eta_{2p\sigma q}), \tag{6.56}$$

откуда видно, что заряды, приписываемые одночастичным состояниям, равны $q = \pm 1$. Хотя и такая интерпретация довольно ясна, может быть, будет полезным рассмотреть вопрос более формально, основываясь на аналоге соотношения (6.19):

$$\left[\int d\sigma_\mu j^\mu\right] \langle 0_+ | 0_- \rangle^\eta = \sum \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{\eta_1} Q(\{n\}) \langle \{n\} | 0_- \rangle^{\eta_2}. \tag{6.57}$$

Чтобы проанализировать его левую часть

$$\sum \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{\eta_1} \left[\int d\sigma_\mu j^\mu\right] \langle \{n\} | 0_- \rangle^{\eta_2}, \tag{6.58}$$

достаточно заметить, что

$$\langle 0_+ | \{n\} \rangle^{\eta_1} i\eta^*_{1a} i\eta_{2a} \langle \{n\} | 0_- \rangle^{\eta_2} = \\ = \begin{cases} n_a = 1: \ 0, \\ n_a = 0: \ \langle 0_+ | \{n + 1_a\} \rangle^{\eta_1} \langle \{n + 1_a\} | 0_- \rangle^{\eta_2}, \end{cases} \tag{6.59}$$

и в результате для значений заряда мы получим

$$Q(\{n\}) = \sum_{p\sigma q} q n_{p\sigma q}; \qquad n_{p\sigma q} = 0,\ 1. \tag{6.60}$$

Как уже подчеркивалось, произвол в выборе вектора потока заряда связан не с возможностью добавления к нему любого члена вида $\partial_\nu m^{\mu\nu}$, а с тем, что данную физическую систему можно описывать разными функциями Лагранжа. Это справедливо также и для спина $1/2$. Ток, получаемый из (5.73), равен:

$$j^\mu = \frac{1}{2} \psi\gamma \left(\frac{1}{3} \sum \gamma^\mu_\alpha\right) q\psi + \sum_{\alpha<\beta} \psi\gamma \frac{1}{2} (\gamma^\mu_\alpha - \gamma^\mu_\beta)\, q\psi_{[\alpha\beta]} + \\ + 3\psi_{[23]}\gamma\gamma^\mu_1 q\psi_{[23]} + \ldots . \tag{6.61}$$

Вне области расположения источников вспомогательные поля $\psi_{[\alpha\beta]}$ обращаются в нуль и

$$(\gamma^\mu_\alpha - \gamma^\mu_\beta)\, \partial_\mu \psi = 0. \tag{6.62}$$

Соответствующее выражение для спинора третьего ранга записывается как

$$2^{3/2} \psi_{\zeta_1\zeta_2\zeta_3} = (i\gamma_5\gamma^0)_{\zeta_1\zeta_2} \Psi_{\zeta_3} + \frac{1}{m} (\gamma_5\gamma^\mu\gamma^0)_{\zeta_1\zeta_2} \partial_\mu \Psi_{\zeta_3}. \tag{6.63}$$

Оно антисимметрично по ζ_1 и ζ_2, причем уравнение (6.62), принимающее теперь вид

$$(i\gamma^\mu\gamma_5\gamma^0)_{\zeta_1\zeta_2}\,\partial_\mu\Psi+\frac{1}{m}(\gamma^\mu\gamma_5\gamma^\nu\gamma^0)_{\zeta_1\zeta_2}\,\partial_\mu\partial_\nu\Psi=$$
$$=(i\gamma_5\gamma^0)_{\zeta_1\zeta_2}\,\gamma^\mu\partial_\mu\Psi+\frac{1}{m}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^0)_{\zeta_1\zeta_2}\,\partial_\mu\gamma^\nu\partial_\nu\Psi, \qquad (6.64)$$

где для третьего спинорного индекса мы вернулись к матричным обозначениям, удовлетворяется, так как

$$\left[\gamma^\mu\frac{1}{i}\,\partial_\mu+m\right]\Psi=0. \qquad (6.65)$$

Ток, получаемый из первого слагаемого (6.61) в результате подстановки в него выражения (6.63), равен:

$$j^\mu=\frac{2}{3}\,\frac{1}{4m}\left(\Psi\gamma^0q\frac{1}{i}\,\partial^\mu\Psi-\frac{1}{i}\,\partial^\mu\Psi\gamma^0q\Psi\right)+$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\,\Psi\gamma^0\gamma^\mu q\Psi-\frac{1}{3}\,\frac{1}{4m^2}\,\partial^2\left(\frac{1}{2}\,\Psi\gamma^0\gamma^\mu q\Psi\right). \qquad (6.66)$$

Используя тождество

$$0=\Psi\gamma^0\gamma^\mu q\left[\gamma^\nu\frac{1}{i}\,\partial_\nu+m\right]\Psi+\left[-\frac{1}{i}\,\partial_\nu\Psi\gamma^0\gamma^\nu+m\Psi\gamma^0\right]\gamma^\mu q\Psi=$$
$$=2m\Psi\gamma^0\gamma^\mu q\Psi-\left(\Psi\gamma^0q\frac{1}{i}\,\partial^\mu\Psi-\frac{1}{i}\,\partial^\mu\Psi\gamma^0q\Psi\right)-\partial_\nu(\Psi\gamma^0\sigma^{\mu\nu}q\Psi), \qquad (6.67)$$

мы представим его в виде

$$j^\mu=\frac{1}{2}\,\Psi\gamma^0\gamma^\mu q\Psi+\partial_\nu m^{\mu\nu}, \qquad (6.68)$$

где

$$m_{\mu\nu}=-\frac{2}{3}\,\frac{1}{2m}\,\frac{1}{2}\,\Psi\gamma^0\sigma_{\mu\nu}q\Psi+$$
$$+\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2m)^2}\left[\partial_\mu\left(\frac{1}{2}\,\Psi\gamma^0\gamma_\nu q\Psi\right)-\partial_\nu\left(\frac{1}{2}\,\Psi\gamma^0\gamma_\mu q\Psi\right)\right]. \qquad (6.69)$$

Единственный член, в который не входят производные по координатам,— это слагаемое с $\sigma_{\mu\nu}$. Аналогичным образом можно сравнить и разные способы описания частиц со спинами $^3/_2$, $^5/_2$, ..., но соответствующие выкладки здесь оказываются более сложными.

Метод переменных фазовых преобразований мы применяли для более детального описания среднего распределения заряда. Столь же подробную информацию он дает и о флуктуациях заряда. Для иллюстрации мы рассмотрим бесспиновые частицы, ограничиваясь исследованием простейших флуктуационных характеристик. Возьмем вакуумную амплитуду для замкнутого во времени цикла с источниками

$$K_{(+)}(x) = e^{iq\alpha}K(x), \qquad K_{(-)}(x) = K(x), \tag{6.70}$$

которая равна:

$$\langle 0_- | 0_- \rangle^{K_{(-)},\, K_{(+)}} = \sum \langle 0_- | \{n\} \rangle^{K} e^{iQ\alpha} \langle \{n\} | 0_- \rangle^{K}, \tag{6.71}$$

или

$$\exp[iW(K_{(-)}, K_{(+)})] = \langle e^{iQ\alpha} \rangle_0^K. \tag{6.72}$$

Инфинитезимальное изменение фазовой постоянной α дает

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \int d\sigma_\mu j^\mu_{(+)} = \frac{\langle Q e^{iQ\alpha} \rangle}{\langle e^{iQ\alpha} \rangle}. \tag{6.73}$$

Это соотношение при $\alpha = 0$ мы уже рассматривали. Дифференцируя его один раз и полагая затем $\alpha = 0$, получаем

$$\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2 = \int d\sigma_\mu j^\mu_{\text{флукт}}, \tag{6.74}$$

где

$$j^\mu_{\text{флукт}}(x) = \frac{\partial}{\partial i\alpha} j^\mu_{(+)}(x) \Big|_{\alpha=0} \tag{6.75}$$

представляет собой вектор потока флуктуаций заряда.

При вычислении этого вектора для одного из полей $\varphi_{(+)}$ в выражении

$$j^\mu_{(+)}(x) = \partial^\mu \varphi_{(+)}(x)\, iq \varphi_{(+)}(x), \tag{6.76}$$

мы положим $\alpha = 0$, в результате чего оно превратится в $\varphi_{\text{зап}}(x)$. Используя для другого поля формулу (1.19), соответствующую вакуумному начальному состоянию, получаем

$$\frac{\partial}{\partial i\alpha} \varphi_{(+)}(x) \Big|_{\alpha=0} = q\varphi(x), \tag{6.77}$$

где

$$\varphi(x) = \int (dx')\, \Delta_+(x - x')\, K(x'). \tag{6.78}$$

Исходя из этих полей, мы будем иметь

$$j^\mu_{\text{флукт}}(x) = \varphi_{\text{зап}}(x) \frac{1}{i} \partial^\mu \varphi(x) - \varphi(x) \frac{1}{i} \partial^\mu \varphi_{\text{зап}}(x), \tag{6.79}$$

где использовано свойство заряда

$$q^2 = 1. \tag{6.80}$$

Полезно разложить $\varphi(x)$ на вещественную и мнимую части:

$$\varphi(x) = \varphi_R(x) + i\varphi_I(x), \tag{6.81}$$

где в соответствии с соотношением

$$\Delta_+(x-x')+\Delta_-(x-x')=\Delta_{\text{зап}}(x-x')+\Delta_{\text{опер}}(x-x') \tag{6.82}$$

вещественная компонента равна

$$\varphi_R(x)=\frac{1}{2}[\varphi_{\text{зап}}(x)+\varphi_{\text{опер}}(x)]. \tag{6.83}$$

В (6.79) входит функция $\varphi_{\text{зап}}(x)$, а при этих условиях опережающее поле обращается в нуль. Но вклады в φ от $^1/_2\ \varphi_{\text{зап}}$ сокращаются, и у нас остается вещественное выражение

$$j^{\mu}_{\text{флукт}}(x)=\varphi_{\text{зап}}(x)\,\partial^{\mu}\varphi_I(x)-\varphi_I(x)\,\partial^{\mu}\varphi_{\text{зап}}(x), \tag{6.84}$$

в котором

$$\varphi_I(x)=\int(dx')\frac{1}{2}[\Delta^{(+)}(x-x')+\Delta^{(-)}(x-x')]\,K(x'). \tag{6.85}$$

Так как последняя функция есть решение однородного полевого уравнения, мы получим

$$\partial_{\mu}j^{\mu}_{\text{флукт}}(x)=\varphi_I(x)\,K(x). \tag{6.86}$$

Флуктуацию полного заряда можно вычислить, проводя интегрирование по источнику:

$$\int d\sigma_{\mu}j^{\mu}_{\text{флукт}}=\int(dx)\,\partial_{\mu}j^{\mu}_{\text{флукт}}(x)=\int(dx)\,\varphi_I(x)\,K(x)=$$
$$=\int(dx)(dx')\,K(x)\,\Delta^{(+)}(x-x')\,K(x')=\sum_{pq}|K_{pq}|^2. \tag{6.87}$$

Последняя величина представляет собой среднее значение полного числа частиц, испущенных источником, и эта флуктуационная формула

$$\langle(Q-\langle Q\rangle)^2\rangle_0^K=\langle N_+ + N_-\rangle_0^K \tag{6.88}$$

содержится в более общем утверждении (2.123) из гл. 2. Величина $j^{\mu}_{\text{флукт}}$ является фактически вектором потока частиц.

§ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ И ПОТОКИ; МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Действие для бесспиновых частиц инвариантно относительно трансляции источника как целого:

$$\overline{K}(x)=K(x+X). \tag{7.1}$$

В формуле (6.1) это находит свое выражение в существовании компенсирующего преобразования поля

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x+X). \tag{7.2}$$

Для инфинитезимальных преобразований мы будем иметь

$$\delta K(x) = \delta X^\nu \partial_\nu K(x), \quad \delta\varphi(x) = \delta X^\nu \partial_\nu \varphi(x). \tag{7.3}$$

Мы предлагаем следующим образом обобщить эти выражения на случай, когда δX^ν — произвольная функция точки, обозначаемая через $\delta x^\nu(x)$:

$$\delta K(x) = \partial_\nu [\delta x^\nu(x) K(x)], \quad \delta\varphi(x) = \delta x^\nu(x) \partial_\nu \varphi(x). \tag{7.4}$$

Различие между ними необходимо для того, чтобы сохранить инвариантность члена с источником относительно компенсирующих изменений источника и поля:

$$\delta_{K,\varphi} \int (dx) K(x) \varphi(x) = \int (dx) \{\varphi \partial_\nu [\delta x^\nu K] + \partial_\nu \varphi \delta x^\nu K\} =$$
$$= \int (dx) \partial_\nu [\varphi \delta x^\nu K] = 0. \tag{7.5}$$

Изменение функции Лагранжа при преобразовании (7.4) таково:

$$\delta\mathscr{L} = \delta x^\nu \partial_\nu \mathscr{L} - \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi \partial_\mu \delta x_\nu; \tag{7.6}$$

при трансляции источника как целого в этом выражении появлялся бы только первый член. Это изменение можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\delta\mathscr{L} = \partial_\nu (\delta x^\nu \mathscr{L}) - t^{\mu\nu} \partial_\mu \delta x_\nu, \tag{7.7}$$

где

$$t^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu \varphi(x) \partial^\nu \varphi(x) + g^{\mu\nu} \mathscr{L}[\varphi(x)] = t^{\nu\mu}(x). \tag{7.8}$$

Приведем также соотношение

$$t = g_{\mu\nu} t^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi + 4\mathscr{L} = -\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - 2m^2\varphi^2 =$$
$$= -\partial^2 \left(\frac{1}{2}\varphi^2\right) - m^2\varphi^2 - K\varphi, \tag{7.9}$$

где при написании последнего равенства мы воспользовались полевым уравнением. Изменение действия, порождаемое вариацией источника (7.4), можно представить по-разному — как

$$\delta W(K) = \int (dx) \delta K(x) \varphi(x) = -\int (dx) K(x) \delta\varphi(x) =$$
$$= -\int (dx) K(x) \partial_\nu \varphi(x) \delta x^\nu(x) \tag{7.10}$$

и как

$$\delta W(K) = -\int (dx) t^{\mu\nu}(x) \partial_\mu \delta x_\nu(x). \tag{7.11}$$

Из сравнения этих двух выражений вытекает равенство

$$\partial_\mu t^{\mu\nu}(x) = -K(x) \partial^\nu \varphi(x), \tag{7.12}$$

в справедливости которого можно убедиться и прямым путем. Когда правая часть равна нулю, что действительно имеет место в областях, не содержащих источников, это равенство представляет собой локальную формулировку некоторого векторного закона сохранения.

Если рассматривается причинно-упорядоченная пара источников $K = K_1 + K_2$, то инфинитезимальное смещение источника K_2 как целого будет приводить к преобразованию

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^K = \sum \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{K_1} \langle \{n\} | 0_- \rangle^{K_2} \to$$
$$\to \sum \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{K_1} [1 + i\delta X^\mu P_\mu] \langle \{n\} | 0_- \rangle^{K_2}, \tag{7.13}$$

где

$$P_\mu(\{n\}) = \sum_{pq} p_\mu n_{pq}, \tag{7.14}$$

которое можно написать в виде

$$\delta \langle 0_+ | 0_- \rangle^K = i\delta X^\mu \sum \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{K_1} P_\mu \langle \{n\} | 0_- \rangle^{K_2}. \tag{7.15}$$

Аналогично этому в случае замкнутого во времени цикла смещение $K_{(+)}$ и его последующее отождествление с $K_{(-)} = K$ дает

$$\delta \langle 0_- | 0_- \rangle^{K_{(-)},\, K_{(+)}} = i\delta X^\mu \sum \langle 0_- | \{n\} \rangle^K P_\mu \langle \{n\} | 0_- \rangle_0^K = i\delta X^\mu \langle P_\mu \rangle^K. \tag{7.16}$$

Чтобы сравнить (7.15) с (7.11), разделим K_1 и K_2 пространственно-подобной поверхностью и возьмем такую вариацию δx^ν, которая обращается в нуль в будущем этой поверхности и равна постоянной величине δX^ν в ее прошлом. В результате получим

$$\delta W = \delta X_\nu \int d\sigma_\mu t^{\mu\nu}, \tag{7.17}$$

что приводит к следующей идентификации:

$$\int d\sigma_\mu t^{\mu\nu} = \frac{\sum \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{K_1} P^\nu \langle \{n\} \rangle | 0_- \rangle^{K_2}}{\langle 0_+ | 0_- \rangle^K}. \tag{7.18}$$

Аналогом этого соотношения для замкнутого во времени цикла будет равенство

$$\int d\sigma_\mu t^{\mu\nu} = \langle P^\nu \rangle_0^K, \tag{7.19}$$

где тензор $t^{\mu\nu}(x)$, который строится из вещественных запаздывающих полей, также веществен.

Распределение и течение энергии и импульса описывается величиной $t^{\mu\nu}(x)$. Она представляет собой вектор потока энергии-импульса, или тензор натяжений. Вычислим его для состояния одной частицы, считая ее для простоты нейтральной. В области между причинно-разделенными источниками поле, связанное с частицей импульса p, таково:

$$\varphi(x) = (d\omega_p)^{1/2} e^{ipx} iK_{2p} + (d\omega_p)^{1/2} e^{-ipx} iK^*_{1p}. \tag{7.20}$$

Если рассматривается только это возбуждение, то

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu}(x) = 2p^\mu p^\nu d\omega_p (iK^*_{1p})(iK_{2p}) - \\ - d\omega_p (p^\mu p^\nu + m^2 g^{\mu\nu}) [e^{-2ipx}(iK^*_{1p})^2 + e^{2ipx}(iK_{2p})^2]; \end{aligned} \tag{7.21}$$

этот тензор удовлетворяет закону сохранения $\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0$. Во всех случаях усреднения по времени или по пространству, когда масштаб задается соответствующими компонентами вектора p^μ, осциллирующими членами в формуле (7.21) можно пренебречь. В первое слагаемое входят сомножители, которые можно было предвидеть заранее: источники iK_{2p} и iK^*_{1p}, описывающие акты испускания и поглощения, множитель $2p^\mu\, d\omega_p$, соответствующий потоку частицы, и вектор энергии-импульса p^ν, служащий мерой переносимой величины. Аналогичный анализ с использованием запаздывающих полей дает:

$$\varphi_{\text{зап}}(x) = (d\omega_p)^{1/2} e^{ipx} iK_p - (d\omega_p)^{1/2} e^{-ipx} iK^*_p, \tag{7.22}$$

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu}(x) = 2p^\mu p^\nu d\omega_p |K_p|^2 + d\omega_p (p^\mu p^\nu + m^2 g^{\mu\nu}) \times \\ \times [e^{-2ipx}(K^*_p)^2 + e^{2ipx}(K_p)^2]. \end{aligned} \tag{7.23}$$

В том, что все интерференционные члены при интегрировании исчезают, можно убедиться, рассматривая, например, причинно-упорядоченную пару источников и используя уравнение (7.12); в результате получим:

$$\int d\sigma_\mu t^{\mu\nu} = -\int (dx) K_2(x) \partial^\nu \varphi(x), \tag{7.24}$$

где в области, занятой излучающим источником K_2,

$$\varphi(x) = \int (dx') \Delta_+(x - x') K_2(x') + i \int (dx') \Delta^{(-)}(x - x') K_1(x'). \tag{7.25}$$

Первое слагаемое в этом поле, связанное с самим источником K_2, вклада не дает:

$$\int (dx)(dx') K_2(x) \partial_\nu \Delta_+(x - x') K_2(x') = 0, \tag{7.26}$$

так как градиент симметричной функции $\Delta_+(x - x')$ является антисимметричной функцией. В соответствии с этим, производя незначительную перегруппировку членов, мы получаем

$$\begin{aligned} \int d\sigma_\mu t^{\mu\nu} = \int (dx)(dx') iK_1(x) \frac{1}{i} \partial^\nu \Delta^{(+)}(x - x') iK_2(x') = \\ = \sum_p (iK^*_{1p}) p^\nu (iK_{2p}). \end{aligned} \tag{7.27}$$

Отсюда видно, что физической величиной, переносимой между областями, в которых происходят начальный акт испускания и конечный акт поглощения, является импульс p^ν. Следует отметить также, что имеет место равенство

$$\begin{aligned}\langle 0_+ | \{n\}\rangle^{K_1} iK^*_{1p} iK_{2p} \langle\{n\} | 0_-\rangle^{K_2} = \\ = \langle 0_+ | \{n+1_p\}\rangle^{K_1} (n_p+1) \langle\{n+1_p\} | 0_-\rangle^{K_2},\end{aligned} \tag{7.28}$$

показывающее, как с помощью (7.18) можно получить энергию-импульс в общем случае (для нейтральных частиц):

$$P^\nu(\{n\}) = \sum_p p^\nu n_p. \tag{7.29}$$

Аналогом соотношения (7.27), возникающим при описании замкнутого во времени цикла, будет математическое ожидание

$$\int d\sigma_\mu t^{\mu\nu} = \sum_p p^\nu |K_p|^2 = \langle P^\nu\rangle_0^K. \tag{7.30}$$

Пользуясь методами, изложенными при рассмотрении заряда, можно получить и величины, характеризующие пространственно-временную локализацию флуктуаций энергии-импульса, но здесь мы не будем входить в детали этой проблемы.

Бесспиновые частицы можно описывать и иным способом, исходя из действия (5.15), в котором фигурируют скалярные и векторные поля и источники. Дифференцируя вариацию поля (7.4), мы придем к равенству

$$\delta(\partial_\mu\varphi) = \delta x^\nu \partial_\nu(\partial_\mu\varphi) + (\partial_\nu\varphi)\partial_\mu\delta x^\nu, \tag{7.31}$$

которое моделирует закон изменения векторных полей при зависящих от координат смещениях:

$$\delta\varphi_\mu(x) = \delta x^\nu(x)\partial_\nu\varphi_\mu(x) + \varphi_\nu(x)\partial_\mu\delta x^\nu(x). \tag{7.32}$$

Соответствующая вариация источника определяется из условия сохранения инвариантности интеграла $\int (dx) K^\mu\varphi_\mu$ и имеет вид

$$\delta K^\mu(x) = \partial_\nu[\delta x^\nu(x) K^\mu(x)] - K^\nu(x)\partial_\nu\delta x^\mu(x). \tag{7.33}$$

Заметим, что для вращений системы как целого, когда

$$\partial_\mu\delta x_\nu = -\partial_\nu\delta x_\mu = \delta\omega_{\mu\nu}, \tag{7.34}$$

различие между двумя этими выражениями пропадает. Функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\varphi^\mu\partial_\mu\varphi + \frac{1}{2}(\varphi^\mu\varphi_\mu - m^2\varphi^2) \tag{7.35}$$

изменяется на величину

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^\nu \partial_\nu \mathcal{L} + (\varphi^\mu\varphi^\nu - \varphi^\mu\partial^\nu\varphi - \varphi^\nu\partial^\mu\varphi)\,\partial_\mu\delta x_\nu = \\ = \partial_\nu(\delta x^\nu \mathcal{L}) - t^{\mu\nu}\partial_\mu\delta x_\nu, \tag{7.36}$$

где

$$t^{\mu\nu} = \varphi^\mu\partial^\nu\varphi + \varphi^\nu\partial^\mu\varphi - \varphi^\mu\varphi^\nu + g^{\mu\nu}\mathcal{L} = t^{\nu\mu}, \tag{7.37}$$

и в результате

$$\delta W = -\int (dx)\, t^{\mu\nu}\partial_\mu\delta x_\nu. \tag{7.38}$$

Кроме того, мы имеем соотношение

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = -K\partial^\nu\varphi + (\partial_\mu K^\mu)\,\varphi^\nu + K_\mu(\partial^\mu\varphi^\nu - \partial^\nu\varphi^\mu), \tag{7.39}$$

которое можно написать и в других формах, если воспользоваться полевыми уравнениями. Единственный зависящий от поля член в правой части можно представить в виде произведения $-\partial^\nu\varphi$ на эффективный источник $K - \partial_\mu K^\mu$. В отсутствие векторного источника K_μ оба варианта для тензора натяжений совпадают.

Функции Лагранжа (5.19) и (5.28) для частиц с единичным спином содержат векторные поля и их производные, которые входят в виде ротора. Используя последние в качестве модели антисимметричного тензорного поля $G_{\mu\nu}$ и дифференцируя (7.32), мы придем к выводу, что

$$\delta G_{\mu\nu}(x) = \delta x^\lambda(x)\,\partial_\lambda G_{\mu\nu}(x) + G_{\lambda\nu}(x)\,\partial_\mu\delta x^\lambda(x) + G_{\mu\lambda}(x)\,\partial_\nu\delta x^\lambda(x). \tag{7.40}$$

Если ввести источники тензорного поля, то их бесконечно малая вариация будет равна

$$\delta M^{\mu\nu} = \partial_\lambda(\delta x^\lambda M^{\mu\nu}) - M^{\lambda\nu}\partial_\lambda\delta x^\mu - M^{\mu\lambda}\partial_\lambda\delta x^\nu. \tag{7.41}$$

Но сначала рассмотрим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2\varphi^\mu\varphi_\mu,\quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu, \tag{7.42}$$

которая дает

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^\nu\partial_\nu\mathcal{L} - G^{\mu\lambda}G^\nu{}_\lambda\partial_\mu\delta x_\nu - m^2\varphi^\mu\varphi^\nu\partial_\mu\delta x_\nu = \\ = \partial_\nu(\delta x^\nu\mathcal{L}) - t^{\mu\nu}\partial_\mu\delta x_\nu \tag{7.43}$$

и

$$\delta W(J) = -\int (dx)\, t^{\mu\nu}\partial_\mu\delta x_\nu. \tag{7.44}$$

Здесь

$$t^{\mu\nu} = G^{\mu\lambda}G^\nu{}_\lambda + m^2\varphi^\mu\varphi^\nu + g^{\mu\nu}\mathcal{L} = t^{\nu\mu}, \tag{7.45}$$

и мы видим, что

$$t = G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + m^2\varphi^\mu\varphi_\mu + 4\mathscr{L} = -m^2\varphi^\mu\varphi_\mu. \tag{7.46}$$

Непосредственное вычисление воздействия вариации источника дает

$$\delta W(J) = \int (dx)\,\delta J^\mu\varphi_\mu, \qquad \delta J^\mu = \partial_\nu(\delta x^\nu J^\mu) - J^\nu\partial_\nu\delta x^\mu, \tag{7.47}$$

а сравнивая это выражение с предыдущим, мы получим

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} J_\mu G^{\mu\nu} + (\partial_\mu J^\mu)\,\varphi^\nu, \tag{7.48}$$

или

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = -J^\mu\partial^\nu\varphi_\mu + \partial_\mu(J^\mu\varphi^\nu), \tag{7.49}$$

где последнее слагаемое не дает вклада в объемные интегралы, через которые выражаются полные энергия и импульс, испущенные источником.

Другая возможная функция Лагранжа, а именно (5.23), отличается от (5.19) дивергенцией вектора [формулы (5.24) и (5.25)], что остается справедливым и для вариаций $\delta\mathscr{L}$. Такие дополнительные члены не дают вклада в δW. Заметим, однако, что соотношение

$$0 = \int (dx)\,\partial_\lambda[f^{\lambda\mu\nu}(x)\,\partial_\mu\delta x_\nu] =$$
$$= \int (dx)\,\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}(x)\,\partial_\mu\delta x_\nu + \int (dx)\,f^{\lambda\mu\nu}(x)\,\partial_\lambda\partial_\mu\delta x_\nu, \tag{7.50}$$

последнее слагаемое в правой части которого обращается в нуль в силу требования

$$f^{\lambda\mu\nu}(x) = -f^{\mu\lambda\nu}(x), \tag{7.51}$$

приводит к тому, что в определении тензора натяжений будет допускаться некоторый произвол, связанный с возможностью выбора комбинации

$$t^{\mu\nu}(x) - \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}(x). \tag{7.52}$$

Но этот произвол устраняется, если мы продолжаем настаивать на требовании, которое до сих пор удовлетворялось автоматически, а именно на требовании симметрии тензора $t^{\mu\nu}$. Для сохранения в (7.52) свойства симметрии без обращения к дифференциальным тождествам мы потребуем, чтобы выполнялось условие

$$f^{\lambda\mu\nu}(x) = f^{\lambda\nu\mu}(x). \tag{7.53}$$

Но тогда, комбинируя (7.51) и (7.53), мы будем иметь

$$f^{\lambda\mu\nu} = f^{\lambda\nu\mu} = -f^{\nu\lambda\mu} = -f^{\nu\mu\lambda} = f^{\mu\nu\lambda} = f^{\mu\lambda\nu} = -f^{\lambda\mu\nu} = 0. \tag{7.54}$$

Физические предпосылки требования симметрии тензора натяжений будут рассмотрены ниже, когда речь пойдет об угловом моменте.

Обращаясь теперь к функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} G^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu) + \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 \varphi^\mu \varphi_\mu, \quad (7.55)$$

заметим, что она дает тензор натяжений

$$t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu} =$$
$$= (\partial^\mu \varphi^\lambda - \partial^\lambda \varphi^\mu) G^\nu{}_\lambda + G^\mu{}_\lambda (\partial^\nu \varphi^\lambda - \partial^\lambda \varphi^\nu) - G^{\mu\lambda} G^\nu{}_\lambda + m^2 \varphi^\mu \varphi^\nu + g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (7.56)$$

который удовлетворяет соотношению

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = J_\mu (\partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu) + (\partial_\mu J^\mu) \varphi^\nu -$$
$$- \frac{1}{2} M_{\lambda\mu} (\partial^\lambda G^{\mu\nu} + \partial^\mu G^{\nu\lambda} + \partial^\nu G^{\lambda\mu}) - (\partial^\lambda M_{\lambda\mu}) G^{\mu\nu}. \quad (7.57)$$

Тем не менее по-прежнему

$$t = 2G^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu) - G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + m^2 \varphi^\mu \varphi_\mu + 4\mathcal{L} = -m^2 \varphi^\mu \varphi_\mu. \quad (7.58)$$

Согласно полевым уравнениям

$$\partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu = G_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}, \quad (7.59)$$

мы имеем

$$\partial_\lambda (G_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}) + \partial_\mu (G_{\nu\lambda} + M_{\nu\lambda}) + \partial_\nu ({}_{\lambda\mu}G + M_{\lambda\mu}) = 0, \quad (7.60)$$

и все члены в правой части (7.57), в которые входит поле, можно выразить через эффективный векторный источник $J_\mu + \partial^\nu M_{\mu\nu}$. Если положить $M_{\mu\nu} = 0$, то оба варианта для тензора натяжений будут совпадать.

Возникает еще один вопрос, связанный с однозначностью. Обобщение на случай произвольных смещений лучше всего связывать с вращениями системы как целого, записывая (7.32) в виде

$$\delta\varphi_\mu = \delta x^\nu \partial_\nu \varphi_\mu + \varphi^\nu \frac{1}{2} (\partial_\mu \delta x_\nu - \partial_\nu \delta x_\mu) \quad (7.61)$$

с соответствующей вариацией векторного источника, равной

$$\delta J^\mu = \partial_\nu (\delta x^\nu J^\mu) + J^\nu \frac{1}{2} (\partial_\mu \delta x_\nu - \partial_\nu \delta x_\mu). \quad (7.62)$$

В действительности различие между вариациями поля и источника полностью исчезает, если мы примем

$$\delta\varphi_\mu = \frac{1}{2} \delta x^\nu \partial_\nu \varphi_\mu + \frac{1}{2} \partial_\nu (\delta x^\nu \varphi_\mu) + \varphi^\nu \frac{1}{2} (\partial_\mu \delta x_\nu - \partial_\nu \delta x_\mu). \quad (7.63)$$

Встает вопрос, как указанный произвол в выборе индуцируемых смещениями вариаций сказывается на определении тензора натяжений, вводимого в общем случае посредством равенства

$$\delta W = -\int (dx)\, t^{\mu\nu}\partial_\mu \delta x_\nu \tag{7.64}$$

и однозначно фиксируемого, как можно предполагать, требованием симметрии. Разные выражения для вариации $\delta\varphi_\mu$ различаются слагаемыми, пропорциональными тензору

$$\frac{1}{2}\,(\partial_\mu \delta x_\nu + \partial_\nu \delta x_\mu), \tag{7.65}$$

которые обращаются в нуль в случае трансляций и вращений системы как целого. Этот тензор представляет собой меру растяжений, обусловленных смещениями, и из него можно построить скалярную характеристику $\partial_\mu \delta x^\mu$. Как следствие симметрии тензора натяжений в (7.64) входит именно такой тензор растяжений. Для определенности рассмотрим влияние дополнительной вариации поля

$$\delta_{\text{раст}}\varphi_\mu = -\varphi^\nu\,\frac{1}{2}\,(\partial_\mu \delta x_\nu + \partial_\nu \delta x_\mu) \tag{7.66}$$

на действие (5.18), (5.19). Так как вариация

$$\begin{aligned}\delta_{\text{раст}}\,(\partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu) = {} & -\partial_\mu\varphi^\lambda\,\frac{1}{2}\,(\partial_\nu \delta x_\lambda + \partial_\lambda \delta x_\nu) + \\ & + \partial_\nu\varphi^\lambda\,\frac{1}{2}\,(\partial_\mu \delta x_\lambda + \partial_\lambda \delta x_\mu) - \\ & - \frac{1}{2}\,\varphi^\lambda\,(\partial_\lambda\partial_\mu \delta x_\nu - \partial_\lambda\partial_\nu \delta x_\mu)\end{aligned} \tag{7.67}$$

содержит вторые производные смещений координат, для того, чтобы получить выражение типа (7.64), необходимо выполнить интегрирование по частям. При этом войдут вторые производные полей, и чтобы их исключить, придется обратиться к полевым уравнениям. Первоначальный выбор вариаций поля позволял нам обходиться без полевых уравнений. Вариации, включающие растяжения, можно рассматривать в едином комплексе, вводя их в принцип стационарного действия:

$$\begin{aligned}\delta_{\text{раст}} W &= \int (dx)\,[-m^2\varphi^\mu - \partial_\nu G^{\mu\nu}]\,\delta_{\text{раст}}\varphi_\mu = \\ &= -\int (dx)\, J^\mu \delta_{\text{раст}}\varphi_\mu .\end{aligned} \tag{7.68}$$

Отсюда видно, что тензор натяжений при этом изменяется — к нему добавляется слагаемое

$$-\frac{1}{2}\,(J^\mu\varphi^\nu + J^\nu\varphi^\mu). \tag{7.69}$$

Такой дополнительный член необходим и для того, чтобы полученное выражение согласовалось с выражением для вариации действия, получающимся при прямом вычислении:

$$\delta_{\text{раст}} W(J) = \int (dx)\, \delta_{\text{раст}} J^{\mu}\varphi_{\mu}, \qquad \delta_{\text{раст}} J^{\mu} = J_{\nu} \frac{1}{2} (\partial^{\mu}\delta x^{\nu} + \partial^{\nu}\delta x^{\mu}). \tag{7.70}$$

Таким образом, мы видим, что тензоры натяжений действительно допускают некоторый произвол: мы можем по-разному выбирать закон изменения полей при координатных смещениях общего вида, но соответствующие дополнительные члены отличны от нуля только в области действия источников. Вне источников, где тензором натяжений определяются потоки энергии и импульса, правила, сформулированные для его вычисления, по-видимому, фиксируют этот тензор совершенно однозначно.

Преобразования, основанные на использовании полевых уравнений, также позволяют по-разному выбирать вариации поля. Рассмотрим, например, случай спина 0, взяв вариацию

$$\delta\varphi = \delta x^{\nu}\partial_{\nu}\varphi + \frac{1}{4}\, \varphi\, \partial_{\nu}\delta x^{\nu}, \tag{7.71}$$

которая дает

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^{\nu}\partial_{\nu}\mathcal{L} - \partial^{\mu}\varphi\partial^{\nu}\varphi\partial_{\mu}\delta x_{\nu} - \frac{1}{4}\, \partial^{\mu}\varphi\varphi\partial_{\mu}\partial_{\nu}\delta x^{\nu} - \\ - \frac{1}{4}\, [\partial^{\mu}\varphi\partial_{\mu}\varphi + m^2\varphi^2]\, \partial_{\nu}\delta x^{\nu}, \tag{7.72}$$

или

$$\delta\mathcal{L} = \partial_{\nu}\left[\delta x^{\nu}\mathcal{L} - \frac{1}{8}\, (\partial^{\nu}\varphi^2)\, \partial_{\lambda}\delta x^{\lambda}\right] - t^{\mu\nu}\partial_{\mu}\delta x_{\nu}, \tag{7.73}$$

где тензор натяжений равен:

$$t^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\varphi\partial^{\nu}\varphi + g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\, \mathcal{L} - \frac{1}{8}\, \partial^2(\varphi^2)\right]. \tag{7.74}$$

Согласно полевому уравнению,

$$-\frac{1}{8}\, \partial^2(\varphi^2) = \frac{1}{2}\, \mathcal{L} + \frac{1}{4}\, K\varphi, \tag{7.75}$$

и мы возвращаемся к первоначальному тензору натяжений с дополнительным слагаемым, которое обращается в нуль вне источников. Если же исходить непосредственно из выражения (7.74), то мы получим

$$t = \partial^{\mu}\varphi\partial_{\mu}\varphi + 2\mathcal{L} - \frac{1}{2}\, \partial^2(\varphi^2) = -m^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\, \partial^2(\varphi^2). \tag{7.76}$$

Используя уравнения поля, мы увидим, что в области вне источников эта величина совпадает в результатом [7.9].

В рассмотренном примере мы снова сталкиваемся с проблемой однозначности. Преобразование, связывающее (7.72) с (7.73), можно написать и по-другому:

$$-\frac{1}{8}\partial^\mu(\varphi^2)\,\partial_\mu\partial_\nu\delta x^\nu = -\partial_\nu\left[\frac{1}{8}(\partial^\mu\varphi^2)\,\partial_\mu\delta x^\nu\right]+\frac{1}{8}\partial^\mu\partial^\nu(\varphi^2)\,\partial_\mu\delta x_\nu. \tag{7.77}$$

При этом тензор натяжений изменяется на величину

$$-\frac{1}{8}\left[\partial^\mu\partial^\nu(\varphi^2)-g^{\mu\nu}\partial^2(\varphi^2)\right]. \tag{7.78}$$

Заметим, что такой симметричный вклад в тензор натяжений имеет дивергенцию, тождественно равную нулю:

$$\partial_\mu\left(\partial^\mu\partial^\nu - g^{\mu\nu}\partial^2\right)=0. \tag{7.79}$$

Более того, в силу теоремы (4.11) из гл. 1,

$$\int d\sigma_\mu\left(\partial^\mu\partial^\nu - g^{\mu\nu}\partial^2\right)\varphi^2 = \int\left(d\sigma_\mu\partial^\nu - d\sigma^\nu\partial_\mu\right)\partial^\mu\varphi^2 = 0, \tag{7.80}$$

так что он не дает никакого вклада ни в полные энергию и импульс, ни в угловой момент. Рассматриваемый добавочный член можно представить в виде (7.52), выбрав

$$f^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{16}\left[g^{\lambda\mu}\partial^\nu + g^{\lambda\nu}\partial^\mu - 2g^{\mu\nu}\partial^\lambda\right]\varphi^2. \tag{7.81}$$

Отметим, что это выражение симметрично по μ и ν, но не обладает свойством антисимметрии (7.51). Чтобы обратилось в нуль последнее слагаемое в (7.50), теперь приходится прибегать к дифференциальному тождеству

$$\partial_\lambda\partial_\mu f^{\lambda\mu\nu}=0, \tag{7.82}$$

к которому сводится здесь (7.79). Таким образом, характерной особенностью правил вычисления является исключение тех слагаемых в тензоре натяжений, которые заставляют обращаться к дифференциальным тождествам. Теперь мы покажем, что с тензорами натяжений дело обстоит почти так же, как с векторами потока заряда. Каждый вектор j^μ можно заменить на $j^\mu + \partial_\nu m^{\mu\nu}$ с произвольным антисимметричным тензором $m^{\mu\nu}$. При заданной функции Лагранжа можно договориться исключать подобные дополнительные слагаемые в токе. Но существование для одной и той же системы разных функций Лагранжа, приводящих к выражениям для тока, которые различаются слагаемыми вида $\partial_\nu m^{\mu\nu}$, показывает, что рассматриваемый произвол исключить не удается.

Произвол в выборе симметричного тензора натяжений находит свое выражение в возможности замены $t^{\mu\nu}(x)$ величиной

$$t^{\mu\nu}(x)+\partial_\varkappa\partial_\lambda m^{\mu\nu,\varkappa\lambda}(x), \tag{7.83}$$

где

$$m^{\mu\nu,\varkappa\lambda} = m^{\nu\mu,\varkappa\lambda} = m^{\mu\nu,\lambda\varkappa}, \tag{7.84}$$

причем условие симметрии

$$m^{\mu\nu,\varkappa\lambda} + m^{\varkappa\nu,\lambda\mu} + m^{\lambda\nu,\mu\varkappa} = 0 \tag{7.85}$$

дает

$$\partial_\mu \partial_\varkappa \partial_\lambda m^{\mu\nu,\varkappa\lambda} = 0. \tag{7.86}$$

Из этого условия следует также, что

$$\int d\sigma_\mu \partial_\varkappa \partial_\lambda m^{\mu\nu,\varkappa\lambda} = \frac{2}{3} \int (d\sigma_\mu \partial_\varkappa - d\sigma_\varkappa \partial_\mu) \partial_\lambda m^{\mu\nu,\varkappa\lambda} = 0. \tag{7.87}$$

Ниже мы увидим, что введение дополнительного члена не приводит к изменению и полного углового момента. Простому примеру (7.78) отвечает

$$m^{\mu\nu,\varkappa\lambda} = \left(g^{\mu\nu} g^{\varkappa\lambda} - \frac{1}{2} g^{\varkappa\nu} g^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} g^{\varkappa\mu} g^{\lambda\nu} \right) \frac{1}{8} \varphi^2. \tag{7.88}$$

Как и при рассмотрении токов, к постановке важной проблемы однозначности в случае спина 2 приводит существование двух разных систем полевых уравнений первого порядка.

Выражение (7.40) для вариации тензора совместимо как с симметрией, так и с антисимметрией тензора. В соответствии с этим симметричному тензорному полю частиц со спином 2 можно сопоставить при смещениях вариацию

$$\delta\varphi_{\mu\nu} = \delta x^\lambda \partial_\lambda \varphi_{\mu\nu} + \varphi_{\lambda\nu} \partial_\mu \delta x^\lambda + \varphi_{\mu\lambda} \partial_\nu \delta x^\lambda. \tag{7.89}$$

Важную роль играют две комбинации производных этого тензора, которые входят в формулы (5.37) и (5.44). Для первой, антисимметричной, комбі нации мы получаем

$$\begin{aligned} \delta G_{\lambda\mu\nu} = {} & \delta x^\varkappa \partial_\varkappa G_{\lambda\mu\nu} + G_{\varkappa\mu\nu} \partial_\lambda \delta x^\varkappa + G_{\lambda\varkappa\nu} \partial_\mu \delta x^\varkappa + \\ & + G_{\lambda\mu\varkappa} \partial_\nu \delta x^\varkappa + \varphi_{\varkappa\nu} \partial_\lambda \partial_\mu \delta x^\varkappa - \varphi_{\varkappa\lambda} \partial_\mu \partial_\nu \delta x^\varkappa, \end{aligned} \tag{7.90}$$

а для второй, симметричной, имеем

$$\begin{aligned} \delta H_{\mu\nu\lambda} = {} & \delta x^\varkappa \partial_\varkappa H_{\mu\nu\lambda} + H_{\varkappa\nu\lambda} \partial_\mu \delta x^\varkappa + H_{\mu\varkappa\lambda} \partial_\nu \delta x^\varkappa + \\ & + H_{\mu\nu\varkappa} \partial_\lambda \delta x^\varkappa + 2\varphi_{\varkappa\lambda} \partial_\mu \partial_\nu \delta x^\varkappa. \end{aligned} \tag{7.91}$$

Заметим, что сюда входят вторые производные смещений координат. Рассмотрим сначала выражение для действия (5.33), в котором для упрощения мы положим тензорный источник третьего ранга равным нулю, так что

$$G_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda \varphi_{\mu\nu} - \partial_\nu \varphi_{\mu\lambda} \tag{7.92}$$

и

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} G^{\lambda\mu\nu} G_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} G^\lambda G_\lambda - \frac{1}{2} m^2 (\varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} - \varphi^2). \tag{7.93}$$

Инфинитезимальные смещения координат приводят к выражению

$$\delta\mathcal{L}=\partial_\nu(\delta x^\nu\mathcal{L})-t^{\mu\nu\prime}\partial_\mu\delta x_\nu-F^{\lambda\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\mu\delta x_\nu, \tag{7.94}$$

где

$$t^{\mu\nu\prime}=t^{\nu\mu\prime}=$$
$$=G^{\mu\varkappa\lambda}G^\nu{}_{\varkappa\lambda}+\frac{1}{2}G^{\varkappa\mu\lambda}G_\varkappa{}^\nu{}_\lambda-G^\mu G^\nu-$$
$$-G_\lambda(G^{\lambda\mu\nu}+G^{\lambda\nu\mu})+2m^2\varphi^{\mu\lambda}\varphi^\nu{}_\lambda-2m^2\varphi\varphi^{\mu\nu}+g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{7.95}$$

и

$$F^{\lambda\mu\nu}=G^{\lambda\mu\varkappa}\varphi^\nu{}_\varkappa-G^\lambda\varphi^{\mu\nu}+g^{\mu\lambda}G_\varkappa\varphi^{\varkappa\nu}. \tag{7.96}$$

Чтобы выделить тензор натяжений, воспользуемся тождеством

$$F^{\lambda\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\mu\delta x_\nu=\frac{1}{2}(F^{\lambda\mu\nu}+F^{\lambda\nu\mu})\,\partial_\lambda\partial_\mu\delta x_\nu+$$
$$+\frac{1}{2}(F^{\mu\lambda\nu}-F^{\mu\nu\lambda})\,\partial_\lambda\,(\partial_\mu\delta x_\nu+\partial_\nu\delta x_\mu). \tag{7.97}$$

Интегрирование по частям вариации действия показывает, что

$$t^{\mu\nu}=t^{\mu\nu\prime}-\partial_\lambda\,[F^{\lambda\mu\nu}+F^{\mu\lambda\nu}-F^{\mu\nu\lambda}]_{(\mu\nu)}, \tag{7.98}$$

где символ $(\mu\nu)$ означает симметризацию по индексам μ и ν. Согласно равенствам

$$\delta W(T)=\int(dx)\,\delta T^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}=-\int(dx)\,T^{\mu\nu}\delta\varphi_{\mu\nu}, \tag{7.99}$$

получающийся тензор натяжений должен удовлетворять соотношению

$$\partial_\mu t^{\mu\nu}=-T^{\lambda\mu}\partial^\nu\varphi_{\lambda\mu}+2\partial_\lambda(T^\lambda{}_\mu\varphi^{\mu\nu})=T_{\lambda\mu}H^{\lambda\mu\nu}+2(\partial_\lambda T^\lambda{}_\mu)\,\varphi^{\mu\nu}. \tag{7.100}$$

Если ограничиться рассмотрением областей вне источников, то все выражения примут более простой вид, так как векторные и скалярные комбинации поля обращаются при этом в нуль, и

$$t^{\mu\nu}=G^{\mu\varkappa\lambda}G^\nu{}_{\varkappa\lambda}+\frac{1}{2}G^{\varkappa\mu\lambda}G_\varkappa{}^\nu{}_\lambda+2m^2\varphi^{\mu\lambda}\varphi^\nu{}_\lambda+$$
$$+g^{\mu\nu}\mathcal{L}-\partial_\lambda\,[G^{\lambda\mu\varkappa}\varphi^\nu{}_\varkappa+G^{\mu\lambda\varkappa}\varphi^\nu{}_\varkappa-G^{\mu\nu\varkappa}\varphi^\lambda{}_\varkappa]_{(\mu\nu)}. \tag{7.101}$$

Дальнейшее упрощение достигается путем использования уравнений поля

$$-\partial_\lambda G^{\lambda\mu\nu}=m^2\varphi_{\mu\nu},\qquad \partial_\lambda G^{\mu\lambda\nu}=0. \tag{7.102}$$

Так, соотношение

$$\partial_\lambda(G^{\lambda\mu\varkappa}\varphi^\nu{}_\varkappa)=m^2\varphi^{\mu\varkappa}\varphi^\nu{}_\varkappa+\frac{1}{2}G^{\lambda\mu\varkappa}G_\lambda{}^\nu{}_\varkappa \tag{7.103}$$

дает

$$t_G^{\mu\nu} = G^{\mu\varkappa\lambda}G^{\nu}{}_{\varkappa\lambda} + m^2\varphi^{\mu\lambda}\varphi^{\nu}{}_{\lambda} + \\ + g^{\mu\nu}\mathscr{L} - \partial_\lambda [G^{\mu\lambda\varkappa}\varphi^{\nu}{}_{\varkappa} - G^{\mu\nu\varkappa}\varphi^{\lambda}{}_{\varkappa}]_{(\mu\nu)}, \tag{7.104}$$

откуда мы получаем

$$t_G = -m^2\varphi^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}. \tag{7.105}$$

Рассматривая другое выражение для действия, а именно (5.40), мы сразу воспользуемся условиями отсутствия источников и опустим в функции Лагранжа все скалярные и векторные поля. Это вполне оправданно, поскольку все подобные поля входят в лагранжиан в виде пары сомножителей, один из которых обеспечивает равенство нулю соответствующего члена и после инфинитезимального смещения координат. В таком случае, положив

$$H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu\varphi_{\nu\lambda} + \partial_\nu\varphi_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\varphi_{\mu\nu}, \tag{7.106}$$

мы получим

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}H^{\mu\nu\lambda}H_{\lambda\nu\mu} - \frac{1}{2}m^2\varphi^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} \tag{7.107}$$

и

$$t_H^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(H^{\mu\varkappa\lambda}H_{\varkappa\lambda}{}^{\nu} + H^{\nu\varkappa\lambda}H_{\varkappa\lambda}{}^{\mu}) + g^{\mu\nu}\mathscr{L} + \\ + 2\partial_\lambda(H^{\varkappa\lambda\mu}\varphi_{\nu\varkappa} - H^{\varkappa\nu\mu}\varphi_{\lambda\varkappa})_{(\mu\nu)}, \tag{7.108}$$

где мы воспользовались также полевым уравнением

$$\partial_\lambda H^{\mu\nu\lambda} + m^2\varphi^{\mu\nu} = 0. \tag{7.109}$$

Сравнение двух выражений для тензора натяжений подтверждает, что действительно

$$t_H^{\mu\nu} - t_G^{\mu\nu} = \partial_\varkappa\partial_\lambda m^{\mu\nu,\varkappa\lambda}, \tag{7.110}$$

где тензор

$$m_{\mu\nu,\varkappa\lambda} = \frac{1}{2}(\varphi_{\mu\varkappa}\varphi_{\nu\lambda} + \varphi_{\mu\lambda}\varphi_{\nu\varkappa} - 2\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\varkappa\lambda}) + \\ + \frac{1}{2}[g_{\mu\nu}\varphi_{\varkappa\alpha}\varphi_\lambda{}^\alpha + g_{\varkappa\lambda}\varphi_{\mu\alpha}\varphi_\nu{}^\alpha] - \\ - \frac{1}{4}[g_{\mu\varkappa}\varphi_{\nu\alpha}\varphi_\lambda{}^\alpha + g_{\mu\lambda}\varphi_{\nu\alpha}\varphi_\varkappa{}^\alpha + g_{\nu\varkappa}\varphi_{\mu\alpha}\varphi_\lambda{}^\alpha + g_{\nu\lambda}\varphi_{\mu\alpha}\varphi_\varkappa{}^\alpha] = \\ = m_{\varkappa\lambda,\mu\nu} \tag{7.111}$$

удовлетворяет всем необходимым требованиям симметрии. К этому результату можно прийти более коротким путем, рассматривая непосредственно разность функций Лагранжа

$$\mathcal{L}_H - \mathcal{L}_G = \frac{1}{2} \partial^\lambda \varphi^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_{\nu\lambda}. \tag{7.112}$$

Относительно изменений источника и поля, обусловленных смещениями, мы заметим следующее. Возможность включения дополнительных членов, которые содержат общий тензор растяжений (7.65), существенно зависит от спина, если мы стремимся не вводить при этом дополнительных производных по координатам. Матрицы, которые действуют на объекты, несущие спин s, в общем случае строятся из тензоров ранга $2s$ и менее. Для того чтобы возникла необходимость в тензоре второго ранга, требуется по крайней мере единичный спин, а в случае спинов 0 и $^1/_2$ пригодна только скалярная свертка тензора растяжений. Нулевому спину соответствует вариация (7.71). Рассмотрим теперь случай спина $^1/_2$. Обращаясь к формуле (5.11) из гл. 2, которая описывает изменение произвольного источника при преобразованиях координат, или, что то же самое, при трансляциях и вращениях источника как целого, мы придем в случае источника $\eta(x)$ частиц со спином $^1/_2$ к следующему обобщению:

$$\delta\eta(x) = \partial_\nu [\delta x^\nu (x) \eta(x)] + \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \eta(x) \partial_\mu \delta x_\nu (x). \tag{7.113}$$

Спиновый член содержит только комбинацию $\partial_\mu \delta x_\nu - \partial_\nu \delta x_\mu$. Единственный симметричный тензор, который можно построить из матриц,— это произведение $g^{\mu\nu}$ на единичную матрицу. Так же, как и в случае изменения скалярного источника, определяемого равенством (7.4), здесь входит характерный член с $\partial_\nu \delta x^\nu$. Соответствующая вариация поля, построенная так, чтобы интеграл $\int (dx)\, \eta\gamma^0\psi$ оставался неизменным, имеет вид

$$\delta\psi(x) = \delta x^\nu (x) \partial_\nu \psi(x) + \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \psi(x) \partial_\mu \delta x_\nu (x). \tag{7.114}$$

Функция Лагранжа для спина $^1/_2$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \psi\gamma^0 \left[\gamma^\mu \frac{1}{i} \partial_\mu + m\right] \psi \tag{7.115}$$

изменяется при вариации (7.114) следующим образом:

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^\nu \partial_\nu \mathcal{L} + \frac{i}{2} \psi\gamma^0\gamma^\mu \partial_\nu \psi \partial_\mu \delta x^\nu - \frac{1}{2} \psi\gamma^0 \frac{1}{2} \left[\gamma^\lambda, \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu}\right] \partial_\lambda \psi \partial_\mu \delta x_\nu - \\ - \frac{1}{2} \psi\gamma^0\gamma^\lambda \frac{1}{4} \sigma^{\mu\nu} \psi \partial_\lambda \partial_\mu \delta x_\nu. \tag{7.116}$$

Но ввиду симметрии вторых производных остается только комбинация матриц вида

$$\gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu} + \gamma^\mu \sigma^{\lambda\nu} = i [\gamma^\lambda g^{\mu\nu} + \gamma^\mu g^{\lambda\nu} - 2\gamma^\nu g^{\mu\lambda}], \tag{7.117}$$

и поскольку $\gamma^0\gamma^\mu$ являются симметричными матрицами, последнее слагаемое в $\delta\mathscr{L}$ обращается в нуль. Далее,

$$\left[\gamma^\lambda, \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\right] = i\left(g^{\lambda\nu}\gamma^\mu - g^{\lambda\mu}\gamma^\nu\right) \tag{7.118}$$

и мы получаем

$$\delta\mathscr{L} = \partial_\nu\left(\delta x^\nu \mathscr{L}\right) - t^{\mu\nu}\partial_\mu \delta x_\nu, \tag{7.119}$$

где

$$t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu} = \frac{1}{2}\psi\gamma^0\frac{1}{2}\left[\gamma^\mu \frac{1}{i}\partial^\nu + \gamma^\nu\frac{1}{i}\partial^\mu\right]\psi + g^{\mu\nu}\mathscr{L}. \tag{7.120}$$

Соответствующий скаляр таков:

$$t = -m\frac{1}{2}\psi\gamma^0\psi - \frac{3}{2}\eta\gamma^0\psi, \tag{7.121}$$

ибо из уравнения поля следует, что

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\psi\gamma^0\eta = -\frac{1}{2}\eta\gamma^0\psi. \tag{7.122}$$

Кроме того, для дивергенции тензора натяжений мы получаем формулу

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = -\eta\gamma^0\partial^\nu\psi + \frac{i}{4}\partial_\mu\left(\eta\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\psi\right), \tag{7.123}$$

в справедливости которой можно убедиться прямым путем. Рассмотрение различных членов в $\delta\mathscr{L}$ отчетливо показывает, как из скалярности функции Лагранжа вытекает сокращение комбинаций, отвечающих вращениям, в результате чего остается только слагаемое, отвечающее растяжениям, и получается симметричный тензор натяжений.

В области между двумя причинно-упорядоченными источниками η_1 и η_2 поле частицы с определенными импульсом, спином и зарядом имеет вид [см. формулу (6.49)]

$$\psi(x) = \psi_{p\sigma q}(x)\, i\eta_{2p\sigma q} + \psi_{p\sigma q}(x)^*\, i\eta^*_{1p\sigma q}. \tag{7.124}$$

Согласно формуле (6.53), соответствующий вклад в тензор натяжений будет равен

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} &= \left(i\eta^*_{1p\sigma q}\right)\psi^*_{p\sigma q}\gamma^0\frac{1}{2}\left(\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\nu p^\mu\right)\psi_{p\sigma q}\left(i\eta_{2p\sigma q}\right) = \\ &= \left(i\eta^*_{1p\sigma q}\right)\left(2p^\mu p^\nu\, d\omega_p\right)\left(i\eta_{2p\sigma q}\right). \end{aligned} \tag{7.125}$$

Здесь, как и следовало ожидать, фигурирует поток энергии-импульса, приходящийся на одну частицу.

При описании частиц со спинами 0 и 1 посредством спиноров второго ранга естественно поступать так же, как в случае спина $^1/_2$, и записывать вариацию поля, индуцируемую смещением, в виде

$$\delta\psi = \delta x^\nu \partial_\nu \psi + \frac{i}{4}(\sigma_1^{\mu\nu} + \sigma_2^{\mu\nu})\,\psi\partial_\mu \delta x_\nu. \tag{7.126}$$

При этом функция Лагранжа

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\psi\gamma_1^0\gamma_2^0\left[\frac{1}{2}(\gamma_1^\mu + \gamma_2^\mu)\frac{1}{i}\,\partial_\mu + m\right]\psi \tag{7.127}$$

будет изменяться точно так же, как и в случае спина $^1/_2$, не считая члена с $\partial_\lambda\partial_\mu\delta x_\nu$, поскольку теперь $(\gamma = \gamma_1^0\gamma_2^0)$

$$\delta\mathscr{L} = \delta x^\nu \partial_\nu \mathscr{L} + \frac{1}{2}\psi\gamma\frac{i}{4}\sum(\gamma_\alpha^\mu\partial^\nu + \gamma_\alpha^\nu\partial^\mu)\,\psi\partial_\mu\delta x_\nu -$$
$$-\frac{1}{2}\psi\gamma\frac{1}{2}\left(\gamma_1^\lambda\frac{1}{4}\sigma_2^{\mu\nu} + \gamma_2^\lambda\frac{1}{4}\sigma_1^{\mu\nu}\right)\psi\partial_\lambda\partial_\mu\delta x_\nu. \tag{7.128}$$

Тождество (7.97) приводит к симметричному тензору натяжений

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\psi\gamma\frac{1}{2}\left[\sum\gamma_\alpha^\mu\frac{1}{i}\,\partial^\nu\right]_{(\mu\nu)}\psi +$$
$$+ g^{\mu\nu}\mathscr{L} - \partial_\lambda\left[\frac{1}{2}\psi\gamma\frac{1}{4}(\gamma_1^\mu\sigma_2^{\lambda\nu} + \gamma_2^\mu\sigma_1^{\lambda\nu})\,\psi\right]_{(\mu\nu)}, \tag{7.129}$$

к которому можно добавить нулевые члены, содержащие $(\gamma^\mu\sigma^{\lambda\nu})_{1,2}$. Такое добавление полезно для перехода к матричной записи (7.129):

$$t^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,\psi\gamma^0\left[\gamma^\mu, \frac{1}{i}\,\partial^\nu\psi^T\gamma^0\right]_{(\mu\nu)}\psi +$$
$$+ g^{\mu\nu}\mathscr{L} - \frac{1}{8}\,\partial_\lambda\,\mathrm{Sp}\,\psi\gamma^0\left[[\gamma^\mu, \psi^T\gamma^0], \sigma^{\lambda\nu}\right]_{(\mu\nu)}, \tag{7.130}$$

где двойной коммутатор можно заменить двойным антикоммутатором, не изменяя при этом значения последнего слагаемого.

Связь между этим и полученным ранее выражениями для тензора натяжения мы исследуем на примере нулевого спина. Подставив матричное поле (5.83), находим

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\varphi^\mu\partial^\nu\varphi - \varphi\partial^\nu\varphi^\mu)_{(\mu\nu)} + g^{\mu\nu}\left[\mathscr{L} + \frac{1}{2}\,\partial_\lambda(\varphi\varphi^\lambda)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\partial^\nu(\varphi\varphi^\mu)_{(\mu\nu)} - g^{\mu\nu}\frac{1}{2}\,\partial_\lambda(\varphi\varphi^\nu), \tag{7.131}$$

где соответствующая функция Лагранжа (5.84) заменена функцией Лагранжа (5.16) с добавлением необходимых слагаемых, имеющих вид дивергенции. Нетрудно видеть, что производные от векторного поля сокращаются и в результате получается выражение

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\varphi^\mu\partial^\nu\varphi + \varphi^\nu\partial^\mu\varphi) + g^{\mu\nu}\mathscr{L}, \tag{7.132}$$

которое в областях, где нет векторных источников, согласуется с выражениями (7.8) и (7.37).

Обобщение вариации поля (7.126) на произвольный мультиспинор имеет вид

$$\delta\psi = \delta x^\nu \partial_\nu \psi + \frac{i}{4} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \sigma_\alpha^{\mu\nu} \right) \psi \partial_\mu \delta x_\nu. \tag{7.133}$$

Аналогичная формула применима также для различных вспомогательных полей $\psi_{[\alpha\beta]}$, $\psi_{[\alpha\beta][\alpha'\beta']}$, ... В отсутствие источников все вспомогательные поля обращаются в нуль, причем это справедливо и при произвольных смещениях, так как в закон преобразования (7.133) входят только рассматриваемые поля. В соответствии с этим вклад будет давать только первый член функции Лагранжа (5.78), и в результате мы получим тензор натяжений, который является непосредственным обобщением (7.129), но для случая $\mathcal{L} = 0$, отвечающего отсутствию источников:

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \psi\gamma \frac{1}{n} \left[\sum_{\alpha} \gamma_\alpha^\mu \frac{1}{i} \partial^\nu \right]_{(\mu\nu)} \psi - \partial_\lambda \left[\frac{1}{2} \psi\gamma \frac{1}{2n} \sum_{\alpha\neq\beta} \gamma_\alpha^\mu \sigma_\beta^{\lambda\nu} \psi \right]_{(\mu\nu)}. \tag{7.134}$$

Рассмотрим более подробно случай $n = 3$, используя спинор, антисимметричный по паре индексов, что дает нам другой возможный способ описания спина $^1/_2$. Выкладки, подобные выполненным при вычислении тока, приводят к следующему результату:

$$t^{\mu\nu} = t_D^{\mu\nu} + \frac{1}{6m} (\partial^\mu \partial^\nu - g^{\mu\nu} \partial^2) \frac{1}{2} \Psi\gamma^0\Psi + \frac{1}{12m^2} \partial^2 t_D^{\mu\nu}, \tag{7.135}$$

где величина

$$t_D^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Psi\gamma^0 \frac{1}{2} \left[\gamma^\mu \frac{1}{i} \partial^\nu + \gamma^\nu \frac{1}{i} \partial^\mu \right] \Psi \tag{7.136}$$

представляет собой тензор натяжений для простого спинорного уравнения (уравнения Дирака) в отсутствие источников. Дополнительные члены можно представить в виде (7.83) при

$$m^{\mu\nu,\varkappa\lambda} = -\left(g^{\mu\nu} g^{\varkappa\lambda} - \frac{1}{2} g^{\varkappa\nu} g^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} g^{\varkappa\mu} g^{\lambda\nu} \right) \frac{1}{6m} \frac{1}{2} \Psi\gamma^0\Psi +$$
$$+ \frac{1}{12m^2} \left[g^{\mu\nu} t_D^{\varkappa\lambda} + g^{\varkappa\lambda} t_D^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(g^{\mu\varkappa} t_D^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} t_D^{\nu\varkappa} + g^{\nu\varkappa} t_D^{\mu\lambda} + g^{\nu\lambda} t_D^{\mu\varkappa} \right) \right]. \tag{7.137}$$

Относительное вращение источников позволяет получить информацию об угловом моменте. Поэтому рассмотрим смещение

$$\delta x^\nu = \delta\omega^{\lambda\nu}(x)\, x_\lambda, \qquad \delta\omega^{\mu\nu}(x) = -\delta\omega^{\nu\mu}(x) \tag{7.138}$$

и соответствующее ему растяжение

$$\partial_\mu \delta x_\nu + \partial_\nu \delta x_\mu = x^\lambda \partial_\mu \delta\omega_{\lambda\nu}(x) + x^\lambda \partial_\nu \delta\omega_{\lambda\mu}(x). \tag{7.139}$$

Если тензор $\delta\omega_{\lambda\nu}(x)$ не зависит от координат, описывая тем самым вращение системы как целого, то величина (7.139) обращается, конечно, в нуль. Получающаяся вариация действия такова:

$$\delta W = -\int (dx)\, t^{\mu\nu}\partial_\mu \delta x_\nu = -\frac{1}{2}\int (dx)\, j^{\lambda\mu\nu}(x)\,\partial_\lambda \delta\omega_{\mu\nu}(x), \quad (7.140)$$

где

$$j^{\lambda\mu\nu} = x^\mu t^{\lambda\nu} - x^\nu t^{\lambda\mu}. \quad (7.141)$$

Другой способ найти вариацию действия — рассмотреть непосредственно реакцию источника. Для единообразия в трактовке разных значений спина мы воспользуемся мультиспинорным описанием, при котором

$$\delta W = \int (dx)\, \delta\eta\gamma\psi = -\int (dx)\, \eta\gamma\delta\psi =$$
$$= -\int (dx)\, \eta\gamma\left[\delta x^\nu \partial_\nu \psi + \frac{i}{4}\left(\sum \sigma_\alpha^{\mu\nu}\right)\psi\partial_\mu \delta x_\nu\right]. \quad (7.142)$$

Сравнивая выражения, полученные двумя разными способами, мы видим, что

$$\partial_\lambda j^{\lambda\mu\nu} = -\eta\gamma\left(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu + \frac{i}{2}\sum \sigma_\alpha^{\mu\nu}\right)\psi +$$
$$+ \partial_\lambda\left[\eta\gamma\frac{i}{4}\left(x^\mu \sum \sigma_\alpha^{\lambda\nu} - x^\nu \sum \sigma_\alpha^{\lambda\mu}\right)\psi\right]. \quad (7.143)$$

Выражение (7.143) означает, что выполняется уравнение для дивергенции тензора натяжений

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = -\eta\gamma\partial^\nu\psi + \partial_\mu\left[\eta\gamma\frac{i}{4}\sum \sigma_\alpha^{\mu\nu}\psi\right], \quad (7.144)$$

так как

$$\partial_\lambda j^{\lambda\mu\nu} = x^\mu \partial_\lambda t^{\lambda\nu} - x^\nu \partial_\lambda t^{\lambda\mu} + t^{\mu\nu} - t^{\nu\mu}. \quad (7.145)$$

Именно в этом пункте важную роль играет требование симметрии, предъявляемое к тензору натяжений. Величина $j^{\lambda\mu\nu}$, которая строится просто из первых моментов тензора натяжений, сохраняется в областях вне источников. Тензор $j^{\lambda\mu\nu}$, который является аналогом тензора $t^{\mu\nu}$, отвечающим вращениям, определяет, очевидно, распределение и поток углового момента в областях вне источников.

Как и прежде, представим себе, что весь источник η_2, как одно целое, вращается относительно причинно-связанного с ним источника η_1. Разделим эти источники некоторой пространственно-подобной поверхностью и положим $\delta\omega_{\mu\nu}(x)$ равным нулю в будущем и постоянной величине в прошлом по отношению к этой поверхности. В результате получим

$$\delta W = \frac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu}\int d\sigma_\lambda j^{\lambda\mu\nu}. \quad (7.146)$$

Аналогичное соотношение имеет место и для замкнутого во времени цикла, когда мы приходим к более простой физической интерпретации, связанной с математическим ожиданием

$$\int d\sigma_\lambda j^{\lambda\mu\nu} = \langle J^{\mu\nu}\rangle_0^\eta. \tag{7.147}$$

Пользуясь формулой (7.143), интегрирование по поверхности можно заменить интегрированием по объему:

$$\int d\sigma_\lambda j^{\lambda\mu\nu} = -\int (dx)\,\eta\gamma\left(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu + \frac{i}{2}\sum \sigma_\alpha^{\mu\nu}\right)\psi. \tag{7.148}$$

Здесь мы видим сумму орбитального и спинового угловых моментов. Эквивалентный результат в другой формулировке для векторного источника и поля частиц единичного спина записывается в виде [см. формулу (7.49)]

$$\int d\sigma_\lambda j^{\lambda\mu\nu} = -\int (dx)\left[J^\lambda\left(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu\right)\varphi_\lambda + J^\mu\varphi^\nu - J^\nu\varphi^\mu\right]. \tag{7.149}$$

Покажем теперь, что на величине полного углового момента произвол в выборе тензора натяжений действительно никак не сказывается. Переопределению

$$t^{\mu\nu} \to t^{\mu\nu} + \partial_\alpha\partial_\beta m^{\mu\nu,\alpha\beta} \tag{7.150}$$

отвечает замена

$$\begin{aligned} j^{\lambda\mu\nu} &\to j^{\lambda\mu\nu} + x^\mu\partial_\alpha\partial_\beta m^{\lambda\nu,\alpha\beta} - x^\nu\partial_\alpha\partial_\beta m^{\lambda\mu,\alpha\beta} = \\ &= j^{\lambda\mu\nu} + \partial_\alpha\partial_\beta\left[x^\mu m^{\lambda\nu,\alpha\beta} - x^\nu m^{\lambda\mu,\alpha\beta}\right] - \\ &\quad - 2\partial_\alpha\left[m^{\lambda\nu,\alpha\mu} - m^{\lambda\mu,\alpha\nu}\right]. \end{aligned} \tag{7.151}$$

Так же как и при выводе формулы (7.87), нетрудно убедиться, что дополнительное слагаемое со вторыми производными не дает вклада в $\int d\sigma_\lambda j^{\lambda\mu\nu}$: для этого достаточно только свойства циклической симметрии (7.85). Из последнего вытекает также антисимметрия по λ и α:

$$\left[m^{\lambda\nu,\alpha\mu} - m^{\lambda\mu,\alpha\nu}\right] + \left[m^{\alpha\nu,\lambda\mu} - m^{\alpha\mu,\lambda\nu}\right] = 0, \tag{7.152}$$

откуда следует, что поверхностный интеграл от последнего слагаемого в формуле (7.151) равен нулю.

Ранее уже вводились состояния частиц со спинами 0, $^1/_2$ и 1, характеризуемые не импульсом, а квантовыми числами трехмерного углового момента. Их анализ весьма сходен с тем, что говорилось о заряде и энергии-импульсе, и поэтому здесь мы не будем входить в соответствующие детали.

Может показаться, что в отличие от трансляций и вращений системы как целого, представляющих несомненный физический интерес, преобразования растяжения служат только приемом, который помогает найти выражения для потоков энергии-импульса. Но существует подмножество таких преобразований, которое в частном случае безмассовых частиц играет более реальную роль. Мы имеем в виду группу изотропных растяжений, для которых выполняются условия

$$\partial_\mu \delta x_\nu (x) + \partial_\nu \delta x_\mu (x) = g_{\mu\nu} \delta\alpha (x). \tag{7.153}$$

Эти требования оказываются весьма жесткими. Укажем прежде всего на скалярное равенство

$$\partial_\nu \delta x^\nu = 2\delta\alpha. \tag{7.154}$$

Далее, взяв дивергенцию обеих частей равенства (7.153), будем иметь

$$\partial^2 \delta x_\mu = -\partial_\mu \delta\alpha, \tag{7.155}$$

а повторив эту операцию, получим

$$\partial^2 \delta\alpha (x) = 0. \tag{7.156}$$

Еще более сильное ограничение получается в результате действия на (7.153) оператором ∂^2:

$$\partial_\mu \partial_\nu \delta\alpha (x) = 0. \tag{7.157}$$

Таким образом, $\delta\alpha (x)$ может быть только линейной функцией координат:

$$\delta\alpha (x) = 2\delta a + 4\delta b_\nu x^\nu. \tag{7.158}$$

Соответствующее выражение для δx^μ после отделения инфинитезимальных трансляций и вращений сводится к квадратичной форме вида

$$\delta x^\mu = \delta a x^\mu + \delta b_\nu (2x^\mu x^\nu - g^{\mu\nu} x^2). \tag{7.159}$$

Вместе с трансляциями и вращениями эти преобразования образуют 15-параметрическую группу. По своей структуре она совпадает с группой вращений в пространстве $4 + 2$ измерений в том же смысле, в каком однородная группа Лоренца является группой вращений в пространстве $3 + 1$ измерений. Проще всего обнаружить это, если ввести однородные координаты

$$x^\mu = \frac{y^\mu}{y_5 + y_6}, \tag{7.160}$$

заданные в пятимерном пространстве, представляющем собой «сферу» нулевого радиуса

$$y^2 + y_5^2 - y_6^2 = 0. \tag{7.161}$$

В этом случае десятипараметрическая группа пространственно-временных трансляций и вращений выступает в качестве подгруппы однородных преобразований на сфере нулевого радиуса, оставляющих инвариантной сумму $y_5 + y_6$:

$$\delta y^\nu = \delta\varepsilon^\nu (y_5 + y_6) + \delta\omega^{\mu\nu} y_\mu, \qquad \delta y_5 = -\delta y_6 = -\delta\varepsilon^\nu y_\nu. \quad (7.162)$$

Однопараметрические δa-преобразования, отвечающие равномерным изменениям масштаба в пространстве-времени, представляют собой «вращения»:

$$\delta y_5 = -\delta a y_6, \qquad \delta y_6 = -\delta a y_5, \qquad \delta y^\mu = 0, \quad (7.163)$$

а преобразования, задаваемые параметрами δb^ν, оставляют неизменной разность $y_5 - y_6$:

$$\delta y_5 = \delta y_6 = -\delta b_\nu y^\nu, \qquad \delta y^\nu = \delta b^\nu (y_5 - y_6). \quad (7.164)$$

Квадратичная форма (7.161) допускает также отражения и в том числе преобразование $y_5 \to -y_5$, которому отвечает изменение координат

$$x^\mu = \frac{y^\mu}{y_5 + y_6} \to \frac{y^\mu}{-y_5 + y_6} = \frac{y^\mu}{y^2}(y_5 + y_6), \quad (7.165)$$

эквивалентное инверсии относительно начала координат

$$x^\mu \to \frac{x^\mu}{x^2}. \quad (7.166)$$

Последовательность двух таких инверсий, первой относительно начала координат, а второй относительно точки с координатами δb^ν, сводится к инфинитезимальному преобразованию (7.159) с $\delta a = 0$.

Изотропные растяжения называют конформными преобразованиями. Их физический смысл выявляется из рассмотрения той части изменения функции Лагранжа при смещениях, которая дается равенством

$$-t^{\mu\nu}\frac{1}{2}(\partial_\mu \delta x_\nu + \partial_\nu \delta x_\mu) = -\frac{1}{2} t\delta\alpha(x), \quad (7.167)$$

позволяющим исключить скаляр t из числа существенных величин. На примерах спинов 0, $^1/_2$, 1 и 2 можно убедиться, что скаляр t, вычисленный в области вне источников в пределе $m \to 0$, либо равен нулю, либо имеет вид второй производной от величины, соответствующей произволу в выборе тензора натяжений:

$$t = \partial_\varkappa \partial_\lambda n^{\varkappa\lambda}. \quad (7.168)$$

Поскольку указанные выше примеры охватывают все случаи, интересные с физической точки зрения, общее доказательство было бы здесь излишней роскошью. Но его общая схема совершенно ясна. Когда величина $1/m$ становится равной бесконечности, действие перестает содержать какую-либо единицу длины. Если равномерно изменять масштаб всех координат,

$$\bar{x}^{\mu} = \lambda^{-1} x^{\mu}, \tag{7.169}$$

то выражение для действия можно сохранить неизменным за счет соответствующего масштабного преобразования источников и полей. При условии, что используется минимальное число полей, это преобразование будет определяться числом дифференцирований в функции Лагранжа. Например, в случае спинов 0 и $^1/_2$

$$\bar{\varphi}(x) = \lambda\varphi(\lambda x), \qquad \bar{\psi}(x) = \lambda^{3/2}\psi(\lambda x). \tag{7.170}$$

Рассматриваемые в инфинитезимальной форме, эти законы масштабного преобразования будут приводить к определенным величинам, кратным $\partial_{\nu}\delta x^{\nu}$, примером чему служит выражение (7.71) для скалярного поля. Инвариантность действия, проявляющаяся в локальных свойствах функции Лагранжа, требует, чтобы скаляр t всюду обращался в нуль или, в более общем случае, чтобы он равнялся дивергенции некоторого вектора. Как нетрудно убедиться на простых примерах, этот вектор строится из градиента, и при подходящем выборе вариаций поля утверждением, справедливым в общем случае, будет как раз равенство (7.168). Далее, так как вторые производные вариации $\delta\alpha(x)$ общего вида (7.158) равны нулю, то

$$-(\partial_{\varkappa}\partial_{\lambda}n^{\varkappa\lambda})\,\delta\alpha = \partial_{\varkappa}(n^{\varkappa\lambda}\partial_{\lambda}\delta\alpha - \delta\alpha\,\partial_{\lambda}n^{\varkappa\lambda}), \tag{7.171}$$

и действие оказывается инвариантным относительно всей 15-параметрической группы, включающей в себя конформные преобразования.

Как и ранее, инвариантность действия означает наличие сохраняющихся физических величин с соответствующими им пространственно-временными распределениями и потоками. При этом поступают так же, как и обычно: константы δa и δb_{ν} заменяют произвольными функциями координат. Будем для простоты считать, что $t = 0$. Если в действительности нужно брать выражение (7.168), то в различных потоках возникнут дополнительные члены, но к существенным изменениям это не приведет. Изменение действия при обобщенных конформных преобразованиях имеет вид

$$\delta W = -\int (dx)\,[c^{\mu}(x)\,\partial_{\mu}\,\delta a(x) - c^{\mu\nu}(x)\,\partial_{\mu}\delta b_{\nu}(x)], \tag{7.172}$$

где

$$c^{\mu} = t^{\mu\nu}x_{\nu}, \qquad c^{\mu\nu} = t^{\mu}{}_{\lambda}(2x^{\lambda}x^{\nu} - g^{\lambda\nu}x^2). \tag{7.173}$$

Тензор $c^{\mu\nu}$ не симметричен:

$$c^{\mu\nu} - c^{\nu\mu} = -2x_{\lambda}j^{\lambda\mu\nu}, \tag{7.174}$$

а получаемый из него скаляр таков:

$$c = g_{\mu\nu} c^{\mu\nu} = 2x^{\lambda} c_{\lambda}. \tag{7.175}$$

В областях вне источников локальные законы сохранения имеют вид

$$\partial_{\mu} c^{\mu} = 0, \qquad \partial_{\mu} c^{\mu\nu} = 0. \tag{7.176}$$

Рассматривая замкнутый во времени цикл, мы придем к следующим сохраняющимся интегральным величинам:

$$\int d\sigma_{\mu} c^{\mu} = \langle C \rangle, \qquad \int d\sigma_{\mu} c^{\mu\nu} = \langle C^{\nu} \rangle. \tag{7.177}$$

Вопрос о физическом содержании такого рода законов сохранения мы рассмотрим в связи с наиболее известной безмассовой частицей.

8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ, МАГНИТНЫЙ ЗАРЯД

Хотя уже неоднократно говорилось о пределе $m \to 0$ для частиц с единичным спином, имеет смысл провести независимый анализ поля, соответствующего безмассовой частице со спиральностью, равной единице, т. е. фотону. Мы будем исходить из выражения (3.45) из гл. 2, написав его в виде

$$W(J) = \frac{1}{2} \int (dx)(dx') J^{\mu}(x) D_{+}(x - x') J_{\mu}(x'), \tag{8.1}$$

$$\partial_{\mu} J^{\mu}(x) = 0.$$

Определяя поле $A_{\mu}(x)$ с помощью пробного источника $\delta J^{\mu}(x)$ посредством формулы

$$\delta W(J) = \int (dx)\, \delta J^{\mu}(x) A_{\mu}(x), \tag{8.2}$$

необходимо учитывать требование, которое предъявляется к источнику:

$$\partial_{\mu} \delta J^{\mu}(x) = 0. \tag{8.3}$$

Таким образом, сравнивая выражение (8.2) с выражением

$$\delta W(J) = \int (dx)(dx')\, \delta J^{\mu}(x) D_{+}(x - x') J_{\mu}(x'), \tag{8.4}$$

нельзя просто приравнивать коэффициенты при $\delta J^{\mu}(x)$. На самом деле их разность представляет собой некоторую произвольную величину, интеграл от которой в силу требования (8.3) обращается в нуль. Этот обращающийся в нуль интеграл имеет следующий общий вид:

$$-\int (dx)\, \lambda(x)\, \partial_{\mu} \delta J^{\mu}(x) = 0, \tag{8.5}$$

и поэтому

$$A_\mu(x) = \int (dx')\, D_+(x - x')\, J_\mu(x') + \partial_\mu \lambda(x). \tag{8.6}$$

Зависимость $A_\mu(x)$ от произвольной скалярной функции $\lambda(x)$ можно выделить, взяв дивергенцию обеих частей равенства (8.6). Это дает

$$\partial_\nu A^\nu(x) = \partial^2 \lambda(x), \tag{8.7}$$

так что, действуя на (8.6) дифференциальным оператором $-\partial^2$, мы придем к дифференциальному уравнению второго порядка

$$-\partial^2 A_\mu(x) + \partial_\mu \partial_\nu A^\nu(x) = J_\mu(x). \tag{8.8}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (3.6) при $m = 0$. Поскольку в этом дифференциальном уравнении поля остается произвол в выборе $\lambda(x)$, оно не должно изменяться при преобразовании вида

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x), \tag{8.9}$$

которое известно под названием калибровочного преобразования. Такую калибровочную инвариантность можно сделать явной, переписав полевое уравнение в эквивалентной форме [см. формулы (3.7) и (3.8)]

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = J^\mu(x), \tag{8.10}$$

$$\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = F_{\mu\nu}(x), \tag{8.11}$$

поскольку добавление градиентного члена к вектору не изменяет ротора этого вектора. Из полевых уравнений вытекает также равенство нулю дивергенции вектора J^μ, так как благодаря антисимметрии $F^{\mu\nu}$ мы имеем

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} \equiv 0. \tag{8.12}$$

То, что $F_{\mu\nu}$ представляет собой ротор некоторого вектора, находит свое выражение еще в одной форме записи дифференциальных уравнений:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu F_{\nu\lambda}(x) + \partial_\nu F_{\lambda\mu}(x) = 0. \tag{8.13}$$

Тензор, дуальный тензору $F_{\mu\nu}$, определяется равенством [см. формулу (3.60) из гл. 2]

$$^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda} F_{\varkappa\lambda}, \tag{8.14}$$

где полностью антисимметричный тензор четвертого ранга нормирован условием

$$\varepsilon^{0123} = +1. \tag{8.15}$$

Используя дуальный тензор, дифференциальные уравнения (8.13) можно написать в виде

$$\partial_\nu {}^*F^{\mu\nu}(x) = 0. \tag{8.16}$$

Уравнения (8.10) и (8.16) — это уравнения Максвелла для тензора напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Напомним связь компонент этого тензора с электрическим и магнитным полями:

$$\begin{aligned} E_k &= F^0{}_k, & H_k &= \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}F_{lm}, \\ H_k &= {}^*F^0{}_k, & -E_k &= \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}{}^*F_{lm}. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Другие возможные выражения для действия таковы:

$$W(J) = \frac{1}{2}\int (dx)\, J^\mu(x)\, A_\mu(x), \tag{8.18}$$

$$W(J) = \frac{1}{2}\int (dx)\, (\partial_\nu F^{\mu\nu})\, A_\mu = \frac{1}{4}\int (dx)\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{8.19}$$

Действие для электромагнитного поля, соответствующее полученному ранее выражению (5.94), имеет вид

$$W(J) = \int (dx)\, [J^\mu A_\mu + \mathscr{L}], \tag{8.20}$$

причем функция Лагранжа

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathrm{E}^2 - \mathrm{H}^2). \tag{8.21}$$

Эта функция Лагранжа явно калибровочно-инвариантна, а вследствие дифференциального закона сохранения для вектора J^μ таковым будет и действие. На этот раз мы пришли к инвариантности действия, исходя из закона сохранения.

При отыскании выражений для вариаций источника и поля естественно придерживаться закона сохранения вектора J^μ и калибровочной инвариантности тензора $F_{\mu\nu}$. Закон преобразования векторного источника (7.33) и (7.47) обладает требуемыми свойствами, так как из равенства

$$\delta\, (\partial_\mu J^\mu) = \partial_\nu\, (\delta x^\nu\, \partial_\mu J^\mu) \tag{8.22}$$

следует, что $\partial_\mu J^\mu$ все время будет оставаться равным нулю; в соответствующее тензорное преобразование (7.40)

$$\delta F_{\mu\nu} = \delta x^\lambda \partial_\lambda F_{\mu\nu} + F_{\lambda\nu}\partial_\mu \delta x^\lambda + F_{\mu\lambda}\partial_\nu \delta x^\lambda \tag{8.23}$$

входят только калибровочно-инвариантные величины. Кроме того, закон преобразования векторного поля

$$\delta A_\mu = \delta x^\nu \partial_\nu A_\mu + A_\nu \partial_\mu \delta x^\nu = \partial_\mu (A_\nu \delta x^\nu) - F_{\mu\nu}\delta x^\nu, \tag{8.24}$$

обязанный своим происхождением трансформационным свойствам градиента скалярной функции, сохраняет свой вид при калибровочном преобразовании. Непосредственное вычисление вариации действия дает

$$\delta W(J) = \int (dx)\,\delta J^\mu A_\mu = -\int (dx)\,J^\mu\,\delta A_\mu = \\ = \int (dx)\,J^\mu F_{\mu\nu}\,\delta x^\nu, \tag{8.25}$$

тогда как изменение функции Лагранжа имеет вид

$$\delta\mathscr{L} = \delta x^\nu \partial_\nu \mathscr{L} - F^{\mu\lambda}F^\nu_\lambda \partial_\mu \delta x_\nu = \\ = \partial_\nu(\delta x^\nu \mathscr{L}) - t^{\mu\nu}\partial_\mu \delta x_\nu, \tag{8.26}$$

где

$$t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu} = F^{\mu\lambda}F^\nu_\lambda - g^{\mu\nu}\frac{1}{4}F^{\varkappa\lambda}F_{\varkappa\lambda} \tag{8.27}$$

и

$$t = 0. \tag{8.28}$$

Сравнивая два результата, полученных разными способами, будем иметь

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = J_\mu F^{\mu\nu} = -J^\mu\partial^\nu A_\mu + \partial_\mu(J^\mu A^\nu). \tag{8.29}$$

Приведем, кроме того, в явном виде некоторые из компонент тензора натяжений:

$$t^{00} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \qquad t^0{}_k = (\mathbf{E}\times\mathbf{H})_k. \tag{8.30}$$

Перейдем теперь непосредственно к конформным законам сохранения. Умножив (8.29) на x_ν, получим ($t = 0$)

$$\partial_\mu c^\mu = J_\mu F^{\mu\nu}x_\nu, \tag{8.31}$$

и аналогично

$$J_\mu F^\mu{}_\lambda(2x^\lambda x^\nu - g^{\lambda\nu}x^2) = (\partial_\mu t^\mu{}_\lambda)(2x^\lambda x^\nu - g^{\lambda\nu}x^2) = \partial_\mu c^{\mu\nu}. \tag{8.32}$$

Соответствующие интегральные законы сохранения чрезвычайно похожи на закон сохранения величины

$$\int d\sigma_\mu j^{\mu 0k} = \int (d\mathbf{x})\,j^{00k} = x^0\int(d\mathbf{x})\,t^{0k} - \int(d\mathbf{x})\,x^k t^{00}, \tag{8.33}$$

которая, будучи явной функцией времени, показывает, каким образом движется некая характеристика системы; в данном примере последняя представляет собой центр распределения энергии. Наиболее категорическое утверждение такого рода, содержащееся в факте конформной инвариантности, дает нам величина

$$\int d\sigma_\mu(c^{\mu 0} - 2c^\mu x^0) = \int(d\mathbf{x})(c^{00} - 2c^0x^0) = \\ = \int(d\mathbf{x})((x^0)^2 - \mathbf{x}^2)\,t^{00}, \tag{8.34}$$

или

$$\int (d\mathbf{x})\, \mathbf{x}^2 t^{00} = (x^0)^2 \int (d\mathbf{x})\, t^{00} + 2x^0 \int (d\mathbf{x})\, c^0 - \int (d\mathbf{x})\, c^{00}. \qquad (8.35)$$

Таким образом, величина $\mathbf{x}^2$, усредненная с весовым множителем, равным плотности энергии, изменяется во времени по квадратичному закону, причем коэффициент при $(x^0)^2$ равен единице. Что это означает для частиц, которые несут энергию, совершенно очевидно — фотоны движутся со скоростью света. Коэффициент при x^0 и постоянный член дают нам информацию о начальной корреляции между положением и скоростью и о начальном значении средней величины $\mathbf{x}^2$. Такое истолкование интеграла $\int (d\mathbf{x})\, c^0$ согласуется с его записью через импульсное распределение:

$$\int (d\mathbf{x})\, c^0 = \int (d\mathbf{x})\, t^{0k} x_k - x^0 \int (d\mathbf{x})\, t^{00}. \qquad (8.36)$$

Тензор напряженности поля $F_{\mu\nu}$ и векторный потенциал A_μ входят на равных основаниях в принцип действия

$$W = \int (dx) \left[J^\mu A_\mu + \frac{1}{2} M^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \mathscr{L}(A,\ F) \right], \qquad (8.37)$$

где функция Лагранжа

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \qquad (8.38)$$

обладает явной калибровочной инвариантностью. В этом случае полевые уравнения записываются в виде

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu, \qquad \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}, \qquad (8.39)$$

или

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu, \qquad \partial_\nu {}^*F^{\mu\nu} = {}^*J^\mu, \qquad (8.40)$$

где

$${}^*J^\mu = -\partial_\nu {}^*M^{\mu\nu}, \qquad \partial_\mu {}^*J^\mu \equiv 0, \qquad (8.41)$$

а ${}^*M^{\mu\nu}$ — тензор, дуальный тензору $M^{\mu\nu}$. Тензор натяжений симметрı чен:

$$t^{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\lambda - \partial^\lambda A^\mu) F^\nu{}_\lambda + F^\mu{}_\lambda (\partial^\nu A^\lambda - \partial^\lambda A^\nu) - F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda + g^{\mu\nu} \mathscr{L} \qquad (8.42)$$

и удовлетворяет соотношению

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = (J_\mu + \partial^\lambda M_{\mu\lambda}) F^{\mu\nu} + J_\mu M^{\mu\nu} + {}^*J_\mu {}^*M^{\mu\nu}. \qquad (8.43)$$

Положив $M_{\mu\nu} = 0$ и отождествив тензор напряженности поля с ротором векторного потенциала, мы вернемся к сформулированным выше результатам.

Раз функция фотонного источника $J^{\mu}(x)$ в соответствии с первой системой уравнений Максвелла (8.40) интерпретируется как электрический ток, то не является ли вектор $^*J^{\mu}(x)$, определенный в формулах (8.41), магнитным током? Ответ на этот вопрос отрицательный. Правда, такая интерпретация согласуется с тем, что полное значение наблюдающегося магнитного заряда равно нулю:

$$\int d\sigma_{\mu}\,{}^*J^{\mu} = -\frac{1}{2}\int (d\sigma_{\mu}\partial_{\nu} - d\sigma_{\nu}\partial_{\mu})\,{}^*M^{\mu\nu} = 0, \tag{8.44}$$

если только $M^{\mu\nu}$ обладает определенной пространственной локализуемостью, содержащейся в понятии источника. Но это вряд ли можно считать решающим доводом. Важно то, что путем переопределения напряженности поля магнитный ток можно превратить в эквивалентный электрический ток. Действительно, уравнения (8.40) и (8.41) можно представить также в виде

$$\partial_{\nu}(F^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}) = J^{\mu} + \partial_{\nu}M^{\mu\nu}, \qquad \partial_{\nu}\,{}^*(F^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}) = 0. \tag{8.45}$$

В таком виде они содержат эффективный электрический ток, уже появлявшийся в соотношении (8.43). Но за этой приоткрывшейся было на короткое время возможностью встает фундаментальная проблема существования реального магнитного заряда, распределенного и движущегося по законам, которые в явной или неявной форме отличаются от (8.41).

Чтобы исследовать этот вопрос, мы вернемся к самому началу — к понятию источника. Можно ли провести различие между двумя фотонными источниками принципиально разного типа? При этом источники обоих типов должны быть тесно связанными между собой, так как структура уравнений Максвелла не изменяется в результате подстановки

$$\begin{aligned} J^{\mu} &\to {}^*J^{\mu}, \qquad & F^{\mu\nu} &\to {}^*F^{\mu\nu},\\ {}^*J^{\mu} &\to -J^{\mu}, \qquad & {}^*F^{\mu\nu} &\to -F^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{8.46}$$

или, в более общем случае, в результате соответствующего преобразования с произвольным углом α:

$$\begin{aligned} J^{\mu} &\to J^{\mu}\cos\alpha + {}^*J^{\mu}\sin\alpha, \quad & F^{\mu\nu} &\to F^{\mu\nu}\cos\alpha + {}^*F^{\mu\nu}\sin\alpha,\\ {}^*J^{\mu} &\to -J^{\mu}\sin\alpha + {}^*J^{\mu}\cos\alpha, \quad & {}^*F^{\mu\nu} &\to -F^{\mu\nu}\sin\alpha + {}^*F^{\mu\nu}\cos\alpha. \end{aligned} \tag{8.47}$$

Повторное применение операции дуализации к тензору напряженности поля дает

$$^{**}F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}. \tag{8.48}$$

Все это напоминает то, что говорилось в § 3 гл. 2. Там мы видели, что при повороте всех векторов поляризации фотона на угол $\pi/2$, который приводит к замене исходного набора векторов поляризации $\mathbf{e}_{p\lambda}$ набором векторов ($p^0 = |\mathbf{p}|$)

$$*\mathbf{e}_{p\lambda} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} \times \mathbf{e}_{p\lambda}, \tag{8.49}$$

никаких существенных изменений не происходит. Поэтому можно думать, что искомые различие и связь между двумя типами источников будут налицо в том случае, если способность одного из них испускать данный фотон с квантовыми числами $p\lambda$ описывается вектором $\mathbf{e}_{p\lambda}$, а другого — вектором $*\mathbf{e}_{p\lambda}$. Это находит свое выражение в записи

$$J_{p\lambda} = (d\omega_p)^{1/2} [\mathbf{e}_{p\lambda} \cdot \mathbf{J}(p) + *\mathbf{e}_{p\lambda} \cdot *\mathbf{J}(p)]. \tag{8.50}$$

(Чтобы меньше было звездочек, мы пользуемся здесь вещественными векторами поляризации.) Тогда эквивалентность двух способов описания, связанных преобразованием источников (8.47), будет отвечать возможности поворота обоих наборов векторов поляризации на один и тот же угол α.

Рассмотрим опять причинно-упорядоченные пары источников, но теперь будем считать, что они имеют компоненты J_1^μ, $*J_1^\mu$ и J_2^μ, $*J_2^\mu$. Связь между испускающим и поглощающим источниками, которая осуществляется отдельным фотоном, описывается выражением

$$\sum_{p\lambda} J_{1p\lambda}^* J_{2p\lambda} = \int d\omega_p \sum_\lambda [\mathbf{J}_1(-p) \cdot \mathbf{e}_{p\lambda}\mathbf{e}_{p\lambda} \cdot \mathbf{J}_2(p) + \\ + *\mathbf{J}_1(-p) \cdot *\mathbf{e}_{p\lambda} *\mathbf{e}_{p\lambda} \cdot *\mathbf{J}_2(p) + \mathbf{J}_1(-p) \cdot \mathbf{e}_{p\lambda} *\mathbf{e}_{p\lambda} \cdot *\mathbf{J}_2(p) + \\ + *\mathbf{J}_1(-p) \cdot *\mathbf{e}_{p\lambda}\mathbf{e}_{p\lambda} \cdot \mathbf{J}_2(p)]. \tag{8.51}$$

Эквивалентность обоих наборов векторов поляризации находит свое выражение в диадном соотношении

$$\sum_\lambda \mathbf{e}_{p\lambda}\mathbf{e}_{p\lambda} = \sum_\lambda *\mathbf{e}_{p\lambda} *\mathbf{e}_{p\lambda}, \tag{8.52}$$

и соответствующие слагаемые в (8.51) уже известным способом можно представить в инвариантной форме. Но как связаны между собой разные типы источников? Прежде всего заметим, что суммирование в выражении

$$\sum_\lambda *\mathbf{e}_{p\lambda}\mathbf{e}_{p\lambda} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} \times \sum_\lambda \mathbf{e}_{p\lambda}\mathbf{e}_{p\lambda} \tag{8.53}$$

можно распространить на три единичных вектора, параллельных $\mathbf{p}$, вводя тем самым единичную диаду

$$\sum_\lambda *\mathbf{e}_{p\lambda}\mathbf{e}_{p\lambda} = -\sum_\lambda \mathbf{e}_{p\lambda} *\mathbf{e}_{p\lambda} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} \times . \tag{8.54}$$

Связь, примером которой служит выражение

$$\mathbf{J}_1(-p)\times{}^*\mathbf{J}_2(p)\cdot\frac{\mathbf{p}}{p^0},$$

внешне выглядит как трехмерная. Тем не менее при рассматриваемых физических условиях она представляет собой лоренцевский скаляр, в чем можно убедиться путем непосредственной проверки. Но выгоднее записывать это слагаемое в явно ковариантной форме.

Мы начнем с замечания, что (причинные индексы опущены)

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(-p)\times{}^*\mathbf{J}(p)\cdot\frac{\mathbf{p}}{p^0}&=\varepsilon^{m0kl}J_m(-p)\frac{1}{p^0}p_k{}^*J_l(p)=\\&=\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}J_\mu(-p)f_\nu(p)\,ip_\varkappa{}^*J_\lambda(p),\end{aligned}\tag{8.55}$$

где $f_\nu(p)$ имеет только временную компоненту, причем

$$ip^0f_0(p)=1.\tag{8.56}$$

Решающим моментом здесь является то, что четырехмерная форма записи (8.55) остается справедливой и при любом векторе $f_\nu(p)$, удовлетворяющем условию

$$ip^\nu f_\nu(p)=1,\tag{8.57}$$

если учесть, что в случае рассматриваемых причинных связей для вектора энергии-импульса фотона имеет место равенство

$$p^2=0.\tag{8.58}$$

Столь же существенными, но безотносительно к причинной упорядоченности являются законы сохранения для токов:

$$p_\nu J^\nu(p)=0,\qquad p_\nu{}^*J^\nu(p)=0.\tag{8.59}$$

На этих законах сохранения основано следующее тождество, справедливое при произвольном p^μ:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}J_\mu(-p)f_\nu(p)\,ip_\varkappa{}^*J_\lambda(p)=\\&=[ip^\nu f_\nu(p)]\,\mathbf{J}(-p)\times{}^*\mathbf{J}(p)\cdot\frac{\mathbf{p}}{p^0}-i\frac{p^2}{p^0}\mathbf{f}(p)\cdot\mathbf{J}(-p)\times{}^*\mathbf{J}(p).\end{aligned}\tag{8.60}$$

Второй из двух членов, фигурирующих в правой части этого тождества, обращается в нуль, когда p^μ является импульсом фотона, удовлетворяющим равенству (8.58), а первый не зависит от конкретного выбора вектора $f_\nu(p)$, на который наложено ограничение (8.57). Фактически подобные рассуждения можно рассматривать как доказательство ковариантности при заданной причинной упорядоченности, но оно требует некоторых пояснений. Класс функций, удовлетворяющих условию (8.57), дается равенством

$$f_\nu(p)=\frac{n_\nu}{ipn},\tag{8.61}$$

где n_ν — произвольный постоянный вектор. Если вектор n_ν направлен вдоль оси времени, то мы приходим к случаю (8.56). Такая характеристика $f_\nu(p)$ не ковариантна; хотя после преобразования Лоренца вектор n_ν и останется времени-подобным вектором, он приобретет ненулевые пространственные компоненты. Именно здесь и сказывается произвол в выборе n_ν, ибо времениподобный вектор всегда можно заменить вектором, у которого отлична от нуля только временная компонента. Благодаря такой связи между выбором вектора n_ν и выбором координатной системы мы и приходим к равноправности всех систем координат, а тем самым и к ковариантности.

Условие (8.57) следующим образом записывается через пространственно-временные переменные:

$$\partial_\nu f^\nu (x - x') = \delta (x - x'). \tag{8.62}$$

Если функция $f^\nu (x - x')$, как и в формуле (8.61), пропорциональна постоянному вектору n^ν, т. е.

$$f^\nu (x - x') = n^\nu f (x - x'), \tag{8.63}$$

то мы имеем для нее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$(n\partial) f (x - x') = \delta (x - x'). \tag{8.64}$$

В случае, соответствующем равенству (8.56), когда только $n^0 \neq 0$, получим

$$\partial_0 f^0 (x - x') = \delta (x^0 - x^{0\prime}) \, \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{8.65}$$

Решение этого уравнения не единственно. Два разных решения, соответствующих запаздывающим и опережающим граничным условиям, имеют вид

$$f^0 (x - x') = \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \, [\eta (x^0 - x^{0\prime}), \ -\eta (x^{0\prime} - x^0)], \tag{8.66}$$

где величина

$$\eta (x^{0\prime} - x^0) = \begin{cases} x^0 > x^{0\prime}: & 1, \\ x^0 < x^{0\prime}: & 0 \end{cases} \tag{8.67}$$

представляет собой ступенчатую функцию Хевисайда (заглавной греческой букве η в латинском алфавите отвечает H, так же как заглавной букве δ отвечает буква D). Вектор n^ν можно выбрать по-другому, направив его, скажем, вдоль третьей пространственной оси. В этом случае

$$\partial_3 f_3 (x - x') = \delta (x^0 - x_0') \, \delta (x_1 - x_1') \, \delta (x_2 - x_2') \, \delta (x_3 - x_3'), \tag{8.68}$$

и два разных решения таковы:

$$f_3 (x - x') = \delta (x^0 - x^{0\prime}) \, \delta (x_1 - x_1') \, \delta (x_2 - x_2') \times \\ \times [\eta (x_3 - x_3'), \ -\eta (x_3' - x_3)]. \tag{8.69}$$

Отметим, в частности, линейную комбинацию, представляющую собой полусумму этих решений:

$$f_3(x-x') = \delta(x^0 - x^{0\prime})\,\delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2')\,\frac{1}{2}\,\varepsilon(x_3 - x_3') \tag{8.70}$$

где

$$\varepsilon(x_3 - x_3') = -\varepsilon(x_3' - x_3) = \begin{cases} x_3 > x_3': & 1, \\ x_3 < x_3': & -1. \end{cases} \tag{8.71}$$

В более общем случае дифференциального уравнения (8.62) можно наложить требование симметрии

$$-f^\nu(x' - x) = f^\nu(x - x'). \tag{8.72}$$

Для пространственно-временной экстраполяции выражений, описывающих связи причинно-упорядоченных источников, мы воспользуемся четырехмерной заменой (8.55). Если взять одну из функций f^ν типа (8.66), то в нашей схеме появится дополнительный причинный элемент, совершенно произвольный и никак не связанный с физической стороной дела. В противоположность этому функция типа (8.69) не обладает такой зависимостью от времени, и произвол в ее задании ограничивается лишь тем, что фиксируются некоторые направления в пространстве. Поскольку главным принципом у нас является причинность, нам незачем пользоваться функциями, подобными тем, которые фигурируют в формуле (8.66). Не связывая себя конкретными примерами (8.69) и (8.70), мы все-таки будем считать, что $f^\nu(x - x')$ имеет пространственно-подобное направление и что эта векторная функция локализована во времени-подобной по отношению к нему координатной области.

Искомая пространственно-временная экстраполяция дается равенством

$$\langle 0_+|0_-\rangle^{J\,{}^*J} = \exp[iW(J\,{}^*J)], \tag{8.73}$$

где

$$W(J\,{}^*J) = \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,J^\mu(x)\,D_+(x-x')\,J_\mu(x') + \\ + \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,{}^*J^\mu(x)\,D_+(x-x')\,{}^*J_\mu(x') + \\ + \int (dx)(dx')(dx'')\,e^{\mu\nu\varkappa\lambda}J_\mu(x)\,D_+(x-x')\,f_\nu(x'-x'')\,\partial''_\varkappa\,{}^*J_\lambda(x''). \tag{8.74}$$

При проверке правильности описания этим выражением исходной причинной упорядоченности у нас возникают фурье-преобразования

$$\int (dx')(dx'')\,e^{-ipx'}f_\nu(x'-x'')\,\partial''_\varkappa\,{}^*J_\lambda(x'') = f_\nu(p)\,ip_\varkappa\,{}^*J_\lambda(p) \tag{8.75}$$

и

$$\int (dx')(dx'')\, e^{ipx'} f_\nu (x'-x'')\, \partial''_\varkappa {}^*J_\lambda (x'') = -f_\nu(-p)\, ip_\varkappa {}^*J_\lambda(-p), \quad (8.76)$$

встречающиеся в процессе восстановления двух последних слагаемых (8.51). Эти слагаемые переходят одно в другое при подстановке

$$J_\mu (p) \to {}^*J_\mu (p), \quad {}^*J_\mu (p) \to -J_\mu (p). \quad (8.77)$$

Чтобы проверить наличие указанного свойства симметрии у W, удобно перейти к четырехмерным импульсным переменным:

$$W(J\,{}^*J) = \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - i\varepsilon} \Big[\frac{1}{2} J^\mu (-p) J_\mu (p) + \frac{1}{2} {}^*J^\mu (-p)\, {}^*J_\mu (p) + \\ + \varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda} J_\mu (-p) f_\nu (p)\, ip_\varkappa {}^*J_\lambda (p) \Big]. \quad (8.78)$$

Действие на последнее слагаемое подстановки (8.77), скомбинированной с $p_\mu \to -p_\mu$ и $\mu \leftrightarrow \lambda$, сводится к замене

$$\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda} J_\mu (-p) f_\nu (p)\, ip_\varkappa {}^*J_\lambda (p) \to \varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda} J_\mu (-p) (-1) f_\nu (-p)\, ip_\varkappa {}^*J_\lambda (p), \quad (8.79)$$

и условие инвариантности требует, чтобы выполнялось равенство

$$-f_\nu (-p) = f_\nu (p). \quad (8.80)$$

Правда, при наличии причинной упорядоченности функция $f_\nu (p)$ входит только в комбинации $ip^\nu f_\nu (p) = 1$, и это дополнительное свойство симметрии не является обязательным. Но если потребовать, чтобы связь между двумя типами источников сохранялась и в общем случае, то условие (8.80), совпадающее с (8.72), накладывать необходимо. Из этого следует, что $W(J\,{}^*J)$ сохраняет свой вид при общем преобразовании источников (8.47).

Два типа пробных источников определяют два типа полей:

$$\delta W(J\,{}^*J) = \int (dx) [\delta J^\mu (x) A_\mu (x) + \delta\, {}^*J^\mu (x)\, {}^*A_\mu (x)], \quad (8.81)$$

где

$$\partial_\mu \delta J^\mu (x) = 0, \qquad \partial_\mu \delta\, {}^*J^\mu (x) = 0. \quad (8.82)$$

Имеется также двоякого рода независимый калибровочный произвол, допускаемый в выражениях для поля:

$$A_\mu (x) = \int (dx') D_+ (x-x') J_\mu (x') + \\ + \int (dx')(dx'') D_+ (x-x') f^\nu (x'-x'')\, {}^*[\partial''_\mu {}^*J_\nu (x'') - \partial''_\nu {}^*J_\mu (x'')] + \\ + \partial_\mu \lambda (x),$$

$$
\begin{aligned}
{}^*A_\mu(x) = \int (dx')\, D_+(x-x')\, {}^*J_\mu(x') - \\
- \int (dx')(dx'')\, D_+(x-x')\, f^\nu(x'-x'')\, {}^*[\partial''_\mu J_\nu(x'') - \partial''_\nu J_\mu(x'')] + \\
+ \partial_\mu {}^*\lambda(x),
\end{aligned} \tag{8.83}
$$

где для построения дуальных тензоров используется символ $\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}$. Отметим еще тождество [представляющее собой, по сути дела, уравнение (8.13)]

$$
\partial_\mu {}^*(\partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu) = \varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}\partial_\mu\partial_\varkappa V_\lambda = 0. \tag{8.84}
$$

В соответствии с этим

$$
\partial_\mu A^\mu(x) = \partial^2\lambda(x), \qquad \partial_\mu {}^*A^\mu(x) = \partial^2\, {}^*\lambda(x), \tag{8.85}
$$

и в результате мы получаем

$$
\begin{aligned}
&-\partial^2 A_\mu(x) + \partial_\mu\partial_\nu A^\nu(x) = \\
&= J_\mu(x) + \int (dx')\, f^\nu(x-x')\, {}^*[\partial'_\mu {}^*J_\nu(x') - \partial'_\nu {}^*J_\mu(x')], \\
&-\partial^2\, {}^*A_\mu(x) + \partial_\mu\partial_\nu {}^*A^\nu(x) = \\
&= {}^*J_\mu(x) - \int (dx')\, f^\nu(x-x')\, {}^*[\partial'_\mu J_\nu(x') - \partial'_\nu J_\mu(x')].
\end{aligned} \tag{8.86}
$$

Заметим также, что, например,

$$
\begin{aligned}
&\int (dx')\, f^\nu(x-x')\, {}^*[\partial'_\mu J_\nu(x') - \partial'_\nu J_\mu(x')] = \\
&= \partial^\varkappa \int (dx')\, \varepsilon_{\mu\nu\varkappa\lambda} f^\nu(x-x')\, J^\lambda(x') = \\
&= -\partial^\nu \int (dx')\, {}^*[f_\mu(x-x')\, J_\nu(x') - f_\nu(x-x')\, J_\mu(x')],
\end{aligned} \tag{8.87}
$$

причем в последнем выражении мы поменяли местами индексы $\varkappa$ и ν. Два калибровочно-инвариантных поля

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + \\
&+ \int (dx')\, {}^*[f_\mu(x-x')\, {}^*J_\nu(x') - f_\nu(x-x')\, {}^*J_\mu(x')], \\
{}^*F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu {}^*A_\nu(x) - \partial_\nu {}^*A_\mu(x) - \\
&- \int (dx')\, {}^*[f_\mu(x-x')\, J_\nu(x') - f_\nu(x-x')\, J_\mu(x')]
\end{aligned} \tag{8.88}
$$

удовлетворяют уравнениям

$$
\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = J^\mu(x), \qquad \partial_\nu {}^*F^{\mu\nu}(x) = {}^*J^\mu(x). \tag{8.89}
$$

Но рассматривать их как уравнения Максвелла общего вида, содержащие электрический и магнитный токи, можно лишь в том случае, если тензор $^*F^{\mu\nu}(x)$ дуален тензору $F^{\mu\nu}(x)$.

Чтобы убедиться в этой дуальности прямым путем, нужно вычислить роторы двух векторных потенциалов $A_\mu(x)$, $^*A_\mu(x)$ и сравнить получающиеся выражения с формулой (8.88). Учитывая еще одно тождество, справедливое для любого антисимметричного тензора $G_{\mu\nu}$,

$$\partial_\mu {}^*G_{\nu\lambda} + \partial_\nu {}^*G_{\lambda\mu} + \partial_\lambda {}^*G_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\mu\nu\lambda\varkappa}\partial_\alpha G^{\varkappa\alpha}, \tag{8.90}$$

мы получаем

$$\begin{aligned}\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - \int (dx')\, D_+(x-x')\,[\partial'_\mu J_\nu(x') - \partial'_\nu J_\mu(x')] = \\ = -\int (dx')(dx'')\, D_+(x-x')\, f^\lambda(x'-x'')\,\partial''_\lambda\, {}^*[\partial''_\mu {}^*J_\nu(x'') - \partial''_\nu {}^*J_\mu(x'')] - \\ - \int (dx')(dx'')\, D_+(x-x')\, f^\lambda(x'-x'')\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\varkappa}(-\partial''^2)\, {}^*J^\varkappa(x'')\end{aligned} \tag{8.91}$$

и аналогичное выражение, в которое входит $^*A_\mu(x)$. Используя затем дифференциальные уравнения

$$\partial'_\lambda f^\lambda(x'-x'') = \delta(x'-x''), \qquad -\partial^2 D_+(x-x') = \delta(x-x'), \tag{8.92}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= \int (dx')\, D_+(x-x')\,[\partial'_\mu J_\nu(x') - \partial'_\nu J_\mu(x') - \\ &\quad - {}^*(\partial'_\mu {}^*J_\nu(x') - \partial'_\nu {}^*J_\mu(x'))], \\ {}^*F_{\mu\nu}(x) &= \int (dx')\, D_+(x-x')\,[\partial'_\mu {}^*J_\nu(x') - \partial'_\nu {}^*J_\mu(x') + \\ &\quad + {}^*(\partial'_\mu J_\nu(x') - \partial'_\nu J_\mu(x'))], \end{aligned} \tag{8.93}$$

откуда сразу видно необходимое дуальное соотношение. Заметим, что в калибровочно-инвариантные напряженности поля не входит также и произвольный вектор f_ν. Очевидно, что эти тензоры удовлетворяют уравнениям Максвелла. Справедливо и обратное утверждение: решениями уравнений Максвелла с граничным условием, требующим, чтобы содержались только расходящиеся во времени волны, являются как раз тензоры напряженности (8.93). Чтобы убедиться в этом, воспользуемся тождеством (8.90) в форме

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\varkappa}\, {}^*J^\varkappa \tag{8.94}$$

и применим его к выражению

$$\partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu = \partial^\lambda\,[\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}], \tag{8.95}$$

в результате чего получим

$$-\partial^2 F_{\mu\nu} = \partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu - {}^*(\partial_\mu {}^*J_\nu - \partial_\nu {}^*J_\mu). \tag{8.96}$$

Искомым решением будет тензор напряженности (8.93), а также дуальный ему тензор.

Если не считать произвола, допускаемого калибровочными преобразованиями, то два векторных потенциала можно выразить через напряженности поля. Сначала отметим, что фурье-образ величины

$$a_\mu(x) = \int (dx')(dx'') f^\nu(x-x')\,{}^*(f_\mu(x'-x'')\,{}^*J_\nu(x'') - \\ - f_\nu(x'-x'')\,{}^*J_\mu(x'')) \qquad (8.97)$$

имеет вид

$$a_\mu(p) = f^\nu(p)\,{}^*[f_\mu(p)\,{}^*J_\nu(p) - f_\nu(p)\,{}^*J_\mu(p)] = \\ = \varepsilon_{\mu\nu\varkappa\lambda} f^\nu(p) f^\varkappa(p)\,{}^*J^\lambda(p) = 0. \qquad (8.98)$$

Следовательно, величина $a_\mu(x)$ равна нулю и формула (3.88) дает

$$\int (dx') f^\nu(x-x') F_{\mu\nu}(x') = \int (dx') f^\nu(x-x')[\partial'_\mu A_\nu(x') - \partial'_\nu A_\mu(x')] = \\ = \partial_\mu \left[\int (dx') f^\nu(x-x') A_\nu(x') \right] - A_\mu(x), \qquad (8.99)$$

если воспользоваться еще и дифференциальным уравнением для величины $f^\nu(x-x')$. Таким образом,

$$A_\mu(x) = -\int (dx') f^\nu(x-x') F_{\mu\nu}(x') + \partial_\mu\lambda(x), \\ \lambda(x) = \int (dx') f^\nu(x-x') A_\nu(x'), \qquad (8.100)$$

причем при калибровочном преобразовании $A_\mu(x)$ функция $\lambda(x)$ изменяется так, что эти соотношения сохраняются. Между прочим, мы вовсе не предполагаем, что функции $\lambda(x)$ в равенствах (8.83) и (8.100) одинаковы. Мы их обозначаем одинаково потому, что они обе выражают произвол, допустимый в выборе векторного потенциала. Вводя компенсирующее калибровочное преобразование, функцию $\lambda(x)$ в формуле (8.100) всегда можно обратить в нуль. В результате мы придем к некоторой частной калибровке, при которой

$$A_\mu(x) = -\int (dx') f^\nu(x-x') F_{\mu\nu}(x') \qquad (8.101)$$

и

$$\int (dx') f^\nu(x-x') A_\nu(x') = 0. \qquad (8.102)$$

Точно так же

$${}^*A_\mu(x) = -\int (dx') f^\nu(x-x')\,{}^*F_{\mu\nu}(x'), \qquad (8.103)$$

$$\int (dx') f^\nu(x-x')\,{}^*A_\nu(x') = 0, \qquad (8.104)$$

и мы видим, что калибровочные условия (8.102), (8.104) не являются независимыми утверждениями, а диктуются структурой выражений (8.101) и (8.103).

§ 9. КВАНТОВАНИЕ ЗАРЯДА, НОРМИРОВКА МАССЫ

Прежде чем переходить к рассмотрению различных выражений для действия, приведем некоторые интегральные тождества, основанные на использовании полевых уравнений. Так, из уравнений Максвелла (8.89) следует, что

$$\begin{aligned} \int (dx)\, J^\mu A_\mu &= \int (dx)\, \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \\ \int (dx)\, {}^*J^\mu\, {}^*A_\mu &= \int (dx)\, \frac{1}{2}\, {}^*F^{\mu\nu} (\partial_\mu {}^*A_\nu - \partial_\nu {}^*A_\mu), \end{aligned} \tag{9.1}$$

а уравнения (8.88) дают

$$\begin{aligned} \int (dx)\, \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) &= \int (dx)\, \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \int (dx)\, {}^*J^\mu\, {}^*A_\mu, \\ \int (dx)\, \frac{1}{2}\, {}^*F^{\mu\nu} (\partial_\mu {}^*A_\nu - \partial_\nu {}^*A_\mu) &= \\ &= \int (dx)\, \frac{1}{2}\, {}^*F^{\mu\nu}\, {}^*F_{\mu\nu} + \int (dx) J^\mu A_\mu. \end{aligned} \tag{9.2}$$

При выводе последних соотношений используется следующее свойство дуальных величин:

$$ {}^*A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda} A_{\varkappa\lambda} B_{\mu\nu} = A^{\mu\nu}\, {}^*B_{\mu\nu}; \tag{9.3}$$

из него вытекает также, что

$$ {}^*F^{\mu\nu}\, {}^*F_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{9.4}$$

Квадратичное выражение для $W(J\, {}^*J)$ можно представить в виде

$$ W = \frac{1}{2} \int (dx)\, (J^\mu A_\mu + {}^*J^\mu\, {}^*A_\mu) \tag{9.5}$$

или в других эквивалентных формах, например,

$$\begin{aligned} W = \int (dx) \Big[J^\mu A_\mu + {}^*J^\mu\, {}^*A_\mu - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \\ + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \Big], \end{aligned} \tag{9.6}$$

$$\begin{aligned} W = \int (dx) \Big[J^\mu A_\mu + {}^*J^\mu\, {}^*A_\mu - \\ - \frac{1}{2}\, {}^*F_{\mu\nu} (\partial_\mu {}^*A_\nu - \partial_\nu {}^*A_\mu) + \frac{1}{4}\, {}^*F^{\mu\nu}\, {}^*F_{\mu\nu} \Big]. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Последние выражения обладают свойствами действия, но нужно учитывать, какие из величин выбираются в качестве независимых полевых переменных. Так, например, в формуле (9.6) поля A_μ и $F_{\mu\nu}$ варьируются независимым образом, а через $^*A_\mu$ обозначен функционал от тензора напряженности поля, определяющийся формулой (8.103):

$$^*A_\mu(x) = -\int (dx')\, f^\nu(x-x')\, {}^*F_{\mu\nu}(x'). \tag{9.8}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно выполнить описанные выше операции, в результате чего будем иметь

$$\begin{gathered}\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = J^\mu(x),\\ \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = \\ = F_{\mu\nu}(x) - \int (dx')\, {}^*[f_\mu(x-x')\, {}^*J_\nu(x') - f_\nu(x-x')\, {}^*J_\mu(x')].\end{gathered} \tag{9.9}$$

Перейдя в последнем уравнении к дуальным величинам и проведя дифференцирование, мы получим вторую пару уравнений Максвелла

$$\partial_\nu\, {}^*F^{\mu\nu}(x) = {}^*J^\mu(x). \tag{9.10}$$

Потенциал $A_\mu(x)$ строится с помощью формул (8.99) и (8.100). Действие (9.7) используется аналогичным образом; при этом $^*A_\mu$ и $^*F_{\mu\nu}$ считаются независимыми полями, а A_μ рассматривается как функционал от $^*F_{\mu\nu}$, определяющийся равенством (8.101):

$$A_\mu(x) = \int (dx')\, f^\nu(x-x')\, {}^{**}F_{\mu\nu}(x'). \tag{9.11}$$

Асимметрия, связанная с использованием в качестве независимых полей либо A_μ, либо $^*A_\mu$, устраняется, если взять третье выражение для действия

$$\begin{aligned}W = \int (dx)(dx') \Big[&-f^\nu(x-x')\,(J^\mu(x)\, F_{\mu\nu}(x') + {}^*J^\mu(x)\, {}^*F_{\mu\nu}(x')) - \\ &-\frac{1}{2}\,\partial_\mu f_\nu(x-x')\,(F^{\mu\lambda}(x)\, F^\nu{}_\lambda(x') + {}^*F^{\mu\lambda}(x)\, {}^*F^\nu{}_\lambda(x'))\Big].\end{aligned} \tag{9.12}$$

В это выражение, которое явно инвариантно относительно преобразований поворота (8.47), в качестве независимых переменных входят напряженности поля. Уравнение, вытекающее из принципа стационарного действия, можно представить в виде

$$f^\mu(p)\, K^\nu(p) - f^\nu(p)\, K^\mu(p) + {}^*[f^\mu(p)\, {}^*K^\nu(p) - f^\nu(p)\, {}^*K^\mu(p)] = 0, \tag{9.13}$$

если для более компактной записи перейти к импульсным переменным и ввести обозначения

$$K^{\mu}(x) = J^{\mu}(x) - \partial_{\nu} F^{\mu\nu}(x), \qquad {}^{*}K^{\mu}(x) = {}^{*}J^{\mu}(x) - \partial_{\nu}\, {}^{*}F^{\mu\nu}(x). \quad (9.14)$$

Умножив (9.13) на $f_{\mu}(p)$, будем иметь

$$f^{\mu}(p) f_{\mu}(p) K^{\nu}(p) = f^{\nu}(p) f_{\mu}(p) K^{\mu}(p). \quad (9.15)$$

Далее, учитывая равенство нулю дивергенции $K^{\mu}(x)$:

$$p_{\nu} K^{\nu}(p) = 0, \quad (9.16)$$

мы сначала получаем

$$f_{\mu}(p)\, K^{\mu}(p) = 0, \quad (9.17)$$

а затем

$$K^{\nu}(p) = 0. \quad (9.18)$$

При этом мы воспользовались тем, что величина $f^{\mu}(p) f_{\mu}(p)$ положительна соответственно выбору n^{μ} и, значит, $if^{\mu}(p)$ в формуле (8.61) в виде пространственно-подобного вектора. Точно так же уравнение, дуальное уравнению (9.13), дает

$$^{*}K^{\nu}(p) = 0. \quad (9.19)$$

Следовательно, обе пары уравнений Максвелла получаются из действия (9.12) симметричным образом.

Тут, наконец, необычайно вдумчивый читатель, которого мы назовем Гарольдом, уже не может больше сдержаться, и происходит следующий диалог.

Гарольд. В предыдущем параграфе вы показали, что кажущийся магнитный заряд, входящий в формулу (8.41), можно исключить. При этом вы мельком упомянули, что в дальнейшем появится магнитный ток другого типа. Но принцип действия (9.6) и полевые уравнения (9.9) совпадают по форме с формулами (8.37) и (8.39), если положить

$$^{*}M_{\mu\nu}(x) = \int (dx')\, [f_{\mu}(x-x')\, {}^{*}J_{\nu}(x') - f_{\nu}(x-x')\, {}^{*}J_{\mu}(x')], \quad (9.20)$$

и действительно

$$-\partial_{\nu}\, {}^{*}M^{\mu\nu}(x) = {}^{*}J^{\mu}(x). \quad (9.21)$$

Как же вы можете говорить, что теперь имеете дело с истинным магнитным зарядом?

Швингер. Не нужно понимать меня неправильно, дорогой Сагредо, ...простите, Гарольд. Функция (9.20), по сути дела, отличается от функции источника (8.41), так как у нее нет той степени локализуемости, которая свойственна источникам. Рассмотрим для примера частный случай функции $f_\nu(x - x')$, у которой имеется только одна пространственная компонента

$$f_3(x - x') = \delta(x^0 - x^{0\prime})\,\delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2')\,\eta(x_3 - x_3') \tag{9.22}$$

и которой отвечает ненулевая компонента тензора

$$^*M_{03}(x) = \int\limits_0^\infty ds\, ^*J^0(x^0, x_1, x_2, x_3 - s). \tag{9.23}$$

В отличие от распределения магнитного заряда $^*J^0(x)$, ограниченного в пространстве, величина $^*M_{03}(x)$ перестает зависеть от x_3 после того, как мы минуем распределение заряда, двигаясь в положительном направлении третьей оси. Ее соответствующее предельное значение таково:

$$^*M_{03}(x) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_3'\, ^*J^0(x^0, x_1, x_2, x_3'), \tag{9.24}$$

и поверхностный интеграл стремится к величине

$$-\int dx_1\, dx_2\, ^*M^0{}_3(x) \to \int (d\mathbf{x})\, ^*J^0(x), \tag{9.25}$$

которая вовсе необязательно равна нулю. Это противоречит нулевому значению интеграла (8.44), полученному исходя из пространственной локализуемости $^*M_{\mu\nu}(x)$. Если бы мы взяли нечетную функцию f^μ вида (8.70), то явное выражение для $^*M_{03}(x)$ изменилось бы, но значение поверхностного интеграла, определяющего полный магнитный заряд, оставалось бы тем же самым. Таким образом, переход от фиктивного магнитного заряда к реальному осуществляется путем выбора класса функций f^μ со специальными свойствами. Но тогда возникает принципиальная трудность, связанная с тем, что детальное описание оказывается как бы зависящим от произвола в выборе функции f^μ, для которого нет никаких физических оснований. Попытаемся устранить эту серьезную трудность.

Подставим в выражение (8.81), представляющее собой дифференциальную формулировку зависимости W от функций источников, те значения $\delta J^\mu(x)$ и $\delta\, ^*J^\mu(x)$, которые отвечают произвольным смещениям, зависящим от координат:

$$\delta J^\mu(x) = \partial_\nu(\delta x^\nu(x) J^\mu(x)) - J^\nu(x)\,\partial_\nu \delta x^\mu(x) =$$
$$= -\partial_\nu[\partial x^\mu(x) J^\nu(x) - \delta x^\nu(x) J^\mu(x)], \tag{9.26}$$

$$\delta\, ^*J^\mu(x) = -\partial_\nu[\delta x^\mu(x)\, ^*J^\nu(x) - \delta x^\nu(x)\, ^*J^\mu(x)]. \tag{9.27}$$

Условия сохранения (8.82) выполняются при этом тождественно. Такая подстановка дает

$$\delta W = \int (dx)\,[\delta x^\nu J^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \delta x^\nu\, {}^*J^\mu (\partial_\mu\, {}^*A_\nu - \partial_\nu\, {}^*A_\mu)] =$$
$$= \int (dx)\,[\delta x^\nu J^\mu F_{\mu\nu} + \delta x^\nu\, {}^*J^\mu\, {}^*F_{\mu\nu}] +$$
$$+ \int (dx)(dx')\,\{{}^*[\delta x^\mu (x) J^\nu (x) - \delta x^\nu (x) J^\mu (x)]\, f_\mu (x-x')\, {}^*J_\nu (x') -$$
$$- {}^*[\delta x^\mu (x)\, {}^*J^\nu (x) - \delta x^\nu (x)\, {}^*J^\mu (x)]\, f_\mu (x-x')\, J_\nu (x')\}. \tag{9.28}$$

Два этих интеграла можно переписать и по-другому:

$$\delta W = -\int (dx) \left[F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right] \partial_\mu \delta x_\nu -$$
$$- \int (dx)(dx')\, \varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}\, [\delta x_\mu (x) - \delta x_\mu (x')]\, f_\nu (x-x')\, J_\varkappa (x)\, {}^*J_\lambda (x'). \tag{9.29}$$

Из приведенных нами выражений вытекают два элементарных утверждения относительно их явной зависимости от f^μ. Если электрический и магнитный токи пропорциональны друг другу с некоторым универсальным коэффициентом, то член с f^μ обращается в нуль, как это и должно быть, поскольку такой случай отвечает преобразованию поворота чисто электрического заряда. Когда электрические токи причинно-упорядочены по отношению к магнитным токам, член с f^μ также обращается в нуль, поскольку мы ограничили класс функций f^μ условием, чтобы они представляли собой пространственно-подобные векторы, связывающие точки, которые разделены пространственно-подобными интервалами.

Проблема с противоречащей физике зависимостью от f^μ возникает в том случае, когда электрический и магнитный заряды сосуществуют с неодинаковыми пространственно-временными распределениями. Для большей ясности выберем функцию $f^\mu (x - x')$ в виде (8.70), т. е. в виде пространственного вектора фиксированного направления с прямой, на которой он лежит, в качестве носителя (области отличных от нуля значений). Вклад в δW дают те точки в распределениях двух источников, которые могут быть соединены указанной прямой. При непрерывном изменении направления прямой величины δW и W будут также изменяться, причем непрерывным образом, что исключает возможность какой-либо физической интерпретации W. Хороним ли мы тем самым магнитный заряд? Нет. Мы здесь не учли одной тонкости. Дело в том, что физический смысл имеет не само действие W, а величина $\exp [iW]$. Если при непрерывном изменении направления вектора f^μ действие W также изменяется, но скачками — на целые кратные 2π, то экспонента будет оставаться неизменной и математический произвол в выборе f^μ не приведет ни к каким физическим последствиям. Конечно, это невозможно, если источники, как считалось ранее, представляют собой объекты, распределенные непрерывным образом. Вместо этого они должны иметь зернистую структуру, отвечающую таким значениям интегралов с f^μ, которые отличались бы друг от друга на конечные величины в зависимости от того, проходит или не проходит прямая f^μ через ядра этой структуры. Но поскольку величина интеграла определяется также произведением электрического и магнитного зарядов, это произведение не может быть произвольным, а должно принимать дискретные значения. Таким образом, мы приходим к удивительным выводам — заряд должен быть полностью локализованным и квантованным по величине. Следует подчеркнуть широкий характер такого рода выводов. Мы сталкиваемся здесь с требованиями к структуре фотонных источников, вытекающими из условия непротиворечивости теории электрического и магнитного зарядов. Мы вводим источники, идеализируя реальные физические процессы так, чтобы были отброшены их конкретные особенности, но сохранялись все общие закономерности. Вскрывая же фундаментальные требования, предъявляемые к источникам, мы выявляем общие законы природы. Таков был ход рассуждений, когда равенство нулю дивергенции векторного фотонного источника, вытекающее из равенства нулю массы фотона, мы интерпретировали как некий общий закон сохранения, а именно как закон сохранения электрического заряда.

Электрический и магнитный токи связаны с характеристиками движения точечных зарядов следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= \sum_a e_a \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{dx_a^\mu(s)}{ds}\, \delta(x - x_a(s)), \\ {}^*J^\mu(x) &= \sum_a {}^*e_a \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{dx_a^\mu(s)}{ds}\, \delta(x - x_a(s)) \end{aligned} \tag{9.30}$$

(вместо $^*e$ пользуются также символами вроде g, но здесь мы хотим подчеркнуть симметрию между электрическими и магнитными величинами). Причинный характер движения точек находит свое выражение в неравенствах

$$-\frac{dx_a^\mu(s)}{ds}\frac{dx_{a\mu}(s)}{ds} > 0, \qquad \frac{dx_a^0(s)}{ds} > 0. \tag{9.31}$$

Вследствие того что на границах области интегрирования точка $x^\mu(s)$ бесконечно удалена от x^μ, выполняется равенство

$$\partial_\mu \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{dx^\mu(s)}{ds}\, \delta(x - x(s)) = -\int_{-\infty}^{\infty} ds\, \frac{dx^\mu(s)}{ds} \frac{\partial}{\partial x^\mu(s)}\, \delta(x - x(s)) = 0. \tag{9.32}$$

Оно означает, что законы сохранения выполняются для каждой частицы по отдельности. Само собой напрашивающееся отождествление e_a и $^*e_a$ с зарядами отдельных движущихся точечных частиц согласуется с вычислением полных зарядов по формуле

$$\int d\sigma_\mu J^\mu = \sum_a \int d\sigma_\mu \, dx^\mu(s)\, \delta(x - x(s)) = \sum e_a, \tag{9.33}$$

где интегрирование проводится по всей четырехмерной области, причем величина $d\sigma_\mu \, dx^\mu(s)$ играет роль элемента объема.

Однако мы не можем просто подставить приведенные выражения в действие $W(J\ {}^*J)$. Последнее было взято для непрерывно распределенных источников, и его нельзя применять для совокупности точечных зарядов без пересмотра вопроса о том, имеет ли величина W *физический* смысл. Но можно в качестве некоторого промежуточного этапа всего рассмотрения модифицировать полученные ранее результаты таким образом, чтобы, сохраняя описание непрерывно распределенных источников, мы могли бы *математически* последовательно трактовать и точечные заряды. Для этого введем сколь угодно малый пространственно-подобный вектор λ^μ и построим промежуточное выражение для действия

$$\begin{aligned} W(\lambda) = \int (dx) \Big[& J^\mu(x) A_\mu(x \pm \lambda) + {}^*J^\mu(x)\, {}^*A_\mu(x \pm \lambda) - \\ & - \frac{1}{2} F^{\mu\nu}(x) (\partial_\mu A_\nu(x \pm \lambda) - \partial_\nu A_\mu(x \pm \lambda)) + \\ & + \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x \pm \lambda) \Big], \end{aligned} \tag{9.34}$$

где символ $\pm\lambda$ означает полусумму соответствующих величин с λ^μ и $-\lambda^\mu$. Это действие остается стационарным при вариациях поля относительно решений уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \delta W(\lambda) = & \int (dx)\, \delta A_\mu(x \pm \lambda) [J^\mu(x) - \partial_\nu F^{\mu\nu}(x)] - \\ & - \int (dx) \frac{1}{2} \delta F^{\mu\nu}(x \pm \lambda) \Big[\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\mu A_\mu(x) - F_{\mu\nu}(x) + \\ & + \int (dx')\, {}^*(f_\mu(x - x')\, {}^*J_\nu(x') - f_\nu(x - x')\, {}^*J_\mu(x') \Big] = 0, \end{aligned} \tag{9.35}$$

где мы воспользовались возможностью такого смещения координат, при котором $\pm\lambda^\mu$ переходит из одного полевого сомножителя в другой. При вычислении $W(\lambda)$ мы будем пользоваться выражением

$$W(\lambda) = \frac{1}{2} \int (dx) [J^\mu(x) A_\mu(x \pm \lambda) + {}^*J^\mu(x)\, {}^*A_\mu(x \pm \lambda)]. \tag{9.36}$$

Подставив в него токи точечных зарядов, получим

$$W(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} W_{ab}(\lambda) + \sum_a W_a(\lambda), \tag{9.37}$$

где величина

$$W_{ab}(\lambda)=$$

$$=(e_a e_b+{}^*e_a{}^*e_b)\int ds\,ds'\,\frac{dx_a^\mu(s)}{ds}\,\frac{dx_{b\mu}(s')}{ds'}\,D_+(x_a(s)-x_b(s')\pm\lambda)+$$

$$+(e_a{}^*e_b-{}^*e_a e_b)\int ds\,ds'\,(dx)\,\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}\,\frac{dx_{a\mu}(s)}{ds}\,D_+(x_a(s)-x\pm\lambda)\times$$

$$\times\,\partial_\varkappa f_\nu(x-x_b(s'))\,\frac{dx_{b\lambda}(s')}{ds'} \tag{9.38}$$

симметрична по a и b, а

$$W_a(\lambda)=\frac{1}{2}(e_a^2+{}^*e_a^2)\int ds\,ds'\,\frac{dx_a^\mu(s)}{ds}\,\frac{dx_{a\mu}(s')}{ds'}\,D_+(x_a(s)-x_a(s')\pm\lambda). \tag{9.39}$$

Математическая проблема существования, для решения которой и введена конструкция с λ, сосредоточена в $W_a(\lambda)$. В окрестности $s-s'\sim 0$ функция D_+ была бы сингулярной, если бы мы не добавили к ее аргументу пространственно-подобный вектор λ^μ. Но это относится только к вещественной части

$$\operatorname{Re} D_+(x-x')=\frac{1}{4\pi}\,\delta\left[(x-x')^2\right] \tag{9.40}$$

[см. формулу (1.64) из гл. 2], а не к ее мнимой части

$$\operatorname{Im} D_+(x-x')=\operatorname{Re}\int d\omega_p e^{ip(x-x')}. \tag{9.41}$$

Таким образом, если частицы движутся без скачков, то величина

$$\operatorname{Im} W_a(\lambda)=\frac{1}{2}(e_a^2+{}^*e_a^2)\times$$

$$\times\int d\omega_p\left[\int_{-\infty}^{\infty} ds\,\frac{dx_a^\mu(s)}{ds}\,e^{ipx_a(s)}\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} ds\,\frac{dx_{a\mu}(s)}{ds}\,e^{-ipx_a(s)}\right]\cos p\lambda \tag{9.42}$$

будет естественным образом обрезаться на высоких частотах, и к пределу при $\lambda^\mu\to 0$ можно переходить прямо в формуле (9.42). Анализируя выражение

$$w_a(\lambda)=\operatorname{Re} W_a(\lambda)=$$

$$=\frac{e_a^2+{}^*e_a^2}{8\pi}\int ds\,ds'\,\frac{dx_a^\mu(s)}{ds}\,\frac{dx_{a\mu}(s')}{ds'}\,\delta\left[(x_a(s)-x_a(s')\pm\lambda)^2\right] \tag{9.43}$$

при достаточно малом λ^μ и при s, близком к s', вполне можно ограничиться рассмотрением равномерного движения. Для простоты возьмем систему покоя и отождествим в ней ds с dx_a^0, выбрав одновременно в качестве λ^μ некоторый трехмерный вектор. Тогда при $s - s' = \sigma$ получим

$$w_a(\lambda) \approx -\frac{e_a^2 + {}^*e_a^2}{8\pi} \int ds_a \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \delta(\sigma^2 - \lambda^2) =$$

$$= -\frac{e_a^2 + {}^*e_a^2}{8\pi} \frac{1}{(\lambda^2)^{1/2}} \int ds_a. \qquad (9.44)$$

Имеет ли величина $w_a(\lambda)$ какой-либо физический смысл? Нет, не имеет. Она связана с отдельным точечным зарядом, или частицей. Поскольку движение частиц, составляющих источник, считается заданным, они идеализированно рассматриваются как чрезвычайно массивные частицы, на которые не влияют вызываемые ими эффекты. Прежде чем говорить о взаимодействии таких частиц, необходимо сначала остановиться на их индивидуальных механических характеристиках. Они вытекают из выражений для тензоров натяжений и их значений для одночастичных состояний:

$$t^{\mu\nu} = 2\, d\omega_p p^\mu p^\nu.$$

Как уже указывалось, это упрощенное выражение пригодно во внутренней области пучка, где можно пренебречь разбросом в значениях импульса и соответствующей ему конечной пространственной протяженностью. Чтобы учесть теперь эти обстоятельства отождествим p^μ с градиентом фазовой функции $\alpha(x)$ и введем весовую функцию, зависящую от координат:

$$t^{\mu\nu}(x) = \rho(x)\, \partial^\mu\alpha(x)\, \partial^\nu\alpha(x); \qquad (9.45)$$

при этом массовое ограничение

$$\partial^\mu\alpha\, \partial_\mu\alpha + m^2 = 0 \qquad (9.46)$$

напоминает нам о том, что $\partial^\mu\alpha$ имеет смысл импульса. Заметим, что

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = \partial_\mu(\rho\partial^\mu\alpha)\,\partial^\nu\alpha + \rho\frac{1}{2}\partial_\nu(\partial^\mu\alpha\partial_\mu\alpha) \qquad (9.47)$$

и поэтому локальные законы сохранения механических величин выполняются, если сохраняется поток частиц:

$$\partial_\mu(\rho\, \partial^\mu\alpha) = 0. \qquad (9.48)$$

Такая интерпретация определяет также значение интеграла

$$\int d\sigma_\mu \rho\, \partial^\mu\alpha = 1. \qquad (9.49)$$

В рамках рассматриваемой схемы, когда движение считается заданным, вполне логично принять, что

$$\rho(x) = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} ds\,\delta\,[x - x(s)],$$
$$\partial^{\nu}\alpha(x(s)) = m\frac{dx^{\nu}(s)}{ds}. \tag{9.50}$$

И действительно, закон сохранения при этом удовлетворяется:

$$\partial_{\mu}(\rho\partial^{\mu}\alpha) = -\int_{-\infty}^{\infty} ds\,\frac{dx^{\mu}(s)}{ds}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}(s)}\,\delta(x - x(s)) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} ds\frac{d}{ds}\,\delta(x - x(s)) = 0, \tag{9.51}$$

а кроме того,

$$\int d\sigma_{\mu}\rho\partial^{\mu}\alpha = \int (d\mathbf{x})\,dx^0(s)\,\delta(x - x(s)) = 1. \tag{9.52}$$

Перенося эти результаты на связь между действием и тензором натяжений:

$$\delta W = -\int (dx)\,t^{\mu\nu}\partial_{\mu}\delta x_{\nu}, \tag{9.53}$$

не следует забывать о том, каков смысл величины $\delta x_{\nu}(x)$. Она возникла у нас как обобщенное смещение всего источника в целом, соответствующее смещению некоторой опорной поверхности и, следовательно, происходящее в противоположном направлении. Поэтому при переходе к движению точечных частиц нужно поставить дополнительный знак минус:

$$\delta W = m\int ds\frac{dx^{\nu}(s)}{ds}\,\frac{d\delta x_{\nu}(s)}{ds}. \tag{9.54}$$

Далее, необходимо обобщить отождествление ds с dx^0 в системе покоя на случай инвариантного определения собственного времени

$$-(ds)^2 = dx^{\nu}\,dx_{\nu}. \tag{9.55}$$

Отсюда для варьируемого движения получаем

$$-ds\delta\,ds = dx^{\nu}\,d\delta x_{\nu}, \tag{9.56}$$

и (9.54) переходит в равенство

$$\delta W = -m\delta\int ds, \tag{9.57}$$

давая нам следующее выражение для действия отдельной частицы с номером a, которая движется заданным образом:

$$W_a = -m_a \int ds_a. \tag{9.58}$$

Учитывая феноменологическую направленность теории источников, можно сделать следующий вывод. Физические параметры, введенные при каких-то ограниченных физических условиях, не изменяют своего смысла и при рассмотрении более широкого класса явлений. Массовый параметр m_a определяется по реакции частицы на слабые, медленно меняющиеся заданные силы, например в экспериментах по отклонению пучка. Когда рассматриваются электромагнитные взаимодействия нескольких частиц, этот параметр считается тем же самым, так как он уже был фиксирован (нормирован) экспериментально. Таким образом, одночастичный член (9.44) не нужно добавлять к (9.58), изменяя тем самым значение m_a. Мы говорим вовсе не о том, чтобы приписать какой-то части полной массы электромагнитное происхождение. Речь идет о согласии между разными уровнями динамического описания, которые встречаются в ходе развития теории. Заданные силы, введенные на самом элементарном уровне, на следующем этапе приписываются движению частиц, но ни на одном из этих уровней о структуре отдельной частицы не говорится ни слова, и феноменологический параметр m_a в обоих случаях должен быть одинаковым. Из сказанного следует, что вещественные члены $w_a(\lambda)$, которые не дают вклада ни в вероятность вакуумного перехода, ни в связи между источниками, следует просто вычеркнуть. Тогда действие, соответствующее фотонным источникам в случае точечных зарядов, будет иметь вид

$$W = \lim_{\lambda\to 0} \left[W(\lambda) - \sum_a w_a(\lambda)\right]. \tag{9.59}$$

Посмотрим вновь, какое влияние оказывает смещение источников, представив его теперь в виде движения точечных зарядов. Мы воспользуемся выражением (9.28), но с учетом сдвига аргументов на λ и появления знака минус, обусловленного переходом от $\delta x^\nu(x)$ к $\delta x_a^\nu(s)$:

$$\begin{aligned}\delta W = {} & \sum_a \int ds\, \delta x_a^\mu(s) \frac{dx_a^\nu(s)}{ds} \left[e_a F_{\mu\nu}(x_a(s) \pm \lambda) + {}^*e_a {}^*F_{\mu\nu}(x_a(s) \pm \lambda)\right] - \\ & - \sum_{ab} (e_a {}^*e_b - {}^*e_a e_b) \int ds\, ds'\, {}^*\left[\delta x_a^\mu(s) \frac{dx_a^\nu(s)}{ds} - \delta x_a^\nu(s) \frac{dx_a^\mu(s)}{ds}\right] \times \\ & \times f_\mu(x_a(s) - x_b(s') \pm \lambda) \frac{dx_{b\nu}(s')}{ds'} - \sum_a \delta w_a(\lambda)\Big|_{\lambda^\mu \to 0}.\end{aligned} \tag{9.60}$$

Антисимметричным произведением двух векторных смещений определяется двумерный элемент площади:

$$\delta x_a^\mu\, dx_a^\nu - \delta x_a^\nu\, dx_a^\mu = d\sigma_a^{\mu\nu}, \tag{9.61}$$

а антисимметричное произведение трех смещений дает трехмерный элемент объема или эквивалентный ему ориентированный элемент поверхности для координат $x_a^\mu - x_b^\mu$:

$$d^*\sigma_a^{\mu\nu}\, dx_{b\nu} = d\sigma_{ab}^\mu. \tag{9.62}$$

Соответствующее представление выражения (9.60)

$$\begin{aligned}\delta W = \sum_a \int \frac{1}{2}\, d\sigma_a^{\mu\nu}\,[e_a F_{\mu\nu}(x_a \pm \lambda) + {}^*e_a{}^*F_{\mu\nu}(x_a \pm \lambda)] - \\ - \sum_{ab} (e_a{}^*e_b - {}^*e_a e_b) \int d\sigma_{ab}^\mu f_\mu (x_a - x_b \pm \lambda) - \\ - \sum_a \delta w_a(\lambda)\Big|_{\lambda^\mu \to 0}\end{aligned} \tag{9.63}$$

больше уже не связано с инфинитезимальными смещениями — интегрирование здесь распространяется на геометрические области, определяемые начальными и конечными траекториями частиц.

Если трехмерные поверхности, которые входят в (9.63), заданы, то мы можем все отдельные интегралы с f^μ обратить в нуль, выбрав соответствующим образом носитель функции f^μ, вовсе необязанный быть прямой линией. При любом другом выборе f^μ, который приводит к отличным от нуля значениям одного или большего числа интегралов, эти значения должны быть целыми кратными 2π. Рассмотрим пару частиц a и b, для которых трехмерная поверхность σ, определяющаяся координатами $x_a^\mu - x_b^\mu$, сдвигается на $\pm\lambda^\mu$. Обозначив эти поверхности через $\sigma(\pm\lambda)$, мы напишем условие, гарантирующее физическую однозначность, в виде равенства

$$(e_a{}^*e_b - {}^*e_a e_b)\frac{1}{2}\left[\int\limits_{\sigma(\lambda)} + \int\limits_{\sigma(-\lambda)}\right] d\sigma_\mu f^\mu(x) = 2\pi n, \tag{9.64}$$

где n — целое число. Чтобы в процессе предельного перехода $\lambda^\mu \to 0$ не возникало никаких нефизических элементов, мы потребуем, чтобы это условие выполнялось почти при всех значениях λ^μ. Масштаб f^μ фиксируется дифференциальным уравнением (8.62) или эквивалентным ему интегральным соотношением

$$\int d\sigma_\mu f^\mu(x) = 1, \tag{9.65}$$

относящимся к любой поверхности, которая охватывает начало координат. Дискретность, требуемая условием (9.64), означает, что на всякой поверхности такого рода носитель функции f^μ может иметь лишь конечное число точек. При этом благодаря свойству симметрии (8.72)

$$-f^\mu(-x) = f^\mu(x) \tag{9.66}$$

такое число должно быть четным, т. е. равным 2ν. Мы можем представлять себе ситуацию таким образом, что из начала координат протянуто соответствующее число нитей, каждой из которых сопоставляется ее изображение относительно начала координат. Обозначим вклад в поверхностный интеграл (9.65), отвечающий отдельной точке α ($\alpha = 1, \ldots, 2\nu$), через r_α, так что

$$\sum_{\alpha=1}^{2\nu} r_\alpha = 1. \tag{9.67}$$

Основным при условии (9.64) будет случай, когда $\sigma(\lambda)$, например, содержит единственную точку α, а на поверхности $\sigma(-\lambda)$ не лежит ни одной точки из носителя f^μ. Тогда

$$(e_a\, {}^*e_b - {}^*e_a e_b)\,\frac{1}{2}\, r_\alpha = 2\pi n_\alpha, \tag{9.68}$$

а всякая другая возможность получается путем сложения подобных выражений. В частности, суммирование по всем $\alpha = 1, \ldots$ $\ldots, 2\nu$ дает

$$\frac{1}{2}\,(e_a\, {}^*e_b - {}^*e_a e_b) = 2\pi \sum_{\alpha=1}^{2\nu} n_\alpha, \tag{9.69}$$

или, указывая в явном виде, что точки носителя входят парами с равными значениями r_α и n_α,

$$\sum_{\alpha=1}^{2\nu} n_\alpha = 2\sum_{\alpha=1}^{\nu} n_\alpha = 2n_{ab}, \tag{9.70}$$

мы получим следующее условие квантования заряда:

$$\frac{1}{4\pi}\,(e_a{}^*e_b - e_b{}^*e_a) = 2n_{ab}. \tag{9.71}$$

Заметим, что весовые множители r_α представляют собой рациональные дроби:

$$r_\alpha = \frac{n_\alpha}{2n_{ab}}. \tag{9.72}$$

Если все 2ν точек эквивалентны, то $r_\alpha = 1/(2\nu)$, и целое число n_{ab} будет кратным ν. Простейшая возможность $\nu = 1$ иллюстрируется функцией f^μ, определяемой формулой (8.70).

Произвол в величине δW нам удалось исключить, исходя из того, что в действительности смысл имеет только величина $\exp[iW]$, и теперь соотношение (9.63) можно написать в следующем эквивалентном виде:

$$\delta W = \sum_a \int \frac{1}{2} d\sigma_a^{\mu\nu} [e_a F_{\mu\nu}(x_a \pm \lambda) + {}^*e_a {}^*F_{\mu\nu}(x_a \pm \lambda)] - \\ - \sum_a \delta w_a(\lambda) \Big|_{\lambda^\mu \to 0}. \tag{9.73}$$

Правда, может показаться, что здесь возникает еще одна проблема. Хотя мы и сохранили символ δW, он уже не соответствует изменению величины W, и встает вопрос об однозначности. Представим себе, что траектории непрерывно деформируются так, что в конечном итоге восстанавливают свою начальную конфигурацию, описывая тем самым поверхность, охватывающую некоторый трехмерный объем. В качестве ковариантного обобщения трехмерного соотношения

$$\int d\mathbf{S}\cdot\mathbf{H} = \int (d\mathbf{x})\,\nabla\cdot\mathbf{H} = \int (d\mathbf{x})\,{}^*J^0 \tag{9.74}$$

мы имеем

$$\int \frac{1}{2} d\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \int d\sigma_\mu \partial_\nu\, {}^*F^{\mu\nu} = \int d\sigma_\mu\, {}^*J^\mu, \tag{9.75}$$

и аналогично

$$\int \frac{1}{2} d\sigma^{\mu\nu}\, {}^*F_{\mu\nu} = -\int d\sigma_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\int d\sigma_\mu J^\mu. \tag{9.76}$$

Следовательно, по завершении всего цикла суммарное изменение W будет таким:

$$\Delta W = \sum_a \frac{1}{2} \Big[\int_{\sigma_a(\lambda)} + \int_{\sigma_a(-\lambda)} \Big] d\sigma_\mu (e_a\, {}^*J^\mu - {}^*e_a J^\mu), \tag{9.77}$$

где через $\sigma_a(\pm\lambda)$ обозначен трехмерный объем, соответствующий частице a и смещенный на пространственно-подобные векторы $\pm\lambda^\mu$. Интегралы в равенстве (9.77) дают электрический и магнитный заряды в разных объемах. Здесь самое важное значение имеет случай, когда частица b лежит, например, внутри объема $\sigma_a(\lambda)$, но вне $\sigma_a(-\lambda)$. Возникающий при этом вклад в ΔW равен величине $^1/_2\,(e_a\, {}^*e_b - {}^*e_a e_b)$, которая, согласно (9.69), кратна 2π. Такой результат, подтверждающий однозначность экспоненты, совершенно неизбежен; интересно было лишь выяснить, каким образом к подобному результату приводит условие квантования заряда.

Квантование заряда, которое диктуется существованием магнитного заряда, наиболее удовлетворительным образом объясняет одну из самых поразительных эмпирических закономерностей в природе. Несмотря на чрезвычайно широкий диапазон значений всех других характеристик, которыми обладают частицы, элементарная порция чисто электрического заряда универсальна. Ее мерой служит постоянная тонкой структуры

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137,036}. \tag{9.78}$$

Если считать, что минимальный магнитный заряд $^*e_0$ соответствует наименьшему целому числу в соотношении (9.71), то это соотношение примет вид

$$\frac{1}{4\pi} e\, ^*e_0 = 2, \tag{9.79}$$

откуда

$$^*\alpha_0 = \frac{^*e_0^2}{4\pi} = 4 \cdot 137,036. \tag{9.80}$$

Эта величина, эквивалентная электрическому заряду $2 \cdot 137e$, чрезвычайно велика. Правда, может показаться, хотя бы на первый взгляд, что такая резкая асимметрия фиктивна, поскольку путем поворота (8.47) мы вправе переопределить все электрические и магнитные заряды:

$$e'_a = e_a \cos\alpha + {}^*e_a \sin\alpha, \qquad {}^*e'_a = -e_a \sin\alpha + {}^*e_a \cos\alpha. \tag{9.81}$$

Конечно, у этого вращения в двумерном зарядовом пространстве имеются инварианты, в частности величины

$$e_a^2 + {}^*e_a^2, \qquad e_a\, ^*e_b - {}^*e_a e_b, \tag{9.82}$$

которые с геометрической точки зрения соответствуют длинам и углам между двумерными векторами. Кроме того, существенную роль играет неравенство

$$(e_a\, ^*e_b - {}^*e_a e_b)^2 \leqslant (e_a^2 + {}^*e_a^2)(e_b + {}^*e_b^2). \tag{9.83}$$

Рассмотрим следующее инвариантное утверждение. Для всех известных частиц величина $(e_a^2 + {}^*e_a^2)/4\pi$ мала по сравнению с единицей. Сравнивая в таком случае неравенство (9.83) с условием квантования заряда (9.71), мы увидим, что все целые числа n_{ab} должны равняться нулю. Соответствующие точки с координатами e_a, $^*e_a$ ложатся на одну-единственную прямую, которая благодаря этому приобретает некий абсолютный смысл. Эту прямую условно принимают за ось чисто электрического заряда. Полная редукция прямой к совокупности эквидистантно расположенных точек требует, чтобы существовал другой класс частиц, для каждой из которых величина $(e_a^2 + {}^*e_a^2)/4\pi$ намного превышала бы единицу. В этом случае наличие абсолютной зарядовой прямой необязательно, хотя, если целые числа в условии квантования заряда принимают только какие-то средние значения, зарядовые точки будут скапливаться вблизи некоторой прямой, которую удобно принять за ось чисто магнитного заряда.

Итак, мы пришли к двум типам заряженных частиц, для одного из которых характерны сравнительно слабые, а для другого — сравнительно интенсивные силы. Этот вывод весьма примечателен, ибо он согласуется с экспериментально наблюдающимся различием между лептонами и адронами. Конечно, адроны — мезоны и барионы — не имеют магнитного заряда и их взаимодействия не столь интенсивны, как взаимодействие, описываемое зарядом (9.80). Их следует рассматривать как нейтральные в магнитном отношении образования из частиц, несущих и электрический и магнитный заряды. При этом наблюдающиеся сильные взаимодействия адронов возникают как некоторые остаточные явления, обусловленные гораздо более интенсивными магнитными силами. При такой интерпретации ясно, почему до сих пор не удалось экспериментально обнаружить свободные магнитные заряды. Важно то, что нейтральное в магнитном отношении образование выступает в виде обычной электрически заряженной частицы. Если у нас имеется совокупность частиц с зарядами e_a и $^*e_a$, удовлетворяющими условиям

$$\sum_a {}^*e_a = 0, \qquad \sum_a e_a = e', \tag{9.84}$$

то, сравнивая их с эталонной частицей, заряды которой равны e_0 и $^*e_0$, мы получаем

$$\frac{1}{4\pi} \sum_a (e_a{}^*e_0 - {}^*e_a e_0) = 2 \sum_a n_{a0}, \tag{9.85}$$

или

$$\frac{1}{4\pi} e'{}^*e_0 = 2n. \tag{9.86}$$

Это и есть требуемое соотношение для заряда:

$$e' = ne. \tag{9.87}$$

Итак, мы автоматически получаем, что нейтральное в магнитном отношении образование обладает обычными электрическими свойствами. Этот вывод приводит к тому, что отдельные электрические заряды частиц, несущих заряды обоих типов,— дуально-заряженных частиц — могут принимать необычные значения. Мы делаем специальное предположение, согласно которому дуально-заряженная частица обладает минимальным магнитным зарядом $^*e_0$ и соответствующим электрическим зарядом $e_0 \neq 0$ [величина e_0 в (9.85) к этому значению никакого отношения не имела]. Сопоставляя любой другой набор дуальных зарядов e_0' и $^*e_0'$ с элементарной единицей чисто электрического заряда, мы получаем, что величина $^*e_0'$ кратна $^*e_0$:

$$^*e_0' = m\, ^*e_0, \tag{9.88}$$

а применяя условие квантования к паре частиц с дуальными зарядами, будем иметь

$$\frac{1}{4\pi}\left(e_0'\, ^*e_0 - {}^*e_0' e_0\right) = \frac{1}{4\pi}\left(e_0' - m e_0\right) {}^*e_0 = 2n, \tag{9.89}$$

или

$$e_0' = m e_0 + n e, \qquad m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \ldots\ . \tag{9.90}$$

Отсюда видно, что e_0 и e выступают в качестве независимых элементов двумерной решетки, которая дает все возможные значения электрического заряда. Так как m служит мерой магнитного заряда (в единицах $^*e_0$), мы вновь приходим к выводу, что для нейтрального в магнитном отношении образования роль единицы заряда играет только величина e. Кроме того, при заданном значении магнитного заряда разности значений электрического заряда кратны e.

От электрически заряженных частиц и дуально-заряженных частиц естественно перейти к чисто магнитным частицам. Согласно равенству (9.88), элементарная единица чисто магнитного заряда должна быть кратной минимальному магнитному заряду. Запишем эту конкретную связь, введя некоторое целое число N:

$$^*e = N\, ^*e_0. \tag{9.91}$$

Аналогом равенства (9.79), связывающего элементарную единицу чисто электрического заряда с минимальным магнитным зарядом, является следующее соотношение между элементарной единицей чисто магнитного заряда и минимальным электрическим зарядом:

$$\frac{1}{4\pi} e_0\, ^*e = 2. \tag{9.92}$$

Из него сразу же следует, что

$$e = N e_0. \tag{9.93}$$

Из всех наших предположений, которые находят свое обоснование в симметрии между электрическим и магнитным зарядами, мы заключаем, что составляющие заряда дуально-заряженной частицы равны одной и той же доле $1/N$ элементарных единиц чисто электрического и чисто магнитного зарядов. Какие же значения 2, 3, . . . целого числа N встречаются в природе?

Прежде чем отвечать на этот вопрос, мы должны сделать небольшое отступление и остановиться на вопросе о связи между типами статистики для составных частиц и для составляющих их элементов. Суммарный спиновый момент составной частицы, построенный из нечетного числа частиц с полуцелым спином (статистика Ферми — Дирака), будет также полуцелым, и такая составная частица подчиняется статистике Ферми — Дирака. Если число составляющих элементов с полуцелыми спинами четно, то построенная из них частица будет обладать целым спином, подчиняясь статистике Бозе — Эйнштейна. Все происходит так, словно частица Ферми — Дирака несет знак минус, а частица Бозе — Эйнштейна — знак плюс и знаки перемножаются, определяя в итоге тип статистики для составного образования. И это не просто мнемоническое правило, ибо знаками плюс и минус определяются алгебраические свойства источников, которые, перемножаясь, дают эффективный источник составной системы. Далее, как уже упоминалось, существуют две разновидности адронов — мезоны, подчиняющиеся статистике Бозе — Эйнштейна, и барионы, подчиняющиеся статистике Ферми — Дирака. Раз мы считаем, что оба типа адронов следует строить в виде нейтральных в магнитном отношении образований из дуально-заряженных частиц, последние не могут быть все частицами Бозе — Эйнштейна. Простейшее предположение заключается в том, что все они частицы Ферми — Дирака: четное число таких составляющих элементов дает частицу Бозе — Эйнштейна, а нечетное — частицу Ферми — Дирака.

Могут ли дуально-заряженные частицы обладать лишь одним значением магнитного заряда? Заметим, что в соответствии с существованием электрических зарядов разного знака магнитные заряды должны принимать также оба знака. В итоге мы приходим к понятию античастицы. При этом, чтобы сохранить структуру двух пар уравнений Максвелла, содержащих общий тензор напряженности поля, это понятие следует связывать с зарядами обоих типов. Если магнитный заряд может принимать только значения $(1/N)\,{}^*e$ и $-(1/N)\,{}^*e$, то получить нейтральное образование можно только путем их объединения, причем такого рода пары дуально-заряженных частиц Ферми — Дирака будут частицами Бозе — Эйнштейна; но построить тем же способом барионы не удается. Следовательно, заряд должен принимать по крайней мере два разных значения. В соответствии с магнитным аналогом конструкции (9.90), отвечающей электрической решетке, магнитные заряды дуально-заряженных частиц с одним и тем же электрическим зарядом должны различаться на величины, кратные элементарной единице чисто магнитного заряда ${}^*e$. При описании дуально-заряженных частиц представляется вполне целесообразным считать, что их заряды по величине меньше элементарных единиц соответствующих чистых зарядов. При этом условии допустимыми оказываются только два значения магнитного заряда, которые при обычном выборе знаков равны $-(1/N)\,{}^*e$ и $[(N-1)/N]\,{}^*e$. Возможные значения электрического заряда полностью аналогичны: $-(1/N)\,e$ и $[(N-1)/N]\,e$. С любым из магнитных зарядов можно связать любой из электрических зарядов, что дает нам четыре дуально-заряженные комбинации.

Как и раньше, заданный магнитный заряд можно нейтрализовать, комбинируя его с магнитным зарядом противоположного знака, в результате чего получится мезон. Но теперь существует и другая возможность, связанная с тем, что магнитный заряд $[(N-1)/N]\,{}^*e$ можно скомпенсировать $N-1$ магнитными зарядами $-(1/N)\,{}^*e$. В итоге мы приходим к образованию из N частиц Ферми — Дирака, и если нам нужно получить барион, подчиняющийся также статистике Ферми — Дирака, то число N, которое может принимать значения 2, 3, . . ., следует взять нечетным. Простейший возможный вариант, который мы и примем, отвечает случаю $N=3$. Таким образом, барионы рассматриваются как образования из трех составных элементов, несущих магнитные заряды (в единицах ${}^*e$) ${}^2/{}_3$, $-{}^1/{}_3$ и $-{}^1/{}_3$. Заметим попутно, что из равенства ${}^*e = 3{}^*e_0$ следует

$$
{}^*\alpha = \frac{{}^*e^2}{4\pi} = 36\cdot 137{,}036. \tag{9.94}
$$

Остается невыясненным, относятся ли два магнитных заряда $-{}^1/{}_3$ к двум одинаковым частицам или же они отвечают двум разным частицам с одинаковыми значениями магнитного заряда. По этому поводу мы можем высказать лишь следующее замечание, никак не связанное с существованием античастиц. В первом случае магнитный заряд, усредненный по всем дуально-заряженным частицам, будет отличен от нуля, тогда как во втором случае, где мультиплетность заряда $-{}^1/{}_3$ вдвое больше мультиплетности заряда ${}^2/{}_3$, соответствующее среднее значение будет равно нулю. Мы выбираем более симметричную возможность, распространяя ее и на электрический заряд. Таким образом, говорим ли мы об электрическом заряде, измеряемом в единицах e, или о магнитном заряде, измеряемом в единицах ${}^*e$, в любом случае он принимает три значения: ${}^2/{}_3$, $-{}^1/{}_3$, $-{}^1/{}_3$. Соответствующие девять возможных вариантов естественно рассматривать как разные состояния некоторой фундаментальной дуально-заряженной частицы. Чтобы подчеркнуть исконную двойственность этой частицы относительно заряда, мы назовем ее дионом.

Хотя гипотетическое представление о магнитном заряде как об основе описания поведения адронов находится еще в первоначальной стадии своего развития, мы и так уже забежали слишком далеко вперед с точки зрения возможностей ее проверки. Это связано, в частности, с тем, что мы пока совершенно не касались феноменологического анализа свойств адронов. Нам следует отказаться от такого рода опрометчивых чисто умозрительных построений и перейти к изучению динамики обычных электрически заряженных частиц. Но тут вмешивается Гарольд.

Гарольд. Вы чрезвычайно убедительно говорили о том, насколько важно избегать каких-либо умозрительных предположений относительно структуры частиц, но тем не менее тут вы занимаетесь довольно смелыми спекуляциями как раз такого рода. Нет ли здесь противоречия?

Швингер. Цель феноменологической схемы в конечном счете состоит в том, чтобы установить связь с лежащей в ее основе фундаментальной теорией. Я предостерегал от смешивания феноменологической схемы с фундаментальной теорией. Систематизация и теоретическое осмысление экспериментальных данных не должны основываться на каких-либо явных предположениях относительно структуры. Но совершенно независимо от такого подхода мы вправе выдвигать умозрительные гипотезы в поисках связи с феноменологической схемой. Логическое разделение двух указанных фаз в развитии теории должно способствовать более быстрому достижению конечной цели.

§ 10. ПРИМИТИВНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И МОДЕЛИ ИСТОЧНИКОВ

Консервативный характер фотонного электрического источника $J^\mu(x)$ устанавливает образец для всех таких источников, представляемых вектором электрического тока, отвечающим какому-то конкретному типу частиц. Уже рассмотренные электрические токи для различных значений спина не удовлетворяют этому требованию, так как они сохраняются только в областях вне источников. Рассмотрим снова случай бесспиновых частиц, но несколько иначе, основываясь на выражении для действия

$$\begin{aligned} W &= \int (dx)\,[K\varphi + K^\mu\varphi_\mu + \mathscr{L}], \\ \mathscr{L} &= -\varphi^\mu\partial_\mu\varphi + \frac{1}{2}\varphi^\mu\varphi_\mu - \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Напишем соотношения для инфинитезимальных, зависящих от координат фазовых преобразований источников

$$\delta K(x) = ieq\,\delta\alpha(x)\,K(x), \qquad \delta K^\mu(x) = ieq\,\delta\alpha(x)\,K^\mu(x) \tag{10.2}$$

и компенсирующих преобразований полей

$$\delta\varphi(x) = ieq\,\delta\alpha(x)\,\varphi(x), \qquad \delta\varphi^\mu(x) = ieq\,\delta\alpha(x)\,\varphi^\mu(x). \tag{10.3}$$

Прямой расчет дает

$$\delta W = \int (dx) [\varphi(x) ieqK(x) + \varphi^{\mu}(x) ieqK_{\mu}(x)] \delta\alpha(x), \qquad (10.4)$$

тогда как косвенным путем мы приходим к величине

$$\delta W = -\int (dx) j^{\mu}(x) \partial_{\mu} \delta\alpha(x), \qquad (10.5)$$

где

$$j^{\mu}(x) = \varphi^{\mu}(x) ieq\varphi(x). \qquad (10.6)$$

Из сравнения двух приведенных выражений следует, что

$$\partial_{\mu} j^{\mu}(x) = \varphi(x) ieqK(x) + \varphi^{\mu}(x) ieqK_{\mu}(x). \qquad (10.7)$$

Заметим, что вместо использовавшейся раньше матрицы q мы всюду пишем eq; это делается для того, чтобы заряд был выражен через физическую единицу e.

Несохранение j^{μ} в области источников означает лишь то, что физическое описание начинается с момента рождения частицы, несущей заряд, а предшествующее существование если не самой частицы, то этого заряда, в источнике игнорируется. Нам нужно как-то учесть то обстоятельство, что заряд только передается, а не рождается. Как будет видно из дальнейшего, для этого требуется ввести электромагнитную модель источников, которая упрощена до такой степени, что в ней остается только условие сохранения заряда, но все-таки содержатся некоторые элементы произвола. Один из способов получить сохраняющийся электрический ток — отбросить его несохраняющуюся часть. В то же время в областях, причинно не связанных с актами испускания и поглощения, т. е. в областях, где ток сохраняется, выражение для него должно оставаться по сути дела прежним. Для этого достаточно построить величину

$$j^{\mu}_{\text{сохр}}(x) = j^{\mu}(x) - \int (dx') f^{\mu}(x - x') \partial'_{\nu} j^{\nu}(x'), \qquad (10.8)$$

причем уравнением

$$\partial_{\mu} f^{\mu}(x - x') = \delta(x - x') \qquad (10.9)$$

определяется уже ставший привычным класс функций. Если носитель $f^{\mu}(x - x')$ сводится к пространственно-подобным интервалам, то вычитаемое в формуле (10.8) обращается в нуль в любой момент времени, причинно не связанный с источниками. Для того чтобы сохранить единообразие в трактовке $j^{\mu}(x)$ и $J^{\mu}(x)$, свяжем сохраняющийся вектор, обозначаемый теперь через

$J^{\mu}_{\text{сохр}}(x)$, с произвольной векторной функцией $J^{\mu}(x)$ равенством

$$J^{\mu}_{\text{сохр}} = J^{\mu}(x) - \int (dx')\, f^{\mu}(x-x')\,\partial'_{\nu} J^{\nu}(x'). \tag{10.10}$$

В выражении для действия векторный потенциал $A^{\mu}(x)$ следует умножать на полный ток. Производя перегруппировку членов, можно написать

$$\int (dx)\,[J^{\mu}_{\text{сохр}}(x) + j^{\mu}_{\text{сохр}}(x)]\,A_{\mu}(x) = \\ = \int (dx)\,[J^{\mu}(x) + j^{\mu}(x)]\,A^{f}_{\mu}(x), \tag{10.11}$$

где

$$A^{f}_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \int (dx')\, f^{\nu}(x-x')\,A_{\nu}(x') \tag{10.12}$$

и где ради удобства мы наложили требование симметрии

$$-f^{\mu}(x'-x) = f^{\mu}(x-x'), \tag{10.13}$$

которое в данном случае никакого явного физического смысла не имеет. Заметим, что переход от $A_{\mu}(x)$ к $A^{f}_{\mu}(x)$ представляет собой калибровочное преобразование, обладающее тем свойством, что новый векторный потенциал удовлетворяет условию

$$\int (dx')\, f^{\mu}(x-x')\,A^{f}_{\mu}(x') = 0. \tag{10.14}$$

Этим условием новый векторный потенциал определяется однозначно. Действительно, произведя калибровочное преобразование общего вида

$$\bar{A}_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\lambda(x) \tag{10.15}$$

и потребовав, чтобы потенциал $\bar{A}_{\mu}(x)$ удовлетворял равенству (10.14), мы получим

$$0 = \int (dx')\, f^{\mu}(x-x')\,A_{\mu}(x') + \lambda(x), \tag{10.16}$$

что дает векторный потенциал (10.12).

Если рассматриваются частицы двух разных типов, не взаимодействующие друг с другом, то вакуумные амплитуды будут перемножаться, а действия складываться. Таким образом, для невзаимодействующих фотонов и бесспиновых частиц

$$\begin{gathered} W_{\text{невз}} = \int (dx)\,[J^{\mu}_{\text{сохр}}A_{\mu} + K\varphi + K^{\mu}\varphi_{\mu} + \mathcal{L}_{\text{невз}}], \\ \mathcal{L}_{\text{невз}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \varphi^{\mu}\partial_{\mu}\varphi + \frac{1}{2}\varphi^{\mu}\varphi_{\mu} - \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \end{gathered} \tag{10.17}$$

Взаимодействие между фотонами и заряженными частицами вводится путем замены $J^{\mu}_{\text{сохр}}$ полным током. Мы будем называть такое взаимодействие примитивным, поскольку указанная процедура не приводит к окончательной формулировке всех взаимодействий, а соответствует некоторой ее первоначальной элементарной стадии, которую включают в себя и дополняют последующие, все более и более сложные уровни описания. Смысл утверждения, что примитивное взаимодействие представляет собой первый из этапов динамического описания, будет уточнен несколько позже. Выражение для действия на этой первой стадии имеет вид

$$
\begin{gathered}
W=\int(dx)\left[J^{\mu}A_{\mu}^{f}+K\varphi+K^{\mu}\varphi_{\mu}+\mathscr{L}\left(\varphi\varphi^{\mu}, A_{\mu}^{f}\right)\right],\\
\mathscr{L}\left(\varphi\varphi^{\mu}, A_{\mu}\right)=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\varphi^{\mu}\left(\partial_{\mu}-ieqA_{\mu}\right)\varphi+\\
+\frac{1}{2}\varphi^{\mu}\varphi_{\mu}-\frac{1}{2}m^{2}\varphi^{2},
\end{gathered}
\tag{10.18}
$$

где мы включили в функцию Лагранжа следующий член взаимодействия:

$$
j^{\mu}(x)A_{\mu}^{f}(x)=\varphi^{\mu}(x)\,ieq\varphi(x)A_{\mu}(x).
\tag{10.19}
$$

Хотя в функцию Лагранжа входит здесь векторный потенциал со специальной калибровкой, тем не менее она представляет собой калибровочно-инвариантную комбинацию, которая не меняется при совместном калибровочном и фазовом преобразовании

$$
\begin{gathered}
A_{\mu}(x)\rightarrow A_{\mu}(x)+\partial_{\mu}\lambda(x),\\
\varphi(x)\rightarrow e^{ieq\lambda(x)}\varphi(x),\qquad \varphi^{\mu}(x)\rightarrow e^{ieq\lambda(x)}\varphi^{\mu}(x).
\end{gathered}
\tag{10.20}
$$

Этот результат есть следствие замены производной $\partial_{\mu}\varphi$ с законом преобразования

$$
\partial_{\mu}\varphi(x)\rightarrow e^{ieq\lambda(x)}\left[\partial_{\mu}\varphi(x)+ieq\partial_{\mu}\lambda(x)\varphi(x)\right]
\tag{10.21}
$$

калибровочно-ковариантной комбинацией

$$
\left(\partial_{\mu}-ieqA_{\mu}(x)\right)\varphi(x)\rightarrow e^{ieq\lambda(x)}\left(\partial_{\mu}-ieqA_{\mu}(x)\right)\varphi(x).
\tag{10.22}
$$

Полевые уравнения, которые получаются из принципа стационарного действия путем варьирования φ^{μ} и φ, имеют вид

$$
\left(\partial_{\mu}-ieqA_{\mu}^{f}\right)\varphi-\varphi_{\mu}=K_{\mu},\qquad -\left(\partial_{\mu}-ieqA_{\mu}^{f}\right)\varphi^{\mu}+m^{2}\varphi=K,
\tag{10.23}
$$

где калибровочно-ковариантная комбинация осталась нетронутой, так как изменение знака у производной при интегрировании по частям компенсируется антисимметрией зарядовой матрицы q. При варьировании A_{μ}^{f} мы не должны нарушать калибровочного условия, наложенного на векторный потенциал:

$$
\int(dx')\,f^{\mu}(x-x')\,\delta A_{\mu}^{f}(x')=0.
\tag{10.24}
$$

Таким образом, из равенства

$$\delta_A W = \int (dx) [J^\mu + j^\mu - \partial_\nu F^{\mu\nu}] \delta A^f_\mu = 0 \qquad (10.25)$$

в действительности следует, что

$$J^\mu(x) + j^\mu(x) - \partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = \int (dx') f^\mu (x - x') \gamma (x'), \qquad (10.26)$$

где функция $\gamma(x)$ произвольна, пока речь идет о принципе действия. Но взяв дивергенцию обеих частей последнего соотношения, мы получим

$$\partial_\mu J^\mu(x) + \partial_\mu j^\mu(x) = \gamma(x) \qquad (10.27)$$

и в результате придем к уравнениям Максвелла

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = J^\mu_{\text{сохр}}(x) + j^\mu_{\text{сохр}}(x). \qquad (10.28)$$

Чтобы установить связь между использованием функции $f^\mu(x - x')$, которая задает специальную калибровку, и концепцией электромагнитных моделей источников, произведем фазовое преобразование полей φ и φ^μ, не прибегая при этом к калибровочному преобразованию:

$$\varphi(x) \to e^{-ieq\Lambda(x)} \varphi(x), \quad \varphi^\mu(x) \to e^{-ieq\Lambda(x)} \varphi^\mu(x). \qquad (10.29)$$

Здесь

$$\Lambda(x) = \int (dx') f^\mu (x - x') A_\mu (x'), \qquad (10.30)$$

а $A_\mu(x)$ — векторный потенциал в произвольной калибровке. Это преобразование приводит к результатам двоякого рода. Оно заменяет A^f_μ в $\mathcal{L}$ на

$$A^f_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) = A_\mu(x), \qquad (10.31)$$

что представляет собой калибровочное преобразование, обратное преобразованию (10.12). Кроме того, если перенести нескомпенсированный фазовый множитель на источники, то они перейдут в

$$K^A(x) = e^{ieq\Lambda(x)} K(x), \quad K^A_\mu(x) = e^{ieq\Lambda(x)} K_\mu(x). \qquad (10.32)$$

Введя произвольный векторный потенциал $A_\mu(x)$, мы вернемся к использованию $J^\mu_{\text{сохр}}(x)$. Но дополнительный индекс в дальнейшем будем опускать, поскольку из контекста всегда можно установить, является ли $J^\mu(x)$ произвольным вектором, когда для векторного потенциала выбрана определенная калибровка, или же он является сохраняющимся вектором, когда векторный потенциал допускает калибровочные преобразования. Новое выражение для действия имеет вид

$$W=\int (dx)\,[J^{\mu}A_{\mu}+K^{A}\varphi+K^{A}_{\mu}\varphi^{\mu}+\mathscr{L}(\varphi\varphi^{\mu},\,A_{\mu})]. \qquad (10.33)$$

Теперь калибровочной инвариантности функции Лагранжа соответствует и калибровочная инвариантность всех слагаемых с источниками, так как преобразование $A_{\mu}\to A_{\mu}+\partial_{\mu}\lambda$ приводит к подстановкам

$$\Lambda(x)\to\Lambda(x)+\lambda(x) \qquad (10.34)$$

и

$$K^{A}(x)\to e^{ieq\lambda(x)}K^{A}(x),\qquad K^{A}_{\mu}(x)\to e^{ieq\lambda(x)}K^{A}_{\mu}(x). \qquad (10.35)$$

В то время как полевые уравнения для заряженных частиц, получаемые из действия (10.33), по-прежнему задаются формулами (10.23) с источниками K^{A} и K^{A}_{μ}, уравнения для электромагнитного поля приобретают несколько иной вид. В отличие от случая, когда рассматривается действие (10.18), величина δA_{μ} теперь произвольна и источники заряженных частиц являются функционалами векторного потенциала. Из последнего обстоятельства следует, что

$$\delta_{A}\int (dx)\,\varphi(x)\,K^{A}(x)=\int (dx)\,\varphi(x)\,ieqK^{A}(x)\,\delta\Lambda(x)=$$
$$=-\int (dx)\,(dx')\,\delta A_{\mu}(x)\,f^{\mu}(x-x')\,\varphi(x')\,ieqK^{A}(x'). \qquad (10.36)$$

Таким образом, теперь мы получаем

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu}(x)=J^{\mu}(x)+j^{\mu}(x)-$$
$$-\int (dx')\,f^{\mu}(x-x')\,[\varphi(x')\,ieqK^{A}(x')+\varphi^{\nu}(x')\,ieqK^{A}_{\nu}(x')]. \qquad (10.37)$$

Поскольку

$$\partial_{\mu}j^{\mu}(x)=\varphi(x)\,ieqK^{A}(x)+\varphi^{\mu}(x)\,ieqK^{A}_{\mu}(x), \qquad (10.38)$$

мы приходим в точности к уравнениям Максвелла (10.28), но на этот раз представлен в явном виде вклад в электрический ток, связанный непосредственно с источником заряженных частиц.

Рассмотрим следующую задачу с воображаемым источником. Точечный заряд e движется равномерно с четыре-вектором скорости n^{μ}, удовлетворяющим условию

$$n^{\mu}n_{\mu}=-1, \qquad (10.39)$$

до тех пор, пока в некоторой фиксированной точке, которую мы примем за начало координат, он не прекратит своего существования. Нужно выяснить, как описываются фотоны, испущенные или поглощенные при этом акте. Вектор тока, равный

$$J^{\mu}(x)=en^{\mu}\int_{-\infty}^{0} ds\,\delta(x-ns), \tag{10.40}$$

не будет сохраняться — он удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\mu}J^{\mu}(x)=-e\int_{-\infty}^{0} ds\frac{d}{ds}\delta(x-ns)=-e\delta(x). \tag{10.41}$$

Таким образом,

$$J^{\mu}(x)=-ef^{\mu}(x), \tag{10.42}$$

причем эта функция f^{μ} времени-подобна:

$$f^{\mu}(x)=-n^{\mu}\int_{-\infty}^{0} ds\,\delta(x-ns) \tag{10.43}$$

и в импульсном представлении равна [см. формулу (8.61)]:

$$if^{\mu}(p)=-n^{\mu}i\int_{-\infty}^{0} ds\,e^{-ispn}=\frac{n^{\mu}}{pn},\qquad pn\neq 0. \tag{10.44}$$

Вспомним, каким образом описываются испускание и поглощение произвольного числа частиц, в данном случае фотонов, заданным распределением источников $J^{\mu}(x)$. Множитель в вакуумной амплитуде, связывающий J^{μ} с испускающим источником J_2^{μ} и детектирующим источником J_1^{μ}, имеет вид

$$\begin{aligned}\exp\Big[i\int(dx)(dx')\,J_1^{\mu}(x)\,D_+(x-x')\,J_{\mu}(x)+\\ +i\int(dx)(dx')\,J^{\mu}(x)\,D_+(x-x')\,J_{2\mu}(x')\Big]=\\ =\exp\Big[i\int(dx)\,J^{\mu}(x)\,A_{\mu}(x)\Big],\end{aligned} \tag{10.45}$$

где в $A_{\mu}(x)$ входит поле, отвечающее источнику J_2^{μ} и начальным фотонам, и поле, аналогичным образом связанное с конечными фотонами. Благодаря причинной упорядоченности источников потенциал $A_{\mu}(x)$ в формуле (10.45) во всех представляющих интерес точках является решением свободных уравнений Максвелла, которые в импульсном пространстве записываются в виде

$$p^2A_{\mu}(p)-p_{\mu}p_{\nu}A^{\nu}(p)=0. \tag{10.46}$$

Подставив ток (10.42) в формулу (10.45), получим

$$\begin{aligned}\exp\Big[-ie\int(dx)\,f^{\mu}(x)\,A_{\mu}(x)\Big]=\\ =\exp\Big[-ie\int\frac{dp}{(2\pi)^4}f^{\mu}(-p)\,A_{\mu}(p)\Big].\end{aligned} \tag{10.47}$$

Заметим, однако, что

$$\frac{n_\mu}{pn} - \frac{p_\mu + n_\mu pn}{p^2 + (pn)^2} = \frac{p^2 n_\mu - p_\mu p_\nu n^\nu}{pn\,[p^2 + (pn)^2]}. \tag{10.48}$$

Отсюда видно, что с точки зрения вычисления величины (10.47) времени-подобная функция f^μ эквивалентна пространственно-подобному вектору

$$if^\mu(p) = \frac{p^\mu + n^\mu pn}{p^2 + (pn)^2}, \qquad n_\mu f^\mu(p) = 0. \tag{10.49}$$

Последняя функция также нечетна по p, но на нее не накладывается никаких ограничений в отличие от вектора (10.44), отражающего асимметрию функции координат, которая определяется равенством (10.43). Мы видим, что величина (10.47) в точности равна экспоненциальному множителю, связанному с актом испускания отдельной заряженной частицы, например в равенстве

$$\int (dx')\, \varphi(x')\, K^A(x') = \\ = \int (dx')\, \varphi(x') \exp\left[-ieq \int (dx)\, f^\mu(x - x')\, A_\mu(x')\right] K(x'), \tag{10.50}$$

где x' играет роль начальной точки, в которой заряд eq исчезает в источнике, появляясь на интересующей нас частице.

Отдельные члены семейства функций f^μ, фигурирующих в формуле (10.49), отличаются один от другого только выбором времени-подобного единичного вектора n^μ, который в модели источников описывает движение заряда. Если система координат выбрана так, что вектор n^μ направлен вдоль оси времени, то $f^\mu(p)$ будет иметь только пространственные компоненты, не зависящие от p^0:

$$i\mathbf{f}(p) = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2}, \tag{10.51}$$

откуда

$$\mathbf{f}(x) = -\nabla \mathscr{D}(\mathbf{x})\, \delta(x^0), \tag{10.52}$$

причем функция

$$\mathscr{D}(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{p}^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \tag{10.53}$$

удовлетворяет уравнению

$$-\nabla^2 \mathscr{D}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}). \tag{10.54}$$

Функцию f^μ можно выбрать так, чтобы не приходилось прибегать к постороннему единичному вектору, строя его из соответствующих физических параметров. Для этого нужно несколько обобщить структуру f^{μ}, включив в нее алгебраические функции от производных, действующих на источник $K(x)$. Замена, которую необходимо произвести при этом в формуле (10.50), и ее смысл становятся ясными из соотношения

$$\exp\left[-ieq\int(dx)\,f^{\mu}(x-x',\ -i\partial_K)\,A_{\mu}(x)\right]K(x')=$$
$$=\int\frac{dP}{(2\pi)^4}\,e^{iPx'}\exp\left[-ieq\int(dx)\,f^{\mu}(x-x',\ P)\,A_{\mu}(x)\right]K(P). \qquad (10.55)$$

Если $K(P)$ описывает испускание или поглощение частиц, то с точностью до скалярного множителя величину n^{μ} можно заменить времени-подобным вектором P^{μ}, и в результате получим

$$if_{\mu}(p,\ P)=\frac{p_{\mu}P^2+P_{\mu}pP}{p^2P^2+(pP)^2}\to\frac{P_{\mu}}{pP}, \qquad (10.56)$$

причем последнее выражение аналогично выражению (10.44); с точки зрения расчета процессов, происходящих с фотонами, оно эквивалентно предыдущему.

Случай бесспиновых частиц оказывается особенно простым. Физическая система без собственного углового момента в своей системе покоя может обладать только скалярными характеристиками. Поэтому при рассмотрении электромагнитных явлений допустимым оказывается только монопольный момент — заряд, а все мультипольные моменты запрещены. Вообще частица со спином s в своей системе покоя может обладать мультипольными моментами, максимальный порядок которых равен $2s$. Так, частица со спином $^1/_2$ может иметь произвольные дипольные моменты, частица с единичным спином может иметь произвольные дипольные и квадрупольные моменты и т. д. В случае спина $^1/_2$ достаточно общее выражение для тока имеет вид

$$j^{\mu}(x)=e\frac{1}{2}\,\psi(x)\,\gamma^0\gamma^{\mu}q\psi(x)+\frac{e}{2m}\left(\frac{1}{2}g-1\right)\times$$
$$\times\,\partial_{\nu}\left[\frac{1}{2}\,\psi(x)\,\gamma^0\sigma^{\mu\nu}q\psi(x)\right]. \qquad (10.57)$$

Коэффициент при слагаемом типа $\partial_{\nu}m^{\mu\nu}$ мы представили в такой форме, предвидя, что величина g окажется гиромагнитным отношением, т. е. отношением магнитного момента, выраженного в единицах $\pm e/2m$, к спиновому угловому моменту [формула (2.44) из гл. 1]. Это станет более ясным, если воспользоваться тождеством (6.67), применимым в областях вне источников, и переписать формулу (10.57) в виде

$$j^{\mu}(x)=\frac{e}{2m}\,\frac{1}{2}\left[\psi(x)\,\gamma^0q\,\frac{1}{i}\,\partial^{\mu}\psi(x)-\frac{1}{i}\,\partial^{\mu}\psi(x)\,\gamma^0q\psi(x)\right]+$$
$$+\frac{e}{2m}\,\frac{1}{2}\,g\partial_{\nu}\left[\frac{1}{2}\,\psi(x)\,\gamma^0\sigma^{\mu\nu}q\psi(x)\right]. \qquad (10.58)$$

Магнитный момент системы определяется равенством

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int (d\mathbf{x})\, \mathbf{x} \times \mathbf{j}, \tag{10.59}$$

которое в данном случае переходит в выражение

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m} \int (d\mathbf{x}) \frac{1}{2} \psi\gamma^0 q \left[\mathbf{x} \times \frac{1}{i} \boldsymbol{\nabla} + g \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right] \psi, \tag{10.60}$$

откуда сразу видно, какую роль играют орбитальный момент, спиновый момент и g-фактор. В число дипольных моментов, которыми может обладать частица со спином $^1/_2$, входит электрический дипольный момент. Поэтому ко второму слагаемому в (10.57) следовало бы добавить аналогичное выражение с произвольным коэффициентом, содержащее дуальный тензор спина

$${}^*\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda} \sigma_{\varkappa\lambda} = \sigma^{\mu\nu}\gamma_5. \tag{10.61}$$

Однако никакой характеристики такого рода пока обнаружено не было. Поскольку дивергенция второго члена в токе тождественно равна нулю, мы по-прежнему имеем [здесь введен дополнительный множитель e, которого не было в формуле (6.48)]

$$\partial_\mu j^\mu (x) = \psi(x) \gamma^0 ieq \eta(x). \tag{10.62}$$

Ток (10.57) входит в следующее выражение для действия аналогичное действию (10.18):

$$W = \int (dx) \left[J^\mu A^f_\mu + \eta\gamma^0\psi + \mathscr{L}(\psi, A^f_\mu) \right],$$

$$\mathscr{L}(\psi, A_\mu) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \psi\gamma^0 [\gamma^\mu (-i\partial_\mu - eqA_\mu) + m] \psi +$$

$$+ \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{e}{2m} \left(\frac{1}{2} g - 1 \right) \frac{1}{2} \psi\gamma^0 \sigma_{\mu\nu} q \psi. \tag{10.63}$$

Здесь не представлен член, соответствующий электрическому дипольному взаимодействию,— он подобен последнему слагаемому, но с заменой одного из антисимметричных тензоров дуальной ему величиной. Функция Лагранжа инвариантна относительно калибровочного преобразования

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x), \qquad \psi(x) \to e^{ieq\lambda(x)} \psi(x). \tag{10.64}$$

Как и в случае нулевого спина, воспользовавшись этим свойством, можно не связывать себя выбором определенной калибровки, введя электромагнитную модель для источника частиц:

$$\eta^A(x) = e^{ieq\Lambda(x)} \eta(x). \tag{10.65}$$

Из действия (10.63) вытекают полевые уравнения

$$\left[\gamma^\mu\left(-i\partial_\mu - eqA^f_\mu(x)\right) + m - \frac{eq}{2m}\left(\frac{1}{2}g-1\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\right]\psi(x) = \eta(x), \qquad (10.66)$$

а также уравнения Максвелла, содержащие соответствующие сохраняющиеся токи.

Появление калибровочно-ковариантной производной $\partial_\mu - ieqA_\mu$ в действиях (10.18) и (10.63) представляет собой совершенно общий факт. В нем находит свое выражение тождественность двух способов, которыми были введены электрические токи. При первом из них рассматривается реакция системы на инфинитезимальное фазовое преобразование, зависящее от координат. Для поля $\chi(x)$ общего вида имеем

$$\delta\chi(x) = ieq\delta\,\alpha(x)\,\chi(x), \qquad (10.67)$$

что приводит к изменению действия

$$\delta W = -\int (dx)\, j^\mu(x)\,\partial_\mu\delta\alpha(x), \qquad (10.68)$$

причем множитель e, фигурирующий в формуле (10.67), задает соответствующий электромагнитный масштаб для тока. Такое кинематическое определение не единственное возможное. При динамическом определении электрический ток имитирует функции фотонного источника. В частности, требуется, чтобы изменение действия при вариации поля $\delta A_\mu = \partial_\mu\delta\lambda$ имело вид

$$\delta W = \int (dx)\,(J^\mu + j^\mu)\,\partial_\mu\delta\lambda. \qquad (10.69)$$

Таким образом, тождественность двух понятий диктуется требованием инвариантности действия относительно единого калибровочно-фазового преобразования[1]) с

$$\delta\alpha(x) = \delta\lambda(x). \qquad (10.70)$$

Для группы калибровочных преобразований, в целом по своей структуре абелевой, это достигается путем замены производных, действующих на поля заряженных частиц, калибровочно-ковариантными производными. В возможности же независимого включения дополнительных калибровочно-инвариантных членов, которые входят, например, в формулу (10.63), отражается произвол, допускаемый при кинематическом определении тока. Принято считать, что в электромагнитной связи, получаемой при использо-

[1]) Обычно его называют калибровочным преобразованием второго рода.— *Прим. ред.*

вании калибровочно-ковариантной подстановки, есть нечто особенно простое и естественное, и это действительно так. Но не следует забывать, что при данном значении спина возможны разные способы описания, и, следуя одной и той же методике, мы будем получать разные электромагнитные характеристики. Так, например, описание спина $^1/_2$ посредством спинора третьего ранга, основанное на функции Лагранжа (5.73) с калибровочно-ковариантными производными, приводит с точностью до множителя e к току (6.61), причем соответствующее значение g, которое входит в формулы (6.68) и (6.69), равно $^2/_3$. Если из того чрезвычайно интересного факта, что для электрона и мюона выполняется почти точное равенство $^1/_2 g \approx 1$, можно сделать какой-то недвусмысленный вывод, то это вывод о том, что для описания таких частиц больше всего подходит простое спинорное уравнение Дирака.

Чтобы проиллюстрировать, как путем прямого использования калибровочно-инвариантной функции Лагранжа вводятся примитивные электромагнитные взаимодействия, мы рассмотрим заряженные частицы с единичным спином. Такая функция Лагранжа, получаемая в результате обобщения формулы (5.28), имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} G^{\mu\nu} (D_\mu \varphi_\nu - D_\nu \varphi_\mu) + \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 \varphi^\mu \varphi_\mu + \\ + \frac{1}{2} a F^{\mu\nu} \varphi_\mu ieq \varphi_\nu + \frac{1}{2} \frac{b}{m^2} F^{\mu\nu} G^\lambda_\mu ieq G_{\nu\lambda}, \tag{10.71}$$

где мы пользуемся сокращенным обозначением ковариантной производной

$$D_\mu = \partial_\mu - ieqA_\mu. \tag{10.72}$$

Заметим, что мы образовали два члена, каждый из которых сам по себе калибровочно-инвариантен. Ниже будет установлена связь произвольных коэффициентов a и b с магнитным моментом и с электрическим квадрупольным моментом. Мы не рассматриваем два дополнительных члена взаимодействия, получаемых путем замены тензора $F^{\mu\nu}$ дуальным ему тензором. Они описывали бы электрический дипольный и магнитный квадрупольный моменты. Полевые уравнения для частицы, которые следуют из принципа действия, имеют вид

$$\begin{gathered} D_\mu \varphi_\nu - D_\nu \varphi_\mu - G_{\mu\nu} - \frac{b}{m^2} (F_{\mu\lambda} ieq G^\lambda{}_\nu - F_{\nu\lambda} ieq G^\lambda{}_\mu) = M_{\mu\nu}, \\ D_\nu G^{\mu\nu} + m^2 \varphi^\mu - a F^{\mu\nu} ieq \varphi_\nu = J^\mu, \end{gathered} \tag{10.73}$$

а вектор электрического тока в областях вне источников дается выражением

$$j^\mu = G^{\mu\nu} ieq \varphi_\nu + \partial_\nu \left[a \varphi^\mu ieq \varphi^\nu + \frac{b}{m^2} G^{\mu\lambda} ieq G^\nu{}_\lambda \right]. \tag{10.74}$$

Если нас интересуют внутренние электромагнитные характеристики частицы, а не те ее свойства, которые обусловлены воздействием электромагнитного поля, то можно упростить выражение для тока (10.74), пользуясь полевыми уравнениями для свободной частицы:

$$\partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu = G_{\mu\nu}, \qquad \partial_\nu G^{\mu\nu} + m^2 \varphi^\mu = 0, \qquad \partial_\mu \varphi^\mu = 0, \tag{10.75}$$

последнее из которых играет важную роль, хотя и не является независимым. Это дает

$$\begin{aligned} j^\mu = {} & \partial^\mu \varphi^\nu ieq\varphi_\nu + \frac{b}{2m^2}\partial^2 (\partial^\mu \varphi^\nu ieq\varphi_\nu) - \\ & - (1 - a + b)\,\partial_\nu (\varphi^\mu ieq\varphi^\nu) + \frac{b}{2m^2}\partial^2 \partial_\nu (\varphi^\mu ieq\varphi^\nu) - \\ & - \frac{b}{m^2}\partial_\nu \partial_\lambda (\partial^\mu \varphi^\lambda ieq\varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\lambda ieq\varphi^\mu). \end{aligned} \tag{10.76}$$

Отсюда следует, что член взаимодействия с электромагнитным потенциалом в областях, где нет никаких источников, имеет вид

$$\begin{aligned} \int (dx)\, A_\mu j^\mu = \int (dx) \Big[& A_\mu (\partial^\mu \varphi^\nu ieq\varphi_\nu) - \\ & - (1 - a + b)\frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\varphi^\mu ieq\varphi^\nu) + \frac{b}{m^2}\partial_\lambda F_{\mu\nu} (\partial^\mu \varphi^\lambda ieq\varphi^\nu) \Big]. \end{aligned} \tag{10.77}$$

Кроме того, как показывает тождество

$$(\partial^\mu \varphi^\lambda ieq\varphi^\nu) = (\partial^\mu \varphi^\nu ieq\varphi^\lambda) + \partial^\mu (\varphi^\lambda ieq\varphi^\nu), \tag{10.78}$$

производную напряженности поля в формуле (10.77) следует симметризовать по индексам λ и ν.

В случае медленно движущейся частицы с зарядом $\pm e$ доминируют три компоненты поля φ_k, которые удобно объединить в вектор $\boldsymbol{\varphi}$. Вектор $\mathbf{s}$ со спиновыми матрицами в качестве компонент определяется вращением

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}\boldsymbol{\varphi} = i\mathbf{n} \times \boldsymbol{\varphi}. \tag{10.79}$$

Пользуясь спиновыми матрицами, представим выражение (10.77), соответствующее рассматриваемому случаю, в виде

$$\begin{aligned} \int (dx)\, A_\mu j^\mu \to \int (dx) \Big[& -(\pm e) A^0 2m (\varphi_1 \varphi_2) + (1 - a + b)(\pm e) \times \\ & \times \mathbf{H}\cdot(\varphi_1 \mathbf{s} \varphi_2) + \frac{b}{m^2}(\pm e)\, \nabla \mathbf{E} : 2m (\varphi_1 \mathbf{s}\mathbf{s} \varphi_2) \Big], \end{aligned} \tag{10.80}$$

где симметризована диада $\nabla \mathbf{E}$ [1]), а также выделены члены, которые описывают частицу, распространяющуюся в причинно-упорядоченной системе. При нормировке, задаваемой связью скалярного потенциала A^0 с зарядом $\pm e$, линейной связью вектора спина с магнитным полем будет определяться величина

$$g = 1 - a + b, \tag{10.81}$$

а квадратичный по спину член будет давать квадрупольный момент, выраженный в единицах $\pm e/m^2$:

$$Q = 2b. \tag{10.82}$$

К отдельным результатам, полученным для значений g при использовании только калибровочно-ковариантной производной ($s = {}^1/_2$, $g = 2$, ${}^2/_3$; $s = 1$, $g = 1$), можно прийти на основе единообразного рассмотрения мультиспинорной функции Лагранжа общего вида (5.78). Эта функция Лагранжа приводит к следующему выражению для тока в пространстве, где нет источников и полей:

$$j^\mu (x) = e \frac{1}{2} \psi (x) \gamma \left(\frac{1}{n} \sum_\alpha \gamma_\alpha^\mu \right) q\psi (x). \tag{10.83}$$

При указанных условиях

$$(\gamma_\alpha^\mu - \gamma_\beta^\mu)\, \partial_\mu \psi = 0 \tag{10.84}$$

и все вспомогательные поля обращаются в нуль, откуда следует система полевых уравнений

$$\left(\gamma_\alpha^\mu \frac{1}{i} \partial_\mu + m \right) \psi = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{10.85}$$

Поэтому в каждом из n слагаемых, которые входят в формулу (10.83), можно произвести перегруппировку членов, использовавшуюся в случае спина ${}^1/_2$, в результате чего получим

$$j^\mu (x) = \frac{e}{2m} \frac{1}{2} \left[\psi (x) \gamma q \frac{1}{i} \partial^\mu \psi (x) - \frac{1}{i} \partial^\mu \psi (x) \gamma q \psi (x) \right] + \\ + \frac{e}{2m} \partial_\nu \left[\frac{1}{2} \psi (x) \gamma \frac{1}{n} \sum \sigma_\alpha^{\mu\nu} q \psi (x) \right]. \tag{10.86}$$

Так как вектор спина частицы равен

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} \sum \sigma_\alpha, \tag{10.87}$$

[1]) $\nabla \mathbf{a} : \mathbf{cd} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} a_j + a_i \frac{\partial}{\partial x_j} \right) c_i d_j$.— *Прим. ред.*

для величины g отсюда сразу же получаем

$$g=\frac{2}{n}, \tag{10.88}$$

а все остальные мультипольные моменты равны нулю. Заметим, что фактическое значение спина входит только через неравенство $s \leqslant n/2$ и поэтому

$$gs=\frac{2s}{n}\leqslant 1, \tag{10.89}$$

где знак равенства относится к полностью симметричным спинорам. Кстати, очень похожая единообразная трактовка применима и ко всем полям, которые образованы из спинора и симметричного тензора и которые используются для описания полуцелых значений спина. Как можно видеть на примерах функций Лагранжа (5.55) и (5.58), калибровочно-ковариантное электромагнитное взаимодействие приводит к вектору тока, который в пространстве, где нет источников и полей, имеет вид

$$j^{\mu}(x)=e\frac{1}{2}\psi^{\nu_1\nu_2\dots}(x)\gamma^0\gamma^{\mu}q\psi_{\nu_1\nu_2\dots}(x). \tag{10.90}$$

Та же самая перегруппировка членов, которая применялась в случае спина $^1/_2$, дополненная проектированием σ на полный спин, и учет того обстоятельства, что σ_3, например, при $s_3 = s$ равно единице, сразу же дают

$$gs = 1. \tag{10.91}$$

§ 11. ОБОБЩЕННЫЕ ИСТОЧНИКИ, МЯГКИЕ ФОТОНЫ

Дополнительным к принципу равноправности всех точек пространства-времени может служить принцип равноправности всех явлений, которые различаются только фигурирующими в них значениями энергии и импульса. Понятие источника было введено у нас на основе идеализированного представления о процессах столкновений, в которых переносится строго определенное количество энергии-импульса (или инвариантной величины — массы), необходимое для порождения данной частицы. Но те же самые законы физики действуют и в том случае, когда переносится меньшая или, наоборот, большая масса. Давным-давно, в § 3 гл. 2, мы воспользовались экстраполяцией на квазистатические распределения источников, не способные испускать частицы, для установления связи свойств фотонов с законами Кулона — Ампера, которые описывают взаимодействия зарядов и токов. Возможно, что, занимаясь хорошо известными уравнениями Максвелла, мы могли и забыть об исходных логических основаниях необходимости такого рода контакта. Теперь же, рассматривая электрические токи, связанные с действием источников заряженных частиц, мы будем двигаться в противоположном направлении. С физической точки зрения дело обстоит довольно просто. При рождении заряженной частицы соответствующий заряд обычно переносится от каких-то других частиц, которые движутся иначе. Ускоренные заряды излучают. Следовательно, если не контролировать строго баланс энергии-импульса, то заряженные частицы должны с отличной от нуля вероятностью сопровождаться фотонами. Если бы мы придерживались слишком узкой точки зрения на понятие источника и не распространили бы его на такие акты многочастичного испускания, то мы потеряли бы связь между динамическими аспектами заряда и его кинематическими аспектами.

Испускание или поглощение фотонов не есть локализованный процесс. Фотон, сопутствующий рождению заряженной частицы, нельзя приписать ни действию этого заряда, ни действию зарядов в источнике — своим происхождением он обязан обоим эффектам сразу. Это находит свое выражение в том, что электрический ток имеет вид суммы вкладов частиц и источника. Было бы полезно подробнее остановиться на такого рода явлениях. Сначала мы вычислим амплитуду вероятности испускания одного фотона с импульсом k^μ и поляризацией λ, сопутствующего рождению одной бесспиновой частицы с импульсом p^μ и зарядом $\pm e$. При вычислении этой амплитуды вероятности мы можем пользоваться примитивным взаимодействием в силу тех физических соображений, что между актами рождения и детектирования частица и фотон распространяются без взаимодействия. В соответствии с этим целесообразно рассмотреть случай, когда две указанные частицы порождаются независимыми источниками. Этот случай характеризуется тем членом вакуумной амплитуды

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{JK} = \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J} \langle 0_+ | 0_- \rangle^{K}, \tag{11.1}$$

в который входят один испускающий и один поглощающий источники каждого типа (здесь мы полагаем $K^\mu = 0$):

$$\begin{aligned}\langle 0_+ | 0_- \rangle^{JK} = 1 + \ldots + i \int (d\xi)\,(d\xi')\, J_1^\mu(\xi)\, D_+(\xi - \xi')\, J_{2\mu}(\xi') \times \\ \times i \int (dx)\,(dx')\, K_1(x)\, \Delta_+(x - x')\, K_2(x') + \ldots,\end{aligned} \tag{11.2}$$

или

$$\begin{aligned}\langle 0_+ | 0_- \rangle^{JK} = 1 + \ldots + i \int (d\xi)\, A_1^\mu(\xi)\, J_{2\mu}(\xi)\, i \times \\ \times \int (dx)\, \varphi_1(x)\, K_2(x) + \ldots .\end{aligned} \tag{11.3}$$

Чтобы было удобнее различать два типа частиц, мы здесь вместо ξ^μ пользуемся обозначением x^μ. (Надеемся также, что читатель позволит нам называть заряженную частицу просто частицей.) При использовании примитивного взаимодействия частицы по-прежнему останутся свободными, но независимые источники $J_2^\mu(\xi)$ и $K_2(x)$ заменятся комбинированным источником $J_2^\mu(\xi)\, K_2(x)\,|_{\text{эфф}}$, смысл которого и выясняется ниже.

Если мы ограничиваемся одним только действием источника, детектирующего фотоны, то достаточно рассмотреть величину

$$\delta_J W = \int (d\xi)\, \delta J^\mu(\xi)\, A_\mu(\xi), \tag{11.4}$$

или

$$\delta_J \langle 0_+ | 0_- \rangle^{JK} = i \int (d\xi)\, \delta J^\mu(\xi)\, A_\mu(\xi)\, \langle 0_+ | 0_- \rangle^{JK}, \tag{11.5}$$

поскольку зондирующий источник δJ^μ можно отождествить с J_1^μ. Так как поле $A_\mu(\xi)$ следует вычислять при $J_\mu(\xi) = 0$, с точностью до несущественного сейчас калибровочного члена оно будет даваться равенством

$$A^\mu(\xi) = \int (d\xi')\, D_+(\xi - \xi')\, j^\mu_{\text{сохр}}(\xi'). \tag{11.6}$$

Интересующему нас процессу отвечает выражение, которое описывает причинную связь трех источников: J_1^μ, K_1 и K_2. Излучающий источник K_2 служит для того, чтобы инжектировать в систему импульс P^μ в виде импульсов двух частиц:

$$P^\mu = p^\mu + k^\mu, \tag{11.7}$$

где

$$-p^2 = m^2, \qquad k^2 = 0. \tag{11.8}$$

Таким образом,

$$-P^2 = m^2 - 2pk > m^2, \tag{11.9}$$

поскольку

$$-pk = p^0 k^0 \left[1 - \frac{\mathbf{p}}{p^0} \cdot \frac{\mathbf{k}}{k^0}\right] > 0. \tag{11.10}$$

Понятие источника в данном случае приходится расширить, и мы будем называть его «обобщенным источником», с тем чтобы отличить характер его действия от характера действия источника K_1, который детектирует частицу, поглощая массу m. Последний же источник, выполняющий только свои первоначальные функции, будет у нас «простым источником». Далее, ток в формуле (11.6) представляет собой квадратичный функционал от источника частиц и поэтому содержит член $j_{12}^\mu(\xi)$, билинейный по K_1 и K_2. Он дает множитель в правой части равенства (11.5), который уже содержит три необходимых нам источника. Все прочие члены соответствуют процессам, отличным от процесса, который нас интересует и который описывается величиной

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{JK} = 1 + \ldots + i \int (d\xi)\, A_1^\mu(\xi)\, j_{12\mu}(\xi) + \ldots \quad (11.11)$$

Необходимое выражение для тока, которое получается из формул (10.37) и (10.6) при $K_\mu = 0$, имеет вид

$$j_{12\mu}(\xi) = \partial_\mu \varphi_1(\xi)\, ieq\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)\, ieq\partial_\mu\varphi_2(\xi) - \\ - \int (d\xi')\, f_\mu(\xi - \xi')\, \varphi_1(\xi')\, ieqK_2(\xi'). \quad (11.12)$$

Здесь мы опустили еще один возможный член, содержащий $K_1(\xi')\, ieq\varphi_2(\xi')$, что отвечает причинной упорядоченности. Поле $\varphi_2(x)$ связано со своим источником уравнением

$$(-\partial^2 + m^2)\, \varphi_2(x) = K_2(x), \quad (11.13)$$

или, в импульсном пространстве,

$$\varphi_2(P) = \frac{1}{P^2 + m^2} K_2(P). \quad (11.14)$$

Неравенство $P^2 + m^2 \neq 0$ [формула (11.9)] означает, что поле $\varphi_2(x)$ не обладает характеристиками, описывающими его распространение, а локализовано в окрестности источника $K_2(x)$. Таким образом, поле $\varphi_2(x)$ не перекрывается с достаточно удаленным детектирующим источником $K_1(x)$, что отвечает предположению о причинной упорядоченности системы. Чтобы распространить понятие обычной частицы на случай, когда соотношение между энергией и импульсом не согласуется с рождением какой-то «реальной» частицы, вводят термин «виртуальная частица». Тогда содержание соотношений (11.11) и (11.12) сформулируется следующим образом: обобщенный источник может испустить виртуальную частицу, которая быстро превращается (распадается) в реальную частицу и в реальный фотон. Другими словами, этот источник за один акт может испустить сразу обе конечные частицы, хотя фотон и частица появляются в разных точках.

Точный смысл этих высказываний становится ясным, если сравнить соотношения (11.11) и (11.12) с уравнением (11.3) и написать

$$iJ_{2\mu}(\xi)\, K_2(x)\,|_{\text{эфф}} = -\partial_\mu [\delta(x - \xi)\, ieq\varphi_2(x)] - \\ - \delta(x - \xi)\, ieq\partial_\mu\varphi_2(x) - f_\mu(\xi - x)\, ieqK_2(x), \quad (11.15)$$

где первые производные берутся по координатам x^μ. В импульсном пространстве эта величина записывается в следующем эквивалентном виде:

$$iJ_{2\mu}(k)\,K_2(p)\,|_{\text{эфф}}=\left[\frac{p_\mu+P_\mu}{P^2+m^2}-if_\mu(k)\right]eqK_2(P), \qquad (11.16)$$

где учтено также равенство (11.14). В такой форме легко убедиться в том, что имеет место закон сохранения

$$k^\mu J_{2\mu}(k)\,K_2(p)\,|_{\text{эфф}}=0, \qquad (11.17)$$

справедливый при $p^2+m^2=0$ и произвольном k^2:

$$\frac{kp+kP}{P^2+m^2}-1=\frac{2kp+k^2}{2kp+k^2}-1=0. \qquad (11.18)$$

Ситуация существенно упрощается, когда рассматриваются «мягкие» фотоны, т. е. фотоны, энергия и импульс которых пренебрежимо малы по сравнению с соответствующими характеристиками частицы. В этом случае соотношение (11.16) можно представить в виде

$$iJ_{2\mu}(k)\,K_2(p)\,|_{\text{эфф}}\approx\left[\frac{p_\mu}{pk}-\frac{n_\mu}{nk}\right]eqK_2(p), \qquad (11.19)$$

где для функции f_μ (k) подставлено выражение (10.44). Интерпретация здесь очевидна. С точки зрения мягкого фотона заряд eq мгновенно переходит из состояния равномерного движения со скоростью n_μ в состояние равномерного движения со скоростью p_μ/m. Такой процесс описывается излучающим фотонным источником

$$J_2^\mu(k)=-ieq\left[\frac{p^\mu}{pk}-\frac{n^\mu}{nk}\right], \qquad (11.20)$$

представляющим собой образ сохраняющегося векторного тока

$$J^\mu(\xi)=eq\int_0^\infty ds\,\frac{p^\mu}{m}\,\delta\left(x-\frac{p}{m}s\right)+eq\int_{-\infty}^0 ds\,n^\mu\delta(x-ns). \qquad (11.21)$$

Обратим внимание на то, что два вклада, один из которых связан с источником частиц, а другой с частицей, объединяются в некоторый эквивалентный фотонный источник. Это может служить иллюстрацией самосогласованности, требование которой предъявляется к понятию источника. Источник вводят путем идеализации реальных динамических процессов. При определенных ограничениях динамическая теория, воздвигаемая на таком основании, должна оправдывать свои исходные предпосылки. Так, например, оказывается, что простое описание фотонного источника применимо и к реальным системам, для которых реакция, отвечающая процессу испускания или поглощения, пренебрежимо мала, и в этом выводе нет для нас ничего неожиданного.

Нам нужно выяснить также физический смысл ковариантной функции f_μ, определяемой формулой (10.56), которую теперь мы представим в виде

$$if_\mu(k, P) \to \frac{P_\mu}{kP} \approx \frac{p_\mu}{kp}, \tag{11.22}$$

где последнее выражение относится к мягким фотонам. В этом случае эффективный фотонный источник обращается в нуль; скорость заряда не изменяется, и он не излучает. Такой вывод весьма естествен для моделей источников, в которых испущенная частица определяет скорость заряда в источнике, подавляя при этом сопутствующее излучение. Однако подобное подавление свойственно не только мягким фотонам. Если подставить в (11.16) точное выражение для $if_\mu(k, P)$, то мы получим ($k^2 = 0$):

$$\begin{aligned} iJ_{2\mu}(k) K_2(p)|_{\text{эфф}} &= \left[\frac{2p_\mu + k_\mu}{2kp} - \frac{p_\mu + k_\mu}{kp}\right] eqK_2(P) = \\ &= -\frac{1}{2}\frac{k_\mu}{kp} eqK_2(P). \end{aligned} \tag{11.23}$$

В амплитуду вероятности испускания двух частиц с квантовыми числами $k\lambda$ и pq, помимо величины (11.23), должны входить дополнительные множители $(d\omega_k)^{1/2}$ и $(d\omega_p)^{1/2}$, а также множители, выделяющие в явном виде заряд $\pm e$ и поляризацию фотона λ. Последняя процедура осуществляется путем скалярного умножения источника на вектор поляризации $e_{k\lambda}^{\mu *}$, а

$$k_\mu e_{k\lambda}^\mu = 0. \tag{11.24}$$

Существует и другая проблема, которую можно проиллюстрировать на примере эффективного источника (11.16). Модели источника частиц, задаваемой функцией $f^\mu(k)$, эквивалентна модель, в которой электрические характеристики приписываются только частице, а для векторного потенциала выбирается специальная калибровка

$$f^\mu(k) A_\mu^f(k) = 0 \tag{11.25}$$

[см. формулу (10.14)]. Векторный потенциал, описывающий испущенный фотон, пропорционален вектору поляризации $e_{k\lambda}^{\mu *}$, и поэтому калибровочное условие (11.25) приводит к требованию

$$f_\mu(k) e_{k\lambda}^\mu = 0, \tag{11.26}$$

дополняющему требование (11.24). Таким образом, выбрав функцию $f_\mu(k)$ в виде (10.49), мы получим условие

$$n_\mu e_{k\lambda}^\mu = 0, \tag{11.27}$$

которое в соответствующей системе координат переходит в равенство $e^0_{k\lambda} = 0$. Итак, мы приходим к следующему весьма существенному заключению. Если умножить (11.16) на один из векторов поляризации, то член, соответствующий излучению от источника, обратится в нуль, как и должно быть.

До сих пор рассматривалось только однофотонное испускание, но это необязательно, во всяком случае когда речь идет о мягких фотонах. Так как по-прежнему имеется только один источник, детектирующий частицы, мы изменим тактику и рассмотрим величину

$$\delta_K W = \int (dx)\, \delta K\,(x)\, \varphi\,(x) \tag{11.28}$$

или

$$\delta_K \langle 0_+ | 0_- \rangle^{JK} = i \int (dx)\, \delta K\,(x)\, \varphi\,(x) \langle 0_+ | 0_- \rangle^{JK}, \tag{11.29}$$

где $\delta K\,(x) \to K_1\,(x)$ и величина $\varphi\,(x)$ связана с источником $K_2\,(x)$ полевыми уравнениями

$$\begin{aligned} -(\partial_\mu - ieqA_\mu(x))\,\varphi^\mu(x) + m^2\varphi(x) &= K_2^A(x), \\ (\partial_\mu - ieA_\mu(x))\,\varphi(x) &= \varphi_\mu(x). \end{aligned} \tag{11.30}$$

Исключив φ_μ, мы получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} &[-(\partial^\mu - ieqA^\mu(x))(\partial_\mu - ieqA_\mu(x)) + m^2]\,\varphi(x) = \\ &\qquad = \exp\left[ieq \int (d\xi)\, f^\mu(x-\xi)\, A_\mu(\xi)\right] K_2(x). \end{aligned} \tag{11.31}$$

Поскольку в формуле (11.29) уже представлены оба источника частиц, класс процессов, который мы хотим выделить, будет определяться амплитудой

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{JK} = \ldots + i \int (dx)\, K_1(x)\, \varphi_2^{A_1}(x) \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J_1} + \ldots, \tag{11.32}$$

где обозначения выбраны так, чтобы подчеркнуть зависимость поля частиц $\varphi_2\,(x)$ от векторного потенциала $A_1^\mu\,(\xi)$, который описывает испущенные фотоны и поле детектирующего их источника $J_1^\mu\,(\xi)$.

Мы начнем с того, что получим этим новым способом уже известные нам результаты, соответствующие однофотонному испусканию. Для этого нужно выделить часть $\varphi_2^{A_1}\,(x)$, линейную по векторному потенциалу. Если упростить полевое уравнение (11.31), взяв вместо него

$$\begin{aligned} (-\partial^2 + m^2)\,\varphi_2^A(x) &= K_2(x) + \frac{1}{i}\partial^\mu\,[eqA_\mu(x)\,\varphi_2(x)] + \\ &+ eqA_\mu(x)\frac{1}{i}\partial^\mu\varphi_2(x) + ieq\int (d\xi)\, f^\mu(x-\xi)\, A_\mu(\xi)\, K_2(x), \end{aligned} \tag{11.33}$$

то в нем останется как раз необходимая информация. К результату, соответствующему (11.32), мы придем путем умножения этого полевого уравнения на $\varphi_1(x)$ с последующим интегрированием:

$$\int (dx) K_1(x) \varphi_2^{A_1}(x) = \int (dx) \varphi_1(x) K_2(x) + \int (d\xi) A_1^{\mu}(\xi) j_{12\mu}(\xi). \quad (11.34)$$

Первое слагаемое в правой части описывает безызлучательное испускание частицы, а второе воспроизводит результат (11.11). В разложении $\varphi_2^A(x)$ по степеням $A^\mu(\xi)$ n-й член описывает n-фотонные процессы испускания. Если мы условимся рассматривать только мягкие фотоны, то все такие процессы можно будет охватить одной компактной формулой, которая, как мы теперь можем ожидать, должна быть эквивалентной описанию на основе фотонного источника.

Формальное решение дифференциального уравнения (11.31) имеет вид

$$\varphi_2^A(x) = \int (dx') \Delta_+^A(x, x') \exp\left[ieq \int (d\xi) f^\mu(x' - \xi) A_\mu(\xi)\right] K_2(x'), \quad (11.35)$$

где функция Грина $\Delta_+^A(x, x')$ удовлетворяет уравнению

$$[-(\partial - ieqA(x))^2 + m^2] \Delta_+^A(x, x') = \delta(x - x'). \quad (11.36)$$

Введем преобразование

$$\Delta_+^A(x, x') = \exp\left[ieq \int_{x'}^{x} d\xi^\mu A_\mu(\xi)\right] \Delta_+^{A'}(x, x'), \quad (11.37)$$

в котором контуром интегрирования служит прямая линия, соединяющая точки x и x' и параметризованная следующим образом:

$$\xi^\mu = x^\mu \frac{1+\lambda}{2} + x^{\mu'} \frac{1-\lambda}{2}, \qquad 1 \geqslant \lambda \geqslant -1. \quad (11.38)$$

Это преобразование индуцирует калибровочное преобразование векторного потенциала A_μ, заменяя его на

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \int_{x'}^{x} d\xi^\nu A_\nu(\xi), \quad (11.39)$$

и приводит к новому уравнению для функции Грина:

$$[-\partial(\partial - ieqA'(x))^2 + m^2] \Delta_+^{A'}(x, x') = \delta(x - x'). \quad (11.40)$$

Тождество

$$A_\mu(x)-\partial_\mu\int\limits_{x'}^{x} d\xi^\nu A_\nu(\xi)=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1} d\lambda\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1+\lambda}{2}A_\mu(\xi)\right]-\partial_\mu\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2}d\lambda\,(x-x')^\nu A_\nu(\xi) \qquad (11.41)$$

дает калибровочно-инвариантное представление

$$A'_\mu(x)=-\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2}d\lambda\frac{1+\lambda}{2}(x-x')^\nu F_{\mu\nu}(\xi). \qquad (11.42)$$

Этот векторный потенциал имеет еще два важных свойства. В областях, удаленных от электромагнитного источника $J_\nu(\xi)$,

$$\partial^\mu A'_\mu(x)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2}d\lambda\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^2(x-x')^\nu J_\nu(\xi)=0; \qquad (11.43)$$

кроме того, во всех точках

$$(x-x')^\mu A'_\mu(x)=0. \qquad (11.44)$$

Следовательно, если бы мы начали строить $\Delta_+^{A'}(x, x')$ в виде разложения в ряд по степеням векторного потенциала A'_μ, описывающего поле фотонов вдали от детектирующего их источника, то первые члены этого ряда определялись бы уравнением

$$(-\partial^2+m^2)\,\Delta_+^{A'}(x, x')=\delta(x-x')+2eqA'_\mu(x)\frac{1}{i}\partial^\mu\Delta_+(x-x')+\ldots\,. \qquad (11.45)$$

Но функция $\Delta_+(x-x')$, будучи инвариантной, зависит только от $(x-x')^2$, и поэтому градиент этой функции пропорционален вектору $(x-x')^\mu$. Таким образом, мы приходим к выводу, что $\Delta_+^{A'}(x, x')$ не содержит члена, линейного по A'_μ.

Еще больше можно сказать, если поле считается однородным, что соответствует мягким фотонам, импульсы которых пренебрежимо малы. В этом случае

$$A'_\mu(x)=-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x-x')^\nu, \qquad (11.46)$$

откуда следует трансляционная инвариантность функции Грина:

$$\Delta_+^{A'}(x, x')=\Delta_+^{A'}(x-x'). \qquad (11.47)$$

При этом дифференциальное уравнение (11.36) переходит в уравнение

$$\left[-\partial^2+m^2+ieq\,\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)-\frac{1}{4}e^2x^\mu F^2_{\mu\nu}x^\nu\right]\Delta_+^{A'}(x)=\delta(x), \tag{11.48}$$

где

$$F^2_{\mu\nu}=F_\mu{}^\lambda F_{\lambda\nu}. \tag{11.49}$$

Линейный по напряженности поля член обладает структурой оператора углового момента, что гарантирует его коммутативность с ∂^2; кроме того, он коммутирует и с квадратичной по координатам комбинацией:

$$\left[\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu),\ \frac{1}{2}x^\varkappa F^2_{\varkappa\lambda}x^\lambda\right]=x^\mu F^3_{\mu\nu}x^\nu=0, \tag{11.50}$$

так как тензор

$$F^3_{\mu\nu}=F_{\mu\varkappa}F^{\varkappa\lambda}F_{\lambda\nu} \tag{11.51}$$

антисимметричен по индексам μ и ν. Все это, а также инвариантность $\delta(x)$ по отношению к вращениям, показывает, что дифференциальное уравнение (11.48) можно упростить, приведя его к виду

$$\left[-\partial^2+m^2-\frac{1}{4}e^2x^\mu F^2_{\mu\nu}x^\nu\right]\Delta_+^{A_1}(x)=\delta(x). \tag{11.52}$$

Мы не будем останавливаться на решении данного уравнения — достаточно знать, что $\Delta_+^{A'}(x-x')$ — четная функция напряженностей поля. Действительно, тогда в равенстве (11.37) можно пренебречь ее зависимостью от поля, так как в отличие от векторных потенциалов напряженности поля содержат в качестве дополнительного множителя импульс фотона.

Вводя все эти упрощения, возникающие при рассмотрении мягких фотонов, мы придем к соотношению

$$\int(dx)\,K_1(x)\,\varphi_2^A(x)=$$
$$=\int(dx)(dx')\,K_1(x)\,\Delta_+(x-x')\exp\left[ieq\left(\int_{x'}^{x}d\xi^\mu A_\mu(\xi)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int(d\xi)\,f^\mu(x'-\xi)\,A_\mu(\xi)\right)\right]K_2(x'). \tag{11.53}$$

Входящее сюда интегрирование вдоль прямой линии начинается в точке x' и проводится в направлении, задаваемом вектором $(x-x')^\mu$, до точки, которую можно считать расположенной в бесконечности, так как процессы испускания фотонов локализованы вблизи обобщенного источника K_2. В соответствии с этим

$$\exp\left[ieq\left(\int_{x'}^{x} d\xi^{\mu}A_{\mu}(\xi)+\int(d\xi)\,f^{\mu}(x'-\xi)\,A_{\mu}(\xi)\right)\right]=$$
$$=\exp\left[i\int(d\xi)\,J^{\mu}(\xi)\,A_{\mu}(\xi)\right], \qquad (11.54)$$

где

$$J^{\mu}(\xi)=eq\int_{0}^{\infty} ds\,\frac{p^{\mu}}{m}\,\delta\left(\xi-x'-\frac{p}{m}s\right)+eq\int_{-\infty}^{0} ds\,n^{\mu}\delta\,(\xi-x'-ns) \quad (11.55)$$

— величина, отличающаяся от величины (11.21) лишь тем, что в ней явным образом фигурирует промежуточная точка x'. Но считать, что эти две величины действительно чем-то различаются, было бы неверно — в формуле (11.21) молчаливо предполагается, что указанная точка служит началом координат, так как изменение x' в пределах источника K_2 не имеет значения, когда рассматриваются мягкие фотоны. В результате, как мы и ожидали, процессы многочастичного испускания мягких фотонов оказывается возможным описывать некоторым источником. Заметим, что эффективный фотонный источник определяет амплитуды вероятностей испускания дополнительных фотонов, отнесенные к амплитуде вероятности безызлучательного процесса, к которому приводит K_2, когда он действует в качестве простого источника, испускающего частицы.

Теперь можно перейти к рассмотрению характерных особенностей, свойственных мягким фотонам. Непрерывно уменьшая энергию, которая сообщается мягкому фотону в заданной экспериментальной установке, мы в конце концов придем к тому, что будем не в состоянии решить, был ли испущен фотон. В какой-то степени дополнительным к этому является следующее утверждение, относящееся к пространственно-временному представлению. При увеличении длины волны мы в конце концов оказываемся не в состоянии выделить процесс испускания мягкого фотона, так как существенную роль начинает играть характер расположения окружающего вещества. Таким образом, в этой ситуации необходимо знать подробнее, чем обычно, условия эксперимента. В наиболее яркой форме это обстоятельство проявляется, когда мы пользуемся фотонным источником (11.55) для вычисления среднего числа фотонов, испущенных вместе с данной частицей, которое равно

$$\langle N\rangle=\sum_{k\lambda}|J_{k\lambda}|^2=\int d\omega_k J^{\mu}(k)^*\,J_{\mu}(k)=e^2\int d\omega_k\left(\frac{p}{pk}-\frac{n}{nk}\right)^2. \qquad (11.56)$$

Чтобы выяснить суть дела, достаточно рассмотреть медленно движущуюся частицу, для которой

$$p^0 \approx m + \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2, \qquad \mathbf{p} = m\mathbf{v}, \qquad |\mathbf{v}| \ll 1, \tag{11.57}$$

выбрав при этом систему координат, где вектор n^μ имеет только временную компоненту $n^0 = 1$. В таком случае компоненты векторной комбинации, входящей в формулу (11.56), приближенно будут такими:

$$\begin{aligned} &\frac{p^0}{pk} - \frac{n^0}{nk} \approx \frac{1}{k^0}\left[1 - \frac{1}{1 - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}/k^0)}\right] \approx -\frac{1}{k^0}\mathbf{v}\cdot\frac{\mathbf{k}}{k^0}, \\ &\frac{\mathbf{p}}{pk} - \frac{\mathbf{n}}{nk} \approx -\frac{1}{k^0}\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{11.58}$$

Написав

$$d\omega_k = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{k}}{2k^0} = \frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}k^0\,dk^0, \tag{11.59}$$

где $d\Omega$ — телесный угол, в котором распространяется фотон, мы получим

$$\langle N\rangle = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)\frac{1}{\pi}\int\frac{dk^0}{k^0}\int\frac{d\Omega}{4\pi}\left[\mathbf{v}^2 - \left(\mathbf{v}\cdot\frac{\mathbf{k}}{k^0}\right)^2\right] = \frac{2\alpha}{3\pi}\mathbf{v}^2\int\frac{dk^0}{k^0}. \tag{11.60}$$

С математической точки зрения этот интеграл по энергии фотона не существует, так как он расходится и на верхнем и на нижнем пределах. Но, очевидно, существуют какие-то физические ограничения сверху и снизу. Так, когда достигается энергия, при которой фотон перестает быть мягким, формула (11.60) оказывается неприменимой. Нижний же предел соответствует минимальной энергии фотона, которую можно детектировать экспериментально. Одно время математическая расходимость при нулевой энергии понималась буквально, и такого рода явление, свойственное мягким фотонам, получило название «инфракрасной катастрофы». Но на соответствующей шкале катастроф она оценивается весьма низко. Найдем разницу в значении $\langle N\rangle$, возникающую в зависимости от того, имеет ли фотон длину волны видимого света $\sim 10^{-5}$ см или длину волны, сравнимую с номинальным радиусом Вселенной $\sim 10^{28}$ см. Поскольку $\mathbf{v}^2 < 1$, для этой разницы имеем

$$\Delta\langle N\rangle < \frac{2\alpha}{3\pi}\ln 10^{33} \sim 0{,}1! \tag{11.61}$$

Если радиус Вселенной заменить типичным лабораторным масштабом, то рассматриваемая величина снизится до $\sim 10^{-2}$.

Для иллюстрации анализа отличных от нуля значений спина мы рассмотрим случай спина $^1/_2$, используя функцию Лагранжа

(10.63). При этом ток (3.11) заменяется током

$$j^{\mu}_{12}(\xi) = e\psi_1(\xi)\gamma^0\gamma^{\mu}q\psi_2(\xi) + \frac{e}{2m}\left(\frac{1}{2}g-1\right)\partial_{\nu}\left[\psi_1(\xi)\gamma^0\sigma^{\mu\nu}q\psi_2(\xi)\right] -$$

$$- \int (dx) f^{\mu}(\xi - x)\psi_1(x)\gamma^0 ieq\eta_2(x), \qquad (11.62)$$

причем решением уравнения

$$\left(\gamma\frac{1}{i}\partial + m\right)\psi_2(x) = \eta_2(x) \qquad (11.63)$$

в импульсном пространстве является функция

$$\psi_2(P) = \frac{m-\gamma P}{P^2+m^2}\eta_2(P). \qquad (11.64)$$

Сравнение с процессом обмена одной свободной частицей и одним свободным фотоном, которому отвечает амплитуда вероятности

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{J\eta} = 1 + \ldots + i\int (d\xi) A^{\mu}_1(\xi) J_{2\mu}(\xi)\, i\int (dx)\psi_1(x)\gamma^0\eta_2(x) + \ldots, \qquad (11.65)$$

дает нам эффективный двухчастичный источник, описывающий испускание частиц обобщенным источником:

$$iJ_2(\xi)\eta_2(x)|_{\text{эфф}} = \delta(x-\xi)\gamma^{\mu}eq\psi_2(x) +$$

$$+ \frac{e}{2m}\left(\frac{1}{2}g-1\right)\frac{\partial}{\partial\xi^{\nu}}\delta(x-\xi)\sigma^{\mu\nu}q\psi_2(x) - f^{\mu}(\xi-x)\, ieq\eta_2(x). \qquad (11.66)$$

Его эквивалентом в импульсном пространстве будет величина

$$iJ^{\mu}_2(k)\eta_2(p)|_{\text{эфф}} = \left[\gamma^{\mu}eq + \frac{e}{2m}\left(\frac{1}{2}g-1\right)\sigma^{\mu\nu}ik_{\nu}q\right]\psi_2(P) -$$

$$- f^{\mu}(k)\, ieq\eta_2(P) = \left[\left(\gamma^{\mu} + \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2}g-1\right)\sigma^{\mu\nu}ik_{\nu}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{m-\gamma P}{P^2+m^2} - if^{\mu}(k)\right] eq\eta_2(P). \qquad (11.67)$$

Взяв последнее выражение, заметив, что

$$ik_{\mu}J^{\mu}_2(k)\eta_2(p)|_{\text{эфф}} = \left[\gamma k\frac{m-\gamma P}{P^2+m^2} - 1\right] eq\eta_2(P), \qquad (11.68)$$

и написав

$$\gamma k = \gamma P + m - (\gamma p + m), \qquad (11.69)$$

получим, что

$$ik_{\mu}J^{\mu}_2(k)\eta_2(p)|_{\text{эфф}} = -(\gamma p + m)\frac{m-\gamma P}{P^2+m^2}eq\eta_2(P), \qquad (11.70)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\mu} J^\mu(\xi)\,\eta_2(x)\,|_{\text{эфф}} = -\left[\gamma^\mu \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + m\right]\delta(\xi - x)\,eq\psi_2(x). \quad (11.71)$$

Однако при использовании этого равенства следует иметь в виду равенство (11.65), в котором поле $\psi_1(x)$ отвечает частицам, находящимся вдали от детектирующего их источника. Поэтому, как и требуется, действие дифференциального оператора Дирака в (11.71) будет давать нуль. Можно поступить и иначе — взять выражение (11.70) и учесть, что

$$\psi_1(x) = \sum_{p\sigma q} i\eta^*_{1p\sigma q}\,(2m\,d\omega_p)^{1/2}\,e^{-ipx}u^*_{p\sigma q}, \quad (11.72)$$

где

$$u^*_{p\sigma q}\gamma^0\,(\gamma p + m) = 0. \quad (11.73)$$

Поскольку для упрощения (11.67) пригодны оба сомножителя, входящие в формулу (11.65), мы приведем также аналог разложения (11.72), соответствующий фотонам:

$$A^\mu_1(\xi) = \sum_{k\lambda} iJ_{1k\lambda}\,(d\omega_k)^{1/2}\,e^{-ik\xi}e^{\mu*}_{k\lambda}, \quad (11.74)$$

где

$$e^{\mu*}_{k\lambda}k_\mu = 0. \quad (11.75)$$

Далее все основывается на алгебраическом тождестве

$$\begin{aligned}\gamma^\mu(m - \gamma P) &= \gamma^\mu(m - \gamma p) - \gamma^\mu\gamma k = \\ &= 2p^\mu + \sigma^{\mu\nu}ik_\nu + [(\gamma p + m)\gamma^\mu + k^\mu], \end{aligned}\quad (11.76)$$

в котором оба слагаемых в квадратных скобках в нашем случае можно отбросить. Аналогично

$$-\sigma^{\mu\nu}ik_\nu\gamma k = (\gamma^\mu\gamma k + k^\mu)\,\gamma k = [k^\mu\gamma k], \quad (11.77)$$

так как $k^2 = 0$, и

$$\begin{aligned}\sigma^{\mu\nu}ik_\nu(m - \gamma p) &= 2m\sigma^{\mu\nu}ik_\nu - 2kp\gamma^\mu + 2p^\mu\gamma k - \\ &- [(\gamma p + m]\,\sigma^{\mu\nu}ik_\nu], \end{aligned}\quad (11.78)$$

где также в квадратные скобки заключены члены, не дающие вкладов. В результате мы будем иметь

$$\begin{aligned} iJ^\mu_2(k)\,\eta_2(p)\,|_{\text{эфф}} = \Big[&\frac{p^\mu}{kp} - if^\mu(k) + \frac{1}{2}g\frac{\sigma^{\mu\nu}ik_\nu}{2kp} + \\ &+ \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2}g - 1\right)\left(\frac{p^\mu}{kp}\gamma k - \gamma^\mu\right)\Big]\,eq\eta_2(P). \end{aligned}\quad (11.79)$$

Здесь можно также произвести подстановку

$$\frac{p^\mu}{kp}\gamma k - \gamma^\mu \to \frac{i}{m}\left[\sigma^{\mu\nu}p_\nu - \frac{p^\mu}{kp}\sigma^{\varkappa\lambda}k_\varkappa p_\lambda\right], \quad (11.80)$$

основанную на равенстве

$$m\gamma^{\mu}-p^{\mu}+\sigma^{\mu\nu}ip_{\nu}=[(\gamma p+m)\,\gamma^{\mu}]. \tag{11.81}$$

Очевидно, что в пределе мягких фотонов существует эффективный фотонный источник, совпадающий с тем, с которым мы уже встречались в случае нулевого спина. Того же следует ожидать и при любом другом значении спина. Эффекты, обусловленные действием последовательных мультипольных моментов, содержат возрастающие степени импульса фотона, и поэтому в случае достаточно мягких фотонов всеми ими можно пренебречь по сравнению с излучением, которое обязано ускорению заряда. Но при специальном выборе функции $f^{\mu}(k)$, исключающем это излучение, испускание фотонов теперь уже не будет подавляться полностью, так как в формуле (11.79) останутся зависящие от спина эффекты, связанные с магнитными дипольными моментами, причем никаким подбором величины g обратить оба слагаемых в нуль не удается.

Мы проиллюстрировали понятие обобщенного источника в случае процессов испускания. Весь анализ можно полностью повторить и в том случае, когда действие обобщенного источника сводится к поглощению частицы и фотона. Но такие прямые и обратные процессы связаны также TCP-преобразованием, о котором мы давно уже не говорили. Преобразование координат

$$\bar{x}_{\mu}=-x_{\mu}, \tag{11.82}$$

основанное на рассмотрении евклидова представления, приводит к следующему закону преобразования источников и полей:

$$\begin{aligned}&\bar{J}_{\mu}(\bar{x})=-J_{\mu}(x), \qquad \bar{A}_{\mu}(\bar{x})=-A_{\mu}(x),\\ &\bar{F}_{\mu\nu}(\bar{x})=F_{\mu\nu}(x),\end{aligned} \tag{11.83}$$

а для спина $^1/_2$ — к закону

$$\bar{\eta}(\bar{x})=\gamma_5\eta(x), \qquad \bar{\psi}(\bar{x})=\gamma_5\psi(x). \tag{11.84}$$

Зависящий от поля источник

$$\eta^{A}(x)=\exp\left[ieq\int(d\xi)\,f^{\mu}(x-\xi)\,A_{\mu}(\xi)\right]\eta(x) \tag{11.85}$$

будет обладать теми же трансформационными свойствами, что и $\eta(x)$, если

$$-f^{\mu}(-x)=f^{\mu}(x). \tag{11.86}$$

Наконец-то у нас появился какой-то физический базис под требованием симметрии, которое до сих пор выдвигалось из соображений удобства. Чисто электромагнитная часть действия сохраняет свою форму при указанном преобразовании:

$$\int (dx) \left[J^{\mu}(x) A_{\mu}(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)\right] = \\ = \int (dx) \left[\bar{J}^{\mu}(x) \bar{A}_{\mu}(x) - \frac{1}{4} \bar{F}^{\mu\nu}(x) \bar{F}_{\mu\nu}(x)\right], \qquad (11.87)$$

тогда как вклад от частиц, с учетом и члена взаимодействия, изменяет свой знак на обратный:

$$\int (dx) \left\{\eta^A(x) \gamma^0 \psi(x) - \frac{1}{2} \psi(x) \gamma^0 \left[\gamma^{\mu}(-i\partial_{\mu} - eqA_{\mu}(x)) + m - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{e}{2m}\left(\frac{1}{2} g - 1\right) \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)\right] \varphi(x)\right\} = \\ = - \int (dx) \left\{\bar{\eta}^A(x) \gamma^0 \bar{\psi}(x) - \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^0 \left[\gamma^{\mu}(-i\partial_{\mu} - eq\bar{A}_{\mu}(x)) + m - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{e}{2m}\left(\frac{1}{2} g - 1\right) \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}(x)\right] \bar{\psi}(x)\right\}. \qquad (11.88)$$

Но полное TCP-преобразование подразумевает также обращение порядка всех сомножителей. Антикоммутативность источников и полей, которые отвечают спину $^1/_2$, т. е. частицам, подчиняющимся статистике Ферми — Дирака, приводит к дополнительному знаку минус, необходимому для того, чтобы обеспечить предполагаемую инвариантность действия относительно TCP-преобразования.

Названное преобразование обращает причинную последовательность, заменяя при этом процессы испускания процессами поглощения, и наоборот. Применив преобразование к источнику (11.66), мы сразу же увидим, что его структура в целом сохранится и достаточно лишь заменить причинные индексы. То же самое относится, конечно, и к источнику (11.67), написанному в импульсном представлении, за исключением того, что мы следуем установившемуся порядку и при описании процессов поглощения производим замену знаков у всех импульсов, которая автоматически обеспечивается рассматриваемым преобразованием. Соответствующие утверждения, которые были продемонстрированы на примере спина $^1/_2$, справедливы и в самом общем случае.

§ 12. СКЕЛЕТНАЯ СХЕМА ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ, ЭФФЕКТИВНЫЕ СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ

Рассматривавшееся в § 10 примитивное взаимодействие приводит к системе зацепляющихся полевых уравнений. Так, например, в случае фотона и заряженной частицы со спином $^1/_2$ она имеет вид

$$[\gamma(-i\partial - eqA(x)) + m] \psi(x) = \eta^A(x), \\ -\partial^2 A^{\mu}(x) + \partial^{\mu} \partial A(x) = J^{\mu}(x) + \frac{1}{2} \psi(x) \gamma^0 \gamma^{\mu} eq \psi(x) - \\ - \int (dx') f^{\mu}(x - x') \psi(x') \gamma^0 ieq \eta^A(x'), \qquad (12.1)$$

где для простоты мы ограничились случаем $^1/_2 g = 1$. В силу нелинейности такой системы поля, выраженные через источники, будут иметь вид бесконечных двойных степенных рядов. Такую же структуру будет иметь и действие, если исключить поля и представить W в виде функционала источников. Последовательные члены $W_{n\nu}$ соответствующего ряда, содержащие n источников частиц и ν источников фотонов, описывают все более и более сложные процессы. Таким образом, признается, что подобные процессы имеют место, но их окончательное описание на этом первом уровне теории не дается. Это и составляет суть скелетной схемы взаимодействий. На последующих этапах развития динамической теории дается более полное описание процессов, уже представленных в скелетной форме, и выявляются некоторые дополнительные процессы. В данном параграфе мы намерены рассмотреть простейшие члены в скелетной схеме взаимодействий, доведя при этом анализ до такой степени, чтобы установить, к каким экспериментально наблюдающимся эффектам они приводят.

Поля можно исключить двумя асимметричными способами. Первый из них — ввести формальное решение полевых уравнений для частицы:

$$\psi^A(x) = \int (dx') G_+^A(x, x') \eta^A(x'),$$
$$[\gamma(-i\partial - eqA(x)) + m] G_+^A(x, x') = \delta(x - x'), \tag{12.2}$$

которое дает следующее выражение для укороченного действия:

$$W = \int (dx) \left[J^\mu A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] + \\ + \frac{1}{2} \int (dx)(dx') \eta^A(x) \gamma^0 G_+^A(x, x') \eta^A(x'). \tag{12.3}$$

Требование стационарности по отношению к вариациям величины A_μ вновь приводит к уравнениям Максвелла (12.1), в которых $\psi(x)$ дается равенством (12.2), т. е. к уравнениям для векторного потенциала, в высшей степени нелинейным. Но величину A_μ можно исключить из источников, выбрав специальную калибровку потенциалов A_μ^f.

Второй способ следует особенно рекомендовать в том случае, когда мы пользуемся другой возможностью и исключаем векторный потенциал, заменяя его величиной

$$A_\mu^f(x) = \int (dx') D_+(x - x') [J^\mu(x) + j^\mu_{\text{сохр}}(x)] + \partial_\mu \lambda(x), \tag{12.4}$$

где

$$j^\mu_{\text{сохр}}(x) = j^\mu(x) - \int (dx') f^\mu(x - x') \partial'_\nu j^\nu(x'), \tag{12.5}$$

а из калибровочного условия следует, что функция $\lambda(x)$ имеет вид

$$\lambda(x) = -\int (dx')(dx'')\, f_\mu(x-x')\, D_+(x'-x'') \times \\ \times [J^\mu(x'') + j^\mu_{\text{сохр}}(x'')]. \qquad (12.6)$$

Этот потенциал можно представить и в другой форме (теперь J^ν — произвольный вектор):

$$A^f_\mu(x) - \int (dx')\, D^f_+(x-x')_{\mu\nu}\, [J^\nu(x') + j^\nu(x')], \qquad (12.7)$$

где величина

$$D^f_+(k)_{\mu\nu} = [g_{\mu\varkappa} - ik_\mu f_\varkappa(k)]\, g^{\varkappa\lambda} D_+(k)\, [g_{\lambda\nu} - f_\lambda(k)\, ik_\nu] = \\ = [g_{\mu\nu} - ik_\mu f_\nu(k) - f_\mu(k)\, ik_\nu - k_\mu k_\nu f^\lambda(k)\, f_\lambda(k)] \times \\ \times D_+(k) \qquad (12.8)$$

есть функция Грина уравнений Максвелла второго порядка, которая удовлетворяет калибровочному условию

$$f^\mu(k)\, D^f_+(k)_{\mu\nu} = 0 \qquad (12.9)$$

и которая для простоты записана в импульсном пространстве. Второе укороченное выражение для действия можно написать в виде

$$W = \int (dx) \left[\eta\gamma^0\psi - \frac{1}{2}\psi\gamma^0(-i\gamma\partial + m)\psi \right] + \\ + \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\, [J^\mu(x) + j^\mu_{\text{сохр}}(x)] \times \\ \times D_+(x-x')\, [J_\mu(x') + j_{\mu\,\text{сохр}}(x')] \qquad (12.10)$$

или же в эквивалентной форме, с использованием несохраняющихся токов и функции $D^f_+(x-x')_{\mu\nu}$. Нелинейное полевое уравнение для ψ, получающееся из этого действия, совпадает с уравнением (12.1), если в последнем A_μ заменить величиной (12.4) или (12.7).

Какой из двух асимметричных способов более удобен, зависит от интересующего нас процесса. Допустим, например, что никаких фотонов нет. Тогда можно положить в формуле (12.10) $J^\mu = 0$ и исследовать нелинейности, свойственные полю частиц. Если причинные связи таковы, что взаимодействия происходят вдали от источников, испускающих и детектирующих частицы (такие условия характерны для экспериментов по рассеянию), то в токе $j^\mu_{\text{сохр}}$ можно отбросить член с f^μ, причинно связанный с источником. Член взаимодействия в формуле (12.10) содержит четыре поля частицы, а следовательно, по крайней мере четыре сомножителя с источниками. Когда мы рассматриваем процессы типа рассеяния частицы на частице, в которых участвуют только четыре источника, стационарность действия позволяет нам отождествить ψ с полем невзаимодействующих частиц:

$$\psi(x) = \int (dx')\, G_+(x - x')\, \eta(x'). \tag{12.11}$$

Действительно, при этом опускаются следующие члены разложения более полного решения эффективного полевого уравнения

$$(-i\gamma\partial + m)\,\psi(x) - eq\gamma^\mu\psi(x) \int (dx')\, D_+(x - x') \times \\ \times \frac{1}{2}\,\psi(x')\,\gamma^0\gamma_\mu eq\psi(x') = \eta(x), \tag{12.12}$$

которые по крайней мере кубичны по источнику. Поскольку же эффекты первого порядка, связанные с изменением поля, обращаются в нуль в силу стационарности действия, остаточный член в выражении для W будет содержать источник не менее чем в шестой степени. Таким образом, мы определили

$$W_{40} = \frac{1}{2} \int (dx)(dx')\, j^\mu(x)\, D_+(x - x')\, j_\mu(x'), \tag{12.13}$$

где

$$j^\mu(x) = \frac{1}{2}\,\psi(x)\,\gamma^0\gamma^\mu eq\psi(x), \tag{12.14}$$

причем $\psi(x)$ — это поле, даваемое формулой (12.11). Аналогичные результаты получим и при любом другом значении спина. Так, например, для бесспиновых частиц

$$j^\mu(x) = i\partial^\mu\varphi(x) eq\varphi(x), \tag{12.15}$$

а

$$\varphi(x) = \int (dx')\, \Delta_+(x - x')\, K(x'). \tag{12.16}$$

Процессы, в которые вовлекаются только два источника частиц, но произвольное число источников фотонов, удобнее всего описывать действием (12.3). Принцип стационарного действия позволяет отождествить A_μ с полем фотонного источника J_μ, опустив при этом ток j^μ, который по крайней мере квадратичен по источникам частиц и изменяет те члены в W, которые содержат не менее четырех источников частиц. Таким образом, вся совокупность членов $W_{2\nu}$, содержащихся в скелетном взаимодействии, дается равенством

$$W_{2\ldots} = \frac{1}{2} \int (dx)(dx')\, \eta(x)\, \gamma^0 G_+^A(x, x')\, \eta(x'), \tag{12.17}$$

причем

$$A^\mu(x) = \int (dx')\, D_+(x - x')\, J^\mu(x'). \tag{12.18}$$

Символ векторного потенциала у источника частиц мы опустили, так как подразумевается, что действие (12.7) будет применяться к процессам, в которых $\eta(x)$ выступает в качестве простого источника частиц, т. е. что все взаимодействия частиц с фотонами происходят вдали ото всех источников. Чтобы получить отдельные члены $W_{2\nu}$, мы должны разложить $G_+^A(x, x')$ в ряд по степеням A^μ и выделить члены, содержащие ν векторных потенциалов. Для этого можно переписать уравнение (12.2) для функции Грина в виде

$$(-\gamma i\partial + m)\, G_+^A(x, x') = \delta(x - x') + eq\gamma A(x)\, G_+^A(x, x'). \qquad (12.19)$$

Решив его формально, мы получим интегральное уравнение

$$G_+^A(x, x') = G_+(x - x') + \int (d\xi)\, G_+(x - \xi)\, eq\gamma A(\xi)\, G_+^A(\xi, x'). \qquad (12.20)$$

Степенной ряд, который мы хотим построить, можно теперь получить из этого уравнения путем итераций. Но подобные выкладки сильно упрощаются, если ввести матричные обозначения, в которых координаты x и x' объединяли бы дискретные спинорные и зарядовые индексы и представлялись в виде непрерывных индексов, нумерующих строки и столбцы. Таким образом, мы переписываем (12.20) в форме

$$G_+^A = G_+ + G_+ eq\gamma A G_+^A, \qquad (12.21)$$

записывая формальное решение этого матричного уравнения в виде

$$G_+^A = (1 - G_+ eq\gamma A)^{-1}\, G_+. \qquad (12.22)$$

Итак, в компактной формулировке искомое разложение выглядит следующим образом:

$$G_+^A = \sum_{\nu=0} (G_+ eq\gamma A)^\nu\, G_+ =$$
$$= G_+ + G_+ eq\gamma A G_+ + G_+ eq\gamma A G_+ eq\gamma A G_+ + \ldots . \qquad (12.23)$$

Теперь мы можем вернуться к выражению (12.17) и написать один за другим все члены $W_{2\nu}$. Проделав это, мы обнаружим, что каждый источник частиц умножается на функцию распространения G_+, в результате чего возникает поле ψ (12.11):

$$W_{21} = \frac{1}{2} \int (dx)\, \psi(x)\, \gamma^0 eq\gamma A(x)\, \psi(x),$$
$$W_{22} = \frac{1}{2} \int (dx)(dx')\, \psi(x)\, \gamma^0 eq\gamma A(x)\, G_+(x - x') \times$$
$$\times\, eq\gamma A(x')\, \psi(x'), \qquad (12.24)$$
$$W_{23} = \frac{1}{2} \int (dx)(dx')(dx'')\, \psi(x)\, \gamma^0 eq\gamma A(x)\, G_+(x - x') \times$$
$$\times\, eq\gamma A(x')\, G_+(x' - x'')\, eq\gamma A(x'')\, \psi(x'').$$

Аналогом действия (12.17) для спина 0 будет действие

$$W_{2\ldots}=\frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,K(x)\,\Delta_+^A(x,\ x')\,K(x'), \qquad (12.25)$$

причем дифференциальное уравнение (11.36) для функции Грина будет иметь вид

$$(-\partial^2+m^2)\,\Delta_+^A(x,\ x')=\delta(x-x')+$$
$$+\frac{1}{i}\,\partial^\mu\,[eqA_\mu(x)\,\Delta_+^A(x,\ x')]+eqA_\mu(x)\,\frac{1}{i}\,\partial^\mu\Delta_+^A(x,\ x')-$$
$$-e^2A^\mu(x)\,A_\mu(x)\,\Delta_+^A(x,\ x'). \qquad (12.26)$$

Эквивалентное ему интегральное уравнение имеет следующий символический вид:

$$\Delta_+^A=\Delta_++\Delta_+\,[eq\,(pA+Ap)-e^2A^2]\,\Delta_+^A; \qquad (12.27)$$

его формальным решением будет функция

$$\begin{aligned}\Delta_+^A &= \{1-\Delta_+\,[eq\,(pA+Ap)-e^2A^2]\}^{-1}\,\Delta_+ = \\ &= \Delta_++\Delta_+\,[eq\,(pA+Ap)-e^2A^2]\,\Delta_++ \\ &+\Delta_+\,[eq\,(pA+Ap)-e^2A^2]\,\Delta_+\,[eq\,(pA+Ap)- \\ &-e^2A^2]\,\Delta_++\ldots . \end{aligned} \qquad (12.28)$$

Возрастающие степени величины A^μ записываются здесь не столь изящно, как в случае спина $^1/_2$. Первые два члена последовательности $W_{2\nu}$ имеют вид

$$W_{21}=\frac{1}{2}\int (dx)\,\varphi(x)\,eq\,[pA(x)+A(x)\,p]\,\varphi(x),$$
$$W_{22}=\frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,\varphi(x)\,eq\,[pA(x)+A(x)\,p]\,\Delta_+(x-x')\times \qquad (12.29)$$
$$\times\,eq\,[pA(x')+A(x')\,p]\,\varphi(x')-\frac{1}{2}\int (dx)\,\varphi(x)\,e^2A^2(x)\,\varphi(x),$$

где мы сочли целесообразным сохранить символ p, введя обозначение

$$p_\mu=-i\,\partial_\mu. \qquad (12.30)$$

Отметим, что выполняется равенство

$$pA\,(x)-A\,(x)\,p=-i\,\partial_\mu A^\mu\,(x). \qquad (12.31)$$

Оно означает, что если четырехмерная дивергенция векторного потенциала обращается в нуль, как это происходит в случае (12.18), то о порядке следования сомножителей можно особенно не заботиться. О потенциалах, обладающих таким свойством, говорят, что они удовлетворяют калибровочному условию Лоренца.

Все изложенное было подготовкой к тому, чтобы прямо применить скелетную схему взаимодействий при анализе процессов рассеяния. Поэтому установим в общем виде связь между источниками и вероятностями переходов, которые характеризуют эффекты взаимодействия частиц. Причинные условия таковы. Действие испускающих источников, относящихся, вообще говоря, к разным типам частиц, приводит к образованию некоторого многочастичного состояния, в котором взаимодействие между частицами отсутствует, так как в начальной стадии процесса они удалены друг от друга. По прошествии достаточно большого промежутка времени некоторые из этих частиц сближаются, взаимодействуют, а затем вновь расходятся и вместе с другими свободными частицами в конечном итоге поглощаются детектирующими источниками. В такой ситуации причинное разложение имеет вид

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{S_1+S_2} = \sum_{\{n\},\{n'\}} \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{S_1} \langle \{n\} | \{n'\} \rangle \langle \{n'\} | 0_- \rangle^{S_2}, \tag{12.32}$$

где отдельные амплитуды вероятностей $\langle \{n\} | \{n'\} \rangle$ описывают переходы, обусловленные взаимодействиями между частицами, а амплитуды

$$\begin{aligned} \langle \{n\} | 0_- \rangle^{S} &= \langle 0_+ | 0_- \rangle \prod_a \frac{(iS_a)^{n_a}}{(n_a!)^{1/2}}, \\ \langle 0_+ | \{n\} \rangle^{S} &= \prod_a^T \frac{(iS_a^*)^{n_a}}{(n_a!)^{1/2}} \langle 0_+ | 0_- \rangle^{S} \end{aligned} \tag{12.33}$$

описывают многочастичные состояния в отсутствие взаимодействия. Последние задаются числами частиц во всевозможных одночастичных состояниях, причем произведения распространяются на все различные типы частиц, которые могут подчиняться любой из двух возможных статистик. Рассматриваемую в качестве производящей функции для амплитуд вероятностей величину (12.32) удобнее представить в форме

$$\frac{\langle 0_+ | 0_- \rangle^{S_1+S_2}}{\langle 0_+ | 0_- \rangle^{S_1} \langle 0_+ | 0_- \rangle^{S_2}} = \sum \frac{\langle 0_+ | \{n\} \rangle^{S_1}}{\langle 0_+ | 0_- \rangle^{S_1}} \langle \{n\} | \{n'\} \rangle \frac{\langle \{n'\} | 0_- \rangle^{S_2}}{\langle 0_+ | 0_- \rangle^{S_2}}, \tag{12.34}$$

так как в этом случае члены с различными степенями испускающих и детектирующих источников позволяют провести непосредственное отождествление начальных и конечных состояний.

Вакуумная амплитуда вероятности определяется действием

$$W(S) = \frac{1}{2} \int S \gamma G S + W'(S), \tag{12.35}$$

где мы особо выделили в символической форме записи квадратичную структуру, отвечающую невзаимодействующим частицам. В это выражение входят все рассматриваемые типы частиц, так что S используется в качестве некоторого суперисточника. Исключив из обеих частей равенства (12.34) величины, относящиеся к невзаимодействующим частицам, мы получим

$$\exp\left(i\int S_1\gamma G S_2\right)[\exp(iW'(S_1,\ S_2))-1]=$$
$$=\sum\left[\prod^T\frac{(iS^*_{1a})^{n_a}}{(n_a!)^{1/2}}\right]\langle\{n\}|\{n'\}\rangle-\delta(\{n\},\ \{n'\})]\times$$
$$\times\left[\prod\frac{(iS_{2a})^{n'_a}}{(n'_a!)^{1/2}}\right],\qquad(12.36)$$

где

$$W'(S_1,\,S_2)=W'(S_1+S_2)-W'(S_1)-W'(S_2).\quad(12.37)$$

Множитель $\exp\,[i\int S_1\gamma G S_2]$ описывает обмен невзаимодействующими частицами, а высшими степенями в разложении экспоненты $\exp\,[iW']$ определяется вероятность процессов, при которых в отдельных областях пространства-времени независимым образом все конфигурации взаимодействующих частиц повторяются. Таким образом, неприводимые процессы взаимодействия, т. е. процессы, которые не содержат дополнительных невзаимодействующих частиц и которые не могут быть разложены на несвязанные процессы, полностью определяются величиной

$$iW'(S_1,S_2)=\sum\left[\prod^T\frac{(iS^*_{1a})^{n_a}}{(n_a!)^{1/2}}\right]\langle\{n\}|\{n'\}\rangle_{\text{непр}}\left[\prod\frac{(iS_{2a})^{n'_a}}{(n'_a!)^{1/2}}\right].\quad(12.38)$$

Из свойств инвариантности действия вытекают правила отбора для вероятностей переходов. Так, например, трансляции системы как целого или постоянные фазовые преобразования, не изменяющие величины $W'(S_1,\,S_2)$, должны оставлять неизменной и правую часть (12.38). Произведения испускающих и поглощающих источников приобретают постоянные фазы с противоположными знаками, которые в рассматриваемых примерах отвечают импульсу и заряду. Если эти постоянные фазы не компенсируют друг друга, то отдельные вероятности переходов должны обращаться в нуль, в чем находит свое выражение необходимое сохранение импульса или заряда в процессах взаимодействия. Множитель, к которому приводит сохранение импульса, т. е. соотношение

$$\sum_a n_a p_a^\mu = \sum_a n'_a p_a^\mu, \qquad (12.39)$$

будет возникать в результате пространственно-временного интегрирования по области взаимодействия. Мы выделим его в явном виде и напишем

$$\langle\{n\}|\{n'\}\rangle_{\text{непр}} = \left[\int (dx) \exp\left(i \sum_a (n'_a - n_a) p_a x\right)\right] i \langle\{n\}|T|\{n'\}\rangle, \quad (12.40)$$

определяя тем самым элементы матрицы перехода T. Входящий сюда интеграл не равен четырехмерной дельта-функции, так как область интегрирования не бесконечна. В самом деле, нужно вспомнить, что, приписывая здесь отдельным импульсам строго определенные значения, мы прибегаем к некоторой идеализации, которая вполне приемлема внутри пучка частиц, но теряет свою силу вблизи его границ. В области, где начальный пучок перекрывается с конечным (т. е. в причинно-определенной области взаимодействия), равенство (12.40) применимо, и, ограничиваясь интегрированием только по конечному объему этой области, мы приближенно учитываем особенности реальной ситуации. Физический смысл имеет вероятность, и нас фактически интересует величина

$$\left|\int (dx) \exp\left[i \sum (n'_a - n_a) p_a x\right]\right|^2 =$$
$$= \int (dx)(dx') \exp\left[i \sum (n'_a - n_a) p_a (x - x')\right] =$$
$$= \int (dX)(d\xi) \exp\left[i \sum (n'_a - n_a) p_a \xi\right], \qquad (12.41)$$

где

$$X^\mu = \frac{1}{2}(x^\mu + x^{\mu\prime}), \qquad \xi^\mu = x^\mu - x^\mu. \qquad (12.42)$$

Интеграл по ξ можно теперь отождествить с дельта-функцией, а интеграл по X с точностью, с которой фиксируется граничный слой, равен полному объему взаимодействия V. То, что вероятность перехода пропорциональна объему четырехмерной области взаимодействия, указывает на важную роль соответствующего коэффициента пропорциональности, который равен вероятности перехода, отнесенной к единице четырехмерного объема, или же вероятности перехода в единицу времени в единичном трехмерном объеме. Эта величина равна

$$|\langle\{n\}|\{n'\}\rangle_{\text{непр}}|^2 V^{-1} =$$
$$= (2\pi)^4 \delta\left[\Sigma (n_a - n'_a) p_a\right] |\langle\{n\}|T|\{n'\}\rangle|^2, \qquad (12.43)$$

что может служить основанием для физической интерпретации матрицы перехода.

Переходя к конкретным скелетным взаимодействиям, мы начнем с бесспиновых частиц, описываемых формулами (12.13), (12.15) и (12.16). Поле $\varphi(x)$ нужно брать в области взаимодействия, которая в смысле причинной последовательности лежит между испускающим источником $K_2(x)$ и детектирующим источником $K_1(x)$. Полное поле представляет собой суперпозицию отдельных полей, связанных с этими источниками:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \tag{12.44}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= i\int (dx')\,\Delta^{(-)}(x-x')\,K_1(x'), \\ \varphi_2(x) &= i\int (dx')\,\Delta^{(+)}(x-x')\,K_2(x'), \end{aligned} \tag{12.45}$$

причем выбор той или иной конкретной модификации функции $\Delta_+(x-x')$ определяется причинными связями. Мы будем исследовать процесс, в котором принимают участие два испускающих источника и два поглощающих. Поэтому, рассматривая величину (12.13) с током

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= i\partial^\mu\varphi_1(x)\,eq\varphi_1(x) + i\partial^\mu\varphi_2(x)\,eq\varphi_2(x) + i\partial^\mu\varphi_1(x)eq\varphi_2(x) - \\ &- \varphi_1(x)\,eqi\partial^\mu\varphi_2(x) = j^\mu_{11}(x) + j^\mu_{22}(x) + j^\mu_{12}(x), \end{aligned} \tag{12.46}$$

мы должны оставить только те вклады, которые имеют требуемый набор причинных индексов. Такими членами оказываются

$$\begin{aligned} W_{10} \to \frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,j^\mu_{12}(x)\,D_+(x-x')\,j_{12\mu}(x') + \\ + \int (dx)\,(dx')\,j^\mu_{11}(x)\,D_+(x-x')\,j_{22\mu}(x'), \end{aligned} \tag{12.47}$$

а все прочие комбинации содержат либо слишком много, либо слишком мало индексов, соответствующих испусканию или детектированию.

Ранее в случае заряженных бесспиновых частиц мы имели дело с комплексными источниками. Но, как показал опыт, например в случае спина $^1/_2$, удобнее сохранять вещественные мультиспинорные источники и брать для определенных значений заряда соответствующие комплексные проекции. Далее мы будем считать, что

$$K_{pq} = (d\omega_p)^{1/2}\,\alpha_q^* K(p), \tag{12.48}$$

где два комплексных собственных вектора зарядовой матрицы имеют вид

$$\alpha_+^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i), \qquad \alpha_-^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i). \tag{12.49}$$

Эти векторы обладают свойствами ортонормированности

$$\alpha_q^* \alpha_{q'} = \delta_{qq'} \tag{12.50}$$

и полноты

$$\sum \alpha_q \alpha_q^* = 1, \tag{12.51}$$

а что касается их связи с зарядовой матрицей

$$q = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{12.52}$$

то они удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_{q'}^* q = \alpha_{q'}^* q', \qquad q\alpha_{q'} = q'\alpha_{q'}. \tag{12.53}$$

Действие операции комплексного сопряжения дается равенством

$$\alpha_q^* = \alpha_{-q}. \tag{12.54}$$

Пользуясь введенными обозначениями, мы представим поля (12.45) в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \sum_{pq} iK_{1pq}^* \varphi_{pq}(x)^*, \\ \varphi_2(x) &= \sum_{pq} \varphi_{pq}(x)\, iK_{2pq}, \end{aligned} \tag{12.55}$$

где

$$\varphi_{pq}(x) = (d\omega_p)^{1/2} \alpha_q e^{ipx} \tag{12.56}$$

— поле, отвечающее определенной частице с квантовыми числами pq, которая порождается источником K_{2pq}, а затем входит в область взаимодействия. Точно так же $\varphi_{pq}(x)^*$ представляет собой поле частицы с квантовыми числами pq, которая покидает область взаимодействия, а затем поглощается источником K_{1pq}^*.

Существенное значение имеет зарядовая структура различных парциальных токов, образующих полный ток (12.46). Так, например, в токе $j_{22}^{\mu}(x)$ зарядовый множитель, соответствующий двум падающим частицам с зарядами q' и q'', равен

$$\alpha_{q'} q \alpha_{q''} = \alpha_{-q'}^* q\alpha_{q''} = q''\delta_{-q', q''}. \tag{12.57}$$

Как мы видим, он обращается в нуль, если не выполняется равенство $q' + q'' = 0$, т. е. в область взаимодействия вносится только нулевой заряд. Такое же требование к зарядам противоположных знаков предъявляется и в случае $j^{\mu}_{11}(x)$. Если же рассматривается $j^{\mu}_{12}(x)$, то зарядовый множитель, соответствующий заряду q'', входящему в область взаимодействия, и заряду q', покидающему ее, равен

$$\alpha^{*}_{q'} q \alpha_{q''} = q'' \delta_{q', q''}. \tag{12.58}$$

Отсюда следует равенство величин q' и q'', которое означает, что в области взаимодействия не может накапливаться никакого заряда. Сформулированные положения отвечают разным способам, которыми может выполняться требование сохранения заряда в процессах рассеяния. Второе слагаемое в формуле (12.47) не дает вклада в рассеяние частиц с одноименными зарядами, и мы сначала исследуем именно этот процесс.

Выражение для тока $j^{\mu}_{12}(x)$ имеет вид

$$j^{\mu}_{12}(x) = \sum_{p_1 p_2 q} iK^{*}_{1p_1 q} eq\,(p_1^{\mu} + p_2^{\mu})\,(d\omega_{p_1} d\omega_{p_2})^{1/2} e^{i(p_2 - p_1)x} iK_{2p_2 q}, \tag{12.59}$$

где можно узнать ток $eq2p^{\mu}\,d\omega_p$, приходящийся на одну частицу, которая не меняет состояния своего движения. Оставляя только вклады от падающих частиц с одним и тем же зарядом, получаем

$$W_{40} = \frac{1}{2} e^2 \sum iK^{*}_{1p_1 q} iK^{*}_{1p_1' q} (d\omega_{p_1} d\omega_{p_1'} d\omega_{p_2} d\omega_{p_2'})^{1/2} (p_1 + p_2)(p_1' + p_2') \times$$
$$\times \left[\int (dx)(dx')\, e^{i(p_2 - p_1)x} D_{+}(x - x')\, e^{i(p_2' - p_1')x'} \right] iK_{2p_2 q} iK_{2p_2' q}, \tag{12.60}$$

где наличие сомножителя

$$\int (dx)(dx')\, e^{i(p_2 - p_1)x} D_{+}(x - x')\, e^{i(p_2' - p_1')x'} =$$
$$= \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} \int (dx)\, e^{i(p_2 + p_2' - p_1 - p_1')x} \tag{12.61}$$

показывает, что в рассматриваемое выражение входит фотонная функция распространения $D_{+}(k) = (k^2)^{-1}$ в импульсном представлении, а также интеграл по пространственно-временным переменным, который с необходимостью приводит к сохранению энергии-импульса. Выделяя искомый матричный элемент T, мы должны учитывать то обстоятельство, что каждое из произведений источников $iK_{2p_2 q} iK_{2p_2' q}$ и $iK^{*}_{1p_1 q} iK^{*}_{1p_1' q}$, отвечающее определенной паре — в первом случае падающих, а во втором — рассеянных частиц,— можно записать двумя способами, которые соответствуют симметрии этих произведений по p_2, p_2' и p_1, p_1'. Таким образом, матричный элемент перехода будет обладать свойствами симметрии, характерными для статистики Бозе — Эйнштейна. Этот матричный элемент имеет вид

$$\langle 1_{p_1q}1_{p_1'q}\,|\,T\,|\,1_{p_2q}1_{p_2'q}\rangle =$$
$$= (d\omega_{p_1}\,d\omega_{p_1'}\,d\omega_{p_2}\,d\omega_{p_2'})^{1/2}\,e^2\left[\frac{(p_1+p_2)\,(p_1'+p_2')}{(p_1-p_2)^2}+\frac{(p_1+p_2')\,(p_1'+p_2)}{(p_1-p_2')^2}\right]. \tag{12.62}$$

Он явным образом симметричен по p_2 и p_2', а также обладает необходимой симметрией по p_1 и p_1', так как из сохранения полного импульса следует, что

$$p_1'-p_2=-(p_1-p_2'),\qquad p_1'-p_2'=-(p_1-p_2). \tag{12.63}$$

Экспериментальной мерой эффективности данного акта рассеяния, наблюдаемого в экспериментах по рассеянию, служит площадь, или эффективное сечение. При обычных условиях, когда мишень неподвижна, оно характеризует интенсивность рассматриваемого процесса в единицу времени в единичном пространственном объеме, отнесенную к потоку падающих частиц и к плотности рассеивателей. Множителями, соответствующими начальным частицам, мы можем распорядиться так, чтобы придать им общую форму, которая позволяла бы применять понятие эффективного сечения не только к неподвижным мишеням, но и к сталкивающимся пучкам. Обозначим через $s^{\mu}_{a,b}$ векторы потоков частиц для двух таких пучков. Инвариантная характеристика относительного потока подсказывается тем требованием, что эта величина должна обращаться в нуль, когда векторы пропорциональны друг другу, а скорости одинаковы. Такое определение имеет вид

$$F=[(s_as_b)^2-s_a^2s_b^2]^{1/2}, \tag{12.64}$$

что дает нам вещественную положительную величину, так как векторы потоков времени-подобны. Выразив ее через плотность частиц s^0 и скорость частиц $\mathbf{v}=\mathbf{s}/s^0$, мы придем к следующему определению потока:

$$F=s_a^0s_b^0\,[(1-\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{v}_b)^2-(1-\mathbf{v}_a^2)\,(1-\mathbf{v}_b^2)]^{1/2}=$$
$$=s_a^0s_b^0\,[(\mathbf{v}_a-\mathbf{v}_b)^2-(\mathbf{v}_a\times\mathbf{v}_b)^2]^{1/2}. \tag{12.65}$$

Если один из пучков представляет собой неподвижную мишень ($\mathbf{v}_b=0$), то эта величина сводится к произведению падающего потока на плотность частиц в мишени:

$$F=|\,\mathbf{s}_a\,|\,s_b^0. \tag{12.66}$$

Поскольку поток частиц, связанный с отдельной частицей, которая заключена в малой импульсной ячейке, равен

$$s^\mu = 2p^\mu\, d\omega_p, \tag{12.67}$$

мы будем применять (12.64) в форме

$$F = d\omega_a\, d\omega_b 4\, [(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2]^{1/2}, \tag{12.68}$$

куда вошли массы частиц. Можно пользоваться и другими формами записи, в частности выражением, в которое входит полная масса M, являющаяся инвариантной характеристикой полного импульса:

$$M^2 = -(p_a + p_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 - 2p_a p_b. \tag{12.69}$$

Соответствующее определение имеет вид

$$F = d\omega_a\, d\omega_b 2\, [M^2 - (m_a + m_b)^2]^{1/2}\, [M^2 - (m_a - m_b)^2]^{1/2}. \tag{12.70}$$

Отношение вероятности перехода в единичном объеме [см. формулу (12.43)] к инвариантному потоку (12.70) называется дифференциальным сечением. Оно называется дифференциальным потому, что импульсы конечных частиц лежат в малых интервалах, ограниченных законом сохранения импульса. Проводя интегрирование по таким дифференциальным элементам, мы будем получать всевозможные дифференциальные сечения, отвечающие все меньшей точности в задании динамических переменных. В конце концов мы придем к полному сечению, хотя оно может и не существовать, если чрезвычайно малые отклонения входят с непропорционально большим весом. Мы будем обозначать все дифференциальные сечения одним символом $d\sigma$, а их точный смысл можно будет определить по дифференциалам.

Сохранение энергии в двухчастичных процессах фиксирует энергии рассеянных частиц, оставляя свободными только два параметра, которые в системе с нулевым полным импульсом задают направление той прямой, вдоль которой движутся обе частицы. В добавление ко всему сказанному мы можем провести интегрирование по распределениям тех переменных, которые принимают строго определенные значения. Возьмем какую-нибудь пару частиц и вычислим интеграл

$$\int d\omega_a\, d\omega_b\, (2\pi)^4\, \delta\,(p_a + p_b - P) = \\ = \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{d\mathbf{p}_a}{p_a^0} \frac{d\mathbf{p}_b}{p^0_b}\, \delta\,(\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)\, \delta\,(p_a^0 + p_b^0 - M), \tag{12.71}$$

где вторая форма записи относится к системе покоя $P^\mu = 0$, в которой $P^0 = M$. Модуль вектора относительного импульса

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_a = -\mathbf{p}_b \tag{12.72}$$

дается выражением

$$|\mathbf{p}| = \frac{1}{2M}[M^2-(m_a+m_b)^2]^{1/2}[M^2-(m_a-m_b)^2]^{1/2}. \qquad (12.73)$$

При выполнении интегрирования по энергии, в процессе которого отбирается это значение, нужно учитывать, что

$$(d\mathbf{p}_a) = (d\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}|d\Omega = |\mathbf{p}|\frac{p_a^0 p_b^0}{M} d(p_a^0 + p_b^0)\, d\Omega, \qquad (12.74)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла для относительного импульса, и мы сразу же получаем

$$\int d\omega_a\, d\omega_b\, (2\pi)^4 \delta(p_a + p_b - P) = \\ = \frac{1}{32\pi^2}\frac{1}{M^2}[M^2-(m_a+m_b)^2]^{1/2}[M^2-(m_a-m_b)^2]^{1/2}\, d\Omega. \qquad (12.75)$$

В результате носителем дифференциальных характеристик становятся углы, задающие направление относительного импульса. Заметим, что в интеграл по конечным состояниям (12.75) и в выражение для падающего потока (12.70) входят одинаковые кинематические множители, имеющие вид квадратных корней из некоторых выражений, содержащих массы. В случае чисто упругих процессов, когда начальные и конечные частицы оказываются одинаковыми, эти довольно сложные множители будут сокращаться.

Матричный элемент перехода (12.62) можно непосредственно подставить в определение эффективного сечения. Для соответствующего процесса мы сразу же получаем

$$d\sigma = \int d\omega_{p_1}\, d\omega_{p_1'}\, (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_1' - p_2 - p_2')\, \frac{1}{2M\,(M^2-4m^2)^{1/2}} \times \\ \times (4\pi\alpha)^2 \left[\frac{(p_1+p_2)(p_1'+p_2')}{(p_1-p_2)^2} + \frac{(p_1+p_2')(p_1'+p_2)}{(p_1-p_2')^2}\right]^2 \qquad (12.76)$$

и

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{M^2}\left[\frac{(p_1+p_2)(p_1'+p_2')}{(p_1-p_2)^2} + \frac{(p_1+p_2')(p_1'+p_2)}{(p_1-p_2')^2}\right]^2 = \\ = \frac{\alpha^2}{M^2}\left[\frac{M^2-2m^2}{M^2-4m^2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right) - 1\right]^2. \qquad (12.77)$$

В последнем выражении величина θ — угол отклонения, а полная эквивалентность углов θ и $\pi - \theta$ выражает неразличимость частиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна. Чтобы перейти к системе покоя, достаточно заметить, что в ней каждая из четырех энергий частиц равна $\frac{1}{2}M$, в результате чего мы получаем, например,

$$-\frac{(p_1+p_2)(p_1'+p_2')}{(p_1-p_2)^2} = \frac{2M^2-4m^2}{(p_1-p_2)^2} - 1 = 2\frac{M^2-2m^2}{M^2-4m^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} - 1. \qquad (12.78)$$

Особый интерес представляют пределы очень высоких и очень низких энергий:

$M \gg 2m$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{M^2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} - 1\right)^2;$$

$M \sim 2m$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16}\,\frac{\alpha^2}{(M-2m)^2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)^2. \tag{12.79}$$

Заметим, что при малых углах рассеяния последнее выражение переходит в резерфордовское дифференциальное сечение рассеяния различимых частиц:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{рез}} = \left(\frac{\alpha}{2\mu v^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}, \tag{12.80}$$

где величина

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = M - 2m \tag{12.81}$$

представляет собой кинетическую энергию частиц.

Когда рассеиваются частицы с зарядами противоположных знаков, их можно различить по значениям заряда. В результате аналог величины (12.60), в котором источники заменяются величинами $iK^*_{1p_1q}iK^*_{1p_1'-q}$ и $iK_{2p_2q}iK_{2p_2'-q}$, будет давать член только одного типа. Кроме того, возникнет дополнительный знак минус. Конечно, благодаря комбинированной симметрии $p_1 \leftrightarrow p_1'$, $p_2 \leftrightarrow p_2'$, $q \to -q$ каждый процесс будет входить дважды, но теперь вступает в игру второе слагаемое выражения (12.47) при

$$\begin{aligned} j^{\mu}_{11}(x) &= \sum_{p_1p_1'q} iK^*_{1p_1q}iK^*_{1p_1'-q}\,eq\,\frac{1}{2}\,(p^{\mu}_1 - p^{\mu\prime}_1)\times \\ &\quad\times (d\omega_{p_1}\,d\omega_{p_1'})^{1/2}\,e^{-i(p_1+p_1')x}, \\ j^{\mu}_{22}(x) &= \sum_{p_2p_2'q} eq\,\frac{1}{2}\,(p^{\mu}_2 - p^{\mu\prime}_2)\,(d\omega_{p_2}\,d\omega_{p_2'})^{1/2}\times \\ &\quad\times e^{i(p_2+p_2')x}iK_{2p_2q}iK_{2p_2'-q}, \end{aligned} \tag{12.82}$$

где каждый ток вносит в данный процесс два одинаковых вклада, соответствующих свойствам симметрии относительно подстановок $p_1 \leftrightarrow p_1'$, $q \to -q$ и $p_2 \leftrightarrow p_2'$, $q \to -q$. Отсюда следует, что матричный элемент перехода дается выражением

$$\langle 1_{p_1q}1_{p_1'-q}\,|\,T\,|\,1_{p_2q}1_{p_2'-q}\rangle = (d\omega_{p_1}d\omega_{p_1'}d\omega_{p_2}d\omega_{p_2'})^{1/2}\times$$
$$\times e^2\left[-\frac{(p_1+p_2)(p_1'+p_2')}{(p_1-p_2)^2}+\frac{(p_1-p_1')(p_2-p_2')}{(p_1+p_1')^2}\right]. \qquad (12.83)$$

Отметим, что между матричными элементами (12.62) и (12.83) имеется простая связь — они переходят один в другой при любой из подстановок

$$p_1\leftrightarrow -p_2,\qquad p_1'\leftrightarrow -p_2'. \qquad (12.84)$$

Соответствия такого типа между различными переходами получили название перекрестных соотношений. За объяснением их происхождения далеко ходить не нужно. Процессы испускания и поглощения объединены в поле $\varphi(x)$. Формальная подстановка $p^\mu\to -p^\mu$ переводит один в другой физические эффекты, идентифицирующие акты испускания и поглощения. При этом соответствующим образом изменяются и отдельные поля $\varphi_{pq}(x)$, которые дают нам количественное описание:

$$\varphi_{pq}(x)\leftrightarrow\varphi_{p-q}(x)^*. \qquad (12.85)$$

Если задать матричный элемент перехода для одного процесса то в результате указанной подстановки возникнет другой матричный элемент, в котором начальная частица с квантовыми числами p, q заменяется конечной частицей с квантовыми числами p, $-q$, или наоборот. Само собой разумеется, если мы по-прежнему хотим рассматривать процесс рассеяния, то указанную операцию нужно проделать как на входе, так и на выходе реакции. В случае когда присутствуют частицы с зарядами противоположных знаков, результатом может оказаться симметрия данного матричного элемента, примером которой служит инвариантность выражения (12.83) относительно любой из подстановок

$$p_1\leftrightarrow -p_2',\qquad p_1'\leftrightarrow -p_2. \qquad (12.86)$$

Заметим, что здесь мы рассматриваем отдельные преобразования, вся совокупность которых представляет собой TCP-операцию.

Сомножитель, заключенный в формуле (12.83) в квадратные скобки, имеет следующий вид:

$$2\,\frac{M^2-2m^2}{M^2-4m^2}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-1-\frac{M^2-4m^2}{M^2}\cos\theta=$$
$$=\cos^2\frac{\theta}{2}\,2\left[\frac{M^2-2m^2}{M^2-4m^2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)-1\right]+\frac{4m^2}{M^2}\cos\theta. \qquad (12.87)$$

Как при высоких, так и при низких энергиях последним членом $(4m^2/M^2)\cos\theta$ можно пренебречь по сравнению с остальными. Это приводит к простой связи между эффективными сечениями для разноименных и одноименных зарядов, которая становится точной в обеих асимптотических областях на шкале масс и с удовлетворительной точностью выполняется в промежуточной области:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{+-} \approx \cos^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{++,\,--}. \tag{12.88}$$

Рассеяние фотонов на бесспиновых заряженных частицах вместе с другими процессами содержится в действии (12.29). Мы хотим выделить тот вклад, который получается, если написать, как и в формуле (12.44),

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \tag{12.89}$$

и фотонный аналог этого разложения

$$A^\mu(x) = A_1^\mu(x) + A_2^\mu(x), \tag{12.90}$$

где

$$\begin{aligned} A_1^\mu(x) &= i\int (dx')\, g^{\mu\nu} D^{(-)}(x-x')\, J_{1\nu}(x'), \\ A_2^\mu(x) &= i\int (dx')\, g^{\mu\nu} D^{(+)}(x-x')\, J_{2\nu}(x'), \end{aligned} \tag{12.91}$$

а затем оставить члены, содержащие по одному испускающему источнику фотонов и частиц и по одному детектирующему источнику фотонов и частиц. Эти члены имеют вид

$$\begin{aligned} W_{22} \to \int (dx)\,(dx')\,\varphi_1(x)\Big[&eq2pA_1(x)\,\Delta_+(x-x')\,eq2pA_2(x') + \\ &+ eq2pA_2(x)\,\Delta_+(x-x')\,eq2pA_1(x')\Big]\varphi_2(x') - \\ &- \int (dx)\,\varphi_1(x)\,2e^2A_1(x)\,A_2(x)\,\varphi_2(x), \end{aligned} \tag{12.92}$$

где мы воспользовались тем упрощением, которое дает лоренцевская калибровка для векторного потенциала. Напомним, что

$$g^{\mu\nu} = \sum_\lambda e_{k\lambda}^{\mu} e_{k\lambda}^{\nu *} + \frac{k^\mu \bar{k}^\nu + k^\nu \bar{k}^\mu}{k\bar{k}}. \tag{12.93}$$

Из двух последних слагаемых, не содержащих векторов поляризации, одно обращается в нуль, так как дивергенция источника равна нулю, а второе можно исключить путем калибровочного преобразования, так как в координатном пространстве оно имеет вид градиента некоторого скаляра. Таким образом, в этом специальном классе калибровок мы можем написать

$$A_1^\mu(x) = \sum_{k\lambda} iJ^*_{1k\lambda} A^\mu_{k\lambda}(x)^*, \qquad A_2^\mu(x) = \sum_{k\lambda} A^\mu_{k\lambda}(x)\, iJ_{2k\lambda}, \tag{12.94}$$

где

$$A^\mu_{k\lambda}(x) = (d\omega_k)^{1/2} e^\mu_{k\lambda} e^{ikx}, \tag{12.95}$$

причем такие калибровки являются лоренцевскими, поскольку

$$\partial_\mu A^\mu_{k\lambda}(x) = (d\omega_k)^{1/2}\, ik_\mu e^\mu_{k\lambda} e^{ikx} = 0. \tag{12.96}$$

Соберем теперь все коэффициенты при $iJ^*_{k_1\lambda_1} iK^*_{p_1q}$ и $iJ_{k_2\lambda_2} iK_{p_2q}$ (здесь мы опускаем у источников причинные индексы, так как они в избытке содержатся в других переменных). Возникающие в результате интегралы по пространству-времени дают фурье-образы, которые соответствуют описанию процессов рассеяния с помощью импульсных переменных. Примером может служить интеграл

$$\begin{aligned}
&\int (dx)(dx')\, e^{-ip_1x} p^\mu e^{-ik_1x} \Delta_+(x-x')\, e^{ik_2x'} p^\nu e^{ip_2x'} = \\
&= p_1^\mu p_2^\nu \int (dx)\, e^{-i(p_1+k_1)(x-x')} \Delta_+(x-x') \int (dx')\, e^{i(k_2+p_2-k_1-p_1)x'} = \\
&= \frac{p_1^\mu p_2^\nu}{(p_1+k_1)^2+m^2} \int (dx)\, e^{i(k_2+p_2-k_1-p_1)x},
\end{aligned} \tag{12.97}$$

где учтено также то обстоятельство, что дифференциальные операторы p^μ и p^ν действуют непосредственно на собственные функции импульса. Для матричного элемента перехода получается следующее выражение:

$$\langle 1_{k_1\lambda_1} 1_{p_1q} | T | 1_{k_2\lambda_2} 1_{p_2q}\rangle = (d\omega_{k_1} d\omega_{p_1} d\omega_{k_2} d\omega_{p_2})^{1/2}\, 2e^2 e^{\mu *}_{k_1\lambda_1} V_{\mu\nu} e^\nu_{k_2\lambda_2}, \tag{12.98}$$

причем

$$V_{\mu\nu} = \frac{p_{1\mu}p_{2\nu}}{p_1k_1} - \frac{p_{1\nu}p_{2\mu}}{p_1k_2} - g_{\mu\nu}, \tag{12.99}$$

где мы воспользовались упрощениями, к которым приводят кинематические соотношения:

$$\begin{aligned}
(p_1+k_1)^2+m^2 &= [p_1^2+m^2+k_1^2] + 2p_1k_1 = 2p_1k_1,\\
(p_1-k_2)^2+m^2 &= [p_1^2+m^2+k_2^2] - 2p_1k_2 = -2p_1k_2.
\end{aligned} \tag{12.100}$$

Кинематика имеет и другие аспекты. Полный импульс равен

$$P = p_1 + k_1 = p_2 + k_2, \tag{12.101}$$

а следовательно,

$$-p_1k_1 = -p_2k_2 = \frac{1}{2}(M^2 - m^2), \tag{12.102}$$

тогда как

$$-p_1k_2 = -p_2k_1 = \frac{1}{2}(M^2-m^2)+k_1k_2. \qquad (12.103)$$

Инвариантные выражения для энергий частиц в системе центра масс, т. е. в системе покоя импульса P^μ, имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{M}Pp_1 &= -\frac{1}{M}Pp_2 = \frac{1}{2M}(M^2+m^2), \\ -\frac{1}{M}Pk_1 &= -\frac{1}{M}Pk_2 = \frac{1}{2M}(M^2-m^2). \end{aligned} \qquad (12.104)$$

Кроме того, вводя угол рассеяния θ в системе центра масс, мы будем иметь

$$-k_1k_2 = \left(\frac{M^2-m^2}{2M}\right)^2(1-\cos\theta) \qquad (12.105)$$

и

$$-p_1k_2 = -p_2k_1 = \frac{M^2-m^2}{2}\left[\frac{M^2+m^2}{2M^2}+\frac{M^2-m^2}{2M^2}\cos\theta\right]. \qquad (12.106)$$

Отметим также, что матричный элемент перехода (12.98) и (12.99) обладает перекрестной симметрией. Поскольку знак заряда q несуществен, имеет место инвариантность, в частности величины $V_{\mu\nu}$, относительно подстановки

$$p_1 \leftrightarrow -p_2. \qquad (12.107)$$

При этом решающую роль играет равенство k_1p_1 с k_2p_2 и k_1p_2 с k_2p_1. Что касается фотонов, то использование линейных поляризаций с вещественными векторами поляризации влечет преобразование

$$k^\mu \to -k^\mu: \qquad A^\mu_{k\lambda}(x) \leftrightarrow A^\mu_{k\lambda}(x)^*, \qquad (12.108)$$

и поэтому матричный элемент перехода должен быть инвариантным относительно подстановки

$$k_1 \leftrightarrow -k_2, \qquad \lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2. \qquad (12.109)$$

При такой подстановке индексы μ и ν у тензора $V_{\mu\nu}$ меняются местами, что и доказывает требуемую инвариантность.

Тензор $V_{\mu\nu}$ обладает также следующими важными свойствами:

$$\begin{aligned} k_1^\mu V_{\mu\nu} &= (p_2 - p_1 - k_1)_\nu = -k_{2\nu}, \\ V_{\mu\nu}k_2^\nu &= (p_1 - p_2 - k_2)_\mu = -k_{1\mu}. \end{aligned} \qquad (12.110)$$

Они приводят к необходимому сохранению эффективных источников испускания конечного фотона и поглощения падающего фотона:

$$k_1^\mu V_{\mu\nu}e^\nu_{k_2\lambda_2} = -k_{2\nu}e^\nu_{k_2\lambda_2} = 0, \qquad e^{\mu*}_{k_1\lambda}V_{\mu\nu}k_2^\nu = -e^{\mu*}_{k_1\lambda}k_{1\mu} = 0. \qquad (12.111)$$

Далее, пользуясь выражением (12.93), в вероятности перехода можно провести суммирование по обеим поляризациям рассеянного фотона:

$$\sum_{\lambda_1} |e^{\mu *}_{k_1\lambda_1} V_{\mu\nu} e^{\nu}_{k_2\lambda_2}|^2 = e^{\alpha *}_{k_2\lambda_2} V_{\mu\alpha} \sum_{\lambda_1} e^{\mu}_{k_1\lambda_1} e^{\nu *}_{k_1\lambda_1} V_{\nu\beta} e^{\beta}_{k_2\lambda_2} =$$
$$= e^{\alpha *}_{k_2\lambda_2} V^{\mu}{}_{\alpha} V_{\mu\beta} e^{\beta}_{k_2\lambda_2}. \tag{12.112}$$

Если пучок падающих фотонов не поляризован, т. е. если оба значения поляризации входят с равными вероятностями, то с помощью равенства (12.93) можно провести и необходимое усреднение:

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda_1\lambda_2} |e^{\mu *}_{k_1\lambda_1} V_{\mu\nu} e^{\nu}_{k_2\lambda_2}|^2 = \frac{1}{2} V^{\mu}_{\alpha} V_{\mu\beta} \sum_{\lambda_2} e^{\alpha *}_{k_2\lambda_2} e^{\beta}_{k_2\lambda_2} =$$
$$= \frac{1}{2} V^{\mu}_{\alpha} V_{\mu\beta} \left(g^{\alpha\beta} - \frac{k_2^{\alpha}\bar{k}_2^{\beta} + k_2^{\beta}\bar{k}_2^{\alpha}}{k_2\bar{k}_2}\right) = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu}V_{\mu\nu} - 2), \tag{12.113}$$

так как

$$V^{\mu}_{\alpha} V_{\mu\beta} k_2^{\alpha} = -k_1^{\mu} V_{\mu\beta} = k_{2\beta}. \tag{12.114}$$

После несложных алгебраических выкладок получим

$$V^{\mu\nu}V_{\mu\nu} - 2 = 1 + \left[1 + m^2\left(\frac{1}{p_1k_2} - \frac{1}{p_1k_1}\right)\right]^2. \tag{12.115}$$

Подчеркнем еще раз сравнительно простой вид кинематических множителей в сечении упругого рассеяния, даже для частиц с неравными массами. Отношение интеграла (12.75) к инвариантному потоку (12.70) дает множитель

$$\frac{d\Omega}{(8\pi)^2}\frac{1}{M^2}, \tag{12.116}$$

которым определяется единица измерения дифференциального сечения рассеяния. Учитывая сказанное, а также равенство $2e^2 = 8\pi\alpha$, мы сразу же получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{M^2}\frac{1}{2}\left\{1 + \left[\frac{\dfrac{M^2-m^2}{M^2+m^2} + \cos\theta}{1 + \dfrac{M^2-m^2}{M^2+m^2}\cos\theta}\right]^2\right\}, \tag{12.117}$$

где произведение p_1k_2 выражено через угол рассеяния в системе центра масс. Дифференциальное и полное сечения в пределах высоких и низких энергий имеют вид

$$\begin{aligned} &M \gg m: \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{M^2}, \qquad \sigma = 4\pi\frac{\alpha^2}{M^2};\\ &M \approx m: \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2}\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta), \qquad \sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{m^2}; \end{aligned} \tag{12.118}$$

два последних выражения дают томсоновские сечения.

Из сохранения эффективных источников испускания конечного фотона и поглощения начального фотона следует калибровочная инвариантность вероятностей переходов. Это позволяет нам использовать любые упрощения, к которым может привести тот или иной специальный выбор калибровки. Проблема калибровки в связи с векторами поляризации $e^{\mu}_{k\lambda}$ содержится неявным образом в выборе вектора $\bar{k}^{\mu}$, который в некоторой системе координат имеет пространственные компоненты, отличающиеся от пространственных компонент вектора k^{μ} только знаком. Если ввести единичный времени-подобный вектор n^{μ}, то его можно будет представить в виде

$$\bar{k}^{\mu} = -(k^{\mu} + 2n^{\mu}nk), \tag{12.119}$$

причем векторы поляризации удовлетворяют двум условиям ортогональности:

$$k_{\mu}e^{\mu}_{k\lambda} = 0, \qquad n_{\mu}e^{\mu}_{k\lambda} = 0. \tag{12.120}$$

Всеми этими свойствами обладает сумма

$$\sum_{\lambda} e^{\mu}_{k\lambda}e^{\nu *}_{k\lambda} = g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu}k^{\nu} + (k^{\mu}n^{\nu} + k^{\nu}n^{\mu})\,nk}{(nk)^2}. \tag{12.121}$$

Обращаясь теперь к формулам (12.98) и (12.99), мы увидим, что отождествление n^{μ} либо с p^{μ}_1/m, либо с p^{μ}_2/m приводит к определенному упрощению:

$$e^{\mu *}_{k_1\lambda_1}V_{\mu\nu}e^{\nu}_{k_2\lambda_2} = -e^{\mu *}_{k_1\lambda_1}e_{\mu k_2\lambda_2}. \tag{12.122}$$

Путем прямой проверки нетрудно убедиться, что для суммирования и усреднения по значениям поляризации этот способ дает те же самые результаты. Применяя (12.121) к конечным фотонам, мы получим

$$\sum_{\lambda_1} |e^{*}_{k_1\lambda_1}e_{k_2\lambda_2}|^2 = 1 - \frac{|k_1e_{k_2\lambda_2}|^2}{(nk_1)^2}, \tag{12.123}$$

а затем

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda_1\lambda_2} |e^{*}_{k_1\lambda_1}e_{k_2\lambda_2}|^2 = 1 + \frac{(k_1k_2)^2 + 2k_1k_2\,(nk_1)\,(nk_2)}{2\,(nk_1)^2\,(nk_2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 + \frac{k_1k_2}{(nk_1)\,(nk_2)}\right)^2\right]. \tag{12.124}$$

Если положить $n = p_1/m$ или p_2/m и учесть соотношение

$$k_1k_2 = p_1k_1 - p_1k_2, \tag{12.125}$$

то мы снова придем к формулам (12.113) и (12.115).

Калибровки, о которых говорилось выше, особенно выгодны в том случае, когда в начале или в конце процесса частица покоится. Вектор n можно выбрать и по-другому — в виде P/M, а это самое удобное в системе центра масс. Во всех этих примерах система координат выбирается так, чтобы вектор n^μ был направлен вдоль оси времени. Рассмотрим поляризационную зависимость сечения рассеяния, перейдя к системе центра масс. Траектории падающей и рассеянной частиц определяют некоторую плоскость. Возьмем сначала векторы линейной поляризации, которые либо перпендикулярны этой плоскости, либо лежат в ней под углом к импульсу соответствующего фотона. Информацию о дифференциальных сечениях для разных случаев поляризации можно получить из формул (12.98) и (12.99), которые упрощаются при соответствующем выборе некоторых векторов. В частности, в системе центра масс имеет место соотношение

$$0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}_2, \tag{12.126}$$

которое дает

$$-e^{\mu *}_{k_1\lambda_1} V_{\mu\nu} e^{\nu}_{k_2\lambda_2} = \frac{\mathbf{e}_{k_1\lambda_1}\cdot\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{e}_{k_2\lambda_2}}{p_1k_2} + \mathbf{e}_{k_1\lambda_1}\cdot\mathbf{e}_{k_2\lambda_2}. \tag{12.127}$$

Если один вектор поляризации лежит в плоскости рассеяния, а другой перпендикулярен ей, то эффективное сечение обращается в нуль. Если оба вектора перпендикулярны плоскости рассеяния, то

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\perp} = \frac{\alpha^2}{M^2}, \tag{12.128}$$

а если они оба лежат в плоскости рассеяния, то

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\parallel} = \frac{\alpha^2}{M^2}\left[\frac{M^2-m^2}{M^2+m^2+(M^2-m^2)\cos\theta}\sin^2\theta + \cos\theta\right]^2 =$$

$$= \frac{\alpha^2}{M^2}\left[\frac{\dfrac{M^2-m^2}{M^2+m^2}+\cos\theta}{1+\dfrac{M^2-m^2}{M^2+m^2}\cos\theta}\right]^2. \tag{12.129}$$

Среднее этих двух сечений, соответствующее первоначально неполяризованному пучку, совпадает с выражением (12.117), что придает данному выражению более ясный физический смысл. Отметим, что фотоны, рассеиваемые на угол, который определяется уравнением

$$\cos\theta = -\frac{M^2-m^2}{M^2+m^2}, \tag{12.130}$$

будут полностью поляризованы в направлении, перпендикулярном плоскости рассеяния.

Дифференциальные сечения, соответствующие круговой поляризации, или спиральным состояниям, можно найти, исходя из результатов, полученных в случае линейной поляризации. Векторы круговой поляризации представляют собой линейные комбинации векторов, которые параллельны и перпендикулярны плоскости рассеяния и сдвинуты по фазе один относительно другого на $\pi/2$ [см. формулу (3.29) из гл. 2]. Поскольку вылетающий фотон описывается комплексно-сопряженным вектором поляризации, амплитуда вероятности процесса, в начале и в конце которого спиральности одинаковы, равна полусумме двух амплитуд с линейными поляризациями, а амплитуда вероятности процесса с противоположными спиральностями равна их полуразности. Следовательно, дифференциальные сечения для процессов, в которых спиральность не изменяется и в которых она меняет свой знак, таковы:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{неизм}}=\frac{\alpha^2}{M^2}\,\frac{\cos^4\dfrac{\theta}{2}}{\left(\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{m^2}{M^2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)^2},$$
$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{изм}}=\frac{\alpha^2}{M^2}\,\frac{\left(\dfrac{m}{M}\right)^4\sin^4\dfrac{\theta}{2}}{\left(\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{m^2}{M^2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)^2}. \qquad (12.131)$$

Смысл появляющихся здесь геометрических множителей $\cos^4(\theta/2)$ и $\sin^4(\theta/2)$ нам известен. Пусть угловой момент равен единице, а его магнитное квантовое число относительно заданного направления равно $+1$. Тогда указанные множители будут давать нам вероятности того, что при измерении относительно направления, составляющего с исходным угол θ, для магнитных квантовых чисел получатся значения $+1$ и -1. Кроме того, имеется и динамический весовой множитель, который при низких энергиях, когда $M \approx m$, равен единице, а при очень высоких энергиях подавляет процесс с изменением спиральности. Полное дифференциальное сечение, не зависящее от начального значения спиральности, равно сумме парциальных сечений (12.131):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{M^2}\,\frac{\cos^4\dfrac{\theta}{2}+\left(\dfrac{m}{M}\right)^4\sin^4\dfrac{\theta}{2}}{\left(\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{m^2}{M^2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)^2}. \qquad (12.132)$$

Оно совпадает с сечением (12.117). При угле рассеяния, определяемом уравнением

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{M}{m}, \qquad (12.133)$$

два парциальных сечения равны друг другу, что приводит к нулевому среднему значению углового момента в направлении рассеянного фотона. Конечно, этот угол совпадает с углом, определяемым уравнением (12.130) и отвечающим случаю, когда рассеянный фотон линейно-поляризован.

В действии W_{22} учитываются и другие процессы с участием двух частиц и двух фотонов. Если выделить члены с двумя источниками испускания частиц и двумя источниками детектирования фотонов, то это будет означать, что мы рассматриваем аннигиляцию частицы и античастицы в два фотона; два источника испускания фотонов вместе с двумя источниками детектирования частиц приводят к обратному процессу — рождению пары частица — античастица при столкновении двух фотонов. Последний процесс, например, описывается величиной

$$W_{22} \to \frac{1}{2} \int (dx)(dx')\, \varphi_1(x)\, eq2pA_2(x)\, \Delta_+(x-x')\, eq2pA_2(x')\, \varphi_1(x') - \\ - \int (dx)\, \varphi_1(x)\, e^2 [A_2(x)]^2 \varphi_1(x), \tag{12.134}$$

и, выделяя коэффициенты при $iK^*_{p_1q}iK^*_{p_1'-q}$ и $iJ_{k_2\lambda_2}iJ_{k_2'\lambda_2'}$, мы получаем

$$\langle 1_{p_1q}1_{p_1'-q} \mid T \mid 1_{k_2\lambda_2}1_{k_2'\lambda_2'}\rangle = \\ = (d\omega_{p_1}\, d\omega_{p_1'}\, d\omega_{k_2}\, d\omega_{k_2'})^{1/2}\, 2e^2 e^{\mu}_{k_2\lambda_2} V'_{\mu\nu} e^{\nu}_{k_2'\lambda_2'}, \tag{12.135}$$

где

$$V'_{\mu\nu} = \frac{p_{1\mu}p'_{1\nu}}{p_1k_2} + \frac{p_{1\nu}p'_{1\mu}}{p_1k_2'} - g_{\mu\nu}. \tag{12.136}$$

Заметим, что матричный элемент явным образом симметричен относительно подстановки $k_2\lambda_2 \leftrightarrow k_2'\lambda_2'$. Кроме того, если воспользоваться кинематическими соотношениями

$$\begin{aligned} -p_1k_2 = -p_1'k_2' &= \frac{1}{2}M\left[\frac{1}{2}M - \left(\frac{1}{4}M^2 - m^2\right)^{1/2}\cos\theta\right], \\ -p_1k_2' = -p_1'k_2 &= \frac{1}{2}M\left[\frac{1}{2}M + \left(\frac{1}{4}M^2 - m^2\right)^{1/2}\cos\theta\right], \end{aligned} \tag{12.137}$$

где θ — угол между относительными импульсами частицы и фотона, то мы увидим, что он симметричен и относительно подстановки $p_1q \leftrightarrow p_1'\,-q$. Порог рассматриваемой реакции лежит при $M = 2m$. Его положение определяется квадратным корнем в формуле (12.137), который равен модулю импульса в системе центра масс, так как энергии всех частиц и фотонов имеют значение $^1/_2M$. При использовании вещественных векторов поляризации матричный элемент (12.135) и (12.136) можно получить из матричного элемента (12.98) и (12.99) путем перекрестного преобразования

$$p_2 \to -p_1', \qquad k_1\lambda_1 \to -k_2'\lambda_2'. \tag{12.138}$$

Так как теперь конечные частицы отличаются от начальных, в дифференциальное сечение входит в явном виде отношение кинематических множителей, представляющих собой квадратные корни из определенных выражений. Мы напишем это сечение для разных случаев поляризации, используя сначала линейную поляризацию в направлении, параллельном или перпендикулярном плоскости реакции:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\perp}=\frac{\alpha^2}{M^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2},$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\parallel}=\frac{\alpha^2}{M^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\left[2\frac{\left(\frac{1}{4}M^2-m^2\right)\sin^2\theta}{\frac{1}{4}M^2-\left(\frac{1}{4}M^2-m^2\right)\cos^2\theta}-1\right]^2=$$

$$=\frac{\alpha^2}{M^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\left[\frac{1-\left(\frac{M^2}{4m^2}-1\right)\sin^2\theta}{1+\left(\frac{M^2}{4m^2}-1\right)\sin^2\theta}\right]^2; \qquad (12.139)$$

когда два вектора поляризации взаимно перпендикулярны, эффективное сечение обращается в нуль. Если только энергия превышает пороговое значение по крайней мере в $\sqrt{2}$ раз, т. е. если $M^2>8m^2$, то найдется такой угол, при котором дифференциальное сечение для параллельных поляризаций обращается в нуль; этот угол определяется уравнением

$$\sin^2\theta=\left(\frac{M^2}{4m^2}-1\right)^{-1}. \qquad (12.140)$$

Сечение, соответствующее неполяризованным фотонам, которое получается путем усреднения по четырем возможностям, имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{M^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\frac{1}{2}\frac{1+\left(\frac{M^2}{4m^2}-1\right)^2\sin^4\theta}{\left[1+\left(\frac{M^2}{4m^2}-1\right)\sin^2\theta\right]^2}. \qquad (12.141)$$

Вблизи порога и при высоких энергиях оно дается формулами

$$\begin{aligned} M\approx 2m:&\quad \frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\sigma}{4\pi}=\frac{\alpha^2}{8m^2}\left(\frac{M-2m}{m}\right)^{1/2};\\ M\gg 2m:&\quad \frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\sigma}{4\pi}=\frac{\alpha^2}{2M^2}. \end{aligned} \qquad (12.142)$$

В рассматриваемом случае амплитуды переходов для фотонов, поляризованных по кругу, также представляют собой простые линейные комбинации амплитуд, соответствующих линейной поляризации. В системе центра масс фотоны разлетаются в противоположные стороны. Поэтому, если их спиральности, например, одинаковы, то у них будут противоположные проекции углового момента на направление общей прямой, вдоль которой они движутся. Отсюда следует, что амплитуда перехода в случае одинаковых спиральностей равна полусумме двух амплитуд, отвечающих линейной поляризации, а в случае противоположных спиральностей она равна их полуразности:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\lambda_2=\lambda_2'}=\frac{\alpha^2}{M^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{M^2}{4m^2}-1\right)\sin^2\theta\right]^2},$$

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\lambda_2=-\lambda_2'}=\frac{\alpha^2}{M^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\frac{\left(\frac{M^2}{4m^2}-1\right)^2\sin^4\theta}{\left[1+\left(\frac{M^2}{4m^2}-1\right)\sin^2\theta\right]^2}. \qquad (12.143)$$

Таким образом, вблизи порога доминирует реакция с одинаковыми спиральностями, а при очень высоких энергиях — реакция с противоположными спиральностями. Сечения этих реакций одинаковы при

$$M^2=4m^2\left(1+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\geqslant 8m^2, \qquad (12.144)$$

что представляет собой другую форму записи условия (12.140). Заметим, что геометрические множители 1 и $(^3/_8)\sin^4\theta$ также связаны с угловым моментом. Первый из них говорит об эквивалентности всех направлений в состоянии с нулевым угловым моментом. Второй же соответствует квантовому числу углового момента, равному 2, и дает вероятность, связывающую магнитное квантовое число ± 2 относительно одного направления с нулевым магнитным квантовым числом относительно другого направления, которое составляет с исходным угол θ.

Матричный элемент перехода для обратного процесса, т. е. для аннигиляции частицы и античастицы в два фотона, имеет тот же вид (12.135) и (12.136), но с обращением причинных индексов и с подстановкой комплексно-сопряженных векторов поляризации. Так как конечные и начальные частицы меняются теперь ролями, кинематический множитель, имеющий вид квадратного корня, заменяется обратной ему величиной, а все остальное остается тем же самым. Снабдив сечения спиральными индексами конечных фотонов, будем иметь:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\lambda_1=\lambda_1'}=\frac{\alpha^2}{M^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{M^2}{4m^2}-1\right)\sin^2\theta\right]^2},$$

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\lambda_1=-\lambda_1'}=\frac{\alpha^2}{M^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}\frac{\left(\frac{M^2}{4m^2}-1\right)^2\sin^4\theta}{\left[1+\left(\frac{M^2}{4m^2}-1\right)\sin^2\theta\right]^2}. \qquad (12.145)$$

И в этом случае соотношение спиральностей фотонов изменяется при переходе от низких к высоким энергиям. При аннигиляции медленных частиц ($M\approx 2m$) нет относительного углового момента, уносимого фотонами, и у движущихся в противоположные стороны фотонов преобладают равные спиральности. При очень высоких энергиях фотоны несут максимальную проекцию углового момента на общее направление их движения. Тем не менее оба дифференциальных сечения изотропны, а полные сечения имеют вид

$$M-2m=\frac{1}{4}mv^2,\quad v\ll 1:\qquad \sigma=2\pi\frac{\alpha^2}{m^2}\frac{1}{v};$$
$$M\gg 2m:\qquad \sigma=4\pi\frac{\alpha^2}{M^2}. \tag{12.146}$$

То что сечение обратно пропорционально скорости v при $v\ll 1$, означает лишь, что скорость протекания процесса аннигиляции в единичном объеме пропорциональна произведению плотностей пучков. При вычислении полного сечения для реакций, в которых конечное состояние содержит две тождественные частицы (в рассматриваемом процессе аннигиляции таковыми являются фотоны, подчиняющиеся статистике Бозе — Эйнштейна), нужна осторожность. При раздельном суммировании по конечным состояниям обеих частиц, которое в данном случае представляет собой суммирование по спиральностям и интегрирование по всем направлениям движения, каждое физически различное состояние частиц учитывается дважды. В выражениях для сечений (12.146) мы учли это обстоятельство.

§ 13. ПРОЦЕССЫ С УЧАСТИЕМ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $^1/_2$

Сначала мы рассмотрим рассеяние частиц со спином $^1/_2$, несущих одноименные заряды. Как и в случае спина 0, соответствующая часть действия W_{40}, в которой мы не будем указывать конкретные значения зарядов, имеет вид

$$W_{40}\to\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\,j_{12}^{\mu}(x)\,D_+(x-x')\,j_{12\mu}(x')+$$
$$+\int(dx)(dx')\,j_{11}^{\mu}(x)\,D_+(x-x')\,j_{22\mu}(x'), \tag{13.1}$$

но частицам с одинаковыми зарядами отвечает только первое слагаемое при

$$j_{12}^{\mu}(x)=\psi_1(x)\,\gamma^0\gamma^{\mu}eq\psi_2(x). \tag{13.2}$$

Поля с причинными индексами имеют вид

$$\psi_1(x)=\sum_{p_1\sigma_1 q}i\eta^*_{p_1\sigma_1 q}\psi_{p_1\sigma_1 q}(x)^*,\qquad \psi_2(x)=\sum_{p_2\sigma_2 q}\psi_{p_2\sigma_2 q}(x)\,i\eta_{p_2\sigma_2 q}, \tag{13.3}$$

а

$$\psi_{p\sigma q}=(2m\,d\omega_p)^{1/2}\,u_{p\sigma q}e^{ipx}. \tag{13.4}$$

Для W_{40} получается следующее выражение, аналогичное выражению (12.60):

$$W_{40} = \frac{1}{2} e^2 \sum i\eta^*_{p'_1\sigma'_1 q} i\eta^*_{p_1\sigma_1 q} (2m)^2 (d\omega_{p_1} d\omega_{p'_1} d\omega_{p_2} d\omega_{p'_2})^{1/2} \times$$
$$\times (u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0\gamma^\mu u_{p_2\sigma_2})(u^*_{p'_1\sigma'_1}\gamma^0\gamma_\mu u_{p'_2\sigma'_2}) \times$$
$$\times \left[\int (dx)(dx')\, e^{i(p_2-p_1)x} D_+(x-x')\, e^{i(p'_2-p'_1)x'}\right] i\eta_{p_2\sigma_2 q} i\eta_{p'_2\sigma'_2 q}. \quad (13.5)$$

Общий для всех спиноров индекс q здесь опущен. Заметим также, что мы изменили первоначальный порядок расположения антикоммутирующих источников, не внеся при этом никаких знаков минус:

$$i\eta^*_{p_1\sigma_1 q} i\eta_{p_2\sigma_2 q} i\eta^*_{p'_1\sigma'_1 q} i\eta_{p'_2\sigma'_2 q}. \quad (13.6)$$

При определении матричного элемента перехода будем исходить из того, что порядок источников такой же, как и в формуле (13.5). Но следует, конечно, учитывать, что в силу антисимметрии относительно перестановки $p_1\sigma_1 \leftrightarrow p'_1\sigma'_1$, свойственной статистике Ферми — Дирака, каждое конкретное произведение детектирующих источников входит в сумму дважды в виде слагаемых с противоположными знаками. То же самое относится к испускающим источникам и перестановке $p_2\sigma_2 \leftrightarrow p'_2\sigma'_2$. Таким образом, требуемый матричный элемент, который обладает свойствами антисимметрии, характерными для состояний Ферми — Дирака, имеет вид

$$\langle 1_{p_1\sigma_1 q} 1_{p'_1\sigma'_1 q} | T | 1_{p_2\sigma_2 q} 1_{p'_2\sigma'_2 q}\rangle = (2m)^2 (d\omega_{p_1} d\omega_{p'_1} d\omega_{p_2} d\omega_{p'_2}) \times$$
$$\times e^2 \left[\frac{(u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0\gamma^\mu u_{p_2\sigma_2})(u^*_{p'_1\sigma'_1}\gamma^0\gamma_\mu u_{p'_2\sigma'_2})}{(p_1-p_2)^2} - \frac{(u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0\gamma^\mu u_{p'_2\sigma'_2})(u^*_{p'_1\sigma'_1}\gamma^0\gamma_\mu u_{p_2\sigma_2})}{(p_1-p'_2)^2}\right]. \quad (13.7)$$

Даже когда нас не интересуют конкретные значения спина в начальном и в конечном состояниях, по-видимому, самый простой способ найти общие выражения для дифференциальных сечений — это вычислить их для всевозможных случаев задания спиральностей. Такой подход подсказывается уже анализом поляризации фотонов, проведенным в предыдущем параграфе. Там ряд результатов явился прямым следствием анализа разных спиральностей (или линейных поляризаций), а чтобы прийти к ним путем суммирований и усреднений по поляризациям, требовалось прибегать к определенным алгебраическим преобразованиям. Особенно заметным такого рода упрощение было в случае рассеяния фотонов с высокими энергиями, где спиральность стремится оставаться неизменной. Такая же тенденция проявляется и в рассматриваемом процессе, который естественно назвать электрон-электронным рассеянием. Общее выражение для спинора $u_{p\sigma}$ дает нам формула (6.90) из гл. 2:

$$u_{p\sigma}=\left[\left(\frac{p^0+m}{2m}\right)^{1/2}+\left(\frac{p^0-m}{2m}\right)^{1/2} i\gamma_5\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right]v_\sigma, \tag{13.8}$$

где v_σ — собственные векторы γ^0 с собственным значением $+1$. Если их выбрать так, чтобы они были и собственными векторами оператора $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, отождествив σ со спиральностью, то мы получим

$$u_{p\sigma}=\left[\left(\frac{p^0+m}{2m}\right)^{1/2}+\left(\frac{p^0-m}{2m}\right)^{1/2} i\gamma_5\sigma\right]v_\sigma\to$$

$$\to\left(\frac{p^0}{2m}\right)^{1/2}(1+i\gamma_5\sigma)\,v_\sigma, \tag{13.9}$$

где последнее выражение относится к высокоэнергетическому пределу, в котором спиральность становится связанной с собственным значением матрицы $i\gamma_5$. В системе центра масс, где энергии всех частиц равны $^1/_2M$, в высокоэнергетическом пределе имеет место равенство

$$(u^*_{p_1\sigma_1}u_{p_2\sigma_2})=\frac{M}{4m}v^*_{\sigma_1}(1+i\gamma_5\sigma_1)(1+i\gamma_5\sigma_2)\,v_{\sigma_2}=$$

$$=\frac{M}{4m}(1+\sigma_1\sigma_2)\,v^*_{\sigma_1}v_{\sigma_2}, \tag{13.10}$$

так как у $i\gamma_5$ нет диагональных матричных элементов в подпространстве $\gamma^{0\prime}=+1$; кроме того, пользуясь соотношением

$$\gamma^0\boldsymbol{\gamma}=i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}, \tag{13.11}$$

получаем

$$(u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}u_{p_2\sigma_2})=\frac{M}{4m}v^*_{\sigma_1}(1+i\gamma_5\sigma_1)i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}(1+i\gamma_5\sigma_2)\,v_{\sigma_2}=$$

$$=\frac{M}{4m}(\sigma_1+\sigma_2)\,v^*_{\sigma_1}\boldsymbol{\sigma}v_{\sigma_2}. \tag{13.12}$$

Мы видим, что величина $(u_{p_1\sigma_1}\gamma^0\gamma^\mu u_{p_2\sigma_2})$ обращается в нуль при $\sigma_1=-\sigma_2$. Спиральность в этих произведениях не изменяется при высоких энергиях из-за того, что $\gamma^0\gamma^\mu$ коммутирует с γ_5.

При условии $\sigma_1=\sigma_2$, $\sigma_1'=\sigma_2'$ мы получим, что произведение, входящее в первое слагаемое выражения (13.7), равно

$$(u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0\gamma^\mu u_{p_2\sigma_2})(u^*_{p_1'\sigma_1'}\gamma^0\gamma_\mu u_{p_2'\sigma_2'})=$$

$$=\left(\frac{M}{2m}\right)^2[-(v^*_{\sigma_1}v_{\sigma_2})(v^*_{\sigma_1'}v_{\sigma_2'})+\sigma_2\sigma_2'(v^*_{\sigma_1}\boldsymbol{\sigma}v_{\sigma_2})(v^*_{\sigma_1'}\boldsymbol{\sigma}v_{\sigma_2'})]. \tag{13.13}$$

Полнота совокупности четырех матриц 1, $\boldsymbol{\sigma}$ выражается основным тождеством (5.58) из гл. 2. Если в качестве произвольных матриц

X и Y взять соответствующие диадные произведения, то из этого тождества будет следовать равенство

$$-(v^*_{\sigma_1}v_{\sigma_2})(v^*_{\sigma'_1}v_{\sigma'_2})+(v^*_{\sigma_1}\sigma v_{\sigma_2})\cdot(v^*_{\sigma'_1}\sigma v_{\sigma'_2})=$$
$$=-2\left[(v^*_{\sigma_1}v_{\sigma_2})(v^*_{\sigma'_1}v_{\sigma'_2})-(v^*_{\sigma_1}v_{\sigma'_2})(v^*_{\sigma'_1}v_{\sigma_2})\right]. \quad (13.14)$$

Эта величина антисимметрична по индексам σ_2 и σ'_2 и по индексам σ_1 и σ'_1. Но обозначения здесь требуют осторожности. Хотя мы и написали, скажем, v_{σ_2}, не нужно забывать, что сюда неявным образом входит и направление импульса $\mathbf{p}_2$, на которое проектируется спин, давая компоненту σ_2. То, о чем мы только что говорили, как об антисимметрии по σ_2 и σ'_2, представляет собой, собственно говоря, антисимметрию по $p_2\sigma_2$ и $p'_2\sigma'_2$. Комбинация (3.14) не обращается в нуль, когда спиральности σ_2 и σ'_2 одинаковы.

Сначала мы рассмотрим случай равных начальных спиральностей. Тогда в формулу (13.13) войдет именно комбинация, даваемая тождеством (13.14), и в силу только что упомянутой антисимметрии два слагаемых, фигурирующих в формуле (13.7), объединятся в один член с множителем

$$\frac{1}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2}+\frac{1}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}'_2)^2}=\frac{1}{M^2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right). \quad (13.15)$$

Для вычисления произведений спиноров в (3.14) мы возьмем в качестве выделенного направления, т. е. оси z, направление векторов $\mathbf{p}_2=-\mathbf{p}'_2$ и опишем выбор равных спиральностей, или противоположных проекций спина на это направление, стандартными двухкомпонентными спинорами

$$v_{\sigma_2}=v_+=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad v_{\sigma'_2}=v_-=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \quad (13.16)$$

Спиноры v_{σ_1} и $v_{\sigma'_1}$ связаны точно так же, но с направлением векторов $\mathbf{p}_1=-\mathbf{p}'_1$, которое повернуто на угол θ вокруг, например, оси y, что записывается так:

$$\begin{aligned} v^*_{\sigma_1}&=v^*_+e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_y}=\left(\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right),\\ v^*_{\sigma'_1}&=v^*_-e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_y}=\left(-\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned} \quad (13.17)$$

В результате получаем

$$(v^*_{\sigma_1}v_{\sigma_2})(v^*_{\sigma'_1}v_{\sigma'_2})-(v^*_{\sigma_1}v_{\sigma'_2})(v^*_{\sigma'_1}v_{\sigma_2})=\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}=1. \quad (13.18)$$

Если рассматривать эту величину как комбинацию матричных элементов, то она представляет собой определитель унимодулярной матрицы вращения. Так как в матричном элементе всевозможные множители $2m$ и M сокращаются, а остается только $2e^2$, мы сразу же будем иметь

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\sigma_2=\sigma_2'}=\frac{\alpha^2}{M^2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)^2. \tag{13.19}$$

В случае противоположных начальных спиральностей комбинация, входящая в (3.13), с точностью до знака минус равна

$$(v^*_{\sigma_1}v_{\sigma_2})(v^*_{\sigma_1'}v_{\sigma_2'})+(v^*_{\sigma_1}\sigma v_{\sigma_2})\cdot(v^*_{\sigma'}\sigma v_{\sigma_2'})=2(v^*_{\sigma_1}v_{\sigma_2'})(v^*_{\sigma_1'}v_{\sigma_2}). \tag{13.20}$$

Двум вкладам в матричный элемент (13.7) теперь отвечают разные конечные состояния, которые не интерферируют в дифференциальных сечениях. Спиральные индексы связаны равенствами $\sigma_1=\sigma_2$, $\sigma_1'=\sigma_2'=-\sigma_2$ и $\sigma_1=\sigma_2'=-\sigma_2$, $\sigma_1'=\sigma_2$. Другими словами, единичной проекции углового момента на первоначальное направление движения может соответствовать любое из магнитных квантовых чисел $+1$ или -1, определяемых по отношению к общему направлению, которое задается рассеянными частицами. Переходя аккуратно от спиральностей к проекциям спина на два соответствующих направления и опуская множитель 2, для множителей, которые дает величина (13.20) в двух разных случаях, получаем:

$$\begin{aligned}&\sigma_1=\sigma_2, \qquad \sigma_1'=\sigma_2':\\ &\qquad (v^*_+e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_y}v_+)(v^*_+e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_y}v_+)=\cos^2\frac{\theta}{2},\\ &\sigma_1=\sigma_2', \qquad \sigma_1'=\sigma_2:\\ &\qquad (v^*_-e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_y}v_+)(v^*_-e^{\frac{i}{2}\theta\sigma_y}v_+)=\sin^2\frac{\theta}{2}.\end{aligned} \tag{13.21}$$

Дифференциальное сечение, равное сумме неинтерферирующих вкладов, имеет вид

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\sigma_2=-\sigma_2'}=\frac{\alpha^2}{M^2}\left[\frac{\cos^4\frac{\theta}{2}}{\sin^4\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin^4\frac{\theta}{2}}{\cos^4\frac{\theta}{2}}\right]. \tag{13.22}$$

Тригонометрический множитель в квадратных скобках можно написать также в виде

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)^2-2&=\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}-2\right)^2-2=\\ &=\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)^2-4\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)+2.\end{aligned} \tag{13.23}$$

Дифференциальное сечение, соответствующее первоначально неполяризованным электронам (достаточно иметь один неполяризованный пучок), равно полусумме сечений (13.19) и (13.22), (13.23), вычисленных в более частных случаях. Оно имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{M^2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}-1\right)^2 \tag{13.24}$$

и обладает двумя замечательными особенностями. Это сечение представляет собой полный квадрат, как будто вклад в него дает один-единственный процесс; кроме того, оно совпадает с дифференциальным сечением (12.79), описывающим рассеяние частиц со спином 0 при высоких энергиях.

Столь любопытная эквивалентность разных значений спина имеет место только в области очень высоких энергий, что яснее всего видно в случае рассеяния частиц с низкими энергиями ($M \approx 2m$). В этом случае спиноры $u_{p\sigma}$ сводятся по существу к собственным векторам v_σ с $\gamma^{0'} = +1$. Теперь, вместо того чтобы характеризовать состояния спиральностями, удобнее пользоваться проекциями всех спинов на некоторое общее направление в пространстве. Действительно, при таком выборе

$$(u^*_{p_1\sigma_1}u_{p_2\sigma_2}) \approx \delta_{\sigma_1\sigma_2}, \qquad (u^*_{p_1\sigma_1}i\gamma_5\sigma u_{p_2\sigma_2}) \approx 0, \tag{13.25}$$

и поэтому отдельные процессы рассеяния протекают без изменения магнитного квантового числа. В указанном низкоэнергетическом пределе спин и орбитальное движение динамически независимы в противоположность случаю чрезвычайно высоких энергий, где они связаны самым тесным образом. Когда начальные, а значит и конечные, магнитные квантовые числа одинаковы, вклады дают оба слагаемых в формуле (13.7), причем эти вклады различаются лишь знаками. В случае противоположных начальных магнитных квантовых чисел эффективным оказывается либо только первое, либо только второе слагаемое в зависимости от того, какие противоположные магнитные квантовые числа приписываются конечному состоянию. Поэтому усредненное по спину дифференциальное сечение будет равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{16}\frac{\alpha^2}{(M-2m)^2}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)^2+\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}}\right]=$$
$$=\frac{1}{16}\frac{\alpha^2}{(M-2m)^2}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)^2\right]. \tag{13.26}$$

Последняя форма записи соответствует усреднению по трем симметричным по спину состояниям, которые антисимметричны по пространственным координатам, и по одному антисимметричному по спину состоянию, которое симметрично по пространственным координатам. Этот результат, отвечающий статистике Ферми — Дирака, конечно, отличается от выражения для сечения (12.79), в которое входят только симметричные комбинации пространственных переменных.

Состояния, классифицируемые по значениям полного спина частиц, оказываются полезными и при высоких энергиях, если только магнитные квантовые числа для начальных и конечных частиц относить к разным направлениям в соответствии с тем, что в этом случае будет изменяться направление движения. Состояния с единичным угловым моментом и магнитными квантовыми числами, равными по модулю единице, и здесь совершенно не связаны с состоянием, магнитное квантовое число которого равно нулю. Это напоминает нам случай частицы с единичным спином, масса которой равна нулю (в данном случае она практически обращается в нуль в высокоэнергетическом пределе). Как мы уже сказали, переходы из начального состояния с единичным магнитным квантовым числом происходят только в такие конечные состояния, магнитные квантовые числа которых равны ± 1. Фактически весовые множители $\cos^4(\theta/2)$ и $\sin^4(\theta/2)$ в формуле (13.22) равны как раз вероятностям для единичного углового момента, которые связывают магнитное квантовое число $+1$ относительно начального направления с магнитными квантовыми числами $+1$ и -1 относительно конечного направления. При рассмотрении фотонов эти множители появлялись в сечениях (12.131). Состояние единичного спина с нулевым магнитным квантовым числом представляет собой симметричную комбинацию двух возможных состояний с одинаковыми спиральностями $\sigma = \sigma' = \pm 1$. Состояние нулевого спина является соответствующей антисимметричной комбинацией. Так как в отдельных актах рассеяния спиральности сохраняются, а обращение знака всех спиральностей не приводит ни к каким эффектам, переходы между состояниями с разными спинами происходить не будут, и поэтому выражение для дифференциального сечения (13.19) применимо к любому спиновому состоянию с нулевым магнитным квантовым числом.

Если классифицировать состояния по значениям спиральности, то для получения сечений рассеяния при произвольных энергиях потребуется затратить не так уж много усилий. Теперь, как видно из общего выражения

$$(u^*_{p_1\sigma_1} u_{p_2\sigma_2}) = v^*_{\sigma_1}\left(\frac{\frac{1}{2}M + m}{2m} + \frac{\frac{1}{2}M - m}{2m}\sigma_1\sigma_2\right)v_{\sigma_2} = \left\{\begin{array}{ll} \sigma_1 = \sigma_2: & \frac{M}{2m} v^*_{\sigma_1} v_{\sigma_2}, \\ \sigma_1 = -\sigma_2: & v^*_{\sigma_1} v_{\sigma_2}, \end{array}\right. \qquad (13.27)$$

спиральность в процессе рассеяния будет уже изменяться. Однако векторная структура

$$(u^*_{p_1\sigma_1} i\gamma_5 \sigma u_{p_2\sigma_2}) = \left(\frac{M^2}{4m^2} - 1\right)^{1/2} \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)\, v^*_{\sigma_1} \sigma v_{\sigma_2} \tag{13.28}$$

по-прежнему требует, чтобы спиральности были равны. Теперь мы просто выпишем относительные вклады всевозможных процессов — в усредненное по спину дифференциальное сечение эти вклады входят аддитивным образом. Они классифицируются по начальным и конечным магнитным квантовым числам, отнесенным к соответствующим направлениям, и по тому, изменилась или нет спиральность:

$$\begin{aligned}
&0 \to 0,\ \text{нет:} && \left[\left(\frac{M^2}{4m^2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right) - 1\right]^2,\\
&0 \to 0,\ \text{да:} && 1,\\
&0 \to \pm 1,\ \text{да:} && \frac{M^2}{4m^2}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2. \qquad (13.29)\\
&1 \to 1,\ \text{оба случая:} && \left[\left(\frac{M^2}{4m^2} - \frac{1}{2}\right)\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}\right]^2,\\
&1 \to -1,\ \text{оба случая:} && \left[\left(\frac{M^2}{4m^2} - \frac{1}{2}\right)\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}\right]^2.
\end{aligned}$$

В случае двух последних процессов константа $-1/2$ представляет собой вклад, связанный с изменением спиральности. Складывая все эти величины и вводя соответствующий множитель, мы получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{M^2}\Bigg[&\left(\frac{M^2 - 2m^2}{M^2 - 4m^2}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} - 1\right)^2 - \\
&- \frac{4m^2(M^2 - 3m^2)}{(M^2 - 4m^2)^2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} + 1\right)\Bigg].
\end{aligned} \tag{13.30}$$

Сечение (13.30) соответствует интерполяции между высокоэнергетическим (13.24) и низкоэнергетическим (13.26) выражениями. Оно напоминает результат (12.77), полученный в случае нулевого спина, но все же отличается от него всюду, кроме области высоких энергий.

В случае электрон-позитронного рассеяния мы вернемся к выражению (13.1) и рассмотрим оба его слагаемых с токами

$$j^{\mu}_{11}(x)=\frac{1}{2}\psi_1(x)\gamma^0\gamma^{\mu}eq\psi_1(x)=$$
$$=\sum_{p_1\sigma_1p_1'\sigma_1'} i\eta^*_{p_1'\sigma_1'-q}i\eta^*_{p_1\sigma_1q}(-eq)\psi^*_{p_1'\sigma_1'-q}(x)\gamma^0\gamma^{\mu}\psi^*_{p_1\sigma_1q}(x) \qquad (13.31)$$

и

$$j^{\mu}_{22}(x)=\frac{1}{2}\psi_2(x)\gamma^0\gamma^{\mu}eq\psi_2(x)=$$
$$=\sum_{p_2\sigma_2p_2'\sigma_2'}(-eq)\psi_{p_2\sigma_2q}(x)\gamma^0\gamma^{\mu}\psi_{p_2'\sigma_2'-q}(x)\,i\eta_{p_2\sigma_2q}i\eta_{p_2'\sigma_2'-q}, \qquad (13.32)$$

где уже собраны два одинаковых вклада, отвечающих конкретной паре противоположно заряженных частиц. Матричный элемент перехода, определяющийся коэффициентом при

$$i\eta^*_{p_1'\sigma_1'-q}i\eta^*_{p_1\sigma_1q}i\eta_{p_2\sigma_2q}i\eta_{p_2'\sigma_2'-q}, \qquad (13.33)$$

равен

$$\langle 1_{p_1\sigma_1q}1_{p_1'\sigma_1'-q}\,|\,T\,|\,1_{p_2\sigma_2q}1_{p_2'\sigma_2'-q}\rangle=(2m)^2\,(d\omega_{p_1}\,d\omega_{p_1'}\,d\omega_{p_2}\,d\omega_{p_2'})^{1/2}\times$$
$$\times e^2\left[-\frac{(u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0\gamma^{\mu}u_{p_2\sigma_2})(u^*_{p_1'\sigma_1'}\gamma^0\gamma_{\mu}u_{p_2'\sigma_2'})}{(p_1-p_2)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(u^*_{p_1'\sigma_1',-q}\gamma^0\gamma^{\mu}u^*_{p_1\sigma_1q})(u_{p_2\sigma_2q}\gamma^0\gamma_{\mu}u_{p_2'\sigma_2'-q})}{(p_1+p_1')^2}\right]. \qquad (13.34)$$

Перекрестное соотношение между этим матричным элементом и матричным элементом для рассеяния одноименных зарядов и на этот раз следует из того, что процессы испускания и поглощения объединены в поле $\psi(x)$. Такая унификация находит свое выражение в формальных подстановках

$$\eta_{2p\sigma q}\leftrightarrow\eta^*_{1p-\sigma-q},\qquad \psi_{p\sigma q}(x)\leftrightarrow\psi^*_{p-\sigma-q}(x). \qquad (13.35)$$

Произведя в формуле (13.7) подстановки

$$p_2'\leftrightarrow -p_1',\qquad u_{p_2'\sigma_2'q}\to u^*_{p_1'\sigma_1'-q},\qquad u^*_{p_1'\sigma_1'q}\to u_{p_2'\sigma_2'-q}, \qquad (13.36)$$

мы получим (13.34), но с дополнительным знаком минус. Он возникает из-за перегруппировки, необходимой для того, чтобы прийти к стандартному порядку перемножения источников (13.33). Так как два источника, отвечающих заряду $-q$, должны поменяться местами, мы имеем

$$\eta^*_{p_1'\sigma_1'q}\eta^*_{p_1\sigma_1q}\eta_{p_2\sigma_2q}\eta_{p_2'\sigma_2'q}\to\eta_{p_2'\sigma_2'-q}\eta^*_{p_1\sigma_1q}\eta_{p_2\sigma_2q}\eta^*_{p_1'\sigma_1'-q}=$$
$$=-\eta^*_{p_1'\sigma_1'-q}\eta^*_{p_1\sigma_1q}\eta_{p_2\sigma_2q}\eta_{p_2'\sigma_2'-q} \qquad (13.37)$$

(множитель i^4 здесь опущен).

Для единообразия трактовки обоих слагаемых в выражении (13.34) мы воспользуемся соотношением (6.134) из гл. 2

$$u^*_{p-\sigma-q} = i\sigma\gamma_5 u_{p\sigma q}, \tag{13.38}$$

которое дает

$$\begin{aligned}(u^*_{p_1'\sigma_1'-q}\gamma^0\gamma^\mu u^*_{p_1\sigma_1 q})\,(u_{p_2\sigma_2 q}\gamma^0\gamma_\mu u_{p_2'\sigma_2'-q}) &= \\ = \sigma_1\sigma_2\,(u^*_{p_1'\sigma_1'}\gamma^0\gamma^\mu i\gamma_5 u_{p_1-\sigma_1})\,(u^*_{p_2-\sigma_2}\gamma^0\gamma_\mu i\gamma_5 u_{p_2'\sigma_2'}),\end{aligned} \tag{13.39}$$

где спаренные теперь зарядовые индексы опущены. Действие дополнительного множителя γ_5 иллюстрируется равенствами

$$\begin{aligned} u^*_{p_2-\sigma_2} i\gamma_5 u_{p_2'\sigma_2'} &= \left(\frac{M^2}{4m^2}-1\right)^{1/2}\frac{1}{2}(\sigma_2'-\sigma_2)\,v^*_{-\sigma_2}v_{\sigma_2'} = 0, \\ u^*_{p_2-\sigma_2}\boldsymbol{\sigma} u_{p_2'\sigma_2'} &= \begin{cases} \sigma_2 = -\sigma_2'\colon & \dfrac{M}{2m}\,v^*_{-\sigma_2}\boldsymbol{\sigma} v_{\sigma_2'}, \\ \sigma_2 = \sigma_2'\colon & v_{-\sigma_2}\boldsymbol{\sigma} v_{\sigma_2'}. \end{cases}\end{aligned} \tag{13.40}$$

Первое из них основывается на том, что в системе центра масс частицы движутся в противоположные стороны. Здесь возникает непримиримое противоречие, поскольку численный множитель требует, чтобы спиральности $-\sigma_2$ и σ_2' были одинаковы, а произведение спиноров требует, чтобы были одинаковы магнитные квантовые числа, т. е. чтобы спиральности $-\sigma_2$ и σ_2' имели противоположные значения. Ситуация здесь аналогична случаю частицы со спином 1, где в системе покоя временная компонента векторного поля обращается в нуль.

Как видно из выражений (13.40), при высоких энергиях в столкновениях с одинаковыми начальными спиральностями доминирует первое слагаемое (13.34), которое отличается от своего аналога в рассеянии одноименных зарядов только знаком; следовательно [см. формулу (13.19)],

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\sigma_2=\sigma_2'} = \frac{\alpha^2}{M^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} = \frac{\alpha^2}{M^2}\cos^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)^2. \tag{13.41}$$

В важнейшем случае, когда $\sigma_2 = -\sigma_2'$, $\sigma_1 = -\sigma_1'$, для (13.39) в области высоких энергий получаем

$$\begin{aligned}(u^*_{p_1'\sigma_1'-q}\gamma^0\gamma^\mu u^*_{p_1\sigma_1 q})\,(u_{p_2\sigma_2 q}\gamma^0\gamma_\mu u_{p_2'\sigma_2'-q}) &= \\ = \left(\frac{M}{2m}\right)^2\sigma_1\sigma_2\,(v^*_{\sigma_1'}\boldsymbol{\sigma} v_{-\sigma_1})\cdot(v^*_{-\sigma_2}\boldsymbol{\sigma} v_{\sigma_2'}) &= \\ = \left(\frac{M}{2m}\right)^2\sigma_1\sigma_2 2\,(v^*_{\sigma_1'}v_{\sigma_2'})\,(v^*_{-\sigma_2}v_{-\sigma_1}),\end{aligned} \tag{13.42}$$

причем мы воспользовались формулой (13.20) и первым равенством (13.40). Первое слагаемое в (13.34) дает вклад только в процесс с $\sigma_1 = \sigma_2$, и, вспоминая, что

$$(p_1 + p_1')^2 = -M^2, \tag{13.43}$$

мы будем иметь

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\sigma_2=-\sigma_2'} = \frac{\alpha^2}{M^2}\left[\left(\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{\alpha^2}{M^2}\cos^4\frac{\theta}{2}\left[\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} - 2\right)^2 - 2\right]. \tag{13.44}$$

Среднее значение сечений (13.41) и (13.44), представляющее собой дифференциальное сечение для неполяризованных частиц, равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{M^2}\cos^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} - 1\right)^2. \tag{13.45}$$

Оно также совпадает с дифференциальным сечением для спина 0 в области высоких энергий. Как и в формуле (12.88), связь высокоэнергетического электрон-позитронного рассеяния с высокоэнергетическим электрон-электронным рассеянием обеспечивается простым множителем $\cos^4(\theta/2)$.

Поскольку знаменатели в формуле (13.34) несоразмерны в области низких энергий, при $M \sim 2m$ достаточно велико только первое слагаемое и

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16}\frac{\alpha^2}{(M-2m)^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{13.46}$$

Общую формулу, объединяющую оба предельных выражения для сечений (13.45) и (13.46), можно получить, как и в случае электрон-электронного рассеяния, рассматривая все спиральные переходы, возможные при промежуточных энергиях. Но перекрестные соотношения делают это необязательным. Соотношения между отдельными амплитудами переходов применимы и к суммам квадратов модулей этих амплитуд по спиральностям. Таким образом, исходя из результатов для электрон-электронного рассеяния, приведенных в (13.30), можно найти искомое выражение для электрон-позитронного рассеяния. Перекрестное преобразование $p_1' \leftrightarrow -p_2'$ означает подстановку

$$(p_1 - p_2')^2 \leftrightarrow (p_1 + p_2')^2, \tag{13.47}$$

или, если записать эту подстановку через параметры M и θ,

$$(M^2 - 4m^2)\cos^2\frac{\theta}{2} \leftrightarrow -M^2, \tag{13.48}$$

тогда как величина

$$(p_1-p_2)^2=(M^2-4m^2)\sin^2\frac{\theta}{2} \qquad (13.49)$$

остается неизменной. В качестве простого примера применения такой процедуры произведем подстановки в высокоэнергетическом пределе электрон-электронного рассеяния:

$$\left(\frac{M^2}{M^2\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{M^2}{M^2\cos^2\frac{\theta}{2}}-1\right)^2\to\left(\frac{-M^2\cos^2\frac{\theta}{2}}{M^2\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{-M^2\cos^2\frac{\theta}{2}}{-M^2}-1\right)^2=$$

$$=\cos^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}-1\right)^2. \qquad (13.50)$$

Связь между двумя дифференциальными сечениями рассеяния при высоких энергиях стала теперь совершенно прозрачной.

Произведя подстановки (13.48) в общей формуле (13.30) для дифференциального сечения электрон-электронного рассеяния в случае неполяризованных пучков, мы получим соответствующее дифференциальное сечение электрон-позитронного рассеяния (кинематический множитель $1/M^2$, конечно, не участвует в этих преобразованиях):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{M^2}\left\{\left[\frac{2m^2}{M^2-4m^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}-1\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2m^2}{M^2}\cos\theta\right]^2-\frac{5m^2}{M^2-4m^2}\frac{4m^2}{M^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{8m^2}{M^2}\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right\}. \qquad (13.51)$$

Первый член, заключенный в квадратные скобки, совпадает с дифференциальным сечением рассеяния противоположно заряженных частиц со спином 0, хотя он и написан в несколько иной форме, выявляющей характер его низкоэнергетического и высокоэнергетического поведения. Упомянутое сечение для спина 0 было выписано лишь в неявной форме, в виде величины (12.87), половина которой и равна выражению в квадратных скобках в формуле (13.51). Двумя дополнительными слагаемыми в (13.51) можно пренебречь по сравнению с другими членами как при низких, так и при высоких энергиях, но в промежуточной области они могут оказаться весьма значительными.

Для иллюстрации рассеяния заряженных частиц разных типов мы рассмотрим также взаимодействие между частицей со спином 0 и частицей со спином $^1/_2$. Соответствующий вектор электрического тока равен сумме токов, отвечающих каждому типу частиц, и член взаимодействия в W_{40} имеет вид

$$W_{40} \to \int (dx)(dx')\, j^{\mu}(x)_{\text{спин}\,\frac{1}{2}}\, D_+(x-x')\, j_{\mu}(x')_{\text{спин}\,0}. \qquad (13.52)$$

Матричный элемент перехода можно написать сразу же:

$$\langle 1_{p_1\sigma_1 q} 1_{p_1' q_1'} | T | 1_{p_2\sigma_2 q} 1_{p_2' q'} \rangle =$$

$$= 2m\,(d\omega_{p_1}\, d\omega_{p_1'}\, d\omega_{p_2}\, d\omega_{p_2'})^{1/2}\, e^2 q q' \,\frac{(u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0\gamma^{\mu} u_{p_2\sigma_2}\,(p_1'+p_2')_{\mu}}{(p_1-p_2)^2}, \qquad (13.53)$$

где все величины со штрихами относятся к частице со спином 0. Точно так же m и m' будут массы частиц со спинами $^1/_2$ и 0. Если ввести полный импульс

$$P = p_1 + p_1' = p_2 + p_2', \qquad (13.54)$$

то можно добиться некоторого упрощения, так как

$$\gamma(p_1' + p_2') = 2\gamma P - \gamma p_1 - \gamma p_2 \qquad (13.55)$$

и поэтому

$$u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0\gamma\,(p_1'+p_2')\, u_{p_2\sigma_2} = 2u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0\,(\gamma P + m)\, u_{p_2\sigma_2} =$$
$$= -2u^*_{p_1\sigma_1}(M - m\gamma^0)\, u_{p_2\sigma_2}, \qquad (13.56)$$

причем последнее выражение написано в системе центра масс. Подставив спиральную конструкцию (13.9), получим

$$u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0\gamma\,(p_1'+p_2')\, u_{p_2\sigma_2} =$$

$$= -2\left[(M-m)\frac{p^0+m}{2m} + (M+m)\frac{p^0-m}{2m}\,\sigma_1\sigma_2\right] v^*_{\sigma_1} v_{\sigma_2}, \qquad (13.57)$$

и из кинематики рассматриваемого процесса следует, что энергия электрона и модуль вектора импульса, которые остаются неизменными при столкновении в системе центра масс, даются выражениями

$$p^0 = \frac{M^2 + m^2 - m'^2}{2M},$$
$$|\mathbf{p}| = \frac{1}{2M}\,[M^2 - (m-m')^2]^{1/2}\,[M - (m+m')^2]^{1/2}. \qquad (13.58)$$

В области высоких энергий, где массы отдельных частиц пренебрежимо малы, спиральность электрона сохраняется в процессе рассеяния:

$$\sigma_1 = \sigma_2: \qquad 2mu^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0\gamma\,(p_1'+p_2')\, u_{p_2\sigma_2} = -2M^2\cos\frac{\theta}{2}, \qquad (13.59)$$

и

$$M \gg m,\ m': \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{M^2}\,\frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}}. \qquad (13.60)$$

В области низких энергий, если спин электрона отнесен к фиксированному направлению и магнитное квантовое число в процессе рассеяния не изменяется, то

$$M \approx m + m': \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16} \frac{\alpha^2}{(M - m - m')^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \tag{13.61}$$

Общее выражение для сечения, просуммированного по конечным спинам и усредненного по начальным спинам (впрочем, последнее здесь необязательно), имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{[M^2 - (m - m')^2]^2 \, [M^2 - (m + m')^2]^2} \times \\ \times \left[M^2 (M^2 - m^2 - m'^2)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + m^2 (M^2 - m^2 + m'^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \tag{13.62}$$

Интересно рассмотреть два предельных случая, в которых масса одной из частиц становится очень большой не только по сравнению с массой, но и с полной энергией второй частицы. Если такую большую массу обозначить через m', то удобнее ввести

$$M - m' \to p^0, \qquad \frac{p^0}{m'} \to 0, \tag{13.63}$$

так что энергия электрона в системе центра масс будет совпадать с его энергией в системе координат, в которой тяжелая частица покоится. Предельный переход дает:

спин $^1/_2$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \alpha^2 \left[\frac{p^0}{(p^0)^2 - m^2} \right]^2 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m^2}{(p^0)^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) =$$

$$= \begin{cases} p^0 \gg m: & \dfrac{1}{4} \dfrac{\alpha^2}{(p^0)^2} \dfrac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \\[2ex] p^0 \approx m: & \dfrac{1}{16} \dfrac{\alpha^2}{(p^0 - m)^2} \dfrac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \end{cases} \tag{13.64}$$

Аналогичное предельное выражение для случая, в котором очень тяжелой является частица со спином $^1/_2$, имеет тот же вид, что и (13.64), но без тригонометрического множителя в числителе:

спин 0:
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{4}\alpha^2\left[\frac{p^0}{(p^0)^2-m^2}\right]^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}=$$
$$=\begin{cases} p^0 \gg m: & \dfrac{1}{4}\dfrac{\alpha^2}{(p^0)^2}\dfrac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}, \\ p^0 \approx m: & \dfrac{1}{16}\dfrac{\alpha^2}{(p^0-m)^2}\dfrac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}; \end{cases} \tag{13.65}$$

излишний теперь штрих у m здесь опущен. Оба дифференциальных сечения отождествляются с движущейся частицей, а очень массивная частица действует лишь в качестве неподвижного заряда. Возможность применения формализма источников при этих условиях мы рассмотрим в следующем параграфе.

Но сначала мы исследуем некоторые процессы с участием фотонов и частиц со спином $^1/_2$, описывающиеся выражением (12.24) для W_{22}. Электрон-позитронная аннигиляция в два фотона характеризуется величиной

$$W_{22}\to\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\,\psi_2(x)\gamma^0 eq\gamma A_1(x)\times$$
$$\times G_+(x-x')\,eq\gamma A_1(x')\,\psi_2(x'), \tag{13.66}$$

и коэффициенты при $iJ^*_{k_1\lambda_1}iJ^*_{k_1'\lambda_1'}i\eta_{p_2'\sigma_2'-q}i\eta_{p_2\sigma_2q}$ дают

$$\langle 1_{k_1\lambda_1}1_{k_1'\lambda_1'}\,|\,T\,|\,1_{p_2'\sigma_2'-q}1_{p_2\sigma_2q}\rangle=2m\,(d\omega_{k_1}d\omega_{k_1'}d\omega_{p_2}d\omega_{p_2'})^{1/2}\times$$
$$\times e^2u_{p_2'\sigma_2'-q}\gamma^0\left[\gamma e^*_{k_1'\lambda_1'}\frac{1}{\gamma(p_2-k_1)+m}\gamma e^*_{k_1\lambda_1}+\right.$$
$$\left.+\gamma e^*_{k_1\lambda_1}\frac{1}{\gamma(p_2-k_1')+m}\gamma e^*_{k_1'\lambda_1'}\right]u_{p_2\sigma_2q}. \tag{13.67}$$

Симметрия Бозе—Эйнштейна по $k_1\lambda_1$, $k_1'\lambda_1'$ очевидна, а в антисимметрии Ферми—Дирака по $p_2\sigma_2q$, $p_2'\sigma_2'-q$ можно убедиться (напомним, что $\gamma_\mu^T=-\gamma^0\gamma_\mu\gamma^0$), пользуясь кинематическими соотношениями

$$-(p_2-k_1')=p_2'-k_1,\qquad -(p_2-k_1)=p_2'-k_1'. \tag{13.68}$$

Как мы увидим, динамический множитель в формуле (13.67) удобнее записывать в виде

$$e^2\sigma_2'u^*_{p_2'-\sigma_2'}\gamma^0 i\gamma_5\left[\gamma e^*_{k_1'\lambda_1'}\frac{m-\gamma(p_2-k_1)}{-2p_2k_1}\gamma e^*_{k_1\lambda_1}+\right.$$
$$\left.+\gamma e^*_{k_1\lambda_1}\frac{m-\gamma(p_2-k_1')}{-2p_2k_1'}\gamma e^*_{k_1\lambda_1}\right]u_{p_2\sigma_2}. \tag{13.69}$$

В системе центра масс энергии всех электронов и фотонов равны $^1/_2\, M$ и

$$
\begin{aligned}
-2p_2k_1 &= \frac{1}{2} M\,[M-(M^2-4m^2)^{1/2}\cos\theta],\\
-2p_2k_1' &= \frac{1}{2} M\,[M+(M^2-4m^2)^{1/2}\cos\theta].
\end{aligned}
\tag{13.70}
$$

Особенно простым оказывается случай аннигиляции медленно движущихся частиц, в котором формула (13.69) принимает вид

$$
e^2\sigma_2' v^*_{-\sigma_2'} i\gamma_5 \Big[\, \boldsymbol{\gamma}\cdot \mathbf{e}^*_{k_1'\lambda_1'} \frac{m+\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}_1}{2m^2} \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}^*_{k_1\lambda_1} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}^*_{k_1\lambda_1} \frac{m-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}_1}{2m^2} \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}^*_{k_1'\lambda_1'} \Big] v_{\sigma_2}. \tag{13.71}
$$

Эта величина, умноженная на $2m$, сводится к $\gamma^0\boldsymbol{\gamma} = i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}$:

$$
\frac{e^2}{m}\,\sigma' v^*_{-\sigma'}\,[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}^*,\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}^*]\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k} v_\sigma = 2e^2 i\sigma'\delta_{\sigma\sigma'}\mathbf{e}^*\times\mathbf{e}^*\cdot\frac{\mathbf{k}}{m}, \tag{13.72}
$$

где ненужные теперь причинные индексы отброшены. Здесь не равны нулю только члены с четным числом множителей γ_5, и мы воспользовались тем обстоятельством, что вектор $\mathbf{e}\times\mathbf{e}'$ должен быть параллельным $\mathbf{k}$. Равенство спиральностей указывает на то, что магнитные квантовые числа принимают противоположные значения, причем имеет место антисимметрия, задаваемая множителем σ'. Поэтому в случае медленно движущихся частиц двухфотонная аннигиляция свойственна только синглетному состоянию с нулевым полным спином. Соответствующее двухфотонное состояние с нулевым угловым моментом, т. е. линейная комбинация двух состояний с равными спиральностями, определяется векторами перпендикулярной поляризации двух фотонов. Если вспомнить, что

$$
M-2m = \frac{1}{4} mv^2,\quad v \ll 1:\qquad \left(1-\frac{4m}{M^2}\right)^{-1/2} = \frac{2}{v}, \tag{13.73}
$$

то для дифференциального сечения на единичный телесный угол для заданной пары перпендикулярно поляризованных фотонов, когда частицы находятся в синглетном состоянии, мы получим $(\alpha^2/m^2)\,(1/v)$. Чтобы вычислить полное сечение аннигиляции для неполяризованных частиц, следует ввести следующие дополнительные множители: 2 — по числу поляризаций, свойственных одному фотону, так как поляризация другого фиксирована требованием перпендикулярности; $^1/_4$ — статистический вес синглетного состояния; 2π — полный телесный угол, в который может вылететь любой из фотонов, причем мы приняли во внимание, что конечные состояния не следует учитывать дважды. Это дает сечение

$$
v \ll 1:\qquad \sigma = \pi\frac{\alpha^2}{m^2}\frac{1}{v}, \tag{13.74}
$$

составляющее половину от аналогичного сечения аннигиляции частиц со спином 0.

Интересно отметить, что если рассматривается то же самое низкоэнергетическое столкновение, то матричный элемент перехода (13.72) можно получить непосредственно из эффективного члена взаимодействия

$$W_{22\,\text{эфф}} = \frac{e^2}{2m^3} \int (dx)\, \frac{1}{2} \psi(x)\, \gamma^0\gamma_5\psi(x) \left(-\frac{1}{4}\right) {}^*F^{\mu\nu}(x)\, F_{\mu\nu}(x), \quad (13.75)$$

где

$$\left(-\frac{1}{4}\right) {}^*F^{\mu\nu}(x)\, F_{\mu\nu}(x) = \mathbf{E}(x)\cdot\mathbf{H}(x). \quad (13.76)$$

В его пространственно-временной локальности, противоположной нелокальности выражения (13.66), находят свое специфическое отражение те предельные по энергии условия, которые препятствуют какому бы то ни было более детальному пространственно-временному описанию процесса.

При вычислении величины (13.69) в области высоких энергий массой m в числителях можно пренебречь. Как мы увидим ниже, такая процедура оправдана, если исключить очень малые углы, отвечающие рассеянию вперед и назад:

$$\sin\theta \gg \frac{m}{M}. \quad (13.77)$$

Поскольку возникающая при этом матрица коммутирует с γ_5, спиральности будут сохраняться ($-\sigma_2' = \sigma_2$) и аннигиляция происходит только в состояниях с единичным магнитным квантовым числом. Здесь следует быть осторожным и не путать последнее утверждение, относящееся к спинорам $u_{p_2'\sigma_2'-q}$ и $u_{p_2\sigma_2 q}$, со свойствами спиноров $u^*_{p_2'-\sigma_2'}$ и $u_{p_2\sigma_2}$, у которых магнитные квантовые числа противоположны, так как спиральности $-\sigma_2'$ и σ_2 равны. При высоких энергиях величина (13.69), записанная в упрощенных обозначениях и умноженная на $2m/e^2$, равна ($-\sigma' = \sigma$)

$$\frac{1}{M}\, \sigma v^*_{-\sigma} \left[\frac{\sigma\cdot\mathbf{e}'^*\sigma\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{k})\,\sigma\cdot\mathbf{e}^*}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{\sigma\cdot\mathbf{e}^*\sigma\cdot(\mathbf{p}+\mathbf{k})\,\sigma\cdot\mathbf{e}'^*}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \right] v_\sigma. \quad (13.78)$$

В качестве выделенного направления для спина, т. е. в качестве оси z, удобно использовать импульс фотона $\mathbf{k}$. Тогда ортогональные спиноры, описывающие состояния частиц с магнитными квантовыми числами $\pm {}^1/_2$ относительно направления $\mathbf{p}$, можно представить в виде

$$\begin{aligned} v_\sigma &= v_+ \cos\frac{\theta}{2} + v_- \sin\frac{\theta}{2}, \\ v^*_{-\sigma'} &= -v_+^* \sin\frac{\theta}{2} + v_-^* \cos\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (13.79)$$

Векторы поляризации фотона входят в комбинациях

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_+^* &= \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_-'^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x - i\sigma_y), \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_-^* &= \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_+'^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + i\sigma_y), \end{aligned} \tag{13.80}$$

которые повышают и понижают магнитные квантовые числа частицы на единицу:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)\, v_- = v_+, \qquad v_-^* \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = v_+^*, \\ &\frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)\, v_+ = v_-, \qquad v_+^* \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = v_-^*, \end{aligned} \tag{13.81}$$

причем все прочие комбинации равны нулю. Это позволяет сразу же написать значения (13.78) для любого выбора спиральностей фотона. Так, например, при $\lambda = -\lambda' = +1$ мы будем иметь

$$\lambda = -\lambda' = +1:$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{2}{M}\right) v_+^* \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} v_- \left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right) =$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\left(\frac{4}{\sin^2\theta}\right) = 2\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}, \tag{13.82}$$

и точно так же

$$\lambda = -\lambda' = -1:$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\left(\frac{4}{\sin^2\theta}\right) = 2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \tag{13.83}$$

тогда как при одинаковых спиральностях, $\lambda = \lambda' = \pm 1$, получаются нулевые результаты. Как и в случае спина 0, аннигиляционные фотоны в области высоких энергий несут только максимальную проекцию углового момента (± 2) на направление своего движения. И в этом случае геометрические множители (13.82) и (13.83), входящие в вероятности переходов в виде $\sin^2\theta\cos^4(\theta/2)$ и $\sin^2\theta\sin^4(\theta/2)$, допускают элементарную интерпретацию. Они представляют собой вероятности для спина 2, которые связывают магнитное квантовое число $+1$ относительно заданного направления с магнитными квантовыми числами $+2$ и -2 относительно другого направления, составляющего с исходным угол θ. В случае спина 0 в амплитуду перехода вместе с геометрическим множителем $\sin\theta$ входит также множитель $1/\sin^2\theta$, что приводит к изотропному дифференциальному сечению. Теперь, однако, усредненное по спину дифференциальное сечение имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{M^2}\left(\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{\alpha^2}{M^2}\left(\frac{2}{\sin^2\theta}-1\right), \quad (13.84)$$

причем это изменение в характере углового распределения полностью обусловлено тем, что магнитное квантовое число начального состояния стало равным не нулю, а единице.

Именно сингулярность полученного дифференциального сечения при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ приводит к тому, что нарушается его универсальная справедливость для всех углов в области высоких энергий. Это ложные сингулярности, и связаны они с несостоятельностью высокоэнергетического приближения

$$\begin{gathered}1-\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\cos\theta\to 2\sin^2\frac{\theta}{2},\\ 1+\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\cos\theta\to 2\cos^2\frac{\theta}{2}\end{gathered} \quad (13.85)$$

при углах $\theta=0$ в первом случае и $\theta=\pi$ во втором. Достаточное уточнение приближения обеспечивают подстановки

$$\begin{gathered}1-\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\cos\theta\to 2\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{m^2}{M^2}\right),\\ 1+\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\cos\theta\to 2\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{m^2}{M^2}\right).\end{gathered} \quad (13.86)$$

Можно пользоваться также их произведением

$$1-\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)\cos^2\theta\to\sin^2\theta+\frac{4m^2}{M^2}, \quad (13.87)$$

откуда становится ясным происхождение требования (13.77), предъявляемого к углам. Могло бы показаться, что достаточно заменить (13.84) выражением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{M^2}\left(\frac{2}{\sin^2\theta+\frac{4m^2}{M^2}}-1\right), \quad (13.88)$$

приводящим к полному сечению аннигиляции

$$\sigma=2\pi\frac{\alpha^2}{M^2}\left(\ln\frac{M^2}{m^2}-1\right), \quad (13.89)$$

и этот результат будет правильным. Но так кажется лишь с первого взгляда.

Если улучшенный вариант (13.86) подставить в знаменатели слагаемых в формуле (13.78), а тем самым и в формулах (13.82) и (13.83), то мы получим сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{M^2}\frac{2\sin^2\theta\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)}{\left(\sin^2\theta+\frac{4m^2}{M^2}\right)^2}, \tag{13.90}$$

которое не совпадает с сечением (13.88). В действительности мы кое-что опустили, и это кое-что — вклад членов с m в (13.69), которыми нельзя пренебрегать при $\sin\theta \sim m/M$. Указанные члены антикоммутируют с γ_5, так что спиральность меняет свое значение на противоположное или выполняется равенство $\sigma_2' = \sigma_2$, и в результате существенными оказываются только начальные состояния с нулевым магнитным квантовым числом. Соответствующий вклад в выражение (13.69), умноженный на $2m/e^2$, равен ($\sigma' = \sigma$)

$$-\frac{m}{M}v^*_{-\sigma'}\left[\frac{\sigma\cdot e'^*\sigma\cdot e^*}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{m^2}{M^2}}+\frac{\sigma\cdot e^*\sigma\cdot e'^*}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{m^2}{M^2}}\right]v_\sigma. \tag{13.91}$$

Поскольку в области высоких энергий этот механизм несуществен во всех случаях, кроме случая малых значений $\sin\theta$, нам не нужно проводить различие между направлениями векторов $\pm\mathbf{p}$ и $\pm\mathbf{k}$. Спиноры можно выбрать в виде

$$v_\sigma = v_+, \qquad v^*_{-\sigma'} = v^*_+ \tag{13.92}$$

и учесть, что могут испускаться только фотоны с одинаковой спиральностью:

$$\begin{aligned}\lambda=\lambda'=+1: &\quad -\frac{2m}{M}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{m^2}{M^2}},\\ \lambda=\lambda'=-1: &\quad -\frac{2m}{M}\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{m^2}{M^2}}.\end{aligned} \tag{13.93}$$

Это дает следующую прибавку к усредненному по спину дифференциальному сечению:

$$\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{M^2}\left(\frac{m}{M}\right)^2\left[\frac{1}{\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{m^2}{M^2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{m^2}{M^2}\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{\alpha^2}{M^2}2\frac{\frac{4m^2}{M^2}}{\left(\sin^2\theta+\frac{4m^2}{M^2}\right)^2}. \tag{13.94}$$

Добавив ее к сечению (13.90), мы в результате получим выражение (13.88). Заметим, что дифференциальное сечение испускания вперед и назад обязано своим происхождением исключительно этому последнему процессу. Величина такого сечения $^1/_2\,(\alpha^2/m^2)$, отнесенная к единице телесного угла, отличается только множителем 2 от результата расчета в низкоэнергетическом пределе, если заменить кинематический множитель $2/v$ его значением в области высоких энергий, равным единице [см. формулу (13.73)].

При вычислении величины (13.69) в общем случае мы встретим мало такого, с чем бы уже не сталкивались в случае высоких энергий, если не считать часто появляющегося теперь параметра

$$\varkappa=\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}. \tag{13.95}$$

Подставив в формулу (13.69) спиральную конструкцию спиноров (13.9) и умножив полученное выражение на $2m/e^2$, мы будем иметь

$$\begin{gathered}-\frac{2}{M}\left(\frac{\sigma'-\sigma}{2}+\frac{2m}{M}\frac{\sigma+\sigma'}{2}\right)\times\\ \times v^*_{-\sigma'}\left[\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}'^*\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{k})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}^*}{1-\varkappa\cos\theta}+\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}^*\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}+\mathbf{k})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}'^*}{1+\varkappa\cos\theta}\right]v_\sigma-\\ -\frac{2m}{M}\varkappa\frac{\sigma+\sigma'}{2}v^*_{-\sigma'}\left[\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}'^*\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}^*}{1-\varkappa\cos\theta}+\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}^*\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}'^*}{1+\varkappa\cos\theta}\right]v_\sigma.\end{gathered} \tag{13.96}$$

Перечислим теперь различные возможные варианты:

$$\begin{aligned}\sigma=-\sigma'=+1,\qquad &\lambda=-\lambda'=+1:\\ &\qquad\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\varkappa\frac{4}{1-\varkappa^2\cos^2\theta},\\ &\lambda=-\lambda'=-1:\\ &\qquad\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\varkappa\frac{4}{1-\varkappa^2\cos^2\theta},\\ &\lambda=\lambda'=\pm1:\ 0\end{aligned} \tag{13.97}$$

и

$$\begin{aligned}\sigma=\sigma'=+1,\qquad &\lambda=-\lambda'=\pm1:\\ &\qquad-\frac{4m}{M}\varkappa\frac{\sin^2\theta}{1-\varkappa^2\cos^2\theta},\\ &\lambda=\lambda'=+1:\\ &\qquad-\frac{4m}{M}(1+\varkappa)\frac{1}{1-\varkappa^2\cos^2\theta},\\ &\lambda=\lambda'=-1:\\ &\qquad\frac{4m}{M}(1-\varkappa)\frac{1}{1-\varkappa^2\cos^2\theta}.\end{aligned} \tag{13.98}$$

Единственный переход, который не рассматривался при анализе случая высоких энергий, — это переход с начальным магнитным квантовым числом, равным нулю, и с конечными магнитными квантовыми числами, равными ± 2. Он, как можно было сказать заранее, характеризуется геометрическим множителем $\sin^2\theta$. Для дифференциального сечения в случае неполяризованных частиц немедленно получается следующее выражение:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{M^2\varkappa}\left[\varkappa^2\sin^2\theta\,(2-\sin^2\theta)+\frac{4m^2}{M^2}\varkappa^2\sin^4\theta+\frac{4m^2}{M^2}(1+\varkappa^2)\right]\times$$
$$\times\frac{1}{(1-\varkappa^2\cos^2\theta)^2}. \qquad (13.99)$$

Здесь сразу же видны вклады тех процессов, которые только и протекают при $\sin\theta=0$,— процессов, отвечающих нулевым начальному и конечному магнитным квантовым числам:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\sin\theta=0)=\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{m^2\varkappa}(1+\varkappa^2). \qquad (13.100)$$

Это также те единственные процессы, которые сохраняют свое значение при низких энергиях. Именно из-за множителя $1+\varkappa^2$ сечение возрастает вдвое при переходе от низких энергий ($\varkappa=0$) к высоким энергиям ($\varkappa=1$). Дифференциальное сечение можно представить и в другой форме:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{M^2\varkappa}\left[\frac{2(2-\varkappa^2)}{1-\varkappa^2\cos^2\theta}-1-\frac{2(1-\varkappa^2)^2}{(1-\varkappa^2\cos^2\theta)^2}\right]. \qquad (13.101)$$

При высоких энергиях последним членом можно пренебречь, и мы вновь получаем (13.88). Полное сечение аннигиляции имеет вид

$$\sigma=\pi\frac{\alpha^2}{M^2\varkappa}\left[(3-\varkappa^4)\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}-4+2\varkappa^2\right], \qquad (13.102)$$

и при соответствующих условиях оно сводится к предельным выражениям (13.74) и (13.89).

Если вместо кинематического множителя $\varkappa^{-1}$ взять множитель $\varkappa$, то то же самое выражение (13.101) для дифференциального сечения будет применимо и к обратному процессу порождения электрона и позитрона при столкновении двух фотонов. Множители, связанные с суммированием по конечным и с усреднением по начальным поляризациям, остаются прежними, так как у обеих частиц — электрона и фотона — по две возможные поляризации. Правда, при вычислении полного сечения возникает некоторое различие, поскольку электрон и позитрон — это разные частицы и в качестве полного телесного угла следует брать 4π. В результате мы получаем следующее выражение для полного сечения рождения пары:

$$\sigma=2\pi\frac{\alpha^2}{M^2}\varkappa\left[(3-\varkappa^4)\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}-4+2\varkappa^2\right]=$$
$$=\begin{cases} v\ll 1: & \frac{1}{2}\pi\frac{\alpha^2}{m^2}v,\\ M\gg m: & 4\pi\frac{\alpha^2}{M^2}\left(\ln\frac{M^2}{m^2}-1\right).\end{cases} \qquad (13.103)$$

Дифференциальное сечение для электрон-фотонного рассеяния можно получить из дифференциального сечения электрон-позитронной аннигиляции путем перекрестных подстановок

$$p_2' \to -p_1, \qquad k_2' \to -k_2. \tag{13.104}$$

Соответствующие преобразования параметров M и θ определяются комбинациями

$$\begin{gathered}
-2p_2k_1 = \frac{M^2}{2}(1-\varkappa\cos\theta) \to -2p_2k_1 = \\
= \frac{M^2-m^2}{M^2}\left(\frac{M^2+m^2}{2} + \frac{M^2-m^2}{2}\cos\theta\right), \\
-2p_2k_1' = \frac{M^2}{2}(1+\varkappa\cos\theta) \to 2p_2k_2 = -(M^2-m^2),
\end{gathered} \tag{13.105}$$

откуда получаем

$$M^2 \to -\frac{(M^2-m^2)^2}{M^2}\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{13.106}$$

и

$$M^2(1-\varkappa^2\cos^2\theta) \to 4\left[M^2\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2} + m^2\right]. \tag{13.107}$$

В пределе высоких энергий эти преобразования упрощаются:

$$\begin{gathered}
M^2 \to -M^2\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad M^2\sin^2\frac{\theta}{2} \to M^2\cos^2\frac{\theta}{2}, \\
M^2\cos^2\frac{\theta}{2} \to -M^2.
\end{gathered} \tag{13.108}$$

Применяя их в первом варианте записи (13.84) (кинематический множитель $1/M^2$ остается неизменным), будем иметь

$$\frac{M^2\cos^2\frac{\theta}{2}}{M^2\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{M^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{M^2\cos^2\frac{\theta}{2}} \to -\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{13.109}$$

Каков здесь смысл знака минус?

Рассмотрим отдельные матричные элементы переходов, которые кратны $\operatorname{ctg}(\theta/2)$ и $\operatorname{tg}(\theta/2)$. При подстановках (13.108) они превращаются из вещественных величин в мнимые. Так как вероятности определяются квадратами модулей матричных элементов, дополнительные множители i не приведут ни к каким изменениям, но если перекрестные подстановки применить непосредственно к дифференциальному сечению, то появится фиктивный множитель $i^2 = -1$. Это относится к любым перекрестным подстановкам, затрагивающим одну частицу со спином $1/2$, в чем можно убедиться с помощью метода, которым мы еще не пользовались: если вычислять суммы вероятностей переходов по поляризациям на основе свойства полноты спиноров

$$\sum_\sigma u_{p\sigma} u^*_{p\sigma} \gamma^0 = \frac{m - \gamma p}{2m}. \tag{13.110}$$

Перекрестная подстановка для спиноров, $u_{p\sigma} \leftrightarrow u^*_{p-\sigma}$, которую можно произвести путем комплексного сопряжения условия (13.110) с добавлением знака минус, дает

$$\sum_\sigma u^*_{p\sigma} u_{p\sigma} \gamma^0 = \frac{-m - \gamma p}{2m}, \tag{13.111}$$

тогда как формальная замена величины p в формуле (13.110) на $-p$ приводит к противоположному по знаку результату. При переходе от электрон-электронного рассеяния к электрон-позитронному этого не было, так как там производились две подстановки, отвечающие спину $^1/_2$.

Следовательно, в высокоэнергетическом пределе дифференциальное сечение электрон-фотонного рассеяния для неполяризованных частиц имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{M^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \tag{13.112}$$

где два слагаемых соответствуют столкновениям, происходящим при одинаковых и при противоположных значениях спиральностей; спиральности электрона и фотона сохраняются в процессе рассеяния. Кажущаяся сингулярность при $\theta = \pi$ будет устранена, если использовать (13.88) и правило соответствия при высоких энергиях

$$M^2 \sin^2 \theta \to 4M^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}. \tag{13.113}$$

Результат можно представить в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{M^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m^2}{M^2}} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \tag{13.114}$$

а соответствующее полное сечение равно

$$\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{M^2} \left(\ln \frac{M^2}{m^2} + \frac{1}{2} \right). \tag{13.115}$$

Чтобы получить дифференциальное сечение электрон-фотонного рассеяния при произвольных энергиях, произведем в формуле (13.101) соответствующие подстановки и отбросим кинематический множитель $1/\varkappa$, поскольку теперь начальные и конечные частицы одинаковы. Это сразу же дает

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{M^2}\left[\frac{\frac{(M^2-m^2)^2}{M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}-4m^2}{M^2\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}+m}+2+\left(\frac{2m^2}{M^2\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}+m^2}\right)^2\right], \tag{13.116}$$

или, в другом виде,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{M^2}\left[\frac{1+\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{m^2}{M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{m^2}{M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{4m^2}{M^2}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\frac{\sin^4\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{m^2}{M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2}\right]. \tag{13.117}$$

Последний член не дает вклада ни при высоких энергиях, где мы возвращаемся к формуле (13.114), ни при низких энергиях, где получается томсоновское сечение

$$M\approx m:\qquad \frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{m^2}\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta). \tag{13.118}$$

Полное сечение электрон-фотонного рассеяния имеет вид

$$\sigma=2\pi\alpha^2\left[\frac{1}{M^2-m^2}\ln\frac{M^2}{m^2}+\frac{M^2+m^2}{2M^4}-\right.$$

$$\left.-\frac{4m^2}{(M^2-m^2)^2}\left(\frac{M^2+m^2}{M^2-m^2}\ln\frac{M^2}{m^2}-2\right)\right]=$$

$$=\begin{cases} M\gg m: & 2\pi\frac{\alpha^2}{M^2}\left(\ln\frac{M^2}{m^2}+\frac{1}{2}\right),\\ M\approx m: & \frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{m^2}.\end{cases} \tag{13.119}$$

§ 14. ИСТОЧНИКИ КАК РАССЕИВАТЕЛИ

Фотонным источникам, которые входят во взаимодействия W_{21}, W_{22}, . . . со все возрастающими степенями, можно придавать также обобщенный смысл, так чтобы они идеализированным образом описывали заряженные частицы. Как мы уже говорили ранее, при таком упрощенном подходе частица считается настолько массивной, что на нее не оказывают никакого влияния другие участвующие в рассеянии частицы. Рассмотрим в таком случае точечный заряд величины Ze, покоящийся в начале координат:

$$J^0(\mathbf{x})=Ze\,\delta(\mathbf{x}),\qquad \mathbf{J}(\mathbf{x})=0, \tag{14.1}$$

для которого потенциалы равны

$$A^0(\mathbf{x}) = \frac{Ze}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{x}|}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0. \tag{14.2}$$

Взяв для начала бесспиновые частицы и взаимодействие W_{21}, для процесса рассеяния мы будем иметь

$$W_{21} \to \int (dx)\,\varphi_1(x)\,2eqA^0(\mathbf{x})\,(-i\partial_0)\,\varphi_2(x) =$$
$$= \sum iK^*_{p_1q}(d\omega_{p_1}d\omega_{p_2})^{1/2}(-2eqp_2^0)\left[\int (dx)\,e^{i(p_2-p_1)x}A^0(\mathbf{x})\right]iK_{p_2q}, \tag{14.3}$$

где

$$\int (dx)\,e^{i(p_2-p_1)x}A^0(\mathbf{x}) = \int dx^0 e^{i(p_1^0-p_2^0)x^0}\int (d\mathbf{x})\,e^{i(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1)\cdot\mathbf{x}}A^0(\mathbf{x}) =$$
$$= \left[\int dx^0 e^{i(p_1^0-p_2^0)x^0}\right]\frac{Ze}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2}. \tag{14.4}$$

Когда мы имеем дело с неподвижным рассеивателем, всякие ссылки на закон сохранения импульса теряют свою силу, но энергия по-прежнему сохраняется. Выражение для матрицы перехода будет представлять собой соответствующим образом упрощенный вариант общего выражения (12.40), содержащий в качестве множителя только интеграл по времени. Точно так же выражение (12.43), в правую часть которого будет входить единственный множитель 2π и одна дельта-функция, приводящая к сохранению энергии, вырождается в выражение для вероятности перехода в единицу времени. В таком случае матрица перехода для рассматриваемого процесса будет равна

$$\langle 1_{p_1q}|T|1_{p_2q}\rangle = (d\omega_{p_1}d\omega_{p_2})^{1/2}\left[-\frac{2Zp^2qp^0}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2}\right], \tag{14.5}$$

что дает следующее выражение для вероятности перехода в единицу времени:

$$d\omega_{p_1}d\omega_{p_2}2\pi\delta(p_1^0-p_2^0)\left[\frac{2Ze^2p^0}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2}\right]^2. \tag{14.6}$$

Дифференциальное сечение рассеяния в элемент телесного угла получается делением на поток падающих частиц $2|\mathbf{p}|\,d\omega_{p_2}$ и интегрированием по конечной энергии $p_1^0 = p_2^0 = p^0$, которая принимает вполне определенные значения:

$$\int d\omega_{p_1}2\pi\delta(p_1^0-p_2^0) = \frac{1}{8\pi^2}\int\frac{d\mathbf{p}_1}{p^0}\delta(p_1^0-p^0) = \frac{1}{8\pi^2}|\mathbf{p}|\,d\Omega. \tag{14.7}$$

В результате мы сразу же получаем

$$d\sigma = \frac{1}{(4\pi)^2}d\Omega\left[\frac{2Ze^2p^0}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2}\right]^2, \tag{14.8}$$

или

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} Z^2\alpha^2 \left[\frac{p^0}{(p^0)^2 - m^2}\right]^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \tag{14.9}$$

Если не считать того, что теперь в качестве заряда неподвижного рассеивателя берется Ze, то этот результат полностью согласуется с формулой (13.65).

В случае спина $^1/_2$ мы исходим из действия

$$\begin{aligned} W_{21} \to & \int (dx)\, \psi_1(x)\, (-eq)\, A^0(\mathbf{x})\, \psi_2(x) = \\ &= \sum i\eta^*_{p_1\sigma_1 q} 2m\, (d\omega_{p_1} d\omega_{p_2})^{1/2} (-eq)\, (u^*_{p_1\sigma_1} u_{p_2\sigma_2}) \times \\ &\times \left[\int (dx)\, e^{i(p_2 - p_1)x} A^0(\mathbf{x})\right] i\eta_{p_2\sigma_2 q}, \end{aligned} \tag{14.10}$$

откуда получаем матричный элемент

$$\langle 1_{p_1\sigma_1 q} | T | 1_{p_2\sigma_2 q}\rangle = 2m\, (d\omega_{p_1} d\omega_{p_2})^{1/2} \left[-\frac{Ze^2 q}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2}\right] (u^*_{p_1\sigma_1} u_{p_2\sigma_2}), \tag{14.11}$$

так что вероятность перехода в единицу времени оказывается равной

$$d\omega_{p_1} d\omega_{p_2} 2\pi\delta(p_1^0 - p_2^0) \left[\frac{2mZe^2}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2}\right]^2 |u^*_{p_1\sigma_1} u_{p_2\sigma_2}|^2. \tag{14.12}$$

Используя спиральные состояния, будем иметь

$$\begin{aligned} (u^*_{p_1\sigma_1} u_{p_2\sigma_2}) &= \left(\frac{p^0 + m}{2m} + \frac{p^0 - m}{2m} \sigma_1\sigma_2\right) (v^*_{\sigma_1} v_{\sigma_2}) = \\ &= \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2: & \dfrac{p^0}{m} \cos \dfrac{\theta}{2}, \\ \sigma_1 = -\sigma_2: & \sigma_1 \sin \dfrac{\theta}{2}, \end{cases} \end{aligned} \tag{14.13}$$

причем множитель σ_1 во второй строке последнего равенства воспроизводит знаки, фигурирующие в формулах (13.17). При любом выборе σ_2 суммирование по σ_1 дает дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} Z^2\alpha^2 \left[\frac{p^0}{(p^0)^2 - m^2}\right]^2 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m^2}{(p^0)^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \tag{14.14}$$

совпадающее с сечением (13.64). Из выражения (14.13) совершенно ясно, что при высоких энергиях сохраняется спиральность электрона, а при низких энергиях остается неизменной ориентация его спина в пространстве.

Если действие W_{21} описывает рассеяние на неподвижном заряде, то чему тогда соответствуют величины W_{22}, W_{23}, ...?

Возьмем, например,

$$W_{22}=\frac{1}{2}e^2\int(dx)(dx')\psi(x)A^0(\mathbf{x})G_+(x-x')\gamma^0A^0(\mathbf{x}')\psi(x'). \qquad (14.15)$$

Распространяющимся частицам отвечает только поле $\psi(x)$, и поэтому W_{22} описывает также процесс рассеяния электрона, что относится и ко всем остальным величинам $W_{2\nu}$. Таким образом, разложение по степеням статического потенциала A^0 теперь уже не соответствует все более и более сложным процессам, а дает последовательные приближения к полной трактовке движения частицы в кулоновском поле точечного источника. Скелетная схема взаимодействий становится здесь более содержательной, указывая при этом на один из аспектов динамической схемы, который обычно теряется на первом динамическом уровне, а именно на возможность неограниченного повторения какого-то конкретного механизма взаимодействия.

Поскольку вклад в процесс рассеяния дают все степени A^0, было бы желательным не прибегать к такого рода степенному разложению, а иметь дело прямо с соответствующей функцией Грина $\Delta_+^A(x, x')$ или $G_+^A(x, x')$. К сожалению, наше умение решать уравнения для функций Грина в сколько-нибудь замкнутой форме в интересном с физической точки зрения случае точечного источника и кулоновского потенциала ограничивается нерелятивистским пределом. В этом пункте существует простая связь с дифференциальным уравнением (11.36) для Δ_+^A, которое в нашем случае можно представить в трехмерной форме

$$[-\nabla^2+(p^0)^2-m^2-2p^0eqA^0(\mathbf{x})+e^2A^0(\mathbf{x})^2]\times$$
$$\times\,\Delta_+^A(\mathbf{x}\mathbf{x}'p^0)=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \qquad (14.16)$$

если учесть трансляционную инвариантность по времени и ввести соответствующий фурье-образ

$$\Delta_+^A(\mathbf{x}\mathbf{x}'p^0)=\int_{-\infty}^{\infty}dx^0e^{ip^0(x^0-x^{0\prime})}\Delta_+^A(\mathbf{x}x^0, \mathbf{x}'x^0). \qquad (14.17)$$

Чтобы перейти к нерелятивистскому пределу, следует переопределить энергию:

$$(p^0)^2-m^2\to 2mE, \qquad p^0\to m \qquad (14.18)$$

и пренебречь членом, квадратичным по скалярному потенциалу. Именно последнее приводит к существенному различию между релятивистским и нерелятивистским случаями, которые в остальных отношениях связаны прямой и обратной подстановкой (14.18). Так, например, исходя из нерелятивистского выражения для дифференциального сечения и производя в нем подстановку, обратную подстановке (14.18), мы получаем сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{4}Z^2\alpha^2\left(\frac{m}{2mE}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\rightarrow\frac{1}{4}Z^2\alpha^2\left[\frac{p^0}{(p^0)^2-m^2}\right]^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}},\qquad(14.19)$$

совпадающее с выражением (14.9). Более того, этот результат строго следует из формулы (14.16) с вычеркнутым членом $(A^0)^2$, так как нерелятивистское решение обладает тем особым свойством, что все высшие степени A^0 (или Z) приводят только к фазовому множителю, который исчезает при вычислении амплитуды вероятности. Таким образом, первое существенное отклонение от выражения (14.9) обусловлено последним, квадратичным членом в величине W_{22}, даваемой формулой (12.29). С ним связано следующее изменение матрицы перехода:

$$\delta\langle 1_{p_1q}\mid T\mid 1_{p_2q}\rangle=(d\omega_{p_1}d\omega_{p_2})^{1/2}(Z\alpha)^2\int(d\mathbf{x})\exp[i(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1)\cdot\mathbf{x}]\,\frac{1}{|\mathbf{x}|^2},\qquad(14.20)$$

где

$$\int(d\mathbf{x})\exp[i(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1)\cdot\mathbf{x}]\,\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}=4\pi\int_0^\infty d|\mathbf{x}|\,\frac{\sin|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|\,|\mathbf{x}|}{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|\,|\mathbf{x}|}=$$

$$=\frac{2\pi^2}{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|}.\qquad(14.21)$$

Поправка к матричному элементу определяется подстановкой

$$\frac{1}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2}\rightarrow\frac{1}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2}\left(1-\frac{1}{4}\pi Z\alpha q\frac{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|}{p^0}\right),\qquad(14.22)$$

в результате которой дифференциальное сечение рассеяния частиц со спином 0 становится равным

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{4}Z^2\alpha^2\left[\frac{p^0}{(p^0)^2-m^2}\right]^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\left[1-\pi Z\alpha q\left(1-\frac{m^2}{(p^0)^2}\right)^{1/2}\sin\frac{\theta}{2}\right].\qquad(14.23)$$

Множитель Zq указывает на то, что поправка уменьшает сечение в случае одноименно заряженных частиц и увеличивает его в случае рассеяния разноименных зарядов. Учтя только один раз влияние квадратичного члена во взаимодействии и опустив фазовые множители, описывающие эффекты многократных линейных взаимодействий, мы получили только первый член степенного разложения по $Z\alpha q$, входящего в виде сомножителя. При появлении этого первого члена должен также войти по крайней мере один множитель, отвечающий скорости частицы, так как рассматриваемая поправка носит релятивистский характер.

В случае рассеяния частиц со спином $^1/_2$ ход рассуждений оказывается несколько менее прямым, так как в выражении (14.15) для W_{22} объединены и искомая релятивистская поправка и многократное эффективное нерелятивистское взаимодействие. Взяв величину W_{22} в том виде, в котором она выписана, мы придем к следующей модификации матрицы перехода:

$$
\begin{aligned}
{}^{\text{‘}}\delta^{\text{'}} \langle 1_{p_1\sigma_1 q} | T | 1_{p_2\sigma_2 q}\rangle = 2m\,(d\omega_{p_1}\, d\omega_{p_2})^{1/2}\,(Z\alpha)^2\, u^*_{p_1\sigma_1} \times \\
\times \Big[\int (d\mathbf{x})\,(d\mathbf{x}')\, e^{-i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \times \\
\times G_+(\mathbf{x}-\mathbf{x}', p^0)\,\gamma^0 \frac{1}{|\mathbf{x}'|} e^{i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}'} \Big] u_{p_2\sigma_2},
\end{aligned}
\tag{14.24}
$$

где, проинтегрировав по времени, мы ввели фурье-образ электронной функции Грина

$$
\begin{aligned}
G_+(\mathbf{x}-\mathbf{x}', p^0)\,\gamma^0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 e^{ip^0(x^0-x^{0\prime})} G_+(\mathbf{x}-\mathbf{x}', x^0-x^{0\prime})\,\gamma^0 = \\
= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \frac{m\gamma^0 + p^0 + \gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}}{p^2+m^2-(p^0)^2-i\varepsilon}.
\end{aligned}
\tag{14.25}
$$

В нерелятивистском пределе $\gamma^0 \to 1$ матрица $\gamma^0\boldsymbol{\gamma} = i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}$ пренебрежимо мала, $p^0 \to m$ и $(p^0)^2 - m^2 \to 2mE$. Это указывает нам структуру тех членов, которые следует считать уже включенными в фазовый множитель. Наличие $2m$ в нерелятивистском выражении для функции Грина означает, что релятивистским аналогом этой величины является величина $2p^0$. В самом деле, складывая почленно равенства

$$
\begin{aligned}
u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0 (m - \gamma^0 p^0 + \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}_1)\, u_{p_2\sigma_2} = 0, \\
u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0 (m - \gamma^0 p^0 + \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}_2)\, u_{p_2\sigma_2} = 0,
\end{aligned}
\tag{14.26}
$$

мы получаем замену, которую нужно произвести в спиновом матричном элементе, фигурирующем в формуле (14.24):

$$
m\gamma^0 \to p^0 - \gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2). \tag{14.27}
$$

Поэтому истинная поправка, которую дает формула (14.24), такова:

$$
\delta \langle 1_{p_1\sigma_1 q} | T | 1_{p_2\sigma_2 q}\rangle = 2m\,(d\omega_{p_1}\, d\omega_{p_2})^{1/2}\,(4\pi Z\alpha)^2\, u^*_{p_1\sigma_1} i\gamma_5 \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{V} u_{p_2\sigma_2} \tag{14.28}
$$

(см., однако, ниже), где

$$
\mathbf{V} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})^2} \frac{\mathbf{p} - \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)}{\mathbf{p}^2+m^2-(p^0)^2-i\varepsilon} \frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2)^2}. \tag{14.29}
$$

Симметрия этого интеграла по $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ свидетельствует о том, что вектор $\mathbf{V}$ совпадает по направлению с вектором $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, и поэтому мы напишем

$$\mathbf{V}=\frac{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2}{(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)^2}S, \tag{14.30}$$

где

$$S=\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})^2}\times$$
$$\times\frac{(\mathbf{p}^2+m^2-(p^0)^2)-\frac{1}{2}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})^2-\frac{1}{2}(\mathbf{p}_2-\mathbf{p})^2+\frac{1}{2}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2}{\mathbf{p}^2+m^2-(p^0)^2-i\varepsilon}\frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2)^2}. \tag{14.31}$$

Прежде чем рассматривать этот интеграл, заметим, что если использовать спиральные состояния, то

$$2mu^*_{p_1\sigma_1}i\gamma_5\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)}{(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)^2}u_{p_2\sigma_2}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4|\mathbf{p}|\cos^2\frac{\theta}{2}}2mu^*_{p_1\sigma_1}i\gamma_5u_{p_2\sigma_2}=$$
$$=\begin{cases}\sigma_1=\sigma_2: & \dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}},\\ \sigma_1=-\sigma_2: & 0.\end{cases} \tag{14.32}$$

Отсюда следует, что поправка связана только с переходами, при которых спиральность не изменяется. Далее, последнее слагаемое в формуле (14.31), с постоянным множителем $^1/_2\,(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2$, можно отождествить с изменением фазы при переходах, при которых сохраняется спиральность. Другими словами, в используемом нами приближении это слагаемое, будучи мнимым, не будет интерферировать с основным вкладом в матрицу рассеяния и им можно пренебречь, так же как и мнимыми частями других членов. Остальные вещественные слагаемые в S, которые только и существенны с точки зрения модификации сечения, — это интеграл

$$\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})^2}\frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2)^2}=\int(d\mathbf{x})\,e^{-i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}e^{i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}}=$$
$$=\frac{1}{8}\frac{1}{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|}=\frac{1}{16|\mathbf{p}|}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \tag{14.33}$$

и два равных интеграла вида

$$\mathrm{Re}\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2+m^2-(p^0)^2-i\varepsilon}\frac{1}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}_2|^2}=$$
$$=\mathrm{Re}\int(d\mathbf{x})\frac{e^{i|\mathbf{p}_2||\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}e^{-i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}}=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int^{\infty}d|\mathbf{x}|\cos(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|)\frac{\sin(|\mathbf{p}||\mathbf{x}|)}{|\mathbf{p}||\mathbf{x}|}=\frac{1}{16|\mathbf{p}|}. \tag{14.34}$$

Здесь оказалось целесообразным вернуться к координатному пространству, и, кроме того, мы воспользовались следующим трехмерным интегралом по импульсным переменным:

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{p}^2+m^2-(p^0)^2-i\varepsilon} = \frac{e^{i[(p^0)^2-m^2]^{1/2}|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}. \qquad (14.35)$$

Модифицированную амплитуду перехода в случае рассеяния без изменения спиральности получим путем подстановки

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \to \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}Z\alpha q\left(1-\frac{m^2}{(p^0)^2}\right)^{1/2}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)\right], \qquad (14.36)$$

а соответствующее дифференциальное сечение для неполяризованных частиц имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{4}Z^2\alpha^2\left[\frac{p^0}{(p^0)^2-m^2}\right]^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\left[\cos^2\frac{\theta}{2}+\left(\frac{m}{p^0}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}-\right.$$
$$\left.-\pi Z\alpha q\left(1-\frac{m^2}{(p^0)^2}\right)^{1/2}\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]. \qquad (14.37)$$

В этом результате, а также в выражении для пространственного интеграла (14.33) мы обнаруживаем некоторый механизм, общий для спина 0 и спина $^1/_2$. Поправочный член с $\sin^2(\theta/2)$ специфичен для спина $^1/_2$. Другая форма записи последнего сомножителя в (14.37), который заключен в квадратные скобки, подчеркивает тесную связь поправочного члена с переходами без изменения спиральности:

$$\left[1-\pi Z\alpha q\left(1-\frac{m^2}{(p^0)^2}\right)^{1/2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\right]\cos^2\frac{\theta}{2}+\left(\frac{m}{p^0}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}. \qquad (14.38)$$

Прежде чем переходить к дальнейшему, мы найдем выражение для мнимой части S, которая не играет роли при вычислении эффективного сечения. Заметив, что

$$\frac{1}{2}\left[(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2-(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})^2-(\mathbf{p}_2-\mathbf{p})^2\right]=-(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}), \qquad (14.39)$$

будем иметь

$$\operatorname{Im} S=-\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\pi\delta\left[\mathbf{p}^2-((p^0)^2-m^2)\right]\frac{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{p}_2-\mathbf{p})}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})^2(\mathbf{p}_2-\mathbf{p})^2}=$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\left[(p^0)^2-m^2\right]^{-1/2}I, \qquad (14.40)$$

где

$$I=\int \frac{d\Omega}{4\pi}\,\frac{(\mathbf{n}_1-\mathbf{n})\cdot(\mathbf{n}_2-\mathbf{n})}{(\mathbf{n}_1-\mathbf{n})^2\,(\mathbf{n}_2-\mathbf{n})^2} \tag{14.41}$$

представляет собой интеграл от вектора $\mathbf{n}$ по единичной сфере. Единичные векторы $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ задают направления импульсов $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$. Интеграл можно написать в виде

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{d\Omega}{4\pi}\,\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2}{2}}{\left(1-\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2}{2}\right)^2-\left(\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{n}_1-\mathbf{n}_2}{2}\right)^2}, \tag{14.42}$$

где $\frac{1}{2}(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2)$ и $\frac{1}{2}(\mathbf{n}_1-\mathbf{n}_2)$ — взаимно перпендикулярные векторы с длинами $\cos(\theta/2)$ и $\sin(\theta/2)$. Вводя соответствующие им сферические координаты, получаем

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,d\mu\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\,d\varphi\,\frac{\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\mu\right)}{\left(1-\mu\cos\frac{\theta}{2}\right)^2-(1-\mu^2)\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\varphi}=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}d\mu\,\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{1-\mu\cos\frac{\theta}{2}}\,\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\mu}{\left|\cos\frac{\theta}{2}-\mu\right|}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}. \tag{14.43}$$

Таким образом, полное выражение для S имеет вид

$$S=\frac{1}{16}\left[(p^0)^2-m^2\right]^{-1/2}\left[\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}-1-i\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]. \tag{14.44}$$

В комплексном характере матрицы S находит свое выражение наличие относительного сдвига фаз между переходами с изменением и без изменения спиральности. Физический смысл этого лучше всего анализировать, отказавшись от представления о спиральности. Не предрешая пока выбор спиноров v_σ, представим матрицу перехода в виде

$$\langle 1_{p_1\sigma_1q}\,|\,T\,|\,1_{p_2\sigma_2q}\rangle=2m\,(d\omega_{p_1}\,d\omega_{p_2})^{1/2}\times$$
$$\times\left[-\frac{Ze^2q}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2}\right]v^*_{\sigma_1}Mv_{\sigma_2}, \tag{14.45}$$

где

$$M=f+ig\sigma\cdot\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2 \tag{14.46}$$

и

$$f=\frac{p^0}{m}\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}-8\pi Z\alpha q\sin^2\frac{\theta}{2}\,\frac{(p^0)^2-m^2}{m}\,S,$$
$$g=\frac{p^0-m}{2m}-4\pi Z\alpha q\,\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\,\frac{(p^0)^2-m^2}{m}\,S. \tag{14.47}$$

При вычислении полного дифференциального сечения в случае произвольного начального спина возникает величина

$$\sum_{\sigma_1} | v_{\sigma_1}^* M v_{\sigma_2} |^2 = v_{\sigma_2}^* (f^* - ig^* \sigma \cdot \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)(f + ig\sigma \cdot \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) v_{\sigma_2} =$$
$$= |f|^2 + |g|^2 \sin^2\theta + i(f^*g - g^*f) \langle \sigma \cdot \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \rangle_{\sigma_2}. \qquad (14.48)$$

В соответствии с этим, если f/g — комплексное число, то у нас будет явная зависимость от начального спина при условии, что его математическое ожидание в направлении, перпендикулярном плоскости рассеяния, не равно нулю. Состояние с определенной спиральностью не обладает таким свойством — для этого требуется линейная комбинация спиральных состояний.

Обратным по отношению к зависимости дифференциального сечения от начального спина является возникновение поляризации у рассеянных частиц в случае первоначально неполяризованного пучка. При заданном угле рассеяния среднее значение конечного спина равно

$$\langle \sigma \rangle = \frac{v_{\sigma_2}^* (f^* - ig^* \sigma \cdot \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)\, \sigma\, (f + ig\sigma \cdot \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) v_{\sigma_2}}{|f|^2 + |g|^2 \sin^2\theta} = p\mathbf{v}, \qquad (14.49)$$

где $\mathbf{v}$ — единичный вектор нормали к плоскости рассеяния:

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \sin\theta\mathbf{v}, \qquad (14.50)$$

а

$$p = -2\frac{|f|^2 \sin\theta}{|f|^2 + |g|^2 \sin^2\theta} \operatorname{Im}\left(\frac{g}{f}\right). \qquad (14.51)$$

В частных случаях, соответствующих $f = \pm ig \sin\theta$, поляризация оказывается полной: $p = \pm 1$. Заметим, что через тот же самый параметр поляризации выражается и относительная зависимость дифференциального сечения от начального спина:

$$1 + p\langle \sigma \cdot \mathbf{v} \rangle. \qquad (14.52)$$

Данный эффект можно наблюдать в экспериментах по двойному рассеянию, когда в первом акте рассеяния частицы поляризуются, а во втором акте детектируется их поляризация. Обозначив эти акты рассеяния через a и b и подставив поляризацию, обусловленную первым отклонением, в сечение второго рассеяния, мы получим относительный множитель

$$1 + p_a p_b \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b. \qquad (14.53)$$

Таким образом, отличие от нуля как p_a, так и p_b экспериментально устанавливается по зависимости конечной интенсивности от относительной ориентации двух плоскостей рассеяния. В частности, можно взять две тождественные с геометрической точки зрения плоскости, но сравнивать при этом отклонения, отвечающие разным случаям их ориентации: $\mathbf{v}_a = \pm \mathbf{v}_b$. Отношение интенсивностей для отклонений при одинаковой и при противоположной ориентациях плоскостей будет равно

$$\frac{1+p_a p_b}{1-p_a p_b}. \tag{14.54}$$

Если отдельные акты рассеяния тождественны, т. е. $p_a = p_b$, то это отношение больше единицы. Последующее отклонение, отвечающее одинаковой ориентации плоскостей, будет оставаться предпочтительным и при произвольном выборе отдельных углов рассеяния, если, как в рассматриваемом случае, параметр поляризации при всех углах имеет определенный знак:

$$p = -Z\alpha q \frac{m}{p^0}\left(1-\frac{m^2}{(p^0)^2}\right)^{1/2} \frac{\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}}{1+\frac{m}{p^0}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} \ln\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{14.55}$$

Перейдем теперь к примерам из класса явлений, в которых принимают участие как простой, так и обобщенный фотонные источники. Существуют такие взаимодействия заряженных частиц с неподвижными зарядами, при которых испускаются или поглощаются фотоны. Простейшие примеры подобного рода дает нам действие W_{22}. Сюда относится однофотонное испускание при рассеянии в кулоновском поле и рождение пары фотоном при его прохождении через кулоновское поле. Соответствующая часть W_{22} в случае частицы со спином 0, испускающей фотон в процессе столкновения с массивной частицей, заряд которой равен Ze, имеет вид

$$\begin{aligned} W_{22} \to \int (dx)\,(dx')\,\varphi_1(x)\,[2eqpA_1(x)\,\Delta_+(x-x')\,2eqpA_Z(x') + \\ + 2eqpA_Z(x)\,\Delta_+(x-x')\,2eqpA_1(x')]\,\varphi_2(x') - \\ - \int (dx)\,\varphi_1(x)\,2e^2A_1(x)\,A_Z(x)\,\varphi_2(x), \end{aligned} \tag{14.56}$$

где $A_Z^\mu(x)$ — векторный потенциал, соответствующий заряду Ze. Взяв для него выражение (14.2), для матричного элемента перехода получим

$$\langle 1_{p_1 q} 1_{k_1\lambda_1} | T | 1_{p_2 q}\rangle = (d\omega_{p_1}\, d\omega_{k_1}\, d\omega_{p_2})^{1/2} \frac{Ze^2}{(p_1+k_1-p_2)^2}\, 2ee^{\mu *}_{k_1\lambda_1} V_{\mu\nu} n^\nu, \tag{14.57}$$

где

$$V_{\mu\nu} = \frac{p_{1\mu}p_{2\nu}}{k_1 p_1} - \frac{p_{2\mu}p_{1\nu}}{k_1 p_2} - g_{\mu\nu} \tag{14.58}$$

и n^μ — единичный времени-подобный вектор, который в системе покоя заряда Z_e имеет единственную компоненту $n^0 = 1$. Закон сохранения энергии принимает вид

$$p_1^0 + k_1^0 - p_2^0 = -(p_1 + k_1 - p_2)\, n = 0. \tag{14.59}$$

Он используется при проверке сохранения эффективного источника испускания фотонов, ибо ему отвечает алгебраическое соотношение

$$k_1^\mu V_{\mu\nu} n^\nu = (p_2 - p_1 - k_1)\, n = 0. \tag{14.60}$$

Рассмотрим сначала упрощения, возникающие в случае мягких фотонов, когда импульс фотона $\mathbf{k}$ пренебрежимо мал по сравнению с $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ и $p_1^0 \approx p_2^0$. В таком приближении

$$\langle 1_{p_1 q} 1_{k_1\lambda_1} | T | 1_{p_2 q}\rangle =$$
$$= (d\omega_{p_1} d\omega_{p_2})^{1/2} \left[-\frac{2Ze^2 q p_2^0}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2} \right] (d\omega_{k_1})^{1/2} eqe^*_{k_1\lambda_1} \left[\frac{p_1}{k_1 p_1} - \frac{p_2}{k_1 p_2} \right]. \tag{14.61}$$

Эта величина, как и следовало ожидать, представляет собой произведение матричного элемента перехода для рассеяния в кулоновском поле на амплитуду вероятности испускания фотона источником, описывающим мгновенный переход заряда eq из состояния со скоростью p_2/m в состояние со скоростью p_1/m. Для дальнейшего заметим, однако, что полное пренебрежение механическими характеристиками фотона при достаточно низких частотах вполне оправданно при конечных углах отклонения частицы, но когда угол отклонения очень мал, требуется более аккуратный анализ.

Со случаем мягких фотонов тесно связан, хотя и не тождествен ему, низкоэнергетический или нерелятивистский предел. Здесь импульс излучаемого фотона пренебрежимо мал, но его энергия

$$k^0 = \frac{1}{2m} \mathbf{p}_2^2 - \frac{1}{2m} \mathbf{p}_1^2 = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1)\cdot(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \ll |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2| \tag{14.62}$$

может составлять любую долю начальной кинетической энергии. Пользуясь калибровкой $e^0_{k_1\lambda_1} = 0$, матричный элемент можно упростить, записав его в виде

$$\langle 1_{p_1 q} 1_{k_1\lambda_1} | T | 1_{p_2 q}\rangle = (d\omega_{p_1} d\omega_{p_2})^{1/2} \left[\frac{2Ze^2}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2} \right] (d\omega_{k_1})^{1/2} e\mathbf{e}^*_{k_1\lambda_1}\cdot(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \tag{14.63}$$

так что дифференциальное сечение при заданной поляризации, заданных направлениях испускания и заданной энергии фотона будет равно

$$d\sigma = d\Omega\, d\Omega_k \frac{dk^0}{k^0} \frac{|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_2|} \frac{1}{\pi^2} \frac{Z^2\alpha^3}{[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2]^2} |\mathbf{e}\cdot(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)|^2 \tag{14.64}$$

(лишние индексы опущены). Выполнив сначала суммирование по поляризациям, а затем интегрирование по направлениям испускания фотона, мы приведем сечение к виду

$$d\sigma \to d\Omega\, d\Omega_k \frac{dk^0}{k^0} \frac{|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_2|} \frac{1}{\pi^2} \frac{Z^2\alpha^3}{[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2]^2} \left[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 - \left(\frac{\mathbf{k}}{k^0}\cdot(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \right)^2 \right] \to$$
$$\to d\Omega \frac{dk^0}{k^0} \frac{|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_2|} \frac{8}{3\pi} \frac{Z^2\alpha^3}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2}, \tag{14.65}$$

а еще одно интегрирование по всем углам рассеяния частицы даст нам сечение для распределения фотонов по энергиям:

$$d\sigma = \frac{dk^0}{k^0}\frac{16}{3}\frac{Z^2\alpha^3}{|\mathbf{p}_2|^2}\ln\frac{|\mathbf{p}_2|+|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_2|-|\mathbf{p}_1|}. \tag{14.66}$$

Интересно также найти дифференциальное сечение на единицу телесного угла, которое получается интегрированием по всем энергиям фотона — от минимальной детектируемой энергии $k^0_{\text{мин}}$ до максимальной энергии, определяемой начальной кинетической энергией $T = \mathbf{p}_2^2/2m$. Оно равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{8}{3\pi}\frac{Z^2\alpha^3}{|\mathbf{p}_2|^2}\int\limits_0^{(1-k^0_{\text{мин}}/T)^{1/2}}\frac{2x\,dx}{1-x^2}\,\frac{x}{1-2x\cos\theta+x^2}, \tag{14.67}$$

где

$$x = \frac{|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_2|} = \left(1-\frac{k^0}{T}\right)^{1/2}. \tag{14.68}$$

Интеграл можно взять и в общем виде, для чего проще всего разложить знаменатель на множители $1-x$, $1+x$, $1-xe^{i\theta}$, $1-xe^{-i\theta}$, но мы ограничимся тем, что приведем его значение при

$$k^0_{\text{мин}} \ll T. \tag{14.69}$$

Именно:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{8}{3\pi}\frac{Z\alpha^3}{|\mathbf{p}_2|^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\left[\ln\frac{4T}{k^0_{\text{мин}}} - (\pi-\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{\cos\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\ln\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]. \tag{14.70}$$

Но это выражение неприменимо при сколь угодно малых углах. В противоположность его явной сингулярности при $\theta = 0$ точное выражение (14.67) в этом случае дает

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta=0) \approx \frac{4}{3\pi}\frac{Z^2\alpha^3}{|\mathbf{p}_2|^2}\frac{1}{(k^0_{\text{мин}}/2T)^2}. \tag{14.71}$$

Выражение (14.70) применимо лишь при $\theta \gg k^0_{\text{мин}}/T$. Но нужно дать читателю еще одно предостережение. Как и в случае безызлучательного рассеяния, действие W_{22} соответствует только первым из бесконечного ряда процессов, которые дают вклад в испускание фотона при отклонении частицы в кулоновском поле. Однако в отличие от упругого рассеяния в кулоновском поле теперь такие дополнительные процессы изменяют эффективное сечение, в особенности при малых энергиях и больших Z. Подробно останавливаться на этом вопросе мы здесь не будем.

Возвращаясь к матричному элементу перехода (14.57), приведем следующее выражение для дифференциального сечения, которое по-прежнему отвечает детализированному описанию распределения по энергиям:

$$d\sigma = d\omega_{p_1} d\omega_{k_1} 2\pi\delta(p_1^0 + k_1^0 - p_2^0) \frac{1}{2|\mathbf{p}_2|} \frac{Z^2 e^4}{[(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_2)^2]^2} \times$$
$$\times 4e^2 |e_{k_1\lambda_1}^{\mu *} V_{\mu\nu} n^\nu|^2, \quad (14.72)$$

где сумма по поляризациям испущенного фотона равна

$$\sum_{\lambda_1} |e_{k_1\lambda_1}^{\mu} V_{\mu\nu} n^\nu|^2 = \frac{np_1}{k_1p_1} \frac{np_2}{k_1p_2} (p_1 + k_1 - p_2)^2 - m^2 \left(\frac{np_2}{k_1p_1} - \frac{np_1}{k_1p_2}\right)^2 - 1. \quad (14.73)$$

Возможен и другой, инвариантный, способ записи дифференциального сечения:

$$|\mathbf{p}_2|\, d\sigma = \int d\omega_{p_1} d\omega_{k_1} \frac{(dk_2)}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \times$$
$$\times \frac{\delta(nk_2)}{(k_2^2)^2} 2Z^2 (4\pi\alpha)^3 |e_{k_1\lambda_1}^{\mu *} V_{\mu\nu} n^\nu|^2, \quad (14.74)$$

хотя мы и не позаботились ввести инвариантный аналог начального импульса частицы. Наличие четырехмерной дельта-функции свидетельствует о том, что

$$k_2 = p_1 + k_1 - p_2, \quad (14.75)$$

причем в системе покоя вектора n^μ, которая и является системой координат, представляющей интерес с физической точки зрения, выполняются равенства

$$\delta(nk_2) = \delta(p_1^0 + k_1^0 - p_2^0), \qquad k_2^2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_2)^2, \quad (14.76)$$

так что мы вновь приходим к формуле (14.72). Правда, выражение (14.74) носит в какой-то мере эвристический характер, так как рассматриваемые процессы сходны с рассеянием фотона и частицы. Конечно, падающие фотоны относятся к виртуальным частицам, поскольку $k_2^2 > 0$. Тем не менее такая точка зрения при высоких энергиях дает ряд практических преимуществ. Выбрав подходящую систему координат, можно выразить главный вклад в дифференциальное сечение через характеристики реальных фотонов.

Будем считать, что в физической системе координат падающая частица движется вдоль оси z со скоростью $v \approx +1$, так что

$$p_2^0 = \gamma m, \qquad p_{2z} = \gamma m v, \qquad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2} \gg 1. \quad (14.77)$$

Теперь представим себе систему координат, в которой частица первоначально покоится, а заряд Ze движется вдоль оси z со скоростью $-v$. В такой системе координат вектор n^μ имеет компоненты $[(0, x, y, z)]$

$$n^\mu = \gamma(1, 0, 0, -v). \quad (14.78)$$

Требование $nk_2 = 0$, согласно которому в физической, связанной с Z, системе координат поле имеет статический характер, записывается в системе покоя частицы в виде равенства

$$k_2^0 + vk_z = 0 \tag{14.79}$$

и, следовательно,

$$k_2^2 = k_T^2 + (k_2^0)^2 \frac{1-v^2}{v^2}, \tag{14.80}$$

где

$$k_T^2 = k_{2x}^2 + k_{2y}^2. \tag{14.81}$$

Таким образом, может показаться, что при условиях, когда

$$1 - v^2 = \frac{1}{\gamma^2} \ll 1, \tag{14.82}$$

а k_T^2 достаточно мало, виртуальные фотоны можно аппроксимировать реальными фотонами.

Однако здесь имеется одна очевидная трудность. Вектор n^μ играет роль вектора поляризации падающего фотона, и для него, действительно, $nk_2 = 0$. Но, по-видимому, вектор поляризации реального фотона можно выбрать так, что у него не будет временной компоненты или компоненты вдоль направления распространения, роль которого в нашем случае играет отрицательное направление оси z. Иначе говоря, можно предусмотреть такое калибровочное преобразование

$$n^\mu \to n^\mu - \frac{\gamma}{k_2^0} k_2^\mu, \tag{14.83}$$

в результате которого временная компонента в системе покоя частицы будет нулевой. В таком случае z-компонента (продольная компонента) нового вектора будет равна

$$-\gamma v + \frac{\gamma}{v} = \frac{1}{\gamma v} \ll 1, \tag{14.84}$$

и, если выполняется условие

$$\frac{\gamma k_T}{k_2^0} \gg \frac{1}{\gamma}, \tag{14.85}$$

то преобразованный вектор будет практически совпадать с произведением $-\gamma k_T/k_2^0$ на поперечный единичный вектор $\mathbf{k}_T/k_T$, который играет роль вектора поляризации падающего фотона. Правда, все зависит от величины дополнительного слагаемого, которое вводится преобразованием (14.83) и пропорционально

$$e^{\mu *}_{k_1\lambda_1} V_{\mu\nu} k_2^\nu = e^*_{k_1\lambda_1} p_1 \frac{k_2 p_2}{k_1 p_1} - e^*_{k_1\lambda_1} p_2 \frac{k_2 p_1}{k_1 p_2} - e^*_{k_1\lambda_1} k_2. \tag{14.86}$$

Далее,

$$k_2 p_2 = k_1 p_1 - \frac{1}{2} k_2^2, \qquad k_2 p_1 = k_1 p_2 + \frac{1}{2} k_2^2 \tag{14.87}$$

и, следовательно,

$$e^{\mu *}_{k_1\lambda_1} V_{\mu\nu} k_2^\nu = -\left(\frac{e^*_{k_1\lambda_1} p_1}{k_1 p_1} + \frac{e^*_{k_1\lambda_1} p_2}{k_1 p_2}\right) \frac{1}{2} k_2^2. \tag{14.88}$$

Это свидетельствует о том, что подстановка реальных фотонов вместо виртуальных будет оправданной в том случае, если соответствующие верхние пределы расположены при $k_2^2 \approx k_T^2$. Этот верхний предел мы найдем, сравнив (в калибровке $e^*_{k_1\lambda_1}p_2 = 0$) в системе покоя частицы значения

$$e^{\mu*}_{k_1\lambda_1} V_{\mu\nu} \left(n^\nu - \frac{\gamma}{k_2^0} k_2^\mu\right) = \left(\mathbf{e}^*_{k_1\lambda_1} \cdot \frac{\mathbf{k}_T}{k_T}\right) \frac{\gamma k_T}{k_2^0} \tag{14.89}$$

и

$$e^{\mu*}_{k_1\lambda_1} V_{\mu\nu} k_2^\mu \frac{\gamma}{k_2^0} = -\frac{e^*_{k_1\lambda_1}p_1}{k_1 p_1} \frac{1}{2} k_T^2 \frac{\gamma}{k_2^0} \approx$$

$$\approx -\frac{\mathbf{e}^*_{k_1\lambda_1} \cdot \mathbf{k}_2}{k_2 p_2} \frac{1}{2} k_T^2 \frac{\gamma}{k_2^0} = -e^*_{k_1\lambda_1 z} \frac{k_T}{2m} \frac{\gamma k_T}{k_2^0}, \tag{14.90}$$

а именно:

$$k_T \leqslant m. \tag{14.91}$$

Мы будем говорить только о дифференциальном сечении, определяющем энергетический спектр испущенных фотонов в системе координат, связанной с Z. Поскольку далее мы будем все время иметь дело с двумя разными системами координат, движущимися одна относительно другой со скоростью, практически равной скорости света, нам придется ввести новые обозначения. Энергию фотона в Z-системе мы обозначим через

$$K = -nk_1 = \gamma (k_1^0 + vk_{1z}) \approx \gamma k_1^0 (1 - \cos\theta), \tag{14.92}$$

где θ — угол рассеяния фотона в системе частиц. Кинематика процесса рассеяния фотона в такой системе, вытекающая из равенства

$$0 = (p_2 + k_2 - k_1)^2 + m^2 = -2m (k_2^0 - k_1^0) + 2k_1^0 k_2^0 (1 - \cos\theta), \tag{14.93}$$

описывается соотношением

$$k_1^0 = \frac{k_2^0}{1 + \frac{k_2^0}{m}(1 - \cos\theta)}. \tag{14.94}$$

Отсюда получаются следующие формулы, содержащие энергии частицы в Z-системе:

$$E_2 = \gamma m, \qquad E_1 = E_2 - K \tag{14.95}$$

и энергию фотона K:

$$\frac{K}{E_2} = \frac{\frac{k_2^0}{m}(1 - \cos\theta)}{1 + \frac{k_2^0}{m}(1 - \cos\theta)}, \qquad \frac{E_1}{E_2} = \frac{k_1^0}{k_2^0} \tag{14.96}$$

и

$$\frac{K}{E_1} = \frac{k_2^0}{m}(1 - \cos\theta). \tag{14.97}$$

Последняя из них показывает, что значения энергии падающего фотона k_2^0, при которых порождается рассеянный фотон с энергией K, ограничиваются неравенством

$$k_2^0 > \frac{1}{2} m \frac{K}{E_1}. \tag{14.98}$$

Кроме того, нам пригодится дифференциальное соотношение

$$\frac{E_2}{E_1} \frac{dK}{E_1} = \frac{k_2^0}{m} \sin\theta \, d\theta. \tag{14.99}$$

Дифференциальное сечение для рассеяния фотона и частицы, рассматриваемое в системе покоя падающей частицы, имеет вид

$$d\sigma = \int d\omega_p \, d\omega_{k_1} (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \frac{(8\pi\alpha)^2}{4mk_2^0} \times$$
$$\times \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1\lambda_2} | e^*_{k_1\lambda_1} \cdot e_{k_2\lambda_2} |^2, \tag{14.100}$$

где множитель в знаменателе возникает от деления на произведение потока фотонов и плотности частиц, т. е. на величину $2k_2^0 \, d\omega_{k_2} 2m \, d\omega_{p_2}$. Суммирование и усреднение по поляризациям дает выражение

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda_1\lambda_2} | e^*_{k_1\lambda_1} \cdot e_{k_2\lambda_2} |^2 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_2} \left[1 - \left(\frac{\mathbf{k}_1}{k_1^0} \cdot e_{k_2\lambda_2} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta), \tag{14.101}$$

которое следует также из формулы (12.124) при $n = p_2/m$. Интегрирование по конечным импульсам можно выполнить с помощью кинематического соотношения

$$\frac{dk_1^0}{p_1 k_1^0} = \frac{d(p_1^0 + k_1^0)}{mk_2^0}. \tag{14.102}$$

В результате мы приходим к сечению

$$d\sigma = 2\pi \sin\theta \, d\theta \frac{\alpha^2}{m^2} \left(\frac{k_1^0}{k_2^0} \right) \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta), \tag{14.103}$$

которое можно получить также, преобразуя выражение (12.117) для дифференциального сечения в системе центра масс. Мы будем пользоваться этим дифференциальным сечением в форме

$$[mk_2^0 \, d\sigma] = 2\pi\alpha^2 \frac{dK}{E_2} \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{mK}{E_1 k_2^0} \right)^2 \right], \tag{14.104}$$

которую ему можно придать, учитывая соотношения (14.96), (14.97) и (14.99).

Вклад реальных фотонов в дифференциальное сечение (14.74) таков:

$$|\mathbf{p}_2| \, d\sigma |_{\text{реальн}} = 8\pi\alpha Z^2 \int \frac{(dk_2)}{(2\pi)^3} \frac{\delta(nk_2)}{(k_2^2)^2} \gamma^2 \frac{k_T^2}{(k_2^0)^2} [mk_2^0 \, d\sigma], \tag{14.105}$$

или, учитывая, что

$$(dk_2) = \pi\, dk_T^2 dk_{2z}\, dk_2^0, \qquad (14.106)$$

$$|\mathbf{p}_2|\, d\sigma\,|_{\text{реальн}} = \frac{\alpha Z^2}{\pi} \int \frac{dk_2^0}{(k_2^0)^2} \frac{k_T^2\, dk_T}{(k_T^2 + (k_2^0)^2/\gamma^2)^2} \frac{E_2}{m} [m k_2^0\, d\sigma] \qquad (14.107)$$

Если мы изменим масштаб энергии падающих фотонов, написав

$$k_2^0 = \frac{mK}{2E_1} x, \qquad (14.108)$$

так что x будет изменяться в интервале от 1 до ∞, то сечение примет вид

$$d\sigma\,|_{\text{реальн}} = 4 \frac{Z^2\alpha^3}{m^2} \frac{E_1}{E_2} \frac{dK}{K} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \times$$

$$\times \int_0^{k^2_{\text{макс}}} dk_T^2 \frac{k_T^2}{\left[k_T^2 + \left(\frac{m^2 K}{2E_1E_2} x\right)^2\right]^2} \qquad (14.109)$$

Согласно неравенству (14.85), нижний предел интегрирования не может быть равным нулю, а должен составлять некоторую долю от

$$\left(\frac{k_2^0}{\gamma}\right)^2 = \left(\frac{m^2 K x}{2E_1E_2}\right)^2,$$

большую, чем $1/\gamma^2$, скажем, $1/\gamma$; но, распространяя интегрирование до нуля, мы вносим при этом совершенно незначительную погрешность. При условии

$$\frac{k_{\text{макс}}}{m} \gg \frac{mK}{2E_1E_2} \qquad (14.110)$$

указанный интеграл равен:

$$\int_0^{k^2_{\text{макс}}} dk_T^2 \frac{k_T^2}{\left[k_T^2 + \left(\frac{m^2 K}{2E_1E_2} x\right)^2\right]^2} = \left[2 \ln\left(\frac{2E_1E_2}{mK}\right) - 1\right] +$$

$$+ 2 \ln\left(\frac{k_{\text{макс}}}{mx}\right), \qquad (14.111)$$

и в таком случае

$$d\sigma\,|_{\text{реальн}} = \frac{16}{3} \frac{Z^2\alpha^3}{m^2} \frac{E_1}{E_2} \frac{dK}{K} \left[\ln\left(\frac{2E_1E_2}{mK}\right) - \frac{1}{2} +\right.$$

$$\left. + \left(\ln \frac{k_{\text{макс}}}{m} - \frac{13}{12}\right)\right]. \qquad (14.112)$$

В неравенстве (14.91) неявно содержится неравенство $k_{\text{макс}} \lesssim m$, которое означает, что при более высоких значениях поперечного импульса нет существенного взаимодействия. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Почти правильный результат можно быстро получить, приняв для простоты, что $k_{\text{макс}}$ не зависит от K. В таком случае достаточно сравнить (14.112) с дифференциальным сечением, соответствующим мягким фотонам. Мы будем рассматривать все время физическую систему координат, связанную с Z. Сумма по поляризациям в дифференциальном сечении, получаемом из формулы (14.61), равна

$$\sum_{\lambda_1}\left|e^*_{k_1\lambda_1}\left(\frac{p_1}{k_1p_1}-\frac{p_2}{k_1p_2}\right)\right|^2=-\frac{m^2}{(k_1p_1)^2}-\frac{m^2}{(k_1p_2)^2}-\frac{2p_1p_2}{k_1p_1k_1p_2}. \quad (14.113)$$

В этом выражении содержится одно-единственное указание на направление испущенного фотона, и мы проинтегрируем его по всем телесным углам. Если отбросить множитель $1/K^2$, то интеграл будет иметь вид

$$\int d\Omega_k\left[-\frac{m^2}{(E_1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_1)^2}-\frac{m^2}{(E_2-\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_2)^2}+2\frac{E_1E_2-|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|\cos\theta}{(E_1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_1)(E_2-\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_2)}\right], \quad (14.114)$$

где теперь $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения фотона, причем то, что энергия велика, и упрощения, возникающие в случае мягких фотонов, здесь еще не учтены. Прежде всего заметим, что

$$\int\frac{d\Omega_k}{(E-\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})^2}=\int_{-1}^{1}\frac{2\pi\,d\mu}{(E-|\mathbf{p}|\mu)^2}=\frac{4\pi}{m^2}. \quad (14.115)$$

Чтобы проинтегрировать слагаемое, содержащее два знаменателя, воспользуемся равенством ($E_1\approx E_2=E$)

$$\frac{1}{E-\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{n}}\,\frac{1}{E-\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{n}}=\frac{1}{\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{n}-\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{n}}\left(\frac{1}{E-\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{n}}-\frac{1}{E-\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{n}}\right)=$$
$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,dv\,\frac{1}{\left(E-\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{n}\,\frac{1+v}{2}-\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{n}\,\frac{1-v}{2}\right)^2}, \quad (14.116)$$

в справедливости которого можно убедиться путем непосредственной проверки. Тогда мы будем иметь

$$\int\frac{d\Omega_k}{\left[E-\left(\mathbf{p}_1\frac{1+v}{2}+\mathbf{p}_2\frac{1-v}{2}\right)\cdot\mathbf{n}\right]^2}=\frac{4\pi}{E^2-\left(\mathbf{p}_1\frac{1+v}{2}+\mathbf{p}_2\frac{1-v}{2}\right)^2}=$$
$$=\frac{4\pi}{m^2+|\mathbf{p}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}\,(1-v^2)}. \quad (14.117)$$

Конечно, это выражение можно проинтегрировать и по v, но выгоднее оставить его в таком виде.

В случае мягких фотонов дифференциальное сечение имеет вид

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha^3}{E^2} \frac{\sin\theta}{\sin^4\theta\frac{\theta}{2}} \frac{dK}{K} \times$$

$$\times \left[\left(1 + 2\frac{E^2}{m^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \int_0^1 dv \frac{1}{1 + \frac{E^2}{m^2}\sin^2\frac{\theta}{2}(1-v^2)} - 1 \right], \quad (14.118)$$

причем его нужно еще проинтегрировать по углам отклонения θ. Но теперь мы должны вспомнить о данном ранее предостережении: при очень малых углах приближение мягких фотонов следует несколько уточнить. В противоположность сингулярности выражения (14.118) при $\theta = 0$ минимальное значение, которое может принимать величина $(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_2)^2$ в случае рассеяния и испускания вперед, равно

$$\left[E_1 - \frac{m^2}{2E_1} + K - \left(E_2 - \frac{m^2}{2E_2}\right)\right]^2 = \left(\frac{m^2K}{2E_1E_2}\right)^2. \quad (14.119)$$

Более точной была бы замена $(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2$ на

$$(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 \to 4E^2\sin^2\frac{\theta}{2} + \left(\frac{m^2K}{2E_1E_2}\right)^2, \quad (14.120)$$

в которой мы узнаем характерную комбинацию, входящую в формулу (14.109). Но в такого рода уточнениях нет необходимости. Они нужны, когда рассматривают реальные фотоны. Нам же достаточно учесть, что приближение мягких фотонов применимо только при углах, удовлетворяющих условию

$$2E\sin\frac{\theta}{2} \gg \frac{m^2K}{2E_1E_2}, \quad (14.121)$$

при котором выражением (14.118) можно пользоваться без всяких поправок. Введем переменную

$$y = \frac{E}{m}\sin\frac{\theta}{2} \quad (14.122)$$

и проведем интегрирование от взятой с запасом верхней границы области реальных фотонов $k_{\text{макс}} \ll m$, т. е. от

$$y_{\text{мин}} = \frac{k_{\text{макс}}}{2m} \ll 1. \quad (14.123)$$

Это дает

$$d\sigma|_{\text{вирт}} = 4\frac{Z^2\alpha^3}{m^2}\frac{dK}{K}\int_{y_{\text{мин}}}^{\infty}\frac{dy}{y^3} \times$$

$$\times \left[(1 + 2y^2)\int_0^1 dv \frac{1}{1 + y^2(1-v^2)} - 1\right]. \quad (14.124)$$

Взяв интеграл по y, будем иметь

$$\int\limits_{y_{\text{мин}}}^{\infty} \frac{dy}{y} \int\limits_0^1 dv \frac{1+v^2}{1+y^2(1-v^2)} = \frac{4}{3} \ln \frac{2m}{k_{\text{макс}}} + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dv\,(1+v^2) \ln \frac{1}{1-v^2} = \frac{4}{3}\left(\ln \frac{m}{k_{\text{макс}}} + \frac{13}{12}\right), \tag{14.125}$$

и в результате

$$d\sigma\,|_{\text{вирт}} = \frac{16}{3} \frac{Z^2\alpha^3}{m^2} \frac{dK}{K} \left(\ln \frac{m}{k_{\text{мин}}} + \frac{13}{12}\right). \tag{14.126}$$

Рассматривая вклад реальных фотонов (14.112) в приближении мягких фотонов $E_1 \approx E_2$ и складывая его с (14.126), мы увидим, что члены с $\ln(m/k_{\text{макс}}) + {}^{13}/_{12}$ взаимно уничтожаются и в общем случае

$$d\sigma = \frac{16}{3} \frac{Z^2\alpha^3}{m^2} \frac{E_1}{E_2} \frac{dK}{K} \left[\ln\left(\frac{2E_1E_2}{mK}\right) - \frac{1}{2}\right]. \tag{14.127}$$

В правильности полученного результата мы убедимся, вычислив еще раз сечение для виртуальных фотонов, не прибегая при этом к приближению мягких фотонов.

Но тут вмешивается Гарольд.

Гарольд. Я не забыл о том, что вы решили опускать всякие исторические ссылки, но использованный вами прием объединения знаменателей путем введения параметров вынуждает меня задать один исторический вопрос. Метод параметризации для объединения произведения знаменателей в один-единственный знаменатель в литературе неизменно приписывают Фейнману. Но ведь подобная методика в близкой экспоненциальной форме, с обычной целью замены интегралов по пространству-времени инвариантными интегралами по параметрам была применена вами раньше, а элементарное тождество (14.116), позволяющее объединить два знаменателя, появилось в совершенно явном виде в вашей работе, опубликованной в том же выпуске журнала, что и работа Фейнмана. Не так ли?

Швингер. Да.

В физической системе координат при высоких энергиях фотоны излучаются в основном в направлении, близком к направлению вперед, или продольному направлению. Мы отразим это обстоятельство, вводя разложение на продольную и поперечную компоненты, иллюстрируемое инвариантными комбинациями

$$\begin{aligned} -k_1p_2 &= KE_2 - \left(K - \frac{k_{1T}^2}{2K}\right)\left(E_2 - \frac{m^2}{2E_2}\right), \\ -k_1p_1 &= KE_1 - \left(K - \frac{k_{1T}^2}{2K}\right)\left(E_1 - \frac{m^2 + p_{1T}^2}{2E_1}\right) - \mathbf{k}_{1T}\cdot\mathbf{p}_{1T}, \end{aligned} \tag{14.128}$$

которые записываются через поперечный импульс

$$\mathbf{k}_{2T} = \mathbf{k}_{1T} + \mathbf{p}_{1T}, \tag{14.129}$$

сообщаемый неподвижным зарядом, в виде

$$-k_1 p_2 = \frac{E_2}{2K} D_2, \qquad -k_1 p_1 = \frac{E_2}{E_1}\frac{E_2}{2K} D_1, \tag{14.130}$$

где

$$D_2 = (\mathbf{p}_{1T} - \mathbf{k}_{2T})^2 + \left(\frac{mK}{E_2}\right)^2, \qquad D_1 = \left(\mathbf{p}_{1T} - \frac{E_1}{E_2}\mathbf{k}_{2T}\right)^2 + \left(\frac{mK}{E_2}\right)^2. \tag{14.131}$$

Вклад виртуальных фотонов в дифференциальное сечение, к которому приводят выражения (14.72) и (14.73), таков:

$$d\sigma|_{\text{вирт}} = \frac{Z^2\alpha^3}{\pi^2}\frac{E_1}{E_2}\frac{dK}{K}\left(\frac{K}{E_2}\right)^2 \int \frac{(d\mathbf{k}_{2T})}{(k_{2T}^2)^2} \times$$
$$\times (d\mathbf{p}_{1T}) \left[-\frac{m^2}{D_1^2} - \frac{m^2}{D_2^2} + \frac{k_T^2 + 2m^2}{D_1 D_2}\right]. \tag{14.132}$$

Используя соответствующие трансляции переменных, будем иметь

$$\int \frac{d\mathbf{p}_{1T}}{D_1^2} = \int \frac{d\mathbf{p}_{1T}}{D_2^2} = \int_0^\infty \frac{\pi\, dp_T^2}{\left[p_T^2 + \left(\frac{mK}{E_2}\right)^2\right]^2} = \pi\left(\frac{E_2}{mK}\right)^2, \tag{14.133}$$

а объединив знаменатели с помощью параметра v, получим

$$\int \frac{d\mathbf{p}_{1T}}{D_1 D_2} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dv \int_0^\infty \frac{\pi\, dp_T^2}{\left[p_T^2 + \left(\frac{K}{E_2}\right)^2\left(m^2 + \frac{1}{4}k_T^2(1-v^2)\right)\right]^2} =$$
$$= \pi\left(\frac{E_2}{mK}\right)^2 \int_0^1 \frac{dv}{1 + \frac{k_T^2}{4m^2}(1-v^2)}. \tag{14.134}$$

Вводя затем переменную

$$y = \frac{k_T}{2m}, \tag{14.135}$$

мы придем к выражению

$$d\sigma|_{\text{вирт}} = 4\frac{Z^2\alpha^3}{m^2}\frac{E_1}{E_2}\frac{dK}{K}\int_{y_{\text{мин}}}^\infty \frac{dy}{y^3}\left[(1+2y^2)\int_0^1 \frac{dv}{1+y^2(1-v^2)} - 1\right]. \tag{14.136}$$

Оно действительно отличается от выражения (14.124) только множителем E_1/E_2, который необходим для того, чтобы при сложении с общим вкладом реальных фотонов (14.112) получить сечение (14.127).

В случае частиц со спином $^1/_2$ для подобного анализа требуется прежде всего явное выражение для электрон-фотонного сечения в системе покоя падающего электрона. Его можно получить, преобразовав сечение (13.117), записанное в системе центре масс, но некоторый интерес представляет и непосредственный вывод. Матричный элемент перехода имеет вид

$$\langle 1_{k_1\lambda_1}1_{p_1\sigma_1 q}\,|\,T\,|\,1_{k_2\lambda_2}1_{p_2\sigma_2 q}\rangle = 2m\,(d\omega_{p_1}\,d\omega_{k_1}\,d\omega_{p_2}\,d\omega_{k_2})^{1/2}\times$$
$$\times\, e^2 u_1^*\gamma^0\left[\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}_1^*\,\frac{1}{\gamma(p_2+k_2)+m}\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}_2+\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}_2\,\frac{1}{\gamma(p_2-k_1)+m}\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}_1^*\right]u_2, \tag{14.137}$$

где используются чисто пространственные векторы поляризации и упрощенные обозначения. Матричный множитель, заключенный в квадратные скобки, приводится к виду

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}_1^*\,\frac{m+\gamma^0(m+k_2^0)-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}_2}{-2mk_2^0}\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}_2+\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}_2\,\frac{m+\gamma^0(m-k_1^0)+\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}_1}{2mk_1^0}\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}_1^*\to$$
$$\to\frac{1}{2m}\{\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}_1^*,\ \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}_2\}-\frac{i}{2m}\,[\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}_1^*\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_2\times\mathbf{e}_2+\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_1\times\mathbf{e}_1^*], \tag{14.138}$$

где при переходе к последней форме записи мы учли то обстоятельство, что u_2 — собственный вектор матрицы γ^0 с собственным значением $+1$, и ввели обозначения $\mathbf{n}_{1,2}$ для единичных векторов в направлениях распространения фотонов. Если для простоты рассматривать вещественные векторы поляризации, то матричный элемент перехода будет иметь вид

$$(d\omega_{p_1}\,d\omega_{k_1}\,d\omega_{p_2}\,d\omega_{k_2})^{1/2}\,2e^2u_1^*\Big[-\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2+$$
$$+\frac{1}{2}\,\gamma_5\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_2\times\mathbf{e}_2+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_1\times\mathbf{e}_1)\Big]u_2. \tag{14.139}$$

Опустив слагаемое с γ_5 и спиноры, мы получим соответствующее выражение для спина 0. Суммирование вероятности перехода по конечным спинам можно провести с помощью формулы (13.110), что дает спинорный множитель

$$u_2^*\left[-\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2-\frac{1}{2}\,\gamma_5\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_2\times\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_1\times\mathbf{e}_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_2)\right]\frac{m\gamma^0+p_1^0+i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}_1}{2m}\times$$
$$\times\left[-\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2+\frac{1}{2}\,\gamma_5\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_2\times\mathbf{e}_2+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_1\times\mathbf{e}_1)\right]u_2, \tag{14.140}$$

где (как следует из кинематики процесса столкновения)

$$\mathbf{p}_1=\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1,\qquad p_1^0=m+k_2^0-k_1^0. \tag{14.141}$$

Раскрывая произведение матриц, можно опустить все члены, содержащие множитель γ_5, так как u_2 — собственный вектор матрицы γ^0, или множитель $\boldsymbol{\sigma}$, так как в последнем находит свое выражение усреднение по всем начальным спинам. Тогда предельно простые выкладки дадут нам следующее выражение для величины (14.140):

$$(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)^2+\frac{k_2^0-k_1^0}{4m}[1-\cos\theta(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)^2+$$
$$+\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{e}_2\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{n}_1\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{n}_2], \qquad (14.142)$$

где

$$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=\cos\theta. \qquad (14.143)$$

Если привлечь тождество

$$[(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\times\mathbf{n}_1]\cdot[(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\times\mathbf{n}_2]=$$
$$=(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)^2\cos\theta-\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{n}_1\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{n}_2=$$
$$=-\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{e}_2\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{e}_1, \qquad (14.144)$$

то явная зависимость второго члена от векторов поляризации исчезнет и мы получим выражение

$$(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)^2+\frac{k_2^0-k_1^0}{4m}(1-\cos\theta)=(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{k_1^0}{k_2^0}+\frac{k_2^0}{k_1^0}-2\right), \qquad (14.145)$$

которое заменит величину $(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)^2$ в сечении для частиц со спином 0. После суммирования и усреднения по поляризациям фотонов вместо формулы (14.103) мы для дифференциального сечения будем иметь

$$d\sigma=2\pi\sin\theta\,d\theta\frac{\alpha^2}{m^2}\left(\frac{k_1^0}{k_2^0}\right)^2\frac{1}{2}\left[\frac{k_1^0}{k_2^0}+\frac{k_2^0}{k_1^0}-1+\cos^2\theta\right]. \qquad (14.146)$$

При вычислении сечения испускания фотонов мы воспользуемся этим выражением в форме, аналогичной результату (14.104) для спина 0:

$$[mk_2^0\,d\sigma]=2\pi\alpha^2\frac{dK}{E_2}\frac{1}{2}\left[\frac{E_1}{E_2}+\frac{E_2}{E_1}-1+\left(1-\frac{mK}{E_1k_2^0}\right)^2\right], \qquad (14.147)$$

где учтено второе из соотношений (14.96). Соответствующая модификация выражений (14.109) и (14.111) такова:

$$d\sigma|_{\text{реальн}}=4\frac{Z^2\alpha^3}{m^2}\frac{E_1}{E_2}\frac{dK}{K}\int_0^\infty\frac{dx}{x^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{E_2}+\frac{E_2}{E_1}\right)-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right]\times$$
$$\times\left[2\ln\left(\frac{2E_1E_2}{mK}\right)-1+2\ln\left(\frac{k_{\text{макс}}}{mx}\right)\right]=$$
$$=4\frac{Z^2\alpha^3}{m^2}\frac{E_1}{E_2}\frac{dK}{K}\left[\left(\frac{E_1}{E_2}+\frac{E_2}{E_1}-\frac{2}{3}\right)\left(\ln\frac{2E_1E_2}{mK}-\frac{1}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{E_1}{E_2}+\frac{E_2}{E_1}-\frac{2}{3}\right)\left(\ln\frac{m}{k_{\text{макс}}}+1\right)-\frac{1}{9}\right]. \qquad (14.148)$$

Вклад виртуальных фотонов, к которому приводит W_{22}, имеет при высоких энергиях следующий вид:

$$d\sigma\,|_{\text{вирт}} = \frac{Z^2\alpha^3}{\pi^2}\frac{dK}{K}\frac{m^2}{E_1E_2}\int\frac{(d\mathbf{k}_{2T})(d\mathbf{p}_{1T})}{(k_{2T}^2)^2}\,|u_1^*\gamma^0Mu_2|^2, \qquad (14.149)$$

где

$$M = \gamma\cdot\mathbf{e}_1^*\frac{m-\gamma(p_1+k_1)}{2k_1p_1}\gamma^0-\gamma^0\frac{m-\gamma(p_2-k_1)}{2k_1p_2}\gamma\cdot\mathbf{e}_1^*, \qquad (14.150)$$

причем его следует просуммировать по поляризациям фотона и по конечному спину электрона, а также усреднить по начальному спину. Как и в случае фотон-электронного рассеяния при малых углах, существенное значение имеют переходы с изменением спиральности электрона. Вычисления целесообразно проводить изложенными выше методами, используя спиральные состояния фотонов, выбирая в качестве выделенного направления направление испущенного фотона и выражая спиральные состояния электрона через соответствующие матрицы вращения. Здесь мы приведем только результаты, которые классифицируются по изменению спиральности:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{\lambda_1\sigma_1\sigma_2}|u_1^*\gamma^0Mu_2|^2_{\text{сохр}} &= 2\frac{E_1}{E_2}\frac{E_1^2+E_2^2}{m^2}\left(\frac{K}{E_2}\right)^2\times\\&\times\left[-\frac{m^2}{D_1^2}-\frac{m^2}{D_2^2}+\frac{2m^2+k_T^2}{D_1D_2}\right],\\\frac{1}{2}\sum_{\lambda_1\sigma_1\sigma_2}|u_1^*\gamma^0Mu_2|^2_{\text{измен}} &= 2\frac{E_1}{E_2}\frac{(E_1-E_2)^2}{m^2}\left(\frac{K}{E_2}\right)^2\times\\&\times\left[\frac{m}{D_1}-\frac{m}{D_2}\right]^2.\end{aligned} \qquad (14.151)$$

В случае мягких фотонов спиральность практически не меняется, и мы снова получаем выражение, отвечающее спину 0. Интеграл, соответствующий изменению спиральности, имеет несколько другой вид:

$$\begin{aligned}\int_{y_{\text{мин}}}^{\infty}\frac{dy}{y^3}\left[1-\int_0^1\frac{dv}{1+y^2(1-v^2)}\right] &= \int_0^1 dv\int_{y_{\text{мин}}}^{\infty}\frac{dy}{y}\frac{1-v^2}{1+y^2(1-v^2)}=\\&=\frac{2}{3}\ln\frac{1}{y_{\text{мин}}}-\frac{1}{2}\int_0^1 dv\,(1-v^2)\ln(1-v^2)=\\&=\frac{2}{3}\left(\ln\frac{m}{k_{\text{макс}}}+1\right)-\frac{1}{9}.\end{aligned} \qquad (14.152)$$

Отдельные сечения таковы:

$$d\sigma\Big|_{\substack{\text{вирт}\\ \text{сохр}}} = 2\,\frac{Z^2\alpha^3}{m^2}\,\frac{E_1}{E_2}\,\frac{dK}{K}\left(\frac{E_1}{E_2}+\frac{E_2}{E_1}\right)\frac{4}{3}\left(\ln\frac{m}{k_{\text{мин}}}+\frac{13}{12}\right),$$

$$d\sigma\Big|_{\substack{\text{вирт}\\ \text{измен}}} = 2\,\frac{Z^2\alpha^3}{m^2}\,\frac{E_1}{E_2}\,\frac{dK}{K}\left(\frac{E_1}{E_2}+\frac{E_2}{E_1}-2\right)\times \times\left[\frac{2}{3}\left(\ln\frac{m}{k_{\text{мин}}}+1\right)-\frac{1}{9}\right]; \tag{14.153}$$

складывая их, получаем

$$d\sigma\,|_{\text{вирт}} = 4\,\frac{Z^2\alpha^3}{m^2}\,\frac{E_1}{E_2}\,\frac{dK}{K}\left[\left(\frac{E_1}{E_2}+\frac{E_2}{E_1}-\frac{2}{3}\right)\left(\ln\frac{m}{k_{\text{мин}}}+1\right)+\frac{1}{9}\right]. \tag{14.154}$$

Объединив этот вклад виртуальных фотонов с вкладом реальных фотонов (14.148), мы получим в области высоких энергий следующее окончательное выражение для дифференциального сечения, отвечающего испусканию фотона электроном, который отклоняется кулоновским полем:

$$d\sigma = 4\,\frac{Z^2\alpha^3}{m^2}\,\frac{E_1}{E_2}\,\frac{dK}{K}\left(\frac{E_1}{E_2}+\frac{E_2}{E_1}-\frac{2}{3}\right)\left(\ln\frac{2E_1E_2}{mK}-\frac{1}{2}\right). \tag{14.155}$$

Процесс превращения фотона в пару противоположно заряженных частиц в присутствии неподвижного заряда связан с только что рассмотренной реакцией перекрестными преобразованиями, которые имеют вид

$$k_1 \to -k_2, \qquad p_2 \to -p_1'. \tag{14.156}$$

Чтобы восстановить квадрат модуля матричного элемента перехода, мы возьмем известное дифференциальное сечение для испускания фотона, $d\sigma_{\text{испуск}}$, отвечающее определенным спинам и поляризациям, и образуем величину

$$d\sigma_{\text{испуск}} 2\,|\,\mathrm{p}_2\,|\,d\omega_{p_2} = d\sigma_{\text{испуск}} E_2^2\,dE_2\,\frac{4\pi}{(2\pi)^3}, \tag{14.157}$$

где второе выражение соответствует высоким энергиям, подчеркивая, кроме того, что нас интересуют только энергетические характеристики частиц. При перекрестном преобразовании кинематический множитель $d\omega_{p_1}d\omega_1 d\omega_{p_2}$ переходит в $d\omega_{p_1}d\omega_{p_1'}d\omega_{k_2}$. Дифференциальное сечение, отвечающее пучку падающих фотонов, нужно разделить на $2K\,d\omega_{k_2}$ $(K = k_2^0)$, и поэтому с точностью до фиктивного знака минус, сопутствующего этой формальной подстановке в случае частиц со спином $^1/_2$, мы имеем

$$d\sigma_{\text{испуск}} E_2^2\,dE_2 \to d\sigma_{\text{поглощ}} K^2\,dK. \tag{14.158}$$

Если используются сечения, включающие суммирования по конечным и усреднения по начальным спиральным состояниям, то для различных весовых множителей следует ввести соответствующие поправки. В случае частиц со спином $^1/_2$ в рассматриваемых реакциях с участием одной начальной и двух конечных частиц эти поправки не требуются, так как и электрон и фотон обладают двумя спиральными состояниями. Но в случае частиц со спином 0 сечение испускания фотона, просуммированное по его поляризациям, будет содержать дополнительный множитель 2 по сравнению с сечением поглощения фотона, в котором его поляризации усредняются. В результате получаются следующие выражения для сечений рождения пары:

$$\begin{aligned} \text{спин } 0: \quad & d\sigma = \frac{8}{3} \frac{Z^2\alpha^3}{m^2} \frac{EE'}{K^2} \frac{dE'}{K} \left(\ln \frac{2EE'}{mK} - \frac{1}{2}\right), \\ \text{спин } {}^1/_2: \quad & d\sigma = 4 \frac{Z^2\alpha^3}{m^2} \frac{E^2 + E'^2 + \frac{2}{3} EE'}{K^2} \times \\ & \times \frac{dE'}{K} \left(\ln \frac{2EE'}{mK} - \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{14.159}$$

Здесь ненужные причинные индексы опущены, а кроме того мы опустили и зарядовые индексы, так как разбиение энергии фотона на два слагаемых,

$$K = E + E', \tag{14.160}$$

не зависит от способа сопоставления им определенных зарядов.

§ 15. H-ЧАСТИЦЫ

Пользуясь для описания заряженных частиц с конечной массой обобщенными фотонными источниками, мы до такой степени выходим за пределы скелетной схемы взаимодействий, что сталкиваемся с частицами нового типа. Это некий идеализированный вариант составных систем. Поскольку самым известным примером такого рода служат атомы водорода, эти образования будут именоваться H-частицами.

Сначала мы рассмотрим статическое распределение источников $J^\mu(\mathbf{x})$ и соответствующий ему векторный потенциал $A^\mu(\mathbf{x})$ в некоторой удобной калибровке. Инвариантность функций Грина, например функции Δ_+, относительно сдвигов во времени находит свое выражение в представлении

$$\Delta_+(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} e^{-ip^0(x^0 - x^{0\prime})} \Delta_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p^0), \tag{15.1}$$

где

$$\begin{aligned} & [-(p^0 - eqA^0(\mathbf{x}))^2 + (-i\nabla - eq\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + m^2 - i\varepsilon] \times \\ & \times \Delta_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p^0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \tag{15.2}$$

Симметрия Бозе — Эйнштейна, свойственная этой функции Грина, которая отвечает нулевому спину, выступает в форме

$$\Delta_+ (\mathbf{x}', \mathbf{x}, -p^0)^T = \Delta_+ (\mathbf{x}, \mathbf{x}', p^0), \tag{15.3}$$

где зарядовые индексы подвергаются матричному транспонированию. Построить функцию Грина помогают собственные функции, т. е. решения однородного уравнения для функции Грина. Они нумеруются значениями энергии и заряда, дополненными другими квантовыми числами, которые обычно связывают с угловым моментом. Однородное уравнение и комплексно-сопряженное ему уравнение имеют вид

$$[-(p^{0\prime} - eq'A^0(\mathbf{x}))^2 + (-i\nabla - eq'\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + m^2]\, \varphi_{p^{0\prime} q' a'}(\mathbf{x}) = 0$$

$$[-(p^{0\prime} - eq'A^0(\mathbf{x}))^2 + (i\nabla - eq'\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + m^2]\, \varphi_{p^{0\prime} q' a'}(\mathbf{x})^* = 0. \tag{15.4}$$

Заметим, что при совместном обращении знаков у $p^{0\prime}$ и q' выражения для двух дифференциальных операторов переходят одно в другое. Следовательно, собственные функции можно выбрать так, что

$$\varphi_{p^{0\prime} q' a'}(\mathbf{x})^* = \varphi_{-p^{0\prime} q' a'^*}(\mathbf{x}), \tag{15.5}$$

где a'^* отвечает соответствующей совокупности квантовых чисел. Если в a' входит, например, магнитное квантовое число, то a'^* относится к магнитному квантовому числу с обратным знаком. Собственные функции можно выбрать таким способом, чтобы a'^* и a' совпадали. Хотя такой выбор не всегда оказывается удобным в конкретных задачах, он упрощает общий анализ. В тех случаях, когда это не оговорено особо, мы будем подразумевать, что $p^{0\prime}$ — положительная величина.

Из уравнений (15.4) следует также формальное интегральное соотношение

$$(p^{0\prime} - p^{0\prime\prime}) \int (d\mathbf{x})\, \varphi_{p^{0\prime} q' a'}(\mathbf{x})^* (p^{0\prime} + p^{0\prime\prime} - 2eq'A^0(\mathbf{x}))\, \varphi_{p^{0\prime\prime} q'' a''}(\mathbf{x}) = 0, \tag{15.6}$$

которое служит составной частью условия ортонормированности

$$\int (d\mathbf{x})\, \varphi_{p^{0\prime} q' a'}(\mathbf{x})^* (p^{0\prime} + p^{0\prime\prime} - 2eq'A^0(\mathbf{x}))\, \varphi_{p^{0\prime\prime} q'' a''}(\mathbf{x}) = \delta_{p^{0\prime} q' a',\, p^{0\prime\prime} q'' a''}. \tag{15.7}$$

В отсутствие статического источника таким свойством обладают известные собственные функции, связанные с малыми импульсными ячейками:

$$\varphi_{pq}(\mathbf{x}) = \varphi_{p^0 q \mathbf{p}}(\mathbf{x})\, e^{-ip^0 x^0}, \quad \varphi_{p^0 q \mathbf{p}}(\mathbf{x}) = (d\omega_p)^{1/2} \alpha_q e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \tag{15.8}$$

что следует из ортонормированности α_q и из уточненного условия пространственной нормировки (6.24) и (6.25). Входящий сюда вектор импульса $\mathbf{p}$ играет роль квантовых чисел a, определяя также значение энергии. Существует аналог соотношения (15.6), при выводе которого однородное уравнение для $\varphi_{p^{0''}q''a''}(\mathbf{x})$ заменяется неоднородным уравнением для функции Грина:

$$(p^{0'}-p^0)\int(d\mathbf{x})\,\varphi_{p^{0'}q'a'}(\mathbf{x})^*\,(p_0'+p^0-2eq'A^0(\mathbf{x}))\,\Delta_+(\mathbf{x},\,\mathbf{x}',\,p^0)=$$
$$=\varphi_{p^{0'}q'a'}(\mathbf{x}')^*. \qquad (15.9)$$

Достаточно близко от определенного собственного значения энергии $p^{0'}$, которое, как мы предполагаем, отделено неким, хотя и небольшим, интервалом от всех других собственных значений, основной вклад в функцию Грина будут давать соответствующие $p^{0'}$ собственные функции, и поэтому из уравнения (15.9) следует соотношение

$$p^0\sim p^{0'}:\qquad \Delta_+(\mathbf{x},\,\mathbf{x}',\,p^0)\sim\sum_{q'a'}\frac{\varphi_{p^{0'}q'a'}(\mathbf{x})\,\varphi_{p^{0'}q'a'}(\mathbf{x}')^*}{p^{0'}-p^0}. \qquad (15.10)$$

Точно так же вблизи $-p^{0'}$, как следует из формулы (15.3), мы имеем соотношение

$$p^0\sim -p^{0'}:\qquad \Delta_+(\mathbf{x},\,\mathbf{x}',\,p^0)\sim\sum_{q'a'}\frac{\varphi_{p^{0'}q'a'}(\mathbf{x})^*\,\varphi_{p^{0'}q'a'}(\mathbf{x}')}{p^{0'}+p^0}. \qquad (15.11)$$

Представление для функции Грина, справедливое в окрестности любого участка физического энергетического спектра или соответствующих ему отрицательных значений энергии, дается формулой

$$\Delta_+(\mathbf{x},\,\mathbf{x}',\,p^0)=\sum_{p^{0'}q'a'}\left[\frac{\varphi_{p^{0'}q'a'}(\mathbf{x})\,\varphi_{p^{0'}q'a'}(\mathbf{x}')^*}{p^{0'}-p^0-i\varepsilon}+\right.$$
$$\left.+\frac{\varphi_{p^{0'}q'a'}(\mathbf{x})^*\,\varphi_{p^{0'}q'x'}(\mathbf{x}')}{p^{0'}+p^0-i\varepsilon}\right], \qquad (15.12)$$

в которой мы показали также, как следует понимать параметр $\varepsilon\to+0$, чтобы удовлетворить граничному условию по времени: в случае положительных (отрицательных) отрезков времени функция Грина должна содержать положительные (отрицательные) частоты. В этом можно убедиться непосредственной проверкой:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp^0}{2\pi}\,\frac{e^{-ip^0(x^0-x^{0'})}}{p^{0'}-p^0-i\varepsilon}=\begin{cases}x^0>x^{0'}: & i\Delta_{p^{0'}}^{(+)}(x^0-x^{0'}),\\ x^0<x^{0'}: & 0;\end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp^0}{2\pi}\,\frac{e^{-ip^0(x^0-x^{0'})}}{p^{0'}+p^0-i\varepsilon}=\begin{cases}x^0>x^{0'}: & 0,\\ x^0<x^{0'}: & i\Delta_{p^{0'}}^{(-)}(x^0-x^{0'}),\end{cases} \qquad (15.13)$$

где

$$\Delta_{p^{0'}}^{(+)}(x^0-x^{0'})=\Delta_{p^{0'}}^{(-)}(x^{0'}-x^0)=e^{-ip^{0'}(x^0-x^{0'})}. \qquad (15.14)$$

Если в формулу (15.12) подставить собственные функции (15.8), то мы вновь придем к известному выражению для функции распространения свободных частиц. Позволяя теперь величине $p^{0'}$ принимать как положительные, так и отрицательные значения, мы сможем представить функцию Грина в более компактной форме:

$$\Delta_+(\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ p^0) = \sum_{(\pm)p^{0'}q'a'} \varphi_{p^{0'}q'a'}(\mathbf{x})\, \Delta_{p^{0'}}(p^0)\, \varphi_{-p^{0'}-q'a'}(\mathbf{x}'), \qquad (15.15)$$

где знаки $(\pm)$ указывают на то, что мы расширили смысл $p^{0'}$, а

$$\Delta_{p^{0'}}(p^0) = \frac{1}{|p^{0'}| - i\varepsilon - \varepsilon(p^{0'})\, p^0} = \Delta_{-p^{0'}}(-p^0). \qquad (15.16)$$

Функцию $\varepsilon(p^{0'})$, которой определяется алгебраический знак величины $p^{0'}$, не следует путать с бесконечно малым параметром ε. Функцию (15.16) можно выразить и иначе:

$$\Delta_{p^{0'}}(p^0) = \frac{\varepsilon(p^{0'})}{p^{0'}(1 - i\varepsilon) - p^0}, \qquad (15.17)$$

причем масштаб для $\varepsilon \to +0$ здесь изменен. Вариант выражения (15.15), содержащий зависимость от времени, имеет вид

$$\Delta_+(x,\ x') = \sum_{(\pm)p^{0'}q'a'} \varphi_{p^{0'}q'a'}(\mathbf{x})\, \Delta_{p^{0'}}(x^0 - x^{0'})\, \varphi_{-p^{0'}-q'a'}(\mathbf{x}'), \qquad (15.18)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_{p^{0'}}(x^0 - x^{0'}) &= \Delta_{-p^{0'}}(x^{0'} - x^0) = \\ &= \eta(x^0 - x^{0'})\, \eta(p^{0'})\, i\Delta^{(+)}_{p^{0'}}(x^0 - x^{0'}) + \\ &+ \eta(x^{0'} - x^0)\, \eta(-p^{0'})\, i\Delta^{(-)}_{-p^{0'}}(x^0 - x^{0'}). \qquad (15.19)\end{aligned}$$

В данном параграфе нас будет интересовать только тот участок энергетического спектра, который не может принадлежать свободной частице: $|p^{0'}| < m$. Такие состояния могут существовать, будучи локализованными в окрестности источника, если между частицей и источником имеется сила притяжения, достаточно интенсивная и с достаточно большим радиусом действия. В хорошо известном случае дальнодействующего кулоновского взаимодействия между зарядами противоположных знаков не требуется никакой минимальной интенсивности, причем существует неограниченное число такого рода связанных состояний. Это H-частицы. Встает вопрос: каковы же источники испускания и поглощения H-частиц?

Подставив функцию Грина (5.18) в выражение

$$W = \frac{1}{2} \int (dx)(dx')\, K(x)\, \Delta_+(x,\ x')\, K(x'), \qquad (15.20)$$

описывающее связь источника, получим

$$W = \sum_{(\pm)p^{0'}q'a'} \frac{1}{2} \int dx^0\, dx^{0'} K_{-p^{0'}-q'a'}(x^0)\, \Delta_{p^{0'}}(x^0 - x^{0'})\, K_{p^{0'}q'a'}(x^{0'}). \qquad (15.21)$$

Зависящие от времени величины

$$K_{p^{0\prime}q'a'}(x^0)=\int(d\mathbf{x})\,\varphi_{-p^0\,-q'a'}(\mathbf{x})\,K(\mathbf{x}x^0)=K_{-p^0\,-q'a'}(x^0)^* \qquad (15.22)$$

и являются источниками определенной H-частицы с квантовыми числами $p^{0\prime}$, q', причем a' играет роль дополнительного индекса, аналогичного спину. То, что эти источники зависят только от времени, свидетельствует о неподвижности очень тяжелых H-частиц. Повторное действие источников может породить любое произвольное число частиц, находящихся в связанных состояниях. Поскольку взаимодействия между частицами никак не учитываются, мы будем иметь дело лишь со свойствами одной-единственной частицы, связанной с источником и образующей H-частицу. Тем не менее желательно убедиться, что в такой многочастичной задаче с упрощенной динамикой удовлетворяются требования сохранения вероятности.

Рассматривая обычным способом причинно-упорядоченную пару испускающего и поглощающего источников, мы придем к разложению

$$\langle 0_+|0_-\rangle^K=\langle 0_+|0_-\rangle^{K_1}\exp\Big[\sum_{p'^0q'a'} iK^*_{1p^{0\prime}q'a'}iK_{2p^{0\prime}q'a}\Big]\langle 0_+|0_-\rangle^{K_2}, \qquad (15.23)$$

где

$$K_{p^{0\prime}q'a'}=\int dx^0 e^{ip^{0\prime}x^0}K_{p^{0\prime}q'a'}(x^0)=K^*_{-p^0\,-q'a'}, \qquad (15.24)$$

причем из-за наличия причинной упорядоченности суммирование по энергиям в формуле (15.23) проводится только по физическим (положительным) значениям. Многочастичные состояния, получаемые путем причинного разложения вакуумной амплитуды, выражаются обычным образом через произведения источников, и из нормировки вероятности будет вытекать, что

$$|\langle 0_+|0_-\rangle^K|^2=\exp\Big[-\sum_{p^{0\prime}q'a'}|K_{p^{0\prime}q'a'}|^2\Big]. \qquad (15.25)$$

При непосредственной проверке этого применяется соотношение

$$-i\Delta_{p^{0\prime}}(x^0-x^{0\prime})+[-i\Delta_{-p^{0\prime}}(x^0-x^{0\prime})]^*=\Delta^{(+)}_{p^{0\prime}}(x^0-x^{0\prime}). \qquad (15.26)$$

В случае частиц со спином $^1/_2$ фурье-образ функции Грина, определяющийся формулой

$$G_+(x,x')=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp^0}{2\pi}e^{-ip^0(x^0-x^{0\prime})}G_+(\mathbf{x},\mathbf{x}',p^0), \qquad (15.27)$$

обнаруживает антисимметрию, соответствующую статистике Ферми — Дирака

$$[\gamma^0G_+(\mathbf{x}',\mathbf{x},-p^0)]^T=-\gamma^0G_+(\mathbf{x},\mathbf{x}',p^0), \qquad (15.28)$$

и удовлетворяет уравнению

$$[-\gamma^0 (p^0 - eqA^0 (\mathbf{x})) + \boldsymbol{\gamma}\cdot(-i\boldsymbol{\nabla} - eq\mathbf{A} (\mathbf{x})) + m - i\varepsilon] \times \\ \times G_+ (\mathbf{x}, \mathbf{x}', p^0) = \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \qquad (15.29)$$

Собственные функции определяются из однородных уравнений

$$[-\gamma^0 (p^{0\prime} - eq' A^0 (\mathbf{x})) + \\ + \boldsymbol{\gamma}\cdot(-i\boldsymbol{\nabla} - eq'\mathbf{A} (\mathbf{x})) + m] \psi_{p^{0\prime} q' a'} (\mathbf{x}) = 0,$$

$$\psi_{p^{0\prime} q' a'} (\mathbf{x})^* \gamma^0 [-\gamma^0 (p^{0\prime} - eq'A^0 (\mathbf{x})) + \\ + \boldsymbol{\gamma}\cdot(-i\boldsymbol{\nabla}^T - eq'\mathbf{A} (\mathbf{x})) + m] = 0, \qquad (15.30)$$

где

$$\chi (\mathbf{x})\boldsymbol{\nabla}^T = - \boldsymbol{\nabla}\chi (\mathbf{x}). \qquad (15.31)$$

Два этих уравнения взаимосвязаны благодаря эрмитовости матриц $\gamma^0\gamma^\mu$. В то же время, учитывая мнимость матриц γ^μ, мы придем к соотношению для собственных функций, которое при подходящем выборе параметра a' имеет вид

$$\psi_{p^{0\prime} q' a'}(\mathbf{x})^* = \psi_{-p^{0\prime} - q' a} (\mathbf{x}). \qquad (15.32)$$

Собственные функции нормируются в соответствии с интегральным соотношением

$$\int (d\mathbf{x}) \psi_{p^{0\prime} q' a'}(\mathbf{x})^* \psi_{p^{0\prime\prime} q'' a''} (\mathbf{x}) = \delta_{p^{0\prime} q' a',\, p^{0\prime\prime} q'' a''}. \qquad (15.33)$$

Учитывая еще одно интегральное соотношение

$$(p^{0\prime} - p^0) \int (d\mathbf{x}) \psi_{p^{0\prime} q' a'} (\mathbf{x})^* G_+ (\mathbf{x}, \mathbf{x}', p^0) = \psi_{p^{0\prime} q' a'} (\mathbf{x}')^* \gamma^0 \qquad (15.34)$$

и комбинируя его с требованием симметрии (15.28), мы приходим к следующему представлению для функции Грина ($p^{0\prime} > 0$):

$$G_+ (\mathbf{x}, \mathbf{x}', p^0) = \sum_{p^{0\prime} q' a'} \left[\frac{\psi_{p^{0\prime} q' a'} (\mathbf{x}) \psi_{p^{0\prime} q' a'} (\mathbf{x}')^* \gamma^0}{p^{0\prime} - p^0 - i\varepsilon} - \right. \\ \left. - \frac{\psi_{p^{0\prime} q' a'} (\mathbf{x})^* \psi_{p^{0\prime} q' a'} (\mathbf{x}') \gamma^0}{p^{0\prime} + p^0 - i\varepsilon} \right], \qquad (15.35)$$

или, в более компактной форме,

$$G_+ (\mathbf{x}, \mathbf{x}', p^0) = \sum_{(\pm) p^{0\prime} q' a'} \psi_{p^{0\prime} q' a'} (\mathbf{x}) G_{p^{0\prime}} (p^0) \psi_{-p^{0\prime} - q' a'} (\mathbf{x}') \gamma^0, \qquad (15.36)$$

где

$$G_{p^{0\prime}} (p^0) = - G_{-p^{0\prime}} (- p^0) = \frac{1}{p^{0\prime} (1 - i\varepsilon) - p^0}. \qquad (15.37)$$

Зависимость функции Грина от времени такова:

$$G_+ (x, x') = \sum_{(\pm) p^{0\prime} q' a'} \psi_{p^{0\prime} q' a'} (\mathbf{x}) G_{p^{0\prime}} (x^0 - x^{0\prime}) \psi_{-p^{0\prime} - q' a'} (\mathbf{x}') \gamma^0, \qquad (15.38)$$

где

$$G_{p^{0\prime}}(x^0-x^{0\prime}) = -G_{-p^{0\prime}}(x^{0\prime}-x^0) =$$
$$= \eta(x^0-x^{0\prime})\,\eta(p^{0\prime})\,i\Delta^{(+)}_{p^{0\prime}}(x^0-x^{0\prime}) -$$
$$-\eta(x^{0\prime}-x^0)\,\eta(-p^{0\prime})\,i\Delta^{(-)}_{-p^{0\prime}}(x^0-x^{0\prime}). \quad (15.39)$$

Зависящие от времени источники H-частиц определяются как

$$\eta_{p^{0\prime}q'a'} = \int (d\mathbf{x})\,\psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x})^*\,\gamma^0\eta(\mathbf{x}x^0) = -\eta_{-p^{0\prime}-q'a'}(x^0)^*, \quad (15.40)$$

причем

$$W = \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,\eta(x)\,\gamma^0 G_+(x, x')\,\eta(x') =$$
$$= \sum_{(\pm)p^{0\prime}q'a'} \frac{1}{2}\int dx^0\,dx^{0\prime}\,\eta_{p^{0\prime}q'a'}(x^0)^*\,G_{p^{0\prime}}(x^0-x^{0\prime})\,\eta_{p^{0\prime}q'a'}(x^{0\prime}). \quad (15.41)$$

В случае причинно-упорядоченной пары источников вакуумная амплитуда равна

$$\langle 0_+|0_-\rangle^\eta = \langle 0_+|0_-\rangle^{\eta_1}\exp\Big[\sum_{p^{0\prime}q'a'} i\eta^*_{1p^{0\prime}q'a'}\,i\eta_{2p^{0\prime}q'a'}\Big]\langle 0_+|0_-\rangle^{\eta_2}, \quad (15.42)$$

где мы ввели

$$\eta_{p^{0\prime}q'a'} = \int dx^0\,e^{ip^{0\prime}x^0}\eta_{p^{0\prime}q'a'}(x^0) = -\eta^*_{-p^{0\prime}q'a'}. \quad (15.43)$$

Из полноты многочастичных состояний, которые обычным образом выражаются через произведения источников, вытекает, что $(p^{0\prime} > 0)$

$$|\langle 0_+|0_-\rangle^\eta|^2 = \exp\Big[-\sum_{p^{0\prime}q'a'} \eta^*_{p^{0\prime}q'a'}\eta_{p^{0\prime}q'a'}\Big]. \quad (15.44)$$

Непосредственное вычисление на основе формулы (15.41) с применением соотношения

$$-iG_{p^{0\prime}}(x^0-x^{0\prime}) = [-iG_{-p^{0\prime}}(x^0-x^{0\prime})]^* = \varepsilon(p^{0\prime})\,\Delta^{(+)}_{p^{0\prime}}(x^0-x^{0\prime}) \quad (15.45)$$

дает

$$|\langle 0_+|0_-\rangle^\eta|^2 = \exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{(\pm)p^{0\prime}q'a'} \varepsilon(p^{0\prime})\,\eta^*_{p^{0\prime}q'a'}\eta_{p^{0\prime}q'a'}\Big] =$$
$$= \exp\Big[-\sum_{p^{0\prime}q'a'} \eta^*_{p^{0\prime}q'a'}\eta_{p^{0\prime}q'a'}\Big], \quad (15.46)$$

так как в соответствии со статистикой Ферми — Дирака

$$-\eta^*_{-p^{0\prime}-q'a'}\eta_{-p^{0\prime}-q'a'} = -\eta_{p^{0\prime}q'a'}\eta^*_{p^{0\prime}q'a'} = \eta^*_{p^{0\prime}q'a'}\eta_{p^{0\prime}q'a'}. \quad (15.47)$$

Добавим теперь к статическому источнику, описывающему массивную заряженную частицу, простой фотонный источник. Члены действия W, содержащие один такой фотонный источник, будут описывать процессы, при которых происходят переходы между различными H-частицами с испусканием или поглощением одного фотона. Взяв два фотонных источника, мы опишем переходы с испусканием или поглощением двух фотонов, а также процессы рассеяния фотона, которые сопровождаются или не сопровождаются переходом между H-частицами, и так далее. Электромагнитные процессы удобнее характеризовать таким образом, чтобы все взаимодействия относились непосредственно к заряженным частицам, а для этого электромагнитная модель источника частиц заменяется калибровочным условием для векторного потенциала. Напомним в этой связи формулу (10.49), дающую пространственно-подобный вектор

$$if^{\mu}(k) = \frac{k^{\mu} + n^{\mu}nk}{k^2 + (nk)^2}. \tag{15.48}$$

Статическим источником определяется система координат, в которой вектор n^{μ} можно выбрать так, чтобы он имел только временну́ю компоненту. Тогда у вектора $f^{\mu}(k)$ будут только пространственные компоненты, пропорциональные вектору $\mathbf{k}$, и калибровочное условие примет вид

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}(k) = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{A}(x) = 0. \tag{15.49}$$

Такая калибровка называется радиационной, поскольку свойство поперечности по отношению к вектору импульса характерно для векторов поляризации, отвечающих фотонам. Ее называют также кулоновской калибровкой, хотя такое название менее удачно. Как с наибольшей очевидностью явствует из дифференциальных уравнений Максвелла второго порядка в трехмерной форме

$$\begin{aligned} -\nabla^2 A^0(x) &= J^0(x) + \partial_0\nabla\cdot\mathbf{A}(x),\\ -\partial^2\mathbf{A}(x) + \nabla\nabla\cdot\mathbf{A}(x) &= \mathbf{J}(x) - \nabla\partial_0 A^0(x), \end{aligned} \tag{15.50}$$

скалярный потенциал $A^0(x)$ в радиационной калибровке равен мгновенному значению кулоновского потенциала распределения зарядов:

$$\nabla\cdot\mathbf{A}(x) = 0{:}\quad A^0(x) = \int (d\mathbf{x}')\,\mathscr{D}\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,J^0(\mathbf{x}'x^0). \tag{15.51}$$

Обратное же утверждение не верно. Если потребовать, чтобы потенциал $A^0(x)$ совпадал с мгновенным значением кулоновского потенциала, для чего, собственно, и требуется в основном кулоновская калибровка, то мы придем к выводу о равенстве нулю производной по времени от $\nabla\cdot\mathbf{A}(x)$. При этом никаких ограничений на произвольную статическую составляющую векторного потенциала $\mathbf{A}(x)$ не накладывается.

Статический потенциал A^μ (x) берется именно в радиационной калибровке. Векторный потенциал $\mathbf{A}$ (x) можно использовать для описания поля ядерных магнитных дипольных моментов, приводящего к сверхтонкой структуре H-частиц. Но в дальнейшем все внимание будет сосредоточено на статической плотности заряда и на ее скалярном потенциале. Тем самым мы избегаем всякой путаницы с обозначениями потенциалов, связанных с простыми фотонными источниками. Последние нужны нам лишь в областях, удаленных от испускающих или детектирующих источников, где они сводятся к векторному потенциалу $\mathbf{A}$ (x). Он связан со своими источниками уравнениями

$$-\partial^2 \mathbf{A}(x) = \mathbf{J}_T(x), \qquad \nabla \cdot \mathbf{A}(x) = \nabla \cdot \mathbf{J}_T(x) = 0, \tag{15.52}$$

где величина

$$\mathbf{J}_T(x) = \mathbf{J}(x) - \nabla\,\partial_0 \int (d\mathbf{x}')\,\mathscr{D}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,J^0(\mathbf{x}'x^0) \tag{15.53}$$

представляет собой поперечную, или соленоидальную, часть $\mathbf{J}$ (x), и действительно

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_T(x) = \nabla \cdot \mathbf{J}(x) + \partial_0 J^0(x) = 0. \tag{15.54}$$

Решением уравнений (15.52) в областях, которые с точки зрения причинной упорядоченности расположены между испускающим и детектирующим источниками, является, конечно, потенциал

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{k\lambda} [\mathbf{A}_{k\lambda}(x)\, iJ_{2k\lambda} + iJ^*_{1k\lambda}\mathbf{A}_{k\lambda}(x)^*] \tag{15.55}$$

при

$$\mathbf{A}_{k\lambda}(x) = (d\omega_k)^{1/2}\,\mathbf{e}_{k\lambda}e^{ikx}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{A}_{k\lambda}(x) = 0. \tag{15.56}$$

В дальнейшем мы будем отличать функцию $\Delta_+(x, x')$, содержащую статический скалярный потенциал A^0 (x), от $\Delta_+^A(x, x')$. Последняя описывает также эффекты, связанные с векторным потенциалом $\mathbf{A}$ (x), который отвечает фотонам. Дифференциальное уравнение для функции Грина $\Delta_+^A(x, x')$ может быть представлено в форме ($\mathbf{p} = -i\nabla$)

$$\begin{aligned}[-(i\,\partial_0 - eqA^0(\mathbf{x}))^2 - \nabla^2 + m^2 - i\varepsilon]\,\Delta_+^A(x, x') &= \\ = \delta(x-x') + (2eq\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(x) - e^2\mathbf{A}(x)^2)\,\Delta_+^A(x, x'). \end{aligned} \tag{15.57}$$

С помощью функции Грина $\Delta_+(x, x')$ его можно переписать в виде интегрального уравнения

$$\begin{aligned}\Delta_+^A(x, x') = \Delta_+(x, x') + \int (dx_1)\,\Delta_+(x, x_1)\,[2eq\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{A}(x_1) - \\ - e^2\mathbf{A}(x_1)^2]\,\Delta_+^A(x, x'), \end{aligned} \tag{15.58}$$

которое можно решать методом итераций. Соответствующий анализ полностью аналогичен анализу уравнения (13.27). Как и прежде, последовательные члены взаимодействия W_{21}, W_{22}, ... наиболее компактно выражаются через поля частиц

$$\varphi(x) = \int (dx')\, \Delta_+(x, x')\, K(x'). \tag{15.59}$$

Так, например,

$$W_{21} = \frac{1}{2} \int (dx)\, \varphi(x)\, 2eq\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(x)\, \varphi(x), \tag{15.60}$$

$$W_{22} = \frac{1}{2} \int (dx)(dx')\, \varphi(x)\, 2eq\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(x)\, \Delta_+(x, x')\, 2eq\mathbf{p}'\cdot\mathbf{A}(x')\, \varphi(x') - \\ - \frac{1}{2} \int (dx)\, \varphi(x)\, e^2\mathbf{A}(x)^2\, \varphi(x) \tag{15.61}$$

и т. д.

Поле частиц $\varphi(x)$ связано с источниками H-частиц соотношением

$$\varphi(x) = \sum_{(\pm)p^{0\prime}q'a'} \varphi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x}) \int dx^{0\prime} \Delta_{p^{0\prime}}(x^0 - x^{0\prime})\, K_{p^{0\prime}q'a'}(x^{0\prime}). \tag{15.62}$$

В момент времени, промежуточный с точки зрения причинной упорядоченности между действием испускающего и поглощающего источников, оно переходит ($p^{0\prime} > 0$) в соотношение

$$\varphi(\mathbf{x}, x^0) = \sum_{p^{0\prime}q'a'} [\varphi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x})\, e^{-ip^{0\prime}x^0} iK_{2p^{0\prime}q'a'} + \\ + iK^*_{1p^{0\prime}q'a'} \varphi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x})^*\, e^{ip^{0\prime}x^0}]. \tag{15.63}$$

Следовательно, матричный элемент перехода для процесса, в котором H-частица с квантовыми числами $p^{0\prime\prime}a''$ превращается в H-частицу с квантовыми числами $p^{0\prime}a'$ (зарядовые индексы здесь опущены, так как со статическим источником может быть связана частица лишь одного знака заряда, скажем, q') и при этом испускается фотон $k\lambda$, равен

$$\langle 1_{p^{0\prime}a'} 1_{k\lambda} | T | 1_{p^{0\prime\prime}a''} \rangle = (d\omega_k)^{1/2}\, 2eq' \times \\ \times \int (d\mathbf{x})\, \varphi_{p^{0\prime}a'}(\mathbf{x})^*\, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}^*_{k\lambda} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi_{p^{0\prime\prime}a''}(\mathbf{x}). \tag{15.64}$$

Вероятность перехода в единицу времени имеет вид

$$2\pi\delta(p^{0\prime} + k^{0\prime} - p^{0\prime\prime}) \frac{d\Omega\, (k^0)^2\, dk^0}{(2\pi)^3\, 2k^0}\, 4\pi\alpha \times \\ \times \left| 2 \int (d\mathbf{x})\, \varphi^*_{p^{0\prime}a'}(\mathbf{x})\, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}^*_{k\lambda} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, \varphi_{p^{0\prime\prime}a''}(\mathbf{x}) \right|^2. \tag{15.65}$$

Так как энергия фотона точно определяется законом сохранения:

$$p^{0\prime\prime} > p^{0\prime}: \qquad k^0 = p^{0\prime\prime} - p^{0\prime}, \tag{15.66}$$

рассматривать распределение по энергиям не нужно. Кроме того, мы выполним суммирование по поляризациям и интегрирование по всем направлениям испущенного фотона, ограничиваясь при этом для иллюстрации нерелятивистским случаем. В этом пределе импульсом фотона, но не его энергией, можно пренебречь, причем благодаря условию нормировки (15.7) собственные функции частицы связаны с нерелятивистскими волновыми функциями $\psi_{E'a'}(\mathbf{x})$, которые нормированы обычным способом, соотношением

$$p^{0\prime} = m + E': \qquad \varphi_{p^{0\prime}a'}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{(2m)^{1/2}} \psi_{E'a'}(\mathbf{x}). \tag{15.67}$$

Приняв для матричного элемента обычные обозначения, в результате получим

$$2 \int (d\mathbf{x})\, \varphi_{p^{0\prime}a'}(\mathbf{x})^* \, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}^*_{k\lambda} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi_{p^{0\prime\prime}a''}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{e}^*_{k\lambda}\cdot \left\langle E'a' \left| \frac{\mathbf{p}}{m} \right| E''a'' \right\rangle . \tag{15.68}$$

Так как в качестве векторов поляризации выступают только два из трех ортонормированных единичных векторов, суммирование по поляризациям и интегрирование по направлениям испускания дает следующее выражение для вероятности перехода в единицу времени:

$$A_{p^{0\prime}a' \leftarrow p^{0\prime\prime}a''} = \frac{4}{3} \alpha k^0 \left| \left\langle E'a' \left| \frac{\mathbf{p}}{m} \right| E''a'' \right\rangle \right|^2 = \frac{4}{3} \alpha (k^0)^3 \,|\langle E'a' \,|\, \mathbf{x} \,|\, E''a''\rangle|^2, \tag{15.69}$$

где учтена также связь между матрицами скорости частицы и ее радиуса-вектора. Эта величина представляет собой вероятность спонтанного испускания фотона, отнесенную к единице времени, при переходе между заданными состояниями H-частицы, и, следовательно,— это коэффициент Эйнштейна A. Менее конкретизированный коэффициент A, отвечающий только энергии, получается путем суммирования по a' и усреднения по a''.

Когда фотон падает на H-частицу, находящуюся в состоянии $p^{0\prime\prime}a''$, переход в состояние $p^{0\prime}a'$ может происходить при условии

$$k^0 = p^{0\prime} - p^{0\prime\prime}. \tag{15.70}$$

Матричный элемент перехода равен

$$\langle 1_{p^{0\prime}a'} \,|\, T \,|\, 1_{p^{0\prime\prime}a''} 1_{k\lambda}\rangle = (d\omega_k)^{1/2}\, 2eq' \int (d\mathbf{x})\, \varphi_{p^{0\prime}a'}(\mathbf{x})^* \, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_{k\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi_{p^{0\prime\prime}a''}(\mathbf{x}) \approx (d\omega_k)^{1/2} eq' \mathbf{e}_{k\lambda}\cdot \left\langle E'a' \left| \frac{\mathbf{p}}{m} \right| E''a'' \right\rangle , \tag{15.71}$$

что приводит к следующей вероятности перехода в единицу времени:

$$2\pi\delta\,(E' - E'' - k^0)\, d\omega_k 4\pi\alpha\, (k^0)^2\, |\,\mathbf{e}\cdot\langle E'a'\,|\,\mathbf{x}\,|\,E''a''\rangle\,|^2. \qquad (15.72)$$

После интегрирования по строго определенным значениям энергии фотона ее можно будет представить в виде коэффициента Эйнштейна B, связывающего вероятность перехода в единицу времени с плотностью энергии фотонов, отнесенной к единичному углу и к единичному интервалу частот: $k^0\,(2k^0\, d\omega_k/dk^0)$. Усреднение по поляризации падающего фотона и по направлениям движения дает нерелятивистское выражение

$$B_{p^0{}'a'\leftarrow p^0{}''a''} = \frac{4\pi^2}{3}\,\alpha\,|\,\langle E'a'\,|\,\mathbf{x}\,|\,E''a''\rangle\,|^2. \qquad (15.73)$$

Простое выражение для отношения

$$\frac{A}{B} = \frac{(k^0)^3}{\pi^2} \qquad (15.74)$$

для заданной пары H-частиц напоминает нам о том, что с точностью до кинематических множителей, содержащихся в определениях, вероятности переходов с испусканием и с поглощением одного фотона переводятся одна в другую фотонным перекрестным преобразованием $k^\mu \to -k^\mu$. Если определения относятся к отдельным фотонам с заданной поляризацией, то скорости испускания и поглощения будут равны. Кроме того, как было установлено ранее в более простом случае зондирующего источника, если в начале имеется n фотонов с соответствующей частотой, то скорость поглощения умножается на n, а скорость испускания — на $n + 1$. Последняя относится к комбинации процессов вынужденного и спонтанного испускания.

В случае частиц со спином $^1/_2$ нужно исходить из дифференциального уравнения для функции Грина

$$\left[-\gamma^0(i\partial_0 - eqA^0(\mathbf{x})) + \boldsymbol{\gamma}\cdot\frac{1}{i}\boldsymbol{\nabla} + m - i\varepsilon\right] G_+^A(x, x') =$$
$$= \delta(x - x') + eq\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}(x)\, G_+^A(x, x') \qquad (15.75)$$

и эквивалентного ему интегрального уравнения

$$G_+^A(x, x') = G_+(x, x') + \int (dx_1)\, G_+(x, x_1)\, eq\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}(x_1)\, G_+^A(x_1, x'). \qquad (15.76)$$

Члены фотонного взаимодействия, которые записываются через поле частиц

$$\psi(x) = \int (dx')\, G_+(x, x')\, \eta(x'), \qquad (15.77)$$

имеют вид [см. формулу (12.24)]

$$W_{21}=\frac{1}{2}\int (dx)\,\psi(x)\,\gamma^0 eq\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}(x)\,\psi(x),$$
$$W_{22}=\frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,\psi(x)\,\gamma^0 eq\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}(x)\,G_+(x,\,x')\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}(x')\,\psi(x'), \tag{15.78}$$

и т. д. Поле частиц можно выразить через источники H-частиц:

$$\psi(x)=\sum_{(\pm)p^{0\prime}q'a'}\psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x})\int dx^{0\prime}G_{p^{0\prime}}(x^0-x^{0\prime})\,\eta_{p^{0\prime}q'a'}(x^{0\prime}), \tag{15.79}$$

и в момент времени, промежуточный с точки зрения причинной упорядоченности между действием испускающего и действием поглощающего источников, оно записывается как

$$\psi(\mathbf{x},\,x^0)=\sum_{p^{0\prime}q'a'}[\psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x})\,e^{-ip^{0\prime}x^0}i\eta_{2p^{0\prime}q'a'}+$$
$$+i\eta^*_{1p^{0\prime}q'a'}\psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x})^*\,e^{ip^{0\prime}x^0}]. \tag{15.80}$$

Матричный элемент перехода для однофотонного испускания таков:

$$\langle 1_{p^{0\prime}a'}1_{k\lambda}\,|\,T\,|\,1_{p^{0\prime\prime}a''}\rangle=(d\omega_k)^{1/2}\,eq'\,\times$$
$$\times\int (d\mathbf{x})\,\psi_{p^{0\prime}a'}(\mathbf{x})^*\,\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot e^*_{k\lambda}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\psi_{p^{0\prime\prime}a''}(\mathbf{x}). \tag{15.81}$$

Комбинируя дифференциальные уравнения для собственных функций так, как делалось в формуле (6.67), получим интегральное тождество

$$0=\int (d\mathbf{x})\,\psi_{p^{0\prime}a'}(\mathbf{x})^*\,\gamma^0\Big[\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}^*e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\;\Big(\frac{\mathbf{p}}{m}\Big)\cdot\mathbf{e}^*e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}+$$
$$+\frac{1}{2m}\,i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}\times\mathbf{e}^*e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}+\Big(\frac{k^0}{2m}\Big)\;\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}^*e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\Big]\,\psi_{p^{0\prime\prime}a''}(\mathbf{x}). \tag{15.82}$$

В нерелятивистском пределе, в котором функции $\psi_{p^{0\prime}a'}(\mathbf{x})$ являются приближенными собственными векторами матрицы γ^0, последним членом, содержащим матрицу $\gamma^0\boldsymbol{\gamma}=i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}$, можно пренебречь по сравнению с другими слагаемыми. Было бы непоследовательным оставлять вклад $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}\times\mathbf{e}^*$, заменяя при этом единицей экспоненту $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ в слагаемом, в котором она умножается на $\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}^*$. Учитывая следующий член разложения, будем иметь

$$-\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\mathbf{e}^*(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})=\frac{i}{2}\Big[\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\mathbf{e}^*\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}^*\mathbf{k}\cdot\frac{\mathbf{p}}{m}\Big]+$$
$$+\frac{1}{2m}\,i\mathbf{x}\times\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}\times\mathbf{e}^*, \tag{15.83}$$

и мы узнаем здесь орбитальный вклад в магнитный момент, который добавляется к спиновому магнитному моменту в соответствии со случаем $g = 2$. Если пренебречь этим магнитным дипольным излучением, а также родственным ему электрическим квадрупольным излучением, которое описывается другим членом в правой части равенства (15.83), то останется только излучение электрического дипольного момента $eq'\mathbf{x}$. Это излучение связано с ускоренным движением зарядов и не зависит от спина. В итоге, учитывая упрощения, которые возникают, если оставить только первые два члена в формуле (15.82), и заменяя собственные функции, отвечающие спину $^1/_2$, нерелятивистскими волновыми функциями, нормированными согласно формуле (15.33), мы будем иметь

$$\int (d\mathbf{x})\, \psi_{p^{0\prime}a'}(\mathbf{x})^* \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \psi_{p^{0\prime\prime}a''}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{e}^* \cdot \left\langle E'a' \left| \frac{\mathbf{p}}{m} \right| E''a'' \right\rangle . \tag{15.84}$$

Это выражение совпадает с соответствующим предельным выражением (15.68) для спина 0. Аналогичные формулы, связанные с данными фотонным перекрестным преобразованием, применимы и к процессу поглощения.

Действие W_{22} мы будем рассматривать только в связи с рассеянием фотонов. Используя выражение (15.61), отвечающее спину 0, подставим причинное разложение полей

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \tag{15.85}$$

и выделим интересующие нас члены:

$$\begin{aligned} W_{22} \to \int (dx)\,(dx')\, \varphi_1(x)\, [2eq\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}_1(x)\, \Delta_+(x, x')\, 2eq\mathbf{p}'\cdot\mathbf{A}_2(x') + \\ + 2eq\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}_2(x)\, \Delta_+(x, x')\, 2eq\mathbf{p}'\cdot\mathbf{A}_1(x')]\, \varphi_2(x') - \\ - \int (dx)\, \varphi_1(x)\, 2e^2 \mathbf{A}_1(x)\cdot\mathbf{A}_2(x)\, \varphi_2(x). \end{aligned} \tag{15.86}$$

Общее выражение для матричного элемента перехода имеет вид

$$\langle 1_{p^{0\prime}a'} 1_{k_1\lambda_1} | T | 1_{p^{0\prime\prime}a''} 1_{k_2\lambda_2} \rangle = (d\omega_{k_1} d\omega_{k_2})^{1/2}\, 2e^2 \mathbf{e}^*_{k_1\lambda_1}\cdot \mathbf{V}\cdot \mathbf{e}_{k_2\lambda_2}, \tag{15.87}$$

где компоненты диады $\mathbf{V}$ таковы:

$$\begin{aligned} V_{kl} = \int (d\mathbf{x})\,(d\mathbf{x}')\, \varphi_{p^{0\prime}a'}(\mathbf{x})^* [p_k e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}}\, 2\Delta_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p^{0\prime} + k_1^0)\, p'_l e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}'} + \\ + p_l e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}}\, 2\Delta_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p^{0\prime} - k_2^0)\, p'_k e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}'}]\, \varphi_{p^{0\prime\prime}a''}(\mathbf{x}') - \\ - \int (d\mathbf{x})\, \varphi_{p^{0\prime}a'}(\mathbf{x})^* \delta_{kl} e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{x}} \varphi_{p^{0\prime\prime}a''}(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{15.88}$$

Символами Δ_+ здесь обозначены фурье-образы $\Delta_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p^0)$ функции Грина, причем величине p^0 приписывается одно из значений

$$p^{0\prime} + k_1^0 = p^{0\prime\prime} + k_2^0, \qquad p^{0\prime} - k_2^0 = p^{0\prime\prime} - k_1^0. \tag{15.89}$$

Для простоты мы рассмотрим только нерелятивистский предел, в котором импульсы фотонов пренебрежимо малы; столь же малы и члены в $\Delta_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p^0)$ со знаменателями $p^{0\prime} + p^0 \approx 2m$ в противоположность членам со знаменателями $p^{0\prime} - p^0 = E' - E$. Это дает при несколько упрощенных обозначениях

$$2\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_2 = \sum_{Ea} \left[\frac{\langle E'a' \mid \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{p}/m \mid Ea\rangle \langle Ea \mid \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{p}/m \mid E''a''\rangle}{E - E'' - k_2^0} + \right.$$
$$\left. + \frac{\langle E'a' \mid \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{p}/m \mid Ea\rangle \langle Ea \mid \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{p}/m \mid E''a''\rangle}{E - E'' + k_2^0} \right] -$$
$$- \frac{1}{m} \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 \delta_{E'a',\, E''a''}. \qquad (15.90)$$

Если ограничиться рассмотрением упругого рассеяния ($E' = E''$, $k_1^0 = k_2^0 = k^0$), то в результате мы получим дифференциальное сечение для отклонения фотона в телесный угол $d\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \left| \sum_{Ea} \left[\frac{\langle E'a' \mid \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{p}/m \mid Ea\rangle \langle Ea \mid \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{p}/m \mid E'a''\rangle}{E - E' - k^0} + \right. \right.$$
$$\left. + \frac{\langle E'a' \mid \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{p}/m \mid Ea\rangle \langle Ea \mid \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{p}/m \mid E'a''\rangle}{E - E' + k^0} \right] -$$
$$\left. - \frac{1}{m} \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 \delta_{a'a''} \right|^2, \qquad (15.91)$$

из которого менее детализированные сечения получаются суммированием по a' и усреднением по a'', суммированием по λ_1 и усреднением по λ_2 и интегрированием по всем телесным углам.

При энергиях фотона, больших по сравнению с энергиями связи H-частиц, в выражении (15.91) остается только последний член, с $a' = a''$, и мы приходим к томсоновскому сечению, которое описывает рассеяние фотонов низких энергий (по релятивистской шкале) на свободной частице с зарядом $\pm e$ и массой m. Еще одна предельная связь с томсоновским рассеянием возникает при очень низких частотах, малых по сравнению с разностями энергий различных H-частиц. Если на определенной H-частице претерпевает упругое рассеяние фотон с частотой, практически равной нулю, то динамические связи с другими частицами проявляться не будут и рассеяние должно описываться формулой Томсона, соответствующей заряду и массе H-частицы. Так как мы рассматриваем идеализированный случай, приписывая последней массе бесконечное значение, в пределе $k^0 \to 0$ сечение упругого рассеяния должно обращаться в нуль. Отсюда вытекает набор соотношений, известных под названием правил сумм, которые можно представить по-разному. Прямым следствием формулы (15.91) является соотношение

$$\frac{1}{m} \sum_{Ea} \frac{1}{E - E'} [\langle E'a' \mid p_k \mid Ea\rangle \langle Ea \mid p_l \mid E'a''\rangle +$$
$$+ \langle E'a' \mid p_l \mid Ea\rangle \langle Ea \mid p_k \mid E'a''\rangle] = \delta_{kl} \delta_{a'a''}, \qquad (15.92)$$

которое иначе записывается в виде

$$m\sum_{Ea}(E-E')\left[\langle E'a'\,|\,x_k\,|\,Ea\rangle\langle Ea\,|\,x_l\,|\,E'a''\rangle+\right.$$
$$\left.+\langle E'a'\,|\,x_l\,|\,Ea\rangle\langle Ea\,|\,x_k\,|\,E'a''\rangle\right]=\delta_{kl}\delta_{a'a''}. \quad (15.93)$$

Имеется и третья, промежуточная форма, получаемая путем замены лишь половины сомножителей, отвечающих матричным элементам импульса, соответствующими матричными элементами координаты:

$$\begin{aligned}\langle E'a'\mid p_k\mid Ea\rangle &= -im\,(E-E')\,\langle E'a'\mid x_k\mid Ea\rangle,\\ \langle Ea\mid p_k\mid E'a''\rangle &= im\,(E-E')\,\langle Ea\mid x_k\mid E'a''\rangle.\end{aligned} \quad (15.94)$$

Она имеет вид

$$-i\sum_{Ea}\left[\langle E'a'\,|\,x_k\,|\,Ea\rangle\langle Ea\,|\,p_l\,|\,E'a''\rangle-\right.$$
$$\left.-\langle E'a'\,|\,p_l\,|\,Ea\rangle\langle Ea\,|\,x_k\,|\,E'a''\rangle\right]=\delta_{kl}\delta_{a'a''} \quad (15.95)$$

и показывает нам, каково математическое происхождение правил сумм: они представляют собой матричные элементы коммутационного соотношения

$$\frac{1}{i}\,[x_k,\ p_l]=\delta_{kl}. \quad (15.96)$$

Элементарное происхождение правил сумм не умаляет их значения как условий непротиворечивости феноменологического описания составных систем на основе понятия частицы. Это особенно ясно, если отказаться от идеализированного случая бесконечной массы и получить необходимый результат, соответствующий заряду $(Z-1)\,e$ и массе M H-частицы, рассматриваемой как составная система из двух частиц с зарядами и массами $-e$, m (электрон) и Ze, $M-m$ (ядро). Амплитуда рассеяния, фигурирующая в формуле (15.91), описывает процесс, при котором электрон поглощает падающий фотон и испускает рассеянный фотон. Теперь же к этому следует добавить процесс, при котором в такого рода актах поглощения и рассеяния участвует только одно ядро, и процессы, в которых участвуют обе частицы. Правда, мы не рассматривали самый общий случай, но модификации, необходимые в данном случае, совершенно очевидны. Члены с произведениями матриц в формуле (15.91) описывают два последовательных взаимодействия с электрическим током, в который теперь будут давать вклады обе частицы:

$$-e\left(\frac{\mathbf{p}}{m}\right)\to-e\left(\frac{\mathbf{p}_{\text{эл}}}{m}\right)+\frac{Ze\mathbf{p}_{\text{яд}}}{M-m}=\left(-\frac{e}{m}-\frac{Ze}{M-m}\right)\mathbf{p}, \quad (15.97)$$

где величина

$$\mathbf{p}=\mathbf{p}_{\text{эл}}=-\mathbf{p}_{\text{яд}} \quad (15.98)$$

представляет собой относительный импульс в системе центра масс. Кроме того, имеется вклад, которому отвечает однократное рассеяние на каждой отдельной частице,— он учитывается путем подстановки

$$-\frac{e^2}{m} \to -\frac{e^2}{m} - \frac{(Ze)^2}{M-m}. \tag{15.99}$$

Преобразовав произведение матриц, мы увидим, что отношение относительного импульса к относительной скорости теперь будет равно приведенной массе $m(M-m)/M$. Если отбросить множитель e^2, то мы получим, что для реальной H-частицы в пределе при $k^0 \to 0$ с точностью до произведения векторов поляризации амплитуда, входящая в формулу (15.91), заменится величиной

$$m\left(1-\frac{m}{M}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{Z}{M-m}\right)^2 - \frac{1}{m} - \frac{Z^2}{M-m} = -\frac{(Z-1)^2}{M} \tag{15.100}$$

в полном соответствии с тем, что требуется при феноменологическом описании H-частицы.

Введем указанные реалистические модификации в формулу (15.91), сохранив при этом величину k^0 призвольной. Если воспользоваться правилом сумм (15.92), а также еще одним правилом сумм, выражающим равенство нулю коммутатора $[x_k, x_l]$, то сечение можно будет переписать в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \Bigg| (k^0)^2 \sum_{Ea} \Bigg[&\frac{\langle E'a' \,|\, \mathbf{e}_1^*\cdot\mathbf{d} \,|\, Ea\rangle \langle Ea \,|\, \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{d} \,|\, E'a''\rangle}{E-E'-k^0} + \\ &+ \frac{\langle E'a' \,|\, \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{d} \,|\, Ea\rangle \langle Ea \,|\, \mathbf{e}_1^*\cdot\mathbf{d} \,|\, E'a''\rangle}{E-E'+k^0} \Bigg] - \\ &- \frac{(Z-1)^2}{M}\, \mathbf{e}_1^*\cdot\mathbf{e}_2 \delta_{a'a''} \Bigg|^2. \end{aligned} \tag{15.101}$$

Здесь $-e\mathbf{d}$ — внутренний электрический дипольный момент системы, в котором все векторы положений отнесены к радиусу-вектору центра масс:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\left[m\mathbf{x}_{\text{эл}} + (M-m)\,\mathbf{x}_{\text{яд}}\right]. \tag{15.102}$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\begin{aligned} -e\mathbf{d} &= -e(\mathbf{x}_{\text{эл}} - \mathbf{R}) + Ze(\mathbf{x}_{\text{яд}} - \mathbf{R}) = \\ &= -e\left[1 - \frac{m}{M} + Z\frac{m}{M}\right]\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{15.103}$$

связывающее $\mathbf{d}$ с вектором относительного положения

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{эл}} - \mathbf{x}_{\text{яд}}. \tag{15.104}$$

В такой форме выявляется низкочастотное поведение, характерное для H-частицы. В то же время разбиение на отдельные составляющие при высоких частотах обеспечивается правилами сумм, которые дают здесь комбинацию

$$-\frac{(Z-1)^2}{M}-\frac{M}{m\,(M-m)}\left[1+(Z-1)\frac{m}{M}\right]^2=-\frac{1}{m}-\frac{Z^2}{M-m}. \tag{15.105}$$

Здесь складываются амплитуды отдельных процессов рассеяния на двух частицах, а не их сечения, поскольку при таком упрощенном подходе пренебрегают импульсом фотона, а следовательно, считают, что длина волны фотона велика по сравнению с расстоянием между частицами. От подобного ограничения легко избавиться, добавив множитель с относительной фазой, в результате чего с ростом частоты когерентность между двумя амплитудами рассеяния будет исчезать.

Сечение (15.101) можно получить и прямым путем, применив другую калибровку, специально выбранную для режима больших длин волн. Если внутри H-частицы электрическое поле фотонов однородно, а процессами, связанными с магнитным полем, пренебрегаем, то потенциалы можно взять в виде

$$A^0(\mathbf{x},x^0)=-\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{R},x^0),\qquad \mathbf{A}(\mathbf{x},x^0)=0, \tag{15.106}$$

где

$$\mathbf{E}(\mathbf{R},x^0)=\sum_{k\lambda}(d\omega_k)^{1/2}\,ik^0\,[\mathbf{e}_{k\lambda}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}-ik^0x^0)\,iJ_{2k\lambda}-$$
$$-iJ^*_{1k\lambda}\mathbf{e}^*_{k\lambda}\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}+ik^0x^0)]. \tag{15.107}$$

Скалярный потенциал связан с плотностью заряда:

$$-\int(d\mathbf{x})\,j^0(x)\,A^0(x)=\mathbf{E}\cdot[-e\mathbf{d}+(Z-1)\,e\mathbf{R}]. \tag{15.108}$$

Переходы между разными H-частицами возбуждаются слагаемым с внутренним дипольным моментом, и этот вклад в процесс рассеяния фотона воспроизводит сумму, фигурирующую в формуле (15.101). Внешний дипольный момент $(Z-1)\,e\mathbf{R}$ воздействует только на движение данной H-частицы. Амплитуда рассеяния, к которой он приводит, дается диагональным матричным элементом оператора

$$(Z-1)^2(k^0)^2\left[\mathbf{e}_1^*\cdot\mathbf{R}\,\frac{1}{(P^2/2M)-k^0}\,\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{R}+\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{R}\,\frac{1}{(P^2/2M)+k^0}\,\mathbf{e}_1^*\cdot\mathbf{R}\right]=$$
$$=(Z-1)^2(k^0)^2\left[\mathbf{e}_1^*\cdot\mathbf{R}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{R}\,\frac{1}{(P^2/2M)-k^0}+\frac{1}{(P^2/2M)+k^0}\,\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{R}\mathbf{e}_1^*\cdot\mathbf{R}\right]+$$
$$+(Z-1)^2\,\frac{(k^0)^2}{M}\,i\left[\mathbf{e}_1^*\cdot\mathbf{R}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{P}\,\frac{1}{((P^2/2M)-k^0)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{((P^2/2M)+k^0)^2}\,\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{P}\mathbf{e}_1^*\cdot\mathbf{R}\right]. \tag{15.109}$$

При переходе к системе покоя, т. е. к состоянию с нулевым импульсом, это выражение сводится к виду

$$\frac{(Z-1)^2}{M} i\,[\mathbf{e}_1^*\cdot\mathbf{R},\ \mathbf{e}^2\cdot\mathbf{P}] = -\frac{(Z-1)^2}{M}\mathbf{e}_1^*\cdot\mathbf{e}_2, \tag{15.110}$$

на чем и заканчивается вывод формулы (15.101), так как эффекты, обусловленные дипольными моментами различных типов, друг с другом никак не связаны.

Аналогом выражения (15.86) для частицы со спином $^1/_2$ будет величина

$$W_{22} \to \int (dx)(dx')\,\psi_1(x)\,\gamma^0\,[eq\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}_1(x)\,G_+(x,\ x^0)\,eq\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}_2(x') + \\ + eq\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}_2(x)\,G_+(x,\ x')\,eq\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}_1(x')]\,\psi_2(x'), \tag{15.111}$$

а диада, заменяющая (15.88), имеет компоненты

$$V_{kl} = \frac{1}{2}\int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')\,\psi_{p^{0\prime}a'}(\mathbf{x})^*\,\gamma^0\,[\gamma_k e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}}G_+(\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ p^{0\prime}+k_1^0)\times \\ \times\gamma_l e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}'} + \gamma_l e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}}G_+(\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ p^{0\prime}-k_2^0)\,\gamma_k e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}'}]\,\psi_{p^{0\prime\prime}a''}(\mathbf{x}'). \tag{15.112}$$

И в этом случае мы рассмотрим только нерелятивистский предел. Но на этот раз уже нельзя пренебрегать в функции Грина членами со знаменателями $p^{0\prime} + p^0 \approx 2m$. Нам придется сформулировать в явном виде условия полноты собственных функций. Для этого можно сравнить выражение для функции Грина $G_+(\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ p^0)$ в пределе высоких энергий

$$\lim_{p^0\to\infty}[-\gamma^0 p^0 G_+(\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ p^0)] = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{15.113}$$

с ее представлением (15.35), что дает

$$\sum_{p^{0\prime}q'a'}[\psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x})\,\psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x}')^* + \psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x})^*\,\psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x}')] = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{15.114}$$

Мы воспользуемся этим соотношением, представив функцию Грина в виде

$$G_+(\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ p^0) = \sum_{p^{0\prime}q'a'}\psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x})\,\psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x}')^*\,\gamma^0\times \\ \times\left(\frac{1}{p^{0\prime}-p^0-i\varepsilon}+\frac{1}{p^{0\prime}+p^0-i\varepsilon}\right) - \\ - \sum_{p^{0\prime}q'a'}[\psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x})\,\psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x}')^* + \psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x})^*\,\psi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x}')]\times \\ \times\gamma^0\frac{1}{p^{0\prime}+p^0-i\varepsilon} \tag{15.115}$$

и перейдя затем к нерелятивистскому приближению $p^{0\prime} + p^0 \approx \approx 2m$. Поправка к $(p^{0\prime} - p^0)^{-1}$ пренебрежимо мала. Но последний член в формуле (15.115) становится при этом равным $-(2m)^{-1}\gamma^0\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ и дает добавку к $2V_{kl}$

$$-\frac{1}{2m}\int(d\mathbf{x})\,\psi_{p^0{}'a'}(\mathbf{x})^*\gamma^0(\gamma_k\gamma^0\gamma_l+\gamma_l\gamma^0\gamma_k)\,\psi_{p^0{}''a''}(\mathbf{x})\approx-\frac{1}{m}\delta_{kl}\delta_{E'a',\,E''a''},\tag{15.116}$$

которая представляет собой томсоновский член. Учитывая, что в нерелятивистском пределе $\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{p}/m$ эквивалентны, мы для всего выражения в целом получим результат (15.90), отвечающий спину 0, как этого и следовало ожидать. Все окажется еще проще, если воспользоваться калибровкой (15.106). В этом случае никакие матрицы не появятся и в нерелятивистском пределе собственные функции можно будет прямо заменять волновыми функциями, причем пренебрежение членом с $1/2m$ в функции Грина здесь вполне оправданно. В результате мы сразу же получим формулу (15.101) (но, конечно, без слагаемого с $1/M$, так как заряд Ze мы описываем методом источников).

Теперь мы уже имеем перед собой ряд простых физических примеров, в которых обнаруживаются все недостатки скелетного описания взаимодействий фотонов. Так, спонтанное испускание описывается как процесс, протекающий с постоянной скоростью, даже если первоначальный запас H-частиц истощится со временем. Предсказывается, что в условиях точного «резонанса», когда $k^0+E'=E$, сечение рассеяния фотонов обращается в бесконечность, а это совершенно неприемлемо с физической точки зрения. В следующем параграфе мы выясним, какие же существенные явления опускаются при скелетном описании, и устраним указанные недостатки.

§ 16. НЕСТАБИЛЬНОСТЬ И МНОГОЧАСТИЧНЫЙ ОБМЕН

Хотя одним из мотивов при построении теории источников была именно потребность в столь же естественном описании нестабильных частиц, как и стабильных, с нестабильными частицами мы впервые встречаемся лишь при рассмотрении H-частиц. Различие между стабильными и нестабильными частицами есть вопрос выбора шкалы времени. Если взять достаточно малый интервал времени, то механизм, обусловливающий нестабильность частицы, сказываться не будет и можно будет считать частицы стабильными при условии, конечно, что выбранный интервал времени достаточно велик, чтобы можно было точно определить характерные свойства частицы. В противном случае одночастичное описание никакого смысла не имеет. Примеры стабильных и нестабильных частиц нам дают H-частицы. Частица с минимальной энергией стабильна. Частицы с более высокими значениями энергии способны испускать один или большее число фотонов, превращаясь при этом в конце концов в свою абсолютно стабильную разновидность. Первоначальное описание H-частиц предполагает их стабильность, и оно применимо на ограниченном участке временной шкалы. При очень же длительных интервалах времени это описание становится непригодным, так как, согласно такого рода схеме, слабые источники H-частиц испускают и поглощают одиночные H-частицы, которые распространяются между этими актами без всяких изменений. Но, если взять достаточно большой промежуток времени, то нестабильная H-частица превратится в другую H-частицу и фотон. Эти две частицы способны также рекомбинировать, снова образуя одну H-частицу. Таким образом, описание связи между слабыми причинно-упорядоченными источниками H-частиц, которое не учитывает реального существования двух или большего числа частиц, распространяющихся между этими источниками, с физической точки зрения является неполным. В данном параграфе нас будет занимать именно учет такого рода процессов многочастичного обмена и анализ некоторых его физических следствий.

Первая задача состоит в том, чтобы найти эффективные источники испускания и поглощения H-частицы и фотона. Это аналогично анализу, проведенному в § 11. Невзаимодействующие фотон и H-частица описываются амплитудой (используется пример спина 0)

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{JK} = 1 + \ldots + i \int (d\xi)(d\xi') J_1^{\mu}(\xi) D_+(\xi - \xi') J_{2\mu}(\xi') \times$$
$$\times i \int (dx)(dx') K_1(x) \Delta_+(x, x') K_2(x') + \ldots =$$
$$= 1 + \ldots + i \int (d\xi) A_1^{\mu}(\xi) J_{2\mu}(\xi) \int (dx) \varphi_1(x) K_2(x) + \ldots \quad . \tag{16.1}$$

Сравнение с членом вакуумной амплитуды, фигурирующим в формуле (15.60) и описывающим однофотонное испускание, дает

$$i\mathrm{J}_2(\xi) K_2(x)|_{\text{эфф}} = \delta(x - \xi)\, 2eq\mathrm{p}\varphi_2(x), \tag{16.2}$$

причем точно такое же выражение, но с соответствующими причинными индексами, применимо и к поглощению фотона и H-частицы. Поскольку этот эффективный источник должен быть умножен на векторный потенциал в радиационной калибровке, его вид упрощается по сравнению с выражением (11.15). Заменив в формуле (16.1) величины $J_1^{\mu}(\xi)\, K_1(x)$ и $J_{2\mu}(\xi')\, K_2(x')$ такими эффективными комбинациями, мы получим описание причинной связи между источниками H-частиц, которая осуществляется путем обмена H-частицей и фотоном, причем физические условия таковы, что взаимодействие отсутствует. Но, чтобы это описание согласовалось с использованием радиационной калибровки, мы должны сначала изменить тензор, связывающий векторные фотонные источники, когда рассматривается обмен определенным фотоном:

$$g^{\mu\nu} \to \sum_{\lambda} e^{\mu}_{k\lambda} e^{\nu *}_{k\lambda}. \tag{16.3}$$

Сумма векторов поляризации представляет собой пространственную диаду

$$\sum_{\lambda} \mathbf{e}_{k\lambda}\mathbf{e}^{*}_{k\lambda} = 1 - \frac{\mathbf{kk}}{(k^0)^2}, \tag{16.4}$$

которая выделяет поперечные части перемножающихся токов. Таким образом, член вакуумной амплитуды, описывающий связь, имеет вид

$$\int (dx)(dx')\, \varphi_1(x)\, 2eq\mathbf{p}_T D_+(x-x')\, \Delta_+(x, x')\cdot 2eq\mathbf{p}'_T \varphi_2(x'). \tag{16.5}$$

Для того чтобы можно было осуществлять необходимый контроль, нужно знать, какова причинная упорядоченность. Как видно из формул (16.2) и (16.5), распределение источников двухчастичного испускания и поглощения характеризуется полями $\varphi_2(x')$ и $\varphi_1(x)$. Пусть испускающий источник H-частиц дает как раз столько энергии, сколько необходимо для порождения частицы, способной спонтанно перейти в другие H-частицы с испусканием фотона. Скорость такого процесса постоянна на протяжении всей последующей истории частицы, т. е. он не локализован во времени. Следовательно, чтобы осуществить причинный (или временной) контроль над актом двухчастичного испускания и последующего поглощения, мы должны пользоваться источниками H-частиц, понимаемыми в обобщенном смысле. В таком случае источники испускают и поглощают виртуальные H-частицы, которые не могут существовать вдали от своих источников, а потому превращаются в реальный фотон и реальную H-частицу или порождаются ими вблизи этих источников. Именно это обстоятельство и дает нам возможность оказывать воздействие там, где (или когда) происходят указанные акты. Математически все сказанное выражается следующей формулой для поля:

$$\varphi(x) = \sum_{(\pm)p^{0\prime}q'a'} \varphi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP^0}{2\pi} e^{-iP^0x^0} \frac{\varepsilon(p^{0\prime})}{p^{0\prime}(1-i\varepsilon)-P^0} K_{p^{0\prime}q'a'}(P^0). \tag{16.6}$$

Если источники $K_{p^{0\prime}q'a'}(P^0)$ обращаются в нуль при $P^0 = p^{0\prime}$, то у этого поля не будет никаких характеристик, которые описывали бы его распространение. Как указано в приведенной выше формуле, мы будем пользоваться символом P^0 для обозначения энергии, которая инжектируется обобщенным источником H-частиц, затем превращается в реальную H-частицу и реальный фотон и в конечном итоге поглощается обобщенным детектирующим источником H-частиц.

Пользуясь обобщенными источниками, мы можем быть уверены в том, что носители полей φ_1 и φ_2 будут причинно-упорядоченными. Это позволяет брать в формуле (16.5) каузальные выражения для функций распространения:

$$x^0 > x^{0\prime}: \qquad D_+(x-x')\,\Delta_+(x, x') =$$
$$= i^2 \int d\omega_k \sum_{+p^{0\prime}q'a'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x})\, e^{-i(p^{0\prime}+k^{0\prime})(x^0-x^{0\prime})}\varphi_{p^{0\prime}q'a'}(\mathbf{x}')^*\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}, \tag{16.7}$$

куда входят, как это указано, только положительные значения $p^{0\prime}$. В результате член вакуумной амплитуды, описывающий связь, принимает вид

$$-\sum_{\substack{(\pm)p^{0\prime}a' \\ (\pm)p^{0\prime\prime}a''}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP^0}{2\pi} K_{1p^{0\prime}a'}(P^0)^* \frac{\varepsilon(p^{0\prime})}{p^{0\prime}-P^0} \times$$
$$\times \Gamma_{p^{0\prime}a',\, p^{0\prime\prime}a''}(P^0) \frac{\varepsilon(p^{0\prime\prime})}{p^{0\prime\prime}-P^0} K_{2p^{0\prime\prime}a''}(P^0), \tag{16.8}$$

где величины

$$\Gamma_{p^{0\prime}a',\, p^{0\prime\prime}a''}(P^0) = \Gamma_{p^{0\prime\prime}a'',\, p^{0\prime}a'}(P^0)^* =$$
$$= 2\pi \sum_{\pm p^0 a} \int d\omega_k \delta(p^0+k^0-P^0) \left[\int (d\mathbf{x})\,\varphi_{p^{0\prime}a'}(\mathbf{x})^*\, 2eq'\mathbf{p}_T e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi_{p^0 a}(\mathbf{x})\right] \times$$
$$\times \left[\int (d\mathbf{x}')\,\varphi_{p^0 a}(\mathbf{x}')^*\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} 2eq'\mathbf{p}_T'\varphi_{p^{0\prime\prime}a''}(\mathbf{x}')\right] \tag{16.9}$$

являются элементами положительной эрмитовой матрицы.

Дополнительную связь между источниками H-частиц можно выразить, модифицировав функцию распространения $\Delta_{p^{0\prime}}(x^0 - x^{0\prime})$, которая теперь становится матрицей, определяемой в общем случае равенством

$$W_2 = \sum_{\substack{(\pm)p^{0\prime}a' \\ (\pm)p^{0\prime\prime}a''}} \frac{1}{2} \int dx^0\, dx^{0\prime} K_{-p^{0\prime}a'}(x^0)\, \overline{\Delta}_{p^{0\prime}a',\, p^{0\prime\prime}a''}(x^0-x^{0\prime})\, K_{p^{0\prime\prime}a''}(x^{0\prime}), \tag{16.10}$$

в котором

$$\overline{\Delta}_{p^{0\prime}a',\, p^{0\prime\prime}a''}(x^0-x^{0\prime}) = \overline{\Delta}_{-p^{0\prime\prime}a'',\, -p^{0\prime}a'}(x^{0\prime}-x^0). \tag{16.11}$$

Испускающий и поглощающий источники входят в член вакуумной амплитуды (16.8) в комбинации

$$-K_{1p^{0\prime}a'}(P^0)^* K_{2p^{0\prime\prime}a''}(P^0) =$$
$$= -\left[\int dx^0 K_{1p^{0\prime}a'}(x^0)^* e^{-iP^0x^0}\right]\left[\int dx^{0\prime} e^{iP^0x^{0\prime}} K_{2p^{0\prime\prime}a''}(x^{0\prime})\right] =$$
$$= i\int dx^0\, dx^{0\prime} K_{1-p^{0\prime}a'}(x^0)\,[ie^{-iP^0(x^0-x^{0\prime})}]\, K_{2p^{0\prime\prime}a''}(x^{0\prime}). \tag{16.12}$$

В среднем сомножителе мы узнаем функцию распространения $\Delta_{p^0}^{r}(x^0 - x^{0\prime})$, вычисленную при причинном условии $x^0 > x^{0\prime}$. Пространственно-временная экстраполяция приведенного выражения осуществляется с учетом свойства симметрии (16.11). Достаточно определить $\Gamma_{p^{0\prime}a', p^{0\prime\prime}a''}(P^0)$ для отрицательных значений P^0:

$$\Gamma_{-p^{0\prime\prime}a'', \, -p^{0\prime}a'}(-P^0) = \Gamma_{p^{0\prime}a', p^{0\prime\prime}a''}(P^0), \tag{16.13}$$

и тогда требование симметрии будет удовлетворяться, если положить

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}_{p^{0\prime}a', \, p^{0\prime\prime}a''}(x^0 - x^{0\prime}) &= \delta_{p^{0\prime}a', \, p^{0\prime\prime}a''}\Delta_{p^{0\prime}}(x^0 - x^{0\prime}) + \\ &+ \int \frac{dP^0}{2\pi} \frac{\varepsilon(p^{0\prime})}{p^{0\prime} - P^0} \Gamma_{p^{0\prime}a', \, p^{0\prime\prime}a''}(P^0) \frac{\varepsilon(p^{0\prime\prime})}{p^{0\prime\prime} - P^0} \Delta_{P^0}(x^0 - x^{0\prime}). \end{aligned}\tag{16.14}$$

Если эта функция распространения должна иметь смысл в случае произвольных источников, то следует также снять эффективные ограничения на P^0. Исключив окрестности значений $p^{0\prime}$ и $p^{0\prime\prime}$, интеграл по P^0 можно определить таким образом, что при этом будет имитироваться первоначальное рассмотрение обобщенных источников. Если перейти к пределу при сколь угодно малой ширине исключаемых интервалов, выбрав их симметричными относительно указанных значений, то при специальном условии в случае $p^{0\prime} = p^{0\prime\prime}$, а именно

$$\frac{1}{(p^{0\prime} - P^0)^2} = -\frac{d}{dp^{0\prime}} \frac{1}{p^{0\prime} - P^0}, \tag{16.15}$$

результат будет соответствовать использованию главного значения сингулярного интеграла по P^0. В противоположность другим способам вычисления, при которых сингулярным интегралам сопоставляются комплексные значения, изложенный способ дает то преимущество, что при этом сохраняется весьма существенная связь комплексных чисел с функцией распространения $\Delta_{p^0}(x^0 - x^{0\prime})$.

Чтобы, так сказать, апробировать указанные экстраполяции, посмотрим, каким образом модифицируется простая функция распространения при $p^{0\prime}a' = p^{0\prime\prime}a''$ в случае, когда $x^0 > x^{0\prime}$, $p^{0\prime} > 0$:

$$\begin{aligned}-i\overline{\Delta}_{p^{0\prime}a', \, p^{0\prime}a'}(x^0 - x^{0\prime}) &= e^{-ip^{0\prime}(x^0 - x^{0\prime})} - \\ &- \int \frac{dP^0}{2\pi} \Gamma_{p^{0\prime}a', \, p^{0\prime}a'}(P^0) \left(\frac{d}{dp^{0\prime}} \frac{1}{p^{0\prime} - P^0}\right) e^{-iP^0(x^0 - x^{0\prime})}. \end{aligned}\tag{16.16}$$

Интересный с физической точки зрения режим устанавливается по прошествии промежутка времени, на котором укладывается много периодов: $p^{0\prime}(x^0 - x^{0\prime}) \gg 1$. В таком случае основной вклад в интеграл дает ближайшая окрестность сингулярной точки $P^0 = p^{0\prime}$, и его можно упростить, заменив $\Gamma(P^0)$ величиной

$$\gamma_{p^{0\prime}a'} = \Gamma_{p^{0\prime}a', p^{0\prime}a'}(p^{0\prime}) \geqslant 0. \tag{16.17}$$

Вычислим главное значение интеграла:

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dP^0}{2\pi}\frac{e^{-iP^0(x^0-x^{0\prime})}}{p^{0\prime}-P^0}=\frac{i}{2}e^{-ip^{0\prime}(x^0-x^{0\prime})}, \tag{16.18}$$

$$\frac{d}{dp^{0\prime}}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dP^0}{2\pi}\frac{e^{-iP^0(x^0-x^{0\prime})}}{p^{0\prime}-P^0}=\frac{1}{2}(x^0-x^{0\prime})\,e^{-ip^{0\prime}(x^0-x^{0\prime})}. \tag{16.19}$$

В результате получим выражение

$$-i\overline{\Delta}_{p^{0\prime}a',\,p^{0\prime}a'}(x^0-x^{0\prime})=\left[1-\frac{1}{2}\gamma_{p^{0\prime}a'}(x^0-x^{0\prime})\right]e^{-ip^{0\prime}(x^0-x^{0\prime})}, \tag{16.20}$$

в котором амплитуда оказывается убывающей во времени, а переменная временная фаза остается прежней. Это согласуется с феноменологической точкой зрения теории источников. Энергии, которые были точно определены на протяжении конечных интервалов времени $\gamma_{p^{0\prime}a'}(x^0-x^{0\prime})\ll 1$, не меняют своих значений при расширении временной шкалы. Здесь нас не интересует вопрос о том, как меняются теоретические представления о характере энергетического спектра при переходе на другой уровень динамического описания. Мы считаем, что числа $p^{0\prime}$ заданы, а теорией или экспериментом — это не имеет значения.

Единичное значение квадрата модуля экспоненты $\exp[-ip^{0\prime}(x^0-x^{0\prime})]$ соответствует тому, что стабильную частицу по истечении любого промежутка времени мы с достоверностью обнаруживаем в одном и том же энергетическом состоянии. Квадрат амплитудного множителя в формуле (16.20) описывает изменяющуюся вероятность того, что нестабильная H-частица ($\gamma_{p^{0\prime}a'}>0$) будет еще существовать по истечении времени $x^0-x^{0\prime}=t$:

$$\left(1-\frac{1}{2}\gamma_{p^{0\prime}a'}t\right)^2=1-\gamma_{p^{0\prime}a'}t+\left(\frac{1}{2}\gamma_{p^{0\prime}a'}t\right)^2. \tag{16.21}$$

Сначала эта вероятность уменьшается со скоростью, соответствующей величине $\gamma_{p^{0\prime}a'}$. Но при больших значениях времени это оказывается неприемлемым. Согласно формуле (16.21), вероятность того, что H-частица продолжает существовать, достигает нуля за конечное время, а затем начинает возрастать и в конце концов становится больше единицы. Очевидно, что физическая область применимости формулы для вероятности ограничивается малыми значениями $\gamma_{p^{0\prime}a'}t$.

В нашей физической схеме до сих пор не учтено следующее обстоятельство. Мы исходим из обобщенного источника H-частиц, испускающего виртуальную H-частицу, которая быстро превращается в реальную H-частицу и реальный фотон. Такое положение сохраняется до тех пор, пока обе частицы не достигнут окрестности обобщенного детектирующего источника, где они рекомбинируют, образуя виртуальную H-частицу, которая поглощается. Но, если взять достаточно большой промежуток времени, то рекомбинация с образованием виртуальной H-частицы может произойти вдали от детектирующих источников, причем это возбуждение снова быстро распадается на реальные частицы. Цикл может повториться множество раз, пока виртуальная H-частица в конце концов не поглотится детектирующим источником. Другими словами, поля, которые входят в величину (16.5), описывающую связь, порождаются не только непосредственно в источниках, но и косвенным образом, при помощи других эффективных источников, связанных с виртуальными H-частицами, которые образуются вдали от источников в процессе распространения реальных частиц.

Содержание последней фразы находит свое количественное выражение в следующем интегральном уравнении для поля $\varphi_{p^0 a'}(x^0)$:

$$\varphi_{p^0 a'}(x^0) = \int dx^{0\prime} \Delta_{p^{0\prime}} (x^0 - x^{0\prime}) K_{p^0 a'}(x^{0\prime}) + \\ + \int dx_1^0 \, dx^{0\prime} \Delta_{p^{0\prime}} (x^0 - x_1^0) \sum_{p^{0\prime\prime} a''} \Pi_{p^{0\prime} a', \, p^{0\prime\prime} a''} (x_1^0 - x^{0\prime}) \, \varphi_{p^{0\prime\prime} a''}(x^{0\prime}), \tag{16.22}$$

где Π — матричная функция, описывающая механизм последнего цикла превращения виртуальной H-частицы в реальные H-частицу и фотон, а затем вновь в виртуальную H-частицу (не обязательно ту же самую), поглощаемую зондирующим источником, который используется для определения поля. Поле возбуждения, которое входит в интегральное выражение, суммирует эффекты действия исходного источника возбуждения и бесконечной последовательности указанных обратимых превращений. Поэтому оно включает в себя всю совокупность квантовых чисел $p^{0\prime} a'$, т. е. оказывается тем самым полем, которое мы строим. Такой подход аналогичен анализу многократного рассеяния, при котором исходят из последнего столкновения. Если бы приведенное интегральное уравнение решалось итерациями, то мы фактически рассматривали бы все более и более сложные комбинации с повторением одного и того же основного процесса. В таком случае сравнение с известным описанием одной такой операции позволяет определить матрицу Π. Сравнение упростится, если написать

$$\varphi_{p^0 a'}(x^0) = \sum_{p^{0\prime\prime} a''} \int dx^{0\prime} \overline{\Delta}_{p^{0\prime} a', \, p^{0\prime\prime} a''} (x^0 - x^{0\prime}) K_{p^{0\prime\prime} a''}(x^{0\prime}), \tag{16.23}$$

где модифицированная функция распространения подчиняется интегральному уравнению

$$\overline{\Delta}_{p^{0\prime}a',\, p^{0\prime\prime}a''}(x^0-x^{0\prime})=\delta_{p^{0\prime}a',\, p^{0\prime\prime}a''}\Delta_{p^{0\prime}}(x^0-x^{0\prime})+$$
$$+\sum_{p_1^0 a_1}\int dx_1^0\, dx_2^0\,\Delta_{p^{0\prime}}(x^0-x_1^0)\,\Pi_{p^{0\prime}a',\, p_1^0 a_1}(x_1^0-x_2^0)\,\overline{\Delta}_{p_1^0 a_1,\, p^{0\prime\prime}a''}(x_2^0-x^{0\prime}). \tag{16.24}$$

Отождествление формулы (16.14) с первыми двумя членами итерационного решения уравнения (16.24) дает

$$\Delta_{p^{0\prime}}(p^0)\,\Gamma_{p^{0\prime}a',\, p^{0\prime\prime}a''}(p^0)\,\Delta_{p^{0\prime\prime}}(p^0)=$$
$$=\int\frac{dP^0}{2\pi}\,\frac{\varepsilon(p^{0\prime})}{p^{0\prime}-P^0}\,\Gamma_{p^{0\prime}a',\, p^{0\prime\prime}a''}(P^0)\,\frac{\varepsilon(p^{0\prime\prime})}{p^{0\prime\prime}-P^0}\,\Delta_{P^0}(p^0) \tag{16.25}$$

(здесь используются фурье-образы функций распространения). Соответствующую форму интегрального уравнения (16.24) можно представить в виде

$$[p^{0\prime}(1-i\varepsilon)-p^0]\,\overline{\Delta}_{p^{0\prime}a',\, p^{0\prime\prime}a''}(p^0)-(p^{0\prime}-p^0)\,\varepsilon(p^{0\prime})\times$$
$$\times\int\frac{dP^0}{2\pi}\sum_{p_1^0 a_1}\frac{\Gamma_{p^{0\prime}a',\, p_1^0 a_1}(P^0)}{(p^{0\prime}-P^0)(p_1^0-P^0)}\,\Delta_{P^0}(p^0)\,(p_1^0-p^0)\,\overline{\Delta}_{p_1^0 a_1,\, p^{0\prime\prime}a''}(p^0)=$$
$$=\varepsilon(p^{0\prime})\,\delta_{p^{0\prime}a',\, p^{0\prime\prime}a''}. \tag{16.26}$$

Хотя приведенные нами уравнения носят весьма общий характер, мы получим только приближенное решение, пригодное при обычных условиях, соответствующих частному случаю

$$\Gamma_{p^{0\prime}a' p^{0\prime\prime}a''}(P^0)=\delta_{a'a''}\Gamma_{p^{0\prime}}(P^0). \tag{16.27}$$

В такого рода соотношениях находит свое выражение инвариантность замкнутых систем относительно вращений, когда a' отождествляются с квантовыми числами углового момента. В соотношении (16.27) рассматриваются только равные энергии, так как все внимание мы сконцентрируем к тому же на доминирующих элементах матрицы распространения:

$$\overline{\Delta}_{p^{0\prime}a',\, p^{0\prime\prime}a''}(p^0)\approx\delta_{p^{0\prime}p^{0\prime\prime}}\delta_{a'a''}\overline{\Delta}_{p^{0\prime}}(p^0). \tag{16.28}$$

В результате мы получаем упрощенное уравнение

$$\Big[p^{0\prime}(1-i\varepsilon)-p^0+(p^{0\prime}-p^0)^2\int\frac{dP^0}{2\pi}\,\frac{\Gamma_{p^{0\prime}}(P^0)}{P^0(1-i\varepsilon)-p^0}\,\varepsilon(p^{0\prime})\,\varepsilon(P^0)\times$$
$$\times\frac{d}{dp^{0\prime}}\,\frac{1}{p^{0\prime}-P^0}\Big]\,\overline{\Delta}_{p^{0\prime}}(p^0)=\varepsilon(p^{0\prime}), \tag{16.29}$$

форма которого согласуется со свойством симметрии

$$\overline{\Delta}_{-p^{0\prime}}(-p^0)=\overline{\Delta}_{p^{0\prime}}(p^0). \tag{16.30}$$

Эта симметрия сохраняется при замене произведения $\varepsilon(p^{0\prime})\varepsilon(P^0)$ единицей (а такая замена находит свое оправдание в том, что основное значение имеют вклады при $P^0 \sim p^{0\prime}$). Может показаться, что вывод о том, что интеграл представляет интерес только при $p^0 \sim p^{0\prime}$, противоречит наличию множителя $(p^{0\prime} - p^0)^2$, который как раз при этих условиях быстро обращается в нуль.

Чтобы выяснить, какая из тенденций преобладает, аппроксимируем $\Gamma_{p^{0\prime}}(P^0)$ величиной

$$\Gamma_{p^{0\prime}}(p^{0\prime}) = \Gamma_{-p^{0\prime}}(-p^{0\prime}) = \gamma_{p^{0\prime}} \gg 0 \tag{16.31}$$

и рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP^0}{2\pi} \frac{1}{P^0(1-i\varepsilon)-p^0} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^{0\prime}-P^0-i\eta}+\frac{1}{p^{0\prime}-P^0+i\eta}\right), \tag{16.32}$$

где в соответствии с равенством [формула (1.62) из гл. 2]

$$\left.\frac{1}{x-i\eta}\right|_{\eta\to+0} = P\frac{1}{x}+\pi i\delta(x) \tag{16.33}$$

используется комплексный аналог главного значения интегралов. Интеграл вычисляется путем замыкания контура на бесконечности в любой полуплоскости, в какой это удобно, и в результате мы получаем

$$\frac{1}{2}\, i \frac{\varepsilon(p^0)}{p^{0\prime}-p^0-i\eta\varepsilon(p^0)} = \frac{1}{2}\, i \frac{\varepsilon(p^0)}{p^{0\prime}-p^0} - \frac{\pi}{2}\delta(p^{0\prime}-p^0). \tag{16.34}$$

Мнимое слагаемое в формуле (16.34) можно получить и более прямым путем, представив выражение (16.32) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP^0}{2\pi}\left[\frac{1}{P^0-p^0}+\pi i\varepsilon(p^0)\delta(P^0-p^0)\right]\frac{1}{p^{0\prime}-P^0} =$$

$$= P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP^0}{2\pi}\frac{1}{P^0-p^0}\frac{1}{p^{0\prime}-P^0}+\frac{1}{2}\, i\frac{\varepsilon(p^0)}{p^{0\prime}-p^0}. \tag{16.35}$$

Таким образом, выражение, фигурирующее в формуле (16.29), равно

$$\gamma_{p^{0\prime}}(p^{0\prime}-p^0)^2\left[-\frac{\pi}{2}\frac{d}{dp^{0\prime}}\delta(p^{0\prime}-p^0)-\frac{1}{2}\, i\frac{\varepsilon(p^0)}{(p^{0\prime}-p^0)^2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\, i\varepsilon(p^{0\prime})\gamma_{p^{0\prime}}. \tag{16.36}$$

Множитель $(p^{0\prime} - p^0)^2$ действительно подавляет вещественную часть интеграла, но к его мнимой части это не относится.

Если $\gamma_{p^{0\prime}} \neq 0$, то конечное мнимое слагаемое будет сохранять знак бесконечно малой мнимой величины $-ip^{0\prime}\varepsilon$, и поэтому последняя оказывается излишней в получающемся приближенном уравнении:

$$\left[p^{0\prime}-\frac{1}{2}\,i\varepsilon\,(p^{0\prime})\,\gamma_{p^{0\prime}}-p^{0}\right]\overline{\Delta}_{p^{0\prime}}(p^{0})=\varepsilon\,(p^{0\prime}). \tag{16.37}$$

Из него вытекает следующая зависимость от времени:

$$\overline{\Delta}_{p^{0\prime}}(x^{0}-x^{0\prime})=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp^{0}}{2\pi}\exp\left[-ip^{0}(x^{0}-x^{0\prime})\right]\frac{\varepsilon\,(p^{0\prime})}{p^{0\prime}-\frac{1}{2}\,i\varepsilon\,(p^{0\prime})\,\gamma_{p^{0\prime}}-p^{0}}=$$

$$=\begin{cases} x^{0}>x^{0\prime}: & \eta\,(p^{0\prime})\,i\exp\left[-ip^{0\prime}(x^{0}-x^{0\prime})\right]\times \\ \quad\times\exp\left[-\frac{1}{2}\,\gamma_{p^{0\prime}}(x^{0}-x^{0\prime})\right], & \\ x^{0}<x^{0\prime}: & \eta\,(-p^{0\prime})\,i\exp\left[-ip^{0\prime}(x^{0}-x^{0\prime})\right]\times \\ \quad\times\exp\left[-\frac{1}{2}\,\gamma_{p^{0\prime}}(x^{0\prime}-x^{0})\right], & \end{cases} \tag{16.38}$$

согласующаяся с симметрией

$$\overline{\Delta}_{-p^{0\prime}}(x^{0\prime}-x^{0})=\overline{\Delta}_{p^{0\prime}}(x^{0}-x^{0\prime}). \tag{16.39}$$

Зависящий от времени комплексный фазовый множитель по-прежнему дает энергию $p^{0\prime}>0$, но переменная амплитуда $1-{}^{1}/_{2}\gamma_{p^{0\prime}}t$ ($t=x^{0}-x^{0\prime}>0$) теперь заменяется величиной $\exp\left(-{}^{1}/_{2}\gamma_{p^{0\prime}}t\right)$. Это очень хорошо, ибо получающаяся отсюда вероятность $\exp\left(-\gamma_{p^{0\prime}}t\right)$ нигде не превышает единицы, монотонно убывая до нуля при возрастании времени. Экспоненциальная функция обобщает линейный спад вероятности за малые промежутки времени. Согласно приближенному равенству

$$e^{-\gamma(t+\Delta t)}\approx(1-\gamma\Delta t)\,e^{-\gamma t}, \tag{16.40}$$

где $\gamma\Delta t\ll 1$, теперь он будет почти линейным не только в начальный момент, но и в любые более поздние моменты времени. В формуле (16.9) можно перейти к нерелятивистскому приближению, и мы получим простое выражение для $\gamma_{-p^{0\prime}}$ [см. формулу (15.65)]:

$$\gamma_{p^{0\prime}}=\sum_{E<E',\,a}A_{Ea\leftarrow E'a'}. \tag{16.41}$$

Конечно, эта формула не ограничивается нерелятивистским пределом, ибо в ней начальная скорость убывания вероятности того, что частица продолжает существовать, приравнивается соответствующей скорости, с которой происходят переходы в H-частицы с более низкими энергиями.

Интересно убедиться в справедливости такого баланса вероятностей в произвольные моменты времени. Рассмотрим сначала самый элементарный случай

$$\gamma_{\mathrm{II}}=A_{\mathrm{I}\leftarrow\mathrm{II}}, \tag{16.42}$$

когда нестабильная H-частица II может излучать фотон только с превращением в стабильную H-частицу с минимальной энергией, нумеруемую индексом I. Вероятность того, что H-частица II еще существует по прошествии времени t после ее рождения, равна $\exp(-\gamma_{II} t) < 1$. Компенсируется ли такая потеря вероятности вероятностью существования H-частицы I с сопутствующим ей фотоном? Чтобы вычислить последнюю вероятность, нам нужно распространить формулу (15.60) для W_{21} на новый случай нестабильных частиц. С точки зрения H-частиц эта формула описывает две стадии испускания и поглощения. Начальная H-частица после своего рождения распространяется до того момента, пока не испустится фотон, после чего она прекращает существование. В этот момент рождается конечная H-частица, которая в конечном итоге детектируется. Очевидно, что для описания таких путешествий между актами испускания и поглощения мы должны пользоваться модифицированной функцией распространения. Источники вводятся для описания тех общих особенностей, которые присущи всем механизмам испускания и поглощения определенного типа, и соответствующая функция распространения обладает универсальной применимостью. Отдельные реальные механизмы будут также иметь и некоторые специфические черты, которые нуждаются в дополнительной характеристике. Этот вопрос мы разберем позднее. В рассматриваемом же случае, по сути дела нерелятивистском, при описании механизма трансмутации H-частицы и испускания фотона никаких существенных поправок не требуется, и нам, как мы увидим, вполне достаточно того, что мы введем модифицированные функции распространения.

В соответствии со сказанным мы будем по-прежнему пользоваться формулой (15.60), но изменим смысл поля, взяв для него выражение (16.23), и примем приближение (16.28). В рассматриваемом случае каузальное поле H-частиц $\varphi_2(x)$, которое входит в действие

$$W_{21} \to \int (dx)\, \varphi_1(x)\, 2e q \mathbf{p}\cdot\mathbf{A}_1(x)\, \varphi_2(x), \tag{16.43}$$

дается формулой [мы используем нерелятивистское приближение (15.67), но для энергии сохраняем релятивистскую шкалу]

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= (2m)^{-1/2}\psi_{II}(\mathbf{x}) \int dx^{0\prime}\,\overline{\Delta}_{II}(x^0 - x^{0\prime})\, K_{2II}(x^{0\prime}) = \\ &= (2m)^{-1/2}\psi_{II}(\mathbf{x}) \int dx^{0\prime} \exp\Big[-i(m+E_{II})(x^0 - x^{0\prime}) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\gamma_{II}(x^0 - x^{0\prime})\Big]\, iK_{2II}(x^{0\prime}) = \\ &= (2m)^{-1/2}\psi_{II}(\mathbf{x}) \exp\Big[-i(m+E_{II})(x^0 - t_2) - \frac{1}{2}\gamma_{II}(x^0 - t_2)\Big]\, iK_{2II}. \end{aligned} \tag{16.44}$$

Момент t_2 служит началом отсчета, расположенным в пределах источника $K_{2\text{II}}(x^{0\prime})$, в соответствии с чем определение испускающего источника H-частиц оказывается таким:

$$K_{2\text{II}} = \int dx^{0\prime} \exp\left[-i(m+E_{\text{II}})(t_2 - x^{0\prime}) - \frac{1}{2}\gamma_{\text{II}}(t_2 - x^{0\prime})\right] K_{2\text{II}}(x^{0\prime}). \tag{16.45}$$

Пользоваться не произвольно выбранным началом отсчета, а расположенным во внутренней области источника можно всегда, и это может оказаться полезным при отыскании механических характеристик состояний. При описании же нестабильных частиц такой выбор начала обязателен.

Связь источников испускания и поглощения для определенной H-частицы имеет вид

$$i\int dx^0\, dx^{0\prime} K_1(x^0)^* \overline{\Delta}(x^0 - x^{0\prime}) K_2(x^{0\prime}) =$$
$$= \int dx^0\, dx^{0\prime} iK_1(x^0)^* \exp\left[-i(m+E)(x^0 - x^{0\prime}) - \frac{1}{2}\gamma(x^0 - x^{0\prime})\right] \times$$
$$\times iK_2(x^{0\prime}) = iK_1^* \exp\left[-i(m+E)(t_1 - t_2) - \frac{1}{2}\gamma(t_1 - t_2)\right] iK_2, \tag{16.46}$$

где (для иллюстрации рассматривается частица II)

$$K_{1\text{II}}^* = \int dx^0 K_{1\text{II}}(x^0)^* \exp\left[-i(m+E_{\text{II}})(x^0 - t_1) - \frac{1}{2}\gamma_{\text{II}}(x^0 - t_1)\right], \tag{16.47}$$

а t_1 — начало отсчета времени, расположенное внутри источника $K_1(x^0)$. Факторизация (16.46) четко показывает, что весь процесс разделяется на три стадии — испускание, распространение в течение промежутка времени $t = t_1 - t_2$ и поглощение. Конечно, при максимальных значениях величин $x^0 - t_1$ и $t_2 - x^{0\prime}$, которые соответствуют смещениям в пределах источников, должно быть допустимым рассматривать нестабильные частицы как стабильные на протяжении коротких отрезков времени. Поэтому распадные множители в определениях источников H-частиц (16.45) и (16.47) можно опустить, и эти источники будут играть такую же роль, как и в случае стабильных частиц. Таким образом, при подобном подходе ослабление связи (16.46) при увеличении промежутка времени между действием источников, обусловленное нестабильностью частицы, связывается исключительно с процессом распространения.

Такого же рода описание используется и для частицы I, даже если $\gamma_{\text{I}} = 0$, и амплитуда вероятности, получаемая из (16.43), равна

$$\langle 1_{\rm I} 1_{k^0\lambda} t_1 \,|\, T \,|\, 1_{\rm II} t_2\rangle = i\,(d\omega_k)^{1/2}\, eq' \left\langle {\rm I} \left| \mathbf{e}^* \cdot \frac{\mathbf{p}}{m} \right| {\rm II} \right\rangle \times$$

$$\times \int_{t_2}^{t_1} dx^0 \exp\left[-i\,(m+E_{\rm I})\,(t_1-x^0)\right] \exp\left[-ik^0\,(t_1-x^0)\right] \times$$

$$\times \exp\left[-i\,(m+E_{\rm II})\,(x^0-t_2)-\frac{1}{2}\gamma_{\rm II}\,(x^0-t_2)\right]. \qquad (16.48)$$

Теперь в характеристики состояний входят явным образом начальный и конечный моменты времени, хотя существенна только их разность $t = t_1 - t_2$; чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы взяли t_1 за начало отсчета времени для фотонного поля. Вычислив интеграл по времени, получим

$$\frac{\exp\left[-i\,(m+E_{\rm II})\,t-\frac{1}{2}\gamma_{\rm II} t\right]-\exp\left[-i\,(m+E_{\rm I}+k^0)\,t\right]}{i\,(E_{\rm I}+k^0-E_{\rm II})-\frac{1}{2}\gamma_{\rm II}}, \qquad (16.49)$$

и вероятность перехода, просуммированная по поляризациям фотона и по направлениям испускания, но еще дифференциальная по энергии фотона, принимает вид

$$\gamma_{\rm II}\frac{k^0}{k^0_{\rm I,\,II}}\frac{dk^0}{2\pi}\,\frac{1-2e^{-\frac{1}{2}\gamma_{\rm II}t}\cos\,(k^0-k^0_{\rm I,\,II})\,t+e^{-\gamma_{\rm II}t}}{(k^0-k^0_{\rm I,\,II})^2+\left(\frac{1}{2}\gamma_{\rm II}\right)^2}, \qquad (16.50)$$

где

$$k^0_{\rm I,\,II}=E_{\rm II}-E_{\rm I} \qquad (16.51)$$

и, конечно,

$$\gamma_{\rm II}=\frac{4}{3}\,\alpha k^0_{\rm I,\,II}\left|\left\langle {\rm I}\left|\frac{\mathbf{p}}{m}\right|{\rm II}\right\rangle\right|^2. \qquad (16.52)$$

Полная вероятность получается интегрированием по k^0. Чтобы вывести для нее приближенное выражение в предположении слабой нестабильности ($\gamma_{\rm II} \ll k^0_{\rm I,\,II}$), заменим $k^0/k^0_{\rm I,\,II}$ единицей и вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk^0}{2\pi}\,\frac{\cos\,(k^0-k^0_{\rm I,\,II})\,t}{(k^0-k^0_{\rm I,\,II})^2+\left(\frac{1}{2}\gamma_{\rm II}\right)^2}=\frac{1}{\gamma_{\rm II}}\,e^{-\frac{1}{2}\gamma_{\rm II}t}, \qquad (16.53)$$

взяв при этом его значение в момент $t = 0$. В результате мы для вероятности обнаружить H-частицу I по истечении времени t получим как раз требуемое значение

$$1-e^{-\gamma_{\rm II}t}. \qquad (16.54)$$

Кроме того, вычислив величину (16.50) в момент времени $\gamma_{II} t \gg 1$, когда уже наверняка произошел излучательный переход, мы придем к формуле для спектрального распределения испущенного фотона. Результат

$$dk^0 \frac{\gamma_{II}}{2\pi} \frac{1}{(k^0 - k^0_{I,\,II})^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{II}\right)^2} \tag{16.55}$$

соответствует хорошо известному лоренцевскому контуру, причем постоянная распада γ_{II}, обратная величина времени жизни, отождествляется с полушириной спектральной линии.

Такова форма спектральной линии, испускаемой при превращении в стабильную H-частицу. Но что если конечная H-частица также нестабильна? Рассмотрим теперь третью H-частицу III, которая может распадаться только на частицу II с последующим переходом последней в стабильную разновидность I. В этом случае испускаются два фотона и для описания процесса следует взять действие W_{22}. В соответствующей амплитуде вероятности имеются два аналогичных члена, которые связаны друг с другом симметрией Бозе — Эйнштейна, свойственной фотонам. Но, если не считать особого случая $k^0_{I,\,II} \approx k^0_{II,\,III}$, существенным будет только один из этих членов в зависимости от того, частота какого из фотонов ближе к $k^0_{I,\,II}$ при примерном совпадении другой частоты с $k^0_{II,\,III}$. Таким образом, достаточно рассматривать фотоны как частицы, различимые по их частотам, учитывая лишь один из упомянутых членов. Амплитуда вероятности для всего процесса в целом дается выражением

$$\begin{gathered}
\langle 1_I 1_{k^0\lambda} 1_{k^{0\prime}\lambda'} t_1 \,|\, T \,|\, 1_{III} t_2 \rangle = \\
= i\,(d\omega_k\, d\omega_{k'})^{1/2} e^2 \left\langle I \middle| \mathbf{e}^* \cdot \frac{\mathbf{p}}{m} \middle| II \right\rangle \left\langle II \middle| \mathbf{e}'^* \cdot \frac{\mathbf{p}}{m} \middle| III \right\rangle \times \\
\times \int_{t_2}^{t_1} dx^0\, dx^{0\prime} \exp\left[-i\,(m + E_I)(t_1 - x^0)\right] \exp\left[-ik^0 (t_1 - x^0)\right] \times \\
\times \exp\left[-i\,(m + E_{II})(x^0 - x^{0\prime}) - \frac{1}{2}\gamma_{II}(x^0 - x^{0\prime})\right] \eta\,(x^0 - x^{0\prime}) \times \\
\times \exp\left[-ik^{0\prime}(t_1 - x^{0\prime})\right] \exp\left[-i\,(m + E_{III})(x^{0\prime} - t_2) - \frac{1}{2}\gamma_{III}(x^{0\prime} - t_2)\right],
\end{gathered} \tag{16.56}$$

где временные функции распространения описывают во всех подробностях последовательные причинные акты развивающейся драмы. Записывая это выражение, мы действовали так, словно H-частицы типов II и III охарактеризованы однозначным образом, хотя в действительности необходимо ввести дополнительные индексы a_{II} и a_{III}. Можно учесть и такого рода детали, но при физических условиях (16.27) они не будут сказываться на окончательных результатах. Интегрирование по времени x^0 у нас уже проводилось, и теперь нужно только заменить нижний предел t_2 на $x^{0\prime}$. Следовательно, интеграл по времени, входящий в качестве множителя в формулу (16.56), равен

$$\int_{t_2}^{t_1} dx^{0\prime}\, \frac{e^{-i(m+E_{\text{II}})(t_1-x^{0\prime})-\frac{1}{2}\gamma_{\text{II}}(t_1-x^{0\prime})}-e^{-i(m+E_{\text{I}}+k^0)(t_1-x^{0\prime})}}{i(k^0-k^0_{\text{I, II}})-\frac{1}{2}\gamma_{\text{II}}}\times$$
$$\times e^{-ik^{0\prime}(t_1-x^{0\prime})}e^{-i(m+E_{\text{III}})(x^{0\prime}-t_2)-\frac{1}{2}\gamma_{\text{III}}(x^{0\prime}-t_2)}. \qquad (16.57)$$

При последующем интегрировании не возникает никаких затруднений, но тем не менее дальнейшие выкладки мы будем проводить при столь больших временах t ($\gamma_{\text{II}}t \gg 1$, $\gamma_{\text{III}}t \gg 1$), при которых процесс каскадного распада уже завершился. Из двух экспонент, содержащих E_{I} и E_{II}, вклад будет давать только первая, так что мы имеем

$$\frac{1}{i(k^0-k^0_{\text{I, II}})-\frac{1}{2}\gamma_{\text{II}}}\,\frac{1}{i(k^0+k^{0\prime}-k^0_{\text{I, III}})-\frac{1}{2}\gamma_{\text{III}}}\,e^{-i(m+E_{\text{I}}+k^0+k^{0\prime})t}. \qquad (16.58)$$

Отсюда вытекает следующее выражение для вероятности перехода, описывающей только спектральное распределение фотонов:

$$dk^0\,\frac{\gamma_{\text{II}}}{2\pi}\,\frac{1}{(k^0-k^0_{\text{I, II}})^2+\left(\frac{1}{2}\gamma_{\text{II}}\right)^2}\,dk^{0\prime}\,\frac{\gamma_{\text{III}}}{2\pi}\,\frac{1}{(k^0+k^{0\prime}-k^0_{\text{I, III}})^2+\left(\frac{1}{2}\gamma_{\text{III}}\right)^2}. \qquad (16.59)$$

Последовательные акты испускания не являются независимыми. Спектральное распределение по $k^{0\prime}$ определяет не энергия E_{II}, а энергия k^0+E_{I} фотона и частицы, на которые распадается II. Если проинтегрировать по $k^{0\prime}$, то в результате мы получим в точности выражение (16.55). Это означает, что в результате распада H-частицы III в какой-то момент времени с достоверностью была порождена H-частица II, после чего применимо все изложенное выше. Ответ на вопрос о спектральном распределении фотонов, излучаемых при переходе между нестабильными H-частицами, мы получим после интегрирования по k^0. Полезно представить такой интеграл в виде ($E=k^0+E_{\text{I}}$)

$$dk^{0\prime}\int dE\,dE'\,\frac{\frac{1}{2\pi}\gamma_{\text{II}}}{(E-E_{\text{II}})^2+\left(\frac{1}{2}\gamma_{\text{II}}\right)^2}\,\delta(k^{0\prime}+E-E')\,\frac{\frac{1}{2\pi}\gamma_{\text{III}}}{(E'-E_{\text{III}})^2+\left(\frac{1}{2}\gamma_{\text{III}}\right)^2}. \qquad (16.60)$$

Он описывает излучательный переход с сохранением энергии между двумя энергетическими распределениями лоренцевской формы с ширинами γ_{II} и γ_{III}. Элементарные выкладки с применением методов интегрирования по контуру показывают, что получающееся спектральное распределение имеет также лоренцевскую форму

$$dk^{0'} \frac{\gamma_{II}+\gamma_{III}}{2} \frac{1}{(k^{0'}-k^0_{II,\,III})^2+\left(\frac{\gamma_{II}+\gamma_{III}}{2}\right)^2} \tag{16.61}$$

с шириной, равной сумме ширин отдельных H-частиц. Этот вывод становится особенно прозрачным, если заметить, что двойной интеграл по энергиям (16.60) эквивалентен однократному интегралу по времени

$$dk^{0'} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \exp\left\{iE_{II}t-\frac{1}{2}\gamma_{II}|t|\right\} \exp\{ik^{0'}t\} \exp\left\{-iE_{III}t-\frac{1}{2}\gamma_{III}|t|\right\}. \tag{16.62}$$

Трудно было бы не догадаться, что должен существовать какой-то другой, прямой путь вывода этой формулы. Мы не удивимся, если такой путь будет состоять в том, чтобы рассматривать замкнутый во времени цикл.

Но сначала проведем аналогичный анализ для рассеяния фотонов, который позволит убедиться в том, что при явном учете нестабильности H-частиц сечение при точном резонансе не будет принимать нефизического бесконечного значения. Мы рассмотрим упругое рассеяние фотонов на стабильной H-частице. В таком случае достаточно ввести модифицированные функции распространения H-частиц в диаду (15.88), которая будет использоваться только в нерелятивистском пределе и при калибровке (15.106). Существенное изменение состоит в том, что в (15.101) (мы отбрасываем член с $1/M$) производится подстановка

$$E-(E_I+k^0) \to E-\frac{1}{2}i\Gamma_E(E_I+k^0)-(E_I+k^0), \tag{16.63}$$

хотя величина $E-(E_I-k^0)$ остается неизменной. Чтобы разобраться в этом вопросе, нам нужно нечто более общее, чем уравнение (16.37), в которое входит лишь значение $\Gamma_{p^{0'}}(P^0)$ в точке $P^0=p^{0'}$. Возвращаясь к уравнению (16.29), будем действовать так же, как в формуле (16.35), но сохраняя при этом $\Gamma_{p^{0'}}(P^0)$. В результате мы получим выражение

$$(p^{0'}-p^0)^2 \int \frac{dP^0}{2\pi} \frac{\Gamma_{p^{0'}}(P^0)}{P^0(1-i\varepsilon)-p^0} \frac{d}{dp^{0'}} \frac{1}{p^{0'}-P^0} =$$

$$=(p^{0'}-p^0)^2\, P \int \frac{dP^0}{2\pi} \frac{\Gamma_{p^{0'}}(P^0)}{P^0-p^0} \frac{d}{dp^{0'}} \frac{1}{p^{0'}-P^0} - \frac{i}{2}\varepsilon(p^0)\Gamma_{p^{0'}}(p^0), \tag{16.64}$$

показывающее, какой общий вид имеет мнимое слагаемое. Такое различие излишне вблизи резонанса ($p^0 \sim p^{0\prime}$, или $E_{\mathrm{I}} + k^0 \sim E$), но вдали от резонансных условий оно оказывается необходимым. В противном случае мы должны были бы добавить, и это было бы неправильным, мнимый член к $E - (E_{\mathrm{I}} - k^0)$, тогда как

$$\Gamma_E (E_{\mathrm{I}} - k^0) = 0, \tag{16.65}$$

поскольку при полной энергии, меньшей E_{I}, испускания фотонов не может быть.

В случае

$$k^0 + E_{\mathrm{I}} \approx E_{\mathrm{I}}: \qquad k^0 \approx k^0_{\mathrm{I,\,II}} \tag{16.66}$$

H-частица II становится сильно возбужденной. При этих условиях главный вклад в дифференциальное сечение (15.101) таков:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 (k^0_{\mathrm{I,\,II}})^4 \left| \sum_a \frac{\langle \mathrm{I} | \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{d} | \mathrm{II}\, a\rangle \langle \mathrm{II}\, a | \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{d} | \mathrm{I}\rangle}{k^0_{\mathrm{I,\,II}} - k^0 - \frac{1}{2} i\gamma_{\mathrm{II}}} \right|^2. \tag{16.67}$$

Чтобы заменить это дифференциальное сечение при заданных значениях поляризации полным сечением, его нужно просуммировать по конечным поляризациям и направлениям и усреднить по начальной поляризации (и направлению). Вспомнив равенство

$$\gamma_{\mathrm{II}} = \frac{\alpha}{2\pi} (k^0_{\mathrm{I,\,II}})^3 \int d\Omega \sum_\lambda |\langle \mathrm{I} | \mathbf{e}_\lambda^* \cdot \mathbf{d} | \mathrm{II}\, a\rangle|^2, \tag{16.68}$$

а также условие ортогональности (16.27), мы получим

$$\sigma = \frac{4\pi}{(k^0_{\mathrm{I,\,II}})^2} \frac{1}{2} g_{\mathrm{II}} \frac{\left(\frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{II}}\right)^2}{(k^0 - k^0_{\mathrm{I,\,II}})^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{II}}\right)^2}, \tag{16.69}$$

где g_{II} — мультиплетность частицы II, т. е. число разных значений, которые может принимать параметр a_{II}. Вид сечения при точном резонансе

$$\sigma_{\text{рез}} = \frac{4\pi}{(k^0_{\mathrm{I,\,II}})^2} \frac{g_{\mathrm{II}}}{2} \tag{16.70}$$

характерен для любого процесса резонансного рассеяния. Основным резонансным сечением является $4\pi\lambda^2$, у нас $4\pi/(k^0_{\mathrm{I,\,II}})^2$,— оно умножается на число резонансных состояний g_{II} и делится на мультиплетность начальных частиц. Последняя равна как раз двум, соответственно двум поляризациям фотона, так как мы считаем, что H-частица I у нас одна-единственная.

Выполним теперь обещание и выведем еще раз, прямым путем, выражение (16.62). Мы даже обобщим это выражение так, что оно будет справедливым для любой пары нестабильных H-частиц, которые способны распадаться в последовательности, отличной от последовательности III $\to$ II $\to$ I. Более общая задача формулируется следующим образом. Примерно в нулевой момент времени рождается нестабильная H-частица III. Она может распадаться на определенную нестабильную H-частицу II, а также и другими способами, причем вторичные нестабильные частицы будут продолжать этот каскад до тех пор, пока не возникнет стабильная частица I. Какова дифференциальная вероятность обнаружить фотон с частотой $k^0 \sim k^0_{\mathrm{II,\,III}}$, безотносительно к прочим фотонам с другой частотой, которые также испускаются при таком процессе? При заданной поляризации такая вероятность дается выражением

$$\sum_{\{n\}} |\langle 1_{\mathrm{I}}\{n+1_{k\lambda}\}_+ | 1_{\mathrm{III}-}\rangle|^2, \tag{16.71}$$

причем считается, что промежуток времени достаточно велик и вероятность успевает принять свое конечное значение. Введем два дополнительных множителя: множитель $iJ^*_{k\lambda}$, амплитуду вероятности детектирования фотона $k\lambda$, и комплексно-сопряженную ей амплитуду $-iJ_{k\lambda}$. Это дает величину, которую можно представить в виде

$$\sum_{\{n\}} \langle \mathrm{III}_- | 1_{\mathrm{I}}\{n+1_{k\lambda}\}_+\rangle \langle 1_{\mathrm{I}}\{n+1_{k\lambda}\}_- | 1_{\mathrm{I}}\{n\}_+\rangle^J \times \\ \times \langle 1_{\mathrm{I}}\{n\}_+ | 1_{\mathrm{I}}\{n+1_{k\lambda}\}_-\rangle^J \langle 1_{\mathrm{I}}\{n+1_{k\lambda}\}_+ | 1_{\mathrm{III}-}\rangle. \tag{16.72}$$

В этом выражении мы видим два последовательных этапа замкнутого во времени цикла, на которых действуют два аналогичных фотонных источника — один на участке с прямым направлением времени, а другой на участке с обратным направлением. Таким образом, нас теперь будет интересовать обобщение W_{22} на случай замкнутого во времени цикла.

Чтобы непротиворечивым образом использовать нерелятивистское описание, мы должны из частот в функции распространения (16.38) вычесть m. В результате положительные частоты при $x^0 > x^{0'}$ сведутся к нерелятивистским энергиям, а отрицательные при $x^0 < x^{0'}$ будут принимать значения, равные приблизительно $-2m$. Последние дают пренебрежимо малые вклады в интегралы по времени, и поэтому нерелятивистским пределом соотношения (16.38) будет соотношение

$$\bar{\Delta}_{E'}(t-t') = i\eta(t-t')\exp\left[-iE'(t-t') - \frac{1}{2}\gamma_{E'}(t-t')\right]. \tag{16.73}$$

При использовании калибровки (15.106) и (15.107) выражение для iW_{22} в упрощенных матричных обозначениях принимает вид

$$iW_{22} = ie^2 \int dt\, dt_1\, dt_2\, dt' K^*(t)\, i\eta(t-t_1)\exp\left[-iE(t-t_1) - \frac{1}{2}\gamma(t-t_1)\right] \times \\ \times \mathbf{x}\cdot\mathbf{E}(t_1)\, i\eta(t_1-t_2)\exp\left[-iE(t_1-t_2) - \frac{1}{2}\gamma(t_1-t_2)\right]\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}(t_2) \times \\ \times i\eta(t_2-t')\exp\left[-iE(t_2-t') - \frac{1}{2}\gamma(t_2-t')\right] K(t'). \tag{16.74}$$

По прохождении момента времени t_2 мы переходим к замкнутому во времени циклу. Время t_1 лежит теперь на обратном участке цикла, который наступает заведомо «позднее» времени t_2, и поэтому величина $\eta(t_1 - t_2)$ заменяется единицей. Кроме того, время t наступает «после» времени t_1, и величину $\eta(t - t_1)$ следует заменить величиной $\eta(t_1 - t)$. Поскольку и t и t_1 лежат на участке, на котором время движется вспять, никаких изменений знака у интеграла не возникает. Надлежащая трактовка членов с γ фиксируется физической необходимостью сохранить затухание, т. е. ослабление связи при возрастании промежутка времени. Все это приводит к подстановке

$$\begin{aligned} iW_{22} \to e^2 \int dt\, dt_1\, dt_2\, dt' K^*(t)\, \eta(t_1 - t) \exp\left[-iE(t - t_1) - \frac{1}{2}\gamma(t_1 - t)\right] \times \\ \times \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(t_1) \exp\left[-iE(t_1 - t_2) - \frac{1}{2}\gamma|t_1 - t_2|\right] \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(t_2)\, \eta(t_2 - t') \times \\ \times \exp\left[-iE(t_2 - t') - \frac{1}{2}\gamma(t_2 - t')\right] K(t'). \end{aligned} \quad (16.75)$$

Поскольку источники H-частиц действуют в моменты времени, близкие к $t = 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} \int dt' e^{iEt' + 1/2\gamma t'} K(t') \approx \int dt' e^{iEt'} K(t') = K, \\ \int dt K^*(t)\, e^{-iEt + 1/2\gamma t} \approx \int dt K^*(t)\, e^{-iEt} = K^*, \end{aligned} \quad (16.76)$$

и коэффициент при $(-iK^*_{\text{III}})(iK_{\text{III}})$ будет давать нам искомую величину, описывающую замкнутый во времени цикл, в виде

$$\begin{aligned} \langle \text{III}_- | \text{III}_- \rangle^{J_{(-)}, J_{(+)}} = e^2 \int_0^\infty dt_1\, dt_2 \exp\left[iE_{\text{III}} t_1 - \frac{1}{2}\gamma_{\text{III}} t_1\right] \times \\ \times \langle \text{III} | \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(t_1) \exp\left[-iE(t_1 - t_2) - \frac{1}{2}\gamma|t_1 - t_2|\right] \times \\ \times \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(t_2) | \text{III} \rangle \exp\left[-iE_{\text{III}} t_2 - \frac{1}{2}\gamma_{\text{III}} t_2\right]. \end{aligned} \quad (16.77)$$

Мы должны еще выделить из $\mathbf{E}(t_2)$ коэффициент при $iJ^*_{k\lambda}$, а из $\mathbf{E}(t_1)$ — при $-iJ_{k\lambda}$. Согласно формуле (15.107), первый из них равен

$$(d\omega_k)^{1/2} (-ik^0)\, \mathbf{e}^* e^{ik^0 t_2}, \quad (16.78)$$

а чтобы получить соответствующий коэффициент для обратного во времени участка, нужно произвести комплексное сопряжение и заменить t_2 на t_1. Поскольку условием $k^0 \approx k^0_{\text{II, III}}$ выделяется вклад от конкретной H-частицы II, искомая вероятность в том виде, как она получается из формулы (16.77), равна

$$e^2\,d\omega_k\,(k^0_{\mathrm{II,\,III}})^2 \sum_a |\langle \mathrm{II}\,a\,|\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}^*\,|\,\mathrm{III}\rangle|^2 \times$$
$$\times \int_0^\infty dt_1\,dt_2 \exp\left[iE_{\mathrm{II}}(t_2-t_1)-\frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{II}}|t_2-t_1|\right]\times$$
$$\times \exp\left[ik^0(t_2-t_1)\right]\exp\left[-iE_{\mathrm{III}}(t_2-t_1)-\frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{III}}(t_1+t_2)\right]. \qquad (16.79)$$

Если отбросить $dk^0/2\pi$, то множитель перед двойным интегралом по времени, просуммированный по поляризациям, будет коэффициентом A для распада $\mathrm{III}\to\mathrm{II}$. С целью большей унификации обозначений мы теперь для него будем использовать символ $\gamma_{\mathrm{II,\,III}}$. Чтобы упростить интегралы по времени, введем новые переменные: время

$$t = t_2 - t_1, \qquad (16.80)$$

которое изменяется в пределах от $-\infty$ до ∞, и время $t_<$, меньшее из двух времен, которое изменяется от 0 до ∞. Тогда после преобразований

$$t_1 + t_2 = 2t_< + |t| \qquad (16.81)$$

и

$$\int_0^\infty dt_1\,dt_2 f(t)\,e^{-1/2\,\gamma_{\mathrm{III}}(t_1+t_2)} = \int_0^\infty dt_< e^{-\gamma_{\mathrm{III}}t_<} \int_{-\infty}^\infty dt f(t)\,e^{-1/2\,\gamma_{\mathrm{III}}|t|} \qquad (16.82)$$

мы приведем искомую вероятность к виду

$$dk^0\frac{\gamma_{\mathrm{II,\,III}}}{\gamma_{\mathrm{III}}}\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{2\pi}\exp\left[iE_{\mathrm{II}}t-\frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{II}}|t|\right]\times$$
$$\times\exp\left[ik^0t\right]\exp\left[-iE_{\mathrm{III}}t-\frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{III}}|t|\right]. \qquad (16.83)$$

Если частица III может излучать только с переходом в частицу II, то $\gamma_{\mathrm{II,\,III}} = \gamma_{\mathrm{III}}$, и мы вновь приходим к формуле (16.62). В более общем случае в соответствии с формулой

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dk^0}{2\pi}\,e^{i(k^0-k^0_{\mathrm{II,\,III}})t} = \delta(t) \qquad (16.84)$$

вероятность испускания любой частоты из окрестности $k^0_{\mathrm{II,\,III}}$ будет равна $(\gamma_{\mathrm{II,\,III}}/\gamma_{\mathrm{III}}) < 1$, в чем находит свое выражение конкуренция между рассматриваемым переходом и всеми прочими превращениями, которые может претерпевать частица III. Сумма таких составляющих по всем типам распадов частицы III равна единице.

Распространив W_{22} на замкнутый во времени цикл, мы получим прямым путем выражение (16.69) для сечения резонансного рассеяния, или, лучше, его обобщение на случай, когда частица II становится H-частицей, которая может распадаться по каналам, отличным от превращения в стабильную частицу I. При этом σ становится соответствующим полным сечением. Фотон падает на частицу I, а в конечном итоге мы снова обнаруживаем частицу I вместе с одним или большим числом фотонов. Полная вероятность такого рода явлений при заданном времени взаимодействия равна

$$\sum_{\{n\}} |\langle 1_{\mathrm{I}}\{n\}_+ | 1_{\mathrm{I}}1_{k\lambda-}\rangle|^2 = \sum_{\{n\}} \langle 1_{\mathrm{I}}1_{k\lambda-} | 1_{\mathrm{I}}\{n\}_+\rangle \langle 1_{\mathrm{I}}\{n\}_+ | 1_{\mathrm{I}}1_{k\lambda-}\rangle. \tag{16.85}$$

Когда начальные частицы создаются соответствующими источниками, по два на каждый их тип, эта вероятность превращается в вакуумную амплитуду замкнутого во времени цикла, описываемую величиной iW_{22}. Необходимый результат получается из выражения (16.77), если заменить частицу III стабильной частицей I и вместо выражения (16.78) взять поле падающих фотонов:

$$d\omega_k e^2 (k^0)^2 \int_0^\infty dt_1\, dt_2 \exp[iE_{\mathrm{I}}t_1] \Big\langle \mathrm{I} \,|\, \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}^* \exp[ik^0 t_1] \times$$
$$\times \exp\left[-iE(t_1-t_2) - \frac{1}{2}\gamma|t_1-t_2|\right] \mathbf{x}\cdot\mathbf{e} \exp[-ik^0 t_2] \,|\, \mathrm{I}\Big\rangle \times$$
$$\times \exp[-iE_{\mathrm{I}}t_2], \tag{16.86}$$

или

$$d\omega_k e^2 (k^0)^2 \sum_{\mathrm{II}\, a} \int_0^\infty dt_1\, dt_2 \exp[-i(E_{\mathrm{I}} + k^0 - E_{\mathrm{II}})(t_2 - t_1)] \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{II}}|t_2 - t_1|\right] |\langle \mathrm{II}\, a \,|\, \mathbf{x}\cdot\mathbf{e} \,|\, \mathrm{I}\rangle|^2. \tag{16.87}$$

Подынтегральное выражение зависит только от временной переменной $t = t_2 - t_1$, а интегрированием по $t_<$ определяется длительность взаимодействия. Полное сечение равно вероятности перехода в единицу времени, деленной на поток фотонов $2k^0\, d\omega_k$. Заметив, что

$$e^2 (k^0_{\mathrm{I,\,II}})^3 \sum_a |\langle \mathrm{II}\, a \,|\, \mathbf{x}\cdot\mathbf{e} \,|\, \mathrm{I}\rangle|^2 = \pi g_{\mathrm{II}} \gamma_{\mathrm{I,\,II}}, \tag{16.88}$$

мы для главного вклада в сечение при $k^0 \approx k^0_{\mathrm{I,\,II}}$ получим

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{\pi}{(k^0_{\mathrm{I,\,II}})^2} \frac{1}{2} g_{\mathrm{II}} \gamma_{\mathrm{I,\,II}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\left[-i(k^0 - k^0_{\mathrm{I,\,II}})t - \frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{II}}|t|\right] =$$
$$= \frac{4\pi}{(k^0_{\mathrm{I,\,II}})^2} \frac{1}{2} g_{\mathrm{II}} \frac{\gamma_{\mathrm{I,\,II}}}{\gamma_{\mathrm{II}}} \frac{\left(\frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{II}}\right)^2}{(k^0 - k^0_{\mathrm{I,\,II}})^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{II}}\right)^2}. \tag{16.89}$$

При $\gamma_{\mathrm{I,\,II}} = \gamma_{\mathrm{II}}$ мы снова приходим к формуле (16.69). Очевидно, что дополнительный множитель $\gamma_{\mathrm{I,\,II}}/\gamma_{\mathrm{II}} < 1$ отвечает тому, что теперь меньше шансов возбудить частицу II непосредственно из частицы I. Это обратная сторона того обстоятельства, что вероятность прийти к частице I при распаде непосредственно из частицы II меньше единицы. С этой точки зрения сечение упругого рассеяния должно получаться из полного сечения путем умножения последнего на дополнительный множитель $\gamma_{\mathrm{I,\,II}}/\gamma_{\mathrm{II}}$. И действительно, если величину (16.68) интерпретировать в общем случае как парциальную ширину $\gamma_{\mathrm{I,\,II}}$, то из формулы (16.67) будет следовать именно такой результат:

$$\sigma_{\text{упр}} = \frac{4\pi}{(k^0_{\mathrm{I,II}})^2}\,\frac{1}{2}\,g_{\mathrm{II}}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{I,\,II}}\right)^2}{(k^0 - k^0_{\mathrm{I,\,II}})^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{\mathrm{II}}\right)^2}. \tag{16.90}$$

Проведенный выше анализ был бы неполным, если не упомянуть о дополнительном члене действия W_{22}, который должен существовать в силу перекрестной симметрии фотонов. Он получается обращением знака величины k^0. Этот член заведомо нерезонансный. Но гораздо важнее то, что начальная энергия будет входить в комбинации $E_{\mathrm{I}} - k^0$, а потому значение, которое следует приписать константе затухания H-частицы II, равно, как и в формуле (16.65), не γ_{II}, а нулю. В таком случае возникающий интеграл по времени будет давать $\delta\,(k^0_{\mathrm{I,\,II}} + k^0) = 0$.

Все рассуждения в данном параграфе проводились на примере бесспиновых частиц, которые связывались, образуя H-частицы. Аналогичный анализ для частиц со спином $^1/_2$ проводится совершенно так же, лишь с добавлением или вычеркиванием иногда множителей $\varepsilon\,(p^0)$, например, что соответствует другому типу статистики. Нерелятивистские результаты идентичны.

Исходя из факта естественной нестабильности H-частиц, мы пришли к необходимости, кроме одночастичного распространения, рассмотреть и многочастичный обмен. Из принципа же равноправности всех точек пространства-времени дополнительно следует, что связи, установленные путем исследования реальных процессов, сохраняют свой смысл и применительно к виртуальным процессам. Это говорит о том, что многочастичный обмен имеет важное значение даже в том случае, когда энергия недостаточна для порождения нескольких реальных частиц. Поэтому следующий этап в развитии динамической теории состоит в систематическом обобщении всех одночастичных обменов на процессы обмена с участием двух частиц и в том числе на бесконечное их повторение. Но прежде чем приступать к выполнению столь солидной программы, мы остановимся на гравитационном варианте таких понятий, как примитивные взаимодействия и калибровочная инвариантность.

§ 17. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

У нас еще не проводился независимый анализ поля, отвечающего безмассовым частицам со спиральностью ± 2. Будем исходить из выражения для действия (4.24) из гл. 2, но в соответствии с равенством (4.33) из гл. 2 пользоваться для измерения $T_{\mu\nu}$ механическими единицами, так что

$$W(T)=\frac{\varkappa}{2}\int(dx)(dx')\left[T^{\mu\nu}(x)D_+(x-x')T_{\mu\nu}(x')-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}T(x)D_+(x-x')T(x')\right],$$
$$\partial_\mu T_{\mu\nu}(x)=0. \qquad (17.1)$$

Симметричное тензорное поле $h_{\mu\nu}(x)$ определяется формулой

$$\delta W(T)=\int(dx)\,\delta T^{\mu\nu}(x)\,h_{\mu\nu}(x), \qquad (17.2)$$

причем источник должен удовлетворять требованию

$$\partial_\mu\delta T^{\mu\nu}(x)=0. \qquad (17.3)$$

Поэтому в определении величины $h_{\mu\nu}(x)$ допускается некоторый произвол, как явствует из выражения

$$h_{\mu\nu}(x)=\varkappa\int(dx')D_+(x-x')\left[T_{\mu\nu}(x')-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T(x')\right]+$$
$$+\partial_\mu\xi_\nu(x)+\partial_\nu\xi_\mu(x). \qquad (17.4)$$

Свертывая индексы у тензора, получаем

$$h(x)=g_{\mu\nu}h^{\mu\nu}(x)=$$
$$=-\varkappa\int(dx')D_+(x-x')T(x')+2\partial_\mu\xi^\mu(x), \qquad (17.5)$$

и, следовательно,

$$h_{\mu\nu}(x)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}h(x)=$$
$$=\varkappa\int(dx')D_+(x-x')T_{\mu\nu}(x')+\partial_\mu\xi_\nu(x)+\partial_\nu\xi_\mu(x)-g_{\mu\nu}\partial_\lambda\xi^\lambda(x). \qquad (17.6)$$

Вводя требование к источнику через дивергенцию этого уравнения, мы выделим те аспекты поля $h_{\mu\nu}(x)$, которые связаны с произвольным вектором $\xi_\mu(x)$:

$$\partial_\mu\left[h^{\mu\nu}(x)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}h(x)\right]=\partial^2\xi^\nu(x). \qquad (17.7)$$

Обращаясь к формуле (17.4), придем к уравнению

$$-\partial^2h_{\mu\nu}(x)+\partial_\mu\partial^2\xi_\nu(x)+\partial_\nu\partial^2\xi_\mu(x)=\varkappa\left[T_{\mu\nu}(x)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T(x)\right], \qquad (17.8)$$

которое представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка для поля:

$$-\partial^2 h_{\mu\nu}(x)+\partial_\mu\partial^\lambda h_{\lambda\nu}(x)+\partial_\nu\partial^\lambda h_{\mu\lambda}(x)-\partial_\mu\partial_\nu h(x)=$$
$$=\varkappa\left[T_{\mu\nu}(x)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T(x)\right]. \quad (17.9)$$

Уравнение в такой форме получится также, если в формуле (3.19) положить $m=0$.

Свертывая индексы в формуле (17.9) или преобразуя уравнение (17.5) в дифференциальное уравнение, получаем

$$-\partial^2 h(x)+\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}(x)=-\frac{1}{2}\varkappa T(x), \quad (17.9a)$$

откуда следует другая форма дифференциальных уравнений поля:

$$-\partial^2 h_{\mu\nu}(x)+\partial_\mu\partial^\lambda h_{\lambda\nu}(x)+\partial_\nu\partial h_{\mu\lambda}(x)-\partial_\mu\partial_\nu h(x)-$$
$$-g_{\mu\nu}\left[-\partial^2 h(x)+\partial_\varkappa\partial_\lambda h^{\varkappa\lambda}(x)\right]=\varkappa T_{\mu\nu}(x); \quad (17.10)$$

она совпадает с формулой (3.17), если положить в последней $m=0$. Структура левой части этого уравнения такова, что ее дивергенция тождественно равна нулю. Равенство нулю дивергенции тензорного источника теперь выступает как алгебраическое следствие полевых уравнений. Поскольку в приведенных нами полевых уравнениях все же сохраняется произвол, связанный с вектором $\xi_\mu(x)$, на них не будет сказываться переопределение поля вида

$$h_{\mu\nu}(x)\to h_{\mu\nu}(x)+\partial_\mu\xi_\nu(x)+\partial_\nu\xi_\mu(x), \quad (17.11)$$

которое представляет собой гравитационное калибровочное преобразование.

Если ввести определение, аналогичное формуле (3.23),

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}(x)=\Gamma_{\nu\mu\lambda}(x)=\partial_\mu h_{\nu\lambda}(x)+\partial_\nu h_{\mu\lambda}(x)-\partial_\lambda h_{\mu\nu}(x), \quad (17.12)$$

то с учетом его следствия

$$\Gamma_\mu(x)=\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}(x)=\partial_\mu h(x) \quad (17.13)$$

мы придем к полевым уравнениям первого порядка [формула (3.22) при $m=0$]:

$$\partial^\lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}(x)-\partial_\nu\Gamma_\mu(x)=\varkappa\left[T_{\mu\nu}(x)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T(x)\right]. \quad (17.14)$$

Калибровочная инвариантность левой части уравнения (17.14) означает не просто инвариантность $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$, а ее следует понимать в смысле неизменности этого выражения относительно преобразований

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}(x)\to\Gamma_{\mu\nu\lambda}(x)+2\,\partial_\mu\,\partial_\nu\xi_\lambda(x) \quad (17.15)$$

и

$$\Gamma_\mu(x)\to\Gamma_\mu(x)+2\,\partial_\mu\,\partial_\lambda\xi^\lambda(x). \quad (17.16)$$

Заметим, однако, что в эти законы изменения при калибровочных преобразованиях не входят первые производные функций $\xi_\lambda (x)$.

Если ввести определения

$$\omega_{\mu\lambda\nu} (x) = -\omega_{\nu\lambda\mu} (x) = \partial_\mu h_{\lambda\nu} (x) - \partial_\nu h_{\lambda\mu} (x) \qquad (17.17)$$

и

$$\omega_\mu (x) = \omega_{\mu\lambda}{}^{\lambda} (x) = \partial_\mu h (x) - \partial^\lambda h_{\mu\lambda} (x), \qquad (17.18)$$

то мы получим еще одну систему дифференциальных уравнений первого порядка [формулы (3.20) и (3.21) при $m = 0$]:

$$\partial^\lambda \omega_{\mu\nu\lambda} (x) - \partial_\nu \omega_\mu (x) = \varkappa \left[T_{\mu\nu} (x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T (x) \right]. \qquad (17.19)$$

При калибровочных преобразованиях введенные поля меняются следующим образом:

$$\omega_{\mu\lambda\nu} (x) \to \omega_{\mu\lambda\nu} (x) + \partial_\lambda [\partial_\mu \xi_\nu (x) - \partial_\nu \xi_\mu (x)] \qquad (17.20)$$

и

$$\omega_\mu (x) \to \omega_\mu (x) + \partial_\mu \lambda_\lambda \xi^\lambda (x) - \partial^2 \xi_\mu (x). \qquad (17.21)$$

Заметим, что дивергенция векторного поля $\omega_\mu (x)$ калибровочно-инвариантна. Сравнение выражения для дивергенции, вытекающего из равенства (17.18), с формулой (17.9а) показывает, что

$$\partial_\mu \omega^\mu (x) = \frac{1}{2} \varkappa T (x). \qquad (17.22)$$

Это равенство представляет собой также свертку выражения (17.19), так как

$$\omega_\nu{}^\nu{}_\lambda (x) = -\omega_\lambda{}^\nu{}_\nu (x) = -\omega_\lambda (x). \qquad (17.23)$$

Но, проделывая аналогичную процедуру с выражением (17.14), мы приходим к новому векторному полю

$${}_\lambda\Gamma (x) = \Gamma^\nu{}_{\nu\lambda} (x) = 2\partial^\nu h_{\nu\lambda} (x) - \partial_\lambda h (x), \qquad (17.24)$$

для которого

$$\Gamma_\lambda (x) - {}_\lambda\Gamma (x) = 2\omega_\lambda (x). \qquad (17.25)$$

Это равенство — свертка тензорного соотношения

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} (x) - \Gamma_{\lambda\nu\mu} (x) = 2\omega_{\mu\nu\lambda} (x). \qquad (17.26)$$

Оно вытекает также из еще одного соотношения между двумя тензорами третьего ранга:

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} (x) = \omega_{\mu\nu\lambda} (x) + \partial_\nu h_{\mu\lambda} (x). \qquad (17.27)$$

Последовательные этапы, необходимые при получении выражения для действия, которое приводит к полевым уравнениям первого порядка (17.12) и (17.14), таковы:

$$W=\frac{1}{2}\int(dx)\,T^{\mu\nu}h_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\int(dx)\left(T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right)\left(h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}h\right)=$$
$$=\frac{1}{2\varkappa}\int(dx)\,(\partial^\lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}-\partial_\nu\Gamma_\mu)\left(h^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}h\right)=$$
$$=-\frac{1}{2\varkappa}\int(dx)\,[\Gamma^{\lambda\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu\lambda}-{}^\lambda\Gamma\Gamma_\lambda], \tag{17.28}$$

где в последней форме записи учтено соотношение

$$\partial^\lambda h^{\mu\nu}(x)=\frac{1}{2}[\Gamma^{\lambda\mu\nu}(x)+\Gamma^{\lambda\nu\mu}(x)], \tag{17.29}$$

его свертка

$$\partial_\nu h^{\mu\nu}(x)=\frac{1}{2}[\Gamma^\mu(x)+{}^\mu\Gamma(x)] \tag{17.30}$$

и формула (17.13). Действие имеет вид

$$W=\int(dx)\,[T^{\mu\nu}h_{\mu\nu}+\mathscr{L}(h,\Gamma)], \tag{17.31}$$

где

$$\varkappa\mathscr{L}(h,\Gamma)=-\left(h^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}h\right)(\partial^\lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}-\partial_\nu\Gamma_\mu)-$$
$$-\frac{1}{2}(\Gamma^{\lambda\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu\lambda}-{}^\lambda\Gamma\Gamma_\lambda). \tag{17.32}$$

Если не считать дивергентного слагаемого, то эта функция Лагранжа является аналогом выражения (5.41), взятого при $m=0$. В отличие от уравнения (5.40) здесь мы для простоты не включаем источник тензорного поля третьего ранга. Требование стационарности относительно варьирования по $h^{\mu\nu}$ или $h^{\mu\nu}-{}^1/_2 g^{\mu\nu}h$ вновь приводит к уравнению (17.14), а варьирование по $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ после перегруппировок, указанных в формуле (5.45), дает уравнение (17.12). Функция Лагранжа калибровочно-неинвариантна:

$$\varkappa\mathscr{L}\to\varkappa\mathscr{L}-\partial^\lambda\,[(\partial^\mu\xi^\nu+\partial^\nu\xi^\mu-g^{\mu\nu}\partial_\varkappa\xi^\varkappa)\,\Gamma_{\mu\nu\lambda}]+$$
$$+\partial_\nu\,[(\partial^\mu\xi^\nu+\partial^\nu\xi^\mu-g^{\mu\nu}\partial_\varkappa\xi^\varkappa)\,\Gamma_\mu], \tag{17.33}$$

но действие инвариантно. Если мы отказываемся от $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ как независимых переменных и считаем, что они определяются формулой (17.12), то соответствующей функцией Лагранжа будет функция

$$\varkappa\mathscr{L}(h)=\frac{1}{2}(\Gamma^{\lambda\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu\lambda}-{}^\lambda\Gamma\Gamma_\lambda). \tag{17.34}$$

Если представить ее в виде квадратичной функции первых производных величины $h_{\mu\nu}(x)$, то эта функция Лагранжа будет отличаться от функции (5.99) только последним слагаемым:

$$\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial^\lambda h_{\lambda\nu}\to\partial^\lambda h^{\mu\nu}\partial_\mu h_{\lambda\nu}, \tag{17.35}$$

чем иллюстрируется возможность произвольно добавлять дивергентные члены. Это уже отмечалось в формулах (5.31) и (5.32).

К тем же результатам можно прийти, основываясь на дифференциальных уравнениях первого порядка (17.17) и (17.19) и исходя из действия

$$W=\frac{1}{2\varkappa}\int(dx)\,(\partial^\lambda\omega_{\mu\nu\lambda}-\partial_\nu\omega_\mu)\left(h^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}h\right)=$$
$$=\frac{1}{2\varkappa}\int(dx)\,(\omega^{\lambda\mu\nu}\omega_{\lambda\nu\mu}-\omega^\lambda\omega_\lambda), \qquad (17.36)$$

где при переходе ко второй форме производятся подстановки

$$-\omega_{\mu\nu\lambda}\partial^\lambda h^{\mu\nu}=\omega_{\mu\nu\lambda}\omega^{\nu\mu\lambda}=\omega^{\lambda\mu\nu}\omega_{\lambda\nu\mu}. \qquad (17.37)$$

Функция Лагранжа приобретает вид

$$\varkappa\mathcal{L}(h,\,\omega)=-\left(h^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}h\right)(\partial^\lambda\omega_{\mu\nu\lambda}-\partial_\nu\omega_\mu)+\frac{1}{2}(\omega^{\lambda\mu\nu}\omega_{\lambda\nu\mu}-\omega^\lambda\omega_\lambda). \qquad (17.38)$$

С точностью до дивергентных членов она совпадает с функцией (5.34), взятой при $m=0$. И здесь источник, связанный с тензором третьего ранга, использоваться не будет. Варьирование по $h^{\mu\nu}-{}^1/_2 g^{\mu\nu}h$ вновь приводит к формуле (17.19), а варьирование по $\omega_{\lambda\mu\nu}$ после перегруппировок, указанных в формуле (5.38), дает соотношение (17.17). Функция Лагранжа (17.38) при калибровочных преобразованиях изменяется следующим образом:

$$\varkappa\mathcal{L}\to\varkappa\mathcal{L}-\partial^\lambda\,[(\partial^\mu\xi^\nu+\partial^\nu\xi^\mu-g^{\mu\nu}\partial_\varkappa\xi^\varkappa)\,\omega_{\mu\nu\lambda}]+$$
$$+\partial_\nu\,[(\partial^\mu\xi^\nu+\partial^\nu\xi^\mu-g^{\mu\nu}\partial_\varkappa\xi^\varkappa)\,\omega_\mu], \qquad (17.39)$$

что гарантирует инвариантность действия. Если $\omega_{\lambda\mu\nu}$ рассматриваются не как независимые переменные, а как величины, определяемые равенством (17.17), то в качестве функции Лагранжа можно взять функцию

$$\varkappa\mathcal{L}(h)=-\frac{1}{2}(\omega^{\lambda\mu\nu}\omega_{\lambda\nu\mu}-\omega^\lambda\omega_\lambda). \qquad (17.40)$$

Это квадратичная функция первых производных $h_{\mu\nu}(x)$, которая получается путем усреднения двух альтернативных форм выражения (17.35):

$$\varkappa\mathcal{L}(h)=-\frac{1}{2}(\partial^\lambda h^{\mu\nu}\partial_\lambda h_{\mu\nu}-\partial^\lambda h\partial_\lambda h)-\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h+$$
$$+\frac{1}{2}(\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial^\lambda h_{\lambda\nu}+\partial^\lambda h^{\mu\nu}\partial_\mu h_{\lambda\nu}). \qquad (17.41)$$

Тензору натяжений $t^{\mu\nu}(x)$ мы дали кинематическое определение (неоднозначное), рассматривая инфинитезимальные деформации координат:

$$\delta_{\text{коорд}}W=-\int(dx)\,t^{\mu\nu}(x)\,\partial_\mu\delta x_\nu(x). \qquad (17.42)$$

Динамическое определение он приобретает в том случае, если имитирует функции гравитационного источника $T^{\mu\nu}(x)$. Мы придем к нему, если в законе изменения выражения для действия при инфинитезимальных калибровочных преобразованиях к $T^{\mu\nu}$ добавим $t^{\mu\nu}$:

$$\delta_{\text{калибр}} W = \int (dx)\,[T^{\mu\nu}(x) + t^{\mu\nu}(x)]\, 2\partial_\mu \delta\xi_\nu(x). \tag{17.43}$$

Два этих понятия отождествляются требованием инвариантности действия относительно единого калибровочно-координатного преобразования

$$2\delta\xi_\nu(x) = \delta x_\nu(x). \tag{17.44}$$

Таким образом, инфинитезимальные координатные преобразования индуцируют инфинитезимальные калибровочные преобразования

$$\delta h_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}[\partial_\mu \delta x_\nu(x) + \partial_\nu \delta x_\mu(x)],$$

$$\delta\Gamma_{\mu\nu\lambda}(x) = \partial_\mu \partial_\nu \delta x_\lambda(x) \tag{17.45}$$

и

$$\delta\omega_{\mu\lambda\nu}(x) = \frac{1}{2}\partial_\lambda[\partial_\mu \delta x_\nu(x) - \partial_\nu \delta x_\mu(x)]. \tag{17.46}$$

Использование в действии в качестве множителя при $h_{\mu\nu}$ полного тензора натяжений $T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$ означает введение примитивного взаимодействия. Тензор $t^{\mu\nu}$ необходимо несколько модифицировать, ибо он не сохраняется внутри источников частиц, а также нужно ввести гравитационную модель источника частиц. Но мы отложим этот вопрос на дальнейшее и продолжим построение схемы, следуя как можно ближе образцу электромагнетизма, пока не достигнем той стадии, на которой начнет сказываться существенное различие между двумя этими совершенно различными физическими системами. Рассмотрим случай бесспиновых частиц, взяв для тензора натяжений простейшее выражение (7.8):

$$t_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + g_{\mu\nu}\mathcal{L}(\varphi), \qquad \mathcal{L}(\varphi) = -\frac{1}{2}[\partial^\lambda \varphi \partial_\lambda \varphi + m^2 \varphi^2]. \tag{17.47}$$

Как и в электромагнитном аналоге, член $t_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$, описывающий связь между полями, будет объединяться с функцией Лагранжа частиц, что дает

$$\mathcal{L}(\varphi, h) = \mathcal{L}(\varphi) + t_{\mu\nu}h^{\mu\nu} =$$
$$= -\frac{1}{2}\partial_\mu \varphi\,[g^{\mu\nu}(1+h) - 2h^{\mu\nu}]\,\partial_\nu \varphi - \frac{1}{2}(1+h)\,m^2\varphi^2. \tag{17.48}$$

При анализе электромагнитного поля, который был проще благодаря несколько иному виду функции Лагранжа, на этой стадии у нас появилась калибровочно-ковариантная производная

$\partial_\mu - ieqA_\mu$ и была установлена инвариантность относительно полной абелевой группы калибровочных преобразований. Чтобы прийти к сходной ситуации в случае гравитационного поля, одной лишь подстановки $ieqA_\mu \to h_{\mu\nu}\,\partial^\nu$ оказывается недостаточным, так как здесь имеется гравитационная связь, в которую не входят производные. Но гораздо более существенно то, что скрывается под заменой одной матрицы eq четырьмя дифференциальными операторами $(1/i)\,\partial_\nu$. Как это видно из равенства

$$[\delta_1 x^\mu(x)\,\partial_\mu,\ \delta_2 x^\nu(x)\,\partial_\nu] = (\delta_1 x^\mu(x)\,\partial_\mu\delta_2 x^\lambda(x) - \delta_2 x^\mu(x)\,\partial_\mu\delta_1 x^\lambda(x))\,\partial_\lambda, \tag{17.49}$$

группа общих координатных преобразований является неабелевой, и поэтому распространение инвариантности относительно инфинитезимальных преобразований на всю группу в целом составляет нетривиальную проблему.

Полезно будет выяснить, как же обстоит дело с инвариантностью относительно инфинитезимальных координатных преобразований. Преобразования, соответствующие равенству

$$\bar{x}^\mu = x^\mu - \delta x^\mu(x), \tag{17.50}$$

описывают скалярный характер поля частиц,

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x), \tag{17.51}$$

и дают индуцированное калибровочное преобразование поля гравитонов

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\bar{x}) = h_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}[\partial_\mu\delta x_\nu(x) + \partial_\nu\delta x_\mu(x)], \tag{17.52}$$

в том числе и преобразование

$$\bar{h}(\bar{x}) = h(x) + \partial_\mu\delta x^\mu(x). \tag{17.53}$$

Инвариантность массового члена в действии формулируется в виде равенства

$$\int (dx)\,(1 + h(x))\,\varphi(x)^2 = \int (dx)\,(1 + \bar{h}(x))\,\bar{\varphi}(x)^2 = \\ = \int (d\bar{x})\,(1 + \bar{h}(\bar{x}))\,\bar{\varphi}(\bar{x})^2, \tag{17.54}$$

и это равенство выполняется, если

$$(dx)\,(1 + h(x)) = (d\bar{x})\,(1 + \bar{h}(\bar{x})). \tag{17.55}$$

При инфинитезимальном преобразовании (17.50) закон преобразования элементов объема имеет вид

$$d\bar{x} = (dx)\det\left(\frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right) = (dx)\,[1 - \partial_\mu\delta x^\mu(x)], \tag{17.56}$$

и поэтому требуется, чтобы выполнялось соотношение

$$1 + h(x) = [1 - \partial_\mu \delta x^\mu(x)]\,[1 + h(x) + \partial_\mu \delta x^\mu(x)], \tag{17.57}$$

или

$$h(x) = h(x) - h(x)\,\partial_\mu \delta x^\mu(x). \tag{17.58}$$

Это может означать лишь одно — величина $h(x)$ должна принимать очень малые значения, что позволяет пренебрегать членом $h\,\partial_\mu \delta x^\mu$ как величиной второго порядка малости.

Точно так же обстоит дело с квадратичным по производным членом. Прежде всего отметим приближенное равенство

$$\partial_\mu \varphi\,[g^{\mu\nu}(1+h) - 2h^{\mu\nu}]\,\partial_\nu \varphi \approx (1+h)\,\partial_\mu \varphi\,(g^{\mu\nu} - 2h^{\mu\nu})\,\partial_\nu \varphi, \tag{17.59}$$

благодаря которому выделяется множитель $1+h$, компенсирующий изменение величины dx при преобразованиях (17.50). Далее, величина

$$g^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu} - 2h^{\mu\nu}(x) \tag{17.60}$$

должна преобразовываться так, чтобы давать скалярную комбинацию:

$$\bar\partial_\mu \bar\varphi(\bar x)\,\bar g^{\mu\nu}(\bar x)\,\bar\partial_\nu \bar\varphi(\bar x) = \partial_\mu \varphi(x)\,g^{\mu\nu}(x)\,\partial_\nu \varphi(x), \tag{17.61}$$

откуда

$$\bar g^{\mu\nu}(\bar x) = g^{\varkappa\lambda}(x)\,\partial_\varkappa \bar x^\mu\,\partial_\lambda \bar x^\nu. \tag{17.62}$$

Этим соотношением тензор $g^{\mu\nu}(x)$ характеризуется как контравариантный тензор второго ранга относительно общих координатных преобразований. При инфинитезимальных преобразованиях указанный закон изменения принимает вид

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = \delta x^\lambda(x)\,\partial_\lambda g^{\mu\nu}(x) - g^{\varkappa\lambda}(x)\,\partial_\varkappa \delta x^\mu(x) - g^{\mu\lambda}(x)\,\partial_\lambda \delta x^\nu(x), \tag{17.63}$$

что как раз сводится к первому из равенств (17.45), если в правой части пренебречь величинами второго порядка малости, заменив $g^{\mu\nu}(x)$ на $g^{\mu\nu}$.

Тензор $g_{\mu\nu}(x)$, обратный тензору $g^{\mu\nu}(x)$,

$$g_{\mu\lambda}(x)\,g^{\lambda\nu}(x) = \delta_\mu^\nu, \tag{17.64}$$

обладает трансформационными свойствами ковариантного тензора второго ранга:

$$\bar g_{\mu\nu}(\bar x) = g_{\varkappa\lambda}(x)\,\bar\partial_\mu x^\varkappa\,\bar\partial_\nu x^\lambda. \tag{17.65}$$

Отсюда вытекает, что определитель

$$g(x) = \det g_{\mu\nu}(x) \tag{17.66}$$

изменяется по закону

$$\bar g(\bar x) = g(x)\left[\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar x^\nu}\right)\right]^2, \tag{17.67}$$

и, следовательно,

$$[-\bar{g}(\bar{x})]^{1/2}(d\bar{x}) = [-g(x)]^{1/2}(dx). \tag{17.68}$$

Логично рассматривать равенство (17.68) как обобщенное равенство (17.55), ибо в приближении слабого поля, к которому относится последнее, мы имеем

$$g_{\mu\nu}(x) \approx g_{\mu\nu} + 2h_{\mu\nu}(x) \tag{17.69}$$

и

$$[-g(x)]^{1/2} \approx 1 + h(x). \tag{17.70}$$

Следовательно, чтобы обеспечить инвариантность действия относительно произвольных координатных преобразований, функцию Лагранжа (17.48), соответствующую слабым гравитационным полям, нужно заменить функцией Лагранжа

$$\mathcal{L}(\varphi(x), g(x)) = -[-g(x)]^{1/2}\frac{1}{2}[\partial_\mu\varphi(x)\,g^{\mu\nu}(x)\,\partial_\nu\varphi(x) + m^2\varphi(x)^2]. \tag{17.71}$$

Теперь мы должны обобщить гравитационную функцию Лагранжа

$$\varkappa\mathcal{L}(h,\ \Gamma) = -\left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}h\right)(\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) + \\ + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\varkappa_{\lambda\varkappa} - \Gamma^\lambda_{\mu\varkappa}\Gamma^\varkappa_{\nu\lambda}), \tag{17.72}$$

которая соответствует случаю слабого поля и совпадает с функцией (17.32), если все тензоры третьего ранга в этой формуле выразить через

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} \equiv \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \tag{17.73}$$

В разности $h^{\mu\nu} - {}^1/_2\, g^{\mu\nu}h$ мы узнаем ту часть соответствующего выражения, которая получается при его вычислении в приближении слабого поля:

$$\frac{1}{2}[-g(x)]^{1/2}g^{\mu\nu}(x) \approx \frac{1}{2}g^{\mu\nu} - \left[h^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}h(x)\right]. \tag{17.74}$$

Появляющееся здесь лишнее постоянное слагаемое можно включить в выражение (17.72), так как оно изменяет функцию Лагранжа на дивергенцию. Тогда обобщение на случай сильного поля оказывается совершенно очевидным:

$$2\varkappa\mathcal{L}(g(x),\ \Gamma(x)) = [-g(x)]^{1/2}g^{\mu\nu}(x)\,R_{\mu\nu}(x), \tag{17.75}$$

где

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\varkappa_{\lambda\varkappa} - \Gamma^\lambda_{\mu\varkappa}\Gamma^\varkappa_{\nu\lambda}. \tag{17.76}$$

Такая функция Лагранжа будет действительно давать инвариантное действие, если величина $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ является скаляром относительно произвольных координатных преобразований. Необходимый для этого закон преобразования величины $R_{\mu\nu}(x)$ как ковариантного тензора должен следовать из закона преобразования трехзначкового символа $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$. Последний должен быть похожим на закон преобразования тензора третьего ранга, но полностью совпадать с ним не может, поскольку преобразование (17.45) в приближении слабого поля содержит вторые производные по координатам. Соответствующее обобщение дается формулой

$$\overline{\Gamma}^{\varkappa}_{\mu\nu}(\overline{x})\,\overline{\partial}_{\varkappa}x^{\lambda}=\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}(x)\,\overline{\partial}_{\mu}x^{\rho}\,\overline{\partial}_{\nu}x^{\sigma}+\overline{\partial}_{\mu}\overline{\partial}_{\nu}x^{\lambda}. \qquad (17.77)$$

Этот закон преобразования позволяет определить ковариантную производную по координатам от контравариантных векторов первого ранга:

$$\nabla_{\nu}V^{\mu}(x)=(\partial_{\nu}+\Gamma_{\nu}(x))^{\mu}_{\lambda}V^{\lambda}(x)=\partial_{\nu}V^{\mu}(x)+\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x)\,V^{\lambda}(x). \qquad (17.78)$$

Все рассуждения упрощаются, если воспользоваться матричной символикой, и тогда получаем

$$[\nabla_{\mu},\nabla_{\nu}]^{\varkappa}_{\lambda}V^{\lambda}=R_{\mu\nu}{}^{\varkappa}{}_{\lambda}V^{\lambda}, \qquad (17.79)$$

где величины

$$R_{\mu\nu}{}^{\varkappa}{}_{\lambda}=\partial_{\mu}\Gamma^{\varkappa}_{\nu\lambda}-\partial_{\nu}\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}+\Gamma^{\varkappa}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}-\Gamma^{\varkappa}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \qquad (17.80)$$

действительно образуют тензор четвертого ранга, который антисимметричен по μ и ν. Теперь становится ясным тензорный характер величины

$$R_{\mu\nu}=R_{\lambda\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu}. \qquad (17.81)$$

Понятие ковариантной производной, совпадающей в случае скаляров с обычной производной, распространяется на ковариантные векторы первого ранга, если потребовать выполнения равенства

$$\partial_{\nu}(V_{1\mu}V^{\mu}_{2})=(\nabla_{\nu}V_{1\mu})\,V^{\mu}_{2}+V_{1\mu}(\nabla_{\nu}V^{\mu}_{2}), \qquad (17.82)$$

откуда

$$\nabla_{\nu}V_{\mu}=\partial_{\nu}V_{\mu}-V_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}. \qquad (17.83)$$

На произвольные тензоры его можно распространить путем обобщения правила дифференцирования произведений. Для примера укажем, что $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$, т. е. произвольное бесконечно малое изменение величины $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$, в действительности преобразуется как тензор и

$$\delta R_{\mu\nu}=[\partial_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}+\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\varkappa}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\delta\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}-\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\nu}]-$$
$$-[\partial_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}-\delta\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\varkappa}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}]=\nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}. \qquad (17.84)$$

Ковариантная производная $g(x)$ определяется с помощью формулы дифференцирования определителя:

$$\nabla_{\lambda}g(x)=g(x)\,g^{\mu\nu}(x)\,\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu}(x)=$$
$$=g(x)\,g^{\mu\nu}(x)\,[\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}(x)-2g_{\mu\varkappa}(x)\,\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\nu}(x)]=$$
$$=\partial_{\lambda}g(x)-2g(x)\,\Gamma^{\nu}_{\lambda\nu}(x), \qquad (17.85)$$

или

$$\nabla_\lambda [-g(x)]^{1/2} = \partial_\lambda [-g(x)]^{1/2} - [-g(x)]^{1/2}\, \Gamma^{\nu}_{\lambda\nu}(x). \qquad (17.86)$$

Простым следствием этого равенства оказывается формула для дивергенции:

$$\nabla_\lambda [(-g(x))^{1/2} V^\lambda(x)] = \partial_\lambda [(-g(x))^{1/2} V^\lambda(x)]. \qquad (17.87)$$

Полученные нами соотношения используются, когда мы применяем принцип стационарного действия к вариациям величины $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, входящей в выражение для $\mathcal{L}(g, \Gamma)$. Приравняв нулю коэффициент при $\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ в выражении для δW, будем иметь [через $g^{\mu\nu}$ здесь обозначено $g^{\mu\nu}(x)$]:

$$\nabla_\lambda [(-g)^{1/2} g^{\mu\nu}] - \delta^\nu_\lambda \nabla_\varkappa [(-g)^{1/2} g^{\mu\varkappa}] = 0, \qquad (17.88)$$

откуда

$$\nabla_\lambda [(-g)^{1/2} g^{\mu\nu}] = 0. \qquad (17.89)$$

Из равенства (17.89) последовательно получаем равенство нулю ковариантных производных величин $g(x)$, $g^{\mu\nu}(x)$ и $g_{\mu\nu}(x)$. Последнее утверждение

$$0 = \nabla_\lambda g_{\mu\nu}(x) = \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) - g_{\varkappa\nu}(x)\, \Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}(x) - g_{\mu\varkappa}(x)\, \Gamma^\varkappa_{\lambda\nu}(x) \qquad (17.90)$$

приводит к явному выражению

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) = g^{\lambda\varkappa}(x)\, \frac{1}{2} [\partial_\mu g_{\nu\varkappa}(x) + \partial_\nu g_{\mu\varkappa}(x) - \partial_\varkappa g_{\mu\nu}(x)], \qquad (17.91)$$

которое представляет собой выражение (17.12), обобщенное на случай сильного поля. Вариант уравнений (17.90), соответствующий случаю слабого поля, мы имеем в формуле (17.29). Как в этом можно убедиться непосредственной проверкой, из равенства нулю ковариантной производной величины $g(x)$ вытекает, согласно формуле (17.86), соотношение

$$\Gamma^\nu_{\lambda\nu}(x) = \partial_\lambda \ln [-g(x)]^{1/2}, \qquad (17.92)$$

обобщающее соотношение (17.13). Оно гарантирует, что величина $R_{\mu\nu}$, определяющаяся равенством (17.76), будет симметричным тензором.

Варьирование по $g^{\mu\nu}(x)$ в чисто гравитационном вкладе в действие дает

$$\delta_g \int (dx)\, \mathcal{L}(g(x), \Gamma(x)) = \frac{1}{2\varkappa} \int (dx)\, [-g(x)]^{1/2}\, \delta g^{\mu\nu}(x)\, G_{\mu\nu}(x), \qquad (17.93)$$

где

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \qquad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \qquad (17.94)$$

причем мы воспользовались свойством определителя

$$\delta(-g)^{1/2} = \frac{1}{2} (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (-g)^{1/2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \qquad (17.95)$$

Тензор $G_{\mu\nu}$ удовлетворяет определенному дифференциальному тождеству, которое следует из инвариантности гравитационного члена действия относительно координатных преобразований. Прежде всего укажем закон бесконечно малого изменения $g_{\mu\nu}(x)$, аналогичный соотношению (17.63):

$$\begin{aligned}\delta g_{\mu\nu} &= \delta x^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + g_{\varkappa\nu}\partial_\mu \delta x^\varkappa + g_{\mu\varkappa}\partial_\nu \delta x^\varkappa = \\ &= \partial_\mu (g_{\varkappa\nu}\delta x^\varkappa) + \partial_\nu (g_{\mu\varkappa}\delta x^\varkappa) - 2\Gamma^\varkappa_{\mu\nu} g_{\varkappa\lambda}\delta x^\lambda = \\ &= \nabla_\mu (g_{\varkappa\nu}\delta x^\varkappa) + \nabla_\nu (g_{\mu\varkappa}\delta x^\varkappa),\end{aligned} \tag{17.96}$$

который обобщает калибровочное преобразование (17.45) в случае слабого поля. Написав равенство

$$\delta g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = -\delta g_{\mu\nu} G^{\mu\nu}, \tag{17.97}$$

где

$$G^{\mu\nu} = g^{\mu\varkappa} G_{\varkappa\lambda} g^{\lambda\nu}, \tag{17.98}$$

мы, исходя из инвариантности действия, заключаем, что

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu}(x) = 0. \tag{17.99}$$

Варьированием по $g^{\mu\nu}(x)$ той части действия, в которой содержится материя, определяется тензор $t_{\mu\nu}(x)$ — обобщенный тензор натяжений:

$$\delta_g \int (dx)\, \mathscr{L}(\varphi, g) = -\frac{1}{2}\int (dx)\,(-g)^{1/2}\,\delta g^{\mu\nu} t_{\mu\nu}. \tag{17.100}$$

Из формы функции Лагранжа (17.71) явствует, что

$$t_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \varphi(x)\,\partial_\nu \varphi(x) + g_{\mu\nu}(x)\,[-g(x)]^{-1/2}\,\mathscr{L}(\varphi(x), g(x)). \tag{17.101}$$

Отметим также равенство, обобщающее равенство (7.9) в областях вне источников:

$$t = g^{\mu\nu} t_{\mu\nu} = -m^2\varphi^2 - (-g)^{-1/2}\,\partial_\mu \left[(-g)^{1/2} g^{\mu\nu}\partial_\nu \frac{1}{2}\varphi^2\right]. \tag{17.102}$$

Если обратиться к свойству стационарности при варьировании величины φ, то, как и прежде, инвариантность рассматриваемого члена действия относительно координатных преобразований будет приводить к дифференциальному соотношению

$$\nabla_\mu t^{\mu\nu}(x) = 0. \tag{17.103}$$

Этот обобщенный локальный закон сохранения можно представить и в другой форме:

$$\partial_\mu [(-g)^{1/2} t^{\mu\nu}] = -(-g)^{1/2}\,\Gamma^\nu_{\varkappa\lambda} t^{\varkappa\lambda}. \tag{17.104}$$

Полевые уравнения, получаемые путем варьирования полного действия

$$W = \int (dx)\,[\mathscr{L}(\varphi, g) + \mathscr{L}(g, \Gamma)] \tag{17.105}$$

по $g^{\mu\nu}$, имеют вид

$$G_{\mu\nu}(x) = \varkappa t_{\mu\nu}(x), \tag{17.106}$$

или

$$R_{\mu\nu}(x) = \varkappa\left[t_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\, t(x)\right]. \tag{17.107}$$

Это уравнения Эйнштейна для гравитационного поля. Условие (17.103) для дивергенции тензора натяжений возникает и здесь — теперь как тождество, диктуемое структурой уравнений гравитационного поля.

Частицы со спином 0, рассматривавшиеся в качестве модели гравитирующей материи, сравнительно просто заменить частицами с каким-то другим целочисленным спином. Весьма специальный, но интересный пример такого рода — фотоны. Функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{17.108}$$

можно сразу же обобщить так, чтобы она была инвариантной относительно произвольных координатных преобразований и в то же время сохраняла свою электромагнитную калибровочную инвариантность:

$$\mathcal{L}(A_\mu, F^{\mu\nu}, g) = (-g)^{1/2}\left[-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}g_{\mu\varkappa}g_{\nu\lambda}F^{\varkappa\lambda}\right]. \tag{17.109}$$

В точках, где нет электромагнитных источников, соответствующие этому полевые уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= g_{\mu\varkappa}(x)\, g_{\nu\lambda}(x)\, F^{\varkappa\lambda}(x) = \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = \\ &= \nabla_\mu A_\nu(x) - \nabla_\nu A_\mu(x) \end{aligned} \tag{17.110}$$

и

$$\partial_\nu\left[(-g(x))^{1/2}F^{\mu\nu}(x)\right] = [-g(x)]^{1/2}\,\nabla_\nu F^{\mu\nu}(x) = 0. \tag{17.111}$$

Тензор натяжений, который получается путем варьирования функции Лагранжа (17.109) по $g_{\mu\nu}(x)$, дается выражением

$$t^{\mu\nu}(x) = F^{\mu\lambda}(x)\, F^{\nu}{}_{\lambda}(x) - g^{\mu\nu}(x)\,\frac{1}{4}F^{\varkappa\lambda}(x)\, F_{\varkappa\lambda}(x), \tag{17.112}$$

где все контравариантные и ковариантные индексы связываются друг с другом посредством тензора $g_{\mu\nu}(x)$. Небесполезно вывести уравнения другим способом, переопределяя $F^{\mu\nu}$ так, чтобы это поле включало множитель $(-g)^{1/2}$. В результате мы придем к функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}(-g)^{-1/2}g_{\mu\varkappa}g_{\nu\lambda}F^{\varkappa\lambda}, \tag{17.113}$$

в которой тензор $g_{\mu\nu}$ входит только в последнее слагаемое. В итоге снова получается тензор натяжений (17.112), причем в соответствии с изменением смысла $F^{\mu\nu}$ он делится на $(-g)$. Однако теперь мы можем очень просто усмотреть одно дополнительное обстоятельство. Комбинация $(-g)^{-1/2}\, g_{\mu\varkappa}g_{\nu\lambda}$ представляет собой однородную функцию нулевой степени по компонентам $g_{\mu\nu}(x)$, и поэтому функция Лагранжа (17.113) инвариантна относительно преобразования

$$g_{\mu\nu}(x) \to \lambda(x)\, g_{\mu\nu}(x) \tag{17.114}$$

при произвольном $\lambda(x)$. Это означает, что при бесконечно малом отклонении величины $\lambda(x)$ от единицы

$$\delta_\lambda \int (dx)\, \mathscr{L} = \frac{1}{2} \int (dx)\, (-g)^{1/2}\, t^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \delta\lambda = 0, \tag{17.115}$$

или

$$t(x) = g_{\mu\nu}(x)\, t^{\mu\nu}(x) = 0, \tag{17.116}$$

а это равенство действительно выполняется. Очевидно, что теперь мы имеем дело с обобщением конформных преобразований, которые первоначально вводились путем рассмотрения изотропных растяжений [см. формулу (7.153)]. Попутно заметим, что хотя другое выражение для функции Лагранжа, а именно (17.113), позволило нам выявить конформную инвариантность, можно также пользоваться и функцией Лагранжа (17.109). При этом, чтобы обеспечить инвариантность функции $\mathscr{L}$, нужно скомбинировать конформное преобразование (17.114) с полевыми преобразованиями

$$F^{\mu\nu}(x) \to \lambda(x)^{-2} F^{\mu\nu}(x), \qquad A_\mu(x) \to A_\mu(x). \tag{17.117}$$

Как уже указывалось ранее в связи с формулой (7.168), при проверке на конформную инвариантность следует учитывать кинематический произвол в определении тензора натяжений. Произвол можно отнести и на счет динамики, применяя процедуру, родственную той, которая использовалась при рассмотрении электромагнитного поля [см. формулу (10.63)]. Обращаясь к случаю слабого гравитационного поля, посмотрим, можно ли любой наперед заданный тензор натяжений $t^{\mu\nu}$ заменить тензором [формулы (7.83) — (7.85)]

$$t^{\mu\nu} + \partial_\varkappa \partial_\lambda m^{\mu\nu,\varkappa\lambda}, \tag{17.118}$$

где тензор $m^{\mu\nu,\varkappa\lambda}$ симметричен по μ и ν и по $\varkappa$ и λ, а также удовлетворяет условию

$$m^{\mu\nu,\varkappa\lambda} + m^{\varkappa\nu,\lambda\mu} + m^{\lambda\nu,\mu\varkappa} = 0. \tag{17.119}$$

Добавка к члену функции Лагранжа с $t^{\mu\nu}$ равна

$$m^{\mu\nu\,\varkappa\lambda} \partial_\varkappa \partial_\lambda h_{\mu\nu} = -\frac{1}{3} m^{\mu\nu,\varkappa\lambda} R_{\mu\varkappa\nu\lambda}, \tag{17.120}$$

где величина

$$R_{\mu\varkappa\nu\lambda} = \partial_\mu \partial_\lambda h_{\varkappa\nu} + \partial_\nu \partial_\varkappa h_{\lambda\mu} - \partial_\varkappa \partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h_{\varkappa\lambda} \tag{17.121}$$

получается в силу свойства цикличности (17.119):

$$m^{\mu\nu,\varkappa\lambda}\partial_\varkappa\partial_\lambda h_{\mu\nu} = -m^{\mu\nu,\varkappa\lambda}(\partial_\mu\partial_\lambda h_{\varkappa\nu} + \partial_\nu\partial_\varkappa h_{\lambda\mu}) = \\ = m^{\mu\nu,\varkappa\lambda}\partial_\mu\partial_\nu h_{\varkappa\lambda}. \tag{17.122}$$

Кроме того, из формулы (17.122) следует равенство

$$(m^{\mu\nu,\varkappa\lambda} - m^{\varkappa\lambda,\mu\nu})\,\partial_\varkappa\partial_\lambda h_{\mu\nu} = 0, \tag{17.123}$$

в котором содержится требование симметрии тензора $m^{\mu\nu,\varkappa\lambda}$ по двум парам индексов; мы его уже получали в различных частных случаях [формулы (7.88), (7.111), (7.137)].

У четырехзначкового объекта $R_{\mu\varkappa\nu\lambda}$ много свойств симметрии. Он антисимметричен по μ и $\varkappa$ и по ν и λ, а кроме того, симметричен по двум парам — $\mu\varkappa$ и $\nu\lambda$. Сумма трех членов с циклическими перестановками, не затрагивающими один индекс, равна нулю. Как подсказывают сами обозначения, $R_{\mu\varkappa\nu\lambda}$ — это соответствующий слабому полю вариант тензора, который получается из тензора (17.80):

$$R_{\mu\varkappa\nu\lambda} = g_{\nu\sigma}\,[\partial_\mu\Gamma^\sigma_{\varkappa\lambda} - \partial_\varkappa\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\varkappa\lambda} - \Gamma^\sigma_{\varkappa\rho}\Gamma^\rho_{\mu\lambda}] = \\ = \frac{1}{2}\,[\partial_\mu\partial_\lambda g_{\varkappa\nu} + \partial_\nu\partial_\varkappa g_{\lambda\mu} - \partial_\varkappa\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu g_{\varkappa\lambda}] - \\ - g_{\rho\sigma}(\Gamma^\rho_{\varkappa\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\sigma_{\varkappa\nu}) \tag{17.124}$$

и который также обладает всеми указанными свойствами симметрии.

Из всего изложенного мы заключаем, что возможные добавочные члены в функции Лагранжа материи имеют вид

$$-\frac{1}{3}\,[-g(x)]^{-1/2}\,m^{\mu\nu,\varkappa\lambda}(x)\,R_{\mu\varkappa\nu\lambda}(x), \tag{17.125}$$

где $m^{\mu\nu,\varkappa\lambda}$ — тензор, соответствующий полю материи и гравитационному полю, который имеет указанные ранее свойства симметрии. Приведем в качестве иллюстрации выражение для этого тензора в случае спина 0, которое получается путем обобщения выражения (7.88):

$$m^{\mu\nu,\varkappa\lambda}(x) = \\ = \left[g^{\mu\nu}(x)\,g^{\varkappa\lambda}(x) - \frac{1}{2}\,g^{\varkappa\nu}(x)\,g^{\mu\lambda}(x) - \frac{1}{2}\,g^{\varkappa\mu}(x)\,g^{\lambda\nu}(x)\right]\frac{1}{6}\,\varphi(x)^2. \tag{17.126}$$

Для определенности мы положили соответствующий коэффициент равным $^1/_6$, с тем чтобы новый тензор натяжений, имеющий в отсутствие гравитационного поля вид

$$t_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}(\partial^\lambda\varphi\partial_\lambda\varphi + m^2\varphi^2) - \frac{1}{6}\,(\partial_\mu\partial_\nu\varphi^2 - g_{\mu\nu}\partial^2\varphi^2),$$

(17.127

обладал свойством

$$t = -m^2\varphi^2 \tag{17.128}$$

и обращался в нуль при $m = 0$. Если в формулу (17.125) подставить выражение (17.126), то там появится комбинация

$$R_{\mu\varkappa\nu\lambda}g^{\mu\nu}g^{\varkappa\lambda} = R_{\mu\varkappa}{}^{\mu}{}_{\lambda}g^{\varkappa\lambda} = R \tag{17.129}$$

и модифицированная функция Лагранжа в случае спина 0 будет такой:

$$\mathscr{L}(\varphi, g) = -(-g)^{1/2}\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\varphi g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi + \left(m^2 + \frac{1}{6}R\right)\varphi^2\right]. \tag{17.130}$$

Интересно убедиться в том, что рассматриваемая система при $m = 0$ конформно-инвариантна в смысле преобразования (17.114), дополненного соответствующим законом изменения $\varphi(x)$. Сразу же видно, что если $\lambda(x)$ — константа, то таким законом изменения может служить преобразование

$$\varphi(x) \to [\lambda(x)]^{-1/2}\varphi(x). \tag{17.131}$$

Чтобы завершить проверку, достаточно рассмотреть $\delta\lambda(x)$ — бесконечно малую вариацию величины $\lambda(x)$ в окрестности единицы. В таком случае

$$\delta_\lambda\mathscr{L}(\varphi, g) = \frac{1}{4}(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi^2\partial_\mu\delta\lambda - \frac{1}{12}\varphi^2(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\delta_\lambda R_{\mu\nu}, \tag{17.132}$$

где при вычислении комбинации

$$(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \partial_\varkappa[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\varkappa}_{\mu\nu}] - \partial_\nu[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\varkappa}_{\mu\varkappa}] \tag{17.133}$$

следует учитывать, что

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta\lambda g_{\mu\nu}. \tag{17.134}$$

Входящие сюда величины таковы:

$$\delta\Gamma^{\varkappa}_{\mu\varkappa} = \delta[\partial_\mu \ln(-g)^{1/2}] = 2\partial_\mu\delta\lambda \tag{17.135}$$

и

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\varkappa}_{\mu\nu} = -g^{\varkappa\mu}\partial_\mu\delta\lambda, \tag{17.136}$$

что дает

$$\delta_\lambda\mathscr{L} = \frac{1}{4}(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi^2\partial_\mu\delta\lambda + \frac{1}{4}\varphi^2\partial_\nu[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\delta\lambda] = $$
$$= \partial_\nu\left[\frac{1}{4}\varphi^2(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\delta\lambda\right], \tag{17.137}$$

гарантируя тем самым инвариантность действия при $m = 0$ относительно группы конформных преобразований.

Тут меня прерывает вопросом Гарольд.

Гарольд. Вы так много уделяете внимания конформным преобразованиям в связи с тем, что принято называть общей теорией относительности, что я начинаю подозревать, не намереваетесь ли

Вы переложить на язык теории источников некоторые последние попытки расширить рамки общей теории относительности. Я имею в виду, в частности, идеи Йордана и Бранса — Дике, а также аналогичные попытки Дике доказать наличие расхождения между остаточной прецессией перигелия Меркурия и выводами теории Эйнштейна. Гипотеза Бранса — Дике основывается на принципе Маха, который, хотя и выглядит весьма заманчиво, все же лишен непосредственного физического содержания. Можно ли указать какие-нибудь возможности модифицировать эйнштейновскую теорию, исходя из несколько более содержательных физических предпосылок?

Швингер. Это действительно входит в мои намерения.

Начнем с вопроса, можно ли путем некоторого обобщения теории сделать конформную инвариантность точным свойством симметрии. Несомненно, массовый член в формуле (17.130) можно умножить на $\sigma(x)^2$, где $\sigma(x)$ — некоторое новое скалярное поле, которое изменяется при конформных преобразованиях по закону

$$\sigma(x) \to [\lambda(x)]^{-1/2}\, \sigma(x). \tag{17.138}$$

Кроме того, можно было бы скомпенсировать также изменение гравитационной функции Лагранжа (17.75) при конформном преобразовании, умножив ее на $\sigma(x)^2$, по крайней мере при постоянной функции $\lambda(x)$, оставляющей $R_{\mu\nu}$ неизменным. Наконец, если заметить, что произведение $(-g)^{1/2} R\sigma^2$ есть часть конформно-инвариантной функции Лагранжа (17.130) (при $m = 0$ и $\varphi \to \sigma$), то обобщение на произвольные $\lambda(x)$, приводящее к полной конформной инвариантности, становится совершенно очевидным:

$$\begin{gathered}\mathscr{L}(g, \sigma, \varphi) = \frac{1}{2\varkappa}(-g)^{1/2}\left[R\sigma^2 + 6\partial_\mu \sigma g^{\mu\nu}\partial_\nu \sigma\right] - \\ - (-g)^{1/2}\frac{1}{2}\left[\partial_\mu \varphi g^{\mu\nu}\partial_\nu \varphi + \left(m^2\sigma^2 + \frac{1}{6}R\right)\varphi^2\right],\end{gathered} \tag{17.139}$$

где тензор $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ выражается через тензор $g_{\mu\nu}$ и его производные по тем же формулам, что и раньше. Может показаться, что мы ввели новую безмассовую частицу со спином 0, описываемую скалярным полем $\sigma(x)$. Но это не совсем так. Если положить в случае слабого поля

$$\sigma(x) \approx 1 + \chi(x), \tag{17.140}$$

то главные по χ члены в функции Лагранжа будут равны

$$\frac{3}{\varkappa}\partial^\mu \chi \partial_\mu \chi + \chi\left(\frac{R}{\varkappa} - m^2\varphi^2\right). \tag{17.141}$$

Член с производными χ имеет верный знак. Кроме того, согласно формуле (17.107), источник поля χ, пропорциональный $R + \varkappa t$, равен нулю. Все это свидетельствует о том, что поле χ не описывает физического возбуждения. Его можно оттрансформировать, введя конформное преобразование с коэффициентом $[\lambda(x)]^{1/2}$, равным $\sigma(x)$, которое будет сводить последнюю функцию к 1.

Тем не менее конформно-инвариантная схема оказывается полезной, указывая нам некое новое направление. Как мы уже видели в физике частиц высоких энергий, природа не всегда следует тому, что нам по нашему неведению хотелось бы считать самой симметричной и самой гармоничной возможностью. Может быть, формальная инвариантность относительно конформных преобразований нарушается, причем таким образом, что безмассовая частица с нулевым спином действительно существует. Несмотря на принцип нелокальности для безмассовых частиц, исходя из экспериментальных данных нельзя будет оспаривать наличие такой частицы, если она взаимодействует с веществом гораздо слабее, чем гравитон. Чтобы учесть эту гипотезу, мы должны включить в функцию Лагранжа дополнительный вклад, который в итоге приводил бы к обращению знака члена с производными σ и приписывал бы ему произвольный коэффициент. Но этого недостаточно, ибо поле σ все еще не будет иметь источника,— необходимо разрушить комбинацию $R + \varkappa t$. Это можно сделать как угодно, но практические возможности иллюстрируются следующими двумя элементарными альтернативами: либо выбрасывается множитель σ^2 при m^2, либо выбрасывается множитель σ^2 при R. В первом случае мы получаем некий вариант теории Бранса — Дике. Во втором мы приходим к тем же самым практическим выводам, но все оказывается несколько проще. Рассмотрим второй случай.

Модифицированная функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(g, \sigma, \varphi) = \frac{1+\alpha}{2\varkappa}(-g)^{1/2}\left[R - \frac{2}{\alpha}\partial_\mu\sigma g^{\mu\nu}\partial_\nu\sigma\right] - \\ -(-g)^{1/2}\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\varphi g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi + \left(m^2\sigma^2 + \frac{1}{6}R\right)\varphi^2\right], \quad (17.142)$$

где α — новая эмпирическая константа ($\alpha > 0$). Множитель $1 + \alpha$ введен для того, чтобы сохранить первоначальный физический смысл $\varkappa$. Эта функция Лагранжа приводит к следующим полевым уравнениям:

$$G^{\mu\nu} = \frac{\varkappa}{1+\alpha} t^{\mu\nu}, \quad (17.143)$$

$$-(-g)^{1/2}\partial_\mu[(-g)^{1/2} g^{\mu\nu}\partial_\nu\sigma^2] = \frac{\alpha\varkappa}{1+\alpha} t, \quad (17.144)$$

где $t_{\mu\nu}$ — полный тензор натяжений, который получается сложением вклада материи с тензором натяжений поля σ:

$$t_{\mu\nu} = t_{m\mu\nu} + \frac{2}{\alpha}\frac{1+\alpha}{\varkappa}\left(\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\varkappa\sigma g^{\varkappa\lambda}\partial_\lambda\sigma\right) \\ t = t_m - \frac{2}{\alpha}\frac{1+\alpha}{\varkappa}\partial_\varkappa\sigma g^{\varkappa\lambda}\partial_\lambda\sigma. \quad (17.145)$$

Вид уравнений (17.143) — (17.145) не зависит от модели, используемой для материи, при условии, что часть функции Лагранжа, отвечающая материи, сделана конформно-инвариантной благодаря локальному введению поля σ, откуда вытекают соотношения

$$\delta_\lambda \int (dx)\, \mathscr{L}_m = \int (dx) \left[\frac{1}{2} (-g)^{1/2} t_m \delta\lambda - \frac{\partial \mathscr{L}_m}{\partial \sigma} \frac{1}{2} \sigma \delta\lambda \right] = 0 \qquad (17.146)$$

и

$$\sigma \frac{\partial \mathscr{L}_m}{\partial \sigma} = (-g)^{1/2} t_m. \qquad (17.147)$$

Полевое уравнение (17.144) сначала появляется в виде

$$-(-g)^{-1/2} \partial_\mu \left[(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \sigma \right] = \frac{1}{2} \frac{\alpha\varkappa}{1+\alpha} t_m \frac{1}{\sigma}, \qquad (17.148)$$

а затем его переписывают в форме (17.144), исключив t_m. Его можно вывести и прямым путем, применив принцип действия к изменению неинвариантной функции Лагранжа при конформном преобразовании:

$$\delta_\lambda \int (dx)\, \mathscr{L} = \frac{1+\alpha}{2\varkappa} \int (dx) (-g)^{1/2} \left[R\delta\lambda + \frac{1}{\alpha} g^{\mu\nu} \partial_\nu \sigma^2 \partial_\mu \delta\lambda \right] = 0, \quad (17.149)$$

что дает

$$-(-g)^{-1/2} \partial_\mu \left[(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \sigma^2 \right] = -\alpha R = \frac{\alpha\varkappa}{1+\alpha} t. \qquad (17.150)$$

Самый быстрый способ извлечь практические следствия из модифицированной теории — обратиться к методам теории источников, изложенным в гл. 2, § 4 и дополненным теперь членом, который отвечает частицам со спином 0. Источники частиц со спином (спиральностью) 2 и 0 нормируются как

$$\left(\frac{\varkappa}{1+\alpha} \right)^{1/2} T^{\mu\nu} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\frac{1}{2}\alpha\varkappa}{1+\alpha} \right)^{1/2} T,$$

причем второй из них относится к полю $^1/_2\, (\sigma^2 - 1)$. Это дает

$$W = \frac{1}{2} \frac{\varkappa}{1+\alpha} \int (dx)(dx') \Big[T^{\mu\nu}(x) D_+(x-x') T_{\mu\nu}(x') -$$
$$- \frac{1}{2} T(x) D_+(x-x') T(x') + \frac{1}{2} \alpha T(x) D_+(x-x') T(x') \Big], \quad (17.151)$$

и выражение для энергии взаимодействия с неподвижным телом массы M, заменяющее выражения (4.36) и (4.37) из гл. 2, будет иметь вид

$$E_{\text{взаим}}(x^0) = -\frac{\varkappa}{8\pi} M \int (d\mathbf{x}) \frac{1}{|\mathbf{x}|} \left[t^{00}(\mathbf{x}, x^0) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} t_{kk}(\mathbf{x}, x^0) \right]. \qquad (17.152)$$

При условии $t_{kk} \ll t^{00}$ снова получается ньютоновская потенциальная энергия вместе с гравитационным красным смещением.

Для света, когда $t_{kk} = t^{00}$, отклонение луча и замедление скорости уменьшаются в $1/(1+\alpha)$ раз. При расчете прецессии перигелия поправочный множитель $1+(2T/m)$ у кинетической энергии теперь заменяется множителем $1+[(1-\alpha)/(1+\alpha)]\,(2T/m)$, что дает

$$V_{\text{эфф}} = V - \left(1 + 2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\left(\frac{V^2}{m}\right), \qquad (17.153)$$

и прецессия перигелия уменьшается в $(1 - {}^1/_3\alpha)/(1+\alpha)$ раз. Поправочные коэффициенты обычно представляют в следующей форме:

$$\begin{aligned} &\text{световые явления:} && 1-\frac{\alpha}{1+\alpha}, \\ &\text{прецессия перигелия:} && 1-\frac{4}{3}\frac{\alpha}{1+\alpha}. \end{aligned} \qquad (17.154)$$

Когда писалась эта книга, измерения показывали, что запаздывание радиолокационного сигнала, отраженного от Венеры, составляет $0{,}9 \pm 0{,}2$ от величины, предсказываемой тензорной (эйнштейновской) теорией. Это значит, что параметр α лежит в пределах $0{,}1 \pm 0{,}2$. Утверждалось также, что 8% прецессии перигелия Меркурия можно приписать квадрупольному моменту солнечной массы, а остальные 92% относились на счет скалярно-тензорной модификации теории Эйнштейна, что дает

$$\alpha = 0{,}06. \qquad (17.155)$$

До тех пор, пока не будет независимым путем доказано наличие квадрупольного момента у Солнца (может быть, в результате дальнейших наблюдений за движением астероида Икаруса), приходится считать, что вопрос о существовании слабо взаимодействующей безмассовой частицы со спином 0 остается открытым.

Теперь, когда мы построили скалярно-тензорную теорию гравитации, не обращаясь к принципу Маха, целесообразно, по-видимому, сказать несколько слов об этой космологической гипотезе. С точки зрения теории источников она весьма естественна, ибо утверждает, что разложением

$$g_{\mu\nu}(x) \approx g_{\mu\nu} + 2h_{\mu\nu}(x), \qquad \sigma(x) \approx 1 + \chi(x) \qquad (17.156)$$

устанавливается связь между полями поблизости от источников — $2h_{\mu\nu}(x)$, $\chi(x)$ — и полями на очень больших расстояниях от источников — $g_{\mu\nu}$, 1. Чтобы извлечь качественные выводы из такой идеи, не пользуясь приближением слабого поля во всем космологическом пространстве, мы рассмотрим усредненный случай, когда единственные масштабы для полей и источников задаются «массой Вселенной» M и «радиусом Вселенной» R. Это находит свое выражение в соотношениях

$$g_{\mu\nu}(x)=\gamma_{\mu\nu}\left(\frac{x}{R}\right), \qquad \sigma(x)=s\left(\frac{x}{R}\right),$$
$$t_{\mu\nu}(x)=\frac{M}{R^3}\tau_{\mu\nu}\left(\frac{x}{R}\right), \qquad t(x)=\frac{M}{R^3}\tau\left(\frac{x}{R}\right), \tag{17.157}$$

где все функции $\gamma_{\mu\nu}$, s, $\tau_{\mu\nu}$ и τ по порядку величины в логарифмическом масштабе равны единице. В таком случае, выделив в разных частях двух полевых уравнений (17.143) и (17.144) только скалярные множители, мы получим

$$\frac{1}{R^2}\sim\frac{\varkappa}{1+\alpha}\frac{M}{R^3}, \qquad \frac{1}{R^2}\sim\frac{\alpha\varkappa}{1+\alpha}\frac{M}{R^3}. \tag{17.158}$$

Отсюда вытекают следующие выводы:

$$\alpha\sim 1, \tag{17.159}$$

что на логарифмической шкале согласуется со значением $\alpha = 0{,}6\cdot 10^{-1}$, и

$$\frac{\varkappa M}{R}\sim 1. \tag{17.160}$$

Последний результат соответствует хорошо известной эмпирической связи между общепринятыми порядками величин: $R\sim 10^{28}$ см, $M\sim 10^{54}$ г $\sim 10^{91}$ см$^{-1}$ и гравитационной постоянной $\varkappa\sim 10^{-64}$ см^2 [формула (4.40) из гл. 2]. Если смотреть на это соотношение как на характерное для принципа Маха, то в рамках теории источников нельзя будет говорить, что при введении скалярного поля ситуация качественно изменяется, ибо соотношение (17.160) может найти место и в чисто тензорной теории.

Предположение о том, что величина α существенно ограничивается совместным решением двух полевых уравнений, не подтверждается полностью исследованием самой элементарной модели. Для ее описания мы (впервые) воспользуемся геометрическим языком, охарактеризовав пространство как однородное и изотропное и считая при этом трехмерное подпространство плоским. Это одна из моделей Фридмана:

$$-g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu = dt^2 - S(t)^2\,(dx_k)^2. \tag{17.161}$$

Чтобы согласовать зависимость скалярного поля с чисто временной зависимостью тензорного поля, примем, что оно также является функцией только времени — $\sigma(t)$. Если считать, что тензор натяжений материи имеет лишь энергетическую компоненту $t_{00} = \rho_m$, то из полевых уравнений будет следовать, что

$$3\,\frac{\dot S^2}{S^2}=\frac{1}{\alpha}\dot\sigma^2+\frac{\varkappa}{1+\alpha}\rho_m,$$
$$-2\,\frac{\ddot S}{S}-\frac{\dot S^2}{S}=\frac{1}{\alpha}\dot\sigma^2, \tag{17.162}$$
$$\frac{\sigma}{S^3}\frac{d}{dt}(S^3\dot\sigma)=-\frac{1}{2}\frac{\alpha\varkappa}{1+\alpha}\rho_m,$$

где точка означает дифференцирование по времени. Мы ограничимся выбором частного решения

$$S(t)=\left(\frac{t}{T}\right)^{1/3}, \qquad \sigma(t)=\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/2}\ln\frac{t}{t_0}, \qquad \rho_m=0, \quad (17.163)$$

где момент времени T относится к нашей эре, а

$$t_0=Te^{-(3/\alpha)^{1/2}}. \quad (17.164)$$

Это решение описывает плотность материи, пренебрежимо малую по сравнению с плотностью энергии поля σ, которая в момент времени T дается выражением

$$\rho=\frac{1+\alpha}{3\varkappa T^2}=\frac{3(1+\alpha)}{\varkappa}H^2, \quad (17.165)$$

где H — хаббловская константа расширения:

$$H=\frac{\dot{S}}{S}=\frac{1}{3T}. \quad (17.166)$$

В результате мы приходим к частному случаю соотношения (17.160) при $R\sim T$ и $M\sim\rho T^3$. Если считать, что параметр α весьма мал по сравнению с единицей, то общепринятое значение $H\sim 2{,}4\cdot 10^{-18}$ с$^{-1}$ будет давать $\rho\sim 1{,}0\cdot 10^{-29}$ г/см^3. По всей видимости, упрощение $\rho_m=0$, принятое в рассматриваемой модели, означает, что плотность материи по крайней мере на порядок меньше полученного значения ρ, а это не согласуется с эмпирическими данными. Ощутимая зависимость от α имеет место только в момент времени t_0, начиная с которого законы физики становятся качественно сходными с господствующими ныне законами в том смысле, что $\sigma(t)>0$ при $t>t_0$. Основываясь на том, что эти законы выполнялись на протяжении значительной доли времени существования Вселенной, можно оценить соответствующий верхний предел величины α. Номинальное значение $\alpha=0{,}06$ дает $t_0\sim 10^{-3}\ T$.

Та легкость, с которой нам удалось добиться общей координатной инвариантности функций Лагранжа, отвечающих целым спинам, с помощью надлежащим образом введенного тензора $g_{\mu\nu}(x)$, не распространяется на частицы с полуцелым спином. Чтобы установить характер различия, мы будем следовать изложенной ранее методике слабого поля, взяв для спина $^1/_2$ функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\psi)=-\frac{1}{2}\psi\gamma^0\left[\gamma^\mu\frac{1}{i}\partial_\mu+m\right]\psi \quad (17.167)$$

и тензор натяжений (7.120)

$$t_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\psi\gamma^0\frac{1}{2}\left[\gamma_\mu\frac{1}{i}\partial_\nu+\gamma_\nu\frac{1}{i}\partial_\mu\right]\psi+g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (17.168)$$

что дает

$$\mathcal{L}(\psi, h) = \mathcal{L}(\psi) + t_{\mu\nu}h^{\mu\nu} \approx -(1+h)\,\frac{1}{2}\,\bar{\psi}\gamma^0\left[\gamma_\mu\,(g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})\,\frac{1}{i}\partial_\nu + m\right]\psi. \tag{17.169}$$

В это выражение входит не

$$g^{\mu\nu}(x) \approx g^{\mu\nu} - 2h^{\mu\nu}(x), \tag{17.170}$$

а нечто, напоминающее квадратный корень из этой комбинации:

$$g^{\mu\nu}(x) \approx (g^{\mu\varkappa} - h^{\mu\varkappa}(x))\,g_{\varkappa\lambda}\,(g^{\nu\lambda} - h^{\nu\lambda}(x)). \tag{17.171}$$

Однако необходимые обобщения могут быть выполнены, если мы будем отличать векторный индекс у $g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(x)$, который связан с производной по координатам ∂_ν, от векторного индекса, связанного с матрицами γ_μ. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы впредь для локальной системы координат Минковского, которая сохраняется для описания спина, будем пользоваться латинскими буквами. Учитывая такое различие в обозначениях, напишем обобщенное выражение (17.171) в форме

$$g^{\mu\nu}(x) = e^{\mu a}(x)\,g_{ab}e^{\nu b}(x) = e^{\mu a}(x)\,e^{\nu}_{a}(x), \tag{17.172}$$

которая сохраняется при общих координатных преобразованиях, если

$$\bar{e}^{\mu}_{a}(\bar{x}) = e^{\nu}_{a}(x)\,\partial_\nu \bar{x}^{\mu}. \tag{17.173}$$

Имеет место независимая инвариантность относительно локальных преобразований Лоренца:

$$\bar{e}^{\mu a}(x) = l^{a}{}_{b}(x)\,e^{\mu b}(x), \tag{17.174}$$

где

$$l^{a}{}_{c}(x)\,g_{ab}l^{b}{}_{d}(x) = g_{cd}. \tag{17.175}$$

Вводя определение

$$e_{\mu a}(x) = g_{\mu\nu}(x)\,e^{\nu}_{a}(x), \tag{17.176}$$

мы из соотношения (17.172) заключаем, что

$$e^{\mu a}(x)\,e_{\nu a}(x) = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{17.177}$$

и

$$g_{\mu\nu}(x) = e^{a}_{\mu}(x)\,g_{ab}e^{b}_{\nu}(x) = e^{a}_{\mu}(x)\,e_{\nu a}(x). \tag{17.178}$$

Рассматривая первую форму последнего выражения как матричное произведение, получим следующее соотношение для определителей:

$$-g(x) = [\det e_{\mu a}(x)]^2, \tag{17.179}$$

или

$$[-g(x)]^{1/2} = \det e_{\mu a}(x) \equiv e(x). \tag{17.180}$$

Промежуточное выражение для функции Лагранжа, получаемое путем указанного обобщения формулы (17.169), имеет вид

$$\mathscr{L}(\psi, e) = -e(x)\frac{1}{2}\psi(x)\gamma^0\left[\gamma^a e_a^\nu(x)\frac{1}{i}\partial_\nu + m\right]\psi(x). \quad (17.181)$$

Соответствующее действие будет заведомо инвариатным относительно произвольных координатных преобразований, если поле $\psi(x)$ преобразуется как скаляр, т. е.

$$\bar{\psi}(\bar{x}) = \psi(x). \quad (17.182)$$

Но мы потребуем также инвариатности относительно произвольных локальных преобразований Лоренца; с этой точки зрения выражение (17.181) неприемлемо.

Чтобы выяснить физический смысл последнего требования, рассмотрим закон изменения действия, отвечающего материи, при варьировании величин $e_a^\mu(x)$:

$$\delta_e\int(dx)\,\mathscr{L}(\psi, e) = -\int(dx)\,e(x)\,\delta e_a^\mu(x)\,t_\mu^a(x), \quad (17.183)$$

посредством которого вводится $t_\mu^a(x)$. Инфинитезимальное локальное преобразование Лоренца имеет вид

$$\delta e_a^\mu(x) = \delta\omega_{ab}(x)\,e^{\mu b}(x), \quad (17.184)$$

причем

$$\delta\omega_{ab}(x) = -\delta\omega_{ba}(x). \quad (17.185)$$

Тем самым инвариантность относительно произвольных преобразований этого типа требует, чтобы выполнялось равенство

$$t^{ba}(x) = e^{\mu b}(x)\,t_\mu^a(x) = t^{ab}(x), \quad (17.186)$$

которое приводит также к свойству симметрии

$$t_{\mu\nu}(x) = e_{\mu a}(x)\,e_{\nu b}(x)\,t^{ab}(x) = t_{\nu\mu}(x). \quad (17.187)$$

Тензор, от которого требуется, чтобы он был симметричным, в действительности является тензором натяжений материи. Это следует из выражения

$$\delta e_a^\mu t_\mu^a = \delta e_a^\mu e^{\nu a} t_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta\left(e_a^\mu e^{\nu a}\right)t_{\mu\nu}, \quad (17.188)$$

которое воспроизводит определение тензора натяжений (7.100):

$$\delta_e\int(dx)\,\mathscr{L} = \delta_g\int(dx)\,\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\int(dx)(-g)^{1/2}\,\delta g^{\mu\nu}t_{\mu\nu}. \quad (17.189)$$

Функция $\psi(x)$ при локальном преобразовании Лоренца (17.174) изменяется по закону

$$\bar{\psi}(x) = L(l(x))\,\psi(x), \quad (17.190)$$

где

$$L^T\gamma^0 L = \gamma^0, \qquad L^{-1}\gamma^a L = l^a{}_b\gamma^b. \quad (17.191)$$

Локальная инвариантность функции Лагранжа (17.181) нарушается именно в результате действия производных по координатам на $L\,(l\,(x))$. Координатное смещение индуцирует инфинитезимальное преобразование Лоренца и соответствующее ему преобразование поля:

$$l^{a}{}_{b}(x+dx)=l^{a}{}_{c}(x)\,[\delta^{c}_{b}+d\omega^{c}{}_{b}(x)],$$
$$L\,(l\,(x+dx))=L\,(l\,(x))\left[1+\frac{1}{2}\,i\,d\omega_{ab}(x)\,\frac{1}{2}\,\sigma^{ab}\right], \tag{17.192}$$

где

$$d\omega_{ab}=-d\omega_{ba}=l^{c}{}_{a}dl_{cb}, \tag{17.193}$$

и, следовательно,

$$L^{-1}\,\partial_{\mu}L=\frac{1}{4}\,il^{c}{}_{a}\partial_{\mu}l_{cb}\sigma^{ab}. \tag{17.194}$$

Для компенсации этого эффекта производная по координатам в функции Лагранжа заменяется на

$$\partial_{\mu}-\frac{1}{4}\,i\omega_{a\mu b}\sigma^{ab}, \tag{17.195}$$

где $\omega_{a\mu b}\,(x)$ — величина, которая при общих преобразованиях координат ведет себя как ковариантный вектор, а при локальных преобразованиях Лоренца изменяется таким образом, что выполняется соотношение

$$L^{-1}\left(\partial_{\mu}-\frac{1}{4}\,i\bar{\omega}_{a\mu b}\sigma^{ab}\right)L=\partial_{\mu}-\frac{1}{4}\,i\omega_{a\mu b}\sigma^{ab}. \tag{17.196}$$

Требующийся для этого закон преобразования имеет вид

$$\bar{\omega}_{a'\mu b'}l^{a'}{}_{a}\,l^{b'}{}_{b}=\omega_{a\mu b}+l^{c}{}_{a}\partial_{\mu}l_{cb}. \tag{17.197}$$

Фундаментальный смешанный тензор определяется коммутатором

$$\left[\partial_{\mu}-\frac{1}{4}\,i\omega_{a\mu b}(x)\,\sigma^{ab},\ \partial_{\nu}-\frac{1}{4}\,i\omega_{c\nu d}(x)\,\sigma^{cd}\right]=\frac{1}{4}\,iR_{\mu\nu ab}(x)\,\sigma^{ab}. \tag{17.198}$$

Он дается выражением

$$-R_{\mu\nu ab}=\partial_{\mu}\omega_{a\nu b}-\partial_{\nu}\omega_{a\mu b}-\omega_{a\mu}{}^{c}\omega_{c\nu b}+\omega_{a\nu}{}^{c}\omega_{c\mu b} \tag{17.199}$$

и носит характер антисимметричного тензора второго ранга по отношению к общим координатным преобразованиям и антисимметричного тензора второго ранга по отношению к локальным преобразованиям Лоренца. Скаляр относительно преобразований обоих типов определяется формулой

$$e^{\mu a}(x)\,e^{\nu b}(x)\,R_{\mu\nu ab}(x)=R\,(x) \tag{17.200}$$

и служит основой для построения гравитационной функции Лагранжа:

$$2\varkappa\mathscr{L}\,(e,\,\omega)=ee^{\mu a}e^{\nu b}R_{\mu\nu ab}. \tag{17.201}$$

В пределе слабого поля, когда всякое лингвистическое различие между индексами стирается и

$$e^{\mu a}(x) \approx g^{\mu a} - h^{\mu a}(x), \qquad (17.202)$$

эта функция Лагранжа с точностью до дивергентного члена сводится к выражению (17.38).

Применяя принцип стационарного действия к вариациям $\omega_{a\mu b}$ в $\mathcal{L}(e, \omega)$, получаем

$$\partial_\nu [e (e^{\mu a} e^{\nu b} - e^{\mu b} e^{\nu a})] - \omega^a{}_{\nu c} [e (e^{\mu c} e^{\nu b} - e^{\mu b} e^{\nu c})] -$$
$$- \omega^b{}_{\nu c} [e (e^{\mu a} e^{\nu c} - e^{\mu c} e^{\nu a})] = 0. \qquad (17.203)$$

Если ввести величину

$$\Omega_a{}^\mu{}_b = e^\nu_a \partial_\nu e^\mu_b - e^\nu_b \partial_\nu e^\mu_a = -\Omega_b{}^\mu{}_a, \qquad (17.204)$$

которая не является тензором, а также величины

$$\Omega_{abc} = e_{\mu b} \Omega^\mu_{ac}, \qquad \omega_{abc} = e^\mu_a \omega_{a\mu c}, \qquad (17.205)$$

то мы сможем переписать это уравнение в форме

$$\Omega_{abc} + \omega_{acb} - \omega_{cab} + g_{bc}\lambda_a - g_{ab}\lambda_c = 0, \qquad (17.206)$$

где

$$\lambda_a = e^{-1}\, \partial_\nu (e e^\nu_a) - \omega_{ab}{}^b = -(\Omega_{ab}{}^b + \omega_{ab}{}^b),$$

причем здесь использована формула дифференцирования определителя:

$$\partial_\nu e = e e^{\mu a}\, \partial_\nu e_{\mu a}. \qquad (17.208)$$

Свертывая уравнение (17.206) по индексам b и c, мы получаем у λ_a разные множители, откуда следует, что

$$\lambda_a = 0, \qquad (17.209)$$

и уравнение (17.206) приводится к виду

$$\Omega_{abc} = \omega_{cab} - \omega_{acb}, \qquad (17.210)$$

откуда мы снова приходим к равенству $\lambda_a = 0$. Решение последнего уравнения

$$\omega_{abc} = \frac{1}{2} [\Omega_{cab} + \Omega_{bca} - \Omega_{abc}] \qquad (17.211)$$

представляет собой выражение (17.17), обобщенное на случай сильного поля.

Другой характеристике слабого поля [см. формулу (17.27)] соответствует обобщенная величина

$$\Gamma_{abc}(x) = \omega_{abc}(x) - e_{\nu c}(x)\, e^\mu_b(x)\, \partial_\mu e^\nu_a(x) = \Gamma_{bac}(x), \qquad (17.212)$$

в симметрии которой находит свое выражение соотношение (17.210). Дополнительное определение

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \Gamma_{abc} e^{\lambda c} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \qquad (17.213)$$

позволяет нам представить формулу (17.212) в виде

$$\partial_\lambda e_a^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\varkappa} e_a^\varkappa - \omega_{a\lambda b} e^{\nu b} = 0. \qquad (17.214)$$

Умножив это уравнение на $e^{\mu a}$ и осуществив симметризацию по μ и ν, мы исключим член с $\omega_{a\lambda b}$ и получим

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\varkappa} g^{\varkappa\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\varkappa} g^{\mu\varkappa} = 0. \qquad (17.215)$$

Это соотношение есть утверждение о равенстве нулю ковариантной производной тензора $g^{\mu\nu}$, и, следовательно, величины $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ представляют собой величины (17.91), называемые обычно символами Кристоффеля. После этого становится совершенно очевидным, что два объекта, определяющиеся формулами (17.124) и (17.199), связаны равенством

$$R_{\mu\nu\varkappa\lambda} = R_{\mu\nu ab} e^a_\varkappa e^b_\lambda, \qquad (17.216)$$

где в правильности алгебраического знака можно убедиться, перейдя к пределу слабого поля. Таким образом, гравитационные функции Лагранжа $\mathcal{L}(g, \Gamma)$ и $\mathcal{L}(e, \omega)$ тождественны.

Возвращаясь к функции Лагранжа (17.181), отвечающей спину $^1/_2$, подставим в нее обобщенную производную по координатам (17.195), в результате чего получим

$$\mathcal{L}(\psi, e) = -e\frac{1}{2}\psi\gamma^0\left[\gamma^a e_a^\nu\left(-i\partial_\nu - \frac{1}{4}\omega_{b\nu c}\sigma^{bc}\right) + m\right]\psi. \qquad (17.217)$$

Заметим, что здесь полной антикоммутативностью поля выделяется антисимметричная часть матриц $\gamma^0\gamma^a\sigma^{bc}$. Этим исключаются члены с $a = b$ или $a = c$, которые пропорциональны симметричным матрицам $\gamma^0\gamma^a$. В таком случае, поскольку

$$a \neq b,\ c: \qquad \gamma^a\sigma^{bc} = \varepsilon^{abcd} i\gamma_d\gamma_5, \qquad (17.218)$$

мы можем представить функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L}(\psi, e) = -e\frac{1}{2}\psi\gamma^0\left[\gamma^a e_a^\nu \frac{1}{i}\partial_\nu + {}^*\omega^a i\gamma_a\gamma_5 + m\right]\psi, \qquad (17.219)$$

где

$${}^*\omega^d = \frac{1}{4}\varepsilon^{abcd}\omega_{abc}. \qquad (17.220)$$

Обозначение $\mathcal{L}(\psi, e)$ можно было бы расшифровать как $\mathcal{L}(\psi, e, \omega)$. Если добавить такую структуру к гравитационной функции Лагранжа (17.201), в которой независимыми переменными служат e_a^μ и $\omega_{a\nu b}$, то зависимость $\mathcal{L}(\psi, e, \omega)$ от $\omega_{a\nu b}$ приведет к появлению дополнительного члена в формуле (17.203), который будет нарушать свойство симметрии (17.212). Такова естественная формулировка теории. Но мы исключительно из соображений простоты предпочтем рассматривать ω_{abc} как величины, определяющиеся формулой (17.211) и потому не подлежащие переопределению из-за появления ω_{abc} в функции Лагранжа материи. Чтобы прямо получить тензор натяжений $t_{\mu\nu}$, рассмотрим вариацию частного вида

$$\delta e_a^\mu = \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}e_{\nu a}, \tag{17.221}$$

которая согласуется с построением $g^{\mu\nu}$ из e_a^μ и дает

$$\delta_e \int (dx)\,\mathscr{L}(\psi, e) = -\int (dx)\, e\delta e_a^\mu t_\mu^a = -\frac{1}{2}\int (dx)\,(-g)^{1/2}\,\delta g^{\mu\nu}t_{\mu\nu}. \tag{17.222}$$

Несложные выкладки показывают, что

$$\delta^*\omega^d = -\delta g^{\mu\nu}\,\frac{1}{8}\,\varepsilon^{abcd}e_{\mu a}\omega_{b\nu c}, \tag{17.223}$$

и поэтому

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\psi\gamma^0\gamma^a\,\frac{1}{2i}\,(e_{\mu a}\partial_\nu + e_{\nu a}\partial_\mu)\,\psi -$$
$$-\frac{1}{4}\,\varepsilon^{abcd}\,\frac{1}{2}\,\psi\gamma^0 i\gamma_d\gamma_5\psi\,\frac{1}{2}\,(e_{\mu a}\omega_{b\nu c} + e_{\nu a}\omega_{\mu c}) + g_{b\mu\nu}e^{-1}\mathscr{L}, \tag{17.224}$$

где первые два члена можно объединить, если снова ввести спинорную ковариантную производную (17.195).

Скаляр, получающийся из этого тензора, таков:

$$t = -m\,\frac{1}{2}\,\psi\gamma^0\psi + 3e^{-1}\mathscr{L}. \tag{17.225}$$

Его можно упростить, используя полевое уравнение, вытекающее из функции Лагранжа. Но все, что здесь нам требуется, можно получить и прямым путем, применяя принцип действия к полевым вариациям частного вида:

$$\delta\psi\,(x) = -\frac{3}{4}\,\delta\lambda\,(x)\,\psi\,(x). \tag{17.226}$$

При этом изменение члена в действии, отвечающего материи, дается выражением

$$\delta_\lambda \int (dx)\,\mathscr{L}(\psi, e) = -\frac{3}{2}\int (dx)\,\mathscr{L}\delta\lambda\,(x), \tag{17.227}$$

так как благодаря симметрии матриц $\gamma^0\gamma^a$ никакие вклады, содержащие $\partial_\mu\delta\lambda$, не возникают. В результате мы приходим к выводу, что функция Лагранжа обращается в нуль (в точках, где нет источников частиц) и поэтому

$$t = -m\,\frac{1}{2}\,\psi\gamma^0\psi. \tag{17.228}$$

Последнее соображение тесно связано с тем, что путем введения скалярного поля $\sigma\,(x)$ можно построить конформно-инвариантную функцию Лагранжа материи.

Конформные преобразования тетрады векторных полей $e^a_\mu(x)$ имеют вид

$$e^a_\mu(x) \to [\lambda(x)]^{1/2} e^a_\mu(x), \qquad (17.229)$$

или в случае инфинитезимальных преобразований

$$\delta e^a_\mu = \frac{1}{2}\delta\lambda e^a_\mu, \qquad \delta e^\mu_a = -\frac{1}{2}\delta\lambda e^\mu_a \qquad (17.230)$$

и

$$\delta e = 2\delta\lambda e. \qquad (17.231)$$

Отсюда, в частности, следует, что при конформных преобразованиях

$$\delta\omega_{abc} = -\frac{1}{2}\delta\lambda\omega_{abc} + \frac{1}{2}(e^\nu_a g_{bc} - e^\nu_c g_{ab})\,\partial_\nu\delta\lambda \qquad (17.232)$$

и

$$\delta\,{}^*\omega_a = -\frac{1}{2}\delta\lambda\,{}^*\omega_a. \qquad (17.233)$$

Характер изменения функции $\psi(x)$ при конформных преобразованиях уже указан в формуле (17.226). Он таков, что для получения конформно-инвариантной функции Лагранжа достаточно заменить в формуле (17.219) m на $m\sigma$. Пользуясь затем зависимостью $\mathcal{L}(\psi, e, \sigma)$ от σ, мы с учетом формулы (17.147) сразу же получим для скаляра t выражение (17.228), но с заменой m на $m\sigma$.

Не будем поддаваться искушению и распространять проведенный нами анализ на произвольные мультиспинорные поля. Вместо этого обратимся к проблеме гравитационной модели источников частиц и гравитонов, которую мы все откладывали и откладывали. Стоило бы задуматься над тем, как нам удалось зайти так далеко без исследования этого вопроса. Дело в том, что арена, на которой разыгрываются гравитационные явления, ограничивается в основном астрономическими объектами, которые не поддаются нашему экспериментальному контролю. Поэтому источники, которые идеализированно выражают способность экспериментатора изменять изучаемую физическую ситуацию по своему усмотрению, не дают здесь видимой пользы. Концепция гравитационного источника уже выполнила свое первоначальное предназначение, послужив моделью, на основе которой была воздвигнута координатно-инвариантная динамическая теория. Тем не менее следует сделать некоторые замечания, хотя, как ясно из сказанного выше, мы можем ограничиться тем, что рассмотрим источники частиц и гравитонов лишь в условиях слабого гравитационного поля, господствующих в наземных экспериментах. Последующий краткий анализ не обязан быть применимым к экспериментам, которые проводятся на космическом корабле, обращающемся по орбите малого диаметра вокруг быстро вращающейся нейтронной звезды.

Первый вопрос, который мы затронем, уже возникал ранее в случае источников заряженных частиц. Обобщенный закон сохранения тензора натяжений [формулы (17.103) и (17.104)] будет нарушаться внутри источников частиц, если не учесть предшествующего существования энергии и импульса, передаваемых испущенным частицам. Но проблема гравитонного источника не имеет электромагнитной аналогии. Фотоны электрически нейтральны, тогда как гравитоны несут энергию и импульс, которые также должны только передаваться, а не рождаться в источнике. Чтобы обеспечить правильный закон изменения источников заряженных частиц при калибровочных преобразованиях, мы вводили явную зависимость от A_μ. Точно так же и в данном случае на проблему источника можно смотреть как на поиски такой явной зависимости от $g_{\mu\nu}$, которая обеспечивала бы правильный закон изменения всевозможных источников при общих координатных преобразованиях.

Простейшим примером служит скалярный источник $K(x)$, который входит в действие в комбинации

$$\int (dx)\,[-g(x)]^{1/2}\,K(x)\,\varphi(x). \tag{17.234}$$

Мы должны заменить x^μ таким функционалом $x^\mu(x, g)$ от $g_{\mu\nu}$, для которого при общем координатном преобразовании выполнялось бы соотношение

$$x^\mu(\bar{x}, \bar{g}) = x^\mu(x, g), \tag{17.235}$$

ибо тогда равенство

$$\begin{aligned}\int (dx)\,[-\bar{g}(x)]^{1/2}\,K(x(x, \bar{g}))\,\bar{\varphi}(x) &= \\ = \int (d\bar{x})\,[-\bar{g}(\bar{x})]^{1/2}\,K(x(\bar{x}, \bar{g})\,\bar{\varphi}(\bar{x}) &= \\ = \int (dx)\,[-g(x)]^{1/2}\,K(x(x, g))\,\varphi(x)&\end{aligned} \tag{17.236}$$

будет свидетельствовать о наличии требуемой динамической эквивалентности полей $g_{\mu\nu}(x)$, $\varphi(x)$ и $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$, $\bar{\varphi}(x)$. В приближении слабого поля напишем

$$x^\mu(x, g) = x^\mu + X^\mu(h), \tag{17.237}$$

где в силу свойства инвариантности (17.235), сформулированного для инфинитезимальных преобразований ($\bar{x}^\mu = x^\mu - \delta x^\mu$), должно выполняться условие

$$\delta X^\mu(h) = \delta x^\mu. \tag{17.238}$$

Это условие должно быть следствием калибровочного преобразования (17.45). Решение имеет вид

$$\begin{aligned}X^\lambda(h) &= \int (dx')\,(dx'')\,f^\mu(x-x')\,f^\nu(x'-x'')\,\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x'') = \\ &= 2\int (dx')\,f_\nu(x-x')\,h^{\nu\lambda}(x') - \partial^\lambda \int (dx')\,(dx'')\,\times \\ &\times f^\mu(x-x')\,f^\nu(x'-x'')\,h_{\mu\nu}(x''),\end{aligned} \tag{17.239}$$

где $f^{\mu}(x-x')$ — одна из функций известного нам класса, удовлетворяющая уравнению

$$\partial_{\mu} f^{\mu}(x-x') = \delta(x-x'). \tag{17.240}$$

Получаемый теперь тензор натяжений материи, который мы для простоты напишем в отсутствие гравитационного поля, будет сохраняющейся величиной:

$$t^{\mu\nu}_{\text{сохр}}(x) = t^{\mu\nu}(x) + g^{\mu\nu}K(x)\varphi(x) - \\ - \int (dx')\,[f^{\mu}(x-x')\,\partial^{\nu\prime}K(x') + f^{\nu}(x-x')\,\partial^{\mu\prime}K(x')]\,\varphi(x') + \\ + \int (dx')(dx'')\,f^{\mu}(x-x')\,f^{\nu}(x'-x'')\,\partial^{\lambda''}[\varphi(x'')\,\partial''_{\lambda}K(x'')], \tag{17.241}$$

где $t^{\mu\nu}$ — тензор (7.8), удовлетворяющий уравнению

$$\partial_{\mu}(t^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}K\varphi) = \varphi\partial^{\nu}K. \tag{17.242}$$

Возможность испускания гравитонов непосредственно источниками материи становится ясной, если координатно-инвариантное выражение для члена с источником (17.234) написать в случае одногравитонного излучения в виде

$$(dx)\,(1+h)\,\varphi\,(K + X^{\mu}(h)\,\partial_{\mu}K). \tag{17.243}$$

Если считать, что детектирующие источники гравитонов не перекрываются с носителем K, то можно будет воспользоваться уравнениями (17.13) и (17.14) для слабого гравитационного поля в отсутствие источников, в результате чего получим

$$\partial_{\lambda}X^{\lambda} = \int (dx')(dx'')\,f^{\mu}(x-x')\,f^{\nu}(x'-x'')\,\partial''_{\mu}\partial''_{\nu}h(x'') = h(x). \tag{17.244}$$

Это позволяет представить выражение (17.243) в виде

$$\int (dx)\,\varphi\,[K + \partial_{\mu}(X^{\mu}(h)\,K)] = \int (dx)\,K\,[\varphi - X^{\mu}(h)\,\partial_{\mu}\varphi]. \tag{17.245}$$

Можно было бы также, наоборот, исходить из последнего выражения, в котором дополнительный член служит для того, чтобы скомпенсировать изменение $\varphi(x)$ при инфинитезимальных координатных преобразованиях. Аналогичный анализ можно провести и для любого другого типа источников и полей материи, исследуя при этом их трансформационные свойства.

Выражение для той части действия, в которую входит гравитонный источник, в случае слабого поля имеет вид

$$\int (dx)\,T_0^{\mu\nu}(x)\,h_{\mu\nu}(x) \to \int \frac{1}{2}(dx)\,T_0^{\mu\nu}(x)\,g_{\mu\nu}(x), \tag{17.246}$$

где

$$\partial_{\mu}T_0^{\mu\nu}(x) = 0, \tag{17.247}$$

причем правая часть соотношения (17.246) получается путем добавления константы. Нам нужно выразить то физическое свойство, что излучение дополнительного гравитона может сопутствовать как действию источника материи, так и действию источника гравитонов. Математическая задача состоит в том, чтобы с точностью до градиентных членов (калибровочных преобразований), которые не дают вклада в выражение (17.246), скомпенсировать изменение $g_{\mu\nu}(x)$ при инфинитезимальных координатных преобразованиях. Если равенство, выполняющееся с точностью до градиентных членов, обозначать символом $\sim$, то изменение величины $g_{\mu\nu}$ при инфинитезимальных координатных преобразованиях, определяемое формулой (17.96), будет даваться формулой

$$\delta g_{\mu\nu} \sim -2\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} g_{\varkappa\lambda} \delta x^{\varkappa}. \tag{17.248}$$

Далее, применив соотношение (17.45) для слабого поля, получим

$$\delta(g_{\mu\nu} + 2\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} X_{\lambda}) \sim 2(\partial_\mu \partial_\nu \delta x^{\lambda}) X_{\lambda} \sim -[\partial_\mu \delta x^{\lambda} \partial_\nu X_{\lambda} + \\ + \partial_\mu X^{\lambda} \partial_\nu \delta x_{\lambda}] = -\delta[\partial_\mu X^{\lambda} \partial_\nu X_{\lambda}], \tag{17.249}$$

что и дает нам искомое обобщение выражения (17.246):

$$\frac{1}{2} \int (dx)\, T_0^{\mu\nu} [g_{\mu\nu} + 2\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} X_{\lambda} + \partial_\mu X^{\lambda} \partial_\nu X_{\lambda}]. \tag{17.250}$$

Источник $T^{\mu\nu}(x)$, получаемый теперь путем варьирования по $g_{\mu\nu}(x)$, имеет вид

$$T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu} + X^{\lambda} \partial_\lambda T_0^{\mu\nu} - T_0^{\lambda\nu} \partial_\lambda X^{\mu} - T_0^{\mu\lambda} \partial_\lambda X^{\nu} - \\ - \int (dx') [f^{\mu}(x-x') \tau^{\nu}(x') + f^{\nu}(x-x') \tau^{\mu}(x')] + \\ + \int (dx')(dx'') f^{\mu}(x-x') f^{\nu}(x'-x'') \partial''_{\lambda} \tau^{\lambda}(x''), \tag{17.251}$$

где

$$\tau^{\lambda} = (\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta X^{\lambda}) T_0^{\alpha\beta}. \tag{17.252}$$

Тензор $T^{\mu\nu}$ благодаря своей зависимости от гравитационного поля, имеющей требуемую точность, действительно изменяется при инфинитезимальных координатных преобразованиях надлежащим образом, удовлетворяя при этом дивергентному соотношению (17.104). Отметим, наконец, что, как и в случае фотонов, можно избежать рассмотрения дополнительного излучения источниками, принимая некоторую эквивалентную калибровку. Гравитационное условие калибровки, обеспечивающее обращение в в нуль членов с X_{λ}, имеет вид

$$\int (dx')\, f^{\mu}(x-x')\, h^{f}_{\mu\nu}(x') = 0. \tag{17.253}$$

Книга заканчивается кратким диалогом между Гарольдом и и автором.

Гарольд. Неужели это уже конец книги? Ведь Вы ее только-только начали! Осталось множество дополнительных проблем, и я хотел бы посмотреть, как их исследовать на основе теории источников. И потом подумайте, как Вы обрадуете рецензентов, которые любят перечислять все не включенные в книгу вопросы, а не говорить о том, что она действительно содержит.

Швингер. Совершенно верно. Но мы дошли до той точки, с которой начинается переход на следующий динамический уровень. А поскольку книга получилась уже довольно толстой, причем в ней представлены, хотя вряд ли полностью развиты и применены, многие из идей теории источников, мне кажется, что лучше всего положить ее перед читателями как первый том некой серии. Надеюсь, что следующий том будет подготовлен своевременно, чтобы удовлетворить возросшие потребности в более всеобъемлющей Теории Источников.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ю. ШВИНГЕР | **Частицы, источники, поля**

Редактор Е. С. КУРАНСКИЙ. Художник С. А. БЫЧКОВ. Художественный редактор А. Г. АНТОНОВА. Технический редактор Е. Д. КУЗНЕЦОВА. Корректор И. С. СОКОЛОВА.

Сдано в набор 28/VIII 1972 г. Подписано к печати 29/XII 1972 г. Бумага № 1 $60\times90^1/_{16}$=15,75 бум. л. 31,5 печ. л., Уч.-изд. л. 29,15
Изд. № 2/6385. Цена 2 р. 37 к. Зак. 0670.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР». Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного знамени Московская типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9