Julian Schwinger
University of California
at Los Angeles

PARTICLES, SOURCES, and FIELDS

VOLUME II

Addison-Wesley Publishing Company
Advanced Book Program
Reading, Massachusetts
1973

LONDON · AMSTERDAM • DON MILLS, ONTARIO · SYDNEY · TOKYO

Ю. Швингер

ЧАСТИЦЫ | ИСТОЧНИКИ | ПОЛЯ

ТОМ 2

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО КАНД. ФИЗ.-МАТ. НАУК А. И. НАУМОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ. А. М. БРОДСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1976

УДК 539.12+530.145

Книга представляет собой 2-й том трехтомной монографии, в которой выдающийся физик-теоретик Ю. Швингер излагает свой подход к теории элементарных частиц. Во втором томе автор на примере такой сравнительно хорошо изученной динамической теории, как квантовая электродинамика, иллюстрирует особенности своей теории источников, которая, по его мнению, может быть распространена на задачи теории сильных и слабых взаимодействий.

Книга рассчитана на физиков-теоретиков, а также студентов и аспирантов, специализирующихся в области теоретической физики.

Редакция литературы по физике

Ш $\frac{20402-070}{041(01)-76}$ 70—76

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателей книга представляет собой второй том трехтомной монографии, посвященной вопросам квантовой теории поля и теории элементарных частиц. Первый том, вышедший на английском языке в 1970 г., был переведен на русский язык и опубликован в издательстве «Мир» в 1973 г. Третий том в настоящее время еще не вышел из печати.

Рассмотрение центральных для современной физики проблем квантовой теории поля и теории элементарных частиц ведется Швингером с позиций развитого им специального подхода, названного теорией источников и объединяющего элементы стандартной квантовой теории поля и теории S-матрицы. Принципиальные основы данного подхода и используемый в нем формальный аппарат были разобраны в первом томе. Этот том вызвал большой интерес, и его русское издание быстро разошлось. Подобный интерес не оказался неожиданным, поскольку появление каждой книги Швингера — одного из наиболее активно работающих в настоящее время физиков-теоретиков — значительное научное событие.

Второй том посвящен в основном квантовой электродинамике, в развитии которой сам автор сыграл выдающуюся роль. Расчеты квантовоэлектродинамических эффектов сейчас уже прочно вошли в науку — они с высокой степенью точности согласуются с экспериментом и изложены во многих учебниках. На примере такой сравнительно хорошо изученной динамической системы, как квантовая электродинамика, Швингер и иллюстрирует особенности теории источников. Развиваемая при этом своеобразная техника расчета заслуживает внимания в первую очередь в связи с тем, что она, как обещает автор, может быть распространена на задачи теории сильного и слабого взаимодействий. Поэтому посвященный таким задачам последний том будет определяющим для оценки всего направления, развиваемого Швингером в данном издании. Однако логические и расчетные усовершенствования в схеме изложения квантовой электродинамики, содержащиеся во втором томе, представляют несомненный самостоятельный интерес. В частности, здесь можно выделить оригинальное рассмотрение двухчастичной задачи, совместный анализ высокоэнергетических и низкоэнергетических составляющих лэмбовского сдвига, улучшенную трактовку задач позитрония и мюония.

Отметим одну интересную особенность книги. Автор уделяет некоторое внимание истории квантовой электродинамики в ее «героический период» второй половины сороковых — начала пятидесятых годов. Точнее говоря, отмечается главным образом вклад самого автора в эту историю, причем все это делается в своеобразной форме вкрапленного в текст иронического диалога Швингера с воображаемым вдумчивым, хотя и несколько простоватым, читателем.

В конце английского издания второго тома содержится обширный список опечаток, обнаруженных автором в первом томе. Основная их часть представляет собой простые описки, почти неизбежные в книге со столь большим объемом математических выкладок. Эти, а также некоторые не замеченные автором опечатки были в основном исправлены в русском издании первого тома. Однако в процессе издания в нем появились, к сожалению, и новые опечатки. Их список, составленный редактором и переводчиком (не без помощи читателей), приведен в приложениях.

И в заключение еще одно замечание. В книге довольно много перекрестных ссылок и на формулы к данной главе, и на формулы других глав. Ради краткости мы во втором томе придерживаемся следующей системы. Если, например, в гл. 4 автор ссылается на формулу (2.11), то она содержится в § 2 той же главы. Но если написано (3-2.11), то эту формулу следует искать в гл. 3, § 2.

А. М. Бродский

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ТОМУ

Этот второй том был написан за два года и на двух континентах. Значительная его часть была написана в Токио, где я, пользуясь очередным годовым отпуском, предоставленным мне Гарвардским университетом, и дополнительной помощью из Гуггенхеймовского фонда, провел первые восемь месяцев 1970 г. Как-нибудь, когда я не буду занят никакими книгами, я вновь вернусь в Японию с тем, чтобы по-настоящему вкусить ее прелести. Книга завершалась на протяжении 1971—1972 гг., в период моего пребывания в качестве приглашенного профессора в Калифорнийском университете в Лос-Анджелесе.

Данный том почти полностью посвящен квантовой электродинамике, так что по своей тематике он носит ретроспективный характер. Но, концентрируя внимание на такой сравнительно простой динамической ситуации, мы имеем целью изыскание и разработку путей и методов, которые были бы пригодными и в области сильного и слабого взаимодействий. И мы исходим из того, что квантовая электродинамика новых поколений будет представлять собой некое замкнутое развитие теории источников с ее большими концептуальными и вычислительными упрощениями Пишущим об этом предмете не придется более совмещать восторженные высказывания о точности количественных выводов теории с бормотанием о ее неудовлетворительном концептуальном обосновании.

Одно-два слова нужно, пожалуй, сказать о небольших отступлениях исторического характера, которые иногда появляются на последующих страницах. Это отнюдь не заявки на приоритет. Теперь, когда прошло столько лет? Мне просто хотелось зафиксировать отдельные моменты своих собственных воспоминаний о разного рода событиях, которые вряд ли могут быть почерпнуты из какого-либо другого источника.

Требует пояснения также один пункт, касающийся плана изложения (или его отсутствия). Иногда к тому или иному вопросу, с которым, казалось бы, уже покончено, я возвращаюсь вновь с тем, чтобы некоторые его стороны проанализировать более подробно. Это соответствует истории развития данной темы, в ходе которого разные тонкости выяснялись лишь спустя некоторое время. Единственная альтернатива такому плану изложения — это переписывать различные разделы по достижении большей ясности. Но, как показал мне многократный опыт, встав на путь постоянных переделок, мы не придем ни к какой книге вообще, а потому такая альтернатива была мною отвергнута.

В заключение считаю долгом еще раз поблагодарить талантливых и любящих свое дело машинисток из Гарвардского и Калифорнийского университетов С. Уейдженсил и Р. Бона.

Ю. Швингер

Глава 4 | ЭЛЕКТРОДИНАМИКА I

Теория источников строится на принципах причинности и однородности пространства-времени. Принцип однородности пространства-времени имеет также дополнительный смысл, соответствующий переменным импульс — энергия. Эта его сторона иллюстрируется концепцией обобщенного источника. Понятие источника определено и наполнено содержанием не только в частном случае баланса энергии и импульса при испускании или поглощении одной частицы. Когда имеется достаточный избыток энергии над импульсом — избыток массы,— возможно испускание и поглощение нескольких частиц. Описание связи между источниками должно учитывать подобные акты многочастичного обмена.

Процесс добавочного испускания (или поглощения) одного фотона, которым может сопровождаться действие источника заряженных частиц, мы уже рассматривали. Он описывается примитивным взаимодействием. То же самое примитивное взаимодействие позволяет также обобщенному фотонному источнику испускать (или поглощать) нейтральную пару заряженных частиц. Указанные двухчастичные процессы — это простейшие примеры процессов многочастичного обмена, дополняющих одночастичный обмен и дающих определенные добавки к соответствующей функции распространения. Замена исходных одночастичных функций распространения модифицированными носит универсальный характер, но ею не исчерпывается сущность многочастичного обмена. Модификация функций распространения принимает в учет то общее, что свойственно всем реальным источникам определенного класса, но она не затрагивает их индивидуальные характеристики. Чтобы проиллюстрировать этот дополнительный аспект проблемы, рассмотрим обобщенный фотонный источник, испускающий пару заряженных частиц. Такой процесс можно представлять себе как превращение виртуального фотона в пару реальных частиц. Описание процесса примитивным взаимодействием относится к условиям, в которых эти две частицы не взаимодействуют. Чтобы получить механизм, приводящий к модификации функции распространения виртуального фотона, нужно учесть взаимодействие частиц в дальнейшем. Как мы уже видели в гл. 3, § 12 и 13, где речь шла о частицах со спином 0 и $^1/_2$, в случае рассеяния античастицы на частице имеются два разных механизма. Один из них — простой процесс рассеяния, с которым мы имеем дело и при рассеянии частицы на частице; при таком рассеянии частицы продолжают существовать, пока они обмениваются пространственно-подобным виртуальным фотоном (фотоном с пространственно-подобным импульсом). Другой механизм — аннигиляция пары частица — античастица с рождением времениподобного виртуального фотона, который вновь быстро распадается на частицы. Именно этот последний процесс и приводит к модификации фотонной функции распространения, поскольку конечная пара заряженных частиц связана с обобщенным фотонным источником цепочкой событий, в которой виртуальный фотон рождает пару частиц, рекомбинирующих затем и рождающих виртуальный фотон. Это и есть дополнительная связь между обобщенными фотонными источниками. Но модифицированная фотонная функция распространения не полностью описывает явление взаимодействия между частицами, так как она не учитывает процесс простого рассеяния, при котором происходит обмен пространственно-подобным фотоном.

Примитивное взаимодействие можно характеризовать как локальную связь полей. Это — произведение полей двух заряженных частиц и электромагнитного векторного потенциала, причем все три величины берутся в одной пространственно-временно́й точке. При введении модифицированных функций распространения изменяются численные значения полей, но не нарушается локальный характер их связи. Однако такая полная локальность исчезает, если рассматривать простое рассеяние противоположно заряженных частиц, которое может происходить на некотором расстоянии (во времени и в пространстве) от той точки, где виртуальный фотон распался на пару частиц. Действительно, поля, описывающие конечные частицы, соответствуют области их рождения, тогда как электромагнитный векторный потенциал соответствует акту рождения начальных частиц и, стало быть, другим координатам. В результате такой нелокальной модификации примитивного взаимодействия изменяются электромагнитные характеристики, приписываемые заряженным частицам. Могут возникнуть новые связи, причем нелокальность всех связей выражается в появлении формфакторов, учитывающих эффективное пространственно-временно́е распределение электромагнитных характеристик частиц. К количественному анализу такого рода усложнений, возникающих на динамическом уровне при учете двухчастичного обмена, и будут ниже применены методы Теории Источников.

§ 1 ФУНКЦИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Чтобы описывать испускание или поглощéние заряженной частицы и фотона обобщенным источником частиц, нам нужно выбрать некоторую электромагнитную модель для этого источника. Как мы видели в гл. 3, § 10 и 11, наиболее естественная — ковариантная — модель источника подавляет излучение заряда, движущегося с ускорением. При таком выборе модели заряженные частицы со спином 0 не сопровождаются фотонами и соответствующая модификация в функции распространения не возникает. В случае же частиц со спином $^1/_2$ излучение имеется, и мы исследуем ниже этот случай.

Примитивное взаимодействие, входящее в функционал действия (3-10.63), содержит произвольное гиромагнитное отношение g. При частном значении $g = 2$, очень близком к экспериментальному значению g для электрона и мюона, эффективный источник испускания частицы и фотона будет иметь вид [формула (3-11.79)]

$$iJ_2^\mu(k)\,\eta_2(p)\,|_{\text{эфф}} = \frac{1}{2kp}\,\sigma^{\mu\nu}ik_\nu eq\eta_2(P), \tag{1.1}$$

где мы опустили член

$$\frac{p^\mu}{kp} - if^\mu(k, P) = \frac{p^\mu}{kp} - \frac{P^\mu}{kP} = -\frac{k^\mu}{kp}, \tag{1.2}$$

отвечающий ускорению заряда, так как он не дает вклада в излучение:

$$e_{k\lambda}^{\mu *}k_\mu = 0. \tag{1.3}$$

Амплитуда вероятности для двухчастичного процесса испускания дается выражением

$$\langle 1_{k\lambda}1_{p\sigma q}\,|\,0_-\rangle^{\eta_2} = i\,(d\omega_k)^{1/2}\,e_{k\lambda}^{\mu *}J_{2\mu}(k)\,i\,(2m\,d\omega_p)^{1/2}\,u_{p\sigma q}^*\gamma^0\eta_2(p)\,|_{\text{эфф}}, \tag{1.4}$$

или

$$\langle 1_{k\lambda}1_{p\sigma q}\,|\,0_-\rangle^{\eta_2} = ieq\,(d\omega_k 2m\,d\omega_p)^{1/2}\,u_{p\sigma q}^*\gamma^0\gamma k\gamma e_{k\lambda}^*\eta_2(P)\,\frac{1}{P^2+m^2}, \tag{1.5}$$

где использованы следующие эквивалентные формы записи:

$$P^2 + m^2 = 2kp, \quad \gamma k\gamma e_{k\lambda}^* = ie_{k\lambda}^{\mu *}\sigma_{\mu\nu}k^\nu. \tag{1.6}$$

Аналогичный вывод можно было бы провести и для процесса двухчастичного поглощения. Но амплитуду вероятности такого поглощения можно получить, просто взяв с обратным знаком величину, комплексно-сопряженную амплитуде испускания:

$$\langle 0_+\,|\,1_{k\lambda}1_{p\sigma q}\rangle^{\eta_1} = ieq\,(d\omega_k 2m\,d\omega_p)^{1/2}\,\frac{1}{P^2+m^2}\,\eta_1(P)^*\,\gamma^0\gamma e_{k\lambda}\gamma k u_{p\sigma q}. \tag{1.7}$$

Для этого у нас те же основания, что и в случае одночастичного испускания — ортогональность вакуумного состояния той совокупности состояний, в которые слабые источники испускают или из которых они поглощают.

Рассмотрим теперь причинно-упорядоченную пару обобщенных источников частиц и вычислим вклад двухчастичного обмена в вакуумную амплитуду:

$$\sum_{k\lambda,\, p\sigma q} \langle 0_+ \,|\, 1_{k\lambda} 1_{p\sigma q} \rangle^{\eta_1} \langle 1_{k\lambda} 1_{p\sigma q} \,|\, 0_- \rangle^{\eta_2} =$$

$$= -e^2 \int d\omega_p \, d\omega_k \sum_{\lambda} \eta_1(P)^* \gamma^0 \gamma e_{k\lambda} \gamma k (m - \gamma p) \gamma k \gamma e^*_{k\lambda} \eta_2(P) \frac{1}{(P^2 + m^2)^2}; \tag{1.8}$$

здесь мы учли условие полноты всевозможных состояний частицы с определенным значением импульса в виде

$$\sum_{\sigma q} u_{p\sigma q} u^*_{p\sigma q} \gamma^0 = \frac{1}{2m} (m - \gamma p). \tag{1.9}$$

Из алгебраического соотношения

$$(\gamma k)^2 = -k^2 = 0 \tag{1.10}$$

следует, что

$$\gamma k (m - \gamma p) \gamma k = 2kp\gamma k, \tag{1.11}$$

тогда как

$$\{\gamma e_{k\lambda}, \gamma k\} = -2 e_{k\lambda} k = 0. \tag{1.12}$$

Воспользуемся, далее, правом выбора вещественных векторов поляризации, т. е. примем

$$(\gamma e_{k\lambda})^2 = -1. \tag{1.13}$$

В результате получим

$$\sum_{\lambda} \gamma e_{k\lambda} \gamma k (m - \gamma p) \gamma k \gamma e_{k\lambda} = \sum_{\lambda} 2kp\gamma k = 2(P^2 + m^2) \gamma k. \tag{1.14}$$

Поскольку источники задают только полный импульс P, следует провести интегрирование по всем возможным его распределениям между частицей и фотоном. Эта задача упрощается, если взять за переменную интегрирования полный импульс, а его кинематическую связь с импульсами p и k учесть при помощи соответствующей δ-функции. Введем множитель, равный единице,

$$(2\pi)^3 \int \frac{dP}{(2\pi)^3} \delta(P - p - k) = (2\pi)^3 \int d\omega_P \, dM^2 \delta(P - p - k), \tag{1.15}$$

где энергетическая переменная интегрирования заменена величиной

$$M^2 = -P^2 \tag{1.16}$$

согласно соотношению

$$2P^0 dP^0 = dM^2. \tag{1.17}$$

Тогда вклад в вакуумную амплитуду оказывается равным

$$2e^2 \int dM^2 \, d\omega_P \frac{1}{M^2 - m^2} \eta_1(P)^* \gamma^0 \gamma^\mu \eta_2(P) I_\mu(P), \tag{1.18}$$

где

$$I_\mu(P) = (2\pi)^3 \int d\omega_p \, d\omega_k \delta(P - p - k). \tag{1.19}$$

В последнем интеграле выделенное направление для k_μ может быть связано только с вектором P_μ, и потому k_μ можно заменить его проекцией на P_μ:

$$k_\mu \to \frac{kP}{P^2} P_\mu = \frac{M^2 - m^2}{2M^2} P_\mu. \tag{1.20}$$

Следовательно, величина

$$I_\mu(P) = \frac{M^2 - m^2}{2M^2} P_\mu I(M), \tag{1.21}$$

где

$$I(M) = (2\pi)^3 \int d\omega_p \, d\omega_k \delta(P - p - k), \tag{1.22}$$

есть скалярная функция переменной $-P^2 = M^2 \geqslant m^2$.

Подобный интеграл мы уже вычисляли в случае произвольных масс m_a и m_b, когда речь шла о сечениях рассеяния. Выполнив в формуле (3-12.75) интегрирование по угловым переменным и разделив результат на 2π, получим

$$I(M, m_a, m_b) = (2\pi)^3 \int d\omega_a \, d\omega_b \delta(P - p_a - p_b) =$$
$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \left[1 - \left(\frac{m_a + m_b}{M}\right)^2\right]^{1/2} \left[1 - \left(\frac{m_a - m_b}{M}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{1.23}$$

Отметим два частных случая этой формулы:

$$I(M, m, m) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}, \tag{1.24}$$

$$I(M, m, 0) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right). \tag{1.25}$$

Мы проводили выкладки в системе покоя, отвечающей времениподобному вектору P^μ. Теперь в поисках разных способов вычисления повторим расчет, пользуясь совсем другой координатной системой, с которой мы также уже не раз имели дело. Речь идет о системе отсчета, в которой скорость, ассоциированная с вектором P^μ, близка к скорости света. Такие координатные системы часто называют системами бесконечного импульса. Все импульсы разлагаются на две компоненты: продольную (L) и поперечную (T) относительно направления вектора $\mathbf{P}$. Обозначив модуль этого вектора через P_L, получим для соответствующей ему энергии

$$P^0 = (P_L^2 + M^2)^{1/2} \approx P_L + \frac{M^2}{2P_L}, \tag{1.26}$$

где знак приблизительного равенства означает, что данное соотношение становится точным асимптотически при $P_L \to \infty$. Для отдельных частиц a и b мы будем записывать, например,

$$p_{aL} = P_L u_a,$$
$$p_a^0 = (p_{aL}^2 + \mathbf{p}_{aT}^2 + m_a^2)^{1/2} \approx P_L |u_a| + \frac{\mathbf{p}_{aT}^2 + m_a^2}{2P_L |u_a|}. \tag{1.27}$$

Инвариантная мера в импульсном пространстве становится равной

$$d\omega_a = \frac{(d\mathbf{p}_{aT})\, du_a P_L}{(2\pi)^3\, 2p_a^0} \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{(d\mathbf{p}_{aT})\, du_a}{2|u_a|}, \tag{1.28}$$

а четырехмерная дельта-функция переходит в функцию

$$\delta(P - p_a - p_b) \approx \delta(\mathbf{p}_{aT} + \mathbf{p}_{bT})\, \delta[P_L(1 - u_a - u_b)] \times$$
$$\times \delta\left[P_L(1 - |u_a| - |u_b|) + \frac{M^2}{2P_L} - \frac{\mathbf{p}_{aT}^2 + m_a^2}{2P_L |u_a|} - \frac{\mathbf{p}_{bT}^2 + m_b^2}{2P_L |u_b|}\right], \tag{1.29}$$

или

$$\delta(P - p_a - p_b) \approx \delta(\mathbf{p}_{aT} + \mathbf{p}_{bT})\, \delta(1 - u_a - u_b)\, \eta(u_a)\, \eta(u_b) \times$$
$$\times 2\delta\left(\frac{\mathbf{p}_{aT}^2 + m_a^2}{u_a} + \frac{\mathbf{p}_{bT}^2 + m_b^2}{u_b} - M^2\right). \tag{1.30}$$

Из второй формы записи сразу видно, что если u_a и u_b не являются положительными, то множители, отвечающие энергии и продольному импульсу, оказываются несовместными. При этом используется свойство дельта-функции

$$|\lambda|\, \delta(\lambda x) = \delta(x). \tag{1.31}$$

Проводя непосредственное интегрирование по переменным одной из частиц, мы теперь получим

$$I(M, m_a, m_b) =$$
$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 du \int_0^\infty d\left(\frac{\mathbf{p}_T^2}{u(1-u)}\right) \delta\left[\frac{\mathbf{p}_T^2}{u(1-u)} + \frac{m_a^2}{u} + \frac{m_b^2}{1-u} - M^2\right] =$$
$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 du\, \eta\left(M^2 - \frac{m_a^2}{u} - \frac{m_b^2}{1-u}\right). \tag{1.32}$$

Ступенчатая функция здесь задает условия, при которых интеграл не обращается в нуль. В общем случае (m_a, $m_b \neq 0$) ее аргумент отрицателен на обоих пределах интегрирования и становится положительным внутри области интегрирования лишь при $M > m_a + m_b$. Величина интеграла по u равна длине интервала, на котором этот аргумент положителен. Она находится путем вычитания двух корней квадратного уравнения

$$M^2 u(1 - u) - m_a^2(1 - u) - m_b^2 u = 0. \tag{1.33}$$

В итоге мы вновь приходим, конечно, к результату (1.23).

Вернемся теперь к вкладу (1.18) в вакуумную амплитуду и воспользуемся полученной формулой (1.25). Подставив в выражение (1.18) величину

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi}, \tag{1.34}$$

для этого вклада будем иметь

$$\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{dM^2}{M^2}\,d\omega_p\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\eta_1(P)^*\,\gamma^0\gamma P\eta_2(P). \tag{1.35}$$

Причинная упорядоченность в пространстве-времени становится явной, если написать

$$\begin{aligned}\eta_2(P)&=\int(dx')\exp(-iPx')\,\eta_2(x'),\\ \eta_1(P)^*&=\int(dx)\,\eta_1(x)\exp(iPx),\end{aligned} \tag{1.36}$$

что приводит к следующей пространственно-временно́й связи:

$$\begin{aligned}-i\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{dM^2}{M^2}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\int(dx)\,(dx')\,\eta_1(x)\,\gamma^0\times\\ \times\left(\gamma\frac{1}{i}\partial\right)\left[i\int d\omega_P\exp\left[iP(x-x')\right]\right]\eta_2(x').\end{aligned} \tag{1.37}$$

В выражении, соответствующем причинной упорядоченности $x^0>x^{0\prime}$, мы узнаем инвариантную функцию распространения

$$x^0>x^{0\prime}:\quad \Delta_+(x-x',M^2)=i\int d\omega_P\exp\left[iP(x-x')\right], \tag{1.38}$$

где в явной форме фигурирует массовая переменная M. Добавление этой связи к связи, обусловленной одночастичным обменом, учитывается модифицированной функцией распространения

$$\begin{aligned}\overline{G}_+(x-x')=G_+(x-x')+\\ +\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{dM^2}{M^2}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\left(-\gamma\frac{1}{i}\partial\right)\Delta_+(x-x',M^2),\end{aligned} \tag{1.39}$$

которая обладает свойством антисимметрии

$$(\gamma^0\overline{G}_+(x'-x))^T=-\gamma^0\overline{G}_+(x-x'), \tag{1.40}$$

требуемым статистикой Ферми — Дирака.

В импульсном пространстве имеем

$$\begin{aligned}\overline{G}_+(p)=\frac{1}{\gamma p+m-i\varepsilon}+\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{dM^2}{M^2}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\frac{-\gamma p}{p^2+M^2-i\varepsilon}=\\ =\frac{1}{\gamma p+m-i\varepsilon}+\frac{\alpha}{4\pi}\int_m^\infty\frac{dM}{M}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\left[\frac{1}{\gamma p+M-i\varepsilon}+\frac{1}{\gamma p-M+i\varepsilon}\right].\end{aligned} \tag{1.41}$$

В последнем выражении учтено, что нижним пределом спектрального интеграла по массе должна быть точка $M = m$ и что, поскольку интеграл сходится (как это явствует из первой формы записи), мы можем попытаться распространить интегрирование на большие значения масс.

Другой способ проведения такого расчета основан на рассмотрении того члена вакуумной амплитуды для случая невзаимодействующих частиц, который описывает обмен одним фотоном и одной заряженной частицей:

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{J\eta} = 1 + \ldots + i \int (d\xi)(d\xi') J_1^\mu(\xi) D_+(\xi - \xi') J_{2\mu}(\xi') \times \\ \times i \int (dx)(dx') \eta_1(x) \gamma^0 G_+(x - x') \eta_2(x') + \ldots . \qquad (1.42)$$

В этот член

$$\int (d\xi) \ldots (dx') iJ_1^\mu(\xi) \eta_1(x) \gamma^0 D_+(\xi - \xi') G_+(x - x') iJ_{2\mu}(\xi') \eta_2(x') \qquad (1.43)$$

введем эффективный источник (3-11.66) с $g = 2$

$$iJ^\mu(\xi) \eta(x) |_{\text{эфф}} = eq [\delta(\xi - x) \gamma^\mu \psi(x) - if^\mu(\xi - x) \eta(x)], \qquad (1.44)$$

применимый равным образом и в случае испускания и в случае поглощения. Правда, во втором случае более предпочтительным оказывается выражение

$$iJ^\mu(\xi) \eta(x) \gamma^0 |_{\text{эфф}} = [\psi(x) \gamma^0 \gamma^\mu \delta(x - \xi) - i\eta(x) \gamma^0 f^\mu(x - \xi)] eq. \qquad (1.45)$$

В импульсном пространстве такие источники будут иметь вид

$$iJ_2^\mu(k) \eta_2(p) |_{\text{эфф}} = eq [\gamma^\mu \psi_2(P) - if^\mu(k) \eta_2(P)], \\ iJ_1^\mu(-k) \eta_1(-p) \gamma^0 |_{\text{эфф}} = [\psi_1(-P) \gamma^0 \gamma^\mu - i\eta_1(-P) \gamma^0 f^\mu(k)] eq. \qquad (1.46)$$

Прежде всего выделим вклад, который не содержит фотонов, испущенных или поглощенных источниками, и для которого, следовательно, несущественна электромагнитная модель источника. Подставив в формулу (1.43) выражения для функций распространения, отвечающие причинной упорядоченности, получим

$$-e^2 \int d\omega_p \, d\omega_k \psi_1(-P) \gamma^0 \gamma^\mu (m - \gamma p) \gamma_\mu \psi_2(P) = \\ = -e^2 \int dM^2 \, d\omega_P \psi_1(-P) \gamma^0 \gamma^\mu F(P) \gamma_\mu \psi_2(P), \qquad (1.47)$$

где

$$F(P) = (2\pi)^3 \int d\omega_p \, d\omega_k \delta(P - p - k)(m - \gamma p) = \\ = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right) \left(m - \frac{M^2 + m^2}{2M^2} \gamma P\right). \qquad (1.48)$$

Единственное отличие от вычисления $I_\mu(P)$ здесь в том, что производится замена

$$p_\mu \to \frac{pP}{P^2} P_\mu = \frac{M^2+m^2}{2M^2} P_\mu, \tag{1.49}$$

которая впрочем также следует из соотношения (1.20), ибо $p = P - k$. Матрица $F(P)$ входит в комбинации

$$\gamma^\mu F(P)\gamma_\nu = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\left(-4m-\frac{M^2+m^2}{M^2}\gamma P\right), \tag{1.50}$$

где учтены свойства

$$\begin{gathered}\gamma^\mu\gamma_\mu = -4,\\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = (-2g^{\mu\nu}-\gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma_\mu = 2\gamma^\nu.\end{gathered} \tag{1.51}$$

Таким образом, рассматриваемая часть вакуумной амплитуды оказывается равной

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha}{4\pi}\int dM^2 d\omega_P\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\psi_1(-P)\gamma^0\left(4+\frac{M^2+m^2}{M^2}\gamma P\right)\psi_2(P) =\\ &= \frac{\alpha}{4\pi}\int dM^2 d\omega_P \times\\ &\times\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\eta_1(-P)\gamma^0\frac{1}{\gamma P+m}\left(4m+\frac{M^2+m^2}{M^2}\gamma P\right)\frac{1}{\gamma P+m}\eta_2(P).\end{aligned} \tag{1.52}$$

Матрица, фигурирующая во второй строке, допускает алгебраическое упрощение, которое достигается путем введения проекторов для матрицы γP, соответствующих ее собственным значениям $\pm M$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(\gamma P+m)^2}\left(4m+\frac{M^2+m^2}{M^2}\gamma P\right) =\\ &= \frac{\gamma P+M}{2M^2}\left[1+\frac{2mM}{(M+m)^2}\right]+\frac{\gamma P-M}{2M^2}\left[1-\frac{2mM}{(M-m)^2}\right].\end{aligned} \tag{1.53}$$

Заметим, что при $M \gg m$ полученная связь источников сводится к (1.35). Пространственно-временна́я экстраполяция осуществляется так же, как и раньше, а поскольку коэффициенты фиксируются асимптотическим совпадением выражения в области $M \gg m$ с результатом прежних вычислений, мы можем сразу же написать неполную модифицированную функцию распространения в импульсном пространстве:

$$\begin{aligned}\bar G'_+(p) = \frac{1}{\gamma p+m-i\varepsilon}+\frac{\alpha}{4\pi}\int_{\to m}^{\infty}\frac{dM}{M}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\times\\ \times\left[\frac{1-\dfrac{2mM}{(M-m)^2}}{\gamma p+M-i\varepsilon}+\frac{1+\dfrac{2mM}{(M+m)^2}}{\gamma p-M+i\varepsilon}\right].\end{aligned} \tag{1.54}$$

В противоположность выражению (1.41) теперь имеется инфракрасная расходимость — логарифмическая особенность на нижнем пределе спектрального интеграла. Однако было бы преждевременным делать какие-то количественные заключения об этом явлении, так как полученная функция распространения не является полной. Заметим также, что опять-таки в противоположность (1.41) весовой множитель $(\gamma p+M)^{-1}$ не всегда положителен.

Проведенный расчет позволяет нам оттенить те физические требования, которые до сих пор оставались скрытыми. Допустим, что пространственно-временна́я экстраполяция производится на основе первой формы записи (1.52), учитывающей связь полей, а не на основе второй ее формы записи, в которую входит связь источников. Дополнительный член в действии, получаемый таким путем, будет иметь вид

$$-\frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,\psi(x)\,\gamma^0 M(x-x')\,\psi(x'), \tag{1.55}$$

где

$$M(p)=M(\gamma p)=$$
$$=-\frac{\alpha}{4\pi}\int_m^\infty \frac{dM}{M}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\left[\frac{(M-m)^2-2mM}{\gamma p+M-i\varepsilon}+\frac{(M+m)^2+2mM}{\gamma p-M+i\varepsilon}\right]. \tag{1.56}$$

Здесь имеются две неточности. Во-первых, если выразить поля через источники, то мы получим модифицированную функцию распространения

$$\frac{1}{\gamma p+m-i\varepsilon}-\frac{1}{\gamma p+m-i\varepsilon}\,M(\gamma p)\,\frac{1}{\gamma p+m-i\varepsilon}. \tag{1.57}$$

Поскольку $M(\gamma p)\neq 0$ при $\gamma p+m=0$, поведение функции распространения оказывается сильно измененным в окрестности $\gamma p+m\sim 0$. Но это противоречит феноменологическим основаниям теории, о которых подробно говорилось в гл. 3, § 9, где речь шла о нормировке массы. Во-вторых, пространственно-временна́я экстраполяция, проводимая при выводе формулы (1.55), неверна, так как интеграл (1.56) не существует, если область интегрирования простирается до бесконечно больших значений M.

Связи между источниками, выводимые на основании пространственно-временно́й экстраполяции их причинной упорядоченности, всегда можно дополнить контактными взаимодействиями. Если нет никаких других физических соображений, то контактные члены остаются произвольными, и их можно отбросить.

Но если перейти от источников к полям, то такие члены локального взаимодействия имеют физический смысл; необходимо выяснить условия, при которых они существуют, и связать это с соответствующими физическими требованиями. Поскольку контактные связи в координатном пространстве возникают из полиномов в импульсном пространстве, правильное выражение для $M(\gamma p)$ можно получить, добавив к выражению (1.56) некоторую полиномиальную функцию аргумента $\gamma p + m$. Квадрат и более высокие степени этой удобной комбинации добавляют к функции распространения (1.57) постоянное слагаемое или полиномиальные функции импульсов. Нас не интересуют контактные добавки к функции распространения, достаточно взять константу и члены, содержащие первую степень $\gamma p + m$. Они фиксируются тем физическим требованием, чтобы второе слагаемое в выражении (1.57) не имело особенностей в окрестности $\gamma p + m = 0$, чему соответствуют условия

$$M(\gamma p = -m) = 0, \quad \left.\frac{\partial M(\gamma p)}{\partial(\gamma p)}\right|_{\gamma p = -m} = 0. \tag{1.58}$$

При любом значении спектральной переменной M это достигается следующими контактными модификациями:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma p + M - i\varepsilon} \to \frac{1}{\gamma p + M - i\varepsilon} - \frac{1}{M-m} + \frac{\gamma p + m}{(M-m)^2} &= \\ = \frac{(\gamma p + m)^2}{(M-m)^2}\,\frac{1}{\gamma p + M - i\varepsilon}&\end{aligned} \tag{1.59}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma p - M + i\varepsilon} \to \frac{1}{\gamma p - M + i\varepsilon} + \frac{1}{M+m} + \frac{\gamma p + m}{(M+m)^2} &= \\ = \frac{(\gamma p + m)^2}{(M+m)^2}\,\frac{1}{\gamma p - M + i\varepsilon}&.\end{aligned} \tag{1.60}$$

С такой поправкой будем иметь

$$\begin{aligned}M(\gamma p) = -(\gamma p + m)^2 \frac{\alpha}{4\pi} \int\limits_{\to m}^{\infty} \frac{dM}{M}\left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right) \times \\ \times \left[\frac{1 - \dfrac{2mM}{(M-m)^2}}{\gamma p + M - i\varepsilon} + \frac{1 + \dfrac{2mM}{(M+m)^2}}{\gamma p - M + i\varepsilon}\right].\end{aligned} \tag{1.61}$$

Функция распространения, получаемая теперь из (1.57), в точности совпадает с функцией (1.54).

Рассмотренная нами частичная функция распространения имеет свой аналог и в случае спина 0. Согласно формуле (3-11.16), эффективные источники в импульсном представлении имеют вид

$$\begin{aligned}iJ_2^{\mu}(k)K_2(p)|_{\text{эфф}} &= eq\,[(p^{\mu} + P^{\mu})\,\varphi_2(P) - if^{\mu}(k)K_2(P)], \\ iJ_1^{\mu}(-k)K_1(-p)|_{\text{эфф}} &= [\varphi_1(-P)(p^{\mu} + P^{\mu}) - K_1(-P)\,if^{\mu}(k)]\,eq.\end{aligned} \tag{1.62}$$

Если в выражении для связи

$$\int (d\xi) \ldots (dx')\, iJ_1^{\mu}(\xi)\, K_1(x)\,|_{\text{эфф}}\, D_+(\xi-\xi') \times$$
$$\times\, \Delta_+(x-x')\, iJ_{2\mu}(\xi')\, K_2(x')\,|_{\text{эфф}}, \tag{1.63}$$

обусловленной двухчастичным обменом, опустить члены с f^{μ}, то вклад в вакуумную амплитуду будет равен

$$-e^2 \int d\omega_p\, d\omega_k \varphi_1(-P)(p+P)^2 \varphi_2(P) =$$
$$= e^2 \int d\omega_p\, d\omega_k 2\, \frac{M^2+m^2}{(M^2-m^2)^2} K_1(-P)\, K_2(P) =$$
$$= \frac{\alpha}{2\pi} \int \frac{dM^2}{M^2} \frac{M^2+m^2}{M^2-m^2}\, d\omega_P K_1(-P)\, K_2(P). \tag{1.64}$$

Неполная модифицированная функция распространения, получаемая путем пространственно-временной экстраполяции этой связи, записывается как

$$\bar{\Delta}'_+(p) = \frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon} - \frac{\alpha}{2\pi} \int \frac{dM^2}{M^2} \frac{M^2+m^2}{M^2-m^2} \frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}, \tag{1.65}$$

где интегрирование по M^2 можно распространить до бесконечности, но при $M^2 \to m^2$ имеется инфракрасная особенность.

Чтобы выявить структуру модифицированной функции распространения, рассмотрим сначала более простой случай спина 0, соответствующий электромагнитной модели источника, в которой ускоренный заряд излучает. Если в выражение (1.62) подставить функцию (3-10.44)

$$if^{\mu}(k) = \frac{n^{\mu}}{nk}, \tag{1.66}$$

то при вычислении вакуумной амплитуды в формуле (1.64) следует произвести замену

$$-2\frac{M^2+m^2}{(M^2-m^2)^2} \to -2\frac{M^2+m^2}{(M^2-m^2)^2} + \frac{2}{M^2-m^2}\left(2\frac{nP}{nk}-1\right) - \frac{1}{(nk)^2}. \tag{1.67}$$

Обратные степени nk нужно усреднить по всем возможным разбиениям полного импульса P; введем с этой целью обозначения

$$(2\pi)^3 \int d\omega_p\, d\omega_k \delta(P-p-k)\, (nk)^{-1,\,2} = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right) \langle (nk)^{-1,\,2} \rangle. \tag{1.68}$$

В системе покоя, отвечающей вектору P^{μ}, единственной существенной переменной является z — косинус угла между вектором относительного импульса частиц и вектором $\mathbf{n}$. Таким образом,

$$\left\langle \frac{1}{(nk)^2} \right\rangle = \left(\frac{2M}{M^2 - m^2} \right)^2 \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dz}{(n^0 - |\mathbf{n}|\, z)^2}, \tag{1.69}$$

причем на основании соотношения

$$-\frac{kP}{M} = \frac{M^2 - m^2}{2M} \tag{1.70}$$

можно заключить, что здесь содержится также информация об энергии фотона в системе покоя вектора P^μ. Интеграл в формуле (1.69) зависит лишь от комбинации

$$(n^0)^2 - |\mathbf{n}|^2 = 1, \tag{1.71}$$

и в результате получаем

$$\left\langle \frac{1}{(nk)^2} \right\rangle = \left(\frac{2M}{M^2 - m^2} \right)^2. \tag{1.72}$$

Интеграл же, возникающий при вычислении $\langle (nk)^{-1} \rangle$ в системе покоя вектора P^μ, содержит явным образом $|\mathbf{n}|^2$. В ковариантном виде эта величина записывается как

$$|\mathbf{n}|^2 = (n^0)^2 - 1 = \left(\frac{nP}{M} \right)^2 - 1 = \frac{Q^2}{M^2}, \tag{1.73}$$

где

$$Q^2 = (nP)^2 - n^2 P^2 = -\frac{1}{2} (n^\mu P^\nu - n^\nu P^\mu)(n_\mu P_\nu - n_\nu P_\mu). \tag{1.74}$$

Хотя этот второй интеграл столь же элементарен, как и предыдущий, нам будет удобнее сохранить здесь интегральную форму записи:

$$\frac{M^2 - m^2}{2M^2} \left\langle \frac{nP}{nk} \right\rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dz \frac{n^0}{n^0 - |\mathbf{n}|\, z} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dz \frac{(n^0)^2}{(n^0)^2 - |\mathbf{n}|^2 z^2} =$$

$$= 1 + \frac{Q^2}{M^2} \int_0^1 dz \frac{z^2}{1 + \frac{Q^2}{M^2}(1 - z^2)}. \tag{1.75}$$

Теперь подстановка (1.67) принимает вид

$$-2 \frac{M^2 + m^2}{(M^2 - m^2)^2} \to 8 \frac{M^2}{(M^2 - m^2)^2} \frac{Q^2}{M^2} \int_0^1 dz \frac{z^2}{1 + \frac{Q^2}{M^2}(1 - z^2)}. \tag{1.76}$$

В результате всего этого из неполной функции распространения (1.65) получим

$$\overline{\Delta}_+(p, q) = \frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon} + $$
$$+\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{\to m^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2-m^2}\int\limits_0^1 dz\,\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}\,\frac{\frac{q^2}{M^2}z^2}{1+\frac{q^2}{M^2}(1-z^2)}, \tag{1.77}$$

где q^2 — величина, образованная из произвольного вектора p^μ согласно формуле (1.74). Заметим, что неравенство $q^2 > 0$ остается справедливым, поскольку n^μ — времениподобный вектор. В противоположность тому, что мы имеем в формуле (1.65), весовой множитель при каждой комбинации $(p^2+M^2 - i\varepsilon)^{-1}$ оказывается теперь положительным числом. Интеграл по M^2 в выражении (1.77) быстро сходится с возрастанием M^2, но при $M^2 \to m^2$ он обладает инфракрасной особенностью. Для функции распространения (1.77) возможно и другое представление, соответствующее переменной

$$M'^2 = \frac{M^2}{1-z^2}, \tag{1.78}$$

а именно

$$\overline{\Delta}_+(p, q) = \frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon} + $$
$$+\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{\to m^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2-m^2}\left(1-\frac{M^2}{M'^2}\right)^{1/2}\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}\,\frac{q^2}{q^2+M'^2}. \tag{1.79}$$

Структуры типа (1.41) и (1.65), описывающие спектр масс одночастичных и двухчастичных возбуждений, представляют собой простые спектральные формы. Функция же (1.79) содержит двойную спектральную форму. Но на основании чисто математического вывода этой структуры невозможно сказать, какому именно типу возбуждения отвечает масса M'.

Поскольку спектральные формы характеризуют возможность возбуждений с переменными значениями массы, весовой множитель при стандартной функции распространения, скажем при $(p^2+M^2 - i\varepsilon)^{-1}$, должен служить мерой эффективности источника, т. е. он должен давать относительную вероятность возбуждения данного типа. Таким образом, нефизический характер частичных функций распространения, общий вид которых иллюстрируется выражением (1.65), обнаруживается в появлении отрицательных весовых множителей. В целях проверки этой интуитивной вероятностной интерпретации мы выделим уже известный нам результат, исследуя функцию распространения (1.77) в области $M^2 \sim m^2$, соответствующей частице, которая сопровождается мягким фотоном:

$$M^2 = -(p+k)^2 = m^2 - 2pk = m^2 + 2mk^0 \sim m^2. \tag{1.80}$$

Величина k^0 ($k^0 \ll m$) есть энергия фотона в системе покоя частицы. Для простоты ограничимся случаем, когда

$$\frac{q^2}{m^2} \ll 1. \tag{1.81}$$

Если его интерпретировать в системе покоя единичного вектора n^μ, где

$$\frac{q^2}{m^2} = \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} = \mathbf{v}^2 \ll 1, \tag{1.82}$$

то он будет соответствовать случаю медленно движущихся заряженных частиц. В результате часть функции распространения, выделяемая условиями (1.80) и (1.81), примет вид

$$\overline{\Delta}_+(p, q) \approx \frac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon} + \frac{2\alpha}{3\pi}\mathbf{v}^2 \int \frac{dk^0}{k^0} \frac{1}{p^2+(m^2+2mk^0)-i\varepsilon}. \tag{1.83}$$

Так как при выводе этого выражения мы пренебрегли множественным испусканием фотонов, фигурирующая здесь дифференциальная вероятность

$$\frac{2\alpha}{3\pi}\mathbf{v}^2 \frac{dk^0}{k^0}$$

дает среднее число испущенных фотонов. Это полностью согласуется с выражением (3-11.60). Там, где приводится указанное выражение, подчеркивается ложный характер математической особенности при $k^0 = 0$. Интегрирование в формуле (1.83) следует обрезать на таком значении k^0, чтобы m^2 и $m^2 + 2mk^0$ были уже неразличимы экспериментально. Вклад всех меньших значений k^0 уже учтен при описании испускания и поглощения заряженной частицы без детектируемого сопровождающего фотона. Возникновение инфракрасной особенности — это весьма общее явление, которое мы будем каждый раз комментировать при анализе разного рода приложений.

Чтобы провести аналогичный расчет в случае спина $^1/_2$, вернемся к эффективным источникам (1.46) и подставим в них функцию (1.66), соответствующую определенной электромагнитной модели. Тогда в вакуумной амплитуде (1.52) нужно будет произвести замену

$$\frac{1}{\gamma P+m}\left(4m + \frac{M^2+m^2}{M^2}\gamma P\right)\frac{1}{\gamma P+m} \to$$

$$\to -\left\langle\left(\frac{1}{\gamma P+m}\gamma^\mu - \frac{n^\mu}{nk}\right)(m-\gamma p)\left(\gamma_\mu \frac{1}{\gamma P+m} - \frac{n_\mu}{nk}\right)\right\rangle, \tag{1.84}$$

где угловые скобки имеют такой же смысл, как и в формуле (1.68). Раскрывая скобки в правой части и подставляя в нее выражения для некоторых известных интегралов, получаем

$$\frac{1}{\gamma P+m}\left(4m+\frac{M^2+m^2}{M^2}\gamma P\right)\frac{1}{\gamma P+m}+\frac{4M^2}{(M^2-m^2)^2}(m-\gamma P)+\left\langle\frac{\gamma k}{(nk)^2}\right\rangle+$$
$$+\frac{4}{\gamma P+m}\left(\left\langle\frac{nP}{nk}\right\rangle-1\right)+2\gamma n\left\langle\frac{1}{nk}\right\rangle-$$
$$-\frac{1}{\gamma P+m}\left\langle\frac{\gamma k}{nk}\right\rangle\gamma n-\gamma n\left\langle\frac{\gamma k}{nk}\right\rangle\frac{1}{\gamma P+m}. \tag{1.85}$$

Мы уже вычислили величину [формула (1.75)]

$$\frac{M^2-m^2}{2M^2}\left\langle\frac{nP}{nk}\right\rangle=1+\frac{Q^2}{M^2}Z\left(\frac{Q^2}{M^2}\right), \tag{1.86}$$

где

$$Z\left(\frac{Q^2}{M^2}\right)=\int_0^1 dz\frac{z^2}{1+\frac{Q^2}{M^2}(1-z^2)}=\frac{1}{2}\int_{M^2}^{\infty}\frac{dM'^2}{M'^2}\left(1-\frac{M^2}{M'^2}\right)^{1/2}\frac{M^2}{Q^2+M'^2}. \tag{1.87}$$

Необходимо знать также величины $\langle\gamma^k/(nk)^{1,2}\rangle$, в которых γ играет роль некоторого произвольного постоянного вектора. После интегрирования остаются только комбинации γn и γP, и эти выражения полностью фиксируются результатами, которые получаются при замене γ на n и на P. Последние же нам известны, а потому не требуется никаких новых интегрирований. В итоге будем иметь

$$\left\langle\frac{\gamma k}{nk}\right\rangle=\frac{\gamma P}{nP}-\left(\gamma n+\frac{\gamma P}{nP}\right)Z\left(\frac{Q^2}{M^2}\right),$$
$$\frac{M^2-m^2}{2M^2}\left\langle\frac{\gamma k}{(nk)^2}\right\rangle=-\frac{\gamma n}{nP}+\left(\frac{\gamma P}{M^2}+\frac{\gamma n}{nP}\right)Z\left(\frac{Q^2}{M^2}\right). \tag{1.88}$$

Проводя алгебраические преобразования различных слагаемых в формуле (1.85), мы получаем возможность ввести пространственно-подобный вектор

$$Q^\mu=P^\mu+n^\mu nP,\quad nQ=0. \tag{1.89}$$

Такое определение правильно, поскольку

$$Q^\mu Q_\mu=(nP)^2-n^2P^2=Q^2. \tag{1.90}$$

Полученный нами результат можно представить и в другом виде:

$$\frac{\gamma P}{M^2}+\frac{8M^2}{(M^2-m^2)^2}(\gamma P-m)\frac{Q^2}{M^2}Z\left(\frac{Q^2}{M^2}\right)+\frac{4}{M^2-m^2}\gamma QZ\left(\frac{Q^2}{M^2}\right)=$$
$$=\frac{\gamma P+M}{2M}\frac{1}{M}\left[1+\frac{8}{M^2-m^2}\frac{M}{M+m}Q^2Z\right]+$$
$$+\frac{\gamma P-M}{2M}\frac{1}{M}\left[1+\frac{8}{M^2-m^2}\frac{M}{M-m}Q^2Z\right]+\frac{4}{M^2-m^2}\gamma QZ. \tag{1.91}$$

Если положить здесь $Q = 0$, то это даст $\gamma P/M^2$, что соответствует выражению (1.35). Возникающая теперь модифицированная функция распространения представляет собой смесь простой и двойной спектральных форм:

$$\overline{G}_+(p, q) = \frac{1}{\gamma p + m - i\varepsilon} + \frac{\alpha}{4\pi}\int\limits_{\to m}^{\infty}\frac{dM}{M}\left[\frac{1-\frac{m^2}{M^2}+\frac{8}{M(M-m)}q^2 Z\left(\frac{q^2}{M^2}\right)}{\gamma p + M - i\varepsilon} + \right.$$
$$\left. + \frac{1-\frac{m^2}{M^2}+\frac{8}{M(M+m)}q^2 Z\left(\frac{q^2}{m^2}\right)}{\gamma p - M + i\varepsilon}\right] -$$
$$-\frac{\alpha}{\pi}\gamma q\int\limits_{m^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\,\frac{Z\frac{q^2}{M^2}}{p^2+M^2-i\varepsilon}. \qquad (1.92)$$

Все инфракрасные особенности сконцентрированы здесь в одном слагаемом. Если оставить лишь ту часть спектрального интеграла, для которой

$$k^0 = M - m \ll m, \qquad (1.93)$$

и принять также упрощающие условия (1.81) и (1.82):

$$\frac{q^2}{m^2} \ll 1: \qquad Z\left(\frac{q^2}{m^2}\right) = \frac{1}{3}, \qquad (1.94)$$

то функция распространения примет вид [для мягких фотонов выполняются неравенства $k^0 \ll (q^2)^{1/2} \ll m$]

$$\overline{G}_+(p, q) \approx \frac{1}{\gamma p + m - i\varepsilon} + \frac{2\alpha}{3\pi}\mathbf{v}^2\int\frac{dk^0}{k^0}\,\frac{1}{\gamma p + (m + k^0) - i\varepsilon}. \qquad (1.95)$$

Как и следовало ожидать, для испускания мягких фотонов мы получили ту же дифференциальную вероятность, что и в формуле (1.83), соответствующей спину 0.

Спектральное представление (1.92) затемняет один аспект характеристик распространения, свойственных двухчастичным возбуждениям, а именно различие в их четности. Основная функция распространения для объектов со спином $^1/_2$, величина $(\gamma p + M - i\varepsilon)^{-1}$, отличается от $(\gamma p + m - i\varepsilon)^{-1}$ только массой. Обе эти функции описывают возбуждения, для которых в соответствующей системе отсчета $\gamma^{0\prime} = +1$, т. е. четность которых одинакова. Функция же распространения $(\gamma p - M + i\varepsilon)^{-1}$ описывает возбуждения спина $^1/_2$ с разной четностью. Этим, кстати, объясняется, почему в частичной функции распространения (1.95) отсутствуют члены такого типа. Необходима некая гибкость, позволяющая проводить различие в описании между электроном, сопровождаемым детектируемым фотоном, и электроном, сопровождаемым недетектируемым фотоном, что возможно лишь тогда, когда в обоих этих случаях четность одинакова. Но в последнем слагаемом в функции (1.92) нет классификации по четности, которая имеется в предыдущих членах. Поэтому мы попытаемся найти другое представление, в котором два упомянутых типа возбуждения выступали бы в более явном виде.

Вернемся с этой целью к формуле (1.91) и введем пространственно-подобный вектор Q'^{μ}:

$$Q' = Q + P\frac{Q^2}{M^2}, \quad Q'P = 0,$$

$$Q'^2 = Q^2\left(1 + \frac{Q^2}{M^2}\right). \tag{1.96}$$

Умножив выражение (1.91) на M, чтобы сделать его безразмерным, получим

$$-8\frac{mM}{(M^2-m^2)^2}Q^2Z + \left[1 + 4\frac{M^2+m^2}{(M^2-m^2)^2}Q^2Z\right]\frac{\gamma P}{M} + \\ + 4\frac{M^2}{M^2-m^2}Z\frac{\gamma Q'}{M}. \tag{1.97}$$

Далее, γP и $\gamma Q'$ антикоммутируют, так как векторы Q' и P ортогональны, а это означает, что квадрат линейной комбинации γP и $\gamma Q'$ кратен единичной матрице. Обозначив соответствующее число через N^2, имеем

$$N^2 = \left[1 + 4\frac{M^2+m^2}{(M^2-m^2)^2}Q^2Z\right]^2 - \left[4\frac{M^2}{M^2-m^2}Z\right]^2\frac{Q^2}{M^2}\left(1 + \frac{Q^2}{M^2}\right) = \\ = \left[1 + 8\frac{M^2}{(M^2-m^2)^2}Q^2Z\right]\left[1 + 8\frac{m^2}{(M^2-m^2)^2}Q^2Z\right] - \\ - 16\frac{M^2}{(M^2-m^2)^2}Q^2Z^2. \tag{1.98}$$

Достаточно весьма слабого неравенства

$$Z\left(\frac{Q^2}{M^2}\right) < \frac{1}{2} \tag{1.99}$$

для доказательства соотношения

$$N^2 > 1 + \left[8\frac{Mm}{(M^2-m^2)^2}Q^2Z\right]^2. \tag{1.100}$$

Слагаемое с $\gamma Q'$ можно исключить путем преобразования Лоренца. Действительно, мы можем написать

$$\left[1 + 4\frac{M^2+m^2}{(M^2-m^2)^2}Q^2Z\right]\frac{\gamma P}{M} + 4\frac{M^2}{M^2-m^2}Z\frac{\gamma Q'}{M} = L^{-1}\left[N\frac{\gamma P}{M}\right]L, \tag{1.101}$$

где

$$L^T\gamma^0L = \gamma^0. \tag{1.102}$$

Матрица преобразования имеет следующий вид:

$$L = a + \frac{b}{M^2}\gamma P \gamma Q', \tag{1.103}$$

причем ее параметры, задаваемые равенствами

$$2a^2 = \frac{1}{N}\left[1 + 4\frac{M^2+m^2}{(M^2-m^2)^2}Q^2Z\right] + 1,$$

$$2b^2\frac{Q^2}{M^2}\left(1+\frac{Q^2}{M^2}\right) = \frac{1}{N}\left[1 + 4\frac{M^2+m^2}{(M^2-m^2)^2}Q^2Z\right] - 1, \tag{1.104}$$

удовлетворяют соотношению

$$1 = a^2 - b^2\frac{Q^2}{M^2}\left(1+\frac{Q^2}{M^2}\right). \tag{1.105}$$

В такой реализации подразумевается положительность N, а потому произведение ab должно быть также положительным, что позволяет нам приписать положительные значения как параметру a, так и параметру b.

С учетом сказанного выражение (1.97) можно переписать как

$$L^{-1}\left[N_+\frac{\gamma P - M}{2M} + N_-\frac{\gamma P + M}{2M}\right]L, \tag{1.106}$$

где

$$\frac{1}{2}(N_+ + N_-) = N, \quad \frac{1}{2}(N_+ - N_-) = \frac{8mM}{(M^2-m^2)^2}Q^2Z, \tag{1.107}$$

причем неравенство (1.100) гарантирует положительность обоих чисел N_+ и N_-. Поскольку матрицы $(M \pm \gamma P)/2M$ — это проекционные матрицы для γP, то, основываясь на выражениях

$$L = a + b\frac{Q^2}{M^2} + \frac{b}{M^2}\gamma P \gamma Q,$$

$$L^{-1} = a + b\frac{Q^2}{M^2} + \frac{b}{M^2}\gamma Q \gamma P, \tag{1.108}$$

комбинацию (1.106) можно записать иначе:

$$N_+ L_+ \frac{\gamma P - M}{2M} L_+ + N_- L_- \frac{\gamma P + M}{2M} L_-, \tag{1.109}$$

причем

$$L_\pm = a + b\left(\frac{Q^2}{M^2} \mp \frac{\gamma Q}{M}\right). \tag{1.110}$$

Эти последние матрицы таковы, что

$$(\gamma^0 L_\pm)^T = -\gamma^0 L_\mp. \tag{1.111}$$

Они удовлетворяют также соотношению

$$L_+\frac{M-\gamma P}{2M}L_+ + L_-\frac{M+\gamma P}{2M}L_- = 1. \tag{1.112}$$

В результате функция распространения приобретает тот вид, к которому мы и стремились:

$$\overline{G}_+(p,\ q)=\frac{1}{\gamma p+m-i\varepsilon}+\int\limits_{\to m}^{\infty}dM\left[A_+L_+\frac{1}{\gamma p+M-i\varepsilon}L_+ +\right.$$
$$\left.+A_-L_-\frac{1}{\gamma P-M+i\varepsilon}L_-\right], \qquad (1.113)$$

где

$$A_\pm=\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{M}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)N_\pm. \qquad (1.114)$$

Как положительные числа $A_\pm$, так и матрицы $L_\pm$ являются функциями M и вектора

$$q^\mu=p^\mu+n^\mu np, \qquad nq=0, \qquad (1.115)$$

которые получаются путем замены в приведенных выше выражениях Q на q. Условие нормировки (1.112) остается справедливым при замене P произвольным вектором p, поскольку оно основывается только на соотношении

$$pq=q^2. \qquad (1.116)$$

Свойство антисимметрии, требуемое статистикой Ферми — Дирака, выглядит теперь следующим образом:

$$[\gamma^0\overline{G}_+(-p,\ -q)]^T=-\gamma^0\overline{G}_+(p,\ q), \qquad (1.117)$$

где обращение знака у q диктуется изменением знака p. Эта операция необходима для того, чтобы снова получались матрицы L_+ и L_-, которые при транспонировании переходят друг в друга [формула (1.111)]. Наличие дополнительных матриц преобразования $L_\pm$ не изменяет интерпретацию функции распространения (1.113) как суперпозиции возбуждений, обладающих переменной массой и четностью, причем величина $A_\pm dM$ служит мерой относительной вероятности. Это также полностью согласуется с предельным случаем мягких фотонов, когда при упрощающем предположении $q^2/m^2\ll 1$ мы имеем

$$M-m=k^0\ll(q^2)^{1/2}:\quad N_-\ll N_+\approx\frac{4}{3}\frac{q^2}{(k^0)^2}, \qquad (1.118)$$

так что величина

$$A_+dM\approx\frac{2\alpha}{2\pi}\frac{q^2}{m^2}\frac{dk^0}{k^0} \qquad (1.119)$$

воспроизводит вероятность испускания мягких фотонов.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАГНИТНОГО МОМЕНТА

В предыдущем параграфе был изложен метод расчета, в котором поля играют роль источников. При таком подходе мы вынуждены в явном виде учитывать определенные физические требования, возникающие при анализе процессов многочастичного обмена,— исходное феноменологическое описание одночастичных процессов не должно изменять своей формы. Нам уже ясно, что поведение свободных частиц удовлетворяет этому условию. Но, когда речь заходит о движении во внешних электромагнитных полях, возможны отклонения от примитивного электромагнитного взаимодействия. Дело в том, что о примитивном электромагнитном взаимодействии можно говорить лишь в случае элементарных процессов, в которых отсутствуют какие-либо последующие взаимодействия. Если же, как это бывает в различных экспериментальных установках, подобные взаимодействия имеют место, то они приводят к модификации эффективной электромагнитной связи. Это станет ясным в ходе дальнейшего изложения. Но уже сейчас мы в состоянии извлечь из данного обстоятельства одно важное с экспериментальной точки зрения следствие, для чего потребуется лишь незначительно видоизменить вычисления, проведенные в § 1.

Рассмотрим сначала некоторые характерные свойства функции распространения $G_+^A\ (x,\ x')$ частицы со спином $^1/_2$ в слабом однородном электромагнитном поле. В матричных обозначениях типа тех, которые были введены в гл. 3, § 12, дифференциальное уравнение (3-12.2), определяющее функцию распространения, примет вид

$$(\gamma\Pi+m)\,G_+^A=1, \tag{2.1}$$

где

$$\Pi=p-eqA. \tag{2.2}$$

Далее, напишем

$$G_+^A=(m-\gamma\Pi)\,\Delta_+^A, \tag{2.3}$$

откуда

$$[-(\gamma\Pi)^2+m^2]\,\Delta_+^A=[\Pi^2-eq\sigma F+m^2]\,\Delta_+^A=1. \tag{2.4}$$

При выводе этого уравнения использованы алгебраические свойства

$$-(\gamma\Pi)^2=-\frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\ \gamma^\nu\}\,\Pi_\mu\Pi_\nu-\frac{1}{2}\,[\gamma^\mu,\ \gamma^\nu]\,\frac{1}{2}\,[\Pi_\mu,\ \Pi_\nu]=$$
$$=g^{\mu\nu}\Pi_\mu\Pi_\nu+i\sigma^{\mu\nu}\frac{i}{2}\,eqF_{\mu\nu}, \tag{2.5}$$

где

$$[\Pi_\mu,\Pi_\nu]=[p_\mu,\ -eqA_\nu]-[p_\nu,\ -eqA_\mu]=ieqF_{\mu\nu}, \tag{2.6}$$

и введено сокращенное обозначение (следует обратить внимание на коэффициент $^1/_2$)

$$\sigma F = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{2.7}$$

Из матричной записи сразу ясно также, что выражение (2.3) можно представить в форме

$$G_+^A = \Delta_+^A (m - \gamma\Pi), \tag{2.8}$$

ибо Δ_+^A является функцией только матрицы $\gamma\Pi$.

Уравнение, определяющее Δ_+^A, нам хорошо знакомо. Оно отличается от уравнения (3-11.40) для функции Грина частицы со спином 0 лишь наличием члена $-eq\sigma F$. Если же $F_{\mu\nu}$ — однородное поле, то этот дополнительный член представляет собой постоянную матрицу, которую можно объединить с m^2. Мы знаем также, что после выполнения фазового преобразования (3-11.37) в случае однородного поля (3-11.46) и в предположении его слабости в уравнении (3-11.52) можно пренебречь членами, квадратичными по полю. В результате преобразованная функция распространения примет тот же вид, что и для свободной частицы. Таким образом, величина Δ_+^A в случае слабого однородного электромагнитного поля равна

$$\Delta_+^A (x, x') = \exp[ieq\,\varphi(x, x')]\,\Delta_+(x - x', m^2 - eq\sigma F), \tag{2.9}$$

где через φ обозначен фазовый интеграл по отрезку прямой:

$$\varphi(x, x') = \int_{x'}^{x} d\xi^\mu A_\mu(\xi). \tag{2.10}$$

Возвращаясь к функции G_+^A, мы встретимся с соотношением

$$(-i\partial_\mu - eqA_\mu(x))\exp[ieq\,\varphi(x, x')] = \\ = \exp[ieq\,\varphi(x, x')]\left(-i\partial_\mu + eq\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x - x')^\nu\right), \tag{2.11}$$

которое учитывает калибровочное преобразование, приводящее к векторному потенциалу (3-11.46). Еще одно соотношение такого рода получается путем взаимной замены x на x' с обращением знака у $F_{\mu\nu}$:

$$\exp[ieq\,\varphi(x, x')](-i\partial_\mu'^T - eqA_\mu(x')) = \\ = \left(-i\,\partial_\mu'^T + eq\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x' - x)^\nu\right)\exp[ieq\,\varphi(x, x')], \tag{2.12}$$

где символ ∂^T введен для указания того, что оператор дифференцирования действует налево с одновременным изменением знака.

Если взять среднее арифметическое выражений (2.3) и (2.8), то члены $\gamma^\mu F_{\mu\nu}(x-x')^\nu$, возникающие при использовании соотношений (2.11) и (2.12), будут обладать противоположными знаками. Это слагаемое не удается исключить лишь потому, что оно не коммутирует с σF. Однако соответствующий вклад квадратичен по напряженности поля, и поэтому мы его опустим. В итоге получим

$$G_+^A(x, x') = \exp[ieq\varphi(x, x')]\int\frac{(dp)}{(2\pi)^4}\exp[ip(x-x')]\times$$
$$\times(m-\gamma p)\frac{1}{p^2+m^2-eq\sigma F-i\varepsilon}, \qquad (2.13)$$

где подразумевается, что произведение двух матричных сомножителей симметризовано.

Обратимся теперь к связи (1.43), обусловленной двухчастичным обменом, и зададимся вопросом, к каким ее изменениям приводит наличие слабого однородного электромагнитного поля Изменение в физических условиях находит свое выражение во введении только что построенной функции распространения заряженной частицы. Опуская, как и в (1.47), всякие указания на фотоны, испущенные или поглощенные непосредственно источниками, мы для члена в вакуумной амплитуде, описывающего связь, получим

$$e^2\int(dx)(dx')\,\psi_1(x)\gamma^0\gamma^\mu D_+(x-x')\,G_+^A(x, x')\,\gamma_\mu\psi_2(x'). \qquad (2.14)$$

Используя более удобную для наших целей причинную последовательность, суммируем некоторые из наиболее существенных моментов проведенных ранее вычислений, написав

$$x^0 > x^{0\prime}:\quad D_+(x-x')\,G_+(x-x') =$$
$$= -\int dM^2\,d\omega_P\exp[iP(x-x')]\,F(P), \qquad (2.15)$$

где

$$F(P) = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\left(m-\frac{M^2+m^2}{2M^2}\gamma P\right). \qquad (2.16)$$

Соответствующая функция, получаемая путем пространственно-временно́й эстраполяции, имеет вид

$$D_+(x-x')\,G_+(x-x') =$$
$$= \frac{i}{(4\pi)^2}\int_{m^2}^{\to\infty} dM^2\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\left(m-\frac{M^2+m^2}{2M^2}\gamma\left(\frac{1}{i}\right)\partial\right)\Delta_+(x-x', M^2)+$$
$$+\text{контактные члены}. \qquad (2.17)$$

Структура выражения (2.13) показывает, что переход к G_+^A достигается путем введения фазового множителя

$$\Phi = \exp\left[ieq\,\varphi(x, x')\right] \tag{2.18}$$

и замены m^2 на $m^2 - eq\sigma F$, а тем самым M^2 на $M^2 - eq\sigma F$, с расстановкой матриц γ^μ на концах всех произведений симметричным образом:

$$D_+(x-x')\,G_+^A(x, x') =$$
$$= \Phi\frac{i}{(4\pi)^2}\int_{m^2}^{\to\infty} dM^2\frac{M^2-m^2}{M^2-eq\sigma F}\left[m-\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{M^2-m^2}{M^2-eq\sigma F}\right)\gamma\left(\frac{1}{i}\right)\partial\right]\times$$
$$\times\,\Delta_+(x-x',\ M^2-eq\sigma F)+\text{контактные члены.} \tag{2.19}$$

Заметим, что мы не позаботились о выделении матриц γ — подразумевается, что матричные множители расставлены в надлежащем порядке.

Поскольку мы ограничиваемся анализом лишь случая слабых полей, выражение (2.19) можно заменить эквивалентным ему выражением

$$D_+(x-x')\,G_+^A(x, x') =$$
$$=\Phi\frac{i}{(4\pi)^2}\int_{m^2}^{\to\infty} dM^2\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\left(m-\frac{M^2+m^2}{2M^2}\gamma\left(\frac{1}{i}\right)\partial\right)\times$$
$$\times\,\Delta_+(x-x', M^2-eq\sigma F)+\Phi\frac{i}{(4\pi)^2}\int_{m^2}^{\to\infty}\frac{\partial M^2}{M^2}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)eq\sigma F\times$$
$$\times\left(m-\frac{m^2}{M^2}\gamma\left(\frac{1}{i}\right)\partial\right)\Delta_+(x-x',\ M^2)+\text{контактные члены.} \tag{2.20}$$

Чтобы можно было на основании соответствующих физических соображений фиксировать контактные члены, необходимо завершить выкладки, включив в рассмотрение сомножители γ^μ, которые имеются в формуле (2.14). Основное свойство матриц Дирака состоит в том, что

$$\gamma^\mu\sigma_{\lambda\nu}\gamma_\mu = 0, \tag{2.21}$$

ибо две γ-матрицы коммутируют, а две другие антикоммутируют с любой из матриц σ. Поскольку мы ограничиваемся эффектами, линейными по полю, из этого свойства вытекает, в частности, равенство

$$\gamma^\mu\Delta_+(x-x',\ M^2-eq\sigma F)\,\gamma_\mu = -4\Delta_+(x-x',\ M^2). \tag{2.22}$$

Кроме того, нам нужны две следующие комбинации:

$$\gamma^\mu \gamma \partial \sigma F \gamma_\mu = -2\gamma \partial \sigma F, \tag{2.23}$$

$$\gamma^\mu \gamma \partial \Delta_+ (x - x', \ M^2 - eq\sigma F)\, \gamma_\mu =$$
$$= -2\gamma \partial \Delta_+ (x - x', \ M^2 - eq\sigma F) + 4\gamma \partial \Delta_+ (x - x', \ M^2). \tag{2.24}$$

Желательно также вновь восстановить комбинацию $M^2 - eq\sigma F$. Это достигается применением соотношения

$$\Delta_+ (x - x', \ M^2) = \Delta_+ (x - x', \ M^2 - eq\sigma F) + eq\sigma F \frac{d}{dM^2} \Delta_+ (x - x', \ M^2), \tag{2.25}$$

получаемого путем интегрирования по частям по переменной M^2; при этом никакие вклады от пределов интегрирования, равных m^2 и бесконечности, не возникают. Проделывая все эти выкладки, мы опять придем к функции распространения (2.9), соответствующей теперь переменной массе M^2:

$$\gamma^\mu D_+ (x - x')\, G_+^A (x, x')\, \gamma_\mu =$$
$$= -\frac{i}{(4\pi)^2} \int\limits_{m^2}^{\to\infty} dM^2 \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right) \left(4m + \frac{M^2 + m^2}{M^2} \gamma\Pi\right) \Delta_+^A (x, x', M^2) +$$
$$+ \frac{i}{(4\pi)^2} \int\limits_{m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2} \frac{2m^2}{M^2} \left(2m + \frac{M^2 + m^2}{M^2} \gamma\Pi\right) eq\sigma F \Delta_+^A (x, x', M^2) +$$
$$+ \text{контактные члены}. \tag{2.26}$$

Формальная матричная запись

$$\Delta_+^A (M^2) = \frac{1}{-(\gamma\Pi)^2 + M^2 - i\varepsilon} \tag{2.27}$$

позволяет нам представить (2.26) в виде

$$\frac{i}{(4\pi)^2} \int\limits_{m}^{\to\infty} \frac{\partial M}{M} \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right) \left[\frac{(M-m)^2 - 2mM}{\gamma\Pi + M - i\varepsilon} + \frac{(M+m)^2 + 2mM}{\gamma\Pi - M + i\varepsilon}\right] -$$
$$- \frac{i}{(4\pi)^2} \int\limits_{m}^{\infty} \frac{\partial M}{M} \frac{2m^2}{M^2} eq\sigma F \left[\frac{\left(1 - \frac{m}{M}\right)^2}{\gamma\Pi + M - i\varepsilon} + \frac{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2}{\gamma\Pi - M + i\varepsilon}\right] +$$
$$+ \text{контактные члены}, \tag{2.28}$$

где по-прежнему подразумевается, что произведение матриц симметризовано. Физические требования, которыми фиксируются контактные члены, относятся к случаю, когда отсутствует электромагнитное поле. Они находят свое выражение в подстановках

(1.59) и (1.60), хотя мы и сохраняем калибровочно-ковариантный символ π, который в любой заданной калибровке можно отождествить с p. В результате первое слагаемое в (2.28) заменяется на

$$\frac{i}{(4\pi)^2}(\gamma\Pi+m)^2\int\limits_{\to m}^{\infty}\frac{dM}{M}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\times$$
$$\times\left[\frac{1-\frac{2mM}{(M-m)^2}}{\gamma\Pi+M-i\varepsilon}+\frac{1+\frac{2mM}{(M+m)^2}}{\gamma\Pi-M+i\varepsilon}\right]. \qquad (2.29)$$

Таковы, и ничуть не более, требования феноменологического характера. Дополнительный член в действии, который теперь возникает взамен (1.55), имеет вид

$$-\frac{1}{2}\int(dx)\,(dx')\,\psi(x)\,\gamma^0M(x,x',F)\,\psi(x'), \qquad (2.30)$$

где

$$M(F)=-(\gamma\Pi+m)^2\frac{\alpha}{4\pi}\int\limits_{\to m}^{\infty}\frac{\partial M}{M}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\times$$
$$\times\left[\frac{1-\frac{2mM}{(M-m)^2}}{\gamma\Pi+M-i\varepsilon}+\frac{1+\frac{2mM}{(M+m)^2}}{\gamma\Pi-M+i\varepsilon}\right]+$$
$$+\frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_{m}^{\infty}\frac{\partial M}{M}\frac{m^2}{M^2}\,eq\sigma F\left[\frac{\left(1-\frac{m}{M}\right)^2}{\gamma\Pi+M-i\varepsilon}+\frac{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}{\gamma\Pi-M+i\varepsilon}\right]. \qquad (2.31)$$

Он складывается с исходным выражением для действия

$$-\frac{1}{2}\int(dx)\,\psi(x)\,\gamma^0(\gamma\Pi+m)\,\psi(x). \qquad (2.32)$$

Ограничим наше дальнейшее рассмотрение движением частицы вдали от ее источника. В отсутствие электромагнитного поля величина ψ в этой области удовлетворяет уравнению

$$(\gamma\Pi+m)\,\psi=0. \qquad (2.33)$$

Использование этого уравнения при упрощении выражений (2.30) и (2.31) находит свое оправдание в том, что мы ограничиваемся предельным случаем слабого поля. В итоге получим

$$M(F)\to-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{2m}eq\sigma F\int\limits_{m}^{\infty}\frac{dM}{M}\frac{m^2}{M^2}\left(\frac{2m}{M}\right)^2=-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{2m}eq\sigma F. \qquad (2.34)$$

Комбинируя (2.32) с (2.30) и (2.34), для эффективного действия при рассматриваемых условиях имеем

$$-\frac{1}{2}\int(dx)\,\psi(x)\,\gamma^0\left(\gamma\Pi+m-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{eq}{2m}\sigma F\right)\psi(x), \qquad (2.35)$$

откуда видно, что дополнительный спиновый магнитный момент оказывается равным $\alpha/2\pi$ магнетонов. Выразим этот результат через g-фактор, входящий в действие (3-10.63):

$$g=2\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right). \tag{2.36}$$

Взяв для постоянной тонкой структуры значение

$$\alpha = 1/137{,}036, \tag{2.37}$$

т. е.

$$\frac{\alpha}{2\pi}=0{,}00116141, \tag{2.38}$$

получим для величины $^1/_2\, g$ значения, блестяще согласующиеся с экспериментальными значениями этой величины для электрона (1,0011596) и для мюона (1,001166). Небольшие расхождения, вполне значимые, естественно приписать еще не учтенным процессам обмена с участием более двух частиц. Итак, мы приходим к следующему выводу относительно электрона и мюона: для этих частиц g-фактор примитивного взаимодействия не совпадает с экспериментальными значениями величины g; вместо этого мы имеем точное равенство $g_{\text{прим}} = 2$.

Наше заключение о динамическом происхождении малого отклонения величины $^1/_2 g$ от единицы и о том, что мы не должны приписывать его локальному примитивному взаимодействию, находит дополнительное подтверждение в следующем. Выражения для действия (2.30) и (2.32) устанавливают связь поля ψ с его источником через посредство модифицированной функции распространения:

$$\psi = \bar{G}_+ (F)\, \eta, \tag{2.39}$$

причем

$$[\gamma\Pi + m + M(F)]\, \bar{G}_+ (F) = 1 \tag{2.40}$$

(мы по-прежнему пользуемся матричной символикой в пространственно-временных координатах). В такой более общей форме записи та часть $M(F)$, которая зависит от поля, т. е. второе слагаемое в формуле (2.31), оказывается нелокальной, так как в нее в качестве составных элементов входят функции распространения $[\gamma\Pi \pm (M - i\varepsilon)]^{-1}$. Если рассматривать это взаимодействие, отвечающее распределенному магнитному моменту, в течение очень малых промежутков времени, что описывается по дополнительности предельным переходом $\gamma\Pi \to \infty$, то асимптотически оно примет вид

$$\frac{3\alpha}{4\pi}\, eq\sigma F\, \frac{1}{\gamma\Pi}, \tag{2.41}$$

обращаясь тем самым в нуль без всяких следов остаточного локального взаимодействия.

Существует еще один способ вычисления магнитного момента, еще более феноменологический, а именно: в исходное электромагнитное взаимодействие мы включим в качестве наблюдаемой величины отклонение величины $^1/_2 g$ от единицы. При таком подходе это отклонение определяется на основании добавочной гипотезы о динамической природе эффекта возникновения дополнительного магнитного момента, который подавляется, если ограничиться рассмотрением очень малых промежутков времени. В дополнение к m в уравнение (2.40) для модифицированной функции распространения будет входить теперь взаимодействие, обусловленное магнитным моментом, т. е. слагаемое

$$-\left(\frac{1}{2}g-1\right)\frac{eq}{2m}\sigma F. \tag{2.42}$$

Разумеется, при изменении электромагнитных характеристик меняется и динамический член $M(F)$. Но при учете только эффектов порядка $\alpha/2\pi$ всеми добавками такого рода можно пренебречь, ибо они имеют более высокий порядок малости. Однако на этот раз в соответствии с предположением, что g есть экспериментально установленный g-фактор, мы должны наложить на $M(F)$ феноменологическое условие нормировки. Мы должны добавить к $M(F)$ контактный член, который исключал бы зависимость от электромагнитного поля при условиях, символически описываемых соотношением $\gamma\Pi + m = 0$. Для этого необходимы следующие замены:

$$\frac{1}{\gamma\Pi \pm (M-i\varepsilon)} \to \frac{1}{\gamma\Pi \pm (M-i\varepsilon)} \mp \frac{1}{M\mp m} =$$
$$= \mp\frac{\gamma\Pi+m}{M\mp m}\,\frac{1}{\gamma\Pi\pm(M-i\varepsilon)}. \tag{2.43}$$

В результате слагаемое, отвечающее полному магнитному моменту, примет вид

$$-\frac{eq}{2m}\sigma F\left\{\frac{1}{2}g-1+(\gamma\Pi+m)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\alpha}{2\pi}\int_m^\infty\frac{dM}{M}\left(\frac{m}{M}\right)^2\frac{2m}{M}\left[\frac{1-\frac{m}{M}}{\gamma\Pi+M-i\varepsilon}-\frac{1+\frac{m}{M}}{\gamma\Pi-M+i\varepsilon}\right]\right\}. \tag{2.44}$$

Для очень малых промежутков времени (при $\gamma\Pi \to \infty$) асимптотический предел множителя, заключенного в фигурные скобки, равен

$$\frac{1}{2}g-1-\frac{\alpha}{2\pi}. \tag{2.45}$$

Если в соответствии с предположением о динамическом происхождении разности $^1/_2 g - 1$ потребовать, чтобы это предельное выражение обращалось в нуль, то мы вновь придем к полученной ранее формуле (2.36). Принятая здесь точка зрения обладает тем преимуществом, что при таком взгляде некоторые из малых поправок порядка $(\alpha/2\pi)^2$ оказываются обязанными своим происхождением условию самосогласованности: величина g вычисляется с учетом динамических процессов, которые в какой-то степени характеризуются самой этой величиной. Но здесь мы не будем заниматься усовершенствованными расчетами такого рода.

Правда, один из пунктов требует некоторых пояснений. Мы пока еще совсем не упоминали об испускании или поглощении фотонов непосредственно источниками, хотя и знаем, что такие процессы весьма существенны для физической непротиворечивости всей схемы в целом. Дело, конечно, в том, что на вычислении магнитного момента подобные процессы, вместе со всеми присущими им элементами произвола, не сказываются. При соответствующем расчете одно или оба поля ψ заменяются источником η, т. е. фактически выражением $(\gamma\Pi + m)\,\psi$. Поэтому упомянутые процессы не дают никаких вкладов в физических условиях, при которых измеряется магнитный момент, ибо тогда выполняется соотношение $\gamma\Pi + m = 0$. Но они вызывают изменения некоторых деталей в структуре функции $\overline{G}_+(F)$, хотя непротиворечивость описания и требует, чтобы качественно поведение магнитного взаимодействия оставалось тем же, что и прежде.

§ 3. ФОТОННАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

В рамках схемы примитивного электромагнитного взаимодействия для заряженных частиц со спином $^1/_2$ выше массового порога, т. е. при условии

$$-k^2 = M^2 > (2m)^2, \tag{3.1}$$

электромагнитный векторный потенциал можно отождествить с эффективным обобщенным источником, испускающим или поглощающим пару противоположно заряженных частиц. Поскольку мы считаем, что частицы не взаимодействуют друг с другом, будем сравнивать вакуумную амплитуду для элементарного процесса

$$i\int (dx)\,\frac{1}{2}\,\psi(x)\,\gamma^0 eq\gamma^\mu\psi(x)\,A_\mu(x) \tag{3.2}$$

с вакуумной амплитудой, описывающей распространение двух невзаимодействующих частиц,

$$\frac{1}{2}\left[i\int (dx)\,\psi(x)\,\gamma^0\eta(x)\right]^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,\psi(x)\,\gamma^0\eta(x)\,\eta(x')\,\gamma^0\psi(x'). \tag{3.3}$$

Последняя представляет собой квадратичный член в разложении экспоненты

$$\exp\left[i\int (dx)(dx')\,\eta_1(x)\,\gamma^0G_+(x-x')\,\eta_2(x')\right], \tag{3.4}$$

где через $\eta(x)$ обозначен интересующий нас испускающий или поглощающий источник, а $\psi(x)$ есть соответствующее поле частицы. Сравнивая выражения (3.2) и (3.3), придем к матрице

$$i\eta(x)\,\eta(x')\,|_{\text{эфф}}=\delta(x-x')\,eq\gamma^\mu\gamma^0A_\mu(x). \tag{3.5}$$

Антисимметрия относительно перестановки всех индексов, соответствующая в левой части этого равенства статистике Ферми — Дирака, в его правой части обеспечивается антисимметрией зарядовой матрицы.

Связь между источниками двухчастичного испускания и поглощения описывается квадратичным членом в разложении экспоненты (3.4). Исходное выражение для нее

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[i\int(dx)(dx')\,\eta_1(x)\,\gamma^0G_+(x-x')\,\eta_2(x')\right]^2&=\\=\frac{1}{2}\int(dx)\ldots(dx''')\,i\eta_2(x''')\,\gamma^0G_+(x'''-x'')\,i\eta_1(x'')&\times\\\times\,\eta_1(x)\,\gamma^0G_+(x-x')\,\eta_2(x')&\end{aligned} \tag{3.6}$$

можно представить целиком в матричной форме:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int(dx)\ldots(dx''')\,\mathrm{Sp}\,[i\eta_1(x'')\,\eta_1(x)\,\gamma^0G_+(x-x')\,i\eta_2(x')&\times\\\times\,\eta_2(x''')\,\gamma^0G_+(x'''-x'')].&\end{aligned} \tag{3.7}$$

К ней приводит цепочка равенств

$$\begin{aligned}\eta(x)\,M_\eta(x'')&=\eta_a(x)\,M_{ab}\eta_b(x'')=\\&=-M_{ab}\eta_b(x'')\,\eta_a(x)=-\,\mathrm{Sp}\,[M\eta(x'')\eta(x)],\end{aligned} \tag{3.8}$$

в которой учтено, что в интересующем нас случае матрица M перестановочна с антикоммутирующими источниками. Кроме того, использовано свойство цикличности следа произведения. Если ввести затем два эффективных источника, связанных через векторные потенциалы $A^\mu_{1,2}$ с обобщенными фотонными источниками $J^\mu_{1,2}$, то мы придем к вакуумной амплитуде, описывающей двухчастичный обмен между обобщенными фотонными источниками:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\,\mathrm{Sp}\,[eq\gamma A_1(x)\,G_+(x-x')\,eq\gamma A_2(x')\,G_+(x'-x)]&=\\=-\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\,A_1^\mu(x)\,\mathrm{Sp}\,[eq\gamma_\mu G_+(x-x')\,eq\gamma_\nu G_+(x'-x)]\,A_2^\nu(x').&\end{aligned} \tag{3.9}$$

Подставив сюда соответствующие причинные выражения для функций распространения, получим

$$-\frac{1}{2}\int d\omega_p\, d\omega_{p'} A_1^{\mu}(-k)\,\mathrm{Sp}\,[eq\gamma_\mu (m-\gamma p)\, eq\gamma_\nu(-m-\gamma p')]\, A_2^{\nu}(k), \tag{3.10}$$

где

$$k = p + p' \tag{3.11}$$

есть импульс, которым обмениваются между собой обобщенные фотонные источники. Умножив это выражение на величину

$$\int d\omega_k\, dM^2 (2\pi)^3\, \delta(p+p'-k) = 1, \tag{3.12}$$

для члена в вакуумной амплитуде, описывающего связь, будем иметь

$$-e^2\int dM^2\, d\omega_k\, A_1^{\mu}(-k)\, I_{\mu\nu}(k)\, A_2^{\nu}(k), \tag{3.13}$$

где

$$I_{\mu\nu}(k) = \int d\omega_p\, d\omega_{p'}\, (2\pi)^3\, \delta(p+p'-k)\, \times$$
$$\times\, \mathrm{Sp}\,[\gamma_\mu (m-\gamma p)\,\gamma_\nu(-m-\gamma p')]. \tag{3.14}$$

Подчеркнем, что символ следа здесь относится только к четырехмерному пространству матриц Дирака. Дополнительный же множитель 2, связанный с зарядовым пространством, выделен в явном виде.

Тензор $J_{\mu\nu}(k)$ обладает двумя важными свойствами — он симметричен по индексам μ и ν и удовлетворяет соотношению

$$k^{\mu} I_{\mu\nu}(k) = 0. \tag{3.15}$$

Для доказательства симметрии тензора заметим, что

$$\mathrm{Sp}\,[\gamma_\mu (m-\gamma p)\,\gamma_\nu(-m-\gamma p')] = -\mathrm{Sp}\,[\gamma_5\gamma_\nu(-m-\gamma p')\, \times$$
$$\times\, \gamma_\mu(m-\gamma p)\,\gamma_5] = \mathrm{Sp}\,[\gamma_\nu(m-\gamma p')\,\gamma_\mu(-m-\gamma p)]. \tag{3.16}$$

Проверку свойства

$$I_{\mu\nu}(k) = I_{\nu\mu}(k) \tag{3.17}$$

завершает замена в интеграле p на p' и наоборот. Для доказательства соотношения (3.15) достаточно воспользоваться равенством

$$\gamma k = (\gamma p + m) + (\gamma p' - m) \tag{3.18}$$

и учесть, что первое слагаемое его правой части дает нуль под знаком следа при умножении на $m - \gamma p$, а второе — при умножении на $-m - \gamma p'$. Доказанные нами свойства являются необходимыми с физической точки зрения. В частности, соотношение

(3.15) выражает калибровочную инвариантность связи. Указанными свойствами обладает тензор вида

$$I_{\mu\nu}(k) = \left(g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right) I(M^2); \tag{3.19}$$

его форма говорит о том, что возбуждение с конечной массой, испущенное векторным источником, ведет себя подобно частице с единичным спином. Скалярную функцию $I(M^2)$ можно вычислить, взяв след тензора $I_{\mu\nu}(k)$:

$$3I(M^2) = g^{\mu\nu} I_{\mu\nu}(k) = \\ = \int d\omega_p\, d\omega_{p'}\, (2\pi)^3\, \delta(p + p' - k)\, \mathrm{Sp}\,[\gamma^\mu (m - \\ - \gamma p)\, \gamma_\mu (-m - \gamma p')], \tag{3.20}$$

где след комбинации матриц Дирака равен просто

$$\mathrm{Sp}\,[(-4m - 2\gamma p)(-m - \gamma p')] = 4\,(4m^2 - 2pp') = \\ = 4\,(M^2 - 2m^2). \tag{3.21}$$

Остающийся в (3.20) интеграл в точности совпадает с величиной (1.24), так что

$$I(M^2) = \frac{4}{3}\,\frac{1}{(4\pi)^2}\,(M^2 + 2m^2)\left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}. \tag{3.22}$$

Калибровочная инвариантность связи позволяет выбрать векторный потенциал в виде

$$A^\mu(k) = \frac{1}{k^2} J^\mu(k) = -\frac{1}{M^2} J^\mu(k). \tag{3.23}$$

Условие же

$$k_\mu J^\mu(k) = 0, \tag{3.24}$$

соответствующее обращению в нуль дивергенции источника, позволяет представить вакуумную амплитуду в следующей форме:

$$i\,\frac{\alpha}{3\pi} \int \frac{dM^2}{M^2} \left(1 + \frac{2m^2}{M^2}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2} J_1^\mu(-k)\, i d\omega_k J_{2\mu}(k). \tag{3.25}$$

В интеграле

$$\int J_1^\mu(-k)\, i d\omega_k J_{2\mu}(k) = \int (dx)(dx')\, J_1^\mu(x) \times \\ \times \left[i \int d\omega_k \exp\left[ik(x - x')\right]\right] J_{2\mu}(x') \tag{3.26}$$

мы узнаем величину, описывающую причинно-упорядоченный обмен источников возбуждением с массой M. Необходимая пространственно-временная экстраполяция достигается путем введения функции распространения $\Delta_+(x - x', M^2)$. Складывая полученную связь со связью, обусловленной обменом фотоном, придем к следующей модифицированной фотонной функции распространения:

$$\overline{D}_+(x-x') = D_+(x-x') + \\ + \frac{\alpha}{3\pi} \int\limits_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2} \left(1 + \frac{2m^2}{M^2}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2} \Delta_+(x-x', M^2). \qquad (3.27)$$

В импульсном пространстве она имеет вид

$$\overline{D}_+(k) = \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} + \frac{\alpha}{3\pi} \int\limits_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2} \left(1 + \frac{2m^2}{M^2}\right) \times \\ \times \left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2} \frac{1}{k^2 + M^2 - i\varepsilon}. \qquad (3.28)$$

Поскольку интеграл по M^2 оказывается всюду сходящимся, мы распространили область интегрирования от порогового значения $(2m)^2$ до бесконечности.

Мы проводили расчет для частиц со спином $^1/_2$, так как это соответствует важному физическому случаю заряженной частицы с минимальной массой — электрону. Но не менее интересно проследить и за параллельными вычислениями для заряженных частиц со спином 0. Заметим, что при учете только двухчастичного обмена заряженные частицы различных сортов дают аддитивные вклады в функцию $\overline{D}_+(k)$. Примитивное взаимодействие в случае спина 0 приводит к вакуумной амплитуде

$$i \int (dx)\, \varphi(x)\, eq \frac{1}{i} \partial^\mu \varphi(x) A_\mu(x), \qquad (3.29)$$

которую следует сравнивать с комбинацией

$$\frac{1}{2}\left[i \int (dx)\, K(x)\, \varphi(x)\right]^2 = -\frac{1}{2} \int (dx)(dx')\, \varphi(x)\, K(x)\, K(x')\, \varphi(x'). \qquad (3.30)$$

Это дает

$$iK(x)K(x')|_{\text{эфф}} = eq\,[A^\mu(x) + A^\mu(x')] \frac{1}{i} \partial_\mu \delta(x-x') \qquad (3.31)$$

где симметрия левой части, свойственная статистике Бозе — Эйнштейна, согласуется с симметрией правой части. Двухчастичный обмен описывается выражением

$$\frac{1}{2}\left[i \int (dx)(dx')\, K_1(x)\, \Delta_+(x-x')\, K_2(x')\right]^2 = \\ = \frac{1}{2} \int (dx) \ldots (dx''')\, \mathrm{Sp}\,[iK_1(x')\, K_1(x)\, \Delta_+(x-x') \times \\ \times iK_2(x')\, K_2(x''')\, \Delta_+(x'''-x'')], \qquad (3.32)$$

в котором след берется по переменным зарядового пространства и в которое нужно подставить эффективные источники (3.31). В целях упрощения записи мы представим эту связь в виде выражения в импульсном пространстве, соответствующего наличию причинной упорядоченности. При этом используется следующий эквивалент источника (3.31):

$$iK(p)\,K(p')\,|_{\text{эфф}} = iK(-p')\,K(-p)\,|_{\text{эфф}} = \\ = eq\,(p-p')^{\mu}A_{\mu}(k), \tag{3.33}$$

откуда ясно, что мы имеем дело с противоположно заряженными частицами. Вакуумная амплитуда равна

$$-\frac{1}{2}\int d\omega_p\,d\omega_{p'}A_1^{\mu}(-k)\,\mathrm{Sp}\,[eq\,(p-p')_{\mu}\,eq\,(p-p')_{\nu}]\,A_2^{\nu}(k) = \\ = -e^2\int dM^2\,d\omega_k A_1^{\mu}(-k)\,I_{\mu\nu}(k)\,A_2^{\nu}(k), \tag{3.34}$$

где теперь тензор

$$I_{\mu\nu}(k) = \int d\omega_p\,d\omega_{p'}\,(2\pi)^3\,\delta\,(p+p'-k)\,(p-p')_{\mu}\,(p-p')_{\nu} \tag{3.35}$$

очевидным образом симметричен по индексам μ и ν, а также обладает необходимым свойством калибровочной инвариантности (3.15), поскольку

$$k\,(p-p') = p^2 - p'^2 = 0. \tag{3.36}$$

Скалярный множитель выражения (3.19) оказывается равным

$$I(M^2) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(4\pi)^2}\,M^2\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{3/2}, \tag{3.37}$$

так как

$$(p-p')^2 = M^2 - 4m^2. \tag{3.38}$$

Итак, модифицированная фотонная функция распространения, в которой учитываются только заряженные частицы со спином 0, имеет вид

$$\overline{D}_+(k) = \frac{1}{k^2-i\varepsilon} + \frac{\alpha}{12\pi}\int\limits_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{3/2}\frac{1}{k^2+M^2-i\varepsilon}. \tag{3.39}$$

Для модифицированной фотонной функции распространения можно указать ряд прямых применений. Прежде всего она позволяет решать динамические задачи с использованием выражения для вакуумной амплитуды:

$$\langle 0_+|0_-\rangle^J = \exp\left[i\frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,J^{\mu}(x)\,\overline{D}_+(x-x')\,J_{\mu}(x')\right], \tag{3.40}$$

которой определяется вероятность возмущения вакуумного состояния, дополняющая до единицы вероятность его сохранения. В случае слабого обобщенного источника отсюда получается следующая вероятность испускания источником одной пары:

$$|\langle 0_+ | 0_- \rangle^J|^2 = 1 - \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} J^\mu(k)^* \operatorname{Im} \bar{D}_+(k) J_\mu(k), \tag{3.41}$$

где в случае спина $^1/_2$

$$-k^2 = M^2 > (2m)^2: \quad \operatorname{Im} \bar{D}_+(k) = \frac{\alpha}{3} \frac{1}{M^2} \left(1 + \frac{2m^2}{M^2}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}. \tag{3.42}$$

Таким образом, для вероятности испускания пары имеем

$$\frac{\alpha}{3} \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \frac{1}{M^2} \left(1 + \frac{2m^2}{M^2}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2} J^\mu(k)^* J_\mu(k). \tag{3.43}$$

Этот результат можно получить также из амплитуды (3.2) путем непосредственного расчета.

Как явствует из соотношения

$$J^\mu(k)^* g_{\mu\nu} J^\nu(k) = J^\mu(k)^* \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{M^2} k_\mu k_\nu\right) J^\nu(k) =$$
$$= \sum_\lambda |e^{\mu *}_{k\lambda} J_\mu(k)|^2, \tag{3.44}$$

квадратичная комбинация источников в формуле (3.43) положительна. Кроме того, данное соотношение свидетельствует и о том, что в системе покоя вектора k две частицы обладают единичным угловым моментом. Это позволяет в какой-то мере объяснить различие между результатами, полученными в случаях спина $^1/_2$ и спина 0. Для частиц со спином $^1/_2$, которые рождаются почти покоящимися, единичный угловой момент может быть реализован в ^3S-состоянии, отвечающем нулевому орбитальному моменту. Вероятность перехода вблизи порога будет изменяться как относительная скорость частиц, т. е. пропорционально $(M - 2m)^{1/2}$. Для бесспиновых же частиц равенство углового момента единице вынуждает их рождаться в P-состоянии орбитального момента, причем вероятность перехода содержит две дополнительные степени относительного импульса и вблизи порога изменяется как $(M - 2m)^{3/2}$.

Введение модифицированной фотонной функции распространения означает, что изменяется взаимодействие покоящихся зарядов — нужно изменить кулоновский потенциал. Кулоновская функция (2-3.92) заменяется теперь на

$$\overline{\mathscr{D}}(\mathbf{x}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^0 \overline{D}_+(x) =$$

$$= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} + \frac{\alpha}{3\pi} \int\limits_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2} \left(1 + \frac{2m^2}{M^2}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2} \frac{\exp(-M|\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} \int\limits_0^1 dv \frac{v^2\left(1 - \frac{1}{3}v^2\right)}{1 - v^2} \exp\left[-\frac{2m|\mathbf{x}|}{(1-v^2)^{1/2}}\right]\right], \quad (3.45)$$

где при переходе к последней строке введена переменная

$$v = \left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}. \quad (3.46)$$

Соотношение (3.45) показывает, что интегрирование по времени превращает четырехмерную функцию Грина в трехмерную, а именно в функцию Грина дифференциального оператора $-\nabla^2 + M^2$. Выражение для нее можно получить, например, подстановкой в интеграл (3-14.35) значения $p^0 = 0$. На расстояниях, удовлетворяющих условию

$$2m\,|\mathbf{x}| \gg 1, \quad (3.47)$$

кулоновский потенциал не претерпевает сколько-нибудь существенных изменений. В другом же предельном случае имеем

$$2m|\mathbf{x}| \ll 1: \quad \overline{\mathscr{D}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{1}{m|\mathbf{x}|} - C - \frac{5}{6}\right)\right], \quad (3.48)$$

где

$$C = 0{,}57721\ldots \quad (3.49)$$

есть постоянная Эйлера. Появление добавочного логарифмического члена при этих условиях обязано своим происхождением интервалу интегрирования по M

$$|\mathbf{x}|^{-1} \gg M \gg 2m, \quad (3.50)$$

в котором интеграл (3.45) сводится к $2\int dM/M$. Выражение (3.48) получается в результате разбиения всего промежутка интегрирования такой точкой, в которой M удовлетворяет неравенствам (3.50).

Эффект, рассматриваемый нами, называется обычно поляризацией вакуума. Он приводит к увеличению интенсивности кулоновского взаимодействия на малых расстояниях. Правда, при всех достижимых расстояниях это возрастание оказывается чрезвычайно малым. Так, при $2m\,|\mathbf{x}| \sim 10^{-3}$, что для массы электрона соответствует приблизительно расстоянию 10^{-14} см, увеличение интенсивности взаимодействия составляет около 1%. Поскольку зависимость эффекта от расстояния логарифмическая, этот порядок величины не может быть существенно изменен никакими мыслимыми достижениями в области экспериментальной техники. Чтобы увеличить интенсивность взаимодействия на 10%, нужно приблизиться на расстояния около 10^{-37} см! Да к тому же задолго до того, как такие расстояния будут достигнуты, ситуация качественно изменится из-за возрастающей роли частиц, более тяжелых, чем электрон. Несмотря на их малость, эффекты, обусловленные поляризацией вакуума, можно обнаружить уже при существующем состоянии развития экспериментальной техники. Проще всего случай атомов водорода, в которых из-за усиления притяжения между электроном и ядром снижается энергия состояний с нулевым орбитальным моментом, поскольку в них электрон вполне ощутимое время проводит вблизи ядра.

Чтобы вычислить изменение энергии взаимодействия, можно воспользоваться простой теорией возмущений для

$$\delta V(\mathbf{x}) = -Ze^2\delta\mathscr{D}(\mathbf{x}), \tag{3.51}$$

где через $\delta\mathscr{D}(\mathbf{x})$ обозначена разность между $\bar{\mathscr{D}}(\mathbf{x})$ и

$$\mathscr{D}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}. \tag{3.52}$$

В состоянии с нерелятивистской волновой функцией $\psi(\mathbf{x})$, которую можно применять при условии $Z\alpha \ll 1$, имеем

$$\delta E = \int (d\mathbf{x})\,\delta V(\mathbf{x})\,|\psi(\mathbf{x})|^2 \approx -4\pi Z\alpha\,|\psi(0)|^2 \int (d\mathbf{x})\,\delta\mathscr{D}(\mathbf{x}). \tag{3.53}$$

Здесь учтено то обстоятельство, что возмущение играет заметную роль лишь на расстояниях, малых по сравнению с размерами атома. Необходимое в данной формуле интегрирование эквивалентно вычислению предельного значения функции $\delta D_+(k)$ для нулевого импульса, и поэтому

$$\int (d\mathbf{x})\,\delta\mathscr{D}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{3\pi}\int_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^2}{(M^2)^2}\left(1+\frac{2m^2}{M^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2} =$$
$$= \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{(2m)^2}\int_0^1 dv\,v^2\left(1-\frac{1}{3}v^2\right) = \frac{\alpha}{15\pi}\frac{1}{m^2}. \tag{3.54}$$

Мы должны рассматривать только s-состояния. Для главного квантового числа n имеем

$$|\psi_{ns}(0)| = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Z\alpha}{n}m\right)^3, \tag{3.55}$$

так что

$$\delta E_{ns} = -\frac{4}{15\pi}\frac{Z^4\alpha^5}{n^3}m, \tag{3.56}$$

или

$$\frac{\delta E_{ns}}{\frac{1}{2}\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}m} = -\frac{8}{15\pi}\frac{Z^2\alpha^3}{n}, \tag{3.57}$$

причем в последней формуле сдвиги отнесены к боровским значениям энергии. Здесь мы не будем вникать в детали этой проблемы, поскольку из дальнейшего станет ясным, что рассматриваемый эффект весьма мал по сравнению с другим эффектом, благодаря которому s-состояния смещаются в противоположном направлении. О существовании поляризации вакуума приходится судить по результатам количественного сравнения теории с экспериментом; если допустить, что поляризации нет, то останутся малые, но значимые расхождения с экспериментальными данными.

В свете сказанного чрезвычайно интересно то, что имеются экспериментальные данные, прямо указывающие на явление поляризации вакуума. Речь идет об измерениях g-фактора электрона и мюона, в которых обнаруживается небольшое расхождение

$$\frac{1}{2}g_\mu - \frac{1}{2}g_e = 0{,}66\cdot 10^{-5}. \tag{3.58}$$

Отклонение величины $^1/_2 g$ от единицы обусловлено процессами обмена фотонами и заряженными частицами, каждый из которых описывается соответствующей функцией распространения. Подставляя $\bar{D}_+$ вместо D_+, мы должны учитывать и более сложные обменные процессы, в нашем примере — трехчастичный обмен. Асимметрия между электроном и мюоном возникает благодаря тому, что в добавке δD_+ доминирующую роль играют процессы поляризации вакуума с участием легкого электрона. Масштаб для наиболее существенных актов обмена задается массой каждой частицы. Поэтому тяжелый мюон оказывается более подверженным влиянию явлений поляризации вакуума. С кинематической точки зрения безмассовый фотон и электронно-позитронные пары с массой $M \ll m_\mu$ не различаются сколько-нибудь существенно, и в таком приближении модифицированную фотонную функцию распространения в случае мюона можно считать равной

$$\bar{D}_+(k) \sim \frac{1}{k^2 - i\varepsilon}\left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi}\int_{m_e}^{m_\mu}\frac{dM}{M}\right]. \tag{3.59}$$

Пределы интегрирования фиксируют область значений M, для которой можно повторить простые рассуждения, проведенные в связи с выражением (3.48). Возникающий здесь множитель

$$1+\frac{2\alpha}{3\pi}\ln\frac{m_\mu}{m_e} \tag{3.60}$$

служит мерой превышения величины $^1/_2 g_\mu$ над $^1/_2 g_e$:

$$\frac{1}{2}g_\mu-\frac{1}{2}g_e \approx \frac{\alpha}{2\pi}\frac{2\alpha}{3\pi}\ln\frac{m_\mu}{m_e} = \\ = 1{,}16\cdot 10^{-3}\times 0{,}825\cdot 10^{-2}\sim 10^{-5}, \tag{3.61}$$

что качественно согласуется с экспериментальным результатом (3.58). Несколько позже в этом параграфе будет проведен более точный анализ, в котором найдет свое дополнительное подтверждение интерпретация различия между g_μ и g_e как эффекта, обусловленного поляризацией вакуума.

Но сначала вернемся вновь к члену в вакуумной амплитуде, описывающему связь [формулы (3.13) и (3.19)]:

$$-e^2\int dM^2 I(M^2)\, d\omega_k A_1^\mu(-k)\left(g_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right)A_2^\nu(k), \tag{3.62}$$

и преобразуем его так, чтобы калибровочная инвариантность выступала в явном виде. Для этого введем напряженности поля

$$F_{\mu\nu}(k) = ik_\mu A_\nu(k) - ik_\nu A_\nu(k) \tag{3.63}$$

согласно соотношению

$$-\frac{1}{2}F_1^{\mu\nu}(-k)\,F_{2\mu\nu}(k) = M^2 A_1^\mu(-k)\left(g_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right)A_2^\nu(k). \tag{3.64}$$

Результат, который получается из (3.62),

$$ie^2\int\frac{dM^2}{M^2}I(M^2)\left(-\frac{1}{2}\right)F_1^{\mu\nu}(-k)\, i\, d\omega_k F_{2\mu\nu}(k), \tag{3.65}$$

допускает непосредственную пространственно-временную экстраполяцию. Соответствующее выражение мы представим в виде некоторого действия:

$$\int dM^2 M^2 a(M^2)\left(-\frac{1}{4}\right)\int (dx)(dx')\, F^{\mu\nu}(x)\times \\ \times[\Delta_+(x-x',\, M^2)+\text{конт. чл.}]\, F_{\mu\nu}(x'), \tag{3.66}$$

где

$$M^2 a(M^2) = \frac{4\pi\alpha}{M^2}I(M^2) = \frac{\alpha}{3\pi}\left(1+\frac{2m^2}{M^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2} \tag{3.67}$$

(последняя форма записи отвечает случаю спина $^1/_2$). Указанный здесь контактный член необходим для сохранения физического условия нормировки — действие, отвечающее фотонам ($k^2 = 0$), не должно изменяться. Это достигается использованием комбинации

$$\Delta_+(x-x',\ M^2) - \frac{1}{M^2}\delta(x-x') = \frac{1}{M^2}\partial^2\Delta_+(x-x',\ M^2), \tag{3.68}$$

или, в записи в импульсном пространстве,

$$\frac{1}{k^2+M^2-i\varepsilon} - \frac{1}{M^2} = -\frac{k^2}{M^2}\frac{1}{k^2+M^2-i\varepsilon}. \tag{3.69}$$

Таким образом, более полное выражение для действия электромагнитного поля имеет вид

$$W = \int (dx)\left[J^\mu(x)A_\mu(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)\right] - \\ - \int dM^2 a(M^2)\left(-\frac{1}{4}\right)\int (dx)(dx')\,\partial^\lambda F^{\mu\nu}(x)\times \\ \times\Delta_+(x-x',\ M^2)\,\partial'_\lambda F_{\mu\nu}(x'). \tag{3.70}$$

Локальность, необходимая для того, чтобы можно было определить функцию Лагранжа, вообще говоря, уже не имеет места. Но если рассматриваются поля, которые мало меняются на интервалах $1/M < 1/(2m)$, то выражение (3.70) можно упростить, подставив в напряженности x вместо x'. Тогда, с учетом равенства

$$\int dx'\Delta_+(x-x',\ M^2) = \Delta_+(k=0,\ M^2) = \frac{1}{M^2}, \tag{3.71}$$

а также соотношения (3.54)

$$\int\limits_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}a(M^2) = \frac{\alpha}{15\pi}\frac{1}{m^2}, \tag{3.72}$$

мы можем заменить последнее слагаемое в действии (3.70) величиной

$$-\frac{\alpha}{15\pi}\frac{1}{m^2}\int (dx)\left(-\frac{1}{4}\right)\partial^\lambda F^{\mu\nu}(x)\,\partial_\lambda F_{\mu\nu}(x). \tag{3.73}$$

В рассматриваемом пределе существует функция Лагранжа

$$L = -\frac{1}{4}\left[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{15\pi}\frac{1}{m^2}\partial^\lambda F^{\mu\nu}\partial_\lambda F_{\mu\nu}\right]. \tag{3.74}$$

Ей соответствуют следующие модифицированные полевые уравнения Максвелла:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{15\pi}\frac{1}{m^2}\partial^2\right)\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = J^\mu(x). \tag{3.75}$$

Точное решение этих уравнений было бы бессмысленным занятием, так как они справедливы лишь при условиях, когда $\partial^2 \ll m^2$.

Поэтому с точностью до калибровочного члена мы ограничимся приближенным решением вида

$$A_\mu(x)=\left(1-\frac{\alpha}{15\pi}\frac{1}{m^2}\partial^2\right)\int(dx')\,D_+(x-x')\,J_\mu(x')=$$
$$=\int(dx')\,D_+(x-x')\,J_\mu(x')+\frac{\alpha}{15\pi}\frac{1}{m^2}J_\mu(x). \qquad (3.76)$$

Тогда для действия W получаем выражение

$$W=\frac{1}{2}\int(dx)\,J^\mu(x)\,A_\mu(x)=$$
$$=\frac{1}{2}\int(dx)\,(dx')\,J^\mu(x)\,D_+(x-x')\,J_\mu(x')+$$
$$+\frac{\alpha}{15\pi}\frac{1}{m^2}\frac{1}{2}\int(dx)\,J^\mu(x)\,J_\mu(x), \qquad (3.77)$$

которому соответствует модифицированная энергия взаимодействия двух стационарных распределений зарядов и токов

$$E_{\text{вз}}=-\int(d\mathbf{x})\,(d\mathbf{x}')\,J_a^\mu(\mathbf{x})\,\mathcal{D}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,J_{b\mu}(\mathbf{x}')-$$
$$-\frac{\alpha}{15\pi}\frac{1}{m^2}\int(d\mathbf{x})\,J_a^\mu(\mathbf{x})\,J_{b\mu}(\mathbf{x}). \qquad (3.78)$$

Дополнительный контактный член в энергии воспроизводит полученный ранее результат (3.53) и (3.54), отвечающий случаю двух распределений заряда с плотностями $Ze\delta(\mathbf{x})$ и $-e\,|\,\psi(\mathbf{x})\,|^2$. Оправдывается данный подход как раз незначительным изменением последней плотности заряда.

В общем случае полевые уравнения, которые получаются из действия (3.70), приводят к модифицированной функции распространения

$$A_\mu(x)=\int(dx')\,\overline{D}_+(x-x')\,J_\mu(x')+\partial_\mu\lambda(x), \qquad (3.79)$$

удовлетворяющей условию

$$k^2\left[1-k^2\int dM^2\frac{a(M^2)}{k^2+M^2-i\varepsilon}\right]\overline{D}_+(k)=1. \qquad (3.80)$$

Таким образом, теперь мы получаем

$$\overline{D}_+(k)=\frac{1}{k^2-i\varepsilon}\,\frac{1}{1-k^2\displaystyle\int dM^2\frac{a(M^2)}{k^2+M^2-i\varepsilon}} \qquad (3.81)$$

вместо прежнего выражения [формула (3.28)]

$$\overline{D}_+(k)=\frac{1}{k^2-i\varepsilon}+\int dM^2\frac{a(M^2)}{k^2+M^2-i\varepsilon}. \qquad (3.82)$$

Последнее можно снова получить, оставив только первые члены в разложении дроби, фигурирующей в формуле (3.81). Благодаря тому что при выводе модифицированных полевых уравнений мы пользовались принципом стационарного действия, нам удалось точнее учесть изменения в характеристиках распространения, обусловленные явлениями поляризации вакуума. Кстати, именно в таком контексте и обретает свой смысл подобная терминология — модифицированные полевые уравнения можно представить в форме уравнений Максвелла с некоторым добавочным током в областях, где поля претерпевают резкие изменения. В соответствии с физической картиной, лежащей в основе всего нашего рассмотрения, должно существовать представление функции распространения (3.81) в виде (3.82), но с другим положительным весовым множителем:

$$\overline{D}_{+}(k)=\frac{1}{k^2-i\varepsilon}+\int dM^2\,\frac{A(M^2)}{k^2+M^2-i\varepsilon}. \tag{3.83}$$

Функцию $A(M^2)$ можно найти путем сравнения мнимых частей в точке $-k^2=M^2$, используя соотношение

$$\frac{1}{M'^2-M^2-i\varepsilon}=P\,\frac{1}{M'^2-M^2}+i\pi\delta(M'^2-M^2). \tag{3.84}$$

Тогда мы получим величину

$$A(M^2)=\frac{a(M^2)}{\left[1-M^2P\int dM'^2\,\frac{a(M'^2)}{M^2-M'^2}\right]^2+[\pi M^2a(M^2)]^2}, \tag{3.85}$$

которая положительна.

В качестве не слишком радикального упрощающего предположения примем, что в $a(M^2)$ все добавки вида $(2m)^2/M^2$ пренебрежимо малы, т. е.

$$M^2>(2m)^2:\quad a(M^2)\approx\frac{\alpha}{3\pi}\,\frac{1}{M^2}. \tag{3.86}$$

Тогда необходимые интегралы вычисляются совершенно элементарно:

$$k^2\int dM^2\,\frac{a(M^2)}{k^2+M^2-i\varepsilon}=\frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\frac{k^2}{4m^2}+1\right), \tag{3.87}$$

$$M^2P\int dM'^2\,\frac{a(M'^2)}{M^2-M'^2}=\frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\frac{M^2}{4m^2}-1\right). \tag{3.88}$$

В случае отрицательных значений k^2+4m^2 в формуле (3.87) к ним следует подходить из нижней половины комплексной плоскости, что соответствует правилу обхода полюсов, которое находит свое выражение в записи $k^2-i\varepsilon$. В результате логарифм приобретает мнимое слагаемое — $i\pi$, согласующееся с наличием мнимой части $i\pi(-M^2)\,a(M^2)$ у величины, стоящей слева.

Такой упрощенный вариант дает

$$\bar{D}_+(k) = \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{k^2}{4m^2} + 1\right)} \tag{3.89}$$

и

$$\bar{D}_+(k) = \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} +$$

$$+ \frac{\alpha}{3\pi} \int_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2} \frac{\left\{\left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{M^2}{4m^2} - 1\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{3}\alpha\right)^2\right\}^{-1}}{k^2 + M^2 - i\varepsilon}. \tag{3.90}$$

Действительно ли эквивалентны эти два выражения? При решении этой математической задачи лучше всего рассматривать k^2 как комплексную переменную. Функция (3.89) имеет полюс при $k^2 = 0$ и точку ветвления при $k^2 = -4m^2$, причем обе эти особенности надлежащим образом представлены и в формуле (3.90). Но у функции (3.89) есть также полюс при

$$k^2 = 4m^2 \left[\exp\left(\frac{3\pi}{\alpha}\right) - 1\right], \tag{3.91}$$

который не содержится в (3.90), поскольку он является нефизической особенностью при пространственно-подобном значении k. Это чисто математическое противоречие, несущественное с физической точки зрения. Как и в случае функции (3.48), значения импульсов, или расстояний, при которых логарифмический множитель может скомпенсировать малую константу $\alpha/3\pi$, лежат неизмеримо ниже всякого физически мыслимого уровня. Для всех физических целей функция распространения (3.89) и ее более точное выражение (3.81) оказываются корректными, без каких бы то ни было ограничений на рассматриваемые физические процессы. У нас здесь нет никаких причин полагать, что формальное противоречие обусловлено чем-то иным, кроме физической незамкнутости схемы, которая выявляется при слишком уж неправомочной экстраполяции. Кстати, фотонная функция распространения (3.89) дает указания и на более общую формулировку асимметрии между электроном и мюоном, проявляющейся в различии их g-факторов,— к ней приводит замена

$$1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \ln\frac{m_\mu}{m_e} \to \frac{1}{1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \ln\frac{m_\mu}{m_e}}. \tag{3.92}$$

Это обстоятельство действительно представляло бы собой самый важный аспект эффектов высшего порядка, если бы логарифм был большим числом, однако $\ln(m_\mu/m_e) = 5{,}3$.

Последнее замечание возвращает нас к проблеме улучшения оценки (3.61). Для этого следует отказаться от сверхупрощающих предположений, приводящих к представлению (3.59), в котором полностью пренебрегается массами электронно-позитронных пар. Мы должны вновь повторить расчет, проведенный в § 2, заменив теперь фотонную функцию распространения $D_+(x-x')$ на $\Delta_+(x-x', M'^2)$, а затем взяв интеграл по спектральному распределению величины M'^2, входящей в модифицированную функцию распространения $\bar{D}_+(x-x')$. Непосредственные кинематические изменения в комбинации (2.17) определяются подстановками

$$\frac{M^2+m^2}{2M^2} \to \frac{M^2+m^2-M'^2}{2M^2} \tag{3.93}$$

и

$$1-\frac{m^2}{M^2} \to \left[1-\left(\frac{m+M'}{M}\right)^2\right]^{1/2}\left[1-\left(\frac{m-M'}{M}\right)^2\right]^{1/2} =$$
$$= \int_0^1 du\eta\left(M^2-\frac{m^2}{u}-\frac{M'^2}{1-u}\right), \tag{3.94}$$

где мы использовали значения интегралов (1.23) и (1.32). Замена m^2 на $m^2 - eq\sigma F$ вновь объединяется с подстановкой $M^2 \to M^2 - eq\sigma F$. Но, вместо того чтобы изменять комбинацию $1-(m^2/M^2)$ по способу, вытекающему из рассмотрения (2.19), теперь мы должны пользоваться подстановкой (3.94) и разложением, отвечающим случаю слабого поля:

$$\eta\left(M^2-eq\sigma F-\frac{m^2-eq\sigma F}{u}-\frac{M'^2}{1-u}\right)=$$
$$=\eta\left(M^2-\frac{m^2}{u}-\frac{M'^2}{1-u}\right)+\frac{1-u}{u}eq\sigma F\delta\left(M^2-\frac{m^2}{u}-\frac{M'^2}{1-u}\right). \tag{3.95}$$

В результате комбинация (2.20) переходит в

$$-i(4\pi)^2\Phi^{-1}\Delta_+(x-x', M^2)G_+^A(x, x')=$$
$$=\int dM^2 du\eta\left(m-\frac{M^2+m^2-M'^2}{2M^2}\gamma\left(\frac{1}{i}\right)\partial\right)\Delta_+(x-x', M^2-eq\sigma F)+$$
$$+\int dM^2 du\delta\frac{1-u}{u}eq\sigma F\left(m-\frac{M^2+m^2-M'^2}{2M^2}\gamma\left(\frac{1}{i}\right)\partial\right)\Delta_+(x-x', M^2)+$$
$$+\int dM^2 du\eta eq\sigma F\frac{M^2-m^2+M'^2}{2(M^2)^2}\gamma\left(\frac{1}{i}\right)\partial\Delta_+(x-x', M^2), \tag{3.96}$$

где ради упрощения записи перенесены в левую часть некоторые общие множители и опущены одинаковые аргументы у ступенчатой функции η и у дельта-функции. Проводя выкладки по тому же образцу, что и при получении (2.26), теперь будем иметь

$$-i(4\pi)^2\gamma^\mu\Delta_+(x-x', M^2)\,G_+^A(x, x')\,\gamma_\mu =$$
$$= \int dM^2\,du\,\delta eq\sigma F\left[4m + \frac{M^2+m^2-M'^2}{M^2}\,\frac{1+u}{u}\,\gamma\Pi\right]\Delta_+^A(x, x', M^2) -$$
$$- \int dM^2\,du\,\eta eq\sigma F\,\frac{M^2+m^2-M'^2}{(M^2)^2}\,\gamma\Pi\Delta_+^A(x, x', M^2), \qquad (3.97)$$

где представлены лишь члены, явно зависящие от поля. Входящую сюда ступенчатую функцию можно превратить в дельта-функцию, проводя интегрирование по частям, при котором возникающий внеинтегральный член обращается в нуль:

$$\int_0^1 du\,\eta = (u-1)\,\eta\Big|_0^1 + \int_0^1 du\,(u-1)\left(\frac{m^2}{u^2} - \frac{M'^2}{(1-u)^2}\right)\delta. \qquad (3.98)$$

К эффективному значению связи, включающей зависимость от поля и соответствующей величине ψ, которая удовлетворяет уравнению (2.33), мы придем, произведя подстановки

$$\gamma\Pi \to -m, \quad \Delta_+^A = \frac{1}{M^2-(\gamma\Pi)^2} \to \frac{1}{M^2-m^2}. \qquad (3.99)$$

Зависимость M^2 от параметра u определяется дельта-функцией, которая дает

$$M^2 = \frac{m^2}{u} + \frac{M'^2}{1-u}. \qquad (3.100)$$

В результате получаем следующее выражение для коэффициента $-(\alpha/2\pi)(1/2m)\,eq\sigma F$ в эффективном действии:

$$2\int_0^1 du\,\frac{u(1-u)^2}{(1-u)^2+\lambda u} + \lambda\int_0^1 du\,u\,(1-u)\left[2u\,\frac{1}{1-u+\lambda u}\,\frac{1}{(1-u)^2+\lambda u} - \right.$$
$$\left. - \frac{1-u^2+\lambda u^2}{(1-u)^2+\lambda u}\,\frac{1}{(1-u+\lambda u)^2}\right], \qquad (3.101)$$

где

$$\lambda = \frac{M'^2}{m^2}. \qquad (3.102)$$

Оно было получено путем лишь алгебраических преобразований. Но отсюда видно также, что подынтегральное выражение во втором слагаемом представляет собой полный дифференциал функции

$$\frac{u(1-u)}{1+(\lambda+1)u} + \ln\frac{(1-u)^2+\lambda u}{1+(\lambda-1)u}, \qquad (3.103)$$

обращающейся в нуль на концах интервала интегрирования. Тогда, в случае фотона, рассматривая возбуждение с массой M', вместо единицы можно подставить выражение

$$2\int_0^1 du\frac{u(1-u)^2}{(1-u)^2+(M'/m)^2u}. \tag{3.104}$$

При грубом анализе, который приводил к оценкам (3.60) и (3.61), этот множитель мы заменяли единицей при $M'<m$ и нулем при $M'>m$. Теперь же он объединяется с весовым множителем

$$\frac{\alpha}{3\pi}\frac{dM'^2}{M'^2}\left(1+2\frac{m'^2}{M'^2}\right)\left(1-\frac{4m'^2}{M'^2}\right)^{1/2}=\frac{\alpha}{\pi}dv\frac{v^2\left(1-\frac{1}{3}v^2\right)}{1-v^2}, \tag{3.105}$$

фигурирующим в формуле (3.28), где

$$v=\left(1-\frac{4m'^2}{M'^2}\right)^{1/2}, \tag{3.106}$$

а m' — масса заряженной частицы, которая дает вклад в поляризацию вакуума. В результате мы приходим к двойному интегралу

$$\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 du u(1-u)^2\int_0^1 dv v^2\left(1-\frac{1}{3}v^2\right)\times$$
$$\times\frac{1}{(1-u)^2(1-v^2)+\left(\frac{2m'}{m}\right)^2u}. \tag{3.107}$$

Отметим, что вклад поляризации электронного вакуума в g_e и вклад поляризации мюонного вакуума в g_μ одинаковы, поскольку для них $m'=m$. Асимметрия же возникает благодаря различию вкладов поляризации электронного вакуума в g_μ ($m'=m_e$, $m=m_\mu$) и поляризации мюонного вакуума в g_e ($m'=m_\mu$, $m=m_e$). В последнем случае большое отношение масс позволяет упростить интеграл:

$$\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2\int_0^1 du(1-u)^2\int_0^1 dv v^2\left(1-\frac{1}{3}v^2\right)=\frac{2\alpha}{45\pi}\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2. \tag{3.108}$$

Этот эффект чрезвычайно мал. При приближенном анализе случая $m'/m=m_e/m_\mu\ll 1$ преобразуем интеграл (3.107) к виду

$$\frac{2\alpha}{3\pi}\int_0^1 du u\int_0^1 dv\frac{2-(1-v^2)-(1-v^2)^2}{(1-v^2)+\left(\frac{2m_e}{m_\mu}\right)^2\frac{u}{(1-u)^2}} \tag{3.109}$$

и пренебрежем величиной $(2m_e/m_\mu)^2$ всюду, кроме первых трех членов. Проводя интегрирование по переменной v, получим

$$\frac{2\alpha}{3\pi}\int_0^1 du u\left[\ln\left(\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\frac{(1-u)^2}{u}\right)-\frac{5}{3}\right]=\frac{2\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{m_\mu}{m_e}-\frac{25}{12}\right) \qquad (3.110)$$

и в результате вместо (3.61) будем иметь

$$\frac{1}{2}g_\mu-\frac{1}{2}g_e=\frac{\alpha}{2\pi}\frac{2\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{m_\mu}{m_e}-\frac{25}{12}\right). \qquad (3.111)$$

Желательно улучшить эту оценку, сохранив члены порядка m_e/m_μ, что вполне можно сделать. Такие члены возникают из-за того, что при значениях u, близких к единице, в области с размерами $\sim m_e/m_\mu$ величина $(2m_e/m_\mu)^2\, u/(1-u)^2$ уже не является малой. Один из способов их вычисления — выполнить сначала интегрирование по v в формуле (3.109):

$$\frac{2\alpha}{3\pi}\int_0^1 du u\left[-\frac{5}{3}+x^2+\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)(1+x^2)^{1/2}\ln\frac{(1+x^2)^{1/2}+1}{(1+x^2)^{1/2}-1}\right], \qquad (3.112)$$

где

$$x=\frac{2m_e}{m_\mu}\frac{u^{1/2}}{1-u}. \qquad (3.113)$$

Затем нужно разбить область интегрирования по u на два промежутка, в первом из которых величина x всюду мала по сравнению с единицей, а во втором может принимать большие значения, но u столь мало отличается от единицы, что справедливо дифференциальное соотношение

$$u\sim 1:\quad du=\frac{2m_e}{m_\mu}\frac{dx}{x^2}. \qquad (3.114)$$

Преобразовав далее два члена так, чтобы исключить произвольную точку сшивания, получим следующую добавку (к 3.110):

$$\frac{4\alpha}{3\pi}\frac{m_e}{m_\mu}\int_0^\infty\frac{dx}{x^2}\left[x^2-\ln\frac{4}{x^2}+\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)(1+x^2)^{1/2}\ln\frac{(1+x^2)^{1/2}+1}{(1+x^2)^{1/2}-1}\right]. \qquad (3.115)$$

Проводя интегрирование по частям, будем иметь

$$\frac{4\alpha}{3\pi}\frac{m_e}{m_\mu}\int_0^\infty dx\left[1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{(1+x^2)^{1/2}}\ln\frac{(1+x^2)^{1/2}+1}{(1+x^2)^{1/2}-1}\right]. \qquad (3.116)$$

Вводя снова вспомогательную переменную v, мы для коэффициента при комбинации $(4\alpha/\pi)\,(m_e/m_\mu)$ получим

$$\int_0^\infty dx \int_0^1 dv \frac{1-v^2}{1-v^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 dv\,(1-v^2)^{1/2} = \frac{\pi^2}{8}. \qquad (3.117)$$

В итоге (3.111) заменяется следующим более точным выражением:

$$\frac{1}{2}g_\mu - \frac{1}{2}g_e = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{2\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{m_\mu}{m_e} - \frac{25}{12} + \frac{3}{4}\pi^2\frac{m_e}{m_\mu}\right). \qquad (3.118)$$

Если воспользоваться численным значением

$$\ln\frac{m_\mu}{m_e} - \frac{25}{12} + \frac{3}{4}\pi^2\frac{m_e}{m_\mu} = 3{,}285, \qquad (3.119)$$

то вместо оценки (3.61) будем иметь

$$\frac{1}{2}g_\mu - \frac{1}{2}g_e = (1{,}161\cdot10^{-3})\,(5{,}085\cdot10^{-3}) = 0{,}590\cdot10^{-5}. \qquad (3.120)$$

Общее согласие данного результата с последним экспериментальным значением $(0{,}66 \pm 0{,}03)\cdot10^{-5}$ убедительно свидетельствует о том, что основной вклад в рассматриваемый эффект дает поляризация вакуума. Относительно же реальности имеющегося здесь расхождения заметим, что, помимо всевозможных малых поправок типа (3.92) (к этому вопросу мы, по-видимому, еще вернемся в следующих главах), существуют не учтенные нами физические процессы, в которых, помимо электрона и мюона, участвуют другие частицы. Так, например, π-мезон ненамного тяжелее мюона, и он может давать существенный вклад в асимметрию. Этот эффект можно оценить, заменив весовую функцию (3.105) величиной, соответствующей спектральному представлению (3.39) для частиц со спином 0:

$$\frac{\alpha}{12\pi}\frac{dM'^2}{M'^2}\left(1-\frac{4m'^2}{M'^2}\right)^{3/2} = \frac{\alpha}{6\pi}\,dv\,\frac{v^4}{1-v^2}. \qquad (3.121)$$

Тогда вместо интеграла (3.107) будем иметь

$$\frac{\alpha}{3\pi}\int_0^1 du\,u\,(1-u)^2\int_0^1 dv\,v^4\,\frac{1}{(1-u)^2(1-v^2)+\left(\dfrac{2m_\pi}{m_\mu}\right)^2 u} <$$

$$< \frac{\alpha}{12}\left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2\int_0^1 du\,(1-u)^2\int_0^1 dv\,v^4 = \frac{\alpha}{180\pi}\left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2. \qquad (3.122)$$

Даже этот верхний предел отличается от величины (3.120) только последней значащей цифрой. Однако при таком расчете совершенно не учитываются свойства π-мезона, связанные с его участием в сильных взаимодействиях. Пара противоположно заряженных π-мезонов посредством сильного взаимодействия связана с нейтральным ρ-мезоном, который обладает теми же квантовыми числами, что и фотон. Вне сферы действия электрон-мюонных процессов наиболее существенную роль в явлениях поляризации вакуума может играть как раз непосредственная связь фотона с ρ^0 (а также с ω и φ). Мы еще не подготовлены к количественному анализу этой проблемы, но все же на пути к ее решению можно сделать один шаг, заметив, что для столь массивных частиц вместо (3.104) применимо более простое выражение

$$\left(\frac{M'}{m}\right)^2 \gg 1: \quad 2\left(\frac{m}{M'}\right)^2 \int_0^1 du\,(1-u)^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{m}{M'}\right)^2. \tag{3.123}$$

Добавка к фотонному эффекту, обусловленная сильным взаимодействием, получается путем усреднения (3.123) по распределению тяжелых частиц в фотонной функции распространения. В определении среднего значения обратного квадрата массы мы будем явным образом выделять электромагнитный фактор α/π. Тогда дополнительный вклад сильного взаимодействия примет вид

$$\left(\frac{1}{2}g_\mu - \frac{1}{2}g_e\right)_{\text{сильн. вз}} = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{2\alpha}{3\pi}(m_\mu^2 - m_e^2)\left\langle\frac{1}{M'^2}\right\rangle. \tag{3.124}$$

Если подставить сюда для прикидки массу ρ-мезона, то сразу будет видно, что рассматриваемые явления дают существенный вклад в последнюю значащую цифру величины (3.120).

Последнее приложение модифицированной функции распространения из числа рассматриваемых в данном параграфе также несколько выходит за границы области явлений, в которых участвуют фотоны и заряженные лептоны. Нейтральный π-мезон распадается главным образом на два фотона. Некоторую долю распадов составляют процессы с образованием фотона и электрон-позитронной пары, в гораздо меньшей части событий испускаются две электрон-позитронных пары. Описание соотношений между этими процессами дается модифицированной фотонной функцией распространения.

Эффективная связь для двухфотонного распада пиона 0^- сходна с выражением (3-13.75), описывающим двухфотонную аннигиляцию электрон-позитронной пары, — роль квадратичной по полю комбинации $^1/_2\, \psi(x)\, \gamma^0\gamma_5\psi(x)$ играет псевдоскалярное пионное поле $\varphi(x)$:

$$W_{\pi^0 \to 2\gamma} = f \int (dx)\, \varphi(x) \left(-\frac{1}{4}\right)^* F^{\mu\nu}(x)\, F_{\mu\nu}(x), \tag{3.125}$$

где f — соответствующая константа связи. Функции поля $\varphi(x)$ как эффективного двухфотонного источника становятся ясными из сравнения величины $iW_{\pi^0\to 2\gamma}$ с

$$\frac{1}{2}\left[i\int (dx)\, J^\mu(x)\, A_\mu(x)\right]^2, \tag{3.126}$$

которое дает

$$iJ^\mu(x)\, J^\nu(x')\,|_{\text{эфф}} = f\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}\partial_\varkappa\partial'_\lambda\,[\delta(x-x')\,\varphi(x)]. \tag{3.127}$$

Двум таким источникам при их причинно-упорядоченном расположении отвечает следующая связь, обусловленная двухчастичным обменом:

$$\frac{1}{2}\left[i\int (dx)(dx')\, J_1^\mu(x)\,\overline{D}_+(x-x')\,J_{2\mu}(x')\right]^2\Big|_{\text{эфф}} =$$
$$= f^2\int (dx)(dx')\,\varphi_1(x)\,[\partial^\mu\partial^\nu\overline{D}_+(x-x')\,\partial_\mu\partial_\nu\overline{D}_+(x-x') -$$
$$-\partial^2\overline{D}_+(x-x')\,\partial^2\overline{D}_+(x-x')]\,\varphi_2(x'), \tag{3.128}$$

где использовано соотношение

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \delta_\alpha^\varkappa\delta_\beta^\lambda - \delta_\beta^\varkappa\delta_\alpha^\lambda. \tag{3.129}$$

Комбинацию в квадратных скобках удобнее представить как

$$\frac{1}{2}(\partial^2)^2\,[\overline{D}_+(x-x')]^2 - \partial^2\,[\overline{D}_+(x-x')\,\partial^2\overline{D}_+(x-x')] +$$
$$+\frac{1}{2}\overline{D}_+(x-x')\,(\partial^2)^2\,\overline{D}_+(x-x') - \frac{1}{2}\partial^2\overline{D}_+(x-x')\,\partial^2\overline{D}_+(x-x'). \tag{3.130}$$

К квадратичному по полю действию добавляется выражение, получаемое путем пространственно-временно́й экстраполяции этой связи с учетом требований нормировки массы. Если рассматривается поле вдали от источника, где его поведение в основных своих чертах определяется уравнением

$$(-\partial^2 + m_\pi^2)\,\varphi(x) = 0, \tag{3.131}$$

то эффективный лагранжиан примет вид

$$-\frac{1}{2}\,[\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi + (m_\pi^2 - im_\pi\gamma)\,\varphi^2]. \tag{3.132}$$

Величина $(i/2)\, m_\pi\gamma\varphi^2$ здесь представляет собой дополнительный член, записанный в приведенной форме. (Изменение величины m_π^2 исключено нормировкой массы.) Эта величина характеризует нестабильность частицы. В случае слабой нестабильности

$$\gamma \ll m_\pi:\quad m_\pi^2 - im_\pi\gamma \approx \left(m_\pi - \frac{i}{2}\gamma\right)^2 \tag{3.133}$$

и поле, соответствующее частице, в ее системе покоя изменяется во времени по закону

$$\left| \exp \left[-i \left(m_\pi - \frac{i}{2} \gamma \right) x^0 \right] \right|^2 = \exp(-\gamma x^0). \tag{3.134}$$

Отсюда видно, что константу γ, обратную среднему времени жизни, следует отождествить с полной скоростью распада. Вычисляя γ с помощью модифицированной функции распространения $\overline{D}_+$, можно явным образом выделить вклады всевозможных двухфотонных, однофотонных или безфотонных процессов.

Проиллюстрируем сказанное на примере расчета константы двухфотонного распада. В этом случае следует учесть лишь функцию D_+, причем в условиях причинной упорядоченности источников, соответствующей формулам (3.128) и (3.130), мы имеем $\partial^2 D_+ = 0$. Тем самым выражение для связи сводится к

$$\frac{1}{4} f^2 \int (dx)(dx')\, \partial^2 \varphi_1(x) [D_+(x-x')]^2 \partial^2 \varphi_2(x') \to$$

$$\to \frac{1}{4} f^2 m_\pi^4 \int (dx)(dx')\, \varphi_1(x) [D_+(x-x')]^2 \varphi_2(x'). \tag{3.135}$$

При переходе к последней форме записи мы учли то обстоятельство, что поле, соответствующее рассматриваемой связи, должно будет удовлетворять уравнению (3.131). Заметим теперь, что в соответствии с выражением (1.23), взятым при $m_a = m_b = 0$, мы имеем

$$x^0 > x^{0\prime}: \quad [D(x-x')]^2 = \left[i \int d\omega_k \exp[ik(x-x')] \right]^2 =$$

$$= i \int dM^2 \int d\omega_k\, d\omega_{k'}\, (2\pi)^3 \delta(k+k'-P) \Big|_{-P^2=M^2} \times$$

$$\times\, i \int d\omega_P \exp[iP(x-x')] = \frac{i}{(4\pi)^2} \int dM^2 \Delta_+(x-x', M^2). \tag{3.136}$$

При пространственно-временно́й экстраполяции произведение $\varphi_1\varphi_2$ заменится величиной $^1/_2\varphi\varphi$, и, отбросив множитель i, мы получим выражение для дополнительного действия. Из того обстоятельства, что мы ограничиваемся рассмотрением поля, удовлетворяющего уравнению (3.131), вытекает возможность замены

$$\int (dx')\, \Delta_+(x-x', M^2)\, \varphi(x') =$$

$$= \frac{1}{M^2 - \partial^2 - i\varepsilon} \varphi(x) \to \frac{1}{M^2 - m_\pi^2 - i\varepsilon} \varphi(x). \tag{3.137}$$

Взяв мнимую часть этого множителя, равную $i\pi\delta(M^2 - m_\pi^2)$, мы выделим интересующую нас добавку к действию

$$i \frac{f^2}{64\pi} m_\pi^4 \frac{1}{2} \int (dx) [\varphi(x)]^2, \tag{3.138}$$

что дает

$$\gamma=\frac{f^2}{64\pi}m_\pi^3. \tag{3.139}$$

Соотношение скоростей процессов с образованием одной и двух пар можно быстро оценить путем упрощенных рассуждений типа приведших к формуле (3.59), положив m_π в качестве верхнего предела для масс электрон-позитронных пар. Поскольку перемножаются две функции распространения, скорость распада приобретает множитель

$$\sim\left(1+\frac{2\alpha}{3\pi}\ln\frac{m_\pi}{m_e}\right)^2. \tag{3.140}$$

Им и определяются относительные скорости процессов с образованием одной и двух пар:

$$\frac{\gamma'}{\gamma}\sim\frac{4\alpha}{3\pi}\ln\frac{m_\pi}{m_e},\qquad \frac{\gamma''}{\gamma}\sim\left(\frac{2\alpha}{3\pi}\ln\frac{m_\pi}{m_e}\right)^2. \tag{3.141}$$

Теперь мы проведем более точный расчет отношения γ'/γ. После подстановки общего выражения (3.83) для функции распространения следует выделить вклады с одной функцией $D_+\,(x-x')$ и одной функцией $\Delta_+\,(x-x',\,M'^2)$. Имея в виду, что операторы ∂^2, действие которых можно отнести к полям, заменяются множителем m_π^2, эффективную комбинацию (3.130) для рассматриваемых процессов запишем в виде

$$\frac{1}{2}\int dM'^2A\,(M'^2)\,(m_\pi^2-M'^2)^2\,D_+\,(x-x')\,\Delta_+\,(x-x',\,M'^2). \tag{3.142}$$

Эти произведения функций распространения таковы:

$x^0>x^{0\prime}$:

$$\begin{aligned}
&D_+\,(x-x')\,\Delta_+\,(x-x',\,M'^2)=\\
&=i\int dM^2\int d\omega_k\,d\omega_p\,(2\pi)^3\,\delta\,(k+p-P)\Big|_{-P^2=M^2}\times\\
&\times i\int d\omega_P\exp\,[iP\,(x-x')]=\\
&=\frac{i}{(4\pi)^2}\int dM^2\left(1-\frac{M'^2}{M^2}\right)\Delta_+\,(x-x',\,M^2),
\end{aligned} \tag{3.143}$$

где использовано значение интеграла (1.25). Из сравнения с результатами предыдущих вычислений для искомого отношения получаем

$$\frac{\gamma'}{\gamma}=2\int\limits_{(2m_e)^2}^{m_\pi^2}dM'^2A\,(M'^2)\left(1-\frac{M'^2}{m_\pi^2}\right)^3. \tag{3.144}$$

В случае весовой функции (3.67)

$$A\,(M'^2)=\frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{M'^2}\left(1+\frac{2m_e^2}{M'^2}\right)\left(1-\frac{4m_e^2}{M'^2}\right)^{1/2} \tag{3.145}$$

интеграл может быть вычислен с достаточной точностью. Нужно лишь разбить промежуток интегрирования на два, взяв значение $M'^2 = M_0^2$, удовлетворяющее неравенствам

$$m_e^2 \ll M_0^2 \ll m_\pi^2, \tag{3.146}$$

что приводит к следующим упрощениям:

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{2\alpha}{3\pi} \int\limits_{(2m_e)^2}^{M_0^2} \frac{dM'^2}{M'^2} \left(1 + \frac{2m_e^2}{M'^2}\right) \left(1 - \frac{4m_e^2}{M'^2}\right)^{1/2} + \\ + \frac{2\alpha}{3\pi} \int\limits_{M_0^2}^{m_\pi^2} \frac{dM'^2}{M'^2} \left(1 - \frac{M'^2}{m_\pi^2}\right)^3. \tag{3.147}$$

Для вычисления первого интеграла может быть использована параметризация (3.105). В итоге получаем

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{2\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{M_0^2}{m_e^2} - \frac{5}{3}\right) + \frac{2\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{m_\pi^2}{M_0^2} - \frac{11}{6}\right) = \\ = \frac{4\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{m_\pi}{m_e} - \frac{7}{4}\right), \tag{3.148}$$

что согласуется с оценкой (3.141). Получаемый таким способом численный результат

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = 1{,}18 \cdot 10^{-2} \tag{3.149}$$

блестяще согласуется с экспериментальным значением, равным $(1{,}17 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-2}$. Относительно же γ'' заметим лишь, что уточненный расчет приблизительно сохраняет простое соотношение, вытекающее из (3.141):

$$\frac{\gamma''}{\gamma} \approx \left(\frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2. \tag{3.150}$$

§ 4. ФОРМФАКТОРЫ I. РАССЕЯНИЕ

В начале данной главы мы отмечали, что, хотя модифицированные функции распространения имеют очень важное значение, они все же не обеспечивают полного описания процессов многочастичного обмена. Когда речь шла о примитивном взаимодействии и процессах взаимодействия, порождающих модифицированную фотонную функцию распространения, мы указывали, что наличие таких процессов взаимодействия приводит и к другим следствиям, которые описываются модифицированными электромагнитными связями. Теперь мы перейдем к подробному рассмотрению этих вопросов.

Примитивное взаимодействие для частиц со спином 0 отождествляет электромагнитный векторный потенциал

$$A_\mu(k) = D_+(k) J_\mu(k) \tag{4.1}$$

с эффективным источником испускания двух частиц [формула (3.33)]

$$iK_2(p) K_2(p')\big|_{\text{эфф}} = eq(p - p')^\mu A_\mu(k) \tag{4.2}$$

при условии, что выполняется соотношение

$$-k^2 > (2m)^2, \tag{4.3}$$

означающее, что превышен массовый порог. Соответствующие противоположно заряженные частицы рождаются в условиях, которые отвечают отсутствию взаимодействия между ними. Однако с течением времени эти частицы могут вступать во взаимодействие по схеме, изложенной в гл. 3, § 12 при анализе рассеяния. Рассматривавшуюся там вакуумную амплитуду (3-12.83) будем представлять теперь в более удобной форме, содержащей многокомпонентные источники в зарядовом пространстве:

$$ie^2\frac{1}{2}\int d\omega_{p_1}\, d\omega_{p_2'}\, d\omega_{p_2}\, d\omega_{p_2'} K_1(-p_1)[K_2(p_2)K_2(p_2')]K_1(-p_1')\times$$
$$\times(2\pi)^4\delta(p_1+p_1'-p_2-p_2')\left[-\frac{(p_1+p_2)(p_1'+p_2')}{(p_1-p_2)^2}+\frac{(p_1-p_1')(p_2-p_2')}{(p_1+p_1')^2}\right]. \tag{4.4}$$

Такая форма записи будет верна при условии, что обеспечивается отбор противоположно заряженных частиц, соответствующий выражению (4.2). После его подстановки связь примет вид

$$-e^2\frac{1}{2}\int d\omega_{p_1}\, d\omega_{p_1'}(2\pi)^4\delta(p_1+p_1'-k)\, dM^2\, d\omega_k K_1(-p_1)\times$$
$$\times eqK_1(-p_1')I^\mu A_\mu(k) + e^2\frac{1}{2}\int d\omega_{p_1}\, d\omega_{p_1'}(2\pi)^4(p_1+p_1'-k)\times$$
$$\times\frac{dM^2}{(M^2)^2}d\omega_k K_1(-p_1)\, eq(p_1-p_1')^\mu K_1(-p_1')I_{\mu\nu}J^\nu(k), \tag{4.5}$$

где

$$I^\mu = \int d\omega_{p_2}\, d\omega_{p_2'}(2\pi)^3\delta(p_2+p_2'-k)\frac{(p_1+p_2)(p_1'+p_2')}{(p_1-p_2)^2}(p_2-p_2')^\mu \tag{4.6}$$

и

$$I_{\mu\nu} = \int d\omega_{p_2}\, d\omega_{p_2'}(2\pi)^3\delta(p_2+p_2'-k)(p_2-p_2')_\mu(p_2-p_2')_\nu =$$
$$=\left(g_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right)\frac{1}{3}\frac{1}{(4\pi)^2}M^2\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{3/2}. \tag{4.7}$$

Выражение для последнего интеграла мы написали, вспомнив, что он уже встречался нам, когда речь шла о поляризации вакуума для частиц со спином 0 [равенства (3.35), (3.19) и (3.37)]. Заметим также, что вектор тока

$$j^{\mu}(x)=\varphi_1(x)\,eq\,\frac{1}{i}\,\partial^{\mu}\varphi_1(x) \tag{4.8}$$

в области, предшествующей во времени действию детектирующего источника K_1, равен

$$j^{\mu}(x)=\int d\omega_{p_1}\,d\omega_{p_2'}\,iK_1(-p_1)\,eq\,\frac{1}{2}\,(p_1-p_1')^{\mu}\,iK_1(-p_1')\times \\ \times\exp\left[-i\,(p_1+p_1')\,x\right]. \tag{4.9}$$

Следовательно, второе слагаемое в формуле (4.5) имеет вид

$$i\,\frac{\alpha}{12\pi}\int\frac{dM^2}{M^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{3/2}\int(dx)\,(dx')\,j^{\mu}(x)\times \\ \times\left[i\int d\omega_k\exp\left[ik\,(x-x')\right]\right]J_{\mu}(x')= \\ =i\int(dx)\,(dx')\,j^{\mu}(x)\,[\bar{D}_+(x-x')-D_+(x-x')]\,J_{\mu}(x'). \tag{4.10}$$

Здесь мы узнаем выражение для модифицированной фотонной функции распространения (3.39) в случае частиц со спином 0. Это тот самый механизм, который мы заранее предполагали, обеспечивающий замену D_+ на $\bar{D}_+$ в векторном потенциале примитивного взаимодействия.

Ниже все наше внимание будет сконцентрировано на первом слагаемом в формуле (4.5) и на интеграле (4.6). Вектор, определяемый последним интегралом, должен представлять собой некоторую линейную комбинацию конечных импульсов p_1^{μ} и $p_1'^{\mu}$. Перестановка их одновременно с перестановкой p_2 и p_2' приводит к изменению знака у I^{μ} [напомним, что $(p_1'-p_2')^2=(p_1-p_2)^2$]. Отсюда заключаем, что

$$I^{\mu}=(p_1-p_1')^{\mu}\,S(M)^2, \tag{4.11}$$

где

$$S(M^2)=\int d\omega_{p_2}\,d\omega_{p_2'}\,(2\pi)^3\,\delta(p_2+p_2'-k)\times \\ \times\frac{(p_1+p_2)\,(p_1'+p_2')}{(p_1-p_2)^2}\,\frac{(p_1-p_1')\,(p_2-p_2')}{(p_1-p_1')^2}\equiv \\ \equiv\frac{1}{(4\pi)^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\left\langle\frac{(p_1+p_2)\,(p_1'+p_2')}{(p_1-p_2)^2}\,\frac{(p_1-p_1')\,(p_2-p_2')}{M^2-4m^2}\right\rangle. \tag{4.12}$$

В системе покоя, отвечающей вектору k, энергии всех четырех частиц равны $^1/_2M$, и в процессе вычисления (4.12) интегрирование проводится по углу рассеяния θ — углу между векторами $\mathbf{p}_1=$

$= -\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_2'$:

$$\langle \ldots \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{d(\cos\theta)}{2} \frac{-M^2-(M^2-4m^2)\cos^2\frac{\theta}{2}}{(M^2-4m^2)\sin^2\frac{\theta}{2}}\cos\theta =$$

$$= -2(M^2-2m^2)\int_{-1}^{1}\frac{d(\cos\theta)}{2}\frac{1}{(M^2-4m^2)\sin^2\frac{\theta}{2}} + 4\frac{M^2-2m^2}{M^2-4m^2}. \quad (4.13)$$

Здесь мы вынуждены констатировать, что интеграл по углам обладает логарифмической особенностью при $\theta = 0$. Это оказывается следствием того, что в случае дальнодействующего кулоновского потенциала сечение рассеяния вперед неограниченно. Формализм напоминает нам, что схема примитивного взаимодействия, основанная на представлении о свободных частицах, не может быть реализована полностью, когда частицы заряжены. Здесь мы имеем еще один аспект инфракрасной проблемы, ибо за неограниченность радиуса действия кулоновского потенциала ответственна нулевая масса покоя фотона. Поэтому можно думать, что данная трудность всего лишь внешняя и исчезнет при учете дополнительных процессов с участием мягких фотонов. Однако пока мы обойдем эту проблему, представив себе, что фотон имеет очень малую, но конечную массу μ. Вспомнив происхождение комбинации $(p_1 - p_2)^2$ в фотонной функции распространения, получим, что сингулярный интеграл (4.13) принимает вид

$$\int_{-1}^{1}\frac{d(\cos\theta)}{2}\frac{1}{(M^2-4m^2)\sin^2\frac{\theta}{2}+\mu^2} = \frac{1}{M^2-4m^2}\ln\frac{M^2-4m^2}{\mu^2}, \quad (4.14)$$

и поэтому

$$S(M^2) = -\frac{2}{(4\pi)^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{2m^2}{M^2}\right)\left(\ln\frac{M^2-m^2}{\mu^2}-2\right). \quad (4.15)$$

Внимательно посмотрев на первое слагаемое в формуле (4.5) после подстановки в него выражения (4.11), мы увидим, что и в нем присутствует векторная комбинация, совпадающая с током (4.9). В итоге это слагаемое может быть представлено в форме

$$i\frac{\alpha}{2\pi}\int dM^2\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{2m^2}{M^2}\right)\left(\ln\frac{M^2-4m^2}{\mu^2}-2\right)\times$$
$$\times\int(dx)(dx')\,j^{\mu}(x)\left[i\int d\omega_k \exp[ik(x-x')]\right]A_{\mu}(x'). \quad (4.16)$$

Однако до пространственно-временной экстраполяции, которую мы должны теперь осуществить, следует остановиться на одном пункте, касающемся калибровочной инвариантности полученного выражения. В рассматриваемых условиях причинной упорядоченности источников оно действительно калибровочно-инвариантно, так как

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad [k(p_1 - p_1') = 0]. \tag{4.17}$$

Но это свойство существенно связано с кинематикой свободных частиц и не сохранится после проведения пространственно-временнóй экстраполяции. Следовательно, мы должны переписать выражение (4.16) таким образом, чтобы обеспечить его калибровочную инвариантность в общем случае, не прибегая к рассмотрению причинных связей. Возвращаясь на мгновение к импульсному пространству, заметим, что комбинация

$$\frac{1}{M^2}(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)A^\nu(k) = A_\mu(k) + k_\mu\left[\frac{1}{M^2}k_\nu A^\nu(k)\right] \tag{4.18}$$

отличается от $A_\mu(k)$ лишь калибровочным преобразованием и векторный потенциал в формуле (4.16) можно заменить этой величиной. Такая замена соответствует подстановке

$$A_\mu(x) \to -\frac{1}{M^2}\partial^\nu F_{\mu\nu}(x), \tag{4.19}$$

после которой выражение, получаемое путем пространственно-временнóй экстраполяции величины (4.16), принимает вид

$$-i\int\limits_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}f(M^2)\int(dx)(dx')\,j^\mu(x)\Delta_+(x-x', M^2)\,\partial'^\nu F_{\mu\nu}(x'), \tag{4.20}$$

где введено обозначение

$$f(M^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{2m^2}{M^2}\right)\left(\ln\frac{M^2-4m^2}{\mu^2}-2\right). \tag{4.21}$$

Ту часть действия, в которую примитивное взаимодействие входит в комбинации с двумя только что вычисленными поправками, порождаемыми вторичными взаимодействиями, можно представить в форме

$$\int(dx)(dx')\,j^\mu(x)\,f_{\mu\nu}(x-x')\,\bar{A}^\nu(x'), \tag{4.22}$$

где

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu}(x-x') &= f_{\nu\mu}(x-x') = \\ &= g_{\mu\nu}\delta(x-x') - (\partial_\mu\partial_\nu - g_{\mu\nu}\partial^2)\int\frac{dM^2}{M^2}f(M^2)\Delta_+(x-x', M^2), \end{aligned} \tag{4.23}$$

хотя эта конструкция и не совсем укладывается в рамки прямой расчетной схемы, включающей модифицированное поле

$$\bar{A}^\mu(x) = \int(dx')\,\bar{D}_+(x-x')\,J^\mu(x'). \tag{4.24}$$

Эквивалентном функции (4.23) в четырехмерном импульсном пространстве служит функция

$$f_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} + (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\int \frac{dM^2}{M^2}\frac{f(M^2)}{k^2+M^2-i\varepsilon}. \tag{4.25}$$

Если подчинить векторный потенциал калибровке Лоренца и переписать (4.24) с учетом этого условия, то члены с $k_\mu k_\nu$ или $-\partial_\mu\partial_\nu$ исчезнут и мы получим

$$f_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu}F(k), \tag{4.26}$$

где

$$F(k) = 1 - k^2\int \frac{dM^2}{M^2}\frac{f(M^2)}{k^2+M^2-i\varepsilon}. \tag{4.27}$$

Тогда выражение (4.22), описывающее взаимодействие, примет вид

$$\int (dx)(dx')\, j^\mu(x)\, F(x-x')\, \bar{A}_\mu(x') \equiv \int (dx)\, j^\mu(x)\Big|_{\text{эфф}} \bar{A}_\mu(x). \tag{4.28}$$

Такой формой записи подчеркивается, что ток, эффективно взаимодействующий в данной точке с векторным потенциалом, получается путем усреднения с некоторым весом локальной комбинации полей j^μ по всему пространству-времени. Называя функцию $F(x-x')$ или $F(k)$ «формфактором», мы указываем на роль этой функции в создании дополнительного распределения или конфигурации заряда, отвечающего локальному току $j^\mu(x)$. Следует иметь в виду, что один-единственный формфактор $F(k)$ служит лишь упрощенной заменой тензорного формфактора $f_{\mu\nu}(k)$.

Прежде чем исследовать физический смысл формфактора, воспроизведем наши проведенные ранее выкладки для частиц со спином $^1/_2$. Согласно формуле (3.5), эффективный источник испускания двух частиц, ассоциируемый с электромагнитным векторным потенциалом, имеет здесь вид

$$i\eta_2(p)\,\eta_2(p')\,|_{\text{эфф}} = eq\gamma^\mu\gamma^0 A_\mu(k). \tag{4.29}$$

Поскольку теперь совершенно ясно, что аннигиляционный механизм рассеяния порождает модифицированную фотонную функцию распространения, мы будем рассматривать только вакуумную амплитуду для кулоновского отклонения частиц. Чтобы представить ее в форме, пригодной для наших целей, проще всего вернуться к выражению для члена взаимодействия

$$\frac{i}{2}\int (dx)(dx')\,\psi_1(x)\gamma^0\gamma^\mu eq\psi_2(x)\,D_+(x-x')\,\psi_2(x')\gamma^0\gamma_\mu eq\psi_1(x') \tag{4.30}$$

и ввести поля, отвечающие наличию причинно-следственных связей:

$$\begin{aligned} \psi_1(x)\gamma^0 &= \int d\omega_p i\eta_1(-p)\,\gamma^0(m-\gamma p)\exp(-ipx),\\ \psi_1(x) &= -\int d\omega_p \exp(-ipx)(-m-\gamma p)\, i\eta_1(-p) \end{aligned} \tag{4.31}$$

и

$$\psi_2(x) = \int d\omega_p \exp(ipx)(m - \gamma p)\, i\eta_2(p),$$
$$\psi_2(x)\gamma^0 = -\int d\omega_p i\eta_2(p)\gamma^0(-m - \gamma p)\exp(ipx). \tag{4.32}$$

Это приводит к такому слагаемому в вакуумной амплитуде:

$$ie^2 \frac{1}{2}\int d\omega_{p_1} d\omega_{p_1'} d\omega_{p_2} d\omega_{p_2'} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_1' - p_2 - p_2') \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} \times$$
$$\times \eta_1(-p_1)\gamma^0(m - \gamma p_1)\gamma^\mu q(m - \gamma p_2)\eta_2(p_2)\eta_2(p_2')\gamma^0 \times$$
$$\times(-m - \gamma p_2')\gamma_\mu q(-m - \gamma p_1')\eta_1(-p_1'). \tag{4.33}$$

Подставив сюда эффективный источник (4.29), получим

$$\frac{e^2}{2}\int d\omega_{p_1} d\omega_{p_1'} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_1' - k)\, dM^2\, d\omega_k \times$$
$$\times \eta_1(-p_1)\gamma^0(m - \gamma p_1)\, eqI^\mu(-m - \gamma p_1')\eta_1(-p_1') A_\mu(k), \tag{4.34}$$

где

$$I^\mu = \int d\omega_{p_2} d\omega_{p_2'} (2\pi)^3 \delta(p_2 + p_2' - k)\gamma^\nu(m - \gamma p_2)\gamma^\mu \times$$
$$\times(-m - \gamma p_2')\gamma_\nu \frac{1}{(p_1 - p_2)^2}. \tag{4.35}$$

Калибровочная инвариантность этой связи, т. е. соотношение

$$k_\mu I^\mu = 0, \tag{4.36}$$

является следствием алгебраических свойств проекционных матриц $m - \gamma p_2$ и $-m - \gamma p_2'$:

$$(m - \gamma p_2)\gamma k(-m - \gamma p_2') =$$
$$= (m - \gamma p_2)[(\gamma p_2 + m) + (\gamma p_2' - m)](-m - \gamma p_2') = 0. \tag{4.37}$$

Приведение матриц в I^μ осуществляется при помощи проекционных матриц $m - \gamma p_1$ и $-m - \gamma p_1'$, входящих в выражение (4.34). Благодаря их наличию масса m эквивалентна матрице $-\gamma p_1$, стоящей слева от I^μ, и матрице $\gamma p_1'$, стоящей справа от I^μ. Учитывая это, а также алгебраические свойства матриц, имеем

$$\gamma^\nu(m - \gamma p_2)\gamma^\mu(-m - \gamma p_2')\gamma_\nu =$$
$$= [2p_2^\nu + (m + \gamma p_2)\gamma^\nu]\gamma^\mu[2p_{2\nu}' + \gamma_\nu(-m + \gamma p_2')] \to$$
$$\to [2p_2^\nu - \gamma(p_1 - p_2)\gamma^\nu]\gamma^\mu[2p_{2\nu}' - \gamma_\nu\gamma(p_1' - p_2')] =$$
$$= 4p_2p_2'\gamma^\mu + 2\gamma^\mu\gamma p_2\gamma(p_1 - p_2) - 2\gamma(p_1 - p_2)\gamma p_2'\gamma^\mu -$$
$$-2\gamma(p_1 - p_2)\gamma^\mu\gamma(p_1 - p_2), \tag{4.38}$$

причем мы здесь воспользовались также соотношениями

$$p_1' - p_2' = -(p_2 - p_2), \qquad \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu = 2\gamma^\mu. \tag{4.39}$$

Дальнейшие упрощения таковы:

$$\gamma^\mu \gamma p_2 \gamma (p_1 - p_2) = \gamma^\mu \gamma p_1 \gamma (p_1 - p_2) + (p_1 - p_2)^2 \gamma^\mu \to$$
$$\to m\gamma^\mu \gamma (p_1 - p_2) - 2p_1^\mu \gamma (p_1 - p_2) + (p_1 - p_2)^2 \gamma^\mu, \tag{4.40}$$
$$-\gamma (p_1 - p_2) \gamma p_2' \gamma^\mu = -\gamma (p_1 - p_2) \gamma p_1' \gamma^\mu + (p_1 - p_2)^2 \gamma^\mu \to$$
$$\to m\gamma (p_1 - p_2) \gamma^\mu + 2p_1'^\mu \gamma (p_1 - p_2) + (p_1 - p_2)^2 \gamma^\mu. \tag{4.41}$$

В результате придем к выражению, которое можно проинтегрировать:

$$\gamma^\nu (m - \gamma p_2) \gamma^\mu (-m - \gamma p_2') \gamma_\nu \to -2 (M^2 - 2m^2) \gamma^\mu +$$
$$+ 2 (p_1 - p_2)^2 \gamma^\mu - 4m (p_1 - p_2)^\mu + 4 (p_1' - p_2)^\mu \gamma (p_1 - p_2). \tag{4.42}$$

Используя обозначение, введенное в формуле (4.12), теперь будем иметь

$$I^\mu = -\frac{2}{(4\pi)^2} \left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2} \left[(M^2 - 2m^2) \left\langle \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} \right\rangle \gamma^\mu - \gamma^\mu + \right.$$
$$\left. + 2m \left\langle \frac{(p_1 - p_2)^\mu}{(p_1 - p_2)^2} \right\rangle - 2 \left\langle \frac{(p_1' - p_2)^\mu (p_1 - p_2)^\nu}{(p_1 - p_2)^2} \right\rangle \gamma_\nu \right]. \tag{4.43}$$

Заметим, прежде всего, что

$$\left\langle \frac{(p_1 - p_2)^\mu}{(p_1 - p_2)^2} \right\rangle = a (p_1 - p_1')^\mu, \tag{4.44}$$

поскольку при перестановке импульсов p_1 и p_1', а также p_2 и p_2' этот вектор изменяет свой знак. Умножив обе части этого равенства на $2p_{1\mu}$, получим

$$a = \frac{1}{M^2 - 4m^2}, \tag{4.45}$$

так как

$$2p_1 (p_1 - p_2) = (p_1 - p_2)^2,$$
$$2p_1 (p_1 - p_1') = (p_1 - p_1')^2 = M^2 - 4m^2. \tag{4.46}$$

Далее, основываясь на преобразованиях

$$(p_1 - p_1')^\mu = -\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma p_1 - \gamma p_1'\} \to -\frac{1}{2} \gamma^\mu (\gamma k - 2m) -$$
$$- \frac{1}{2} (-\gamma k - 2m) \gamma^\mu = 2m\gamma^\mu + i\sigma^{\mu\nu} k_\nu, \tag{4.47}$$

будем иметь

$$2m \left\langle \frac{(p_1 - p_2)^\mu}{(p_1 - p_2)^2} \right\rangle \to \frac{2m}{M^2 - 4m^2} (2m\gamma^\mu + i\sigma^{\mu\nu} k_\nu). \tag{4.48}$$

Сходный вклад можно выделить из последнего слагаемого в формуле (4.43):

$$2(p_1-p_1')^\mu\left\langle\frac{(p_1-p_2)^\nu}{(p_1-p_2)^2}\right\rangle\gamma_\nu=\frac{2}{M^2-4m^2}(p_1-p_1')^\mu\gamma(p_1-p_1')\to$$
$$\to-\frac{4m}{M^2-4m^2}(p_1-p_1')^\mu\to$$
$$\to-\frac{4m}{M^2-4m^2}(2m\gamma^\mu+i\sigma^{\mu\nu}k_\nu). \qquad (4.49)$$

Рассмотрим, далее, равенство

$$\left\langle\frac{(p_1-p_2)^\mu(p_1-p_2)^\nu}{(p_1-p_2)^2}\right\rangle=b\left(g^{\mu\nu}+\frac{k^\mu k^\nu}{M^2}\right)+c(p_1-p_1')^\mu(p_1-p_1')^\nu, \qquad (4.50)$$

в правой части которого стоит общее выражение для симметричного тензора, не изменяющегося при перестановке p_1 и p_1' и обращающегося в нуль при его умножении на k_μ. Свертывая индексы в обеих частях равенства, получаем одно соотношение между b и c:

$$1=3b+(M^2-4m^2)c. \qquad (4.51)$$

Другое соотношение получим, умножив (4.50) на $(p_1-p_1')_\mu=$ $=(2p_1-k)_\mu$:

$$\frac{1}{2}=b+(M^2-4m^2)c, \qquad (4.52)$$

где учтено, что

$$\langle p_2^\nu\rangle=\frac{1}{2}(p_1+p_1')^\nu. \qquad (4.53)$$

В результате будем иметь

$$b=\frac{1}{4},\quad c=\frac{1}{4}\frac{1}{M^2-4m^2}, \qquad (4.54)$$

так что

$$-2\left\langle\frac{(p_1-p_2)^\mu(p_1-p_2)^\nu}{(p_1-p_2)^2}\right\rangle\gamma_\nu=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\gamma^\mu+\frac{k^\mu}{M^2}\gamma k\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{M^2-4m^2}(p_1-p_1')^\mu\gamma(p_1-p_1')\to$$
$$\to-\frac{1}{2}\gamma^\mu+\frac{m}{M^2-4m^2}(2m\gamma^\mu+i\sigma^{\mu\nu}k_\nu), \qquad (4.55)$$

где произведена эффективная замена

$$\gamma k=(\gamma p_1+m)+(\gamma p_1'-m)\to 0. \qquad (4.56)$$

Объединив все наши выкладки, придем к выражению

$$I^\mu=-\frac{2}{(4\pi)^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\left[(M^2-2m^2)\left\langle\frac{1}{(p_1-p_2)^2}\right\rangle\gamma^\mu-\right.$$
$$\left.-\frac{3}{2}\gamma^\mu-\frac{m}{M^2-4m^2}(2m\gamma^\mu+i\sigma^{\mu\nu}k_\nu)\right]. \qquad (4.57)$$

Как и при анализе случая частиц со спином 0, оставшийся интеграл заменяется на

$$\left\langle \frac{1}{(p_1-p_2)^2+\mu^2} \right\rangle = \frac{1}{M^2-4m^2} \ln \frac{M^2-4m^2}{\mu^2}, \tag{4.58}$$

и в итоге мы получаем

$$e^2 I^\mu = -f_1(M^2)\gamma^\mu + \left(\frac{1}{2}g-1\right)\frac{1}{2m} f_2(M^2)\, i\sigma^{\mu\nu}k_\nu, \tag{4.59}$$

где

$$f_1(M^2) = \\ = \frac{\alpha}{2\pi}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}\left[\left(1-\frac{2m^2}{M^2}\right)\ln\frac{M^2-4m^2}{\mu^2}-\frac{3}{2}+\frac{4m^2}{M^2}\right] \tag{4.60}$$

и

$$\left(\frac{1}{2}g-1\right) f_2(M^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}\frac{2m^2}{M^2}. \tag{4.61}$$

Хотя величина I^μ первоначально зависела от каждого из импульсов p_1 и p_1' [формула (4.35)], чисто кинематические преобразования привели нас к выражению (4.59), в которое входит только полный импульс k. Поэтому конечные частицы в (4.34) фигурируют лишь в двух локальных комбинациях полей

$$\frac{1}{2}\psi_1(x)\gamma^0 eq\gamma^\mu\psi_1(x) = \frac{1}{2}\int d\omega_{p_1} d\omega_{p_1'}\eta_1(-p_1)\gamma^0(m-\gamma p_1)eq\gamma^\mu \times \\ \times(-m-\gamma p_1')\eta_1(-p_1')\exp[-i(p_1+p_1')x] \tag{4.62}$$

и

$$\frac{1}{2}\psi_1(x)\gamma^0 eq\sigma^{\mu\nu}\psi_1(x) = \frac{1}{2}\int d\omega_{p_1} d\omega_{p_1'}\eta_1(-p_1)\gamma^0(m-\gamma_{p_1})eq\sigma^{\mu\nu} \times \\ \times(-m-\gamma p_1')\eta_1(-p_1')\exp[-i(p_1+p_1')x]. \tag{4.63}$$

Тем самым связь (4.34) будет записываться в виде

$$-i\int\frac{dM^2}{M^2}f_1(M^2)\int(dx)(dx')\frac{1}{2}\psi(x)\gamma^0 eq\gamma^\mu\psi(x)\times \\ \times\left[i\int d\omega_k\exp[ik(x-x')]\right]\partial'^\nu F_{\mu\nu}(x') + \\ +i\left(\frac{1}{2}g-1\right)\int dM^2 f_2(M^2)\int(dx)(dx')\frac{1}{2}\psi(x)\gamma^0\frac{eq}{2m}\sigma^{\mu\nu}\psi(x)\times \\ \times\left[i\int d\omega_k\exp[ik(x-x')]\right]\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x'). \tag{4.64}$$

Чтобы сделать это выражение в явной форме калибровочно-инвариантным, мы произвели подстановку (4.19). Проводя пространственно-временную экстраполяцию дополнительной связи и объединяя результат с примитивным взаимодействием, получим следующее слагаемое в действии:

$$\int (dx)(dx')\Big[\frac{1}{2}\psi(x)\gamma^0 eq\gamma^\mu\psi(x) f_{\mu\nu}(x-x')\bar{A}^\nu(x') +$$
$$+\left(\frac{1}{2}g-1\right)\frac{1}{2}\psi(x)\gamma^0\frac{eq}{2m}\sigma^{\mu\nu}\psi(x) F_2(x-x')\frac{1}{2}\bar{F}_{\mu\nu}(x')\Big], \tag{4.65}$$

где

$$f_{\mu\nu}(k)=g_{\mu\nu}+(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\int\frac{dM^2}{M^2}\frac{f_1(M^2)}{k^2+M^2-i\varepsilon}. \tag{4.66}$$

В лоренцевской калибровке этот тензор можно заменить тензором

$$f_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu}F_1(k) \tag{4.67}$$

с зарядовым формфактором

$$F_1(k)=1-k^2\int\frac{dM^2}{M^2}\frac{f_1(M^2)}{k^2+M^2-i\varepsilon}. \tag{4.68}$$

Отметим равенство

$$F_1(k^2=0)=1, \tag{4.69}$$

означающее, что в случае медленно меняющихся полей ($|k^2|\ll m^2$) примитивное взаимодействие не подвергается никаким модификациям. Такое же условие нормировки мы наложим и на второй формфактор:

$$F_2(k)=\int dM^2\frac{f_2(M^2)}{k^2+M^2-i\varepsilon},\quad F_2(k^2=0)=1. \tag{4.70}$$

В соответствии с тем, что

$$\int_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\frac{2m^2}{M^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}=\int_{(2m)^2}^{\infty}d\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}=1, \tag{4.71}$$

оно будет выполняться при

$$f_2(M^2)=\frac{2m^2}{M^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}, \tag{4.72}$$

а поэтому

$$\frac{1}{2}g-1=\frac{\alpha}{2\pi}. \tag{4.73}$$

Как показывают обозначения, последний результат представляет собой полученный иным способом дополнительный магнитный момент, соответствующий однородным полям [формула (2.36)]. Динамическое происхождение этого магнитного момента проявляется здесь в том, что магнитный формфактор $F_2(k)$ обращается в нуль при $k^2\to\infty$. В асимптотической области имеем

$$k^2\gg m^2:\quad F_2(k)\sim\frac{2m^2}{k^2}\ln\frac{k^2}{m^2}, \tag{4.74}$$

что вытекает из общего выражения

$$F_2(k)=\int_0^1 dv \frac{1}{1+\frac{k^2}{4m^2}(1-v^2)-i\varepsilon}=$$

$$=\frac{2m^2}{k^2}\left(1+\frac{4m^2}{k^2}\right)^{-1/2}\ln\frac{\left(1+\frac{4m^2}{k^2}\right)^{1/2}+1}{\left(1+\frac{4m^2}{k^2}\right)^{1/2}-1}, \tag{4.75}$$

в котором

$$v=\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}. \tag{4.76}$$

Попутно отметим, что при $-k^2>4m^2$ фаза логарифма выбирается так, чтобы мнимая часть интеграла была равной $i\pi f_2(-k^2)$. Ситуация оказывается иной, чем в случае зарядового формфактора, для которого

$$\int \frac{dM^2}{M^2}\frac{f_1(M^2)}{k^2+M^2-i\varepsilon}=\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{4m^2}\int_0^1 dv\frac{(1+v^2)\ln\left(\frac{4m^2}{\mu^2}\frac{v^2}{1-v^2}\right)-1-2v^2}{1+\frac{k^2}{4m^2}(1-v^2)-i\varepsilon}\sim$$

$$\sim\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{k^2}\ln\frac{k^2}{m^2}\ln\frac{k^2}{\mu^2}, \tag{4.77}$$

где мы сохранили лишь главные логарифмические члены. Так как в выражении для $F_1(k)$ эта функция умножается на $-k^2$, добавка к примитивному взаимодействию не обращается в нуль при $k^2\to\infty$. Но при восстановлении тензорного формфактора $f_{\mu\nu}(k)$ на эту проблему можно взглянуть и с другой точки зрения, ибо величина

$$f_{\mu\nu}\bar{A}^\nu(k)=\bar{A}_\mu(k)-\int\frac{dM^2}{M^2}\frac{f_1(M^2)}{k^2+M^2-i\varepsilon}\partial^\nu\bar{F}_{\mu\nu}(k) \tag{4.78}$$

содержит две разные связи. Одна из них представляет собой примитивное взаимодействие, модифицируемое эффектами поляризации вакуума, а другая — связь с полем $\partial^\nu\bar{F}_{\mu\nu}$, имеющая динамическое происхождение и не обращающаяся в нуль при $k^2\to\infty$.

Хотя в принципе последнее утверждение справедливо, практически из выражения (4.68) для зарядового формфактора вытекает, что соответствующее взаимодействие постепенно ослабевает с возрастанием k^2. Это должно проявляться в сдвигах энергетических уровней и в изменениях сечений рассеяния. Чтобы как-то оценить подобные эффекты, рассмотрим в качестве первого приближения тот случай медленно меняющихся полей, в котором для $F_1(k)$

можно принять упрощенное выражение

$$F_1(k) \approx 1 - k^2 \int\limits_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM^2}{(M^2)^2} f_1(M^2). \tag{4.79}$$

Согласно формуле (4.77), входящий сюда интеграл равен

$$\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{4m^2}\int\limits_0^1 dv\left[(1+v^2)\ln\left(\frac{4m^2}{\mu^2}\frac{v^2}{1-v^2}\right)-1-2v^2\right]=$$

$$=\frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8}\right), \tag{4.80}$$

так что

$$F_1(k) \approx 1-\frac{\alpha}{3\pi}\frac{k^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8}\right). \tag{4.81}$$

Этот эффект можно сравнить и объединить с усилением связи за счет поляризации вакуума, которое в рассматриваемых условиях описывается формулой (3.76):

$$\bar{A}_\mu(k)=\left(1+\frac{\alpha}{15\pi}\frac{k^2}{m^2}\right)A_\mu(k). \tag{4.82}$$

В итоге приходим к равенству

$$F_1(k)\bar{A}_\mu(k)=\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\frac{k^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\right]A_\mu(k), \tag{4.83}$$

которое свидетельствует о том, что усиление связи, обусловленное поляризацией вакуума, полностью подавляется ее ослаблением из-за уменьшения формфактора, хотя здесь еще нужно выяснить, какая эффективная замена отвечает временно введенному параметру μ. Так, например, вполне возможно, что при анализе сдвигов энергетических уровней вместо μ придется подставлять какие-то из энергий возбуждения атома ΔE. Если произвести замену

$$-\frac{1}{5}\rightarrow\ln\frac{m}{\Delta E}$$

и пренебречь аддитивными константами, то формула (3.57) для поляризации вакуума перейдет в формулу

$$\frac{\delta E_{ns}}{\frac{1}{2}\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}m}\sim\frac{8}{3\pi}\frac{Z^2\alpha^3}{n}\ln\frac{m}{\Delta E}. \tag{4.84}$$

Этот путь оказывается действительно правильным, но мы пока отложим более точный анализ и обратимся к рассмотрению модификаций, возникающих при исследовании рассеяния.

Начнем с частиц со спином 0, которые рассеиваются кулоновским полем. При отклонении частицы из состояния с импульсом $\mathbf{p}_2$

в состояние с импульсом $\mathbf{p}_1$ кулоновское поле передает ей импульс

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2. \tag{4.85}$$

Из-за наличия эффектов, о которых мы говорили выше, дифференциальное сечение приобретает множитель

$$\left|\frac{F(\mathbf{q})\,\overline{D}_+(\mathbf{q})}{D_+(\mathbf{q})}\right|^2 \approx 1 - 2\mathbf{q}^2 \int dM^2 \frac{\frac{1}{M^2} f(M^2) - a(M^2)}{\mathbf{q}^2 + M^2} =$$

$$= 1 - \frac{\alpha}{4\pi}\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\int_0^1 dv\, \frac{(1+v^2)\left[\ln\left(\frac{4m^2}{\mu^2}\frac{v^2}{1-v^2}\right) - 2\right] - \frac{1}{3}v^4}{1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)}, \tag{4.86}$$

содержащий только тот вклад в поляризацию вакуума, который дают частицы со спином 0 (поправочные члены, нелинейные по α, опущены). К данному упругому сечению следует добавить как минимум сечение рассеяния с испусканием мягких фотонов, энергия которых принимает все значения, меньшие $k^0_{\text{мин}}$ — минимальной энергии фотона, детектируемой экспериментальной установкой. Тогда мы получим сечение «почти упругого» рассеяния, которое имеет физический смысл и которое всегда можно дополнить сечением рассеяния, сопровождающегося излучением, с любой степенью неупругости.

При расчете мягкофотонной добавки мы должны быть последовательными. Введение массы фотона требует, чтобы он рассматривался в качестве частицы с единичным спином, со свойственными ей тремя состояниями поляризации. Но с практической точки зрения существенно лишь изменение соотношения между энергией фотона и его импульсом:

$$k^0 = (\mathbf{k}^2 + \mu^2)^{1/2}. \tag{4.87}$$

Элемент матрицы перехода для отклонения частицы кулоновским полем с испусканием мягкого фотона входит в формулу (3-14.61) в виде произведения двух сомножителей. Один из них описывает процесс упругого рассеяния, другой равен

$$(d\omega_k)^{1/2}\, eqe^*_{k\lambda}\left(\frac{p_1}{kp_1} - \frac{p_2}{kp_2}\right). \tag{4.88}$$

Если говорить точнее, то знаменатели следует слегка изменить, так как

$$\frac{1}{(k+p_1)^2+m^2} = \frac{1}{2kp_1-\mu^2}, \quad \frac{1}{(-k+p_2)^2+m^2} = -\frac{1}{2kp_2+\mu^2}. \tag{4.89}$$

Но поправки не превышают отношения массы μ к энергии частицы, которое пренебрежимо мало, поскольку мы требуем, чтобы выполнялось условие

$$\mu \ll k^0_{\text{мин}}. \tag{4.90}$$

Здесь может вызвать некоторое смущение то обстоятельство, что сумма векторов поляризации

$$\sum_\lambda e^\mu_{k\lambda} e^{\nu *}_{k\lambda} = g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{\mu^2} \tag{4.91}$$

содержит множитель $1/\mu^2$, ибо эффективный фотонный источник (4.88) при изменении его знаменателей не будет сохраняться. Но комбинация

$$k\left(\frac{p_1}{kp_1 - \frac{1}{2}\mu^2} - \frac{p_2}{kp_2 + \frac{1}{2}\mu^2}\right) = \frac{1}{2}\mu^2\left(\frac{1}{kp_1 - \frac{1}{2}\mu^2} + \frac{1}{kp_2 + \frac{1}{2}\mu^2}\right) \tag{4.92}$$

имеет достаточно высокие степени μ в числителе, чтобы все обстояло благополучно. И, конечно, величина (4.88) есть лишь некоторое приближение к выражению, для которого справедлив точный закон сохранения.

В итоге для относительной вероятности испускания мягких фотонов получаем

$$e^2 \int d\omega_k \left(\frac{p_1}{kp_1} - \frac{p_2}{kp_2}\right)^2 =$$
$$= 4\pi\alpha \int \frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0}\left[-\frac{2p_1p_2}{kp_1kp_2} - \frac{m^2}{(kp_1)^2} - \frac{m^2}{(kp_2^2)}\right], \tag{4.93}$$

или

$$\frac{\alpha}{4\pi^2}\int dk^0 |\mathbf{k}|\, d\Omega \left[(2m^2 + \mathbf{q}^2)\int_{-1}^{+1}\frac{dv}{2}\frac{1}{\left[k^0p^0 - \mathbf{k}\cdot\left(\frac{1+v}{2}\mathbf{p}_1 + \frac{1-v}{2}\mathbf{p}_2\right)\right]^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{m^2}{(k^0p^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_1)^2} - \frac{m^2}{(k^0p^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_2)^2}\right]. \tag{4.94}$$

При переходе к последней форме записи мы воспользовались комбинаторикой, основанной на преобразовании (3-14.116). После интегрирования по угловым переменным будем иметь

$$\frac{2\alpha}{\pi}\int_\mu^{k^0_{\text{мин}}} dk^0 |\mathbf{k}| \left[\left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2m^2}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \int_0^1 dv \frac{1}{\left[1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1 - v^2)\right](k^0)^2 + \frac{\mu^2}{m^2}\left(\mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2\frac{1-v^2}{4}\right)} - \frac{1}{(k^0)^2 + \frac{\mu^2}{m^2}\mathbf{p}^2}\right], \tag{4.95}$$

где

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}_2^2. \tag{4.96}$$

Оставшийся интеграл имеет вид ($k^0_{\text{мин}} \gg \mu$)

$$\int\limits_{\mu}^{k^0_{\text{мин}}} dk^0 \, [(k^0)^2 - \mu^2]^{1/2} \frac{1}{(k^0)^2 + \lambda^2\mu^2} =$$

$$= \ln \frac{2k^0_{\text{мин}}}{\mu} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{1/2} \ln \frac{\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{1/2} + 1}{\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{1/2} - 1}, \tag{4.97}$$

и в результате для (4.95) получаем

$$\frac{\alpha}{2\pi} \frac{\mathbf{q}^2}{m^2} \ln \frac{2k^0_{\text{мин}}}{\mu} \int\limits_0^1 dv \frac{1 + v^2}{1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1 - v^2)} -$$

$$- \frac{\alpha}{\pi} \left[\int\limits_0^1 dv \frac{1 + \frac{\mathbf{q}^2}{2m^2}}{1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1 - v^2)} \frac{p^0}{\left(\mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2 \frac{1 - v^2}{4}\right)^{1/2}} \times \right.$$

$$\left. \times \ln \frac{p^0 + \left(\mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2 \frac{1 - v^2}{4}\right)^{1/2}}{p^0 - \left(\mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2 \frac{1 - v^2}{4}\right)^{1/2}} - \frac{p^0}{|\mathbf{p}|} \ln \frac{p^0 + |\mathbf{p}|}{p^0 - |\mathbf{p}|} \right]. \tag{4.98}$$

Хотя параметры v вводились в (4.86) и (4.98) совершенно разными способами, все же два эти выражения можно сложить, и фиктивная масса μ действительно полностью сократится. Рассмотрим сначала нерелятивистский случай, когда $\mathbf{q}^2 \ll m^2$, $\mathbf{p}^2 \ll m^2$, $p^0 \approx m$. Элементарные выкладки дают для двух наших слагаемых

$$\left[1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\left(\ln \frac{m}{\mu} - \frac{31}{40}\right)\right] + \left[\frac{2\alpha}{3\pi} \frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\left(\ln \frac{2k^0_{\text{мин}}}{\mu^2} - \frac{5}{6}\right)\right] =$$

$$= 1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\left(\ln \frac{m}{2k^0_{\text{мин}}} + \frac{7}{120}\right). \tag{4.99}$$

У нас имеется также и нерелятивистское выражение для дифференциального сечения всех неупругих процессов с энергиями фотона, принимающими значения от $k^0_{\text{мин}}$ до T — кинетической энергии падающей частицы [формула (3-14.70)]. Если этот вклад неупругих процессов представить в виде доли дифференциального сечения упругого рассеяния, то получим для него

$$\frac{2\alpha}{3\pi} \frac{\mathbf{q}^2}{m^2} \left[\ln \frac{4T}{k^0_{\text{мин}}} - (\pi - \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos\theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \ln \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}\right]. \tag{4.100}$$

«Почти упругое» и неупругое сечения складываются и дают дифференциальное сечение рассеяния в состояния без фиксированного значения конечной энергии частицы. Оно составляет следующую долю резерфордовского сечения:

$$1-\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\left[\ln\frac{m}{8T}+\frac{7}{120}+(\pi-\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\frac{\cos\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\ln\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]. \tag{4.101}$$

Такого рода динамические модификации сечений рассеяния остаются совсем малыми, пока мы не вступаем в релятивистскую область. Чтобы облегчить анализ высоких энергий, введем обозначения

$$\xi(v)=\frac{1}{p^0}\left(\mathbf{p}^2-\mathbf{q}^2\frac{1-v^2}{4}\right)^{1/2},\quad \beta=\frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \tag{4.102}$$

и, кроме того, введем в явном виде угол рассеяния θ:

$$\mathbf{q}^2=4\mathbf{p}^2\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{4.103}$$

При возрастании v от 0 до 1 новая переменная ξ будет изменяться в пределах от $\beta\cos(\theta/2)$ до β. В этих обозначениях сложный интеграл по v во втором слагаемом выражения (4.98) принимает вид

$$\left(1+\frac{\mathbf{q}^2}{2m^2}\right)\left(\frac{m}{p_0}\right)^2\int_0^1 dv\,\frac{1}{1-\xi^2}\,\frac{1}{\xi}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}, \tag{4.104}$$

где мы воспользовались также соотношением

$$1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)=\left(\frac{p^0}{m}\right)^2(1-\xi)^2. \tag{4.105}$$

Заметим, далее, что имеет место тождество

$$\frac{1}{1-\xi^2}\,\frac{1}{\xi}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}+\frac{1}{1-\xi^2}\ln\frac{1-\xi^2}{4}=$$
$$=\frac{1}{\xi}\left[\frac{\ln\frac{1}{2}(1+\xi)}{1-\xi}-\frac{\ln\frac{1}{2}(1-\xi)}{1+\xi}\right], \tag{4.106}$$

правая часть которого обладает весьма слабой сингулярностью при $\xi\to 1$. Справедлива также аналогичная формула с заменой ξ на β. Если ввести величину

$$\frac{\mathbf{q}^2}{2m^2}L=\left(1+\frac{\mathbf{q}^2}{2m^2}\right)\int_0^1 dv\,\frac{1}{\xi}\left[\frac{\ln\frac{1}{2}(1+\xi)}{1-\xi}-\frac{\ln\frac{1}{2}(1-\xi)}{1+\xi}\right]-$$
$$-\frac{1}{\beta}\left[\frac{\ln\frac{1}{2}(1+\beta)}{1-\beta}-\frac{\ln\frac{1}{2}(1-\beta)}{1+\beta}\right], \tag{4.107}$$

то выражение (4.98) можно будет представить следующим образом:

$$\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\ln\left(\frac{k^0_{\text{мин}}}{\mu}\frac{m}{p^0}\right)\int_0^1 dv\frac{1+v^2}{1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)}-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\mathbf{q}^2}{(p^0)^2}L+$$

$$+\frac{\alpha}{\pi}\left(1+\frac{\mathbf{q}^2}{2m^2}\right)\int_0^1 dv\frac{\ln\left[1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)\right]}{1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)}. \qquad (4.108)$$

Но и такая форма записи еще не окончательна — последнее слагаемое в (4.108) допускает более удобное представление, которое основывается на тождестве

$$\left(1+\frac{\mathbf{q}^2}{2m^2}\right)\int_0^1 dv\frac{\ln\left[1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)\right]}{1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)}=\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}\int_0^1 dv\frac{(1+v^2)\ln\frac{4v^2}{1-v^2}}{1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)}, \qquad (4.109)$$

справедливом для пространственно-подобного вектора q. Докажем прежде всего это тождество. Как нетрудно убедиться путем интегрирования по переменной u,

$$\left(1+\frac{\mathbf{q}^2}{2m^2}\right)\int_0^1 dv\frac{\ln\left[1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)\right]}{1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)}=$$

$$=\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}\int_0^1 dv\int_0^1\frac{du}{1-u}\left[\frac{2-(1-v^2)u}{1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)u}-\frac{1+v^2}{1+\frac{q^2}{4m^2}(1-v^2)}\right]. \qquad (4.110)$$

Обозначим теперь параметр v в первом слагаемом правой части через v' и положим

$$1-v^2=(1-v'^2)u. \qquad (4.111)$$

Новая переменная v также пробегает значения от 0 до 1. Это преобразование приводит к равенствам

$$v'\,dv'=\frac{v\,dv}{u},\quad dv'=\frac{v\,dv}{\{u[u-(1-v^2)]\}^{1/2}}, \qquad (4.112)$$

из которых становится очевидным условие $u\geqslant 1-v^2$ при фиксированном v. В новой форме записи величина (4.110) принимает вид

$$\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}\int_0^1 dv\frac{1+v^2}{1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)}\times$$

$$\times\left\{\int_{1-v^2}^1\frac{du}{1-u}\left[\frac{v}{\{u[u-(1-v^2)]\}^{1/2}}-1\right]-\int_0^{1-v^2}\frac{du}{1-u}\right\}, \qquad (4.113)$$

и к тождеству (4.109) мы придем, подставив сюда значение интеграла по u, равное $\ln[4v^2/(1-v^2)]$.

С учетом формул (4.108), (4.109) и (4.86) получаем для динамического поправочного множителя выражение

$$1-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\left[\left(\ln\frac{p^0}{k^0_{\text{мин}}}-1\right)\int_0^1 dv\,\frac{1+v^2}{1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{6}\int_0^1 dv\,\frac{v^4}{1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)}+\left(\frac{m}{p^0}\right)^2 L\right]. \qquad (4.114)$$

Все самые сложные моменты вычисления этой структуры сосредоточены в интеграле L, даваемом формулой (4.107), где мы имеем довольно сложную зависимость величины

$$\xi(v)=\beta\left[1-(1-v^2)\sin^2\frac{\theta}{2}\right]^{1/2} \qquad (4.115)$$

от независимой переменной v. Правда, можно выделить два простых предельных случая. При низких энергиях

$$p^0\sim m:\quad L=\frac{4}{3}(1-\ln 2)+\frac{1}{9}, \qquad (4.116)$$

откуда мы вновь приходим к формуле (4.99). В области высоких энергий, когда $\beta\to 1$, имеем

$$p^0\gg m:\quad L=\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\,\varphi\left(\cos\frac{\theta}{2}\right), \qquad (4.117)$$

где

$$\varphi\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)=\int_{\cos\frac{\theta}{2}}^{1}\frac{d\xi}{\left(\xi^2-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2}}\left[\frac{\ln\frac{1}{2}(1+\xi)}{1-\xi}-\frac{\ln\frac{1}{2}(1-\xi)}{1+\xi}\right]. \qquad (4.118)$$

Этот интеграл можно вычислить аналитически в случае рассеяния на угол $\theta=\pi$:

$$\varphi(0)=\frac{\pi^2}{12}, \qquad (4.119)$$

причем результат оказывается весьма точным даже при $\theta=\pi/2$. Вблизи к направлению вперед

$$\varphi\left(\cos\frac{\theta}{2}\sim 1\right)\sim\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left[\ln\frac{1}{2\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)}+1\right]. \qquad (4.120)$$

Выражение (4.114) в области высоких энергий принимает вид

$$1-\frac{4\alpha}{\pi}\left[\left(\ln\frac{p^0}{k^0_{\text{мин}}}-\frac{13}{12}\right)\left(\ln\frac{2p^0}{m}\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{5}{72}+\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\varphi\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\right], \tag{4.121}$$

где использованы предельные значения (при высоких энергиях) следующих интегралов:

$$K_0=\int_0^1 dv\,\frac{1}{1+\lambda^2(1-v)^2}=\frac{\ln[\lambda+(\lambda^2+1)^{1/2}]}{\lambda(\lambda^2+1)^{1/2}},$$
$$K_1=\int_0^1 dv\,\frac{v^2}{1+\lambda^2(1-v^2)}=\frac{(1+\lambda^2)K_0-1}{\lambda^2}, \tag{4.122}$$
$$K_2=\int_0^1 dv\,\frac{v^4}{1+\lambda^2(1-v^2)}=\frac{(1+\lambda^2)K_1-\frac{1}{3}}{\lambda^2}.$$

В случае рассеяния частиц со спином $^1/_2$ появляется нечто новое, ибо в этом случае вступает в игру также и магнитное взаимодействие. По сравнению с тем, что у нас было в гл. 3, § 14, связь изменится за счет динамических поправок. В соответствии с выражениями (4.65) и (4.67) это изменение выражается подстановкой

$$\gamma A(q)\to F_1(q)\,\gamma\bar{A}(q)+\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{2m}F_2(q)\,\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\bar{F}_{\mu\nu}(q). \tag{4.123}$$

Если нас интересует только скалярный потенциал, описывающий модифицированный кулоновский потенциал, то она сводится к замене

$$\gamma^0A^0(\mathbf{q})\to\left[F_1(\mathbf{q})\,\gamma^0+\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{2m}F_2(\mathbf{q})\,i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}\right]\bar{A}^0(\mathbf{q}). \tag{4.124}$$

В элемент матрицы перехода, заменяющий (14.11), входит

$$u^*_{p_1\sigma_1}\left(F_1(\mathbf{q})+\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{2m}F_2(\mathbf{q})\,\gamma^0 i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}\right)u_{p_2\sigma_2}\bar{A}^0(\mathbf{q}). \tag{4.125}$$

Если использовать спиральные состояния, как это делается в формуле (3-14.13), то возникнет комбинация

$$u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0 i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\,u_{p_2\sigma_2}=|\mathbf{p}|(\sigma_1-\sigma_2)\,u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0 i\gamma_5 u_{p_2\sigma_2}, \tag{4.126}$$

где [вспомним соотношения (2-6.90)]

$$u_{p_2\sigma_2}=\left[\left(\frac{p^0+m}{2m}\right)^{1/2}+i\gamma_5\sigma_2\left(\frac{p^0-m}{2m}\right)^{1/2}\right]v_{\sigma_2},$$
$$u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0=v^*_{\sigma_1}\left[\left(\frac{p^0+m}{2m}\right)^{1/2}-\left(\frac{p^0-m}{2m}\right)^{1/2}i\gamma_5\sigma_1\right]. \tag{4.127}$$

Следовательно

$$u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0 i\gamma_5 u_{p_2\sigma_2} = (\sigma_2 - \sigma_1)\frac{|\mathbf{p}|}{2m} v^*_{\sigma_1} v_{\sigma_2} \tag{4.128}$$

и

$$u^*_{p_1\sigma_1}\gamma^0 i\gamma_5 \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q} u_{p_2\sigma_2} = -(1-\sigma_1\sigma_2)\frac{\mathbf{p}^2}{m} v^*_{\sigma_1} v_{\sigma_2} \tag{4.129}$$

откуда вытекает, что магнитное взаимодействие дает вклады только в переходы с изменением спиральности. Если обратиться к формуле (3-14.13), то мы увидим, что интенсивность рассеяния будет содержать теперь множитель

$$\left[\left(\frac{p^0}{m}\right)^2 \cos^2\frac{\theta}{2} F_1(\mathbf{q})^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}\left(F_1(\mathbf{q}) - \frac{\alpha}{2\pi}\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}F_2(\mathbf{q})\right)^2\right]\bar{A}^0(\mathbf{q})^2. \tag{4.130}$$

Что же касается дифференциального сечения (14.14), то учет рассматриваемых эффектов приводит к следующей его динамической модификации:

$$\left[F_1(\mathbf{q})^2 - \frac{\alpha}{\pi}\frac{\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}}F_2(\mathbf{q})\right]\left(\frac{\bar{D}_+(\mathbf{q})}{D_+(\mathbf{q})}\right)^2 =$$

$$= 1 - 2\mathbf{q}^2\int dM^2\,\frac{\frac{1}{M^2}f_1(M^2) - a(M^2)}{\mathbf{q}^2+M^2} -$$

$$-\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{m}{p^0}\right)^2\frac{1}{1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}\int dM^2\frac{f_2(M)^2}{\mathbf{q}^2+M^2}, \tag{4.131}$$

где мы оставили лишь члены, линейные по α.

С некоторыми незначительными изменениями анализ частиц со спином 0 можно перенести и на случай спина $^1/_2$. При этом, помимо явного включения члена с магнитным моментом, необходимо учесть лишь небольшую разницу в зарядовых формфакторах

$$f_1(M^2) - f(M^2) = \frac{\alpha}{4\pi}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}, \tag{4.132}$$

а также подставить функцию, описывающую поляризацию вакуума для частиц со спином $^1/_2$:

$$M^2 a(M^2)_{\text{спин } 1/2} - M^2 a(M^2)_{\text{спин } 0} = \frac{\alpha}{4\pi}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{4m^2}{M^2}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}\left[1-\left(\frac{4m^2}{M^2}\right)^2\right]. \tag{4.133}$$

Комбинация, входящая в формулу (4.131), изменяется на величину

$$[f_1(M^2)-M^2a(M^2)_{\text{спин }1/2}]-[f(M^2)-M^2a(M^2)_{\text{спин }0}]=$$
$$=\frac{\alpha}{\pi}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{4m^2}{M^2}\right)^2, \qquad (4.134)$$

которая дает очень быстро сходящийся вклад в спектральный интеграл. Это обстоятельство весьма существенно с точки зрения высокоэнергетического поведения, ибо оно означает, что все члены, логарифмически возрастающие с энергией, в обоих случаях одинаковы. Действительно, если отбросить последнее слагаемое в формуле (4.131), то разность между этим выражением и выражением (4.86) будет равна

$$-\frac{\alpha}{2\pi}\mathbf{q}^2\int\limits_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\frac{\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{4m^2}{M^2}\right)^2}{\mathbf{q}^2+M^2}=$$
$$=-\frac{\alpha}{\pi}\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}\int\limits_0^1 dv\,\frac{(1-v^2)^2}{1+\frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)}\to-\frac{2\alpha}{3\pi},\quad \mathbf{q}^2\gg m^2. \qquad (4.135)$$

Благодаря наличию множителя $(m/p^0)^2$ влиянием дополнительного магнитного момента при высоких энергиях можно пренебречь, и мы сразу же приходим к аналогу выражения (4.121) для случая частиц со спином $^1/_2$:

$$1-\frac{4\alpha}{\pi}\left[\left(\ln\frac{p^0}{k^0_{\text{мин}}}-\frac{13}{12}\right)\left(\ln\frac{2p^0}{m}\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{17}{72}+\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,\varphi\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]. \qquad (4.136)$$

В нерелятивистском пределе, прибавив к величине $-(2\alpha/3\pi)(\mathbf{q}^2/m^2)^1/_5$, получаемой из (4.135), вклад магнитного момента $-(2\alpha/3\pi)(\mathbf{q}^2/m^2)(3/8)$, мы вместо (4.99) придем к выражению

$$1-\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{2k^0_{\text{мин}}}+\frac{19}{30}\right), \qquad (4.137)$$

и, следовательно, аналогом величины (4.101) будет величина

$$1-\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\left[\ln\frac{m}{8T}+\frac{19}{30}+(\pi-\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\frac{\cos\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\ln\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]. \qquad (4.138)$$

Общая формула в случае спина $^1/_2$, записанная с учетом обозначений (4.122), имеет вид

$$1-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\left[\left(\ln\frac{p^0}{k^0_{\text{мин}}}-1\right)(K_0+K_1)+\frac{1}{2}K_0-K_1+\frac{1}{3}K_2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{m}{p^0}\right)^2L+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{p^0}\right)^2\frac{1}{1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}}K_0\right]. \qquad (4.139)$$

Относительно экспериментальной проверки этих выводов для спина $^1/_2$, касающихся рассеяния электронов, мы заметим лишь, что согласие с экспериментом наблюдается и рассмотренные выше эффекты в настоящее время всегда учитываются при анализе тех экспериментов по рассеянию электронов с очень высокими энергиями, в которых предметом исследования является внутренняя структура протона.

Здесь вмешивается Гарольд и с особым историческим блеском в глазах задает вопрос.

Гарольд. Как мне известно, изложенные выше результаты для частиц со спином $^1/_2$ впервые были получены Вами много лет тому назад. Мой вопрос касается сделанного вскоре после этого и время от времени повторявшегося замечания, что в своих прежних расчетах Вы допустили две ошибки, которые каким-то образом скомпенсировались, так что в итоге был получен правильный ответ. Не могли бы Вы прокомментировать это замечательное достижение?

Швингер. Я думаю, что мои заслуги сильно преувеличены. Нет на свете людей, столь умных, чтобы сделать две такие сложные и в точности компенсирующиеся ошибки. На самом деле все гораздо проще. Сечение «почти упругого» рассеяния искусственным образом разбивается на чисто упругую часть и на мягкофотонную добавку к ней. Ни одна из этих компонент не имеет по отдельности физического смысла, и разные методы расчета будут давать для них различные выражения, хотя сумма и окажется правильной. В частности, две эти составляющие допускают перестройку, причем каждая из них по отдельности может и не быть оправданной, но полное выражение окажется все же правильным. Таким образом, существует несколько вариантов представления двух компонент, оставляющих неизменным ответ для их суммы. Придется, видимо, признаться, что тогда у меня не было и тени сомнения относительно правильности результата, так как я выполнил расчет двумя разными способами и получил одинаковый ответ. В те времена я всячески настаивал на том, что работать следует только с физическим безмассовым фотоном, поскольку используемый тогда операторный метод скачкообразно менялся при изменении числа степеней свободы, сопутствующем введению конечной массы фотона. Тем не менее я все же провел вычисления, используя конечную массу фотона, но не опубликовал их результаты, ибо такой подход был нарушением запретов, которые я сам на себя наложил. На страницах же данной книги никакие препятствия подобного рода к использованию массы фотона не возникают, поскольку мы знаем, что описание массивной частицы со спином 1 связано с описанием фотона непрерывным образом. Конечно, самый важный вывод из всей этой истории — это то, что должен существовать более совершенный метод расчета, который сразу давал бы физическое сечение рассеяния, без всякого разбиения, не имеющего физического смысла. Один такой метод будет изложен ниже.

§ 5. ФОРМФАКТОРЫ II. ПРОСТАЯ И ДВОЙНАЯ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Обсуждавшееся примитивное взаимодействие, линейное по фотонному полю и квадратичное по полям заряженных частиц, находит два разных применения, в которых только один источник действует как обобщенный, испуская две невзаимодействующие частицы. Последующее взаимодействие этих частиц модифицирует способность испускания или поглощения таким источником двух частиц. Подобный эффект мы рассматривали для обобщенных фотонных источников, испускающих пару заряженных частиц. Теперь же мы обратимся к источнику частиц, который испускает заряженную частицу вместе с фотоном, и исследуем, к каким модификациям приводит учет взаимодействия, ответственного за рассеяние частицы и фотона. Описание источника заряженных частиц предполагает выбор той или иной электромагнитной модели. Простейшей из них является ковариантная модель, в которой ускоренные заряды не излучают. Но тогда нам не следует останавливаться на спине 0, а нужно сразу же обратиться к спину $^1/_2$, ибо в рамках такой модели частицы со спином 0 вообще не излучают.

Вспомним выражение для эффективного двухчастичного источника:

$$iJ_2^\mu(k)\,\eta_2(p)\,|_{\text{эфф}} = eq\,[\gamma^\mu\psi_2(P) - if^\mu(k,\,P)\,\eta_2(P)], \tag{5.1}$$

где

$$if^\mu(k,\,P) = \frac{p^\mu}{kP} = \frac{2P^\mu}{P^2 + m^2}. \tag{5.2}$$

Процесс последующего рассеяния описывается вакуумной амплитудой [формула (3-14.137)]

$$\begin{gathered} ie^2 \int d\omega_{p_1}\, d\omega_{k_1}\, d\omega_{p_2}\, d\omega_{k_2}\, (2\pi)^4\, \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \times \\ \times J_1^\mu(-k_1)\,\eta_1(-p_1)\,\gamma^0\,(m - \gamma p_1) \times \\ \times \left[\gamma_\mu \frac{1}{\gamma(p_2 + k_2) + m}\,\gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{1}{\gamma(p_2 - k_1) + m}\,\gamma_\mu\right] \times \\ \times (m - \gamma p_2)\,\eta_2(p_2\,J_2^\nu(k_2)\,|_{\text{эфф}}, \end{gathered} \tag{5.3}$$

или

$$\frac{\alpha}{4\pi}\int d\omega_{p_1} d\omega_{k_1} (2\pi)^4 \delta(p_1+k_1-P)\, dM^2 d\omega_P \left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\times$$
$$\times J_1^{\mu}(-k_1)\,\eta_1(-p_1)\,\gamma^0(m-\gamma p_1)\, eq\times$$
$$\times\left[L_\mu\psi_2'(P)+\frac{2}{M^2-m^2}S_\mu\eta_2(P)\right]. \qquad (5.4)$$

Здесь, используя обозначение

$$\int d\omega_{k_2} d\omega_{p_2} (2\pi)^3\,\delta(k_2+p_2-P)\,(\ldots)=\frac{1}{(4\pi)^2}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\langle\ldots\rangle, \qquad (5.5)$$

мы ввели величины

$$L_\mu=\left\langle\left(\gamma_\mu\frac{\gamma}{\gamma P+m}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma(p_2-k_1)+m}\gamma_\mu\right)(m-\gamma p_2)\,\gamma^\nu\right\rangle \qquad (5.6)$$

и

$$S_\mu=\left\langle\left(\gamma_\mu\frac{1}{\gamma P+m}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma(p_2-k_1)+m}\gamma_\mu\right)(m-\gamma p_2)\,P^\nu\right\rangle. \qquad (5.7)$$

Благодаря наличию здесь проекционной матрицы $m-\gamma p_2$, а в формуле (5.4) — проекционной матрицы $m-\gamma p_1$ для эффективных источников испускания фотонов выполняется закон сохранения:

$$k_1^{\mu}\left(\gamma_\mu\frac{1}{\gamma P+m}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma(p_2-k_1)+m}\gamma_\mu\right)(m-\gamma p_2)=$$
$$=\left[-(\gamma p_1+m)\frac{1}{\gamma P+m}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma(p_2-k_1)+m}(\gamma p_2+m)\right]\times$$
$$\times(m-\gamma p_2)\to 0. \qquad (5.8)$$

Мы начнем наш расчет с преобразований, цель которых состоит в том, чтобы удовлетворить этому требованию явным образом:

$$\left(\gamma_\mu\frac{1}{\gamma P+m}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma(p_2+k_1)+m}\gamma_\mu\right)(m-\gamma p_2)=$$
$$=-\left[\gamma_\mu\frac{m-\gamma P}{M^2-m^2}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{m-\gamma(p_2-k_1)}{2p_2k_1}\gamma_\mu\right](m-\gamma p_2)\to$$
$$\to-\left[\left(\frac{2p_{1\mu}}{M^2-m^2}+\frac{p_{2\mu}}{p_2k_1}\right)\gamma_\nu+\frac{\gamma_\nu\gamma k_1\gamma_\mu}{2p_2\gamma_1}-\frac{\gamma_\mu\gamma k_1\gamma_\nu}{M^2-m^2}(m-\gamma p_2),\right. \qquad (5.9)$$

где выражения с матрицей γp_1+m, стоящей слева, опущены. Три члена в последней строке (5.9) удовлетворяют каждый по отдельности условиям закона сохранения, так как

$$(\gamma k_1)^2=0,\quad -2k_1p_1=M^2-m^2. \qquad (5.10)$$

Заметим, кстати, что между $\gamma_\mu\gamma k_1$ и $-\gamma k_1\gamma_\mu$ нет никакого существенного различия, ибо всякую величину, кратную $k_{1\mu}$, можно просто выбросить, если она входит в выражение (5.4). Каждое из этих матричных произведений можно заменить на $-i\sigma_{\mu\nu}k_1^\nu$.

Проиллюстрируем процедуру интегрирования, необходимого при вычислении величин типа $\langle\ldots\rangle$, на примере расчета величины $\langle 1/(-p_2k_1)\rangle$ в системе покоя:

$$\left\langle -\frac{1}{p_2k_1}\right\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{dz}{2}\,\frac{1}{\dfrac{M^2-m^2}{2M}\left[\dfrac{M^2+m^2}{2M}+\dfrac{M^2-m^2}{2M}z\right]} = \left(\frac{2M}{M^2-m^2}\right)^2\frac{1}{2}\ln\frac{M^2}{m^2}, \tag{5.11}$$

где z — косинус угла рассеяния. Другие интегралы подобного рода содержат дополнительные множители $p_{2\mu}$ и $p_{2\mu}p_{2\nu}$. То обстоятельство, что члены, кратные $k_{1\mu}$, можно опустить, упрощает все эти выкладки. Так, например,

$$\left\langle\frac{p_{2\mu}}{p_2k_1}\right\rangle+\frac{2p_{1\mu}}{M^2-m^2}=ak_{1\mu}\to 0, \tag{5.12}$$

куда слагаемое, кратное $p_{1\mu}$, которое в принципе могло бы возникнуть, не входит, так как левая часть обращается в нуль при ее умножении на k_1^μ. Аналогичные преобразования дают

$$\left\langle\left(\frac{p_{2\mu}}{p_2k_1}+\frac{2p_{1\mu}}{M^2-m^2}\right)p_{2\nu}\right\rangle\to-\left(p_{1\mu}k_{1\nu}+\frac{M^2-m^2}{2}g_{\mu\nu}\right)\frac{1}{M^2}\chi(M)^2, \tag{5.13}$$

где

$$\chi(M^2)=\left(\frac{M^2}{M^2-m^2}\right)^2\left[\frac{M^2+m^2}{M^2}-\frac{2M^2}{M^2-m^2}\ln\frac{M^2}{m^2}\right]. \tag{5.14}$$

Эта положительная функция изменяется в пределах от $1/3$ до 1: первое значение она принимает в точке $M^2=m^2$, а последнее — при $M^2\gg m^2$. Проведя все указанные выкладки, получим

$$\begin{aligned}&\left\langle\left(\gamma_\mu\frac{1}{\gamma P+m}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{1}{\gamma(p_2-k_1)+m}\gamma_\mu\right)(m-\gamma p_2)\right\rangle=\\ &=\gamma_\nu\gamma p_1\gamma_\mu\gamma k_1\frac{1}{2M^2}\chi(M^2)+\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma k_1\gamma P\left(\frac{1}{M^2-m^2}-\frac{1}{2M^2}\chi(M^2)\right)+\\ &\quad+\frac{1}{2m}\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma k_1\left(\frac{M^2-m^2}{M^2}\chi(M^2)-\frac{M^2+m^2}{M^2-m^2}\right)+\\ &\quad+\gamma_\mu\gamma k_1\gamma_\nu\frac{1}{M^2-m^2}\left(m-\frac{M^2+m^2}{2M^2}\gamma P\right).\end{aligned} \tag{5.15}$$

Нужные нам величины содержат дополнительно справа сомножитель γ^ν или P^ν. Искомые результаты получим путем простых преобразований, которые дают

$$L_\mu = i\sigma_{\mu\nu}k_1^\nu \left[\frac{m}{M^2} + \frac{1}{M^2}\left(\chi(M^2) + \frac{M^2+m^2}{M^2-m^2}\right)(\gamma P + m)\right],$$
$$S_\mu = -i\sigma_{\mu\nu}k_1^\nu \frac{m}{2M^2}\chi(M^2)(\gamma P + m). \tag{5.16}$$

Для комбинации, входящей в формулу (5.4), имеем

$$L_\mu\psi_2(P) + \frac{2}{M^2-m^2}S_\mu\eta_2(P) = \frac{m}{M^2}i\sigma_{\mu\nu}k_1^\nu\psi_2(P) + i\sigma_{\mu\nu}k_1^\nu \times$$
$$\times \frac{1}{M^2}\left(\chi(M^2) + \frac{M^2+m^2}{M^2-m^2}\right)\eta_2(P) -$$
$$- i\sigma_{\mu\nu}k_1^\nu \frac{m}{M^2}\frac{1}{M^2-m^2}\chi(M^2)(\gamma P + m)\eta_2(P). \tag{5.17}$$

Импульсы отдельных конечных частиц фигурируют только в матрице $i\sigma_{\mu\nu}k_1^\nu$, и поэтому вся зависимость от характеристик этих частиц в вакуумной амплитуде (5.4) может быть представлена посредством следующего локального произведения полей:

$$\int d\omega_{p_1} d\omega_{k_1} (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - P) J_1^\mu(-k_1)\eta_1(-p_1)\gamma^0(m - \gamma p_1) \times$$
$$\times eqi\sigma_{\mu\nu}k_1^\nu = -\int (dx)\psi_1(x)\gamma^0 eq\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_1^{\mu\nu}(x)\exp(iPx). \tag{5.18}$$

Если ограничиться рассмотрением лишь члена, в который поля частиц входят явным образом, то вакуумная амплитуда (5.4) примет вид

$$i\frac{\alpha}{2\pi}\int dM^2\frac{m^2}{M^2}\left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)\int (dx)(dx')\psi_1(x)\gamma^0\frac{eq}{2m}\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_1^{\mu\nu}(x) \times$$
$$\times \left[i\int d\omega_P \exp[iP(x - x')]\right]\psi_2(x'). \tag{5.19}$$

Проводя пространственно-временную экстраполяцию этого выражения, получаем

$$i\frac{\alpha}{2\pi}\int (dx)(dx')\psi(x)\gamma^0\frac{eq}{2m}\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(x) \times$$
$$\times G_2(x - x')\psi_{\text{обобщ}}(x'), \tag{5.20}$$

$$G_2(p) = \int_{m^2}^{\infty} dM^2\frac{m^2}{M^2}\left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)\frac{1}{p^2 + M^2 - i\varepsilon},$$

где $\psi_{\text{обобщ}}$ — поле обобщенного источника.

От получившейся асимметрии можно, конечно, избавиться. Заметим, что

$$G_2(p) = 1 - (p^2 + m^2)\int_{m^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\frac{m^2}{M^2}\frac{1}{p^2 + M^2 - i\varepsilon}, \tag{5.21}$$

где использовано тождество

$$\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}=\frac{1}{M^2-m^2}-\frac{p^2+m^2}{M^2-m^2}\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon} \tag{5.22}$$

и равенство

$$G_2(p^2+m^2=0)=\int_{m^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\frac{m^2}{M^2}=1. \tag{5.23}$$

В результате действия на поле $\psi_{\text{обобщ}}$ оператора $m+\gamma p$, содержащегося в разложении $p^2+m^2=(m-\gamma p)(m+\gamma p)$, возникает соответствующий источник. Мы сгруппируем его с другими членами, явно зависящими от источников. Тогда оставшаяся комбинация полей, если ее представить в виде некоторого действия с единым полем частиц, примет вид

$$\int(dx)\frac{1}{2}\psi(x)\gamma^0\frac{\alpha}{2\pi}\frac{eq}{2m}\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(x)\psi(x). \tag{5.24}$$

Мы снова получили для дополнительного спинового магнитного момента значение, равное $\alpha/2\pi$ магнетонов.

Рассмотрим теперь причинно-упорядоченную пару из одного обобщенного источника частиц и одного обобщенного источника фотонов, считая, что последний порождает пространственно-подобные импульсы. На этот раз мы будем иметь дело с частицами со спином 0. Обобщенный источник частиц K_2 испускает заряженную частицу и фотон. Две эти частицы пролетают вблизи обобщенного фотонного источника, где происходит процесс рассеяния с участием виртуального фотона от обобщенного источника, а затем рассеянная заряженная частица детектируется простым источником K_1. Вакуумная амплитуда для процесса рассеяния имеет вид [см. выражение (3-12.92), но без использования лоренцевской калибровки]

$$\int d\omega_{p_1}(dk_1)\,d\omega_{p_2}d\omega_{k_2}\delta(p_1+k_1-p_2-k_2)\,A^{\mu}(-k_1)\times$$
$$\times K_1(-p_1)\,e^2 2V_{\mu\nu}K_2(p_2)\,J_2^{\nu}(k_2), \tag{5.25}$$

где

$$2V_{\mu\nu}=\frac{(2p_1+k_1)_\mu(2p_2+k_2)_\nu}{(p_2+k_2)^2+m^2}+\frac{(2p_2-k_1)_\mu(2p_1-k_2)_\nu}{(p_1-k_2)^2+m^2}-2g_{\mu\nu} \tag{5.26}$$

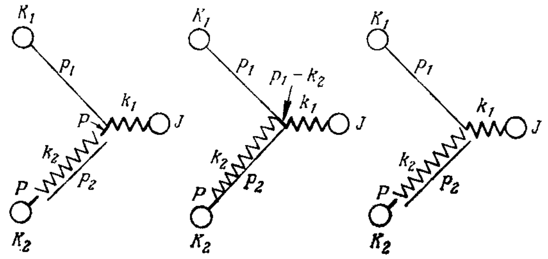
и

$$iJ_2^{\nu}(k_2)K_2(p_2)|_{\text{эфф}}=eq\,[(2P-k_2)^{\nu}\varphi_2(P)-if^{\nu}(k_2)K_2(P)]. \tag{5.27}$$

В эффективном источнике мы будем учитывать лишь слагаемое с φ_2, описывающее излучение заряженной частицей, а не самим источником. Тут меня прерывает Гарольд.

Гарольд. Может быть, мой вопрос покажется не совсем деликатным, но я думаю, что его все же следует задать. Я слышал, что в своих лекциях по теории источников Вы часто приводите пространственно-временные схемки физических процессов, называя их каузальными (причинными) диаграммами. Совпадают ли они с общеизвестными фейнмановскими диаграммами? И почему каузальные диаграммы не используются в этой книге?

Швингер. Ценность схем и диаграмм при обучении зависит от обстоятельств. На лекции, где необходимо постоянное внимание к излагаемому предмету, без иллюстраций такого рода иногда совершенно невозможно обойтись. Чтение же книги — это совсем другое дело. Читатель вполне может привлекать свои собственные дополнительные материалы, и ему следует поступать так всякий раз, когда это имеет смысл. Я предпочел не помещать в тексте никаких диаграмм — как для того, чтобы подчеркнуть ведущую роль аналитической структуры теории, так и для того, чтобы несколько снизить стоимость книги. Но, пожалуй, мне все же следует воспользоваться рассматриваемым сейчас причинным расположением источников и проиллюстрировать способ построения каузальных диаграмм. Для графического представления трех членов вакуумной амплитуды (5.25)—(5.27) требуются три такие диаграммы.



При этом приняты следующие условности: ось времени направлена вертикально; источники изображаются кружками, тонкая прямая линия указывает на причинное распространение реальной частицы; тонкая зигзагообразная линия соответствует причинному распространению реального фотона; толстая прямая и толстая зигзагообразная линии описывают некаузальное распространение виртуальной частицы и виртуального фотона. Различные линии можно маркировать полями или функциями распространения, которым они соответствуют, или же, как на наших картинках, импульсами отдельных реальных или виртуальных частиц.

Каузальные диаграммы не совпадают с фейнмановскими диаграммами. В последних не проводится различия между реальными и виртуальными частицами; фейнмановские диаграммы некаузальны.

Возвращаясь к вакуумной амплитуде (5.25)—(5.27), заметим, что тензор $V_{\mu\nu}$ обладает следующими свойствами калибровочной инвариантности:

$$k_1^\mu 2V_{\mu\nu} = (2p_2 + k_2)_\nu - (2p_1 - k_2)_\nu - 2k_{1\nu} = \\ = 2\,(p_2 + k_2 - p_1 - k_1)_\nu = 0, \qquad (5.28)$$

где использованы соотношения между импульсами

$$p_2 + k_2 = p_1 + k_1, \quad p_1 - k_2 = p_2 - k_1; \qquad (5.29)$$

аналогично этому

$$V_{\mu\nu}k_2^\nu = 0. \qquad (5.30)$$

Рассматриваемый вклад в вакуумную амплитуду принимает теперь вид

$$-i2e^2 \int d\omega_{p_1}(dk_1)\,d\omega_P\,dM^2\delta\,(p_1 + k_1 - P) \times \\ \times A^\mu(-k_1)\,K_1(-p_1)\,eqV_\mu\varphi_2(P), \qquad (5.31)$$

где

$$V_\mu = \int d\omega_{k_2}\,d\omega_{p_2}\,(2\pi)^3\,\delta\,(p_2 + k_2 - P)\,V_{\mu\nu}2P^\nu, \qquad (5.32)$$

причем

$$2V_{\mu\nu}P^\nu = (2p_1 + k_1)_\mu\left(\frac{M^2+m^2}{M^2-m^2} + \frac{1}{2}\right) + \\ + (2p_2 - k_1)_\mu \frac{M^2 + m^2 + k_1^2 - \frac{1}{2}(M^2 - m^2)}{2p_1k_2} - 2P_\mu. \qquad (5.33)$$

При выводе формулы (5.33) были использованы кинематические соотношения

$$-2Pp_2 = M^2 + m^2, \quad -2Pk_2 = M^2 - m^2, \; -2Pp_1 = \\ = M^2 + m^2 + k_1^2. \qquad (5.34)$$

Все соотношения такого рода основываются на свойстве физического фотона, для которого $k_2^2 = 0$. Снова пользуясь для обозначения интегралов типа (5.32) символом среднего значения, представим V_μ следующим образом:

$$V_\mu = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)\left[(2p_1 + k_1)_\mu\left(\frac{M^2+m^2}{M^2-m^2} - \frac{1}{2}\right) - k_{1\mu} + \right. \\ \left. + \left(M^2 + m^2 + k_1^2 - \frac{1}{2}(M^2 - m^2)\right)\left\langle \frac{\left(p_2 - \frac{1}{2}k_1\right)_\mu}{p_1k_2} \right\rangle\right]. \qquad (5.35)$$

Входящее сюда среднее значение обладает векторной структурой вида

$$\left\langle \frac{p_2 - \frac{1}{2} k_1}{p_1 k_2} \right\rangle = (2p_1 + k_1) a + k_1 b. \tag{5.36}$$

Далее, так как

$$k_1 \left(p_2 - \frac{1}{2} k_1 \right) = k_2 p_1, \tag{5.37}$$

то мы видим, что

$$1 = -(M^2 - m^2) a + k_1^2 b. \tag{5.38}$$

Второе соотношение можно получить, если умножить обе части равенства (5.36) на p_1 и воспользоваться формулой

$$p_1 \left(p_2 - \frac{1}{2} k_1 \right) = -p_1 k_2 - \frac{1}{4} (M^2 + m^2 + k_1^2) - \frac{1}{2} m^2, \tag{5.39}$$

что дает нам

$$\begin{gathered} -1 + \frac{1}{2} \left(\frac{M^2 + m^2 + k_1^2}{2} + m^2 \right) \left\langle -\frac{1}{p_1 k_2} \right\rangle = \\ = -\left(\frac{M^2 + m^2 + k_1^2}{2} + m^2 \right) a - \frac{1}{2} (M^2 - m^2 + k_1^2)\, b. \end{gathered} \tag{5.40}$$

В результате для коэффициента a получаем

$$-\Delta a = M^2 - m^2 - k_1^2 + k_1^2 \left(\frac{M^2 + m^2 + k_1^2}{2} + m^2 \right) \left\langle -\frac{1}{p_1 k_2} \right\rangle, \tag{5.41}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= (M^2 - m^2)^2 + 2 (M^2 + m^2) k_1^2 + (k_1^2)^2 = \\ &= (M^2 + m^2 + k_1^2)^2 - 4M^2 m^2. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Среднее значение, входящее в формулу (5.41), проще всего вычислить в системе покоя вектора P:

$$\begin{gathered} \left\langle -\frac{1}{p_1 k_2} \right\rangle = \\ = \frac{2M}{M^2 - m^2} \int_{-1}^{1} \frac{dz}{2} \frac{1}{\frac{M^2 + m^2 + k_1^2}{2M} + z \left[\left(\frac{M^2 + m^2 + k_1^2}{2M} \right)^2 - m^2 \right]^{1/2}} = \\ = \frac{4M^2}{M^2 - m^2} (M^2 + m^2 + k_1^2) \int_0^1 dz \frac{1}{\Delta (1 - z^2) + 4M^2 m^2}. \end{gathered} \tag{5.43}$$

Вектор V_μ представляется в виде линейной комбинации векторов $2p_1 + k_1$ и k_1. С точностью до множителя $(4\pi)^{-2} [1 - (m/M)^2]$, коэффициент при $2p_1 + k_1$ равен

$$\frac{M^2 + m^2}{M^2 - m^2} - \frac{1}{2} + \left(M^2 + m^2 + k_1^2 - \frac{1}{2} (M^2 - m^2) \right) a = -k_1^2 I, \tag{5.44}$$

где

$$\Delta I = \left[\Delta + 4M^2m^2 - m^2(M^2-m^2) + (M^2+m^2+k_1^2)\left(2m^2 - \frac{M^2-m^2}{2}\right)\right] \times$$
$$\times \frac{1}{2}\left\langle -\frac{1}{p_1k_2}\right\rangle - \left(\frac{M^2+m^2}{M^2-m^2} - \frac{1}{2}\right)\left[2(M^2+m^2)+k_1^2\right] -$$
$$-(M^2+m^2+k_1^2) + \frac{3}{2}(M^2-m^2). \tag{5.45}$$

После некоторых перегруппировок членов величина I может быть представлена следующим образом:

$$I(M^2,\ k_1^2) = \int_0^1 dz\, \frac{1}{\Delta(1-z^2)+4M^2m^2}\left[(k_1^2+4m^2)\frac{2M^2}{M^2-m^2}z^2 - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}(M^2-m^2-k_1^2)(1-z^2) + M^2\right]. \tag{5.46}$$

Коэффициент при k_1 полностью определяется свойством калибровочной инвариантности

$$k_1^\mu V_\mu = 0, \tag{5.47}$$

из которого получаем комбинацию

$$-k_1^2(2p_1+k_1)_\mu + k_{1\mu}k_1(2p_1+k_1) =$$
$$= -(k_1^2 g_{\mu\nu} - k_{1\mu}k_{1\nu})(2p_1+k_1)^\nu. \tag{5.48}$$

Теперь можно видеть, что вклад (5.31) имеет вид выражения, которое содержит только поля:

$$-i\frac{\alpha}{2\pi}\int dM^2\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\int (dx)(dx')\, I\, \partial_\nu F^{\mu\nu}(x)\,\varphi_1(x) \times$$
$$\times\left(\frac{1}{i}\partial_\mu^T + \frac{1}{i}\partial_\mu\right) eq\left[i\int d\omega_P \exp[iP(x-x')]\right]\varphi_2(x'), \tag{5.49}$$

где

$$\varphi_1(x)\,\partial_\mu^T = -\partial_\mu\varphi_1(x). \tag{5.50}$$

Величина I входит сюда в качестве нелокального в пространстве, но локализованного во времени оператора, действующего на напряженности электромагнитного поля. Чтобы провести пространственно-временну́ю экстраполяцию выражения (5.49), нужно подставить функцию $\Delta_+(x-x',\ M^2)$ вместо ее причинного выражения при $x^0 > x^{0\prime}$. Однако, как и раньше в этом параграфе, чтобы представить связь в виде единого выражения, включающего поля φ_1 и φ_2, следует обратиться к разложению (5.22). Возникающий в итоге член в действии, если его объединить с примитивным взаимодействием, можно записать как

$$\int (dx)(dx')\, j^\mu(x)\, f_{\mu\nu}(x-x')\, A^\nu(x'), \tag{5.51}$$

где

$$j^{\mu}(x) = \varphi(x)\, eq \frac{1}{i} \partial^{\mu} \varphi(x) \tag{5.52}$$

и

$$f_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} + (k_{\mu}k_{\nu} - g_{\mu\nu}k^2)\frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_{\to m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2} I(M^2,\ k^2). \tag{5.53}$$

Получаемый таким способом формфактор должен совпадать с формфактором, задаваемым формулами (4.25) и (4.21). Точнее говоря, так должно было бы быть, если бы для устранения инфракрасной особенности в интеграле (5.53) мы ввели массу фотона. Мы удостоверимся лишь в том, что совпадают логарифмические инфракрасные особенности двух выражений, и опустим все дополнительные обстоятельства, сопутствующие ненулевой массе фотона. Сингулярностью в формуле (5.46) обладает член с разностью $M^2 - m^2$ в знаменателе. Его вклад в интеграл (5.53) таков:

$$.2(k^2 + 4m^2)\int\limits_0^1 dz z^2 \int\limits_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2 - m^2} \frac{1}{\Delta(1-z^2) + 4M^2m^2} =$$

$$= 2\int\limits_0^1 dz z^2 \frac{k^2 + 4m^2}{k^2(k^2 + 4m^2)(1-z^2) + (2m^2)^2}\left(\ln\frac{1}{\mu} + \ \ldots\right). \tag{5.54}$$

Здесь введение массы фотона в нижний предел интегрирования — существенная, но не единственная необходимая модификация; тем не менее нам достаточно выяснить зависимость от массы фотона. Требуется убедиться в справедливости следующего тождества:

$$\int\limits_0^1 dz z^2 \frac{k^2 + 4m^2}{k^2(k^2 + 4m^2)(1-z^2) + (2m^2)^2} = \int\limits_0^1 dv \frac{1 + v^2}{4m^2 + k^2(1 - v^2)}. \tag{5.55}$$

Можно просто выполнить два сходных интегрирования, и в итоге мы придем к одному и тому же выражению

$$\frac{1}{4m^2}[K_0(\lambda) + K_1(\lambda)], \quad \lambda^2 = \frac{k^2}{4m^2}, \tag{5.56}$$

где использованы обозначения (4.122). Выглядит все это, конечно, не очень элегантно. Более предпочтительно было бы отыскать такое хитроумное преобразование переменных интегрирования, которое прямо связывало бы два эквивалентных выражения. К этому идеалу приблизимся в дальнейшем.

А пока, в продолжение анализа частиц со спином 0, рассмотрим причинно-упорядоченную пару двух обобщенных источников частиц — K_1 и K_2. Между ними причинно расположен обобщенный фотонный источник, способный передавать пространственно-подобные импульсы. Обобщенный источник частиц испускает или поглощает фотон и заряженную частицу. Фотон распространяется между двумя обобщенными источниками, оставаясь свободным, а заряженная частица отклоняется обобщенным фотонным источником. Таким образом, здесь описывается некоторое обобщение схемы, которая использовалась в § 2 для первого вывода дополнительного спинового магнитного момента частиц со спином $^1/_2$. Однородное магнитное поле теперь заменяется произвольным полем. Вакуумная амплитуда, описывающая историю двух частиц, равна

$$\int (dx) \ldots (d\xi') \, iI_1^{\mu}(\xi) K_1(x)\big|_{\text{эфф}} D_+(\xi-\xi') \times \times \Delta_+^A(x,x') \, iJ_{2\mu}(\xi') K_2(x')\big|_{\text{эфф}}, \tag{5.57}$$

где эффективные источники определяются формулами типа (5.27). Мы будем сохранять только линейный по A член разложения (3-12.28):

$$\Delta_+^A = \Delta_+ + \Delta_+ eq(pA + Ap)\Delta_+ + \ldots . \tag{5.58}$$

Кроме того, если пользоваться только теми частями эффективных источников, которые зависят от полей, то в результате мы придем к следующему выражению для члена вакуумной амплитуды:

$$-ie^2 \int d\omega_k \, d\omega_{p_1} d\omega_{p_2} (2P_1-k)(2P_2-k)\varphi_1(-P_1) eq \times \times (P_1+P_2-2k) A(K) \varphi_2(P_2), \tag{5.59}$$

где

$$K = P_1 - P_2 \tag{5.60}$$

и

$$P_1 = p_1 + k, \quad P_2 = p_2 + k. \tag{5.61}$$

Удобно учесть эти кинематические соотношения, записав

$$\int d\omega_{p_1} d\omega_{p_2} = \int \frac{(dp_1)}{(2\pi)^3}\frac{(dp_2)}{(2\pi)^3}\delta(p_1^2+m^2)\delta(p_2^2+m^2) = = \int \frac{(dP_1)}{(2\pi)^3}\frac{(dP_2)}{(2\pi)^3}\delta[(P_1-k)^2+m^2]\delta[(P_2-k)^2+m^2]; \tag{5.62}$$

здесь подразумевается, что все энергии положительны. В итоге величина (5.59) превращается в

$$ie^2 \int dM_1^2 dM_2^2 d\omega_{P_1} d\omega_{P_2} d\omega_k \delta(2kP_1+M_1^2-m^2)\delta(2kP_2+M_2^2-m^2) \times \times (2K^2+M_1^2+M_2^2+2m^2)\varphi_1(-P_1) eq(P_1+P_2-2k) A(K)\varphi_2(P_2). \tag{5.63}$$

Входящий сюда основной инвариантный интеграл

$$\int d\omega_k \delta (2kP_1 + M_1^2 - m^2)\, \delta (2kP_2 + M_2^2 - m^2) \tag{5.64}$$

может быть вычислен в системе покоя любого из импульсов. Так, выбирая P_1, будем иметь

$$\frac{1}{8\pi^2} \int k^0\, dk^0\, dz \delta (-2k^0 M_1 + M_1^2 - m^2) \times \\ \times \delta (-2k^0 P_2^0 + 2k^0 |\mathbf{P}_2|\, z + M_2^2 - m^2), \tag{5.65}$$

где z — косинус угла между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{P}_2$. Компоненты P_2 имеют инвариантный смысл, как это видно из записи

$$P_2^0 = -\frac{P_1 P_2}{M_1} = \frac{K^2 + M_1^2 + M_2^2}{2M_1}, \\ |\mathbf{P}_2| = \left[\left(\frac{P_1 P_2}{M_1} \right)^2 - M_2^2 \right]^{1/2} = \frac{\Delta^{1/2}}{2M_1}, \tag{5.66}$$

где

$$\Delta = (2P_1 P_2)^2 - 4M_1^2 M_2^2 = (K^2 + M_1^2 + M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2. \tag{5.67}$$

Для того чтобы интеграл по z не обращался в нуль, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| M_2^2 - m^2 - \frac{M_1^2 - m^2}{M_1} \frac{K^2 + M_1^2 + M_2^2}{2M_1} \right| < \frac{M_1^2 - m^2}{M_1} \frac{\Delta^{1/2}}{2M_1}, \tag{5.68}$$

или

$$(M_1^2 - M_2^2)^2 < \frac{K^2}{m^2} (M_1^2 - m^2)(M_2^2 - m^2). \tag{5.69}$$

При таких условиях интеграл (5.65) имеет следующее значение:

$$\int d\omega_k \delta (2kP_1 + M_1^2 - m^2)\, \delta (2kP_2 + M_2^2 - m^2) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Delta^{1/2}}. \tag{5.70}$$

Чтобы учесть неравенство (5.69), удобно ввести новые переменные x и v:

$$M_1^2 = m^2 + \frac{1}{2} x \{K^2 + 4m^2 + v [K^2 (K^2 + 4m^2)]^{1/2}\}, \\ M_2^2 = m^2 + \frac{1}{2} x \{K^2 + 4m^2 - v [K^2 (K^2 + 4m^2)]^{1/2}\}. \tag{5.71}$$

Тогда наше неравенство примет вид

$$v^2 < 1, \tag{5.72}$$

а x будет пробегать значения от 0 до ∞. Имеем также

$$\Delta = K^2 (K^2 + 4m^2)(1 + 2x + x^2 v^2) \tag{5.73}$$

и

$$dM_1^2\,dM_2^2 = \frac{1}{2}(K^2+4m^2)\,[K^2(K^2+4m^2)]^{1/2}\,x\,dx\,dv. \qquad (5.74)$$

Эффективная замена для $P_1 + P_2 - 2k$ в интеграле (5.63) имеет вид

$$\langle P_1+P_2-2k\rangle = (P_1+P_2)\,\alpha + (P_1-P_2)\,\beta. \qquad (5.75)$$

Умножив это равенство сначала на $P_1 + P_2$, а затем на $P_1 - P_2$, придем к двум уравнениям

$$K^2+M_1^2+M_2^2+2m^2 = (K^2+2M_1^2+2M_2^2)\,\alpha + (M_1^2-M_2^2)\,\beta, \qquad (5.76)$$
$$0 = -(M_1^2-M_2^2)\,\alpha + K^2\beta.$$

В итоге получим

$$\langle P_1+P_2-2k\rangle_\mu = \frac{K^2+M_1^2+M_2^2+2m^2}{\Delta}\,(K^2g_{\mu\nu}-K_\mu K_\nu)\,(P_1+P_2)^\nu, \qquad (5.77)$$

где

$$\frac{K^2+M_1^2+M_2^2+2m^2}{\Delta} = \frac{1}{K^2}\,\frac{1+x}{1+2x+x^2v^2}. \qquad (5.78)$$

Заметим также, что

$$2K^2 + M_1^2 + M_2^2 + 2m^2 = K^2 + (K^2 + 4m^2)\,(1 + x). \qquad (5.79)$$

Скомбинировав все эти соотношения, для вакуумной амплитуды будем иметь

$$i\,\frac{\alpha}{4\pi}\int d\omega_{P_1}\,d\omega_{P_2}\,x\,dx\,\frac{dv}{2}\,(K^2+4m^2)\,\frac{1+x}{(1+2x+x^2v^2)^{3/2}}\times$$
$$\times\left[2+x+\frac{4m^2}{K^2}(1+x)\right]\varphi_1(-P_1)\,eq\varphi_2(P_2)\,(P_1+P_2)\times$$
$$\times\,[K^2A(K)-KKA(K)]. \qquad (5.80)$$

Замечая, далее, что

$$\varphi_1(-P_1)\,A(K)\,\varphi_2(P_2) = \int (dx)\,\varphi_1(x)\exp(iP_1x)\times$$
$$\times\int (d\xi)\exp[-i(P_1-P_2)\,\xi]\,A(\xi)\times$$
$$\times\int (dx')\exp(-iP_2x')\,\varphi_2(x'), \qquad (5.81)$$

можно написать

$$-\int d\omega_{P_1}\,d\omega_{P_2}\,\varphi_1(-P_1)\,A(K)\,\varphi_2(P_2) =$$
$$= \int (dx)\,(d\xi)\,(dx')\,\varphi_1(x)\left[i\int d\omega_{P_1}\exp[iP_1(x-\xi)]\right]\times$$
$$\times A(\xi)\left[i\int d\omega_{P_2}\exp[iP_2(\xi-x')]\right]\varphi_2(x'), \qquad (5.82)$$

откуда сразу видно, что в вакуумную амплитуду входят причинные выражения двух функций распространения. Проводя пространственно-временные экстраполяции, удобно произвести подстановки

$$
\begin{aligned}
& i \int d\omega_{P_1} \exp\left[iP_1(x-\xi)\right] \to \int \frac{(dp_1)}{(2\pi)^4} \frac{\exp\left[ip_1(x-\xi)\right]}{p_1^2+M_1^2-i\varepsilon}, \\
& i \int d\omega_{P_2} \exp\left[iP_2(\xi-x')\right] \to \int \frac{(dp_2)}{(2\pi)^4} \frac{\exp\left[ip_2(\xi-x')\right]}{p_2^2+M_2^2-i\varepsilon},
\end{aligned} \tag{5.83}
$$

а затем вернуться к четырехмерному импульсному пространству по следующему рецепту:

$$
\begin{gathered}
-\int d\omega_{P_1} d\omega_{P_2} \varphi_1(-P_1) A(K) \varphi_2(P_2) \to \\
\to \int \frac{(dp_1)}{(2\pi)^4} \frac{(dp_2)}{(2\pi)^4} \varphi_1(-p_1) \frac{1}{p_1^2+M_1^2-i\varepsilon} A(k) \frac{1}{p_2^2+M_2^2-i\varepsilon} \varphi_2(p_2),
\end{gathered} \tag{5.84}
$$

где

$$
k = p_1 - p_2. \tag{5.85}
$$

Не следует забывать, что к каждой из двух спектральных форм можно добавлять контактные члены. Учитывая это, напишем выражение, которое получается путем пространственно-временной экстраполяции вакуумной амплитуды (5.80), в виде двойной спектральной формы

$$
\begin{aligned}
-i\frac{\alpha}{4\pi} \int \frac{(dp_1)}{(2\pi)^4} \frac{(dp_2)}{(2\pi)^4} \varphi_1(-p_1)\, eq\varphi_2(p_2)(p_1+p_2) k^2 A(k)(k^2+4m^2) \times \\
\times \int x\,dx \frac{dv}{2} \frac{1+x}{(1+2x+x^2v^2)^{3/2}} \left[2+x+\frac{4m^2}{k^2}(1+x)\right] \times \\
\times \frac{1}{p_1^2+M_1^2-i\varepsilon} \frac{1}{p_2^2+M_2^2-i\varepsilon},
\end{aligned} \tag{5.86}
$$

где для простоты мы приняли лоренцевскую калибровку:

$$
kA(k) = 0. \tag{5.87}
$$

Самый элементарный случай, в котором можно применить эту вакуумную амплитуду,— это случай, когда нет никаких полей. В лоренцевской калибровке из пропорциональности векторов A и k вытекает, что $k^2 = 0$. Отметим, что при этом условии величина (5.86) не обращается в нуль, так как она содержит член с $1/k^2$; таким образом, имеется вакуумная амплитуда, зависящая от потенциала. Согласно формуле (5.71), при $K^2 \to k^2$ мы имеем

$$
k^2 = 0: \quad M_1^2 = M_2^2 = m^2(1+2x) = M^2. \tag{5.88}
$$

В этом случае в выражении (5.86) можно выполнить интегрирование по v:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dv}{2} \frac{1}{(1+2x+x^2v^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+x)(1+2x)}. \tag{5.89}$$

В результате это выражение принимает вид

$$-i\frac{\alpha}{2\pi}\int \frac{(dp_1)}{(2\pi)^4}\frac{(dp_2)}{(2\pi)^4}\varphi_1(-p_1)\,eq\varphi_2(p_2)(p_1+p_2)A(k)\times$$
$$\times\int \frac{dM^2}{M^2}\frac{M^2+m^2}{M^2-m^2}\left(\frac{M^2-m^2}{p_1^2+M^2-i\varepsilon}-1\right)\left(\frac{M^2-m^2}{p_2^2+M^2-i\varepsilon}-1\right), \tag{5.90}$$

где мы указали и те контактные члены, которые диктуются физическими соображениями. Они служат для того, чтобы заменить поля источниками. Для этого достаточно воспользоваться тождеством

$$\left(\frac{M^2-m^2}{p_1^2+M^2-i\varepsilon}-1\right)\left(\frac{M^2-m^2}{p_2^2+M^2-i\varepsilon}-1\right)=$$
$$=\frac{p_1^2+m^2}{p_1^2+M^2-i\varepsilon}\,\frac{p_2^2+m^2}{p_2^2+M^2-i\varepsilon}, \tag{5.91}$$

после чего выражение (5.90) преобразуется к виду

$$-i\frac{\alpha}{2\pi}\int \frac{dM^2}{M^2}\frac{M^2+m^2}{M^2-m^2}\frac{(dp_1)}{(2\pi)^4}\frac{(dp_2)}{(2\pi)^4}K_1(-p_1)\frac{1}{p_1^2+M^2-i\varepsilon}\times$$
$$\times\, eq(p_1+p_2)A(k)\frac{1}{p_2^2+M^2-i\varepsilon}K_2(p_2). \tag{5.92}$$

Корректность этой процедуры подтверждается сравнением с выражением (1.65) для соответствующей модифицированной функции распространения в отсутствие электромагнитного поля и в калибровке $A=0$. Мы придем к более общему описанию случая, когда отсутствует поле, если произведем матричную подстановку $p \to p - eqA$:

$$\frac{1}{(p-eqA)^2+M^2-i\varepsilon}=\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}+$$
$$+\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}eq(pA+Ap)\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}+\ldots. \tag{5.93}$$

Дополнительный член в связи двух источников, который линеен по A, в точности совпадает с величиной (5.92). Это как раз и требуется условиями нормировки феноменологической теории.

Вернемся теперь к выражению (5.86) и выделим в нем члены с полями частиц, отбрасывая все члены, содержащие явным образом источники. Для этого воспользуемся тождественными преобразованиями вида

$$\frac{1}{p_1^2+M_1^2-i\varepsilon}=\frac{1}{M_1^2-m^2}-\frac{p_1^2+m^2}{M_1^2-m^2}\frac{1}{p_1^2+M_1^2-i\varepsilon}, \tag{5.94}$$

которые эквивалентны подстановке

$$\frac{1}{p_1^2+M_1^2-i\varepsilon}\frac{1}{p_2^2+M_2^2-i\varepsilon}\to\frac{1}{M_1^2-m^2}\frac{1}{M_2^2-m^2}=$$
$$=\frac{1}{k^2+4m^2}\frac{1}{m^2+\frac{1}{4}k^2(1-v^2)}\frac{1}{x^2}. \tag{5.95}$$

Кроме того, напишем

$$\frac{4m^2}{k^2}\frac{1}{m^2+\frac{1}{4}k^2(1-v^2)}=\frac{4}{k^2}-\frac{1-v^2}{m^2+\frac{1}{4}k^2(1-v^2)} \tag{5.96}$$

и опустим слагаемое с $1/k^2$ — как было только что показано; его функция заключается лишь в том, чтобы включить в модифицированную функцию распространения калибровочно-ковариантную комбинацию $p-eqA$. Результат может быть представлен в форме действия, зависящего от поля. Объединив его с примитивным взаимодействием, получим

$$\int(dx)(dx')\,\varphi(x)\,eq\frac{1}{i}\,\partial_\mu\varphi(x)\,F(x-x')\,A^\mu(x'), \tag{5.97}$$

где

$$F(k)=1-\frac{k^2}{4m^2}\int_0^1 2v\,dv\,\frac{f(v)}{1+\frac{k^2}{4m^2}(1-v^2)} \tag{5.98}$$

и

$$vf(v)=\frac{\alpha}{2\pi}\int_{\to 0}^{\infty}\frac{dx}{x}\frac{1+x}{(1+2x+x^2v^2)^{3/2}}[1+(1+x)v^2]. \tag{5.99}$$

Здесь мы вновь сталкиваемся с неизбежной логарифмической особенностью на нижнем пределе интегрирования. На этот раз представляется уместным ввести конечную массу фотона μ, чтобы можно было провести детальное сравнение с нашими прежними результатами. Наличие массы у фотона существенным образом сказывается на неравенстве (5.68), которое теперь будет записываться так:

$$\left|M_2^2+\mu^2-m^2-\frac{M_1^2+\mu^2-m^2}{M_1}\frac{k^2+M_1^2+M_2^2}{2M_1}\right|<$$
$$<\left[\left(\frac{M_1^2+\mu^2-m^2}{2M_1}\right)^2-\mu^2\right]^{1/2}\frac{\Delta^{1/2}}{M_1} \tag{5.100}$$

(вместо K^2 сюда входит k^2), или

$$x^2(1-v^2)\left(m^2+\frac{k^2}{4}\right)>\mu^2(1+x). \tag{5.101}$$

В интеграле (5.99) достаточно лишь заменить нижний предел на

$$x_0=\frac{\mu}{m}(1-v^2)^{-1/2}\left(1+\frac{k^2}{4m^2}\right)^{-1/2}. \tag{5.102}$$

Выполнив интегрирование по x, получим

$$vf(v)=\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1+v^2}{2}\left[\ln\left(\frac{4m^2}{\mu^2}\frac{1-v^2}{(1+v)^2}\right)-2+\frac{2v}{1+v^2}+\right.$$
$$\left.+\ln\left(1+\frac{k^2}{4m^2}\right)\right]. \tag{5.103}$$

Но имеет место тождество, несколько напоминающее (4.109):

$$\int_0^1 dv\,(1+v^2)\frac{\ln\left(1+\frac{k^2}{4m^2}\right)}{1+\frac{k^2}{4m^2}(1-v^2)}=\int_0^1 dv\,(1+v^2)\times$$
$$\times\frac{\ln\left(\frac{(1+v)^2}{1-v^2}\frac{v^2}{1-v^2}\right)-\frac{2v}{1+v^2}}{1+\frac{k^2}{4m^2}(1-v^2)}. \tag{5.104}$$

Его можно проверить либо путем алгебраических преобразований, либо рассматривая $-k^2/4m^2$ как комплексную переменную. В последнем случае обе части формулы (5.104) представляют собой функции комплексной переменной, обращающиеся в нуль на бесконечности и имеющие разрезы вдоль вещественной оси от 1 до ∞. Заметив, что на этом интервале обе мнимые части совпадают, мы и убеждаемся в справедливости тождества (5.104). В итоге получаем следующую функцию, эквивалентную функции (5.103):

$$vf(v)=\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1+v^2}{2}\left[\ln\left(\frac{4m^2}{\mu^2}\frac{v^2}{1-v^2}\right)-2\right]. \tag{5.105}$$

Отсюда видно, что $f(v)$ совпадает с функцией $f(M^2)$, определяемой формулой (4.21).

В трактовке конечной массы фотона возникают некоторые тонкости, требующие дополнительного исследования. Но мы пока отложим этот вопрос и обратимся к соответствующему анализу частиц со спином $^1/_2$.

§ 6. ФОРМФАКТОРЫ III. СПИН $^1/_2$

Анализ случая частиц со спином $^1/_2$ основывается на двухчастичной амплитуде

$$\int (dx) \ldots (d\xi') \, iJ_1^{\mu}(\xi) \, \eta_1(x) \, \gamma^0 |_{\text{эфф}} D_+ (\xi - \xi)' \times$$
$$\times G_+^A (x, x') \, iJ_{2\mu}(\xi') \, \eta_2(x') |_{\text{эфф}} \tag{6.1}$$

с сохранением только зависящей от поля части источника:

$$iJ^{\mu}(\xi) \, \eta(x) |_{\text{эфф}} = eq\delta(x - \xi) \, \gamma^{\mu}\psi(x) + \ldots . \tag{6.2}$$

При этом учитывается лишь линейный по полю член разложения

$$G_+^A = G_+ + G_+ \, eq\gamma A G_+ + \ldots . \tag{6.3}$$

Соответствующая вакуумная амплитуда равна

$$-ie^2 \int dM_1^2 \, dM_2^2 \, d\omega_{P_1} \, d\omega_{P_2} \, d\omega_k \, \delta(p_1^2 + m^2) \, \delta(p_2^2 + m^2) \times$$
$$\times \psi_1(-P_1) \, \gamma^0\gamma^{\nu} (m - \gamma p_1) \, eq\gamma A(K) (m - \gamma p_2) \, \gamma_{\nu}\psi_2(p_2), \tag{6.4}$$

где

$$p_1 = P_1 - k, \quad p_2 = P_2 - k. \tag{6.5}$$

Прежде всего мы упростим матрицу

$$M^{\mu} = \gamma^{\nu} (m - \gamma p_1) \, \gamma^{\mu} (m - \gamma p_2) \, \gamma_{\nu}, \tag{6.6}$$

основываясь только на кинематических соотношениях

$$-p_1^2 = -p_2^2 = m^2. \tag{6.7}$$

При этом мы хотим сделать очевидным свойство калибровочной инвариантности

$$K_{\mu} M^{\mu} = 0, \tag{6.8}$$

являющееся следствием равенства

$$\gamma K = (\gamma p_1 + m) - (\gamma p_2 + m). \tag{6.9}$$

Первый шаг соответствующего упрощения состоит в преобразовании

$$M^{\mu} = [2p_1^{\nu} + (m + \gamma p_1) \, \gamma^{\nu}] \, \gamma^{\mu} \, [2p_{2\nu} + \gamma_{\nu} (m + \gamma p_2)] =$$
$$= -2(K^2 + 2m^2) \, \gamma^{\mu} + 2(m + \gamma p_1) \, \gamma p_2 \gamma^{\mu} +$$
$$+ 2\gamma^{\mu}\gamma p_1 (m + \gamma p_2) + 2(m + \gamma p_1) \, \gamma^{\mu} (m + \gamma p_2). \tag{6.10}$$

На следующем этапе систематически используется соотношение

$$K = p_1 - p_2; \tag{6.11}$$

например,

$$(m+\gamma p_1)\,\gamma p_2=(m+\gamma p_1)\,(\gamma p_1-\gamma K)= \\ =m\,(m+\gamma p_1)-(m+\gamma p_1)\,\gamma K. \tag{6.12}$$

В итоге приходим к следующему выражению:

$$M^\mu=-K^2\gamma^\mu+K^\mu\gamma K-4m\,(p_1+p_2)^\mu-\frac{1}{2}\,\gamma\,(p_1+p_2)\,i\sigma^{\mu\nu}K_\nu- \\ -i\sigma^{\mu\nu}K_\nu\frac{1}{2}\,\gamma\,(p_1+p_2)-(p_1+p_2)^\mu\,(p_1+p_2)^\nu\,\gamma_\nu. \tag{6.13}$$

В него входят четыре набора слагаемых, каждый из которых по отдельности обладает свойством (6.8). Для двух из них это условие удовлетворяется тождественно, а для двух других его выполнимость основывается на соотношении ортогональности

$$K\,(p_1+p_2)=0. \tag{6.14}$$

В процессе интегрирования в формуле (6.4) возникает среднее значение вектора p_1+p_2. В силу равенства (6.14) в матричных обозначениях оно должно иметь следующий вид:

$$\langle p_1+p_2\rangle=\alpha\left(1-\frac{KK}{K^2}\right)(P_1+P_2). \tag{6.15}$$

Используя алгебраическое соотношение

$$(P_1+P_2)\,(p_1+p_2)=(P_1+P_2)^2-2k\,(P_1+P_2)= \\ =-(K^2+M_1^2+M_2^2+2m^2) \tag{6.16}$$

и замечая, что

$$-(P_1+P_2)\,(K^2-KK)\,(P_1+P_2)=\Delta, \tag{6.17}$$

получим

$$\alpha=\frac{K^2\,(K^2+M_1^2+M_2^2+2m^2)}{\Delta}, \tag{6.18}$$

т. е. мы вновь приходим к результату (5.77). Другое необходимое нам среднее значение дается симметричной матрицей

$$\langle(p_1+p_2)\,(p_1+p_2)\rangle=a\left(1-\frac{KK}{K^2}\right)+b\left(1-\frac{KK}{K^2}\right)\times \\ \times(P_1+P_2)\,(P_1+P_2)\left(1-\frac{KK}{K^2}\right). \tag{6.19}$$

Образуя след этой матрицы и умножая обе части равенства (6.19) на вектор P_1+P_2, мы приходим к системе двух уравнений для коэффициентов a и b:

$$\begin{gathered}-(K^2+4m^2)=3a-b\,\frac{\Delta}{K^2}, \\ (K^2+M_1^2+M_2^2+2m^2)^2=-a\,\frac{\Delta}{K^2}+b\left(\frac{\Delta}{K^2}\right)^2.\end{gathered} \tag{6.20}$$

Ее решение таково:

$$a=\frac{2}{\Delta}\left[K^2(M_1^2-m^2)(M_2^2-m^2)-m^2(M_1^2-M_2^2)^2\right],$$
$$b=\frac{K^2(K^2+4m^2)}{\Delta}+\frac{6K^2}{\Delta}\left[K^2(M_1^2-m^2)(M_2^2-m^2)-\right.$$
$$\left.-m^2(M_1^2-M_2^2)^2\right]. \tag{6.21}$$

Через переменные (5.71) три параметра α, a и b выражаются следующим образом:

$$\alpha=\frac{1+x}{\delta},$$
$$a=(K^2+4m^2)\frac{x^2(1-v^2)}{2\delta}, \tag{6.22}$$
$$b=\frac{1}{\delta}+\frac{3}{2}\frac{x^2(1-v^2)}{\delta^2},$$

где введена величина

$$\delta=1+2x+v^2x^2. \tag{6.23}$$

Заметим, что от K^2 зависит только a, причем линейным образом.

Теперь, когда в $\langle M_\mu\rangle$ входят только векторы P_1, P_2 и их разность K, нам достаточно выполнить еще одно, последнее, преобразование. Оно основывается на тождествах типа

$$(P_1+P_2)^\mu=-(\gamma P_1\gamma^\mu+\gamma^\mu\gamma P_2)+i\sigma^{\mu\nu}K_\nu \tag{6.24}$$

и на сравнительно сложном тождестве

$$(P_1+P_2)^\mu\left[\gamma(P_1+P_2)+\frac{M_1^2-M_2^2}{K^2}\gamma K\right]=$$
$$=-2\gamma P_1\gamma^\mu\gamma P_2-\left(M_1^2+M_2^2+\frac{(M_1^2-M_2^2)^2}{K^2}\right)\gamma^\mu+$$
$$+\left(1+\frac{M_1^2-M_2^2}{K^2}\right)\gamma P_1 i\sigma^{\mu\nu}K_\nu+\left(1+\frac{M_2^2-M_1^2}{K^2}\right)i\sigma^{\mu\nu}K_\nu\gamma P_2. \tag{6.25}$$

Эти тождества позволяют выразить $\langle M^\mu\rangle$ через базисные матричные векторы γ^μ и $i\sigma^{\mu\nu}K_\nu$, справа от которых могут стоять множители γP_2, а слева — множители γP_1. Поступая таким образом, мы принимаем одно упрощение, а именно вводим лоренцевскую калибровку, заменяя тем самым $\gamma^\mu-(K^\mu\gamma K/K^2)$ на γ^μ. Это не приводит к потере общности, поскольку проекционная матрица $1-(KK/K^2)$ индуцирует калибровочное преобразование, после которого векторный потенциал удовлетворяет лоренцевской калибровке. Окончательный результат таков:

$$\langle M^{\mu}\rangle = \left[-(1+\alpha)K^2 - a + b\left(M_1^2 + M_2^2 + \frac{(M_1^2-M_2^2)^2}{K^2}\right)\right]\gamma^{\mu} +$$
$$+ 4m\alpha(\gamma P_1\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\gamma P_2) + 2b\gamma P_1\gamma^{\mu}\gamma P_2 - 4m\alpha i\sigma^{\mu\nu}K_{\nu} -$$
$$-\left[\alpha + b\left(1 + \frac{M_1^2 - M_2^2}{K^2}\right)\right]\gamma P_1 i\sigma^{\mu\nu}K_{\nu} -$$
$$-\left[\alpha + b\left(1 + \frac{M_2^2 - M_1^2}{K^2}\right)\right] i\sigma^{\mu\nu}K_{\nu}\gamma P_2. \qquad (6.26)$$

Это выражение входит в вакуумную амплитуду (6.4), которую теперь можно записать как

$$-i\frac{\alpha}{4\pi}\int d\omega_{P_1}\, d\omega_{P_2}\frac{dM_1^2\, dM_2^2}{\Delta^{1/2}}\psi_1(-P_1)\gamma^0 eq\langle M^{\mu}\rangle A_{\mu}(K)\psi_2(P_2). \qquad (6.27)$$

Если провести пространственно-временну́ю экстраполяцию этой вакуумной амплитуды, не учитывая, как и в формуле (5.84), контактные члены, то мы придем к двойной спектральной форме:

$$i\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{(dp_1)}{(2\pi)^4}\frac{(dp_2)}{(2\pi)^4}\frac{dM_1^2\, dM_2^2}{\Delta^{1/2}}\psi_1(-p_1)\gamma^0 eq\langle M^{\mu}\rangle A_{\mu}(k)\psi_2(p_2)\times$$
$$\times\frac{1}{p_1^2 + M_1^2 - i\varepsilon}\,\frac{1}{p_2^2 + M_2^2 - i\varepsilon}. \qquad (6.28)$$

Напомним, что

$$\frac{dM_1^2\, dM_2^2}{\Delta^{1/2}} = \frac{1}{2}\frac{x\, dx\, dv}{\delta^{1/2}}(k^2 + 4m^2). \qquad (6.29)$$

Рассмотрим сначала случай, когда отсутствует электромагнитное поле. В такой ситуации в формуле (6.26) следует опустить все члены с $\sigma^{\mu\nu}k_{\nu}$ и k^2, так что остается

$$\langle M^{\mu}\rangle = 2m^2\beta\gamma^{\mu} + 4m\alpha(\gamma p_1\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\gamma p_2) + 2b\gamma p_1\gamma^{\mu}\gamma p_2, \qquad (6.30)$$

где

$$\beta = (1 + 2x + 2v^2x^2)b - \frac{x^2(1-v^2)}{\delta}. \qquad (6.31)$$

Нам нужны следующие интегралы по переменной v:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\frac{1}{\delta^{3/2}} = \frac{1}{(1+x)(1+2x)}, \quad \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\frac{1-v^2}{\delta^{5/2}} = \frac{1}{(1+x)(1+2x)^2},$$
$$x^3\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\frac{v^2}{\delta^{3/2}} = \frac{1}{2}\ln(1+2x) - \frac{x}{1+x}, \qquad (6.32)$$
$$x^5\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\frac{v^2(1-v^2)}{\delta^{5/2}} = -\frac{1}{2}\ln(1+2x) + \frac{x}{1+x} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{(1+x)(1+2x)}.$$

Они позволяют вычислить интегралы

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dv\,\frac{\alpha}{\delta^{1/2}} = \frac{1}{1+2x}, \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dv\,\frac{\beta}{\delta^{1/2}} = \frac{1+x}{1+2x},$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dv\,\frac{b}{\delta^{1/2}} = \frac{1+x}{(1+2x)^2}. \tag{6.33}$$

В итоге для эффективного значения $\langle M^\mu \rangle$ получаем

$$\langle M^\mu \rangle \to \frac{m^2}{M^4}\left[(M^2+m^2)(M^2\gamma^\mu + \gamma p_1\gamma^\mu\gamma p_2) + 4mM^2(\gamma p_1\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma p_2)\right], \tag{6.34}$$

чем и вводится массовый параметр простой спектральной формы:

$$M^2 = m^2(1+2x). \tag{6.35}$$

С точностью до множителя $(m^2/2M^4)$ только что полученный результат можно записать также в виде

$$\begin{aligned}&[(M-m)^2 - 2mM](M-\gamma p_1)\gamma^\mu(M-\gamma p_2) + \\ &+ [(M+m)^2 + 2mM](M+\gamma p_1)\gamma^\mu(M+\gamma p_2).\end{aligned} \tag{6.36}$$

Это дает возможность представить унифицированное выражение для вакуумной амплитуды (6.28) в следующем виде:

$$\begin{aligned}&i\frac{\alpha}{4\pi}\int \frac{(dp_1)}{(2\pi)^4}\frac{(dp_2)}{(2\pi)^4}\int_{\to m}^{\infty}\frac{dM}{M}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\frac{1}{2}\psi(-p_1)\gamma^0 \times \\ &\times \left\{[(M-m)^2 - 2mM]\frac{1}{\gamma p_1 + M - i\varepsilon}eq\gamma A(k)\frac{1}{\gamma p_2 + M - i\varepsilon} + \right. \\ &+ [(M+m^2)^2 + 2mM]\frac{1}{\gamma p_1 - M + i\varepsilon}eq\gamma A(k)\frac{1}{\gamma p_2 - M + i\varepsilon} - \\ &\left. - 2\left[1 - \frac{4m^2M^2}{(M^2-m^2)^2}\right]eq\gamma A(k)\right\}\psi(p_2).\end{aligned} \tag{6.37}$$

Чтобы удовлетворить физическим требованиям нормировки, сюда добавлен также полностью локальный контактный член. Эти требования вытекают из калибровочно-ковариантного обобщения модифицированной функции распространения. Удобнее и естественнее всего пользоваться при этом выражением для дополнительного вклада в действие, которое дается формулами (1.55) и (1.56) с контактными модификациями (1.59) и (1.60), не прибегая, однако, к тождественным алгебраическим преобразованиям, которые были произведены в формуле (1.60). Указанное обобщение, к которому приводят замены

$$\frac{1}{\gamma p \pm M} \to \frac{1}{\gamma(p - eqA) \pm M} = \frac{1}{\gamma p \pm M} + \frac{1}{\gamma p \pm M}eq\gamma A\frac{1}{\gamma p \pm M} + \ldots \tag{6.38}$$

и

$$\gamma p \to \gamma p - eq\gamma A, \tag{6.39}$$

сразу же дает нам выражение (6.37).

Кстати, совершенно аналогично можно было бы действовать и в случае частиц со спином 0. Сохраняя в (1.64) только поля и добавляя к этому выражению подходящее контактное взаимодействие, для вакуумной амплитуды получаем

$$-i\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{(dp)}{(2\pi)^4}\frac{dM^2}{M^2}(M^2+m^2)(M^2-m^2)\varphi_1(-p)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}-\frac{1}{M^2-m^2}+\frac{p^2+m^2}{(M^2-m^2)^2}\right]\varphi_2(p). \tag{6.40}$$

Тогда калибровочно-ковариантная подстановка будет приводить к следующему дополнительному члену в выражении для связи:

$$-i\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{(dp_1)}{(2\pi)^4}\frac{(dp_2)}{(2\pi)^4}\varphi_1(-p_1)eq\varphi_2(p_2)(p_1+p_2)A(k)\times$$
$$\times\int\frac{dM^2}{M^2}\frac{M^2+m^2}{M^2-m^2}\left(\frac{M^2-m^2}{p_1^2+M^2-i\varepsilon}\,\frac{M^2-m^2}{p_2^2+M^2-i\varepsilon}-1\right). \tag{6.41}$$

В итоге воспроизводится двойная спектральная форма (5.90), но с заменой фигурирующих там дополнительных контактных членов, которые содержат простые спектральные формы, одним полностью локальным контактным членом. Различие между двумя этими выражениями сказывается только на связях, в которые явным образом входят источники; с точки же зрения связей, зависящих от полей, они полностью эквивалентны. Такой подход к рассмотрению случаев и спина 0 и спина $^1/_2$ обладает определенным преимуществом, так как он показывает, что можно обойтись без простых спектральных форм.

Возвращаясь к двойной спектральной форме (6.28), рассмотрим каждый член с магнитным моментом по отдельности. Соответствующие выражения мы применим в трех случаях, в которых нам уже известны простые спектральные формы. Первым из этих членов [формула (5.20)] определяется зависимость от поля связи обобщенного источника частиц с простым источником частиц и с простым источником фотонов ($k^2 = 0$). Явно зависящие от источников члены отбрасываются в формулах (6.26) и (6.28) подстановками $\gamma p_1 \to -m$, $\gamma p_2 \to -m$ и, если отождествить ψ_1 с полем простого источника частиц, подстановкой $(p_1^2 + M^2)^{-1} \to$ $\to (M^2 - m^2)^{-1}$. В итоге коэффициент при $-2mi\sigma^{\mu\nu}k_\nu$ в формуле (6.26) оказывается равным $a - b$. Он входит в интеграл [ср. с формулами (6.33)]

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\,\frac{\alpha-\beta}{\delta^{1/2}}=\frac{x}{(1+2x)^2}=m^2\,\frac{M^2-m^2}{2M^4}. \tag{6.42}$$

В результате мы придем к простой спектральной форме:

$$i\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{(dp_1)}{(2\pi)^4}\frac{(dp_2)}{(2\pi)^4}dM^2\frac{m^2}{M^2}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\psi(-p_1)\gamma^0\frac{eq}{2m}\sigma\times$$
$$\times F(k)\,\psi_{\text{обобщ}}(p_2)\frac{1}{p_2^2+M^2-i\varepsilon}, \tag{6.43}$$

которая совпадает с выражением (5.20), если его записать в переменных импульсного пространства.

Простая спектральная форма, задаваемая равенствами (4.65), (4.73) и (4.75), целиком относится к простым источникам частиц. Знаменатели двойной спектральной формы приводятся в этом случае к виду

$$\frac{1}{M_1^2-m^2}\frac{1}{M_2^2-m^2}=\frac{1}{x^2}\frac{1}{k^2+4m^2}\frac{1}{m^2+\frac{k^2}{4}(1-v^2)}. \tag{6.44}$$

На этот раз нам следует выполнить интегрирование по переменной x. Используя интегралы

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\delta^{3/2}}=\frac{1}{1+|v|},\qquad 3\int_0^\infty\frac{x\,dx}{\delta^{5/2}}=\frac{1}{(1+|v|)^2}, \tag{6.45}$$

будем иметь

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x}\frac{a-b}{\delta^{1/2}}=\int_0^\infty dx\left[\frac{1}{\delta^{3/2}}-\frac{3}{2}\frac{x(1-v^2)}{\delta^{5/2}}\right]=\frac{1}{2}. \tag{6.46}$$

В результате мы получаем искомую простую спектральную форму

$$i\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{(dp_1)}{(2\pi)^4}\frac{(dp_2)}{(2\pi)^4}\left[\int_0^1\frac{dv}{1+\frac{k^2}{4m^2}(1-v^2)}\right]\times$$
$$\times\frac{1}{2}\psi(-p_1)\gamma^0\frac{eq}{2m}\sigma F(k)\,\psi(p_2). \tag{6.47}$$

Третье применение относится к случаю, рассмотренному в § 2. Электромагнитное поле здесь однородно, так что интересующие нас члены в $\langle M^\mu\rangle A_\mu(k)$ имеют вид

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\delta(p_1-p_2)[4ma\sigma F+2(a+b)\gamma p\sigma F], \tag{6.48}$$

где $p=p_1=p_2$ и подразумевается, что произведение γp на σF симметризовано. Выполним интегрирование по переменной v:

$$\int_{-1}^1\frac{1}{2}dv\frac{1}{\delta^{1/2}}[4ma\sigma F+2(a+b)\gamma p\sigma F]=4\frac{m^2}{M^2}(m+\gamma p)\sigma F-$$
$$-\frac{m^2}{M^2}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\gamma p\sigma F. \tag{6.49}$$

Получающуюся при этом вакуумную амплитуду

$$i\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{(dp)}{(2\pi)^4}\frac{dM^2}{(p^2+M^2-i\varepsilon)^2}\frac{1}{2}\psi(-p)\gamma^0\left[2\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)(m+\gamma p)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)^2\gamma p\right]eq\sigma F\psi(p) \qquad (6.50)$$

можно представить в виде обычного однократного спектрального интеграла. Для этого достаточно выполнить интегрирование по частям по переменной M^2. Поскольку вклады граничных точек интервала интегрирования (m^2 и ∞) равны нулю, мы приходим к следующему слагаемому в действии (множитель i опущен):

$$-\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{(dp)}{(2\pi)^4}\frac{dM}{M}\frac{m^2}{M^2}\frac{1}{2}\psi(-p)\gamma^0\left[-4(m+\gamma p)+\right.$$
$$\left.+2\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\gamma p\right]eq\sigma F\psi(p)\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}, \qquad (6.51)$$

причем входящую сюда комбинацию можно переписать в виде

$$\frac{-4(m+\gamma p)+2\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\gamma p}{p^2+M^2-i\varepsilon}=\frac{\left(1-\frac{m}{M}\right)^2}{\gamma p+M-i\varepsilon}+\frac{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}{\gamma p-M+i\varepsilon}. \qquad (6.52)$$

Если не считать, что теперь вместо Π стоит p, то полученное выражение совпадает с той частью действия (2.30) и (2.31), которая зависит от электромагнитного поля.

Наша конечная задача здесь состоит в том, чтобы из двойной спектральной формы получить известное выражение для простой спектральной формы зарядового формфактора частицы со спином $^1/_2$. Производя подстановки $\gamma p_1\to -m$ и $\gamma p_2\to -m$, которыми отбрасываются члены с явной зависимостью от источников, мы получаем следующий коэффициент при γ^μ в среднем значении $\langle M^\mu\rangle$:

$$-\left(1+\frac{1+x}{\delta}\right)k^2-8m^2\frac{1+x}{\delta}-\frac{x^2(1-v^2)}{2\delta}(k^2+4m^2)+$$
$$+4m^2\left(\frac{1}{\delta}+\frac{3}{2}\frac{x^2(1-v^2)}{\delta^2}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\delta}+\frac{3}{2}\frac{x^2(1-v^2)}{\delta^2}\right)(x+x^2v^2)(k^2+4m^2). \qquad (6.53)$$

Как и при выводе выражения для магнитного формфактора в рассматриваемых условиях ($-p_1^2$, $-p_2^2\to m^2$), мы имеем также

$$\frac{dM_1^2\,dM_2^2}{\Delta^{1/2}}\frac{1}{(M_1^2-m^2)(M_2^2-m^2)}=\frac{1}{2}dv\frac{dx}{x\delta^{1/2}}\frac{1}{m^2+\frac{k^2}{4}(1-v^2)}. \qquad (6.54)$$

Поскольку член с векторным потенциалом, который получается при $k^2=0$, следует включать в модифицированную функцию распространения, мы избавимся от него путем эффективной подстановки

$$4m^2 \to -(1-v^2)\,k^2 \tag{6.55}$$

[равенство (5.96)]. Возникающий при этом коэффициент $-k^2\gamma^\mu$, который определяется на основании формулы (6.53), можно представить в виде

$$\frac{(1+x)\,[1+v^2\,(1+x)]}{\delta}+\frac{x^2v^2\,(1-v^2)}{2\delta}+\frac{3}{2}\,\frac{x^2\,(1-v^2)^2}{\delta^2}-$$
$$-\left[\frac{1}{\delta}+\frac{3}{2}\,\frac{x^2\,(1-v^2)}{\delta^2}\right](x+x^2v^2)\,v^2. \tag{6.56}$$

В первом слагаемом мы узнаем полное выражение для формфактора частицы со спином 0, даваемое формулой (5.99). Это сразу же приводит к соотношению

$$vf_1(v)-vf(v)=\frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^\infty dx\left[\frac{xv^2\,(1-v^2)}{2\delta^{3/2}}+\frac{3}{2}\,\frac{x\,(1-v^2)^2}{\delta^{5/2}}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{\delta^{3/2}}+\frac{3}{2}\,\frac{x^2\,(1-v^2)}{\delta^{5/2}}\right)(1+xv^2)\,v^2\right]. \tag{6.57}$$

Поведение полученного интеграла на нижнем пределе говорит о том, что при обоих рассмотренных значениях спинов возможны одни и те же рассуждения, основывающиеся на введении конечной массы фотона, и повторять их здесь нет никакой необходимости. Подынтегральное выражение можно несколько упростить, приведя его к виду

$$\frac{3}{2}\,\frac{x\,(1-v^2)\,(1+xv^2)}{\delta^{5/2}}-\frac{(1+x)\,v^2}{\delta^{3/2}}. \tag{6.58}$$

После этого, пользуясь соотношениями ($v>0$)

$$\int\limits_0^\infty dx\,\frac{1+x}{\delta^{3/2}}=\frac{1}{v},\qquad 3\int\limits_0^\infty dx\,\frac{x\,(1+xv^2)}{\delta^{5/2}}=\frac{1}{1+v}, \tag{6.59}$$

мы получим

$$vf_1(v)-vf(v)=\frac{\alpha}{4\pi}\,(1-3v). \tag{6.60}$$

В то же время, согласно формуле (4.132), имеем

$$vf_1(v)-vf(v)=\frac{\alpha}{4\pi}. \tag{6.61}$$

Может показаться, что мы потерпели неудачу.

Такое заключение было бы слишком поспешным. Но здесь, несомненно, можно видеть указание на то, что в своих вычислениях мы упустили какие-то тонкости. Пора, видимо, подчеркнуть, что то, чем мы здесь занимаемся, относится скорее к области искусства, чем науки. Мы пытаемся воспроизвести результаты, уже известные из анализа простой спектральной формы, пользуясь одной только двойной спектральной формой без привлечения добавочных простых спектральных форм. Будет ли такая попытка успешной или нет, зависит от того, как мы построим процедуру вычислений. Объяснить эффекты, связанные с магнитным моментом частиц со спином $^1/_2$, нам удалось, вне всякого сомнения, благодаря отсутствию здесь контактных членов, что характерно для явлений, индуцируемых динамикой. Несогласованность же результатов для зарядовых формфакторов частиц со спином 0 и со спином $^1/_2$ ведет свое происхождение, видимо, от существования в последнем случае двух разных типов функций распространения, характеризующихся противоположными значениями внутренней четности. Как видно из выражения (6.37), они не смешиваются в отсутствие электромагнитного поля. Но при наличии поля эти функции сливаются в единое целое за счет некоторого механизма, необходимость в детальном рассмотрении которого у нас пока не возникала. В такой ситуации встает вопрос, нельзя ли указанную трудность обойти, построив процедуру вычислений для частиц со спином $^1/_2$ по тому же образцу, что и в случае спина 0.

С подобной процедурой мы уже знакомы. Она состоит в замене функции распространения G_+^A, удовлетворяющей уравнению (2.1), функцией распространения Δ_+^A, которая подчиняется уравнению (2.4):

$$[\Pi^2 - eq\sigma F + m^2]\,\Delta_+^A = 1 \tag{6.62}$$

и которая отличается по внешнему виду от соответствующей функции для частиц со спином 0 лишь наличием дополнительного члена $eq\sigma F$. В сущности замена $G_+ \to \Delta_+$ сводится к следующему изменению линейной связи с электромагнитным полем:

$$eq\gamma A \to \frac{eq}{2m}\,[pA + Ap + \sigma F]. \tag{6.63}$$

Чтобы подробнее ознакомиться с таким методом расчета, вернемся к анализу, который проводился в § 4. Напомним, что там исследовался обобщенный фотонный источник, испускающий пару заряженных частиц, которые затем взаимодействуют друг с другом. Попытаемся теперь ввести комбинацию (6.63), описывающую взаимодействие, путем чисто алгебраических преобразований известного выражения для частиц со спином $^1/_2$. Обратимся для этого к векторной величине (4.35), в которую входит следующее произведение матриц:

$$\gamma^\nu\,(m - \gamma p_2)\,\gamma^\mu\,(-m - \gamma p_2')\,\gamma_\nu. \tag{6.64}$$

Наличие проекционных матриц слева и справа от γ^μ позволяет произвести подстановку

$$\gamma^\mu \to \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{m}\gamma p_2\right)\gamma^\mu + \gamma^\mu\left(\frac{1}{m}\gamma p_2'\right)\right] = \\ = \frac{1}{2m}\left[(p_2 - p_2')^\mu - i\sigma^{\mu\rho}k_\rho\right]. \tag{6.65}$$

Вспоминая, далее, что в (4.34) содержатся еще и проекционные матрицы $m - \gamma p_1$ и $-m - \gamma p_1'$, напишем

$$\gamma^\nu(m - \gamma p_2) = (m + \gamma p_2)\gamma^\nu + 2p_2^\nu \to \gamma(p_2 - p_1)\gamma^\nu + 2p_2^\nu = \\ = (p_1 + p_2)^\nu - i\sigma^{\nu\varkappa}(p_1 - p_2)_\varkappa \tag{6.66}$$

и

$$(-m - \gamma p_2')\gamma_\nu = \gamma_\nu(-m + \gamma p_2') + 2p_{2\nu}' \to \gamma_\nu\gamma(p_2' - p_1') + 2p_{2\nu}' = \\ = (p_1' + p_2')_\nu + i\sigma_{\nu\lambda}(p_1' - p_2')^\lambda. \tag{6.67}$$

В результате величина (6.64) заменяется произведением

$$\frac{1}{2m}\left[(p_1 + p_2)^\nu - i\sigma^{\nu\varkappa}(p_1 - p_2)_\varkappa\right]\left[(p_2 - p_2')^\mu - i\sigma^{\mu\rho}k_\rho\right] \times \\ \times \left[(p_1' + p_2')_\nu + i\sigma_{\nu\lambda}(p_1' - p_2')^\lambda\right], \tag{6.68}$$

что и соответствует подстановке (6.63). (С точностью до некоторых степеней $2m$, которые можно включить во внешние сомножители.) Если опустить здесь спиновые члены, то в этом выражении мы узнаем комбинацию, отвечающую частицам со спином 0, которая входит в выражение (4.6).

Раскрывая произведение (6.68), полезно иметь в виду равенства [напомним, что $p_1' - p_2' = -(p_1 - p_2)$]

$$\left[-i\sigma^{\nu\varkappa}(p_1 - p_2)_\varkappa\right]\left[-i\sigma_{\nu\lambda}(p_1 - p_2)^\lambda\right] = \\ = \left[-\gamma(p_1 - p_2)\gamma^\nu - (p_1 - p_2)^\nu\right]\left[\gamma_\nu\gamma(p_1 - p_2) + \right. \\ \left. + (p_1 - p_2)_\nu\right] = -3(p_1 - p_2)^2 \tag{6.69}$$

и

$$\left[-i\sigma^{\nu\varkappa}(p_1 - p_2)_\varkappa\right]\sigma^{\mu\rho}\left[-i\sigma_{\nu\lambda}(p_1 - p_2)^\lambda\right] = \\ = \left[-\gamma(p_1 - p_2)\gamma^\nu - (p_1 - p_2)^\nu\right]\sigma^{\mu\rho}\left[\gamma_\nu\gamma(p_1 - p_2) + \right. \\ \left. + (p_1 - p_2)_\nu\right] = (p_1 - p_2)^2\sigma^{\mu\rho}. \tag{6.70}$$

Здесь учтено соотношение

$$\gamma^\nu\sigma^{\mu\rho}\gamma_\nu = 0. \tag{6.71}$$

На этом этапе интеграл (4.35) с точностью до простых множителей принимает вид

$$\left\langle \frac{(p_1+p_2)(p_1'+p_2')}{(p_1-p_2)^2}(p_2-p_2')^\mu \right\rangle - i\sigma^{\mu\nu}k_\nu \left[\left\langle \frac{(p_1+p_2)(p_1'+p_2')}{(p_1-p_2)^2} \right\rangle + 1 \right] -$$
$$-2k^\nu i\sigma_{\nu\varkappa} \left\langle \frac{(p_1-p_2)^\varkappa (p_2-p_2')^\mu}{(p_1-p_2)^2} \right\rangle +$$
$$+ i\sigma^{\mu\rho}k_\rho i\sigma_{\nu\lambda} \left\langle \frac{(p_1+p_2)^\nu (p_1-p_2)^\lambda}{(p_1-p_2)^2} \right\rangle +$$
$$+ i\sigma^{\nu\varkappa} \left\langle \frac{(p_1'+p_2')_\nu (p_1-p_2)_\varkappa}{(p_1-p_2)^2} \right\rangle i\sigma^{\mu\rho}k_\rho, \qquad (6.72)$$

где мы воспользовались тем обстоятельством, что

$$\langle (p_2-p_2') \rangle = 0. \qquad (6.73)$$

Нам уже известен интеграл

$$\left\langle \frac{(p_1+p_2)(p_1'+p_2')}{(p_1-p_2)^2}(p_2-p_2')^\mu \right\rangle =$$
$$= (p_1-p_1')^\mu \left[-2(M^2-2m^2) \left\langle \frac{1}{(p_1-p_2)^2} \right\rangle + 4\frac{M^2-2m^2}{M^2-4m^2} \right] \qquad (6.74)$$

[формула (4.13)], а аналогичные выкладки дают

$$\left\langle \frac{(p_1+p_2)(p_1'+p_2')}{(p_1-p_2)^2} \right\rangle + 1 =$$
$$= -2(M^2-2m^2) \left\langle \frac{1}{(p_1-p_2)^2} \right\rangle + 4\frac{M^2-2m^2}{M^2-4m^2} - 2\frac{M^2}{M^2-4m^2}. \qquad (6.75)$$

Еще один знакомый нам интеграл [формулы (4.44) и (4.45)] входит в два последних слагаемых выражения (6.72), где можно произвести подстановки

$$\left\langle \frac{(p_1+p_2)^\nu (p_1-p_2)^\lambda}{(p_1-p_2)^2} \right\rangle \to 2p_1^\nu \left\langle \frac{(p_1-p^2)^\lambda}{(p_1-p_2)^2} \right\rangle = 2p_1^\nu (p_1-p_1')^\lambda \frac{1}{M^2-4m^2} \qquad (6.76)$$

и

$$\left\langle \frac{(p_1'+p_2')_\nu (p_1-p_2)_\varkappa}{(p_1-p_2)^2} \right\rangle \to 2p_{1\nu}'(p_1-p_1')_\varkappa \frac{1}{M^2-4m^2}, \qquad (6.77)$$

поскольку нужны лишь антисимметричные части тензоров. В итоге остается интеграл

$$\left\langle \frac{(p_1-p_2)^\varkappa (p_2-p_2')^\mu}{(p_1-p_2)^2} \right\rangle = a\left(g^{\varkappa\mu} + \frac{k^\varkappa k^\mu}{M^2}\right) +$$
$$+ b(p_1-p_1')^\varkappa (p_1-p_1')^\mu. \qquad (6.78)$$

Структура правой части показывает, что он симметричен относительно перестановки p_1 и p_1' и что при умножении на $k_\varkappa$ или k_μ этот интеграл обращается в нуль. Две скалярные комбинации, которые получаются при образовании следа и при умножении на $(p_1 - p_1')_\varkappa (p_1 - p_1')_\mu$, дают нам систему уравнений

$$-1 = 3a + (M^2 - 4m^2)\, b, \quad 0 = a + (M^2 - 4m^2)\, b, \tag{6.79}$$

решив которую, получим

$$a = -\frac{1}{2}, \qquad b = \frac{1}{2}\frac{1}{M^2 - 4m^2}. \tag{6.80}$$

Комбинируя все эти соотношения, можно будет представить (6.72) как

$$\begin{aligned}
&[(p_1 - p_1')^\mu - i\sigma^{\mu\nu}k_\nu]\left[-2(M^2 - 2m^2)\left\langle\frac{1}{(p_1 - p_2)^2}\right\rangle + 4\,\frac{M^2 - 2m^2}{M^2 - 4m^2}\right] + \\
&+ i\sigma^{\mu\nu}k_\nu\,\frac{M^2 + 4m^2}{M^2 - 4m^2} + \frac{1}{M^2 - 4m^2}\,[-k^\nu i\sigma_{\nu\lambda}(p_1 - p_1')^\lambda (p_1 - p')^\mu + \\
&+ i\sigma^{\mu\rho}k_\rho k^\nu i\sigma_{\nu\lambda}(p_1 - p_1')^\lambda + k^\nu i\sigma_{\nu\lambda}(p_1 - p_1')^\lambda i\sigma^{\mu\rho}k_\rho].
\end{aligned} \tag{6.81}$$

Упростим последний спиновый член, записав его в виде

$$\begin{aligned}
&\gamma k\gamma(p_1 - p_1')(p_1 - p_1')^\mu + (\gamma^\mu\gamma k + k^\mu)\gamma k\gamma(p_1 - p_1') + \gamma(p_1 - p_1')\gamma k \times \\
&\times(\gamma k\gamma^\mu + k^\mu) = -(\gamma k\gamma p_1' + \gamma p_1\gamma k)(p_1 - p_1')^\mu - \\
&- M^2(p_1 - p_1')^\mu \to -M^2(p_1 - p_1')^\mu,
\end{aligned} \tag{6.82}$$

где на конечном этапе преобразований мы воспользовались наличием проекционных матриц и сделали подстановки $\gamma p_1 \to -m$, $\gamma p_1' \to m$. Получающееся при этом выражение,

$$\begin{aligned}
&[(p_1 - p_1')^\mu - i\sigma^{\mu\nu}k_\nu]\left[-2(M^2 - 2m^2)\left\langle\frac{1}{(p_1 - p_2)^2}\right\rangle + \right.\\
&\left. + 4\,\frac{M^2 - 2m^2}{M^2 - 4m^2} - \frac{M^2}{M^2 - 4m^2}\right] + i\sigma^{\mu\nu}k_\nu\,\frac{4m^2}{M^2 - 4m^2},
\end{aligned} \tag{6.83}$$

после его умножения на $1/2m$ и на $(1/4\pi)^2\,[1 - (4m^2/M^2)]^{1/2}$ полностью совпадает с (4.57). Нельзя сказать, чтобы этот расчет был намного короче предыдущего, но зато отсюда сразу вытекает соответствующий результат для частиц со спином 0.

Обратимся теперь к причинному расположению источников, которое приводит к двойной спектральной форме, и рассмотрим следующую комбинацию, входящую в вакуумную амплитуду (6.4):

$$\gamma^\nu\,[m - \gamma(P_1 - k)]\,\gamma^\mu\,[m - \gamma(P_2 - k)]\,\gamma_\nu. \tag{6.84}$$

Соответствующие подстановки имеют здесь вид

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu &\to \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{m}\gamma(P_1 - k)\right)\gamma^\mu + \gamma^\mu\left(-\frac{1}{m}\gamma(P_2 - k)\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2m}\,[(P_1 + P_2 - 2k)^\mu - i\sigma^{\mu\rho}K_\rho]
\end{aligned} \tag{6.85}$$

и

$$\begin{aligned}\gamma^\nu [m-\gamma(P_1-k)] &= (m+\gamma P_1)\gamma^\nu + (2P_1-k)^\nu - i\sigma^{\nu\varkappa}k_\varkappa,\\ [m-\gamma(P_2-k)]\gamma_\nu &= \gamma_\nu(m+\gamma P_2) + (2P_2-k)_\nu + i\sigma_{\nu\lambda}k^\lambda.\end{aligned} \tag{6.86}$$

Матричные сомножители $m+\gamma P_1$ и $m+\gamma P_2$, действуя на поля, превращают их в источники. Если отбросить эти члены, то комбинация (6.84) заменится на

$$\frac{1}{2m}[(2P_1-k)^\nu - i\sigma^{\nu\varkappa}k_\varkappa][(P_1+P_2-2k)^\mu - i\sigma^{\mu\rho}K_\rho]\times \\ \times[(2P_2-k)_\nu + i\sigma_{\nu\lambda}k^\lambda]. \tag{6.87}$$

Опустив здесь спиновые члены, мы придем к комбинации для частиц со спином 0, которая входит в вакуумную амплитуду (5.59).

После замены в формулах (6.69) и (6.70) импульса p_1-p_2 импульсом реального фотона ($-k^2=0$) эти члены никаких вкладов давать не будут и величина (6.87) примет вид (с точностью до множителя $1/2m$)

$$(2P_1-k)(2P_2-k)[(P_1+P_2-2k)^\mu - i\sigma^{\mu\nu}K_\nu] + \\ +(P_1+P_2-2k)^\mu 2K^\nu i\sigma_{\nu\lambda}k^\lambda - \\ - i\sigma^{\mu\rho}K_\rho 2P_1^\nu i\sigma_{\nu\lambda}k^\lambda + 2P_{2\nu}i\sigma^{\nu\varkappa}k_\varkappa i\sigma^{\mu\rho}K_\rho, \tag{6.88}$$

где

$$(2P_1-k)(2P_2-k) = -(2K^2+M_1^2+M_2^2+2m^2). \tag{6.89}$$

Согласно равенствам (6.15) и (6.19), интегрирование по переменной k сводится к подстановкам

$$P_1+P_2-2k \to \alpha\left(1-\frac{KK}{K^2}\right)(P_1+P_2) \tag{6.90}$$

и

$$(P_1+P_2-2k)(P_1+P_2-2k) \to \\ \to a\left(1-\frac{KK}{K^2}\right) + b\left(1-\frac{KK}{K^2}\right)(P_1+P_2)(P_1+P_2)\left(1-\frac{KK}{K^2}\right). \tag{6.91}$$

Все входящие сюда коэффициенты задаются формулами (6.22). В итоге комбинация (6.88) в лоренцевской калибровке принимает вид

$$(P_1+P_2)^\mu[-\alpha(2K^2+M_1^2+M_2^2+2m^2) + (\alpha-b)2P_1^\nu i\sigma_{\nu\lambda}P_2^\lambda] + \\ + i\sigma^{\mu\nu}K_\nu[2K^2+M_1^2+M_2^2+2m^2+a] - \\ -(1-\alpha)\{i\sigma^{\mu\rho}K_\rho,\ P_1^\nu i\sigma_{\nu\lambda}P_2^\lambda\} - \\ - \frac{M_1^2-M_2^2}{K^2}\alpha[i\sigma^{\mu\rho}K_\rho,\ P_1^\nu i\sigma_{\nu\lambda}P_2^\lambda]. \tag{6.92}$$

Заметим далее, что

$$i\sigma^{\mu\rho}K_\rho P_1^\nu i\sigma_{\nu\lambda}P_2^\lambda=\gamma^\mu\gamma K\,(\gamma K\gamma P_2+KP_2)=-K^2\gamma^\mu\gamma P_2-KP_2 i\sigma^{\mu\nu}K_\nu, \tag{6.93}$$

$$P_1^\nu i\sigma_{\nu\lambda}P_2^\lambda i\sigma^{\mu\rho}K_\rho=(\gamma P_1\gamma K+KP_1)\,\gamma K\gamma^\mu=-K^2\gamma P_1\gamma^\mu+KP_1 i\sigma^{\mu\nu}K_\nu,$$

откуда получаем

$$\{i\sigma^{\mu\rho}K_\rho,\ P_1^\nu\sigma_{\nu\lambda}P_2^\lambda\}=K^2\,(P_1+P_2)^\mu \tag{6.94}$$

и

$$[i\sigma^{\mu\rho}K_\rho,\ P_1^\nu i\sigma_{\nu\lambda}P_2^\lambda]=K^2\,(\gamma P_1\gamma^\mu-\gamma^\mu\gamma P_2)+(M_1^2-M_2^2)\,i\sigma^{\mu\nu}K_\nu. \tag{6.95}$$

Нам потребуется также соотношение

$$2P_1^\nu i\sigma_{\nu\lambda}P_2^\lambda=\gamma P_1\gamma K-\gamma K\gamma P_2+K^2. \tag{6.96}$$

Для дальнейшего упрощения исключим члены, явно зависящие от источников, т. е. отбросим комбинации

$$(\gamma P_1+m)\,\gamma^\mu-\gamma^\mu\,(\gamma P_2+m),\quad (\gamma P_1+m)\,\gamma K-\gamma K(\gamma P_2+m). \tag{6.97}$$

В результате для (6.92) будем иметь

$$(P_1+P_2)^\mu\,[-\alpha\,(2K^2+M_1^2+M_2^2+2m^2)+(\alpha-b)\,K^2-(1-\alpha)\,K^2]+ \\ +i\sigma^{\mu\nu}K_\nu\left[2K^2+M_1^2+M_2^2+2m^2+a-\alpha\frac{(M_1^2-M_2^2)^2}{K^2}\right], \tag{6.98}$$

или, если подставить сюда явные выражения для коэффициентов α, a и b [формулы (6.22), а также (5.79)],

$$[(P_1+P_2)^\mu-i\sigma^{\mu\nu}K_\nu]\left[-\left(\frac{1+x+v^2\,(1+x)^2}{\delta}+\frac{x^2v^2}{\delta}+\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{3}{2}\frac{x^2\,(1-v^2)}{\delta^2}\right)K^2-\frac{(1+x)^2}{\delta}\,(4m^2+K^2\,(1-v^2))\right]+ \\ +i\sigma^{\mu\nu}K_\nu\left[-4m^2\left(\frac{x}{\delta}-\frac{3}{2}\frac{x^2\,(1-v^2)}{\delta^2}\right)+\right. \\ \left.+\left(\frac{x\,(1+x)}{\delta}+\frac{x^2\,(1-v^2)}{2\delta}+\frac{x}{\delta}-\frac{3}{2}\frac{x^2\,(1-v^2)}{\delta^2}\right)(K^2+4m^2)\right]. \tag{6.99}$$

Ранее, когда речь шла о частицах со спинами 0 и $^1/_2$, мы опустили члены, пропорциональные $4m^2+K^2\,(1-v^2)$, положив p_1^2, $p_2^2=-m^2$. Аргументировалось это тем, что необходимое сокращение обеспечивается соответствующим контактным членом. Однако такой подход не вполне удовлетворителен, поскольку отдельные члены обладают инфракрасными расходимостями и при введении конечной массы фотона с ними нельзя оперировать по тому же самому рецепту. Вместо этого будем действовать следующим образом. Благодаря соотношению

$$(K^2+4m^2)\,[4m^2+K^2\,(1-v^2)]=\frac{4}{x^2}\,(M_1^2-m^2)\,(M_2^2-m^2) \tag{6.100}$$

вся зависимость подобных вкладов в двойную спектральную форму от K^2 концентрируется в множителе

$$\frac{M_1^2-m^2}{p_1^2+M_1^2-i\varepsilon}\,\frac{M_2^2-m^2}{p_2^2+M_2^2-i\varepsilon}-1, \tag{6.101}$$

где уже добавлен соответствующий контактный член, не зависящий от K^2. Если положить здесь p_1^2 и p_2^2 равными $-m^2$, то эта комбинация, которая является обобщением соответствующей комбинации, фигурирующей в формуле (6.41), обратится в нуль.

Чтобы получить связи, содержащие γ^μ и $i\sigma^{\mu\nu}k_\nu$, которые нам нужно сравнить с результатами предыдущих вычислений, достаточно поделить величину (6.99) на $2m$. В итоге коэффициент при $-\gamma^\mu k^2$, заменяющий (6.56), оказывается равным

$$\frac{(1+x)\,[1+v^2\,(1+x)]}{\delta}+\frac{x^2v^2}{\delta}+\frac{3}{2}\,\frac{x^2\,(1-v^2)}{\delta^2}, \tag{6.102}$$

где снова первое слагаемое совпадает с соответствующим результатом для частиц со спином 0. Соотношение (6.57) заменяется теперь соотношением

$$vf_1(v)-vf(v)=\frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^\infty dx\left[\frac{xv^2}{\delta^{3/2}}+\frac{3}{2}\,\frac{x\,(1-v^2)}{\delta^{5/2}}\right]. \tag{6.103}$$

Используя интегралы [формулы (6.45) и (6.59)]

$$\int\limits_0^\infty dx\,\frac{x}{\delta^{3/2}}=\frac{1}{v(1+v)}, \qquad 3\int\limits_0^\infty dx\,\frac{x}{\delta^{5/2}}=\frac{1}{(1+v)^2}, \tag{6.104}$$

будем иметь

$$vf_1(v)-vf(v)=\frac{\alpha}{4\pi}. \tag{6.105}$$

В отличие от формулы (6.60) это выражение дает нам тот результат, который мы и хотели получить.

Правда, если обратиться к магнитному формфактору, то мы увидим, что здесь ситуация изменяется на противоположную. Первое слагаемое в коэффициенте при $i\sigma^{\mu\nu}k_\nu$ то, которое нам и нужно. Но во второй вклад входит интеграл

$$\int\limits_0^\infty dx\left[\frac{1+x}{\delta^{3/2}}+\frac{x\,(1-v^2)}{2\delta^{3/2}}+\frac{1}{\delta^{3/2}}-\frac{3}{2}\,\frac{x\,(1-v^2)}{\delta^{5/2}}\right]=\frac{3}{2}\,\frac{1}{v}, \tag{6.106}$$

так что при попытке воспроизвести выражение для магнитного формфактора мы терпим неудачу. Однако в обоих случаях нежелательные добавочные члены имеют примерно одинаковый вид, и возникает естественное предположение, что трудность лишь кажущаяся. Добавки к зарядовому и магнитному формфакторам, возникающие при двух разных способах расчета, пропорциональны в первом случае интегралу

$$\frac{k^2}{4m^2}\int dv \frac{2v}{1+\frac{k^2}{4m^2}(1-v^2)} = k^2\int \frac{dM^2}{M^2}\frac{1}{k^2+M^2} =$$
$$= \int dM^2\left(\frac{1}{M^2}-\frac{1}{k^2+M^2}\right), \tag{6.107}$$

а во втором — интегралу

$$\frac{k^2+4m^2}{4m^2}\int dv \frac{\frac{2}{v}}{1+\frac{k^2}{4m^2}(1-v^2)} = (k^2+4m^2)\int \frac{dM^2}{M^2-4m^2}\frac{1}{k^2+M^2} =$$
$$= \int dM^2\left(\frac{1}{M^2-4m^2}-\frac{1}{k^2+M^2}\right), \tag{6.108}$$

причем вектор k по-прежнему считается пространственно-подобным: $k^2 > 0$. Но каковы здесь области интегрирования? Обычно они задаются квадратным корнем, входящим в качестве сомножителя и определяющим порог процессов многочастичного обмена. Тут же нет никаких пороговых множителей. Как мы увидим и в следующем параграфе, при обобщении исходного причинного расположения источников также снимаются первоначальные ограничения на массы, которые накладываются только пороговыми множителями. В такой ситуации область изменения величины M^2 становится безграничной. Эта величина изменяется от $-\infty$ до ∞, поскольку именно такие значения принимает величина $-p^2$ в четырехмерном импульсном пространстве. Два слагаемых в выражении (6.107) обладают особенностями при вещественных значениях $M^2 = 0$ и $M^2 = -k^2$; аналогично, в выражении (6.108) имеются особенности при $M^2 = 4m^2$ и $M^2 = -k^2$. Однако эти члены связаны друг с другом конечным сдвигом переменной M^2. Ограниченный, но бесконечно удаленный интервал не дает в отдельные интегралы никаких вкладов. Таким образом, два эти члена взаимно уничтожаются, а потому интегралу (6.107) и интегралу (6.108) следует приписать нулевые значения.

Тут меня прерывает Гарольд.

Гарольд. У меня одно замечание, которое будет Вам полезно, и один вопрос. В ходе анализа частиц со спином 0, проводимого на основе одного обобщенного источника частиц, возникла проблема установления эквивалентности с известными результатами. Она свелась к доказательству тождества (5.55), а доказательство проводилось путем независимого вычисления обеих его частей. При этом Вы сказали, что хорошо бы найти подходящее преобразование, которое связывало бы два выражения, полученных разными способами. Вот то преобразование, которое Вам хотелось иметь:

$$x+(x^2-1)^{1/2}z=\frac{(x+1)^{1/2}+(x-1)^{1/2}v}{(x+1)^{1/2}-(x-1)^{1/2}v}, \tag{6.109}$$

где обе переменные z и v пробегают значения от -1 до $+1$. Так как

$$dz=\frac{2\,dv}{[(x+1)^{1/2}-(x-1)^{1/2}v]^2}, \tag{6.110}$$

мы получаем

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dz}{x+(x^2-1)^{1/2}z}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dv}{1+\frac{1}{2}(x-1)(1-v^2)}, \tag{6.111}$$

или, вычитая из обеих частей этого равенства $2/x$ и производя некоторые перегруппировки,

$$2(x+1)\int\limits_0^1 dz\frac{z^2}{1+(x^2-1)(1-z^2)}=\int\limits_0^1 dv\frac{1+v^2}{1+\frac{1}{2}(x-1)(1-v^2)}. \tag{6.112}$$

Если положить затем

$$x=1+\frac{k^2}{4m^2}, \tag{6.113}$$

то мы получим искомый результат.

Теперь вопрос. Мне не совсем ясна цель того, что Вы делаете. Разными способами получены одни и те же динамические модификации электромагнитных характеристик. Зачем это нужно? Не достаточно ли одного вывода?

Швингер. Благодарю Вас за преобразование. Что же касается Вашего вопроса, то именно совпадение результатов разных методов расчета и важно, поскольку тем самым подтверждена согласованность принципов причинности и равноправности точек в пространстве-времени. Разные причинные комбинации источников, которые в одном случае действуют как простые, а в другом — как обобщенные источники, приводят к одним и тем же выводам. Кроме того, попутно мы рассмотрели два обобщенных источника частиц, которые нам очень пригодятся в различных приложениях. Но прежде чем к ним переходить, нам следует получше познакомиться с простой и двойной спектральными формами.

§ 7. ФОРМФАКТОРЫ IV. ДЕЙТРОН

Проблемы, на которых мы теперь сосредоточим свое внимание, строго говоря, выходят за рамки чистой электродинамики. Они лежат в области ядерной физики низких энергий. Тем не менее в нашем анализе ядерные силы явным образом не будут фигурировать. Помимо фотона, нас интересуют нейтрон, протон и дейтрон. Последний будет описываться чисто феноменологически, хотя у нас и нет никаких сомнений в сложной природе этой частицы. Для простоты все указанные частицы рассматриваются так, как если бы они были бесспиновыми объектами. Мы не учитываем различия в массах нейтрона и протона, обозначая их массу через m. Масса дейтрона будет записываться как

$$m_{\mathrm{D}} = 2m - \varepsilon, \tag{7.1}$$

где ε — энергия связи дейтрона, весьма малая по сравнению с m. Физическая взаимосвязь между дейтроном, с одной стороны, и нейтроном и протоном, с другой,— учитывается путем введения обобщенного источника. Если взять энергию, весьма большую по сравнению с импульсом (достаточный избыток массы), то источник, обычно испускающий дейтрон, сможет испускать также нейтрон и протон. Такая взаимосвязь описывается примитивным взаимодействием

$$W_{\mathrm{Dpn}} = 4\pi f \int (dx)\, \varphi_{\mathrm{D}}(x)\, \varphi_{\mathrm{p}}(x)\, \varphi_{\mathrm{n}}(x), \tag{7.2}$$

в которое входит скалярное произведение в зарядовом пространстве, общем для протона и дейтрона.

Прежде всего мы рассмотрим модификацию дейтронной функции распространения, обусловленную примитивным взаимодействием, которое позволяет представить дейтронное поле в виде эффективного двухчастичного источника:

$$iK_{\mathrm{p}}(x)\, K_{\mathrm{n}}(x')\,|_{\text{эфф}} = 4\pi f \varphi_{\mathrm{D}} \delta(x - x'). \tag{7.3}$$

Возникающее при этом выражение для связи двух причинно-упорядоченных обобщенных источников дейтронов получается из вакуумной амплитуды

$$\int (dx)\, \ldots\, (dy')\, iK_{\mathrm{p}1}(x)\, K_{\mathrm{n}1}(y)\,|_{\text{эфф}} \times$$
$$\times\, \Delta_{\mathrm{p}}(x - x')\, \Delta_{\mathrm{n}}(y - y')\, iK_{\mathrm{p}2}(x')\, K_{\mathrm{n}2}(y')\,|_{\text{эфф}}. \tag{7.4}$$

Оно имеет вид

$$(4\pi f)^2 \int (dx)\, (dx')\, \varphi_{\mathrm{D}1}(x)\, \Delta_{\mathrm{p}}(x - x')\, \Delta_{\mathrm{n}}(x - x')\, \varphi_{\mathrm{D}2}(x'). \tag{7.5}$$

Благодаря наличию причинной упорядоченности для произведения функций распространения имеем

$$
\begin{aligned}
x^0 > x^{0\prime}:\quad & \Delta_{\mathrm{p}}(x-x')\,\Delta_{\mathrm{n}}(x-x') = \\
&= -\int d\omega_{\mathrm{p}}\, d\omega_{\mathrm{n}} \exp\left[iP(x-x')\right] = \\
&= -\int dM^2 \frac{1}{(4\pi)^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2} d\omega_P \exp\left[iP(x-x')\right] = \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2}\int\limits_{(2m)^2}^{\infty} dM^2\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\Delta_+(x-x', M^2),
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

где использован кинематический интеграл (1.24). Чтобы удовлетворить физическим условиям нормировки, к этому выражению следует добавить контактные члены. Эти условия требуют, чтобы добавочная связь относилась к источникам, а не к дейтронному полю. В противном случае изменялось бы исходное описание дейтрона, которое дается его функцией распространения. Необходимые добавочные члены вводятся с помощью подстановки

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon} \to \frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon} - \frac{1}{M^2-m_{\mathrm{D}}^2} + \frac{p^2+m_{\mathrm{D}}^2}{(M^2-m_{\mathrm{D}}^2)^2} &= \\
= \frac{(p^2+m_{\mathrm{D}}^2)^2}{(M^2-m_{\mathrm{D}}^2)^2}\,\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}&.
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

Получаемый таким способом дополнительный член в выражении для действия имеет вид

$$
\begin{aligned}
& f^2 \int \frac{(dp)}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{2}\,\varphi_{\mathrm{D}}(-p)\,(p^2+m_{\mathrm{D}}^2)^2\,\varphi_{\mathrm{D}}(p)\,\times \\
& \times \int\limits_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM^2}{(M^2-m_{\mathrm{D}}^2)^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}.
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

Если добавить его к исходному выражению для действия

$$
\int \frac{(dp)}{(2\pi)^4}\left[K_{\mathrm{D}}(p)\,\varphi_{\mathrm{D}}(-p) - \frac{1}{2}\varphi_{\mathrm{D}}(-p)\,(p^2+m_{\mathrm{D}}^2)\,\varphi_{\mathrm{D}}(p)\right], \tag{7.9}
$$

то принцип стационарного действия будет приводить к полевым уравнениям, которые решаются с помощью модифицированной функции распространения

$$
\begin{aligned}
&\bar{\Delta}_{\mathrm{D}}(p) = \\
&= \frac{1}{p^2+m_{\mathrm{D}}^2-(p^2+m_{\mathrm{D}}^2)^2 f^2 \displaystyle\int\limits_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^2}{(M^2-m_{\mathrm{D}}^2)^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}}.
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Хотя для получения этого результата мы воспользовались релятивистскими методами, весьма важной областью его применения является нерелятивистский случай. Переход к нему можно осуществить, записывая

$$p^0 = 2m + E + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad M = 2m + W, \quad E, W, \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \varepsilon \ll m. \tag{7.11}$$

Предельное выражение для функции распространения имеет вид

$$\bar{\Delta}_{\mathrm{D}}(p) \to -\frac{1}{4m} G(E), \tag{7.12}$$

где

$$G(E) = \frac{1}{E + \varepsilon - (E+\varepsilon)^2 \dfrac{f^2}{4m^{3/2}} \displaystyle\int_0^\infty dW \frac{W^{1/2}}{(W+\varepsilon)^2} \frac{1}{E + i\eta - W}}. \tag{7.13}$$

Чтобы не путать ε, энергию связи дейтрона, с параметром $\varepsilon \to +0$, мы для последнего ввели обозначение $\eta \to +0$. Входящий сюда интеграл может быть вычислен методами контурного интегрирования, либо примененными непосредственно, либо в более простой форме, с использованием новой переменной интегрирования $W^{1/2} = x$:

$$\int_0^\infty dW \frac{W^{1/2}}{(W+\varepsilon)^2} \frac{1}{E+i\eta-W} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{-\infty}^\infty dx x^2 \frac{1}{x^2+\varepsilon} \frac{1}{x^2 - (E+i\eta)} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \varepsilon^{-1/2} \frac{E-\varepsilon}{(E+\varepsilon)^2} - \pi i \frac{E^{1/2}}{(E+\varepsilon)^2}. \tag{7.14}$$

Это дает

$$G(E) = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\pi}{8} \dfrac{f^2}{m\gamma}\right)(E+\varepsilon) + \dfrac{\pi}{4} \dfrac{f^2}{m\gamma} [\varepsilon + i (E\varepsilon)^{1/2}]}, \tag{7.15}$$

где введено обозначение

$$\gamma = (m\varepsilon)^{1/2}. \tag{7.16}$$

При больших значениях E $(E \gg \varepsilon)$ асимптотическое поведение этой функции таково:

$$G(E) \to \frac{1}{1 - \dfrac{\pi}{8} \dfrac{f^2}{m\gamma}} \frac{1}{E}. \tag{7.17}$$

Примитивное взаимодействие с электромагнитным полем имеет вид

$$\int (dx)\, j^\mu(x) A_\mu(x) =$$
$$= \int (dx) \left[\varphi_{\mathrm{D}}(x) eq \frac{1}{i} \partial^\mu \varphi_{\mathrm{D}}(x) A_\mu(x) + \varphi_{\mathrm{P}}(x) eq \frac{1}{i} \partial^\mu \varphi_{\mathrm{P}}(x) A_\mu(x) \right]. \tag{7.18}$$

Чтобы установить, каким образом электромагнитные характеристики дейтрона модифицируются динамикой, рассмотрим следующую совокупность причинно-упорядоченных источников. Пусть имеются два обобщенных дейтронных источника и обобщенный фотонный источник с пространственно-подобными импульсами. Виртуальный дейтрон, испускаемый обобщенным источником, распадается на нейтрон и протон. Протон рассеивается фотонным источником, а затем рекомбинирует с нейтроном, образуя виртуальный дейтрон, который детектируется другим дейтронным источником. Такая схема рассматривалась в предыдущих параграфах, но теперь происходит не обмен фотоном, а обмен нейтроном. Соответствующая вакуумная амплитуда дается формулой (7.5), в которой протонная функция распространения имеет теперь вид

$$\Delta_{\mathrm{p}}^{A} = \Delta_{\mathrm{p}} + \Delta_{\mathrm{p}}\, eq\,(pA + Ap)\,\Delta_{\mathrm{p}} + \ldots . \tag{7.19}$$

Подставив причинные выражения трех функций распространения, для вакуумной амплитуды интересующего нас процесса получим

$$-i\,(4\pi f)^2 \int d\omega_{p_1}\, d\omega_{p_2}\, d\omega_p \varphi_{\mathrm{D}1}\,(-P_1)\, eq\,(p_1+p_2)\, A\,(K)\, \varphi_{\mathrm{D}2}\,(P_2) =$$
$$= -i\,(4\pi f)^2 \int dM_1^2\, dM_2^2\, d\omega_{P_1}\, d\omega_{P_2}\, d\omega_p \delta\,[(P_1-p)^2+m^2] \times$$
$$\times\, \delta\,[(P_2-p)^2+m^2]\, \varphi_{\mathrm{D}1}\,(-P_1)\, eq \varphi_{\mathrm{D}2}\,(P_2)\,(P_1+P_2-2p)\, A\,(K). \tag{7.20}$$

Здесь через p обозначен импульс нейтрона; другие символы имеют тот же смысл, что и раньше. Существенное изменение по сравнению с прежним анализом состоит в замене соотношения между энергией и импульсом фотона соответствующим соотношением для нейтрона:

$$p^2 + m^2 = 0. \tag{7.21}$$

Вследствие этого основной интеграл, возникающий в ходе вычислений, принимает теперь вид

$$\int d\omega_p \delta\,(2pP_1 + M_1^2)\, \delta\,(2pP_2 + M_2^2) =$$
$$= \frac{1}{8\pi^2} \int |\mathbf{p}|\, dp^0\, dz\, \delta\,(-2p^0 M_1 + M_1^2)\, \delta\,(-2p^0 P_2^0 + 2|\mathbf{p}||\mathbf{P}_2|z + M_2^2) =$$
$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Delta^{1/2}},\ 0. \tag{7.22}$$

Мы приходим к тем же значениям, что и раньше, при

$$\Delta = K^4 + 2K^2\,(M_1^2 + M_2^2) + (M_1^2 - M_2^2)^2, \tag{7.23}$$

но условие, при котором интеграл отличен от нуля, оказывается теперь иным. Оно получается из требования

$$\left| M_2^2 - M_1 \frac{K^2 + M_1^2 + M_2^2}{2M_1} \right| < (M_1^2 - 4m^2)^{1/2} \frac{\Delta^{1/2}}{2M_1} \tag{7.24}$$

и записывается как

$$\Delta < \frac{K^2}{m^2} M_1^2 M_2^2, \tag{7.25}$$

или

$$m^2 (M_1^2 - M_2^2)^2 < K^2 [(M_1^2 - 2m^2)(M_2^2 - 2m^2) - m^2 (K^2 + 4m^2)]. \tag{7.26}$$

Выполнение этого неравенства обеспечивается, если выбрать переменные

$$\begin{aligned} M_1^2 - 2m^2 &= m (K^2 + 4m^2)^{1/2} x + mK (x^2 - 1)^{1/2} v, \\ M_2^2 - 2m^2 &= m (K^2 + 4m^2)^{1/2} x - mK (x^2 - 1)^{1/2} v, \end{aligned} \tag{7.27}$$

где

$$v^2 < 1, \quad x > 1. \tag{7.28}$$

Вот как выражаются через эти переменные некоторые другие нужные нам величины:

$$\begin{aligned} \Delta &= K^2 [K^2 + 8m^2 + 4m (K^2 + 4m^2)^{1/2} x + 4m^2 (x^2 - 1) v^2], \\ dM_1^2\, dM_2^2 &= 2m^2 K (K^2 + 4m^2)^{1/2} (x^2 - 1)^{1/2} dx\, dv. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Алгебраическим соотношением

$$K (P_1 + P_2 - 2p) = (p_1 - p_2)(p_1 + p_2) = 0 \tag{7.30}$$

вновь фиксируется вид векторного среднего значения

$$\langle P_1 + P_2 - 2p \rangle = \alpha \left(1 - \frac{KK}{K^2}\right)(P_1 + P_2), \tag{7.31}$$

где

$$\alpha = -\frac{K^2}{\Delta}(P_1 + P_2)(P_1 + P_2 - 2p) = \frac{K^2 (K^2 + M_1^2 + M_2^2)}{\Delta}. \tag{7.32}$$

Если не учитывать контактных членов и взять лоренцевскую калибровку, то выражение, получаемое путем пространственно-временной экстраполяции вакуумной амплитуды, будет даваться двойным спектральным интегралом:

$$\begin{aligned} & if^2 \int \frac{(dp_1)}{(2\pi)^4} \frac{(dp_2)}{(2\pi)^4} \frac{dM_1^2\, dM_2^2}{\Delta^{3/2}} (k^2 + M_1^2 + M_2^2) \times \\ & \times \varphi_{D1}(-p_1)\, eq\, (p_1 + p_2)\, k^2 A(k)\, \varphi_{D2}(p_2) \times \\ & \times \frac{1}{p_1^2 + M_1^2 - i\varepsilon} \frac{1}{p_2^2 + M_2^2 - i\varepsilon}. \end{aligned} \tag{7.33}$$

В случае свободного поля, когда $k^2 = 0$, мы имеем

$$M_1^2 = M_2^2 = M^2 = 2m^2 (1 + x) \tag{7.34}$$

и

$$k^2 \frac{dM_1^2\, dM_2^2}{\Delta^{3/2}} = \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 1)^{1/2} dx\, dv}{[2(1 + x) + (x^2 - 1) v^2]^{3/2}}. \tag{7.35}$$

Пользуясь формулой

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dv \frac{1}{[2(1+x)+(x^2-1)v^2]^{3/2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad (7.36)$$

получим, что величина (7.33), как это и должно быть, принимает вид

$$if^2\int \frac{(dp_1)}{(2\pi)^4}\frac{(dp_2)}{(2\pi)^4}\varphi_{D1}(-p_1)\,eq(p_1+p_2)A(k)\varphi_{D2}(p_2)\times$$
$$\times\, dM^2\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{p_1^2+M^2-i\varepsilon}\frac{1}{p_2^2+M^2-i\varepsilon}-\frac{1}{(M^2-m_D^2)^2}\right], \qquad (7.37)$$

куда мы включили чисто локальный контактный член, к которому приводит калибровочно-ковариантное обобщение комбинаций (7.7) и (7.8).

Применим двойной спектральный интеграл (7.33) к дейтронным полям, ассоциируемым с простыми источниками. Член в выражении для действия, получающийся в результате замен $p_1^2,\ p_2^2\to -m_D^2$, равен

$$f^2\int \frac{(dp_1)}{(2\pi)^4}\frac{(dp_2)}{(2\pi)^4}\frac{1}{2}\varphi_D(-p_1)\,eq(p_1+p_2)k^2A(k)\varphi_D(p_2)\times$$
$$\times\int\frac{dM_1^2\,dM_2^2}{\Delta^{3/2}}\frac{k^2+M_1^2+M_2^2}{(M_1^2-m_D^2)(M_2^2-m_D^2)}, \qquad (7.38)$$

где

$$(M_1^2-m_D^2)(M_2^2-m_D^2)=$$
$$=[m(k^2+4m^2)^{1/2}x+2m^2-m_D^2]^2-m^2k^2(x^2-1)v^2. \qquad (7.39)$$

Здесь мы ограничимся нерелятивистским случаем, которому соответствуют условия и упрощения типа

$$k^2\ll m^2 \qquad (7.40)$$

и

$$m_D^2=(2m-\varepsilon)^2\approx 4m^2-4\gamma^2. \qquad (7.41)$$

В такой ситуации

$$(M_1^2-m_D^2)(M_2^2-m_D^2)\approx$$
$$\approx 4m^4\left[\left(x-1+\frac{2\gamma^2}{m^2}+\frac{k^2}{8m^2}x\right)^2-\frac{k^2}{4m^2}(x^2-1)v^2\right], \qquad (7.42)$$

откуда видно, что наиболее существенны малые значения $x-1$, порядка k^2/m^2 и γ^2/m^2. Положим поэтому упрощенно $x^2-1\approx 2(x-1)$, а также напишем

$$x-1=y^2. \qquad (7.43)$$

Тогда спектральный интеграл, фигурирующий в (7.38), примет вид (с учетом множителя k^2)

$$k^2 \int \frac{dM_1^2\, dM_2^2}{\Delta^{3/2}} \frac{k^2+M_1^2+M_2^2}{(M_1^2-m_D^2)(M_2^2-m_D^2)} \approx$$

$$\approx \frac{2^{-3/2}}{m^2} \int \frac{y^2\, dy\, dv}{\left(y^2+\frac{k^2}{8m^2}+\frac{2\gamma^2}{m^2}\right)^2-\frac{k^2}{2m^2}v^2y^2}. \tag{7.44}$$

Переменная y изменяется в пределах от 0 до ∞. Но выражение (7.44) с точностью до множителя $2^{-3/2}/m^2$ можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dv}{v} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{y}{y^2+\frac{k^2}{8m^2}+\frac{2\gamma^2}{m^2}-\frac{k}{2^{1/2}m}vy} \left(\frac{2^{1/2}m}{k}\right). \tag{7.45}$$

Производя затем преобразование сдвига

$$y \to y + \frac{k}{2^{3/2}m} v, \tag{7.46}$$

получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{y^2+\frac{2\gamma^2}{m^2}+\frac{k^2}{8m^2}(1-v^2)} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 dv \frac{1}{\left[\frac{2\gamma^2}{m^2}+\frac{k^2}{8m^2}(1-v^2)\right]^{1/2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{2^{3/2}m}{k} \operatorname{arctg} \frac{k}{4\gamma}. \tag{7.47}$$

Как показывает равенство

$$\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{k}{4\gamma} = \int_{4\gamma}^{\infty} \frac{dM}{k^2+M^2}, \tag{7.48}$$

зависимость соответствующего множителя в формуле (7.42) от k имеет вид спектральной формы. Нам нужно еще исключить связь с векторным потенциалом при $k^2=0$, которая должна учитываться модифицированной функцией распространения. (Это автоматически обеспечивается введением контактного члена.) Следовательно, в действительности спектральный интеграл входит в форме

$$\int_{4\gamma}^{\infty} dM \left(\frac{1}{k^2+M^2}-\frac{1}{M^2}\right) = -k^2 \int_{4\gamma}^{\infty} \frac{dM}{M^2} \frac{1}{k^2+M^2}. \tag{7.49}$$

Складывая возникающий при этом член действия с примитивным электромагнитным взаимодействием дейтрона, получаем следующее выражение для дейтронного формфактора:

$$F(k)=1-k^2\frac{\pi}{2}\frac{f^2}{m}\int_{4\gamma}^{\infty}\frac{dM}{M^2}\frac{1}{k^2+M^2-i\varepsilon}. \qquad (7.50)$$

При больших значениях k ($k\gg 4\gamma$) формфактор стремится к постоянному пределу:

$$F(k)\to 1-\frac{\pi}{8}\frac{f^2}{m\gamma}. \qquad (7.51)$$

Эта комбинация встречалась нам и раньше, в асимптотическом выражении (7.17) для дейтронной функции распространения. Очевидно, что особенно важную роль играет нулевое значение этой комбинации, которым определяется соотношение между константой связи f и энергией связи дейтрона:

$$\frac{\pi}{8}\frac{f^2}{m\gamma}=1. \qquad (7.52)$$

При таком соотношении эффективное электромагнитное взаимодействие дейтрона с высокочастотными фотонами должно обращаться в нуль и дейтронная функция распространения утратит свою форму, характерную для функции распространения частицы. Из этого явствует, что дейтрон представляет собой составную частицу, которая с полной определенностью диссоциирует при воздействии на нее внешнего возмущения с достаточно высокой энергией. При таких условиях можно объединить два члена формфактора (7.50), что приводит к выражению

$$F(k)=4\gamma\int_{4\gamma}^{\infty}\frac{dM}{k^2+M^2-i\varepsilon}. \qquad (7.53)$$

Для пространственных компонент векторов k можно интерпретировать эту формулу обычным образом на основе представления о распределении заряда. Вспоминая, что

$$\frac{1}{\mathbf{k}^2+M^2}=\int d\left(\frac{1}{2}\mathbf{r}\right)\exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\frac{1}{2}\mathbf{r}\right)\frac{1}{4\pi}\,\frac{\exp\left(-M\frac{1}{2}r\right)}{\frac{1}{2}r}, \qquad (7.54)$$

где $^1/_2\mathbf{r}$ — вектор, характеризующий положение, мы получаем

$$F(k)=\int(d\mathbf{r})\exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\frac{1}{2}\mathbf{r}\right)\left[\left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^{1/2}\frac{\exp(-\gamma r)}{r}\right]^2. \qquad (7.55)$$

Сюда входит волновая функция дейтрона, зависящая от расстояния между нейтроном и протоном; вектор $^1/_2\mathbf{r}$ указывает положение протона относительно центра масс дейтрона. Эта волновая функция носит название предела нулевого эффективного радиуса.

Она является решением уравнения Шредингера, отвечающим внутренней энергии $-\varepsilon$, в случае, когда при любом конечном расстоянии между частицами отсутствует взаимодействие.

Мы можем принять, что соотношение (7.51) выполняется при значениях k, больших по сравнению с γ, но все же малых по сравнению с импульсами виртуальных частиц, которыми обмениваются нейтрон и протон. Тогда дейтрон будет не полностью диссоциировавшим и предельное значение (7.51) не обязано равняться нулю. Обозначим последнее через $-\gamma r_e/(1-\gamma r_e)$, так что

$$\frac{\pi}{8}\frac{f^2}{m\gamma}=1+\frac{\gamma r_e}{1-\gamma r_e}=\frac{1}{1-\gamma r_e}. \tag{7.56}$$

Формфактор примет вид

$$F(k)=-\frac{\gamma r_e}{1-\gamma r_e}+\int(d\mathbf{r})\exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\frac{1}{2}\mathbf{r}\right)|\psi_0(\mathbf{r})|^2, \tag{7.57}$$

где

$$\psi_0(\mathbf{r})=\left(\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{1-\gamma r_e}\right)^{1/2}\frac{\exp(-\gamma r)}{r}. \tag{7.58}$$

Распределение заряда мы по-прежнему характеризуем движением протона и нейтрона, подразумевая при этом, что нейтрон-протонные силы обусловлены обменом какими-то частицами. Это означает, что плотность заряда определяется некоторой волновой функцией $\psi(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}F(k)&=\int(d\mathbf{r})\exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\frac{1}{2}\mathbf{r}\right)|\psi(\mathbf{r})|^2=\\&=\int(d\mathbf{r})\exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\frac{1}{2}\mathbf{r}\right)(|\psi(\mathbf{r})|^2-|\psi_0(\mathbf{r})|^2)+\\&\quad+\int(d\mathbf{r})\exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\frac{1}{2}\mathbf{r}\right)|\psi_0(\mathbf{r})|^2.\end{aligned} \tag{7.59}$$

Выражения (7.57) и (7.59) согласуются с такой интерпретацией. Волновые функции $\psi(\mathbf{r})$ и $\psi_0(\mathbf{r})$ совпадают при всех значениях r, кроме тех, при которых kr мало в рассматриваемой ограниченной области переменной k, что приводит к отождествлению

$$\int(d\mathbf{r})(|\psi_0(\mathbf{r})|^2-|\psi(\mathbf{r})|^2)=\frac{\gamma r_e}{1-\gamma r_e}. \tag{7.60}$$

Это соотношение станет более прозрачным, если ввести радиальные волновые функции $u(r)$ и $u_0(r)$, написав

$$\psi(\mathbf{r})=\left(\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{1-\gamma r_e}\right)^{1/2}\frac{u(r)}{r},\quad \psi_0(\mathbf{r})=\left(\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{1-\gamma r_e}\right)^{1/2}\frac{u_0(r)}{r}, \tag{7.61}$$

где

$$u_0(r)=\exp(-\gamma r),\quad u_0(0)=1. \tag{7.62}$$

Тогда соотношение (7.60) примет вид

$$\int_0^\infty dr\,(u_0^2 - u^2) = \frac{1}{2} r_e, \tag{7.63}$$

а это не что иное, как обычное определение эффективного радиуса r_e. Из обычного же граничного условия $u(0) = 0$ следует, что r_e, как и должно быть, представляет собой некоторое положительное расстояние.

Интересно, оставаясь на развиваемой здесь точке зрения, вывести известные результаты двух разных классов, включающие эффективный радиус. Один из них относится к сечениям фоторасщепления дейтрона. Примитивное взаимодействие усиливается, когда на заряженные частицы воздействует электромагнитное поле. Весьма существенно, что этот эффект связан не с влиянием фотона на движение дейтрона, а с искажением внутреннего состояния, которое обусловлено действием на протон. Поэтому соответствующий член взаимодействия, получаемый из величины

$$4\pi f \int (dx)\, \varphi_{\mathrm{D}}(x) \left[\int (dx')\, \Delta_{\mathrm{p}}^{A}(x, x')\, K_{\mathrm{p}}(x') \right] \varphi_{\mathrm{n}}(x), \tag{7.64}$$

имеет вид

$$4\pi f \int (dx)\,(dx')\, \varphi_{\mathrm{D}}(x)\, \Delta_{\mathrm{p}}(x - x')\, eq\,(pA + Ap)\,(x')\, \varphi_{\mathrm{p}}(x')\, \varphi_{\mathrm{n}}(x). \tag{7.65}$$

Для элемента T-матрицы, т. е. для коэффициента при произведении источников

$$iK^*_{p_{\mathrm{p}}q} iK^*_{p_{\mathrm{n}}} iK_{p_{\mathrm{D}}q} iJ_{k\lambda},$$

получаем ($q = +1$)

$$\langle p_{\mathrm{p}} p_{\mathrm{n}} | T | p_{\mathrm{D}} k\lambda \rangle = 4\pi f e\, (d\omega_{p_{\mathrm{p}}}\, d\omega_{p_{\mathrm{n}}}\, d\omega_{p_{\mathrm{D}}}\, d\omega_k)^{1/2} \frac{2e_{k\lambda} p_{\mathrm{p}}}{(p_{\mathrm{D}} - p_{\mathrm{n}})^2 + m^2}, \tag{7.66}$$

где в соответствии с законом сохранения импульса

$$P = p_{\mathrm{p}} + p_{\mathrm{n}} = p_{\mathrm{D}} + k. \tag{7.67}$$

Мы пользуемся калибровкой, в которой у вектора поляризации нет временно́й компоненты в системе покоя импульса P. В этом и находит свое оправдание полное пренебрежение электромагнитным взаимодействием с дейтроном. Согласно формуле (3-12.70), множитель, отвечающий инвариантному потоку, равен

$$2\,(M^2 - m_{\mathrm{D}}^2)\, d\omega_{p_{\mathrm{D}}}\, d\omega_k, \tag{7.68}$$

а интегрирование по конечным состояниям в системе центра масс при заданном значении телесного угла $d\Omega$ выполняется с помощью равенства (3-12.75), которое в нашем случае записывается в виде

$$\int d\omega_{p_\mathrm{p}}\, d\omega_{p_\mathrm{n}}\, (2\pi)^4\, \delta\,(p_\mathrm{p}+p_\mathrm{n}-P)=\frac{1}{32\pi^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2} d\Omega. \tag{7.69}$$

В итоге для дифференциального сечения получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=4\pi\alpha f^2\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\frac{1}{M^2-m_\mathrm{D}^2}\left[\frac{\mathbf{e}\cdot\mathbf{p}_\mathrm{p}}{2p_\mathrm{D}p_\mathrm{n}+m_\mathrm{D}^2}\right]^2. \tag{7.70}$$

Эта формула будет применяться в нерелятивистской области, где

$$M\approx 2m+E=2m-\varepsilon+k^0, \tag{7.71}$$

а значит,

$$k^0=E+\varepsilon. \tag{7.72}$$

В выражение

$$E=\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \tag{7.73}$$

для кинетической энергии нейтрона и протона входит относительный импульс этих частиц, вычисленный в системе центра масс:

$$\mathbf{p}_\mathrm{p}=-\mathbf{p}_\mathrm{n}=\mathbf{p}. \tag{7.74}$$

Мы имеем также

$$-2p_\mathrm{D}p_\mathrm{n}-m_\mathrm{D}^2\approx m_\mathrm{D}\,(2p_\mathrm{n}^0-m_\mathrm{D})\approx 2m\,(E+\varepsilon), \tag{7.75}$$

что приводит к следующему нерелятивистскому выражению для сечения:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=2\alpha\frac{\gamma}{1-\gamma r_e}\,\frac{p}{(p^2+\gamma^2)^3}\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{p})^2, \tag{7.76}$$

где мы воспользовались соотношением (7.56), с тем чтобы исключить f^2. Проводя усреднение по начальным поляризациям и интегрирование по конечному угловому распределению, получим полное сечение

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\,\alpha\frac{\gamma}{1-\gamma r_e}\,\frac{p^3}{(p^2+\gamma^2)^3}. \tag{7.77}$$

Максимального значения оно достигает при $p=\gamma$, причем

$$\sigma_{\text{макс}}=\frac{\pi}{3}\,\alpha\frac{1}{1-\gamma r_e}\,\frac{1}{\gamma^2}. \tag{7.78}$$

В итоге мы приходим к хорошо известным результатам теории эффективного радиуса.

Вторым из упомянутых выше примеров служит нейтрон-протонное рассеяние. Оно происходит за счет обмена дейтроном, описываемым модифицированной функцией распространения. Необходимый нам член взаимодействия имеет вид

$$(4\pi f)^2\,\frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,\varphi_\mathrm{p}(x)\,\varphi_\mathrm{n}(x)\,\overline{\Delta}_\mathrm{D}(x-x')\,\varphi_\mathrm{p}(x')\,\varphi_\mathrm{n}(x'), \tag{7.79}$$

откуда для соответствующего элемента T-матрицы получаем

$$\langle p_{p1}p_{n1} | T | p_{p2}p_{n2}\rangle = (4\pi f)^2 (d\omega_{p_{p1}}\, d\omega_{p_{n1}}\, d\omega_{p_{p2}}\, d\omega_{p_{n2}})^{1/2} \times \\ \times [\overline{\Delta}_D(P) + \overline{\Delta}_D(p_{n2} - p_{p1})], \tag{7.80}$$

где

$$P = p_{p1} + p_{n1} = p_{p2} + p_{n2} \tag{7.81}$$

и

$$p_{n2} - p_{p1} = p_{n1} - p_{p2}. \tag{7.82}$$

Так как рассматриваемый процесс представляет собой упругое столкновение, кинематические множители, входящие в определение сечения, сокращаются и мы имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\pi f^2)^2}{M^2} |\overline{\Delta}_D(P) + \overline{\Delta}_D(p_{n2} - p_{p1})|^2 \approx \left| -\frac{\gamma}{1-\gamma r_e} \frac{2}{m} G(E) \right|^2. \tag{7.83}$$

Вторая форма записи здесь отвечает нерелятивистскому случаю. В этом пределе член $\overline{\Delta}_D(p_{n2} - p_{p1})$, необходимость которого диктуется соображениями кроссинг-симметрии, пренебрежимо мал. Мы воспользовались также формулой (7.56) для константы связи. Если подставить последнее соотношение в (7.15), то получим

$$-\frac{\gamma}{1-\gamma r_e} \frac{2}{m} G(E) = \frac{1}{-\gamma + \frac{1}{2} r_e (p^2 + \gamma^2) - ip} = \\ = \frac{1}{p \operatorname{ctg} \delta - ip} = \frac{1}{p} \sin\delta \exp(i\delta), \tag{7.84}$$

где δ — вещественный угол, определяющийся уравнением

$$p \operatorname{ctg} \delta = -\gamma + \frac{1}{2} r_e (p^2 + \gamma^2). \tag{7.85}$$

Дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{p^2} \sin^2\delta \tag{7.86}$$

обычным образом выражается через фазовый сдвиг δ, отвечающий s-волне, а формула (7.85) для этого фазового сдвига представляет собой хорошо известный результат теории эффективного радиуса. Кроме того, в выражении (7.84) мы узнаем обычную комплексную форму записи амплитуды рассеяния через фазовый сдвиг. Это означает, что условие унитарности выполняется автоматически.

Здесь с серьезным видом вдруг заговорил Гарольд.

Гарольд. По-моему, ученые, подобно полководцам и политическим деятелям, должны писать мемуары. Как бы ни было велико влияние субъективной точки зрения и естественной человеческой склонности к самовозвеличению, свидетельство человека, непосредственно участвовавшего в событиях, ничем нельзя заменить. Ясно ведь, что весьма значительная часть истории науки, механически воспроизводимой в статьях и книгах, написанных людьми, которые сами «там не были»,— сплошная фантазия. Я говорю все это в связи с формулой для фазового сдвига, выраженного через эффективный радиус. Качественные соображения на этот счет наверняка высказывались и раньше. Но я думаю, что именно Вы первым осознали все важное значение указанной формулы и представили ее вывод, в котором эффективному радиусу, как Вы его назвали, был придан совершенно точный смысл, допускающий распространение этого понятия и на другие задачи. Ваш вывод основывался на вариационном методе. Позднее другими были предложены более элементарные выводы, причем один из них вошел в учебники так, словно его автор первым и получил соответствующую формулу. Трудно поверить, чтобы Вы ничего не знали о возможности элементарного вывода. Почему же Вы все-таки предпочли не совсем привычный вариационный подход?

Швингер. Этот вопрос о мотивировке очень интересен. Видимо, стоит указать, что и вариационный метод для рассеяния, и формула для эффективного радиуса ведут свое происхождение от задач распространения электромагнитных волн в волноводах. Частично история данного вопроса изложена в нашей книге *Schwinger J.*, *Saxon D. S.*, Discontinuities in Waveguides, New York, 1968. Там можно найти формулы для производных по частоте от некоторых электромагнитных величин, которые также обладают свойствами стационарности. Каждая из этих производных представляется в виде разности между полным и асимптотическим выражениями для энергии. Мне была очень хорошо известна соответствующая аналогия, которая имеет место для уравнения Шредингера. В этом случае электромагнитные величины заменяются тригонометрической функцией фазового сдвига, а ее производная по энергии определяется вероятностью, появляющейся вместо электромагнитной энергии. Однако нужна была не точная формула с неопределенной варьируемостью параметра по энергии, а приближенная, справедливая в ограниченной энергетической области. По этой причине представлялось более предпочтительным воспользоваться свойством стационарности фазового сдвига. К тому же формула с эффективным радиусом была первым воплощением неспекулятивной точки зрения, которая впоследствии нашла свое полное выражение в теории источников. Поэтому весьма приятно вывести результаты приближения эффективного радиуса еще раз, на основе теории источников.

В предыдущих параграфах мы получили выражения для электромагнитных формфакторов, рассматривая обобщенные фотонные источники, которые испускают времениподобные импульсы. Применим такой подход к дейтронному формфактору. Виртуальный фотон распадается на протон и антипротон. Затем эти частицы взаимодействуют, обмениваясь виртуальным нейтроном, и образуют дейтрон-антидейтронную пару. Реакция рассеяния описывается членом взаимодействия

$$(4\pi f)^2 \frac{1}{2} \int (dx)(dx')\, \varphi_{\mathrm{D}}(x)\, \varphi_{\mathrm{p}}(x)\, \Delta_{\mathrm{n}}(x-x')\, \varphi_{\mathrm{p}}(x')\, \varphi_{\mathrm{D}}(x'), \tag{7.87}$$

где эффективный двухчастичный источник протонов вводится равенством

$$iK_{\mathrm{p}}(p_2)\, K_{\mathrm{p}}(p_2')\,|_{\text{эфф}} = eq\,(p_2 - p_2')\, A\,(k), \tag{7.88}$$

причем

$$k = p_2 + p_2'. \tag{7.89}$$

Амплитуду вероятности, которая получается отсюда, можно представить в форме

$$(4\pi f)^2 \frac{1}{2} \int d\omega_{p_1}\, d\omega_{p_1'}\, (2\pi)^4\, \delta\,(p_1 + p_1' - k) \times$$
$$\times\, dM^2\, d\omega_k K_{\mathrm{D}}(-p_1)\, eqK_{\mathrm{D}}(-p_1')\, I^{\mu} A_{\mu}(k), \tag{7.90}$$

где

$$I^{\mu} = \int d\omega_{p_2}\, d\omega_{p_2'}\, (2\pi)^3\, \delta\,(p_2 + p_2' - k)\, \frac{1}{(p_1 - p_2)^2 + m^2}\, (p_2 - p_2')^{\mu} =$$
$$= (p_1 - p_1')^{\mu}\, S\,(M^2). \tag{7.91}$$

Возникающая здесь скалярная функция записывается через среднее значение:

$$S\,(M^2) = \int d\omega_{p_2}\, d\omega_{p_2'}\, (2\pi)^3\, \delta\,(p_2 + p_2' - k)\, \frac{1}{(p_1 - p_2)^2 + m^2} \times$$
$$\times \frac{(p_1 - p_1')(p_2 - p_2')}{(p_1 - p_1')^2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2} \times$$
$$\times \left\langle \frac{1}{(p_1 - p_2)^2 + m^2}\, \frac{(p_1 - p_1')(p_2 - p_2')}{(p_1 - p_1')^2} \right\rangle. \tag{7.92}$$

Пока мы действовали в полной аналогии с тем, что делалось в § 4. Но теперь необходимо проводить различие между начальными сталкивающимися частицами, каковыми являются протоны, и конечными частицами — дейтронами. Это различие проявляется в абсолютных величинах пространственных импульсов частиц, вычисляемых в системе центра масс:

$$\begin{aligned} p_1^0 = p_1^{0\prime} = \frac{1}{2} M, \quad |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_1'| = \left(\frac{1}{4} M^2 - m_{\mathrm{D}}^2\right)^{1/2}; \\ p_2^0 = p_2^{0\prime} = \frac{1}{2} M, \quad |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_2'| = \left(\frac{1}{4} M^2 - m^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{7.93}$$

Соответственно этому

$$\langle\ldots\rangle=\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2}dz\frac{z}{\frac{1}{2}M^2-m_{\mathrm{D}}^2-2z\left(\frac{1}{4}M^2-m_{\mathrm{D}}^2\right)^{1/2}\left(\frac{1}{4}M^2-m^2\right)^{1/2}}\times$$

$$\times\frac{\left(\frac{1}{4}M^2-m^2\right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{4}M^2-m_{\mathrm{D}}^2\right)^{1/2}},\tag{7.94}$$

где z — косинус угла рассеяния.

Прежде чем переходить к подробному обсуждению полученного интеграла, закончим формальную пространственно-временну́ю экстраполяцию. Запишем скалярную функцию $S\,(M^2)$ в виде

$$S\,(M^2)=\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{M}\sigma\,(M)\tag{7.95}$$

и введем дейтронный вектор тока. Тогда для вакуумной амплитуды получим

$$if^2\int\frac{dM^2}{M^2}\frac{\sigma\,(M)}{M}\int(dx)\,(dx')\,j_{\mathrm{D}}^{\mu}(x)\times$$

$$\times\left[i\int d\omega_k\exp\left[ik\,(x-x')\right]\right](-\partial^{\nu\prime}F_{\mu\nu}(x')),\tag{7.96}$$

где мы к тому же произвели калибровочно-инвариантную подстановку (4.19). Как и обычно, пространственно-временна́я экстраполяция осуществляется путем замены причинного выражения для функции распространения величиной $\Delta_+\,(x-x',\ M^2)$. Добавив примитивное взаимодействие дейтрона, мы для его формфактора, записанного в лоренцевской калибровке, будем иметь

$$F\,(k)=1-k^2f^2\int\frac{dM^2}{M^2}\frac{\sigma\,(M)}{M}\frac{1}{k^2+M^2-i\varepsilon}.\tag{7.97}$$

Явное выражение для $\sigma\,(M)$ имеет вид

$$\sigma\,(M)=\frac{(M^2-4m^2)^{1/2}}{M^2-4m_{\mathrm{D}}^2}\left[\frac{1}{\mu}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-2\right],\tag{7.98}$$

где

$$\mu=\frac{(M^2-4m^2)^{1/2}\,(M^2-4m_{\mathrm{D}}^2)^{1/2}}{M^2-2m_{\mathrm{D}}^2}.\tag{7.99}$$

Поскольку рождается пара дейтронов, может показаться, что при $M=2m_{\mathrm{D}}$, т. е. при $\mu=0$, должен быть порог. Но функция переменной μ, входящая в формулу (7.98), четна, и при малых μ можно написать

$$\frac{1}{\mu}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}-2=\frac{2}{3}\mu^2+\ldots,\tag{7.100}$$

что дает

$$M \to 2m_D \pm 0: \quad \sigma(M) = \frac{4}{3} \frac{(m_D^2 - m^2)^{3/2}}{m_D^4}. \tag{7.101}$$

Здесь нет никакого порога. Когда M становится меньше $2m_D$, величина μ оказывается мнимой:

$$\mu = i \frac{(M^2 - 4m^2)^{1/2} (4m_D^2 - M^2)^{1/2}}{M^2 - 2m_D^2} = i\nu, \tag{7.102}$$

но функция $\sigma(M)$ остается действительной. Поэтому никакой разницы между $i\nu$ и $-i\nu$ нет. Если написать

$$\frac{1 + i\nu}{1 - i\nu} = \exp[i\varphi(M)], \tag{7.103}$$

где

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \nu, \quad \varphi(2m_D) = 0, \tag{7.104}$$

то мы будем иметь

$$M < 2m_D: \quad \sigma(M) = \frac{(M^2 - 4m^2)^{1/2}}{M^2 - 4m_D^2} \left(\frac{\varphi}{\nu} - 2\right). \tag{7.105}$$

Порождается также и пара протонов, и следующий порог при уменьшении M достигается в точке $M = 2m$. Если бы выполнялось неравенство

$$m_D < 2^{1/2} m, \tag{7.106}$$

отвечающее очень большой энергии связи, превышающей $(2 - 2^{1/2})\, m$, то знаменатель в выражении для ν, равный $M^2 - 2m_D^2$, оставался бы на всем интервале положительным, а угол φ при $M = 2m$ возвращался бы к нулевому значению. Точнее, мы имели бы

$$M \to 2m + 0: \quad \frac{\varphi}{\nu} - 2 \to -\frac{2}{3}\nu^2, \quad \sigma \to \frac{1}{6} \frac{(M^2 - 4m^2)^{3/2}}{(2m^2 - m_D^2)^2}, \tag{7.107}$$

что соответствует нормальному пороговому поведению.

Однако неравенство (7.106) не выполняется. При значении M, лежащем между $2m_D$ и $2m$, а именно при $M = 2^{1/2} m_D$, величина ν обращается в бесконечность, а $\varphi = \pi$. Затем при $M \to 2m + 0$ величина ν стремится к нулю со стороны отрицательных значений, а $\varphi \to 2\pi$. Соответствующее предельное значение таково:

$$\mu \to 2m + 0: \quad \sigma(M) = \frac{\pi}{2} \frac{m_D^2 - 2m^2}{(m_D^2 - m^2)^{3/2}}. \tag{7.108}$$

Можно ли спуститься ниже точки $M - 2m$? Да. В этой области

$$(M^2 - 4m^2)^{1/2} = \pm i (4m^2 - M^2)^{1/2} \tag{7.109}$$

и

$$i\nu = \pm\mu, \quad \mu = \frac{(4m^2 - M^2)^{1/2}(4m_D^2 - M^2)^{1/2}}{2m_D^2 - M^2}, \tag{7.110}$$

тогда как

$$\varphi = 2\pi \pm \frac{1}{i}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu}. \tag{7.111}$$

Оставив неоднозначные члены в том виде, как они есть, будем иметь

$$M < 2m: \quad \sigma(M) = \frac{(4m^2 - M^2)^{1/2}}{4m_D^2 - M^2}\left[\frac{2\pi}{\mu} \mp i\left(\frac{1}{\mu}\ln\frac{1+\mu}{1-\mu} - 2\right)\right]. \tag{7.112}$$

Поскольку мы не можем выбрать тот или иной знак из каких-либо физических соображений, возьмем среднее двух этих выражений, как это делается при вычислении главного значения. В результате придем к действительной функции

$$M < 2m: \quad \sigma(M) = 2\pi\frac{2m_D^2 - M^2}{(4m_D^2 - M^2)^{3/2}}, \tag{7.113}$$

которая непрерывным образом сшивается с функцией (7.108).

Когда же застопорится такая экстраполяционная процедура? Есть еще одна особая точка, при $\mu = 1$, что явствует из выражения (7.112). Если учесть, что значение, принимаемое величиной μ при $M = 0$, а именно $2m/m_D$, очень близко к единице, то станет ясным, что равенство $\mu = 1$ достигается при весьма малых M, и мы можем воспользоваться разложением

$$M \ll m: \quad \mu = 1 + \frac{\varepsilon}{2m} - \frac{M^2}{32m^2}. \tag{7.114}$$

Таким образом, особенность возникает при $M = M_0$, где

$$M_0 = 4\gamma. \tag{7.115}$$

Но на этот раз, когда мы окажемся ниже особой точки, где $\mu > 1$, неоднозначная мнимая часть логарифма будет приводить к появлению неоднозначных действительных членов в функции $\sigma(M)$. Неопределенность при $M = M_0$ вынуждает нас остановиться.

При нерелятивистских значениях k основной вклад в формфактор (7.97) дают малые M, при которых мы имеем

$$M_0 < M \ll m: \quad \sigma(M) = \frac{\pi}{4m}. \tag{7.116}$$

Таким образом, дейтронный формфактор имеет вид

$$F(k) = 1 - k^2\frac{\pi}{2}\frac{f^2}{m}\int_{4\gamma}^{\infty}\frac{dM}{M^2}\frac{1}{k^2 + M^2 - i\varepsilon}, \tag{7.117}$$

т. е. совпадает с (7.50). Этот независимый результат дает нам дополнительную уверенность в правильности процедуры экстраполяции по массе.

§ 8. РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА СВЕТЕ I. НИЗКИЕ ЧАСТОТЫ

Мы разобрали эффекты многочастичного обмена, приводящие к модификации скелетного взаимодействия. Перейдем теперь к вопросу о том, каким образом за счет многочастичного обмена вводятся новые классы взаимодействий. Простейшим примером, который, несмотря на отсутствие пока прямой связи с экспериментом, имеет огромное значение с точки зрения анализа исходных принципов, служит процесс рассеяния света на свете.

Процессам, в которых участвуют два источника частиц со спином $^1/_2$ и источники фотонов (число их может быть любым), соответствует следующий член в выражении для связи:

$$\begin{aligned} W_2 \ldots &= \frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,\eta(x)\,\gamma^0 G_+^A(x, x')\,\eta(x'),\\ G_+^A &= G_+ + G_+ eq\gamma A G_+ + G_+ eq\gamma A G_+ eq\gamma A G_+ + \ldots . \end{aligned} \tag{8.1}$$

Так, например, величина

$$W_{22} = \frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,\psi(x)\,\gamma^0 eq\gamma A(x)\,G_+(x-x')\,eq\gamma A(x')\,\psi(x') \tag{8.2}$$

описывает комбинацию двух фотонных полей как эффективный электрон-позитронный источник:

$$i\eta(x)\,\eta(x')\,|_{\text{эфф}} = eq\gamma A(x)\,G_+(x-x')\,eq\gamma A(x')\,\gamma^0. \tag{8.3}$$

Соответствующий физический процесс представляет собой столкновение двух фотонов с образованием электрон-позитронной пары или обратную ему реакцию (гл. 3, § 13). Рассмотрим теперь следующую причинно-упорядоченную систему источников. Фотонными полями, обозначаемыми через A_2, порождается электрон-позитронная пара, а ее последующая аннигиляция в два фотона детектируется источниками, поля которых обозначим через A_1. Вакуумную амплитуду, которая описывает связь между эффективными источниками, обусловленную двухчастичным обменом, удобно представить в форме, аналогичной (3.7), с использованием соответствующего следа:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int (dx)\,\ldots\,(dx''')\,\mathrm{Sp}\,[i\eta_1(x)\,\eta_1(x')\,\gamma^0\,|_{\text{эфф}}\,G_+(x'-x'')\,\times\\ \times\, i\eta_2(x'')\,\eta_2(x''')\,\gamma^0\,|_{\text{эфф}}\,G_+(x'''-x)]. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Подставив сюда выражение (8.3), получим

$$-\frac{1}{2}\int (dx)\ \ldots\ (dx''')\ \mathrm{Sp}\,[eq\gamma A_1(x)\, G_+(x-x')\, eq\gamma A_1(x')\, G_+(x'-x'')\times$$
$$\times\, eq\gamma A_2(x'')\, G_+(x''-x''')\, eq\gamma A_2(x''')\, G_+(x'''-x)], \tag{8.5}$$

или, в более компактных обозначениях, в которых пространственно-временные координаты выступают в роли матричных индексов и объединяются со спиновыми и зарядовыми переменными,

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{SP}\,[eq\gamma A_1 G_+ eq\gamma A_1 G_+ eq\gamma A_2 G_+ eq\gamma A_2 G_+]. \tag{8.6}$$

Вакуумную амплитуду можно представить в виде некоторого унифицированного члена в выражении для действия:

$$W_{04} = i\,\frac{1}{8}\,\mathrm{SP}\,[eq\gamma AG_+ eq\gamma AG_+ eq\gamma AG_+ eq\gamma AG_+] =$$
$$= i\,\frac{1}{8}\,\mathrm{SP}\,(eq\gamma AG_+)^4. \tag{8.7}$$

Наличие дополнительного множителя $^1/_4$ объясняется тем, что начало заданной последовательности $A_1A_1A_2A_2$ можно фиксировать четырьмя разными способами, и в силу свойства циклической симметрии следа мы во всех случаях получим один и тот же вклад.

Это и есть тот самый процесс, который не имеет аналога в скелетном взаимодействии из гл. 3, § 12, так как в нем не участвует явным образом ни одна заряженная частица. Он описывается выражением, применимым во всей области изменения пространственно-временны́х переменных. Но справедливость этого не очень определенного утверждения должна быть проверена на основе физических критериев. Таких критериев имеется два — калибровочная инвариантность и существование. Если допустить, что рассматриваемое выражение действительно существует, то в его калибровочной инвариантности можно убедиться путем формальных выкладок с матрицами, причем достаточно ограничиться инфинитезимальным калибровочным преобразованием

$$\delta A = \partial\delta\lambda = i\,[p,\ \delta\lambda]. \tag{8.8}$$

При таком преобразовании

$$\delta W_{04} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{SP}\,[(eq\gamma AG_+)^3\,[\gamma p,\ eq\delta\lambda]\,G_+], \tag{8.9}$$

а из цепочки тождеств

$$eq\gamma AG_+\ [\gamma p,\ eq\delta\lambda]\,G_+ = eq\gamma AG_+\ (G_+^{-1},\ eq\delta\lambda]\,G_+ =$$
$$= eq\gamma A\ [eq\delta\lambda,\ G_+] = [eq\delta\lambda,\ eq\gamma AG_+] \tag{8.10}$$

вытекает, что

$$\delta W_{04} = -\frac{1}{6}\,\mathrm{SP}\,[eq\delta\lambda,\ (eq\gamma AG_+)^3] = 0. \tag{8.11}$$

Проблема существования возникает, когда четыре поля полностью перекрываются, т. е. в случае, который не предусмотрен исходным расположением причинно-упорядоченных источников. В качестве самой крайней возможности рассмотрим столь малую область пространства-времени, что в ее пределах векторные потенциалы можно считать практически постоянными. Тогда, если не учитывать численных множителей, для кратных интегралов, входящих в вакуумную амплитуду (8.7), получаем

$$\int (dx) \ldots (dx''') \operatorname{Sp} [eq\gamma A(x) G_+ (x - x') eq\gamma A(x) G_+ (x' - x'') \times$$
$$\times eq\gamma A(x) G_+ (x'' - x''') eq\gamma A(x) G_+ (x''' - x)] =$$
$$= \int \frac{(dx)(dp)}{(2\pi)^4} \operatorname{Sp} \left[eq\gamma A(x) \frac{1}{\gamma p + m - i\varepsilon} \right]^4 \sim$$
$$\sim \int \frac{(dx)(dp)}{(2\pi)^4} \frac{\operatorname{Sp} [eq\gamma A(x) \gamma p]^4}{(p^2)^4}, \tag{8.12}$$

где последнее выражение записано при дополнительном ограничении случаем очень больших импульсов. Эта комбинация, конечно, должна обращаться в нуль, так как она не является калибровочно-инвариантной. Правда, с первого взгляда вовсе не очевидно, что интеграл по импульсам существует. Но в соответствии с тем, что мы исходим из первоначально неперекрывающихся полей, к бесконечно большим импульсам следует переходить в самую последнюю очередь. При таком условии правильное значение, которое нужно приписать этому интегралу, оказывается все же равным нулю. Этот результат есть следствие лоренцевской инвариантности процедуры интегрирования, выражением которой служит возможность ковариантной замены

$$p_\varkappa p_\lambda p_\mu p_\nu \to \frac{1}{24} (p^2)^2 (g_{\varkappa\lambda} g_{\mu\nu} + g_{\varkappa\mu} g_{\lambda\nu} + g_{\varkappa\nu} g_{\lambda\mu}). \tag{8.13}$$

Но тогда элементарные выкладки сразу же показывают, что

$$\operatorname{Sp} (\gamma A \gamma p)^4 \to 0. \tag{8.14}$$

Если ввести производные от векторного потенциала, которые необходимы, чтобы получить напряженности поля, то появятся соответствующие обратные степени импульсов и интегралы станут абсолютно сходящимися при больших импульсах.

Выражение (8.7) допускает обобщение и на случай произведений произвольного числа полей ($\nu \geqslant 4$). Рассмотрим два эффективных источника, которые обмениваются парой частиц, причем с одним из них ассоциировано очень слабое поле δA, а с другим — произвольно распределенное поле A. Первый эффективный источник имеет вид

$$i\eta(x) \eta(x') |_{\text{эфф}} = eq\gamma\delta A(x) \gamma^0 \delta(x - x'), \tag{8.15}$$

тогда как другой, получаемый из сравнения $iW_2\ldots$ с

$$\frac{1}{2}\left[i\int (dx)\,\eta(x)\,\gamma^0\psi(x)\right]^2, \tag{8.16}$$

представляется эффективным произведением полей

$$i\psi(x)\,\psi(x')\,|_{\text{эфф}} = G_+^A(x,\ x')\,\gamma^0. \tag{8.17}$$

Связь между двумя источниками, даваемая вакуумной амплитудой

$$i\delta W(A) = -\frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,\mathrm{Sp}\,[i\eta(x')\,\eta(x)\,\gamma^0\,|_{\text{эфф}}\,i\psi(x)\,\psi(x')\,\gamma^0\,|_{\text{эфф}}], \tag{8.18}$$

имеет вид

$$\delta W(A) = \frac{1}{2}\,i\,\mathrm{SP}\,(eq\gamma\delta AG_+^A). \tag{8.19}$$

Тут содержится и обмен парой между источниками полей δA, а также однократно действующими источниками полей A, который мы не хотим учитывать еще раз. Проще всего, однако, выкинуть этот член из окончательного результата. Как явствует из самого обозначения $\delta W(A)$, при добавлении к исходному полю A бесконечно малого поля δA порождается некоторое дифференциальное выражение для члена действия $W(A)$, содержащее все $W_{0\nu}$ с $\nu \geqslant 4$. Формальное интегрирование осуществляется с помощью интегрального уравнения (3-12.21)

$$G_+^A = G_+ + G_+ eq\gamma AG_+^A \tag{8.20}$$

и его формального решения (3-12.22)

$$G_+^A = (1 - G_+ eq\gamma A)^{-1}G_+ = G_+\,(1 - eq\gamma AG_+)^{-1}. \tag{8.21}$$

Это дает

$$\delta W(A) = \frac{1}{2}\,i\,\mathrm{SP}\,[(1 - eq\gamma AG_+)^{-1}\,eq\gamma\delta AG_+] =$$

$$= -\frac{1}{2}\,i\delta\,\mathrm{SP}\ln(1 - eq\gamma AG_+) = -\frac{1}{2}\,i\delta\ln\det(1 - eq\gamma AG_+), \tag{8.22}$$

где последняя форма записи основывается на дифференциальном свойстве определителей

$$\delta\ln\det X = \mathrm{SP}\,(X^{-1}\delta X). \tag{8.23}$$

Проинтегрировав, будем иметь

$$W(A) = -\frac{1}{2}\,i\ln\det(1 - eq\gamma AG_+) = -\frac{1}{2}\,i\,\mathrm{SP}\ln(1 - eq\gamma AG_+), \tag{8.24}$$

или, разложив в ряд и опустив член с $\nu = 2$,

$$W(A) = i\sum_{\nu=4,\,6,\,\ldots}\frac{1}{2\nu}\,\mathrm{SP}\,(eq\gamma AG_+)^{\nu}. \tag{8.25}$$

Нечетные степени здесь отсутствуют, так как след матрицы q равен нулю. Заметим, что для члена W_{04} мы получили уже известное выражение. Это еще раз напоминает нам, что для вывода одной и той же общей пространственно-временной связи источников можно пользоваться разными причинными последовательностями заданного числа источников.

Проведенный нами анализ легко перенести и на частицы со спином 0. Связь частиц задается выражением

$$W_{2\,\ldots} = \frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,K(x)\,\Delta_+^A(x, x')\,K(x'), \tag{8.26}$$

которое описывает фотонные источники посредством эффективного двухчастичного поля

$$i\varphi(x)\,\varphi(x')\,|_{\text{эфф}} = \Delta_+^A(x, x'). \tag{8.27}$$

Слабое же электромагнитное поле описывается следующим эффективным двухчастичным источником:

$$iK(x)\,K(x')\,|_{\text{эфф}} = eq\,(p\delta A + \delta A p)(x)\,\delta(x - x') \tag{8.28}$$

[сравн. с формулой (3.31)]. В таком случае причинная связь между двумя фотонными источниками, с которыми ассоциированы поля δA и A, может быть выражена при помощи вакуумной амплитуды

$$i\delta W(A) = \frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,\mathrm{Sp}\,[\,iK(x')\,K(x)\,|_{\text{эфф}}\,i\varphi(x)\,\varphi(x')\,|_{\text{эфф}}] = $$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{SP}\,[eq\,(p\delta A + \delta A p)\,\Delta_+^A\,]. \tag{8.29}$$

Однако здесь имеется одна тонкость, которая выявляется при формальном решении уравнения для Δ_+^A [формулы (3-12.27) и (3-12.28)]:

$$\Delta_+^A = [1 - \Delta_+\,(eq\,(pA + Ap) - e^2A^2)]^{-1}\Delta_+ =$$
$$= \Delta_+\,[1 - (eq\,(pA + Ap) - e^2A^2)\,\Delta_+]^{-1}. \tag{8.30}$$

Чтобы можно было проинтегрировать выражение для $\delta W(A)$ так, как это делалось в случае частиц со спином $^1/_2$, величину (8.29) следует заменить величиной

$$i\delta W(A) = \frac{1}{2}\,\mathrm{SP}\,[(eq\,(p\delta A + \delta A p) - 2e^2\delta A A)\,\Delta_+^A\,]. \tag{8.31}$$

Такая замена не вызывает возражений, поскольку при той причинной упорядоченности, для которой выводилось выражение (8.29), поля δA и A не связаны друг с другом и их произведение равно нулю. Итак, мы можем утверждать, что

$$W(A)=\frac{1}{2}i\ln\det[1-(eq(pA+Ap)-e^2A^2)\Delta_+]=$$
$$=\frac{1}{2}i\,\mathrm{SP}\ln[1-(eq(pA+Ap)-e^2A^2)\Delta_+]. \tag{8.32}$$

В частности

$$W_{04}=-i\frac{1}{8}\mathrm{SP}[eq(pA+Ap)\Delta_+]^4+$$
$$+i\frac{1}{2}\mathrm{SP}[(eq(pA+Ap)\Delta_+)^2e^2A^2\Delta_+]-i\frac{1}{4}\mathrm{SP}[e^2A^2\Delta_+]^2. \tag{8.33}$$

Это выражение можно вывести иначе, рассматривая обмен частицей между двумя парами фотонных источников. Его существование и калибровочная инвариантность проверяются почти так же, как и в случае частиц со спином $^1/_2$.

Возможны и другие представления для $W(A)$, особенно удобные при некоторых специальных условиях. Начнем со случая спина 0 и напишем ($\Pi=p-eqA$)

$$\Delta_+^A=\frac{1}{\Pi^2+m^2-i\varepsilon}=i\int_0^\infty ds\exp[-is(\Pi^2+m^2)], \tag{8.34}$$

причем в интеграле в неявной форме учитывается условие $\varepsilon\to+0$ множителем $\exp(-\varepsilon s)$, обеспечивающим сходимость. Тогда дифференциальное выражение (8.31) примет форму

$$\delta W(A)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty ds\,\mathrm{SP}[\delta(\Pi^2)\exp(-is(\Pi^2+m^2))], \tag{8.35}$$

откуда

$$W(A)=-i\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{ds}{s}\mathrm{SP}\exp[-is(\Pi^2+m^2)], \tag{8.36}$$

хотя здесь и следует оставить только члены, содержащие по меньшей мере четыре полевых сомножителя. Калибровочная инвариантность доказывается теперь весьма просто, поскольку замена $A\to A+\partial\lambda$ влечет преобразования

$$\Pi\to\exp(ieq\lambda)\,\Pi\exp(-ieq\lambda) \tag{8.37}$$

и

$$\exp(-is\Pi^2)\to\exp(ieq\lambda)\exp(-is\Pi^2)\exp(-ieq\lambda), \tag{8.38}$$

при которых след не изменяется.

Вывод аналога выражения (8.36) для частиц со спином $^1/_2$ основывается на конструкции [формулы (2.1), (2.3) и (2.4)]

$$G_+^A = \frac{1}{\gamma\Pi + m - i\varepsilon} = (m - \gamma\Pi)\frac{1}{\Pi^2 - eq\sigma F + m^2 - i\varepsilon} =$$
$$= \frac{1}{\Pi^2 - eq\sigma F + m^2 - i\varepsilon}(m - \gamma\Pi), \tag{8.39}$$

где теперь мы будем записывать

$$\frac{1}{\Pi^2 - eq\sigma F + m^2 - i\varepsilon} = i\int_0^\infty ds \exp\{-is[\Pi^2 - eq\sigma F + m^2]\}. \tag{8.40}$$

Так как след произведения, содержащего нечетное число матриц γ, равен нулю (матрицы γ^μ и $-\gamma^\mu = \gamma_5^{-1}\gamma^\mu\gamma_5$ эквивалентны) и так как

$$-eq\gamma\delta A\gamma\Pi - \gamma\Pi eq\gamma\delta A = \delta[(\gamma\Pi)^2] = -\delta[\Pi^2 - eq\sigma F], \tag{8.41}$$

дифференциальное выражение (8.19) принимает вид

$$\delta W(A) = \frac{1}{4}\int_0^\infty ds\, \mathrm{SP}\{\delta(\Pi^2 - eq\sigma F)\exp[-is(\Pi^2 - eq\sigma F + m^2)]\}, \tag{8.42}$$

откуда

$$W(A) = i\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\, \mathrm{SP}\exp[-is(\Pi^2 - eq\sigma F + m^2)]. \tag{8.43}$$

Полученные выражения удобны в случае медленно меняющихся полей, практически постоянных в пределах соответствующих областей пространства-времени. В подобной ситуации можно воспользоваться формальным сходством комбинаций $\Pi^2 + m^2$ или $\Pi^2 - eq\sigma F + m^2$ с гамильтонианом частицы, а параметра s — с временно́й переменной. Хотя такая аналогия имеется всегда, в данном случае результаты оказываются простыми благодаря постоянству коммутатора

$$[\Pi_\mu, \Pi_\nu] = ieqF_{\mu\nu}. \tag{8.44}$$

Заметим, что

$$[\Pi_\mu, \Pi^2] = 2ieqF_{\mu\nu}\Pi^\nu, \tag{8.45}$$

а, следовательно, векторная величина

$$\Pi_\mu(s) = \exp(is\Pi^2)\,\Pi_\mu \exp(-is\Pi^2) \tag{8.46}$$

удовлетворяет уравнению движения

$$\frac{d\Pi_\mu(s)}{ds} = 2eqF_{\mu\nu}\Pi^\nu(s). \tag{8.47}$$

Решение его, записанное в матричных обозначениях, имеет вид

$$\Pi(s) = \exp(2eqFs)\,\Pi = \Pi\exp(-2eqFs), \tag{8.48}$$

где учтена антисимметрия тензора $F_{\mu\nu}$. Рассмотрим теперь следующий тензор, задаваемый следом, который не затрагивает индексов, относящихся к зарядовому пространству:

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{SP}'\,[\Pi_\mu\Pi_\nu\exp(-is\Pi^2)] = \mathrm{SP}'[\Pi_\mu\exp(-is\Pi^2)\,\Pi_\nu(s)] = \\ = \mathrm{SP}'\,[\Pi_\nu(s)\,\Pi_\mu\exp(-is\,\Pi^2)], \tag{8.49}$$

или, в другой, эквивалентной форме записи,

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{SP}'\,[\Pi_\mu\Pi_\nu(s)\exp(-is\Pi^2)] - \\ -\mathrm{SP}'\,[[\Pi_\mu,\ \Pi_\nu(s)]\exp(-is\Pi^2)]. \tag{8.50}$$

Для входящего сюда коммутатора имеем

$$[\Pi_\mu,\ \Pi_\nu(s)] = [\Pi_\mu,\ \Pi^\lambda\,[\exp(-2eqFs)]_{\lambda\nu}] = \\ = ieq\,[F\exp(-2eqFs)]_{\mu\nu}, \tag{8.51}$$

так что, возвращаясь к матричным обозначениям, получаем

$$T = T\exp(-2eqFs) - ieqF\exp(-2eqFs)\,\mathrm{SP}'\,[\exp(-is\Pi^2)], \tag{8.52}$$

или

$$\mathrm{SP}'\,[\Pi\Pi\exp(-is\Pi^2)] = -ieq\frac{F}{\exp(2eqFs)-1}\,\mathrm{SP}'\,[\exp(-is\Pi^2)]. \tag{8.53}$$

Этот результат позволяет вычислить

$$i\frac{d}{ds}\,\mathrm{SP}'\,[\exp(-is\Pi^2)] = \mathrm{SP}'\,[\Pi^2\exp(-is\Pi^2)] = \\ = -ieq\,\mathrm{Sp}'\left[\frac{F}{\exp(2eqFs)-1}\right]\mathrm{SP}'\,[\exp(-is\Pi^2)]. \tag{8.54}$$

Решение вытекающего отсюда дифференциального уравнения имеет вид

$$\mathrm{SP}'\,[\exp(-is\Pi^2)] = C\exp\left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}'\ln\left(\frac{\operatorname{sh} eqFs}{eqF}\right)\right] = \\ = \frac{C}{s^2}\left[\det\left(\frac{eFs}{\operatorname{sh} eFs}\right)\right]^{1/2}, \tag{8.55}$$

причем в последней форме записи мы учли размерность пространства-времени и то обстоятельство, что знак заряда q на ответе не сказывается.

Постоянную C можно определить, рассматривая предел при малых s. В этом случае основной вклад дают большие значения Π и некоммутативность различных компонент Π становится несущественной. Пользуясь четырехмерной записью обычных квантовых соотношений, получим

$$s\to 0:\quad \mathrm{SP}'\exp(-is\Pi^2)=\int (dx)\langle x|\exp(-isp^2)|x\rangle=$$
$$=\int\frac{(dx)(dp)}{(2\pi)^4}\exp(-isp^2). \tag{8.56}$$

Четырехмерный интеграл по $(3+1)$-мерному импульсному пространству берется следующим образом:

$$\int\frac{(dp)}{(2\pi)^4}\exp(-isp^2)=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_1}{2\pi}\exp(-isp_1^2)\right]^3\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\exp(isp_0^2)=$$
$$=\left[\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{is}\right)^{1/2}\right]^3\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi i}{s}\right)^{1/2}=\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{is^2}, \tag{8.57}$$

так что

$$C=-\frac{1}{(4\pi)^2}i\int(dx). \tag{8.58}$$

Чтобы завершить вычисление $W(A)$ для частиц со спином 0, нам осталось лишь добавить множитель 2, возникающий из следа по зарядовым индексам. В итоге получаем

$$W_{\text{спин }0}(A)=\int(dx)\,\mathscr{L}_{\text{спин }0}(F),$$
$$\mathscr{L}_{\text{спин }0}(F)=-\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^3}\exp(-im^2s)\left[\det\left(\frac{eFs}{\operatorname{sh} eFs}\right)\right]^{1/2}. \tag{8.59}$$

Функция Лагранжа действительна, что становится очевидным, если деформировать контур интегрирования по is так, чтобы он совпал с положительным участком действительной оси (см., однако, замечание ниже):

$$\mathscr{L}_{\text{спин }0}(F)=\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^3}\exp(-m^2s)\times$$
$$\times\left\{\left[\det\left(\frac{eFs}{\operatorname{sh} eFs}\right)\right]^{1/2}-1-\frac{1}{3}(es)^2\mathscr{F}\right\}, \tag{8.60}$$

где теперь уже нежелательные члены выброшены. Здесь мы ввели величину

$$\mathscr{F}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2), \tag{8.61}$$

в дополнение к которой введем

$$\mathscr{G}=-\frac{1}{4}{}^*F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} \tag{8.62}$$

и

$$\mathscr{H}_{\pm} = 2(\mathscr{F} \pm i\mathscr{G}) = (\mathbf{E} \pm i\mathbf{H})^2. \qquad (8.63)$$

Для вычисления определителя в общем виде достаточно отыскать собственные значения тензора F. При этом удобно пользоваться самодуальными тензорами

$$F_{\pm} = F \pm i\,{}^*F, \quad {}^*F_{\pm} = \mp iF_{\pm}. \qquad (8.64)$$

Рассматриваемые в качестве матриц, два эти тензора коммутируют друг с другом, а квадрат каждого из них кратен единичной матрице. В этом можно убедиться непосредственной проверкой, взяв небольшое число независимых компонент. Для квадратов имеем

$$(F_{\pm}^2)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathscr{H}_{\pm}. \qquad (8.65)$$

Чтобы установить, что коэффициенты здесь равны именно $\mathscr{H}_{\pm}$, достаточно взять след от обеих частей равенства. Ему эквивалентны соотношения

$$\frac{1}{2}(F^2 - {}^*F^2)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathscr{F}, \quad (F^*F)_{\mu\nu} = ({}^*FF)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathscr{G}, \qquad (8.66)$$

из которых вытекает следующее уравнение для тензора F:

$$(F^4)_{\mu\nu} - 2\mathscr{F}\,(F^2)_{\mu\nu} - \mathscr{G}^2 g_{\mu\nu} = 0. \qquad (8.67)$$

Собственные значения представляют собой две пары одинаковых величин с противоположными знаками $\pm F'$ и $\pm F''$, причем

$$F',\ F'' = \frac{1}{2}[\mathscr{H}_{+}^{1/2} \pm \mathscr{H}_{-}^{1/2}]. \qquad (8.68)$$

Следовательно,

$$\left[\det\left(\frac{eFs}{\sin eFs}\right)\right]^{1/2} = \frac{eF's}{\sin eF's}\,\frac{eF''s}{\sin eF''s} =$$
$$= \frac{2(es)^2\, i\mathscr{G}}{\cos(es\mathscr{H}_{-}^{1/2}) - \cos(e\mathscr{H}_{+}^{1/2})} = \frac{(es)^2\,\mathscr{G}}{\operatorname{Im}\cos(es\mathscr{H}^{1/2})}, \qquad (8.69)$$

где в последнем выражении мы вместо $\mathscr{H}_{-}$ написали просто $\mathscr{H}$. В итоге для частиц со спином 0 приходим к следующему результату:

$$\mathscr{L}_{\text{спин } 0}(F) =$$
$$= \frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3}\exp(-m^2 s)\left[\frac{(es)^2\,\mathscr{G}}{\operatorname{Im}\cos(es\mathscr{H}^{1/2})} - 1 - \frac{1}{3}(es)^2\,\mathscr{F}\right]. \qquad (8.70)$$

Но нам нужен только член, пропорциональный 4-й степени поля. Поэтому проще, видимо, вернуться к функции Лагранжа (8.60) и воспользоваться разложением определителя

$$\det(1+Y) = 1 + \operatorname{Sp} Y + \frac{1}{2}[(\operatorname{Sp} Y)^2 - \operatorname{Sp}(Y^2)] + \ldots . \qquad (8.71)$$

Это дает

$$\left[\det\left(\frac{eFs}{\sin eFs}\right)\right]^{1/2}=1+\frac{1}{3}(es)^2\mathscr{F}+\frac{1}{90}(es)^4(7\mathscr{F}^2+\mathscr{G}^2)+\ldots, \quad (8.72)$$

так что

$$\text{спин } 0: \quad \mathscr{L}_{04}=\frac{\alpha^2}{90}\frac{1}{m^4}(7\mathscr{F}^2+\mathscr{G}^2)=$$
$$=\frac{\alpha^2}{90}\frac{1}{m^4}\left[\frac{7}{4}(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)^2+(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2\right]. \quad (8.73)$$

К соответствующему результату для частиц со спином $^1/_2$ мы придем, подставив в подынтегральное выражение функции Лагранжа $\mathscr{L}$ следующий след по (2×4)-мерному зарядово-спиновому пространству:

$$-\frac{1}{4}\operatorname{Sp}_{(8)}\exp(eq\sigma Fs)=-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}_{(4)}\operatorname{ch}(es\sigma F), \quad (8.74)$$

где уже произведена замена $is\to s$. В силу алгебраических свойств спиновых матриц выполняется соотношение

$$\frac{1}{2}\{\sigma_{\varkappa\lambda},\ \sigma_{\mu\nu}\}=g_{\varkappa\mu}g_{\lambda\nu}-g_{\varkappa\nu}g_{\lambda\mu}-\varepsilon_{\varkappa\lambda\mu\nu}\gamma_5. \quad (8.75)$$

Следовательно,

$$(\sigma F)^2=2(-\mathscr{F}+\gamma_5\mathscr{G}) \quad (8.76)$$

и собственные значения тензора σF таковы:

$$(\sigma F)'=\pm i\mathscr{H}_+^{1/2},\quad \pm\mathscr{H}_-^{1/2}. \quad (8.77)$$

Это дает

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Sp}_{(4)}\operatorname{ch}(es\sigma F)=-2\operatorname{Re}\cos(es\mathscr{H}^{1/2}), \quad (8.78)$$

так что

$$\mathscr{L}_{\text{спин }1/2}(F)=-\frac{2}{(4\pi)^2}\int_0^\infty\frac{ds}{s^3}\exp(-m^2s)\times$$
$$\times\left[(es)^2\mathscr{G}\frac{\operatorname{Re}\cos(es\mathscr{H}^{1/2})}{\operatorname{Im}\cos(es\mathscr{H}^{1/2})}-1+\frac{2}{3}(es)^2\mathscr{F}\right]. \quad (8.79)$$

Чтобы найти интересующий нас член, воспользуемся разложением

$$\operatorname{Re}\cos(es\mathscr{H}^{1/2})=1-(es)^2\mathscr{F}+\frac{1}{6}(es)^4(\mathscr{F}^2-\mathscr{G}^2)+\ldots. \quad (8.80)$$

В итоге будем иметь

$$\text{спин }\frac{1}{2}: \quad \mathscr{L}_{04}=\frac{2\alpha^2}{45}\frac{1}{m^4}(4\mathscr{F}^2+7\mathscr{G}^2)=$$
$$=\frac{2\alpha^2}{45}\frac{1}{m^4}[(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)^2+7(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2]. \quad (8.81)$$

Полученные выражения для низкоэнергетической функции Лагранжа имеют несколько различных применений. Ввиду того что вопрос о сравнении с экспериментом пока не стоит на повестке дня, мы довольствуемся оценкой общих порядков величин, опуская все численные множители (кроме π). Элемент T-матрицы для фотон-фотонного рассеяния получается из iW_{04} как коэффициент при

$$iJ^*_{k_1\lambda_1} iJ^*_{k'_1\lambda'_1} iJ_{k_2\lambda_2} iJ_{k'_2\lambda'_2}.$$

В системе центра масс, где энергии всех фотонов равны $^1/_2\, M$, из-за наличия четырех напряженностей поля появляется множитель $(^1/_2\, M)^4$, и

$$\langle 1_{k_1\lambda_1} 1_{k'_1\lambda'_1} \,|\, T \,|\, 1_{k_2\lambda_2} 1_{k'_2\lambda'_2} \rangle \sim (d\omega_{k_1} \ldots d\omega_{k'_2})^{1/2} \alpha^2 \left(\frac{M}{2m}\right)^4. \qquad (8.82)$$

Так как рассматриваемый процесс представляет собой упругое столкновение, отношение кинематических множителей, входящих, по определению, в дифференциальное сечение, равно $\sim (1/\pi^2)\,(1/M^2)$, и для полного сечения получаем

$$M \ll 2m: \quad \sigma \sim \frac{\alpha^4}{\pi} \left(\frac{M}{2m}\right)^6 \frac{1}{m^2}. \qquad (8.83)$$

Отметим как один из случаев фотон-фотонного рассеяния, что область с макроскопическим электромагнитным полем является средой, анизотропной для распространения фотона. Так, в случае магнитного поля с напряженностью H отклонение характеристик распространения от единицы имеет порядок $\alpha^2 H^2/m^4$. Квартичный характер связи фотонных полей приводит также к тому, что обобщенный фотонный источник может испустить или поглотить три реальных фотона. Такой процесс интересен тем, что он может протекать, хотя и слабо, ниже массового порога $M = 2m$ для обмена парой частиц. Весовой множитель $a\,(M^2)$ в выражении (3.82) для модифицированной фотонной функции распространения имеет вид

$$M \ll 2m: \quad a(M^2) \sim \frac{\alpha^4}{m^8} \frac{1}{M^2} \int (k^{0\prime})^2\, d\omega_{k'}\, (k^{0\prime\prime})^2\, d\omega_{k''} (k^{0\prime\prime\prime})^2\, d\omega_{k'''} \times$$
$$\times (2\pi)^3 \delta(k' + k'' + k''' - k) \sim \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 \left(\frac{M^2}{4m^2}\right)^3 \frac{1}{m^2}. \qquad (8.84)$$

Из существования этого эффекта, порог которого лежит при $M = 0$, вытекает, что первоначально дальнодействующее отклонение от кулоновского взаимодействия покоящихся зарядов характеризуется не экспоненциальной, а степенной зависимостью от расстояния:

$$2m\,|\mathbf{x}| \gg 1: \quad \mathscr{D}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi\,|\mathbf{x}|} \sim \frac{1}{4\pi\,|\mathbf{x}|} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 \left(\frac{1}{2m\,|\mathbf{x}|}\right)^8. \qquad (8.85)$$

И, наконец, еще одно применение общего выражения для функции Лагранжа, скажем (8.79), относящегося к частицам со спином $^1/_2$. Оно касается области с сильным электрическим полем E. В предельном случае исчезающего магнитного поля (который инвариантным образом можно охарактеризовать условиями $\mathcal{G} = 0$, $\mathcal{F} > 0$) имеем

$$\mathcal{L}_{\text{спин } 1/2}(E) =$$
$$= -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3}\exp(-m^2 s)\left[eEs\operatorname{ctg}(eEs) - 1 + \frac{1}{3}(eEs)^2\right]. \qquad (8.86)$$

Правда, здесь необходимо одно замечание. Значения переменной, обозначаемой теперь через s, первоначально лежали на положительном участке мнимой оси, а затем контур интегрирования был деформирован так, что они стали принадлежать положительному участку действительной оси. Следует вспомнить, что мы условились подходить к действительной оси сверху, так как на ней имеются особые точки подынтегрального выражения

$$eEs_n = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (8.87)$$

Необходимая в связи с этим деформация контура вблизи указанных особых точек в верхнюю полуплоскость приводит к функции Лагранжа $\mathcal{L}$ с мнимой частью, равной

$$\operatorname{Im}\mathcal{L}_{\text{спин } 1/2}(E) = \frac{1}{8\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s_n^2}\exp(-m^2 s_n), \qquad (8.88)$$

или

$$2\operatorname{Im}\mathcal{L}_{\text{спин } 1/2}(E) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{eE}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-n\frac{\pi m^2}{eE}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{4\pi}\left(\frac{eE}{\pi}\right)^2\exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}\right). \qquad (8.89)$$

Поскольку вероятность всех процессов с сохранением вакуумного состояния дается величиной

$$|\exp(iW)|^2 = \exp(-2\operatorname{Im} W), \qquad (8.90)$$

величиной $2\operatorname{Im}\mathcal{L}$ определяется вероятность рождения электрон-позитронной пары за единицу времени в единице трехмерного объема.

Такой процесс интересен лишь с принципиальной точки зрения, ибо никакое конечное число столкновений (в смысле схемы рассеяния) со статическим электрическим полем не может дать энергию, требующуюся для рождения частиц.

§ 9. РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА СВЕТЕ II. РАССЕЯНИЕ ВПЕРЕД

В предыдущем параграфе мы получили пространственно-временные выражения для связей с участием только электромагнитного поля, а также применили эти выражения для конкретных расчетов в частном случае медленно меняющихся полей. Но в более общих случаях обычно удобнее рассматривать подходящую причинную последовательность источников и затем проводить пространственно-временную экстраполяцию. Тут мы видим, что теория источников оказывается весьма гибкой. Она не обязывает придерживаться какого-то одного способа расчета и позволяет свободно выбирать наиболее удобный из них. Больше того, именно сочетание и синтез разнообразных вычислительных схем, наиболее подходящих к тем или иным конкретным условиям, и составляет суть общего метода расчета теории источников.

Рассмотрим случай, когда два сталкивающихся фотона порождают пару частиц, а затем детектируются два фотона, испущенных при последующей аннигиляции этих частиц. Для частиц со спином 0 мы можем использовать связь (8.33), подставив туда

$$A = A_1 + A_2 \tag{9.1}$$

и оставив только члены вида $A_1A_1A_2A_2$, которые описывают рождение или аннигиляцию частиц, обусловленную совместным действием двух простых фотонных источников, а не отдельными обобщенными фотонными источниками. Соответствующая вакуумная амплитуда имеет вид

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,[(2eqpA_1\Delta_+2eqpA_1-(eqA_1)^2)\,\Delta_+\,(2eqpA_2\Delta_+2eqpA_2-(eqA_2)^2)\,\Delta_+], \tag{9.2}$$

где мы для упрощения записи заменили $pA + Ap$ на $2pA$, что отвечает выбору лоренцевской калибровки. Здесь мы видим отдельные множители, соответствующие эффективным двухчастичным источникам, которые описывают двукратное воздействие электромагнитного поля. Именно из этого причинного выражения можно было бы исходить при выводе вакуумной амплитуды (8.33). Подставив в выражение (9.2) причинные разложения полей

$$\begin{gathered} A_1^\mu(x) = \sum_{k_1\lambda_1} iJ^*_{k_1\lambda_1}(d\omega_{k_1})^{1/2}\,e^{\mu *}_{k_1\lambda_1}\exp(-ik_1x), \\ A_2^\mu(x) = \sum_{k_2\lambda_2}(d\omega_{k_2})^{1/2}\,e^{\mu}_{k_2\lambda_2}\exp(ik_2x)\,iJ_{k_2\lambda_2}, \end{gathered} \tag{9.3}$$

а также причинные выражения для функции распространения Δ_+, мы придем к следующей вакуумной амплитуде:

$$\begin{gathered} -\sum_{k_1\lambda_1\ldots} iJ^*_{k_1\lambda_1}iJ^*_{k_1'\lambda_1'}iJ_{k_2\lambda_2}iJ_{k_2'\lambda_2'}(d\omega_{k_1}\ldots d\omega_{k_2'})^{1/2}\times \\ \times(2\pi)^4\,\delta(k_1+k_1'-k_2-k_2')\,e^4I_{k_1\lambda_1\ldots k_2'\lambda_2'}, \end{gathered} \tag{9.4}$$

где

$$I=\int d\omega_p\, d\omega_{p'}\,(2\pi)^4\,\delta(p+p'-k_2-k_2')\times$$
$$\times\left[-2\frac{e_1'p'e_1p}{(p-k_1)^2+m^2}-2\frac{e_1p'e_1'p}{(p-k_1')^2+m^2}-e_1e_1'\right]\times$$
$$\times\left[-2\frac{e_2'pe_2p'}{(p'-k_2)^2+m^2}-2\frac{e_2pe_2'p'}{(p'-k_2')^2+m^2}-e_2e_2'\right]. \qquad (9.5)$$

Здесь использованы упрощенные обозначения, а векторы поляризации выбраны действительными. Основываясь на кинематических свойствах импульсов, приведем эту величину к виду

$$I=\int d\omega_p\, d\omega_{p'}\,(2\pi)^4\,\delta(p+p'-k_2-k_2')\times$$
$$\times\left[\frac{e_1'p'e_1p}{pk_1}+\frac{e_1p'e_1'p}{pk_1'}-e_1e_1'\right]\left[\frac{e_2'pe_2p'}{p'k_2}+\frac{e_2pe_2'p'}{p'k_2'}-e_2e_2'\right]. \qquad (9.6)$$

В дальнейшем полученные формулы будут применяться только для вывода связи, которая описывает рассеяние фотонов вперед (и назад). Если мы рассматриваем систему покоя полного импульса, то для такого процесса имеется лишь одно выделенное направление, совпадающее с направлением движения фотонов. В нашем случае все они распространяются вдоль одной прямой, ибо их импульсы связаны соотношениями

$$\mathbf{k}_1=-\mathbf{k}_1'=\mathbf{k}_2=-\mathbf{k}_2',\qquad k_1^0=k_1^{0\prime}=k_2^0=k_2^{0\prime}=\frac{1}{2}M. \qquad (9.7)$$

Выберем калибровку, в которой у векторов поляризации имеются только пространственные составляющие. Все они перпендикулярны общему направлению движения фотонов. В формулу (9.6) входят интегралы по переменной z, являющейся косинусом угла между импульсом $\mathbf{p}=-\mathbf{p}'$ и выделенным направлением, и по углу в плоскости, перпендикулярной этому направлению. Средние значения, возникающие при вычислении второго интеграла, даются формулами

$$\langle \mathbf{e}\cdot\mathbf{p}\mathbf{e}'\cdot\mathbf{p}\rangle=\frac{1}{2}\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'\,(1-z^2)\left[\left(\frac{M}{2}\right)^2-m^2\right] \qquad (9.8)$$

и

$$\langle \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{p}\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{p}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{p}\mathbf{e}_2'\cdot\mathbf{p}\rangle=$$
$$=\frac{1}{8}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2'+\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2'+\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2)(1-z^2)^2\left[\left(\frac{M}{2}\right)^2-m^2\right]^2. \qquad (9.9)$$

С учетом этих выражений получим

$$I=\frac{1}{8\pi}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\Big[a\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2'+$$
$$+\frac{1}{2}b(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2'+\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2'+\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2)\Big], \qquad (9.10)$$

где

$$a(M^2)=1-\int_{-1}^{1}dz\,\frac{\left[1-\frac{4m^2}{M^2}\right](1-z^2)}{1-\left[1-\frac{4m^2}{M^2}\right]z^2}=-1+\frac{1-v^2}{v}\ln\frac{1+v}{1-v} \tag{9.11}$$

и

$$b(M^2)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dz\left[\frac{\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)(1-z^2)}{1-\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)z^2}\right]^2=$$

$$=-a(M^2)+\frac{1-v^2}{2}\left[1+\frac{1-v^2}{2v}\ln\frac{1+v}{1-v}\right]. \tag{9.12}$$

Результаты интегрирования мы выразили через переменную

$$v=\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}. \tag{9.13}$$

Чтобы подчеркнуть причинный характер рассматриваемого явления, напишем

$$(2\pi)^4\,\delta(k_1+k_1'-k_2-k_2')=$$

$$=\int(2\pi)^4\,\delta(k_1+k_1'-k)\,d\omega_k\,\frac{dM^2}{2\pi}(2\pi)^4\,\delta(k-k_2-k_2')=$$

$$=-i\int\frac{dM^2}{2\pi}\int(dx)(dx')\exp[-i(k_1+k_1')x]\times$$

$$\times\left[i\int d\omega_k\exp[ik(x-x')]\right]\exp[i(k_2+k_2')x'], \tag{9.14}$$

где в явном виде представлена зависимость от координат отдельных напряженностей поля и функции распространения, устанавливающей причинную связь между двумя областями. Чтобы для вакуумной амплитуды получить ковариантное пространственно-временно́е выражение, нам нужно заменить комбинацию (9.10), составленную из векторов поляризации, эквивалентными комбинациями из напряженностей поля. Рассмотрим сначала случай, когда все векторы поляризации параллельны, а, стало быть, выражение (9.10) сводится к выражению

$$I=\frac{1}{8\pi}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\left(a+\frac{3}{2}b\right). \tag{9.15}$$

Заметим, что в самом общем случае

$$\mathcal{F}_1(x)=\frac{1}{2}(\mathbf{E}_1^2-\mathbf{H}_1^2)(x)=$$

$$=-\sum iJ^*_{k_1\lambda_1}J^*_{k_1'\lambda_1'}(d\omega_{k_1}d\omega_{k_1'})^{1/2}\exp[-i(k_1+k_1')x]\times$$

$$\times\frac{1}{2}[k_1^0k_1^{0\prime}\mathbf{e}_{k_1\lambda_1}\cdot\mathbf{e}_{k_1'\lambda_1'}-\mathbf{k}_1\times\mathbf{e}_{k_1\lambda_1}\cdot\mathbf{k}_1'\times\mathbf{e}_{k_1'\lambda_1'}] \tag{9.16}$$

и что при рассматриваемых теперь условиях множитель, содержащий векторы поляризации, сводится к

$$-\frac{1}{2}k_1k_1' = -\frac{1}{4}(k_1+k_1')^2 = \frac{1}{4}M^2. \tag{9.17}$$

Аналогичное замечание справедливо и для $\mathscr{F}_2(x')$. Следовательно, в частном случае параллельных поляризаций вакуумную амплитуду (9.4) можно представить в форме

$$i\alpha^2 \int dM^2 \left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2} \frac{16}{(M^2)^2}\left(a+\frac{3}{2}b\right)(M^2) \int (dx)(dx') \times$$
$$\times \mathscr{F}_1(x)\Delta_+(x-x', M^2)\mathscr{F}_2(x'). \tag{9.18}$$

Соответствующее выражение для действия имеет вид

$$8\alpha^2 \int\limits_{(2m)^2} \frac{dM^2}{(M^2)^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\left(a+\frac{3}{2}b\right)(M^2)\int (dx)(dx') \times$$
$$\times \mathscr{F}(x)\Delta_+(x-x', M^2)\mathscr{F}(x'). \tag{9.19}$$

Если рассматривается предел слабо переменных полей, в котором масштаб длины задается величиной $1/2m$, то в формуле (9.19) величину $\mathscr{F}(x')$ можно заменить величиной $\mathscr{F}(x)$, и в результате возникает интеграл

$$\int (dx')\Delta_+(x-x', M^2) = \frac{1}{M^2}. \tag{9.20}$$

Тогда член действия можно будет представить функцией Лагранжа, которая равна

$$8\alpha^2 \int\limits_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM^2}{(M^2)^3}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\left(a+\frac{3}{2}b\right)(M^2)[\mathscr{F}(x)]^2 =$$
$$= \int\limits_0^1 dv v^2(1-v^2)\left(a+\frac{3}{2}b\right)\frac{\alpha^2}{m^4}[\mathscr{F}(x)]^2. \tag{9.21}$$

Поскольку

$$\int\limits_0^1 dv v^2(1-v^2)\,a = \frac{2}{45}, \qquad \int\limits_0^1 dv v^2(1-v^2)\,b = \frac{1}{45}, \tag{9.22}$$

коэффициент при $(\alpha^2/m^4)\mathscr{F}^2$ оказывается равным 7/90 в согласии с соответствующей частью функции Лагранжа, фигурирующей в формуле (8.73). Заметим, что исходное требование рассматривать лишь случай рассеяния вперед, которое фактически представляет собой условие, накладываемое на импульс, передаваемый в процессе столкновения, в данном пределе малых импульсов перестает быть ограничением на угол рассеяния.

Выбрав параллельные поляризации, мы получаем один из примеров, когда векторы поляризации фотонов не меняются в процессе рассеяния. Другой пример такого рода дают нам перпендикулярные поляризации начальных фотонов и конечных фотонов:

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1' = 0, \\ \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2' = 1. \end{gathered} \tag{9.23}$$

В этом случае величина (9.10) равна

$$I = \frac{1}{8\pi}\left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\frac{1}{2}b, \tag{9.24}$$

а соответствующая ей комбинация полей имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(x) &= \mathbf{E}_1(x)\cdot\mathbf{H}_1(x) = \\ &= -\sum iJ^*_{k_1\lambda_1} iJ^*_{k_1'\lambda_1'}(d\omega_{k_1}\,d\omega_{k_1'})^{1/2}\exp\left[-i(k_1+k_1')x\right]\times \\ &\times\frac{1}{2}\left[k_1^0\mathbf{e}_{k_1\lambda_1}\cdot\mathbf{k}_1'\times\mathbf{e}_{k_1'\lambda_1'} + k_1^{0\prime}\mathbf{e}_{k_1'\lambda_1'}\cdot\mathbf{k}_1\times\mathbf{e}_{k_1\lambda_1}\right]. \end{aligned} \tag{9.25}$$

Фигурирующий здесь множитель общего вида, который составлен из векторов поляризации, при рассматриваемых условиях сводится к

$$\frac{1}{2}M\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1' = \pm\frac{1}{4}M^2, \tag{9.26}$$

где знаки $\pm$ определяются конкретной ориентацией взаимно перпендикулярных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_1'$. Но, поскольку векторы поляризации не изменяются в процессе рассеяния, тот же самый знак войдет и в $\mathcal{G}_2(x')$. Поэтому в данном случае вакуумная амплитуда (9.4) оказывается равной

$$\begin{aligned} i\alpha^2\int dM^2\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\frac{16}{(M^2)^2}\frac{1}{2}b(M^2)\int(dx)(dx')\times \\ \times\mathcal{G}_1(x)\Delta_+(x-x',M^2)\mathcal{G}_2(x'), \end{aligned} \tag{9.27}$$

а соответствующее выражение для действия имеет вид

$$4\alpha^2\int_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^2}{(M^2)^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}b(M^2)\int(dx)(dx')\mathcal{G}(x)\Delta_+(x-x',M^2)\mathcal{G}(x'). \tag{9.28}$$

В пределе слабо переменных полей возникает член с функцией Лагранжа

$$\begin{aligned} 4\alpha^2\int_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^2}{(M^2)^3}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}b(M^2)\left[\mathcal{G}(x)\right]^2 = \\ = \frac{1}{2}\int_0^1 dv\,v^2(1-v^2)\,b\frac{\alpha^2}{m^4}\left[\mathcal{G}(x)\right]^2 = \frac{1}{90}\frac{\alpha^2}{m^4}\left[\mathcal{G}(x)\right]^2, \end{aligned} \tag{9.29}$$

также согласующийся с соответствующим слагаемым в выражении (8.73).

Теперь, когда путем исследования частных ориентаций векторов поляризации установлена связь с результатами предельного случая низких частот, что можно сказать об общей комбинации векторов поляризации, фигурирующей в формуле (9.10)? Слагаемое с коэффициентом a весьма просто представляется в калибровочно-инвариантной форме, так как множитель в произведении $\mathcal{F}_1(x)\mathcal{F}_2(x')$, составленный из векторов поляризации, равен

$$\left(\frac{1}{4}M^2\right)^2 \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2'. \tag{9.30}$$

Более же сложную комбинацию с коэффициентом b в общем случае не удается выразить через произведения двух скаляров $\mathcal{F}_1(x)\mathcal{F}_2(x')$ и $\mathcal{G}_1(x)\mathcal{G}_2(x')$. Приходится использовать также и тензор

$$F^2(x)^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha}(x)F_\alpha{}^\nu(x). \tag{9.31}$$

Далее,

$$F_1^2(x)^{\mu\nu}F_2^2(x')_{\mu\nu} = \sum iJ^*_{k_1\lambda_1}iJ^*_{k_1'\lambda_1'}iJ_{k_2\lambda_2}iJ_{k_2'\lambda_2'}\times$$
$$\times(d\omega_{k_1}\ldots d\omega_{k_2'})^{1/2}(f_{k_1\lambda_1})^{\mu\alpha}(f_{k_1'\lambda_1'})_\alpha{}^\nu(f_{k_2\lambda_2})_{\mu\beta}(f_{k_2'\lambda_2'})^\beta{}_\nu, \tag{9.32}$$

где с точностью до компенсирующихся множителей $\pm i$

$$(f)^{\mu\nu} = k^\mu e^\nu - k^\nu e^\mu. \tag{9.33}$$

Проводя вычисления в системе центра масс и ограничиваясь рассеянием вперед, мы на самом деле для поляризационного фактора, входящего в формулу (9.32), получим

$$\frac{1}{8}M^4(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2). \tag{9.34}$$

Как мы уже видели, в двух случаях, в которых поляризация не изменяется, тензорную комбинацию можно заменить скалярами:

$$F_1^2(x)^{\mu\nu}F_2^2(x')_{\mu\nu} \to \begin{cases} 6\mathcal{F}_1(x)\mathcal{F}_2(x') & \text{(параллельн.)},\\ 2\mathcal{G}_1(x)\mathcal{G}_2(x') & \text{(перпендикулярн.)}.\end{cases} \tag{9.35}$$

Тогда искомый дополнительный член дается разностью

$$F_1^2(x)^{\mu\nu}F_2^2(x')_{\mu\nu} - 6\mathcal{F}_1(x)\mathcal{F}_2(x') - 2\mathcal{G}_1(x)\mathcal{G}_2(x'). \tag{9.36}$$

Казалось бы, мы должны добавить выражение, получаемое путем пространственно-временной экстраполяции этой связи, к уже известным нам выражениям, задаваемым формулами (9.19) и (9.28). Но тогда изменится статическое взаимодействие. Это вытекает из того, что если x' положить равным x, то величина (9.36), записанная в унифицированной форме, не будет равняться нулю:

$$\mathrm{Sp}(F^4)-6\mathcal{F}^2-2\mathcal{G}^2=2(\mathcal{F}^2+\mathcal{G}^2)\neq 0. \tag{9.37}$$

Надлежащая процедура должна быть совершенно очевидной. Статическое взаимодействие дает условие нормировки для более общих расчетов. Чтобы избежать изменений в уже полученных правильных результатах, пространственно-временну́ю экстраполяцию вклада, содержащего разность (9.36), следует проводить с дополнительным контактным членом. Его роль состоит в том, чтобы исключить этот вклад при низких частотах. Возьмем

$$\Delta_+(x-x',M^2)-\frac{1}{M^2}\delta(x-x')=\frac{1}{M^2}\partial^2\Delta_+(x-x',M^2). \tag{9.38}$$

Получаемое таким способом полное выражение для действия, записанное в импульсном пространстве, имеет вид

$$\begin{aligned} W_{04}=4\alpha^2\int\limits_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^2}{(M^2)^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2+M^2-i\varepsilon}\times\\ \times\Big[(2a+3b)(M^2)\mathcal{F}(-k)\mathcal{F}(k)+b(M^2)\mathcal{G}(-k)\mathcal{G}(k)-\\ -\frac{1}{2}b(M^2)\frac{k^2}{M^2}(F^2(-k)^{\mu\nu}F^2(k)_{\mu\nu}-\\ -6\mathcal{F}(-k)\mathcal{F}(k)-2\mathcal{G}(-k)\mathcal{G}(k))\Big], \end{aligned} \tag{9.39}$$

или, в иной форме,

$$\begin{aligned} W_{04}=\frac{1}{90}\frac{\alpha^2}{m^4}\int\frac{dk}{(2\pi)^4}[7\mathcal{F}(-k)\mathcal{F}(k)+\mathcal{G}(-k)\mathcal{G}(k)]-\\ -4\alpha^3\int\limits_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^3}{(M^2)^3}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{k^2}{k^2+M^2-i\varepsilon}\times\\ \times\Big[2a(M^2)\mathcal{F}(-k)\mathcal{F}(k)+\frac{1}{2}b(M^2)F^2(-k)^{\mu\nu}F^2(k)_{\mu\nu}\Big]. \end{aligned} \tag{9.40}$$

Тензорную комбинацию можно переписать также как

$$\begin{aligned} F^2(-k)^{\mu\nu}F^2(k)_{\mu\nu}=4\mathcal{F}(-k)\mathcal{F}(k)+\frac{1}{4}(F^{\varkappa\lambda}F^{\mu\nu})(-k)(F_{\varkappa\lambda}F_{\mu\nu})(k)+\\ +\frac{1}{4}({}^*F^{\varkappa\lambda}F^{\mu\nu})(-k)(F_{\varkappa\lambda}{}^*F_{\mu\nu})(k). \end{aligned} \tag{9.41}$$

Тогда соответствующий член в формуле (9.39) примет вид

$$\begin{aligned} F^2(-k)^{\mu\nu}F^2(k)_{\mu\nu}-6\mathcal{F}(-k)\mathcal{F}(k)-2\mathcal{G}(-k)\mathcal{G}(k)=\\ =\frac{1}{4}(F^{\varkappa\lambda}F^{\mu\nu})(-k)(F_{\varkappa\lambda}F_{\mu\nu})(k)-2\mathcal{F}(-k)\mathcal{F}(k)+\\ +\frac{1}{4}({}^*F^{\varkappa\lambda}F^{\mu\nu})(-k)(F_{\varkappa\lambda}{}^*F_{\mu\nu})(k)-2\mathcal{G}(-k)\mathcal{G}(k). \end{aligned} \tag{9.42}$$

Подчеркнем, что наличие в формуле (9.39) дополнительного сомножителя $-k^2/M^2$ не обязательно с точки зрения существования спектрального интеграла. Его наличие диктуется исключительно условием нормировки, накладываемым при низких частотах.

В случае заряженных частиц со спином $^1/_2$ все подобные явления фотон-фотонного рассеяния можно исследовать с применением одного из двух методов расчета. Первый из них исходит из выражения (8.6) для вакуумной амплитуды, а второй основывается на сходстве связей в случаях спина 0 и спина $^1/_2$. Из сравнения (8.36) и (8.43) можно заключить, что после подстановки $\Pi^2 \to \Pi^2 - eq\sigma F$ и добавления множителя $-^1/_2$ величина $W(A)_{\text{спин } 0}$ переходит в $W(A)_{\text{спин } 1/2}$. При этом считается, что след берется также и по спинорным индексам. Второй метод более экономен, так как большая часть вычислений оказывается одинаковой при обоих значениях спина. Вакуумная амплитуда, получаемая таким способом из выражения (9.2), отвечающего спину 0, равна

$$-\frac{1}{4}\operatorname{Sp}[(eq(2pA_1+\sigma F_1)\Delta_+ eq(2pA_1+\sigma F_1)-(eqA_1)^2)\Delta_+ \times$$
$$\times(eq(2pA_2+\sigma F_2)\Delta_+ eq(2pA_2+\sigma F_2)-(eqA_2)^2)\Delta_+]. \qquad (9.43)$$

Вычисление ее спиновой части упрощается, если написать

$$\sigma F = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H} + \gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{E} = -(\gamma_5\partial_0 + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}, \qquad (9.44)$$

где использованы формулы для напряженностей поля в радиационной калибровке, вдали от источников. Если сохранить для вакуумной амплитуды представление (9.4), то соответствующее выражение для $I_{\text{спин } 1/2}$ мы получим, введя спинорный оператор $-^1/_2\operatorname{Sp}$ и осуществив следующие подстановки:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{p} &\to \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{p} - \frac{1}{4}M(i\gamma_5+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_1,\\
-\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{p}' &\to -\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{p}' - \frac{1}{4}M(i\gamma_5-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_1',\\
\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{p} &\to \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{p} + \frac{1}{4}M(i\gamma_5+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_2,\\
-\mathbf{e}_2'\cdot\mathbf{p}' &\to -\mathbf{e}_2'\cdot\mathbf{p}' + \frac{1}{4}M(i\gamma_5-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_2',
\end{aligned} \qquad (9.45)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, фиксирующий выделенное направление (9.7). Заметим также, что

$$(i\gamma_5 \pm \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}\,(i\gamma_5 \mp \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) \qquad (9.46)$$

и

$$(i\gamma_5 \pm \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})^2 = 2\,(1 \pm i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}). \qquad (9.47)$$

Входящие сюда следы по спиновым индексам таковы:

$$\frac{1}{4}\operatorname{Sp}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}'=\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}', \tag{9.48}$$

$$\frac{1}{4}\operatorname{Sp}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}'\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}''\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}'''=\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'\mathbf{e}''\cdot\mathbf{e}'''-\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}''\mathbf{e}'\cdot\mathbf{e}'''+\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'''\mathbf{e}'\cdot\mathbf{e}''. \tag{9.49}$$

Последний из них можно получить, приводя произведения матриц σ или последовательно переставляя по одному множителю под знаком следа слева направо. В результате таких выкладок будем иметь

$$I_{\text{спин }1/2}=-2I_{\text{спин }0}+\frac{1}{8\pi}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left[c\left(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2'-\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2'\right)+2d\left(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2'\right)\right], \tag{9.50}$$

где

$$c(M^2)=\int_{-1}^{1}dz\frac{1}{1-v^2z^2}=\frac{1}{v}\ln\frac{1+v}{1-v},$$
$$d(M^2)=\int_{-1}^{1}dz\frac{v^2(1-z^2)}{(1-v^2z^2)^2}=\frac{1}{2}(1+v^2)c(M^2)-1. \tag{9.51}$$

Отметим также, что

$$\int_0^1 dv v^2(1-v^2)c=\frac{1}{3}. \tag{9.52}$$

Это единственный интеграл, который требуется при анализе низкочастотных пределов в случаях параллельных и перпендикулярных поляризаций, не изменяющихся в процессе рассеяния. При этом множители, входящие в формулы (9.21) и (9.29), заменяются следующим образом:

$$\int_0^1 dv v^2(1-v^2)\left(a+\frac{3}{2}b\right)\to$$
$$\to-2\int_0^1 dv v^2(1-v^2)\left(a+\frac{3}{2}b\right)+\int_0^1 dv v^2(1-v^2)c, \tag{9.53}$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 dv v^2(1-v^2)b\to-\int_0^1 dv v^2(1-v^2)b+\int_0^1 dv v^2(1-v^2)c,$$

так что соответствующие численные значения оказываются равными

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^2:&\quad \frac{7}{90}\to-\frac{7}{45}+\frac{1}{3}=2\times\frac{4}{45},\\ \mathscr{G}^2:&\quad \frac{1}{90}\to-\frac{1}{45}+\frac{1}{3}=2\times\frac{7}{45}. \end{aligned} \tag{9.54}$$

Они действительно совпадают с коэффициентами в формуле (8.81).

Чтобы провести пространственно-временную экстраполяцию в случае произвольной ориентации векторов поляризации, перепишем две векторные комбинации, фигурирующие в формуле (9.50), следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2'-\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2'=\\ &\qquad=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2'+(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1')\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2'),\\ &2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2')=\\ &\qquad=(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2'+\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2'+\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2)-3\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2'-\\ &\qquad-(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1')\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2'). \end{aligned} \tag{9.55}$$

В первой из них можно узнать поляризационный фактор, входящий в выражение $\mathscr{F}_1(x)\mathscr{F}_2(x')+\mathscr{G}_1(x)\mathscr{G}_2(x')$, а вторая соответствует разности (9.36). Эта последняя не дает вкладов ни в одном из случаев рассеяния без изменения поляризации, и при ее пространственно-временно́й экстраполяции необходимо ввести контактный член, который исключает из данной связи вклад низких частот. Результат таков:

$$\begin{aligned} W_{04,\,\text{спин}\,1/2}&=-2W_{04,\,\text{спин}\,0}+4\alpha^2\int\limits_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^2}{(M^2)^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\times\\ &\times\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2+M^2-i\varepsilon}\Big[2c(M^2)(\mathscr{F}(-k)\mathscr{F}(k)+\mathscr{G}(-k)\mathscr{G}(k))-\\ &-d(M^2)\frac{k^2}{M^2}(F^2(-k)^{\mu\nu}F^2(k)_{\mu\nu}-6\mathscr{F}(-k)\mathscr{F}(k)-2\mathscr{G}(-k)\mathscr{G}(k))\Big]. \end{aligned} \tag{9.56}$$

Его можно представить и в иной форме:

$$\begin{aligned} W_{04,\,\text{спин}\,1/2}&=2W_{04,\,\text{спин}\,0}+\\ &+\frac{1}{3}\frac{\alpha^2}{m^4}\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}(\mathscr{F}(-k)\mathscr{F}(k)+\mathscr{G}(-k)\mathscr{G}(k))-\\ &-4\alpha^2\int\limits_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^2}{(M^2)^3}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{k^2}{k^2+M^2-i\varepsilon}\times\\ &\times[2c(M^2)(\mathscr{F}(-k)\mathscr{F}(k)+\mathscr{G}(-k)\mathscr{G}(k))+\\ &+d(M^2)(F^2(-k)^{\mu\nu}F^2(k)_{\mu\nu}-6\mathscr{F}(-k)\mathscr{F}(k)-2\mathscr{G}(-k)\mathscr{G}(k))]. \end{aligned} \tag{9.57}$$

§ 10. РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА СВЕТЕ III. ДВОЙНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Мы подошли, наконец, к общему случаю фотон-фотонного рассеяния. Чтобы получить требуемую связь, рассмотрим следующую причинную последовательность. Обобщенный фотонный источник J_2 испускает пару заряженных частиц. Каждая из них независимо от другой отклоняется обобщенными фотонными источниками J_a и J_b, порождающими пространственно-подобные импульсы, а в конце две эти частицы детектируются обобщенным фотонным источником J_1. Поля, ассоциируемые с четырьмя источниками, не перекрываются, причем в причинной последовательности поле $A_a + A_b$ лежит между A_1 и A_2. Соответственно этому вакуумная амплитуда для частиц со спином 0, получаемая из (8.33), имеет вид

$$\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left[2eqpA_1\Delta_+2eqpA_a\Delta_+2eqpA_b\Delta_+2eqpA_2\Delta_+\right]+(a\leftrightarrow b). \qquad (10.1)$$

Здесь мы приняли во внимание, что каждый из полевых сомножителей, скажем A_1, можно поместить в четыре эквивалентных положения. Согласно нашей причинной последовательности, множители A_a и A_b должны находиться между A_1 и A_2. Характерная особенность такого причинного расположения состоит в том, что все четыре функции распространения описывают реальные частицы. Поля четырех обобщенных источников мы будем записывать в виде

$$A(x)=\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\exp(ikx)\,A(k), \qquad (10.2)$$

а вакуумную амплитуду для рассматриваемого процесса представим как

$$\int\frac{(dk_1)}{(2\pi)^4}\frac{(dk_a)}{(2\pi)^4}\frac{(dk_b)}{(2\pi)^4}\frac{(dk_2)}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\,\delta(k_1+k_a+k_b+k_2)\,e^4I. \qquad (10.3)$$

Фигурирующий здесь скалярный интеграл I обладает следующей структурой:

$$I=\int\left(\prod_1^4 d\omega\right)\left(\prod_1^4 2pA\right)\left(\prod_1^3(2\pi)^4\,\delta\right). \qquad (10.4)$$

Это связано, во-первых, с тем, что имеется четыре инвариантные меры в импульсных пространствах, по числу реальных частиц. Во-вторых, должны входить четыре векторных потенциала, которые описывают действие отвечающих им источников. И, в-третьих, возникают три дельта-функции, что обусловлено сохранением импульса при соответствующих взаимодействиях [четвертая дельта-функция подобного типа уже включена в формулу (10.3)]. Удобнее заменить трехмерные меры в импульсном пространстве четырехмерными:

$$d\omega \to \frac{(dp)}{(2\pi)^3}\,\delta(p^2+m^2), \quad p^0>0, \tag{10.5}$$

а затем, используя дельта-функции, исключить все импульсы частиц, кроме одного. Выбор последнего произволен. Возникающие при этом возможности видны из выражения

$$\begin{aligned} I = \int (dp)\,\delta\Big[\Big(p+\frac{1}{2}k_2\Big)^2+m^2\Big]\,\delta\Big[\Big(-p+\frac{1}{2}k_2\Big)^2+m^2\Big]\times \\ \times\,\delta\Big[\Big(p+\frac{1}{2}k_2+k_a\Big)^2+m^2\Big]\,\delta\Big[\Big(-p+\frac{1}{2}k_2+k_b\Big)^2+m^2\Big]\times \\ \times(2p+k_a-k_b)\,A_1(k_1)\,(2p+k_2+k_a)\,A_a(k_a)\,(2p-k_2-k_b)\,A_b(k_b)\times \\ \times\, 2pA_2(k_2)+(a\leftrightarrow b). \end{aligned} \tag{10.6}$$

Переменная p здесь не является импульсом какой-то частицы; настоящие импульсы частиц входят во всевозможные дельта-функции. Каждый векторный потенциал умножен на сумму импульсов двух соответствующих частиц с надлежащими знаками заряда. Благодаря этому снимается ограничение на векторные потенциалы, накладываемое на них выбором определенной калибровки, позволяющей заменить комбинацию $pA+Ap$ величиной $2pA$.

Четыре дельта-функции, фигурирующие в формуле (10.6), можно записать также в виде

$$\delta(2pk_2)\,\delta\Big(p^2+\frac{1}{4}k_2^2+m^2\Big)\,\delta(2pk_a+k_2k_a+k_a^2)\,\delta(-2pk_b+k_2k_b+k_b^2). \tag{10.7}$$

Они накладывают на p четыре условия, которыми этот вектор определяется (почти) однозначно. Наличие первого сомножителя в (10.7) ведет к тому, что в системе покоя времениподобного вектора k_2, в которой $k_2^0 = M_2$, мы имеем $p^0 = 0$. Второй из них фиксирует абсолютную величину импульса $\mathbf{p}$:

$$|\mathbf{p}|^2=\frac{1}{4}M_2^2-m^2. \tag{10.8}$$

Две оставшиеся дельта-функции дают проекции $\mathbf{p}$ на направления векторов $\mathbf{k}_a$ и $\mathbf{k}_b$, определяющих некоторую плоскость. Абсолютную величину (но не знак) компоненты p, перпендикулярной этой плоскости, можно найти из равенства (10.8). Если она не является действительной, то интеграл оказывается равным нулю. Итак, с точностью до знака вектор p определяется единственным образом. Поэтому весь процесс вычисления величины (10.6) сводится к интегрированию произведения дельта-функций. Этот инвариантный интеграл легко взять, выбрав систему координат так, чтобы векторы $\mathbf{k}_a$ и $\mathbf{k}_b$ лежали в плоскости xy, а вектор $\mathbf{k}_a$

был направлен вдоль оси x:

$$I_0 = \int (dp) \left(\prod_1^4 \delta \right) = \frac{1}{8} \frac{1}{|M_2 k_{ax} k_{by} p_z|}. \tag{10.9}$$

Перепишем этот результат так, чтобы не было никаких указаний на систему координат:

$$I_0 = \frac{1}{8} \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}}, \tag{10.10}$$

где

$$(-\Delta)^{1/2} = |\varepsilon_{\varkappa\lambda\mu\nu} k_2^\varkappa k_a^\lambda k_b^\mu p^\nu|. \tag{10.11}$$

Введя величину $(-\Delta)^{1/2}$, мы предусмотрели возможность представления определителя, входящего в формулу (10.11), в явно инвариантной форме (в виде определителя Грама), для чего достаточно возвести его в квадрат и воспользоваться свойством мультипликативности. Правда, здесь имеется одно опасное место, связанное с индефинитностью метрики Минковского, но эту трудность можно преодолеть, записав все векторы в евклидовой форме ($V_4 = iV^0$). Поскольку тогда в определитель (10.11) явным образом вводится множитель i, мы заключаем, что

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} k_2^2, & k_2 k_a, & k_2 k_b, & k_2 p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p k_2, & p k_a, & p k_b, & p^2 \end{pmatrix}. \tag{10.12}$$

Ниоткуда не следует, однако, что эта формула дает нам самый простой способ построения величины Δ.

Общее выражение для вектора p, удовлетворяющего условию $k_2 p = 0$, таково:

$$p^\mu = a \left(k_a - k_2 \frac{k_2 k_a}{k_2^2} \right)^\mu + b \left(k_b - k_2 \frac{k_2 k_b}{k_2^2} \right)^\mu + c \varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda} k_{a\nu} k_{b\varkappa} k_{2\lambda}. \tag{10.13}$$

Последнее слагаемое здесь дает нам ковариантную запись компоненты p_z. Умножив обе части равенства (10.13) на векторы k_a и k_b, получим уравнения

$$-\frac{1}{2}(k_2 k_a + k_a^2) = a \left(k_a^2 - \frac{(k_2 k_a)^2}{k_2^2} \right) + b \left(k_a k_b - \frac{k_2 k_a k_2 k_b}{k_2^2} \right),$$

$$\frac{1}{2}(k_2 k_b + k_b^2) = a \left(k_a k_b - \frac{k_2 k_a k_2 k_b}{k_2^2} \right) + b \left(k_b^2 - \frac{(k_2 k_b)^2}{k_2^2} \right), \tag{10.14}$$

которыми определяются коэффициенты a и b. Чтобы найти c, возведем обе части равенства (10.13) в квадрат. При этом возникнет комбинация

$$a^2 \left(k_a^2 - \frac{(k_2 k_a)^2}{k_2^2} \right) + 2ab \left(k_a k_b - \frac{k_2 k_a k_2 k_b}{k_2^2} \right) + b^2 \left(k_b^2 - \frac{(k_2 k_b)^2}{k_2^2} \right) =$$
$$= -\frac{1}{2} a (k_2 k_a + k_a^2) + \frac{1}{2} b (k_2 k_b + k_b^2), \tag{10.15}$$

а также

$$(\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}k_{a\nu}k_{b\varkappa}k_{2\lambda})(\varepsilon_{\mu\nu'\varkappa'\lambda'}k_a^{\nu'}k_b^{\varkappa'}k_2^{\lambda'}) = -k_2^2 D, \tag{10.16}$$

где D — определитель, составленный из коэффициентов системы уравнений (10.14):

$$D = \left(k_a^2 - \frac{(k_2k_a)^2}{k_2^2}\right)\left(k_b^2 - \frac{(k_2k_b)^2}{k_2^2}\right) - \left(k_ak_b - \frac{k_2k_ak_2k_b}{k_2^2}\right)^2 =$$

$$= k_a^2k_b^2 - (k_ak_b)^2 - \frac{1}{k_2^2}\left[k_a^2(k_2k_b)^2 + k_b^2(k_2k_a)^2 - 2k_ak_bk_{2k_a}k_2k_b\right]. \tag{10.17}$$

Условие $p_z^2 > 0$, при котором интеграл I_0 отличен от нуля, принимает вид

$$-k_2^2Dc^2 = \frac{1}{2}a(k_2k_a + k_a^2) - \frac{1}{2}b(k_2k_b + k_b^2) - m^2 - \frac{1}{4}k_2^2 > 0 \tag{10.18}$$

(для краткости мы оставили его в нераскрытой форме). Еще один полезный результат можно получить, умножив обе части равенства (10.13) на p_μ. Он воспроизводит выражение, возникающее при возведении (10.13) в квадрат, с той разницей, что член с c^2 заменяется членом, линейным по c. Сравнивая их, приходим к соотношению [которое содержится также и в формуле (10.9)]

$$-\Delta = (k_2^2Dc)^2 = (-k_2^2D)(-k_2^2Dc^2). \tag{10.19}$$

Последняя комбинация включает величины (10.16) и (10.18) и дает нам другой способ вычисления Δ.

В рассматриваемой причинной последовательности имеются только обобщенные фотонные источники, причем импульсы k_1 и k_2 являются времениподобными, а k_a и k_b — пространственно-подобными. Теперь, когда установлен вид соответствующей связи, мы экстраполируем ее на весьма интересный случай, когда $k_1^2 = k_a^2 = k_b^2 = k_2^2 = 0$. Проиллюстрируем рассмотренные выше алгебраические соотношения с учетом тех кинематических упрощений, которые свойственны реальным фотонам. В качестве двух переменных, необходимых при анализе фотон-фотонного рассеяния, удобно выбрать

$$\begin{aligned} M_a^2 &= -(k_2 + k_a)^2 \to -2k_2k_a, \\ M_b^2 &= -(k_2 + k_b)^2 \to -2k_2k_b, \end{aligned} \tag{10.20}$$

где вторая форма записи отвечает случаю реальных фотонов. При этом условии получаем

$$\begin{aligned} &-k_2^2D \to -\frac{1}{4}M_a^2M_b^2(M_a^2 + M_b^2), \\ &a \to -\frac{1}{2}\frac{M_b^2}{M_a^2+M_b^2}, \quad b \to \frac{1}{2}\frac{M_a^2}{M_a^2+M_b^2}, \end{aligned} \tag{10.21}$$

где мы воспользовались равенством

$$k_1^2 = -(k_a + k_b + k_2)^2 \to 0, \tag{10.22}$$

из которого можно заключить, что

$$2k_a k_b \to M_a^2 + M_b^2. \tag{10.23}$$

Критерий положительности (10.18) теперь принимает вид

$$\frac{1}{4}\frac{M_a^2 M_b^2}{M_a^2 + M_b^2} > m^2, \tag{10.24}$$

а из (10.19) получаем

$$\Delta = \frac{1}{4} M_a^2 M_b^2 (M_a^2 + M_b^2)\left(\frac{1}{4}\frac{M_a^2 M_b^2}{M_a^2 + M_b^2} - m^2\right). \tag{10.25}$$

Конечно, к тому же результату можно прийти, исходя из определителя (10.12),

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}M_a^2 & -\frac{1}{2}M_b^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}M_a^2 & 0 & \frac{1}{2}(M_a^2 + M_b^2) & \frac{1}{4}M_a^2 \\ -\frac{1}{2}M_b^2 & \frac{1}{2}(M_a^2 + M_b^2) & 0 & -\frac{1}{4}M_b^2 \\ 0 & \frac{1}{4}M_a^2 & -\frac{1}{4}M_b^2 & -m^2 \end{pmatrix}, \tag{10.26}$$

но выкладки при этом оказываются более громоздкими. Если ввести переменные

$$u_{a,\,b} = 1 - \frac{4m^2}{M_{a,\,b}^2}, \tag{10.27}$$

которые изменяются от 0 до 1, то неравенство (10.24) примет вид

$$u_a + u_b > 1, \tag{10.28}$$

а выражение для Δ будет таким:

$$\Delta = (4m^4)^2 \frac{u_a + u_b - 1}{(1 - u_a)^2 (1 - u_b)^2}. \tag{10.29}$$

Комбинации импульсов, входящие в формулу (10.20),

$$\begin{aligned} K_a &= k_2 + k_a = -(k_1 + k_b), \\ K_b &= k_2 + k_b = -(k_1 + k_a), \end{aligned} \tag{10.30}$$

соответствуют двум разным способам рассмотрения причинной связи между источниками через двухчастичные обмены ($M_{a,b} > 2m$). Источники $J_2 + J_a$ обмениваются парой реальных частиц с источниками $J_1 + J_b$, а $J_2 + J_b$ обмениваются парой частиц с $J_1 + J_a$. Введем эти импульсы K_a и K_b явным образом, включив единичный множитель

$$1 = \int (dK_a)(dK_b)\,\delta(K_a - k_2 - k_a)\,\delta(K_b - k_2 - k_b) =$$
$$= \int (d\xi_a)(d\xi_b)\frac{(dK_a)}{(2\pi)^4}\frac{(dK_b)}{(2\pi)^4}\exp[i(K_a - k_2 - k_a)\xi_a] \times$$
$$\times \exp[i(K_b - k_2 - k_b)\xi_b]. \tag{10.31}$$

Объединив его с дельта-функцией полного импульса,

$$(2\pi)^4\,\delta(k_1 + k_a + k_b + k_2) = \int (dx)\exp[i(k_1 + k_a + k_b + k_2)x], \tag{10.32}$$

получим

$$(2\pi)^4\,\delta(k_1 + k_a + k_b + k_2) =$$
$$= \int (dx)(d\xi_a)(d\xi_b)\frac{dM_a^2}{2\pi}\frac{dM_b^2}{2\pi}d\omega_a\,d\omega_b\exp(iK_a\xi_a)\exp(iK_b\xi_b) \times$$
$$\times \exp(ik_1x)\exp[ik_a(x - \xi_a)]\exp[ik_b(x - \xi_b)]\exp[ik_2(x - \xi_a - \xi_b)]. \tag{10.33}$$

Причинный характер этой формы становится очевидным из рассмотрения выражения

$$\int \frac{(dk_1)}{(2\pi)^4}\ldots\frac{(dk_2)}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\,\delta(k_1 + \ldots + k_2)A_1(k_1)\ldots A_2(k_2) =$$
$$= -\int \frac{dM_a^2}{2\pi}\frac{dM_b^2}{2\pi}\int (dx)(d\xi_a)(d\xi_b)A_1(x)A_a(x - \xi_a) \times$$
$$\times A_b(x - \xi_b)A_2(x - \xi_a - \xi_b)\left[i\int d\omega_a\exp(iK_a\xi_a)\right]\left[i\int d\omega_b\exp(iK_b\xi_b)\right]. \tag{10.34}$$

В соответствии с причинной упорядоченностью полей векторы ξ_a и ξ_b времениподобны, а их временны́е компоненты положительны. Мы видим, что в (10.34) входят причинные выражения для функций распространения

$$\Delta_+(\xi_{a,b}, M_{a,b}^2) = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{\exp(ik\xi_{a,b})}{k^2 + M_{a,b}^2 - i\varepsilon} =$$
$$= i\int d\omega_{a,b}\exp(iK_{a,b}\xi_{a,b}), \quad \xi_{a,b}^0 > 0. \tag{10.35}$$

Здесь еще остается учесть другие детали, в том числе вопросы калибровочной инвариантности и контактных членов, но полученный результат составляет основу для процедуры пространственно-временно́й экстраполяции. Чтобы представить его в более удобном виде, вернемся к четырехмерному импульсному пространству и запишем выражение, получаемое путем пространственно-временно́й экстраполяции амплитуды (10.34), в виде двойной спектральной формы

$$-\int \frac{(dk_1)}{(2\pi)^4} \ldots \frac{(dk_2)}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k_1 + \ldots + k_2) A_1(k_1) \ldots A_2(k_2) \times$$
$$\times \int \frac{dM_a^2}{2\pi} \frac{dM_b^2}{2\pi} \frac{1}{(k_2+k_a)^2 + M_a^2 - i\varepsilon} \frac{1}{(k_2+k_b)^2 + M_b^2 - i\varepsilon}. \qquad (10.36)$$

Очень полезно применить полученные нами сведения к упрощенной задаче для скалярного поля и сравнить некаузальный расчет связи, аналогичной (10.1), с вычислениями, основанными на двойной спектральной форме. Соответствующие выкладки будут проделаны только в пределе, когда импульсы всех фотонов стремятся к нулю. Термин «некаузальный расчет» относится к непосредственному использованию функции распространения в ее четырехмерной записи в отличие от каузального метода вычислений, приводящего к двойной спектральной форме. Двум этим альтернативам отвечают левая и правая части равенства

$$\int \frac{(dp)}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2+m^2-i\varepsilon)^4} = -\int \frac{dM_a^2}{2\pi} \frac{dM_b^2}{2\pi} \frac{1}{M_a^2} \frac{1}{M_b^2} \frac{1}{8} \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}}. \qquad (10.37)$$

Левую часть можно вычислить разными способами. Во-первых, ее можно преобразовать к евклидовой метрике ($p_0 = ip_4$), а затем выполнить однократное интегрирование по радиальной составляющей импульса и учесть, что площадь поверхности единичной сферы в четырехмерном пространстве равна $2\pi^2$. В итоге получим

$$i\frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{{}^1\!/_2 p^2\, dp^2}{(p^2+m^2)^4} = i\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{6m^4}. \qquad (10.38)$$

Можно поступить иначе, основываясь на представлении типа (8.34) и используя его здесь в форме

$$\frac{1}{(p^2+m^2-i\varepsilon)^4} = \frac{1}{3!} \int_0^\infty ds s^3 \exp[-is(p^2+m^2)]. \qquad (10.39)$$

Применяя затем формулу (8.57), будем иметь

$$\int \frac{(dp)}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2+m^2-i\varepsilon)^4} = -i\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{6} \int_0^\infty ds s \exp(-ism^2) = i\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{6m^4}. \qquad (10.40)$$

Если обратиться к правой части равенства (10.37), то выяснится один важный аспект экстраполяционной процедуры. В случае причинной последовательности, приводящей к интегралу (10.9), (10.10), величина Δ обязательно отрицательна. Но, как видно из формулы (10.25), после экстраполяции на случай реальных фотонов эта величина становится положительной. Возникает вопрос, какой квадратный корень из —1 следует выбрать, вычисляя $(-\Delta)^{1/2}$. Сравнение двух частей равенства (10.37) показывает, что

$$(-\Delta)^{1/2}=i\Delta^{1/2}. \tag{10.41}$$

Эта проверка будет завершена, если мы убедимся в численном совпадении правой и левой частей равенства (10.37). В обозначениях (10.27) нам следует установить, что

$$\frac{1}{8}\int\frac{du_a\,du_b}{(u_a+u_b-1)^{1/2}}=\frac{1}{6}, \tag{10.42}$$

где u_a и u_b пробегают значения в интервале от 0 до 1 и удовлетворяют условию положительности (10.28), которое здесь содержится в знаменателе интеграла. Проводя последовательные интегрирования, получим

$$\frac{1}{4}\int du_a d\,(u_a+u_b-1)^{1/2}=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 du_a u_a^{1/2}=\frac{1}{6}, \tag{10.43}$$

что и требовалось доказать.

Теперь нам нужно перейти к векторным потенциалам, входящим в качестве сомножителей в выражение (10.6), и попытаться записать это выражение в такой форме, в которой калибровочная инвариантность выступала бы в явном виде. При причинном расположении источников это условие выполняется, но необходимо, чтобы оно сохранялось и после пространственно-временной экстраполяции. Поскольку фотон-фотонное рассеяние интересует нас лишь методологически, мы будем избегать сложностей, связанных с произвольными поляризациями. Их преодоление вознаграждается в весьма малой степени, а потому рассмотрим лишь простейший случай, когда все векторы поляризации параллельны друг другу и перпендикулярны плоскости рассеяния. В такой ситуации вторая группа сомножителей в формуле (10.6), включающая векторные потенциалы, принимает вид

$$(2p_z)^4\prod_1^4 A=\left(\frac{M_a^2M_b^2}{M_a^2+M_b^2}-4m^2\right)^2 A_1A_aA_bA_2. \tag{10.44}$$

Входящие сюда функции представляют собой единственные отличные от нуля компоненты векторов, а именно компоненты, перпендикулярные плоскости рассеяния. Чтобы ввести напряженности поля, рассмотрим произведение

$$F^{\mu\lambda}(k)\,F_\lambda{}^\nu(k')=[ik^\mu A^\lambda(k)-ik^\lambda A^\mu(k)]\,[ik'_\lambda A^\nu(k')-ik'^\nu A_\lambda(k')]=$$
$$=kk'A^\mu(k)\,A^\nu(k')+k^\mu k'^\nu A(k)\,A(k'), \tag{10.45}$$

где мы положим $k'A\ (k)$ и $kA\ (k')$ равными нулю, что соответствует случаю, когда пространственные составляющие векторов поляризации перпендикулярны плоскости рассеяния. Один из способов использования этого соотношения для представления произведения четырех векторных потенциалов в виде калибровочно-инвариантного выражения состоит в том, что мы записываем

$$(F\ (k)\ F\ (k'))\ (F\ (k'')\ F\ (k''')) = \\ = (kk')\ (k''k''')\ A\ (k)\ A\ (k')\ A\ (k'')\ A\ (k'''), \tag{10.46}$$

где введено обозначение

$$(F\ (k)\, F\, (k')) = \frac{1}{2} F^{\mu\nu}(k)\, F_{\mu\nu}(k'). \tag{10.47}$$

В зависимости от того, как спариваются напряженности поля, одно и то же произведение четырех однокомпонентных потенциалов допускает разные калибровочно-инвариантные интерпретации. Вот соответствующие примеры:

$$A_1A_aA_bA_2 = \frac{(F_1F_a)\,(F_bF_2)}{\left(\frac{1}{2}M_b^2\right)^2} = \frac{(F_1F_b)\,(F_aF_2)}{\left(\frac{1}{2}M_a^2\right)^2} = \\ = \frac{(F_1F_2)\,(F_aF_b) - (F_1F_a)\,(F_bF_2) - (F_1F_b)\,(F_aF_2)}{\frac{1}{2}M_a^2M_b^2}. \tag{10.48}$$

При исходном причинном расположении источников все эти представления совпадают, но после пространственно-временно́й экстраполяции они оказываются неодинаковыми. Три комбинации полей, фигурирующие в формуле (10.48), всегда могут быть представлены в виде произведения $A_1 \ldots A_2$, взятого с импульсным множителем, равным в этих трех случаях

$$\left[-\frac{(k_2+k_b)^2}{M_b^2}\right]^2, \quad \left[-\frac{(k_2+k_a)^2}{M_a^2}\right]^2 \quad \text{и} \quad \left[-\frac{(k_2+k_a)^2}{M_a^2}\right]\left[-\frac{(k_2+k_b)^2}{M_b^2}\right]. \tag{10.49}$$

Применительно к двойной спектральной форме (10.36) все эти возможные варианты различаются простыми спектральными формами, примером чему служит соотношение

$$\frac{\left(\frac{k^2}{M^2}\right)^2}{(k^2+M^2)\,(k'^2+M'^2)} - \frac{\frac{k^2}{M^2}\,\frac{k'^2}{M'^2}}{(k^2+M^2)\,(k'^2+M'^2)} = \\ = \frac{k^2}{M^2}\left[\frac{1}{M^2}\,\frac{1}{k'^2+M'^2} - \frac{1}{M'^2}\,\frac{1}{k^2+M^2}\right]. \tag{10.50}$$

Элемент произвола, возникающий при формулировке калибровочной инвариантности, указывает на возможное присутствие дополнительных простых спектральных форм, а значит, требуется некоторая добавочная физическая информация. Такую информацию мы почерпнем из простой спектральной формы, соответствующей рассеянию вперед, которая была получена в предыдущем параграфе.

Собрав воедино имеющиеся у нас на данный момент результаты, мы можем выражение для действия записать следующим образом:

$$W_{04}=\alpha^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\,\ldots\,\frac{(dk''')}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\,\delta(k+\ldots+k''')\,A(k)\,\ldots\,A(k''')\times$$
$$\times\Bigg[\int\frac{dM_a^2}{M_a^2}\frac{dM_b^2}{M_b^2}\varphi_2(M_a^2,\ M_b^2)\frac{(k'+k''')^2}{(k'+k''')^2+M_a^2-i\varepsilon}\frac{(k''+k''')^2}{(k''+k''')^2+M_b^2-i\varepsilon}+$$
$$+\int\frac{dM^2}{(M^2)^2}\varphi_1(M^2)\frac{[(k'+k''')^2]^2}{(k'+k''')^2+M^2-i\varepsilon}\Bigg],\qquad(10.51)$$

где

$$\text{спин } 0\colon\quad \varphi_2(M_a^2,\ M_b^2)=\frac{1}{8\Delta^{1/2}}\left(\frac{M_a^2M_b^2}{M_a^2+M_b^2}-4m^2\right)^2=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{(1-u_a)(1-u_b)(u_a+u_b-1)^{3/2}}{(2-u_a-u_b)^2}.\qquad(10.52)$$

Мы предпочли воспользоваться наиболее симметричным из калибровочно-инвариантных представлений (10.48) и (10.49). Видно также, что благодаря симметрии по k', k'' и симметриям, вытекающим из равенств

$$(k'+k''')^2=(k+k'')^2,\quad (k''+k''')^2=(k+k')^2,\qquad(10.53)$$

описание исходного причинного процесса содержится в восьми эквивалентных членах (10.51). Однократный спектральный интеграл с неизвестной еще весовой функцией $\varphi_1(M^2)$ по своей структуре совпадает с выражением (9.19), если записать последнее в импульсных переменных и заменить в нем напряженности поля векторными потенциалами согласно равенству

$$(F(k)\,F(k'))=-\frac{1}{2}(k+k')^2A(k)\,A(k').\qquad(10.54)$$

Импульсы четырех фотонов удовлетворяют соотношению

$$(k+k''')^2+(k'+k''')^2+(k''+k''')^2=0.\qquad(10.55)$$

В случае рассеяния вперед одна из этих трех комбинаций обращается в нуль, а две другие равны по величине, но противоположны по знаку. Это приводит к следующей эффективной подстановке:

$$\frac{(k'+k''')^2}{(k'+k''')^2+M_a^2-i\varepsilon}\frac{(k''+k''')^2}{(k''+k''')^2+M_b^2-i\varepsilon}\to$$
$$\to-\frac{1}{M_a^2+M_b^2}\frac{[(k'+k''')^2]^2}{(k'+k''')^2+M_a^2-i\varepsilon},\qquad(10.56)$$

в справедливости которой можно убедиться, если сравнить три члена, которые получаются путем симметризации входящих сюда величин по k, k', k'', используя при этом симметрию φ_2 по M_a^2 и M_b^2. Отождествляя получающуюся простую спектральную форму с (9.19), получаем

$$\varphi_1(M^2) - M^2 \int \frac{dM'^2}{M'^2} \frac{\varphi_2(M^2, M'^2)}{M^2 + M'^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\left(a + \frac{3}{2}b\right)(M^2) =$$
$$= \frac{1}{4}v + \frac{3}{8}v(1-v^2) + \frac{1}{4}(1-v^2)\left[\frac{3}{4}(1-v^2) - 1\right]\ln\frac{1+v}{1-v}. \quad (10.57)$$

После соответствующего интегрирования будем иметь ($u = v^2$)

$$\text{спин } 0\colon \quad \varphi_1(M^2) = \frac{1}{2}v + (1-v^2)\left(2v - \ln\frac{1+v}{1-v}\right). \quad (10.58)$$

Тем самым полностью определяются спектральные формы, фигурирующие в формуле (10.51).

Чтобы прийти к соответствующим результатам для частиц со спином $^1/_2$, нам достаточно произвести подстановку

$$\prod_1^4 2pA \to -\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left[(2pA_1 + \sigma F_1)(2pA_a + \sigma F_a)\times\right.$$
$$\left.\times(2pA_2 + \sigma F_2)(2pA_b + \sigma F_b)\right]. \quad (10.59)$$

Порядок перемножения здесь [формула (10.1)] соответствует причинной последовательности. Для правой части соотношения (10.59) имеем

$$-2\left[(2p_z)^4 A_1 \ldots A_2 + (2p_z)^2 T_1 + T_2\right], \quad (10.60)$$

где

$$T_1 = \sum AA\frac{1}{4}\operatorname{Sp}\sigma F\sigma F = A_1A_a(F_2F_b) + A_2A_b(F_1F_a) +$$
$$+ A_1A_b(F_2F_a) + A_2A_a(F_1F_b) + A_1A_2(F_aF_b) + A_aA_b(F_1F_2) \quad (10.61)$$

и

$$T_2 = \frac{1}{4}\operatorname{Sp}(\sigma F_1\sigma F_a\sigma F_2\sigma F_b) =$$
$$= (F_1F_a)(F_2F_b) + (F_1F_b)(F_2F_a) - (F_1F_2)(F_aF_b). \quad (10.62)$$

Последнее равенство, аналогичное равенству (9.49), относится к той конкретной рассматриваемой нами ситуации, когда все электрические поля перпендикулярны магнитным полям. В условиях причинной упорядоченности величина T_1 дается выражением

$$T_1 = -\left[(k_2 + k_a)^2 + (k_2 + k_b)^2 + (k_a + k_b)^2\right] A_1 \ldots A_2 = 0, \quad (10.63)$$

тогда как

$$T_2 = \frac{1}{4}\left[((k_2+k_a)^2)^2 + ((k_2+k_b)^2)^2 - ((k_a+k_b)^2)^2\right] A_1 \ldots A_2 =$$
$$= -\frac{1}{2} M_a^2 M_b^2 A_1 \ldots A_2. \qquad (10.64)$$

Соответственно этому весовой множитель двойной спектральной формы можно получить из весового множителя, отвечающего частицам со спином 0, путем подстановки

$$(2p_z)^4 \to -2\,(2p_z)^4 + M_a^2 M_b^2, \qquad (10.65)$$

так что

$$\text{спин } \frac{1}{2}: \quad \varphi_2(M_a^2,\ M_b^2) = \frac{1}{2}(u_a+u_b-1)^{-1/2} -$$
$$- \frac{(1-u_a)(1-u_b)(u_a+u_b-1)^{3/2}}{(2-u_a-u_b)^2}. \qquad (10.66)$$

Чтобы закончить анализ, нужно воспользоваться информацией, соответствующей случаю рассеяния вперед. Метод такой же, как и при выводе соотношения (10.57), но удобнее применять его к комбинациям

$$\varphi_1'(M^2) = \varphi_1(M^2)_{\text{спин } 1/2} + 2\varphi_1(M^2)_{\text{спин } 0}, \qquad (10.67)$$
$$\varphi_2'(M_a^2,\ M_b^2) = \varphi_2(M_a^2,\ M_b^2)_{\text{спин } 1/2} + 2\varphi_2(M_a^2,\ M_b^2)_{\text{спин } 0} =$$
$$= \frac{1}{2}(u_a+u_b-1)^{-1/2}$$

и к аналогичной комбинации амплитуд рассеяния вперед [ср. с подстановками (9.53)]

$$\left[-2\left(a+\frac{3}{2}b\right)+c\right] + 2\left(a+\frac{3}{2}b\right) = c(M^2) = \frac{1}{v}\ln\frac{1+v}{1-v}. \qquad (10.68)$$

Проводя интегрирование

$$\varphi_1'(M^2) - M^2 \int \frac{dM'^2}{M'^2}\,\frac{\varphi_2'(M^2,\ M'^2)}{M^2+M'^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}, \qquad (10.69)$$

мы получим

$$\varphi_1'(M^2) = \ln\frac{1+v}{1-v}, \qquad (10.70)$$

а следовательно,

$$\text{спин } \frac{1}{2}: \quad \varphi_1(M^2) = v + (3-2v^2)\ln\left(\frac{1+v}{1-v} - 2v\right). \qquad (10.71)$$

В реальном случае фотон-фотонного рассеяния в системе центра масс с полной энергией M и углом рассеяния θ три комбинации импульсов, которые входят в соотношение (10.55), будут такими:

$$-M^2, \quad M^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta, \quad M^2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta. \tag{10.72}$$

Элемент T-матрицы имеет вид

$$\langle 1_{k_1} 1_{k_1'} | T | 1_{k_2 k_2'} \rangle = (d\omega_{k_1} \ldots d\omega_{k_2'})^{1/2} 8\alpha^2 t, \tag{10.73}$$

где

$$t = \int \frac{dM_a^2}{M_a^2} \frac{dM_b^2}{M_b^2} \varphi_2(M_a^2, M_b^2) \left[-\frac{M^2}{M_a^2 - M^2 - i\varepsilon} \left(\frac{M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + M_b^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{M^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{M^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + M_b^2} \right) + \frac{M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + M_a^2} \frac{M^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{M^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + M_b^2} \right] +$$
$$+ \int \frac{dM'^2}{(M'^2)^2} \varphi_1(M'^2) \left[\frac{M^4}{M'^2 - M^2 - i\varepsilon} + \frac{M^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}{M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + M'^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{M^4 \cos^4 \frac{\theta}{2}}{M^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + M'^2} \right], \tag{10.74}$$

так что для дифференциального сечения получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^4}{\pi^2} \frac{1}{M^2} |t|^2. \tag{10.75}$$

Относительно деталей углового распределения мы заметим лишь, что при низких энергиях ($M \ll m$) амплитуда рассеяния t пропорциональна величине

$$1 + \sin^4 \frac{\theta}{2} + \cos^4 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(3 + \cos^2 \theta), \tag{10.76}$$

а при высоких энергиях ($M \gg m$) зависимость от угла рассеяния носит логарифмический характер.

§ 11. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СДВИГИ H-ЧАСТИЦ. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ АНАЛИЗ

Как-то мимоходом уже упоминалось о сдвигах энергетических уровней связанных систем. Даже была приведена одна явная формула (4.84), но точный смысл энергии возбуждения атома в ней остался нераскрытым. В противоположность рассеянию (§ 4), которое представляет интерес главным образом при высоких энергиях, достижимых экспериментально, в проблеме энергетических сдвигов определяющую роль играют низкие энергии, характеризующие связанные системы. В соответствии с этим мы начнем исследование энергетических сдвигов H-частиц с нерелятивистского анализа.

Раньше часто рассматривались нерелятивистские пределы для релятивистских динамических расчетов. На этот раз мы будем оперировать непосредственно с нерелятивистской динамикой, хотя и используя при этом без пространного объяснения методы, которые уже получили свое общее пространственно-временно́е описание. В нерелятивистском случае, которому отвечает запись энергии в виде

$$p^0 \approx m + T(\mathbf{p}), \quad T(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \tag{11.1}$$

причинные выражения для функции распространения $\Delta_+(x - x')$ будут ($x^0 = t$) такими:

$$\begin{aligned} x^0 > x^{0\prime}: \quad & \Delta_+(x - x') \approx i\,\frac{\exp[-im(x^0 - x^{0\prime})]}{2m} \times \\ & \times \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \exp\{i[\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - T(\mathbf{p})(t - t')]\}, \\ x^0 < x^{0\prime}: \quad & \Delta_+(x - x') \approx i\,\frac{\exp[im(x^0 - x^{0\prime})]}{2m} \times \\ & \times \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \exp\{-i[\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - T(\mathbf{p})(t - t')]\}. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Чтобы перейти к нерелятивистскому началу отсчета энергий, нужно умножить величину $\Delta_+(x - x')$ на $\exp[im(x^0 - x^{0\prime})]$. (Этому эквивалентно умножение на $\exp[-im(x^0 - x^{0\prime})]$, при котором меняются ролями частица и античастица, допускающие в нерелятивистском пределе раздельное описание.) В пределе, когда m сколь угодно большая энергия, мы приходим к следующему нерелятивистскому выражению для функции распространения:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \lim\{(-2m)\exp[im(x^0 - x^{0\prime})]\,\Delta_+(x - x')\} =$$
$$= \begin{cases} t > t': & -i\displaystyle\int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \exp\{i[\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - T(\mathbf{p})(t - t')]\}, \\ t < t': & 0. \end{cases} \tag{11.3}$$

Эта запаздывающая функция является функцией Грина неоднородного уравнения Шредингера

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\nabla\right)^2\right] G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,\delta(t - t'). \tag{11.4}$$

В импульсном пространстве данное уравнение записывается в виде

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - T(\mathbf{p})\right] G(\mathbf{p}, t - t') = \delta(t - t'), \tag{11.5}$$

где

$$G(\mathbf{p},\ t-t') = \int (d\mathbf{r}) \exp[-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\, G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t'). \tag{11.6}$$

Преобразованные по времени функции

$$G(\ \ ,\ E) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[iE(t-t')]\, G(\ \ ,\ t-t') \tag{11.7}$$

удовлетворяют уравнениям, соответствующим выбору пространственных переменных:

$$\left[E - \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\nabla\right)^2\right] G\ (\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ E) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{11.8}$$

или

$$[E - T(\mathbf{p})]\, G(\mathbf{p},\ E) = 1. \tag{11.9}$$

Поскольку функция Грина является запаздывающей по времени, преобразованная функция (11.7) существует при комплексных значениях E, лежащих в верхней полуплоскости: $\operatorname{Im} E > 0$. Таким образом, соответствующее решение уравнения (11.9) мы получим, подходя к действительной оси сверху:

$$G(\mathbf{p},\ E) = \frac{1}{E + i\varepsilon - T(\mathbf{p})}, \quad \varepsilon \to +0. \tag{11.10}$$

Прямая проверка показывает, что вытекающее отсюда поведение во времени оказывается как раз таким, какое и должно быть в случае запаздывающей функции:

$$G(\mathbf{p},\ t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \exp[-iE(t-t')]\, \frac{1}{E + i\varepsilon - T(\mathbf{p})} =$$

$$= \eta(t-t')\, \frac{1}{i} \exp[-iT(\mathbf{p})(t-t')]. \tag{11.11}$$

Выражение для действия, которое приводит к неоднородному уравнению Шредингера, имеет вид

$$W(\eta^*,\ \eta) = \int (d\mathbf{r})\, dt \Big[-\eta^*(\mathbf{r},\ t)\, \psi(\mathbf{r},\ t) - \psi^*(\mathbf{r},\ t)\, \eta(\mathbf{r},\ t) +$$

$$+ \psi^*(\mathbf{r},\ t) \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\nabla\right)^2 \right) \psi(\mathbf{r},\ t) \Big]. \tag{11.12}$$

Из него получаются следующие полевые уравнения:

$$\begin{aligned} \left[i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\nabla\right)^2\right] \psi(\mathbf{r},\ t) &= \eta(\mathbf{r},\ t), \\ \left[-i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left(-\frac{1}{i}\nabla\right)^2\right] \psi^*(\mathbf{r},\ t) &= \eta^*(\mathbf{r},\ t). \end{aligned} \tag{11.13}$$

Как явствует из самих обозначений, эти уравнения комплексно сопряжены друг другу. Решение полевого уравнения для ψ имеет вид

$$\psi(\mathbf{r},\ t)=\int(d\mathbf{r}')\,dt'G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t')\,\eta(\mathbf{r}',\ t'). \tag{11.14}$$

На основе этого решения найдем явную зависимость W от источников:

$$W(\eta^*,\ \eta)=-\int(d\mathbf{r})\,dt\eta^*(\mathbf{r},\ t)\,\psi(\mathbf{r},\ t)=$$
$$=-\int(d\mathbf{r})\,dt\,(d\mathbf{r}')\,dt'\eta^*(\mathbf{r},\ t)\,G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t')\,\eta(\mathbf{r}',\ t'). \tag{11.15}$$

В отличие от релятивистских формул здесь появился знак «—», что объясняется наличием знакового множителя в соотношении (11.3) — он был введен для того, чтобы наши обозначения согласовались с общепринятыми обозначениями нерелятивистских функций Грина. Соответствующее определение полей, к которому приводит принцип действия, выглядит следующим образом:

$$\delta W(\eta^*,\ \eta)=-\int(d\mathbf{r})\,dt\,[\delta\eta^*(\mathbf{r},t)\,\psi(\mathbf{r},t)+\psi^*(\mathbf{r},t)\,\delta\eta(\mathbf{r},t)]. \tag{11.16}$$

Из него вытекает выражение еще для одного поля:

$$\psi^*(\mathbf{r}',\ t')=\int(d\mathbf{r})\,dt\eta^*(\mathbf{r},\ t)\,G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t'). \tag{11.17}$$

Заметим, что это поле не является комплексно-сопряженным с $\psi(\mathbf{r}',\ t')$. Поле ψ связано со своим источником η, действующим в предшествующие моменты времени, тогда как ψ^* определяется значениями η^* в последующие моменты времени. Выбирая переменные другими способами, можно будет явное выражение для W представить, например, в таких формах, как

$$W(\eta^*,\ \eta)=-\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\,dt\,dt'\eta^*(\mathbf{p},\ t)\,G(\mathbf{p},\ t-t')\,\eta(\mathbf{p},\ t'), \tag{11.18}$$

при

$$\begin{gathered}\eta(\mathbf{p},\ t)=\int(d\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\eta(\mathbf{r},\ t),\\ \eta^*(\mathbf{p},\ t)=\int(d\mathbf{r})\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\eta^*(\mathbf{r},\ t)\end{gathered} \tag{11.19}$$

и

$$W(\eta^*,\ \eta)=-\int\frac{(d\mathbf{p})\,dE}{(2\pi)^4}\,\eta^*(\mathbf{p},\ E)\,G(\mathbf{p},\ E)\,\eta(\mathbf{p},\ E), \tag{11.20}$$

где

$$\begin{gathered}\eta(\quad,\ E)=\int dt\exp(iEt)\,\eta(\quad,\ t),\\ \eta^*(\quad,\ E)=\int dt\exp(-iEt)\,\eta^*(\quad,\ t).\end{gathered} \tag{11.21}$$

Электромагнитные взаимодействия вводятся путем подстановок

$$\frac{1}{i}\nabla \to \frac{1}{i}\nabla + e\mathbf{A}(\mathbf{r},\ t), \quad \nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},\ t) = 0,$$
$$i\frac{\partial}{\partial t} \to i\frac{\partial}{\partial t} - V(\mathbf{r},\ t), \quad V(\mathbf{r},\ t) = -eA^0(\mathbf{r},\ t), \tag{11.22}$$

которые записаны для частиц с зарядом $-e$, причем выбрана радиационная калибровка. В этой калибровке все внимание концентрируется на векторном фотонном источнике $\mathbf{J}$. Если отбросить мгновенное кулоновское взаимодействие плотности заряда J^0 [ср. с выражением (3-15.51)], то затем временнýю компоненту можно исключить на основании закона сохранения

$$\nabla\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},\ t) + \frac{\partial}{\partial t}J^0(\mathbf{r},\ t) = 0. \tag{11.23}$$

Тогда вклад фотонов в действие W может быть представлен в следующей диадной форме [ср. с (3-15.52) и (3-15.53)]:

$$W(\mathbf{J}) = \frac{1}{2}\int (d\mathbf{r})\,dt\,(d\mathbf{r}')\,dt'\,\mathbf{J}(\mathbf{r},\ t)\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t')\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}',\ t'), \tag{11.24}$$

где

$$t > t':\quad \mathbf{D}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t') =$$
$$= i\int d\omega_k \exp\{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - k^0(t-t')]\}\left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{kk}}{(k^0)^2}\right). \tag{11.25}$$

В нерелятивистских задачах, которые мы будем рассматривать, импульс, переносимый фотоном, весьма незначителен, или, иначе говоря, длина волны фотона велика по сравнению с пространственными размерами системы, т. е. $|\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')| \ll 1$. В таком случае выражение для фотонной функции распространения (умноженной на e^2) можно упростить:

$$t > t':\quad e^2\mathbf{D}(t-t') \approx i\frac{2\alpha}{3\pi}\int dk^0 k^0 \exp[-ik^0(t-t')]\,\mathbf{1}. \tag{11.26}$$

Чтобы получить это выражение, мы ввели сферические координаты в $\mathbf{k}$-пространстве,

$$d\omega_k = \frac{|\mathbf{k}|^2\,d|\mathbf{k}|\,d\Omega}{(2\pi)^3\,2k^0} = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{d\Omega}{4\pi}\,|\mathbf{k}|\,dk^0, \tag{11.27}$$

выполнили интегрирования по углам,

$$\mathbf{kk} \to \frac{1}{3}|\mathbf{k}|^2\,\mathbf{1}, \tag{11.28}$$

а после этого воспользовались свойством импульса фотона

$$|\mathbf{k}| = k^0. \tag{11.29}$$

Выведем сначала некоторые уже известные нерелятивистские формулы для модифицированных функций распространения и формфакторов. Из выражения для слагаемого действия

$$-\int (d\mathbf{r})\, dt \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{e}{m} \mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{p} = -i\nabla \tag{11.30}$$

явствует, что обобщенный источник частиц $\eta_2(\mathbf{r}, t)$ можно рассматривать как эффективный источник, испускающий две частицы:

$$i\mathbf{J}_2(\mathbf{r}', t')\eta_2(\mathbf{r}, t)|_{\text{эфф}} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')\frac{e}{m}\mathbf{p}\psi_2(\mathbf{r}, t), \tag{11.31}$$

и точно так же для обобщенного поглощающего источника $\eta_1^*(\mathbf{r}, t)$ имеем

$$i\eta_1^*(\mathbf{r}, t)\mathbf{J}_1(\mathbf{r}', t')|_{\text{эфф}} = \psi_1^*(\mathbf{r}, t)\frac{e}{m}\mathbf{p}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t'). \tag{11.32}$$

В действительности существенна только поперечная часть этих векторов, но она автоматически отбирается фотонной функцией распространения (11.25). Член вакуумной амплитуды, который описывает обмен фотоном и свободной частицей, дается выражением

$$\begin{aligned}-\int (d\mathbf{r}_1)\, dt_1 \ldots i\eta_1^*(\mathbf{r}_1, t_1)\mathbf{J}_1(\mathbf{r}_1', t_1')|_{\text{эфф}}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2', t_1'-t_2')\times\\ \times G(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, t_1-t_2)\cdot i\mathbf{J}_2(\mathbf{r}_2', t_2')\eta_2(\mathbf{r}_2, t_2)|_{\text{эфф}} =\\ = -\frac{e^2}{m^2}\int (d\mathbf{r})\, dt\, (d\mathbf{r}')\, dt' \psi_1^*(\mathbf{r}, t)\mathbf{p}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\times\\ \times G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\cdot\mathbf{p}\psi_2(\mathbf{r}', t').\end{aligned} \tag{11.33}$$

Если воспользоваться упрощенной фотонной функцией распространения (11.26) и функцией распространения частиц (11.3), то эта вакуумная амплитуда станет равной

$$\begin{aligned}-i\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\int dk^0 k^0 \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\, dt\, dt' \psi_1^*(\mathbf{p}, t)\frac{1}{i}\times\\ \times\exp\{-i[T(\mathbf{p})+k^0](t-t')\}\mathbf{p}^2\psi_2(\mathbf{p}, t').\end{aligned} \tag{11.34}$$

В комбинации

$$\frac{1}{i}\exp\{-i[T(\mathbf{p})+k^0](t-t')\}$$

мы узнаем выражение (взятое при $t > t'$) для функции распространения частицы, которая имеет энергию $T(\mathbf{p}) + k^0$. Ее общий вид дается формулой (11.11), если произвести подстановку $T \to T + k^0$. Сюда можно добавить временны́е контактные члены, т. е. дельта-функцию $\delta(t - t')$ и конечное число ее производных. Таким образом, в результате временно́й экстраполяции амплитуды (11.34) мы получим

$$\begin{aligned}-i\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\int dk^0 k^0 \int \frac{(d\mathbf{p})\, dE}{(2\pi)^4}\psi^*(\mathbf{p}, E)\times\\ \times\left[\frac{1}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p})-k^0} + \text{контактн. члены}\right]\mathbf{p}^2\psi(\mathbf{p}, E),\end{aligned} \tag{11.35}$$

куда контактные члены входят теперь в виде полиномиальных функций энергетического параметра E. Конкретная их форма фиксируется условием, согласно которому полученная добавочная связь должна относиться не к полям, а к источникам, чтобы не изменялось первоначальное описание свободной частицы. Необходимые для этого сомножители, фигурирующие в уравнениях

$$\begin{aligned}[E - T(\mathbf{p})]\,\psi(\mathbf{p},\,E) &= \eta(\mathbf{p},\,E),\\ \psi^*(\mathbf{p},\,E)\,[E - T(\mathbf{p})] &= \eta^*(\mathbf{p},\,E),\end{aligned} \tag{11.36}$$

возникнут, если образовать комбинацию

$$\frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0}+\frac{1}{k^0}+\frac{E-T}{(k^0)^2}=\left(\frac{E-T}{k^0}\right)^2\frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0}. \tag{11.37}$$

В итоге для модифицированной функции распространения будем иметь

$$\bar{G}(\mathbf{p},\,E)=\frac{1}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p})}+\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\int\frac{dk^0}{k^0}\frac{1}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p})-k^0}. \tag{11.38}$$

Здесь можно узнать результаты, которые были получены при анализе, основывающемся на рассмотрении мягких фотонов, а именно формулу (1.83) для частиц со спином 0 и формулу (1.95) для частиц со спином $^1/_2$.

В случае частицы, движущейся в статическом поле с потенциалом $V(\mathbf{r})$, нужно сначала взять другое уравнение для функции Грина:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}-V(\mathbf{r})-\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\boldsymbol{\nabla}\right)^2\right]G^V(\mathbf{r},\,\mathbf{r}',\,t-t')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t'). \tag{11.39}$$

Ему эквивалентно интегральное уравнение в абстрактной записи

$$G^V = G + GVG^V. \tag{11.40}$$

Формальное решение последнего имеет вид

$$G^V = (1 - GV)^{-1}G = G + GVG + \ldots . \tag{11.41}$$

В более явной форме эти первые члены записываются как

$$\begin{aligned}G^V(\mathbf{p},\,t;\,\mathbf{p}',\,t') &= \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,G(\mathbf{p},\,t-t')+\\ &+\int dt_1 G(\mathbf{p},\,t-t_1)\,V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,G(\mathbf{p}',\,t_1-t')+\ldots,\end{aligned} \tag{11.42}$$

где

$$V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')=\int(d\mathbf{r})\exp\left[-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}\right]V(\mathbf{r}). \tag{11.43}$$

Модифицированную вакуумную амплитуду для движения в поле с потенциалом V мы получим, подставив в формулу (11.33) функцию распространения G^V.

12—0983

Рассмотрим сначала линейный по V член в разложении (11.41). Он соответствует эффекту однократного рассеяния на потенциале в случае причинно-упорядоченной пары обобщенных источников частиц, которые обмениваются частицей и фотоном. С учетом того, что

$$\exp[-ik^0(t-t')]\int dt_1 \exp[-iT(\mathbf{p})(t-t_1)]\,V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\times$$
$$\times\exp[-iT(\mathbf{p}')(t_1-t)] = \int dt_1 \exp[-i(T(\mathbf{p})+k^0)(t-t_1)]\times$$
$$\times V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\exp[-i(T(\mathbf{p}')+k^0)(t_1-t')], \tag{11.44}$$

мы придем непосредственно к выражению, которое получается путем экстраполяции вакуумной амплитуды:

$$-i\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\int dk^0k^0\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^3}\frac{dE}{2\pi}\psi^*(\mathbf{p},E)\Big[\mathbf{p}\cdot\frac{1}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p})-k^0}\times$$
$$\times V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\frac{1}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p}')-k^0}\mathbf{p}'-$$
$$-\left(\frac{1}{k^0}\right)^2\frac{1}{2}(\mathbf{p}^2V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')+V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{p}'^2)\Big]\psi(\mathbf{p}',E). \tag{11.45}$$

Сюда введен также контактный член, не зависящий от E. Необходимость в нем диктуется тем требованием, чтобы добавление постоянного потенциала V приводило лишь к изменению начала отсчета энергии: $E \to E - V$. Произведя такую подстановку в формулах (11.35) и (11.37) и выделив члены, линейные по константе V, мы увидим, что они аналогичны двум вкладам в амплитуду (11.45), где произведение $\mathbf{p}^2V$ записано в общей форме, получаемой путем его симметризации.

Если вакуумную амплитуду (11.45) применить к случаю однократного рассеяния на потенциале, то поля будут подчиняться уравнениям

$$\psi^*(\mathbf{p},E)\,[E-T(\mathbf{p})]=0,\quad [E-T(\mathbf{p}')]\,\psi(\mathbf{p}',E)=0, \tag{11.46}$$

так что сама эта вакуумная амплитуда сводится к

$$i\frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\int\frac{dk^0}{k^0}\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^3}\frac{dE}{2\pi}\psi^*(\mathbf{p},E)(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\psi(\mathbf{p}',E.) \tag{11.47}$$

Таким образом, эффективный потенциал, которым обусловлено рассеяние частицы с переходом из состояния с импульсом $\mathbf{p}'$ в состояние с импульсом $\mathbf{p}$, равен

$$\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{m^2}\int\frac{dk^0}{k^0}\right]V(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \tag{11.48}$$

Мы видим, что по своей структуре это выражение сходно с зарядовым формфактором (4.81). Для более детального сравнения возьмем для спектрального интеграла $\int dk^0/k^0$ верхний предел K, соответствующий границе области применимости нерелятивистского подхода, и нижний предел, соответствующий конечной массе фотона μ. Тогда изменится выражение для импульса:

$$|\mathbf{k}| = [(k^0)^2 - \mu^2]^{1/2}, \tag{11.49}$$

что скажется на формулах (11.25) и (11.27) и приведет к следующей модификации:

$$\int \frac{dk^0}{k^0} \to \int \frac{|\mathbf{k}|\, dk^0}{(k^0)^2} \frac{3}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{|\mathbf{k}|^2}{(k^0)^2}\right] = \\ = \int_\mu^K \frac{dk^0}{k^0}\left[1 - \frac{\mu^2}{(k^0)^2}\right]^{1/2}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{(k^0)^2}\right] \approx \\ \approx \ln\frac{2K}{\mu} - \frac{5}{6}, \quad \frac{K}{\mu} \gg 1. \tag{11.50}$$

Заметим, что при вычислении данного интеграла удобно произвести замену переменной

$$k^0 = \mu \operatorname{ch} \theta. \tag{11.51}$$

Сравнив теперь (11.48) и (11.50) с зарядовым формфактором (4.81) для частиц со спином $^1/_2$, мы можем точно указать предел применимости нерелятивистского анализа:

$$\text{спин } \frac{1}{2}: \quad \ln\frac{2K}{m} = \frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{11}{24}. \tag{11.52}$$

Согласно соотношению (4.132) и вытекающему из него следствию

$$\int_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM^2}{(M^2)^2}[f_1(M^2) - f(M^2)] = \frac{\alpha}{8\pi}\frac{1}{m^2}\int_0^1 dv = \frac{\alpha}{8\pi}\frac{1}{m^2}, \tag{11.53}$$

в случае частиц со спином 0 предел иной:

$$\text{спин } 0: \quad \ln\frac{2K}{m} = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}. \tag{11.54}$$

В случае, когда возможно любое число взаимодействий с потенциалом V, нужно подставить в амплитуду (11.33) полную функцию Грина G^V. Она удовлетворяет двум разным интегральным уравнениям

$$G^V = G + GVG^V = G + G^V VG, \tag{11.55}$$

в чем сразу можно убедиться, исходя из алгебраического тождества

$$G^V = (1 - GV)^{-1}G = G(1 - VG)^{-1}. \tag{11.56}$$

Два этих уравнения можно объединить в одно уравнение

$$G^V = G + GVG + GVG^V VG, \tag{11.57}$$

в которое входит точное выражение для суммы всех членов разложения по степеням V, кроме двух первых. Формальное рассмотрение этого остаточного выражения проводится просто. При умножении G^V на фотонную функцию распространения к кинетической или полной энергии частицы добавляется энергия фотона, и больше нет каких-либо дополнительных физических условий нормировки, которые требовали бы введения контактных членов. Окончательный результат мы представим в виде добавочного слагаемого в действии:

$$-\int (d\mathbf{r})\, dt\, (d\mathbf{r}')\, dt'\, \psi^*(\mathbf{r}, t)\, \delta V(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')\, \psi(\mathbf{r}', t'), \tag{11.58}$$

где (в матричных обозначениях)

$$\delta V = \frac{2\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\int dk^0 k^0 \left[\mathbf{p}^2\left(\frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0}+\frac{1}{k^0}+\frac{E-T}{(k^0)^2}\right)+\right.$$
$$+\mathbf{p}\cdot\frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0}V\frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0}\mathbf{p}-\left(\frac{1}{k^0}\right)^2\frac{1}{2}(\mathbf{p}^2V+V\mathbf{p}^2)+$$
$$\left.+\mathbf{p}\cdot\frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0}V\frac{1}{E+i\varepsilon-H-k^0}V\frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0}\mathbf{p}\right] \tag{11.59}$$

и

$$H = T + V. \tag{11.60}$$

Это добавочное взаимодействие мы применим к связанным состояниям, которые первоначально удовлетворяют уравнениям на собственные значения

$$\psi^*(E-H) = 0, \quad (E-H)\psi = 0. \tag{11.61}$$

Учет этих уравнений в формулах (11.58) и (11.59) приводит к взаимному уничтожению членов с $\mathbf{p}^2(E-T)$ и $-{}^1/_2(\mathbf{p}^2V+V\mathbf{p}^2)$. Дальнейшее упрощение обеспечивается алгебраическим тождеством [совпадающим по существу с формулой (11.55)]

$$\frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0} = \left[1-\frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0}V\right]\frac{1}{E+i\varepsilon-H-k^0} =$$
$$= \frac{1}{E+i\varepsilon-H-k^0}\left[1-V\frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0}\right]. \tag{11.62}$$

Если применить его к первому члену в формуле (11.59), то станет ясным, что зависимость этого члена от потенциала V линейна. Получающееся в результате выражение мы представим в форме

$$\delta V = \delta V^{(1)} + \delta V^{(2)}, \tag{11.63}$$

где

$$\delta V^{(1)} = \frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\int dk^0 \left[\mathbf{p}^2 \frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0} V + V \frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0}\mathbf{p}^2 + \right.$$
$$\left. + 2k^0\mathbf{p}\cdot\frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0} V \frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0}\mathbf{p}\right] \qquad (11.64)$$

и

$$\delta V^{(2)} = \frac{2\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\int dk^0 k^0 \mathbf{p}\cdot\frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0} V \frac{1}{E+i\varepsilon-H-k^0}\times$$
$$\times V\frac{1}{E+i\varepsilon-T-k^0}\mathbf{p}. \qquad (11.65)$$

Заметим, что в приближении однократного рассеяния, в котором полевые уравнения (11.61) заменяются уравнениями (11.46), из $\delta V^{(1)}$ еще раз можно получить добавку к рассеивающему потенциалу, даваемую формулой (11.48). В нерелятивистском случае величина $\delta V^{(2)}$ определена совершенно корректно. Благодаря наличию трех множителей с k^0 в знаменателе спектральный интеграл сходится при высоких энергиях. Кроме того, не возникают какие-либо инфракрасные трудности, так как для связанных состояний, для которых $E<0$, разность $T-E$ никогда не обращается в нуль. Даже существование нулевого собственного значения у оператора $H-E$, в связи с чем появляется сингулярный множитель $-1/k^0$, не играет роли, поскольку в пределе при $k^0\to 0$ матричные элементы, входящие в виде сомножителей, обращаются в нуль:

$$\left\langle \dots E\left|\frac{1}{m}\mathbf{p}\frac{1}{E-T}V\right|\dots E\right\rangle = \left\langle \dots E\left|\frac{1}{m}\mathbf{p}\right|\dots E\right\rangle =$$
$$= \left\langle \dots E\left|\frac{1}{i}[\mathbf{r}, H]\right|\dots E\right\rangle = 0. \qquad (11.66)$$

Все это позволяет с полным основанием считать, что вклад $\delta V^{(2)}$ весьма незначителен. Если пока совсем не учитывать логарифмическую зависимость при большом значении энергии K, то основная часть сдвига энергетического уровня будет обусловлена именно членом $\delta V^{(1)}$.

Чтобы упростить расчет этого основного вклада, перепишем $\delta V^{(1)}$ (опустив добавку $i\varepsilon$, которая ни на что не влияет) в виде

$$\delta V^{(1)} = \frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\int\frac{dk^0}{k^0}\left[-\frac{k^0}{T-E+k^0}[\mathbf{p}, [\cdot\mathbf{p}, V]]\frac{k^0}{T-E+k^0} - \right.$$
$$-\mathbf{p}^2\frac{k^0}{T-E+k^0}V\left(1-\frac{k^0}{T-E+k^0}\right) -$$
$$\left. -\left(1-\frac{k^0}{T-E+k^0}\right)V\frac{k^0}{T-E+k^0}\mathbf{p}^2\right]. \qquad (11.67)$$

Кулоновский потенциал

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Z\alpha}{r} \tag{11.68}$$

обладает тем свойством, что

$$-[\mathbf{p}, [\cdot\mathbf{p}, V]] = \nabla^2 V = 4\pi Z\alpha\delta(\mathbf{r}). \tag{11.69}$$

Для интересующего нас состояния с волновой функцией $\psi(\mathbf{r})$ введем вспомогательную волновую функцию, определяемую равенством

$$\chi(\mathbf{r}, k^0) = \frac{k^0}{T - E + k^0}\psi(\mathbf{r}), \tag{11.70}$$

или

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 - E + k^0\right)\chi(\mathbf{r}, k^0) = k^0\psi(\mathbf{r}). \tag{11.71}$$

Благодаря наличию в формуле (11.69) дельта-функции вклад χ в соответствующий член будет определяться значением в начале координат. Энергетический сдвиг дается формулой

$$\begin{aligned}\langle\delta V^{(1)}\rangle = \frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\int\frac{dk^0}{k^0}\Big[4\pi Z\alpha\,|\chi(0, k^0)|^2 + \\ + 4m(k^0 + |E|)\int(d\mathbf{r})\frac{Z\alpha}{r}|\psi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}, k^0)|^2 - \\ - 4m|E|\,\mathrm{Re}\int(d\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r})^*\frac{Z\alpha}{r}(\psi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}, k^0))\Big].\end{aligned} \tag{11.72}$$

Для удобства перепишем это выражение в безразмерных переменных, построенных из боровского радиуса

$$a_0 = \frac{1}{mZ\alpha} \tag{11.73}$$

и из боровских значений энергии

$$|E_n| = m\frac{Z^2\alpha^2}{2n^2} = \frac{1}{2m(na_0)^2} = \frac{Z^2}{n^2}\,\mathrm{Ry}. \tag{11.74}$$

(Здесь Ry — так называемая ридберговская единица энергии.) Новые переменные таковы:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{r}}{na_0}, \qquad \frac{4s}{(1-s)^2} = \frac{k^0}{|E_n|}, \tag{11.75}$$

соответственно чему волновые функции переопределяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}) &= [\pi(na_0)^3]^{1/2}\psi(\mathbf{r}), \\ \chi(\mathbf{x}, s) &= [\pi(na_0)^3]^{1/2}\chi(\mathbf{r}, k^0),\end{aligned} \tag{11.76}$$

что дает

$$\langle \delta V^{(1)} \rangle_n = \frac{8}{3\pi} \frac{Z^4 \alpha^3}{n^3} \mathrm{Ry} \int_0^{\to 1} \frac{ds}{s} \frac{1+s}{1-s} \left[|\chi(0, s)|^2 + \right.$$
$$+ \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 \int \frac{(d\mathbf{x})}{2\pi x} |\psi(\mathbf{x}) - \chi(\mathbf{x}, s)|^2 -$$
$$\left. - \mathrm{Re} \int \frac{(d\mathbf{x})}{2\pi x} \psi(\mathbf{x})^* (\psi(\mathbf{x}) - \chi(\mathbf{x}, s)) \right]. \tag{11.77}$$

Простейшим примером подобного расчета служит рассмотрение основного состояния ($n = 1$, $l = 0$), для которого

$$\psi_{10}(\mathbf{x}) = \exp(-x),$$
$$\chi_{10}(\mathbf{x}, s) = \exp(-x) - \frac{(1-s)^2}{2s} \frac{\exp(-x) - \exp\{-[(1+s)/(1-s)]\, x\}}{x} \tag{11.78}$$

и

$$\chi_{10}(0, s) = s. \tag{11.79}$$

Проводя последовательные интегрирования, придем к результату

$$\langle \delta V^{(1)} \rangle_{10} = \frac{8}{3\pi} Z^4 \alpha_3 \mathrm{Ry} \int_0^{\to 1} \frac{ds}{s} \frac{1+s}{1-s} \left[s^2 + \frac{(1-s^2)^2}{2s^2} \ln \frac{1}{1-s^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}(1-s)^2 \right] = \frac{8}{3\pi} Z^4 \alpha^3 \mathrm{Ry} \left[\ln \frac{K}{Z^2 \mathrm{Ry}} - \left(\frac{17}{4} - 2 \ln 2 \right) \right], \tag{11.80}$$

в который входит величина

$$\frac{17}{4} - 2 \ln 2 = 2{,}8637. \tag{11.81}$$

Относительно же вклада $\delta V^{(2)}$ заметим, что, вводя полный набор волновых функций $\psi_{Ea}(\mathbf{r})$, в общем случае мы будем иметь

$$\langle \delta V^2 \rangle_{nl} = -\frac{2\alpha}{3\pi} \frac{1}{m^2} \int \frac{dk^0}{k^0} \sum_{Ea} \frac{\left| \int (d\mathbf{r})\, \chi_{nlm}(\mathbf{r}, k^0)^* \mathbf{p} V \psi_{Ea}(\mathbf{r}) \right|^2}{E - E_n + k^0 - i\varepsilon}. \tag{11.82}$$

В частности, для основного состояния все входящие сюда матричные элементы таковы, что $E - E_1 > 0$, и этот дополнительный энергетический сдвиг оказывается отрицательным. Он следующим образом [1]) изменяет аддитивную постоянную (14.81):

$$2{,}8637 + 0{,}1105 = 2{,}9742. \tag{11.83}$$

---

[1]) Наиболее эффективно необходимые вычисления были выполнены путем построения функции Грина H-частицы в импульсном пространстве, изложенного в нашей монографии «Квантовая кинематика и динамика» (*J. Schwinger*, Quantum Kinematics and Dynamics, W. A. Benjamin, Inc., Menlo Park, 1970). Подробности можно найти в диссертации Либера (*M. Lieber*, Thesis, Harvard, 1967); см. также *M. Lieber*, Phys. Rev., **174**, 2037 (1968).

Стало быть, если полностью отвлечься от играющего основную роль логарифма $\ln(m/|E_1|) \approx 10{,}5$, то в результате проведенных элементарных выкладок аддитивная постоянная фиксируется с точностью до 4%.

При аналогичном анализе других s-состояний целесообразно исходить из производящей функции

$$\frac{1}{(1-t)^2}\exp\{-[(1+t)/(1-t)]\,x\} = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} n\psi_{n0}(\mathbf{x}), \tag{11.84}$$

которая почти совпадает с производящей функцией для полиномов Лагерра. У нее такое же экспоненциальное поведение, как и у волновой функции $\psi_{10}(\mathbf{x})$, и она сводится к последней, если положить $t = 0$. Соответственно этому производящая функция для $\chi_{n0}(\mathbf{x}, s)$, а именно

$$\chi(\mathbf{x}, s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} n\chi_{n0}(\mathbf{x}, s), \tag{11.85}$$

также похожа на $\chi_{10}(\mathbf{x}, s)$. Эта производящая функция является решением дифференциального уравнения

$$\left[-\nabla^2 + \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2\right]\chi(\mathbf{x}, s, t) = \\ = \frac{4s}{(1-s)^2}\frac{1}{(1-t)^2}\exp\{-[(1+t)/(1-t)]\,x\} \tag{11.86}$$

и равна

$$\chi(\mathbf{x}, s, t) = \frac{4s}{(1-s)^2(1-t)^2}\frac{1}{\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2-\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2}\times \\ \times\left[\exp\{-[(1+t)/(1-t)]\,x\} - 2\frac{\frac{1+t}{1-t}}{\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2-\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2}\times \right. \\ \left. \times\frac{\exp\{-[(1+t)/(1-t)]\,x\}-\exp\{-[(1+s)/(1-s)]\,x\}}{x}\right]. \tag{11.87}$$

Вычислив ее значение в начале координат, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} n\chi_{n0}(0, s) = \frac{s}{(1-st)^2} = \frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty}(st)^n, \tag{11.88}$$

а следовательно,

$$\chi_{n0}(0, s) = s^n. \tag{11.89}$$

Хотя можно было бы построить и производящие функции для интегралов, которые входят в (11.77), мы ограничимся рассмотрением s-состояния с $n = 2$. Нужные для этого волновые функции даются выражениями

$$\psi_{20}(\mathbf{x}) = (1 - x)\exp(-x),$$

$$\chi_{20}(\mathbf{x}) - \psi_{20}(x) = \frac{(1-s)^2}{s}\left[\exp(-x) - \frac{(1+s)^2}{2s}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\exp(-x) - \exp\{-[(1+s)/(1-s)]x\}}{x}\right] \qquad (11.90)$$

и

$$\langle\delta V^{(1)}\rangle_{20} = \frac{1}{3\pi}Z^4\alpha^3\,\mathrm{Ry}\int\limits_0^{\to 1}\frac{ds}{s}\frac{1+s}{1-s}\left[s^4 + \frac{(1-s^2)^2}{s^2}\right.$$

$$\left.\left(\frac{(1+s^2)^2}{2s^2}\ln\frac{1}{1-s^2} - s^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}(1-s)^2(1+s^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{3\pi}Z^4\alpha^3\,\mathrm{Ry}\left[\ln\frac{K}{Z^2\,\mathrm{Ry}} - \left(\frac{899}{144} - \frac{16}{3}\ln 2\right)\right]. \qquad (11.91)$$

Численные значения входящей сюда константы и дополнительного вклада от $\delta\,V^{(2)}$, по-прежнему содержащего только отрицательные члены, таковы:

$$2{,}5463 + 0{,}2655 = 2{,}8118. \qquad (11.92)$$

Несмотря на увеличение вклада от $\delta V^{(2)}$ по сравнению со случаем $n = 1$, он все же составляет лишь несколько процентов всего эффекта в целом.

Рассматривавшиеся состояния $1s$ и $2s$ специфичны тем, что они стабильны. (Конечно, уровень $2s$ не полностью стабилен, но мы не будем учитывать это при нашем несколько упрощенном с физической точки зрения подходе.) Нестабильность других уровней проявляется в том, что у величины $\delta V^{(2)}$, даваемой формулой (11.82), возникает мнимая часть

$$\mathrm{Im}\,\langle\delta V^{(2)}\rangle_{nl} = -\frac{2\alpha}{3}\frac{1}{m^2}\int dk^0\sum_{Ea}\delta(E - E_n + k^0)\,k^0\,|\langle nlm|\,\mathbf{p}\,|Ea\rangle|^2. \qquad (11.93)$$

Здесь учтено ограничение на энергию, накладываемое дельта-функцией, которое позволяет упростить интеграл, фигурирующий в формуле (11.82):

$$-\int(d\mathbf{r})\,\psi^*_{nlm}\frac{k^0}{T - E_n + k^0}\,\mathbf{p}\,(T - E)\,\psi_{Ea} = -k^0\langle nlm\,|\,\mathbf{p}\,|\,Ea\rangle. \qquad (11.94)$$

В полученном выражении мы узнаем структуру вероятности спонтанного испускания (3-15.69), отнесенной к единице времени. Суммируя такие вероятности, получаем полную скорость затухания [ср. с формулой (3-16.41)]

$$\operatorname{Im}\langle\delta V^{(2)}\rangle_{nl}=-\frac{1}{2}\sum_{E<E_{n},\,a}\gamma_{Ea\leftarrow nl}=-\frac{1}{2}\gamma_{nl}. \tag{11.95}$$

При такой модификации энергии временной фазовый множитель становится равным

$$\exp\left[-i\left(E_{nl}-\frac{1}{2}i\gamma_{nl}\right)t\right]. \tag{11.96}$$

Тем самым правильно описывается нестабильность nl-состояния, обусловленная переходами в состояния H-частиц с меньшей энергией, сопровождающимися испусканием фотона. (Напомним, что ранее мы подходили к вопросу о значениях энергии чисто феноменологически. Теперь же мы постепенно уясняем себе структуру энергетических уровней.)

Для состояний с ненулевым моментом обе волновые функции $\psi(\mathbf{r})$ и $\chi(\mathbf{r}, k^0)$ обращаются в нуль в начале координат, так что главный член в выражении (11.77) для $\delta V^{(1)}$ исчезает. Объединив оставшийся вклад с вкладом от $\delta V^{(2)}$, мы получим чрезвычайно малый сдвиг. Примером может служить уровень $2p$, для которого

$$\operatorname{Re}\langle\delta V^{(1)}+\delta V^{(2)}\rangle_{21}=\frac{1}{3\pi}Z^4\alpha^3\,\mathrm{Ry}\,(0{,}0300). \tag{11.97}$$

Релятивистские эффекты в интересном с точки зрения эксперимента случае спина $1/2$ частично учитываются соотношением (11.52). Воспользовавшись им, мы вместо формул (11.91) и (11.92) будем иметь

$$\langle\delta V^{(1)}+\delta V^{(2)}\rangle_{20}=\frac{1}{3\pi}Z^4\alpha^3\,\mathrm{Ry}\left[\ln\frac{1}{(Z\alpha)^2}-2{,}8118+\frac{11}{24}\right]. \tag{11.98}$$

Кроме того, имеется эффект, связанный с магнитным моментом, который описывается, например, формулой (4.124). Он приводит к следующему энергетическому сдвигу:

$$\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{2m}\int(d\mathbf{r})\,\psi^*\gamma^0\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla V\psi. \tag{11.99}$$

Фигурирующие здесь волновые функции удовлетворяют уравнению Дирака, которое можно записать в виде

$$(m+E-V)\,\psi=(\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla+m\gamma^0)\,\psi \tag{11.100}$$

и

$$\begin{gathered}\psi^*(m+E-V)=\psi^*(\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla^T+m\gamma^0),\\ \psi^*\nabla^T=-\nabla\psi^*.\end{gathered} \tag{11.101}$$

Комбинируя эти уравнения, получаем

$$2(m+E-V)\,\psi^*\gamma^0\gamma_5\sigma\cdot\nabla V\psi = \\ = \psi^*\gamma^0(\sigma\cdot\nabla^T\sigma\cdot\nabla V - \sigma\cdot\nabla V\sigma\cdot\nabla)\,\psi = \\ = \psi^*\gamma^0(\nabla^T\cdot\nabla V - \nabla V\cdot\nabla + i\sigma(\nabla^T\times\nabla V - \nabla V\times\nabla))\,\psi. \quad (11.102)$$

Затем пользуясь нерелятивистским приближением, в котором разность $E - V$ пренебрежимо мала по сравнению с m, можно будет представить энергетический сдвиг (11.99) в виде

$$\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{4m^2}\langle\nabla^2 V + 2\sigma\cdot\nabla V\times\mathbf{p}\rangle. \quad (11.103)$$

Как показывает сравнение с формулами (11.67) и (11.69), проведенное с учетом входящего туда коэффициента $(\alpha/3\pi)(1/m^2)$, первое слагаемое в формуле (11.103), которое дает вклад только в s-состояниях, добавляет к главному логарифмическому члену константу, равную $^3/_8$.

В состояниях с ненулевым орбитальным моментом и с заданным квантовым числом $j = l \pm {}^1/_2$ полного момента выражение (11.103) принимает вид

$$\frac{Z\alpha^2}{4\pi m^2}\left\langle\frac{\sigma\cdot\mathbf{L}}{r^3}\right\rangle_{nlj} = \frac{Z\alpha^2}{4\pi m^2}\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle_{nl}\times\begin{cases} j=l+\frac{1}{2}: & l, \\ j=l-\frac{1}{2}: & -l-1. \end{cases} \quad (11.104)$$

Напомним, как выводятся фигурирующие здесь известные средние значения. Будем исходить из того, что в стационарном состоянии среднее значение радиальной силы обращается в нуль:

$$\left\langle\frac{d}{dr}\left(\frac{l(l+1)}{2mr^2} - \frac{Z\alpha}{r}\right)\right\rangle = -\frac{l(l+1)}{m}\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle + Z\alpha\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle = 0, \quad (11.105)$$

а из общеизвестной линейной зависимости главного квантового числа n от орбитального квантового числа l $(n = n_r + l + 1)$ вытекает

$$\frac{dE_n}{dl} = -\frac{2E_n}{n} = \left\langle\frac{d}{dl}\frac{l(l+1)}{2mr^2}\right\rangle = \frac{l+\frac{1}{2}}{m}\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle. \quad (11.106)$$

Это дает

$$\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle_{nl} = \frac{1}{l(l+1)}\frac{1}{a_0}\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle_{nl} = \frac{1}{(na_0)^3}\frac{1}{l\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)}, \quad (11.107)$$

так что для энергетического сдвига, индуцируемого дополнительным магнитным моментом в состояниях с $l > 0$, получим

$$\frac{1}{\pi}Z^4\alpha^3\,\mathrm{Ry}\,\frac{1}{n^3}\frac{1}{2l+1}\times\begin{cases} j=l+\frac{1}{2}: & \frac{1}{l+1}, \\ j=l-\frac{1}{2}: & -\frac{1}{l}. \end{cases} \quad (11.108)$$

Отметим, что ранее установленный результат для уровней $s_{1/2}$ также вытекает из этой формулы.

Собрав вместе все рассмотренные эффекты, в том числе и эффект поляризации вакуума, мы получим следующее выражение для относительного сдвига первоначально вырожденных уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ в атоме водорода:

$$E_{2s_{1/2}}-E_{2p_{1/2}}=\frac{1}{3\pi}Z^4\alpha^3\,\mathrm{Ry}\left[\ln\frac{1}{Z^2\alpha^2}-2{,}8118+\frac{5}{6}-\frac{1}{5}\right]-$$
$$-\frac{1}{3\pi}Z^4\alpha^3\,\mathrm{Ry}\left[0{,}0300-\frac{1}{8}\right]=$$
$$=\frac{1}{3\pi}Z^4\alpha^3\left(\frac{M}{M+m}\right)^3\mathrm{Ry}\left[\ln\left(\frac{1}{Z^2\alpha^2}\frac{M+m}{M}\right)-2{,}8418+\frac{91}{120}\right]. \tag{11.109}$$

В последнюю строку мы включили некоторые из наиболее очевидных массовых поправок для реальных H-частиц. Они учитывают, что именно приведенная масса электрона (m) и нуклона (M) входит в боровский радиус

$$a_0=\frac{1}{Z\alpha}\frac{M+m}{mM} \tag{11.110}$$

и в боровские значения энергии

$$|E_n|=\frac{Z^2\alpha^2}{2n^2}\frac{mM}{M+m}=\frac{Z^2}{n^2}\frac{M}{M+m}\mathrm{Ry} \tag{11.111}$$

(ридберговскую единицу мы сохранили в прежнем виде, отнеся ее к бесконечной массе). Взяв численное значение

$$\alpha=\frac{1}{137{,}06} \tag{11.112}$$

и энергетическую единицу (которая обычно приводится в частотном выражении)

$$\frac{1}{3\pi}\alpha^3\mathrm{Ry}=135{,}644\ \text{МГц}, \tag{11.113}$$

мы по формуле (11.109) для частотного сдвига в атоме водорода получим

$$\mathrm{H}:\quad E_{2s_{1/2}}-E_{2p_{1/2}}=1050{,}55\,\text{МГц}. \tag{11.114}$$

Последние измерения дают для расщепления уровней $1057{,}90\pm\pm 0{,}10$ МГц. Такое совпадение с погрешностью меньшей 1%, представляется поразительным, тем более что можно надеяться на уточнение этого результата за счет релятивистских эффектов, которые имеют относительную величину порядка $\alpha = 7{,}3\cdot10^{-3}$.

Тут задает вопрос Гарольд, по-прежнему поглощенный древней историей.

Гарольд. Поскольку Вы первым указали на дополнительный магнитный момент, а также вычислили радиационную поправку к рассеянию электрона, было бы удивительно, если бы не Вы первым получили и формулу для энергетических сдвигов, вывод которой был только что воспроизведен. Ведь Вы, не так ли?

Швингер. Мне кажется, да, хотя в то время (1947 г.) я вовсе не был убежден в правильности полученного результата. Позвольте мне кратко напомнить историю этого периода, которую можно проследить также по многочисленным статьям, помещенным в сборнике «Избранные работы по квантовой электродинамике» (Selected Papers on Quantum Electrodynamics, Dover Publications, Inc., New York, 1958). Моя дискуссия с Вайсскопфом, которая предшествовала конференции, проходившей в Исландии в июне 1947 г., и продолжалась в ходе ее работы, выявила общность наших взглядов на то, что вычисления с использованием релятивистских методов должны давать конечное расщепление энергетических уровней водорода. Вскоре после этого Бете провел нерелятивистский расчет, при котором оставалось неопределенным значение константы, добавляющейся к основному логарифмическому слагаемому. В ту пору, в июне 1947 г., в моей жизни произошли два знаменательных события — я бросил курить и женился. Свой продленный медовый месяц я провел, путешествуя по стране, после чего снова занялся релятивистской задачей. В рамках модной тогда нековариантной операторной теории поля я ввел некоторое каноническое преобразование, позволившее выделить физические эффекты, связанные с заданным внешним электромагнитным полем. После подстановки однородного магнитного поля был получен дополнительный магнитный момент, равный $\alpha/2\pi$ магнетонов. Неоднородное же электрическое поле приводило в точности к тем самым результатам, которые даются формулой (11.98). Однако возникающая при этом спин-орбитальная связь содержала неправильный множитель, который следовало отождествить с дополнительным магнитным моментом, — нарушалась релятивистская инвариантность. При подстановке правильного значения этого множителя получается (как нам теперь известно) верный ответ, но в то время подобная процедура не представлялась сколько-нибудь убедительной. Поэтому все внимание было переключено на построение явно ковариантных методов расчета. Хотя они позволили значительно упростить вычисления, в определенный период было неясно, как корректно сшивать вклады высоких и низких частот. К этому времени (1948 г.) за проблему взялись другие группы, которые, по-разному используя нековариантные и ковариантные методы, получили множество различных ответов. Между прочим, именно Вайсскопф настаивал на одном конкретном значении, с которым все в конце концов согласились, — оно совпадает с почти уже забытым результатом моих прежних вычислений. (Я до сих пор помню, как я был потрясен, когда, сравнив как-то эти значения, увидел, что они совпадают. Классификация процессов в первом методе не имела сколько-нибудь четкого физического смысла, и формулировался лишь окончательный ответ в виде аддитивной постоянной, равной некоторому дробному числу. Ковариантная же методика позволяла совершенно прозрачным с физической точки зрения способом выделить различные эффекты, которые поэтому явным образом и входили в ответ в виде соответствующих составляющих. Я решительно отметал всякие воспоминания о нековариантном расчете, и мне почему-то никогда не приходило в голову собрать все эти отдельные вклады воедино.) Как и в истории с формулой для рассеяния, здесь можно вывести мораль. Нужно избегать искусственного разделения на высокие и низкие частоты, при котором к первым и вторым подходят по-разному. Как будет видно из дальнейшего, при релятивистском рассмотрении энергетических сдвигов это требование выполняется.

Но прежде чем оставить нерелятивистскую область, интересно остановиться на одном методе, который позволяет объединить упругий и неупругий процессы в рассеянии и тем самым избежать упомянутого искусственного разделения. Вакуумная амплитуда, описывающая одночастичный обмен между парой причинно-упорядоченных источников, в случае свободной частицы равна

$$-i \int (d\mathbf{r}) \ldots dt'\, \eta^*(\mathbf{r},\, t)\, G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\, t-t')\, \eta(\mathbf{r}',\, t'), \qquad (11.115)$$

где

$$t > t': \quad G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\, t-t') = -i \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},\, t)\, \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}',\, t')^*,$$

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},\, t) = \left[\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\right]^{1/2} \exp\left[i\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - T(\mathbf{p})\, t)\right]. \qquad (11.116)$$

Пользуясь определениями источников

$$\eta_{\mathbf{p}} = \int (d\mathbf{r})\, dt\, \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},\, t)^*\, \eta(\mathbf{r},\, t), \qquad \eta_{\mathbf{p}}^* = \int (d\mathbf{r})\, dt\, \eta^*(\mathbf{r},\, t)\, \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},\, t), \qquad (11.117)$$

мы для вакуумной амплитуды (11.115) получим выражение

$$\sum_{\mathbf{p}} (-i\eta_{\mathbf{p}}^*)(-i\eta_{\mathbf{p}}), \qquad (11.118)$$

соответствующее тому, что частица, испущенная с импульсом $\mathbf{p}$, детектируется с достоверностью в том же самом состоянии. Заменим теперь G на G^V и выделим опять коэффициент при $(-i\eta_{\mathbf{p}}^*)(-i\eta_{\mathbf{p}})$. Квадрат модуля этой амплитуды дает вероятность того, что частица, несмотря на действие потенциала V, останется в своем исходном состоянии. В разложении (11.41) мы сохраним только два первых члена, что дает для рассматриваемой амплитуды вероятности

$$1-i\int(d\mathbf{r})\ldots dt'\,\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},\,t)^*\,[V(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t')+ \\ +V(\mathbf{r})\,G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\,t-t')\,V(\mathbf{r}')]\,\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}',\,t'). \qquad (11.119)$$

Интегрирования по временны́м переменным сводятся к вычислению одного интеграла по промежутку времени T между актами испускания и поглощения. В итоге амплитуда вероятности принимает вид

$$1-iT\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\left[V(0)+\int\frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^3}\frac{V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,V(\mathbf{p}'-\mathbf{p})}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p}')}\right], \qquad (11.120)$$

где $E=T(\mathbf{p})$, а $V(0)$ есть $V(\mathbf{p}-\mathbf{p})$. Отсюда для вероятности процессов без изменения начального состояния имеем

$$1-T\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}(-2)\,\mathrm{Im}\left[V(0)+\int\frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^3}\frac{|V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')|^2}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p}')}\right]= \\ =1-T\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\int\frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^3}\,2\pi\delta\,(E-T(\mathbf{p}'))\,|V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')|^2, \qquad (11.121)$$

чем определяется также и полная вероятность процесса рассеяния. Если разделить эту вероятность, отнесенную к единице времени, на поток падающих частиц $[(d\mathbf{p})/(2\pi)^3]\,[|\mathbf{p}|/m]$, то для полного сечения рассеяния получим

$$\sigma=\frac{m}{|\mathbf{p}|}\int\frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^3}\,2\pi\delta\,(E-T(\mathbf{p}'))\,|V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')|^2. \qquad (11.122)$$

Введем в импульсном пространстве сферические координаты:

$$(d\mathbf{p}')=d\,\Omega\,|\mathbf{p}'|^2d\,|\mathbf{p}'|=d\,\Omega\,|\mathbf{p}'|\,m dT\,(\mathbf{p}'), \qquad (11.123)$$

где $d\,\Omega$ — элемент телесного угла. Тогда сразу становится очевидным, что дифференциальное сечение упругого рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{m}{2\pi}\right)^2|V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')|^2. \qquad (11.124)$$

Фактически это выражение совпадает с хорошо известным первым борновским приближением.

Проделанный анализ подготовил нам почву для аналогичного рассмотрения рассеивающего потенциала $V+\delta V$. Две составляющие δV даются формулами (11.64) [или (11.67) с добавкой $i\varepsilon$ к энергии] и (11.65), где для нашей конкретной задачи H следует заменить на T. Как и прежде, применима амплитуда (11.120), если произвести в ней подстановки

$$V(0) \to V(0) - \frac{2\alpha}{3\pi}\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\int \frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^3}\frac{dk^0}{k^0}\frac{|V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')|^2}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p}')-k^0} \qquad (11.125)$$

и

$$V(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \to V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\left[1+\frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\int\frac{dk^0}{k^0}\left(k^0\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p}')-k^0} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \mathbf{p}^2\frac{E-T(\mathbf{p}')}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p}')-k^0}\right)\right]. \qquad (11.126)$$

В подстановку для $V(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$ входит тот же множитель, что и в (11.126) (а не комплексно-сопряженный ему). Так же как в выражении (11.120), члены, явно содержащие $\mathbf{p}^2$, здесь полностью взаимно уничтожаются. В результате для полного сечения получаем

$$\sigma = \frac{m}{|\mathbf{p}|}(-2)\,\mathrm{Im}\int\frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^3}\frac{|V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')|^2}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p}')}\times$$
$$\times\left[1+\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{m^2}\int_0^K dk^0\frac{1}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p}')-k^0}\right]. \qquad (11.127)$$

Из его структуры видно, что при $k^0=0$ у нас нет особенности. Чтобы упростить выделение мнимой части, напишем

$$\frac{1}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p}')}\,\frac{1}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p}')-k^0} =$$
$$=\frac{1}{k^0}\left[\frac{1}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p}')-k^0}-\frac{1}{E+i\varepsilon-T(\mathbf{p}')}\right]. \qquad (11.128)$$

Тогда для добавки к сечению рассеяния получим

$$\delta\sigma = -\frac{m}{|\mathbf{p}|}\frac{2\alpha}{3\pi}\int\frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^3}\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{m^2}|V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')|^2\times$$
$$\times\int_0^K\frac{dk^0}{k^0}2\pi\left[\delta(E-T(\mathbf{p}'))-\delta(E-T(\mathbf{p}')-k^0)\right]. \qquad (11.129)$$

Оба слагаемых с полной определенностью показывают, что сечение для чисто упругих процессов уменьшается, а, следовательно, роль неупругих процессов возрастает. То обстоятельство, что при $k^0\to 0$ невозможно различить два этих класса событий, компенсируется точным взаимным уничтожением вкладов от них в этом пределе. Чтобы получить соответствующую добавку к угловому дифференциальному сечению, можно воспользоваться выражением (11.123), которое дает

$$\delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = -\left(\frac{m}{2\pi}\right)^2\frac{2\alpha}{3\pi}\int dT(\mathbf{p}')\frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2|V(\mathbf{p}-\mathbf{p}')|^2\times$$
$$\times\int_0^K\frac{dk^0}{k^0}\left[\delta(E-T)-\delta(E-T-k^0)\right]. \qquad (11.130)$$

Здесь еще остается свобода в выборе области изменения кинетической энергии для рассеиваемой частицы.

Рассмотрим случай почти упругого рассеяния, когда выполняются неравенства

$$E - k^0_{\text{мин}} < T(\mathbf{p}') < E + 0, \tag{11.131}$$

где величина $k^0_{\text{мин}}$ характеризует точность, с которой может быть измерена энергия рассеиваемой частицы. В предположении, что $k^0_{\text{мин}} \ll E$, мы будем иметь $|\mathbf{p}'| \approx |\mathbf{p}|$ и интегралы, фигурирующие в формуле (11.130), сведутся к

$$\int\limits_{E-k^0_{\text{мин}}}^{E+0} dT \int\limits_0^K \frac{dk^0}{k^0}[\delta(E-T)-\delta(E-T-k^0)] =$$

$$= \int\limits_0^K \frac{dk^0}{k^0}[1-\eta(k^0_{\text{мин}}-k^0)] = \int\limits_{k^0_{\text{мин}}}^K \frac{dk^0}{k^0} = \ln\frac{K}{k^0_{\text{мин}}}. \tag{11.132}$$

В результате добавка к дифференциальному сечению «почти упругого» рассеяния оказывается равной

$$\delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \Big/ \frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{(p-p')^2}{m^2}\ln\frac{K}{k^0_{\text{мин}}}. \tag{11.133}$$

В случае частиц со спином 0 релятивистские эффекты можно учесть, произведя подстановку (11.54):

$$\ln\frac{K}{k^0_{\text{мин}}} = \ln\frac{m}{2k^0_{\text{мин}}} + \frac{1}{12} \tag{11.134}$$

(мы по-прежнему рассматриваем, конечно, медленные частицы), и добавив вклад от поляризации вакуума. Для частиц со спином 0 последний составляет $^1/_8$ вклада для частиц со спином $^1/_2$, так что аддитивную постоянную в формуле (11. 134) следует заменить на

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{40} = \frac{7}{120}. \tag{11.135}$$

В итоге мы приходим к тому же результату, который дает нам формула (4.99).

12. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Как уже указывалось, в процессах, в которых могут испускаться фотоны, разбиение сечения на упругую и неупругую части проводится искусственно, поскольку экспериментально невозможно провести такое разделение в случае достаточно мягких фотонов. Более реальный смысл имеет не упругое сечение, а сечение «почти упругого» рассеяния, которое определяется экспериментальными возможностями контроля за энергией. Для нерелятивистской задачи мы только что изложили методику прямого расчета «почти упругого» сечения. Применим теперь тот же метод к релятивистскому рассеянию заряженных частиц кулоновским полем. Поскольку мы хотим проиллюстрировать сам метод, а не получить какие-то новые результаты, достаточно ограничиться случаем бесспиновых частиц (после чего легко могут быть получены и результаты для частиц со спином $^1/_2$). Но для удобства мы слегка видоизменим по сравнению с § 4 ту цель, которая ставится при расчете. Там отбирались такие процессы, в которых энергия испущенного фотона была меньше, чем $k^0_{\text{мин}} \ll p^0 - m$. Мы заменим этот критерий, фиксирующий область «почти упругого» рассеяния, следующими ограничениями на массу конечного двухчастичного состояния:

$$m^2 \leqslant M^2 < (m + \delta M)^2, \quad \delta M \ll m. \tag{12.1}$$

Затем, пользуясь методами § 4, мы сначала построим «почти упругое» сечение для случая, когда выполняется данный критерий.

Амплитуда вероятности (3-14.61) для испускания мягких фотонов дает вероятность испускания с кинематическими множителями $d\omega_{p_1} d\omega_k$. Мы предпочитаем иметь дело с полным импульсом

$$P = p_1 + k, \tag{12.2}$$

записывая

$$d\omega_{p_1} = \frac{(dp_1)}{(2\pi)^3}\,\delta(p_1^2 + m^2) = \frac{(dP)}{(2\pi)^3}\,\delta[(P-k)^2 + m^2] =$$
$$= d\omega_P\, dM^2\, \delta(2kP + M^2 - m^2). \tag{12.3}$$

Тогда, используя для сравнения полный импульс, а не импульс частицы, для относительной вероятности испускания фотона вместо (4.93) получим

$$e^2 \int\limits_{(m+\mu)^2}^{(m+\delta M)^2} dM^2 d\omega_k\, \delta(2Pk + M^2 - m^2) \left(\frac{p_1}{kp_1} - \frac{p_2}{kp_2}\right)^2 . \tag{12.4}$$

Нижний предел в интеграле по M^2 напоминает нам, что фотону временно приписана масса μ. Основной интеграл по импульсам фотона можно вычислить в системе покоя вектора P, а затем упростить его с учетом неравенства

$$M^2 - m^2 < 2m\delta M \ll m^2,$$

что дает

$$\int d\omega_k\,\delta(2Pk+M^2-m^2)=\int \frac{dk^0\,[(k^0)^2-\mu^2]^{1/2}}{(2\pi)^2}\times$$

$$\times\,\delta(-2Mk^0+M^2-m^2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{2M}\left[\left(\frac{M^2-m^2}{2M}\right)^2-\mu^2\right]^{1/2}\approx$$

$$\approx\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{2M}\,[(M-m)^2-\mu^2]^{1/2}. \qquad (12.5)$$

Принимая во внимание это обстоятельство, перепишем интеграл (12.4) в виде

$$\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{\mu}^{\delta M} d(M-m)\,[(M-m)^2-\mu^2]^{1/2}\times$$

$$\times\left\langle-\frac{m^2}{(kp_1)^2}-\frac{m^2}{(kp_2)^2}-\frac{2p_1p_2}{kp_1\,kp_2}\right\rangle, \qquad (12.6)$$

где усреднение, обозначенное угловыми скобками, проводится по угловой переменной. Так, например,

$$\left\langle\frac{1}{(kp_2)^2}\right\rangle=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} dz\,\frac{1}{(k^0p_2^0-|\mathbf{k}|\,|\mathbf{p}_2|\,z)^2}=\frac{1}{(k^0)^2\,[(p_2^0)^2-|\mathbf{p}_2|^2]+\mu^2\,|\mathbf{p}_2|^2}, \qquad (12.7)$$

или

$$\left\langle\frac{1}{(kp_2)^2}\right\rangle\approx\frac{1}{m^2\,(M-m)^2+\mu^2q^2\left(1+\frac{q^2}{4m^2}\right)}. \qquad (12.8)$$

Последнее выражение получено в системе покоя вектора $P\approx p_1$, в которой, если воспользоваться обозначением

$$q=p_1-p_2, \qquad (12.9)$$

введенным в § 4, мы имеем

$$|\mathbf{p}_2|^2=\left(\frac{p_1p_2}{m}\right)^2-m^2=q^2\left(1+\frac{q^2}{4m^2}\right). \qquad (12.10)$$

Чтобы завершить вычисление интеграла (12.4), заметим, что

$$\frac{1}{(kp_1)^2}\approx\frac{1}{m^2\,(M-m)^2} \qquad (12.11)$$

и что тождество

$$\frac{1}{kp_1\,kp_2}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,dv\times$$

$$\times\frac{1}{\left[k\left(p_1\frac{1+v}{2}+p_2\frac{1-v}{2}\right)\right]^2} \qquad (12.12)$$

приводит к равенству

$$\left\langle \frac{1}{kp_1 kp_2} \right\rangle \approx \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dv \times$$

$$\times \frac{1}{(M-m)^2 \left(m^2 + \frac{1-v^2}{4} q^2\right) + \mu^2 \left(\frac{1-v}{2}\right)^2 q^2 \left(1 + \frac{q^2}{4m^2}\right)}, \qquad (12.13)$$

где учтены соотношения

$$\begin{aligned} -\left(p_1 \frac{1+v}{2} + p_2 \frac{1-v}{2}\right)^2 &= m^2 + \frac{1-v^2}{4} q^2, \\ -p_1 \left(p_1 \frac{1+v}{2} + p_2 \frac{1-v}{2}\right) &= m^2 + \frac{1-v}{4} q^2. \end{aligned} \qquad (12.14)$$

Входящие сюда спектральные интегралы имеют вид [ср. с формулой (4.97)]

$$\int_{\mu}^{\delta M} d(M-m)\,[(M-m)^2 - \mu^2]^{1/2} \frac{1}{(M-m)^2 + \lambda^2 \mu^2} =$$

$$= \ln \frac{2\delta M}{\mu} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{1/2} \ln \frac{\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{1/2} + 1}{\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{1/2} - 1}, \qquad (12.15)$$

и в результате всех этих вычислений интеграл (12.4) можно представить в форме

$$\frac{\alpha}{2\pi} \lg \frac{2\delta M}{\mu} \frac{q^2}{m^2} \int_0^1 dv \frac{1+v^2}{1 + \frac{1-v^2}{4} \frac{q^2}{m^2}} - \frac{\alpha}{\pi} \Theta\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \qquad (12.16)$$

Функция Θ, выраженная через переменную θ,

$$\operatorname{ch} \theta = 1 + \frac{q^2}{2m^2} \qquad (12.17)$$

имеет вид

$$\Theta(\theta) = \operatorname{ch} \theta \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dv \frac{1}{\xi_+ \xi_-} \frac{\xi_+ + \xi_-}{\xi_+ - \xi_-} \ln \frac{\xi_+}{\xi_-} - 1 - \theta \operatorname{cth} \theta, \qquad (12.18)$$

где

$$\xi_\pm = \frac{1}{2}(1+v) + \frac{1}{2}(1-v) \exp(\pm\theta). \qquad (12.19)$$

Но это не самое удачное представление функции Θ. Мы можем представить ее в ином виде, если учтем тождество

$$\xi_\pm = \exp\left(\pm \frac{1}{2}\theta\right)\left[\operatorname{ch} \frac{1}{2}\theta \mp v \operatorname{sh} \frac{1}{2}\theta\right], \qquad (12.20)$$

которое приводит к выражению

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\theta}[\Theta+1+\theta\operatorname{cth}\theta]=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\frac{1}{1+(1-v^2)\operatorname{sh}^2\frac{1}{2}\theta}\frac{1+(1-v)\operatorname{sh}^2\frac{1}{2}\theta}{(1-v)\operatorname{sh}\frac{1}{2}\theta\operatorname{ch}\frac{1}{2}\theta}\times$$

$$\times\left[\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\theta-v\operatorname{sh}\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\theta+v\operatorname{sh}\frac{1}{2}\theta}+\theta\right]. \qquad (12.21)$$

Далее, проводя явным образом симметризацию по v и $-v$ как по переменным интегрирования и интегрируя несколько раз по частям, в качестве эквивалента правой части равенства (12.21) получим

$$\int_0^1 dv\frac{\ln\left[1+(1-v^2)\operatorname{sh}^2\frac{1}{2}\theta\right]-\ln(1-v^2)}{1+(1-v^2)\operatorname{sh}^2\frac{1}{2}\theta}+\frac{2\theta}{\operatorname{sh}\theta}\ln 2. \qquad (12.22)$$

Скомбинировав затем равенство

$$\theta\operatorname{cth}\theta-1=\frac{q^2}{4m^2}\int_0^1 dv\frac{1+v^2}{1+\frac{1-v^2}{4}\frac{q^2}{m^2}} \qquad (12.23)$$

с тождеством (4.109), придем к следующему результату:

$$\Theta\left(\frac{q^2}{m^2}\right)=\frac{q^2}{4m^2}\int_0^1 dv\,(1+v^2)\frac{2\ln\left(\frac{4v}{1-v^2}\right)-1}{1+\frac{1-v^2}{4}\frac{q^2}{m^2}}. \qquad (12.24)$$

В итоге относительная вероятность испускания фотона, задаваемая выражением (12.16), принимает вид

$$\frac{\alpha}{2\pi}\frac{q^2}{m^2}\int_0^1 dv\,(1+v^2)\frac{\ln\left(\frac{\delta M}{2\mu}\frac{1-v^2}{v}\right)+\frac{1}{2}}{1+\frac{1-v^2}{4}\frac{q^2}{m^2}}. \qquad (12.25)$$

Добавив сюда еще и коэффициент (4.86), соответствующий модификации упругого сечения, мы увидим, что «почти упругое» сечение приобретает множитель

$$1-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{q^2}{m^2}\int_0^1 dv\frac{(1+v^2)\left[\ln\left(\frac{4m}{\delta M}\frac{v^2}{(1-v^2)^{3/2}}\right)-\frac{3}{2}\right]-\frac{1}{6}v^4}{1+\frac{1-v^2}{4}\frac{q^2}{m^2}}. \qquad (12.26)$$

Именно его мы и должны получить еще раз путем прямого расчета «почти упругого» сечения. Кстати, в нерелятивистском пределе, когда не нужно проводить различие между δM и $k^0_{\text{мин}}$, формула (12.26) должна давать нам комбинацию (4.99) и она действительно дает ее.

Проведем на примере локального векторного потенциала A прямой расчет сечений рассеяния. Это будет релятивистским обобщением анализа, проведенного в § 11. Вакуумная амплитуда, описывающая одночастичный обмен при наличии потенциала, равна

$$i\int (dx)\,(dx')\,K_1(x)\,\Delta_+^A(x,\,x')\,K_2(x'), \tag{12.27}$$

где

$$\Delta_+^A=\Delta_+ + \Delta_+\left[eq\,(pA+Ap)-e^2A^2\right]\Delta_+ + \\ +\Delta_+eq\,(pA+Ap)\,\Delta_+eq\,(pA+Ap)\,\Delta_+ + \ldots \tag{12.28}$$

(выписаны только члены, линейные и квадратичные по A). Выделив коэффициент при $(iK^*_{1pq})\,(iK_{2pq})$, мы для амплитуды вероятности процессов с сохранением начального состояния получим выражение

$$1+i\int (dx)\,(dx')\,\varphi_{pq}(x)^*\left[\delta\,(x-x')\,(eq\,(pA+Ap)-e^2A^2)\,(x)+ \right.\\ \left. +\,eq\,(pA+Ap)\,(x)\,\Delta_+(x-x')\,(pA+Ap)\,(x')\right]\varphi_{pq}(x'), \tag{12.29}$$

в котором

$$\varphi_{pq}(x)=\varphi_q\,(d\omega_p)^{1/2}\exp\,(ipx). \tag{12.30}$$

Собственный вектор заряда φ_q можно опустить, заменив при этом зарядовую матрицу ее собственным значением. В случае не зависящего от времени потенциала, который может действовать на частицу в течение промежутка времени T, величина (12.29) принимает вид

$$1+id\omega_pT\left[(2eqpA-e^2A^2)\,(0)+\int\frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^3}\,\frac{|\,e\,(p+p')\,A\,(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,|^2}{p'^2+m^2-i\varepsilon}\right], \tag{12.31}$$

где используются трехмерные фурье-образы, а $p^{0\prime}=p^0$. Из вытекающего отсюда выражения для вероятности процессов с сохранением начального состояния,

$$1-d\omega_pT\,\frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^3}\,2\pi\delta\,(p'^2+m^2)\,|\,e\,(p+p')\,A\,(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,|^2, \tag{12.32}$$

мы заключаем, что полное сечение рассеяния дается формулой

$$\sigma=\frac{1}{2\,|\,\mathbf{p}}\,\frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^3}\,2\pi\delta\,(p'^2+m^2)\,|\,e\,(p+p')\,A\,(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,|^2. \tag{12.33}$$

С учетом же соотношения

$$\int \frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^2}\,\delta(p'^2+m^2)=\int d\Omega\,\frac{2\,|\mathbf{p}|}{(4\pi)^2} \tag{12.34}$$

для дифференциального сечения будем иметь

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{(4\pi)^2}\,|\,e\,(p+p')\,A\,(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,|^2=\left(\frac{p^0}{2\pi}\right)^2|\,eA^0(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,|^2. \tag{12.35}$$

Последняя форма записи отвечает чисто скалярному потенциалу. На примере кулоновского потенциала можно видеть, что мы действительно получили уже известный результат, который дается, скажем, формулой (3-14.8).

Проведенным анализом мы подготовили почву для рассмотрения модифицированного (нелокального) потенциала, который возникает за счет связи с фотонами. С одним из его аспектов, находящим свое выражение в формфакторе из § 5, мы, конечно, уже знакомы. Здесь же существенно отметить, что нам нужен не формфактор, соответствующий свободным частицам, для которого оба импульса в двойной спектральной форме лежат на массовой поверхности, как это явствует из самой его записи, а формфактор лишь с одним импульсом на массовой поверхности. Это ясно хотя бы из амплитуды вероятности (12.31), в которой значения импульса p' отвечают не только свободной частице. Таким образом, исходное выражение для формфактора, на который умножаются как A $(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$, так и A $(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$, имеет вид

$$1-\frac{\alpha}{4\pi}\,q^2\int\frac{x\,dx\,\frac{1}{2}\,dv}{\delta^{3/2}}\,(1+x)\,[1+(1+x)\,v^2]\,\frac{q^2+4m^2}{(M_1^2-m^2)\,(p'^2+M_2^2-i\varepsilon)}\,. \tag{12.36}$$

Оно получено из выражения (5.86) (с изменением в обозначениях $k\to q$) путем использования соотношения (6.99), но не включает вклад, содержащий комбинацию (6.100), который будет рассмотрен отдельно. Подставив сюда $p'^2=-m^2$, мы вновь придем к формфактору, даваемому формулами (5.98) и (5.99). При вычислении полного сечения берется мнимая часть квадрата этой функции, умноженной на $(p'^2+m^2-i\varepsilon)^{-1}$; после отбрасывания множителя π она оказывается равной

$$\delta(p'^2+m^2)-\frac{\alpha}{2\pi}\,q^2\int\frac{x\,dx\,\frac{1}{2}\,dv}{\delta^{3/2}}\,(1+x)\,[1+(1+x)\,v^2]\times$$
$$\times\frac{q^2+4m^2}{(M_1^2-m^2)\,(M_2^2-m^2)}\,[\delta(p'^2+m^2)-\delta(p'^2+M_2^2)]. \tag{12.37}$$

Как и при нерелятивистском анализе, мы видим, что в этом выражении упругий процесс, которому соответствует δ (p'^2+m^2), объединен с неупругими процессами, выделяемыми дельта-функцией $\delta(p'^2 + M_2^2)$. Взаимное уничтожение их вкладов при $M_2 \to m$ означает, что величина (12.37) не имеет инфракрасной особенности. Но поскольку нам было бы удобно воспользоваться уже полученными ранее результатами для формфакторов, мы введем массу фотона и будем рассматривать два класса процессов по отдельности.

Область интегрирования в неупругом члене ограничена с одного конца комбинацией (5.102), включающей массу фотона, а с другого конца требованием $M_2^2 - m^2 < 2m\delta M$. На всем этом интервале $x \ll 1$, и коэффициент неупругости в выражении (12.37) можно упростить, записав его в виде

$$\frac{\alpha}{2\pi}\frac{q^2}{m^2}\int\frac{dx}{x}\frac{1}{2}\,dv\frac{1+v^2}{1+\frac{1-v^2}{2}\frac{q^2}{m^2}}, \tag{12.38}$$

где

$$\frac{\mu}{m}(1-v^2)^{-1/2}\left(1+\frac{q^2}{4m^2}\right)^{-1/2} < x < \frac{\delta M}{m}\times$$
$$\times\frac{1}{1+\frac{q^2}{4m^2}-v\left[\frac{q^2}{4m^2}\left(1+\frac{q^2}{4m^2}\right)\right]^{1/2}}. \tag{12.39}$$

Это дает для величины (12.38) следующее значение:

$$\frac{\alpha}{2\pi}\frac{q^2}{m^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,dv\frac{1+v^2}{1+\frac{1-v^2}{4}\frac{q^2}{m^2}}\ln\left[\frac{\delta M}{\mu}\frac{(1-v^2)^{1/2}}{\left(1+\frac{q^2}{4m^2}\right)^{1/2}-v\left(\frac{q^2}{4m^2}\right)^{1/2}}\right], \tag{12.40}$$

где симметризация по v и $-v$ приводит к замене

$$\left(1+\frac{q^2}{4m^2}\right)^{1/2}-v\left(\frac{q^2}{4m^2}\right)^{1/2} \to \left(1+\frac{1-v^2}{4}\frac{q^2}{m^2}\right)^{1/2}. \tag{12.41}$$

Затем на основании тождества [эквивалентного тождеству (4.109)]

$$\int_0^1 dv\,(1+v^2)\frac{\ln\left(1+\frac{1-v^2}{4}\frac{q^2}{m^2}\right)}{1+\frac{1-v^2}{4}\frac{q^2}{m^2}} = \int_0^1 dv\frac{(1+v^2)\ln\left(\frac{4v^2}{1-v^2}\right)-2v^2}{1+\frac{1-v^2}{4}\frac{q^2}{m^2}} \tag{12.42}$$

получим

$$\frac{\alpha}{2\pi}\frac{q^2}{m^2}\int_0^1 dv\frac{(1+v^2)\ln\left(\frac{\delta M}{2\mu}\frac{1-v^2}{v}\right)+v^2}{1+\frac{1-v^2}{4}\frac{q^2}{m^2}}. \tag{12.43}$$

Что касается главного логарифмического члена, то данное выражение полностью согласуется с формулой (12.25). Но как уже указывалось, проведенный выше анализ формфактора является неполным. Теперь нам надлежит исследовать всю картину в целом.

Вакуумную амплитуду в случае причинного обмена фотоном для частицы, движущейся в поле с потенциалом A, можно записать в виде

$$e^2 \int (dx)(dx')\,\varphi_1(2\Pi-k)(x)\,id\omega_k\,\times$$
$$\times\exp[ik(x-x')]\,\Delta_+^A(x,x')(2\Pi-k)\,\varphi_2(x'), \tag{12.44}$$

где появление калибровочно-ковариантной комбинации

$$\Pi = p - eqA \tag{12.45}$$

говорит о том, что теперь рассматриваются акты испускания и поглощения, происходящие в области с ненулевым потенциалом. Мы снова воспользуемся разложением (12.28) для Δ_+^A. Первый член разложения, Δ_+, при наличии причинной упорядоченности входит в комбинации

$$\exp[ik(x-x')]\,\Delta_+(x-x') = i\int d\omega_p \exp[i(p+k)(x-x')] =$$
$$= i\int dM^2\,d\omega_P\,\delta[(P-k)^2+m^2]\exp[iP(x-x')]. \tag{12.46}$$

Вклады соответствующей вакуумной амплитуды равны

$$-e^2\int dM^2\,d\omega_P\,d\omega_k\,\delta(2Pk+M^2-m^2)\,[\varphi_1(-P)(-2)(M^2+m^2)\,\times$$
$$\times\varphi_2(P)-(\varphi_1 2eqA)(-P)(2P-k)\,\varphi_2(P)-\varphi_1(-P)(2P-k)\,\times$$
$$\times(2eqA\varphi_2)(P)+4(\varphi_1 eqA)(P)\,(eqA\varphi_2)(P)], \tag{12.47}$$

где можно произвести эффективную подстановку

$$k \to \frac{kP}{P^2}P = \frac{M^2-m^2}{2M^2}P \tag{12.48}$$

и использовать значение интеграла (12.5). После проведения пространственно-временной экстраполяции с добавлением подходящих контактных членов получим для действия выражение

$$\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{(dp)}{(2\pi)^4}\frac{dM^2}{M^2}\,[(M^2-m^2)^2-4\mu^2M^2]^{1/2}\Big\{-2(M^2+m^2)\frac{1}{2}\varphi(-p)\,\times$$
$$\times\left(\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}-\frac{1}{M^2-m^2}+\frac{p+m^2}{(M^2-m^2)^2}\right)\varphi(p)\,-$$
$$-\left(\frac{3}{2}+\frac{m^2}{2M^2}\right)(\varphi 2eqAp)(-p)\left(\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}-\frac{1}{M^2-m^2}\right)\varphi(p)\,+$$
$$+2(\varphi eqA)(-p)\left(\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}-\frac{1}{M^2-m^2}\right)(eqA\varphi)(p)\Big\}. \tag{12.49}$$

Мы узнаем в нем дополнительное действие для свободной частицы с контактными членами, обеспечивающими появление эффективного множителя $(p^2 + m^2)^2$ [по существу выражение (6.40), видоизмененное в соответствии с наличием у фотона ненулевой массы]. Кроме того, имеются члены, линейные и квадратичные по векторному потенциалу. Они содержат более простой контактный член. Его оказывается достаточным, чтобы предотвратить модификацию примитивного взаимодействия в случае медленно меняющегося потенциала и полей почти свободных частиц.

Поскольку поле φ в формуле (12.49) описывает частицы, движущиеся под влиянием потенциала A, можно произвести подстановку

$$(p^2 + m^2)\,\varphi(p) \to (2eqpA\varphi)(p). \tag{12.50}$$

При этом выбрана лоренцевская калибровка и опущен член с A^2 — для нас здесь такая точность вполне достаточна. Для соответствующего слагаемого действия получаем выражение

$$\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{(dp)}{(2\pi)^4}\frac{dM^2}{M^2}\,[(M^2-m^2)^2-4\mu^2M^2]^{1/2}\left\{\left[-\frac{4m^2}{(M^2-m^2)^2}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{2}{M^2-m^2}-\frac{1}{M^2}\right]\frac{1}{2}\,(\varphi 2eqpA)(-p)\,\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}\,(2eqpA\varphi)(p)+$$
$$\left.+2\,(\varphi eqA)(-p)\left(\frac{1}{p^2+M^2-i\varepsilon}-\frac{1}{M^2-m^2}\right)(eqA\varphi)(p)\right\}. \tag{12.51}$$

Оно дает вклад в амплитуду вероятности, которая описывает неупругие процессы, так как ее мнимая часть содержит $\delta\,(p^2 + M^2)$. Поскольку мы рассматриваем лишь случай «почти упругого» рассеяния, в формуле (12.51) существен только член с инфракрасной особенностью. Эта добавка к множителю (12.43) равна

$$-\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{dM^2}{M^2}\,[(M^2-m^2)^2-4\mu^2M^2]^{1/2}\frac{4m^2}{(M^2-m^2)^2}\approx$$
$$\approx-\frac{\alpha}{\pi}\int_{\mu}^{\delta M} d(M-m)\,[(M-m)^2-\mu^2]^{1/2}\frac{1}{(M-m)^2}=$$
$$=-\frac{\alpha}{\pi}\left(\ln\frac{2\delta M}{\mu}-1\right). \tag{12.52}$$

Следующий член в разложении Δ_+^A, содержащий $eq\,(pA + Ap) - e^2A^2$, дает в величину (12.44) три разных вклада, каждый из которых представляется в виде двойной спектральной формы. В члене с A^2 оба импульса лежат на массовой поверхности, и мнимый вклад не возникает. Рассмотрим теперь член, сочетающий линейную зависимость от A функции распространения с зависимостью от A эффективного испускающего или поглощающего источника. Здесь на массовой поверхности лежит один импульс.

Соответствующая мнимая часть, которая описывает неупругие процессы, имеет следующий вид:

$$\int x\,dx\,(\ldots)\,\frac{1}{M_1^2-m^2}\,\delta(p'^2+M_2^2), \tag{12.53}$$

где тремя точками обозначены множители, обладающие конечными пределами при $x \to 0$. Итак, в противоположность аналогичному члену в формуле (12.37) здесь имеется только один спектральный знаменатель, который не дает выражения с инфракрасной особенностью. В результате остается двойная спектральная форма из § 5, которая была уже рассмотрена. Завершим теперь наш анализ.

Сравнение с полным выражением (5.86) при учете соотношения (6.100) показывает, что в формфактор (12.36) не включен следующий член:

$$-\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{x\,dx\,\frac{1}{2}\,dv}{\delta^{3/2}}\,(1+x)^2\,\frac{4}{x^2}\left[\frac{(M_1^2-m^2)\,(M_2^2-m^2)}{(M_1^2-m^2)\,(p'^2+M_2^2-i\varepsilon)}-1\right]=$$
$$=(p'^2+m^2)\,\frac{\alpha}{\pi}\int\frac{dx}{x}\,\frac{1}{2}\,dv\,\frac{(1+x)^2}{\delta^{3/2}}\,\frac{1}{p'^2+M_2^2-i\varepsilon}. \tag{12.54}$$

Его вклад в мнимую часть квадрата формфактора, умноженного на $(p'^2+m-i\varepsilon)^{-1}$ и деленного на π, равен

$$\frac{2\alpha}{\pi}\int\frac{dx}{x}\,\frac{1}{2}\,dv\,\frac{(1+x)^2}{\delta^{3/2}}\,\delta(p'^2+M_2^2). \tag{12.55}$$

Он описывает неупругие процессы. Поскольку пределы интегрирования по x такие же, как и в формуле (12.39), интересующий нас коэффициент имеет вид

$$\frac{2\alpha}{\pi}\int\frac{1}{2}\,dv\,\frac{dx}{x}=\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,dv\,\ln\left[\frac{\delta M}{\mu}\,\frac{(1-v^2)^{1/2}}{\left(1+\frac{q^2}{4m^2}\right)^{1/2}-v\left(\frac{q^2}{4m^2}\right)^{1/2}}\right]=$$
$$=\frac{2\alpha}{\pi}\left[\ln\frac{\delta M}{\mu}-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dv\,\ln\frac{1}{1-v^2}-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dv\,\ln\left(1+\frac{1-v^2}{4}\,\frac{q^2}{m^2}\right)\right], \tag{12.56}$$

или после интегрирования по частям

$$\frac{2\alpha}{\pi}\left[\ln\frac{2\delta M}{\mu}-1-\frac{q^2}{4m^2}\int\limits_0^1 dv\,\frac{v^2}{1+\frac{1-v^2}{4}\,\frac{q^2}{m^2}}\right]. \tag{12.57}$$

Отметим, что этого вклада не возникало бы, если бы мы придерживались старой методики, которая применялась при выводе выражения (5.90) и основывалась на использовании более сложных контактных членов.

Обратимся теперь к последнему члену разложения (12.28). Если подставить его в вакуумную амплитуду (12.44), то он будет описывать процесс, в котором между испусканием и поглощением фотона происходят два акта рассеяния на векторном потенциале A. Для наших целей наиболее удобна следующая причинная последовательность. Свободная частица испускает фотон, а возникающая при этом виртуальная частица рассеивается на потенциале и превращается в реальную частицу, которая вместе с фотоном детектируется по аналогичной схеме. Это приводит к простой спектральной форме по массе M двухчастичной системы. Ее мнимая часть описывает неупругие процессы. Нас интересуют только мягкие фотоны, для которых рассматриваемый процесс можно разбить на двойное упругое рассеяние частицы и обмен фотоном. Следовательно, этот вклад в модификацию «почти упругого» рассеяния в точности равен той части выражения (12.4), которая целиком относится к начальному импульсу p_2. В нем учитывается испускание фотона начальной частицей и детектирование фотона конечной частицей. Применяя формулы типа (12.8) и (12.23), получаем для него

$$e^2 \int\limits_{(m+\mu)^2}^{(m+\delta M)^2} dM^2 \, d\omega_k \delta(2Pk + M^2 - m^2) \left(\frac{p_2}{kp_2}\right)^2 \approx$$

$$\approx -\frac{\alpha}{\pi} \int\limits_{\mu}^{\delta M} d(M-m) \left[(M-m)^2 - \mu^2\right]^{1/2} \times$$

$$\times \frac{1}{(M-m)^2 + \mu^2 \dfrac{q^2}{m^2}\left(1 + \dfrac{q^2}{4m^2}\right)} =$$

$$= -\frac{\alpha}{\pi}\left[\ln\frac{2\delta M}{\mu} - 1 - \frac{q^2}{4m^2}\int\limits_0^1 dv \, \frac{1+v^2}{1 + \dfrac{1-v^2}{4}\dfrac{q^2}{m^2}}\right]. \qquad (12.58)$$

Если объединить три добавочных эффекта, описываемых формулами (12.52), (12.57) и (12.58), то масса фотона и параметр неупругости выпадут и останется следующий член:

$$\frac{\alpha}{\pi}\frac{q^2}{4m^2}\int\limits_0^1 dv \, \frac{1-v^2}{1 + \dfrac{1-v^2}{4}\dfrac{q^2}{m^2}}. \qquad (12.59)$$

Добавив его к величине (12.43), мы получим в точности величину (12.25), сложив которую с упругим фактором, придем к (12.26). Отметим еще раз, что, хотя мы из соображений удобства сохранили искусственное разделение на упругое и неупругое рассеяние, метод прямо дает и поправочный множитель для сечения «почти упругого» рассеяния. Этот множитель выводится из формфактора, записанного в виде двойной спектральной формы, причем малый дополнительный член можно найти путем весьма простых рассуждений.

При заданном δM поправочный множитель (12.26) зависит только от переданного импульса q^2. В противоположность этому в формуле (4.114) имеется также и явная зависимость от энергии. При $q^2 \ll m^2$ применимо нерелятивистское выражение

$$\frac{q^2}{m^2} \ll 1: \quad 1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{2\delta M} + \frac{7}{120}\right). \qquad (12.60)$$

В другом предельном случае мы находим, что множитель, модифицирующий сечение «почти упругого» рассеяния, дается формулой

$$\frac{q^2}{m^2} \gg 1: \quad 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \left[\left(\ln \frac{q^2}{m^2} - 1\right) \left(\ln \frac{4m}{\delta M} - \frac{19}{22}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4} \left(\ln \frac{q^2}{4m^2}\right)^2 + 3 \ln 2 (1 - \ln 2) - \frac{31}{36} \right]. \qquad (12.61)$$

Зная простое соотношение между задачами для спинов 0 и $^1/_2$ [формула (4.135) и относящийся к ней текст], мы можем сразу же написать и соответствующие результаты для частиц со спином $^1/_2$:

$$\frac{q^2}{m^2} \ll 1: \quad 1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{2\delta M} + \frac{19}{30}\right),$$

$$\frac{q^2}{m^2} \gg 1: \quad 1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \left[\left(\ln \frac{q^2}{m^2} - 1\right) \left(\ln \frac{4m}{\delta M} - \frac{19}{12}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4} \left(\ln \frac{q^2}{4m^2}\right)^2 + 3 \ln 2 (1 - \ln 2) - \frac{19}{36} \right]. \qquad (12.62)$$

§ 13. РАССЕЯНИЕ ФОТОНА НА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕ

Предыдущий и следующий параграфы посвящены анализу различных физических аспектов связей заряженной частицы, которые включают повторное действие кулоновского поля. В данном же параграфе проводится аналогичный анализ, но относящийся к полям фотонов. Физический процесс представляет собой рассеяние фотонов на заряженных частицах (комптоновское рассеяние), и нас будет интересовать, к каким его модификациям приводят механизмы двухчастичного обмена. Один из систематических подходов к этой проблеме основывается на дополнительных слагаемых действия, которые выводятся из вакуумной амплитуды (12.44), отвечающей причинному обмену фотоном. Члены, не зависящие от A, описывают модифицированную функцию распространения заряженной частицы; члены, линейные по A, определяют модификацию в механизмах однофотонного испускания и поглощения; члены же, квадратичные по A, выполняют аналогичную функцию по отношению к двухфотонным процессам. Возникающая при этом эффективная связь, которая содержит два поля частиц и два поля фотонов, описывает интересующий нас процесс. Мы намерены приступить к решению данной проблемы еще одним и, видимо, более простым способом, рассматривая процесс как единое целое, а не разбивая его на разного рода отдельные акты. Поскольку относительно фотон-электронного рассеяния нет достаточно точных экспериментальных данных, вопрос представляет в основном методологический интерес, и мы ограничимся случаем частиц со спином 0.

Чтобы проиллюстрировать возможности более прямого метода расчета, рассмотрим следующую причинную последовательность. Заряженная частица и фотон сталкиваются, и образуется новая их конфигурация. По истечении некоторого промежутка времени эти частицы снова сталкиваются, а затем детектируются конечные продукты. Таким образом, мы имеем дело с процессом двухчастичного обмена, причем в эффективных испускающем и детектирующем источниках используется механизм рассеяния. Слагаемому действия (3-12.92) соответствует следующее выражение для эффективного испускающего источника:

$$iK(p)\,J^{\mu}(k)\,|_{\text{эфф}} = (2\pi)^4\,\delta(k+p-k_2-p_2)\,2e^2V_2^{\mu\nu}e_{2\nu}\times$$
$$\times(d\omega_{p_2}\,d\omega_{k_2})^{1/2}\,iK_2 iJ_2, \tag{13.1}$$

где

$$V_2^{\mu\nu} = \frac{p^{\mu}p_2^{\nu}}{p_2k_2} - \frac{p_2^{\mu}p^{\nu}}{p_2k} - g^{\mu\nu}. \tag{13.2}$$

Здесь учтены упрощения, обеспечиваемые лоренцевской калибровкой, и введены сокращенные обозначения для источников частиц, участвующих в столкновении. Аналогичный эффективный поглощающий источник дается выражением

$$iK(-p)\,J^{\mu}(-k)\,|_{\text{эфф}} = iK_1^{*}iJ_1^{*}\,(d\omega_{p_1}\,d\omega_{k_1})^{1/2}\,(2\pi)^4\times$$
$$\times\,\delta\,(k_1+p_1-k-p)\,2e^2e^{*}_{1\varkappa}V_1^{\varkappa\mu}, \tag{13.3}$$

где

$$V_1^{\varkappa\mu} = \frac{p_1^{\varkappa}p^{\mu}}{p_1k_1} - \frac{p^{\varkappa}p_1^{\mu}}{p_1k} - g^{\varkappa\mu}. \tag{13.4}$$

Вакуумная амплитуда, описывающая двухчастичный обмен, получается из выражения для связи

$$\int iK(-p)\,J^{\mu}(-k)\,|_{\text{эфф}}\,id\omega_k\,id\omega_p\,iK(p)\,J_{\mu}(k)\,|_{\text{эфф}}. \tag{13.5}$$

Ее можно представить в виде следующего элемента матрицы перехода (индекс c напоминает о наличии причинной упорядоченности событий):

$$\langle 1 \,|\, T \,|\, 2\rangle_c = 2\pi i \,(d\omega_{p_1} \ldots d\omega_{k_2})^{1/2} \times$$
$$\times\, 4e^4 \int d\omega_k \, d\omega_p \,(2\pi)^3 \,\delta\,(k + p - P)\, e_1^* V_1 V_2 e_2, \tag{13.6}$$

где величина

$$P = k_1 + p_1 = k_2 + p_2 \tag{13.7}$$

есть вектор полного импульса. Мы будем пользоваться системой покоя этого вектора, позволяющей выбрать удобную калибровку, в которой

$$Pe_1 = Pe_2 = 0. \tag{13.8}$$

Поскольку каждый вектор поляризации ортогонален и своему собственному импульсу, можно произвести подстановки

$$p_1 e_1 = p_2 e_2 = 0, \quad pe_2 = -\,ke_2, \quad pe_1 = -\,ke_1. \tag{13.9}$$

Тогда

$$e_1^* V_1 V_2 e_2 = e_1^* \left[-1 + \frac{kp_1}{(kp_1)} \right] \left[-1 + \frac{p_2 k}{(kp_2)} \right] e_2 =$$
$$= e_1^* \left[1 - \frac{kp_1}{(kp_1)} - \frac{p_2 k}{(kp_2)} + k\,\frac{(p_1 p_2)}{(kp_1)\,(kp_2)}\, k \right] e_2, \tag{13.10}$$

где круглые скобки служат для того, чтобы отличать скалярные произведения от диад. Можно также написать

$$p_1 e_2 = -\,k_1 e_2, \quad p_2 e_1 = -\,k_2 e_1. \tag{13.11}$$

Однако соответствующие члены после интегрирования все равно исчезают, так как, например, вектор

$$\int d\omega_k \, d\omega_p \,(2\pi)^3 \,\delta\,(k + p - P)\,\frac{k}{kp_1} = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)\left\langle \frac{k}{kp_1} \right\rangle \tag{13.12}$$

может быть линейной комбинацией только векторов P и p_1, но оба они при умножении на вектор e_1^* дают нуль. То же самое можно сказать о величине $\langle k/kp_2 \rangle$ и векторе поляризации e_2. Итак, нам нужны лишь интегралы, входящие в тензор

$$\left\langle \frac{k^\mu k^\nu}{kp_1 kp_2} \right\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dv \left\langle \frac{k^\mu k^\nu}{\left[k\left(\frac{1+v}{2}\, p_1 + \frac{1-v}{2}\, {}_2 \right) \right]^2} \right\rangle. \tag{13.13}$$

Из последнего выражения становится ясным, что выкладки при $p_1 \neq p_2$ ненамного сложнее, чем в случае $p_1 = p_2$. И все же, поскольку результат, который мы получим при рассматриваемой причинной последовательности событий, мы будем использовать только при $p_1 = p_2$, ниже мы примем это условие. Для удобства в вычислениях мы введем произвольный вектор q, который в конечном итоге отождествляется с $p_1 = p_2$:

$$\frac{k^\mu k^\nu}{(kp_2)^2} = -\frac{\partial}{\partial q_\mu}\frac{\partial}{\partial q_\nu}\ln(kq)\,|_{q=p_2}. \tag{13.14}$$

Тем самым необходимые нам интегрирования сводятся к вычислению величины

$$\langle \ln(kq)\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dz\left\{\ln\frac{M^2-m^2}{2M}+\ln\left[\frac{qP}{M}+z\left(q^2+\left(\frac{qP}{M}\right)^2\right)^{1/2}\right]\right\}, \tag{13.15}$$

причем в системе покоя вектора P единственная переменная интегрирования представляет собой косинус угла между векторами **q** и **k**. Дифференцируя один раз, получаем

$$\frac{\partial}{\partial q}\langle \ln(kq)\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dz\frac{\frac{P}{M}+z\left[q^2+\left(\frac{qP}{M}\right)^2\right]^{-1/2}\left[q+\frac{P}{M}\left(\frac{qP}{M}\right)\right]}{\frac{qP}{M}+z\left[q^2+\left(\frac{qP}{M}\right)^2\right]^{1/2}}. \tag{13.16}$$

Но фигурирующий здесь вектор P будет умножаться на один из векторов поляризации, а потому его можно опустить. Следовательно, эффективное значение этой производной таково:

$$\frac{\partial}{\partial q}\langle \ln(kq)\rangle \to \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dzz\frac{q}{\left[q^2+\left(\frac{qP}{M}\right)^2\right]^{1/2}}\frac{1}{\frac{qP}{M}+z\left[q^2+\left(\frac{qP}{M}\right)^2\right]^{1/2}} = -\int_{0}^{1}dzz^2\frac{q}{\left(\frac{qP}{M}\right)^2-z^2\left[q^2+\left(\frac{qP}{M}\right)^2\right]}. \tag{13.17}$$

При следующем, и последнем, дифференцировании можно будет отбросить оба вектора P и $q \to p_2$. Таким образом, существен только вклад, обусловленный дифференцированием вектора q в знаменателе. Это дает

$$\left\langle\frac{k^\mu k^\nu}{(kp_2)^2}\right\rangle \to g^{\mu\nu}\int_0^1 dz\frac{z^2}{\left(\frac{M^2+m^2}{2M}\right)^2-z^2\left(\frac{M^2-m^2}{2M}\right)^2}, \tag{13.18}$$

где мы произвели замену

$$q^2=p_2^2=-m^2,\quad (qP)^2=(p_2P)^2=\left(\frac{M^2+m^2}{2}\right)^2, \tag{13.19}$$

причем M — масса, соответствующая импульсу P.

Наши результаты могут быть выражены через функцию

$$\chi(M^2) = 1 - m^2 \int_0^1 dz \frac{z^2}{\left(\frac{M^2+m^2}{2M}\right)^2 - z^2 \left(\frac{M^2-m^2}{2M}\right)^2}, \qquad (13.20)$$

или

$$\chi(M^2) = 1 - \frac{4m^2M^2}{M^2-m^2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dz \frac{z}{M^2+m^2-z(M^2-m^2)} =$$

$$= 1 - \frac{2m^2M^2}{(M^2-m^2)^2} \left[\frac{M^2+m^2}{M^2-m^2} \ln \frac{M^2}{m^2} - 2\right], \qquad (13.21)$$

которая имеет простые предельные значения, а именно:

$$\begin{aligned} M^2 = m^2: &\quad \chi(M^2) = \frac{2}{3}, \\ M^2 \gg m^2: &\quad \chi(M^2) = 1. \end{aligned} \qquad (13.22)$$

Элемент причинной матрицы перехода равен

$$\langle 1 | T | 2 \rangle_c = 2\pi i (d\omega_{p_1} \ldots d\omega_{k_2})^{1/2} 4\alpha^2 e_1^* e_2 \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right) \chi(M^2). \quad (13.23)$$

Проводя его пространственно-временну́ю экстраполяцию, напишем

$$(2\pi)^4 \delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2) =$$

$$= \int (2\pi)^4 \delta(k_1 + p_1 - P) \frac{(dP)}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(P - k_2 - p_2) =$$

$$= \int (dx)(dx') \exp[-i(k_1+p_1)x] \frac{dM^2}{2\pi i} \left[i \int d\omega_P \exp[iP(x-x')]\right] \times$$

$$\times \exp[i(k_2+p_2)x'], \qquad (13.24)$$

где

$$i \int d\omega_P \exp[iP(x-x')] \to \int \frac{(dp)}{(2\pi)^4} \frac{\exp[ip(x-x')]}{p^2+M^2-i\varepsilon}. \qquad (13.25)$$

Кроме того, пропадает различие между полями начальных и конечных частиц, что приводит к кроссинг-симметрии

$$e_1^* \leftrightarrow e_2, \quad k_1 \leftrightarrow -k_2, \qquad (13.26)$$

или

$$p_1 \leftrightarrow -p_2. \qquad (13.27)$$

Чтобы после таких экстраполяций сохранялась калибровочная инвариантность, векторы поляризации в формуле (13.23) следует предварительно заменить эквивалентными комбинациями напряженностей поля:

$$
\begin{aligned}
e_1 &\to -\frac{1}{\frac{1}{2}(M^2-m^2)}\left[(p_1k_1)\,e_1-(p_1e_1)\,k_1\right],\\
e_2 &\to -\frac{1}{\frac{1}{2}(M^2-m^2)}\left[(p_2k_2)\,e_2-(p_2e_2)\,k_2\right].
\end{aligned}
\tag{13.28}
$$

Проводя вычисления в калибровке, в которой векторы поляризации ортогональны импульсу частицы (или полному импульсу), мы тогда для элемента матрицы перехода, описывающего рассеяние вперед, окончательно получаем

$$
\begin{aligned}
\langle 1\,|\,T\,|\,2\rangle = &-(d\omega_{p_1}\,\ldots\,d\omega_{k_2})^{1/2}\,8\pi\alpha e_1^*e_2+\\
&+(d\omega_{p_1}\,\ldots\,d\omega_{k_2})^{1/2}\,4\alpha^2 e_1^*e_2\,(2p_2k_2)^2\times\\
&\times\int\limits_{m^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\,\frac{\chi(M^2)}{M^2-m^2}\left[\frac{1}{(p_2+k_2)^2+M^2-i\varepsilon}+\frac{1}{(p_2-k_2)^2+M^2}\right],
\end{aligned}
\tag{13.29}
$$

причем спектральный интеграл может быть представлен также в виде

$$
2\int\limits_{m^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\,\chi(M^2)\,\frac{1}{(M^2-m^2)^2-(2p_2k_2)^2-i\varepsilon}\,. \tag{13.30}
$$

Отметим, что теперь мы включили и член, являющийся непосредственным следствием примитивного взаимодействия, — он дается формулой (3-12.98), написанной применительно к рассеянию вперед.

Полученный результат можно проверить, вычислив на его основании полное сечение рассеяния фотона на частице. О таком вычислении говорилось в § 11 и 12. Для этого нужно вычислить вероятность сохранения начальной конфигурации частиц, несмотря на влияние, оказываемое взаимодействием. Анализ, проведенный в гл. 3, § 12, где была введена матрица перехода, показывает, что вакуумная амплитуда с сохранением заданного двухчастичного состояния равна (в сокращенных обозначениях)

$$
\langle 2\mid 2\rangle = 1 + iV\,\langle 2\mid T\mid 2\rangle, \tag{13.31}
$$

где V — четырехмерный объем, в котором происходит взаимодействие. Отсюда мы находим вероятность сохранения

$$
|\langle 2\mid 2\rangle|^2 = 1 - 2V\,\mathrm{Im}\,\langle 2\mid T\mid 2\rangle \tag{13.32}
$$

и сразу же получаем дополняющую ее до единицы полную вероятность процесса рассеяния. Этой вероятности, отнесенной к единице объема и к единичному инвариантному потоку F начальных частиц, соответствует следующее полное сечение:

$$\sigma = \frac{2}{F} \operatorname{Im} \langle 2 | T | 2 \rangle. \tag{13.33}$$

В рассматриваемом нами случае, когда масса одной из частиц равна нулю, формулы (3-12.68) и (3-12.69) дают для потока

$$F = d\omega_{p_2} d\omega_{k_2} 2 (-2k_2 p_2), \quad -2k_2 p_2 = M^2 - m^2, \tag{13.34}$$

и мы заключаем, что

$$\sigma = 4\pi\alpha^2 \frac{\chi(M^2)}{M^2}. \tag{13.35}$$

В предельных случаях (13.22) мы действительно получаем те же выражения, что и в формуле (3-12.118), и полное сечение, найденное интегрированием выражения (3-12.117), согласуется с общим выражением (13.21) для функции $\chi(M^2)$.

Действительную часть спектрального интеграла (13.30) удобно вычислить, подставив для $\chi(M^2)$ интегральное выражение (13.21) и взяв сначала интеграл по M^2. Результат таков (индексы опущены):

$$-P \int \frac{dM^2}{M^2} \frac{\chi(M^2)}{(M^2 - m^2)^2 - (2pk)^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{m^4 - (2pk)^2} + \int_{-1}^{1} dz \frac{z(1-z)^2}{4m^4 - (1-z)^2 (2pk)^2} \right] \ln \left(\frac{m^2}{-2pk} \right) +$$

$$+ \int_{-1}^{1} dz \frac{z(1-z)^2}{4m^4 - (1-z)^2 (2pk)^2} \ln \left(\frac{2}{1-z} \right). \tag{13.36}$$

При низких энергиях фотона правая часть сводится к

$$-\frac{pk}{m^2} \ll 1: \quad \frac{2}{3} \frac{1}{m^4} \left[\ln \left(\frac{m^2}{-2pk} \right) - \frac{1}{24} \right], \tag{13.37}$$

а в другом предельном случае она принимает вид

$$-\frac{pk}{m^2} \gg 1: \quad \frac{1}{(2pk)^2} \left[\ln \left(\frac{-2pk}{m^2} \right) - 1 \right]. \tag{13.38}$$

Выразив в двух предельных случаях дифференциальное сечение рассеяния вперед через энергию фотона в системе покоя частицы, т. е. через

$$k^0 = -\frac{pk}{m}, \tag{13.39}$$

мы получим

$$k^0 \ll m: \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 |e_1^* \cdot e_2|^2 \left[1 + \frac{16\alpha}{3\pi}\left(\frac{k^0}{m}\right)^2 \left(\ln\frac{m}{2k^0} - \frac{1}{24}\right)\right], \tag{13.40}$$

$$k^0 \gg m: \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2mk^0} |e_1^* \cdot e_2|^2 \left[1 + \frac{2\alpha}{\pi}\left(\ln\frac{2k^0}{m} - 1\right)\right]. \tag{13.41}$$

Отметим, что здесь не возникают какие-либо инфракрасные трудности, поскольку заряженная частица не отклоняется, и что сечение увеличивается по сравнению с его значением, к которому приводит скелетная схема взаимодействий. Независимо от начальной поляризации величина $|e_1^* \cdot e_2|^2$ при суммировании по конечным поляризациям заменяется единицей.

В случае фотон-фотонного рассеяния простая спектральная форма, возникающая при рассмотрении рассеяния вперед, будучи взятой вместе с двойной спектральной формой, полностью определяла матрицу перехода. Данный же случай, когда участвуют два поля частиц и два поля фотонов, оказывается более сложным, так как возможны два разных варианта причинной последовательности при рассеянии вперед. В качестве второго варианта можно взять столкновение двух фотонов с образованием пары частиц, которая затем участвует в рассеивающем взаимодействии. Это двухфотонный аналог последовательности, рассматривавшейся в § 4. Но здесь вместо виртуального фотона рассматриваются реальные фотоны. В системе центра масс случаю рассеяния вперед отвечает требование, чтобы направления противоположно движущихся заряженных частиц совпадали с направлениями противоположно движущихся фотонов. Эффективный двухчастичный источник, который опять можно получить из формулы (3-12.92), имеет вид

$$iK(p_2)K(p_2')|_{\text{эфф}} = (2\pi)^4 \delta(p_2 + p_2' - k - k') 2e^2 e_\mu V^{\mu\nu} e_\nu' \times \\ \times (d\omega_k d\omega_{k'})^{1/2} iJ_2 iJ_{2'}, \tag{13.42}$$

где (в диадных обозначениях)

$$V = \frac{p_2 p_2'}{(p_2 k)} + \frac{p_2' p_2}{(p_2 k')} - 1. \tag{13.43}$$

Этот источник и следует подставить в ту часть вакуумной амплитуды (4.4), которая описывает кулоновское рассеяние. Конечно, присутствует также и член, отвечающий аннигиляционному механизму, но в него входят эффективные источники, антисимметричные по p_2 и p_2', тогда как источник (13.42) симметричен. В результате для элемента матрицы перехода, соответствующего нашей причинной последовательности, получаем (ненужные здесь причинные индексы опущены)

$$\langle 1|T|2\rangle_c = -2\pi i\,(d\omega_p\ \ldots\ d\omega_{k'})^{1/2}\,2e^4\times$$
$$\times\int d\omega_{p_2}\,d\omega_{p_2'}\,(2\pi)^3\,\delta(p_2+p_2'-k-k')\times$$
$$\times\frac{(p+p_2)(p'+p_2')}{(p-p_2)^2}\,eVe'. \qquad (13.44)$$

Процедуру интегрирования, необходимую для вычисления тензорного среднего значения

$$\Lambda^{\mu\nu}=\left\langle\frac{(p+p_2)(p'+p_2')}{(p-p_2)^2}\,V^{\mu\nu}\right\rangle, \qquad (13.45)$$

можно упростить, учитывая, что рассматривается рассеяние вперед. Соответствующее условие, записанное в ковариантной форме, имеет вид

$$p-p'=\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}(k-k'), \qquad (13.46)$$

где

$$M^2=-(k+k')^2=-(p+p')^2. \qquad (13.47)$$

Поэтому тензор Λ следует строить из векторов k и k' в различных их комбинациях kk, $k'k'$, kk', $k'k$ и из единичного тензора. Но имеются также и ограничения, накладываемые калибровочными свойствами

$$kV=k',\quad Vk'=k. \qquad (13.48)$$

Они находят свое выражение в записи

$$\Lambda=a\left(1-\frac{k'k}{(kk')}\right)+bkk'+c\,(kk+k'k'). \qquad (13.49)$$

Но в окончательный результат входит только коэффициент $a\,(M^2)$:

$$\langle 1|T|2\rangle_c=2\pi i\,(d\omega_p\ \ldots\ d\omega_{k'})^{1/2}\,4\alpha^2\times$$
$$\times\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}\frac{a\,(M^2)}{M^2}\,e\,((kk')-k'k)\,e'. \qquad (13.50)$$

Информацию, необходимую для построения $a\,(M^2)$, можно получить, образовав след тензора Λ:

$$-\left\langle\frac{(p+p_2)(p'+p_2')}{(p-p_2)^2}\left[4+\frac{1}{2}(M^2-2m^2)\left(\frac{1}{p_2k}+\frac{1}{p_2k'}\right)\right]\right\rangle=$$
$$=3a-\frac{1}{2}M^2b, \qquad (13.51)$$

и вычислив $k'\Lambda k$:

$$\left\langle\frac{(p+p_2)(p'+p_2')}{(p-p_2)^2}\left[\frac{1}{2}M^2+\frac{(p_2k')^2}{p_2k}+\frac{(p_2k)^2}{p_2k'}\right]\right\rangle=$$
$$=-\frac{1}{2}M^2a+\left(\frac{1}{2}M^2\right)^2b. \qquad (13.52)$$

С учетом соотношения

$$p_2k + p_2k' = -\frac{1}{2}M^2 \tag{13.53}$$

выражение (13.52) можно упростить:

$$\left\langle \frac{(p+p_2)(p'+p_2')}{(p-p_2)^2}\left[4+\frac{1}{2}M^2\left(\frac{1}{p_2k}+\frac{1}{p_2k'}\right)\right]\right\rangle = \\ = -a+\frac{1}{2}M^2b. \tag{13.54}$$

Сложив эту величину с величиной (13.51), получим

$$a(M^2) = \frac{1}{2}m^2\left\langle \frac{(p+p_2)(p'+p_2')}{(p-p_2)^2}\left[\frac{1}{p_2k}+\frac{1}{p_2k'}\right]\right\rangle. \tag{13.55}$$

Эквивалентный этому выражению интеграл по углу рассеяния в системе центра масс выглядит следующим образом (мы опять вводим массу фотона μ):

$$a(M^2) = \frac{2m^2}{M^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dz\left[\frac{2(M^2-2m^2)}{\left(\frac{M^2}{4}-m^2\right)2(1-z)+\mu^2}-1\right]\times \\ \times\left[\frac{1}{1-z\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}}+\frac{1}{1+z\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}}\right] = \\ = 2\,\frac{M^2-2m^2}{M^2-4m^2}\ln\frac{M^2-4m^2}{\mu^2}-2\,\frac{1-\frac{m^2}{M^2}}{\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}}\times \\ \times\ln\frac{1+\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}}{1-\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}}. \tag{13.56}$$

Чтобы провести пространственно-временну́ю экстраполяцию амплитуды вероятности (13.50), напишем

$$(2\pi)^4\delta(p+p'-k-k') = \int (2\pi)^4\delta(p+p'-P)\frac{(dP)}{(2\pi)^4}\delta(P-k-k') = \\ = \int (dx)(dx')\exp[-i(p+p')x]\frac{dM^2}{2\pi i}\times \\ \times\left[i\int d\omega_P\exp[iP(x-x')]\right]\exp[i(k+k')x'] \to \\ \to (2\pi)^4\delta(p+p'-k-k')\int\frac{dM^2}{2\pi i}\,\frac{1}{(k+k')^2+M^2-i\varepsilon}, \tag{13.57}$$

где под знаком интеграла стоят некоторые дополнительные функции от M^2. Соответствующий вклад в элемент матрицы физического перехода равен

$$(d\omega_p \ldots d\omega_{k'})^{1/2} 4\alpha^2 e ((kk') - k'k) e' \times$$
$$\times \int_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2} \left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2} a(M^2) \frac{1}{(k+k')^2 + M^2 - i\varepsilon}. \quad (13.58)$$

Такой вывод мы сделали, основываясь непосредственно на выражении (13.50), так как оно уже представлено в калибровочно-инвариантном виде.

Рассмотрим теперь причинную последовательность, которая приводит к двойной спектральной форме. (Рекомендуем читателю нарисовать каузальную диаграмму ромбовидной формы для описываемого процесса.) Обобщенный фотонный источник, испускающий времениподобный импульс K_2, порождает пару частица — античастица. Одна из этих частиц проходит вблизи еще одного обобщенного фотонного источника, где ей передается пространственно-подобный импульс K_a. Другая же попадает в окрестность обобщенного источника частиц, где при слиянии этой частицы с виртуальной (анти)частицей с импульсом P_a рождается фотон. Затем фотон и частица, возникающие на этих промежуточных стадиях, объединяются и детектируются обобщенным источником частиц, который поглощает импульс

$$P_1 = K_2 + K_a + P_a. \quad (13.59)$$

В этой схеме участвуют реальный фотон с импульсом k и три реальные частицы с импульсами p', p'', p'''. Эти импульсы определяются законами сохранения, соответствующими каждому акту взаимодействия:

$$K_2 = p'' + p''', \quad P_a = k - p''',$$
$$K_a = p' - p'', \quad P_1 = k + p'. \quad (13.60)$$

Таким образом, импульс частицы, которая детектируется вместе с фотоном, равен

$$p' = P_1 - k, \quad (13.61)$$

импульс частицы, которая участвует в рождении фотона, есть

$$p''' = k - P_a, \quad (13.62)$$

а для оставшегося импульса имеем

$$p'' = K_2 + P_a - k = P_1 - k - K_a. \quad (13.63)$$

Рассматриваемый процесс представляет собой однофотонный обмен, при котором частица последовательно взаимодействует с полями A_2 и A_a. В символической форме записи ему отвечает следующая вакуумная амплитуда:

$$\int i\ d\omega_k \varphi_1 eq\,[p \exp(ikx) + \exp(ikx)\,p]\ \Delta_+ eq\,(pA_a + A_a p) \times$$
$$\times \Delta_+ eq\,(pA_2 + A_2 p)\ \Delta_+ eq\,[p \exp(-ikx) + \exp(-ikx)\,p]\ \varphi_a. \qquad (13.64)$$

В явном виде она представляется как

$$e^4 \int \frac{(dP_1)}{(2\pi)^4} \frac{(dP_a)}{(2\pi)^4} \frac{(dK_a)}{(2\pi)^4} \frac{(dK_2)}{(2\pi)^4} (2\pi)^4\, \delta(P_1 - P_a - K_a - K_2) \times$$
$$\times \varphi_1(-P_1)\, A_a^{\mu}(K_a)\, A_2^{\nu}(K_2)\, \varphi_a(P_a)\, I_{\mu\nu}, \qquad (13.65)$$

где

$$I_{\mu\nu} = \int (dk)\, \delta(k^2 + \mu^2)\ \delta[(P_1 - k)^2 + m^2]\ \delta[(P_1 - k - K_a)^2 + m^2] \times$$
$$\times \delta[(P_a - k)^2 + m^2]\,(2P_1 - k)\,(2P_a - k) \times$$
$$\times [2(P_1 - k) - K_a]_{\mu}\,[2(P_a - k) + K_2]_{\nu}. \qquad (13.66)$$

По поводу последнего выражения заметим, что импульсный множитель, с которым входит в выражение для связи поле A_a^{μ}, равен $(p' + p'')_{\mu}$, так как им обусловлено отклонение частицы с заданным зарядом, поле же A_2^{ν}, рождающее пару частиц с противоположными зарядами, умножается на $(p'' - p''')_{\nu}$. Соответствующие законы сохранения, или условия калибровочной инвариантности, имеют вид

$$K_a^{\mu} I_{\mu\nu} = 0, \quad I_{\mu\nu} K_2^{\nu} = 0. \qquad (13.67)$$

Двум независимым способам рассмотрения возбуждений, распространяющихся в нашей системе, отвечают спектральные массы

$$M^2 = -(P_a + K_2)^2 = -(P_1 - K_a)^2 > m^2 \qquad (13.68)$$

и

$$M'^2 = -(K_2 + K_a)^2 = -(P_1 - P_a)^2 > 4m^2. \qquad (13.69)$$

Первая относится к распространению частицы и фотона, а вторая к паре частица — античастица. [Конечно, первое неравенство следует записывать как $M^2 > (m + \mu)^2$; в формуле (13.68) мы указали физический нижний предел.] Введем также массы

$$M_1^2 = -P_1^2, \quad M_a^2 = -P_a^2. \qquad (13.70)$$

В конечном итоге мы их экстраполируем, переходя от значений, соответствующих причинной последовательности, к интересующему нас значению m^2, которое отвечает истинному процессу рассеяния. Набор шести скалярных кинематических величин (двенадцать компонент трех независимых векторов с исключенными шестью параметрами группы Лоренца) получим, включая также скаляры K_a^2 и K_2^2, которые впоследствии мы положим равными нулю. Дельта-функции в формуле (13.66) приводят к соотношениям вида (масса фотона здесь опущена)

$$-2kP_1 = M_1^2 - m^2, \quad -2kP_a = M_a^2 - m^2,$$
$$-2kK_a = M_1^2 - M^2, \quad -2kK_2 = M^2 - M_a^2. \tag{13.71}$$

Выполняются также соотношения

$$2P_1P_a = M'^2 - M_1^2 - M_a^2, \quad -2K_2K_a = M'^2 + K_2^2 + K_a^2, \tag{13.72}$$

$$-2K_2P_a = M^2 - M_a^2 + K_2^2, \quad 2K_aP_1 = M^2 - M_1^2 + K_a^2,$$
$$-2K_2P_1 = M^2 + M'^2 - M_a^2 + K_a^2,$$
$$2K_aP_a = M^2 + M'^2 - M_1^2 + K_2^2. \tag{13.73}$$

В качестве применения этих формул отметим, что

$$(2P_1 - k)(2P_a - k) = 2M'^2 - M_1^2 - M_a^2 - 2m^2. \tag{13.74}$$

Основной интеграл в выражении (13.66) имеет вид

$$I = \int (dk)\,\delta(k^2 + \mu^2)\,\delta(2kP_1 + M_1^2 - m^2) \times$$
$$\times \delta(2kK_2 + M^2 - M_a^2)\,\delta(2kP_a + M_a^2 - m^2) =$$
$$= \int (d\varkappa)\,\delta\left[\varkappa^2 + \mu^2 + \frac{(M_a^2 - M^2)^2}{4K_2^2}\right] \times$$
$$\times \delta\left(2\varkappa P_1 + M_1^2 - m^2 + \frac{M_a^2 - M^2}{K_2^2} K_2P_1\right) \times$$
$$\times \delta(2\varkappa K_2)\,\delta\left(2\varkappa P_a + M_a^2 - m^2 + \frac{M_a^2 - M^2}{K_2^2} K_2P_a\right), \tag{13.75}$$

где

$$k = \varkappa + \frac{M_a^2 - M^2}{2K_2^2} K_2. \tag{13.76}$$

Он очень похож на интеграл (10.7), и точно так же

$$I = \frac{1}{8(-\Delta)^{1/2}}, \tag{13.77}$$

где

$$(-\Delta)^{1/2} = |\,\varepsilon_{\varkappa\lambda\mu\nu} K_2^{\varkappa} P_a^{\lambda} P_1^{\mu} \varkappa^{\nu}\,|. \tag{13.78}$$

Для вектора $\varkappa^\mu$ можно написать следующее общее выражение [формула (10.13)]:

$$\varkappa^\mu = a\left(P_a - K_2\frac{K_2P_a}{K_2^2}\right)^\mu + b\left(P_1 - K_2\frac{K_2P_1}{K_2^2}\right)^\mu +$$
$$+ c\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda} P_{a\nu} P_{1\varkappa} K_{2\lambda}. \tag{13.79}$$

Чтобы получить уравнения, позволяющие найти a и b, умножим обе части равенства (13.79) на векторы P_a и P_1:

$$-\frac{1}{2}\left(M_a^2-m^2+\frac{M_a^2-M^2}{K_2^2}K_2P_a\right)=a\left(-M_a^2-\frac{(K_2P_a)^2}{K_2^2}\right)+$$
$$+b\left(P_aP_1-\frac{P_aK_2K_2P_1}{K_2^2}\right),\quad -\frac{1}{2}\left(M_1^2-m^2+\frac{M_a^2-M^2}{K_2^2}K_2P_1\right)=$$
$$=a\left(P_1P_a-\frac{P_1K_2K_2P_a}{K_2^2}\right)+b\left(-M_1^2-\frac{(K_2P_1)^2}{K_2^2}\right). \qquad (13.80)$$

Определитель этой системы равен

$$D=\left(-M_a^2-\frac{(K_2P_a)^2}{K_2^2}\right)\left(-M_1^2-\frac{(K_2P_1)^2}{K_2^2}\right)-\left(P_aP_1-\frac{P_aK_2P_1K_2}{K_2^2}\right)^2=$$
$$=M_a^2M_1^2-(P_aP_1)^2+\frac{1}{K_2^2}\times$$
$$\times[M_a^2(K_2P_1)^2+M_1^2(K_2P_a)^2+2P_aP_1P_aK_2P_1K_2]. \qquad (13.81)$$

Для квадрата вектора (13.79) имеем

$$\varkappa^2=-\mu^2-\frac{(M_a^2-M^2)^2}{4K_2^2}=$$
$$=-\frac{1}{2}a\left(M_a^2-m^2+\frac{M_a^2-M^2}{K_2^2}K_2P_a\right)-$$
$$-\frac{1}{2}b\left(M_1^2-m^2+\frac{M_a^2-M^2}{K_2^2}K_2P_1\right)+c^2(-K_2^2D), \qquad (13.82)$$

где для того, чтобы интеграл (13.75) отличался от нуля, должно выполняться условие

$$c^2(-K_2^2D)>0. \qquad (13.83)$$

Сравнивая с (13.82) другое выражение

$$\varkappa^2=a\varkappa P_a+b\varkappa P_1+c\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}\varkappa_\mu P_{a\nu}P_{1\varkappa}K_{2\lambda}, \qquad (13.84)$$

получаемое путем умножения (13.79) на $\varkappa_\mu$, получим

$$c^2(-K_2^2D)=|c|(-\Delta)^{1/2}, \qquad (13.85)$$

или

$$-\Delta=(-K_2^2D)(-K_2^2Dc^2). \qquad (13.86)$$

Для иллюстрации приведенных соотношений рассмотрим непосредственно интересующий нас случай, когда

$$M_1^2=M_a^2=m^2,\quad K_a^2=K_2^2=0, \qquad (13.87)$$

хотя к значению $K_2^2=0$ следует переходить путем вычисления соответствующего предела. Приведем для удобства значения различных скаляров в этом пределе:

$$\begin{gathered}2P_1P_a \to M'^2 - 2m^2; \quad -2K_2K_a \to M'^2;\\ 2K_aP_1, -2K_2P_a \to M^2 - m^2;\\ 2K_aP_a, -2K_2P_1 \to M^2 + M'^2 - m^2.\end{gathered} \tag{13.88}$$

Далее,

$$K_2^2 D \to \frac{1}{4} M'^2 [(M^2 - m^2)^2 + M^2M'^2], \tag{13.89}$$

а решения уравнений (13.80) при $M_1^2 = M_a^2 = m^2$, имеющие вид

$$\begin{aligned}K_2^2 Da &= -\frac{1}{2}(M^2 - m^2)[m^2K_2P_a + K_2P_1P_aP_1],\\ K_2^2 Db &= -\frac{1}{2}(M^2 - m^2)[m^2K_2P_1 + K_2P_aP_1P_a],\end{aligned} \tag{13.90}$$

дают

$$\begin{aligned}a &\to \frac{1}{2}\frac{(M^2 - m^2)(M^2 + M'^2 - 3m^2)}{(M^2 - m^2)^2 + M^2M'^2},\\ b &\to \frac{1}{2}\frac{(M^2 - m^2)(M^2 + m^2)}{(M^2 - m^2)^2 + M^2M'^2}.\end{aligned} \tag{13.91}$$

Условие существования интеграла в случае $M_1^2 = M_a^2 = m^2$ записывается так:

$$-\frac{1}{2K_2^2}(M^2 - m^2)\left[K_2P_aa + K_2P_1b + \frac{1}{2}(M^2 - m^2)\right] - \mu^2 > 0. \tag{13.92}$$

Воспользовавшись линейными уравнениями (13.80), можно будет вычислить комбинацию (13.92) двумя эквивалентными способами:

$$\begin{aligned}\frac{1}{K_2^2}\left[K_2P_aa + K_2P_1b + \frac{1}{2}(M^2 - m^2)\right] &= \frac{1}{K_2P_a}(-m^2a + P_1P_ab) =\\ &= \frac{1}{K_2P_1}(P_1P_aa - m^2b).\end{aligned} \tag{13.93}$$

В итоге неравенство (13.92) в рассматриваемом пределе будет иметь вид

$$\frac{1}{4}\frac{(M^2 - m^2)^2(M'^2 - 4m^2)}{(M^2 - m^2)^2 + M^2M'^2} > \mu^2. \tag{13.94}$$

В случае когда можно не учитывать фиктивную массу фотона, это неравенство просто содержит в себе независимые спектральные условия

$$M^2 > m^2, \quad M'^2 > 4m^2. \tag{13.95}$$

Но если наличие конечной массы у фотона существенно, то ни один из входящих сюда нижних пределов не достигается. Эта спектральная область с достаточной точностью задается неравенством

$$M^2 - m^2 > \frac{2m\mu}{[1-(4m^2/m'^2)]^{1/2}}. \tag{13.96}$$

Из соотношения (13.86) вытекает следующее предельное выражение для Δ:

$$\Delta \to \frac{1}{16}(M^2-m^2)^2 M'^2 (M'^2-4m^2) - \\ -\frac{1}{4}\mu^2 M'^2 [(M^2-m^2)^2 + M^2 M'^2]. \tag{13.97}$$

В соответствии с упрощением, принятым в формуле (13.96), в коэффициенте при μ^2 с достаточно хорошим приближением можно M^2 заменить на m^2.

Как и при анализе фотон-фотонного рассеяния, величина Δ, получаемая путем экстраполяции, оказывается положительной, и приходится выбирать одно из значений

$$(-\Delta)^{1/2} = \pm i\Delta^{1/2}. \tag{13.98}$$

И здесь это достигается сравнением каузального и некаузального решений сходной, но упрощенной задачи. С этой целью нужно вычислить интеграл (в D_+ входит масса фотона)

$$J = \int (dx) \ldots (dx''') D_+(x'''-x) \exp(ipx) \Delta_+(x-x') \times \\ \times \Delta_+(x'-x'') \Delta_+(x''-x''') \exp(-ip'x'''), \tag{13.99}$$

где

$$p^2 + m^2 = 0, \tag{13.100}$$

двумя разными способами — сначала некаузальным методом, при котором функции распространения записываются в четырехмерном виде:

$$J = (2\pi)^4 \delta(p-p') J_0, \\ J_0 = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2+\mu^2-i\varepsilon} \left[\frac{1}{(k-p)^2+m^2-i\varepsilon}\right]^3, \tag{13.101}$$

а затем с использованием двойной спектральной формы, при помощи которой проводится пространственно-временная экстраполяция амплитуды, описывающей причинную последовательность событий. Кинематический интеграл имеет вид (13.75), причем нас интересует только результат его экстраполяции на случай $K_2 = K_a = 0$ и $P_1 = P_a = p$. Вводя двойные спектральные формы тем же способом, что и при анализе, приводящем к формуле (10.36), мы вместо (13.101) получим следующее выражение:

$$J_0 = -\int \frac{dM^2}{2\pi} \frac{dM'^2}{2\pi} \frac{1}{M^2-m^2} \frac{1}{M'^2} \frac{1}{8(\pm i)\Delta^{1/2}}. \tag{13.102}$$

Первый же метод расчета J_0 основывается на использовании параметрического представления обеих функций распространения, фигурирующих в формуле (13.101):

$$J_0=\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left[\int_0^\infty i\,ds_1\frac{(is_1)^2}{2}\exp\{-is_1[(k-p)^2+m^2]\}\right]\times$$

$$\times\left[\int_0^\infty i\,ds_2\exp[-is_2(k^2+\mu^2)]\right]. \qquad (13.103)$$

Произведя замену переменных

$$s_1=su,\quad s_2=s(1-u),\quad ds_1ds_2=sdsdu,$$
$$0<s<\infty,\quad 0<u<1, \qquad (13.104)$$

перепишем J_0 в виде

$$J_0=\int\frac{1}{2}duu^2dss^3\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\exp\{-is[k^2-2kpu+\mu^2(1-u)]\}. \qquad (13.105)$$

При интегрировании по импульсу мы сначала выделим полный квадрат

$$k^2=2kpu=(k-pu)^2+m^2u^2, \qquad (13.106)$$

а затем воспользуемся обычной формулой (8.57). Это дает

$$J_0=-\frac{i}{32\pi^2}\int_0^1 duu^2\int_0^\infty dss\exp\{-is[m^2u^2+\mu^2(1-u)]\}=$$

$$=\frac{i}{32\pi^2}\int_0^1 du\frac{u^2}{[m^2u^2+\mu^2(1-u)]^2}. \qquad (13.107)$$

Поскольку входящий сюда интеграл положителен, сравнение его с выражением (13.102) решает вопрос о выборе $\pm i$ в пользу $+i$. Убедимся, однако, также и в совпадении обоих численных множителей, по крайней мере при $\mu/m\ll 1$.

Ввиду того что член с μ^2 в знаменателе существен только в том случае, когда u очень мало, множитель $1-u$ можно заменить просто единицей. Но тогда, вводя переменную

$$x=\frac{m}{\mu}u,\quad 0<x<\frac{m}{\mu}\sim\infty, \qquad (13.108)$$

мы в этом приближении получаем

$$J_0=\frac{i}{32\pi^2}\frac{1}{m^3\mu}\int_0^\infty dx\frac{x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{i}{128\pi}\frac{1}{m^3\mu}. \qquad (13.109)$$

Альтернативная же выкладка дает

$$J_0 = i\int \frac{dM^2}{2\pi}\frac{dM'^2}{2\pi}\frac{1}{M^2-m^2}\frac{1}{M'^2}\frac{1}{2}\frac{1}{M'(M'^2-4m^2)^{1/2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[(M^2-m^2)^2-4\mu^2m^2\dfrac{M'^2}{M'^2-4m^2}\right]^{1/2}}. \qquad (13.110)$$

Если ввести переменную y по формуле

$$M^2-m^2 = 2\mu m\frac{M'}{(M'^2-4m^2)^{1/2}}y, \quad 1<y<\infty, \qquad (13.111)$$

то будем иметь

$$J_0 = \frac{i}{16\pi^2}\frac{1}{m\mu}\int_1^\infty \frac{dy}{y}\frac{1}{(y^2-1)^{1/2}}\int_{(2m)^2}^\infty \frac{dM'^2}{(M'^2)^2} = \frac{i}{128\pi}\frac{1}{m^3\mu}. \qquad (13.112)$$

Из формул (13.76) и (13.79) вытекает следующее явное выражение для вектора импульса фотона:

$$k^\mu = aP_a^\mu + bP_1^\mu + c\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}P_{a\nu}P_{1\varkappa}K_{2\lambda} + dK_2^\mu, \qquad (13.113)$$

где в соответствии с (13.93)

$$d = -\frac{1}{K_2^2}\left[K_2P_aa + K_2P_1b + \frac{1}{2}(M^2-m^2)\right] \to$$

$$\to \frac{1}{2}\frac{(M^2-m^2)(M'^2-4m^2)}{(M^2-m^2)^2+M^2M'^2}. \qquad (13.114)$$

Заметим, что предельные значения коэффициентов связаны соотношением

$$d = a - b. \qquad (13.115)$$

Вспомним также, что у коэффициента c фиксирована только абсолютная величина, а потому можно использовать среднее значение по обоим знакам этого коэффициента (основной интеграл I уже содержит двойку в качестве сомножителя). Из равенства (13.86) для экстраполированного значения величины c^2 получаем

$$-c^2 \to \left(1-\frac{4m^2}{M'^2}\right)\frac{(M^2-m^2)^2}{[(M^2-m^2)^2+M^2M'^2]^2}. \qquad (13.116)$$

Векторные комбинации, входящие в выражение (13.66), можно представить следующим образом:

$$[2(P_1-k)-K_a]^\mu = (1-a-b)(P_1+P_a)^\mu - (a-b)K_a^\mu +$$

$$+(1-a+b)K_2^\mu + 2c\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}P_{a\nu}P_{1\varkappa}K_{a\lambda},$$

$$[2(P_a-k)+K_2]^\mu =$$

$$= (1-a-b)(P_1+P_a)^\mu - (a-b)K_2^\mu - (1-a+b)K_a^\mu -$$

$$-2c\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}P_{a\nu}P_{1\varkappa}K_{2\lambda}, \qquad (13.117)$$

где использованы преобразования типа

$$P_1 = \frac{1}{2}(P_1 + P_a) + \frac{1}{2}(K_2 + K_a). \tag{13.118}$$

Имеется одно соотношение между a и b, диктуемое условиями калибровочной инвариантности:

$$0 = K_a[2(P_1 - k) - K_a] = K_2[2(P_a - k) + K_2] = \\ = (M^2 - m^2)(1 - a - b) - M'^2 b. \tag{13.119}$$

Оно действительно выполняется, так как

$$1 - a - b = \frac{1}{2}\frac{M'^2(M^2 + m^2)}{(M^2 - m^2)^2 + M^2M'^2}. \tag{13.120}$$

После пространственно-временны́х экстраполяций, которые мы собираемся проводить, калибровочная инвариантность не будет, вообще говоря, сохраняться, если не считать членов с коэффициентом c. Поэтому нужно сделать так, чтобы она выступала в явном виде уже на исходной стадии, когда рассматривается причинная последовательность событий. Как и в случае фотон-фотонного рассеяния, этого можно добиться разными способами. Один из возможных вариантов основан на калибровочном преобразовании

$$\begin{gathered} A_a(K_a) \to \frac{1}{\frac{1}{2}M'^2}[-(K_aK_2) + K_a(K_2 + K_a)]A_a(K_a), \\ A_2(K_2) \to \frac{1}{\frac{1}{2}M'^2}[-(K_aK_2) + K_2(K_2 + K_a)]A_2(K_2). \end{gathered} \tag{13.121}$$

Новые выражения обращаются в нуль при умножении на $K_2 + K_a$. Если выбрать затем лоренцевскую калибровку, то при скалярном умножении на любой из импульсов фотона эти комбинации также обратятся в нуль. Это позволяет нам тоже заменить сумму $P_1 + P_a$, когда она выступает в качестве сомножителя при векторных потенциалах, либо величиной $2P_1$, либо величиной $2P_a$. В результате мы имеем

$$A_a(K_2)[2(P_1 - k) - K_a][2(P_a - k) + K_2]A_2(K_2) = \\ = \frac{16}{M'^4}(1 - a - b)^2[P_1K_aK_2A_a(K_a) - K_2K_aP_1A_a(K_a)] \times \\ \times [P_aK_2K_aA_2(K_2) - K_aK_2P_aA_2(K_2)] - \\ - 4c^2\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}K_{a\mu}A_{a\nu}(K_a)K_{2\varkappa}P_{1\lambda}\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}K_{2\mu}A_{2\nu}(K_2)K_{a\varkappa}P_{a\lambda}, \tag{13.122}$$

где опущены члены, линейные по c. Заметим, что в одно из этих слагаемых входят напряженности поля, а в другое — дуальные им величины.

Как и при переходе от (10.34) к (10.36), пространственно-временна́я экстраполяция проводится путем введения структуры типа двойной спектральной формы, а именно

$$-\frac{dM^2}{2\pi}\frac{dM'^2}{2\pi}\frac{1}{(P_a+K_2)^2+M^2-i\varepsilon}\,\frac{1}{(K_a+K_2)^2+M'^2-i\varepsilon}. \qquad (13.123)$$

Чтобы при записи наших результатов как можно реже повторялись сложные выражения, введем непосредственно двойную спектральную часть физической матрицы перехода, получаемой путем экстраполяции

$$P_a\to p_2,\quad P_1\to p_1,\quad K_a\to -k_1,\quad K_2\to k_2, \qquad (13.124)$$

дополненной кроссинг-преобразованием

$$k_2\leftrightarrow -k_1,\quad e_2\leftrightarrow e_1^* \qquad (13.125)$$

или эквивалентным преобразованием

$$p_2\leftrightarrow -p_1. \qquad (13.126)$$

Она имеет вид

$$\begin{gathered}(d\omega_{p_1}\,\ldots\,d\omega_{k_2})^{1/2}\,4\alpha^2\int\frac{dM^2\,dM'^2}{\Delta^{1/2}}\,(M'^2-2m^2)\times\\ \times\left[\frac{1}{(p_2+k_2)^2+M^2-i\varepsilon}+\frac{1}{(p_2-k_1)^2+M^2}\right]\times\\ \times\frac{1}{(k_1-k_2)^2+M'^2}\Big\{f_+\,(k_1k_2p_1e_1^*-k_1p_1k_2e_1^*)\,(k_1k_2p_2e_2-k_2p_2k_1e_2)+\\ +\left(1-\frac{4m^2}{M'^2}\right)f_-\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}k_{1\mu}e_{1\nu}^*k_{2\varkappa}p_{1\lambda}\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}k_{2\mu}e_{2\nu}k_{1\varkappa}p_{2\lambda}\Big\}, \qquad (13.127)\end{gathered}$$

где

$$f_\pm=\frac{(M^2\pm m^2)^2}{[(M^2-m^2)^2+M^2M'^2]^2}. \qquad (13.128)$$

Изложенный нами способ сделать калибровочную инвариантность явной довольно прямолинеен. Но у него есть тот недостаток, что в окончательном результате зависимость числителя от импульсов оказывается приводимой. В рассматриваемом случае имеются две основные калибровочно-инвариантные и кроссинг-симметричные величины, в которые входят векторы поляризации, а именно величина

$$G_1=k_1p_2k_2p_2e_1^*e_2+k_2p_2p_2e_1^*p_1e_2-k_1p_2p_1e_1^*p_2e_2, \qquad (13.129)$$

которой определяется структура процесса скелетного рассеяния, и

$$G_2=k_1k_2e_1^*e_2-k_2e_1^*k_1e_2. \qquad (13.130)$$

Введя их, будем иметь

$$(k_1k_2p_1e_1^* - k_1p_1k_2e_1^*)(k_1k_2p_2e_2 - k_2p_2k_1e_2) = \\ = k_1k_2G_1 - k_1p_2k_2p_2G_2 \tag{13.131}$$

и

$$\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}k_{1\mu}e_{1\nu}^*k_{2\varkappa}p_{1\lambda}\varepsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}k_{2\mu}e_{2\nu}k_{1\varkappa}p_{2\lambda} = \\ = k_1k_2G_1 + (k_1p_2k_2p_2 + m^2k_1k_2)\,G_2. \tag{13.132}$$

В справедливости этих соотношений можно убедиться либо путем алгебраических преобразований, либо путем сравнения их обеих частей в какой-то координатной системе, например в системе покоя вектора p_2. Поскольку появление в числителе множителей, содержащих импульсы, диктуется исключительно калибровочной инвариантностью, лишние множители такого типа следует выкинуть, преобразовав их в дополнительные простые спектральные формы. При этом k_1k_2 заменится величиной $^1/_2\,M'^2$, а произведения $-k_2p_2$ и k_1p_2, которые снабжаются соответствующим знаменателем, заменятся величиной $^1/_2\,(M^2 - m^2)$. В результате возникнет следующая двойная спектральная форма:

$$(d\omega_{p_1}\ \ldots)^{1/2}\,\alpha^2(2G_1 + m^2G_2)\int\frac{dM^2\,dM'^2}{\Delta^{1/2}}\times \\ \times(M'^2 - 2m^2)\,M'^2\left[f_+ + \left(1 - \frac{4M^2}{M'^2}\right)f_-\right]\times \\ \times\frac{1}{(k_1-k_2)^2 + M'^2}\left[\frac{1}{(p_2+k_2)^2 + M^2 - i\varepsilon} + \frac{1}{(p_2-k_1)^2 + M^2}\right] - \\ -(d\omega_{p_1}\ \ldots)^{1/2}\,4\alpha^2m^2G_2\int\frac{dM^2\,dM'^2}{\Delta^{1/2}}\left(1 - \frac{2m^2}{M'^2}\right)\frac{1}{(k_1-k_2)^2 + M'^2}\times \\ \times\left[\frac{1}{(p_2+k_2)^2 + M^2 - i\varepsilon} + \frac{1}{(p_2-k_1)^2 + M^2}\right], \tag{13.133}$$

где использовано соотношение

$$[(M^2 - m^2)^2 + M^2M'^2]\left[f_+ - \left(1 - \frac{4m^2}{M'^2}\right)f_-\right] = \frac{4m^2}{M'^2}. \tag{13.134}$$

Добавочные простые спектральные формы определяются информацией, которая вытекает из того обстоятельства, что мы рассматриваем случай рассеяния вперед. Построим сначала простую спектральную форму, которая явится обобщением выражения (13.29) на произвольные углы рассеяния. Как видно из калибровочно-инвариантных выражений (13.28), в эту связь, если представить ее в пространственно-временной форме, поля входят в комбинации

$$\frac{1}{2}\int(dx)\,(dx')\,\partial_\mu\varphi(x)\,F^{\mu\nu}(x)\,\Delta_+(x-x',\,M^2)\,F_{\nu\lambda}(x')\,\partial'^\lambda\varphi(x'), \tag{13.135}$$

которую следует проинтегрировать по M^2 с соответствующим весовым множителем. Возникающая при этом простая спектральная форма содержит приводимые калибровочно-инвариантные комбинации

$$[(p_1k_1)\, e_1^* - (p_1e_1^*)\, k_1]\,[(p_2k_2)\, e_2 - (p_2e_2)\, k_2] = G_1 + k_2p_2G_2,$$
$$[(p_2k_1)\, e_1^* - (p_2e_1^*)\, k_1]\,[(p_1k_2)\, e_2 - (p_1e_2)\, k_2] = G_1 - k_2p_1G_2. \tag{13.136}$$

Преобразованное выражение имеет вид

$$(d\omega_{p_1}\ \ldots)^{1/2}\, 16\alpha^2 G_1 \int\limits_{m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2}\, \frac{\chi(M^2)}{M^2-m^2} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{(p_2+k_2)^2+M^2-i\varepsilon} + \frac{1}{(p_2-k_1)^2+M^2}\right] -$$
$$-(d\omega_{p_1}\ \ldots)^{1/2}\, 8\alpha^2 G_2 \int\limits_{m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2}\, \chi(M^2) \times$$
$$\times \left[\frac{1}{(p_2+k_2)^2+M^2-i\varepsilon} + \frac{1}{(p_2-k_1)^2+M^2}\right]. \tag{13.137}$$

В интересующем нас случае рассеяния вперед, когда $p_2k_2 = p_2k_1$, оно не содержит никаких инфракрасных особенностей. Данное выражение нужно сравнить с предельным выражением для двойной спектральной формы, отвечающим рассеянию вперед, которое получается, если наложить кинематическое ограничение $(k_1 - k_2)^2 = 0$. Один из возникающих при этом спектральных интегралов таков ($\mu = 0$):

$$\int\limits_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM'^2}{\Delta^{1/2}}\, (M'^2 - 2m^2)\left[f_+ + \left(1 - \frac{4m^2}{M'^2}\right) f_-\right] =$$
$$= \frac{16m^2}{M^2-m^2} \int\limits_0^1 dv\,(1+v^2)\, \frac{(M^2+m^2)^2 + v^2(M^2-m^2)^2}{[(M^2+m^2)^2 - v^2(M^2-m^2)^2]^2} = \frac{8}{M^2}\, \frac{\chi(M^2)}{M^2-m^2}. \tag{13.138}$$

Определение функции $\chi(M^2)$, которая фигурирует здесь,

$$\chi(M^2) = (M^2+m^2)^2 \int\limits_0^1 dv\, \frac{1-v^2}{(M^2+m^2)^2 - v^2(M^2-m^2)^2}, \tag{13.139}$$

эквивалентно определению (13.20). Нам потребуется также интеграл

$$\int\limits_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM'^2}{\Delta^{1/2}}\, \frac{M'^2-2m^2}{(M'^2)^2} = \frac{1}{m^2}\, \frac{1}{M^2-m^2} \int\limits_0^1 dv\,(1+v^2) = \frac{4}{3m^2}\, \frac{1}{M^2-m^2}. \tag{13.140}$$

В результате получим следующую простую спектральную форму:

$$(d\omega_{p_1} \ldots)^{1/2}\, 16\alpha^2 G_1 \int \frac{dM^2}{M^2} \frac{\chi(M^2)}{M^2-m^2} [\ ] -$$

$$-(d\omega_{p_1} \ldots)^{1/2}\, 8\alpha^2 G_2 \int \frac{dM^2}{M^2} \chi(M^2) [\ ] +$$

$$+(d\omega_{p_1} \ldots)^{1/2}\, 8\alpha^2 G_2 \int dM^2 \frac{\chi(M^2)-\frac{2}{3}}{M^2-m^2} [\ ], \tag{13.141}$$

где квадратными скобками обозначена комбинация из функций распространения, входящая в формулу (13.137). Первые два слагаемых здесь воспроизводят результат (13.137). Следует ли отсюда вывод, что нужна какая-то дополнительная простая спектральная форма, которая скомпенсировала бы последний член в формуле (13.141)?

Ответ на этот вопрос отрицателен — никакие простые спектральные формы с комбинациями импульсов $(p_2+k_2)^2$ и $(p_2-k_1)^2$ не требуются. Мы намеренно заострили внимание на этой парадоксальной, с первого взгляда, ситуации, с тем чтобы подчеркнуть одну тонкость, возникающую при анализе особого кинематического случая. Что означает термин «рассеяние вперед» — равенство $k_1=k_2$ или же $(k_1-k_2)^2=0$? Выкладки, в результате которых мы получили выражение (13.137), основывались на равенстве $k_1=k_2$; при приведении же двойной спектральной формы к виду (13.141) мы принимали, что $(k_1-k_2)^2=0$. Различие между двумя этими подходами видно из того, что G_2 обращается в нуль при $k_1=k_2$; на самом деле таким способом может быть получена только простая спектральная форма с множителем G_1. Нам следует вернуться к расчету среднего значения (13.13), результатом которого явилась формула (13.18), и сохранить добавочную комбинацию в числителе, приводящую к G_2, по-прежнему пользуясь при этом теми упрощениями знаменателя, которые возникают благодаря соотношению $(k_1-k_2)^2=0$. Тогда, введя обозначение

$$q=\frac{1+v}{2}p_1+\frac{1-v}{2}p_2, \tag{13.142}$$

будем иметь

$$-\frac{\partial}{\partial q_\mu}\frac{\partial}{\partial q_\nu}\langle\ln(kq)\rangle = g^{\mu\nu}\int_0^1 dz\, \frac{z^2}{[(M^2+m^2)/2M]^2 - z^2[(M^2-m^2)/2M]^2} +$$

$$+2q^\mu q^\nu \int_0^1 dz\, \frac{z^4}{\{[(M^2+m^2)/2M]^2 - z^2[(M^2-m^2)/2M]^2\}^2}. \tag{13.143}$$

Здесь учтено, что это выражение умножается на $e_{1\mu}^*$ и $e_{2\nu}$, а поэтому можно произвести замены

$$q^\mu q^\nu \to \frac{1-v^2}{4} k_2^\mu k_1^\nu \to \frac{1}{6} k_2^\mu k_1^\nu. \qquad (13.144)$$

К последней из них приводит результат вычисления интеграла по v, входящего в формулу (13.13). Выполняя в дополнительном слагаемом в формуле (13.143) интегрирование по частям, мы для (13.10) теперь получаем

$$e_1^* e_2 \chi(M^2) - e_1^* k_2 k_1 e_2 \frac{2M^2}{(M^2-m^2)^2}\left[\chi(M^2) - \frac{2}{3}\right], \qquad (13.145)$$

или, если произвести калибровочно-инвариантную подстановку (13.28),

$$\frac{4}{(M^2-m^2)^2}\left[G_1 \chi(M^2) - G_2 \frac{1}{2}(M^2-m^2)\chi(M^2) + \right.$$
$$\left. + G_2 \frac{1}{2} M^2 \left(\chi(M^2) - \frac{2}{3}\right)\right]. \qquad (13.146)$$

Мы видим, что отношения коэффициентов у этих трех слагаемых точно такие же, как и в комбинации (13.141).

Чтобы применить двойную спектральную форму к случаю рождения пары, произведем кроссинг-подстановки

$$k_1,\ e_1^* \to -k,\ e, \quad p_2 \to -p', \qquad (13.147)$$

а, кроме того, вместо k_2, e_2, p_1 напишем k', e', p. В результате

$$\begin{aligned} G_1 &\to -kpkp'ee' + kpep'e'p + kp'epe'p', \\ G_2 &\to -kk'ee' + ek'e'k. \end{aligned} \qquad (13.148)$$

В случае рассеяния вперед, которому соответствуют соотношения

$$p + p' = k + k', \quad p - p' = \left[1 + \frac{4m^2}{(k+k')^2}\right]^{1/2}(k - k'), \qquad (13.149)$$

мы получим

$$2G_1 + m^2 G_2 \to 0, \qquad (13.150)$$

тогда как

$$\frac{1}{M^2-m^2+2p_2k_2} + \frac{1}{M^2-m^2-2p_2k_1} \to$$
$$\to \frac{1}{M^2-m^2-2pk} + \frac{1}{M^2-m^2-2pk'} =$$
$$= \frac{2}{M^2}\frac{M^2-m^2-kk'}{(k-k')^2+[(M^2-m^2)^2/M^2]}. \qquad (13.151)$$

Комбинация, которая входит в двойную спектральную форму, имеет вид

$$\frac{1}{(k+k')^2+M'^2-i\varepsilon}\,\frac{2}{M^2}\,\frac{M^2-m^2-kk'}{(k-k')^2+[(M^2-m^2)^2/M^2]}=$$
$$=\frac{2(M^2-m^2)+M'^2}{(M^2-m^2)^2+M^2M'^2}\,\frac{1}{(k+k')^2+M'^2-i\varepsilon}+$$
$$+\frac{1}{M^2}\,\frac{(M^2-m^2)(M^2+m^2)}{(M^2-m^2)^2+M^2M'^2}\,\frac{1}{(k-k')^2+[(M^2-m^2)^2/M^2]}. \quad (13.152)$$

Функция

$$[(k-k')^2+(M^2-m^2)^2/M^2]^{-1}$$

описывает перенос пространственно-подобного возбуждения; он отличается от механизма обмена парой, которому отвечает функция

$$[(k+k')^2+M'^2-i\varepsilon]^{-1}.$$

Вклад последнего равен

$$-(d\omega_{p_1}\ \ldots)^{1/2}\,4\alpha^2m^2G_2\int dM'^2\times$$
$$\times\frac{1-\dfrac{2m^2}{M'^2}}{(k+k')^2+M'^2-i\varepsilon}\int\frac{dM^2}{\Delta^{1/2}}\,\frac{2(M^2-m^2)+M'^2}{(M^2-m^2)^2+M^2M'^2}. \quad (13.153)$$

Входящий сюда интеграл по M^2 можно вычислить, разбив весь интервал интегрирования на два, для чего введем промежуточное значение $M^2-m^2=X$, удовлетворяющее неравенствам

$$2\mu m\ll X\ll m^2. \quad (13.154)$$

Это позволяет нам представить интеграл в виде

$$\frac{4}{m^2M'^2}\left(1-\frac{4m^2}{M'^2}\right)^{-1/2}\times$$
$$\times\left[\int_1^Y\frac{dy}{(y^2-1)^{1/2}}+m^2\int_X^\infty\frac{d(M^2-m^2)}{M^2-m^2}\,\frac{2(M^2-m^2)+M'^2}{(M^2-m^2)^2+M^2M'^2}\right], \quad (13.155)$$

где

$$Y=\frac{X}{2\mu m}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}. \quad (13.156)$$

В результате получим

$$\frac{2}{m^2M'^2}\left(1-\frac{4m^2}{M'^2}\right)^{-1/2}\left[\ln\frac{M'^2-4m^2}{\mu^2}-\left(1-\frac{4m^2}{M'^2}\right)^{1/2}\times\right.$$
$$\left.\times\ln\frac{1+[1-(4m^2/M'^2)]^{1/2}}{1-[1-(4m^2/M'^2)]^{1/2}}\right]. \quad (13.157)$$

Сравнение с формулами (13.56) и (13.58) показывает, что к двойной спектральной форме необходимо добавить следующую простую спектральную форму, которую мы записываем для случая рассеяния фотона:

$$(d\omega_{p_1}\ \dots)^{1/2}\, 4\alpha^2 G_2 \int\limits_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM'^2}{M'^2}\frac{2m^2}{M'^2}\times$$
$$\times \ln\frac{1+[1-(4m^2/M'^2)]^{1/2}}{1-[1-(4m^2/M'^2)]^{1/2}}\,\frac{1}{(k_1-k_2)^2+M'^2}\,. \qquad (13.158)$$

Но остается еще один вопрос. Условием рассеяния вперед (13.149) никак не определяются выражения, содержащие $G_1 + {}^1/_2 m^2 G_2$. Правильно ли фиксирует их двойная спектральная форма или требуется какая-то дополнительная простая спектральная форма? На основании всего сказанного ранее о функции G_2 можно полагать, что в двойной спектральной форме действительно содержится вся необходимая информация. Чтобы удостовериться в этом, вернемся к вычислению матричного элемента (13.44) и рассмотрим случай, когда импульсы частиц $\mathbf{p} = -\mathbf{p}'$ составляют с импульсами фотонов $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$ угол α. К тому же мы возьмем разность результатов, соответствующих случаю, когда векторы поляризации $\mathbf{e} = \mathbf{e}'$ лежат в плоскости импульсов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$, и случаю, когда они перпендикулярны ей. Тем самым мы выделим зависимость от G_1, поскольку величина G_2 при обеих ориентациях векторов поляризации принимает одно и то же значение, а

$$G_1|_{\parallel} - G_1|_{\perp} = -kk'(\mathbf{e}\cdot\mathbf{p})^2|_{\parallel} = \frac{M^2}{2}\left(\frac{M^2}{4}-m^2\right)\sin^2\alpha. \qquad (13.159)$$

Возникающий теперь интеграл имеет вид

$$-\int \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{4\pi}\left[\frac{2(M^2-2m^2)}{\left(\frac{M^2}{4}-m^2\right)2(1-\cos\theta)+\mu^2}-1\right]\left(\frac{M^2}{4}-m^2\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{-p_2k}+\frac{1}{-p_2k'}\right)\times$$
$$\times[(-\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta\cos\varphi)^2-(\sin\theta\sin\varphi)^2], \qquad (13.160)$$

где

$$\frac{1}{-p_2k}+\frac{1}{-p_2k'} = \frac{8}{M^2}\,\frac{1}{1-\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta\cos\varphi)^2}\,. \qquad (13.161)$$

Здесь использована сферическая система координат, в которой вектор $\mathbf{p}$ направлен по оси z, а вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости xz. Отметим, что слагаемое -1 в первой квадратной скобке не дает вклада, так как в отсутствие выделенного направления, связанного с импульсом p, две ориентации векторов поляризации эквивалентны, и соответствующие члены взаимно уничтожаются.

После второго дифференцирования достаточно рассмотреть предел при $\alpha \to 0$. Тогда в формуле (13.160), взяв предварительно интеграл по азимутальному углу, получим

$$-16\left(1-\frac{2m^2}{M^2}\right)\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,dz\,\frac{2\left(\frac{M^2}{4}-m^2\right)}{2\left(\frac{M^2}{4}-m^2\right)(1-z)+\mu^2}\,\frac{1}{D}+$$

$$+16\left(1-\frac{2m^2}{M^2}\right)\int_{0}^{1}dz\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1}{D}+\frac{1}{D^2}+\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{z^2}{D^2}+\frac{3}{4}\,\frac{1-z^2}{D^2}-\frac{1-z^2}{D^3}\right]\right\}, \tag{13.162}$$

где введено обозначение

$$D=1-\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)z^2. \tag{13.163}$$

Оставшееся интегрирование дает

$$-\frac{2}{m^2}\,(M^2-4m^2)\,\rho\,(M^2), \tag{13.164}$$

где

$$\rho\,(M^2)=\frac{M^2-2m^2}{M^2-4m^2}\left[\ln\frac{M^2-4m^2}{\mu^2}-\frac{3}{2}-\left(1-\frac{m^2}{M^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}}\ln\frac{1+\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}}{1-\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}}\right]. \tag{13.165}$$

В итоге мы получаем следующую спектральную форму:

$$(d\omega_{p_1}\,\ldots)^{1/2}\,16\,\frac{\alpha^2}{m^2}\left(G_1+\frac{1}{2}\,m^2G_2\right)\times$$

$$\times\int_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM'^2}{M'^2}\left(1-\frac{4m^2}{M'^2}\right)^{1/2}\rho\,(M'^2)\,\frac{1}{(k+k')^2+M'^2-i\varepsilon}. \tag{13.166}$$

Теперь ее нужно сравнить с той простой спектральной формой, которую выделяет из первого слагаемого в формуле (13.133) условие рассеяния вперед в его скалярном варианте. С учетом выражения для коэффициента при ee' в формуле (13.148) это условие можно представить в виде равенства

$$2kpkp'+m^2kk'=0, \tag{13.167}$$

так что достаточно произвести подстановку (13.151). Спектральная форма может быть записана в том же виде, что и (13.166), но с

$$\rho(M'^2) = \frac{1}{8} m^2 (M'^2)^2 \frac{M'^2 - 2m^2}{\left(1 - \frac{4m^2}{M'^2}\right)^{1/2}} \int \frac{dM^2}{\Delta^{1/2}} \frac{2(M^2 - m^2) + M'^2}{(M^2 - m^2)^2 + M^2 M'^2} \times$$

$$\times \left[f_+ + \left(1 - \frac{4m^2}{M'^2}\right) f_-\right]. \tag{13.168}$$

Выполняя здесь интегрирование, мы приходим в точности к функции (13.165). Отсюда следует, что поправка к рассеянию фотона на частице полностью описывается двойной спектральной формой (13.133) и простой спектральной формой (13.158).

Здесь вставляет свой вопрос Гарольд.

Гарольд. Прежде чем идти дальше, скажите мне, пожалуйста, вот что. Почему ничего не говорилось об одночастичном обмене? Ведь процесс скелетного комптоновского рассеяния можно рассматривать исходя из такой причинной последовательности событий: частица рассеивается электромагнитным полем, а возникающая при этом реальная частица детектируется в результате еще одного подобного процесса рассеяния. Тогда мы имели бы дело с динамической модификацией каждого отдельного акта рассеяния.

Швингер. Вообще говоря, Вы правы: одночастичный обмен также следует учитывать. Но спин 0 составляет исключение. Если рассматривать рассеяние частицы каким-либо подходящим полем, а затем провести экстраполяцию на случай поля фотонов, то в конечном итоге зарядовый формфактор $F(k)$ нужно будет вычислять при $k^2 = 0$, а при этом условии он остается равным единице. Поэтому в случае спина 0 одночастичный обмен описывается скелетной связью.

Масса фотона входит только в двойную спектральную форму. Эта зависимость допускает простую проверку, ибо она должна сбалансировать дополнительное рассеяние, которое сопровождается мягким фотоном, — так называемое двойное комптоновское рассеяние. Теперь нас будут интересовать только коэффициенты при $\ln 1/\mu$, а не аддитивные константы. Соответствующий вклад двойной спектральной формы, обусловленный окрестностью $M^2 \sim m^2$, равен

$$(d\omega_{p_1} \ldots)^{1/2} 8\alpha^2 G_1 \frac{(k_1 - k_2)^2}{k_1 p_2 k_2 p_2} \ln \frac{1}{\mu} \int\limits_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM'^2}{M'^2} \times$$

$$\times \frac{1 - \frac{2m^2}{M'^2}}{\left(1 - \frac{4m^2}{M'^2}\right)^{1/2}} \frac{1}{(k_1 - k_2)^2 + M'^2}, \tag{13.169}$$

где учтено соотношение

$$\frac{1}{2k_2p_2}-\frac{1}{2k_1p_2}=\frac{1}{4}\frac{(k_1-k_2)^2}{k_1p_2k_2p_2}. \tag{13.170}$$

Совместно с амплитудой (12.98), описывающей процесс скелетного рассеяния, он дает

$$\langle 1\,|\,T\,|\,2\rangle = -(d\omega_{p_1}\ \ldots)^{1/2}\,8\pi\alpha\frac{G_1}{k_1p_2k_2p_2}\times$$
$$\times\left[1-\frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{1}{\mu}\frac{(k_1-k_2)^2}{m^2}\int_0^1 dv\,\frac{1+v^2}{1+[(k_1-k_2)^2/4m^2]\,(1-v^2)}\right]. \tag{13.171}$$

Отсюда видно, что относительная поправка к сечению упругого рассеяния равна

$$1-\frac{\alpha}{2\pi}\ln\frac{1}{\mu}\frac{(k_1-k_2)^2}{m^2}\int_0^1 dv\,\frac{1+v^2}{1+[(k_1-k_2)^2/4m^2]\,(1-v^2)}. \tag{13.172}$$

Комбинируя ее с вероятностью (12.16) испускания мягкого фотона, в которой

$$q^2=(p_1-p_2)^2=(k_1-k_2)^2, \tag{13.173}$$

мы увидим, что зависимость от фиктивной массы фотона действительно полностью исчезает.

Низкоэнергетический предел процесса рассеяния частично характеризуется условием

$$(k_1-k_2)^2\ll 4m^2, \tag{13.174}$$

а поэтому его можно исследовать так же, как случай рассеяния вперед, в котором мы получили простую спектральную форму (13.141). Но теперь нам нужно учесть инфракрасное поведение вблизи значения $M^2=m^2$. Для этого мы можем повторить все сказанное только что о массе фотона с дополнительным условием (13.174), за тем исключением, что теперь нас интересует константа, которая добавляется к $\ln(1/\mu)$. Пусть нижний предел первого интеграла в формуле (13.141) равен $M^2=m^2+X$, где X удовлетворяет условиям (13.154). Тогда добавка к нему будет равна

$$(d\omega_{p_1}\ \ldots)^{1/2}\,8\alpha^2G_1\frac{(k_1-k_2)^2}{k_1p_2k_2p_2}\int_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM'^2}{(M'^2)^2}\times$$
$$\times\frac{1-\dfrac{2m^2}{M'^2}}{\left(1-\dfrac{4m^2}{M'^2}\right)^{1/2}}\int_1^Y\frac{dy}{(y^2-1)^{1/2}}, \tag{13.175}$$

где Y — величина, определяемая формулой (13.156). Для входящего сюда двойного интеграла имеем

$$\frac{1}{4m^2}\int\limits_0^1 dv\,(1+v^2)\ln\left(\frac{X}{\mu m}v\right)=\frac{1}{3m^2}\left(\ln\frac{X}{\mu m}-\frac{5}{6}\right). \qquad (13.176)$$

Испускание мягкого фотона, которым компенсируется зависимость от μ, описывается выражением (12.25). В системе покоя начальной частицы процесс является нерелятивистским, и величину δM в этом выражении можно отождествить с $k^0_{\text{мин}}$, минимальной детектируемой частотой дополнительного мягкого фотона. От всех этих характеристик фотона зависит интеграл

$$\int\limits_0^1 dv\,(1+v^2)\left[\ln\left(\frac{k^0_{\text{мин}}}{2\mu}\frac{1-v^2}{v}\right)+\frac{1}{2}\right]=\frac{4}{3}\left[\ln\frac{2k^0_{\text{мин}}}{\mu}-\frac{5}{6}\right]. \qquad (13.177)$$

Таким образом, член, который чувствителен к инфракрасным эффектам, равен

$$(d\omega_{p_1}\ \ldots)^{1/2}\,\frac{8}{3}\,\frac{\alpha^2}{m^2}\,G_1\,\frac{(k_1-k_2)^2}{k_1p_2k_2p_2}\,\ln\frac{X}{2mk^0_{\text{мин}}}. \qquad (13.178)$$

Для отыскания низкоэнергетического предела вклада (13.141) воспользуемся интегралом, сходным с (13.36),

$$\int\limits_{m^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\chi(M^2)\frac{1}{M^2-m^2+x}=\left[\frac{1}{m^2-x}+\int\limits_{-1}^{1}dz\,\frac{z(1-z)}{2m^2-(1-z)x}\right]\times$$
$$\times\ln\left(\frac{m^2}{x}\right)+\int\limits_{-1}^{1}dz\,\frac{z(1-z)}{2m^2-(1-z)x}\ln\left(\frac{2}{1-z}\right), \qquad (13.179)$$

в котором считается, что $x>0$. Чтобы получить правильное значение этого интеграла при $x<0$, следует в аргументе первого логарифма написать $|x|$. Выделив ту часть выражения (13.179), которая нечетна по x, мы вновь придем к формуле (13.36). Главные члены в разложении по малым x таковы:

$$\int\limits_{m^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\chi(M^2)\frac{1}{M^2-m^2+x}=$$
$$=\frac{2}{3m^2}\left[\left(1+\frac{x}{m^2}\right)\ln\left(\frac{m^2}{x}\right)+\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{2}\frac{x}{m^2}\right)+\ldots\right]. \qquad (13.180)$$

В слагаемое (13.141), содержащее величину G_1, входит интеграл вида

$$\int_{m^2+X}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2} \frac{\chi(M^2)}{M^2-m^2} \frac{1}{M^2-m^2+x} =$$

$$= \frac{1}{x} \int_{m^2+X}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2} \frac{\chi(M^2)}{M^2-m^2} - \frac{1}{x} \int_{m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2} \frac{\chi(M^2)}{M^2-m^2+x}. \qquad (13.181)$$

Первый интеграл в правой части можно получить из выражения (13.180), если учесть, что $x \ll X \ll m^2$. Имеем

$$\int_{m^2+X}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2} \frac{\chi(M^2)}{M^2-m^2} + \int_{m^2}^{m^2+X} \frac{dM^2}{m^2} \frac{2}{3} \frac{1}{M^2-m^2+x} =$$

$$= \frac{2}{3m^2}\left(\ln\frac{m^2}{x}+\frac{1}{12}\right), \qquad (13.182)$$

откуда

$$\int_{m^2+X}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2} \frac{\chi(M^2)}{M^2-m} = \frac{2}{3m^2}\left(\ln\frac{m^2}{X}+\frac{1}{12}\right). \qquad (13.183)$$

При объединении этого члена с (13.178) произвольный параметр X исчезнет.

В низкоэнергетическом пределе последнее из трех слагаемых в формуле (13.141) приводит к интегралу

$$K = \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \frac{\chi(M^2)-\frac{2}{3}}{M^2-m^2} \frac{2}{M^2-m^2}, \qquad (13.184)$$

в существовании которого можно убедиться, переписывая (13.139) в виде

$$\chi(M^2) - \frac{2}{3} = \left(\frac{M^2-m^2}{M^2+m^2}\right)^2 \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v^2)}{1-v^2[(M^2-m^2)/(M^2+m^2)]^2}. \qquad (13.185)$$

Введя переменную

$$u = \frac{M^2-m^2}{M^2+m^2}, \quad 0<u<1, \qquad (13.186)$$

получим

$$K = \frac{1}{m^2}\int_0^1 du \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v^2)}{1-u^2v^2} =$$

$$= \frac{1}{2m^2}\int_0^1 dv\, v(1-v^2)\ln\frac{1+v}{1-v} \frac{1}{6m^2}. \qquad (13.187)$$

Последний из нужных нам интегралов дается простой спектральной формой (13.158). Он равен

$$\int_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM'^2}{(M'^2)^2} \frac{2m^2}{M'^2} \ln \frac{1+\left(1-\frac{4m^2}{M'^2}\right)^{1/2}}{1-\left(1-\frac{4m^2}{M'^2}\right)^{1/2}} = \frac{1}{2} K. \tag{13.188}$$

Собирая все вклады вместе, для матрицы перехода в низкоэнергетическом пределе будем иметь

$$\langle 1 | T | 2 \rangle = -(d\omega_{p_1} \ldots)^{1/2} \, 8\pi\alpha \frac{G}{k_1 p_2 k_2 p_2} +$$
$$+ (d\omega_{p_1} \ldots)^{1/2} \frac{32}{3} \frac{\alpha^2}{m^2} \left[\frac{1}{4} \frac{(k_1 - k_2)^2}{k_1 p_2 k_2 p_2} G_1 \left(\ln \frac{| k_2 p_2 |}{m k^0_{\text{мин}}} - 1 \right) - \right.$$
$$\left. - 2 \frac{G_1}{m^2} \left(\ln \frac{m^2}{2 | k_2 p_2 |} - \frac{1}{24} \right) - G_2 \left(\ln \frac{m^2}{2 | k_2 p_2 |} - \frac{7}{96} \right) \right]. \tag{13.189}$$

Мнимый член мы опустили, так как он оказывает пренебрежимо малое влияние при вычислении дифференциального сечения, которое и составляет в данный момент предмет нашего рассмотрения. В системе покоя начальной частицы и в калибровке, в которой векторы поляризации ортогональны ее импульсу ($p_2 e = 0$), наш результат записывается в виде

$$\langle 1 | T | 2 \rangle = -(d\omega_{p_1} \ldots)^{1/2} \, 8\pi\alpha \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 + (d\omega_{p_1} \ldots)^{1/2} \frac{32}{3} \alpha^2 \left(\frac{k^0}{m} \right)^2 \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2} (1 - \cos\theta) \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 \left(\ln \frac{k^0}{k^0_{\text{мин}}} - 1 \right) - 2 \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 \left(\ln \frac{m}{2k^0} - \frac{1}{24} \right) + \right.$$
$$\left. + ((1 - \cos\theta) \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{e}_1^* \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \left(\ln \frac{m}{2k^0} - \frac{7}{96} \right) \right]. \tag{13.190}$$

Здесь $\mathbf{n}_{1,2}$ — единичные векторы, задающие направления распространения фотонов:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\theta, \tag{13.191}$$

а k^0 — энергия фотона, которая в рассматриваемом низкоэнергетическом столкновении практически не изменяется.

Из (13.190) сразу же можно получить модифицированное дифференциальное сечение для поляризованных фотонов, обобщающее результат (13.40). Мы ограничимся тем, что приведем выражение для поправки к дифференциальному сечению в случае неполяризованных фотонов. Необходимые суммирования по конечным поляризациям и усреднения по начальным поляризациям проводятся с помощью формул [ср. с (3-14.101)]

$$\frac{1}{2} \sum | \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 |^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta) \tag{13.192}$$

и

$$\frac{1}{2}\sum \mathbf{e}_2^*\cdot\mathbf{e}_1\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{e}_1^*\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{e}_2=-\frac{1}{2}\cos\theta\,(1-\cos^2\theta). \qquad (13.193)$$

Результат таков:

$$\delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)=\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2\frac{4\alpha}{3\pi}\left(\frac{k^0}{m}\right)^2\left[(1+\cos\theta)^2\left(\ln\frac{m}{2k^0}-\frac{1}{24}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{32}(1-\cos\theta)^2-\frac{1}{2}(1-\cos\theta)(1+\cos^2\theta)\left(\ln\frac{k^0}{k^0_{\text{мин}}}-1\right)\right]. \qquad (13.194)$$

В частном случае рассеяния назад мы получаем

$$\theta=\pi:\quad \delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)=-\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2\frac{8\alpha}{3\pi}\left(\frac{k^0}{m}\right)^2\left(\ln\frac{k^0}{k^0_{\text{мин}}}-\frac{17}{16}\right), \qquad (13.195)$$

а поправка к полному сечению дается выражением

$$\delta\sigma=\frac{64}{9}\frac{\alpha^3}{m^2}\left(\frac{k^0}{m}\right)^2\left[\ln\frac{m}{2k^0}-\frac{1}{96}-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{k^0}{k^0_{\text{мин}}}-1\right)\right]. \qquad (13.196)$$

В зависимости от количественного соотношения между $k^0/k^0_{\text{мин}}$ и $(m/2k^0)^2$ она может как увеличивать, так и уменьшать полное сечение. Мы не будем останавливаться на деталях высокоэнергетического поведения; заметим лишь, что относительная поправка к дифференциальному сечению по порядку величины равна коэффициенту α, взятому с логарифмическим множителем, вид которого зависит от рассматриваемой области углов; примером может служить формула (13.41).

Примечание исторического характера. Энергетическую и угловую зависимости поправки (13.194) опубликовали в эквивалентной форме в 1948 г. Коринальдези и Йост [*E. Corinaldesi*, *R. Jost*, Helv. Phys. Acta, **21**, 183 (1948)]. Эти авторы пользовались методом унитарного преобразования, которым были получены также первые результаты, касающиеся магнитного момента электрона, энергетических сдвигов и поправок к кулоновскому рассеянию.

§ 14. НЕКАУЗАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Мы уже применяли в ряде случаев некаузальные методы расчета. Самым интересным был случай низкочастотного рассеяния света на свете и сходные задачи. Наиболее удивительными оказались результаты вычисления вероятности порождения электрон-позитронной пары сильным однородным электрическим полем, поскольку этот эффект не может быть вызван конечным числом актов однократного рассеяния. Теперь же мы хотим показать, что некаузальные методы особенно подходят для исследования сдвигов энергетических уровней связанных состояний, поскольку такие сдвиги тоже обусловлены бесконечным числом взаимодействий. Сделать это весьма желательно по той причине, что каузальные методы не подсказали нам достаточно изящного решения вопроса о едином подходе к процессам, протекающим при высоких и при низких энергиях. В самом деле, пытаясь рассчитать такими методами поправку порядка $Z\alpha$ к энергетическому сдвигу в кулоновском поле, мы, затратив много времени и труда, убедились в излишней сложности соответствующей процедуры и вынуждены были отказаться от своей попытки. Заметим, что свободой в выборе каузального и некаузального методов расчета или какого-то их сочетания подчеркивается то обстоятельство, что в теории источников осуществлен синтез аналитической теории S-матрицы, с ее акцентированием принципа причинности (но без предположений об аналитичности), и некаузальной операторной теории поля (но без самих операторных полей).

Чтобы показать, какого рода подход будет теперь развиваться, вернемся к вакуумной амплитуде (12.44) для случая спина 0. Функция распространения частиц сохраняет здесь свою общую пространственно-временну́ю форму, но фотонная функция распространения входит сюда в своем причинном выражении. Чтобы снять это ограничение, произведем замену

$$i\,d\omega_k \to \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2} \tag{14.1}$$

(член $-i\varepsilon$ в знаменателе опущен) и более не будем считать, что поля φ_1 и φ_2 обязательно причинно-упорядочены. Однако по-прежнему требуется, чтобы они не перекрывались. Итак, в символических обозначениях вакуумная амплитуда выглядит теперь следующим образом:

$$e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\varphi_1(2\Pi-k)\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2}(2\Pi-k)\varphi_2. \tag{14.2}$$

Можно написать

$$(2\Pi-k)\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2}(2\Pi-k)=$$
$$=(2\Pi-k)^2.\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2}-2\left[\Pi,\left[\Pi,\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2}\right]\right], \tag{14.3}$$

где точкой обозначено симметризованное произведение:

$$A\,.B=\frac{1}{2}\{A,\ B\}. \tag{14.4}$$

Кроме того,

$$(2\Pi-k)^2=2\left[(\Pi-k)^2+m^2\right]-k^2+2\Pi^2-2m^2, \tag{14.5}$$

причем первое слагаемое может быть отброшено, так как в рассматриваемых условиях, когда поля не перекрываются, соответствующий локальный член в формуле (14.3) обращается в нуль. Итак, мы будем исходить из следующего выражения для вакуумной амплитуды:

$$e^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \varphi_1 \left\{ -\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2} + (2\Pi^2-2m^2)\cdot\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2} - \right.$$
$$\left. -2\left[\Pi, \left[\Pi, \frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2}\right]\right]\right\} \varphi_2. \tag{14.6}$$

Для функций распространения мы будем пользоваться представлениями [ср. с формулой (8.34)]

$$\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2} = i\int\limits_0^\infty ds \exp\{-is[(\Pi-k)^2+m^2]\},$$

$$\frac{1}{k^2} = i\int\limits_0^\infty ds \exp(-isk^2) \tag{14.7}$$

и соответствующим выражением для их произведения

$$\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2} = -\int\limits_0^\infty ds_1\, ds_2 \exp\{-is_1[(\Pi-k)^2+m^2] - is_2k^2\}. \tag{14.8}$$

Если в последнем произвести замену переменных

$$s_1 = su, \quad s_2 = s(1-u), \quad ds_1\, ds_2 = s\, ds\, du, \tag{14.9}$$

то получим

$$\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2} = -\int\limits_0^\infty ds\, s\int\limits_0^1 du \exp[-is\chi(u)], \tag{14.10}$$

где

$$\chi(u) = u[(\Pi-k)^2+m^2] + (1-u)k^2 = (k-u\Pi)^2 + u(1-u)\Pi^2 + m^2u. \tag{14.11}$$

Заметим, что если мы хотим учесть массу «фотона» μ, то к $\chi(u)$ следует добавить член $\mu^2(1-u)$.

Проиллюстрируем применение представления произведения в простом случае, когда отсутствует электромагнитное поле, так что в соответствии с перестановочным соотношением (8.44)

$$[\Pi, \Pi] = ieqF \tag{14.12}$$

разные компоненты вектора Π коммутируют друг с другом. Благодаря этому последнее слагаемое в формуле (14.6) обращается в нуль. Кроме того, в первом слагаемом можно заменить переменную интегрирования, произведя подстановку $k - \Pi \to k$, после которой сразу видно, что этот вклад локален и его можно опустить. Производя в $\chi(u)$ аналогичное преобразование $k - u\Pi \to k$, получаем

$$\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(\Pi - k)^2 + m^2} =$$

$$= -\int_0^\infty ds\, s \int_0^1 du \exp\{-is[u(1-u)\Pi^2 + m^2 u + \mu^2(1-u)]\} \times$$

$$\times \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \exp(-isk^2) =$$

$$= \frac{i}{(4\pi)^2} \int \frac{ds}{s} du \exp\{-is[u(1-u)\Pi^2 + m^2 u + \mu^2(1-u)]\}, \qquad (14.13)$$

где мы включили член с массой фотона и учли формулу (8.57) для интеграла по импульсу. По переменной u удобно выполнить интегрирование по частям:

$$\int_0^1 du \exp(-is[\;]) = u \exp(-is[\;])\Big|_0^1 +$$

$$+ is \int_0^1 du\, u \{(1-2u)\Pi^2 + m^2 - \mu^2\} \exp(-is[\;]). \qquad (14.14)$$

Первый член в правой части при $u = 1$ дает вклад $\exp(-ism^2)$, который, будучи локальным, при подстановке в (14.6) обратится в нуль. Выполняя теперь интегрирование по переменной s, мы для вакуумной амплитуды (14.6) получим

$$i \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 du\, u \varphi_1 \frac{(2\Pi^2 - 2m^2)[(1-2u)\Pi^2 + m^2 - \mu^2]}{u(1-u)\Pi^2 + m^2 u + \mu^2(1-u)} \varphi_2. \qquad (14.15)$$

Учитывая еще раз, что поля у нас не перекрываются, можно будет в числителе произвести замену

$$\Pi^2 \to -\frac{m^2}{1-u} - \frac{\mu^2}{u}. \qquad (14.16)$$

Это дает

$$-i \frac{\alpha}{2\pi} \int du \frac{u}{(1-u)^2} \left(1 + \frac{1}{1-u}\right) m^4 \varphi_1 \frac{1}{\Pi^2 + \dfrac{m^2}{1-u} + \dfrac{\mu^2}{u}} \varphi_2, \quad (14.17)$$

где для простоты мы положили μ в числителе равным нулю. На данной стадии и производится полная пространственно-временна́я экстраполяция. Для этого достаточно воспользоваться уже известным нам рецептом и добавить соответствующие контактные члены:

$$\frac{1}{\Pi^2+M^2} \to \frac{1}{\Pi^2+M^2}-\frac{1}{M^2-m^2}+\frac{\Pi^2+m^2}{(M^2-m^2)^2}. \qquad (14.18)$$

Если положить μ равным нулю, считая тем самым, что

$$M^2=\frac{m^2}{1-u}, \qquad (14.19)$$

то спектральный весовой множитель, входящий в формулу (14.17), окажется равным

$$\frac{du}{1-u}\frac{u}{1-u}\left(1+\frac{1}{1-u}\right)m^4=\frac{dM^2}{M^2}(M^2-m^2)(M^2+m^2) \qquad (14.20)$$

в полном согласии с (6.40). В случае конечной массы фотона в спектральном представлении, к которому приводит выражение (14.17) при

$$M^2=\frac{m^2}{1-u}+\frac{\mu^2}{u}, \qquad (14.21)$$

используется параметризация, уже встречавшаяся нам в интеграле (1.32). В этой связи отметим, что

$$\int_0^1 du\eta\left(M^2-\frac{m_a^2}{u}-\frac{m_b^2}{1-u}\right)=$$
$$=\int_0^1 du\,u\left[\frac{m_b^2}{(1-u)^2}-\frac{m_a^2}{u^2}\right]\delta\left(M^2-\frac{m_a^2}{u}-\frac{m_b^2}{1-u}\right). \qquad (14.22)$$

Мы намерены повсеместно пользоваться разложениями экспоненты $\exp[-is\,\chi(u)]$, которые являются аналогами разложения квантовомеханической теории возмущений:

$$\exp[-it(H_0+H_1)]=$$
$$=\exp(-itH_0)-i\int_0^t dt_1\exp[-i(t-t_1)H_0]H_1\exp(-it_1H_0)+$$
$$+(-i)^2\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\eta(t_1-t_2)\exp[-i(t-t_1)H_0]H_1\times$$
$$\times\exp[-i(t_1-t_2)H_0]H_1\exp(-it_2H_0)+\ldots \qquad (14.23)$$

[вывод в связи с квантовомеханическим принципом действия можно найти в § 6 и 7 нашей монографии «Квантовая кинематика и динамика» (*J. Schwinger*, Quantum Kinematics and Dynamics, W. A. Benjamin, Inc., Menlo Park, 1970), хотя зависимость от времени не выделена там явным образом]. В качестве переменных интегрирования удобно пользоваться временами, выраженными в относительных единицах, записывая их в соответствующей симметричной форме. Так, например, в интересующем нас случае, когда

$$\chi = \chi_0 + \chi_1, \tag{14.24}$$

мы напишем

$$\begin{aligned}\exp(-is\chi) = \exp(-is\chi_0) - is\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\chi_0\right\}\chi_1 \times \\ \times \exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\chi_0\right\} - s^2\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\int_0^1 dw\,w\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}w\chi_0\right\}\chi_1\times \\ \times\exp\{-is(1-w)\chi_0\}\chi_1\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}w\chi_0\right\} + \ldots\ .\end{aligned} \tag{14.25}$$

Если χ_1 — бесконечно малая величина, то разложение заканчивается членом, линейным по χ_1. Это соответствует случаю, когда $\chi(u)$ подвергается бесконечно малому изменению, иллюстрацией чему служит соотношение

$$\begin{aligned}[\Pi, \exp(-is\chi)] = -is\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\exp\{-is[(1+v)/2]\chi\}\times \\ \times[\Pi, \chi]\exp\{-is[(1-v)/2]\chi\}.\end{aligned} \tag{14.26}$$

В этом примере мы имеем

$$[\Pi, \chi(u)] = u[\Pi, (\Pi - k)^2] = 2uieqF.(\Pi - k). \tag{14.27}$$

Остановимся здесь также на вычислении двойного коммутатора $[\Pi, [\Pi, \exp(-is\chi)]]$, в котором подразумевается скалярное произведение векторов Π. Рассмотрим с этой целью преобразование

$$\begin{aligned}\exp(\lambda\Pi)\exp(-is\chi)\exp(-\lambda\Pi) = \\ = \exp[-is\exp(\lambda\Pi)\chi\exp(-\lambda\Pi)],\end{aligned} \tag{14.28}$$

где λ — произвольный постоянный вектор. При сравнении обеих частей равенства мы будем основываться на общем коммутаторном разложении

$$e^A Be^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \ldots, \tag{14.29}$$

в справедливости которого можно убедиться путем последовательных дифференцирований по скалярному параметру, входящему в A. Так, например, вплоть до членов, квадратичных по

λ, мы имеем

$$\exp(-is\chi)+[\lambda\Pi,\ \exp(-is\chi)]+\frac{1}{2}[\lambda\Pi,\ [\lambda\Pi,\ \exp(-is\chi)]]=$$
$$=\exp\left\{-is\chi-is[\lambda\Pi,\ \chi]-is\frac{1}{2}[\lambda\Pi,\ [\lambda\Pi,\ \chi]]\right\}. \quad (14.30)$$

Используя разложение (14.25), представим правую часть в виде

$$\exp(-is\chi)-is\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\chi\right\}[\lambda\Pi,\ \chi]\times$$
$$\times\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\chi\right\}-is\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\chi\right\}\times$$
$$\times[\lambda\Pi,\ [\lambda\Pi,\ \chi]]\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\chi\right\}-$$
$$-s^2\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\int_{0}^{1}dw\,w\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}w\chi\right\}[\lambda\Pi,\ \chi]\times$$
$$\times\exp[-is(1-w)\chi][\lambda\Pi,\ \chi]\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}w\chi\right\}. \quad (14.31)$$

Сравнивая результат с левой частью, мы вновь получим (14.26), а также искомое выражение:

$$[\Pi,\ [\Pi,\ \exp(-is\chi)]]=-is\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\chi\right\}\times$$
$$\times[\Pi,\ [\Pi,\ \chi]]\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\chi\right\}-2s^2\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\int_{0}^{1}dw\,w\times$$
$$\times\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}w\chi\right\}[\Pi,\ \chi]\exp\{-is(1-w)\chi\}\times$$
$$\times[\Pi,\ \chi]\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}w\chi\right\}, \quad (14.32)$$

где

$$[\Pi,\ [\Pi,\ \chi(u)]]=-2ueq(\Pi-k).J-2ue^2F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (14.33)$$

причем мы ввели

$$J^{\mu}=\partial_{\nu}F^{\mu\nu}. \quad (14.34)$$

Заметим, что симметризация в соответствующем слагаемом оказывается излишней, так как

$$i[\Pi_{\mu},\ J^{\mu}]=\partial_{\mu}J^{\mu}=0. \quad (14.35)$$

Перед нами встает техническая проблема выполнить интегрирование по k в случае, когда из-за некоммутативности компонент вектора Π при наличии электромагнитного поля нельзя производить подстановку $k - u\Pi \to k$. Мы предлагаем один прием, подсказываемый следующими квантовомеханическими соображениями. В системе, где число переменных q и p равно n, среднее значение $\langle q' \mid f(p) \mid q' \rangle$ дается выражением

$$\langle q' \mid f(p) \mid q' \rangle = \int \langle q' \mid p' \rangle (dp') f(p) \langle p' \mid q' \rangle = \int \frac{(dp')}{(2\pi)^n} f(p') \tag{14.36}$$

и не зависит от q'. Соответственно этому пусть ξ — координата (четырехмерный вектор), дополнительная к k; напишем

$$\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} f(k) = \langle \xi' = 0 \mid f(k) \mid \xi' = 0 \rangle. \tag{14.37}$$

Преимущество такой переформулировки состоит в том, что она позволяет ввести канонические преобразования, не затрагивающие величины среднего значения, но изменяющие его форму удобным для нас образом. Так, например, путем операторного преобразования можно получить выражение, максимально приближающееся к случаю недопустимой теперь замены $k - u\Pi \to k$. Действительно, когда поле равно нулю и компоненты Π коммутируют друг с другом, мы имеем

$$\exp(-iu\xi\Pi) f(k - u\Pi) \exp(iu\xi\Pi) = f(k) \tag{14.38}$$

и

$$\begin{aligned} &\langle \xi' = 0 \mid f(k - u\Pi) \mid \xi' = 0 \rangle = \\ &\qquad = \langle \xi' = 0 \mid f(k) \mid \xi' = 0 \rangle. \end{aligned} \tag{14.39}$$

Простейший способ — выполнить то же самое преобразование и при наличии поля. Таким образом, мы хотим вычислить преобразованные величины

$$\begin{aligned} \hat{k} &= \exp(-iu\xi\Pi)\, k \exp(iu\xi\Pi), \\ \hat{\Pi} &= \exp(-iu\xi\Pi)\, \Pi \exp(iu\xi\Pi). \end{aligned} \tag{14.40}$$

Воспользовавшись наличием переменной u, можно получить дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\hat{k} &= \exp(-iu\xi\Pi)\, i[k, \xi\Pi] \exp(iu\xi\Pi) = \hat{\Pi}, \\ \frac{d}{du}\hat{\Pi} &= \exp(-iu\xi\Pi)\, i[\Pi, \xi\Pi] \exp(iu\xi\Pi) = -eq\hat{F}\xi, \end{aligned} \tag{14.41}$$

где

$$\hat{F} = F(\hat{x}), \quad \hat{x} = \exp(-iu\xi\Pi)\, x \exp(iu\xi\Pi). \tag{14.42}$$

Цепочка преобразований обрывается на x, так как благодаря коммутативности компонент ξ друг с другом мы имеем

$$\frac{d}{du}\hat{x} = \exp(-iu\xi\Pi)\, i\,[x,\ \xi\Pi]\exp(iu\xi\Pi) = -\xi. \tag{14.43}$$

Следовательно,

$$\hat{x} = x - u\xi, \tag{14.44}$$

и мы имеем уравнение

$$\frac{d}{du}\hat{\Pi} = -eqF(x-u\xi)\,\xi, \tag{14.45}$$

проинтегрировав которое, получим

$$\hat{\Pi} = \Pi - eq\int_0^u du'F(x-u'\xi)\,\xi. \tag{14.46}$$

Интегрируя затем дифференциальное уравнение для k, получаем

$$\hat{k} = k + u\Pi - eq\int_0^u du'\int_0^{u'} du''F(x-u''\xi)\,\xi =$$

$$= k + u\Pi - eq\int_0^u du'\,(u-u')\,F(x-u'\xi)\,\xi. \tag{14.47}$$

Выпишем также комбинации

$$\hat{k} - u\hat{\Pi} = k + eq\int_0^u du'u'F(x-u'\xi)\,\xi \tag{14.48}$$

и

$$\hat{\Pi} - \hat{k} = (1-u)\,\Pi - k + eq\int_0^u du'\,(u-1-u')\,F(x-u'\xi)\,\xi. \tag{14.49}$$

Преобразованное выражение для $\chi(u)$ имеет вид

$$\hat{\chi}(u) = \left[k + eq\int_0^u du'u'F(x-u'\xi)\,\xi\right]^2 +$$

$$+ u(1-u)\left[\Pi - eq\int_0^u du'F(x-u'\xi)\,\xi\right]^2 + m^2u, \tag{14.50}$$

или

$$\chi(u) = k^2 + u(1-u)\Pi^2 + m^2u + 2eq\int_0^u du'u'k.F(x-u'\xi)\xi -$$

$$-2equ(1-u)\int_0^u du'\Pi.F(x-u'\xi)\xi + e^2\left[\int_0^u du'u'F(x-u'\xi)\xi\right]^2 +$$

$$+e^2u(1-u)\left[\int_0^u du'F(x-u'\xi)\xi\right]^2. \qquad (14.51)$$

В качестве первого применения выделим только те члены, которые явным образом линейны по электромагнитному полю. В случае когда поля частиц подчиняются уравнению $(\Pi^2 + m^2)\varphi = 0$, из полученного результата должно вытекать хорошо известное выражение для формфактора, отвечающего реальным частицам. В такой ситуации следует ввести массу фотона. Начнем с последнего слагаемого (14.6) и представим комбинацию $[\Pi, [\Pi, \exp(-is\chi)]]$ в виде (14.32). Чтобы не появились степени F выше первой, мы сохраним только первый член в правой части равенства (14.33) и воспользуемся упрощенным выражением (14.32):

$$[\Pi, [\Pi, \exp(-is\chi)]] = is\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\chi\right\}2ueq\times$$

$$\times(\Pi-k)J\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\chi\right\}. \qquad (14.52)$$

Выполнив преобразование, которое обозначается символом ^, мы с достаточной для наших целей точностью будем иметь

$$\chi(u) \to k^2 + u(1-u)\Pi^2 + m^2u, \quad \Pi - k \to (1-u)\Pi - k,$$

$$J(x) \to J(x - u\xi). \qquad (14.53)$$

Рассмотрим теперь типичную гармоническую составляющую $\exp(ipx)$ тока $J(x)$ и исследуем операторное выражение

$$\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}k^2\right\}\exp(-iup\xi)\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}k^2\right\}, \qquad (14.54)$$

содержащее ξ и k, или, в иной форме записи,

$$\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}k^2\right\}\exp\left\{-iu\frac{1-v}{2}p\xi\right\}\exp\left\{-iu\frac{1+v}{2}p\xi\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}k^2\right\} = \exp\left\{-iu\frac{1-v}{2}p\xi\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\left[k-u\frac{1-v}{2}p\right]^2\right\}\times$$

$$\times \exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\left[k+u\frac{1+v}{2}p\right]^2\right\}\exp\left\{-iu\frac{1+v}{2}p\xi\right\}=$$
$$=\exp\left\{-iu\frac{1-v}{2}p\xi\right\}\left[\exp(-isk^2)\exp\left\{-isu^2\frac{1-v^2}{4}p^2\right\}\right]\times$$
$$\times\exp\left\{-iu\frac{1+v}{2}p\xi\right\}. \qquad (14.55)$$

Эти выкладки основываются только на том свойстве экспоненциальных по ξ сомножителей, что они приводят к соответствующим сдвигам импульсов. Если выделить диагональный матричный элемент с $\xi' = 0$, то в окончательном выражении эти сомножители заменятся единицами и останется только множитель, заключенный в квадратные скобки. Коммутатор (14.52), в котором произведены подстановки (14.53), содержит также член, линейный по k. Произведя трансляции, указанные в формуле (14.55), мы для соответствующей комбинации получим $k - u\,[(1 - v)/2]\,p$. Но $pJ = 0$, а оставшаяся нечетная функция импульса k при интегрировании дает нуль. Итак, при учете членов, линейных по F, мы имеем

$$\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}[\Pi,\ [\Pi,\ \exp\{-is\chi(u)\}]]=$$
$$=\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{2u(1-u)}{s}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\psi\right\}\times$$
$$+\exp\left\{-isu^2\frac{1-v^2}{4}p^2\right\}eq\Pi J\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\psi\right\}, \qquad (14.56)$$

где

$$\psi(u) = u\,(1-u)\,\Pi^2 + m^2u + \mu^2\,(1-u), \qquad (14.57)$$

а гауссова функция переменной p определяется ее мультипликативным действием на фурье-компоненты величины $J(x)$. Переходя к полям частиц, позволяющим произвести подстановку $\Pi^2 \to -m^2$, мы для последнего слагаемого в формуле (14.6) получим

$$-2e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left[\Pi,\left[\Pi,\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2}\right]\right]=$$
$$=\frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\int_0^1du\,u(1-u)\int_0^\infty ds\exp\left\{-is\left[m^2u^2+\mu^2(1-u)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+u^2\frac{1-v^2}{4}p^2\right]\right\}eq\Pi J=$$
$$=-i\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1dv\int_0^1du\,u(1-u)\frac{1}{m^2u^2+\mu^2(1-u)+u^2\frac{1-v^2}{4}p^2}eq\Pi J.$$
$$(14.58)$$

Отметим, что если положить $\mu = 0$, то в пределе при $u \to 0$ возникнет инфракрасная особенность.

Рассмотрим теперь среднее слагаемое в формуле (14.6), для которого нам нужно разложение

$$\exp(-is\hat{\chi}) = \exp[-is(k^2+\psi)] - is\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv \times$$
$$\times \exp\left\{-is\frac{1+v}{2}(k^2+\psi)\right\} 2eq\int_0^u du'u'k.F(x-u'\xi)\,\xi\times$$
$$\times\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}(k^2+\psi)\right\} + isu(1-u)\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\times$$
$$\times\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}(k^2+\psi)\right\}2eq\int_0^u du'\Pi.F(x-u'\xi)\,\xi\times$$
$$\times\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}(k^2+\psi)\right\}, \tag{14.59}$$

где мы ограничились первой степенью F. Комбинация

$$k.F\xi = \frac{1}{2}k_\nu\xi_\mu F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}F^{\nu\mu}\xi_\mu k_\nu \tag{14.60}$$

имеет структуру углового момента $\xi_\mu k_\nu - \xi_\nu k_\mu$. Она коммутирует с любой функцией переменной k^2, обращая тем самым в нуль инвариантные относительно вращений состояния $\langle\xi' = 0|$ и $|\xi' = 0\rangle$. Поэтому все сводится к анализу последнего члена (14.59), в котором мы сталкиваемся с произведением

$$\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}k^2\right\}\exp(-iu'p\xi)\,\xi\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}k^2\right\} =$$
$$= \frac{i}{u'}\frac{\partial}{\partial p}\left[\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}k^2\right\}\exp(-iu'p\xi)\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}k^2\right\}\right] \to$$
$$\to 2su'\frac{1-v^2}{4}p\exp(-isk^2)\exp\left\{-isu'^2\frac{1-v^2}{4}p^2\right\}. \tag{14.61}$$

Переходя к случаю реальных частиц ($\Pi^2 \to -m^2$) и сохраняя только члены, линейные по F, получаем

$$-4m^2e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2} =$$
$$= -i\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dv\int_0^1 du\,u(1-u)(1-v^2)\times$$
$$\times\int_0^{u^2} du'^2m^2\int_0^\infty ds\,s\exp\left\{-is\left[m^2u^2+\mu^2(1-u)+u'^2\frac{1-v^2}{4}p^2\right]\right\}eq\Pi J. \tag{14.62}$$

Два последних интегрирования можно выполнить в любом порядке; например,

$$
-\int_0^{u^2} du'^2 \frac{m^2}{\left[m^2u^2+\mu^2(1-u)+u'^2\frac{1-v^2}{4}p^2\right]^2} =
$$

$$
= -\frac{m^2u^2}{m^2u^2+\mu^2(1-u)} \frac{1}{m^2u^2+\mu^2(1-u)+u^2\frac{1-v^2}{4}p^2}. \qquad (14.63)
$$

Относительно первого слагаемого в формуле (14.6) заметим, что соответствующая ему экспонента содержит

$$
\chi(1) = (\Pi - k)^2 + m^2, \qquad (14.64)
$$

так что следует использовать преобразование по ξ с $u = 1$. Как это явствует из наличия сомножителя $1 - u$ в последнем слагаемом в формуле (14.59), этот вклад не дает членов, линейных по F.

Таким способом мы для оператора, стоящего между $i\varphi_1$ и φ_2, получаем

$$
-\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dv \int_0^1 du\, u(1-u)\left[1+v^2+(1-v^2)\frac{\mu^2}{m^2u^2+\mu^2}\right]\times
$$

$$
\times \frac{1}{\left(m^2+\frac{1-v^2}{4}p^2\right)u^2+\mu^2} eq\Pi J, \qquad (14.65)
$$

где произведено вполне допустимое упрощение ($\mu \ll m$)

$$
\mu^2(1-u) \approx \mu^2. \qquad (14.66)
$$

Член u^2 в произведении $u(1-u)$ приводит к интегралу, который в пределе при $\mu \to 0$ корректно определен; здесь массу фотона можно положить равной нулю. Член же с u дает следующие интегралы:

$$
\int_0^1 du\, u \frac{1}{\left(m^2+\frac{1-v^2}{4}p^2\right)u^2+\mu^2} =
$$

$$
= \frac{1}{2}\,\frac{\ln(m^2/\mu^2)+\ln[1+(1-v^2)(p^2/4m^2)]}{m^2+(1-v^2)(p^2/4)},
$$

$$
(1-v^2)\int_0^1 du\, u \frac{\mu^2}{m^2u^2+\mu^2}\,\frac{1}{\left(m^2+\frac{1-v^2}{4}p^2\right)u^2+\mu^2} =
$$

$$
= \frac{2}{p^2}\ln\left[1+(1-v^2)\frac{p^2}{4m^2}\right]. \qquad (14.67)
$$

С учетом тождества (12.42) и соотношения

$$\int_0^1 dv \frac{2}{p^2} \ln\left[1+(1-v^2)\frac{p^2}{4m^2}\right] = \int_0^1 dv \frac{v^2}{m^2+\frac{1-v^2}{4}p^2} \tag{14.68}$$

мы для (14.65) сразу же получим следующий результат:

$$-\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dv\,(1+v^2)\frac{\ln\left\{\frac{4m^2}{\mu^2}\frac{v^2}{1-v^2}\right\}-2}{4m^2+(1-v^2)p^2}\,2eq\Pi J. \tag{14.69}$$

Помещая это выражение между полями частиц φ и умножая его на $^1/_2$, получаем добавку к действию. Поскольку в лоренцевской калибровке $J = p^2A$, в коэффициенте при $2eq\Pi A$ мы узнаем предполагавшееся раньше выражение для $F(p) - 1$.

В качестве сравнительно простого примера эффектов, квадратичных по F, рассмотрим поле вдали от его источника, полагая тем самым $J = 0$. Он относится к рассеянию фотонов, причем мы ограничимся случаем рассеяния вперед. Это позволяет нам отбросить полевую структуру $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, которая порождает комбинацию G_2 из векторов поляризации, задаваемую формулой (13.130). В такой ситуации оба слагаемых коммутатора $[\Pi, [\Pi, \chi]]$ обращаются в нуль и мы получаем

$$\begin{aligned}[\Pi, [\Pi, \exp(-is\chi)]] \to 8s^2u^2e^2 \int \frac{1}{2}\,dv\,dw\,w \times \\ \times \exp\left\{-is\frac{1+v}{2}w\chi\right\} F^{\mu\nu}(\Pi-k)_\nu \exp\{-is(1-w)\chi\} \times \\ \times F_{\mu\nu}(\Pi-k)^\lambda \exp\left\{-is\frac{1-v}{2}w\chi\right\}.\end{aligned} \tag{14.70}$$

Поскольку сюда уже входят необходимые степени F, расчет заметно облегчается; ξ-преобразование сводится просто к замене

$$k \to k + u\Pi, \quad x \to x - u\xi. \tag{14.71}$$

Так как мы ограничиваемся случаем рассеяния вперед, два поля не дают никакого суммарного импульса. Рассмотрим далее комбинацию

$$\begin{aligned}\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}wk^2\right\}\exp(iup\xi)\exp\{-is(1-w)k^2\}\exp(-iup\xi) \times \\ \times \exp\left\{-is\frac{1-v}{2}wk^2\right\} \to \exp\left\{-is\frac{1+v}{2}w(k+up)^2\right\} \times \\ \times \exp\{-is(1-w)k^2\}\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}w(k+up)^2\right\},\end{aligned} \tag{14.72}$$

которая после замены переменной интегрирования

$$k \to k - uwp \tag{14.73}$$

принимает вид

$$\exp(-isk^2)\exp\{-isu^2w(1-w)p^2\}. \tag{14.74}$$

В применении к рассеянию фотонов, когда $p^2=0$, последний сомножитель равен единице. Так как $J=0$, преобразование (14.73) не затрагивает линейных по k членов в формуле (14.70). У нас возникает также импульсный интеграл

$$\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}k_\nu k_\lambda\exp\;-isk^2)=\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}k_\nu\left(\frac{i}{2s}\right)\frac{\partial}{\partial k^\lambda}\exp(-isk^2)=$$
$$=-\frac{1}{2}g_{\nu\lambda}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{s^3}. \tag{14.75}$$

Однако он порождает полевую комбинацию $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, а потому не дает вклада в интересующем нас частном случае. Таким путем мы получаем

$$e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}[\Pi,[\Pi,\exp(-is\mathcal{X})]]=-i8\alpha^2u^2(1-u)^2\exp(-ism^2u^2)\times$$
$$\times\int_0^1 dw\,wF^{\mu\nu}\Pi_\nu\exp\{-is(1-w)u(1-u)(\Pi^2+m^2)\}F_{\mu\lambda}\Pi^\lambda. \tag{14.76}$$

По переменной w удобно выполнить интегрирование по частям:

$$\int_0^1 dw\,w\exp\{-is(1-w)\mathscr{H}\}=$$
$$=-\frac{i}{s}\frac{1}{\mathscr{H}}\left[1-\int_0^1 dw\exp\{-is(1-w)\mathscr{H}\}\right], \tag{14.77}$$

где

$$\mathscr{H}=u(1-u)(\Pi^2+m^2). \tag{14.78}$$

Интегрируя затем по s, получаем

$$-2e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left[\Pi,\left[\Pi,\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2}\right]\right]=$$
$$=i\frac{16\alpha^2}{m^2}\int_0^1 du(1-u)^2\int_0^1 dw(1-w)F^{\mu\nu}\Pi_\nu\times$$
$$\times\frac{1}{m^2u^2+(1-w)u(1-u)(\Pi^2+m^2)}F_{\mu\lambda}\Pi^\lambda. \tag{14.79}$$

Рассмотрим теперь разложение экспоненты $\exp(-is\hat{\mathcal{X}})$, в котором нас интересует только член, квадратичный по $F\Pi$. При упрощающем условии $(\Pi^2 + m^2)\varphi = 0$ он равен

$$-s^2e^2 4u^4(1-u)^2 \exp(-ism^2u^2)\int \frac{1}{2}\,dv\,dw\,w\times$$
$$\times\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\,wk^2\right\}\xi\overline{F}\Pi\times$$
$$\times\exp\{-is(1-w)[k^2+u(1-u)(\Pi^2+m^2)]\}\xi\overline{F}\Pi\times$$
$$\times\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\,wk^2\right\}, \qquad (14.80)$$

где

$$\overline{F}=\frac{1}{u}\int_0^u du'F(x-u'\xi). \qquad (14.81)$$

Преобразуем возникающее здесь операторное выражение с k и ξ, пользуясь равенствами $J = 0$ и $p^2 = 0$:

$$\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\,wk^2\right\}\xi_\nu\exp(iu'p\xi)\exp\{-is(1-w)k^2\}\xi_\lambda\times$$
$$\times\exp(-iu''p\xi)\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\,wk^2\right\}\to$$
$$\to\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\,w(k+u'p)^2\right\}\xi_\nu\exp\{-is(1-w)k^2\}\xi_\lambda\times$$
$$\times\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\,w(k+u''p)^2\right\}\to$$
$$\to-s^2(1-v^2)\,w^2k_\nu k_\lambda\exp\{-isk^2-isw[(1+v)u'+(1-v)u'']kp\}\to$$
$$\to-s^2(1-v^2)\,w^2k_\nu k_\lambda\exp(-isk^2); \qquad (14.82)$$

здесь на последнем этапе мы воспользовались преобразованием переменной интегрирования

$$k\to k-w\left(\frac{1+v}{2}\,u'+\frac{1-v}{2}\,u''\right)p. \qquad (14.83)$$

Параметры u' и u'' исчезли, и $\overline{F}$ становится эффективно равным F. Итак, удерживая только квадратичный по F член, мы будем иметь

$$e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\exp\{-is\chi(u)\}=-\frac{4}{3}\,\alpha^2su^4(1-u)^2\exp(-ism^2u^2)\times$$
$$\times\int_0^1 dw\,w^3F^{\mu\nu}\Pi_\nu\exp\{-is(1-w)u(1-u)(\Pi^2+m^2)\}F_{\mu\lambda}\Pi^\lambda. \qquad (14.84)$$

Целесообразно еще раз выполнить интегрирование по частям по переменной w:

$$\int_0^1 dw\, w^3 \exp\{-is(1-w)\mathscr{H}\} =$$

$$= -\frac{i}{s\mathscr{H}} + \frac{3}{s^2\mathscr{H}^2}\left[1 - 2\int_0^1 dw\, w \exp\{-is(1-w)\mathscr{H}\}\right]. \quad (14.85)$$

Результат интегрирования по s таков:

$$-4m^2e^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2} =$$

$$= -i\frac{32\alpha^2}{m^2} \int_0^1 du\,(1-u)^2 \int_0^1 dw\, w(1-w)^2 \times$$

$$\times F^{\mu\nu}\Pi_\nu \frac{1}{m^2u^2+(1-w)\,u\,(1-u)\,(\Pi^2+m^2)} F_{\mu\lambda}\Pi^\lambda. \quad (14.86)$$

Относительно же первого слагаемого в формуле (14.6) заметим, что если в выражении (14.84) положить $u = 1$, то интересующий нас вклад обратится в нуль.

Комбинируя (14.79) и (14.86), мы для оператора, стоящего между $i\varphi_1$ и φ_2, получаем

$$16\alpha^2 \int_{m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{M^2} \frac{\chi(M^2)}{M^2-m^2} F^{\mu\nu}\Pi_\nu \frac{1}{\Pi^2+M^2} F_{\mu\lambda}\Pi^\lambda, \quad (14.87)$$

где

$$\frac{1}{M^2}\frac{\chi(M^2)}{M^2-m^2} = \frac{1}{m^2}\int_0^1 du \int_0^1 dw \frac{1-u}{u}\,[1-2w(1-w)] \times$$

$$\times\, \delta\left(M^2 - m^2 - m^2\frac{u}{(1-u)(1-w)}\right). \quad (14.88)$$

Если исключить переменную u и написать

$$w = \frac{1}{2}(1+z), \quad (14.89)$$

то функция $\chi(M^2)$ примет вид

$$\chi(M^2) = 2M^2m^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dz \frac{1+z^2}{[M^2+m^2-z(M^2-m^2)]^2} =$$

$$= 1 - \frac{4M^2m^2}{M^2-m^2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dz\, \frac{z}{M^2+m^2-z(M^2-m^2)}. \quad (14.90)$$

Таким образом, мы снова получили функцию (13.21), на этот раз каузальным методом.

Теперь перед нами встает главная проблема: каким образом корректно учесть повторные взаимодействия, которые характеризуют возбуждения связанной системы, обладающие малыми импульсами? Надлежащую процедуру подсказывает нам сравнение расчета двойного коммутатора (14.56) для слабых полей с выражением, которое получится, если вторую коммутацию осуществить не сразу, а в конце вычисления. Чтобы вывести это последнее выражение, обратимся к формулам (14.26) и (14.27):

$$[\Pi, \exp(-is\chi)] = 2su \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dv \exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\chi\right\} eqF.(\Pi-k)\times \\ \times\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\chi\right\}, \tag{14.91}$$

и, сохраняя только члены, линейные по полю, выполним преобразования (14.53). Это дает

$$[\Pi, \exp(-is\chi)] \to 2su \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dv \exp\left\{-is\frac{1+v}{2}(k^2+\psi)\right\}\times \\ \times eqF(x-u\xi).[(1-u)\Pi-k]\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}(k^2+\psi)\right\}, \tag{14.92}$$

где

$$\psi(u) = u(1-u)(\Pi^2+m^2)+m^2u^2. \tag{14.93}$$

Проводя теперь выкладки (14.55) и учитывая, что

$$\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}k^2\right\}\exp(-iup\xi).k\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}k^2\right\}\to \\ \to\exp(-isk^2)\left(k+\frac{1}{2}uvp\right)\exp\left\{-isu^2\frac{1-v^2}{4}p^2\right\}, \tag{14.94}$$

мы получаем

$$e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}[\Pi, \exp(-is\chi)] = \\ = -i\frac{\alpha}{2\pi}\frac{u}{s}\int\frac{1}{2}\, dv\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\psi\right\}\exp\left\{-isu^2\frac{1-v^2}{4}p^2\right\}\times \\ \times\left[(1-u)eqF.\Pi+\frac{1}{2}iuveqJ\right]\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\psi\right\}. \tag{14.95}$$

Выпишем теперь два члена второго коммутатора с Π и заменим оператор Π^2 там, где он действует непосредственно на поля частиц, величиной $-m^2$. В результате будем иметь

$$e^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} [\Pi, [\Pi, \exp(-is\chi)]] =$$

$$= -i\frac{\alpha}{2\pi}\frac{u}{s}\exp(-ism^2u^2)\int \frac{1}{2}\,dv \exp\left\{-isu^2\frac{1-v^2}{4}p^2\right\}\times$$

$$\times\left\{\Pi^\mu \exp\left[-is\frac{1+v}{2}u(1-u)(\Pi^2+m^2)\right]\times\right.$$

$$\times\left[(1-u)\,eqF_{\mu\nu}.\Pi^\nu+\frac{1}{2}\,iuveqJ_\mu\right]-$$

$$-\left[(1-u)\,eqF_{\mu\nu}.\Pi^\nu+\frac{1}{2}\,iuveqJ_\mu\right]\times$$

$$\left.\times\exp\left[-is\frac{1-v}{2}u(1-u)(\Pi^2+m^2)\right]\Pi^\mu\right\}, \qquad (14.96)$$

а затем

$$-2e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left[\Pi,\left[\Pi,\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2}\right]\right]=$$

$$=-\frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,dv\int_0^1 du\,u\times$$

$$\times\left\{\Pi_\mu\frac{1}{m^2u^2+u^2\dfrac{1-v^2}{4}p^2+\dfrac{1+v}{2}u(1-u)(\Pi^2+m^2)}\times\right.$$

$$\times\left[(1-u)\,eqF_{\mu\nu}.\Pi^\nu+\frac{1}{2}\,iuveqJ_\mu\right]-$$

$$-\left[(1-u)\,eqE_{\mu\nu}.\Pi^\nu+\frac{1}{2}\,iuveqJ_\mu\right]\times$$

$$\left.\times\frac{1}{m^2u^2+u^2\dfrac{1-v^2}{4}p^2+\dfrac{1-v}{2}u(1-u)(\Pi^2+m^2)}\Pi^\mu\right\}. \qquad (14.97)$$

Если множитель Π^2+m^2 в обоих знаменателях положить равным нулю, то мы вновь получим формулу (14.58). Сохранив же его, мы получаем естественное «обрезание» для инфракрасной особенности при $u=0$, которое без этого вводили произвольным образом, приписывая конечную массу фотону.

Приведем также один вариант выражения (14.97), который примени́м в случае медленно меняющихся полей ($Z\alpha \ll 1$). С этой целью опустим p^2 в знаменателях и отбросим член с J. Кроме того, разобьем область интегрирования по переменной u на два интервала, введя промежуточное значение $u=u_0$, удовлетворяющее условию

$$u_0 \sim Z\alpha \ll 1. \qquad (14.98)$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 du \frac{u(1-u)}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}u(1-u)(\Pi^2+m^2)} \approx$$

$$\approx \int\limits_0^{u_0} du \frac{1}{m^2u+\frac{1+v}{2}(\Pi^2+m^2)} + \int\limits_{u_0}^1 du \frac{1-u}{m^2u} \approx$$

$$\approx \frac{1}{m^2}\left[\ln\frac{m^2}{\Pi^2+m^2} - \ln\frac{1+v}{2} - 1\right], \qquad (14.99)$$

где в соответствии с тем, что в знаменателе подразумевается наличие добавки $-i\varepsilon$, имеем

$$\Pi^2+m^2<0: \quad \ln\frac{m^2}{\Pi^2+m^2} = \ln\frac{m^2}{|\Pi^2+m^2|} + \pi i. \qquad (14.100)$$

Выражение (14.97) упрощается к виду

$$-2e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left[\Pi, \left[\Pi, \frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2}\right]\right] \approx$$

$$\approx -\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{m^2}\left[\Pi^\mu \ln\frac{m^2}{\Pi^2+m^2} eqF_{\mu\nu}.\Pi^\nu - eqF_{\mu\nu}.\Pi^\nu \ln\frac{m^2}{\Pi^2+m^2}\Pi^\mu\right], \qquad (14.101)$$

где использовано соотношение

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\left(\ln\frac{1+v}{2}+1\right)=0. \qquad (14.102)$$

С учетом выражения для коммутатора

$$[\Pi_\mu, \Pi^2+m^2] = 2ieqF_{\mu\nu}.\Pi^\nu \qquad (14.103)$$

этот результат можно представить также в виде

$$-i\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{m^2}\Pi^\mu(\Pi^2+m^2)\ln\frac{m^2}{\Pi^2+m^2}\Pi_\mu. \qquad (14.104)$$

Теперь нам предстоит аналогичным образом усовершенствовать выкладки (14.62) и (14.63). Сначала мы сделаем это для случая медленно меняющихся полей. В этом случае наиболее существенными членами в $\hat{\chi}(u)$, зависящими от поля, являются последнее слагаемое (14.51), квадратичное по F, и слагаемое, содержащее Π. Остальные члены обращаются в нуль или приводят к квадратичным по полю членам без инфракрасных особенностей. Указанные вклады в $\hat{\chi}(u)$ имеют вид

$$\hat{\chi}(u) = k^2 + u(1-u)\Pi^2 + m^2u - 2equ^2(1-u)\Pi.F\xi +$$
$$+ equ^3(1-u)\Pi^\mu.\partial_\lambda F_{\mu\nu}\xi^\nu\xi^\lambda - e^2u^3(1-u)\xi^\mu F_{\mu\lambda}F^{\lambda\nu}\xi_\nu, \qquad (14.105)$$

где мы оставили только два первых члена разложения $F(x - u'\xi)$ по степеням ξ. Выполнив преобразование

$$\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}k^2\right\}\xi_\mu\xi_\nu\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}k^2\right\}\to$$
$$\to\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}k^2\right\}[-s(1+v)k_\mu][s(1-v)k_\nu]\times$$
$$\times\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}k^2\right\} \qquad (14.106)$$

с учетом выражения (14.75), получим следующие линейные и квадратичные по полю члены:

$$e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\exp\{-is\chi(u)\} = -i\frac{\alpha}{12\pi}u^3(1-u)\times$$
$$\times\exp(-ism^2u^2)(eq\Pi J + e^2F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \frac{\alpha}{12\pi}su^4(1-u)^2\times$$
$$\times\exp(-ism^2u^2)\int_0^1 dw\, w^3 2ieqF^{\mu\nu}.\Pi_\nu\times$$
$$\times\exp\{-is(1-w)u(1-u)(\Pi^2+m^2)\}\,2ieqF_{\mu\lambda}.\Pi^\lambda. \qquad (14.107)$$

Воспользовавшись коммутатором (14.103), последний сомножитель можно представить и по-другому:

$$\int dw\, w^3 2ieqF^{\mu\nu}.\Pi_\nu\exp\{-is(1-w)u(1-u)(\Pi^2+m^2)\}\,2ieqF_{\mu\lambda}.\Pi^\lambda =$$
$$= -\frac{i}{su(1-u)}\int dw\, w^3\Pi^\mu\frac{d}{dw}\exp\{-is(1-w)u(1-u)(\Pi^2+m^2)\}\times$$
$$\times 2ieqF_{\mu\lambda}.\Pi^\lambda = \frac{i}{su(1-u)}\int dw\, w^3 2ieqF^{\mu\nu}.\Pi_\nu\times$$
$$\times\frac{d}{dw}\exp\{-is(1-w)u(1-u)(\Pi^2+m^2)\}\,\Pi_\mu. \qquad (14.108)$$

Мы усредним два эти выражения, выполнив предварительно интегрирование по частям. Тогда коммутатор, возникающий при $w = 1$,

$$[\Pi^\mu,\ ieqF_{\mu\nu}.\Pi^\nu] = -eq\Pi J - e^2F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \qquad (14.109)$$

даст вклад, который компенсирует первое слагаемое в правой части равенства (14.107). В результате останется [напомним, что $\mathcal{H}$ определяется формулой (14.78)]

$$-\frac{\alpha}{4\pi}u^3(1-u)\exp(-ism^2u^2)\int_0^1 dw\, w^2[\Pi^\mu\exp\{-is(1-w)\mathcal{H}\}\times$$
$$\times eqF_{\mu\nu}.\Pi^\nu - eqF_{\mu\nu}.\Pi^\nu\exp\{-is(1-w)\mathcal{H}\}\Pi^\mu], \qquad (14.110)$$

где мы еще раз проинтегрировали по частям:

$$\int_0^1 dw\, w^2 \exp\{-is(1-w)\mathscr{H}\} =$$

$$= \frac{1}{is\mathscr{H}}\left[1 - 2\int_0^1 dw\, w \exp\{-is(1-w)\mathscr{H}\}\right]. \qquad (14.111)$$

Выполняя затем интегрирование по s, мы для членов, зависящих от поля, получаем

$$-4m^2e^2\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2}\frac{1}{(\Pi-k)^2+m^2} =$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 du\, u(1-u)\int_0^1 dw\, w(1-w)\left[\Pi^\mu \frac{1}{m^2u^2+(1-w)\mathscr{H}}\, eqF_{\mu\nu}\,.\Pi^\nu -\right.$$

$$\left. - eqF_{\mu\nu}\,.\Pi^\nu \frac{1}{m^2u^2+(1-w)\mathscr{H}}\Pi^\mu\right]. \qquad (14.112)$$

Входящий сюда интеграл по u, если заменить в нем $1 - w$ на $^1/_2\,(1 + v)$, будет совпадать с выражением (14.99). Остальные же интегралы по параметру оказываются отличными от него:

$$\int_0^1 dw\, w(1-w) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}dv \frac{1-v^2}{4} = \frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 dw\, w(1-w)[\ln(1-w)+1] = \qquad (14.113)$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}dv\frac{1-v^2}{4}\left(\ln\frac{1+v}{2}+1\right) = \frac{1}{36}.$$

После этих упрощений выражение (14.112) может быть записано в виде

$$i\frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\Pi^\mu(\Pi^2+m^2)\left(\ln\frac{m^2}{\Pi^2+m^2}-\frac{1}{6}\right)\Pi_\mu. \qquad (14.114)$$

Снова отметим, что, поскольку величина (14.110), например, обращается в нуль при $u = 1$, первое слагаемое (14.6) не дает подобного вклада. Сложив (14.104) с (14.114) и отбросив множитель i, мы для оператора, стоящего между φ_1 и φ_2, получим выражение

$$-\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\Pi^\mu(\Pi^2+m^2)\left(\ln\frac{m^2}{\Pi^2+m^2}-\frac{1}{6}\right)\Pi_\mu. \qquad (14.115)$$

Соответствующая добавка к действию получится путем образования скалярного произведения с полем частиц φ и умножения на $^1/_2$.

Энергетический сдвиг, соответствующий такой прибавке к действию, можно найти либо методом обычной теории возмущений из модифицированного полевого уравнения, либо рассматривая определенную причинную последовательность событий. Испускающий и детектирующий источники, разделенные интервалом времени T, обмениваются частицей, с которой ассоциировано поле

$$\varphi(x) = \varphi(\mathbf{x}) \exp(-ip^0x^0). \tag{14.116}$$

В этом случае вакуумная амплитуда, отвечающая оператору (14.115), принимает вид

$$iK_1^* [-iT\delta E]\, iK_2, \tag{14.117}$$

где

$$\delta E = \varphi^* \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{1}{m^2} \Pi (\Pi^2 + m^2) \left(\ln \frac{m^2}{\Pi^2 + m^2} + \frac{1}{12}\right) \Pi\varphi \tag{14.118}$$

представляет собой сдвиг энергии рассматриваемого состояния (как явствует из обозначений, здесь имеется в виду трехмерное скалярное произведение). Нам осталось показать лишь, что в пренебрежении членами относительного порядка $Z\alpha$ и выше это выражение совпадает с результатом, полученным в § 11 путем комбинирования нерелятивистского и релятивистского расчетов. С указанной точностью мы имеем

$$\Pi (\Pi^2 + m^2) \left(\ln \frac{m^2}{\Pi^2 + m^2} + \frac{1}{12}\right) \Pi \to$$

$$\to -(m + E - V)\, 2m (H - E) \left(\ln \frac{\frac{1}{2} m}{H - E} + \frac{1}{12}\right) (m + E - V) +$$

$$+ \mathbf{p} \cdot 2m (H - E) \left(\ln \frac{\frac{1}{2} m}{H - E} + \frac{1}{12}\right) \mathbf{p} \to$$

$$\to 2m\mathbf{p} \cdot (H - E) \int_0^K dk^0 \frac{1}{k^0 + H - E}\, \mathbf{p}, \tag{14.119}$$

где

$$\ln K = \ln \frac{1}{2} m + \frac{1}{12}. \tag{14.120}$$

Отбросив первое слагаемое в правой части соотношения (14.119), мы пренебрегли членами, квадратичными по V, а кроме того учли, что φ является собственным вектором оператора H с собственным значением E. Написав теперь

$$(H-E)\int_0^K dk^0 \frac{1}{k^0+H-E} = \int_0^K dk^0 k^0 \left[\frac{1}{E-H-k^0}+\frac{1}{k^0}\right] =$$
$$= \int_0^K dk^0 k^0 \left[\frac{1}{E-T-k^0}+\frac{1}{k^0}+\frac{1}{E-T-k^0}V\frac{1}{E-T-k^0}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{E-T-k^0}V\frac{1}{E-H-k^0}V\frac{1}{E-T-k^0}\right] \quad (14.121)$$

и заметив, что множитель $2m$ превращает φ в нерелятивистскую волновую функцию ψ, мы будем иметь в точности выражение (14.59) (если учесть компенсацию фигурирующих там контактных членов). При этом верхний предел интегрирования, фиксируемый равенством (14.120), совпадает с тем, который задается формулой (11.54). Так что действительно это и есть тот самый унифицированный вывод, к которому мы стремились. Аналогичный расчет для частиц со спином $^1/_2$ будет проведен несколько позже. Отметим, кстати, что не учтенный явным образом эффект поляризации вакуума должен приводить к изменению аддитивной константы $^1/_{12}$. Как показывает формула (11.135), это изменение таково:

$$\frac{1}{12} \to \frac{1}{12}-\frac{1}{40}. \quad (14.122)$$

15. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СДВИГИ H-ЧАСТИЦ. СПИН 0, РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ

Нашей целью здесь является отыскание такой поправки к полученным выше энергетическим сдвигам, относительная величина которой имеет порядок $Z\alpha$. Видимо, прежде всего следует показать, что подобные релятивистские поправки порядка $Z\alpha$ действительно существуют, причем они преобладают, вообще говоря, над эффектами, которым соответствует характерный для тонкой структуры фактор $(Z\alpha)^2$. В этом проще всего убедиться на примере расчета поляризации вакуума, выполненного в § 3, где принималось приближение, состоящее в замене $|\psi(\mathbf{x})|^2 \to |\psi(0)|^2$. Приближение можно улучшить, если учесть изменение $\psi(\mathbf{x})$ в области $|\mathbf{x}| \ll a_0 = (mZ\alpha)^{-1}$. С достаточной для нас точностью соответствующее изменение волновой функции учитывается уравнением Шредингера

$$\left[-|E|+\frac{1}{2m}\nabla^2+\frac{Z\alpha}{|\mathbf{x}|}\right]\psi(\mathbf{x})=0. \quad (15.1)$$

Ее поведение вблизи начала координат не зависит от энергии s-состояния, так что решение имеет вид

$$|\mathbf{x}| \ll a_0: \quad \psi(\mathbf{x}) = \psi(0)\left[1 - \frac{|\mathbf{x}|}{a_0} + \ldots\right]. \tag{15.2}$$

Соответственно этому формула (3.53) для энергетического сдвига заменяется теперь выражением

$$\delta E \approx -4\pi Z\alpha\,|\psi(0)|^2 \int (d\mathbf{x})\,\delta\mathscr{D}(\mathbf{x}) + \\ + 8\pi Z^2\alpha^2\,|\psi(0)|^2 \int (d\mathbf{x})\,m\,|\mathbf{x}|\,\delta\mathscr{D}(\mathbf{x}), \tag{15.3}$$

где относительная величина дополнительного слагаемого действительно имеет порядок $Z\alpha$. Сюда входит новый интеграл, который в случае спина 0 равен

$$\int (d\mathbf{x})\,m\,|\mathbf{x}|\,\delta\mathscr{D}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{6\pi} m \int\limits_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM^2}{(M^2)^{5/2}} \left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{3/2} = \\ = \frac{\alpha}{6\pi}\frac{1}{(2m)^2} \int\limits_0^1 dv\,(1-v^2)^{1/2} v^4 = \frac{\alpha}{192}\frac{1}{(2m)^2}. \tag{15.4}$$

Соответственно этому эффекту в формуле (14.122) для аддитивных констант нужно произвести следующее изменение:

$$-\frac{1}{40} \to -\frac{1}{40} + \frac{1}{128}\pi Z\alpha. \tag{15.5}$$

В качестве первого шага мы еще раз, уже иным методом, проанализируем интеграл

$$I = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \exp\{-is\chi(u)\}, \tag{15.6}$$

что будет весьма полезно с точки зрения поставленной выше цели. При этом будем исходить из аналогичного интеграла

$$I(\lambda^2) = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \exp\{-is\chi_\lambda(u)\}, \tag{15.7}$$

где

$$\chi_\lambda(u) = (k - \lambda u\Pi)^2 + u(1-u)\Pi^2 + m^2 u. \tag{15.8}$$

Мы написали здесь $I(\lambda^2)$, поскольку совершенно очевидно, что интеграл является четной функцией переменной λ. Прежде всего отметим, что выражение

$$I(0) = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \exp(-isk^2) \exp\{-is\psi(u)\} \tag{15.9}$$

совпадает с результатом, который получается для $I = I(1)$ в отсутствие электромагнитного поля, когда допустимо преобразование $k - u\Pi \to k$. Таким образом, записывая

$$I(1) = I(0) + \int_0^1 d\lambda^2 \frac{d}{d\lambda^2} I(\lambda^2), \tag{15.10}$$

мы выделяем в виде последнего слагаемого ту часть, которая явным образом зависит от поля. Кроме того, осуществив дополнительно преобразование

$$\int_0^1 d\lambda^2 \frac{d}{d\lambda^2} I(\lambda^2) = \frac{d}{d\lambda^2} I(\lambda^2)|_{\lambda=0} + \int_0^1 d\lambda^2 (1-\lambda^2) \left(\frac{d}{d\lambda^2}\right)^2 I(\lambda^2), \tag{15.11}$$

мы выделим в виде компоненты с $\lambda = 0$ как раз ту часть, чувствительную к инфракрасным эффектам, которая фигурирует в формуле (14.110). В результате у нас остается член, анализ которого значительно проще.

Начнем с выражения для производной

$$\frac{dI(\lambda^2)}{d\lambda^2} = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \frac{dv}{2} \exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1+v}{2}\right\} 2isu\,(k\Pi - \lambda u \Pi^2) \times \\ \times \exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1-v}{2}\right\}, \tag{15.12}$$

которую мы намерены переписать, используя равенство

$$\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \frac{dv}{2} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1+v}{2}\right\} \Pi_\mu \exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1-v}{2}\right\}\right] = 0. \tag{15.13}$$

Продифференцировав каждую из экспонент, получим

$$0 = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \int \frac{dv}{2} \frac{dv'}{2} \left[\exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1+v}{2} \frac{1+v'}{2}\right\} \frac{1+v}{2} (k - \lambda u \Pi) \times \right. \\ \times \exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1+v}{2} \frac{1-v'}{2}\right\} \Pi \exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1-v}{2}\right\} + \\ + \exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1+v}{2}\right\} \Pi \exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1-v}{2} \frac{1+v'}{2}\right\} \frac{1-v}{2} \times \\ \left. \times (k - \lambda u \Pi) \exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1-v}{2} \frac{1-v'}{2}\right\}\right], \tag{15.14}$$

или

$$\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} dv \exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1+v}{2}\right\} k\Pi \exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1-v}{2}\right\} = \\ = 2\lambda u \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dv \int_0^1 dw\, w\, exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1+v}{2} w\right\} \Pi \times \\ \times \exp\{-is\chi_\lambda (1-w)\} \Pi \exp\left\{-is\chi_\lambda \frac{1-v}{2} w\right\}. \tag{15.15}$$

В последнем выражении трем параметрам, в сумме равным единице, придана более симметричная форма записи, такая же, как в формуле (14.25). Преобразование первого слагаемого в правой части равенства (15.14) приводит к замене

$$\frac{1+v}{2}\frac{dv}{2}\frac{dv'}{2}\to\frac{1}{2}\,dv\,dw\,w. \tag{15.16}$$

Второе слагаемое полностью аналогично первому и дает такой же вклад. С учетом этого тождества выражение (15.12) приводится к виду

$$\frac{dI(\lambda^2)}{d\lambda^2}=isu^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left[2\int\frac{1}{2}\,dv\,dw\,w\exp\left\{-is\chi_\lambda\frac{1+v}{2}w\right\}\Pi\times\right.$$
$$\times\exp\{-is\chi_\lambda(1-w)\}\Pi\exp\left\{-is\chi_\lambda\frac{1-v}{2}w\right\}-$$
$$\left.-\int\frac{1}{2}\,dv\exp\left\{-is\chi_\lambda\frac{1+v}{2}\right\}\Pi^2\exp\left\{-is\chi_\lambda\frac{1-v}{2}\right\}\right]. \tag{15.17}$$

Чтобы убедиться в справедливости замечания, касающегося значения этой производной при $\lambda=0$, достаточно упростить ее, ограничившись полями, которые подчиняются уравнению $(\Pi^2+m^2)\varphi=0$:

$$e^2\frac{dI(\lambda^2)}{d\lambda^2}\bigg|_{\lambda=0}\to\frac{\alpha}{4\pi}\frac{u^2}{s}\exp(-ism^2u^2)\,2\int_0^1 dw\,w\Pi\times$$
$$\times[\exp\{-is(1-w)\mathscr{H}\}-1]\,\Pi. \tag{15.18}$$

Применив здесь тождество (14.111) и воспользовавшись коммутатором (14.103), мы узнаем в полученном результате выражение (14.110).

В случае члена с двойным коммутатором ситуация оказывается еще проще. Здесь интегралом

$$2\int ds\,s\,du\;e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\,[\Pi,[\Pi,\exp\{-is\chi_\lambda(u)\}]]_{\lambda=0} \tag{15.19}$$

дается основной член выражения (14.97) в том приближении, в котором отбрасываются члены с J и p^2. Пользуясь равенством

$$e^2\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\exp\{-is\chi_0(u)\}=-i\,\frac{\alpha}{4\pi}\,\frac{1}{s^2}\exp\{-is\psi(u)\}, \tag{15.20}$$

мы для величины (15.19) получаем выражение

$$-i\,\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{ds}{s}\,du\frac{dv}{2}\exp(-ism^2u^2)\left[\Pi,\exp\left\{-is\,\frac{1+v}{2}\mathscr{H}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\,2su(1-u)\,eqF\,.\,\Pi\exp\left\{-is\,\frac{1-v}{2}\mathscr{H}\right\}\right]. \tag{15.21}$$

В случае когда $(\Pi^2+m^2)\varphi=0$, будем иметь

$$-\frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\int_{0}^{1}du\,u(1-u)\left[\Pi\frac{1}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}eqF.\Pi-\right.$$

$$\left.-eqF.\Pi\frac{1}{m^2u^2+\frac{1-v}{2}\mathscr{H}}\Pi\right]. \qquad (15.22)$$

В итоге мы действительно приходим к тому самому результату, который можно выделить из выражения (14.97) упомянутым выше способом.

Исследование поправок порядка $Z\alpha$ мы начнем с рассмотрения ошибок, которые возникают за счет приближений, принятых в формулах (14.99) и (14.119). Сравним (неполное) выражение для энергетического сдвига

$$\frac{\alpha}{\pi}\int_{0}^{1}du\,u(1-u)\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\frac{1+v^2}{2}\varphi^*\Pi\frac{\Pi^2+m^2}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}\Pi\varphi, \qquad (15.23)$$

которое получается, если скомбинировать (14.112) с приближенной формой записи интеграла (14.97), и еще более упрощенное выражение (14.118):

$$\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\varphi^*\Pi(\Pi^2+m^2)\left(\ln\frac{m^2}{\Pi^2+m^2}+\frac{1}{12}\right)\Pi\varphi. \qquad (15.24)$$

Вычислим с этой целью интеграл

$$\int_{0}^{1}du\frac{1-u}{m^2u+\frac{1+v}{2}(1-u)(\Pi^2+m^2)}=$$

$$=\frac{m^2}{\left[m^2-\frac{1+v}{2}(\Pi^2+m^2)\right]^2}\ln\left[\frac{m^2}{\frac{1+v}{2}(\Pi^2+m^2)}\right]-\frac{1}{m^2-\frac{1+v}{2}(\Pi^2+m^2)}=$$

$$=-m^2\frac{d}{dm^2}\left[\frac{1}{m^2-\frac{1+v}{2}(\Pi^2+m^2)}\ln\frac{m^2}{\frac{1+v}{2}(\Pi^2+m^2)}\right], \qquad (15.25)$$

где дифференцирование не распространяется на m^2 в Π^2+m^2. Упрощенный вариант получится, если в знаменателе пренебречь величиной Π^2+m^2 по сравнению с m^2. В этой связи отметим, что

$$\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\frac{1+v^2}{2}\left(\ln\frac{1+v}{2}+1\right)=-\frac{1}{12}. \qquad (15.26)$$

Разность двух величин

$$\int_0^1 du \frac{1-u}{m^2u+\frac{1+v}{2}(1-u)(\Pi^2+m^2)} - \left[\frac{1}{m^2}\ln\frac{m^2}{\frac{1+v}{2}(\Pi^2+m^2)} - \frac{1}{m^2}\right] =$$

$$= -m^2\frac{d}{dm^2}\left[\frac{1}{m^2}\frac{\frac{1+v}{2}(\Pi^2+m^2)}{m^2-\frac{1+v}{2}(\Pi^2+m^2)}\ln\frac{m^2}{\frac{1+v}{2}(\Pi^2+m^2)}\right] \qquad (15.27)$$

снова можно записать как

$$-m^2\frac{d}{dm^2}\left[\frac{1}{m^2}\int_0^1 du \frac{1}{m^2u+\frac{1+v}{2}(1-u)(\Pi^2+m^2)}\right]\frac{1+v}{2}(\Pi^2+m^2). \qquad (15.28)$$

Появление двух множителей $\Pi^2 + m^2$ в числителе окончательного выражения означает, что оно явным образом квадратично по полям:

$$\varphi^*\Pi^\mu(\Pi^2+m^2)(\quad)(\Pi^2+m^2)\Pi_\mu\varphi = 4e^2\varphi^*F^{\mu\nu}.\Pi_\nu(\quad)F_{\mu\nu}\Pi^\lambda\varphi. \qquad (15.29)$$

Как и для высокоэнергетических эффектов, существенным оказывается только поведение поля φ вблизи начала пространственной системы координат. В соответствии с этим мы заменим функцию $\varphi(\mathbf{x})$ величиной

$$\phi = \varphi(\mathbf{x} = 0), \qquad (15.30)$$

что эквивалентно пренебрежению зависимостью этой функции от пространственного импульса. Далее, выражение (15.29) можно переписать в виде

$$4e^2\phi^*\frac{1}{2}[F^{0k}, p_k](\quad)\frac{1}{2}[p_l, F_{0l}]\phi + 4e^2\phi^*F^{k0}(-m)(\quad)F_{k0}m\phi =$$

$$= -e^2\phi^*J^0(\quad)J^0\phi + 4m^2e\phi^{2*}F^{0k}(\quad)F^{0k}\phi, \qquad (15.31)$$

где величину Π^0 мы заменили ее приближенным значением m. Сюда входят

$$eJ^0(\mathbf{x}) = 4\pi Z\alpha\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}),$$

$$eF^{0k}(\mathbf{x}) = 4\pi Z\alpha\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\frac{(-i\mathbf{p})^k}{\mathbf{p}^2}\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}). \qquad (15.32)$$

Кроме того, поскольку $\Pi^0 \approx m$, величина $\Pi^2 + m^2$ в знаменателе выражения (15.28) приближенно равна $\mathbf{p}^2$. Получаемый таким образом энергетический сдвиг равен

$$16\pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dv \frac{1+v^2}{2} \frac{1+v}{2} \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \left(\frac{4m^2}{\mathbf{p}^2} - 1\right) \times$$
$$\times \left(-m^2 \frac{d}{dm^2}\right) \frac{1}{m^2} \int_0^1 du \frac{1}{m^2 u + \frac{1+v}{2}(1-u)\,\mathbf{p}^2}. \qquad (15.33)$$

Нужно иметь в виду, однако, что интерес для нас представляет сравнение не с упрощенным выражением (15.24), а с его нерелятивистским пределом (14.119). Разница здесь во временно́й компоненте скалярного произведения, где $\Pi^0 \approx m + V$ дает дополнительный вклад

$$-\frac{2\alpha}{3\pi} \frac{1}{m^2} \phi^* V \mathbf{p}^2 \left(\ln \frac{m^2}{\mathbf{p}^2} + \frac{1}{12}\right) V\phi =$$
$$= -16\pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m^2} \frac{2}{3} \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \left(\ln \frac{m^2}{\mathbf{p}^2} + \frac{1}{12}\right). \qquad (15.34)$$

Заметим теперь, что

$$\left(-m^2 \frac{d}{dm^2}\right) \frac{1}{m^2} \int_0^1 du \frac{\left(-\frac{1+v}{2}\right)}{m^2 u + \frac{1+v}{2}(1-u)\,\mathbf{p}^2} =$$
$$= \left(-m^2 \frac{d}{dm^2}\right) \frac{1}{m^2} \frac{\left(-\frac{1+v}{2}\right)\mathbf{p}^2}{m^2 - \frac{1+v}{2}\mathbf{p}^2} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \ln \frac{m^2}{\frac{1+v}{2}\mathbf{p}^2} =$$
$$= -\left(-m^2 \frac{d}{dm^2}\right) \frac{1}{\mathbf{p}^2} \int_0^1 du \frac{1}{m^2 u + \frac{1+v}{2}(1-u)\,\mathbf{p}^2} +$$
$$+ \frac{1}{m^2 \mathbf{p}^2} \left(\ln \frac{m^2}{\frac{1+v}{2}\mathbf{p}^2} - 1\right), \qquad (15.35)$$

где нам удобно на время вернуться к явной функции от $\mathbf{p}^2$. Вклад последнего слагаемого (15.35) в (15.33) в точности компенсирует (15.34), а оставшийся член приводит к частичному энергетическому сдвигу

$$\delta_1 E = 16\pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dv \frac{1+v^2}{2} \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \times$$
$$\times \left[\frac{1+v}{2} 4m^2 \left(-m^2 \frac{d}{dm^2}\right) \frac{1}{m^2} \int_0^1 du \frac{1}{m^2 u + \frac{1+v}{2}(1-u)\,\mathbf{p}^2} - \right.$$
$$\left. - \left(-m^2 \frac{d}{dm^2}\right) \int_0^1 du \frac{1}{m^2 u + \frac{1+v}{2}(1-u)\,\mathbf{p}^2}\right]. \qquad (15.36)$$

Интеграл по импульсам равен

$$\int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{m^2 u + \frac{1+v}{2}(1-u)\,\mathbf{p}^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left[m^2 \frac{1+v}{2} u(1-u)\right]^{1/2}}, \qquad (15.37)$$

а последующее интегрирование по u дает

$$\frac{1}{4}(m^2)^{-1/2}\left(\frac{1+v}{2}\right)^{-1/2} \qquad (15.38)$$

как простой частный случай следующих общих соотношений для Г-функции:

$$\int_0^1 du\, u^{a-1}(1-u)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \qquad (15.39)$$

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Результат таков:

$$\delta_1 E = 8\pi Z^2 \alpha^3 \,|\,\phi\,|^2 \frac{1}{m} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dv\, \frac{1+v^2}{2} \left[3\left(\frac{1+v}{2}\right)^{1/2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\left(\frac{1+v}{2}\right)^{-1/2}\right] = \left(8 - \frac{44}{105}\right) \pi Z^2 \alpha^3 \,|\,\phi\,|^2 \frac{1}{m}. \qquad (15.40)$$

В дальнейшем не всегда возможно полностью пренебрегать пространственным импульсом в поле частицы, как это делается в формуле (15.30). В некоторых случаях необходимо учитывать и поведение на малых расстояниях, описываемое формулой (15.2). Теперь мы хотим показать, что последнюю можно рассматривать как первый шаг при решении однородного полевого уравнения

$$(p^2 + m^2)\,\varphi = 2eq.A\,\varphi - e^2 A^2 \varphi \qquad (15.41)$$

методом итераций исходя из поля

$$\phi\,(x^0) = \phi \exp\,(-imx^0). \qquad (15.42)$$

При сохранении только линейного по A члена первая итерация дает

$$\varphi = \phi + \frac{1}{p^2 + m^2}\, 2eqp.A\phi, \qquad (15.43)$$

или, после подстановки необходимого для связанного состояния соотношения между кулоновским полем и зарядом,

$$\varphi = \phi + \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{2mZ\alpha}{|\mathbf{x}|}\,\phi. \qquad (15.44)$$

Точнее говоря, наше утверждение состоит в особой интерпретации трехмерной функции Грина, символически представленной множителем $(\mathbf{p}^2)^{-1}$. Эта интерпретация такова:

$$\frac{1}{\mathbf{p}^2} f(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0} P \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{\exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')]}{\mathbf{p}^2-\varepsilon^2} f(\mathbf{x}')(d\mathbf{x}'), \qquad (15.45)$$

где берется главное значение интеграла по Коши. В справедливости данного соотношения мы можем убедиться непосредственно (подразумевается $\lim P$):

$$\frac{1}{\mathbf{p}^2}\frac{1}{|\mathbf{x}|} = \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}{\mathbf{p}^2-\varepsilon^2}\frac{4\pi}{\mathbf{p}^2} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{|\mathbf{x}|}\int_0^\infty \frac{dp}{p}\frac{\sin p|\mathbf{x}|}{p^2-\varepsilon^2}, \qquad (15.46)$$

где последний интеграл можно переписать в виде

$$\operatorname{Im}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{p}\frac{\exp(ip|\mathbf{x}|)-1}{p^2-\varepsilon^2} = \frac{\pi}{2}\frac{\cos\varepsilon|\mathbf{x}|-1}{\varepsilon^2} \to -\frac{\pi}{4}|\mathbf{x}|^2. \qquad (15.47)$$

Главное значение интеграла вычисляется путем перехода в комплексную плоскость и усреднения результатов, которые отвечают двум контурам, проходящим выше и ниже особой точки. Из четырех контуров, которые связывают точки ε и $-\varepsilon$, целиком расположенный выше действительной оси дает нуль. Контур же, проходящий ниже действительной оси, удваивает сумму двух других вкладов, соответствующих контурам, которые эффективно охватывает одну особую точку. Итак, мы показали, что выполняется равенство

$$\frac{1}{\mathbf{p}^2}\frac{1}{|\mathbf{x}|} = -\frac{1}{2}|\mathbf{x}|, \qquad (15.48)$$

которое отличается от элементарного обратного утверждения

$$\nabla^2\left(\frac{1}{2}|\mathbf{x}|+\mathrm{const}\right) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \qquad (15.49)$$

в силу специальной интерпретации функции Грина, предотвращающей появление аддитивной константы. Тем самым подтверждается, что конструкция (15.43)—(15.45) действительно дает

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{|\mathbf{x}|}{a_0} + \ldots\right)\phi(x^0). \qquad (15.50)$$

Рассмотрим теперь ошибки, вносимые заменой $I(1)$ на $I(0)$ или на $I(0) + dI/d\lambda^2|_{\lambda=0}$. Поскольку такие остаточные члены относятся исключительно к высокоэнергетическим явлениям, мы прибегнем к элементарному методу — к разложению по степеням векторного потенциала. Соответственно этому перепишем теперь выражение (15.8) для $\chi_\lambda(u)$ в виде

$$\chi_\lambda(u) = \zeta_\lambda(u) + 2\lambda u(k-\lambda up).eqA - \\ - 2u(1-u)\,p.eqA + [\lambda^2u^2 + u(1-u)]\,e^2A^2, \qquad (15.51)$$

где

$$\zeta_\lambda(u) = (k - \lambda u p)^2 + u(1-u)p^2 + m^2 u. \tag{15.52}$$

После интегрирования по k главный член в выражении для $I(\lambda^2)$,

$$\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \exp\{-is\zeta_\lambda(u)\} = \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{is^2}\times \\ \times \exp\{-is[u(1-u)p^2+m^2u]\}, \tag{15.53}$$

перестает зависеть от λ, а потому не дает вклада ни в одну из интересующих нас разностей. Линейный по A член дается выражением

$$I(\lambda^2)_A = -is\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{dv}{2}\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\zeta_\lambda\right\}[2\lambda u(k-\lambda up).eqA - \\ -2u(1-u)p.eqA]\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\zeta_\lambda\right\}. \tag{15.54}$$

При переходе к типичному матричному элементу, отвечающему импульсам p' и p'', возникают интегралы

$$\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\exp\left\{-is\left[\frac{1+v}{2}(k-\lambda up')^2+\frac{1-v}{2}(k-\lambda up'')^2\right]\right\} = \\ = \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{is^2}\exp\left\{-is\lambda^2u^2\frac{1-v^2}{4}(p'-p'')^2\right\}. \tag{15.55}$$

и

$$\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left(k-\lambda u\frac{p'+p''}{2}\right)\exp\left\{-is\left[\frac{1+v}{2}(k-\lambda up')^2+\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{1-v}{2}(k-\lambda up'')^2\right]\right\} = \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{is^2}\lambda u\frac{v}{2}\times \\ \times(p'-p'')\exp\left\{-is\lambda^2u^2\frac{1-v^2}{4}(p'-p'')^2\right\}, \tag{15.56}$$

вычисление которых основывается на преобразовании

$$k-\lambda u\left(\frac{1+v}{2}p'+\frac{1-v}{2}p''\right) \to k. \tag{15.57}$$

Если принять лоренцевскую калибровку, положив тем самым

$$(p'-p'')A = 0, \tag{15.58}$$

то последний интеграл не будет давать вклада в формулу (15.54) и для матричного элемента мы получим

$$-\int ds\, s\, du\, e^2 I(\lambda^2)_A \to i\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{dv}{2}du\,u(1-u)\frac{(p'+p'')eqA}{D_\lambda}, \tag{15.59}$$

где

$$D_\lambda = m^2u^2+u(1-u)\frac{1+v}{2}(p'^2+m^2)+ \\ +u(1-u)\frac{1-v}{2}(p''^2+m^2)+\lambda^2u^2\frac{1-v^2}{4}(p'-p'')^2. \tag{15.60}$$

Если бы величина (15.59) вычислялась в состоянии ϕ с нулевым импульсом, то величина D_λ не зависела бы от λ и никакой вклад в разность по λ не возникал бы.

Мы должны взять поле (15.43), которое получается в результате одной итерации. Оставив только перекрестные члены между двумя составляющими φ, будем иметь

$$-\int ds\, s\, du\, e^2\varphi^* I(\lambda^2)_A\varphi =$$

$$= i32\pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 m^2 \int \frac{1}{2} dv\, du\, u(1-u)\times$$

$$\times\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2-\varepsilon^2}\left(\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right)^2\frac{1}{D_\lambda}, \tag{15.61}$$

где теперь

$$D_\lambda = m^2u^2+\left[u(1-u)\frac{1+v}{2}+\lambda^2u^2\frac{1-v^2}{4}\right]\mathbf{p}^2. \tag{15.62}$$

Это выражение, или очень близкое ему, имеет два применения. Первое из них относится к среднему слагаемому суммы (14.6), в котором, согласно формулам (15.10) и (15.11), мы должны образовать разности по λ, исключив тем самым из I (1) член, линейно зависящий от λ^2. Таким образом, возникает комбинация

$$\frac{1}{D_1}-\frac{1}{D_0}-\frac{d}{d\lambda^2}\frac{1}{D_\lambda}\bigg|_{\lambda=0}=\frac{\left(u^2\frac{1-v^2}{4}\mathbf{p}^2\right)^2}{D_0^2D_1}, \tag{15.63}$$

где

$$\begin{aligned} D_0 &= m^2u^2+u(1-u)\frac{1+v}{2}\mathbf{p}^2,\\ D_1 &= m^2u^2+\left[u\frac{1+v}{2}-\left(u\frac{1+v}{2}\right)^2\right]\mathbf{p}^2. \end{aligned} \tag{15.64}$$

Соответствующий вклад в энергетический сдвиг таков:

$$\delta_2E = 128\pi Z^2\alpha^3|\phi|^2 m^4\int\frac{1}{2}dv\,du\,u(1-u)\times$$

$$\times\left(u^2\frac{1-v^2}{4}\right)^2\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2-\varepsilon^2}\frac{1}{D_0^2D_1}. \tag{15.65}$$

При выполнении элементарного интегрирования по $\mathbf{p}$ не предполагается, что $(\mathbf{p}^2-\varepsilon^2)^{-1}$ интерпретируется в смысле главного значения. Это дает

$$\delta_2E = 32Z^2\alpha^3|\phi|^2\frac{1}{m}\int_0^1 dw\, w^{3/2}\int_0^1 du\frac{1-u}{u^{5/2}}\times$$

$$\times\left[(1-uw)^{3/2}-(1-u)^{3/2}-\frac{3}{2}u(1-u)^{1/2}(1-w)\right], \tag{15.66}$$

где

$$w=\frac{1}{2}(1+v). \tag{15.67}$$

Это выражение можно упростить, выполнив два интегрирования по частям по переменной w:

$$\delta_2 E=32Z^2\alpha^3|\phi|^2\frac{1}{m}\frac{3}{35}\int\limits_0^1 dw\, w^{7/2}\int\limits_0^1 du\, u^{-1/2}(1-u)(1-uw)^{-1/2}. \tag{15.68}$$

Общее выражение для интеграла такого типа (при a, $b>0$, $c>-1$) дается формулой

$$\int\limits_0^1 du\int\limits_0^1 dw\, u^{a-1}w^{b-1}(1-uw)^{c-1}=\frac{1}{a-b}\left[\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}-\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a+c)}\right]. \tag{15.69}$$

Пользуясь этой формулой, получим

$$\delta_2 E=\left(\frac{1}{16}+\frac{8}{35}\right)\pi Z^2\alpha^3|\phi|^2\frac{1}{m}. \tag{15.70}$$

Второе применение выражения (15.61), в родственной ему форме записи, относится к слагаемому (14.6) с двойным коммутатором. Если не учитывать в выражении для П векторного потенциала, то за счет двойного коммутатора в матричном элементе возникает дополнительный множитель $(p'-p'')^2$. При вычислении среднего значения в состоянии φ, где один пространственный импульс равен нулю, а другой $\pm\mathbf{p}$, это приведет к появлению в подынтегральном выражении формулы (15.61) дополнительного множителя $\mathbf{p}^2$. Остаточный эффект в слагаемом с двойным коммутатором будет точно совпадать с разностью величин, отвечающих значениям $\lambda=1$ и $\lambda=0$. В результате возникнет комбинация

$$\frac{1}{D_1}-\frac{1}{D_0}=-\frac{u^2\frac{1-v^2}{4}\mathbf{p}^2}{D_0D_1}, \tag{15.71}$$

а энергетический сдвиг, соответствующий этому источнику, будет таким:

$$\begin{aligned}\delta_3 E=&-64\pi Z^2\alpha^3|\phi|^2 m^2\int\frac{1}{2}dv\,du\,u(1-u)\,u^2\frac{1-v^2}{4}\times\\ &\times\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2}\frac{1}{D_0D_1}=-16Z^2\alpha^3|\phi|^2\frac{1}{m}\times\\ &\times\int\limits_0^1 dw\, w^{1/2}\int\limits_0^1 du\,\frac{1-u}{u^{3/2}}\left[(1-uw)^{1/2}-(1-u)^{1/2}\right].\end{aligned} \tag{15.72}$$

Выполнив одно интегрирование по частям, получим выражение

$$\delta_3 E = -16Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m} \frac{1}{3} \int_0^1 dw\, w^{3/2} \int_0^1 du\, u^{-1/2} (1-u)(1-uw)^{-1/2}, \tag{15.73}$$

так что

$$\delta_3 E = -\pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m}. \tag{15.74}$$

По поводу первого слагаемого в формуле (14.6) отметим, что при $u = 1$ величина $I(\lambda^2)_A$ обращается в нуль и аналогичный вклад здесь не возникает.

Нам осталось исследовать члены, которые явным образом квадратичны по A. Это делать проще, ибо достаточно положить $\varphi = \phi$. Тогда выражение с двойным коммутатором $[\Pi, [\Pi, I]]$ не будет давать никаких вкладов интересующего нас вида. В него входят квадратичные члены

$$[p, [p, I_{A^2}]] - [p, [eqA, I_A]] - [eqA, [p, I_A]], \tag{15.75}$$

где через I_{A^2} обозначена та часть разложения $I(\lambda^2)$, которая сама квадратична по A. Поскольку теперь мы берем диагональный матричный элемент для состояния с определенным импульсом, первые два коммутатора обратятся в нуль. Третий же коммутатор с учетом тождества Якоби (1-1.22) можно представить в виде

$$[eqA, [p, I_A]] = [p, [eqA, I_A]] - [[p, eqA], I_A]. \tag{15.76}$$

В лоренцевской калибровке, которой мы сейчас систематически пользуемся, последний из приведенных выше членов также обращается в нуль.

Явное выражение для $I(\lambda^2)_{A^2}$ таково:

$$\begin{aligned} I(\lambda^2)_{A^2} = &-s^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{2} dv\, dw\, w \exp\left\{-is\frac{1+v}{2} w\zeta_\lambda\right\} \times \\ &\times [2\lambda u(k-\lambda u p).eqA - 2u(1-u)\, p.eqA] \exp\{-is(1-w)\zeta_\lambda\} \times \\ &\times [2\lambda u(k-\lambda u p).eqA - 2u(1-u)\, p.eqA] \exp\left\{-is\frac{1-v}{2} w\zeta_\lambda\right\} - \\ &-is \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{2} dv \exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\zeta_\lambda\right\} \times \\ &\times [\lambda^2 u^2 + u(1-u)]\, e^2 A^2 \exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\zeta_\lambda\right\}. \end{aligned} \tag{15.77}$$

Нам нужен только диагональный матричный элемент в состоянии ϕ с импульсом p' ($p'^0 = m$, $\mathbf{p}' = 0$). Поэтому интеграл по импульсам в последнем слагаемом формулы (15.77) равен

$$\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \exp\{-is(k-\lambda up')^2\} = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \exp(-isk^2) = \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{is^2}. \tag{15.78}$$

В результате последнее слагаемое оказывается линейной функцией λ^2 и не дает вклада в интересующую нас разность по λ. Основной интеграл по импульсам в первом слагаемом (15.77) имеет вид [он совпадает с интегралом (15.55), если в последнем произвести замену $(1+v)/2 \to w$]:

$$\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \exp\{-isw(k-\lambda up')^2\} \exp\{-is(1-w)(k-\lambda up'')^2\} =$$
$$= \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{is^2} \exp\{-is\lambda^2u^2w(1-w)(p'-p'')^2\}. \tag{15.79}$$

Имеется также интеграл с дополнительным множителем $k - \lambda up'$, который, как и в формуле (15.56), дает величину, кратную $p' - p''$. В лоренцевской калибровке его вклад равен нулю. Кроме того, имеется интеграл с двумя множителями $k - \lambda up'$. Выбрав лоренцевскую калибровку, мы снова добьемся упрощения и приведем интеграл к виду (14.75). Вследствие этого

$$e^2 I(\lambda^2)_{A^2} \to i\frac{\alpha}{4\pi} \int dw\, w \exp(-ism^2u^2) \times$$
$$\times \Big[4\lambda^2u^2\left(-\frac{i}{2s}\right) eqA \exp\{-is(1-w)u(1-u)(p''^2+m^2)\} eqA +$$
$$+ 4u^2(1-u)^2 p'eqA \exp\{-is(1-w)u(1-u)(p''^2+m^2)\} p'eqA\Big] \times$$
$$\times \exp\{-is\lambda^2u^2w(1-w)(p'-p'')^2\} \tag{15.80}$$

и

$$e^2\varphi^* I(\lambda^2)_{A^2}\varphi = i8\pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dv \frac{1-v}{2} \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right)^2 \times$$
$$\times \left[i\lambda^2\frac{u^2}{s} + 2m^2u^2(1-u)^2\right] \exp(-isD_\lambda), \tag{15.81}$$

где мы написали

$$w = \frac{1}{2}(1-v), \tag{15.82}$$

так что D_λ обладает такой же структурой, как и в формуле (15.62). Выполнив интегрирование по s, получим

$$-\int ds\, s\, du e^2 \varphi^* I(\lambda^2)_{A^2}\varphi =$$

$$= i8\pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \int \frac{1}{2} dv \frac{1-v}{2} du \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right)^2 \times$$

$$\times\left[-\lambda^2 u^2 \frac{1}{D_\lambda} + 2(1-u)^2\left(-m^2\frac{d}{dm^2}\right)\frac{1}{D_\lambda}\right]. \qquad (15.83)$$

Требующиеся здесь разности по λ даются формулами (15.63) и (15.71). В результате имеем следующее выражение для вклада в энергетический сдвиг:

$$\delta_4 E = 32\pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 m^2 \int \frac{1}{2} dv \frac{1-v}{2}\, du \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\mathbf{p}^2}\frac{u^4\dfrac{1-v^2}{4}}{D_0 D_1} + 2(1-u)^2\left(u^2\frac{1-v^2}{4}\right)^2\left(-m^2\frac{d}{dm^2}\right)\frac{1}{D_0^2 D_1}\right], \qquad (15.84)$$

или

$$\delta_4 E = \delta_4' E + \delta_4'' E, \qquad (15.85)$$

где

$$\delta_4' E = 8Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m}\int_0^1 dw\,(1-w)\, w^{1/2}\int_0^1 du\, u^{-1/2}\times$$

$$\times\left[(1-uw)^{1/2} - (1-u)^{1/2}\right] \qquad (15.86)$$

и

$$\delta_4'' E = 24 Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m}\int_0^1 dw\,(1-w)\, w^{1/2}\int_0^1 du\, \frac{(1-u)^2}{u^{5/2}}\times$$

$$\times\left[-(1-uw)^{1/2} + (1-u)^{1/2} + \frac{1}{2}u(1-u)^{-1/2}(1-w)\right]. \qquad (15.87)$$

Здесь мы сочли более удобным вновь вернуться к переменной w, даваемой формулой (15.67). Интегрируя один раз по частям и используя соотношение (15.69), для $\delta_4' E$ получаем

$$\delta_4' E = 8Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m}\int_0^1 dw\left(\frac{1}{3}w^{3/2} - \frac{1}{5}w^{5/2}\right)\int_0^1 du\, u^{1/2}(1-uw)^{-1/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{20}\right)\pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m}. \qquad (15.88)$$

Аналогично для $\delta_4''E$ два интегрирования по частям дают

$$\delta_4''E = 24Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m} \int_0^1 dw \left(\frac{1}{15} w^{5/2} - \frac{1}{35} w^{7/2}\right) \times$$

$$\times \int_0^1 du\, u^{-1/2} (1-u)^2 (1-uw)^{-3/2} = \left(\frac{2}{35} + \frac{3}{40}\right) \pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m}. \quad (15.89)$$

Сумма двух этих вкладов равна

$$\delta_4 E = \left(\frac{41}{105} - \frac{3}{40}\right) \pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m}. \quad (15.90)$$

Осталось рассмотреть первое слагаемое суммы (14.6), которое пока нам ничего еще не дало. Положим в выражении (15.81) $u = 1$:

$$e^2\varphi^* I(\lambda^2, u=1)_{A^2}\varphi = i4\pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \int_0^1 dv \times$$

$$\times \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right)^2 \frac{i\lambda^2}{s} \exp(-isD_\lambda), \quad (15.91)$$

где

$$D_\lambda(u=1) = m^2 + \lambda^2 \frac{1-v^2}{4} \mathbf{p}^2 \quad (15.92)$$

есть четная функция переменной v. Соответственно этому и переписан интеграл по v, в котором отброшен линейный по этой переменной член. Выполнив по v интегрирование по частям, получим

$$\int_0^1 dv \exp(-isD_\lambda) = \exp(-ism^2) - \frac{1}{2} is\lambda^2\mathbf{p}^2 \int_0^1 dv\, v^2 \exp(-isD_\lambda). \quad (15.93)$$

Первое слагаемое правой части приводит к появлению в формуле (15.91) члена, линейного по λ^2, который не дает вклада в необходимую нам разность по λ. В таком случае мы фактически имеем

$$e^2\varphi^* I(\lambda^2, u=1)_{A^2}\varphi \to i2\pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \times$$

$$\times \int_0^1 dv\, v^2 \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} (\lambda^2)^2 \exp(-isD_\lambda) \quad (15.94)$$

и

$$i \int_0^\infty ds\, e^2\varphi^* I(\lambda^2, u=1)_{A^2}\varphi = i2\pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \int_0^1 dv v^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_\lambda} (\lambda^2)^2. \quad (15.95)$$

Функция $(\lambda^2)^2$, а также ее первая производная по λ^2 обращаются в нуль при $\lambda = 0$. Поэтому искомый вклад в энергетический сдвиг дается выражением

$$\delta_5 E = 2\pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \int_0^1 dv\, v^2 \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_1} =$$

$$= Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m} \int_0^1 dv\, v^2 (1-v^2)^{-1/2}, \tag{15.96}$$

или

$$\delta_5 E = \frac{1}{4} \pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m}. \tag{15.97}$$

Суммировав полученные пять членов (15.40), (15.70), (15.74), (15.90) и (15.97), будем иметь

$$\delta E = \left(8 - \frac{9}{16}\right) \pi Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m}. \tag{15.98}$$

С учетом эффекта поляризации вакуума [формулы (15.3) и (15.4)] получаем

$$\delta E = \frac{8}{3} Z^2\alpha^3 |\phi|^2 \frac{1}{m} \left[3\pi Z\alpha \left(1 - \frac{9}{128} + \frac{1}{3}\frac{1}{128}\right)\right]. \tag{15.99}$$

В такой записи множитель, заключенный в квадратные скобки, представляет собой поправку порядка $Z\alpha$ к аддитивным константам $^1/_{12}$—$^1/_{40}$. Относительно же величины этого эффекта мы здесь заметим лишь, что большой численный множитель $\sim 3\pi$ примерно совпадает с главным логарифмом основного вклада. Поэтому в хорошем приближении можно считать, что этот дополнительный сдвиг s-уровней вверх при $Z = 1$ равен $\alpha = 7{,}3 \cdot 10^{-3}$. Обсуждение точных численных значений мы отложим до аналогичного анализа системы со спином $^1/_2$, которую гораздо проще реализовать экспериментально.

§ 16. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СДВИГИ H-ЧАСТИЦ. СПИН $^1/_2$, РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ I

Аналогом вакуумной амплитуды (14.2) в случае спина $^1/_2$ служит величина

$$e^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \psi_1 \gamma^0 \gamma^\mu \frac{1}{k^2} \frac{m - \gamma(\Pi - k)}{(\Pi - k)^2 - eq\sigma F + m^2} \gamma_\mu \psi_2. \tag{16.1}$$

Мы воспользуемся представлением вида (14.10):

$$\frac{1}{k^2} \frac{1}{(\Pi - k)^2 - eq\sigma F + m^2} = -\int_0^\infty ds\, s \int_0^1 du \exp\{-is\chi(u)\}, \tag{16.2}$$

где

$$\chi(u) = u\,[(\Pi - k)^2 - eq\sigma F + m^2] + (1-u)\,k^2 =$$
$$= (k - u\Pi)^2 + u(1-u)(\Pi^2 - eq\sigma F + m^2) + u^2(m^2 - eq\sigma F). \qquad (16.3)$$

Далее произведем преобразование

$$\gamma^\mu (m - \gamma(\Pi - k)) \exp(-is\chi)\,\gamma_\mu =$$
$$= \gamma^\mu (m - (1-u)\,\gamma\Pi + \gamma(k - u\Pi)) \exp(-is\chi)\,\gamma_\mu =$$
$$= \gamma^\mu (m - (1-u)\,\gamma\Pi)\,\gamma_\mu \exp(-is\chi) + \gamma^\mu (m - (1-u)\,\gamma\Pi) \times$$
$$\times [\exp(-is\chi),\ \gamma_\mu] + \gamma^\mu\gamma(k - u\Pi) \exp(-is\chi)\,\gamma_\mu, \qquad (16.4)$$

причем будем записывать

$$\gamma^\mu (m - (1-u)\,\gamma\Pi) = (m + (1-u)\,\gamma\Pi)\,\gamma^\mu + 2(1-u)\,\Pi^\mu. \qquad (16.5)$$

Тогда симметризация по левой и правой частям даст нам

$$\gamma^\mu (m - \gamma(\Pi - k)) \exp(-is\chi)\,\gamma_\mu =$$
$$= (-4m - 2(1-u)\,\gamma\Pi).\exp(-is\chi) + (1-u)\,[\Pi^\mu,\ [\exp(-is\chi),\ \gamma_\mu]] +$$
$$+ \frac{1}{2}(m + (1-u)\,\gamma\Pi)\,\gamma^\mu [\exp(-is\chi),\ \gamma_\mu] -$$
$$- \frac{1}{2}[\exp(-is\chi),\ \gamma_\mu]\,\gamma^\mu (m + (1-u)\,\gamma\Pi) +$$
$$+ \gamma^\mu\gamma(k - u\Pi).\exp(-is\chi)\,\gamma_\mu. \qquad (16.6)$$

Кроме того, мы будем отбрасывать все появляющиеся слева и справа члены с $\gamma\Pi + m$, которые не порождают энергетических сдвигов. Это дает

$$\gamma^\mu (m - \gamma(\Pi - k)) \exp(-is\chi)\,\gamma_\mu \to -2m(1+u) \exp(-is\chi) +$$
$$+ (1-u)\,[\Pi^\mu,\ [\exp(-is\chi),\ \gamma_\mu]] + \frac{1}{2}\,mu\,[\gamma^\mu,\ [\exp(-is\chi),\ \gamma_\mu]] +$$
$$+ \gamma^\mu\gamma(k - u\Pi).\exp(-is\chi)\,\gamma_\mu, \qquad (16.7)$$

причем здесь полезно отметить, что

$$\gamma(k - u\Pi).\exp(-is\chi) =$$
$$= \gamma.((k - u\Pi).\exp(-is\chi)) + \frac{1}{4}[u\Pi,\ [\exp(-is\chi),\ \gamma]]. \qquad (16.8)$$

В отсутствие электромагнитного поля при образовании коммутаторов и интегрировании по k сохраняется только первое слагаемое правой части соотношения (16.7). В этом случае

$$e^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \exp\{-is\chi(u)\} = -i\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{s^2} \exp(-ism^2u^2) \exp(-is\mathcal{H}), \qquad (16.9)$$

где

$$\mathscr{H}=u(1-u)(m^2-(\gamma\Pi)^2). \tag{16.10}$$

В итоге мы имеем

$$-\int ds\, s\, du\, e^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\gamma^\mu(m-\gamma(\Pi-k))\exp(-is\mathcal{X})\gamma_\mu=$$

$$=-i\frac{\alpha}{2\pi}m\int_0^1 du(1+u)\int\frac{ds}{s}\exp\{-is(m^2u^2+\mathscr{H})\}, \tag{16.11}$$

или, после интегрирования по частям по переменной u с отбрасыванием локальных членов (которые обращаются в нуль в случае неперекрывающихся полей ψ_1 и ψ_2),

$$\frac{\alpha}{2\pi}m\int_0^1 du\left(u+\frac{1}{2}u^2\right)[2m^2u+(1-2u)(m^2-(\gamma\Pi)^2)]\times$$

$$\times\int_0^\infty ds\exp\{-is(m^2u^2+\mathscr{H})\}\to -i\frac{\alpha}{2\pi}m\int_0^1 du\left(u+\frac{1}{2}u^2\right)\times$$

$$\times\left[\frac{2m^2u+(1-2u)(m^2-(\gamma\Pi)^2)}{m^2u^2+u(1-u)(m^2-(\gamma\Pi)^2)}-\frac{2}{u}+\frac{2}{mu^2}(\gamma\Pi+m)\right]. \tag{16.12}$$

В последнее выражение включены контактные члены, необходимые для того, чтобы удовлетворялось условие нормировки; назначение их — ввести сомножитель $(\gamma\Pi+m)^2$. Применительно к полям частиц, подчиняющимся уравнению $(\gamma\Pi+m)\psi=0$, это выражение всегда обращается в нуль. Интерес для нас представляют только члены, явно зависящие от поля.

В качестве первого примера рассмотрим случай слабого однородного электромагнитного поля. В этом случае на интегрировании $\exp(-is\,\chi)$ по k не сказывается некоммутативность компонент Π, поскольку из-за нее может возникнуть только комбинация $[\Pi_\mu,\Pi_\nu]F^{\mu\nu}$, которая квадратична по полю. Модифицируя (16.9), необходимо учесть лишь спиновый член:

$$e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\exp(-is\chi)=$$

$$=-i(\alpha/4\pi s^2)\exp(-ism^2u^2)\exp(-is\mathscr{H})(1+isu^2eq\sigma F), \tag{16.13}$$

где мы оставили только два первых члена разложения соответствующей экспоненты. Вектор, получаемый при интегрировании $(k-u\Pi)^\mu\cdot\exp(-is\chi)$ по k, должен быть пропорциональным $F^{\mu\nu}\Pi_\nu$ (эти элементарные замечания подтверждаются, конечно, и результатами явного интегрирования). Но

$$\gamma_\mu F^{\mu\nu}\Pi_\nu={}^1/_2\, i[\sigma F,\gamma\Pi+m], \tag{16.14}$$

а эта комбинация не дает вклада в энергетические сдвиги. Кроме того, в случае однородного поля члены в формулах (16.7) и (16.8), содержащие коммутаторы с П, обращаются в нуль. Замечая, что

$$\frac{1}{2}[\gamma^\mu, [\sigma F, \gamma_\mu]] = \gamma^\mu \sigma F \gamma_\mu + 4\sigma F = 4\sigma F, \tag{16.15}$$

и применяя это равенство к полному спиновому члену

$$\mathscr{H} - u^2 eq\sigma F = u(1-u)(\Pi^2 + m^2) - ueq\sigma F, \tag{16.16}$$

мы после подстановки $\mathscr{H} \to 0$ получим следующие два вклада в импульсный интеграл (16.7), зависящие от поля:

$$e^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \gamma^\mu (m - \gamma(\Pi - k)) \exp(-is\chi)\gamma_\mu \to$$

$$\to -\frac{\alpha}{2\pi}\frac{m}{s} u^2 (1+u) \exp(-ism^2u^2)\, eq\sigma F +$$

$$+ \frac{\alpha}{\pi}\frac{m}{s} u^2 \exp(-ism^2u^2)\, eq\sigma F =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\frac{m}{s} u^2 (1-u) \exp(-ism^2u^2)\, eq\sigma F. \tag{16.17}$$

В таком случае интегралы по параметрам, фигурирующие в формуле (16.11), дадут

$$i\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{m}\int_0^1 du\,(1-u)\, eq\sigma F = i\frac{\alpha}{2\pi}\frac{eq}{2m}\sigma F \tag{16.18}$$

и дополнительный член в действии, получаемый путем пространственно-временно́й экстраполяции,

$$\int (dx)\frac{1}{2}\psi(x)\gamma^0\frac{\alpha}{2\pi}\frac{eq}{2m}\sigma F\psi(x) \tag{16.19}$$

приведет к уже известной нам добавке $\alpha/2\pi$ к магнитному моменту. Разумеется, этот вывод оказывается столь же коротким, как и всякий другой.

При исследовании энергетических сдвигов в кулоновском поле мы будем следовать схеме, развитой в случае спина 0. Итак, рассмотрим теперь величину

$$\chi_\lambda(u) = (k - \lambda u\Pi)^2 + u(1-u)(m^2 - (\gamma\Pi)^2) +$$
$$+ u^2(m^2 - \lambda^2 eq\sigma F) \tag{16.20}$$

и интеграл

$$I(\lambda^2) = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\exp\{-is\chi_\lambda(u)\}. \tag{16.21}$$

Последний обладает тем свойством, что его значение

$$e^2 I(0) = -i\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{s^2}\exp(-ism^2u^2)\exp(-is\mathscr{H}) \tag{16.22}$$

воспроизводит выражение (16.9), отвечающее нулевому электромагнитному полю. Что касается первого слагаемого в правой части соотношения (16.7) с контактными добавками, указанными в формуле (16.12), то оно не дает никаких вкладов в энергетические сдвиги. Первая производная по λ^2 отличается от случая нулевого спина только тем, что теперь появляется спиновый член с коэффициентом λ^2. Таким образом, на основании формулы (15.17) мы заключаем, что

$$\frac{dI(\lambda^2)}{d\lambda^2}=isu^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left[2\int\frac{1}{2}dv\,dw\,w\exp\left\{-is\chi_\lambda\frac{1+v}{2}w\right\}\Pi\times\right.$$
$$\times\exp\{-is\chi_\lambda(1-w)\}\Pi\exp\left\{-is\chi_\lambda\frac{1-v}{2}w\right\}-$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int dv\exp\left\{-is\chi_\lambda\frac{1+v}{2}\right\}(\Pi^2-eq\sigma F)\exp\left\{-i\chi s_\lambda\frac{1-v}{2}\right\}\right] \tag{16.23}$$

и

$$e^2\frac{dI(\lambda^2)}{d\lambda^2}\bigg|_{\lambda=0}=\frac{\alpha}{4\pi}\frac{u^2}{s}\exp(-ism^2u^2)\left[2\int\frac{1}{2}dv\,dw\,w\times\right.$$
$$\times\exp\left\{-is\mathscr{H}\frac{1+v}{2}w\right\}\Pi\exp\{-is\mathscr{H}(1-w)\}\times$$
$$\times\Pi\exp\left\{-is\mathscr{H}\frac{1-v}{2}w\right\}-\int\frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\mathscr{H}\frac{1+v}{2}\right\}\times$$
$$\left.\times(\Pi^2-eq\sigma F)\exp\left\{-is\mathscr{H}\frac{1-v}{2}\right\}\right]. \tag{16.24}$$

Если это выражение прямо умножить на поля, подчиняющиеся уравнению $(\gamma\Pi+m)\psi=0$, то оно сведется к величине

$$\frac{\alpha}{4\pi}\frac{u^2}{s}\exp(-ism^2u^2)\times$$
$$\times\left[eq\sigma F+2\int_0^1 dw\,w\Pi\{\exp[-is\mathscr{H}(1-w)]-1\}\Pi\right] \tag{16.25}$$

и мы получим

$$-\int ds\,s\,du(-2m)(1+u)e^2\frac{dI}{d\lambda^2}\bigg|_{\lambda=0}=$$
$$=-i\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{m}\int_0^1 du(1+u)\left[eq\sigma F-2\int_{-1}^1\frac{1}{2}dv\frac{1-v^2}{4}\Pi\frac{\mathscr{H}}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}\Pi\right], \tag{16.26}$$

где произвели замену параметра w:

$$w=\frac{1}{2}(1-v). \tag{16.27}$$

Обратимся, далее, к коммутатору $\exp(-is\chi)$ с γ:

$$[\exp(-is\chi),\gamma]=$$

$$=-is\int\frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\chi\frac{1+v}{2}\right\}[-ueq\sigma F,\gamma]\exp\left\{-is\chi\frac{1-v}{2}\right\}=$$

$$=-2us\int\frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\chi\frac{1+v}{2}\right\}eqF\gamma\exp\left\{-is\chi\frac{1-v}{2}\right\},\quad(16.28)$$

где

$$(F\gamma)^{\mu}=F^{\mu\nu}\gamma_{\nu}.\quad(16.29)$$

Аналогичная величина получится и при подстановке в правую часть равенства (16.28) величины χ_λ вместо χ. При $\lambda=0$ будем иметь

$$[\exp(-is\chi),\gamma]_0=-2us\exp(-isk^2)\exp(-ism^2u^2)\times$$

$$\times\int\frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\mathscr{H}\frac{1+v}{2}\right\}eqF\gamma\exp\left\{-is\mathscr{H}\frac{1-v}{2}\right\}\quad(16.30)$$

и

$$e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}[\exp(-is\chi),\gamma]_0=$$

$$=i\frac{\alpha}{2\pi}\frac{u}{s}\exp(-ism^2u^2)\int\frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\mathscr{H}\frac{1+v}{2}\right\}\times$$

$$\times eqF\gamma\exp\left\{-is\mathscr{H}\frac{1-v}{2}\right\}.\quad(16.31)$$

Отсюда мы приходим к следующей приведенной форме ($\mathscr{H}\psi=0$) для выражения с двойным коммутатором, содержащим П:

$$-\int ds\,s\,du\,(1-u)\,e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}[\Pi,[\exp(-is\chi),\gamma]_0]=$$

$$=-i\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{1}{2}dv\,du\,u\,(1-u)\times$$

$$\times\frac{1}{i}\left[\Pi\frac{1}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}eqF\gamma-eqF\gamma\frac{1}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}\Pi\right].\quad(16.32)$$

Отметим, что имеет место равенство

$$\frac{1}{i}eqF\gamma=[\gamma\Pi+m,\Pi],\quad(16.33)$$

которое позволяет нам заменить выражение (16.32) эквивалентным ему выражением

$$-i\frac{\alpha}{\pi}\int\frac{1}{2}dv\,du\,u\,(1-u)\,\Pi\frac{\gamma\Pi+m}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}\Pi.\quad(16.34)$$

Дроби с одинаковыми знаменателями, входящие в формулы (16.26) и (16.34), различаются тем, что в числителе первой из них стоит дифференциальный оператор Дирака второго порядка, а в числителе второй — такой же оператор первого порядка. В силу равенства

$$m^2 - (\gamma\Pi)^2 = 2m(\gamma\Pi + m) - (\gamma\Pi + m)^2 \qquad (16.35)$$

соотношение между ними таково:

$$\frac{1}{2m}\Pi\frac{\mathscr{H}}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}\Pi = u(1-u)\left[\Pi\frac{\gamma\Pi+m}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}\Pi - \right.$$
$$\left. -\frac{e^2}{2m}F\gamma\frac{1}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}F\gamma\right]. \qquad (16.36)$$

Итак, для первых двух слагаемых в формуле (16.7) мы указали те выражения, которые в соответствии со случаем спина 0 дают правильные низкоэнергетические характеристики системы, находящейся в связанном состоянии. На остальных слагаемых не сказываются низкоэнергетические закономерности. Мы покажем это, проведя расчет в случае слабых медленно меняющихся полей. Он уже был выполнен для третьего слагаемого формулы (16.7), содержащего двойной коммутатор с γ, причем соответствующий результат таков:

$$-\int ds\, s\, du\,\frac{1}{2}mue^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}[\gamma, [\exp(-is\chi), \gamma]] \approx i\frac{\alpha}{\pi}\frac{eq}{m}\sigma F. \qquad (16.37)$$

Отметим, между прочим, что опять мы имеем два вклада в магнитный момент, которые даются формулами (16.26) и (16.37). Рассмотрим теперь последнее слагаемое в выражении (16.7), а также его разложение (16.8). Начнем со второй части этого разложения и воспользуемся равенством (16.31) вместе с вытекающим из него следствием для слабого поля:

$$e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\overset{\eta}{[}\Pi, [\exp(-is\chi), \gamma]_0] \to$$
$$\to i\frac{\alpha}{2\pi}\frac{u}{s}\exp(-ism^2n^2)(\Pi eqF\gamma - eqF\gamma\Pi). \qquad (16.38)$$

В результате получим

$$-\int ds\, s\, du\frac{1}{4}ue^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\gamma^\mu[\Pi, [\exp(-is\chi), \gamma]_0]\gamma_\mu =$$
$$= -i\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{m^2}\frac{1}{i}[\Pi, eqF\gamma]. \qquad (16.39)$$

Анализ члена с $(k-u\Pi).\exp(-is\chi)$ основывается на тождестве

$$0=\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial k}\exp(-is\chi)=$$
$$=-2is\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\chi\frac{1+v}{2}\right\}(k-u\Pi)\exp\left\{-is\chi\frac{1-v}{2}\right\}. \tag{16.40}$$

Интегрируя по частям по переменной v, будем иметь

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\chi\frac{1+v}{2}\right\}(k-u\Pi)\exp\left\{-is\chi\frac{1-v}{2}\right\}=$$
$$=(k-u\Pi).\exp(-is\chi)-isu\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\frac{1}{2}v\times$$
$$\times\exp\left\{-is\chi\frac{1+v}{2}\right\}[\chi,\Pi]\exp\left\{-is\chi\frac{1-v}{2}\right\}, \tag{16.41}$$

откуда вытекает, что, имея в виду последующее интегрирование по k, можно произвести подстановку

$$(k-u\Pi).\exp(-is\chi)\to$$
$$\to isu\int\frac{1}{2}dv\frac{1}{2}v\exp\left\{-is\chi\frac{1+v}{2}\right\}[\chi,\Pi]\exp\left\{-is\chi\frac{1-v}{2}\right\}. \tag{16.42}$$

Поскольку коммутатор $[\chi,\Pi]$ уже линеен по полю, в приближении слабого поля

$$\gamma.((k-u\Pi).\exp(-is\chi))\approx$$
$$\approx isu\int\frac{1}{2}dv\frac{1}{2}v\exp\left\{-is\chi\frac{1+v}{2}\right\}\gamma.[\chi,\Pi]\exp\left\{-is\chi\frac{1-v}{2}\right\}, \tag{16.43}$$

где

$$\gamma.[\chi,\Pi]=[\chi,\gamma\Pi]-[\chi,\gamma].\Pi=[\chi,\gamma].(k-\Pi)=$$
$$=-2iu(k-\Pi).eqF\gamma. \tag{16.44}$$

На предпоследнем этапе используется тот факт, что оператор χ, который строится из $\gamma(\Pi-k)$, коммутирует с этим последним оператором. Отметим здесь, что

$$-2i\,\Pi.eqF\gamma=[\gamma\Pi+m,\Pi^2]=[\gamma\Pi+m,eq\sigma F], \tag{16.45}$$

а следовательно, этот член выпадает. Интеграл по k от оставшегося выражения может быть взят путем ξ-преобразования. При этом возникает интеграл

$$\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \exp\left\{-isk^2\frac{1+v}{2}\right\} k.\exp(-iup\xi)\exp\left\{-isk^2\frac{1-v}{2}\right\} \to$$
$$\to \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{is^2}\frac{1}{2}uvp\exp\left\{-isu^2\frac{1-v^2}{4}p^2\right\}, \qquad (16.46)$$

что в случае медленно меняющихся полей дает

$$e^2\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\gamma^\mu\gamma.((k-u\Pi).\exp(-is\chi))\gamma_\mu =$$
$$= \frac{\alpha}{4\pi}\frac{u^3}{s}\exp(-ism^2u^2)\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dvv^2\frac{1}{i}[\Pi, eqF\gamma], \qquad (16.47)$$

так что

$$-\int ds\, s\, du e^2\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\gamma^\mu\gamma.((k-u\Pi).\exp(-is\chi))\gamma_\mu =$$
$$= i\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{m^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dvv^2\int_0^1 duu\frac{1}{i}[\Pi, eqF\gamma] =$$
$$= i\frac{\alpha}{24\pi}\frac{1}{m^2}\frac{1}{i}[\Pi, eqF\gamma]. \qquad (16.48)$$

Собрав вместе все эти вклады, мы получим оператор, стоящий между $-i\psi_1\gamma^0$ и ψ_2, который, будучи добавкой к $\gamma\Pi + m$, может быть назван поправкой к массовому оператору. Он равен

$$-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{eq}{2m}\sigma F +$$
$$+\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{1}{2}dv\,du\,u(1-u)[1+v^2-u(1-v^2)]\Pi\frac{\gamma\Pi+m}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}\Pi +$$
$$+\frac{5}{12}\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{m^2}\Pi(\gamma\Pi+m)\Pi +$$
$$+\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{m}\int\frac{1}{2}dv(1-v^2)du\,u(1-u^2)e^2F\gamma\frac{1}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}F\gamma. \qquad (16.49)$$

Второе слагаемое можно для удобства частично преобразовать, пользуясь цепочкой равенств

$$u^2\Pi\frac{\gamma\Pi+m}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}\Pi =$$
$$= \frac{1}{m^2}\Pi(\gamma\Pi+m)\Pi - \frac{1}{m^2}\frac{1+v}{2}\Pi\frac{(\gamma\Pi+m)\mathscr{H}}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}\Pi =$$
$$= \frac{1}{m^2}\Pi(\gamma\Pi+m)\Pi - \frac{1}{m^2}u(1-u)\frac{1+v}{2}e^2F\gamma\frac{m-\gamma\Pi}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}F\gamma.$$
$$(16.50)$$

В результате выражение (16.49) принимает вид

$$-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{eq}{2m}\sigma F+\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{1}{2}dv(1+v^2)\,du\,u(1-u)\,\Pi\,\frac{\gamma\Pi+m}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}\,\Pi+$$
$$+\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{m^2}\Pi(\gamma\Pi+m)\Pi+$$
$$+\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{m}\int\frac{1}{2}dv(1-v^2)\,du\,u(1-u^2)\,e^2F\gamma\,\frac{1}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}\,F\gamma+$$
$$+\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{m^2}\int\frac{1}{2}dv(1+v)(1-v^2)\,du\,u(1-u)^2\,e^2F\gamma\,\frac{m-\gamma\Pi}{m^2u^2+\frac{1+v}{2}\mathscr{H}}\,F\gamma. \tag{16.51}$$

Последние два слагаемых явным образом квадратичны по полю. Если отбросить их и взять интеграл по u во втором слагаемом приближенно, так же как и в формуле (14.99), то мы получим

$$-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{eq}{2m}\sigma F+\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{1}{m^2}\Pi(\gamma\Pi+m)\left(\ln\frac{m^2}{m^2-(\gamma\Pi)^2}+\frac{11}{24}\right)\Pi, \tag{16.52}$$

где изменение аддитивной константы по сравнению с ее значением $^1/_{12}$ для спина 0 обусловлено целиком третьим слагаемым выражения (16.51):

$$\frac{1}{12}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{24}. \tag{16.53}$$

Исследование нерелятивистского предела выражения (16.52) можно несколько упростить, если вновь ввести коммутатор (16.33), после чего будем иметь

$$\Pi(\gamma\Pi+m)\left(\ln\frac{m^2}{m^2-(\gamma\Pi)^2}+\frac{11}{24}\right)\Pi=$$
$$=\Pi\left(\ln\frac{m^2}{m^2-(\gamma\Pi)^2}+\frac{11}{24}\right)\frac{1}{i}\,eqF\gamma\approx$$
$$\approx\mathbf{p}\cdot\left(\ln\frac{\frac{1}{2}m}{H-E}+\frac{11}{24}\right)[V,\mathbf{p}]\gamma^0-V\left(\ln\frac{\frac{1}{2}m}{H-E}+\frac{11}{24}\right)[V,\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}]\approx$$
$$\approx\mathbf{p}\cdot(H-E)\left(\ln\frac{\frac{1}{2}m}{H-E}+\frac{11}{24}\right)\mathbf{p}. \tag{16.54}$$

На последних этапах мы использовали нерелятивистское приближение, перейдя к состояниям, для которых $\gamma^{0\prime}=+1$. Отметим, что в противоположность случаю нулевого спина член, явно квадратичный по полю, теперь исчезает в нерелятивистском пределе, в том смысле, что он не будет давать вклада в поправку порядка $Z\alpha$. Это обусловлено тем, что состояния с противоположными значениями γ^0 связывает только γ. Установив нерелятивистские формулы (16.52) и (16.54), мы пришли тем самым путем некоей единообразной процедуры к главной части энергетического сдвига, в которой эффективный верхний предел энергии фотона определяется, как и в выражении (11.52), уравнением

$$\ln K = \ln \frac{1}{2} m + \frac{11}{24}. \tag{16.55}$$

И на этот раз аддитивную константу следует изменить, если учитывать явно эффект поляризации вакуума:

$$\frac{11}{24} \to \frac{11}{24} - \frac{1}{5}. \tag{16.56}$$

Теперь мы должны найти поправку порядка $Z\alpha$ к этому известному результату. Установим сначала ошибки, которые вносятся переходом от (16.51) к (16.52). Следуя по пути, проложенному при анализе нулевого спина, мы получим следующую поправку ко второму слагаемому формулы (16.51):

$$\delta_1 E = \psi^* \gamma^0 \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dv (1+v^2) \frac{1+v}{2} e^2 F\gamma \left(-m^2 \frac{d}{dm^2} \right) \frac{1}{m^2} \times$$
$$\times \int_0^1 du \frac{m - \gamma\Pi}{m^2 u + \frac{1+v}{2}(1-u)(\Pi^2 + m^2)} F\gamma\psi, \tag{16.57}$$

куда достаточно подставить значение поля в начале координат $\psi(0)$ с $\gamma^{0\prime} = +1$. В соответствии с этим

$$F\gamma(m - \gamma\Pi) F\gamma \to F_{k0}\gamma^0 m (1 + \gamma^0) F_{k0}\gamma^0, \tag{16.58}$$

так как ни $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}$, ни временна́я компонента произведения не дают вклада:

$$F^{0k}\gamma_k m (1 + \gamma^0) F_{0l}\gamma^l \to 0. \tag{16.59}$$

В результате получаем

$$\delta_1 E = 16\pi Z^2 \alpha^3 |\psi(0)|^2 m \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dv (1+v^2) \frac{1+v}{2} \left(-m^2 \frac{d}{dm^2} \right) \frac{1}{m^2} \times$$
$$\times \int_0^1 du \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{m^2 u + \frac{1+v}{2}(1-u)\mathbf{p}^2} =$$
$$= 6Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dv (1+v^2) \left(\frac{1+v}{2} \right)^{1/2} \int_0^1 du\, u^{-1/2} (1-u)^{-1/2} =$$
$$= \left(5 + \frac{9}{35} \right) \pi Z^2 \alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2}. \tag{16.60}$$

Последнее слагаемое в выражении (16.51) также содержит комбинацию (16.58) и приводит к энергетическому сдвигу

$$\delta_2 E = 16\pi Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dv\,(1-v^2)\frac{1+v}{2}\int_0^1 du\,(1-u)^2 \times$$

$$\times \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2}\frac{1}{m^2u+\frac{1+v}{2}(1-u)\,\mathbf{p}^2} =$$

$$= 4Z^2\alpha^3|\psi(0)|^2\frac{1}{m^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\,(1-v^2)\left(\frac{1+v}{2}\right)^{1/2}\int_0^1 du\,u^{-1/2}(1-u)^{3/2} =$$

$$= \frac{24}{35}\pi Z^2\alpha^3|\psi(0)|^2\frac{1}{m^2}. \qquad (16.61)$$

Предпоследнее же слагаемое выражения (16.51) содержит произведение (с несущественным множителем)

$$F\gamma F\gamma = F_{k0}\gamma^0 F_{k0}\gamma^0 - F_{0k}\gamma^k F_{0l}\gamma^l. \qquad (16.62)$$

Так как

$$-\gamma_k\cdot\gamma_l = \delta_{kl}, \qquad (16.63)$$

второй член здесь фактически равен удвоенному первому. Это слагаемое дает

$$\delta_3 E = 8\pi Z^2\alpha^3|\psi(0)|^2\frac{1}{m}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\,(1-v^2)\int_0^1 du\,(1-u^2)\times$$

$$\times\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2}\frac{1}{m^2u+\frac{1+v}{2}(1-u)\,\mathbf{p}^2} =$$

$$= 2Z^2\alpha^3|\psi(0)|^2\frac{1}{m^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\,(1-v^2)\left(\frac{1+v}{2}\right)^{-1/2}\times$$

$$\times\int_0^1 du\,u^{-1/2}(1-u)^{1/2}(1+u) = \frac{4}{3}\pi Z^2\alpha^3|\psi(0)|^2\frac{1}{m^2}. \qquad (16.64)$$

Сумма трех указанных вкладов такова:

$$\delta_a E = (\delta_1+\delta_2+\delta_3)\,E = \left(7+\frac{29}{105}\right)\pi Z^2\alpha^3|\psi(0)|^2\frac{1}{m^2}. \qquad (16.65)$$

Следующий набор поправок связан с ошибками, возникающими при заменах $I\,(1)$ на $I\,(0) + dI/d\lambda^2\,|_{\lambda=0}$. Как и в случае нулевого спина, проведем разложение по степеням векторного потенциала. Запишем поэтому функцию $\chi_\lambda(u)$, определяемую формулой (16.20), в виде

$$\chi_\lambda(u) = \zeta_\lambda(u) + 2\lambda u(k - \lambda up).eqA - 2u(1-u)\,p.eqA - \\ - [u(1-u) + \lambda^2u^2]\,eq\sigma F + [u(1-u) + \lambda^2u^2]\,e^2A^2, \quad (16.66)$$

где $\zeta_\lambda(u)$ имеет тот же смысл, что и в формуле (15.52). Линейный член в разложении $I(\lambda^2)$ равен [ср. с формулой (15.54)]

$$I(\lambda^2)_A = -is\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{dv}{2}\exp\left\{-is\frac{1+v}{2}\zeta_\lambda\right\}\times \\ \times[2\lambda u(k-\lambda up).eqA - 2u(1-u)\,p.eqA - \\ -(u(1-u)+\lambda^2u^2)\,eq\sigma F]\exp\left\{-is\frac{1-v}{2}\zeta_\lambda\right\}. \quad (16.67)$$

Поскольку его отличие от соответствующего выражения для нулевого спина выступает в совершенно отчетливой форме, мы можем сразу же выписать аналог матричного элемента (15.59), но с учетом того, что применительно к первому слагаемому (16.7) требуется ввести дополнительный множитель $1+u$:

$$-\int ds\,s\,du\,(1+u)\,e^2I(\lambda^2)_A = \\ = i\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{1}{2}dv\,du\,(1+u)\frac{u(1-u)(p'+p'')\,eqA + [u(1-u)+\lambda^2u^2]\,eq\sigma F}{D_\lambda}. \quad (16.68)$$

Если вычислять это выражение в состоянии $\psi(0)$, то результатом будет линейная функция переменной λ^2, которая дает нуль для интересующей нас здесь разности по λ. Как и в случае спина 0, следует рассматривать итерированное поле.

Исходя из квадрированного уравнения Дирака

$$(\Pi^2 - eq\sigma F + m^2)\,\psi = 0, \quad (16.69)$$

мы в качестве аналога выражения (15.43) получим

$$\psi = \psi(0) + \frac{1}{p^2+m^2}(2eqp.A + eq\sigma F)\,\psi(0) \quad (16.70)$$

и

$$\psi^*\gamma^0 = \psi(0)^* + \psi(0)^*(2eqp.A + eq\sigma F)\frac{1}{p^2+m^2}, \quad (16.71)$$

где мы учли, что $\psi(0)$ описывает состояние с нулевым пространственным импульсом и с определенной четностью $\gamma^{0\prime} = +1$. По аналогии с (15.61) это дает

$$-\int ds\,s\,du\,(1+u)\,e^2\psi^*\gamma^0I(\lambda^2)_A\,\psi = \\ = i8\pi Z^2\alpha^3|\psi(0)|^2\int\frac{1}{2}dv\,du\,(1+u)\times \\ \times\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right)^3\frac{u(1-u)\,4m^2 - [u(1-u)+\lambda^2u^2]\,\mathbf{p}^2}{D_\lambda}, \quad (16.72)$$

так как в состоянии $\psi(0)$

$$\sigma^{0k}F_{0k}\sigma^{0l}F_{0l} \to -F_{0k}F_{0k}. \tag{16.73}$$

Образовав нужную нам разность по λ, мы придем к следующему вкладу в энергетический сдвиг:

$$\delta_4 E = (\delta_4' + \delta_4'' + \delta_4''')\, E, \tag{16.74}$$

где

$$\delta_4' E = 64\pi Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 m^3 \int \frac{1}{2}\, dv\, du\, (1+u)\, u\, (1-u) \left(u^2 \frac{1-v^2}{4}\right)^2 \times \\ \times \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_0^2 D_1},$$

$$\delta_4'' E = 16\pi Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 m \int \frac{1}{2}\, dv\, du\, (1+u)\, u^3 \frac{1-v^2}{4} \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_0 D_1} \tag{16.75}$$

и

$$\delta_4''' E = -16\pi Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 m \int \frac{1}{2}\, dv\, du\, (1+u)\, u\, (1-u)\, u^2 \frac{1-v^2}{4} \times \\ \times \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_0^2}. \tag{16.76}$$

При таком разбиении использовано соотношение

$$u^2 \frac{1-v^2}{4} \mathbf{p}^2 = D_1 - D_0. \tag{16.77}$$

Вклад $\delta_4' E$ отличается от аналогичного выражения (15.65) для спина 0 только дополнительным множителем $1+u$. В частности, все коэффициенты совпадают, так как

$$|\psi(0)|^2 = 2m\, |\phi|^2. \tag{16.78}$$

Поэтому соответствующая модификация выражения (15.68) дает

$$\delta_4' E = 16 Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2} \frac{3}{35} \int_0^1 dw\, w^{7/2} \int_0^1 du\, u^{-1/2} (1-u^2)(1-uw)^{-1/2} = \\ = \left(\frac{3}{32} + \frac{3}{35}\right) \pi Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2}. \tag{16.79}$$

Интеграл по импульсам, входящий в $\delta_4'' E$, нам также уже встречался в формуле (15.72). Изменив должным образом численный множитель и зависимость (15.73) от u, получим

$$\delta_4'' E = 4 Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2} \frac{1}{3} \int_0^1 dw\, w^{3/2} \int_0^1 du\, u^{-1/2} (1+u)(1-uw)^{-1/2} = \\ = \frac{7}{12} \pi Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2}. \tag{16.80}$$

Выполнив в третьем члене интегрирование по импульсам, будем иметь

$$\delta_4'''E = -2Z^2\alpha^3\,|\psi(0)|^2\frac{1}{m^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,dv\frac{1-v}{2}\left(\frac{1+v}{2}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 du\,(1+u)\,u^{-1/2}(1-u)^{1/2} = -\frac{1}{3}\pi Z^2\alpha^3\,|\psi(0)|^2\frac{1}{m^2}. \quad (16.81)$$

Складывая три этих вклада, получаем

$$\delta_4 E = \left(\frac{11}{32}+\frac{3}{35}\right)\pi Z^2\alpha^3\,|\psi(0)|^2\frac{1}{m^2}. \quad (16.82)$$

С первым слагаемым в формуле (16.7) мы покончим, рассмотрев ту часть величины $I(\lambda^2)$, которая явным образом квадратична по потенциалу. Обратимся к результату (15.80), полученному для нулевого спина, и введем дополнительный спиновый член:

$$e^2I(\lambda^2)_{A^2} = i\frac{\alpha}{4\pi}\int dw\,w\exp(-ism^2u^2)\left\{4\lambda^2u^2\left(-\frac{i}{2s}\right)eqA\times\right.$$

$$\times\exp\{-is(1-w)\,u(1-u)(p''^2+m^2)\}\,eqA+$$

$$+[2u(1-u)\,p'eqA+(u(1-u)+\lambda^2u^2)\,eq\sigma F]\times$$

$$\times\exp\{-is(1-w)\,u(1-u)(p''^2+m^2)\}\times$$

$$\left.\times[2u(1-u)\,p'eqA+(u(1-u)+\lambda^2u^2)\,eq\sigma F]\right\}\times$$

$$\times\exp\{-is\lambda^2u^2w(1-w)(p'-p'')^2\}. \quad (16.83)$$

Тогда мы в качестве аналога выражения (15.81) получим

$$e^2\psi^*\gamma^0I(\lambda^2)_{A^2}\psi = i8\pi Z^2\alpha^3\,|\psi(0)|^2\int\limits_{-1}^{1}\frac{dv}{2}\frac{1-v}{2}\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right)^2\times$$

$$\times\left[i\lambda^2\frac{u^2}{s}+2m^2u^2(1-u)^2-\frac{1}{2}(u(1-u)+\lambda^2u^2)^2\,\mathbf{p}^2\right]\exp(-isD_\lambda). \quad (16.84)$$

Проводя так же, как и в формуле (15.83), но с дополнительным множителем $1+u$, интегрирование по s, затем получаем

$$-\int ds\,s\,du\,(1+u)\,e^2\psi^*\gamma^0I(\lambda^2)_{A^2}\psi =$$

$$= i8\pi Z^2\alpha^3\,|\psi(0)|^2\int\frac{1}{2}\,dv\frac{1-v}{2}\,du\,(1+u)\times$$

$$\times\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right)^2\left[-\lambda^2u^2\frac{1}{D_\lambda}+2(1-u)^2\left(-m^2\frac{d}{dm^2}\right)\frac{1}{D_\lambda}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(1-u+\lambda^2u)^2\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\left(-m^2\frac{d}{dm^2}\right)\frac{1}{D_\lambda}\right]. \quad (16.85)$$

Переход в этом члене к разности по λ осуществляется путем подстановок

$$\frac{\lambda^2}{D_\lambda} \to \frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_0} = -\frac{u^2 \frac{1-v^2}{4} \mathbf{p}^2}{D_0 D_1},$$

$$\frac{1}{D_\lambda} \to \frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_0} + \frac{u^2 \frac{1-v^2}{4} \mathbf{p}^2}{D_0^2} = \frac{\left(u^2 \frac{1-v^2}{4} \mathbf{p}^2\right)^2}{D_0^2 D_1}, \tag{16.86}$$

которые проводились и в формуле (15.84), а кроме того, путем подстановки

$$\frac{(1-u+\lambda^2 u)^2}{D_\lambda} \to \frac{1}{D_1} - \frac{1-u^2}{D_0} + \frac{(1-u)^2 u^2 \frac{1-v^2}{4} \mathbf{p}^2}{D_0^2}. \tag{16.87}$$

Из соответствующего энергетического сдвига $\delta_5 E$ мы выделим две части, простым образом связанные с выражениями, отвечающими нулевому спину:

$$\delta_5' E = 16\pi Z^2 \alpha^3 |\psi(0)|^2 m \int \frac{1}{2} dv \frac{1-v}{2} du (1+u) u^4 \frac{1-v^2}{4} \times \\ \times \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_0 D_1},$$

$$\delta_5'' E = 32\pi Z^2 \alpha^3 |\psi(0)|^2 m \int \frac{1}{2} dv \frac{1-v}{2} du (1+u)(1-u)^2 \times \\ \times \left(u^2 \frac{1-v^2}{4}\right)^2 \left(-m^2 \frac{d}{dm^2}\right) \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{D_0^2 D_1}, \tag{16.88}$$

и третий член, происхождение которого связано непосредственно с наличием спина:

$$\delta_5''' E = -8\pi Z^2 \alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m} \int \frac{1}{2} dv \frac{1-v}{2} du (1+u) \times \\ \times \left(-m^2 \frac{d}{dm^2}\right) \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \left[\frac{1}{D_1} - \frac{1-u^2}{D_0} + \mathbf{p}^2 \frac{(1-u)^2 u^2 \frac{1-v^2}{4}}{D_0^2}\right]. \tag{16.89}$$

Пользуясь выражением (15.88), получим

$$\delta_5' E = 4Z^2 \alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2} \int_0^1 dw \left(\frac{1}{3} w^{3/2} - \frac{1}{5} w^{5/2}\right) \times \\ \times \int_0^1 du\, u^{1/2} (1+u)(1-uw)^{-1/2}, \tag{16.90}$$

а выражение (15.89) дает

$$\delta_5'' E = 12 Z^2 \alpha^3 \,|\, \psi(0) \,|^2 \frac{1}{m^2} \int dw \left(\frac{1}{15} w^{5/2} - \frac{1}{35} w^{7/2} \right) \times$$
$$\times \int du\, u^{-1/2} (1+u)(1-u)^2 (1-uw)^{-3/2}. \qquad (16.91)$$

Эти интегралы представляют собой частный случай общего соотношения (15.69), отвечающий равенству $a = b$:

$$\int_0^1 du \int_0^1 dw\, u^{a-1} w^{a-1} (1-uw)^{c-1} = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a+c)} [\psi(a+c) - \psi(a)]. \qquad (16.92)$$

Для наших целей достаточно знать, что функция

$$\psi(z) \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) \qquad (16.93)$$

обладает свойством

$$\psi(z) = \psi(z-1) + \frac{1}{z-1}, \qquad (16.94)$$

вытекающим из равенства

$$\Gamma(z) = (z-1)\,\Gamma(z-1), \qquad (16.95)$$

и что для нее

$$\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \ln 2. \qquad (16.96)$$

Последнее соотношение есть частный случай (когда $n = 2$, $z = {}^1/_2$) формулы

$$n\psi(nz) - \sum_{k=0}^{n-1} \psi\left(z + \frac{k}{n}\right) = n \ln n, \qquad (16.97)$$

которая вытекает из следующего свойства мультипликативности Г-функции:

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} n^{nz - \frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right). \qquad (16.98)$$

Таким образом,

$$\delta_5' E = \left(\ln 2 - \frac{13}{24} \right) \pi Z^2 \alpha^3 \,|\, \psi(0) \,|^2 \frac{1}{m^2} \qquad (16.99)$$

и

$$\delta_5'' E = \left(2 + \frac{3}{16} - \frac{1}{35} - 3 \ln 2 \right) \pi Z^2 \alpha^3 \,|\, \psi(0) \,|^2 \frac{1}{m^2}. \qquad (16.100)$$

Обратимся теперь к спиновому члену $\delta_5'''E$. Выполнив в нем интегрирование по импульсам, получим

$$\delta_5'''E = Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2} \Big[\int_0^1 dw \left(w^{1/2} - \frac{1}{3} w^{3/2} \right) \times \\ \times \int_0^1 du\, u^{-1/2} (1+u) (1-uw)^{-3/2} - \\ - \int_0^1 dw\, w^{-1/2} (1-w) \int_0^1 du\, u^{1/2} (1-u)^{-1/2} (1+u) - \\ - \frac{1}{2} \int_0^1 dw\, w^{-1/2} (1-w)^2 \int_0^1 du\, u^{-1/2} (1-u)^{1/2} (1+u) \Big], \tag{16.101}$$

где в первом и третьем слагаемых уже проведено интегрирование по частям по переменной w. Вычислив все эти интегралы, получим

$$\delta_5'''E = \left(1 + \frac{1}{12} - 2\ln 2 \right) \pi Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2}, \tag{16.102}$$

так что сумма трех членов оказывается равной

$$\delta_5 E = \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{16} - \frac{1}{35} - 4\ln 2 \right) \pi Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2}. \tag{16.103}$$

Полный вклад первого слагаемого в выражении (16.7) выглядит следующим образом:

$$(\delta_4 + \delta_5) = \left(\frac{8}{3} + \frac{13}{32} + \frac{2}{35} - 4\ln 2 \right) \pi Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2}. \tag{16.104}$$

При анализе второго слагаемого (16.7) будем исходить из равенства

$$[\exp(-is\mathcal{X}), \gamma]_\lambda = \\ = -2us \int \frac{1}{2} dv \exp\left\{ -is\mathcal{X}_\lambda \frac{1+v}{2} \right\} eqF\gamma \exp\left\{ -is\mathcal{X}_\lambda \frac{1-v}{2} \right\} \tag{16.105}$$

и заметим, как в случае нулевого спина, что при вычислении дополнительного коммутатора с p, входящего в $\Pi = p - eqA$, достаточно учесть только члены, линейные по F. Что же касается дополнительного коммутатора с A, то единственная компонента A^0 отбирает комбинацию $F_{0k}\gamma^k$, матричный элемент которой в состоянии $\psi(0)$ с $\gamma^{0\prime} = +1$ равен нулю. В таком случае мы получаем

$$i[\Pi, [\exp(-is\mathcal{X}), \gamma]_\lambda] = \\ = 2us \int \frac{1}{2} dv \exp\left\{ -is\zeta_\lambda \frac{1+v}{2} \right\} eq\gamma J \exp\left\{ -is\zeta_\lambda \frac{1-v}{2} \right\} \tag{16.106}$$

и, имея в виду переход к матричному элементу,

$$e^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} i\,[\Pi, [\exp(-is\mathcal{X}), \gamma]_\lambda] = -i\frac{\alpha}{2\pi}\frac{u}{s}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\, eq\gamma J \exp(-isD_\lambda), \tag{16.107}$$

откуда следует, что

$$-e^2\int ds\, s\, du\,(1-u)\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\psi^*\gamma^0 i\,[\Pi,\ [\exp(-is\mathcal{X}),\ \gamma]_\lambda]\psi =$$
$$=\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{1}{2}dv\,du\,u\,(1-u)\,\psi^*\gamma^0\frac{eq\gamma J}{D_\lambda}\psi. \tag{16.108}$$

Чтобы получить интересующий нас энергетический сдвиг, достаточно образовать одну-единственную разность по λ:

$$\delta_6 E = \frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{1}{2}dv\,du\,u\,(1-u)\,\psi^*\gamma^0 eq\gamma J\left(\frac{1}{D_1}-\frac{1}{D_0}\right)\psi =$$
$$= -32\pi Z^2\alpha^3\,|\psi(0)|^2\, m\int\frac{1}{2}\,dv\,du u\,(1-u)\,u^2\frac{1-v^2}{4}\times$$
$$\times\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2}\frac{1}{D_0 D_1}. \tag{16.109}$$

Сравнение этого выражения с его аналогом (15.72) при учете обычного соответствия

$$2m\ |\ \phi\ |^2 = |\ \psi\,(0)\ |^2, \tag{16.110}$$

показывает, что они совпадают, а, следовательно,

$$\delta_6 E = -\frac{1}{2}\pi Z^2\alpha^3\,|\psi(0)|^2\frac{1}{m^2}. \tag{16.111}$$

Рассмотрим теперь третье слагаемое в выражении (16.7). И здесь, и в четвертом слагаемом мы будем применять прямое разложение по степеням A, из которого следует исключить первые члены, даваемые здесь формулой (16.37), а в четвертом слагаемом — формулами (16.39) и (16.48). Взяв линейный член выражения (16.68) при $\lambda = 1$, получим

$$-\int ds\, s\, du\frac{1}{2}\,mue^2 I_A =$$
$$= i\frac{\alpha}{8\pi}m\int\frac{1}{2}dv\,du\,u\,\frac{u\,(1-u)\,(p'+p'')\,eqA + ueq\sigma F}{D_1}. \tag{16.112}$$

После образования коммутатора с γ останется только спиновый член, причем, согласно равенству (16.15),

$$[\gamma,\ [\sigma F,\ \gamma]] = 8\sigma F. \tag{16.113}$$

В результате для соответствующего энергетического сдвига будем иметь

$$\delta_7 E = -\frac{\alpha}{\pi} m \int \frac{1}{2} dv\, du\, u^2 \psi^* \gamma^0 eq\sigma F \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{m^2 u^2}\right) \psi, \qquad (16.114)$$

где мы вычли комбинацию (16.37) (умножив ее на i, чтобы выделить энергетический сдвиг). Вычисляя матричный элемент, получаем

$$\delta_7 E = -32\pi Z^2 \alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m} \int dw\, du\, uw (1-uw) \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_1} =$$
$$= -8Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2} \int dw\, du\, w^{1/2} u^{-1/2} (1-uw)^{1/2}, \qquad (16.115)$$

так что

$$\delta_7 E = -3\pi Z^2 \alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2}. \qquad (16.116)$$

По поводу квадратичного по A члена отметим, что после образования коммутатора с γ в I_{A^2} останутся только члены вида σF и $\sigma F \ldots \sigma F$. Переписав первый из них с учетом равенства (16.113), мы увидим, что в состоянии $\psi(0)$ с $\gamma^{0\prime} = +1$ конечный матричный элемент для $\sigma^{0k} = i\gamma^0\gamma^k$ равен нулю. В то же время благодаря инвариантности $\psi(0)$ относительно вращений величина $\sigma^{0k} F_{0k} \ldots \sigma^{0l} F_{0l}$ сводится к комбинации $-F_{0k} \ldots F_{0k}$, которая кратна единичной матрице, а значит, коммутирует с γ.

Таким образом, I_{A^2} не дает никакого вклада и весь эффект, соответствующий третьему слагаемому выражения (16.7), содержится в величине $\delta_7 E$.

В соотношениях, вывод которых основывается на равенстве (16.106), уже содержится двойной коммутатор с Π и γ, входящий в формулу (16.8). Выражение (16.108) модифицируется следующим образом:

$$-e^2 \int ds\, s\, du \frac{1}{4} u \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \psi^* \gamma^0 \gamma^\mu i [\Pi, [\exp(-is\chi), \gamma]] \gamma_\mu \psi =$$
$$= \frac{\alpha}{4\pi} \int \frac{1}{2} dv\, du\, u^2 \psi^* \gamma^0 \frac{eq\gamma J}{D_1} \psi, \qquad (16.117)$$

где мы положили $\lambda = 1$. Вытекающий из него энергетический сдвиг [если исключить из него член, даваемый формулой (16.39)] дается выражением

$$\delta_8 E = \frac{\alpha}{4\pi} \int \frac{1}{2} dv\, du\, u^2 \psi^* \gamma^0 eq\gamma J \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{m^2 u^2}\right) \psi =$$
$$= -16\pi Z^2 \alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m} \int dw\, du\, uw (1-uw) \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_1}. \qquad (16.118)$$

Поскольку он точно совпадает с $^1/_2 \delta_7 E$, мы имеем

$$\delta_8 E = -\frac{3}{2} \pi Z^2 \alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2}. \qquad (16.119)$$

Читателю предоставляется в качестве самостоятельного упражнения убедиться в том, что подстановка (16.42) дает линейный член

$$\gamma^\mu\gamma\,.\,((k-u\Pi)\,.\,\exp(-is\chi))_A\,\gamma_\mu = su\int \frac{1}{2}\,dv v \exp\left\{-is\zeta\,\frac{1+v}{2}\right\}\times$$
$$\times[-2ueq\gamma F\,.\,(k-up)+2u(1-u)\,eq\gamma F\,.\,p]\exp\left\{is\zeta\,\frac{1-v}{2}\right\}. \tag{16.120}$$

Здесь возникает также некоторое слагаемое, которое мы опустили. Оно пропорционально комбинации

$$\gamma^\lambda\,.\,\sigma^{\mu\nu}\partial_\lambda F_{\mu\nu} = i\gamma_5\gamma_\varkappa\varepsilon^{\varkappa\lambda\mu\nu}\partial_\lambda F_{\mu\nu}, \tag{16.121}$$

которая обращается в нуль в отсутствие магнитного заряда. С учетом импульсного интеграла (15.56) будем иметь

$$e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\,\gamma^\mu\gamma\,.\,((k-u\Pi)\,.\,\exp(-is\chi))_A\,\gamma_\mu =$$
$$= -i\,\frac{\alpha}{4\pi}\,\frac{u}{s}\int\frac{1}{2}\,dv v\exp(-isD_1)\times$$
$$\times[-u^2veq\gamma F\,(p'-p'')+u(1-u)\,eq\gamma F\,(p'+p'')], \tag{16.122}$$

а затем

$$-\int ds\,s\,du\,e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\,\gamma^\mu\gamma\,.\,((k-u\Pi)\,.\,\exp(-is\chi))_A\gamma_\mu =$$
$$= \frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{1}{2}\,dv\,v\,du\,u\,\frac{1}{D_1}\,[u^2vieq\gamma J+u\,(1-u)\,eq\gamma F\,(p'+p'')]. \tag{16.123}$$

В итоге для энергетического сдвига после необходимого вычитания получаем

$$\delta_9 E = \delta_9' E + \delta_9'' E, \tag{16.124}$$

где

$$\delta_9' E = -\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{1}{2}\,dv\,v^2\int du\,u^3\psi^*\gamma^0 eq\gamma J\left(\frac{1}{D_1}-\frac{1}{m^2u^2}\right)\psi \tag{16.125}$$

и

$$\delta_9'' E = \frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{1}{2}\,dv\,v\int du\,u^2(1-u)\,i\psi^*\gamma^0\,\frac{eq\gamma F\,(p'+p'')}{D_1}\,\psi. \tag{16.126}$$

Для первого из этих вкладов имеем $(1+v=2w)$

$$\delta_9' E = 16\pi Z^2\alpha^3\,|\,\psi(0)\,|^2\,\frac{1}{m}\int_0^1 dw\,(2w-1)^2\int_0^1 du\,u^2w\,(1-uw)\times$$
$$\times\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\mathbf{p}^2}\,\frac{1}{D_1} =$$
$$= 4Z^2\alpha^3\,|\,\psi(0)\,|^2\,\frac{1}{m^2}\int_0^1 dw\int_0^1 du\,(2w-1)^2\,u^{1/2}w^{1/2}\,(1-uw)^{1/2}. \tag{16.127}$$

Поскольку же, как мы сейчас увидим, $\delta_9'' E = 0$, это дает

$$\delta_9 E = \left(\ln 2 - \frac{9}{16}\right) \pi Z^2 \alpha^3 \, |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2}. \tag{16.128}$$

Для доказательства равенства $\delta_9'' E = 0$ достаточно заметить, что

$$i\psi^* \gamma^0 \gamma F \, (p' + p'') \, \psi = \psi^* \gamma^0 \, [\gamma p + m, \, \sigma F] \, \psi = \\ = \psi^* \, (0) \, \gamma^0 \, [eq\gamma A, \, \sigma F] \, \psi \, (0), \tag{16.129}$$

ибо в состоянии ψ (0) коммутатор

$$[\gamma^0, \, \sigma^{0k}] = 2i\gamma^k \tag{16.130}$$

имеет нулевой матричный элемент.

Нам осталось рассмотреть квадратичный член, сходный с (16.123). Прежде всего отметим, что векторные потенциалы, добавляемые в (16.120) к импульсам, выпадают, так как в состоянии ψ (0) матрица

$$\gamma F A = \gamma_k F^{k0} A_0 \tag{16.131}$$

дает нуль. Вклад дают только линейные члены разложения экспонент $\exp \{-is\chi \, (1 \pm v)/2\}$. При этом возникают сомножители

$$-2ueqF.(k - up) + 2u \, (1 - u) \, eqF.p + ueq\partial\sigma F \tag{16.132}$$

и

$$2u \, (k - up).eqA - 2u \, (1 - u) \, p.eqA - ueq\sigma F. \tag{16.133}$$

Сразу же заметим, что появляющиеся здесь спиновые члены могут быть отброшены. Как мы уже видели, имеет место равенство

$$\gamma . \, (\partial \sigma F) = 0, \tag{16.134}$$

которое выполняется тождественно. При перемножении двух спиновых членов нам встретится, например, комбинация

$$\gamma^\mu . \sigma F \partial_\mu \sigma F \to \gamma^k . \, (\sigma^{0l} \sigma^{0m}) \, F_{0l} \partial_k F_{0m}, \tag{16.135}$$

а, поскольку входящая в нее матрица антикоммутирует с γ^0, в состоянии ψ (0) она дает нуль. То же самое справедливо и в случае, когда $\sigma F = \sigma^{0k} F_{0k}$ входит один раз, так как $\gamma^\mu . \sigma^{0k}$ либо обращается в нуль (при $\mu = 0$), либо, если $\mu = l$, содержит трехмерную векторную матрицу $[\gamma_k, \gamma_l]$, коэффициент при которой должен равняться нулю в инвариантном относительно вращений состоянии ψ (0). Интегрирование по k приводит к дальнейшим упрощениям. Вспоминая анализ выражения (15.77), основывающийся на характерном свойстве лоренцевской калибровки, отметим еще раз, что переопределение переменной интегрирования приводит к эффективной подстановке

$$\left(k-u\frac{p'+p''}{2}\right)A\gamma F\left(k-u\frac{p'+p''}{2}\right)\to KA\gamma Fk, \qquad (16.136)$$

куда входит обращающийся в нуль после интегрирования член с одним множителем k. При интегрировании величины (16.136), пропорциональной $\gamma FA=\gamma^k F_{k0}A^0$, в состоянии $\psi(0)$ не возникает никакого вклада. Члены с одним сомножителем k в выражении $(k-up).eqA$ при интегрировании также дают нуль. Нетривиальные члены, возникающие при двукратном перемножении, можно переписать так:

$$\begin{aligned}
&\gamma^\mu\gamma\,.\,((k-u\Pi)\,.\exp(-is\chi))_{A^2}\gamma_\mu=\\
&=-i2s^2u\int\frac{1}{2}dv\,dw\,w\left(\frac{1}{2}-\frac{1-v}{2}w\right)\times\\
&\times\exp\left\{-is\zeta w\frac{1+v}{2}\right\}[-2u(1-u)\,p.eqA]\times\\
&\times\exp\{-is\zeta(1-w)\}[-2ueq\gamma F\,.\,(k-up)+2u(1-u)\,eq\gamma F\,.p]\times\\
&\times\exp\left\{-i\zeta w\frac{1-v}{2}\right\}-\\
&-i2s^2u\int\frac{1}{2}dv\,dw\,w\left(w\frac{1+v}{2}-\frac{1}{2}\right)\exp\left\{-is\zeta w\frac{1+v}{2}\right\}\times\\
&\times[-2ueq\gamma F\,.\,(k-up)+2u(1-u)\,eq\gamma F\,.p]\times\\
&\times\exp\{-is\zeta(1-w)\}[-2u(1-u)\,p.eqA]\times\\
&\times\exp\left\{-is\zeta w\frac{1-v}{2}\right\}. \qquad (16.137)
\end{aligned}$$

Отметим, что при записи результата разложения экспонент мы ввели, как и в формулах (15.13) — (15.16), более симметричный набор параметров. Интегрируя (16.137) по k, получаем

$$\begin{aligned}
&e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\gamma^\mu\gamma\,.((k-u\Pi)\,.\exp(-is\chi))_{A^2}\gamma_\mu=\\
&=-\frac{\alpha}{2\pi}u\int dw\,w\frac{1-w}{2}[-u(1-u)(p'+p'')\,eqA]\exp(-isD_1)\times\\
&\times\left[-2u^2\left(\frac{1}{2}-w\right)ieq\gamma J+u(1-u)\,eq\gamma F(p'+p'')\right]-\\
&-\frac{\alpha}{2\pi}u\int dw\,w\frac{w-1}{2}\left[2u^2\left(\frac{1}{2}-w\right)ieq\gamma J+u(1-u)\,eq\gamma F(p'+p'')\right]\times\\
&\times\exp(-isD_1)[-u(1-u)(p'+p'')\,eqA], \qquad (16.138)
\end{aligned}$$

где, как это фактически делалось и при выводе выражения (15.87), мы произвели подстановку

$$w\to 1-w. \qquad (16.139)$$

В члене

$$\gamma F(p' + p'') = \gamma^0 F_{0k}(p' + p'')^k + \gamma^k F_{k0}(p' + p'')^0 \qquad (16.140)$$

вклад в среднее значение может давать только матрица γ^0. Коэффициент при ней записывается по-разному в зависимости от того, какое из двух слагаемых (16.138) рассматривается. Для первого из них (напомним, что $\mathbf{p}' = 0$)

$$F_{0k}(p' + p'')^k \to F_{0k}(p'' - p')^k = iJ^0, \qquad (16.141)$$

тогда как для второго

$$F_{0k}(p' + p'')^k \to -F_{0k}(p' - p'')^k = -iJ^0. \qquad (16.142)$$

Отсюда видно, что два слагаемых в формуле (16.138) оказываются одинаковыми. Учитывая это обстоятельство, напишем

$$-i \int ds\, s\, du e^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \psi^* \psi^0 \gamma^\mu \gamma \,.\, ((k - u\Pi)\,.\exp(-is\chi))_{A^2} \gamma_\mu \psi =$$
$$= \frac{\alpha}{\pi} m \int dw\, w(1-w)\, du\, u^2 (1-u)(u - 2u^2 w)\, \psi^* \gamma^0 eqJ^0 \frac{1}{D_1^2} eqA^0 \psi. \qquad (16.143)$$

Итак, последний вклад в энергетический сдвиг равен

$$\delta_{10}E = 16\pi Z^2 \alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m} \int_0^1 dw\, w(1-w) \int_0^1 du\, u(1-u)(1-2uw) \times$$
$$\times \left(-m^2 \frac{d}{dm^2}\right) \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_1} =$$
$$= 2Z^2\alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2} \int_0^1 dw \int_0^1 du\, w^{1/2}(1-w) \times$$
$$\times u^{-1/2}(1-u)(1-2uw)(1-uw)^{-1/2}. \qquad (16.144)$$

Здесь уместно, видимо, подчеркнуть, что все встретившиеся нам вклады содержат двойные интегралы по параметрам, которые сводятся к выражению (15.69) или к его частному случаю (16.92). Применительно к рассматриваемой здесь величине это дает

$$\delta_{10}E = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) \pi Z^2 \alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2}. \qquad (16.145)$$

Суммируя все составляющие $\delta_4 E, \ldots, \delta_{10} E$, даваемые формулами (16.104), (16.111), (16.116), (16.119), (16.128), (16.145), получаем

$$\delta_b E = (\delta_4 + \ldots + \delta_{10}) E =$$
$$= \left(-3 + \frac{11}{32} - \frac{29}{105} - 2\ln 2\right) \pi Z^2 \alpha^3 |\psi(0)|^2 \frac{1}{m^2}. \qquad (16.146)$$

Вспоминая, далее, выражение (16.65) для $\delta_a E$, мы придем к следующему полному вкладу в энергетический сдвиг:

$$(\delta_a+\delta_b)\,E=\left(4+\frac{11}{32}-2\ln 2\right)\pi Z^2\alpha^3\,|\,\psi(0)\,|^2\frac{1}{m^2}, \quad (16.147)$$

где не учтен еще эффект поляризации вакуума. Он примерно на 20% меньше результата (15.98) для случая нулевого спина. Чтобы завершить наш расчет, подставим в поправки (15.3)—(15.5), обусловленные поляризацией вакуума, комбинацию, отвечающую спину $^1/_2$:

$$\int (d\mathbf{x})\,m\,|\,\mathbf{x}\,|\,\delta\mathscr{D}(\mathbf{x})=\frac{2\alpha}{3\pi}m\int\limits_{(2m)^2}^{\infty}\frac{dM^2}{(M^2)^{5/2}}\left(1+\frac{2m^2}{M^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{\alpha}{\pi}\,\frac{1}{(2m)^2}\int\limits_0^1 dv\,(1-v^2)^{1/2}\,v^2\left(1-\frac{1}{3}v^2\right)=\frac{5\alpha}{96}\,\frac{1}{(2m)^2}, \quad (16.148)$$

что дает для энергетического сдвига

$$\frac{5}{48}\,\pi Z^2\alpha^3\,|\,\psi(0)\,|^2\frac{1}{m^2}. \quad (16.149)$$

Окончательный результат таков:

$$\delta E=\frac{4}{3}\,Z\alpha^2\,|\,\psi(0)\,|^2\frac{1}{m^2}\left[3\pi Z\alpha\left(1+\frac{11}{128}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{5}{192}\right)\right]. \quad (16.150)$$

Мы опять представили его в такой форме, что величина в квадратных скобках является эффективной добавкой к набору аддитивных констант, которые прибавляются к основному логарифму.

По поводу точной величины дополнительного сдвига s-уровней вверх напомним, что при $n = 2$ она равна

$$\frac{4}{3}\,Z\alpha^2\,|\,\psi(0)\,|^2\frac{1}{m^2}=\frac{1}{3\pi}\,Z^4\alpha^3\left(\frac{M}{M+m}\right)^3\mathrm{Ry}=$$

$$=135{,}644Z^4\left(\frac{M}{M+m}\right)^3\ \text{МГц}, \quad (16.151)$$

где учтено, что в $\psi(0)$ входит приведенная масса. Для водорода это дает

$$\mathrm{H}:\quad \delta E_{2s_{1/2}}=7{,}43\ \text{МГц}. \quad (16.152)$$

Складывая эту величину с полученным ранее результатом (11.114), мы теперь будем иметь следующее теоретическое значение для сдвига:

$$\mathrm{H}:\quad E_{2s_{1/2}}-E_{2p_{1/2}}=1057{,}68\ \text{МГц}. \quad (16.153)$$

На этот раз согласие с экспериментальным значением $1057{,}90 \pm \pm\, 0{,}10$ МГц даже лучше, чем этого можно было бы ожидать, так как остались неучтенными всевозможные вторичные эффекты, самым главным из которых является поправка относительной величины порядка α (тогда как здесь рассматривались вклады порядка $Z\alpha$).

Попутно отметим, что вывод, представленный в данном параграфе, воспроизводит результаты, которые довольно давно были получены двумя независимыми группами исследователей в Гарвардском и Корнельском университетах. Первыми публикациями по этому вопросу были статьи Карплуса, Клейна, Швингера [1]) и Беренджера [2]). Полностью соответствующая методика была изложена в работах Карплуса, Клейна, Швингера [3]) и Беренджера, Бете, Фейнмана [4]). Имеется некое генетическое родство между проведенным выше анализом и прежними исследованиями гарвардской группы, но последние в своих деталях были гораздо более сложными.

§ 17. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СДВИГИ H-ЧАСТИЦ. СПИН $^1/_2$, РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ II

Кроме заряда, у атомных ядер имеются и другие характеристики: магнитные дипольные моменты, электрические квадрупольные моменты и т. д., причем все они определяются только спином ядра. Соответственно этому в энергетическом спектре проявляется дополнительная сверхтонкая структура. На s-уровни атома водорода, которым свойствен лишь спиновый угловой момент, влияние может оказывать только магнитный дипольный момент ядра. Он приводит к дублетной структуре уровня $1s_{1/2}$, расщепление которого измерено с очень высокой точностью в водороде, дейтерии и тритии. В данном параграфе мы изложим элементарную теорию этого эффекта и остановимся на электродинамических поправках к нему с относительной величиной порядка α и $Z\alpha^2$.

Магнитный момент ядра выражается через его спин $\mathbf{S}$ и g-фактор g_S:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2M_p} g_S \mathbf{S}, \tag{17.1}$$

где M_p — масса протона. Пространственный ток с нулевой дивергенцией, с которым магнитный момент связан формулой [ср. с формулой (3-10.59)]

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\int (d\mathbf{r})\, \mathbf{r}\times\mathbf{J}, \tag{17.2}$$

---

[1]) *Karplus R., Klein A., Schwinger J.*, Phys. Rev., 84, 597 (1951).
[2]) *Baranger M.*, Phys. Rev., 84, 866 (1951).
[3]) *Karplus R., Klein A., Schwinger J.*, Phys. Rev., 86, 288 (1952) (имеется перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954).
[4]) *Baranger M., Bethe H., Feynmann R.*, Phys. Rev., 92, 482 (1953).

дается выражением

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mu\delta(\mathbf{r}). \qquad (17.3)$$

Соответствующие ему векторный потенциал и магнитное поле таковы:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \frac{\mu}{4\pi r} = \frac{\mu \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\mu}{4\pi r}\right) = \nabla\nabla\cdot\left(\frac{\mu}{4\pi r}\right) + \mu\delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \qquad (17.4)$$

Как правило, мы будем рассматривать магнитное поле с координатной зависимостью, усредненной по всем направлениям:

$$\langle \mathbf{H}(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{3}\nabla^2 \frac{\mu}{4\pi r} + \mu\delta(\mathbf{r}) = \frac{2}{3}\mu\delta(\mathbf{r}). \qquad (17.5)$$

Начнем с энергетического сдвига, к которому приводит примитивное взаимодействие в нерелятивистском приближении. Обращаясь к выражению для действия (3-10.63), описывающему поведение частицы со спином $^1/_2$ в электромагнитном поле, и полагая в нем $g_{\text{прим}} = 2$, что соответствует электрону, мы для энергетического сдвига, вызываемого слабым векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, получаем

$$\begin{aligned} \delta E &= -\int (d\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r})^* \gamma^0 eq \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r}) = \\ &= e\int (d\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r})^* \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r}). \end{aligned} \qquad (17.6)$$

В последней строке учтено, что для заряда электрона

$$(eq)' = -e. \qquad (17.7)$$

В поле основного состояния $\psi(\mathbf{r})$ не включен временной множитель $\exp[-ip^0x^0]$. На основании уравнений Дирака

$$(\gamma\Pi + m)\psi = 0, \quad \psi^*\gamma^0(\gamma\Pi + m) = 0 \qquad (17.8)$$

перепишем выражение (17.6) в виде

$$\begin{aligned} \delta E &= -\frac{e}{2m}\int (d\mathbf{r})\, \psi^*\gamma^0(\gamma\Pi\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}\gamma\Pi)\psi = \\ &= \frac{e}{2m}\int (d\mathbf{r})\, \psi^*\gamma^0(2\mathbf{p}\cdot\mathbf{A} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H})\psi, \end{aligned} \qquad (17.9)$$

где мы воспользовались тем обстоятельством, что при описании кулоновского поля посредством скалярного потенциала A^0 имеет место равенство $\mathbf{\Pi} = \mathbf{p}$ и что симметризовать произведение $\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}$ необязательно, так как

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0. \qquad (17.10)$$

В нерелятивистском приближении $\psi(\mathbf{r})$ отвечает состоянию с нулевым орбитальным моментом ($s_{1/2}$) и с определенной четностью $\gamma^{0\prime} = +1$. Поэтому орбитальный член

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi r^3}\,\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}, \tag{17.11}$$

обращается в нуль, а магнитное поле можно заменить его средним значением (17.5). В результате мы мгновенно получаем

$$\delta E = \frac{e}{2m}\,\frac{2}{3}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mu}\,|\,\psi(0)\,|^2, \tag{17.12}$$

где произведению

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2M_p}\,g_S\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{S} \tag{17.13}$$

приписывается одно из его собственных значений, выбор которого диктуется величиной полного углового момента

$$\mathbf{F} = \mathbf{S} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}. \tag{17.14}$$

Эти собственные значения таковы:

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{S})' = \mathbf{F}^2 - \mathbf{S}^2 - \frac{3}{4} = \begin{cases} F = S + \frac{1}{2}: & S, \\ F = S - \frac{1}{2}: & -S-1, \end{cases} \tag{17.15}$$

и мы для расщепления s-состояния имеем

$$\Delta E = E_{S+1/2} - E_{S-1/2} = \frac{2}{3}\,\frac{e}{2m}\,\frac{e}{2M_p}\,(2S+1)\,g_S\,|\,\psi(0)\,|^2 =$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{m}{M_p}\,Z^3\alpha^2(2S+1)\,g_S\left(\frac{M}{M+m}\right)^3 \mathrm{Ry}. \tag{17.16}$$

Последнее выражение здесь написано для конкретного случая $1s$-состояния, причем массу ядра M мы заменили соответствующей приведенной массой.

Экспериментальное значение магнитного момента протона в единицах ядерного магнетона $e/2M_p$ равно

$$\mu_p = \frac{1}{2}\,g_p = 2{,}79278 \pm 0{,}00002. \tag{17.17}$$

Тогда для величины расщепления s-состояния формула (17.16) дает

$$\mathrm{H:} \quad \Delta E_{\text{нерел}} = 1418{,}83 \text{ МГц}. \tag{17.18}$$

Мы должны сравнить ее с экспериментальным значением (в котором на самом деле имеется гораздо больше значащих цифр)

$$\mathrm{H:} \quad \Delta E_{\text{эксп}} = 1420{,}406 \text{ МГц}. \tag{17.19}$$

Основную часть расхождения в 1,58 МГц можно устранить, если учесть добавку $\alpha/2\pi$ к магнитному моменту электрона. Для модифицированного таким образом теоретического значения будем иметь

$$\text{H:}\quad \Delta E_{\text{нерел}+\alpha} = 1420{,}48\ \text{МГц}. \tag{17.20}$$

Что же касается остающегося расхождения в 0,07 МГц, то в данном параграфе мы рассмотрим теоретические поправки порядка $(Z\alpha)^2$ и $Z\alpha^2$ по сравнению с основным эффектом.

Первая из них, порядка $(Z\alpha)^2$, представляет собой чисто релятивистскую поправку к нерелятивистскому выражению. Ее можно попытаться вычислить, оценив соответствующие погрешности в формуле (17.9). Но проще, видимо, воспользоваться в формуле (17.6) релятивистскими волновыми функциями водорода. Для основного состояния решением уравнения Дирака

$$\left[\boldsymbol{\gamma}\cdot\frac{1}{i}\boldsymbol{\nabla} - \gamma^0\left(p^0 + \frac{Z\alpha}{r}\right) + m\right]\psi(\mathbf{r}) = 0 \tag{17.21}$$

является смесь волн $s_{1/2}$ и $p_{1/2}$ с противоположными внутренними четностями

$$\psi = \psi_s + \psi_p, \tag{17.22}$$

которые связываются друг с другом градиентным членом, входящим в формулу (17.21). Эта связь описывается следующей парой уравнений $[\gamma^0\boldsymbol{\gamma} = i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}]$:

$$\begin{aligned} \left(p^0 - m + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi_s &= \gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi_p, \\ \left(p^0 + m + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi_p &= \gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi_s. \end{aligned} \tag{17.23}$$

Зависимость двух этих составляющих от спина и углов выглядит следующим образом:

$$\varphi_s(\mathbf{r}) = f(r)\,v, \quad \psi_p(\mathbf{r}) = -\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}g(r)\,v, \tag{17.24}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный радиус-вектор,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{17.25}$$

а v — произвольный единичный спинор с $\gamma^{0\prime} = +1$. Убедиться в этом можно, выделив чисто радиальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} + \left(p^0 + m + \frac{Z\alpha}{r}\right)g &= 0, \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)g - \left(p^0 - m + \frac{Z\alpha}{r}\right)f &= 0, \end{aligned} \tag{17.26}$$

в последнем из которых учтено следующее тождество из алгебры операторов $[\mathbf{r} \times \nabla g = 0]$:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}g = \nabla\cdot\mathbf{n}g = \left(\mathbf{n}\cdot\nabla + \frac{2}{r}\right)g. \tag{17.27}$$

Для диагонализации пары подобных уравнений напишем

$$g(r) = \gamma f(r) \tag{17.28}$$

и приравняем в них аналогичные коэффициенты:

$$\gamma(p^0 + m) = -\frac{1}{\gamma}(p^0 - m), \quad \gamma Z\alpha = 2 - \frac{1}{\gamma} Z\alpha. \tag{17.29}$$

В результате получим (физически приемлем только один корень квадратного уравнения для γ)

$$\gamma = \frac{1}{Z\alpha}\left\{1 - [1 - (Z\alpha)^2]^{1/2}\right\} \approx \frac{1}{2} Z\alpha, \quad Z\alpha \ll 1, \tag{17.30}$$

и

$$p^0 = m\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2} = m(1 - Z\alpha\gamma) = m[1 - (Z\alpha)^2]^{1/2} \approx m - \frac{1}{2}(Z\alpha)^2 m. \tag{17.31}$$

Далее, решив уравнение

$$\frac{df}{dr} + \left(Z\alpha m + \frac{Z\alpha\gamma}{r}\right) f = 0, \tag{17.32}$$

для радиальной зависимости будем иметь

$$f(r) = N r^{-Z\alpha\gamma} \exp(-Z\alpha m r). \tag{17.33}$$

Коэффициент N определяется (с точностью до фазового множителя) условием нормировки [ср. с соотношением (3-15.33)]

$$1 = \int (d\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r})^* \psi(\mathbf{r}) = \int_0^\infty 4\pi r^2\, dr\, (f^2 + g^2) =$$

$$= (1+\gamma^2)\, 4\pi N^2 \int_0^\infty dr\, r^{2-2Z\alpha\gamma} \exp(-2Z\alpha m r) =$$

$$= (1+\gamma^2)\, 4\pi N^2 \left(\frac{1}{2Z\alpha m}\right)^{3-2Z\alpha\gamma} \Gamma(3 - 2Z\alpha\gamma). \tag{17.34}$$

Пренебрегая здесь величиной $2Z\alpha\gamma \approx 4\gamma^2$, мы вновь получаем известную нерелятивистскую нормировочную константу $|\psi(0)|^2$:

$$N^2 \approx |\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi}(Z\alpha m)^3. \tag{17.35}$$

Формула (17.6), или

$$\delta E = e \int (d\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r})^*\, i\gamma_5 \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r}), \tag{17.36}$$

дает для энергетического сдвига

$$\delta E = e \int (d\mathbf{r}) f(r) g(r) v^* i [\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}), \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}] v =$$
$$= 2e \int (d\mathbf{r}) f(r) g(r) v^* \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) v, \qquad (17.37)$$

где

$$\mathbf{n}\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^2}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{n}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mu}) \rightarrow \frac{2}{3}\frac{\boldsymbol{\mu}}{4\pi r^2}, \qquad (17.38)$$

причем на самом последнем этапе здесь проведено усреднение по всем направлениям. Таким образом, в собственном состоянии оператора $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{S}$ мы имеем

$$\delta E = \frac{4}{3} e \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mu} \int_0^\infty dr f(r) g(r). \qquad (17.39)$$

Проще всего разделить входящий сюда радиальный интеграл на равный единице нормировочный интеграл (17.34):

$$\int_0^\infty dr\, fg = \frac{1}{4\pi}\frac{\gamma}{1+\gamma^2}\frac{\int_0^\infty dr f^2}{\int_0^\infty dr r^2 f^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{\gamma}{1+\gamma^2}(2Z\alpha m)^2\frac{\Gamma(1-2Z\alpha\gamma)}{\Gamma(3-2Z\alpha\gamma)} =$$
$$= \frac{1}{4m}|\psi(0)|^2\frac{1}{(1-Z\alpha\gamma)(1-2Z\alpha\gamma)}, \qquad (17.40)$$

в результате чего получим

$$\delta E = \frac{e}{2m}\frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mu}|\psi(0)|^2\frac{1}{(1-Z\alpha\gamma)(1-2Z\alpha\gamma)}. \qquad (17.41)$$

При малых $Z\alpha$ релятивистский поправочный множитель равен

$$\frac{1}{(1-Z\alpha\gamma)(1-2Z\alpha\gamma)} = 1 + 3Z\alpha\gamma \approx 1 + \frac{3}{2}(Z\alpha)^2. \qquad (17.42)$$

Взятый сам по себе, этот эффект порядка $(Z\alpha)^2$ не уменьшает, а увеличивает расхождение между значениями (17.19) и (17.20). Он приводит к увеличению соответствующей разницы до 0,19 МГц.

Поэтому перейдем к поправке порядка $Z\alpha^2$, т. е. к поправке, которая составляет долю порядка $Z\alpha$ от величины (17.20). Если собрать воедино все сведения, полученные в предыдущем параграфе, то сделать это не так уж трудно. Прежде всего следует учесть поляризацию вакуума. По сравнению со случаем кулоновского поля здесь она оказывается гораздо более существенной, что обусловлено большей концентрацией ядерного магнитного поля. Изменение векторного потенциала A^μ на δA^μ сдвигает значения энергий на величину, даваемую формулой

$$\delta E = -\frac{1}{2m}\int (d\mathbf{r})\,\psi^*\gamma^0(2eq\Pi\,.\,\delta A + eq\sigma\delta F)\,\psi, \qquad (17.43)$$

которая является обобщением выражения (17.9). При этом характер изменения поля находит свое выражение в записи

$$\delta A(\mathbf{r}) = \int (d\mathbf{r}')\,\delta\mathscr{D}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')J(\mathbf{r}'), \qquad (17.44)$$

или

$$\delta A(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2\delta\mathscr{D}(\mathbf{p})A(\mathbf{p}). \qquad (17.45)$$

Нужно сразу же, видимо, отметить, что при пренебрежении зависимостью волновой функции ψ от импульса [т. е. при использовании только $\psi(0)$] в противоположность случаю кулоновского поля никакой модификации в связи с магнитным полем за счет поляризации вакуума не возникает. Это обусловлено тем, что величина

$$\delta\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2\delta\mathscr{D}(\mathbf{p})\mathbf{H}(\mathbf{p}) \to \mathbf{p}^2\delta\mathscr{D}(\mathbf{p})\,\frac{2}{3}\,\mu \qquad (17.46)$$

при $\mathbf{p} = 0$ обращается в нуль. Поэтому интерес для нас представляет только итерированное поле

$$\psi = \psi(0) + \frac{1}{p^2+m^2}(2eqp\,.\,A + eq\sigma F)\,\psi(0). \qquad (17.47)$$

Отсюда для энергетического сдвига получаем

$$\delta E = -\frac{1}{m}\,\psi(0)^*(2eqp\delta A + eq\sigma\delta F)\frac{1}{p^2+m^2}(2eqpA + eq\sigma F)\,\psi(0) =$$

$$= -\frac{e^2}{m}\,\psi(0)^*\left(2p\delta A\frac{1}{p^2+m^2}\sigma F + \sigma\delta F\frac{1}{p^2+m^2}2pA\right)\psi(0), \qquad (17.48)$$

где учтено, что два члена с перекрестными произведениями дают равные вклады, и выделена линейная зависимость от спина. В процессе данного анализа члены, квадратичные по спину, можно отбросить, так как комбинация

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{E} \qquad (17.49)$$

дает нуль в состоянии $\psi(0)$, для которого $\gamma^{0\prime} = +1$. Приведенное выражение описывает влияние магнитного поля на поляризацию вакуума кулоновским полем и влияние кулоновского поля на поляризацию вакуума магнитным полем. Два эти эффекта оказываются одинаковыми, поскольку оба они приводят к одному и тому же члену

$$-2mA^0\mathbf{p}^2\delta\mathscr{D}\,\frac{1}{p^2+m^2}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}. \qquad (17.50)$$

Таким образом,

$$\delta E_{\text{пол. вак}} = 16\pi\alpha \frac{2}{3} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mu} \,|\, \psi(0)\,|^2\, Ze \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2}\, \delta\mathscr{D}(\mathbf{p}), \tag{17.51}$$

где [ср. с (3.28)]

$$\delta\mathscr{D}(\mathbf{p}) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dv \frac{v^2\left(1 - \frac{1}{3} v^2\right)}{m^2 + \mathbf{p}^2 \frac{1 - v^2}{4}}. \tag{17.52}$$

Все энергетические сдвиги такого рода, отвечающие сверхтонкой структуре, мы будем относить к нерелятивистскому значению (17.12), обозначая его как

$$F = \frac{e}{2m} \frac{2}{3} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mu} \,|\, \psi(0)\,|^2. \tag{17.53}$$

Таким образом,

$$\frac{\delta E_{\text{пол. вак}}}{F} = 32\pi Z\alpha m \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2}\, \delta\mathscr{D}(\mathbf{p}) =$$

$$= Z\alpha^2 \frac{4}{\pi} \int_0^1 dv\, v^2 \left(1 - \frac{1}{3} v^2\right) (1 - v^2)^{-1/2} = \frac{3}{4} Z\alpha^2. \tag{17.54}$$

Далее мы будем действовать так же, как в § 16, но анализ упрощается тем, что теперь не возникает инфракрасных особенностей (благодаря короткодействующему характеру магнитного поля). Поэтому мы прибегнем непосредственно к степенному разложению, используя λ-схему только в первом слагаемом выражения (16.7), с тем, чтобы выделить часть [формула (16.12)], зависящую от поля неявным образом. Последняя не дает вклада в энергетические сдвиги. При этом нужно иметь в виду лишь одно обстоятельство. Наш расчет преследует вполне определенную цель, а именно отыскание поправок к такому описанию электрона, в котором уже учтена добавка $\alpha/2\pi$ к магнитному моменту. Поэтому те два члена, которые приводят к эффекту порядка $\alpha/2\pi$, должны быть отброшены.

Начнем с выражения (16.68) и воспроизведем его здесь, добавив дополнительный постоянный множитель:

$$-\int ds\, s\, du\, (1 + u)\, (-2m)\, e^2 I\, (\lambda^2)_A =$$

$$= -i \frac{\alpha}{2\pi} m \int \frac{1}{2} dv\, du\, (1 + u) \times$$

$$\times \frac{u(1 - u)(p' + p'')\, eqA + [u(1 - u) + \lambda^2 u^2]\, eq\sigma F}{D_\lambda}. \tag{17.55}$$

Взяв первую разность по λ, получим вклад в энергетический сдвиг, равный

$$\delta_1 E = \delta_1' E + \delta_1'' E, \tag{17.56}$$

где

$$\delta_1' E = \frac{\alpha}{2\pi} m \int \frac{1}{2} dv\, du\, (1+u)\, \psi^* \gamma^0 u (1-u) \times \\ \times [(p'+p'')\, eqA + eq\sigma F] \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_0}\right) \psi \tag{17.57}$$

и

$$\delta_1'' E = \frac{\alpha}{2\pi} m \int \frac{1}{2} dv\, du\, (1+u)\, \psi^* \gamma^0 u^2 eq\sigma F \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{m^2 u^2}\right) \psi. \tag{17.58}$$

В последнем слагаемом мы отбросили член, дающий вклад в магнитный момент в случае медленно меняющихся полей [он эквивалентен первому члену в правой части соотношения (16.17)]. Подставив в формулу (17.57) итерированное поле частиц и выделив линейный по спину член, будем иметь

$$\delta_1' E = \frac{2\alpha}{\pi} m \int \frac{1}{2} dv\, du\, (1+u)\, u (1-u)\, \psi(0)^* (p'+p'')\, eqA \times \\ \times \frac{1}{p^2+m^2} \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_0}\right) eq\sigma F \psi(0) = \\ = F 32 Z\alpha^2 m^3 \int \frac{1}{2} dv\, du\, (1+u)\, u (1-u)\, u^2 \frac{1-v^2}{4} \times \\ \times \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_0 D_1}, \tag{17.59}$$

или, имея в виду соответствующим образом модифицированные формулы (15.72) и (15.73),

$$\frac{\delta_1' E}{F} = Z\alpha^2 \frac{8}{\pi} \frac{1}{3} \int_0^1 dw\, w^{3/2} \int_0^1 du\, u^{-1/2} (1-u^2)(1-uw)^{-1/2}. \tag{17.60}$$

Входящий сюда двойной интеграл уже встречался нам раньше, что вообще является характерной особенностью данного расчета, и мы получаем

$$\frac{\delta_1' E}{F} = (2 - 2\ln 2)\, Z\alpha^2. \tag{17.61}$$

Обратившись к формуле (17.58), мы увидим, что

$$\delta_1'' E = \frac{\alpha}{\pi} m \int \frac{1}{2} dv\, du\, (1+u)\, u^2 \psi(0)^* (p'+p'')\, eqA \times \\ \times \frac{1}{p^2+m^2} eq\sigma F \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{m^2 u^2}\right) \psi(0) = \\ = F 16 Z\alpha^2 m \int dw\, du\, (1+u)\, uw (1-uw) \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_1}, \tag{17.62}$$

откуда

$$\frac{\delta_1'' E}{F} = Z\alpha^2 \frac{4}{\pi} \int dw\, du\, (1+u)\, u^{-1/2} w^{1/2} (1-uw)^{1/2} = \\ = \left(\frac{5}{4} + \ln 2\right) Z\alpha^2. \tag{17.63}$$

Сумма двух составляющих равна

$$\frac{\delta_1 E}{F} = \left(\frac{13}{4} - \ln 2\right) Z\alpha^2. \tag{17.64}$$

Таким образом, она совпадает с окончательным результатом (без учета поляризации вакуума), взятым с обратным знаком.

Линейный по спину член в формуле (16.83) приводит по аналогии с формулой (16.85) к выражению

$$-\int ds\, s\, du\, (1+u)\, \psi^* \gamma^0 e^2 I\, (\lambda^2)_{A^2} \psi = -i8Z\alpha^2 \int \frac{1}{2}\, dv\, \frac{1-v}{2}\, du\, (1-u^2) \times \\ \times (1-u+\lambda^2 u) \left(-m^2 \frac{d}{dm^2}\right) \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_\lambda}, \tag{17.65}$$

которое дает следующий вклад в энергетический сдвиг:

$$\frac{\delta_2 E}{F} = -16 Z\alpha^2 m \int dw\, (1-w)\, du\, (1-u^2) \times \\ \times \left(-m^2 \frac{d}{dm^2}\right) \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1-u}{D_0}\right). \tag{17.66}$$

Разобьем его на две части:

$$\frac{\delta_2' E}{F} = -16 Z\alpha^2 m \int dw\, (1-w)\, du\, (1-u^2) \left(-m^2 \frac{d}{dm^2}\right) \times \\ \times \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_0}\right) = -Z\alpha^2 \frac{2}{\pi} \times \\ \times \int dw\, (1-w)\, w^{-1/2}\, du\, u^{-3/2} (1-u^2) \left[\frac{1}{(1-uw)^{1/2}} - \frac{1}{(1-u)^{1/2}}\right] = \\ = Z\alpha^2 \frac{2}{\pi} \int_0^1 dw \int_0^1 du \left(w^{1/2} - \frac{1}{3} w^{3/2}\right) u^{-1/2} (1-u^2)(1-uw)^{-3/2} = \\ = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3} - 2\ln 2\right) Z\alpha^2 \tag{17.67}$$

и

$$\frac{\delta_2'' E}{F} = -16 Z\alpha^2 m \int dw\, (1-w)\, du\, u\, (1-u^2) \left(-m^2 \frac{d}{dm^2}\right) \times \\ \times \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_0} = -Z\alpha^2 \frac{2}{\pi} \int_0^1 dw\, w^{-1/2} (1-w) \times \\ \times \int_0^1 du\, u^{-1/2} (1-u)^{-1/2} (1-u^2) = -\frac{5}{3} Z\alpha^2. \tag{17.68}$$

Их сумма равна

$$\frac{\delta_2 E}{F}=\left(\frac{1}{2}-2\ln 2\right)Z\alpha^2. \tag{17.69}$$

Складывая эту величину с $\delta_1 E$, получаем полный вклад первого слагаемого (I) в формуле (16.7):

$$\frac{\delta_{\mathrm{I}} E}{F}=\left(\frac{15}{4}-3\ln 2\right)Z\alpha^2. \tag{17.70}$$

При вычислении второго слагаемого будем исходить из выражения (16.108), взятого при $\lambda = 1$:

$$-e^2\int ds\,s\,du(1-u)\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\psi^*\gamma^0 i\,[\Pi,\,[\exp(-is\mathcal{X}),\,\gamma]]\,\psi=$$
$$=\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{1}{2}\,dv\,du\,u(1-u)\,\psi^*\gamma^0\,\frac{eq\gamma J}{D_1}\,\psi, \tag{17.71}$$

хотя заметим, что векторный потенциал в Π не дает спинового члена. Подставив итерированное поле, получим энергетический сдвиг

$$\delta_{\mathrm{II}}E=\frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{1}{2}\,dv\,du\,u(1-u)\,\psi(0)^*\times$$
$$\times\frac{1}{D_1}\left(eq\gamma J\,\frac{1}{p^2+m^2}\,eq\sigma F+eq\sigma F\,\frac{1}{p^2+m^2}\,eq\gamma J\right)\psi(0). \tag{17.72}$$

Здесь нужно быть внимательным и иметь в виду, что в каждом произведении содержатся два вклада, равные

$$-\gamma^0 J^0(\quad)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{J}(\quad)\,i\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{E}, \tag{17.73}$$

или, поскольку $\gamma^0\psi(0)=\psi(0)$,

$$-J^0(\quad)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}+\boldsymbol{\sigma}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H})\cdot(\quad)\,\mathbf{E}. \tag{17.74}$$

С учетом векторного тождества

$$\boldsymbol{\sigma}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H})-\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H})+\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{H}), \tag{17.75}$$

а также равенств

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=J^0,\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H}=0,\quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=0, \tag{17.76}$$

которыми следует воспользоваться после интегрирования по частям, мы получаем, что два слагаемых в выражении (17.73) эквивалентны, так как порядок перемножения несуществен для рассматриваемого матричного элемента. В результате имеем

$$\delta_{\mathrm{II}}E=-\frac{2\alpha}{\pi}\int\frac{1}{2}\,dv\,du\,u(1-u)\,\psi(0)^*\frac{1}{D_1}\,eqJ^0\,\frac{1}{p^2+m^2}\,eq\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}\psi(0)=$$
$$=-16Z\alpha^2 mF\int dw\,du\,u(1-u)\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\mathbf{p}^2}\,\frac{1}{D_1}, \tag{17.77}$$

или

$$\frac{\delta_{II}E}{F} = -Z\alpha^2 \frac{4}{\pi} \int_0^1 dw \int_0^1 du\, w^{-1/2} u^{-1/2} (1-u)(1-uw)^{-1/2} = $$
$$= (2 - 8 \ln 2)\, Z\alpha^2. \qquad (17.78)$$

С третьим слагаемым в формуле (16.7) мы поступим аналогично тому, как это делалось при переходе от (16.112) к (16.114), причем здесь второй вклад в магнитный момент $\alpha/2\pi$ является уже лишним. Это дает

$$\delta_4 E = -\frac{\alpha}{\pi} m \int \frac{1}{2} dv\, du\, u^2 \psi^* \gamma^0 eq\sigma F \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{m^2 u^2}\right) \psi =$$
$$= -32 Z\alpha^2 m F \int dw\, du\, uw (1-uw) \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{1}{D_1}, \qquad (17.79)$$

или

$$\frac{\delta_4 E}{F} = -Z\alpha^2 \frac{8}{\pi} \int_0^1 dw \int_0^1 du\, w^{1/2} u^{-1/2} (1-uw)^{1/2}, \qquad (17.80)$$

куда входит тот же интеграл, что и в формуле (16.115). Таким образом,

$$\frac{\delta_4 E}{F} = -3 Z\alpha^2. \qquad (17.81)$$

Обращаясь к члену, который явным образом квадратичен по полю и линеен по спину, вспомним, что при образовании двойного коммутатора

$$\frac{1}{2} mu [\gamma, [\exp(-is\chi), \gamma]]$$

спиновый член, согласно соотношению (16.113), приобретает множитель 8. Поэтому его можно получить из соответствующей комбинации, входящей в первое слагаемое формулы (16.7), если произвести подстановку

$$1 + u \to -2u \qquad (17.82)$$

и положить $\lambda = 1$. Выделив подобное выражение из (17.67), получим

$$\frac{\delta_5 E}{F} = Z\alpha^2 \frac{4}{\pi} \int_0^1 dw \int_0^1 d\, uw^{-1/2} (1-w)\, u^{-1/2} (1-u)(1-uw)^{-1/2} =$$
$$= (-6 + 12 \ln 2)\, Z\alpha^2. \qquad (17.83)$$

Прибавляя к нему (17.81), будем иметь

$$\frac{\delta_{III} E}{F} = (-9 + 12 \ln 2)\, Z\alpha^2. \qquad (17.84)$$

Первые три слагаемых, приводящие к формулам (17.70), (17.78) и (17.84), дают

$$\frac{(\delta_{\mathrm{I}}+\delta_{\mathrm{II}}+\delta_{\mathrm{III}})\,E}{F}=\left(-\frac{13}{4}+\ln 2\right)Z\alpha^2. \qquad (17.85)$$

Эта величина отличается от одного отдельного вклада (17.64) только знаком. Учитывая сделанное там замечание, можно заключить, что она совпадает с полным результатом. И это действительно так, поскольку оказывается, что четвертое слагаемое в (16.7) приводит к нулевому вкладу. Было бы весьма приятно, если бы удалось доказать это утверждение одним виртуозным росчерком, но мы вынуждены воспользоваться более прозаическими средствами. Энергетический сдвиг, возникающий благодаря слагаемому в (16.8) с двойным коммутатором, фактически уже получен — он дается формулой (16.117):

$$\delta_6 E=\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{1}{2}\,dv\,du\,u^2\psi^*\gamma^0\,\frac{eq\gamma J}{D_1}\,\psi=$$
$$=-8Z\alpha^2 mF\int\frac{1}{2}\,dv\,du\,u^2\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\mathbf{p}^2}\,\frac{1}{D_1}, \qquad (17.86)$$

откуда

$$\frac{\delta_6 E}{F}=-Z\alpha^2\,\frac{2}{\pi}\int_0^1 dw\int_0^1 du\,w^{-1/2}(1-uw)^{-1/2}u^{1/2}=-Z\alpha^2. \qquad (17.87)$$

Рассмотрим теперь слагаемое в формуле (16.123), линейное по полю, воспроизведя его здесь для удобства в форме энергетического сдвига:

$$-i\int ds\,s\,du\,e^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\,\psi^*\gamma^0\gamma^\mu\gamma\,.\,((k-u\Pi)\,.\exp(-is\chi))_A\,\gamma_\mu=$$
$$=\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{1}{2}\,dv\,v\,du\,u\psi^*\gamma^0\left[-u^2veq\gamma J+u(1-u)\,ieq\gamma F\,(p'+p'')\right]\frac{1}{D_1}\,\psi. \qquad (17.88)$$

Первую из двух его компонент

$$\delta_7' E=-\frac{\alpha}{4\pi}\int\frac{1}{2}\,dv\,v^2\,du\,u^3\psi^*\gamma^0\,\frac{eq\gamma J}{D_1}\,\psi \qquad (17.89)$$

можно вычислить путем выкладок, аналогичных тем, которые проводились при выводе (17.77) из (17.71). Производя соответствующие подстановки, получаем

$$\delta_7' E=8Z\alpha^2 mF\int dw\,du\,(2w-1)^2u^3\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\mathbf{p}^2}\,\frac{1}{D_1}. \qquad (17.90)$$

Для удобства еще до дальнейших преобразований объединим эту величину с $\delta_7'' E$.

При анализе второго слагаемого в формуле (17.88) есть некоторая опасность запутаться в обозначениях. Во-первых, напомним, что p' — индекс строки, а p'' — индекс столбца в стандартном матричном элементе. Поэтому, если мы хотим употребить индекс p' для задания импульса в состоянии $\psi(0)$, то в одном из двух слагаемых, получаемых путем подстановки итерированного поля, нужно произвести транспозицию. Во-вторых, следует обратить внимание и на условия, принятые при преобразовании выражения для D_λ от вида (15.60) к виду (15.62). До сих пор мы избегали подобного балансирования на канате благодаря тому, что все подынтегральные выражения (кроме D_λ) были четными функциями переменной v. Второе же слагаемое в формуле (17.88) не принадлежит к этой категории. Теперь видно, что

$$\psi^*\gamma^0 \frac{v}{D_1} ieq\gamma F(p'+p'')\psi =$$
$$= \psi(0)^* ieq\gamma F(p'+p'')\frac{v}{D_1(-v)}\frac{1}{p''^2+m^2} eq\sigma F\psi(0) +$$
$$+\psi(0)^* eq\sigma F\frac{1}{p''^2+m^2}\frac{v}{D_1(v)} ieq\gamma F(p'+p'')\psi(0), \qquad (17.91)$$

где временно мы написали $D_1(v)$ с тем, чтобы указать, что D_1 дается формулой (15.64), в которой

$$\mathbf{p}^2 = (p'-p'')^2 = p''^2 + m^2. \qquad (17.92)$$

Заменим в первом слагаемом формулы (17.91) переменную интегрирования v на $-v$ и воспользуемся преобразованиями (16.141) и (16.142). Замечая, что два слагаемых в формуле (17.91) эффективно равны друг другу, и учитывая эквивалентность двух спиновых комбинаций, отмеченную в связи с выражением (17.73), получаем

$$\psi^*\gamma^0 \frac{v}{D_1} ieq\gamma F(p'+p'')\psi \to -2v\psi(0)^*\Big[eq\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}\frac{1}{p''^2+m^2}\frac{1}{D_1}eqJ^0 +$$
$$+ ieq\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{E}\frac{1}{p''^2+m^2}\frac{1}{D_1}eq\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{J}\Big]\psi(0) \to$$
$$\to -4v\psi(0)^* eq\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}\frac{1}{p''^2+m^2}\frac{1}{D_1}eqJ^0\psi(0). \qquad (17.93)$$

Таким образом, возникает вклад

$$\delta_7''E = -8Z\alpha^2 mF\int dw\,(2w-1)\,du\,u^2(1-u)\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2}\frac{1}{D_1}, \qquad (17.94)$$

сложив который с (17.90) получим

$$\frac{\delta_7 E}{F} = -8Z\alpha^2 m\int dw\,du\,(2w-1)\,u^2(1-2uw)\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{p}^2}\frac{1}{D_1} =$$
$$= -Z\alpha^2\frac{2}{\pi}\int_0^1 dw\int_0^1 du\,w^{-1/2}(2w-1)\,u^{1/2}(1-2uw)(1-uw)^{-1/2} =$$
$$= (-1+2\ln 2)Z\alpha^2. \qquad (17.95)$$

Имеется, наконец, явно квадратичный член, который строится из линейных множителей (16.132) и (16.133). Поскольку нам нужна линейная по спину зависимость, интересующие нас члены получаются путем умножения $-ueq\sigma F$ на два бесспиновых слагаемых выражения (16.132) и путем перемножения спиновых слагаемых. Последнее произведение представляет собой исключение из правила, ибо оно содержит также комбинацию с γ^μ в качестве сомножителя. Отметим сначала, что

$$\gamma^\nu\gamma^\mu.\sigma F\gamma_\nu = -2g^{\mu\nu}\sigma F.\gamma_\nu = -2\gamma^\mu.\sigma F, \tag{17.96}$$

так как

$$\gamma_\nu\sigma F\gamma_\nu = 0. \tag{17.97}$$

Опустив несущественные коэффициенты и проведя возможные интегрирования по частям, мы для спинового произведения будем иметь

$$\begin{aligned}\gamma^\mu.(\sigma F\partial_\mu\sigma F) &= \gamma^k.(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}\partial_k(-i)\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{E} + (-i)\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{E}\partial_k\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}) = \\ &= \frac{1}{2}i\gamma^0[\gamma^k\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}\gamma^l\partial_k E_l + \partial_k E_l\gamma^l\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}\gamma^k - \\ &\quad - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}\partial_k E_l\gamma^l\gamma^k - \gamma^k\gamma^l\partial_k E_l\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}].\end{aligned} \tag{17.98}$$

Следующий шаг основан на равенстве $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = 0$, эквивалентном свойству симметрии

$$\partial_k E_l = \partial_l E_k. \tag{17.99}$$

Оно позволяет произвести замену

$$\gamma^k\gamma^l \to \frac{1}{2}\{\gamma^k, \gamma^l\} = -\delta^{kl} \tag{17.100}$$

и применить соотношение $[\boldsymbol{\gamma} = i\gamma^0\gamma_5\boldsymbol{\sigma}]$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(\gamma^k\sigma_m\gamma^l + \gamma^l\sigma_m\gamma^k) &= \frac{1}{2}(\sigma_k\sigma_m\sigma_l + \sigma_l\sigma_m\sigma_k) = \\ &= \delta_{km}\sigma_l + \delta_{lm}\sigma_k - \delta_{kl}\sigma_m,\end{aligned} \tag{17.101}$$

вытекающее непосредственно из соотношения антикоммутативности

$$\frac{1}{2}\{\sigma_k, \sigma_l\} = \delta_{kl}. \tag{17.102}$$

Учитывая то дополнительное обстоятельство, что $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H} = 0$, можно будет произвести эффективную подстановку

$$\gamma^\mu.(\sigma F\partial_\mu\sigma F) \to 2i\gamma^0\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}J^0, \tag{17.103}$$

а значит,

$$\gamma^\nu\gamma^\mu.(\sigma F\partial_\mu\sigma F)\gamma_\nu \to -4i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}J^0. \tag{17.104}$$

В качестве аналога выражения (16.138) теперь мы имеем

$$e^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \gamma.((k-u\Pi).\exp(-isX))_{A^2} \gamma_\mu =$$
$$= -\frac{\alpha}{4\pi} u \int dw\, w \frac{1-w}{2} \Big\{ 2ueq\sigma F \exp(-isD_1) \times$$
$$\times \Big[-2u^2 \Big(\frac{1}{2}-w\Big) ieq\gamma J + u(1-u) eq\gamma F (p'+p'') \Big] +$$
$$+ u^2 4ieq\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H} \exp(-isD_1) eqJ^0 \Big\} -$$
$$-\frac{\alpha}{4\pi} u \int dww \frac{w-1}{2} \Big\{ \Big[2u^2 \Big(\frac{1}{2}-w\Big) ieq\gamma J +$$
$$+ u(1-u) eq\gamma F (p'+p'') \Big] \exp(-isD_1)\, 2ueq\sigma F -$$
$$-u^2 4ieq\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H} \exp(-isD_1) eqJ^0 \Big\}. \qquad (17.105)$$

Те же, что и раньше, выкладки дают следующее выражение для энергетического сдвига:

$$-i \int ds\, s\, du e^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \psi^* \gamma^0 \gamma^\mu \gamma.((k-u\Pi).\exp(-isX))_{A^2} \gamma_\mu \psi =$$
$$= \frac{\alpha}{2\pi} \int dw\, w \frac{1-w}{2} du\, u\psi(0)^* \frac{1}{D_1^2} \times$$
$$\times [4u^2(1-2uw) eq\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H} eqJ^0 + 4u^2 eq\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H} eqJ^0]\, \psi(0), \qquad (17.106)$$

или

$$\frac{\delta_8 E}{F} = 16 Z\alpha^2 m \int dw\, du\, w(1-w) u^3 (1-uw) \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{D_1^2} =$$
$$= Z\alpha^2 \frac{2}{\pi} \int_0^1 dw \int_0^1 du\, w^{-1/2} (1-w)\, u^{1/2} (1-uw)^{-1/2} =$$
$$= (2-2\ln 2) Z\alpha^2. \qquad (17.107)$$

Итак, действительно сумма вкладов (17.87), (17.95) и (17.107) равна нулю:

$$\delta_{\rm IV} E = 0. \qquad (17.108)$$

Окончательный результат, который получится, если к (17.85) добавить энергетический сдвиг (17.54), обусловленный поляризацией вакуума, таков:

$$\frac{\delta E}{F} = -\Big(\frac{5}{2} - \ln 2\Big) Z\alpha^2. \qquad (17.109)$$

Взятый сам по себе, он уменьшает теоретическое значение сверхтонкого расщепления в водороде на 0,137 МГц. Комбинация же релятивистского эффекта, описываемого формулой (17.42), с только что вычисленным электродинамическим эффектом приводит к сравнительно небольшому уменьшению

$$\mathrm{H}:\quad -(1-\ln 2)\,\alpha^2 = -1{,}64\cdot 10^{-5}. \tag{17.110}$$

Оно соответствует уменьшению на 0,023 МГц, и в итоге теоретическое значение (17.20) заменяется величиной

$$\mathrm{H}:\quad \Delta E_{\text{рел}+\alpha+Z\alpha^2} = 1420{,}46\ \text{МГц}. \tag{17.111}$$

Что можно сказать об оставшемся расхождении в 0,05 МГц? Совершенно очевидно, что тут мы уже выходим за пределы области чистой электродинамики и вступаем в область сильных взаимодействий, которыми определяются свойства протона.

Из экспериментов по рассеянию электронов с высокими энергиями известно, что с точки зрения своих электрических и магнитных характеристик протон действует как некий объект, размазанный по определенному пространственному объему. Другими словами, имеются электрический и магнитный формфакторы, которые почти полностью должны определяться неэлектромагнитными взаимодействиями, ассоциируемыми с субъядерными частицами, с которыми связан протон. Из качественных соображений ясно, что отказ от точечности заряда и точечности диполя должен приводить к уменьшению величины взаимодействия, ответственного за сверхтонкое расщепление. При таком подходе энергетические уровни сдвигаются в том направлении, которое и нужно для устранения оставшегося расхождения. Оценим величину этого эффекта.

В нерелятивистской теории распределение ядерного магнетизма $\rho_m(\mathbf{r})$, которое до сих пор бралось в виде дельта-функции, интегрируется с квадратом электронной волновой функции. В соответствии с этим теперь мы приходим к замене

$$|\psi(0)|^2 \to \int (d\mathbf{r})\,\rho_m(\mathbf{r})\,|\psi(\mathbf{r})|^2. \tag{17.112}$$

На малых расстояниях поведение волновой функции определяется электрическим зарядом нуклонов. Если его распределение описывается функцией $\rho_e(\mathbf{r})$, то мы должны учесть и это обстоятельство:

$$1-\frac{r}{a_0} \to 1-\frac{1}{a_0}\int (d\mathbf{r}')\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,\rho_e(\mathbf{r}'). \tag{17.113}$$

Отметим, что за пределами распределения заряда никакие изменения не возникают. Как результат совместного действия указанных эффектов получаем

$$|\psi(0)|^2 \to (1-2Z\alpha mR)\,|\psi(0)|^2, \tag{17.114}$$

где R — средний нуклонный радиус:

$$R=\int (d\mathbf{r})(d\mathbf{r}')\,\rho_m(\mathbf{r})\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,\rho_e(\mathbf{r}'). \tag{17.115}$$

Представим его в иной форме, для чего воспользуемся формулой (15.48):

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=-8\pi\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right]\frac{1}{\mathbf{p}^2-\varepsilon^2}\,\frac{1}{\mathbf{p}^2}, \tag{17.116}$$

откуда

$$R=-8\pi\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\mathbf{p}^2-\varepsilon^2}\,\frac{1}{\mathbf{p}^2}\,\rho_m(-\mathbf{p})\,\rho_e(\mathbf{p})=$$
$$=8\pi\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right)^2\left[1-\rho_m(-\mathbf{p})\,\rho_e(\mathbf{p})\right], \tag{17.117}$$

или

$$R=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty dp\,\frac{1}{p^2}\left[1-\rho_m(p)\,\rho_e(p)\right]. \tag{17.118}$$

Мы воспользовались здесь интегралом в смысле главного значения

$$\int_0^\infty dp\,\frac{1}{p^2-\varepsilon^2}=0 \tag{17.119}$$

и сферической симметрией функций распределения.

Экспериментальные данные о протоне приближенно описываются формулой

$$\rho_m(p)\approx\rho_e(p)\approx\frac{1}{\left(1+\dfrac{p^2}{M_0^2}\right)^2}, \tag{17.120}$$

где

$$M_0\approx 0{,}90\,M_\mathrm{p}. \tag{17.121}$$

Вычислив интеграл в формуле (17.118), получим

$$R=\frac{35}{8}\,\frac{1}{M_0}=1{,}0\cdot 10^{-13}\ \text{см}, \tag{17.122}$$

откуда вытекает следующее относительное уменьшение сверхтонкого расщепления:

$$\mathrm{H}:\quad \frac{35}{4}\,\alpha\,\frac{m}{M_0}=3{,}8\cdot 10^{-5}. \tag{17.123}$$

В абсолютных единицах это уменьшение составляет 0,05 МГц, и с точностью, которую мы здесь приняли, теория и эксперимент полностью согласуются.

Раз уж мы завели разговор о конечных размерах ядра, оценим заодно и влияние этого эффекта на относительное смещение s-

и p-уровней. Энергия кулоновского взаимодействия изменяется на

$$\delta V(\mathbf{r}') = -Z\alpha \int (d\mathbf{r}) \left[\frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} - \frac{1}{r'}\right] \rho_e(\mathbf{r}), \qquad (17.124)$$

что приводит к энергетическому сдвигу

$$\delta E = \int (d\mathbf{r}')\, \delta V(\mathbf{r}')\, |\psi(\mathbf{r}')|^2 \approx -Z\alpha\, |\psi(0)|^2 \int (d\mathbf{r})(d\mathbf{r}') \times$$
$$\times \left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{r'}\right] \rho_e(\mathbf{r}). \qquad (17.125)$$

Комбинируя свойство

$$-\nabla^2 \int (d\mathbf{r}') \left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{r'}\right] = 4\pi \qquad (17.126)$$

с равенством нулю интеграла при $\mathbf{r} = 0$, заключаем, что

$$\int (dr') \left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{r'}\right] = -\frac{2\pi}{3} r^2. \qquad (17.127)$$

Это дает

$$\delta E = \frac{2}{3} \pi Z\alpha\, |\psi(0)|^2 \langle r^2 \rangle, \qquad (17.128)$$

где

$$\langle r^2 \rangle = \int (d\mathbf{r})\, r^2 \rho_e(\mathbf{r}) = -\nabla_p^2 \rho_e(p)|_{p=0} =$$
$$= \frac{12}{M_0^2} = (0{,}81 \cdot 10^{-13}\ \text{см})^2. \qquad (17.129)$$

Существенным энергетический сдвиг оказывается только в s-состояниях, причем ns-уровень смещается вверх на

$$\delta E_{ns} = \frac{16}{n^3} Z^4 \alpha^2 \frac{m^2}{M_0^2}\, \mathrm{Ry}. \qquad (17.130)$$

Для $2s$-уровня водорода это составляет

$$\delta E_{2s_{1/2}} = 0{,}13\ \text{МГц}, \qquad (17.131)$$

и в результате еще более уменьшается расхождение между теоретическим значением, равным теперь

$$\text{H:}\quad E_{2s_{1/2}} - E_{2p_{1/2}} = 1057{,}81\ \text{МГц}, \qquad (17.132)$$

и экспериментальным значением $1057{,}90 \pm 0{,}10$ МГц. Но мы еще раз хотим предупредить, что пока еще не учтены эффекты, которые в принципе более существенны, чем только что рассмотренный (хотя и можно утверждать, что они в значительной мере взаимно компенсируются).

Глава 5 | ЭЛЕКТРОДИНАМИКА II

Выше мы уже занимались какое-то время вопросами, связанными с учетом двухчастичного обмена. Но при этом остался неисследованным ряд важных моментов. Сюда относится очевидная проблема распространения соответствующих методов на процессы более сложного многочастичного обмена. Кроме того, в практических приложениях полученных результатов мы ограничивались в сущности идеализированным случаем частицы, движущейся в заданном поле, избегая релятивистской проблемы двух тел. Данная глава посвящена исследованиям проблем того и другого типа. Правда, чтобы не было чрезмерного скопления зачастую весьма громоздких расчетов, связанных с учетом процессов многочастичного обмена высших порядков, такого рода анализ будет вкраплен на фоне двухчастичного случая (отчасти в соответствии с потребностями сравнения с экспериментом).

§ 1. ДВУХЧАСТИЧНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ АНАЛИЗ

В качестве подготовительного этапа в построении двухчастичной релятивистской теории полезно сначала исследовать более простой нерелятивистский случай. Рассмотрим два сорта частиц, нумеруемых индексами 1 и 2 (не следует их путать с встречающимися ниже причинными индексами). Описывающая эти частицы вакуумная амплитуда в отсутствие взаимодействия имеет вид

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{\eta} = \exp [iW(\eta)],$$

$$W(\eta)_{\text{невзаим}} = -\int (d\mathbf{r})\, dt\, (d\mathbf{r}')\, dt' \eta^* (\mathbf{r}t)\, G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\, \eta(\mathbf{r}'t')\,|_1 - $$
$$- \int (d\mathbf{r})\, dt\, (d\mathbf{r}')\, dt' \eta^* (\mathbf{r}t)\, G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\, \eta(\mathbf{r}'t')\,|_2. \qquad (1.1)$$

Чтобы не выписывать все пространственно-временные координаты, мы в подобных выражениях часто будем пользоваться следующими обозначениями:

$$W(\eta)_{\text{невзаим}} = -\int d1\, d1' \eta^*(1)\, G(1, 1')\, \eta(1') -$$
$$- \int d2\, d2' \eta^*(2)\, G(2, 2')\, \eta(2'). \qquad (1.2)$$

Тот конкретный член в разложении экспоненты $\exp[iW]$, который описывает две частицы, по одной каждого сорта, равен

$$-\int d1 \ldots d2' \eta^*(2)\, \eta^*(1)\, G(1, 1')\, G(2, 2')\, \eta(1')\, \eta(2'), \quad (1.3)$$

откуда видно, что функция распространения системы двух невзаимодействующих частиц равна произведению функций распространения каждой из них:

$$G(12,\ 1'2')_{\text{невзаим}}=G(1,\ 1')\,G(2,\ 2'). \tag{1.4}$$

Исходя из отдельных дифференциальных уравнений [ср. с формулой (4-11.4)], которые мы будем записывать в виде

$$\begin{aligned}(E-T)_1\,G(1,\ 1')&=\delta(1,\ 1'),\\ (E-T)_2\,G(2,\ 2')&=\delta(2,\ 2'),\end{aligned}\qquad E=i\frac{\partial}{\partial t}, \tag{1.5}$$

получим дифференциальное уравнение для двухчастичной функции распространения:

$$(E-T)_1\,(E-T)_2\,G(12,\ 1'2')_{\text{невзаим}}=\delta(1,\ 1')\,\delta(2,\ 2'). \tag{1.6}$$

Ее явное выражение (1.4) можно найти и из этого дифференциального уравнения, если наложить на его решение запаздывающие граничные условия типа (4-11.3).

Сходное по форме дифференциальное уравнение возникает и в том случае, когда вводятся поля отдельных частиц

$$\psi(1)=\int d1'G(1,\ 1')\,\eta(1'),\quad \psi(2)=\int d2'G(2,\ 2')\,\eta(2'), \tag{1.7}$$

для которых

$$(E-T)_1\psi(1)=\eta(1),\quad (E-T)_2\psi(2)=\eta(2). \tag{1.8}$$

Тогда двухчастичное поле, определяемое в отсутствие взаимодействия как

$$\psi(12)_{\text{невзаим}}=\psi(1)\,\psi(2)=\int d1'\,d2'G(1,\ 1')\,G(2,\ 2')\,\eta(1')\,\eta(2'), \tag{1.9}$$

будет подчиняться уравнению

$$(E-T)_1\,(E-T)_2\,\psi(12)_{\text{невзаим}}=\eta(1)\,\eta(2). \tag{1.10}$$

Важнейшая особенность нерелятивистской теории — представление об абсолютной одновременности. Поэтому естественно рассматривать частный случай наших многовременных полей и функций распространения, отвечающий равным временам. Функцию распространения, соответствующую уравнениям (4-11.3), можно написать в виде

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t')=-i\eta(t-t')\exp[-iT(t-t')]\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{1.11}$$

так что

$$\begin{aligned}&G_1(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1',\ t-t')\,G_2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_2',\ t-t')=\\ &=-\eta(t-t')\exp[-i(T_1+T_2)(t-t')]\,\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1')\,\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_2').\end{aligned} \tag{1.12}$$

Функция, определяющаяся равенством

$$G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't') = iG(\mathbf{r}_1t\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1't'\mathbf{r}_2't'), \tag{1.13}$$

будет подчиняться уравнению

$$(E-T_1-T_2)\,G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't')_{\text{невзаим}} = \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1')\,\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_2')\,\delta(t-t'), \tag{1.14}$$

которое представляет собой более известное обобщение уравнений (1.5) для одночастичных функций Грина на случай двух частиц.

В целях более детального исследования связи между двумя типами функций распространения удобно ввести для пространственных переменных матричную символику, сохраняя временны́е переменные в явном виде. Перепишем в соответствии с этим формулы (1.4), (1.12) и (1.13) следующим образом:

$$G_{12}(t_1t_2,\ t_1't_2') = G_1(t_1,\ t_1')\,G_2(t_2,\ t_2') =$$
$$= -\eta(t_1-t_1')\,\eta(t_2-t_2')\exp[-iT_1(t_1-t_1')]\exp[-iT_2(t_2-t_2')], \tag{1.15}$$
$$G_{1+2}(t,\ t') = -i\eta(t-t')\exp[-i(T_1+T_2)(t-t')], \tag{1.16}$$

где обозначение G_{1+2} выбрано так, чтобы подчеркнуть, что выражение с равными временами относится к частицам 1 и 2, рассматриваемым в качестве составных элементов некоторой единой системы. Допустим, например, что $t_1 > t_2$ и $t_1' > t_2'$. Тогда справедливо равенство

$$G_{12}(t_1t_2,\ t_1't_2') =$$
$$= -\exp[-iT_1(t_1-t_2)]\,\eta(t_2-t_1')\exp[-i(T_1+T_2)(t_2-t_1')]\times$$
$$\times\exp[-iT_2(t_1'-t_2')] = iG_1(t_1,\ t_2)\,G_{1+2}(t_2,\ t_1')\,G_2(t_1',\ t_2'), \tag{1.17}$$

являющееся частным случаем общего соотношения (в предположении, что $t_< > t_>'$)

$$G_{12}(t_1t_2,\ t_1't_2') = iG(t_>,\ t_<)\,G_{1+2}(t_<,\ t_>')\,G(t_>',\ t_<'), \tag{1.18}$$

в правой части которого первая одночастичная функция Грина отвечает частице с большей ($t_>$) из временны́х переменных t_1, t_2, а вторая одночастичная функция соответствует частице с меньшим ($t_<'$) из значений времени t_1', t_2'. Явное свое выражение это свойство находит в записи

$$\begin{aligned} G(t_>,\ t_<) &= G_1(t_1,\ t_2) + G_2(t_2,\ t_1),\\ G(t_>',\ t_<') &= G_2(t_1',\ t_2') + G_1(t_2',\ t_1') \end{aligned} \tag{1.19}$$

(напомним, что все функции являются запаздывающими). Соответствующая многовременной функции распространения физическая картина, к которой приводит формула (1.18), оказывается совсем простой. В момент времени $t_<'$ рождается одна из частиц.

Одна эта частица существует до момента времени $t'_>$, в который испускается другая частица. Двухчастичная конфигурация сохраняется до момента времени $t_<$, когда одна из частиц детектируется. В конечном итоге в момент $t_>$ детектируется также и последняя частица. Отметим к тому же, что в соотношении (1.18) содержится и исходное определение (1.13), или

$$G_{1+2}(t,\ t') = iG_{12}(tt,\ t't'), \tag{1.20}$$

так как

$$iG(t,\ t')|_{t-t'\to+0} = 1. \tag{1.21}$$

Двухчастичное поле с равными временами определяется соответственно этому как

$$\psi_{1+2}(t) = \psi_{12}(tt). \tag{1.22}$$

Обращаясь к частному случаю равенства (1.18)

$$G_{12}(tt,\ t'_1t'_2) = G_{1+2}(t,\ t'_>)\,G(t'_>,\ t'_<), \tag{1.23}$$

мы для этого поля получим следующее выражение:

$$\psi_{1+2}(t) = \int dt'_1\,dt'_2 G_{1+2}(t,\ t'_>)\,G(t'_>,\ t'_<)\,\eta_1(t'_1)\,\eta_2(t'_2). \tag{1.24}$$

Если ввести величину

$$\eta_{1+2}(t') = \int dt'_< G(t'_>,\ t'_<)\,\eta_1(t'_1)\,\eta_2(t'_2), \quad t' = t'_>, \tag{1.25}$$

то можно будет написать

$$\psi_{1+2}(t) = \int dt' G_{1+2}(t,\ t')\,\eta_{1+2}(t'). \tag{1.26}$$

Эквивалентное полевое дифференциальное уравнение имеет вид

$$(E - T_1 - T_2)\,\psi_{1+2}(t)_{\text{невзаим}} = \eta_{1+2}(t), \tag{1.27}$$

откуда видно, что $\eta_{1+2}(t)$ имеет смысл источника двухчастичного поля с равными временами. Выписывая в последнем уравнении координаты явным образом, получаем

$$(E - T_1 - T_2)\,\psi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 t)_{\text{невзаим}} = \eta(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 t). \tag{1.28}$$

Здесь мы опустили индексы, как это принято делать, когда сами аргументы функций уже несут всю необходимую информацию. Если аналогичным образом ввести источник

$$\eta^*_{1+2}(t) = \int dt_> \eta^*_2(t_2)\,\eta^*_1(t_1)\,G(t_>,\ t_<), \quad t = t_<, \tag{1.29}$$

то мы сможем представить двухчастичную вакуумную амплитуду (1.3) в форме, применимой и к единой системе:

$$-i\int dt\,dt' \eta^*_{1+2} G_{1+2}(t,\ t')\,\eta_{1+2}(t'). \tag{1.30}$$

Отметим, однако, что функции $\eta_{1+2}(t)$ и $\eta^*_{1+2}(t)$ комплексно сопряжены друг другу только в том случае, когда действующий ранее испускающий источник η_{1+2} и действующий позже детектирующий источник η^*_{1+2} являются обобщенными, т. е. испускают и поглощают виртуальные, а не реальные частицы. Это вполне логично, поскольку именно при такой степени локализации во времени и допустимо эффективное описание, основанное лишь на одной временно́й переменной. Чтобы более обстоятельно в этом разобраться, развернем наши источники, пользуясь формулами (1.19):

$$\begin{aligned}\eta_{1+2}(t') &= \int dt_1' G_1(t', t_1')\, \eta_1(t_1')\, \eta_2(t') + \int dt_2' G_2(t', t_2')\, \eta_1(t')\, \eta_2(t_2'),\\ \eta^*_{1+2}(t) &= \int dt_1 \eta_2^*(t)\, \eta_1^*(t_1)\, G_1(t_1, t) + \int dt_2 \eta_2^*(t_2)\, \eta_1^*(t)\, G_2(t_2, t),\end{aligned} \tag{1.31}$$

где каждую функцию распространения можно представить как

$$G(t, t') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{\exp[-iE(t-t')]}{E+i\varepsilon-T}. \tag{1.32}$$

При комплексном сопряжении первое выражение в формуле (1.31) превращается в выражение, по форме сходное со вторым, но вместо обычной функции распространения

$$G(t', t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{\exp[iE(t-t')]}{E+i\varepsilon-T} \tag{1.33}$$

в него входит транспонированная и комплексно-сопряженная, т. е. эрмитово-сопряженная, ей функция

$$G(t, t')^{\dagger} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{\exp[iE(t-t')]}{E-i\varepsilon-T}. \tag{1.34}$$

Правда, эти функции эквивалентны, если несуществен знак величины $i\varepsilon$, т. е. если наши источники таковы, что на практике соотношение $E - T = 0$, характеризующее распространение реальной частицы, никогда не выполняется.

Пусть теперь две частицы, по одной каждого сорта, сближаются и рассеиваются за счет примитивного взаимодействия. В нерелятивистской теории примитивное взаимодействие представляет собой мгновенный процесс, вообще говоря, не локализованный в пространстве. Рассеянные частицы можно описать эффективным двухчастичным источником, который характеризуется интенсивностью возбуждения (произведением двух отдельных полей) и некоторой функцией V, связанной с самим механизмом взаимодействия. Соответственно этому напишем

$$\frac{1}{i}\eta(\mathbf{r}_1 t_1)\eta(\mathbf{r}_2 t_2)|_{\text{эфф}} = \delta(t_1 - t_2) V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\psi(\mathbf{r}_1 t_1)\psi(\mathbf{r}_2 t_2). \quad (1.35)$$

Помимо выделенной здесь явным образом трансляционно-инвариантной зависимости от пространственных координат, функция V может содержать также импульсы, спины и прочие характеристики частиц. Согласно определению (1.9), поле, которое получится, если скомбинировать испускающие источники с эффективным источником (1.35), имеет вид

$$\psi(12) = \psi(1)\psi(2) + i\int d1'\, d2' G(1, 1') G(2, 2') V(1'2')\psi(1')\psi(2'), \quad (1.36)$$

где

$$V(12) = \delta(t_1 - t_2) V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (1.37)$$

Из выражения для добавки к действию V, описывающей обмен парой частиц между эффективным испускающим источником (1.35) и детектирующими источниками, можно вывести одно важное свойство функции взаимодействия W. Обратившись к комбинации (1.3), мы увидим, что добавка δW может быть представлена в форме

$$i\delta W = -\int d1\, d2\, \eta^*(2)\eta^*(1)\delta\psi(12), \quad (1.38)$$

где $\delta\psi(12)$ — та часть поля в формуле (1.36), которая индуцирована взаимодействием. Таким образом,

$$\delta W = -\int d1\, d2\, \psi^*(2)\psi^*(1) V(12)\psi(1)\psi(2), \quad (1.39)$$

где учтены равенства

$$\psi^*(1') = \int d1\, \eta^*(1) G(1, 1'), \quad \psi^*(2') = \int d2\, \eta^*(2) G(2, 2'). \quad (1.40)$$

В более явной форме записи выражение (1.39) имеет вид

$$\delta W = -\int (d\mathbf{r}_1)(d\mathbf{r}_2)\, dt\, \psi^*(\mathbf{r}_2 t)\psi^*(\mathbf{r}_1 t) V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\psi(\mathbf{r}_1 t)\psi(\mathbf{r}_2 t). \quad (1.41)$$

Допустим, что мы рассматриваем такие условия, при которых источники не могут испускать реальные частицы ($E - T \neq 0$). Тогда функция [ср. с формулой (4-11.11)]

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \int \frac{(d\mathbf{p})\, dE}{(2\pi)^4} \exp\{i[\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - E(t - t')]\} \frac{1}{E - T(\mathbf{p})} \quad (1.42)$$

будет удовлетворять соотношению

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t')^* = G(\mathbf{r}'-\mathbf{r},\ t'-t), \tag{1.43}$$

в котором находит свое более конкретное воплощение связь между (1.33) и (1.34). Как следствие этого каждое поле $\psi^*(\mathbf{r}t)$ оказывается комплексно-сопряженным полю $\psi(\mathbf{r}t)$. Кроме того, в рассматриваемых условиях амплитуда вероятности процессов с сохранением вакуумного состояния должна равняться единице, т. е. величина W вещественна. Это справедливо для вкладов (1.1) отдельных частиц, а также будет справедливым и для δW при условии, что $V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ — действительная или, в более общем случае, эрмитова функция своих переменных.

При повторных актах примитивного взаимодействия к полю (1.36) будет добавляться все больше и больше членов. Однако все эти эффекты можно легко просуммировать. Полное поле $\psi(12)$ представляет собой суперпозицию поля $\psi(1)\psi(2)$, описывающего невзаимодействующие частицы, с полем, которое отвечает частицам после последнего их столкновения, опять-таки возбуждаемого полем $\psi(12)$, которое порождается всеми источниками. Заменив, таким образом, под знаком интеграла величину $\psi(1')\psi(2')$ величиной $\psi(1'2')$, мы получим интегральное уравнение, описывающее бесконечно большое число актов примитивного взаимодействия:

$$\psi(12) = \psi(1)\psi(2) + i\int d1'\,d2'\,G(1,1')\,G(2,2')\,V(1'2')\,\psi(1'2'). \tag{1.44}$$

Эквивалентное ему дифференциальное уравнение

$$(E-T)_1(E-T)_2\,\psi(12) = \eta(1)\,\eta(2) + iV(12)\,\psi(12) \tag{1.45}$$

можно получить и непосредственно из выражения (1.35), если заменить в нем поле невзаимодействующих частиц полным полем. Итак, дифференциальное уравнение для величины $\psi(12)$ имеет вид

$$[(E-T)_1(E-T)_2 - iV(12)]\,\psi(12) = \eta(1)\,\eta(2). \tag{1.46}$$

Запишем его решение через функцию Грина:

$$\psi(12) = \int d1'\,d2'\,G(12,\ 1'2')\,\eta(1')\,\eta(2'), \tag{1.47}$$

причем уравнение

$$[(E-T)_1(E-T)_2 - iV(12)]\,G(12,1'2') = \delta(1,1')\,\delta(2,2') \tag{1.48}$$

обобщает (1.6) на случай взаимодействующих частиц.

Поскольку эффективный источник (1.35) действует только в совпадающие моменты времени, одновременной двухчастичный источник, определяемый формулой (1.25), выглядит совсем просто. Дельта-функцией из $G(t'_>, t'_<)$ выделяется предельное значение при равных временах, переход к которому осуществляется со стороны положительной разности времен [соотношение (1.21)]. Итак,

$$\eta(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)|_{\text{эфф}} = V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\psi(\mathbf{r}_1t)\,\psi(\mathbf{r}_2t), \tag{1.49}$$

причем путем таких же рассуждений, что и в случае дифференциального уравнения (1.28), получаем

$$(E - T_1 - T_2)\,\psi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t) = \eta(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t) + V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\psi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t), \tag{1.50}$$

или

$$[E - T_1 - T_2 - V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]\,\psi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t) = \eta(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t). \tag{1.51}$$

Решение записывается через функцию Грина как

$$\psi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t) = \int (d\mathbf{r}'_1)(d\mathbf{r}'_2)\,dt'\,G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t, \mathbf{r}'_1\mathbf{r}'_2t')\,\eta(\mathbf{r}'_1\mathbf{r}'_2t'), \tag{1.52}$$

причем уравнение

$$\begin{aligned}[E - T_1 - T_2 - V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]\,G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t, \mathbf{r}'_1\mathbf{r}'_2t) &= \\ = \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'_1)\,\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}'_2)\,\delta(t-t')&\end{aligned} \tag{1.53}$$

обобщает (1.14) на случай взаимодействующих частиц. Мы видим, что функция примитивного взаимодействия V играет роль, приписываемую обычно потенциальной энергии.

Интуиция подсказывает нам, что связь (1.18) между двумя типами функций распространения должна сохраняться и при наличии взаимодействия, ибо его влияние сказывается только тогда, когда существуют обе частицы. Тем не менее докажем это. Интегральное уравнение для функции Грина, эквивалентное (1.44), имеет вид

$$\begin{aligned}G(12, 1'2') &= G(1, 1')\,G(2, 2') + \\ &+ i\int d\bar{1}d\bar{2}\,G(1, \bar{1})\,G(2, \bar{2})\,V(\bar{1}\bar{2})\,G(\bar{1}\bar{2}, 1'2').\end{aligned} \tag{1.54}$$

Рассмотрим случай, когда $t_1 > t_2$. Пользуясь матричными обозначениями, можно написать (при условии $t_2 > t'_1$)

$$\begin{aligned}G_1(t_1, t'_1) &= \exp[-iT_1(t_1-t_2)]\,G_1(t_2, t'_1) = \\ &= iG_1(t_1, t_2)\,G_1(t_2, t'_1),\end{aligned} \tag{1.55}$$

так что соотношение (1.54) принимает вид

$$\begin{aligned}G(t_1t_2, t'_1t'_2) = iG_1(t_1, t_2)\Big[G_1(t_2, t'_1)\,G_2(t_2, t'_2) + \\ + i\int d\bar{t}\,G_1(t_2, \bar{t})\,G_2(t_2, \bar{t})\,VG(\bar{t}\bar{t}, t'_1t'_2)\Big],\end{aligned} \tag{1.56}$$

где $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ обозначено через V. Далее, если $t_2' < t_1'$, то мы имеем

$$G_1(t_2, t_1')\, G(t_2, t_2') = G_1(t_2, t_1')\, G_2(t_2, t_1')\, iG_2(t_1't_2'). \tag{1.57}$$

Таким образом, если определить теперь функцию G_{1+2} соотношением (относящимся к более общему случаю)

$$G(t_1t_2, t_1't_2') = iG(t_>, t_<)\, G_{1+2}(t_<, t_>')\, G(t_>', t_<'), \tag{1.58}$$

то эта функция будет удовлетворять интегральному уравнению

$$G_{1+2}(t, t') = iG_1(t, t')\, G_2(t, t') + \int d\bar{t}\, iG_1(t, \bar{t})\, G_2(t, \bar{t})\, VG_{1+2}(\bar{t}, t'). \tag{1.59}$$

Отсюда явствует, что

$$iG_1(t, t')\, G_2(t, t') = \frac{1}{i}\, \eta(t-t') \exp[-i(T_1 + T_2)(t-t')] \tag{1.60}$$

есть равновременная функция Грина для системы без взаимодействия, подчиняющаяся дифференциальному уравнению (1.14):

$$(E - T_1 - T_2)\, iG_1(t, t')\, G_2(t, t') = \delta(t - t'). \tag{1.61}$$

Следовательно,

$$(E - T_1 - T_2)\, G_{1+2}(t, t') = \delta(t - t') + VG_{1+2}(t, t'), \tag{1.62}$$

а это не что иное, как дифференциальное уравнение (1.53), написанное в матричных обозначениях:

$$[E - T_1 - T_2 - V]\, G_{1+2}(t, t') = \delta(t - t'). \tag{1.63}$$

Здесь следует подчеркнуть, что в процессе нашего анализа предполагалось наличие промежутка времени, в течение которого существуют обе частицы сразу ($t_< > t_>'$). Если это не так ($t_< < t_>'$), то взаимодействие полностью отсутствует и функция Грина сводится просто к произведению одночастичных функций. Функции Грина для двух указанных областей сшиваются непрерывным образом.

Перейдем теперь к формулированию принципов действия, которые будут описывать взаимодействующую систему в целом, по крайней мере с точки зрения ее двухчастичных взаимодействий. Некоторые составные элементы у нас уже имеются — выражение для действия (4-11.12), отвечающее невзаимодействующим частицам:

$$W_{\text{невзаим}} = -\int d1\, [\eta^*(1)\, \psi(1) + \psi^*(1)\, \eta(1) - \psi^*(1)\, (E-T)_1\, \psi(1)] -$$
$$- \int d2\, [\eta^*(2)\, \psi(2) + \psi^*(2)\, \eta(2) - \psi^*(2)\, (E-T)_2\, \psi(2)], \tag{1.64}$$

и примитивное взаимодействие (1.39):

$$W_{\text{прим. взаим}} = -\int d1\, d2\psi^*(2)\, \psi^*(1)\, V(12)\, \psi(1)\, \psi(2). \qquad (1.65)$$

В принципе действия должно фигурировать также и двухчастичное поле $\psi(12)$, но оно обязано входить таким образом, чтобы в отсутствие взаимодействия никаких его следов не оставалось, поскольку в таком случае ситуация полностью описывается полями $\psi(1)$ и $\psi(2)$. Поэтому мы введем поле

$$\chi(12) = \psi(12) - \psi(1)\, \psi(2). \qquad (1.66)$$

Комбинируя дифференциальные уравнения (1.8) и (1.46), мы для этого разностного поля получаем уравнение

$$[(E-T)_1 (E-T)_2 - iV(12)]\, \chi(12) = iV(12)\, \psi(1)\, \psi(2). \qquad (1.67)$$

Из него видно, что источником поля χ является первое взаимодействие дотоле не взаимодействовавших частиц.

Сформулируем теперь соответствующий принцип действия, считая для простоты, что никаких добавочных источников поля χ он не включает:

$$W = W_{\text{невзаим}} + W_{\text{прим. взаим}} + W_\chi, \qquad (1.68)$$

где

$$W_\chi = -i\int d1\, d2\chi^*(12)\, [(E-T)_1 (E-T)_2 - iV(12)]\, \chi(12) - \\ - \int d1\, d2\, [\chi^*(12)\, V(12)\, \psi(1)\, \psi(2) + \psi^*(2)\, \psi^*(1)\, V(12)\, \chi(12)]. \qquad (1.69)$$

Выбор именно такого выражения найдет свое оправдание в вытекающих из него следствиях. Полевое уравнение, получаемое варьированием $\chi^*(12)$, совпадает с (1.67), а при варьировании $\chi(12)$ возникает аналогичное уравнение:

$$\chi^*(12)\, [(E-T)_1 (E-T)_2 - iV(12)] = \psi^*(2)\, \psi^*(1)\, i\, V(12). \qquad (1.70)$$

Их решения могут быть записаны с помощью функции Грина $G(12,\ 1'2')$:

$$\begin{aligned} \chi(12) &= \int d1'\, d2' G(12,\ 1'2')\, iV(1'2')\, \psi(1')\, \psi(2'), \\ \chi^*(1'2') &= \int d1\, d2\psi^*(2)\, \psi^*(1)\, iV(12)\, G(12,\ 1'2'). \end{aligned} \qquad (1.71)$$

В последнем из них мы воспользовались возможностью представить (1.48) в виде

$$G(12,\ 1'2')\, [(E-T)'_1 (E-T)'_2 - iV(1'2')] = \delta(1,1')\, \delta(2,2'). \qquad (1.72)$$

Совместность этой системы подтверждается тем, что W_χ можно вычислить двумя разными способами, причем оба дают

$$W_\chi = -\int d1 \ldots d2' \psi^*(2)\psi^*(1) V(12)\, iG(12, 1'2') \times \times V(1'2')\psi(1')\psi(2'). \tag{1.73}$$

В сумме $W_{\text{прим. взаим}}$ и W_χ между произведениями одночастичных полей стоит следующая комбинация:

$$\begin{aligned} iV(12)\,G(12,1'2')\,iV(1'2') + iV(12)\,\delta(1,1')\,\delta(2,2') &= \\ = (E-T)_1(E-T)_2\,G(12,1'2')\,iV(1'2') &= \\ \doteq (E-T)_1(E-T)_2\,G(12,1'2')(E-T)_1'(E-T)_2' &- \\ - (E-T)_1(E-T)_2\,\delta(1,1')\,\delta(2,2'), & \end{aligned} \tag{1.74}$$

при преобразовании которой последовательно использованы уравнения (1.48) и (1.52) для функции Грина. Последнюю комбинацию можно представить также в виде

$$(E-T)_1(E-T)_2\,[G(12, 1'2') - G(1,1')\,G(2,2')](E-T)_1'(E-T)_2'. \tag{1.75}$$

В итоге для явных выражений, отвечающих первой форме записи правой части (1.74) и ее записи в виде (1.75), получаем

$$W_{\text{прим. взаим}} + W_\chi = -\int d1 \ldots d2' \psi^*(2)\psi^*(1)(E-T)_1 \times \times (E-T)_2\, G(12, 1'2')\, V(1'2')\psi(1')\psi(2') \tag{1.76}$$

и

$$W_{\text{прим. взаим}} + W_\chi = i\int d1 \ldots d2' \psi^*(2)\psi^*(1)(E-T)_1(E-T)_2 \times \times [G(12, 1'2') - G(1, 1')\,G(2, 2')] \times \times (E-T_1)_1'(E-T_2)_2'\psi(1')\psi(2'). \tag{1.77}$$

Исключив χ и χ^*, мы теперь уже можем применить принцип действия к вариациям ψ и ψ^*. Так, например, для $\psi(2)$ из действия (1.76) получается следующее полевое уравнение:

$$(E-T)_2\psi(2) - \eta(2) = \int d1 \ldots d2' \psi^*(1)(E-T)_1(E-T)_2 \times \times G(12, 1'2')\, V(1'2')\psi(1')\psi(2'). \tag{1.78}$$

В итоге возникает система нелинейных уравнений, которую можно решить методом последовательных приближений. Очевидно, что правая часть равенства (1.78) по крайней мере кубична по источникам (считая как испускающие, так и поглощающие источники). Если ее опустить, то благодаря стационарности действия W

ошибка при его вычислении будет иметь не четвертую, а шестую степень по источникам. Поэтому если в разложении вакуумной амплитуды нас интересуют члены второй и четвертой степени по источникам (описывающие одну частицу или пару частиц), то для полей $\psi(1)$ и $\psi(2)$ достаточно взять решения, получаемые в отсутствие взаимодействия. В таком случае мы имеем

$$W \to -\int d1\, d1'\eta^*(1)\, G(1, 1')\, \eta(1') - \int d2\, d2'\eta^*(2)\, G(2, 2')\, \eta(2') + \\ + i\int d1 \ldots d2'\eta^*(2)\, \eta^*(1)\, [G(12, 1'2') - \\ - G(1, 1')\, G(2, 2')]\, \eta(1')\, \eta(2') \qquad (1.79)$$

и

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^\eta = 1 - i\int d1\, d1'\eta^*(1)\, G(1, 1')\, \eta(1') - \\ - i\int d2\, d2'\eta^*(2)\, G(2, 2')\, \eta(2') - \\ - \int d1 \ldots d2'\eta^*(2)\, \eta^*(1)\, G(12, 1'2')\, \eta(1')\, \eta(2') + \ldots \qquad (1.80)$$

Как теперь видно, влияние члена четвертой степени в формуле (1.79) свелось к тому, что место функции Грина двух невзаимодействующих частиц заняла функция $G(12, 1'2')$, в которой полностью учтено все взаимодействие.

В рассматриваемом случае, когда взаимодействия являются мгновенными, принцип действия может быть сформулирован также и с использованием равновременнóго поля $\psi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)$ или, точнее, поля

$$\chi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t) = \psi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t) - \psi(\mathbf{r}_1t)\, \psi(\mathbf{r}_2t). \qquad (1.81)$$

Действие сохраняет общую структуру (1.68), причем теперь мы можем написать

$$W_{\text{прим. взаим}} = -\int (d\mathbf{r}_1)(d\mathbf{r}_2)\, dt\psi^*(\mathbf{r}_2t)\, \psi^*(\mathbf{r}_1t) \times \\ \times V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, \psi(\mathbf{r}_1t)\, \psi(\mathbf{r}_2t), \qquad (1.82)$$

но

$$W_\chi = \int (d\mathbf{r}_1)(d\mathbf{r}_2)\, dt\, [\chi^*(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)\, (E - T_1 - T_2 - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))\, \chi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t) - \\ - \chi^*(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)\, V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, \psi(\mathbf{r}_1t)\, \psi(\mathbf{r}_2t) - \\ - \psi^*(\mathbf{r}_2t)\, \psi^*(\mathbf{r}_1t)\, V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, \chi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)]. \qquad (1.83)$$

Уравнения для поля χ имеют вид $[V = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]$

$$(E - T_1 - T_2 - V)\, \chi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t) = V\psi(\mathbf{r}_1t)\, \psi(\mathbf{r}_2t) \qquad (1.84)$$

и

$$\chi^* (\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)(E - T_1 - T_2 - V) = \psi^* (\mathbf{r}_2t)\,\psi^* (\mathbf{r}_1t)\,V, \tag{1.85}$$

а их решения таковы:

$$\begin{aligned}\chi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t) &= \int (d\mathbf{r}_1')(d\mathbf{r}_2')\,dt'\,G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't')\,V(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2')\,\psi(\mathbf{r}_1't')\,\psi(\mathbf{r}_2't'),\\ \chi^*(\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't') &= \int (d\mathbf{r}_1)(d\mathbf{r}_2)\,dt\,\psi^*(\mathbf{r}_2t)\,\psi^*(\mathbf{r}_1t)\,V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't').\end{aligned} \tag{1.86}$$

С помощью любого из этих решений для W_χ получаем

$$\begin{aligned}W_\chi = -\int (d\mathbf{r}_1)\ldots(d\mathbf{r}_2')\,dt\,dt'\,\psi^*(\mathbf{r}_2t)\,\psi^*(\mathbf{r}_1t)\,V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\times\\ \times\, G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't')\,V(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2')\,\psi(\mathbf{r}_1't')\,\psi(\mathbf{r}_2't').\end{aligned} \tag{1.87}$$

Если добавить примитивное взаимодействие, то возникнет комбинация (используются матричные обозначения)

$$VG_{1+2}(t,\ t')\,V + \delta(t-t')\,V = (E - T_1 - T_2)\,G_{1+2}(t,\ t')\,V, \tag{1.88}$$

где в последней форме записи учтено дифференциальное уравнение (1.63). С помощью альтернативного его варианта

$$G_{1+2}(t,\ t')\,[E' - T_1 - T_2 - V] = \delta(t-t') \tag{1.89}$$

мы полностью избавимся от V и получим

$$\begin{aligned}(E - T_1 - T_2)\,G_{1+2}(t,\ t')\,(E' - T_1 - T_2) - \\ -(E - T_1 - T_2)\,\delta(t-t') = (E - T_1 - T_2)\,[G_{1+2}(t,\ t') - \\ - iG_1(t,\ t')\,G_2(t,\ t')]\,(E' - T_1 - T_2).\end{aligned} \tag{1.90}$$

Последнее выражение развертывается следующим образом:

$$\begin{aligned}W_{\text{прим. взаим}} + W_\chi = -\int (d\mathbf{r}_1)\ldots dt'\,\psi^*(\mathbf{r}_2t)\,\psi^*(\mathbf{r}_1t)\,(E - T_1 - T_2)\,\times\\ \times\,[G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't') - iG(\mathbf{r}_1t,\ \mathbf{r}_1't')\,G(\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_2't')]\,\times\\ \times\,(E' - T_1' - T_2')\,\psi(\mathbf{r}_1't')\,\psi(\mathbf{r}_2't').\end{aligned} \tag{1.91}$$

Как было показано выше, теперь мы можем пользоваться полями, которые подчиняются уравнениям без учета взаимодействия. В результате имеем

$$\begin{aligned}W \to W_{\text{невзаим}} - \int (d\mathbf{r}_1)\ldots dt'\,\eta^*(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)\,[G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't') - \\ - iG(\mathbf{r}_1t,\ \mathbf{r}_1't')\,G(\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_2't')]\,\eta(\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't').\end{aligned} \tag{1.92}$$

Как и прежде, дополнительное слагаемое здесь служит для того, чтобы в соответствующий член вакуумной амплитуды ввести функцию Грина системы с взаимодействием [ср. с выражением (1.80)].

Как и всегда при рассмотрении нерелятивистских систем, весьма выгодно пользоваться координатами центра масс и относительными координатами

$$\mathbf{R}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}, \quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2. \tag{1.93}$$

Соответствующие им импульсы равны

$$\mathbf{P}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}=\frac{m_2\mathbf{p}_1-m_1\mathbf{p}_2}{m_1+m_2}. \tag{1.94}$$

На основании обратных соотношений ($M = m_1 + m_2$)

$$\begin{gathered}\mathbf{r}_1=\mathbf{R}+\frac{m_2}{M}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2=\mathbf{R}-\frac{m_1}{m}\mathbf{r}, \\ \mathbf{p}_1=\frac{m_1}{M}\mathbf{P}+\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_2=\frac{m_2}{M}\mathbf{P}-\mathbf{p}\end{gathered} \tag{1.95}$$

мы заключаем, что

$$T_1=\frac{m_1}{M}\frac{\mathbf{P}^2}{2M}+\frac{1}{M}\mathbf{P}\cdot\mathbf{p}+\frac{\mathbf{p}^2}{2m_1}, \quad T_2=\frac{m_2}{M}\frac{\mathbf{P}^2}{2M}-\frac{1}{M}\mathbf{P}\cdot\mathbf{p}+\frac{\mathbf{p}^2}{2m_2}. \tag{1.96}$$

Отсюда вытекает известное разбиение полной кинетической энергии

$$T_1+T_2=\frac{\mathbf{P}^2}{2M}+\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}\equiv T_{\mathbf{P}}+T, \tag{1.97}$$

где μ — приведенная масса, определяющаяся равенством

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}. \tag{1.98}$$

Независимость движения центра масс от относительного движения находит свое выражение в свойстве факторизации функций Грина

$$G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't') = iG(\mathbf{R}t,\ \mathbf{R}'t')\,G(\mathbf{r}t,\ \mathbf{r}'t'). \tag{1.99}$$

Убедиться в этом можно, основываясь на уравнении (1.53) для функции Грина, которое здесь мы напишем в виде

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}-T_{\mathbf{P}}-T-V(\mathbf{r})\right]G(\mathbf{R}\mathbf{r}t,\ \mathbf{R}'\mathbf{r}'t')= \\ =\delta(t-t')\,\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}')\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{1.100}$$

Вводя фурье-образ

$$G(\mathbf{R}\mathbf{r}t,\ \mathbf{R}'\mathbf{r}'t')=\int\frac{(d\mathbf{P})}{(2\pi)^3}\exp\{i[\mathbf{P}\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{R}')-T_{\mathbf{P}}(t-t')]\}\,G(\mathbf{r}t,\ \mathbf{r}'t'), \tag{1.101}$$

получаем следующее уравнение, не содержащее **P**:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}-T-V(\mathbf{r})\right]G(\mathbf{r}t,\,\mathbf{r}'t')=\delta(t-t')\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (1.102)$$

Но это как раз и составляет суть равенства (1.99), в котором $G(\mathrm{R}t,\,\mathrm{R}'t')$ отождествляется с функцией Грина свободной частицы с массой M.

Собственные функции

$$\psi_{Ea}(\mathbf{r}t)=\psi_{Ea}(\mathbf{r})\exp(-iEt), \qquad (1.103)$$

классифицируемые по энергии E и совокупности прочих квантовых чисел, которая обозначается через a, являются решениями однородного уравнения для функции Грина

$$(E-T-V)\,\psi_{Ea}(\mathbf{r})=0. \qquad (1.104)$$

Они обладают свойством ортонормированности, которое для состояний с дискретными индексами записывается как

$$\int(d\mathbf{r})\,\psi^*_{Ea}(\mathbf{r})\,\psi_{E'a'}(\mathbf{r})=\delta_{EE'}\delta_{aa'}. \qquad (1.105)$$

Зная функцию Грина, можно указать все собственные функции, и, наоборот, из них можно построить функцию Грина. Чтобы доказать последнее утверждение, умножим обе части уравнения (1.102) на $\psi^*_{Ea}(\mathbf{r})$ и проинтегрируем результат. Учитывая затем уравнение

$$\psi^*_{Ea}(\mathbf{r})\,(E-T-V)=0, \qquad (1.106)$$

сопряженное с (1.104), будем иметь

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-E\right)\int(d\mathbf{r})\,\psi^*_{Ea}(\mathbf{r})\,G(\mathbf{r}t,\,\mathbf{r}'t')=\delta(t-t')\,\psi^*_{Ea}(\mathbf{r}'). \qquad (1.107)$$

Решение этого уравнения для функции Грина таково:

$$\int(d\mathbf{r})\,\psi^*_{Ea}(\mathbf{r})\,G(\mathbf{r}t,\,\mathbf{r}'t')=\frac{1}{i}\,\eta(t-t')\exp[-iE(t-t')]\,\psi^*_{Ea}(\mathbf{r}'). \qquad (1.108)$$

Пользуясь затем свойством полноты, которое записывается в виде равенства

$$\sum_{Ea}\psi_{Ea}(\mathbf{r})\,\psi^*_{Ea}(\mathbf{r}')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \qquad (1.109)$$

получим следующую формулу для функции Грина, выраженной через собственные функции:

$$G(\mathbf{r}t,\,\mathbf{r}'t')=\sum_{Ea}\psi_{Ea}(\mathbf{r})\,\frac{1}{i}\,\eta(t-t')\exp[-iE(t-t')]\,\psi^*_{Ea}(\mathbf{r}'). \qquad (1.110)$$

И наоборот, свойство полноты само может быть получено из сравнения (1.110) с предельным значением, которое дает дифференциальное уравнение и запаздывающее граничное условие:

$$iG(\mathbf{r}t,\ \mathbf{r}'t')\,|_{t-t'\to+0}=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (1.111)$$

В соответствии с соотношением (1.99) мы можем вновь присоединить движение центра масс и в итоге будем иметь следующее разложение функции Грина:

$$G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't')=$$
$$=\sum_{\mathbf{P}Ea}\psi_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)\frac{1}{i}\eta(t-t')\exp\left\{-i\left[\frac{\mathbf{P}^2}{2M}+E\right](t-t')\right\}\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2'), \qquad (1.112)$$

где

$$\psi_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)=\left[\frac{(d\mathbf{P})}{(2\pi)^3}\right]^{1/2}\exp(i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R})\,\psi_{Ea}(\mathbf{r}). \qquad (1.113)$$

Эти собственные функции обладают свойством ортонормированности

$$\int(d\mathbf{r}_1)(d\mathbf{r}_2)\,\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)\,\psi_{\mathbf{P}'E'a'}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)=\delta_{\mathbf{P}\mathbf{P}'}\delta_{EE'}\delta_{aa'}. \qquad (1.114)$$

Можно написать также

$$G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't')=\frac{1}{i}\eta(t-t')\sum_{\mathbf{P}Ea}\psi_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)\,\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't'), \qquad (1.115)$$

где

$$\psi_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)=\psi_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)\exp\left\{-i\left[\frac{\mathbf{P}^2}{2M}+E\right]t\right\}. \qquad (1.116)$$

Рассмотрим теперь разложения по собственным функциям для многовременных функций Грина. Напомним, что (при $t_< > t'_>$)

$$G_{12}(t_1t_2,\ t_1't_2')=iG(t_>,\ t_<)\,G_{1+2}(t_<,\ t'_>)\,G(t'_>,\ t'_<), \qquad (1.117)$$

где

$$\begin{aligned}G(t_>,\ t_<)&=G_1(t_1,\ t_2)+G_2(t_2,\ t_1),\\ G(t'_>,\ t'_<)&=G_2(t_1',\ t_2')+G_1(t_2',\ t_1'),\end{aligned} \qquad (1.118)$$

причем матричные обозначения подразумевают интегрирования по всем пространственным координатам. Подставляя разложение (1.115) для $G_{1+2}(t_<,\ t'_>)$, получаем

$$t_< < t'_>:\quad G(\mathbf{r}_1t_1\mathbf{r}_2t_2,\ \mathbf{r}_1't_1'\mathbf{r}_2't_2')=$$
$$=-\sum_{\mathbf{P}Ea}\psi_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1t_1\mathbf{r}_2t_2)\,\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1't_1'\mathbf{r}_2't_2'), \qquad (1.119)$$

где

$$\psi_{PEa}(\mathbf{r}_1 t_1 \mathbf{r}_2 t_2) = i \int (d\bar{\mathbf{r}}_1)\, G_1(\mathbf{r}_1 t_1,\ \bar{\mathbf{r}}_1 t_2)\, \psi_{PEa}(\bar{\mathbf{r}}_1 \mathbf{r}_2 t_2) + \\ + i \int (d\bar{\mathbf{r}}_2)\, G_2(\mathbf{r}_2 t_2,\ \bar{\mathbf{r}}_2 t_1)\, \psi_{PEa}(\mathbf{r}_1 \bar{\mathbf{r}}_2 t_1), \qquad (1.120)$$

$$\psi^*_{PEa}(\mathbf{r}_1 t_1 \mathbf{r}_2 t_2) = i \int (d\bar{\mathbf{r}}_2)\, \psi^*_{PEa}(\mathbf{r}_1 \bar{\mathbf{r}}_2 t_1)\, G_2(\bar{\mathbf{r}}_2 t_1,\ \mathbf{r}_2 t_2) + \\ + i \int (d\bar{\mathbf{r}}_1)\, \psi^*_{PEa}(\bar{\mathbf{r}}_1 \mathbf{r}_2 t_2)\, G_1(\bar{\mathbf{r}}_1 t_2,\ \mathbf{r}_1 t_1). \qquad (1.121)$$

Множители i введены с тем, чтобы выполнялись равенства

$$\psi_{PEa}(\mathbf{r}_1 t \mathbf{r}_2 t) = \psi_{PEa}(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 t), \quad \psi^*_{PEa}(\mathbf{r}_1 t \mathbf{r}_2 t) = \psi_{PEa}(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 t). \qquad (1.122)$$

Как подсказывается самой конструкцией (1.119), многовременные функции являются собственными функциями однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.48) для функции Грина. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например (индексы квантовых чисел опущены),

$$(E-T)_1 (E-T)_2\, \psi(\mathbf{r}_1 t_1 \mathbf{r}_2 t_2) = \left(i \frac{\partial}{\partial t_2} - T_2\right) i\delta(t_1 - t_2)\, \psi(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 t_2) + \\ + \left(i \frac{\partial}{\partial t_1} - T_1\right) i\delta(t_2 - t_1)\, \psi(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 t_1) = \\ = i\delta(t_1 - t_2)\left(2i \frac{\partial}{\partial t} - T_1 - T_2\right) \psi(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 t)\big|_{t=t_1=t_2} - \\ - \delta'(t_1 - t_2)\,[\psi(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 t_1) - \psi(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 t_2)]. \qquad (1.123)$$

Поскольку

$$\delta'(t_1 - t_2)\,[f(t_1) - f(t_2)] = -\delta(t_1 - t_2)\, f'(t)\big|_{t=t_1=t_2}, \qquad (1.124)$$

правая часть равенства (1.123) равна

$$i\delta(t_1 - t_2)\left(i \frac{\partial}{\partial t} - T_1 - T_2\right) \psi(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 t)\big|_{t=t_1=t_2} = \\ = i\delta(t_1 - t_2)\, V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, \psi(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 t)\big|_{t=t_1=t_2}. \qquad (1.125)$$

Учитывая первое соотношение (1.122), мы и получим ожидаемое уравнение:

$$[(E-T)_1 (E-T)_2 - \\ - i\delta(t_1 - t_2)\, V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]\, \psi(\mathbf{r}_1 t_1 \mathbf{r}_2 t_2) = 0, \qquad (1.126)$$

причем таким же путем получаем, что

$$\psi^*(\mathbf{r}_1 t_1 \mathbf{r}_2 t_2)\, [(E-T)_1 (E-T)_2 - \\ - i\delta(t_1 - t_2)\, V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] = 0. \qquad (1.127)$$

Проводя аналогичные выкладки, можно представить в иной форме собственные функции. Так,

$$G_1(t_1, t) G_2(t_2, t)(E - T_1 - T_2) = \\ = \delta(t_1 - t) G_2(t_2, t_1) + \delta(t_2 - t) G_1(t_1, t_2), \qquad (1.128)$$

откуда мы заключаем, что (используются матричные обозначения и опущены индексы)

$$\psi(t_1 t_2) = i \int dt G_1(t_1, t) G_2(t_2, t)(E - T_1 - T_2)\psi(t) = \\ = i \int dt G_1(t_1, t) G_2(t_2, t) V\psi(t). \qquad (1.129)$$

Последняя форма записи позволяет интерпретировать физически многовременные собственные функции с точки зрения измерений, проводимых (по окончании последнего воздействия) в системе свободных частиц. Аналогично имеем

$$\psi^*(t_1 t_2) = i \int dt \psi^*(t) V G_1(t, t_1) G_2(t, t_2). \qquad (1.130)$$

Перейдем теперь к вопросу о том, как использовать многовременные собственные функции для записи условия ортонормированности. В качестве первого этапа некоего эмпирического исследования этого свойства рассмотрим произведение функций (в матричных обозначениях)

$$\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(t_1 t_2) = \psi^*_{\mathbf{P}Ea}(t_1)\eta(t_1 - t_2)\exp[-iT_2(t_1 - t_2)] + \\ + \psi^*_{\mathbf{P}Ea}(t_2)\eta(t_2 - t_1)\exp[-iT_1(t_2 - t_1)] \qquad (1.131)$$

и

$$\psi_{\mathbf{P}'E'a'}(t_1 t_2) = \eta(t_1 - t_2)\exp[-iT_1(t_1 - t_2)]\psi_{\mathbf{P}'E'a'}(t_2) + \\ + \eta(t_2 - t_1)\exp[-iT_2(t_2 - t_1)]\psi_{\mathbf{P}'E'a'}(t_1), \qquad (1.132)$$

а именно

$$\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(t_1 t_2)\psi^*_{\mathbf{P}'E'a'}(t_1 t_2) = \\ = \eta(t_1 - t_2)\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(t_1)\exp[-i(T_1 + T_2)(t_1 - t_2)]\psi_{\mathbf{P}'E'a'}(t_2) + \\ + \eta(t_2 - t_1)\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(t_2)\exp[-i(T_1 + T_2)(t_2 - t_1)]\psi_{\mathbf{P}'E'a'}(t_1). \qquad (1.133)$$

В обычные соотношения ортонормированности, записанные либо в виде (1.114), либо в эквивалентной форме

$$\int (d\mathbf{r}_1)(d\mathbf{r}_2)\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 t)\psi_{\mathbf{P}'E'a'}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 t) = \delta_{\mathbf{P}\mathbf{P}'}\delta_{EE'}\delta_{aa'}, \qquad (1.134)$$

не входят интегралы по времени. Но здесь имеются две временные переменные: t_1 и t_2 или, иначе,

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2), \quad \tau = t_1 - t_2, \qquad (1.135)$$

а это говорит о том, что необходимо интегрирование по относительному времени τ. Отметим, что

$$\psi^*_{\mathbf{P}Ea}\left(t+\frac{1}{2}\tau\right)\exp[-i(T_1+T_2)\tau]\,\psi_{\mathbf{P}'E'a'}\left(t-\frac{1}{2}\tau\right)=$$
$$=\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(t)\exp\left[i\left(\frac{E+E'}{2}-T_1-T_2\right)\tau\right]\psi_{\mathbf{P}'E'a'}(t) \quad (1.136)$$

и

$$\psi^*_{\mathbf{P}Ea}\left(t-\frac{1}{2}\tau\right)\exp[i(T_1+T_2)\tau]\,\psi_{\mathbf{P}'E'a'}\left(t+\frac{1}{2}\tau\right)=$$
$$=\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(t)\exp\left[-i\left(\frac{E+E'}{2}-T_1-T_2\right)\tau\right]\psi_{\mathbf{P}'E'a'}(t), \quad (1.137)$$

причем в первом из этих двух выражений величина τ должна быть положительной, а во втором — отрицательной. Мы видим, что после компенсации эффектов, возникающих за счет интегрирования по τ от $-\infty$ до ∞, множителем, пропорциональным $^1/_2(E+E')-T_1-T_2$, вновь справедливо обычное условие ортонормированности:

$$\frac{1}{2i}\int d\tau\,(d\mathbf{r}_1)\,(d\mathbf{r}_2)\,\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1t_1\mathbf{r}_2t_2)\left(\frac{E+E'}{2}-T_1-T_2\right)\psi_{\mathbf{P}'E'a'}(\mathbf{r}_1t_1\mathbf{r}_2t_2)=$$
$$=\delta_{\mathbf{PP}'}\delta_{EE'}\delta_{aa'}. \quad (1.138)$$

Более прямым путем можно прийти к такой структуре, рассматривая уравнение на собственные функции (1.126), в котором мы теперь напишем

$$E_1=\frac{1}{2}E+E_\tau,\qquad E_2=\frac{1}{2}E-E_\tau, \quad (1.139)$$

где

$$E=i\frac{\partial}{\partial t},\qquad E_\tau=i\frac{\partial}{\partial\tau}. \quad (1.140)$$

Это дает

$$\left[\frac{1}{4}(E'-T_1-T_2)^2-\left(E_\tau-\frac{T_1-T_2}{2}\right)^2-i\delta(\tau)V\right]\psi_{\mathbf{P}'E'a'}=0 \quad (1.141)$$

и, аналогично,

$$\psi^*_{\mathbf{P}Ea}\left[\frac{1}{4}(E-T_1-T_2)^2-\left(E_\tau-\frac{T_1-T_2}{2}\right)^2-i\delta(\tau)V\right]=0. \quad (1.142)$$

Здесь дифференциальный оператор E заменен собственными значениями энергии, так как ими определяется реакция системы на общий сдвиг обеих переменных, при котором τ остается фиксированным. Поэтому в формулах (1.141) и (1.142) в качестве переменных остаются $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и τ. Теперь мы применим обычный способ — умножим каждое уравнение на функцию из другого уравнения, произведем вычитание и проинтегрируем разность по всем переменным. В итоге получим

$$\int d\tau\,(d\mathbf{r}_1)\,(d\mathbf{r}_2)\,\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1t_1\mathbf{r}_2t_2)\,[(E-T_1-T_2)^2-$$
$$-(E'-T_1-T_2)^2]\,\psi_{\mathbf{P}'E'a'}(\mathbf{r}_1t_1\mathbf{r}_2t_2)=0, \qquad (1.143)$$

или

$$(E-E')\int d\tau\,(d\mathbf{r}_1)\,(d\mathbf{r}_2)\,\psi^*_{\mathbf{P}Ea}(\mathbf{r}_1t_1\mathbf{r}_2t_2)\left(\frac{E+E'}{2}-T_1-T_2\right)\times$$
$$\times\,\psi_{\mathbf{P}'E'a'}(\mathbf{r}_1t_1\mathbf{r}_2t_2)=0. \qquad (1.144)$$

Здесь сразу можно узнать структуру выражения (1.138). Но чтобы фиксировать абсолютный множитель в условии нормировки, необходим проведенный ранее анализ.

Теперь нам известна в явном виде многовременная функция Грина в двух не связанных между собой временных областях $t_< > t'_>$ и $t_< < t'_>$. В первой из них две частицы существуют вместе в течение некоторого конечного интервала времени и функцию Грина можно представить в виде разложения по собственным функциям, задаваемого формулой (1.119). В другой временной области частицы вместе не существуют, а значит, они не взаимодействуют, и поэтому мы имеем

$$t_< < t'_>:\quad G(12,\ 1'2') = G(1,\,1')\,G(2,\,2'). \qquad (1.145)$$

Было бы желательно получить два эти выражения неким единым способом, исходя из какого-то одного выражения. Чтобы сделать это, применим интегральные уравнения, эквивалентные дифференциальным уравнениям (1.48) и (1.72), а именно

$$G_{12} = G_1G_2 + G_1G_2iV\,(12)\,G_{12} \qquad (1.146)$$

и

$$G_{12} = G_1G_2 + G_{12}i\,V\,(12)\,G_1G_2, \qquad (1.147)$$

которые записаны в четырехмерных матричных обозначениях [ср. с формулой (3-12.21)]. Комбинируя их, придем к уравнению

$$G_{12} = G_1G_2 + G_1G_2iV\,(12)\,G_1G_2 +$$
$$+\,G_1G_2iV\,(12)\,G_{12}iV\,(12)\,G_1G_2, \qquad (1.148)$$

которое фактически содержится также и в (1.74). Обратимся теперь к трехмерным матричным обозначениям и напишем это уравнение в развернутой форме:

$$G_{12}(t_1t_2,\ t'_1t'_2) = G_1(t_1,\ t'_1)\,G_2(t_2,\ t'_2)+$$
$$+\int dt G_1(t_1,\,t)\,G_2(t_2,\,t)\,iVG_1(t,\ t'_1)\,G_2(t,\ t'_2)+$$
$$+\int dt\,dt' G_1(t_1,\ t)\,G_2(t_2,\ t)\,iV\,\frac{1}{i}\,G_{1+2}(t,\ t')\times$$
$$\times\,VG_1(t',\ t'_1)\,G_2(t',\ t'_2), \qquad (1.149)$$

где учтено, что в последнее слагаемое входит равновременна́я функция Грина

$$G_{1+2}(t, t') = \frac{1}{i}\eta(t-t')\sum\psi(t)\psi^*(t'). \tag{1.150}$$

Фигурирующие здесь величины $\psi(t)$ представляют собой собственные функции (1.116) с опущенными для простоты индексами. Заметим, далее, что

$$\begin{aligned}V\eta(t-t')\sum\psi(t)\psi^*(t') &= \eta(t-t')(E-T_1-T_2)\sum\psi(t)\psi^*(t') = \\ &= (E-T_1-T_2)\eta(t-t')\sum\psi(t)\psi^*(t') - i\delta(t-t'),\end{aligned} \tag{1.151}$$

где использовано однородное уравнение для собственных функций

$$(E-T_1-T_2-V)\psi(t) = 0, \quad E = i\frac{\partial}{\partial t}, \tag{1.152}$$

и условие полноты

$$\sum\psi(t)\psi^*(t) = 1. \tag{1.153}$$

Получаемое таким способом дополнительное слагаемое с дельта-функцией компенсирует линейный по V член в формуле (1.149). Кроме того, вспомним, что

$$\begin{aligned}&G_1(t_1, t)G_2(t_2, t)(E-T_1-T_2) = \\ &= \delta(t_1-t)G_2(t_2, t_1) + \delta(t_2-t)G_1(t_1, t_2).\end{aligned} \tag{1.154}$$

В итоге мы приходим к следующему преобразованному выражению:

$$\begin{aligned}&G_{12}(t_1t_2, t_1't_2') = G_1(t_1, t_1')G_2(t_2, t_2') + \\ &+ \int dt\,dt'\,[\delta(t_1-t)G_2(t_2, t_1) + \delta(t_2-t)G_1(t_1, t_2)] \times \\ &\times \eta(t-t')\sum\psi(t)\psi^*(t')VG_1(t', t_1')G_2(t', t_2').\end{aligned} \tag{1.155}$$

Чтобы полностью исключить V, будем действовать аналогичным образом и напишем

$$\begin{aligned}\sum\psi(t)\psi^*(t')\eta(t-t')V &= \sum\psi(t)\psi^*(t')(E'-T_1-T_2)\eta(t-t') = \\ &= \sum\psi(t)\psi^*(t')\eta(t-t')(E'-T_1-T_2) - i\delta(t-t').\end{aligned} \tag{1.156}$$

Комбинируя это равенство с соотношением

$$\begin{aligned}&(E'-T_1-T_2)G_1(t', t_1')G_2(t', t_2') = \\ &= \delta(t'-t_1')G_2(t_1', t_2) + \delta(t'-t_2')G_1(t_2', t_1'),\end{aligned} \tag{1.157}$$

получаем

$$G_{12}(t_1t_2,\ t_1't_2')=$$
$$=G_1(t_1,\ t_1')\,G_2(t_2,\ t_2')-iG_1(t_1,\ t_1')\,G_2(t_2,\ t_1)\,G_2(t_1,\ t_2')-$$
$$-iG_1(t_1,\ t_2)\,G_1(t_2,\ t_1')\,G_2(t_2,\ t_2')+$$
$$+\int dt\,dt'\,[\delta(t_1-t)\,G_2(t_2,\ t_1)+\delta(t_2-t)\,G_1(t_1,\ t_2)]\,\eta(t-t')\times$$
$$\times\sum\psi(t)\,\psi^*(t')\,[\delta(t'-t_1')\,G_2(t_1',\ t_2')+\delta(t'-t_2')\,G_1(t_2',\ t_1')], \qquad (1.158)$$

или

$$G_{12}(t_1t_2,\ t_1't_2')=$$
$$=[G_1(t_1,\ t_1')-iG_1(t_1,\ t_2)\,G_1(t_2,\ t_1')]\times$$
$$\times[G_2(t_2,\ t_2')-iG_2(t_2,\ t_1)\,G_2(t_1,\ t_2')]-$$
$$-\eta(t_<-t_>')\sum\psi(t_1t_2)\,\psi^*(t_1't_2'). \qquad (1.159)$$

В последней форме записи мы учли, что произведение $G_1(t_1,\ t_2)\,G_2(t_2,\ t_1)$ равно нулю и что после двукратного интегрирования по времени t и t' заменяются на $t_<$ и $t_>'$, а также приняли во внимание выражения (1.120) и (1.121) для многовременных собственных функций. Относительно входящей сюда комбинации функций Грина свободных частиц напомним, что

$$t>t'>t'':\quad G(t,\ t'')=iG(t,\ t')\,G(t',\ t''), \qquad (1.160)$$

причем произведение в правой части обращается в нуль, если временны́е переменные расположены в другой последовательности. Следовательно, слагаемое в формуле (1.159), отвечающее свободным частицам, равно нулю, когда $t_1>t_2>t_1'$ или $t_2>t_1>t_2'$, чему соответствует неравенство $t_<>t_>'$; в противоположном же случае, когда $t_<<t_>'$, равно нулю произведение двух функций Грина одной и той же частицы. В результате мы получаем выражение, которое и ожидали:

$$G_{12}(t_1t_2,\ t_1't_2')=\eta(t_>'-t_<)\,G_1(t_1,\ t_1')\,G_2(t_2,\ t_2')-$$
$$-\eta(t_<-t_>')\sum\psi(t_1t_2)\,\psi^*(t_1't_2'). \qquad (1.161)$$

Состояния двухчастичной системы распадаются на две разные группы: при $E>0$ имеем состояния рассеяния, а при $E<0$ — связанные состояния. Каждое из последних отвечает составной частице, которая при принятом здесь упрощенном описании выступает в качестве некоторой стабильной частицы. Мы должны теперь убедиться в непротиворечивости нашей теории — составной характер частицы не должен сказываться на ее феноменологическом описании. Обратимся к формуле (1.79) и выделим из члена W, имеющего четвертую степень по источникам, вклад в $G(12, 1'2')$ какого-то определенного связанного состояния, используя с этой целью выражения (1.148) и (1.149). Без особой строгости в обозначениях будем иметь

$$W_{\text{сост. част}} = i \int d1 \ldots d2' \eta^*(2) \eta^*(1) G_1 G_2 iV(12) \frac{1}{i} \times$$
$$\times G_{1+2}\big|_{\text{связ. сост}} iV(12) G_1 G_2 \eta(1') \eta(2'), \tag{1.162}$$

где, согласно формулам (1.99) и (1.110),

$$G_{1+2}\big|_{\text{связ. сост}} = G(\mathbf{R}t, \mathbf{R}'t') \psi(\mathbf{r}t) \psi^*(\mathbf{r}'t'), \tag{1.163}$$

а

$$\psi(\mathbf{r}t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-iEt) \tag{1.164}$$

есть собственная функция рассматриваемого конкретного состояния. Выделяя затем движение составной частицы как целого, получаем

$$W_{\text{сост. част}} = -\int (d\mathbf{R})\, dt\, (d\mathbf{R}')\, dt' \eta^*(\mathbf{R}t) G(\mathbf{R}t, \mathbf{R}'t') \eta(\mathbf{R}'t'), \tag{1.165}$$

где

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{R}t) &= \int (d\mathbf{r})\, d1'\, d2' \psi^*(\mathbf{r}t) V(\mathbf{r}) G_1(\mathbf{r}_1 t, 1') \times \\ &\quad \times G_2(\mathbf{r}_2 t, 2') \eta(1') \eta(2'), \\ \eta^*(\mathbf{R}t) &= \int (d\mathbf{r})\, d1'\, d2' \eta^*(2') \eta^*(1') G_1(1', \mathbf{r}_1 t) \times \\ &\quad \times G_2(2', \mathbf{r}_2 t) V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \tag{1.166}$$

а [соотношения (1.95)]

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}. \tag{1.167}$$

Структура действия (1.165) оказывается такой, какой она и должна быть [ср. с формулой (5.1)], но феноменологическая схема будет замкнутой лишь в том случае, если $\eta(\mathbf{R}t)$ и $\eta^*(\mathbf{R}t)$ в действительности являются комплексно-сопряженными величинами. Это утверждение будет справедливым, когда для одночастичных функций Грина эффективно выполняется соотношение

$$G(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t')^* = G(\mathbf{r}'t', \mathbf{r}t). \tag{1.168}$$

В полной аналогии с тем, что говорилось по поводу выражения (1.30), а также выражения (1.41), для этого необходимо, чтобы при условиях, которые характеризуют действие источников составных частиц, не распространялись никакие одиночные реальные частицы. Такое требование заведомо выполняется, если ни один из одночастичных источников не способен испускать или поглощать реальные частицы. Приведем также явные выражения для источников какой-то определенной составной частицы,

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{P}} &= \left[\frac{(d\mathbf{P})}{(2\pi)^3}\right]^{1/2} \int (d\mathbf{R})\, dt \exp\left[-i\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{R} - T_{\mathbf{P}}t\right)\right] \eta(\mathbf{R}t), \\ \eta_{\mathbf{P}}^* &= \left[\frac{(d\mathbf{P})}{(2\pi)^3}\right]^{1/2} \int (d\mathbf{R})\, dt \eta^*(\mathbf{R}t) \exp\left[i\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{R} - T_{\mathbf{P}}t\right],\right. \end{aligned} \tag{1.169}$$

которые даются равенствами

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{P}} = \int (d\mathbf{r}_1)(d\mathbf{r}_2)\, dt\, d1'\, d2' \psi_{\mathbf{P}}^*(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t) V(\mathbf{r}) G_1(\mathbf{r}_1t, 1') \times \\ \times G_2(\mathbf{r}_2t, 2') \eta(1') \eta(2'), \end{aligned} \tag{1.170}$$

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{P}}^* = \int (d\mathbf{r}_1)(d\mathbf{r}_2)\, dt\, d1'\, d2' \eta^*(2') \eta^*(1') G_1(1', \mathbf{r}_1t) \times \\ \times G_2(2', \mathbf{r}_2t) V(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t), \end{aligned} \tag{1.171}$$

где $\psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)$ — собственные функции (1.116). Мы видим, что сюда входят комбинации, отвечающие многовременным собственным функциям (1.129) и (1.130) (напомним, что в этих последних формулах использовались матричные обозначения), и, таким образом,

$$\begin{aligned} i\eta_{\mathbf{P}} &= \int d1\, d2 \psi_{\mathbf{P}}^*(12) \eta(1) \eta(2), \\ i\eta_{\mathbf{P}}^* &= \int d1\, d2 \eta^*(2) \eta^*(1) \psi_{\mathbf{P}}(12). \end{aligned} \tag{1.172}$$

Подобные многовременные конструкции возникают также и при подстановке в формулу (1.79) разложения по собственным функциям (1.119).

В данном параграфе не встречалось каких-либо определенных ссылок на бозевский или фермиевский характер источников. Некоторого комментария требует лишь связь статистики сложной частицы со статистикой составляющих ее элементов (см. т. 1, стр. 319). Произведения двух коммутирующих величин или двух антикоммутирующих величин будут объектами, полностью коммутирующими: если два составляющих элемента подчиняются статистике одного и того же типа, то сложная частица является бозоном. Произведение коммутирующей величины с антикоммутирующей дает антикоммутирующий объект: составные элементы с противоположными типами статистики образуют сложную частицу, являющуюся фермионом.

Имеется один интересный способ символического представления решения уравнения (1.48) для многовременной функции Грина. Его подсказывает нам рассмотрение первых двух слагаемых выражения (1.148), которые к тому же оказываются и начальными членами итерационного решения:

$$G(12,\ 1'2') = G(1,\ 1')\,G(2,\ 2') + \\ + \int d\bar{1}\,d\bar{2}\,G(1,\ \bar{1})\,G(2,\ \bar{2})\,iV(\bar{1}\bar{2})\,G(\bar{1},\ 1')\,G(\bar{2},\ 2') + \ldots \tag{1.173}$$

Вернемся к уравнению для одночастичной функции Грина и введем в него член с произвольной потенциальной энергией — некоторой функцией пространства и времени:

$$[E - T - V(1)]\,G^V(1,1') = \delta\,(1,\ 1'). \tag{1.174}$$

Бесконечно малое изменение величины $V(1)$ оказывает следующее влияние:

$$[E - T - V(1)]\,\delta G^V(1,\ 1') = \delta V(1)\,G^V(1,\ 1'), \tag{1.175}$$

а решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\delta G^V(1,\ 1') = \int d\bar{1}\,G^V(1,\ \bar{1})\,\delta V(\bar{1})\,G^V(\bar{1},\ 1'). \tag{1.176}$$

Для записи этого дифференциального выражения мы будем использовать символ функциональной производной

$$\frac{\delta G^V(1,\ 1')}{\delta V(\bar{1})} = G^V(1,\ \bar{1})\,G^V(\bar{1},\ 1'). \tag{1.177}$$

Если после дифференцирования (1.177) положить вспомогательную функцию $V(1)$ равной нулю, то мы получим как раз произведение двух свободных функций Грина, входящее (для каждой частицы) в разложение (1.173). Поэтому последнее мы можем записать как

$$G(12,\ 1'2') = G(1,\ 1')\,G(2,\ 2') + \\ + i\int d\bar{1}\,d\bar{2}\,\frac{\delta}{\delta V(\bar{1})}\,V(\bar{1}\bar{2})\,\frac{\delta}{\delta V(\bar{2})}\,G^V(1,\ 1')\,G^V(2,\ 2')\Big|_{V=0} + \ldots\,. \tag{1.178}$$

Естественно предположить, что влияние бесконечного числа последовательных актов взаимодействия выражается экспоненциальным оператором, первые члены которого указаны в формуле (1.178):

$$G(12,\ 1'2') = \exp\left[i\int d\bar{1}\,d\bar{2}\,\frac{\delta}{\delta V(\bar{1})}\,V(\bar{1}\bar{2})\,\frac{\delta}{\delta V(\bar{2})}\right]\times \\ \times G^V(1,\ 1')\,G^V(2,\ 2')\big|_{V=0}. \tag{1.179}$$

Убедимся в справедливости этой гипотезы. (Аналогичный квантовомеханический анализ, основывающийся на принципе действия, можно найти в книге *J. Schwinger*, Quantum Kinematics and Dynamics, W. A. Benjamin, Inc., Menlo Park, 1970, § 7.9.)

В соответствии с уравнениями типа (1.174) мы имеем

$$(E-T)_1(E-T)_2\,G(12,\,1'2')=$$
$$=\exp[\quad]\{\delta(1,\,1')+V(1)\,G^V(1,1')\}\{\delta(2,2')+V(2)\,G^V(2,\,2')\}|_{V=0}=$$
$$=\delta(1,\,1')\,\delta(2,\,2')+\exp[\quad]\,V(1)\,V(2)\,G^V(1,\,1')\,G^V(2,\,2')\,|_{V=0}, \tag{1.180}$$

где квадратными скобками обозначен функциональный дифференциальный оператор, фигурирующий в формуле (1.179), и учтены упрощения, возможные для членов, не содержащих одновременно $V(1)$ и $V(2)$. Заметим теперь, что имеет место равенство

$$\exp[\quad]\,V(1)=V(1)\exp[\quad]+\exp[\quad]\,i\int d\bar{2}\,V(1\bar{2})\frac{\delta}{\delta V(\bar{2})}, \tag{1.181}$$

которое вытекает из следующего свойства функциональной производной:

$$\frac{\delta V(1)}{\delta V(\bar{1})}=\delta(1,\,\bar{1}), \tag{1.182}$$

соответствующего тождеству

$$\delta V(1)=\int d\bar{1}\,\delta V(\bar{1})\,\delta(1,\,\bar{1}), \tag{1.183}$$

После того как величину $V(1)$ мы поместили слева от всех функциональных производных, ее можно положить равной нулю. На первом этапе проведения той же схемы для $V(2)$ используется соотношение

$$i\int d\bar{2}V(1\bar{2})\frac{\delta}{\delta V(\bar{2})}\,V(2)=V(2)\,i\int d\bar{2}V(1\bar{2})\frac{\delta}{\delta V(\bar{2})}+iV(12). \tag{1.184}$$

Применяя теперь равенство, аналогичное равенству (1.181), получаем

$$[(E-T)_1(E-T)_2-iV(12)]\,G(12,\,1'2')-\delta(1,\,1')\,\delta(2,\,2')=$$
$$=-\exp[\quad]\int d\bar{1}\,d\bar{2}\,V(1\bar{2})\,V(2\bar{1})\times$$
$$\times\frac{\delta}{\delta V(\bar{1})}\frac{\delta}{\delta V(\bar{2})}G^V(1,\,1')\,G^V(2,\,2')\,|_{V=0}. \tag{1.185}$$

Согласно формуле (1.177), для входящей сюда второй функциональной производной имеем

$$\frac{\delta}{\delta V(\bar{1})}\frac{\delta}{\delta V(\bar{2})}G^V(1,\,1')\,G^V(2,\,2')=$$
$$=G^V(1,\,\bar{1})\,G^V(\bar{1},\,1')\,G^V(2,\,\bar{2})\,G^V(\bar{2},\,2'). \tag{1.186}$$

Здесь решающее значение приобретают мгновенность взаимодействия и запаздывающий характер функций Грина. Дельта-функции времени, входящие в V, требуют, чтобы выполнялись равенства

$$\bar{t}_2 = t_1, \quad \bar{t}_1 = t_2. \tag{1.187}$$

Следовательно, в произведении функций Грина в формуле (1.186) содержится множитель

$$G_1^V(t_1, t_2)\, G_2^V(t_2, t_1) = 0, \tag{1.188}$$

так как

$$\eta(t_1 - t_2)\, \eta(t_2 - t_1) = 0 \tag{1.189}$$

всюду, кроме отдельной точки $t_1 - t_2 = 0$, которая не дает отличного от нуля интеграла по времени. Этим и завершается проверка представления (1.179).

Мгновенный характер взаимодействия можно учесть явным образом, записав выражение (1.179) в виде

$$G(12, 1'2') = \exp\left[i \int d\bar{t}\,(d\bar{\mathbf{r}}_1)(d\bar{\mathbf{r}}_2)\, \frac{\delta}{\delta V_1(\bar{\mathbf{r}}_1\bar{t})}\, V(\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2)\, \frac{\delta}{\delta V_2(\bar{\mathbf{r}}_2\bar{t})}\right] \times$$
$$\times G^{V_1}(1, 1')\, G^{V_2}(2, 2')\big|_{V_{1,2}=0}\,. \tag{1.190}$$

Можно также перейти к равновременной функции Грина:

$$G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 t, \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2' t') = \exp[\quad]\, G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 t, \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2' t')\big|_{V_{1,2}=0}, \tag{1.191}$$

где

$$(E - T_1 - T_2 - V_1 - V_2)\, G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 t, \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2' t') =$$
$$= \delta(t - t')\, \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1')\, \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2'). \tag{1.192}$$

Чтобы прямо вывести дифференциальное уравнение (1.53), применим предыдущее уравнение для $G^{V_{1,2}}$:

$$(E - T_1 - T_2)\, G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 t, \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2' t') - \delta(t - t')\, \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1')\, \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2') =$$
$$= \exp[\quad]\, \{V_1(\mathbf{r}_1 t) + V_2(\mathbf{r}_2 t)\}\, G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 t, \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2' t')\big|_{V_{1,2}=0}, \tag{1.193}$$

а затем, воспользовавшись равенством (1.181), представим правую часть в виде

$$\exp[\quad]\left\{\int (d\bar{\mathbf{r}}_2)\, V(\mathbf{r}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2)\, i\, \frac{\delta}{\delta V_2(\bar{\mathbf{r}}_2 t)} + \int (d\bar{\mathbf{r}}_1)\, V(\bar{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{r}_2)\, i\, \frac{\delta}{\delta V_1(\bar{\mathbf{r}}_1 t)}\right\} \times$$
$$\times G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 t, \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2' t')\big|_{V_{1,2}=0}. \tag{1.194}$$

Далее, рассмотрим двухчастичный аналог соотношения (1.176),

$$\delta G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 t, \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2' t') = \int d\bar{t}\,(d\bar{\mathbf{r}}_1)(d\bar{\mathbf{r}}_2)\, G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 t, \bar{\mathbf{r}}_1\bar{\mathbf{r}}_2\bar{t}) \times$$
$$\times [\delta V_1(\bar{\mathbf{r}}_1\bar{t}) + \delta V_2(\bar{\mathbf{r}}_2\bar{t})]\, G^{V_{1,2}}(\bar{\mathbf{r}}_1\bar{\mathbf{r}}_2\bar{t}, \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2' t'), \tag{1.195}$$

который в функциональных производных записывается как

$$\frac{\delta G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't')}{\delta V_1(\bar{\mathbf{r}}_1,\ \bar{t})} = \int (d\bar{\mathbf{r}}_2)\, G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \bar{\mathbf{r}}_1\bar{\mathbf{r}}_2\bar{t})\, G^{V_{1,2}}(\bar{\mathbf{r}}_1\bar{\mathbf{r}}_2\bar{t},\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't') \tag{1.196}$$

и

$$\frac{\delta G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't')}{\delta V_2(\bar{\mathbf{r}}_2\bar{t})} = \int (d\bar{\mathbf{r}}_1)\, G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \bar{\mathbf{r}}_1\bar{\mathbf{r}}_2\bar{t})\, G^{V_{1,2}}(\bar{\mathbf{r}}_1\bar{\mathbf{r}}_2\bar{t},\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't'). \tag{1.197}$$

Чтобы преобразовать выражение (1.194), нам нужно вычислить эти функциональные производные при $\bar{t} = t$, причем подразумевается, что берется среднее арифметическое двух предельных значений при $\bar{t} \to t \pm 0$. Вспомнив, что

$$\begin{gathered} G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \bar{\mathbf{r}}_1\bar{\mathbf{r}}_2t+0) = 0, \\ G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \bar{\mathbf{r}}_1\bar{\mathbf{r}}_2t-0) = \frac{1}{i}\,\delta(\mathbf{r}_1-\bar{\mathbf{r}}_1)\,\delta(\mathbf{r}_2-\bar{\mathbf{r}}_2), \end{gathered} \tag{1.198}$$

мы будем иметь

$$\lim_{\bar{t}\to t} iG(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \bar{\mathbf{r}}_1\bar{\mathbf{r}}_2\bar{t}) = \frac{1}{2}\,\delta(\mathbf{r}_1-\bar{\mathbf{r}}_1)\,\delta(\mathbf{r}_2-\bar{\mathbf{r}}_2), \tag{1.199}$$

и тем самым

$$\begin{gathered} i\,\frac{\delta G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't')}{\delta V_1(\bar{\mathbf{r}}_1t)} = \frac{1}{2}\,\delta(\mathbf{r}_1-\bar{\mathbf{r}}_1)\, G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't'), \\ i\,\frac{\delta G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_1t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't')}{\delta V_2(\bar{\mathbf{r}}_2t)} = \frac{1}{2}\,\delta(\mathbf{r}_2-\bar{\mathbf{r}}_2)\, G^{V_{1,2}}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't'). \end{gathered} \tag{1.200}$$

В результате, как и можно было ожидать, мы для правой части равенства (1.193) получаем

$$V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\, G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't'). \tag{1.201}$$

Пока что мы рассматривали только взаимодействие двух разных частиц. Нужно сказать несколько слов и о тех модификациях, которые возникают в случае, когда две частицы тождественны. Если исходить из выражения

$$W_{\text{невзаим}} = -\int d1\, d1'\eta^*(1)\, G(1,\ 1')\,\eta(1'), \tag{1.202}$$

то для квадратичного члена в разложении экспоненты $\exp[iW_{\text{невзаим}}]$ мы будем иметь

$$-\frac{1}{2}\int d1\ \ldots\ d2'\eta^*(2)\,\eta^*(1)\, G(1,\ 1')\, G(2,\ 2')\,\eta(1')\,\eta(2'), \tag{1.203}$$

где цифры 1 и 2 уже не относятся к разным сортам частиц. Это выражение можно переписать в виде

$$-\int \frac{d1\,d2}{2}\frac{d1'\,d2'}{2}\,\eta^*(2)\,\eta^*(1)\,G(12,\,1'2')_{\text{невзаим}}\,\eta(1')\,\eta(2'),\qquad(1.204)$$

причем

$$G(12,\,1'2')_{\text{невзаим}}=G(1,\,1')\,G(2,\,2')\pm G(1,\,2')\,G(2,\,1'),\qquad(1.205)$$

где в явной форме учитывается тип статистики рассматриваемых частиц (знак плюс отвечает бозонам, а минус — фермионам). Соответственно этому двухчастичная функция Грина обладает определенными свойствами симметрии (имеющими место и в общем случае, а не только в отсутствие взаимодействия):

$$G(12,\,1'2')=\pm\,G(21,\,1'2')=\pm\,G(12,\,2'1').\qquad(1.206)$$

Тем самым подразумевается, что благодаря множителям $^1/_2$ в дифференциальных элементах объема не учитываются дважды тождественные частицы. Функция Грина (1.205) подчиняется дифференциальному уравнению

$$(E-T)_1\,(E-T)_2\,G(12,\,1'2')_{\text{невзаим}}=$$
$$=\delta(1,\,1')\,\delta(2,\,2')\pm\delta(1,\,2')\,\delta(2,\,1').\qquad(1.207)$$

Теперь уже становится совсем ясным, что справедливо следующее общее правило. Все предыдущие результаты переносятся и на случай тождественных частиц. Для этого нужно заменить дельта-функции соответствующим образом симметризованными комбинациями, которые указаны выше, а, кроме того, все интегрирования следует проводить так, чтобы одни и те же частицы не учитывались 2 раза.

§ 2. ДВУХЧАСТИЧНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ I

Прежде чем приступать к построению релятивистской теории частиц, взаимодействие между которыми обусловлено электромагнитными силами, напомним некоторые моменты теории скелетного взаимодействия, изложенной в гл. 3, § 12. Нас будет интересовать многофотонная аннигиляция частицы и античастицы со спинами $^1/_2$, а также обратное превращение. Таким процессам соответствуют члены скелетного взаимодействия (3-12.17), приведенные в формулах (3-12.24). Первые два из них можно представить в виде вакуумной амплитуды:

$$\begin{aligned} iW_{21}&=i\int(dx)\,A^{\mu}(x)\,J_{\mu}(x)\,|_{\text{эфф}},\\ iW_{22}&=\frac{1}{2}\,i^2\int(dx)\,(dx')\,A^{\mu}(x)\,A^{\nu}(x')\,J_{\mu}(x)\,J_{\nu}(x')\,|_{\text{эфф}},\end{aligned}\qquad(2.1)$$

где эффективные фотонные источники таковы:

$$J_\mu(x)|_{\text{эфф}} = \frac{1}{2}\,\psi(x)\,\gamma^0 eq\gamma_\mu\psi(x) \tag{2.2}$$

и

$$iJ_\mu(x)\,J_\nu(x')|_{\text{эфф}} = \frac{1}{2}\,[\psi(x)\,\gamma^0 eq\gamma_\mu G_+(x-x')\,eq\gamma_\nu\psi(x') + \\ + \psi(x')\,\gamma^0 eq\gamma_\nu G_+(x'-x)\,eq\gamma_\mu\psi(x)]. \tag{2.3}$$

Поскольку происхождение этих комбинаций связано с разложением члена взаимодействия

$$W_{2\ldots} = \frac{1}{2}\int (dx)\,(dx')\,\eta(x)\,\gamma^0 G_+^A(x, x')\,\eta(x'), \tag{2.4}$$

они допускают более компактное и единообразное представление с использованием вариационных производных:

$$J_\mu(x)|_{\text{эфф}} = \frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta A^\mu(x)}\,iW_{2\ldots i}|_{A=0},$$

$$J_\mu(x)\,J_\nu(x')|_{\text{эфф}} = \frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta A^\mu(x')}\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta A^\nu(x')}\,iW_{2\ldots}|_{A=0}. \tag{2.5}$$

Отсюда видно, в каком именно смысле $(1/i)\,\delta/\delta A^\mu(x)$ играет символическую роль источника многофотонного испускания (или поглощения). Все подобные выражения содержатся в функциональной форме записи разложения в ряд Тейлора

$$iW_{2\ldots} = \exp\left[i\int (d\xi)\,A^\mu(\xi)\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta A^\mu(\xi)'}\right]\frac{i}{2}\int (dx)\,(dx')\,\eta(x)\,\gamma^0 \times \\ \times G_+^{A'}(x, x')\,\eta(x')|_{A'=0}. \tag{2.6}$$

В гл. 3, § 12 отмечалось также, что при использовании некоторых определенных калибровок для фотонных функций распространения не возникает никаких проблем, связанных с излучением фотонов источниками заряженных частиц. В нашем случае это обстоятельство находит свое выражение в записи

$$A^\mu(x) = \int (dx')\,D_+^{\mu\nu}(x-x')\,J_\nu(x'), \tag{2.7}$$

где $D_+^{\mu\nu}$ — функция, даваемая формулами (3-12.8) и (3-12.9). От более простой комбинации $g^{\mu\nu}D_+(x-x')$ эта функция отличается калибровочными членами, соответствующими одному или обоим векторным индексам μ и ν. Конкретные детали мы напомним ниже.

Интересующая нас в данном параграфе система состоит из двух заряженных частиц разного сорта, спин каждой из которых равен $^1/_2$ и которые нумеруются индексами 1 и 2. В отсутствие взаимодействия они описываются вакуумной амплитудой

$$\left[i\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\eta(x)\gamma^0G_+(x-x')\eta(x')\right]_1\left[i\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\eta(x)\times\right.$$
$$\left.\times\gamma^0G_+(x-x)'\eta(x')\right]_2=-\frac{1}{4}\int(dx_1)\ldots(dx_2')\eta(x_2)\eta(x_1)\times$$
$$\times\gamma_1^0\gamma_2^0G_+(x_1-x_1')G_+(x_2-x_2')\eta(x_1')\eta(x_2'), \tag{2.8}$$

которую мы выразили через двухчастичную функцию Грина

$$G_+(x_1x_2,\ x_1'x_2')_{\text{невзаим}}=G_+(x_1-x_1')G_+(x_2-x_2'). \tag{2.9}$$

Влияние взаимодействий можно учитывать по-разному, рассматривая разные причинные последовательности. Мы выбрали такой вариант: частица и античастица сорта 2 аннигилируют, давая произвольное число фотонов, которые затем рекомбинируют, порождая частицу и античастицу сорта 1 (и обратный процесс). Скелетное описание этих процессов дает нам величина (2.6); в отбрасывании формфакторов для различных актов взаимодействия и состоит суть скелетной схемы. Кроме того, сопоставляя фотонам, которыми обмениваются частицы, простую функцию распространения D_+ (проблема калибровки пока не затрагивается), мы также применяем скелетное описание. Процессы обмена сколь угодно большим числом фотонов символически представляются в вакуумной амплитуде множителем

$$\exp\left[i\int(d\xi)(d\xi')\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A_1^{\mu}(\xi)}D_+(\xi-\xi')^{\mu\nu}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A_2^{\nu}(\xi')}\right], \tag{2.10}$$

действующим на ту ее часть, в которую входят частицы. Последняя же совпадает с величиной (2.8), если функции распространения заменить их выражениями, в которых учтено влияние электромагнитных полей $A^{\mu}_{1,2}$, в соответствии с уравнениями

$$\begin{aligned}&\left[\gamma\left(\frac{1}{i}\partial-eqA\right)+m\right]_1G_+^{A_1}(x_1,\ x_1')=\delta(x_1-x_1'),\\&\left[\gamma\left(\frac{1}{i}\partial-eqA\right]+m\right]_2G_+^{A_2}(x,\ x_2')=\delta(x_2-x_2').\end{aligned} \tag{2.11}$$

В результате мы получаем некое символическое представление двухчастичной функции распространения, в котором собраны все рассматриваемые скелетные взаимодействия:

$$G_+(x_1x_2,\ x_1'x_2')=\exp\left[-i\int(d\xi)(d\xi')\frac{\delta}{\delta A_1^{\mu}(\xi)}D_+(\xi-\xi')^{\mu\nu}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\delta}{\delta A_2^{\nu}(\xi')}\right]G_+^{A_1}(x_1,\ x_1')G_+^{A_2}(x_2,\ x_2')\big|_{A_{1,2}=0}. \tag{2.12}$$

Мы записали эту функцию в пространственно-временной форме, исключив тем самым всякие ссылки на исходную причинную последовательность.

Здесь имеется совершенно очевидное сходство с нерелятивистским выражением (1.179). Поэтому при выводе дифференциального уравнения сначала можно действовать аналогично предыдущему:

$$\left(\gamma \frac{1}{i}\partial + m\right)_1 \left(\gamma \frac{1}{i}\partial + m\right)_2 G_+(x_1x_2,\ x_1'x_2') =$$
$$= \exp[\quad][\delta(x-x') + eq\gamma A(x)\, G_+^A(x,\ x')]_1 [\delta(x-x') +$$
$$+ eq\gamma A(x)\, G_+^A(x,\ x')]_2 |_{A_{1,\,2}=0} = \delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2') +$$
$$+ \exp[\quad][eq\gamma A(x)\, G_+^A(x,\ x')]_1 [eq\gamma A(x)\, G_+^A(x,\ x')]_2 |_{A_{1,\,2}=0}. \tag{2.13}$$

Следующий шаг состоит в использовании тождества

$$\exp[\quad] A_1^\mu(\xi) = A_1^\mu(\xi)\exp[\quad] + \exp[\quad] \times$$
$$\times \int (d\xi')\, D_+(\xi - \xi')^{\mu\nu} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta A_2^\nu(\xi')}, \tag{2.14}$$

которое вместе с аналогичным равенством для A_2^ν дает нам

$$\left[\left(\gamma \frac{1}{i}\partial + m\right)_1 \left(\gamma \frac{1}{i}\partial + m\right)_2 - I^{(1)}(x_1x_2)\right] G_+(x_1x_2,\ x_1'x_2') -$$
$$- \delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2') = -\exp[\quad] \int (d\xi)\,(d\xi')\,(eq\gamma^\mu)_1 \times$$
$$\times (eq\gamma^\nu)_2\, D_+(x_1 - \xi')_{\mu\lambda}\, D_+(x_2 - \xi)_{\nu\varkappa} \times$$
$$\times \frac{\delta}{\delta A_{1\varkappa}(\xi)} \frac{\delta}{\delta A_{2\lambda}(\xi')} G_+^{A_1}(x_1,\ x_1')\, G_+^{A_2}(x_2,\ x_2')\, |_{A_{1,\,2}=0}, \tag{2.15}$$

где

$$I^{(1)}(x_1x_2) = -i\,(eq\gamma^\mu)_1\, D_+(x_1 - x_2)_{\mu\nu}\,(eq\gamma^\nu)_2. \tag{2.16}$$

Из соотношений (2.11) вытекает дифференциальное уравнение

$$(\gamma\Pi + m)\,\delta G_+^A(x, x') = eq\gamma\delta A(x)\, G_+^A(x,\ x'), \tag{2.17}$$

решение которого имеет вид

$$\delta G_+^A(x,\ x') = \int (d\xi)\, G_+^A(x,\ \xi)\, eq\gamma\delta A(\xi)\, G_+^A(\xi,\ x'). \tag{2.18}$$

Через функциональную производную этот результат выражается следующим образом:

$$\frac{\delta G_+^A(x,\ x')}{\delta A_\mu(\xi)} = G_+^A(x,\ \xi)\, eq\gamma^\mu G_+^A(\xi,\ x'). \tag{2.19}$$

[Примером данного соотношения может служить эквивалентность первого из утверждений (2.5) определению (2.2).] Итак, в полной аналогии с формулами (1.185) и (1.186) для правой части равенства (2.15) получаем

$$-\exp[\quad]\int(d\xi)(d\xi')(eq\gamma^{\mu})_1(eq\gamma^{\nu})_2 D_+(x_1-\xi')_{\mu\lambda} D_+(x_2-\xi)_{\nu\varkappa}\times$$
$$\times G_+^{A_1}(x_1,\xi)(eq\gamma^{\varkappa})_1 G_+^{A_1}(\xi,x_1')G_+^{A_2}(x_2,\xi')\times$$
$$\times(eq\gamma^{\lambda})_2 G_+^{A_2}(\xi',\ x_2')\,|_{A_{1,2}=0}. \tag{2.20}$$

Однако на этом и кончается сходство с нерелятивистским случаем. Фотонная функция распространения не переносит мгновенного взаимодействия, а функции распространения частиц не удовлетворяют запаздывающим граничным условиям. Появление же в выражении (2.20) четырех функций распространения частиц означает, что в процессе отыскания $G_+(x_1x_2,\ x_1'x_2')$ вводятся новые классы функций распространения. Таким образом, в релятивистской области нет прямого аналога двухчастичному уравнению нерелятивистской теории, если не считать понимаемых в не совсем точном смысле некоторых приближенных схем, связывающих комбинацию (2.20) непосредственно с двухчастичной функцией Грина. Пример такого рода схемы возникает в том случае, когда мы различаем множители из функций распространения $G_+^{A_1}(\xi,\ x_1')\,G_+^{A_2}(\xi',\ x_2')$ и $G_+^{A_1}(x_1,\ \xi)\,G_+^{A_2}(x_2,\ \xi')$. Первым из них описывается распространение частиц из области, где они первоначально родились, в область, где происходит процесс двухфотонного обмена, который учтен в формуле (2.20), тогда как второй множитель соответствует частицам, участвующим в процессе взаимодействия. Возможно, что при определенных условиях дополнительные взаимодействия между частицами (которым отвечает множитель exp [ ]) весьма малы в течение процесса двухфотонного обмена, хотя ими заведомо нельзя пренебрегать во время предшествующего существования этих частиц. В таком случае мы для величины (2.20) получим приближенное выражение

$$\int(d\bar{x}_1)(d\bar{x}_2)\,I^{(2)}(x_1x_2,\ \bar{x}_1\bar{x}_2)\,G_+(\bar{x}_1\bar{x}_2,\ x_1'x_2'), \tag{2.21}$$

в котором

$$I^{(2)}(x_1x_2,\ \bar{x}_1\bar{x}_2)=-(eq\gamma^{\mu})_1(eq\gamma^{\nu})_2 D_+(x_1-\bar{x}_2)_{\mu\nu}\times$$
$$\times D_+(x_2-\bar{x}_1)_{\nu\varkappa}G_+(x_1-\bar{x}_1)\,G_+(x_2-\bar{x}_2)(eq\gamma^{\varkappa})_1(eq\gamma^{\lambda})_2, \tag{2.22}$$

и в итоге придем к двухчастичному уравнению, которое в символической форме записи имеет вид

$$[(\gamma p+m)_1(\gamma p+m)_2-I_{12}]\,G_{12}=1, \tag{2.23}$$

где

$$I_{12}=I_{12}^{(1)}+I_{12}^{(2)}+\ldots. \tag{2.24}$$

Этот анализ относился к общему случаю, когда

$$D_+ (x - x')_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} D_+ (x - x') + \text{калибровочные члены.} \quad (2.25)$$

Но наша основная задача состоит, очевидно, в извлечении физических следствий из развиваемого формализма, а они не должны зависеть от какого-то конкретного выбора калибровочных членов. Чтобы исследовать влияние последних, выясним, к каким результатам приводит изменение величины $D_+ (\xi - \xi')^{\mu\nu}$, обусловленное калибровочным преобразованием, зависящим от μ. Оно приводит к появлению в формуле (2.10) дополнительного множителя вида

$$\exp\left[\int (d\xi)\, \partial^\mu \lambda(\xi) \frac{\delta}{\delta A_1^\mu(\xi)}\right], \quad (2.26)$$

где $\lambda(\xi)$ — также некоторый линейный функционал величины $\delta/\delta A_2$. Оператор (2.26) вызывает сдвиг величины A^μ

$$A_1^\mu(\xi) \to A_1^\mu(\xi) + \partial^\mu \lambda(\xi) \quad (2.27)$$

Но такой сдвиг есть калибровочное преобразование, в результате которого функция $G_+^{A_1}(x_1, x_1')$ изменяется следующим образом:

$$G_+^{A_1}(x_1, x_1') \to \exp[ieq\lambda(x_1)]\, G_+^{A_1}(x_1, x_1') \exp[-ieq\lambda(x_1')]. \quad (2.28)$$

Здесь существенно то, что изменению подвергаются крайние аргументы функции Грина, и это не удивительно, если вспомнить, что калибровочные члены соответствуют некоторому альтернативному способу описания электромагнитной модели источника, а также имеющегося в ней излучения источников. Подобные аспекты функции Грина в общем-то не представляют никакого физического интереса, и нам нужно научиться отделять их от той информации, которую мы хотим иметь. Конечно, данная ситуация для нас не нова. Так обстоит дело во всякой схеме рассеяния, но там имеются интуитивно очевидные теоретические эквиваленты экспериментального экранирования, благодаря которому поглощается прямое электромагнитное излучение источников частиц.

В данном параграфе мы будем заниматься энергетическими спектрами. Проиллюстрируем проблему на совсем простом примере, рассмотрев с этой целью предельный случай чрезвычайно массивных частиц, которые почти сохраняют свое состояние покоя. При таких условиях частицы допускают описание посредством формализма фотонных источников. Это становится очевидным из уравнения для функции Грина, записанного в приведенной форме, которую оно примет, если опустить все пространственные импульсы:

$$[-\gamma^0 (i\partial_0 - eqA^0) + m]\, G_+^A(x, x') = \delta(x^0 - x^{0\prime})\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.29)$$

Действительно, его решение (при $x^0 > x^{0'}$)

$$G_+^A(x, x') = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \exp\left[-ieq \int_{x^{0'}}^{x^0} dt A^0(\mathbf{x}, t)\right] \frac{i}{2}(1+\gamma^0) \times$$
$$\times \exp[-im(x^0 - x^{0'})] \tag{2.30}$$

обнаруживает свойства заряда eq, находящегося в точке $\mathbf{x}$ в интервале времени от $x^{0'}$ до x^0. Независимо от того, будем ли мы исходить из выражения (2.12) или прямо применим формализм источников, взаимодействие между частицами будет описываться множителем

$$\exp\left[i(eq)_1(eq)_2 \int_{x_1^{0'}}^{x_1^0} dt_1 \int_{x_2^0}^{x_2^0} dt_2 D_+(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2, t_1-t_2)^{00}\right]. \tag{2.31}$$

В радиационной калибровке, где, согласно соотношению (3-15.51),

$$A^0(\mathbf{x}t) = \int (d\mathbf{x}') \mathscr{D}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') J^0(\mathbf{x}'t),$$
$$\mathscr{D}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}, \tag{2.32}$$

мы имеем

$$D_+(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2)^{00} = -\delta(t_1 - t_2)\mathscr{D}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \tag{2.33}$$

Но тогда множитель (2.31) сводится к величине

$$\exp[-iET], \tag{2.34}$$

где T — длительность промежутка времени, в течение которого существуют обе частицы сразу, а

$$E = (eq)_1 (eq)_2 \mathscr{D}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \tag{2.35}$$

есть предполагаемая энергия кулоновского взаимодействия зарядов.

Сравним теперь этот элементарный результат с тем результатом, который получится, если опустить все калибровочные члены и оперировать прямо с $g^{\mu\nu}D_+$:

$$D_+(x-x')^{00} = -D_+(x-x') =$$
$$= -\int \frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3} \frac{i}{2|\mathbf{k}|} \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - i|\mathbf{k}||x^0 - x^{0'}|]. \tag{2.36}$$

При выполнении в формуле (2.31) интегрирований по времени удобно воспользоваться дифференциальным уравнением

$$(\partial_0^2 + |\mathbf{k}|^2) \frac{i}{2|\mathbf{k}|} \exp(-i|\mathbf{k}||x^0 - x^{0'}|) = \delta(x^0 - x^{0'}). \tag{2.37}$$

В итоге будем иметь

$$|\mathbf{k}|^2 \int\limits_{x_1^{0\prime}}^{x_1^0} dt_1 \int\limits_{x_2^{0\prime}}^{x_2^0} dt_2 \frac{i}{2|\mathbf{k}|} \exp(-i|\mathbf{k}||t_1-t_2|) =$$

$$= T + \frac{i}{2|\mathbf{k}|} \exp(-i|\mathbf{k}||t_1-t_2|)\Big|_{x_1^{0\prime}}^{x_1^0}\Big|_{x_2^{0\prime}}^{x_2^0} =$$

$$= T + \frac{i}{2|\mathbf{k}|} [\exp(-i|\mathbf{k}||x_1^0 - x_2^0|) - \exp(-i|\mathbf{k}||x_1^0 - x_2^{0\prime}|) -$$

$$- \exp(-i|\mathbf{k}||x_2^0 - x_2^{0\prime}|) + \exp(-i|\mathbf{k}||x_1^{0\prime} - x_2^{0\prime}|)], \qquad (2.38)$$

где через T мы снова обозначили промежуток времени, в течение которого существуют обе частицы сразу. В случае равных времен, когда

$$x_1^0 = x_2^0, \quad x_1^{0\prime} = x_2^{0\prime}, \quad x_1^0 - x_1^{0\prime} = T, \qquad (2.39)$$

эта комбинация сводится к

$$T + \frac{i}{|\mathbf{k}|} [1 - \exp(-i|\mathbf{k}|T)]. \qquad (2.40)$$

В таком случае мы имеем

$$-\int dt_1\, dt_2\, D_+^{00} = \int \frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3} \frac{\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)]}{|\mathbf{k}|^2} \times$$

$$\times \left[T + \frac{i}{|\mathbf{k}|} [1 - \exp(-i|\mathbf{k}|T)]\right] =$$

$$= T\mathscr{D}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + i \int \frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3} \frac{\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)]}{|\mathbf{k}|^3} \left[1 - \exp(-i|\mathbf{k}|T)\right], \qquad (2.41)$$

так что множитель (2.31) принимает вид

$$\exp[-iET] \exp\left[(eq)_1 (eq)_2 \int \frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3} \frac{\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)]}{|\mathbf{k}|^3} \times \right.$$

$$\left. \times [1 - \exp(-i|\mathbf{k}|T)]\right], \qquad (2.42)$$

где E — по-прежнему энергия, даваемая формулой (2.35).

Величина (2.42) представляет собой производящую функцию для энергетического спектра. В обозначениях

$$a_{\mathbf{k}} = -(eq)_1 (eq)_2 \frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3} \frac{\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)]}{|\mathbf{k}|^3} \qquad (2.43)$$

и

$$A = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \qquad (2.44)$$

она записывается как

$$\exp(-iET)\exp(-A)\exp\left[\sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}\exp(-i|\mathbf{k}|T)\right]=$$

$$=\exp(-A)\exp(-iET)+\sum_{\mathbf{k}}\exp(-A)\,a_{\mathbf{k}}\exp[-i(E+|\mathbf{k}|)T]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\exp(-A)\,a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'}\exp[-i(E+|\mathbf{k}|+|\mathbf{k}'|)T]+\ldots. \qquad (2.45)$$

Мы видим, что у нашей системы есть основное состояние с энергией E и возбужденные состояния, в каждом из которых присутствует произвольное число фотонов. Последнее обстоятельство носит искусственный характер и связано с тем конкретным (нефизическим) способом, которым была построена двухчастичная система. Вся физическая информация, содержащаяся в производящей функции (2.42) — это энергия системы в отсутствие фотонов, т. е. кулоновская энергия E. Встает вопрос, каким образом можно извлечь этот единственный бит информации, не имея никаких других сведений. Ответ таков: нужно свести к минимуму не относящиеся к делу краевые эффекты, рассмотрев очень большой промежуток времени. Осциллирующий характер экспоненты $\exp(-i|\mathbf{k}|T)$ гарантирует нам, что в соответствующую составляющую интеграла по импульсам (2.42), которая служит инфракрасным обрезанием к части интеграла, не зависящей от T, дают вклад лишь значения $|\mathbf{k}| \lesssim 1/T$. Таким образом, величина (2.42) асимптотически ведет себя как

$$\exp(-A_T)\exp(-iET), \qquad (2.46)$$

где грубо приближенно можно принять

$$A_T=\frac{(eq)_1(eq)_2}{4\pi}\frac{2}{\pi}\int_{\sim 1/T}^{\infty}\frac{dk^0}{k^0}\frac{\sin k^0R}{k^0R}, \quad R=|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|. \qquad (2.47)$$

Множитель $\exp(-A_T)$ имеет вид (содержащей инфракрасную особенность) вероятности того, что в процессе рождения не будет испущено ни одного фотона. Но даже и он не несет физической информации, поскольку в случае зарядов с противоположными знаками величина $\exp(-A_T)$ превышает единицу. В итоге остается как раз энергия E.

В дальнейшем, по крайней мере в тех случаях, когда основную роль играют нерелятивистские эффекты, наиболее подходящей будет радиационная калибровка, обеспечивающая два преимущества. Она упрощает проблему выделения физически значимой информации, а также улучшает сходимость разложения (2.24).

Оба преимущества основаны на предположении, что главные вклады обусловлены мгновенной компонентой (2.33) тензорной функции распространения. Остальные компоненты можно выделить из полного выражения, даваемого формулами (3-12.8) и (3-15.48),

$$D_+(k)_{\mu\nu}=\left[g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu+(nk)(k_\mu n_\nu+n_\mu k_\nu)}{k^2+(nk)^2}\right]D_+(k)=$$
$$=-\frac{n_\mu n_\nu}{k^2+(nk)^2}+\left[g_{\mu\nu}+n_\mu n_\nu-\frac{(k_\mu+n_\mu nk)(k_\nu+n_\nu nk)}{k^2+(nk)^2}\right]D_+(k) \qquad (2.48)$$

или же, менее ковариантным способом, из уравнений (3-15.52) и (3-15.53) для поперечной составляющей поля. Приведенное в последнем из этих уравнений выражение для той части $\mathbf{J}(x)$, дивергенция которой равна нулю, может быть представлено в следующей символической форме:

$$\mathbf{J}_T(x)=\left(1-\frac{\nabla\nabla}{\nabla^2}\right)\cdot\mathbf{J}(x), \qquad (2.49)$$

и тогда

$$\mathbf{A}(x)=\left(1-\frac{\nabla\nabla}{\nabla^2}\right)\cdot\int(dx')\,D_+(x-x')\,\mathbf{J}(x'). \qquad (2.50)$$

Отсюда мы находим пространственные компоненты тензорной функции распространения

$$D_+(x-x')_{kl}=\left(\delta_{kl}-\frac{\partial_k\partial_l}{\nabla^2}\right)D_+(x-x'), \qquad (2.51)$$

которые можно получить и из последнего слагаемого в формуле (2.48), рассматривая его в системе координат, где вектор n_μ направлен вдоль оси времени.

Выделим мгновенную часть величины (2.51). Это достигается путем тождественного преобразования

$$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k^2+(nk)^2}+\frac{(nk)^2}{k^2+(nk)^2}\frac{1}{k^2}, \qquad (2.52)$$

или

$$D_+(x-x')=\delta(x^0-x^{0\prime})\,\mathscr{D}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')+\partial_0^2\frac{1}{\nabla^2}D_+(x-x'). \qquad (2.53)$$

Таким образом, мгновенная часть оказывается равной

$$D_+(x-x')_{kl}^{\text{мгн}}=\delta(x^0-x^{0\prime})\int\frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3}\left(\delta_{kl}-\frac{k_k k_l}{\mathbf{k}^2}\right)\frac{\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')]}{\mathbf{k}^2}, \qquad (2.54)$$

а остаток дается формулой

$$D_+(x-x')_{kl}^{\text{немгн}}=\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left(\delta_{kl}-\frac{k_k k_l}{\mathbf{k}^2}\right)\frac{(k^0)^2}{\mathbf{k}^2}\frac{\exp[ik(x-x')]}{k^2-i\varepsilon}. \qquad (2.55)$$

Чтобы получить явное пространственное выражение для мгновенной функции, заметим, что

$$\frac{1}{\nabla^2}\mathscr{D}(\mathbf{x})=\frac{1}{\nabla^2}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}|\mathbf{x}|. \tag{2.56}$$

Здесь учтено равенство (4-15.48), в котором нас не интересует аддитивная константа, поскольку необходимы только производные

$$\partial_k\partial_l\frac{1}{\nabla^2}\mathscr{D}(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_{kl}}{|\mathbf{x}|}-\frac{x_kx_l}{|\mathbf{x}|^3}\right). \tag{2.57}$$

В результате получаем

$$D_+(x-x')_{kl}^{\text{мгн}}=\delta(x^0-x^{0\prime})\frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\left[\frac{\delta_{kl}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}+\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')_k(\mathbf{x}-\mathbf{x}')_l}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\right]. \tag{2.58}$$

Мы начнем с двухчастичного уравнения (2.23), в котором сохраняется лишь мгновенная часть величины $I_{12}^{(1)}$. Напишем для нее

$$I_{12}^{(1)}(x_1x_2)^{\text{мгн}}=i\delta(x_1^0-x_2^0)\,\gamma_1^0\gamma_2^0V(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2), \tag{2.59}$$

где

$$V(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)=\frac{(eq)_1(eq)_2}{4\pi}\left[\frac{1}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}-\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\alpha}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\,\boldsymbol{\alpha}_2\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^3}\right], \tag{2.60}$$

причем мы снова пользуемся эрмитовыми матрицами

$$\boldsymbol{\alpha}=\gamma^0\boldsymbol{\gamma}. \tag{2.61}$$

Эквивалентное интегральное уравнение имеет вид

$$G_{12}^{\text{мгн}}=G_1G_2+G_1G_2I_{12}^{\text{мгн}}G_{12}^{\text{мгн}}. \tag{2.62}$$

Мы будем работать с равновременными функциями

$$G_{1+2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2t,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2't')=iG_{12}(\mathbf{x}_1t\mathbf{x}_2t,\ \mathbf{x}_1't'\mathbf{x}_2't')^{\text{мгн}}\gamma_1^0\gamma_2^0 \tag{2.63}$$

и

$$G_{1+2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2t,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2't')_{\text{невзаим}}=iG_+(\mathbf{x}_1t,\ \mathbf{x}_1't')\,\gamma_1^0G_+(\mathbf{x}_2t,\ \mathbf{x}_2't')\,\gamma_2^0. \tag{2.64}$$

Этому частному случаю соответствует интегральное уравнение

$$G_{1+2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2t,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2't')=G_{1+2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2t,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2't')_{\text{невзаим}}+$$
$$+\int(d\bar{\mathbf{x}}_1)(d\bar{\mathbf{x}}_2)\,d\bar{t}\,G_{1+2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2t,\ \bar{\mathbf{x}}_1\bar{\mathbf{x}}_2\bar{t})_{\text{невзаим}}\times$$
$$\times V(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2)\,G_{1+2}(\bar{\mathbf{x}}_1\bar{\mathbf{x}}_2\bar{t},\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2't'). \tag{2.65}$$

Перепишем его в виде дифференциального уравнения, воспользовавшись для этого уравнением Дирака, которому подчиняется функция $G_+(x-x')$:

$$(-i\partial_0 + H)\, G_+(x-x') = \gamma^0 \delta(x^0 - x^{0\prime})\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{2.66}$$

где

$$H = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \gamma^0 m, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{i}\nabla. \tag{2.67}$$

Так, например, мы имеем

$$\begin{gathered}(i\partial_t - H_1 - H_2)\, G_{1+2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 t,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' t')_{\text{невзаим}} = \\ = \delta(t-t')\,\frac{1}{i}\,[\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1')\, G_+(\mathbf{x}_2 t,\ \mathbf{x}_2' t)\,\gamma_2^0 + \\ + \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2')\, G_+(\mathbf{x}_1 t,\ \mathbf{x}_1' t)\,\gamma_1^0].\end{gathered} \tag{2.68}$$

Для каждой из функций $G_+(\mathbf{x}t,\ \mathbf{x}'t)$ берется среднее двух ее предельных выражений при $t-t' \to \pm 0$:

$$\begin{gathered}G_+(\mathbf{x}t,\ \mathbf{x}'t) = \frac{1}{2}\Big[i\int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\,\frac{\exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')]}{2p^0}\,(m - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + \gamma^0 p^0) + \\ + i\int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\,\frac{\exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')]}{2p^0}\,(m - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + \gamma^0 p^0)\Big],\end{gathered} \tag{2.69}$$

или

$$\frac{1}{i}\, G_+(\mathbf{x}t,\ \mathbf{x}'t)\,\gamma^0 = H\int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\,\frac{\exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')]}{2p^0} = \frac{1}{2}\,\frac{H}{W}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{2.70}$$

В последнем случае результат представлен в символической форме, причем мы ввели обозначение

$$W = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}. \tag{2.71}$$

В итоге дифференциальное уравнение (2.68) принимает вид

$$\begin{gathered}(i\partial_t - H_1 - H_2)\, G_{1+2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 t,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' t')_{\text{невзаим}} = \\ = \delta(t-t')\,\frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{W_1} + \frac{H_2}{W_2}\right)\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1')\,\delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2'),\end{gathered} \tag{2.72}$$

и от соответствующего нерелятивистского уравнения (1.14) оно отличается наличием множителя, содержащего H/W.

Заметим, что

$$\left(\frac{H}{W}\right)^2 = \frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \gamma^0 m)^2}{\mathbf{p}^2 + m^2} = 1, \tag{2.73}$$

а, следовательно, собственные значения эрмитовой величины H/W равны ± 1. В соответствии с этим дополнительный множитель, или правая часть равенства (2.72), имеет собственные значения 1, 0, -1. Это становится ясным, если написать

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{W_1} + \frac{H_2}{W_2}\right) = \frac{1}{4}\Big[\left(1 + \frac{H_1}{W_1}\right)\left(1 + \frac{H_2}{W_2}\right) - \\ - \left(1 - \frac{H_1}{W_1}\right)\left(1 - \frac{H_2}{W_2}\right)\Big].\end{gathered} \tag{2.74}$$

Соответствующим решением дифференциального уравнения (2.72) является функция

$$G_{1+2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2t,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2't')_{\text{невзаим}} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{H_1}{W_1}\right)\left(1+\frac{H_2}{W_2}\right)\times$$
$$\times G(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' \mid t-t')_{\text{невзаим}} +$$
$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{H_1}{W_1}\right)\left(1-\frac{H_2}{W_2}\right)G(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' \mid t-t')_{\text{невзаим}}, \qquad (2.75)$$

где $G(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' \mid t-t')$ — запаздывающая функция Грина, которая подчиняется уравнению

$$(i\partial_t - W_1 - W_2)\,G(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' \mid t-t')_{\text{невзаим}} =$$
$$= \delta(t-t')\,\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_1')\,\delta(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_2'). \qquad (2.76)$$

Конечно, к этому результату можно прийти и прямым путем, перемножив равновременные выражения для двух одночастичных функций Грина

$$x^0 \gtrless x^{0\prime}: \quad G_+(x-x')\,\gamma^0 =$$
$$= i\int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2p^0}\,(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\gamma^0 \pm p^0)\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - ip^0|x^0-x^{0\prime}|\right] =$$
$$= \frac{i}{2}\left[\frac{H}{W} \pm 1\right]\exp\left(-iW|x^0-x^{0\prime}|\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \qquad (2.77)$$

Дифференциальное уравнение (2.72) можно упростить, заметив, что

$$\frac{H}{W} = U^{-1}\gamma^0 U, \qquad (2.78)$$

где U — унитарная матрица:

$$U = \exp\left[\frac{1}{2}\,\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\,\varphi\right], \quad \sin\varphi = \frac{|\mathbf{p}|}{W}, \quad \cos\varphi = \frac{m}{W}. \qquad (2.79)$$

Так, в отсутствие взаимодействия функция

$$\overline{G}_{1+2} = U_1U_2G_{1+2}U_1^{-1}U_2^{-1} \qquad (2.80)$$

подчиняется уравнению

$$[i\partial_t - (\gamma^0W)_1 - (\gamma^0W)_2]\,\overline{G}_{1+2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2t,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2't')_{\text{невзаим}} =$$
$$= \delta(t-t')\frac{1}{2}(\gamma_1^0+\gamma_2^0)\,\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_1')\,\delta(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_2'). \qquad (2.81)$$

В представлении, в котором диагональны обе матрицы γ_1^0 и γ_2^0 с собственными значениями ± 1, имеются только две возможности, а именно

$$\gamma_1^{0\prime} = \gamma_2^{0\prime} = +1: \quad \overline{G}_{1+2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2t,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2't')_{\text{невзаим}} =$$
$$= G(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' \mid t-t')_{\text{невзаим}} \qquad (2.82)$$

и

$$\gamma_1^{0\prime} = \gamma_2^{0\prime} = -1: \quad \overline{G}_{1+2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 t,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' t')_{\text{невзаим}} = \\ = G(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' \mid t' - t)_{\text{невзаим}}. \tag{2.83}$$

Обе возможности можно учесть, написав

$$\overline{G}_{1+2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 t,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' t')_{\text{невзаим}} = \frac{1}{4}(1+\gamma_1^0)(1+\gamma_2^0) \times \\ \times G(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' \mid t - t')_{\text{невзаим}} + \\ + \frac{1}{4}(1-\gamma_1^0)(1-\gamma_2^0)\, G(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' \mid t' - t)_{\text{невзаим}}. \tag{2.84}$$

Это выражение, естественно, совпадает с тем, которое получается путем преобразования решения (2.75).

Дифференциальное уравнение, вытекающее из (2.65), имеет вид

$$(i\partial_t - H_1 - H_2)\, G_{1+2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 t,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' t') - \\ - \frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{W_1} + \frac{H_2}{W_2}\right) V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\, G_{1+2}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 t,\ \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2' t') = \\ = \delta(t - t')\, \frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{W_1} + \frac{H_2}{W_2}\right) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1')\, \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2'). \tag{2.85}$$

В соответствии с (2.80) оно преобразуется к виду

$$\left[i\partial_t - (\gamma^0 W)_1 - \gamma^0 W)_2 - \frac{1}{2}(\gamma_1^0 + \gamma_2^0)\, \overline{V}\right] \overline{G}_{1+2} = \\ = \delta(t - t')\, \frac{1}{2}(\gamma_1^0 + \gamma_2^0)\, \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1')\, \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2'), \tag{2.86}$$

где

$$\overline{V} = U_1 U_2 V U_1^{-1} U_2^{-1}. \tag{2.87}$$

Наличие множителя $^1/_2\,(\gamma_1^0 + \gamma_2^0)$, в частности в неоднородном члене уравнения, означает, что нужно рассматривать только такие индексы строк и столбцов матрицы $\overline{G}_{1+2}$, для которых $\gamma_1^{0\prime} = \gamma_2^{0\prime}$. Однако введением матрицы $\overline{V}$ нарушается диагональность матрицы $\overline{G}_{1+2}$. Пользуясь для указания общего значения $\gamma_1^{0\prime} = \gamma_2^{0\prime}$ в индексах строк и столбцов символами $+$ и $-$, перепишем (2.86) в виде двух пар уравнений

$$\begin{aligned} &(i\partial_t - W_1 - W_2 - \overline{V}_{++})\, \overline{G}_{++} - \overline{V}_{+-}\overline{G}_{-+} = \delta(t - t'), \\ &(i\partial_t + W_1 + W_2 + \overline{V}_{--})\, \overline{G}_{-+} + \overline{V}_{-+}\overline{G}_{++} = 0 \end{aligned} \tag{2.88}$$

и

$$\begin{aligned} &(i\partial_t + W_1 + W_2 + \overline{V}_{--})\, \overline{G}_{--} + \overline{V}_{-+}\overline{G}_{+-} = -\delta(t - t'), \\ &(i\partial_t - W_1 - W_2 - \overline{V}_{++})\, \overline{G}_{+-} - \overline{V}_{+-}\overline{G}_{--} = 0. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Прежде чем двигаться дальше, отметим, что

$$\overline{V}_{++} = \overline{V}_{--} \equiv V_0. \tag{2.90}$$

Кроме того, матрицы можно взять такими, чтобы выполнялось равенство

$$\overline{V}_{+-} = \overline{V}_{-+} \equiv V_1. \tag{2.91}$$

Эти соотношения показывают нам, какой характер имеет зависимость функции V, определяемой формулой (2.60), от матриц γ^0 и дополнительных матриц γ_5. Субматрицы $\overline{V}_{++}$ и $\overline{V}_{--}$ не содержат матриц γ_5, а в отдельное слагаемое могут не входить матрицы γ^0 или множитель $\gamma_1^0\gamma_2^0$. Одиночные матрицы γ^0 отсутствуют, поскольку источником каждой из них является матрица

$$\boldsymbol{\gamma} = i\gamma^0\gamma_5\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.92}$$

отличающаяся от

$$\boldsymbol{\alpha} = i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.93}$$

а значит, не сохраняется и ни одной одиночной матрицы γ_5. Так как входит только $\gamma_1^0\gamma_2^0 \to 1$, то нет никакого различия между $\overline{V}_{++}$ и $\overline{V}_{--}$, как это и утверждалось. Происхождение субматриц $\overline{V}_{+-}$ и $\overline{V}_{-+}$ связано с частью $\overline{V}$, пропорциональной $\gamma_{51}\gamma_{52}$, в которую, как и прежде, все множители входят в виде $\gamma_1^0\gamma_2^0 \to 1$. Произвольные фазы, содержащиеся в элементах эрмитовой матрицы $\gamma_{51}\gamma_{52}$, всегда можно подобрать так, чтобы она стала симметричной, что и составляет содержание утверждения (2.91).

Введя обозначение

$$H_0 = W_1 + W_2 + V_0, \tag{2.94}$$

напишем теперь уравнения (2.88) и (2.89) в виде систем

$$\begin{gathered}(i\partial_t - H_0)\overline{G}_{++} - V_1\overline{G}_{-+} = \delta(t-t'),\\ (i\partial_t + H_0)\overline{G}_{-+} + V_1\overline{G}_{++} = 0\end{gathered} \tag{2.95}$$

и

$$\begin{gathered}(i\partial_t + H_0)\overline{G}_{--} + V_1\overline{G}_{+-} = -\delta(t-t'),\\ (i\partial_t - H_0)\overline{G}_{+-} - V_1\overline{G}_{--} = 0.\end{gathered} \tag{2.96}$$

Тогда недиагональные элементы $\overline{G}$ можно будет найти с помощью запаздывающей и опережающей функций Грина, которые подчиняются уравнениям

$$\begin{gathered}(i\partial_t - H_0)\,G_{\text{зап}}(t-t') = \delta(t-t'),\\ (i\partial_t + H_0)\,G_{\text{опер}}(t-t') = -\delta(t-t'),\end{gathered} \tag{2.97}$$

а также условию

$$G_{\text{опер}}(t-t')=G_{\text{зап}}(t'-t). \tag{2.98}$$

В символической форме эта конструкция записывается как

$$\overline{G}_{-+}=G_{\text{опер}}V_1\overline{G}_{++},\quad \overline{G}_{+-}=\overline{G}_{\text{зап}}V_1\overline{G}_{--}. \tag{2.99}$$

Воспользовавшись еще раз запаздывающей и опережающей функциями, представим оставшиеся уравнения в виде интегральных:

$$\begin{gathered}\overline{G}_{++}=G_{\text{зап}}+G_{\text{зап}}V_1G_{\text{опер}}V_1\overline{G}_{++},\\ \overline{G}_{--}=G_{\text{опер}}+G_{\text{опер}}V_1G_{\text{зап}}V_1\overline{G}_{--}.\end{gathered} \tag{2.100}$$

Симметрия этой системы во времени дает нам дополнительное соотношение

$$\overline{G}_{--}(t-t')=\overline{G}_{++}(t'-t). \tag{2.101}$$

Однако каждая из этих функций не является запаздывающей или опережающей, а удовлетворяет понимаемым в некотором более общем смысле граничным условиям, накладываемым на G_+.

Мы довольствуемся приближенным решением уравнений (2.100), которое получается в результате однократной итерации:

$$\overline{G}_{++}=G_{\text{зап}}+G_{\text{зап}}V_1G_{\text{опер}}V_1G_{\text{зап}}. \tag{2.102}$$

Выписав временны́е переменные в явном виде, будем иметь

$$\begin{gathered}\overline{G}_{++}(t-t')=G_{\text{зап}}(t-t')+\int dt_1\,dt_2\,G_{\text{зап}}(t-t_1)\,V_1\times\\ \times G_{\text{опер}}(t_1-t_2)\,V_1G_{\text{зап}}(t_2-t')=G_{\text{зап}}(t-t')+\\ +\int_0^\infty d\tau\int_0^\infty d\tau'\,G_{\text{зап}}(\tau)\,V_1G_{\text{опер}}(t-t'-\tau-\tau')\,V_1G_{\text{зап}}(\tau').\end{gathered} \tag{2.103}$$

Чтобы убедиться в том, что выполняются временны́е граничные условия, накладываемые на G_+, достаточно рассмотреть отдельные временны́е экспоненты, содержащиеся в различных функциях Грина. Так, например, при $t-t'>0$ возникает комбинация

$$\begin{gathered}\int_0^\infty d\tau\,d\tau'\,\eta(\tau+\tau'-(t-t'))\exp(-iE\tau)\times\\ \times\exp[-iE'(\tau+\tau'-(t-t'))]\exp(-iE''\tau'),\end{gathered} \tag{2.104}$$

которая после замены переменных

$$T=\tau+\tau',\quad s=\frac{1}{2}(\tau-\tau') \tag{2.105}$$

приводит к интегралу

$$\int_{t-t'}^{\infty} dT \int_{-T/2}^{T/2} ds \exp\left[-iE\left(\frac{1}{2}T+s\right)\right] \exp\left[-iE'(T-(t-t'))\right] \times$$
$$\times \exp\left[-iE''\left(\frac{1}{2}T-s\right)\right] = \int_{t-t'}^{\infty} dT \frac{i}{E-E''}\left[\exp(-iET)-\right.$$
$$\left.-\exp(-iE''T)\right] \exp\left[-iE'(T-(t-t'))\right] =$$
$$= \frac{1}{E-E''}\left[\frac{\exp\left[-iE(t-t')\right]}{E+E'} - \frac{\exp\left[-iE''(t-t')\right]}{E''+E'}\right]. \qquad (2.106)$$

Сюда входят положительные частоты, которые как раз и требуются при положительных $t - t'$. Если же $t - t' < 0$, то опережающая функция Грина не накладывает никаких дополнительных ограничений на τ и τ', и мы сразу приходим к временнóй зависимости вида

$$\exp\left[iE'(t-t')\right] = \exp\left(-iE'\,|t-t'|\right), \qquad (2.107)$$

т. е. при отрицательных $t - t'$ возникают отрицательные частоты. Этими общими свойствами обладает также и функция $\bar{G}_{--}(t - t')$.

Энергетический спектр оператора энергии H_0, даваемого формулой (2.94), мы рассмотрим в случае, который является почти нерелятивистским. Другими словами, будут учитываться только первые отклонения от нерелятивистского поведения, чему соответствует сохранение в разложении

$$W = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} \approx m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)^2 + \ldots \qquad (2.108)$$

лишь указанных здесь членов. Следовательно, унитарная матрица (2.79)

$$U = \cos\frac{1}{2}\varphi + \frac{\gamma\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\sin\frac{1}{2}\varphi = \left(\frac{W+m}{2W}\right)^{1/2} + \frac{\gamma\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\left(\frac{W-m}{2W}\right)^{1/2} \qquad (2.109)$$

упрощается и принимает вид

$$U \approx 1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2} + \frac{1}{2m}\gamma\cdot\mathbf{p}. \qquad (2.110)$$

Нас интересуют комбинации

$$\begin{aligned} U_1U_2 &\approx 1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\mathbf{p}_1^2}{m_1^2} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{m_2^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma\cdot\mathbf{p}}{m}\right)_1\left(\frac{\gamma\cdot\mathbf{p}}{m}\right)_2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\gamma\cdot\mathbf{p}}{m}\right)_1 + \left(\frac{\gamma\cdot\mathbf{p}}{m}\right)_2\right], \\ U_1^{-1}U_2^{-1} &\approx 1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\mathbf{p}_1^2}{m_1^2} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{m_2^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma\cdot\mathbf{p}}{m}\right)_1\left(\frac{\gamma\cdot\mathbf{p}}{m}\right)_2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\gamma\cdot\mathbf{p}}{m}\right)_1 + \left(\frac{\gamma\cdot\mathbf{p}}{m}\right)_2\right]. \end{aligned} \qquad (2.111)$$

В функции V имеются слагаемые двух типов. Первое из них пропорционально единичной матрице:

$$V_a = \frac{(eq)_1 (eq)_2}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}, \tag{2.112}$$

а второе содержит произведения матриц Дирака. Мы будем записывать его как $\gamma_{51}\gamma_{52}V_b$, причем

$$V_b = \frac{(eq)_1 (eq)_2}{4\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\, \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \right]. \tag{2.113}$$

При вычислении субматрицы V_0 все члены с матрицей γ_5 любой из частиц отбрасываются. Соответственно этому

$$\begin{aligned}(U_1 U_2 U_a U_1^{-1} U_2^{-1})_{++} \approx {} & V_a - \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{\mathbf{p}_1^2}{m_1^2} + \frac{\mathbf{p}_1^2}{m_2^2} \right), V_a \right\} + \\ & + \frac{1}{4m_1^2} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_1 V_a \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_1 + \frac{1}{4m_2^2} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_2 V_a \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_2 = \\ & = V_a + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_1^2} \right) \nabla^2 V_a + \frac{1}{4m_1^2} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1 V_a + \mathbf{p}_1 + \\ & + \frac{1}{4m_2^2} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2 V_a \times \mathbf{p}_2,\end{aligned} \tag{2.114}$$

где использованы соотношения

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} V_a \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{2} \{\mathbf{p}^2, V_a\} + \frac{1}{2} \nabla^2 V_a + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} V_a \times \mathbf{p} \tag{2.115}$$

и

$$\begin{aligned}(U_1 U_2 \gamma_{51}\gamma_{52} V_b U_1^{-1} U_2^{-1})_{++} \approx {} & - \frac{1}{4m_1 m_2} \{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_2 V_b\} - \\ & - \frac{1}{4m_1 m_2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_1 V_b \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_2 + \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_2 V_b \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_1) = \\ & = - \frac{1}{4m_1 m_2} \{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_1, \{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_2, V_b\}\}.\end{aligned} \tag{2.116}$$

В последнем из них

$$V_b = \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2,$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{(eq)_1 (eq)_2}{4\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} + \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \right], \tag{2.117}$$

а поскольку эта конструкция ведет свое происхождение от поперечной функции распространения (2.54), то в комбинациях вида $\mathbf{p}_1 \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{p}_2$ симметризация произведения становится излишней ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Lambda} = 0$):

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_1, \{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_2, V_b\}\} = {} & 4\mathbf{p}_1 \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{p}_2 + 2\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}_1 \times \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{p}_2 + \\ & + 2\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla}_2 \times \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{p}_1 + (\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\nabla}_1)(\boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\nabla}_2) : \boldsymbol{\Lambda}.\end{aligned} \tag{2.118}$$

Обозначения в последнем слагаемом подразумевают скалярное перемножение диады $\mathbf{\Lambda}$ с двумя векторами. Представив $\mathbf{\Lambda}$ в явно поперечной форме

$$\mathbf{\Lambda}=\frac{(eq)_1(eq)_2}{4\pi}\left[1-\frac{\nabla\nabla}{\nabla^2}\right]\frac{1}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}, \tag{2.119}$$

мы увидим, что

$$\nabla\times\mathbf{\Lambda}=\nabla V_a\times . \tag{2.120}$$

Это дает, в частности,

$$(\sigma_1\times\nabla_1)(\sigma_2\times\nabla_2):\mathbf{\Lambda}=(\sigma_1\times\nabla_1)\cdot(\sigma_2\times\nabla_2)V_a=$$
$$=-\left(\sigma_1\cdot\nabla_2\sigma_2\cdot\nabla_1+\frac{1}{3}\sigma_1\cdot\sigma_2\nabla^2\right)V_a-\frac{2}{3}\sigma_1\cdot\sigma_2\nabla^2V_a \tag{2.121}$$

(в последнем слагаемом выделен результат усреднения по всем пространственным направлениям).

В итоге мы для энергетического оператора получаем

$$H_0=m_1+m_2+\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1}+\frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2}-\frac{1}{2m_1}\left(\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1}\right)^2-\frac{1}{2m_2}\left(\frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2}\right)^2+$$
$$+\frac{e_1e_2}{4\pi}\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1m_2}\frac{1}{2}\mathbf{p}_1\cdot\left[\frac{1}{r}+\frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right]\cdot\mathbf{p}_2-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}\right)\delta(\mathbf{r})-\right.$$
$$-\frac{1}{4m_1^2}\frac{\sigma_1\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}_1}{r^3}+\frac{1}{4m_2^2}\frac{\sigma_2\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}_2}{r^3}+\frac{1}{2m_1m_2}\left(\frac{\sigma_1\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}_2}{r^3}-\frac{\sigma_2\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}_1}{r^3}\right)-$$
$$\left.-\frac{1}{4m_1m_2}\left(3\frac{\sigma_1\cdot\mathbf{r}\sigma_2\cdot\mathbf{r}}{r^5}-\frac{\sigma_1\cdot\sigma_2}{r^3}\right)-\frac{1}{m_1m_2}\frac{2\pi}{3}\sigma_1\cdot\sigma_2\delta(\mathbf{r})\right\}, \tag{2.122}$$

где

$$\mathbf{r}=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2, \tag{2.123}$$

причем для простоты мы вместо $(eq)_{1,2}$ написали $e_{1,2}$. Основная наша цель — найти спектр величины H_0 в системе покоя двухчастичной системы, т. е. ее внутреннюю энергию. Но определенный интерес представляет и вопрос о том, каким образом в рассматриваемом случае малых релятивистских отклонений от нерелятивистского поведения возникает ожидаемая зависимость энергии от полного импульса системы. Подставив соотношения между импульсами (1.95) и выделив члены H_0, содержащие $\mathbf{P}$, будем иметь

$$\frac{\mathbf{P}^2}{2M}-\frac{1}{2M}\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2M}\right)^2-\frac{\mathbf{P}^2}{2M^2}\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{p}}{M}\right)^2-$$
$$-\frac{e_1e_2}{4\pi}\frac{1}{2M^2}\mathbf{P}\cdot\left(\frac{1}{r}+\frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{P}. \tag{2.124}$$

Здесь мы опустили комбинации вида $\mathbf{P}\cdot(1/r)\,\mathbf{p}$ и $\sigma_{1,2}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}$, которые в состоянии с определенной внутренней четностью не дают вклада в средние значения. Отметим, что в формуле (2.124) фигурирует оператор нерелятивистской внутренней энергии

$$H_{\text{внутр}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + \frac{e_1 e_2}{4\pi}\frac{1}{r}, \tag{2.125}$$

собственное значение $E_{\text{внутр}}$ которого входит в среднее значение величины (2.124):

$$\frac{\mathbf{P}^2}{2M}\left(1 - \frac{E_{\text{внутр}}}{M}\right) - \frac{1}{2M}\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2M}\right)^2 - \frac{1}{2M^2}\mathbf{P}\cdot\left\langle\frac{\mathbf{pp}}{\mu} + \frac{e_1e_2}{4\pi}\frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right\rangle\cdot\mathbf{P}. \tag{2.126}$$

Первые два слагаемых совпадают с тем, что мы ожидали, причем мы видим, что полная масса системы равна $M + E_{\text{внутр}}$, где $E_{\text{внутр}} \ll M$. Поэтому последнее слагаемое должно быть равным нулю:

$$\left\langle\frac{\mathbf{pp}}{\mu} + \frac{e_1e_2}{4\pi}\frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right\rangle = 0. \tag{2.127}$$

Если рассмотреть диагональную сумму этого диадного соотношения,

$$\left\langle\frac{\mathbf{p}^2}{\mu} + \frac{e_1e_2}{4\pi}\frac{1}{r}\right\rangle = \langle 2T + V\rangle = 0, \tag{2.128}$$

то мы получим общеизвестную теорему вириала (т. е. соотношение между средней внутренней кинетической и средней внутренней потенциальной энергией), записанную в форме, соответствующей кулоновскому полю. Но диадное обобщение теоремы вириала, в формулировке (2.127), нужно еще доказать.

Это можно сделать прямым путем, исходя из простого обобщения масштабного преобразования, вытекающего из обычной теоремы вириала. Рассмотрим инфинитезимальное унитарное преобразование

$$U = 1 + iG, \quad G = \frac{1}{2}(\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{K}\cdot\mathbf{p}), \tag{2.129}$$

где $\delta\mathbf{K}$ — инфинитезимальная диада, которая вещественна и симметрична. Это преобразование имеет вид [ср. с формулами (1-1.18) и (1-1.19)]

$$\overline{\mathbf{r}} = U^{-1}\mathbf{r}U = \mathbf{r} - \delta\mathbf{r}, \quad \overline{\mathbf{p}} = U^{-1}\mathbf{p}U = \mathbf{p} - \delta\mathbf{p}, \tag{2.130}$$

где

$$\delta\mathbf{r} = \frac{1}{i}[\mathbf{r}, G] = \delta\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}, \quad \delta\mathbf{p} = \frac{1}{i}[\mathbf{p}, G] = -\delta\mathbf{K}\cdot\mathbf{p}. \tag{2.131}$$

Оператор H изменяется на величину

$$\delta H = \frac{1}{i}[H, G], \tag{2.132}$$

равную

$$\delta H = -\left[\frac{\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{K}\cdot\mathbf{p}}{\mu} + \frac{e_1e_2}{4\pi}\frac{\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right]. \tag{2.133}$$

Но среднее значение величины H стационарно по отношению к вариациям волновой функции, а поэтому среднее значение величины δH равно нулю (это можно сказать сразу — поскольку δH имеет вид коммутатора). В итоге мы и приходим к равенству (2.127).

Перейдя в систему покоя, мы для энергетического оператора (2.122) будем иметь

$$H_0 = m_1 + m_2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3}\right)(\mathbf{p}^2)^2 + \frac{e_1e_2}{4\pi}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{2m_1m_2}\mathbf{p}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{p} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}\right)\delta(\mathbf{r}) -\right.$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1m_2}\right)\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}}{r^3} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_2^2} + \frac{2}{m_1m_2}\right)\frac{\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}}{r^3} -$$
$$\left.-\frac{1}{4m_1m_2}\left(3\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2}{r^3}\right) - \frac{1}{m_1m_2}\frac{2\pi}{3}\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\delta(\mathbf{r})\right\}. \tag{2.134}$$

В последних слагаемых, содержащих оба спина, можно узнать взаимодействие, ответственное за сверхтонкую структуру в случае частиц с магнитными моментами, для которых $^1/_2 g = 1$, что соответствует выбору примитивного взаимодействия. Пренебрежем, скажем, всеми членами с σ_2, опустив тем самым сверхтонкую структуру, и рассмотрим случаи атома водорода и мюония $(\mu^+ + e^-)$, когда

$$m_1\ (\equiv m) \ll m_2\ (\equiv M). \tag{2.135}$$

Если пренебречь второй и более высокими степенями m/M, то энергетический оператор H_0 сведется к $(e_1e_2/4\pi = -\alpha)$

$$H_0 = \left\{m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\pi\alpha}{2m^2}\delta(\mathbf{r}) + \frac{\alpha}{4m^2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}}{r^3}\right\} +$$
$$+ M + \frac{1}{2M}\left[\mathbf{p}^2 - \frac{\alpha}{m}\mathbf{p}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{p} + \frac{\alpha}{m}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}}{r^3}\right]. \tag{2.136}$$

В комбинации, заключенной в фигурные скобки, можно узнать приближенное преобразованное выражение для энергетического оператора Дирака частицы в кулоновском поле:

$$\left[U\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \gamma^0 m - \frac{\alpha}{r}\right)U^{-1}\right]_{++} \approx \{\ \}. \tag{2.137}$$

Его появление и следовало ожидать в пределе при $m/M \to 0$. Таким образом, член с множителем $1/M$ дает первую поправку к идеализированному случаю, когда более массивное тело считается неподвижным источником.

Элементарная теория возмущений приводит к следующему исправленному значению энергии:

$$E = E_{\text{рел}} + M + \frac{1}{2M}\left\langle \mathbf{p}^2 - \frac{\alpha}{m}\mathbf{p}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{p} + \frac{\alpha}{m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}}{r^3}\right\rangle, \quad (2.138)$$

где $E_{\text{рел}}$ — стандартное значение энергии, отвечающее преобразованному энергетическому оператору Дирака:

$$E_{\text{рел}} = \left\langle m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\pi\alpha}{2m^2}\,\delta(\mathbf{r}) + \frac{\alpha}{4m^2}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}}{r^3}\right\rangle. \quad (2.139)$$

Выполнив изотропное масштабное преобразование этого оператора, мы получим следующий полезный результат:

$$0 = \left\langle 2\,\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - 4\,\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)^2 - \frac{\alpha}{r} + 3\,\frac{\pi\alpha}{2m^3}\,\delta(\mathbf{r}) + 3\,\frac{\alpha}{4m^2}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}}{r^3}\right\rangle. \quad (2.140)$$

Сравнивая два последних соотношения, мы видим, что

$$\left\langle \mathbf{p}^2 + \frac{\alpha}{m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}}{r^3}\right\rangle = 2m\,(m - E_{\text{рел}}) + \left\langle 3\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)^2 - \frac{2\pi\alpha}{m}\,\delta(\mathbf{r})\right\rangle. \quad (2.141)$$

Для вычисления оставшегося выражения применим некую модификацию масштабного преобразования. Оно порождается оператором

$$G = \delta\lambda\,\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{p}, \quad (2.142)$$

в котором подразумевается симметризованное произведение. Само преобразование имеет вид

$$\delta\mathbf{r} = \frac{1}{i}\,[\mathbf{r}, G] = \delta\lambda\,\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad \delta\mathbf{p} = \frac{1}{i}\,[\mathbf{p}, G] = -\,\delta\lambda\left(\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{p}. \quad (2.143)$$

Поскольку соответствующее слагаемое в формуле (2.138) имеет дополнительный множитель α, проводя такое преобразование, можно рассматривать только оператор нерелятивистской энергии:

$$\delta\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}\right) = \delta\lambda\left[\frac{1}{m}\,\mathbf{p}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{p} - \frac{2}{m}\left(\mathbf{p}\cdot\frac{1}{r}\,\mathbf{p}\right)_{\text{сим}} + \frac{\alpha}{r^2}\right], \quad (2.144)$$

где произведение $\mathbf{p}\cdot(1/r)\,\mathbf{p}$ предполагается полностью симметризованным; в явной форме записи

$$\left(\mathbf{p}\cdot\frac{1}{r}\,\mathbf{p}\right)_{\text{сим}} = \frac{1}{4}\left[\left\{\mathbf{p}^2, \frac{1}{r}\right\} + 2\mathbf{p}\cdot\frac{1}{r}\,\mathbf{p}\right]. \quad (2.145)$$

В то же время можно написать

$$\mathbf{p}\cdot\frac{1}{r}\,\mathbf{p}=\frac{1}{2}\left\{\mathbf{p}^2,\ \frac{1}{r}\right\}-\frac{1}{2}\left[\mathbf{p}\cdot,\left[\mathbf{p},\frac{1}{r}\right]\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\mathbf{p}^2,\ \frac{1}{r}\right\}-2\pi\delta(\mathbf{r}), \qquad (2.146)$$

и мы получаем

$$\left(\mathbf{p}\cdot\frac{1}{r}\,\mathbf{p}\right)_{\text{сим}}=\frac{1}{2}\left\{\mathbf{p}^2,\ \frac{1}{r}\right\}-\pi\delta(\mathbf{r}). \qquad (2.147)$$

Но в таком случае из равенства нулю среднего значения величины (2.144) вытекает соотношение

$$\frac{\alpha}{m}\left\langle\mathbf{p}\cdot\left(\frac{1}{r}+\frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{p}\right\rangle=\left\langle 2\left\{\frac{\mathbf{p}^2}{2m},\ \frac{\alpha}{r}\right\}-\frac{2\pi\alpha}{m}\,\delta(\mathbf{r})-\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2\right\rangle, \qquad (2.148)$$

скомбинировав которое с (2.141), будем иметь

$$\left\langle\mathbf{p}^2-\frac{\alpha}{m}\,\mathbf{p}\cdot\left(\frac{1}{r}+\frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{p}+\frac{\alpha}{m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}}{r^3}\right\rangle=$$
$$=2m\,(m-E_{\text{рел}})+\langle 3T^2+2\{T,\ V\}+V^2\rangle. \qquad (2.149)$$

В последнем выражении использованы нерелятивистские обозначения

$$T=\frac{\mathbf{p}^2}{2m},\quad V=-\frac{\alpha}{r}. \qquad (2.150)$$

Для состояния с нерелятивистской энергией $E_{\text{нерел}}$ получаем

$$\langle 3T^2+2\{T,\ V\}+V^2\rangle=E_{\text{нерел}}\,(E_{\text{нерел}}+2\,\langle T\rangle)=(m-E_{\text{рел}})^2, \qquad (2.151)$$

где мы воспользовались теоремой вириала (2.141) в ее нерелятивистской формулировке

$$\langle T\rangle=-E_{\text{нерел}}. \qquad (2.152)$$

Итак, возникает первое указание на массовую зависимость в спектре системы из двух тел с $M\gg m$:

$$E-M=E_{\text{рел}}+\frac{m^2-E^2_{\text{рел}}}{2M}. \qquad (2.153)$$

До сих пор мы не касались тонкой структуры [если не считать косвенной ссылки, сделанной по поводу формулы (4-11.109), на то обстоятельство, что простая теория тонкой структуры не снимает вырождения некоторых определенных уровней], а кроме того, не привели явного выражения для $E_{\text{рел}}$. Но нам достаточно подставить в среднее значение величины (2.139) уже известные нам значения различных слагаемых. Так, при $l\neq 0$ в соответствии с равенствами (4-11.104) и (4-11.107) имеем

$$E_{\text{рел}} = m - \frac{m\alpha^2}{2n^2} - \frac{1}{2m}\left\langle\left(E_{\text{нерел}} + \frac{\alpha}{r}\right)^2\right\rangle + \frac{m\alpha^4}{2}\frac{1}{n^3}\frac{1}{2l+1} \times$$
$$\times \begin{cases} j = l + \frac{1}{2}: & \frac{1}{l+1} \\ j = l - \frac{1}{2}: & -\frac{1}{l} \end{cases}, \tag{2.154}$$

а

$$\left\langle\left(E_{\text{нерел}} + \frac{\alpha}{r}\right)^2\right\rangle = \frac{m^2\alpha^4}{n^3}\left(\frac{1}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right), \tag{2.155}$$

где использовано соотношение (4-11.106) и теорема вириала в формулировке, эквивалентной (2.152),

$$\left\langle\frac{\alpha}{r}\right\rangle = -2E_{\text{нерел}}. \tag{2.156}$$

Заметив, что

$$\frac{1}{l+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2l+1}\begin{cases} j = l + \frac{1}{2}: & \frac{1}{l+1} \\ j = l - \frac{1}{2}: & -\frac{1}{l} \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} j = l + \frac{1}{2}: & \frac{1}{l+1} \\ j = l - \frac{1}{2}: & \frac{1}{l} \end{cases} = \frac{1}{j+\frac{1}{2}}, \tag{2.157}$$

мы и придем к искомому результату:

$$E_{\text{рел}}(n, j) = m - \frac{m\alpha^2}{2n^2} - \frac{m\alpha^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) + \ldots. \tag{2.158}$$

Он остается справедливым и при $l = 0$, $j = {}^1/_2$, как в этом можно убедиться, заменив последнее слагаемое в формуле (2.154) $m\alpha^4/2n^3$, в действительности обращающееся в нуль, членом с дельта-функцией, который дает

$$\left\langle\frac{\pi\alpha}{2m^2}\delta(\mathbf{r})\right\rangle = \frac{\alpha}{2m^2}\left(\frac{\alpha m}{n}\right)^3 = \frac{m\alpha^4}{2n^3}. \tag{2.159}$$

Релятивистская поправка (2.158) описывает расщепление $2n^2$-кратно вырожденных уровней с квантовым числом n на n разных уровней, которые нумеруются квантовым числом полного углового момента $j = {}^1/_2, \ldots, n - {}^1/_2$. Каждый из полных моментов $j \leqslant n - {}^3/_2$ может быть получен из разных значений орбитального момента, и поэтому мультиплетность соответствующего уровня равна $2(2j+1)$. Исключение составляет уровень $j = n - {}^1/_2$ с мультиплетностью, равной $2j+1 = 2n$. Относительно массовой зависимости, описываемой формулой (2.153), прежде всего следует отметить, что она определяется величиной $E_{\text{рел}}(n, j)$, а следовательно, не приводит ни к какому новому расщеплению все еще вырожденных уровней. Рассмотрим эту зависимость с количественной точки зрения. Написав

$$E_{\text{рел}} = m(1-g), \quad g = \frac{\alpha^2}{2n^2} + \frac{\alpha^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right), \tag{2.160}$$

мы получим

$$E - M = m - m\left(1 - \frac{m}{M}\right) g - \frac{m^2}{2M} g^2. \tag{2.161}$$

С той точностью, с которой

$$m\left(1 - \frac{m}{M}\right) \approx \frac{m}{1+\frac{m}{M}} = \mu, \tag{2.162}$$

в качестве массового параметра как в грубую, так и в тонкую структуру входит приведенная масса:

$$E - M = m - \frac{\mu\alpha^2}{2n^2} - \frac{\mu\alpha^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) - \frac{m^2\alpha^4}{8Mn^4}. \tag{2.163}$$

Однако мы увидим, что если принять во внимание еще не учтенные аспекты теории, то для тонкой структуры уже не будет иметь места такая простая зависимость от массы.

Но прежде чем переходить к этой проблеме, сделаем одно дополнительное замечание к только что выполненному расчету. Как легко видеть, последнее слагаемое в формуле (2.138) представляет собой некоторое приближение к преобразованному выражению

$$\frac{1}{2M}\left\langle \mathbf{p}^2 - \alpha\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{p}\right\rangle, \tag{2.164}$$

к которому можно было бы прийти и непосредственно, применив унитарное преобразование только к тяжелой частице. Возникает вопрос, что же мы получим, вычислив в создавшейся ситуации это среднее значение. Применим с этой целью к энергетическому оператору Дирака преобразование (2.143):

$$\delta\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \gamma^0 m - \frac{\alpha}{r}\right) = \delta\lambda\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^3}\cdot\mathbf{p} - \boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{1}{r}\mathbf{p} + \frac{\alpha}{r^2}\right]. \tag{2.165}$$

Тогда для соответствующего среднего значения будем иметь

$$\left\langle\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^3}\cdot\mathbf{p}\right\rangle = \left\langle\frac{1}{r}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} - \frac{\alpha}{r^2}\right\rangle. \tag{2.166}$$

После этой подстановки выражение (2.164) примет вид

$$\frac{1}{M}\left\langle\left(\alpha\cdot\mathbf{p}-\frac{\alpha}{r}\right)^2\right\rangle=\frac{1}{2M}\langle(E_{\text{рел}}-\gamma^0 m)^2\rangle=$$
$$=\frac{1}{2M}(E^2_{\text{рел}}+m^2-2mE_{\text{рел}}\langle\gamma^0\rangle). \tag{2.167}$$

Чтобы завершить наш расчет, применим к энергетическому оператору обычное масштабное преобразование, которое дает

$$0=\left\langle\alpha\cdot\mathbf{p}-\frac{\alpha}{r}\right\rangle=E_{\text{рел}}-m\langle\gamma^0\rangle. \tag{2.168}$$

Вытекающее отсюда равенство

$$\langle\gamma^0\rangle=\frac{E_{\text{рел}}}{m} \tag{2.169}$$

приводит к выражению для величины (2.164), совпадающему с (2.153)

Конечно, тут имеется и очевидная разница. В последнем расчете $E_{\text{рел}}$ отвечает точным собственным значениям уравнения Дирака, тогда как в формуле (2.153) величина $E_{\text{рел}}$ соответствует членам, фигурирующим в разложении (2.158). Имеет смысл убедиться в том, что с принятой выше в ходе приближенного рассмотрения точностью не возникает никакого расхождения. Приближение состоит в том, что тонкая структура, или ее массовая зависимость, считается малой (порядка α^2) по отношению к грубой структуре. Мы будем исходить из однородного уравнения Дирака в форме уравнения второго порядка:

$$[\Pi^2-eq\sigma F+m^2]\,\psi=0. \tag{2.170}$$

Соответствующее уравнение для собственного значения энергии E связанного состояния в кулоновском поле ядра с зарядом Z_e имеет вид

$$\left[\mathbf{p}^2+m^2-\left(E+\frac{Z\alpha}{r}\right)^2+Z\alpha\gamma_5\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right]\psi=0. \tag{2.171}$$

Разбиение $\mathbf{p}^2$ на радиальную и угловую части мы запишем как

$$\mathbf{p}^2=p_r^2+\frac{\mathbf{L}^2}{r^2},\quad \mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}. \tag{2.172}$$

Это дает уравнение

$$\left[p_r^2+m^2-E^2-\frac{2EZ\alpha}{r}+\frac{\mathbf{L}^2-(Z\alpha)^2+Z\alpha\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}/r}{r^2}\right]\psi=0, \tag{2.173}$$

которое мы сравним с нерелятивистским уравнением, соответствующим квантовым числам n и l:

$$\left[p_r^2+\left(\frac{mZ\alpha}{n}\right)^2-\frac{2mZ\alpha}{r}+\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\psi_{nl}=0, \tag{2.174}$$

где

$$n - l - 1 = n_r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots . \tag{2.175}$$

Отсюда сразу же очевидны соответствия

$$2mZ\alpha \longleftrightarrow 2EZ\alpha, \quad \left(\frac{mZ\alpha}{n}\right)^2 \longleftrightarrow m^2 - E^2, \tag{2.176}$$

но нерелятивистской комбинации $l(l+1)$ пока сопоставляется некоторый оператор. Нам нужны его собственные значения.

Что касается свойств углового момента частиц со спином $^1/_2$, то, как мы знаем из гл. 2, § 7, заданное квантовое число j полного момента отвечает двум состояниям с $l = j + {}^1/_2$ и $l = j - {}^1/_2$, в которых противоположны значения орбитальной четности. Мы знаем также, что при умножении на $i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{r}/r)$, где $i\gamma_5$ обращает внутреннюю четность γ^0, спин-орбитальные функции двух типов, отвечающие заданному j, меняются ролями. В соответствии с этим коэффициент при $1/r^2$ в уравнении (2.173) можно представить в виде двумерной матрицы, строки и столбцы которой нумеруются значениями $l = j + {}^1/_2,\ j - {}^1/_2$:

$$\begin{pmatrix} \left(j+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right)-(Z\alpha)^2 & -iZ\alpha \\ -iZ\alpha & \left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)-(Z\alpha)^2 \end{pmatrix}. \tag{2.177}$$

Собственные значения этой матрицы имеют вид $l'(l'+1)$ с числами

$$l' = \left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2\right]^{1/2}, \quad \left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2\right]^{1/2} - 1, \tag{2.178}$$

которые при $Z\alpha \to 0$ сводятся к $j + {}^1/_2$ и $j - {}^1/_2$. Таким образом, правила сопоставления (2.176) дополняются следующим:

$$l(l+1) \leftrightarrow l'(l'+1). \tag{2.179}$$

Применяя эти соотношения, мы для релятивистского энергетического спектра получаем

$$m^2 - E^2 = \frac{(EZ\alpha)^2}{(n_r + l' + 1)^2}, \tag{2.180}$$

или, используя любое из значений l' и проводя соответствующее отождествление для n,

$$\left(\frac{m}{E}\right)^2 = 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n - j - \frac{1}{2} + \left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2\right]^{1/2}\right)^2}. \tag{2.181}$$

Отметим в качестве побочного результата, что аналогичное уравнение для частицы со спином 0 отличается от (2.171) отсутствием спинового члена. Следовательно, коэффициент при $1/r^2$ в уравнении (2.173) оказывается равным

$$l(l+1)-(Z\alpha)^2 = l'(l'+1), \tag{2.182}$$

так что

$$l' = \left[\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-(Z\alpha)^2\right]^{1/2}-\frac{1}{2}. \tag{2.183}$$

Соответствующая формула для энергии и в этом случае имеет вид (2.181), но с заменой полуцелого j целым числом l. В частном случае, когда $n=1$, $j={}^1/_2$, формула (2.181) сводится к равенству

$$\left(\frac{m}{E}\right)^2 = 1+\frac{(Z\alpha)^2}{1-(Z\alpha)^2}=\frac{1}{1-(Z\alpha)^2}, \tag{2.184}$$

откуда

$$E = m\,[1-(Z\alpha)^2]^{1/2}. \tag{2.185}$$

С этим результатом мы уже встречались [формула (4-17.31)]. Аналогичная формула справедлива и при всех $n = j+{}^1/_2$:

$$E = m\left[1-\left(\frac{Z\alpha}{n}\right)^2\right]^{1/2} \approx$$

$$\approx m\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{Z\alpha}{n}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{Z\alpha}{n}\right)^4-\frac{1}{16}\left(\frac{Z\alpha}{n}\right)^6-\ldots\right]. \tag{2.186}$$

Данное разложение с точностью, принятой в формуле (2.158), согласуется с этой формулой (в которой $Z=1$). Такое же согласие имеет место и при разложении общей формулы (2.181).

Одно замечание относительно массовой зависимости (2.153). Если для $E_{\text{рел}}$ взять выражение (2.181), то благодаря четности этой функции по α не возникнет никаких членов вида

$$\alpha^5\frac{m^2}{M} \sim \frac{m}{M}\alpha \ \text{(тонкая структура)}. \tag{2.187}$$

В полной же теории подобные эффекты есть, и в следующем параграфе мы займемся их вычислением.

§ 3. ДВУХЧАСТИЧНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ II

Мы начнем с того, что продемонстрируем существование энергетических сдвигов с величиной (2.187), т. е. эффектов порядка α (а не α^2) по отношению к массовой зависимости тонкой структуры вида m/M. Простейший эффект такого рода, хотя и не самый существенный с количественной точки зрения, возникает при сравнении только что проведенного расчета на основе уравнения Дирака с мгновенным взаимодействием с расчетом, основывающимся на системе уравнений (2.94) и (2.95). Поскольку полная поперечная часть взаимодействия может быть с успехом проанализирована и другим способом, мы здесь будем рассматривать только мгновенное кулоновское взаимодействие. Чтобы оба упомянутых подхода выступали на равной основе, уравнения (2.94) и (2.95) следует упростить, сохранив в них только первую степень отношения m/M, что можно считать вообще отличительным признаком всего нашего рассмотрения, преследующего здесь ограниченные цели. Итак, мы имеем

$$W_2 \approx M + \frac{\mathbf{p}^2}{2M}, \quad V_0 \approx -\left(U \frac{\alpha}{r} U^{-1}\right)_{(+)(+)}, \tag{3.1}$$

где U относится только к частице с массой m, а символ «$(+)$» служит для указания только собственного значения γ^0, отвечающего этой частице. Такое обозначение принято для того, чтобы не путать подобные индексы с индексами в формуле (2.95), где знак «$+$», например, указывает общее собственное значение матриц γ_1^0 и γ_2^0.

Прежде всего покажем, что в уравнениях (2.95), написанных в объединенной форме

$$\left[i\partial_t - H_0 + V_1 \frac{1}{i\partial_t + H_0} V_1\right] \overline{G}_{++} = \delta(t-t'), \tag{3.2}$$

слагаемое, содержащее V_1, имеет относительный порядок $(m/M)^2$, и поэтому его можно отбросить. Для величины V_1 имеем следующую грубую оценку:

$$V_1 \sim \frac{1}{M}\left|\nabla \frac{\alpha}{r}\right|, \tag{3.3}$$

а знаменатель в слагаемом с V_1 приближенно можно заменить на $2M$. Однако заключение, что в знаменатель рассматриваемого члена величина M входит в третьей степени, неверно. Чтобы убедиться в этом, выразим его среднее значение через импульсные переменные, пренебрегая импульсом, соответствующим волновой функции (иными словами, для волновой функции берется ее значение в начале относительных координат):

$$\left\langle V_1 \frac{1}{i\partial_t + H_0} V_1 \right\rangle \sim |\psi(0)|^2 \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{2M} \left(\frac{\mathbf{p}}{M}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\mathbf{p}^2}\right)^2 \sim$$
$$\sim |\psi(0)|^2 \frac{\alpha^2}{M^3} \int dp \sim |\psi(0)|^2 \frac{\alpha^2}{M^2}. \tag{3.4}$$

На последнем этапе этих преобразований учтено, что при передаваемых импульсах $\sim M$ нерелятивистские оценки типа (3.3) становятся неверными и завышенными. Поскольку $|\psi(0)|^2 \sim$ $\sim (\alpha m)^3$, этот эффект имеет порядок $(m/M)^2 \alpha(\alpha^4 m)$, а потому мы его опускаем.

Интерес для нас представляет сравнение собственных значений оператора энергии

$$H_0 = M + \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + W(\mathbf{p}) - \left(U \frac{\alpha}{r} U^{-1}\right)_{(+)(+)}, \qquad W(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} \tag{3.5}$$

с собственными значениями оператора

$$H = M + \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \gamma^0 m - \frac{\alpha}{r}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим с этой целью уравнение для функции Грина, отвечающее оператору H или, точнее, оператору, получаемому путем преобразования H:

$$(i\partial_t - \overline{H})\overline{G} = \delta(t - t'), \qquad \overline{H} = M + \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \gamma^0 W(\mathbf{p}) - U\frac{\alpha}{r}U^{-1}. \tag{3.7}$$

Соответственно собственным значениям γ^0 оно распадается на два уравнения

$$(i\partial_t - H_0)\overline{G}_{(+)(+)} - \overline{H}_{(+)(-)}\overline{G}_{(-)(+)} = \delta(t - t'), \qquad (i\partial_t - \overline{H}_{(-)(-)})\overline{G}_{(-)(+)} - \overline{H}_{(-)(+)}\overline{G}_{(+)(+)} = 0, \tag{3.8}$$

которые дают

$$\left[i\partial_t - H_0 - \overline{H}_{(+)(-)}\frac{1}{i\partial_t - \overline{H}_{(-)(-)}} H_{(-)(+)}\right]\overline{G}_{(+)(+)} = \delta(t - t'). \tag{3.9}$$

В принятом приближении членом взаимодействия в знаменателе (3.9) можно пренебречь:

$$\overline{H}_{(-)(-)} \approx M + \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - W(\mathbf{p}). \tag{3.10}$$

В качестве еще одного упрощения энергию интересующего нас состояния, которой заменяется производная $i\partial_t$ в знаменателе, приближенно можно положить равной $M + m$, опустив тем самым энергию связи. Получаемое таким способом среднее значение эффективного энергетического оператора в собственном состоянии гамильтониана H_0 дает для соответствующего собственного значения оператора H выражение

$$E = E_0 + \left\langle \overline{H}_{(+)(-)} \frac{1}{m + W(\mathbf{p}) - (\mathbf{p}^2/2M)} \overline{H}_{(-)(+)} \right\rangle. \tag{3.11}$$

Отсюда по известному спектру величины E определяется спектр величины E_0.

Собственные функции оператора H_0 [ср. с формулой (2.136)] приближенно совпадают с собственными функциями (2.162) нерелятивистской системы с приведенной массой μ. В выражении (3.11), поведение которого определяется релятивистскими энергиями $\sim m$ [а не энергиями $\sim M$, как в формуле (3.4)], импульс, связанный с волновой функцией, пренебрежимо мал. Поэтому равенство (3.11) можно переписать в виде

$$E-E_0=|\psi(0)|^2\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\,\overline{H}_{(+)(-)}\,\frac{1}{m+W(\mathbf{p})-(\mathbf{p}^2/2M)}\,\overline{H}_{(-)(+)},\qquad(3.12)$$

где матричные элементы оператора $\overline{H}$ взяты в импульсном представлении, причем мы учли, что при $\mathbf{p}=0$ оператор U сводится к единице. Таким образом, выделив коэффициент при $i\gamma_5$, мы будем иметь

$$\overline{H}_{(+)(-)}=\overline{H}_{(-)(+)}=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{\mathbf{p}}\left(\frac{W-m}{2W}\right)^{1/2}\frac{4\pi\alpha}{\mathbf{p}^2}.\qquad(3.13)$$

Входящий сюда множитель $[(W-m)/2W]^{1/2}$ ведет себя в нерелятивистской области, как $|\mathbf{p}|/2m$, а при $W\gg m$ стремится к некоторой постоянной — это может служить иллюстрацией к тому, что было сказано по поводу оценок (3.4). В итоге получаем

$$E_0-E=-|\psi(0)|^2(4\pi\alpha)^2\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right)^2\frac{W-m}{2W}\,\frac{1}{W+m-(\mathbf{p}^2/2M)},\qquad(3.14)$$

или, с учетом приближения $m/M\ll 1$,

$$E_0-E=-4\alpha^2|\psi(0)^2|^2\int_0^\infty dp\frac{1}{W(W+m)^2}\left[1+\frac{W-m}{2M}\right].\qquad(3.15)$$

Введя новую переменную интегрирования θ,

$$p=m\,\mathrm{sh}\,\theta,\quad W=m\,\mathrm{ch}\,\theta,\qquad(3.16)$$

мы для двух входящих сюда интегралов будем иметь

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dp\frac{1}{W(W+m)^2}&=\frac{1}{m^2}\int_0^\infty d\theta\,\frac{1}{(\mathrm{ch}\,\theta+1)^2}=\frac{1}{3m^2},\\ \int_0^\infty dp\frac{W-m}{W(W+m)^2}&=\frac{1}{m}\int_0^\infty d\theta\,\frac{\mathrm{ch}\,\theta-1}{(\mathrm{ch}\,\theta+1)^2}=\frac{1}{3m}.\end{aligned}\qquad(3.17)$$

В результате для s-состояния с главным квантовым числом n получаем

$$\begin{aligned}E_0-E&=-\frac{4}{3}\frac{\alpha^2}{m^2}|\psi(0)|^2\left(1+\frac{m}{2M}\right)=\\&=-\frac{4}{3\pi}\frac{\alpha^5}{n^3}\frac{\mu^3}{m^2}\left(1+\frac{m}{2M}\right).\end{aligned}\qquad(3.18)$$

Этот эффект как раз и служит примером энергетического сдвига порядка $\alpha\,(m/M)\,(\alpha^4 m)$.

Другой же результат данного расчета может вызвать некоторое смущение: в пределе при $m/M \to 0$ разность двух энергий не обращается в нуль. Иными словами, в этом пределе спектр оператора H_0 не совпадает с энергетическим спектром заряда в кулоновском поле статического источника. Столь явное противоречие напоминает нам, что мы не учли еще один аспект мгновенного взаимодействия — члена взаимодействия $I^{(2)}$, фигурирующего в формулах (2.22) — (2.24). Если оставить в этом члене только мгновенную кулоновскую часть, то он примет вид

$$I^{(2)}_{\text{кул}} = -\alpha^2 \frac{\delta(x_1^0 - \bar{x}_2^0)}{|\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2|}\,\frac{\delta(x_2^0 - \bar{x}_1^0)}{|\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1|}\,\gamma_1^0 G_+(x_1 - \bar{x}_1)\,\gamma_1^0\gamma_2^0 G_+(x_2 - \bar{x}_2)\,\gamma_2^0. \tag{3.19}$$

Чтобы извлечь следствия из подобного нелокального взаимодействия, необходимо провести дополнительное исследование уравнения для функции Грина в случае локального взаимодействия, поскольку равновременная схема теперь оказывается уже недостаточной.

Рассмотрим с этой целью уравнение для функции Грина

$$[(\gamma p + m)_1(\gamma p + m)_2 - i\delta(x_1^0 - x_2^0)\,\gamma_1^0\gamma_2^0 V]\,G = 1 \tag{3.20}$$

и эквивалентное ему интегральное уравнение

$$G = G_1 G_2 + G_1 G_2 i\delta(x_1^0 - x_2^0)\,\gamma_1^0\gamma_2^0 V G. \tag{3.21}$$

Положим в $G\,(x_1 x_2, x_1' x_2')$, как того требует член взаимодействия, $x_1^0 = x_2^0 = t$, оставив, однако, переменные $x_1^{0\prime}$ и $x_2^{0\prime}$ свободными. Нам нужно дифференциальное уравнение, которому при этих условиях подчиняется величина $G_1 G_2$. Оно выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}(i\partial_t - H_1 - H_2)\,G_+(x_1 - x_1')\,\gamma_1^0 G_+(x_2 - x_2')\,\gamma_2^0 &= \\ = -[\delta(x_1 - x_1')\,G_+(x_2 - x_2')\,\gamma_2^0 + \delta(x_2 - x_2')\,G_+(x_1 - x_1')\,\gamma_1^0]&. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Отсюда для G получаем дифференциальное уравнение

$$\left[i\partial_t - H_1 - H_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{W_1} + \frac{H_2}{W_2}\right) V\right] iG\gamma_1^0\gamma_2^0 = -i\,(G_1\gamma_1^0 + G_2\gamma_2^0), \tag{3.23}$$

где использованы символические обозначения; если положить в нем $x_1^{0\prime} = x_2^{0\prime} = t'$, то оно сведется к (2.85). Преобразованная форма этого уравнения получается путем подстановок

$$H \to \gamma^0 W, \quad V \to \overline{V} \tag{3.24}$$

и

$$-iG_+\gamma^0 \to \left[\eta(x^0-x^{0\prime})\frac{1+\gamma^0}{2}-\eta(x^{0\prime}-x^0)\frac{1-\gamma^0}{2}\right]\times$$
$$\times\exp(-iW\,|\,x^0-x^{0\prime}\,|), \tag{3.25}$$

причем множитель в квадратных скобках можно представить также как

$$\frac{1}{2}[\gamma^0+\varepsilon(x^0-x^{0\prime})], \tag{3.26}$$

где

$$\varepsilon(x^0-x^{0\prime})=\begin{cases} x^0>x^{0\prime}: & +1\\ x^0=x^{0\prime}: & 0\\ x^0<x^{0\prime}: & -1\end{cases}. \tag{3.27}$$

Как и всякое другое уравнение для функции Грина, данное уравнение может быть представлено в еще одной, транспонированной, форме записи, в которой все дифференцирования относятся ко второму набору переменных. Таким эквивалентом для (3.23) является уравнение

$$iG\gamma_1^0\gamma_2^0\left[i\partial_t^{\prime T}-H_1-H_2-\frac{1}{2}V\left(\frac{H_1}{W_1}+\frac{H_2}{W_2}\right)\right]=-i(G_1\gamma_1^0+G_2\gamma_2^0), \tag{3.28}$$

где дифференцированный оператор ∂^T действует налево с дополнительным знаком минус.

Добавим теперь к мгновенному взаимодействию в формуле (3.20) нелокальное взаимодействие, которое мы запишем как

$$I^{(2)}=\gamma_1^0\gamma_2^0 v. \tag{3.29}$$

В результате интегральное уравнение (3.21) заменится уравнением

$$G=G_1G_2+G_1G_2\gamma_1^0\gamma_2^0[i\delta(x_1^0-x_2^0)V+v]G. \tag{3.30}$$

Тогда дифференциальное уравнение (3.23) примет вид

$$\left[i\partial_t-H_1-H_2-\frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{W_1}+\frac{H_2}{W_2}\right)V\right]iG\gamma_1^0\gamma_2^0=$$
$$=-i(G_1\gamma_1^0+G_2\gamma_2^0)-(G_1\gamma_1^0+G_2\gamma_2^0)\,viG\gamma_1^0\gamma_2^0. \tag{3.31}$$

Вследствие нелокальности величины v в двух стоящих слева координатах функции Грина G значения времени оказываются разными. Приближенное описание нужной нам зависимости от относительного времени можно получить из уравнения (3.28), в котором стоящие справа временны́е переменные равны друг другу. Равновременная функция Грина, отвечающая мгновенному взаимодействию, подчиняется уравнениям

$$\left[i\partial_t - H_1 - H_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{W_1} + \frac{H_2}{W_2}\right)V\right]G_{1+2} =$$
$$= G_{1+2}\left[i\partial_t'^T - H_1 - H_2 - V\frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{W_1} + \frac{H_2}{W_2}\right)\right] =$$
$$= \delta(t-t')\frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{W_1} + \frac{H_2}{W_2}\right). \tag{3.32}$$

Отсюда с достаточной для нас точностью мы получаем решение уравнения (3.28)

$$iG\gamma_1^{0\prime}\gamma_2^0 = -i(G_1\gamma_1^0 + G_2\gamma_2^0)G_{1+2}, \tag{3.33}$$

которое позволяет приближенно переписать (3.31) в виде равновременного уравнения

$$\left[i\partial_t - H_1 - H_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{W_1} + \frac{H_2}{W_2}\right)V - i(G_1\gamma_1^0 + G_2\gamma_2^0)\times\right.$$
$$\left.\times v(G_1\gamma_1^0 + G_2\gamma_2^0)\right]G_{1+2} = \delta(t-t')\frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{W_1} + \frac{H_2}{W_2}\right). \tag{3.34}$$

В преобразованной форме это уравнение в принятом приближении, когда сохраняются только компоненты с индексом «+», записывается как

$$(i\partial_t - W_1 - W_2 - V_0 - \delta V_0)\overline{G}_{++} = \delta(t-t') \tag{3.35}$$

(надеемся, что временное смешивание трехмерных и четырехмерных матричных обозначений для координат не приведет к недоразумениям). Здесь

$$\delta V_0 = i(G_{1\,\text{зап}} + G_{2\,\text{опер}})v_0(G_{1\,\text{зап}} + G_{2\,\text{опер}}), \quad v_0 = \overline{v}_{++}, \tag{3.36}$$

а

$$G_{\text{зап}} = \frac{1}{i}\eta(t-t')\exp[-iW(t-t')]. \tag{3.37}$$

Выписав в явном виде временны́е переменные, опущенные в формуле (3.36), получим

$$\delta V_0(t,\ t') = i\int dt_1\,dt_1'G_{1\,\text{зап}}(t-t_1)v_0(t_1t,\ t_1't')G_{1\,\text{зап}}(t_1'-t') +$$
$$+ i\int dt_1\,dt_2'G_{1\,\text{зап}}(t-t_1)v_0(t_1t,\ t't_2')G_{2\,\text{зап}}(t_2'-t') +$$
$$+ i\int dt_2\,dt_1'G_{2\,\text{зап}}(t-t_2)v_0(tt_2,\ t_1't')G_{1\,\text{зап}}(t_1'-t') +$$
$$+ i\int dt_2\,dt_2'G_{2\,\text{зап}}(t-t_2)v_0(tt_2,\ t't_2')G_{2\,\text{зап}}(t_2'-t'). \tag{3.38}$$

В случае нелокального взаимодействия (3.19), имеющего вид

$$v_0(t_1t_2,\ t_1't_2') = \delta(t_1-t_2')\,\delta(t_2-t_1')\,v(t_1-t_2), \tag{3.39}$$

слагаемые в (3.38) с функциями Грина разных частиц будут обращаться в нуль, примером чему может служить равенство

$$G_{1\,\text{зап}}(t-t_1)\,G_{2\,\text{опер}}(t_1-t) = 0. \tag{3.40}$$

Поэтому выражение (3.38) сводится к виду

$$\delta V_0(t,\ t') = iG_{1\,\text{зап}}(t-t')\,v(t'-t)\,G_{1\,\text{зап}}(t-t') + \\ + iG_{2\,\text{зап}}(t-t')\,v(t-t')\,G_{2\,\text{зап}}(t-t'). \tag{3.41}$$

Если бы взаимодействие δV_0 было мгновенным, то оценку для вызываемого им энергетического сдвига давало бы нам его среднее значение, получаемое путем трехмерного интегрирования по координатам. Истинное же выражение включает и интегрирование по времени:

$$\int d\bar{t}\,\delta V_0(t,\ \bar{t})\,\bar{G}_{++}(\bar{t},\ t'), \tag{3.42}$$

и поэтому мы должны учесть, что при рассмотрении заданного состояния с энергией E функция $\bar{G}_{++}(\bar{t},\ t')$ эффективно отличается от $\bar{G}_{++}(t,\ t')$ фазовым множителем

$$\exp[-iE(\bar{t}-t)]. \tag{3.43}$$

Следовательно, энергетический сдвиг равен

$$\delta E = \left\langle \int d\bar{t}\,\delta V_0(t,\ \bar{t}) \exp[-iE(\bar{t}-t)] \right\rangle. \tag{3.44}$$

Подставив сюда выражение (3.41) при

$$t-\bar{t} = \tau > 0, \tag{3.45}$$

получим

$$\delta E = i\left\langle \int\limits_0^\infty d\tau\,[G_{1\,\text{зап}}(\tau)\,v(-\tau)\,G_{1\,\text{зап}}(\tau)\exp(iE\tau) + \\ + G_{2\,\text{зап}}(\tau)\,v(\tau)\,G_{2\,\text{зап}}(\tau)\exp(iE\tau)] \right\rangle. \tag{3.46}$$

Как мы увидим, в рассматриваемый эффект дают вклад только релятивистские значения энергии. Это позволяет для энергии состояния написать $E \approx M + m$; внутренняя волновая функция заменяется функцией $\psi(0)$, в результате чего унитарное преобразование U_1U_2 сводится к единице, а запаздывающие функции Грина отвечают массе покоя соответствующей частицы.

С учетом энергетических упрощений (3.46) приводится к виду

$$\delta E = -i \left\langle \int_0^\infty d\tau \{\exp[i(M-m)\tau]\, v(-\tau) + \right.$$
$$\left. + \exp[-i(m-M)\tau]\, v(\tau)\} \right\rangle. \tag{3.47}$$

Благодаря тому что волновая функция несет индекс «+» ($\gamma_1^{0\prime} = \gamma_2^{0\prime} = +1$), функции $v(\pm\tau)$, получаемые из (3.19), (3.29), (3.39), оказываются равными

$$v(\pm\tau) = \alpha^2 \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2|} \frac{1}{|\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1|} \int \frac{(d\mathbf{p}_1)}{(2\pi)^3} \frac{1}{2W_1} (m \pm W_1) \times$$
$$\times \exp[i\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_1) - iW_1\tau] \int \frac{(d\mathbf{p}_2)}{(2\pi)^3} \frac{1}{2W_2} (M \mp W_2) \times$$
$$\times \exp[i\mathbf{p}_2 \cdot (\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}_2) - iW_2\tau]. \tag{3.48}$$

Отсюда сразу же видно, что энергетический сдвиг, связанный с членом $v(\tau)$, имеет относительный порядок $(m/M)^2$, и поэтому его нужно отбросить. При нерелятивистском рассмотрении тяжелой частицы зависимость этого члена от τ имеет вид $\exp[-i2M\tau]$, так что при интегрировании по τ он дает множитель $\sim 1/M$. Кроме того, в величину $(W_2 - M)/W_2$ входит множитель $\sim \mathbf{p}_2^2/M^2$. Как и при оценках (3.4), если исследовать зависимость интеграла от импульса, то кажущаяся зависимость вида $1/M^3$ сведется к зависимости вида $1/M^2$.

В среднее значение (3.47) входят интегрирования по координатам обеих частиц, ограниченные волновой функцией [ср. с формулой (1.113)]

$$\psi(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) = \psi(\mathbf{r})\, \psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R}), \tag{3.49}$$

что соответствует разбиению почти нерелятивистского движения на относительное движение и движение центра масс. Поскольку все наше рассмотрение проводится в системе центра масс, причем мы пренебрегаем относительным импульсом, первая совокупность интегрирований дает

$$\int (d\mathbf{x}_1)(d\mathbf{x}_2)\, \psi^*(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)\, v(-\tau) \approx$$
$$\approx \psi^*(0)\, \psi_{\mathbf{P}}^*(\bar{\mathbf{R}}) \int (d\mathbf{x}_1)(d\mathbf{x}_2)\, v(-\tau), \tag{3.50}$$

где

$$\int (d\mathbf{x}_1)(d\mathbf{x}_2)\, v(-\tau) = (4\pi\alpha)^2 \int \frac{(d\mathbf{p}_1)}{(2\pi)^3} \frac{(d\mathbf{p}_2)}{(2\pi)^3} \frac{m - W_1}{2W_1} \times$$
$$\times \frac{\exp[i\mathbf{p}_1 \cdot (\bar{\mathbf{x}}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1)]}{\mathbf{p}_1^2} \frac{\exp[i\mathbf{p}_2 \cdot (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)]}{\mathbf{p}_2^2} \exp[-i(W_1 + W_2)\tau], \tag{3.51}$$

причем мы умышленно рассматриваем волновую функцию в системе центра масс, чтобы не прибегать к затемняющему суть дела условию нормировки

$$\int (d\mathbf{R})\,|\,\psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{R})\,|^2 = 1. \tag{3.52}$$

Поскольку в формулу (3.51) входят только относительные координаты, оставшиеся интегрирования сразу же дают

$$\langle v(-\tau)\rangle = -|\,\psi(0)\,|^2(4\pi\alpha)^2 \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right)^2 \times$$
$$\times \frac{W-m}{2W}\exp\{-i\,[W+M+(\mathbf{p}^2/2M)]\,\tau\}, \tag{3.53}$$

где мы воспользовались нерелятивистским выражением для энергии тяжелой частицы и опустили индекс у W_1. Выполнив теперь в формуле (3.47) интегрирование по относительному времени, получим

$$\delta E = |\,\psi(0)\,|^2(4\pi\alpha)^2 \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right)^2 \frac{W-m}{W}\,\frac{1}{W+m+(\mathbf{p}^2/2M)}, \tag{3.54}$$

т. е. мы приходим к результату, очень похожему на (3.14). Действительно, если пренебречь величиной $\mathbf{p}^2/2M$, то оба выражения скомпенсируются, как это и должно быть. Кроме того, члены относительного порядка m/M в (3.14) и (3.54) совпадают. Следовательно, суммарный энергетический сдвиг, возникающий за счет мгновенного кулоновского взаимодействия, равен

$$(\delta E)_{\text{кул}} = -\frac{4}{3}\,\frac{\alpha^2}{m^2}\,\frac{m}{M}\,|\,\psi(0)\,|^2 = -\frac{4}{3\pi}\,\frac{m}{M}\,\frac{\alpha^5}{n^3}\,m. \tag{3.55}$$

Последняя форма записи здесь относится к ns-состоянию, причем мы пренебрегли разницей между μ и m. В важном частном случае, когда $n=2$, эта формула записывается в виде (численное значение относится к водороду)

$$2s_{1/2}:\quad (\delta E)_{\text{кул}} = -\frac{1}{3\pi}\,\frac{m}{M}\,\alpha^3\,\mathrm{Ry} = -0{,}07\ \text{МГц}. \tag{3.56}$$

Прежде чем приступать к релятивистскому анализу поперечного взаимодействия, вернемся к нерелятивистскому рассмотрению, проведенному в гл. 4, § 11. Причинная вакуумная амплитуда для обмена фотоном и частицей дается формулой (4-11.33), где динамический характер системы находит свое выражение в выборе функции распространения частиц. Для образования из двух частиц с зарядами и массами, равными $-e$, m и e, M, если рассматривать его в системе центра масс, достаточно произвести подстановку

$$-\frac{e}{m}\,\mathbf{p} \to -\frac{e}{m}\,\mathbf{p} + \frac{e}{M}(-\mathbf{p}), \tag{3.57}$$

используя при этом координатную зависимость фотонной функции распространения для указания того, какая именно из частиц участвует в актах испускания и поглощения. [См. аналогичный анализ в т. 1, стр. 442—444, но там через M обозначена масса составной частицы.] В дополнительную связь между разными частицами явным образом входит множитель $1/M$. Поэтому оставшиеся выкладки можно проводить так, словно имеет место равенство $m/M=0$. Это позволяет поместить тяжелую частицу в начало координат, а легкой частице приписать радиус-вектор $\mathbf{r}$. Получаемые таким способом два слагаемых в вакуумной амплитуде равны

$$-\frac{e^2}{mM}\int (d\mathbf{r})\,dt\,(d\mathbf{r}')\,dt'\psi_1^*(\mathbf{r}t)\,\mathbf{p}\cdot[\mathbf{D}(\mathbf{r},\ t-t')\,G(\mathbf{r}\mathbf{r}',\ t-t')+ \\ +G(\mathbf{r}\mathbf{r}',\ t-t')\,\mathbf{D}(\mathbf{r}',\ t-t')]\cdot\mathbf{p}\psi_2(\mathbf{r}'t'). \tag{3.58}$$

Наличие здесь фотонной функции распространения (4-11.25)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},\ t-t')=i\int d\omega_k\exp[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-ik^0(t-t')]\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\right) \tag{3.59}$$

приводит к тому, что к энергии составной частицы, как и прежде, добавляется энергия k^0. После проведения пространственно-временно́й экстраполяции соответствующая добавка к δV [формула (4-11.58)] оказывается равной

$$\delta V'=\frac{e^2}{mM}\int d\omega_k\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\right):\mathbf{p}\left[\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\frac{1}{E+i\varepsilon-H-k^0}+ \right. \\ \left. +\frac{1}{E+i\varepsilon-H-k^0}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\right]\mathbf{p}, \tag{3.60}$$

или

$$\delta V'=-2\frac{e^2}{mM}\int d\omega_k\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\right):\mathbf{p}\frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{k^0}\mathbf{p}+ \\ +\frac{e^2}{mM}\int d\omega_k\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\right):\mathbf{p}\left[\frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{k^0}\frac{E-H}{E+i\varepsilon-H-k^0}+ \right. \\ \left. +\frac{E-H}{E+i\varepsilon-H-k^0}\frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{k^0}\right]\mathbf{p}. \tag{3.61}$$

Последнее разбиение основывается на равенстве

$$2\int d\omega_k\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\right)\frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{k^0}=\left(\mathbf{1}-\frac{\nabla\nabla}{\nabla^2}\right)\int\frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3}\frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{\mathbf{k}^2}= \\ =\left(\mathbf{1}-\frac{\nabla\nabla}{\nabla^2}\right)\mathscr{D}(\mathbf{r}). \tag{3.62}$$

Соответствующее слагаемое представляет собой нерелятивистское выражение для мгновенной части поперечного взаимодействия. Оно уже учтено (в релятивистской форме), а потому это слагаемое в формуле (3.61) следует отбросить.

Наличие в существенном члене (3.61) экспоненциального множителя $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ приводит к тому, что в него входит характерная энергия фотона K — некая малая величина, кратная $(a_0)^{-1} = \alpha m$, скажем,

$$K \sim \alpha^{3/2} m. \tag{3.63}$$

При $k^0 \leqslant K$ экспоненциальный множитель эффективно становится равным единице и интегрирование по всем направлениям фотона дает

$$\delta V'_{<K} = \frac{4}{3}\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{mM}\int_0^K dk^0 \mathbf{p}\cdot\frac{E-H}{E+i\varepsilon-H-k^0}\mathbf{p}. \tag{3.64}$$

Как легко видеть, мы (с точностью до множителя $2m/M$) имеем здесь более компактную форму записи выражения (4-11.59). Своим происхождением этот простой результат обязан следующему замечанию, основывающемуся на подстановке (3.57): две частицы испускают и поглощают фотоны с большими длинами волн в точности так же, как и одна частица, но с измененной константой связи: $e/m \to e/\mu$. Получаемый из формул (4-11.91) и (4-11.92) при $Z = 1$ дополнительный энергетический сдвиг для $2s$-уровня равен

$$\langle\delta V'_{<K}\rangle_{2s} = \frac{2}{3\pi}\frac{m}{M}\alpha^3 \mathrm{Ry}\left[\ln\frac{K}{\mathrm{Ry}} - 2{,}8118\right]. \tag{3.65}$$

Согласно формуле (4-11.97), для $2p$-уровня мы имеем

$$\langle\delta V'_{<K}\rangle_{2p} = \frac{2}{3\pi}\frac{m}{M}\alpha^3 \mathrm{Ry}\,[0{,}0300]. \tag{3.66}$$

При импульсах $k^0 > K$, что на порядок величины больше атомных энергий связи, в знаменателе (3.61) величиной $E-H$ можно пренебречь по сравнению с k^0:

$$\delta V'_{>K} = -\frac{e^2}{mM}\int_K^\infty d\omega_k \frac{1}{\mathbf{k}^2}\left(1-\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\right) : \mathbf{p}\,[\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})(E-H) + (E-H)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]\,\mathbf{p}. \tag{3.67}$$

При вычислении среднего значения этого оператора в собственном состоянии H с собственным значением E в выражении (3.67) можно произвести замены

$$\begin{aligned}(E-H)\,\mathbf{p} &\to [E-H,\ \mathbf{p}] = -i\nabla V,\\ \mathbf{p}\,(E-H) &\to [\mathbf{p},\ E-H] = i\nabla V,\end{aligned} \tag{3.68}$$

после которых оно примет вид

$$\delta V'_{>K} = -\frac{e^2}{mM}\int_K^{\infty} d\omega_k \frac{1}{\mathbf{k}^2}\left(1-\frac{\mathbf{kk}}{\mathbf{k}^2}\right) : i\{\nabla V \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{p} - \\ -\mathbf{p}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\nabla V\}, \tag{3.69}$$

или

$$\delta V'_{>K} = \frac{e^2}{mM}\int_K^{\infty} d\omega_k \frac{1}{\mathbf{k}^2}\left(1-\frac{\mathbf{kk}}{\mathbf{k}^2}\right) : \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\nabla\nabla V. \tag{3.70}$$

Анализ оператора (3.69) несколько упростится, если выбрать вещественную волновую функцию, что дает нам

$$\langle\delta V'_{>K}\rangle = -\frac{e^2}{mM}\int_K^{\infty} d\omega_k \frac{1}{\mathbf{k}^2}\left(1-\frac{\mathbf{kk}}{\mathbf{k}^2}\right) : \int (d\mathbf{r})\nabla V \times \\ \times \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\nabla(\psi(\mathbf{r}))^2. \tag{3.71}$$

Как и в формулах (4-11.75) и (4-11.76), мы будем пользоваться безразмерными переменными, записывая

$$\mathbf{r} = na_0\mathbf{x}, \quad \psi(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{\pi n^3 a_0^3}\right]^{1/2}\psi(\mathbf{x}), \tag{3.72}$$

а также

$$\mathbf{k} = \frac{1}{na_0}\boldsymbol{\varkappa}. \tag{3.73}$$

Введя косинус угла между векторами $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$,

$$\mu = \frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\varkappa}}{x\varkappa}. \tag{3.74}$$

получим

$$\langle\delta V'_{>K}\rangle = -\frac{4}{\pi}\frac{m}{M}\frac{\alpha^3}{n^3}\,\mathrm{Ry}\int_{-1}^{1} d\mu\,(1-\mu^2)\int_{na_0K}^{\infty}\frac{d\varkappa}{\varkappa}\times \\ \times\int_0^{\infty} dx\exp(i\varkappa x\mu)\frac{d}{dx}(\psi(x))^2. \tag{3.75}$$

Обращаясь к производящей функции (4-11.84),

$$\frac{1}{(1-t)^2}\exp\{-[(1+t)/(1-t)]\,x\} = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} n\psi_{ns}(x), \tag{3.76}$$

которая, кстати, является решением дифференциального уравнения

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x}-1+\frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial t}t\right]\frac{1}{(1-t)^2}\exp\{-[(1+t)/(1-t)]\,x\} = 0, \tag{3.77}$$

будем иметь

$$\frac{1}{(1-t)^2(1-t')^2}\exp(-\lambda x)=\sum_{n,\,n'=1}^{\infty} t^{n-1}t'^{n'-1}nn'\psi_{ns}(x)\,\psi_{n's}(x),$$

$$\lambda=\frac{1+t}{1-t}+\frac{1+t'}{1-t'}=2\,\frac{1-tt'}{(1-t)(1-t')},\tag{3.78}$$

а следовательно,

$$(\psi_{ns}(x))^2=\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dt'}\right)^{n-1}\times$$
$$\times\frac{1}{(1-t)^2(1-t')^2}\exp(-\lambda x)\,|_{t=t'=0}.\tag{3.79}$$

В итоге у нас возникают следующие повторные интегралы:

$$\lambda\int_0^\infty dx\exp(i\varkappa x\mu)\exp(-\lambda x)=\frac{\lambda}{\lambda-i\varkappa\mu}\to\frac{\lambda^2}{\lambda^2+\varkappa^2\mu^2}\tag{3.80}$$

(на последнем этапе учтено последующее интегрирование по μ); далее,

$$\int_{na_0K}^{\infty}\frac{d\varkappa}{\varkappa}\frac{\lambda^2}{\lambda^2+\varkappa^2\mu^2}\approx\ln\frac{\lambda}{na_0K\mu},\quad na_0K\ll 1;\tag{3.81}$$

и наконец,

$$\int_{-1}^{1}d\mu\,(1-\mu^2)\ln\frac{\lambda}{na_0K\mu}=\frac{4}{3}\left(\ln\frac{\lambda}{na_0K}+\frac{4}{3}\right).\tag{3.82}$$

В результате приходим к производящей функции

$$\frac{16}{3\pi}\frac{m}{M}\frac{\alpha^3}{n^3}\mathrm{Ry}\frac{1}{(1-t)^2(1-t')^2}\left(\ln\frac{\lambda}{na_0K}+\frac{4}{3}\right).\tag{3.83}$$

Коэффициент в ее разложении при $t^{n-1}t'^{n-1}$, деленный на n^2, совпадает с искомым средним значением в ns-состоянии. По тому же рецепту в важном частном случае, когда $n=2$, получим

$$\langle\delta V'_{>K}\rangle_{2s}=\frac{2}{3\pi}\frac{m}{M}\alpha^3\,\mathrm{Ry}\left(\ln\frac{1}{a_0K}+\frac{25}{12}\right).\tag{3.84}$$

Добавив сюда (3.65), мы найдем, что

$$\langle\delta V'\rangle_{2s}=\frac{2}{3\pi}\frac{m}{M}\alpha^3\,\mathrm{Ry}\left(\ln\frac{2}{\alpha}-2{,}8118+\frac{25}{12}\right).\tag{3.85}$$

Выше нам представился случай продемонстрировать лишь метод получения с помощью производящей функции (3.76) волновых функций s-состояний. Связь между состояниями с одним и тем же квантовым числом n, но с разными l можно описать, введя аксиальный вектор

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r} + a_0 \frac{1}{2} (\mathbf{L} \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{L}), \tag{3.86}$$

который является интегралом движения. В последнем нетрудно убедиться прямой проверкой, если исходить из уравнений движения

$$m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{3.87}$$

и взять симметризованное произведение, что допустимо в силу квадратичной зависимости оператора энергии от импульса [ср. с уравнением (1-2.51)]. Поскольку оператор $\mathbf{A}$ — интеграл движения, при его действии волновая функция с заданной энергией должна переходить в волновую функцию с той же самой энергией. Согласно перестановочному соотношению

$$\mathbf{L} \times \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{L} = 2i\mathbf{p}, \tag{3.88}$$

характеризующему $\mathbf{p}$ как векторную величину, для волновой функции s-состояния ($\mathbf{L}\psi_{ns} = 0$) имеем

$$\mathbf{A}\psi_{ns}(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \left(1 + a_0 \frac{d}{dr}\right) \psi_{ns}(r). \tag{3.89}$$

Будучи вектором, эта комбинация представляет собой волновую функцию p-состояния. При $n = 1$, когда имеется только s-состояние, мы заключаем, что

$$\left(1 + a_0 \frac{d}{dr}\right) \psi_{1s}(r) = 0. \tag{3.90}$$

Отсюда мы приходим к простой экспоненциальной функции, которая, как известно, и описывает данное состояние. Радиальная зависимость волновой функции $2s$-состояния [см. формулу (4-11.90)]

$$\psi_{2s}(r) \sim \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) \exp(-r/2a_0) \tag{3.91}$$

приводит к трем волновым функциям типа $2p$, которые выглядят как компоненты некоторого вектора:

$$\psi_{2pk}(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{32\pi a_0^3}\right]^{1/2} \frac{\mathbf{r}_k}{a_0} \exp(-r/2a_0), \tag{3.92}$$

причем мы ввели здесь соответствующую нормировочную постоянную.

Вместо того чтобы подставить в (3.71) какую-то одну из волновых функций p-состояния, мы воспользуемся операцией усредния:

$$\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}(\psi_{2pk}(\mathbf{r}))^2=\frac{1}{96\pi a_0^3}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\exp(r/a_0)=$$

$$=\frac{1}{\pi(2a_0)^3}\frac{x^2}{3}\exp(-2x), \tag{3.93}$$

где последнее выражение записано через безразмерные переменные для случая $n = 2$. Применяя теперь формулу (3.75), получаем

$$\langle\delta V'_{>K}\rangle_{2p}=-\frac{4}{\pi}\frac{m}{M}\frac{\alpha^3}{8}\mathrm{Ry}\int_{-1}^{1}d\mu(1-\mu^2)\int_{2a_0K}^{\infty}\frac{d\varkappa}{\varkappa}\times$$

$$\times\int_0^\infty dx\exp(i\varkappa x\mu)\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{3}\exp(-2x)\right]. \tag{3.94}$$

Если написать

$$x^2\exp(-2x)=\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^2\exp(-\lambda x)|_{\lambda=2}, \tag{3.95}$$

то мы сможем пользоваться производящей функцией (3.83) без множителя $(1-t)^{-2}(1-t')^{-2}$, что дает

$$\langle\delta V'_{>K}\rangle_{2p}=\frac{16}{3\pi}\frac{m}{M}\frac{\alpha^3}{8}\mathrm{Ry}\frac{1}{3}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^2\left(\ln\frac{\lambda}{2a_0K}+\frac{4}{3}\right)\Big|_{\lambda=2}=$$

$$=-\frac{1}{18\pi}\frac{m}{M}\alpha^3\mathrm{Ry}. \tag{3.96}$$

Комбинируя этот результат с (3.66), получаем

$$\langle\delta V'\rangle_{2p}=\frac{2}{3\pi}\frac{m}{M}\alpha^3\mathrm{Ry}\left[0{,}0300-\frac{1}{12}\right]. \tag{3.97}$$

Порядок величины рассмотренных эффектов таков:

$$\delta E\sim\frac{\alpha}{m}\frac{\alpha}{M}|\psi(0)|^2. \tag{3.98}$$

Такой же сдвиг возникает и благодаря обмену двух частиц двумя фотонами. Действительно, в множителях α/m и α/M мы узнаем амплитуды рассеяния фотонов с низкими энергиями на соответствующих частицах (вспомним томсоновское сечение рассеяния), которые определяют также испускание и поглощение двух фотонов с низкими энергиями. Расчет этого эффекта мы проведем в нерелятивистском случае. Добавка к слагаемому в действии, даваемому формулой (4-11.30), равна

$$-\int(d\mathbf{r})\,dt\,\psi^*(\mathbf{r}t)\frac{e^2}{2m}(\mathbf{A}(\mathbf{r}t))^2\psi(\mathbf{r}t). \tag{3.99}$$

На двухчастичный случай он распространяется следующим образом:

$$-\int (d\mathbf{r}_1)(d\mathbf{r}_2)\,dt\psi^*(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)\left[\frac{e^2}{2m}(\mathbf{A}(\mathbf{r}_1t))^2+\right.$$
$$\left.+\frac{e^2}{2M}(\mathbf{A}(\mathbf{r}_2t))^2\right]\psi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t). \qquad (3.100)$$

В нерелятивистской области основную роль играет именно последний процесс, а не два последовательных акта, описываемых двухчастичным обобщением выражения (4-11.30). Таким образом, эффективный источник испускания двух фотонов и составной частицы обобщенным источником составных частиц равен

$$J_k(x)\,J_l(x')\,\eta(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)|_{\text{эфф}}=$$
$$=-\delta(x-x')\,\delta(x^0-t)\,\delta_{kl}\left[\frac{e^2}{m}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_1)+\frac{e^2}{M}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_2)\right]\psi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t) \qquad (3.101)$$

и аналогичное выражение, содержащее $\psi^*(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)$, мы имеем для процесса трехчастичного поглощения. Вакуумная амплитуда, описывающая трехчастичный обмен между различными компонентами составной частицы, равна

$$i\frac{e^2}{m}\frac{e^2}{M}\int(d\mathbf{r}_1)\ \ldots\ dt'\psi^*(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t)\,\delta_{kl}\,\frac{1}{2}\,[D(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2',\ t-t')_{km}\times$$
$$\times D(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2',\ t-t')_{ln}+D(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1',\ t-t')_{km}D(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1',\ t-t')_{ln}]\times$$
$$\times G(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2t,\ \ \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't')\,\delta_{mn}\psi(\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2't'). \qquad (3.102)$$

Отметим, что тензоры, отражающие поперечный характер фотонной функции распространения, входят в комбинации

$$\delta_{kl}\left(\delta_{km}-\frac{\mathbf{k}_k\mathbf{k}_m}{\mathbf{k}^2}\right)\left(\delta_{ln}-\frac{\mathbf{k}_l'\mathbf{k}_n'}{\mathbf{k}'^2}\right)\delta_{mn}=1+\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')^2}{\mathbf{k}^2\mathbf{k}'^2}, \qquad (3.103)$$

которая напоминает угловую зависимость сечения рассеяния фотонов с низкими энергиями [см., например, формулу (3-13.118)]. Кроме того, наличие множителя $1/M$ позволяет нам, очевидно, поместить тяжелую частицу в начало координат, а значит, добавка к действию по форме совпадает с выражением (4-11.58), куда в качестве взаимодействия нужно подставить

$$\delta V''=\frac{e^2}{m}\frac{e^2}{M}\int d\omega_k\,d\omega_{k'}\left(1+\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')^2}{\mathbf{k}^2\mathbf{k}'^2}\right)\frac{1}{2}\left[\exp[i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{E-H-k^0-k^{0\prime}}+\frac{1}{E-H-k^0-k^{0\prime}}\exp[i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}]\right]. \qquad (3.104)$$

Среднее значение величины $\delta V''$ в собственном состоянии оператора $E-H$ с нулевым собственным значением равно

$$\langle\delta V''\rangle = -\frac{e^2}{m}\frac{e^2}{M}\int d\omega_k\, d\omega_{k'}\left(1+\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')^2}{\mathbf{k}^2\mathbf{k}'^2}\right)\times$$
$$\times\frac{1}{k^0+k^{0\prime}}\int (d\mathbf{r})\exp\left[i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}\right]|\psi(\mathbf{r})|^2. \tag{3.105}$$

Рассмотрим сначала приближение, в котором импульсом частицы пренебрегается, что соответствует замене $\psi(\mathbf{r})$ на $\psi(0)$. Это дает

$$\langle\delta V''\rangle\sim -\frac{e^2}{m}\frac{e^2}{M}|\psi(0)|^2\int d\omega_k\, d\omega_{k'}\left(1+\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')^2}{\mathbf{k}^2\mathbf{k}'^2}\right)\frac{1}{k^0+k^{0\prime}}\times$$
$$\times(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') = -2\frac{\alpha^2}{mM}|\psi(0)|^2\int\frac{dk^0}{k^0}. \tag{3.106}$$

Область появляющегося здесь интегрирования по энергиям фотона ограничивается релятивистскими эффектами при $k^0\sim m$ и конечным импульсом, ассоциируемым со связанным состоянием, при $k^0\sim\alpha m$. Следовательно,

$$\int\frac{dk^0}{k^0}\sim\ln\frac{1}{\alpha}, \tag{3.107}$$

и в качестве грубой оценки при $n=2$ мы получаем

$$\langle\delta V''\rangle_{2s}\sim-\frac{1}{2\pi}\frac{m}{M}\alpha^3\ln\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Ry}. \tag{3.108}$$

Этот эффект составляет приблизительно $^3/_4$ величины (3.85) и имеет противоположный знак.

Уточним теперь нашу оценку на низкоэнергетическом пределе. Обращаясь к производящей функции (3.76) для s-состояний, мы видим, что в интеграл по координатам, фигурирующий в формуле (3.105) и записанный через безразмерные переменные, входит

$$\int(d\mathbf{x})\exp\left[i(\varkappa+\varkappa')\cdot\mathbf{x}\right]\exp(-\lambda x) =$$
$$=4\pi\left(-\frac{d}{d\lambda}\right)\int_0^\infty dx\exp(-\lambda x)\frac{\sin|\varkappa+\varkappa'|x}{|\varkappa+\varkappa'|} =$$
$$=4\pi\left(-\frac{d}{d\lambda}\right)\frac{1}{(\varkappa+\varkappa')^2+\lambda^2}. \tag{3.109}$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{(\varkappa+\varkappa')^2+\lambda^2}=\int_0^\infty ds\exp\left\{-s\left[(\varkappa+\varkappa')^2+\lambda^2\right]\right\}, \tag{3.110}$$

представим (3.109) в форме

$$\int (d\mathbf{x}) \exp[i(\varkappa+\varkappa')\cdot\mathbf{x}] \exp(-\lambda x) = \\ = 8\pi\lambda \int_0^\infty ds\, s \exp\{-s[(\varkappa+\varkappa')^2+\lambda^2]\}. \tag{3.111}$$

Преобразуя рассматриваемый член тем же способом, что и при выводе выражения (3.83), мы для производящей функции, соответствующей среднему значению (3.105), получаем

$$-\frac{8}{\pi^2}\frac{m}{M}\frac{\alpha^3}{n^3}\mathrm{Ry}\frac{\lambda}{(1-t)^2(1-t')^2}\int_0^\infty d\varkappa\, d\varkappa'\frac{\varkappa\varkappa'}{\varkappa+\varkappa'}\int_{-1}^{1} d\mu\,(1+\mu^2)\times \\ \times\int_0^\infty ds\, s\exp\{-s[\varkappa^2+\varkappa'^2+2\varkappa\varkappa'\mu+\lambda^2]\}, \tag{3.112}$$

где $\varkappa$ и $\varkappa'$ — модули соответствующих векторов, а μ — косинус угла между ними. Для удобства произведем замену переменных

$$\varkappa = y2^{-1/2}(1+v), \quad \varkappa' = y2^{-1/2}(1-v), \\ -1<v<1, \quad 0<y<Y. \tag{3.113}$$

Верхний предел Y соответствует тому, что интегрирование по энергиям фотона необходимо оборвать, прежде чем мы достигнем релятивистской области. В этих переменных величина (3.112) записывается как

$$-\frac{2}{\pi}\frac{m}{M}\frac{\alpha^3}{n^3}\mathrm{Ry}\frac{1}{(1-t)^2(1-t')^2}\left[\frac{2^{3/2}}{\pi}\lambda I\right], \tag{3.114}$$

где

$$I = \int_0^Y dy\, y^2 \int_0^1 dv\,(1-v^2)\int_{-1}^{1} d\mu\,(1+\mu^2)\, ds\, s\times \\ \times\exp\{-s[(1+v^2)y^2+\mu(1-v^2)y^2+\lambda^2]\}. \tag{3.115}$$

Два слагаемых, возникающих при тождественном преобразовании

$$1+\mu^2 = 2-(1-\mu^2), \tag{3.116}$$

мы будем рассматривать разными способами. Для постоянного слагаемого выполним сначала интегрирования по μ и затем по s:

$$I' = 2\int_0^Y dy\, y^2 \int_0^1 dv\,(1-v^2) \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty ds\, s \exp\{-s[(1+v^2)y^2+ + \mu(1-v^2)y^2+\lambda^2]\} =$$

$$= 2\int_0^Y dy \int_0^1 dv \int_0^\infty ds \exp(-s\lambda^2)[\exp(-s2v^2y^2) - \exp(-s2y^2)] =$$

$$= 2\int_0^Y dy \int_0^1 dv \left[\frac{1}{2v^2y^2+\lambda^2} - \frac{1}{2y^2+\lambda^2}\right]. \qquad (3.117)$$

Последующее интегрирование по v дает

$$I' = 2\int_0^Y dy\left[\frac{1}{\sqrt{2}\lambda y}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}y}{\lambda} - \frac{1}{2y^2+\lambda^2}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\lambda}\ln\left(\frac{\sqrt{2}Y}{\lambda}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}Y}{\lambda} - 2\int_0^Y dy\frac{\ln(\sqrt{2}y/\lambda)+1}{2y^2+\lambda^2}, \qquad (3.118)$$

где последнее выражение получено интегрированием по частям. Логарифмическая зависимость от Y является следствием того, что при малых значениях v в (3.117) входит комбинация с vy. Таким образом, она соответствует случаю $\varkappa \sim \varkappa' \sim \sqrt{2}y$. В результате этого

$$\sqrt{2}\,Y = Lna_0 = \frac{nL}{\alpha m}, \qquad (3.119)$$

где L — верхний предел для энергии фотона. В предвидении последующей сшивки с результатом релятивистского расчета мы выберем его лежащим где-то между нерелятивистскими ($\sim \alpha m$) и релятивистскими ($\sim m$) импульсами, положив, скажем,

$$L \sim \alpha^{1/2} m. \qquad (3.120)$$

Достаточно большое значение $Y \sim \alpha^{-1/2}$ позволяет нам упростить выражение (3.118):

$$I' \approx \frac{2^{-1/2}\pi}{\lambda}\left(\ln\frac{\sqrt{2}Y}{\lambda} - 1\right), \qquad (3.121)$$

где учтено соотношение

$$\int_0^\infty dt\frac{\ln t}{1+t^2} = 0. \qquad (3.122)$$

Во втором куске интеграла I, равном

$$I'' = -\int_0^Y dy\, y^2 \int_0^1 dv\,(1-v^2) \int_{-1}^1 d\mu\,(1-\mu^2) \times$$

$$\times \int_0^\infty ds\, s \exp\{-s[(1+v^2)y^2 + \mu(1-v^2)y^2 + \lambda^2]\}, \qquad (3.123)$$

величина $1-\mu^2$ обращается в нуль при $\mu=-1$. Согласно выражению (3.106), это соответствует случаю высоких энергий и дает возможность заменить Y на ∞. Здесь мы сначала выполним интегрирование по y, а затем по s и μ:

$$I'' = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_0^1 dv\,(1-v^2) \int_{-1}^1 d\mu\,(1-\mu^2) \times$$

$$\times \int_0^\infty ds\, s^{-1/2} \exp(-\lambda^2 s)\,[1+v^2+\mu(1-v^2)]^{-3/2} =$$

$$= -\frac{\pi}{4\lambda} \int_0^1 dv\,(1-v^2) \int_{-1}^1 d\mu\,(1-\mu^2)\,[1+v^2+\mu(1-v^2)]^{-3/2}. \qquad (3.124)$$

Интеграл по μ возьмем по частям:

$$I'' = \frac{\pi}{\lambda} \int_0^1 dv \int_{-1}^1 d\mu\, \mu\,[1+v^2+\mu(1-v^2)]^{-1/2} =$$

$$= -\frac{2^{3/2}\pi}{\lambda}\,\frac{1}{3} \int_0^1 dv\, \frac{1-v}{(1+v)^2}, \qquad (3.125)$$

и окончательно получим

$$I'' = -\frac{2^{3/2}\pi}{\lambda}\,\frac{1}{3}\,(1-\ln 2). \qquad (3.126)$$

Теперь сложим два куска I:

$$\frac{2^{3/2}}{\pi}\,\lambda I = 2\left(\ln\frac{\sqrt{2}\,Y}{\lambda} - 1\right) - \frac{8}{3}\,(1-\ln 2). \qquad (3.127)$$

Таким образом, производящая функция (3.114) оказывается равной

$$-\frac{4}{\pi}\,\frac{m}{M}\,\frac{\alpha^3}{n^3}\,\mathrm{Ry}\,\frac{1}{(1-t)^2(1-t')^2}\left[\ln\frac{2nL}{\lambda\alpha m} - \frac{7}{3} + \frac{4}{3}\ln 2\right]. \qquad (3.128)$$

При $n=2$ она дает

$$\langle \delta V'' \rangle_{2s} = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{m}{M}\,\alpha^3\,\mathrm{Ry}\left[\ln\frac{2L}{\alpha m} - \frac{37}{12} + \frac{4}{3}\ln 2\right]. \qquad (3.129)$$

Как и в случае формулы (3.96), результат для $2p$-уровня получается путем применения к производящей функции (3.128) без множителя $(1-t)^{-2}(1-t')^{-2}$ оператора $^1/_3(d/d\lambda)^2$, что дает

$$\langle\delta V''\rangle_{2p} = -\frac{1}{2\pi}\frac{m}{M}\alpha^3\,\mathrm{Ry}\,\frac{1}{3}\frac{d^2}{a\lambda^2}\ln\frac{1}{\lambda}\Big|_{\lambda=2} = -\frac{1}{24\pi}\frac{m}{M}\alpha^3\,\mathrm{Ry}. \tag{3.130}$$

Основная задача, которую нам осталось решить, состоит в расчете релятивистского процесса — сшив его результат с (3.129), мы сможем исключить зависимость от параметра L. Обратимся к выражению (2.12). Входящая в него функция $D_+(x-x')_{\mu\nu}$ в радиационной калибровке имеет компоненты двух сортов, которые мы выпишем еще раз:

$$D_+(x-x')_{00} = -\delta(x^0-x^{0\prime})\,\mathscr{D}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{3.131}$$

и

$$D_+(x-x')_{kl} = \left(\delta_{kl}-\frac{\partial_k\partial_l}{\nabla^2}\right)D_+(x-x'). \tag{3.132}$$

Мгновенное взаимодействие мы анализировали, конструируя дифференциальное уравнение для двухчастичной функции Грина. Поперечное же взаимодействие будем рассматривать более элементарным способом, с использованием степенного разложения для соответствующей части функционального дифференциального оператора:

$$\begin{aligned}\exp\left[-i\int(d\xi)(d\xi')\frac{\delta}{\delta A_{1k}(\xi)}D_+(\xi-\xi')_{kl}\frac{\delta}{\delta A_{2l}(\xi')}\right] &=\\ =1-i\int(d\xi)(d\xi')\frac{\delta}{\delta A_{1k}(\xi)}D_+(\xi-\xi')_{kl}\frac{\delta}{\delta A_{2l}(\xi')}&-\\ -\frac{1}{2}\int(d\xi)\,\ldots\,(d\xi''')\frac{\delta}{\delta A_{1k}(\xi')}\frac{\delta}{\delta A_{1l}(\xi')}D_+(\xi-\xi'')_{km}&\times\\ \times D_+(\xi'-\xi''')_{ln}\frac{\delta}{\delta A_{2m}(\xi'')}\frac{\delta}{\delta A_{2n}(\xi''')}+\ldots\ .&\end{aligned} \tag{3.133}$$

В соответствии с равенствами

$$\frac{\delta}{\delta A_k(\xi)}G_+^A(x,\,x') = G_+^A(x,\,\xi)\,eq\gamma_k G_+^A(\xi,\,x') \tag{3.134}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta A_k(\xi)}\frac{\delta}{\delta A_l(\xi')}G_+^A(x,\,x') &= G_+^A(x,\,\xi)\,eq\gamma_k G_+^A(\xi,\,\xi')\,eq\gamma_l G_+^A(\xi',\,x')+\\ &+G_+^A(x,\,\xi')\,eq\gamma_l G_+^A(\xi',\,\xi)\,eq\gamma_k G_+^A(\xi,\,x')\end{aligned} \tag{3.135}$$

эти функциональные производные можно применять прямо к функциям Грина отдельных частиц. Но в случае тяжелой частицы такая процедура излишне сложна. Поскольку мы будем сохранять только эффекты порядка $1/M$, вместо того, чтобы переходить в этих формулах к нерелятивистскому пределу, проще прямо вывести нужные нам результаты из нерелятивистского выражения для функции Грина. Из выражения

$$G_+^A = \frac{1}{\gamma\Pi + M} = \frac{M - \gamma\Pi}{-(\gamma\Pi)^2 + M^2} \tag{3.136}$$

вытекает следующее промежуточное представление для этой последней функции Грина, относящееся к частице с зарядом e ($p^0 \to M + p^0$):

$$x^0 > x^{0\prime}: \quad G_+^A(x, x') \approx \frac{1}{2}(1+\gamma^0)\exp[-iM(x^0 - x^{0\prime})] \times \\ \times \frac{1}{[(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2/2M] - (p^0 - eA^0)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{3.137}$$

Коль скоро нас интересует зависимость от $\mathbf{A}$, уже включающая малый параметр $1/M$, кинетической энергией $\mathbf{p}^2/2M$ можно пренебречь, и мы получаем выражение

$$x^0 > x^{0\prime}: \quad G_+^A(x, x') \approx \frac{i}{2}(1+\gamma^0)\exp[-iM(x^0 - x^{0\prime})] \times \\ \times \exp\left[-i\int_{x^{0\prime}}^{x^0} dt\left(eA^0 - \frac{e}{M}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A} + \frac{e^2\mathbf{A}^2}{2M}\right)\right]\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \tag{3.138}$$

являющееся обобщением формулы (2.30). В случае когда значения времени ξ^0 и $\xi^{0\prime}$ лежат в интервале между x^0 и $x^{0\prime}$, мы таким способом получаем

$$\frac{\delta}{\delta A_k(\xi)} G_+^A(x, x') \approx i\frac{e}{M} p_k \delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) G_+^A(x, x') \tag{3.139}$$

и

$$\frac{\delta}{\delta A_k(\xi)} \frac{\delta}{\delta A_l(\xi')} G_+^A(x, x') \approx \\ \approx -i\frac{e^2}{M}\delta_{kl}\delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')\delta(\xi^0 - \xi^{0\prime})\delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) G_+^A(x - x'). \tag{3.140}$$

В других случаях эти функциональные производные равны нулю.

Здесь, пожалуй, нужно сделать отступление и проиллюстрировать методику выделения энергетического сдвига при задании функции Грина приведенным выше разложением. Рассмотрим для простоты функцию Грина одной-единственной частицы, главные члены разложения которой равны

$$G_+(x, x') - \int (dy)(dy') G_+(x, y) V(\mathbf{y}\mathbf{y}', y^0 - y^{0\prime}) G_+(y', x') + \ldots . \tag{3.141}$$

Исходная функция Грина представляется через собственные функции так:

$$x^0 > x^{0\prime}:\quad G_+(x,\ x') = i\sum \psi(\mathbf{x})\exp[-iE(x^0 - x^{0\prime})]\,\psi^*(\mathbf{x}')\,\gamma^0. \tag{3.142}$$

При указанном соотношении моментов времени сюда входят положительные частоты, а при $x^0 < x^{0\prime}$ — отрицательные. Множитель при $i\psi(\mathbf{x})\,\psi^*(\mathbf{x}')\,\gamma^0$, соответствующий определенной собственной функции в формуле (3.141), равен ($x^0 - x^{0\prime} = T$)

$$\exp(-iET) - i\exp(-iET)\times$$
$$\times\int dy^0\,dy^{0\prime}\,V(y^0 - y^{0\prime})\exp[iE(y^0 - y^{0\prime})], \tag{3.143}$$

где

$$V(y^0 - y^{0\prime}) = \int (d\mathbf{y})(d\mathbf{y}')\,\psi^*(\mathbf{y})\,\gamma^0 V(\mathbf{y}\mathbf{y}',\ y^0 - y^{0\prime})\,\psi(\mathbf{y}'), \tag{3.144}$$

причем представлен только вклад, соответствующий временно́й области

$$x^0 > y^0,\quad y^{0\prime} > x^{0\prime}. \tag{3.145}$$

Причина этого станет ясной, если вычислить асимптотику интеграла (3.143) в случае, когда микроскопическая временна́я переменная $t = y^0 - y^{0\prime}$ эффективно пробегает значения от $-\infty$ до ∞, а значения оставшейся временно́й переменной $y^0 \approx y^{0\prime}$ лежат в промежутке с длительностью T. Это дает для (3.143)

$$\exp(-iET)\,[1 - i\delta ET] \approx \exp[-i(E + \delta E)\,T], \tag{3.146}$$

где

$$\delta E = \int_{-\infty}^{\infty} dt\,V(t)\exp(iEt). \tag{3.147}$$

В отличие от вековой вариации, фигурирующей в формуле (3.146), существенные интервалы времени в областях $y^0 > x^0$ и $y^{0\prime} < x^{0\prime}$ являются микроскопическими и не дают вклада в формулу (3.147) для энергетического сдвига, которая эквивалентна формуле (3.44).

Еще один полезный результат можно получить, заметив, что имеет место равенство

$$\frac{1}{i}\,\bar{\partial}_\mu\,[G_+^A(x,\ \bar{x})\,\gamma^\mu G_+^A(\bar{x},\ x')] = [\delta(\bar{x} - x') - \delta(x - \bar{x})]\,G_+^A(x,\ x'), \tag{3.148}$$

представляющее собой некую разновидность дивергентного уравнения [ср. с формулой (3-6.48)]

$$\partial_\mu\left[\frac{1}{2}\,\psi(x)\,\gamma^0\gamma^\mu eq\psi(x)\right] = i\psi(x)\,\gamma^0 eq\eta(x). \tag{3.149}$$

Рассмотрим случай, когда $x^0 > x^{0\prime}$, и пусть $\bar{x}^0$ лежит в интервале

$$x^0 > \bar{x}^0 > x^{0\prime}. \tag{3.150}$$

Выполним теперь пространственно-временнóе интегрирование по полубесконечной области, в которой время меньше $\bar{x}^0$. В итоге придем к соотношению

$$\frac{1}{i} \int (d\bar{\mathrm{x}})\, G_+^A (x,\ \bar{x})\, \gamma^0 G_+^A (\bar{x},\ x') = G_+^A (x,\ x'), \tag{3.151}$$

показывающему, что функция $(1/i)\, G_+^A\, \gamma^0$ обладает мультипликативным свойством композиции. В случае свободных частиц это утверждение элементарно; мы же обобщили его на произвольные электромагнитные поля. Отметим, кстати, что если обратить оба неравенства (3.150), то в правой части равенства (3.151) появится знак минус. Если же обратить только одно из названных неравенств, то интеграл в формуле (3.151) станет равным нулю.

Указанная в формулах (3.139) и (3.140) факторизация функции Грина тяжелой частицы позволяет нам рассматривать в случае легкой частицы эффективную одночастичную функцию Грина. Исключив подобным способом все двухчастичные аспекты, необходимо ограничиться также учетом только относительного движения, когда импульс тяжелой частицы в формуле (3.139) заменяется в то же самое время импульсом легкой частицы, взятым с противоположным знаком. Для этого, пользуясь разложением (3.151), мы вводим явным образом момент времени, в который испускается или поглощается тяжелая частица. Принимая в качестве начала координат положение тяжелой частицы, мы для эффективного изменения функции Грина легкой частицы, обусловленного однофотонным обменом, получаем

$$\begin{gathered} -i\frac{e^2}{M} \int (d\xi)\,(d\xi')\, D_+(\xi,\ \xi^0-\xi^{0\prime})_{kl} \exp [\quad]\, \{\eta\,(\xi^0-\xi^{0\prime})\, G_+^A (x,\ \xi) \times \\ \times \gamma_k G_+^A (\xi,\ \xi')\, \gamma^0 p_l G_+^A (\xi',\ x') + \eta\,(\xi^{0\prime}-\xi^0)\, G_+^A (x,\ \xi')\, \gamma^0 p_l G_+^A (\xi',\ \xi) \times \\ \times \gamma_k G_+^A (\xi,\ x')\} \exp \left(i \int dt e A^0 \right) \Big|_{A^0=0}, \end{gathered} \tag{3.152}$$

где через $\exp[\quad]$ обозначена та часть функционального оператора, фигурирующего в формуле (2.12), которая отвечает мгновенному взаимодействию. Действие ее проще всего описывается, если положить период времени тяжелой частицы, т. е. область интегрирования по времени в последнем множителе выражения (3.152), большим по сравнению с $x^0 - x^{0\prime} = T$, считая при этом, что он полностью содержит в себе данный интервал. Исключая подобным способом граничные эффекты, мы сводим действие функционального оператора просто к замене eqA^0 в G_+ статическим кулоновским потенциалом. Проводя затем сравнение с разложением (3.141), получаем следующую формулу для энергетического сдвига (здесь используются несколько иные обозначения, причем функция D_{+kl} выписана в явном виде):

$$\delta E = -\frac{e^2}{M}\int d\omega_k \left(\delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{\mathbf{k}^2}\right)\int\limits_0^\infty dt \exp\left[i\left(E-k^0\right)t\right]\times$$
$$\times\langle \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\,\alpha_l G_+(t)\,\gamma^0 p_m + p_m G_+(t)\,\gamma^0\alpha_l \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\rangle. \qquad (3.153)$$

Выполним теперь унитарное преобразование (2.79) и учтем, что наша система является почти нерелятивистской и, следовательно, можно произвести подстановки

$$\alpha_l \to \frac{p_l}{m} \qquad (3.154)$$

и [ср. с формулами (3.137) и (3.138)]

$$\int\limits_0^\infty dt \exp\left[i\left(E-k^0\right)t\right] G_+(t)\,\gamma^0 \to \int\limits_0^\infty dt \exp\left[i\left(E_{\text{нерел}}-k^0\right)t\right] i\times$$
$$\times\exp(-iHt) = -\frac{1}{E_{\text{нерел}}-k^0-H}. \qquad (3.155)$$

В результате придем к формуле для энергетического сдвига, в точности совпадающей с той, которая вытекает из выражения (3.60), полученного путем полностью нерелятивистского расчета.

Двухфотонный обмен приводит к следующему изменению в функции распространения:

$$i\,\frac{(e^2)^2}{M}\int (d\xi)\,\ldots\,(d\xi''')\,D_+(\xi-\xi'')_{km}\,D_+(\xi'-\xi''')_{ln}\exp[\;\;]\,G_+^A(x,\xi)\,\gamma_k\times$$
$$\times G_+^A(\xi,\xi')\,\gamma_l G_+^A(\xi',x')\,\delta_{mn}\delta(\xi''-\xi''')\,\delta(\xi'')\times$$
$$\times\exp\left(-i\int dt eA^0\right)\Big|_{A^0=0}. \qquad (3.156)$$

Сюда входит интегрирование по общей временно́й переменной $\xi^{0\,\prime\prime} = \xi^{0\,\prime\prime\prime}$. Если мы все внимание сконцентрируем на релятивистской области, где импульс, связанный с волновой функцией, пренебрежимо мал и функцию $G_+(\xi,\xi')$ приближенно можно заменить трансляционно-инвариантной функцией распространения свободной частицы, то тогда эффективно возникнет четырехмерный интеграл

$$\int (d\xi'')\,D_+(\xi'-\xi'')_{km}\,D_+(\xi'-\xi'')_{lm} =$$
$$= \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{(k^2-i\varepsilon)^2}\left(\delta_{kl}-\frac{\mathbf{k}_k\mathbf{k}_l}{\mathbf{k}^2}\right). \qquad (3.157)$$

Формула для энергетического сдвига имеет вид ($E \approx m$)

$$\frac{(4\pi\alpha)^2}{M}\psi(0)^*\frac{1}{i}\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-i\varepsilon)^2}\left(\delta_{kl}-\frac{\mathbf{k}_k\mathbf{k}_l}{\mathbf{k}^2}\right)\gamma_k\times$$
$$\times\frac{1}{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}+m-\gamma^0(m-k^0)}\gamma_l\psi(0), \tag{3.158}$$

где

$$\frac{1}{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}+m-\gamma^0(m-k^0)}=\frac{m+\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}+\gamma^0(m-k^0)}{k^2+2mk^0-i\varepsilon}. \tag{3.159}$$

Поскольку $\psi(0)$ есть собственный вектор матрицы γ^0 с собственным значением $\gamma^{0\prime}=+1$, среднее значение любой нечетной степени величины γ равно нулю, и поэтому $\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}$ можно опустить, а матрицу в формуле (3.159), которая действует на $\gamma_l\psi(0)$, можно положить равной -1. В итоге величина (3.158) сводится к

$$-\frac{(4\pi\alpha)^2}{mM}|\psi(0)|^2\frac{1}{i}\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-i\varepsilon)^2}\frac{2mk^0}{k^2+2mk^0-i\varepsilon}. \tag{3.160}$$

Интеграл по частотам можно вычислить методом контурного интегрирования, что дает

$$\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}\left[\frac{1}{(k^2-i\varepsilon)^2}-\frac{1}{k^2-i\varepsilon}\frac{1}{k^2+2mk^0-i\varepsilon}\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{|\mathbf{k}|^3}-\frac{1}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}^2+m^2)^{1/2}}\right]. \tag{3.161}$$

Чтобы осуществить сшивку с нерелятивистским расчетом, оборвем последующее трехмерное интегрирование по импульсам на нижнем пределе $|\mathbf{k}|=L\ll m$. Это приводит к частичному энергетическому сдвигу

$$-\frac{2\alpha^2}{mM}|\psi(0)|^2\ln\frac{m}{2L}=-\frac{4}{\pi}\frac{m}{M}\frac{\alpha^3}{n^3}\mathrm{Ry}\ln\frac{m}{2L}, \tag{3.162}$$

при сопоставлении которого с производящей функцией (3.128) или с явным результатом (3.129) для случая $n=2$ величина L эффективно заменяется величиной $^1/_2m$. Таким образом,

$$\delta E_{2s}''=-\frac{1}{2\pi}\frac{m}{M}\alpha^3\mathrm{Ry}\left[\ln\frac{1}{\alpha}-\frac{37}{12}+\frac{4}{3}\ln 2\right]. \tag{3.163}$$

Объединяя вклады в энергетический сдвиг $2s$-уровня, указанные в формулах (3.56), (3.85) и (3.163), получаем

$$\delta E_{2s}=\frac{2}{3\pi}\frac{m}{M}\alpha^3\mathrm{Ry}\left[\frac{1}{4}\ln\frac{1}{\alpha}-2{,}8118-\frac{1}{2}+\frac{25}{12}+\frac{37}{16}\right], \tag{3.164}$$

тогда как сдвиги $2p$-уровня, указанные в формулах (3.97) и (3.130), дают

$$\delta E_{2p}=\frac{2}{3\pi}\frac{m}{M}\alpha^3\mathrm{Ry}\left[0{,}0300-\frac{1}{12}-\frac{1}{16}\right]. \tag{3.165}$$

В случае атома водорода мы имеем

$$\mathrm{H}:\quad \frac{2}{3\pi}\frac{m}{M}\alpha^3\,\mathrm{Ry}=2\frac{135{,}64}{1836{,}1}\ \text{МГц}=0{,}148\ \text{МГц}, \qquad (3.166)$$

так что

$$\delta E_{2s}=0{,}342\ \text{МГц},\quad \delta E_{2p}=-0{,}017\ \text{МГц}. \qquad (3.167)$$

Добавив энергетический сдвиг в 0,36 МГц к последнему теоретическому значению (4-17.132), получим новое значение:

$$\mathrm{H}:\quad E_{2s_{1/2}}-E_{2p_{1/2}}=1058{,}17\ \text{МГц}. \qquad (3.168)$$

На этот раз мы несколько превысили номинальное экспериментальное значение.|

§ 4. ФОТОННАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ II

При анализе модифицированной фотонной функции распространения, проводившемся в гл. 4, § 3, мы имели дело с обменом причинно-упорядоченных обобщенных фотонных источников парой невзаимодействующих противоположно заряженных частиц. Теперь мы будем рассматривать следующий динамический уровень для этого процесса, на котором выявляется, например, возможность взаимодействия между частицами за счет обмена виртуальным фотоном. На таком динамическом уровне следует учитывать и другие механизмы, которые можно выявить, подходя к проблеме с разных точек зрения. Так, наряду со всяким процессом, протекающим с участием виртуального фотона, возможен аналогичный процесс с участием реального фотона. При рассматриваемой причинной упорядоченности он соответствует возможности испускания не пары реальных частиц, а одной реальной и одной виртуальной частицы. Последняя излучает фотон, что дает нам трехчастичный акт испускания. Имеет место и соответствующий процесс поглощения, когда фотон объединяется с заряженной частицей, порождая виртуальную частицу, которая затем вместе с другой реальной частицей детектируется обобщенным фотонным источником. Правда, здесь возможны два варианта: фотон может поглотиться либо той частицей, которая ранее испустила его, либо другой. Именно второй вариант, когда фотоном обмениваются противоположно заряженные частицы, и эквивалентен процессу рассеяния, т. е. процессу с обменом виртуальным фотоном. В то же время должны существовать механизмы, вносящие соответствующие модификации в такие элементы акта двухчастичного обмена, как примитивное взаимодействие, соответствующее взаимопревращению виртуального фотона с парой частиц, и функции распространения частиц. В том конкретном трехчастичном процессе, в котором одна из частиц не принимает участия в обмене фотоном, мы как раз и узнаем механизм, обусловливающий модификацию функций распространения частиц. Процесс же рассеяния дает нам модификацию примитивного взаимодействия, вводя в него некоторый формфактор. Поскольку эта последняя модификация сопровождает как акт испускания, так и акт поглощения в начале и в конце процесса, то при наличии соответствующего каузального контроля механизм рассеяния должен выполнять обе указанные функции.

Новой характерной особенностью подобных проблем является процесс трехчастичного обмена, на котором мы прежде всего и остановимся. Рассмотрим в качестве введения трехчастичный кинематический интеграл, обобщающий формулу (4-1.23):

$$I(M,\ m_a,\ m_b,\ m_c) = (2\pi)^3 \int d\omega_a\, d\omega_b\, d\omega_c \delta(P - p_a - p_b - p_c). \tag{4.1}$$

Сначала путем элементарного преобразования выполним интегрирования, объединяющие две частицы в одну составную систему с переменной массой M', а затем рассмотрим оставшуюся эффективную двухчастичную систему. Именно, мы напишем

$$\delta(P - p_a - p_b - p_c) = \int \delta(P - P' - p_c)\, d\omega_{P'}\, dM'^2 (2\pi)^3 \delta(P' - p_a - p_b). \tag{4.2}$$

Повторные интегрирования для двухчастичной системы дают

$$I(M,\ m_a,\ m_b,\ m_c) = \int dM'^2 I(M',\ m_a,\ m_b)(2\pi)^3 \times \\ \times \int d\omega_{P'}\, d\omega_c \delta(P - P' - p_c) = \int dM'^2 I(M',\ m_a,\ m_b) I(M,\ M',\ m_c). \tag{4.3}$$

Простейшим примером вычисления последнего интеграла по M' может служить случай, когда массы отдельных частиц равны нулю, или, что то же самое, когда выполняются условия $M \gg \gg m_a,\ m_b,\ m_c$. В этом случае выражение (4.3) принимает вид

$$I(M,\ 0,\ 0,\ 0) = \int_0^{M^2} dM'^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 - \frac{M'^2}{M^2}\right) = \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{M^2}{2}. \tag{4.4}$$

Следующим по простоте является случай, когда только одна из масс отлична от нуля:

$$I(M,\ m,\ 0,\ 0) = \int_{m^2}^{M^2} dM'^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 - \frac{m^2}{M'^2}\right) \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 - \frac{M'^2}{M^2}\right) = \\ = \frac{1}{(4\pi)^4} \left[\frac{(M^2 + m^2)(M^2 - m^2)}{2M^2} - m^2 \ln \frac{M^2}{m^2} \right]. \tag{4.5}$$

Для интересующей нас здесь системы, в которой $m_a = m_b = m$, $m_c = 0$, мы имеем

$$I(M, m, m, 0) = \int\limits_{(2m)^2}^{M^2} dM'^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 - \frac{4m^2}{M'^2}\right)^{1/2} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 - \frac{M'^2}{M^2}\right) =$$

$$= \frac{8m^2}{(4\pi)^4} \int\limits_0^{v_0} dv \frac{v^2 (v_0^2 - v^2)}{(1-v^2)^3} =$$

$$= \frac{2m^2}{(4\pi)^4} \left[\frac{\frac{3}{2} v_0 - \frac{1}{2} v_0^3}{1 - v_0^2} - \frac{3 + v_0^2}{4} \ln \frac{1+v_0}{1-v_0} \right]. \tag{4.6}$$

При вычислении этого интеграла мы ввели переменную

$$v = \left(1 - \frac{4m^2}{M'^2}\right)^{1/2}, \tag{4.7}$$

положив

$$v_0 = \left(1 - \frac{4m^2}{M^2}\right)^{1/2}. \tag{4.8}$$

Асимптотически в области $M^2 \gg (2m)^2$ ($v_0 \sim 1$) интеграл действительно совпадает с величиной (4.4), тогда как вблизи порога, т. е. при $M^2 \gtrsim (2m)^2$ ($v_0 \ll 1$), он ведет себя следующим образом:

$$M^2 \gtrsim (2m)^2: \quad I(M, m, m, 0) \approx \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{4}{15} \frac{(M^2 - 4m^2)^{5/2}}{(2m)^3} \tag{4.9}$$

Можно более симметрично трактовать частицы, если перейти к системе отсчета с бесконечным импульсом, обобщив анализ, результатом которого была формула (4-1.32). Обратим внимание на инвариантный элемент объема в импульсном пространстве (4-1.28) и отметим, что (4-1.30) имеет в качестве трехчастичного аналога дельта-функцию

$$\begin{aligned} \delta(P - p_a - p_b - p_c) = \delta(\mathbf{p}_{aT} + \mathbf{p}_{bT} + \mathbf{p}_{cT}) \times \\ \times \delta(1 - u_a - u_b - u_c)\, \eta(u_a)\, \eta(u_b)\, \eta(u_c) \times \\ \times 2\delta\left(\frac{\mathbf{p}_{aT}^2 + m_a^2}{u_a} + \frac{\mathbf{p}_{bT}^2 + m_b^2}{u_b} + \frac{\mathbf{p}_{cT}^2 + m_c^2}{u_c} - M^2\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

При несимметричных пока интегрированиях по поперечным импульсам исключим $\mathbf{p}_{cT}$ с помощью соответствующей дельта-функции в (4.10), в результате чего в дельта-функции от энергий возникнет квадратичная форма

$$\left(\frac{1}{u_a} + \frac{1}{u_c}\right) \mathbf{p}_{aT}^2 + \left(\frac{1}{u_b} + \frac{1}{u_c}\right) \mathbf{p}_{bT}^2 + \frac{2}{u_c} \mathbf{p}_{aT} \cdot \mathbf{p}_{bT} = \lambda_1 \mathbf{p}_{1T}^2 = \lambda_2 \mathbf{p}_{2T}^2. \tag{4.11}$$

Здесь отражена также возможность диагонализации квадратичной формы путем ортогонального преобразования, при котором

$$(d\mathbf{p}_{aT})(d\mathbf{p}_{bT}) = (d\mathbf{p}_{1T})(d\mathbf{p}_{2T}) \to \pi\, d\mathrm{p}_{1T}^2 \pi\, d\mathrm{p}_{2T}^2. \tag{4.12}$$

При последнем переходе учтены симметрии подынтегрального выражения относительно вращений, так что теперь мы имеем

$$\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^6}\pi^2 \int du_a\, du_b\, du_c\, d\mathrm{p}_{1T}^2\, d\mathrm{p}_{2T}^2 \frac{1}{u_a u_b u_c}\delta(1-u_a-u_b-u_c) \times$$
$$\times\,\delta\left(\lambda_1\mathrm{p}_{1T}^2+\lambda_2\mathrm{p}_{2T}^2-\left(M^2-\frac{m_a^2}{u_a}-\frac{m_b^2}{u_b}-\frac{m_c^2}{u_c}\right)\right), \tag{4.13}$$

где подразумевается, что все параметры u положительны. Отсюда сразу видны спектральные ограничения, которые в параметрической форме записываются так:

$$M^2 > \sum \frac{m_\varkappa^2}{u_\varkappa}, \quad \sum u_\varkappa = 1. \tag{4.14}$$

Предполагая, что пороговая масса имеет значение

$$M_0 = \sum m_\varkappa, \tag{4.15}$$

можно будет условия (4.14) переписать в виде

$$M^2 - M_0^2 > \sum u_\varkappa \left(\frac{m_\varkappa}{u_\varkappa} - M_0\right)^2 \geqslant 0. \tag{4.16}$$

Поскольку указанный здесь нижний предел достигается при

$$u_\varkappa = \frac{m_\varkappa}{M_0}, \qquad \sum u_\varkappa = 1, \tag{4.17}$$

величина M_0 действительно имеет смысл пороговой массы. Как явствует из общего характера обозначений, все сказанное справедливо и в случае произвольного числа частиц.

Оставшиеся в формуле (4.13) интегралы по импульсам берутся путем соответствующей замены переменных, причем считаются выполненными условия (4.14):

$$\int d\mathrm{p}_{1T}^2\, d\mathrm{p}_{2T}^2 \delta\left(\lambda_1\mathrm{p}_{1T}^2+\lambda_2\mathrm{p}_{2T}^2-\left(M^2-\sum\frac{m_\varkappa^2}{u_\varkappa}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\int dx_1\, dx_2\, \delta\left(x_1+x_2-\left(M^2-\sum\frac{m_\varkappa^2}{u_\varkappa}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\int_0^\infty dx_1 \eta\left(M^2-\sum\frac{m_\varkappa^2}{u_\varkappa}-x_1\right) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\left(M^2-\sum\frac{m_\varkappa^2}{u_\varkappa}\right). \tag{4.18}$$

Произведение $\lambda_1\lambda_2$ есть определитель квадратичной формы (4.11):

$$\lambda_1\lambda_2=\left(\frac{1}{u_a}+\frac{1}{u_c}\right)\left(\frac{1}{u_b}+\frac{1}{u_c}\right)-\frac{1}{u_c^2}=\frac{1}{u_au_b}+\frac{1}{u_au_c}+$$
$$+\frac{1}{u_bu_c}=\frac{1}{u_au_bu_c}. \tag{4.19}$$

Это дает

$$I(M,\ m_a,\ m_b,\ m_c)=\frac{1}{(4\pi)^4}\int du_a\,du_b\,du_c\delta(1-u_a-u_b-u_c)\times$$
$$\times\left[M^2-\frac{m_a^2}{u_a}-\frac{m_b^2}{u_b}-\frac{m_c^2}{u_c}\right], \tag{4.20}$$

где область интегрирования ограничивается дельта-функцией и условиями (4.14). Предел высоких энергий (4.4) получается сразу же:

$$\int du_a\,du_b\,du_c\delta(1-u_a-u_b-u_c)=$$
$$=\int du_a\,du_b\eta(1-u_a-u_b)=\int_0^1 du_a(1-u_a)=\frac{1}{2}. \tag{4.21}$$

В случае двух нулевых масс не будем проводить в (4.21) последнее интегрирование:

$$\int du_b\,du_c\delta(1-u_a-u_b-u_c)=1-u_a. \tag{4.22}$$

Возникающий при этом однократный интеграл по параметру

$$I(M,\ m,\ 0,\ 0)=\frac{1}{(4\pi)^4}\int_{m^2/M^2}^{1} du(1-u)\left(M^2-\frac{m^2}{u}\right) \tag{4.23}$$

эквивалентен выражению (4.5). Обращаясь к случаю $m_a=m_b=$ $=m$, $m_c=0$ и исключая один параметр, получаем

$$I(M,\ m,\ m,\ 0)=\frac{1}{(4\pi)^4}\int du_a\,du_b\eta(1-u_a-u_b)\times$$
$$\times\left[M^2-m^2\left(\frac{1}{u_a}+\frac{1}{u_b}\right)\right]. \tag{4.24}$$

Теперь для удобства введем новые переменные

$$u_a=u\frac{1}{2}(1+v),\qquad u_b=u\frac{1}{2}(1-v),\quad du_a\,du_b=du\,u\frac{1}{2}\,dv, \tag{4.25}$$

в которых $(4\pi)^4I(M,\ m,\ m,\ 0)$ записывается как

$$\int du\,u\,dv\left(M^2-4m^2\frac{1}{u}\frac{1}{1-v^2}\right). \tag{4.26}$$

Обе переменные пробегают значения от 0 до 1, подчиняясь ограничению

$$\frac{M^2}{4m^2} > \frac{1}{u}\frac{1}{1-v^2}, \tag{4.27}$$

или

$$u > \frac{1-v_0^2}{1-v^2}, \tag{4.28}$$

где мы ввели обозначение (4.8). Так как u не может достигать единицы, необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$v < v_0. \tag{4.29}$$

Интегрируя теперь по u, придем к выражению

$$I(M,\ m,\ m,\ 0) = \frac{1}{(4\pi)^4}\frac{M^2}{2}\int\limits_0^{v_0} dv\left(\frac{v_0^2-v^2}{1-v^2}\right)^2, \tag{4.30}$$

которое напоминает интеграл по параметру, фигурирующий в формуле (4.6), но отличается от него некоторыми деталями. В действительности две эти формы записи эквивалентны, но (4.30) несколько более непосредственно приводит к предельным выражениям при высоких и низких энергиях.

Процесс испускания двух частиц и одного фотона обобщенным фотонным источником описывается связью между двумя источниками частиц и двумя источниками фотонов. Здесь мы имеем еще одно применение взаимодействия W_{22}, описывающего также рассеяние фотона частицей [ср. с формулой (3-12.29)]:

$$W_{22} = \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,\varphi(x)\,[2eqp.A(x)\,\Delta_+(x-x')\,2eqp.A(x') - \\ - \delta(x-x')\,e^2A^2(x)]\,\varphi(x'). \tag{4.31}$$

Сравнивая часть вакуумной амплитуды iW_{22}, которая линейна по полю A_2 обобщенного источника и по полю испущенного фотона, с эквивалентной трехчастичной вакуумной амплитудой

$$\frac{1}{2}\left[i\int (dx)\,K(x)\,\varphi(x)\right]^2 i\int (d\xi)\,J^\lambda(\xi)\,A_\lambda(\xi), \tag{4.32}$$

мы получим следующий эффективный испускающий источник:

$$-K_2(x)\,K_2(x')\,J_2^\lambda(\xi)\,|_{\text{эфф}} = \\ = 2eqp^\lambda.\,\delta(x-\xi)\,\Delta_+(x-x')\,2eqp.A_2(x') + \\ + 2eqp.A_2(x)\,\Delta_+(x-x')\,2eqp^\lambda.\,\delta(x'-\xi) - \\ - \delta(x-x')\,\delta(x-\xi)\,2e^2A_2^\lambda(x). \tag{4.33}$$

В импульсном представлении имеем

$$-K_2(p)\,K_2(p')\,J_2^\lambda(k)\,|_{\text{эфф}}=2e^2V_2^{\lambda\nu}A_{2\nu}(K), \tag{4.34}$$

где

$$V_2^{\lambda\nu}=\frac{1}{4}\,\frac{(2p+k)^\lambda\,(p+k-k')^\nu}{pk}+\frac{1}{4}\,\frac{(2p'+k)^\lambda\,(p'+k-p)^\nu}{p'k}-g^{\lambda\nu}, \tag{4.35}$$

причем мы упростили эту комбинацию, учитывая свойства реальных частиц

$$p^2+m^2=p'^2+m^2=k^2=0 \tag{4.36}$$

и то, что

$$K=p+p'+k \tag{4.37}$$

представляет собой полный импульс, испущенный источником. Отметим равенства

$$k_\lambda V_2^{\lambda\nu}=0,\qquad V_2^{\lambda\nu}K_\nu=0, \tag{4.38}$$

выражающие закон сохранения и свойство калибровочной инвариантности. Соответствующий поглощающий источник равен

$$-K_1(-p')\,K_1(-p)\,J_1^\lambda(-k)\,|_{\text{эфф}}=2e^2A_{1\mu}(-K)\,V_1^{\mu\lambda}, \tag{4.39}$$

где

$$V_1^{\mu\lambda}=V_2^{\lambda\mu}. \tag{4.40}$$

Отметим, кстати, что в этих последних величинах подразумевается наличие единичной матрицы, действующей в зарядовом пространстве.

Вакуумная амплитуда для процесса трехчастичного обмена равна

$$-\frac{1}{2}\int d\omega_p\,d\omega_{p'}\,d\omega_k\,\mathrm{Sp}\,[K_1(-p')\,K_1(-p)\,J_1^\lambda(-k)\,|_{\text{эфф}}\times$$
$$\times K_2(p)\,K_2(p')\,J_{2\lambda}(k)\,|_{\text{эфф}}]. \tag{4.41}$$

След здесь, который берется по индексам зарядового пространства, дает коэффициент 2 в получаемом таким способом выражении

$$(-2e^2)^2\int dM^2\,d\omega_K A_1^\mu(-K)\,I_{\mu\nu}(K)\,A_2^\nu(K), \tag{4.42}$$

где все внутренние операции мы включили в тензор

$$I_{\mu\nu}(K)=\int d\omega_p\,d\omega_{p'}\,d\omega_k\,(2\pi)^3\,\delta(K-p-p'-k)\,V_{1\mu\lambda}V_2{}^\lambda{}_\nu. \tag{4.43}$$

Согласно соотношениям (4.38) и (4.40), тензор $I^{1\nu}{}_\nu$ симметричен по индексам μ, ν и подчиняется условию калибровочной инвариантности

$$K^\mu I_{\mu\nu}(K)=0, \tag{4.44}$$

чем и определяется его структура:

$$I_{\mu\nu}(K) = \left(g_{\mu\nu} + \frac{K_\mu K_\nu}{M^2}\right) I(M^2), \tag{4.45}$$

где скаляр $I(M^2)$ равен

$$I(M^2) = \frac{1}{3}\int d\omega_p\, d\omega_{p'}\, d\omega_k\, (2\pi)^3\, \delta(K - p - p' - k)\, V_2^{\lambda\nu} V_{2\lambda\nu}. \tag{4.46}$$

Тензор $V_2^{\lambda\nu}$ можно представить в форме

$$V_2^{\lambda\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{pk} - \frac{p'}{p'k}\right)^\lambda (p - p')^\nu + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{pk} + \frac{p'}{p'k}\right)^\lambda k^\nu - g^{\lambda\nu} + \\ + \frac{1}{4} k^\lambda \left[\frac{(p + k - p')^\nu}{pk} + \frac{(p' + k - p)^\nu}{p'k}\right]. \tag{4.47}$$

Сюда входят три комбинации, каждая из которых при умножении на k_λ дает нуль. Следовательно, та из них, которая содержит множитель k^λ, не дает вклада в нужное нам произведение:

$$V_2^{\lambda\nu} V_{2\lambda\nu} = \frac{1}{4}\left(\frac{p}{pk} - \frac{p'}{p'k}\right)^2 (p - p')^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{pk} + \frac{1}{p'k}\right)(p - p')^2 - \\ - \frac{1}{2} m^2 \left(\frac{1}{(pk)^2} - \frac{1}{(p'k)^2}\right) k(p - p') + 2. \tag{4.48}$$

В комбинации

$$\left(\frac{p}{pk} - \frac{p'}{p'k}\right)^2 = -\frac{m^2}{(pk)^2} - \frac{m^2}{(p'k)^2} - \frac{2pp'}{pkp'k} \tag{4.49}$$

мы узнаем множитель, играющий главную роль в испускании мягких фотонов. Эта комбинация часто встречалась нам при описании отклонения частицы. Именно она и соответствует рождению пары частиц с противоположными зарядами. Воспользовавшись соотношением

$$M^2 = -(p + p' + k)^2 = 2m^2 - 2(pp' + pk + p'k), \tag{4.50}$$

можно объединить два первых слагаемых в правой части равенства (4.48):

$$V_2^{\lambda\nu} V_{2\lambda\nu} = \frac{1}{4}\left[-\frac{m^2}{(pk)^2} - \frac{m^2}{(p'k)^2} + \frac{M^2 - 2m^2}{pkp'k}\right](p - p')^2 - \\ - \frac{1}{2} m^2 \left(\frac{1}{(pk)^2} - \frac{1}{(p'k)^2}\right) k(p - p') + 2. \tag{4.51}$$

Мы будем проводить интегрирование по способу (4.3), группируя сначала частицы в составную систему с массой M':

$$\delta(K - p - p' - k) = \int \delta(K - P - k)\, d\omega_P\, dM'^2\, (2\pi)^3\, \delta(P - p - p'). \tag{4.52}$$

Выполняя, далее, в формуле (4.46) интегрирование по частицам, придем к скалярной функции

$$S(M'^2, M^2) = \int d\omega_p\, d\omega_{p'}\, (2\pi)^3\, \delta(P - p - p')\, V_2^{\lambda\nu} V_{2\lambda\nu}. \qquad (4.53)$$

Тогда оставшийся кинематический интеграл даст нам

$$I(M^2) = \frac{1}{3}\int dM'^2\, \frac{1}{(4\pi)^2}\left(1 - \frac{M'^2}{M^2}\right) S(M'^2, M^2), \qquad (4.54)$$

хотя при $M' \to M$ следует модифицировать входящий сюда кинематический множитель, с тем чтобы учесть фиктивную массу фотона μ:

$$1 - \frac{M'^2}{M^2} \to \frac{1}{M^2}\left[(M^2 - M'^2)^2 - 4\mu^2 M'^2\right]^{1/2} \approx \frac{2}{M}\left[(M - M')^2 - \mu^2\right]^{1/2}. \qquad (4.55)$$

При интегрировании выражения (4.53) введем обозначение

$$S(M'^2,\ M^2) = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(1 - \frac{4m^2}{M'^2}\right)^{1/2} \langle V_2^{\lambda\nu} V_{2\lambda\nu}\rangle \qquad (4.56)$$

и проведем его в системе покоя импульса P. В этой системе координат в инвариантной форме записи

$$\begin{aligned} k^0 &= \frac{M^2 - M'^2}{2M'}, & |\mathbf{k}| &= \frac{1}{2M'}\left[(M^2 - M'^2)^2 - 4\mu^2 M'^2\right]^{1/2}, \\ p^0 &= p^{0\prime} = \frac{1}{2}M', & |\mathbf{p}| &= |\mathbf{p}'| = \frac{1}{2}(M'^2 - 4m^2)^{1/2}, \end{aligned} \qquad (4.57)$$

а кроме того, имеется еще инвариант

$$(p - p')^2 = M'^2 - 4m^2. \qquad (4.58)$$

Инфракрасными особенностями обладают интегралы

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{(pk)^2} \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{(p'k)^2} \right\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dz\, \frac{1}{(p^0k^0 - |\mathbf{p}|\,|\mathbf{k}|\,z)^2} = \\ &= \frac{1}{m^2\left[(M^2 - M'^2)/2M'\right]^2 + \mu^2\left[(M'^2/4) - m^2\right]} = \\ &= \begin{cases} M - M' \gg \mu: & \dfrac{4}{(M^2 - M'^2)^2}\, \dfrac{M'^2}{m^2} \\ M - M' \sim \mu: & \dfrac{1}{m^2}\, \dfrac{1}{(M - M')^2 + \mu^2\left[(M^2/4m^2) - 1\right]} \end{cases} \end{aligned} \qquad (4.59)$$

и

$$\left\langle \frac{1}{pkp'k} \right\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dz\, \frac{1}{(p^0k^0)^2 - (|\mathbf{p}|\,|\mathbf{k}|\,z)^2}. \qquad (4.60)$$

Последний интеграл мы рассмотрим только в тех двух областях, которые указаны в конце цепочки равенств (4.59). В первой из них ($M - M' \gg \mu$) в разных формах записи для этого интеграла имеем

$$\frac{4}{(M^2-M'^2)^2}\frac{M'^2}{m^2}\int_0^1 dz\,\frac{1}{1+[(M'^2/4m^2)-1]\,(1-z^2)}=$$

$$=\frac{8}{(M^2-M'^2)^2}\frac{M'}{m}\int_0^1 dv\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}\,[(M'/2m)-1]\,(1-v^2)}=$$

$$=\frac{8}{(M^2-M'^2)^2}\left(1-\frac{4m^2}{M'^2}\right)^{-1/2}\ln\frac{1+[1-(4m^2/M'^2)]^{1/2}}{1-[1-(4m^2/M'^2)]^{1/2}}\,. \qquad (4.61)$$

В области же $M-M' \sim \mu$ он принимает вид

$$\frac{4}{M^2}\int_0^1 dz\,\frac{1}{(M-M')^2-z^2\,[1-(4m^2/M^2)]\,[(M-M')^2-\mu^2]}=$$

$$=\frac{2}{M^2}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{-1/2}\frac{1}{(M-M')\,[(M-M')^2-\mu^2]^{1/2}}\times$$

$$\times\ln\frac{M-M'+[1-(4m^2/M^2)]^{1/2}\,[(M-M')^2-\mu^2]^{1/2}}{M-M'-[1-(4m^2/M^2)]^{1/2}\,[(M-M')^2-\mu^2]^{1/2}}\,. \qquad (4.62)$$

Остался интеграл

$$\left\langle\left(\frac{1}{(pk)^2}-\frac{1}{(p'k)^2}\right)k\,(p-p')\right\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,dz\,\frac{4\,|\mathbf{k}|\,|\mathbf{p}|\,z}{(k^0p^0-|\mathbf{k}|\,|\mathbf{p}|\,z)^2}=$$

$$=\frac{16}{M^2-M'^2}\left(1-\frac{4m^2}{M'^2}\right)^{1/2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,dz\,\frac{z}{\{1-z\,[1-(4m^2/M'^2)]^{1/2}\}^2}\,, \qquad (4.63)$$

вычислив который получим

$$\frac{4}{M^2-M'^2}\frac{M'^2}{m^2}-\frac{8}{M^2-M'^2}\left(1-\frac{4m^2}{M'^2}\right)^{-1/2}\ln\frac{1+[1-(4m^2/M'^2)]^{1/2}}{1-[1-(4m^2/M'^2)]^{1/2}}\,. \qquad (4.64)$$

Прежде чем собирать вместе все эти выражения, выясним, какая же величина нас фактически интересует. Это весовая функция $a\,(M^2)$, фигурирующая в выражении для действия (4-3.70) и в вытекающей из него формуле (4-3.81) для функции распространения. Расчет, проведенный в гл. 4, § 3, давал нам вклад в $a\,(M^2)$, обусловленный двухчастичным обменом:

$$\text{спин 0:}\quad M^2a^{(2)}\,(M^2)=\frac{\alpha}{12\pi}\left(1-\frac{4m^2}{M^2}\right)^{3/2}. \qquad (4.65)$$

Теперь же мы ищем вклад $a^{(3)}(M^2)$ от трехчастичного обмена, возникающий в действии в качестве еще одного слагаемого с аналогичной структурой, а потому входящий в $a(M^2)$ аддитивным образом. Сравнивая связь (4.42), (4.54) и (4.56) с формулами (4-3.34) м (4-3.37), получаем

$$M^2a^{(3)}(M^2)=\frac{\alpha^2}{12\pi^2}\int\frac{dM'^2}{M^2}\,\text{„}\left(1-\frac{M'^2}{M^2}\right)\text{"}\left(1-\frac{4m^2}{M'^2}\right)^{1/2}\langle V_2^{\lambda\nu}V_{2\lambda\nu}\rangle, \tag{4.66}$$

где кавычки напоминают нам, что при $M-M'\sim\mu$ следует пользоваться комбинацией, модифицированной в соответствии с (4.55).

При последующих интегрированиях часто будет встречаться функция

$$\chi(v)=\frac{1}{v}\int_0^v dv'\frac{1}{1-v'^2}=\frac{1}{2v}\ln\frac{1+v}{1-v}. \tag{4.67}$$

С ее помощью величина $\langle V_2^{\lambda\nu}V_{2\lambda\nu}\rangle$, соответствующая области $M-$ $-M'\gg\mu$, записывается как

$$\langle V_2^{\lambda\nu}V_{2\lambda\nu}\rangle=\left(\frac{4m^2}{M^2-M'^2}\right)^2\frac{2v'^2}{1-v'^2}\left[\frac{1+v^2}{1-v^2}\chi(v')-\frac{1}{1-v'^2}\right]+$$
$$+\frac{8m^2}{M^2-M'^2}\left[\chi(v')-\frac{1}{1-v'^2}\right]+2, \tag{4.68}$$

где введены переменные

$$v^2=1-\frac{4m^2}{M^2},\qquad v'^2=1-\frac{4m^2}{M'^2}. \tag{4.69}$$

Используя эти последние, можно написать также

$$\frac{4m^2}{M^2-M'^2}=\frac{(1-v^2)(1-v'^2)}{v^2-v'^2}, \tag{4.70}$$

и тогда для коэффициента при $\alpha^2/12\pi^2$ в формуле (4.66) получим

$$4(1-v^2)^3\int dv'\frac{v'^4}{(1-v'^2)^2}\,\frac{\frac{1+v^2}{1-v^2}\chi(v')-\frac{1}{1-v'^2}}{v^2-v'^2}. \tag{4.71}$$

Интегрирование здесь проводится от $M'=2m$ до $M'=M-\delta M$, где

$$\mu\ll\delta M\ll m, \tag{4.72}$$

или же от $v'=0$ до $v'=v-\delta v$, где

$$\delta v=\frac{\delta M}{2m}\frac{(1-v^2)^{3/2}}{v}. \tag{4.73}$$

Кроме (4.71), возникают и другие члены, а именно

$$4(1-v^2)^2\left[\int_0^v dv'\frac{v'^2}{(1-v'^2)^2}\left(\chi(v')-\frac{2}{1-v'^2}\right)+\frac{1}{1-v^2}\int_0^v dv'\frac{v'^2}{(1-v'^2)^2}\right], \tag{4.74}$$

но эта комбинация обращается в нуль, в чем можно убедиться непосредственным интегрированием:

$$\int_0^v dv'\frac{v'^2}{(1-v'^2)^2}\left(\chi(v')-\frac{2}{1-v'^2}\right)=\frac{1}{2}\int_0^v d\left[\frac{v'\chi(v')}{1-v'^2}-\frac{v'}{(1-v'^2)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{v}{1-v^2}\left(\chi(v)-\frac{1}{1-v^2}\right), \tag{4.75}$$

а

$$\int_0^v dv'\frac{v'^2}{(1-v'^2)^2}=\frac{1}{2}v\left(\frac{1}{1-v^2}-\chi(v)\right). \tag{4.76}$$

В области $M-M'\sim\mu$ мы имеем

$$\langle V_2^{\lambda\nu}V_{2\lambda\nu}\rangle=2m^2\frac{v^2}{1-v^2}\left[\frac{1+v^2}{v}\int_0^v dv'\frac{1}{1-v'^2}\frac{1}{(M-M')^2+\mu^2[v'^2/(1-v'^2)]}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(M-M')^2+\mu^2[v^2/(1-v^2)]}\right], \tag{4.77}$$

где оставлены только члены с инфракрасными особенностями. В этой области интеграл (4.66) принимает вид

$$\frac{(1-v^2)v}{m^2}\int d(M'-M)\,[(M-M')^2-\mu^2]^{1/2}\langle V_2^{\lambda\nu}V_{2\lambda\nu}\rangle, \tag{4.78}$$

причем интегрирование по $M-M'$ проводится от μ до δM. Входящий сюда основной интеграл равен [ср. с формулой (4-4.97)]

$$\int_\mu^{\delta M} d(M-M')\,[(M-M')^2-\mu^2]^{1/2}\frac{1}{(M-M')^2+\mu^2[v^2/(1-v^2)]}=$$

$$=\ln\left(\frac{2\delta M}{\mu}\right)-\chi(v), \tag{4.79}$$

и в итоге для величины (4.78) мы получаем выражение

$$2v^3[(1+v^2)\chi(v)-1]\ln\left(\frac{2\delta M}{\mu}\right)+$$

$$+2v^3\chi(v)-2v^2(1+v^2)\int_0^v dv'\frac{\chi(v')}{1-v'^2}. \tag{4.80}$$

При сложении его с (4.71) зависимость от δM выпадает. Чтобы исключить фиктивную массу фотона, мы должны учесть второй эффект — модификацию в процессе двухчастичного обмена.

Как мы знаем, модификация отдельных актов испускания и поглощения пары частиц учитывается формфактором

$$F(k)=1-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{k^2}{2m}\int_0^1 dv'(1+v'^2)\frac{\ln\left(\frac{4m^2}{\mu^2}\frac{v'^2}{1-v'^2}\right)-2}{1+\frac{k^2}{4m^2}(1-v'^2)-i\varepsilon}. \tag{4.81}$$

Но прежде чем применять выражение (4.81), нам нужно выяснить, как обстоит дело с причинностью. В исходном процессе двухчастичного обмена области испускания и поглощения подчиняются каузальному контролю. Когда же к описанию отдельных актов испускания и поглощения привлекается формфактор, это, вообще говоря, перестает быть верным, так как при энергиях, при которых знаменатель в формуле (4.81) обращается в нуль, имеет место полная нелокальность (распространение). Положение приблизительно такое же, как при описании нестабильных частиц, где при наличии каузального контроля нельзя было рассматривать простые источники. Аналогично тому, как вводился обобщенный источник в ходе этого последнего анализа, мы должны при каждом значении v' в формуле (4.81) исключить те источники, для которых v лежит в непосредственной близости от этого значения, причем

$$-k^2=M^2=\frac{4m^2}{1-v^2}. \tag{4.82}$$

Кроме того, как и в случае нестабильных частиц, при окончательном предельном переходе вводится главное значение интеграла. Тем самым формфактор (4.81) эффективно заменяется величиной

$$F(v)=1-\frac{\alpha}{2\pi}f(v), \tag{4.83}$$

где

$$f(v)=P\int_0^1 dv'(1+v'^2)\frac{\ln\left(\frac{4m^2}{\mu^2}\frac{v'^2}{1-v'^2}\right)-2}{v^2-v'^2}. \tag{4.84}$$

Последним выражением и определяется поправка на взаимодействия частиц, должным образом локализованные вблизи испускающего или поглощающего источника. Суммарное влияние на причинный процесс двухчастичного обмена учитывается множителем

$$(F(v))^2\approx 1-\frac{\alpha}{\pi}f(v). \tag{4.85}$$

Соответствующее изменение величины $a^{(2)}(M^2)$ дается формулой

$$M^2\delta a^{(2)}(M^2) = -\frac{\alpha^2}{12\pi^2} v^3 f(v). \tag{4.86}$$

Чтобы выявить здесь зависимость от массы фотона, разобьем функцию $f(v)$ на две части:

$$f(v) = 2\left[\ln\left(\frac{2m}{\mu}\right) - 1\right] P\int_0^1 dv' \frac{1+v'^2}{v^2-v'^2} + \\ + P\int_0^1 dv' \frac{(1+v'^2)\ln\dfrac{v'^2}{1-v'^2}}{v^2-v'^2}. \tag{4.87}$$

Используя затем равенство

$$P\int_0^1 dv \frac{1}{v^2-v'^2} = \operatorname{Re}\int_0^1 dv' \frac{1}{2v}\left(\frac{1}{v+v'} + \frac{1}{v-v'}\right) = \chi(v), \tag{4.88}$$

мы будем иметь

$$P\int_0^1 dv' \frac{1+v'^2}{v^2-v'^2} = (1+v^2)\chi(v) - 1. \tag{4.89}$$

Получаемая таким способом величина, стоящая с коэффициентом $\alpha^2/12\pi^2$ в правой части равенства (4.86), компенсирует слагаемое в формуле (4.80) с массой фотона.

Оставшиеся в формулах (4.71), (4.80) и (4.87) интегралы можно выразить через некую трансцендентную функцию, о которой будет сказано ниже, но результат будет не очень ясным. Вместо этого здесь мы лучше возьмем эти интегралы в том виде, как они есть, и извлечем из них численные выводы относительно рассматриваемого процесса. Это будет видоизменением расчета поляризации вакуума, проведенного в гл. 4, § 3, где мы видели, что существенно предельное значение величины $\delta D_+(k)$ при нулевом импульсе. Как явствует из выражения (4-3.81)

$$\overline{D}_+(k) = \frac{1}{k^2}\frac{1}{1-k^2\displaystyle\int dM^2 \frac{a(M^2)}{k^2+M^2}}, \tag{4.90}$$

это значение таково:

$$\delta D_+(0) = \int dM^2 \frac{a(M^2)}{M^2} = \frac{1}{(2m)^2}\int_0^1 dv^2 M^2 a(M^2). \tag{4.91}$$

Вклад двухчастичного обмена в интеграл имеет вид

$$\text{спин } 0: \quad \int dv^2 M^2 a^{(2)}(M^2) = \frac{\alpha}{12\pi}\int_0^1 dv 2v^4 = \frac{\alpha}{12\pi}\frac{2}{5}. \tag{4.92}$$

Искомая добавка к нему дается интегралом по v^2 от суммы величин (4.71) и (4.80), умноженных на $\alpha^2/12\pi^2$, и величины (4.86).

Начнем с выражения (4.71) и проинтегрируем его сначала по v^2 от $v'^2 + \delta v'^2$ до 1. Возникающий при этом основной интеграл имеет вид

$$\int_{v'^2+\delta v'^2}^{1} dv^2 \frac{1}{v^2 - v'^2} = \ln\frac{1-v'^2}{\delta v'^2} = \ln\left[\frac{m}{\delta M}\frac{1}{(1-v'^2)^{1/2}}\right]. \tag{4.93}$$

По индукции путем дифференцирования по v'^2 можно убедиться в том, что

$$\int_{v'^2+\delta v'^2}^{1} dv^2 \frac{(1-v^2)^n}{v^2-v'^2} = (1-v'^2)^n\left\{\ln\left[\frac{m}{\delta M}\frac{1}{(1-v'^2)^{1/2}}\right] - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}. \tag{4.94}$$

Пользуясь этими результатами, мы находим, что интеграл (4.71) сводится к

$$4\int_0^1 dv\, v^4\left\{[(1+v^2)\chi(v)-1]\left[\ln\left(\frac{m}{\delta M}\frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}\right) - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right] + \frac{2}{3}\chi(v)\right\} \tag{4.95}$$

(штрих у оставшейся переменной интегрирования опущен). Обращаясь к интегралу (4.80) и выполняя интегрирование по частям, мы видим прежде всего, что

$$\int_0^1 dv^2 v^2(1+v^2)\int_0^v dv' \frac{\chi(v')}{1-v'^2} = \frac{5}{6}\int_0^1 dv(1+v^2)\chi(v) + \frac{1}{3}\int_0^1 dv\, v^4\chi(v). \tag{4.96}$$

Сумма двух этих вкладов, компенсирующая δM, равна

$$4\int_0^1 dv\, v^4[(1+v^2)\chi(v)-1]\left[\ln\left(\frac{2m}{\mu}\frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}\right) - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right] - \frac{5}{3}\int_0^1 dv(1+v^2)\chi(v) + 6\int_0^1 dv\, v^4\chi(v). \tag{4.97}$$

К ней добавляется [см. формулы (4.86) и (4.87)]

$$-4\int_0^1 dv\, v^4\left[(1+v^2)\chi(v)-1\right]\left[\ln\left(\frac{2m}{\mu}\right)-1\right]-$$

$$-2\int_0^1 dv\left(\frac{1}{3}+v^2-v^4\chi(v)\right)(1+v^2)\ln\frac{v^2}{1-v^2}, \qquad (4.98)$$

где использовано главное значение интеграла

$$P\int_0^1 dv\,\frac{v^4}{v^2-v'^2}=\frac{1}{3}+v'^2-v'^4\chi(v'). \qquad (4.99)$$

Если сложить (4.97) с (4.98), то все нефизические параметры выпадут и мы получим

$$2\int_0^1 dv\, v^4\left[(1+v^2)\chi(v)-1\right]\left[\ln\left(\frac{1}{1-v^2}\right)-\frac{5}{3}\right]-\frac{5}{3}\int_0^1 dv\,(1+v^2)\chi(v)+$$

$$+6\int_0^1 dv\, v^4\chi(v)-2\int_0^1 dv\left(\frac{1}{3}+v^2-v^4\chi(v)\right)(1+v^2)\ln\frac{v^2}{1-v^2}. \qquad (4.100)$$

Чтобы вычислить оставшиеся интегралы, выполним несколько интегрирований по частям, например

$$2\int_0^1 dv\, v^4(1+v^2)\chi(v)\ln v^2=\int_0^1 dv\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{3}v^2+\frac{2}{3}v^4\right)\ln v+$$

$$+\int_0^1 dv\left(\frac{5}{3}-v^4-\frac{2}{3}v^6\right)\chi(v), \qquad (4.101)$$

и воспользуемся формулой

$$n\geqslant 1:\quad \int_0^1 dv\, v^{2n}\chi(v)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}; \qquad (4.102)$$

в частности,

$$\int_0^1 dv\left(1-v^2-\frac{10}{3}v^4\right)\ln\frac{1}{1-v^2}=-\frac{14}{15}. \qquad (4.103)$$

В итоге получим

$$\text{спин } 0:\quad \int dv^2 M^2 a(M^2)=\frac{\alpha}{12\pi}\,\frac{2}{5}+\frac{\alpha^2}{12\pi^2}\,\frac{95}{54}=\frac{\alpha}{30\pi}\left[1+\frac{5\alpha}{4\pi}\,\frac{95}{27}\right]. \qquad (4.104)$$

Таким образом, влияние поляризации вакуума увеличивается примерно на 1%. Точнее мы вычислим поправку в более важном с точки зрения эксперимента случае спина $^1/_2$.

В интегралы, которые нужно вычислить, чтобы представить $a(M^2)$ в явном виде, входят выражения с разными линейными функциями одной переменной в знаменателе и под знаком логарифма. Стандартной функцией такого типа является так называемый дилогарифм Эйлера (или, иначе, функция Спенса)

$$0<x<1: \quad l(x)=\int_0^x \frac{dt}{t}\ln\frac{1}{1-t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}. \qquad (4.105)$$

Интегрируя по частям и производя затем подстановку $t\to 1-t$, мы получаем, что эта функция удовлетворяет равенству

$$l(x)+l(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(\frac{1}{1-x}\right), \qquad (4.106)$$

в котором учтено, что

$$l(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \qquad (4.107)$$

Аналогичные функции, определяемые для других областей изменения x, связаны с $l(x)$ простыми соотношениями. Так, рассматривая при $x>1$ функцию

$$x>1: \quad \tilde{l}(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}\ln(t-1), \qquad (4.108)$$

мы видим, что подстановка $t\to 1/t$ дает

$$\tilde{l}(x)=\int_{1/x}^{1}\frac{dt}{t}\ln\frac{1-t}{t}, \qquad (4.109)$$

т. е.

$$\tilde{l}(x)=-\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}(\ln x)^2+l\left(\frac{1}{x}\right). \qquad (4.110)$$

При изменении знака величины x возникает функция

$$0<x<1: \quad \int_0^x\frac{dt}{t}\ln(1+t)=\int_0^x\frac{dt}{t}\ln\frac{1}{1-t}-$$

$$-\int_0^x\frac{dt}{t}\ln\frac{1}{1-t^2}=l(x)-\frac{1}{2}l(x^2), \qquad (4.111)$$

а аналогичное соотношение при $x > 1$ имеет вид

$$\int_1^x \frac{dt}{t} \ln(1+t) = \frac{1}{2} \tilde{l}(x^2) - \tilde{l}(x) =$$

$$= \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{2} l\left(\frac{1}{x^2}\right) - l\left(\frac{1}{x}\right). \tag{4.112}$$

Все они, конечно, равноправны, но при количественных расчетах мы предпочитаем в качестве стандартной функции использовать $l(x)$.

Иного рода соотношения возникают, если произвести в формуле (4.108) подстановку $t \to 1 + t$, которая дает

$$\tilde{l}(x) = \int_0^{x-1} \frac{dt}{1+t} \ln t = \ln x \ln(x-1) - \int_0^{x-1} \frac{dt}{t} \ln(1+t). \tag{4.113}$$

Это равенство записывается по-разному в зависимости от того, больше ли $x - 1$ единицы или меньше. В последнем случае, применяя (4.111), мы получаем

$$1 < x < 2; \quad \tilde{l}(x) = \ln x \ln(x-1) - l(x-1) + \frac{1}{2} l((x-1)^2), \tag{4.114}$$

тогда как в силу соотношения (4.112) и формулы

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} \ln(1+t) = \frac{1}{2} l(1) = \frac{\pi^2}{12} \tag{4.115}$$

будем иметь

$$x > 2: \quad \tilde{l}(x) = -\frac{\pi^2}{6} + \ln x \ln(x-1) - \frac{1}{2}[\ln(x-1)]^2 +$$

$$+ l\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{2} l\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right). \tag{4.116}$$

С учетом равенства (4.110) эти выражения преобразуются к виду

$$\frac{1}{2} < x < 1: \quad l(x) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^2 - \ln\frac{1}{x} \ln\frac{1}{1-x} -$$

$$- l\left(\frac{1-x}{x}\right) + \frac{1}{2} l\left(\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\right), \tag{4.117}$$

$$0 < x < \frac{1}{2}: \quad l(x) = -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-x}\right)^2 +$$

$$+ l\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{1}{2} l\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right). \tag{4.118}$$

Эти выражения связаны друг с другом соотношением (4.106). Параметризуя x в соответствующих областях (4.117) и (4.118) как $^1/_2\,(1 \pm v)$ и производя вычитание, мы в качестве следствия из этих равенств получаем

$$l\left(\frac{1+v}{2}\right)-l\left(\frac{1-v}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\ln\frac{2}{1+v}\ln\frac{1+v}{1-v}-$$
$$-2l\left(\frac{1-v}{1+v}\right)+l\left(\left(\frac{1-v}{1+v}\right)^2\right). \qquad (4.119)$$

Чтобы показать, как используется дилогарифмическая функция, рассмотрим второй интеграл в формуле (4.87), который можно разбить на отдельные интегралы со знаменателем или $v-v'$, или $v+v'$ и с логарифмом от v', $1+v'$ и $1-v'$. Прежде всего заметим, что

$$P\int_0^1 \frac{dv'}{v-v'}\ln v' = -\mathrm{Re}\int_0^1 d\ln\frac{v-v'}{v}\ln v' =$$
$$=\int_0^v \frac{dv'}{v'}\ln\frac{v-v'}{v}+\int_v^1 \frac{dv'}{v'}\ln\frac{v'-v}{v}. \qquad (4.120)$$

Затем путем подстановки $v'=vt$ приведем эти интегралы к виду

$$-\int_0^1 \frac{dt}{t}\ln\frac{1}{1-t}+\int_1^{1/v}\frac{dt}{t}\ln(t-1)=-\frac{\pi^2}{6}+\tilde{l}\left(\frac{1}{v}\right), \qquad (4.121)$$

или

$$P\int_0^1 \frac{dv'}{v-v'}\ln v' = -\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^2+l(v). \qquad (4.122)$$

Производя подстановку $v\to 1-v$, $v'\to 1-v'$, получаем еще одно следствие:

$$P\int_0^1 \frac{dv'}{v-v'}\ln(1-v')=\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-v}\right)^2-l(1-v). \qquad (4.123)$$

Отметим, кстати, что, согласно соотношению (4.106),

$$P\int_0^1 \frac{dv'}{v-v'}\ln\frac{v'}{1-v'}=-\frac{2\pi^2}{3}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-v}\right)^2+$$
$$+l(v)+l(1-v)=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{v}{1-v}\right)^2. \qquad (4.124)$$

Изменив знаменатель в формуле (4.120), придем к интегралу

$$\int_0^1 \frac{dv'}{v+v'}\ln v' = -\int_0^1 \frac{dv'}{v'}\ln\frac{v+v'}{v} = -\int_0^{1/v}\frac{dt}{t}\ln(1+t)=$$
$$=-\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^2+l(v)-\frac{1}{2}l(v^2), \qquad (4.125)$$

который в сумме с (4.122) дает

$$P\int_0^1 \frac{dv'}{v^2-v'^2}\ln v'^2 = \frac{1}{v}\left[-\frac{\pi^2}{2}+2l(v)-\frac{1}{2}l(v^2)\right]. \tag{4.126}$$

Кроме того, необходима величина

$$P\int_0^1 \frac{dv'}{v-v'}\ln(1+v') = \operatorname{Re}\int_0^1 \frac{dv'}{1+v'}\ln\frac{v-v'}{1-v} =$$

$$= \int_0^v \frac{dv'}{1+v'}\ln\frac{v-v'}{1-v}+\int_v^1 \frac{dv'}{1+v'}\ln\frac{v'-v}{1-v}. \tag{4.127}$$

Выполнив теперь преобразование $1+v'=(1+v)/t$, придем к выражению

$$\ln 2\ln\frac{1+v}{1-v}-\int_{1/(1+v)}^{1}\frac{dt}{t}\ln\frac{1}{1-t}+\int_1^{2/(1+v)}\frac{dt}{t}\ln(t-1)=$$

$$=-\frac{\pi^2}{3}+\ln 2\ln\frac{1+v}{1-v}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+v}{2}\right)^2+l\left(\frac{1}{1+v}\right)+l\left(\frac{1+v}{2}\right). \tag{4.128}$$

После дополнительного преобразования $v'=1-(1+v)t$ будем иметь

$$\int_0^1 \frac{dv'}{v+v'}\ln(1-v')=\int_0^1\frac{dv'}{1-v'}\ln\frac{v+v'}{1+v'}=$$

$$=-\int_0^{1/(1+v)}\frac{dt}{t}\ln\frac{1}{1-t}=-l\left(\frac{1}{1+v}\right), \tag{4.129}$$

тогда как преобразование $v'=-1+(1-v)t$ даст нам

$$\int_0^1\frac{dv'}{v+v'}\ln(1+v')=-\int_0^1\frac{dv'}{1+v'}\ln\frac{v+v'}{1+v'}=$$

$$=\ln 2\ln\frac{1+v}{1-v}-\int_{1/(1-v)}^{2/(1-v)}\frac{dt}{t}\ln(t-1)=$$

$$=\ln 2\ln\frac{1+v}{2}+\frac{1}{2}(\ln 2)^2+l(1-v)-l\left(\frac{1-v}{2}\right). \tag{4.130}$$

В результате для рассматриваемого интеграла получаем

$$P\int_0^1 dv'\,\frac{(1+v'^2)\ln[v'^2/(1-v'^2)]}{v^2-v'^2}=$$

$$=\frac{1+v^2}{2v}\left[-\pi^2+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1-v}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+v}{2}\right)^2-\right.$$

$$\left.-2\ln 2\ln\frac{1+v}{1-v}+4l(v)-l(v^2)-l\left(\frac{1+v}{2}\right)+l\left(\frac{1-v}{2}\right)\right]+2\ln 2. \tag{4.131}$$

Отметим, что это выражение можно было бы получить и с помощью соотношения (4.119).

Не вникая в детали оставшихся интегрирований, сформулируем окончательный результат для $a(M^2)$:

$$M^2a(M^2)=\frac{\alpha}{12\pi}v^3+\frac{\alpha^2}{12\pi^2}\left\{v^2(1+v^2)\left[\frac{\pi^2}{6}+\ln\frac{1+v}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}+\right.\right.$$

$$\left.+2l\left(\frac{1-v}{1+v}\right)+2l\left(\frac{1+v}{2}\right)-2l\left(\frac{1-v}{2}\right)-4l(v)+l(v^2)\right]+$$

$$+\left[5\left(\frac{1+v^2}{2}\right)^2-2-3v^2\right]\ln\frac{1+v}{1-v}+6v^3\ln\frac{1+v}{2}-$$

$$\left.-4v^3\ln v+\frac{3}{2}v(1+v^2)\right\}. \tag{4.132}$$

Осмыслить это сложное выражение можно, перейдя к пределам высоких энергий ($v\to 1$) и низких энергий ($v\to 0$). В этих двух случаях мы имеем

$$M^2\gg(2m)^2:\quad M^2a(M^2)=\frac{\alpha}{12\pi}+\frac{\alpha}{4\pi^2}=\frac{\alpha}{12\pi}\left(1+\frac{3\alpha}{\pi}\right), \tag{4.133}$$

где вклад порядка α^2 полностью обусловлен последним слагаемым в фигурных скобках выражения (4.132), и

$$M^2\sim(2m)^2:\quad M^2a(M^2)=\frac{\alpha}{12\pi}v^3+\frac{\alpha^2}{24}v^2=\frac{\alpha}{12\pi}v^3\left(1+\frac{\pi\alpha}{2v}\right); \tag{4.134}$$

здесь к члену с α^2 приводит первая квадратная скобка в формуле (4.132), происхождение которой связано, как это можно проследить, с интегралом (4.126), дающим частичный формфактор. Последний результат особенно интересен, так как он свидетельствует об изменении порогового поведения. К такому выводу можно прийти путем обычных нерелятивистских рассуждений. За счет влияния кулоновского притяжения между зарядами, рождающимися с относительной скоростью $v_{\text{отн}}$, вероятность образования состояния увеличивается соответственно множителю

$$\frac{(2\pi\alpha/v_{\text{отн}})}{1-\exp[-(2\pi\alpha/v_{\text{отн}})]}\approx 1+\frac{\pi\alpha}{v_{\text{отн}}}, \tag{4.135}$$

где знак приближенного равенства относится к условиям $1 \gg v_{\text{отн}} \gg \alpha$, при которых кулоновское взаимодействие можно рассматривать как слабый нерелятивистский эффект. Согласно нерелятивистскому соотношению

$$M \approx 2m + \frac{1}{4} m v_{\text{отн}}^2, \tag{4.136}$$

мы имеем

$$\left(\frac{M}{2m}\right)^2 - 1 = \frac{v^2}{1-v^2} \approx \frac{1}{4} v_{\text{отн}}^2, \tag{4.137}$$

т. е.

$$v_{\text{отн}} \approx 2v, \tag{4.138}$$

так что величина (4.135) действительно совпадает с поправочным множителем (4.134). Кстати, в нерелятивистском пределе сам упругий формфактор почти совпадает с волновой функцией относительного движения в кулоновском поле, вычисленной в начале координат и нормированной тем условием, что амплитуда асимптотической плоской волны равна единице.

Взяв явное выражение для $M^2 a(M^2)$, можно было бы повторить расчет поляризации вакуума, представленный в формуле (4.104). Но мы вместо этого воспользуемся следующим приближенным соотношением. Два предельных выражения (4.133) и (4.134) можно интерполировать простой, но несколько искусственной формулой

$$M^2 a(M^2) \sim \frac{\alpha}{12\pi} v^3 \left[1 + \frac{\pi\alpha}{2v} - \frac{1+v}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi}\right)\alpha\right]. \tag{4.139}$$

Интегрируя эту функцию по v^2, мы для численного коэффициента, фигурирующего в формуле (4.104),

$$\frac{95}{54} = 1{,}759, \tag{4.140}$$

получаем приближенное значение

$$\frac{11}{10} + \frac{\pi^2}{15} = 1{,}758. \tag{4.141}$$

Проделаем теперь аналогичные выкладки в случае заряженных частиц со спином $^1/_2$. При описании процесса трехчастичного обмена мы будем исходить из величины [ср. с формулой (3-12.24)]

$$W_{22} = \frac{1}{2} \int (dx)(dx') \bar{\psi}(x) \gamma^0 eq\gamma A(x) G_+(x-x') eq\gamma A(x') \psi(x'). \tag{4.142}$$

Сравнивая соответствующую часть вакуумной амплитуды iW_{22} с эквивалентной амплитудой

$$\frac{1}{2}\left[i \int (dx) \psi(x) \gamma^0 \eta(x)\right]^2 i \int (d\xi) J^\lambda(\xi) A_\lambda(\xi), \tag{4.143}$$

получаем эффективый источник

$$-\eta_2(x)\,\eta_2(x')\,\gamma^0 J_2^\lambda(\xi)\,|_{\text{эфф}} = e^2\,[\delta(x-\xi)\,\gamma^\lambda G_+(x-x')\,\gamma A_2(x') + \\ +\gamma A_2(x)\,G_+(x-x')\,\gamma^\lambda \delta(x'-\xi)]. \qquad (4.144)$$

В импульсном представлении имеем

$$-\eta_2(p)\,\eta_2(p')\,\gamma^0 J_2^\lambda(k)\,|_{\text{эфф}} = \\ = e^2\left[\gamma^\lambda \frac{1}{\gamma(p+k)+m}\,\gamma A_2(K) + \gamma A_2(K)\,\frac{1}{-\gamma(p'+k)+m}\,\gamma^\lambda\right], \qquad (4.145)$$

а аналогичный процесс поглощения описывается источником

$$-\eta_1(-p')\,\eta_1(-p)\,\gamma^0 J_1^\lambda(-k)\,|_{\text{эфф}} = \\ = e^2\left[\gamma^\lambda \frac{1}{-\gamma(p'+k)+m}\,\gamma A_1(-K) + \gamma A_1(-K)\,\frac{1}{\gamma(p+k)+m}\,\gamma^\lambda\right]. \qquad (4.146)$$

В таком случае вакуумная амплитуда для трехчастичного обмена выводится из выражения

$$-\frac{1}{2}\int d\omega_p\, d\omega_{p'}\, d\omega_k\, \mathrm{Sp}\,[\eta_1(-p')\,\eta_1(-p)\,\gamma^0 J_1^\lambda(-k)\,|_{\text{эфф}}\,(m-\gamma p)\,\times \\ \times\,\eta_2(p)\,\eta_2(p')\,\gamma^0 J_{2\lambda}(k)\,|_{\text{эфф}}\,(-m-\gamma p')], \qquad (4.147)$$

полученного путем преобразования выражения

$$-\frac{1}{2}\left[\int d\omega_p \eta_1(-p)\,\gamma^0\,(m-\gamma p)\,\eta_2(p)\right]^2 \int d\omega_k\, J_1^\lambda(-k)\,J_{2\lambda}(k). \qquad (4.148)$$

Снова его можно записать в виде

$$-(2e^2)^2 \int dM^2\, d\omega_K A_1^\mu(-K)\, I_{\mu\nu}(K)\, A_2^\nu(K), \qquad (4.149)$$

где теперь

$$I_{\mu\nu}(K) = \int d\omega_p\, d\omega_{p'}\, d\omega_k\, (2\pi)^3\,\delta(K-p-p'-k)\,\times \\ \times\,\mathrm{Sp}_n\left\{\left[\gamma_\mu \frac{1}{\gamma(p+k)+m}\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\frac{1}{-\gamma(p'+k)+m}\gamma_\mu\right](m-\gamma p)\,\times \right. \\ \left. \times\left[\gamma_\lambda \frac{1}{\gamma(p+k)+m}\gamma_\nu + \gamma_\nu\frac{1}{-\gamma(p'+k)+m}\gamma_\lambda\right](-m-\gamma p')\right\}, \qquad (4.150)$$

а через Sp_n обозначен след, нормированный условием

$$\mathrm{Sp}_n\,1 = 1. \qquad (4.151)$$

Непосредственно проверяемая калибровочная инвариантность связи (4.149) приводит к тензорной структуре

$$I_{\mu\nu}(K) = \left(g_{\mu\nu} + \frac{K_\mu K_\nu}{M^2}\right) I(M^2). \qquad (4.152)$$

Нам нужно вычислить скалярную функцию

$$I(M^2)=\frac{1}{3}\int d\omega_p\, d\omega_{p'}\, d\omega_k\,(2\pi)^3\,\delta(K-p-p'-k)\times$$
$$\times\operatorname{Sp}_n\left\{\left[\gamma^\nu\frac{1}{\gamma(p+k)+m}\gamma^\lambda+\gamma^\lambda\frac{1}{-\gamma(p'+k)+m}\gamma^\nu\right](m-\gamma p)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\gamma_\lambda\frac{1}{\gamma(p+k)+m}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{1}{-\gamma(p'+k)+m}\gamma_\lambda\right](-m-\gamma p')\right\}. \qquad (4.153)$$

Матричные множители в квадратных скобках приводятся с помощью имеющихся в формуле (4.153) проекционных матриц:

$$\gamma^\nu\frac{1}{\gamma(p+k)+m}\gamma^\lambda+\gamma^\lambda\frac{1}{-\gamma(p'+k)+m}\gamma^\nu=$$
$$=\gamma^\nu\frac{m-\gamma(p+k)}{2pk}\gamma^\lambda+\gamma^\lambda\frac{m+\gamma(p'+k)}{2p'k}\gamma^\nu\to$$
$$\to\gamma^\nu\frac{2p^\lambda-\gamma k\gamma^\lambda}{2pk}+\frac{-2p'^\lambda+\gamma^\lambda\gamma k}{2p'k}\gamma^\nu \qquad (4.154)$$

и

$$\gamma_\lambda\frac{1}{\gamma(p+k)+m}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{1}{-\gamma(p'+k)+m}\gamma_\nu=$$
$$=\gamma_\lambda\frac{m-\gamma(p+k)}{2pk}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{m+\gamma(p'+k)}{2p'k}\gamma_\lambda\to$$
$$\to\frac{2p_\lambda-\gamma_\lambda\gamma k}{2pk}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{-2p'_\lambda+\gamma k\gamma_\lambda}{2p'k}. \qquad (4.155)$$

В итоге матричное произведение в формуле (4.153) принимает вид

$$\left[\left(\frac{p}{pk}-\frac{p'}{p'k}\right)^\lambda\gamma^\nu-\frac{\gamma^\nu\gamma k\gamma^\lambda}{2pk}+\frac{\gamma^\lambda\gamma k\gamma^\nu}{2p'k}\right](m-\gamma p)\left[\left(\frac{p}{pk}-\frac{p'}{p'k}\right)_\lambda\gamma_\nu-\right.$$
$$\left.-\frac{\gamma_\lambda\gamma k\gamma_\nu}{2pk}+\frac{\gamma_\nu\gamma k\gamma_\lambda}{2p'k}\right](-m-\gamma p'). \qquad (4.156)$$

Отметим специально появление здесь члена

$$\left(\frac{p}{pk}-\frac{p'}{p'k}\right)^2\gamma^\nu(m-\gamma p)\gamma_\nu(-m-\gamma p'), \qquad (4.157)$$

соответствующего ожидаемой радиационной модификации механизма двухчастичного обмена, которая содержит инфракрасные особенности.

В формуле (4.156) содержатся два типа членов с парой множителей γk. Для одного из них имеет место равенство

$$\gamma^\lambda\gamma k\gamma^\nu(m-\gamma p)\gamma_\lambda\gamma k\gamma_\nu(-m-\gamma p')=$$
$$=\gamma^\lambda\gamma k[2\gamma_\lambda\gamma k\gamma p+(m+\gamma p)\gamma^\nu\gamma_\lambda\gamma k\gamma_\nu](-m-\gamma p')=0, \qquad (4.158)$$

поскольку

$$\gamma^\lambda \gamma k \gamma_\lambda \gamma k = 2(\gamma k)^2 = 0, \tag{4.159}$$

а комбинация

$$\gamma^\lambda \gamma_\lambda \gamma k \gamma_\nu = 4k_\lambda \tag{4.160}$$

также приводит к нулевой величине $(\gamma k)^2$. Для другого члена имеем

$$\begin{aligned} &\gamma^\lambda \gamma k \gamma^\nu (m - \gamma p) \gamma_\nu \gamma k \gamma_\lambda (-m - \gamma p') \rightarrow \\ &\rightarrow \gamma k \gamma^\nu (m - \gamma p) \gamma_\nu \gamma k \gamma_\lambda (-m - \gamma p') \gamma^\lambda, \end{aligned} \tag{4.161}$$

поскольку эти комбинации дают один и тот же след. Далее,

$$\begin{aligned} &\gamma k (-4m - 2\gamma p) \gamma k (4m - 2\gamma p') = \\ &= 4kp\gamma k (4m - \gamma p') \rightarrow 8kpkp' \end{aligned} \tag{4.162}$$

(на последнем этапе выполнена операция взятия следа).

Примером члена в формуле (4.146) с одним множителем γk служит величина

$$(m - \gamma p)\left(\frac{\gamma p}{pk} - \frac{\gamma p'}{p'k}\right)\gamma k \gamma_\nu (-m - \gamma p')\gamma^\nu, \tag{4.163}$$

где уже учтено свойство цикличности следа. Если написать

$$\gamma_\nu (-m - \gamma p') \gamma^\lambda = 2m + 2(m - \gamma p'), \tag{4.164}$$

то выражение (4.163) разобьется на

$$2m(m - \gamma p)\left(\frac{\gamma p}{pk} - \frac{\gamma p'}{p'k}\right)\gamma k \tag{4.165}$$

и

$$\begin{aligned} &2(m - \gamma p)\left(\frac{\gamma p}{pk} - \frac{\gamma p'}{p'k}\right)\gamma k (m - \gamma p') = \\ &= -2m\left(\frac{1}{pk} + \frac{1}{p'k}\right)(m - \gamma p)\gamma k (m - \gamma p') + 4(m - \gamma p)(m - \gamma p') \end{aligned} \tag{4.166}$$

(при упрощении последней комбинации использовано наличие проекционных матриц). Далее, след произведения нечетного числа γ-матриц равен нулю. Доказать это можно путем прямого обобщения доказательства для γ-матрицы [формула (2-6.79)], основывающегося на ее антикоммутативности с γ_5. Таким образом, для следа величины (4.165) получаем

$$2m^2 \operatorname{Sp}_n \left(\frac{\gamma p}{pk} - \frac{\gamma p'}{p'k}\right)\gamma k = 0, \tag{4.167}$$

поскольку

$$\operatorname{Sp}_n \gamma A \gamma B = -AB. \tag{4.168}$$

При вычислении же следа величины (4.166) возникают комбинации

$$\mathrm{Sp}_n\,(m-\gamma p)\,\gamma k\,(m-\gamma k') = -m\,\mathrm{Sp}_n\,(\gamma p\gamma k+\gamma k\gamma p') = \\ = m\,(pk+p'k) \tag{4.169}$$

и

$$\mathrm{Sp}_n\,(m-\gamma p)\,(m-\gamma p') = m^2 - pp' = \frac{1}{2}M'^2. \tag{4.170}$$

След матрицы, входящей в формулу (4.153), выражается следующим образом:

$$\mathrm{Sp}_n\{\ \} = \left(\frac{p}{pk}-\frac{p'}{p'k}\right)^2 (M'^2+2m^2)+2\left(\frac{p'k}{pk}+\frac{pk}{p'k}\right)+ \\ +2m^2\left(\frac{1}{pk}+\frac{1}{p'k}\right)^2 (pk+p'k)-2M'^2\left(\frac{1}{pk}+\frac{1}{p'k}\right). \tag{4.171}$$

Он преобразуется к виду

$$\mathrm{Sp}_n\{\ \} = \left[-\frac{m^2}{(pk)^2}-\frac{m^2}{(p'k)^2}+\frac{M^2-2m^2}{pkp'k}\right](M'^2+2m^2)-4- \\ -2m^2k\,(p-p')\left(\frac{1}{(pk)^2}-\frac{1}{(p'k)^2}\right)- \\ -6m^2\,(M^2-M'^2)\,\frac{1}{pkp'k}+\frac{1}{2}\,(M^2-M'^2)^2\,\frac{1}{pkp'k}, \tag{4.172}$$

в котором он имеет много общего с выражением (4.51) для частиц со спином 0. В самом деле, при вычислении среднего значения этой функции, необходимого для получения аналога выражения (4.66),

$$M^2a^{(3)}(M^2) = \frac{\alpha^2}{3\pi^2}\int\frac{dM'^2}{M^2}\,„\left(1-\frac{M'^2}{M^2}\right)” \left(1-\frac{4m^2}{M'^2}\right)^{1/2}\frac{1}{4}\,\langle\mathrm{Sp}_n\{\ \}\rangle, \tag{4.173}$$

не возникает никаких новых интегралов. Действуя так же, как в случае спина 0, рассмотрим сначала область $M-M'\gg\mu$, в которой

$$\frac{1}{4}\langle\mathrm{Sp}_n\{\ \}\rangle = \left(\frac{4m^2}{M^2-M'^2}\right)^2\frac{3-v'^2}{1-v'^2}\left[\frac{1+v^2}{1-v^2}\,\chi(v')-\frac{1}{1-v'^2}\right]+ \\ +\frac{8m^2}{M^2-M'^2}\left(\chi(v')-\frac{1}{1-v'^2}\right)-\frac{24m^2}{M^2-M'^2}\,\chi(v')+2\chi(v')-1. \tag{4.174}$$

Соответствующий вклад в множитель при коэффициенте $\alpha^2/3\pi^2$ в формуле (4.173) таков:

$$2\,(1-v^2)^2\int \tilde{a}v'\,\frac{v'^2}{(1-v'^2)^2}\left\{(1-v^2)\,\frac{3-v'^2}{v^2-v'^2}\left[\frac{1+v^2}{1-v^2}\,\chi(v')- \right.\right. \\ \left. -\frac{1}{1-v'^2}\right]-4\chi(v')+2\chi(v')\left(\frac{1}{1-v^2}-\frac{1}{1-v'^2}\right)- \\ \left. -\frac{1}{1-v^2}-\frac{1}{1-v'^2}\right\}, \tag{4.175}$$

причем интеграл берется в тех же пределах, что и в формуле (4.71). Но здесь члены с инфракрасными особенностями не обращаются в нуль при интегрировании, и мы их оставили в том виде, в каком они есть.

Поведение в области $M - M' \sim \mu$ оказывается таким же, как и в случае спина 0. Различие состоит лишь в том, что в $a^{(2)}(M^2)$ вместо $M^2 - 4m^2$ входит теперь $M^2 + 2m^2$, причем множитель 4 введен, чтобы заменить $\alpha^2/12\pi^2$ на $\alpha^2/3\pi^2$. Производя таким образом в формуле (4.80) подстановку $v \to {}^1/_2\,(3 - v^2)$, мы получаем следующую добавку к величине (4.175):

$$(3-v^2)\left\{v\left[(1+v^2)\chi(v)-1\right]\ln\left(\frac{2\delta M}{\mu}\right)+\right.$$
$$\left.+v\chi(v)-(1+v^2)\int_0^v dv'\,\frac{\chi(v')}{1-v'^2}\right\}. \tag{4.176}$$

В результате параметр δM выпадает.

Влияние формфактора в случае частиц со спином ${}^1/_2$ оказывается чуть более сложным, так как в игру вступает связь с дополнительным магнитным моментом:

$$\gamma A \to F_1\gamma A + F_2\frac{\alpha}{2\pi}\,\frac{1}{2m}\,\sigma F. \tag{4.177}$$

Это приводит к тому, что при вычислении следа величины, даваемой формулами (4-3.20) и (4-3.21), возникает комбинация

$$\mathrm{Sp}_n\left[\gamma^\mu(m-\gamma p)\gamma_\mu(-m-\gamma p')\right]=M^2+2m^2\to$$
$$\to \mathrm{Sp}_n\left[\left(F_1\gamma^\mu+\frac{\alpha}{4\pi m}F_2\gamma k\gamma^\mu\right)(m-\gamma p)\times\right.$$
$$\left.\times\left(F_1\gamma_\mu+\frac{\alpha}{4\pi m}F_2\gamma_\mu\gamma k\right)(-m-\gamma p')\right], \tag{4.178}$$

причем мы здесь опустили слагаемые с k^μ, учитывая соответствующий закон сохранения. Чтобы упростить выражение для связи с магнитным моментом, мы опять воспользуемся алгебраической основой этого закона, наличием проекционных матриц:

$$\gamma k\gamma^\mu = (\gamma p + \gamma p')\,\gamma^\mu \to 2m\gamma^\mu - 2p^\mu \tag{4.179}$$

и аналогично

$$\gamma_\mu\gamma k = \gamma_\mu\,(\gamma p + \gamma p') \to 2m\gamma_\mu - 2p_\mu, \tag{4.180}$$

где возникающую комбинацию γp можно затем заменить величиной $-m$. Это дает для величины (4.178)

$$\left(F_1+\frac{\alpha}{2\pi}F_2\right)^2\mathrm{Sp}\left[\gamma^\mu(m-\gamma p)\gamma_\mu(-m-\gamma p')\right]+$$
$$+\frac{\alpha}{\pi}F_1F_2\,\mathrm{Sp}_n\left[(m-\gamma p)(-m-\gamma p')\right]\approx$$
$$\approx\left(F_1^2+\frac{\alpha}{\pi}F_2\right)(M^2+2m^2)+\frac{\alpha}{2\pi}F_2\,(M^2-4m^2), \tag{4.181}$$

или

$$F_1^2(M^2+2m^2)+\frac{3\alpha}{2\pi}F_2m^2, \tag{4.182}$$

где мы сохранили только эффекты порядка α. Соответствующие формфакторы таковы:

$$F_1(v)=1-\frac{\alpha}{2\pi}f_1(v), \tag{4.183}$$

где [ср. с формулами (4-4.68) и (4-4.77)]

$$f_1(v)=P\int_0^1 dv'\,\frac{(1+v'^2)\ln[(4m^2/\mu^2)(v'^2/(1-v'^2))]-1-2v'^2}{v^2-v'^2}=$$

$$=f(v)+P\int_0^1 dv'\,\frac{1}{v^2-v'^2}, \tag{4.184}$$

и [формула (4-4.75)]

$$F_2(v)=-(1-v^2)\,P\int_0^1 dv'\,\frac{1}{v^2-v'^2}=-(1-v^2)\,\chi(v). \tag{4.185}$$

Изменение величины

$$M^2a^{(2)}(M^2)=\frac{\alpha}{3\pi}v\frac{1}{2}(3-v^2) \tag{4.186}$$

дается выражением

$$M^2\delta a^{(2)}(M^2)=-\frac{\alpha^2}{3\pi^2}v\frac{1}{2}(3-v^2)[f(v)+\chi(v)]-$$

$$-\frac{\alpha^2}{3\pi^2}v\frac{3}{2}(1-v^2)\,\chi(v). \tag{4.187}$$

Как и в случае спина 0, мы сначала вычислим интеграл

$$\int_0^1 dv^2M^2a(M^2),$$

который служит мерой сдвига атомных энергетических уровней за счет поляризации вакуума. Интеграл по v^2 от величины (4.175), получаемый путем соответствующей модификации выражения (4.95), равен

$$2\int_0^1 dv\,v^2(3-v^2)\left\{[(1+v^2)\chi(v)-1]\left[\ln\left(\frac{m}{\delta M}\frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right]+\frac{2}{3}\chi(v)\right\}-\frac{2}{3}, \tag{4.188}$$

где аддитивная постоянная $-2/3$ возникает за счет интегрирования тех членов (4.175), которые не обладают особенностями:

$$\int_0^1 dv^2 2(1-v^2)^2 \int_0^v dv' \frac{v'^2}{(1-v'^2)^2} \left\{ -4\chi(v') + \right.$$

$$\left. +2\chi(v')\left(\frac{1}{1-v^2}-\frac{1}{1-v'^2}\right) - \frac{1}{1-v^2} - \frac{1}{1-v'^2} \right\} =$$

$$= 2\int_0^1 dv' v'^2 \left\{ -\chi(v') + \frac{4}{3} v'^2 \chi(v') - \frac{5}{6} \right\} = -\frac{2}{3}. \quad (4.189)$$

В случае интеграла от (4.176) заметим, что

$$\int_0^1 dv^2 (3-v^2)(1+v^2) \int_0^v dv' \frac{\chi(v')}{1-v'^2} =$$

$$= \int_0^1 dv \left[\frac{11}{3} + \frac{2}{3} v^2 - \frac{1}{3} v'' \right] \chi(v). \quad (4.190)$$

Сумма интегралов от (4.175) и (4.176), из которой δM выпадает, оказывается равной

$$2\int_0^1 dv\, v^2 (3-v^2) \left[(1+v^2)\chi(v) - 1\right] \ln\left(\frac{2m}{\mu} \frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}\right) -$$

$$-\frac{11}{3}\int_0^1 dv\, \chi(v) - \frac{29}{27}, \quad (4.191)$$

куда мы подставили численные значения всех интегралов типа (4.102),

$$\int_0^1 dv\, v^{2n} \chi(v), \quad n \geqslant 1.$$

Что же касается интеграла от (4.187), то его вклад в множитель при коэффициенте $\alpha^2/3\pi^2$ равен

$$-2\left(\ln\frac{2m}{\mu} - 1\right) \int_0^1 dv\, v^2 (3-v^2) \left[(1+v^2)\chi(v) - 1\right] -$$

$$-6\int_0^1 dv\, v^2 \chi'(v) + 4\int_0^1 dv\, v'' \chi(v) -$$

$$-\int_0^1 dv\, (1+v^2) \left[\frac{8}{3} - v^2 - v^2(3-v^2)\chi(v)\right] \ln\frac{[v^2}{1-v^2}, \quad (4.192)$$

где использовано главное значение интеграла

$$P\int_0^1 dv\frac{v^2(3-v^2)}{v^2-v'^2}=\frac{8}{3}-v'^2-v'^2(3-v'^2)\chi(v'). \tag{4.193}$$

Для суммы величин (4.191) и (4.192), из которой фиктивная масса фотона полностью выпадает, получаем

$$\int_0^1 dv\,v^2(3-v^2)\left[(1+v^2)\chi(v)-1\right]\ln\frac{1}{1-v^2}-$$
$$-\int_0^1 dv(1+v^2)\left[\frac{8}{3}-v^2-v^2(3-v^2)\chi(v)\right]\ln\frac{v^2}{1-v^2}-$$
$$-\frac{11}{3}\int_0^1 dv\chi(v)-\frac{14}{27}. \tag{4.194}$$

Учитывая, что

$$\int_0^1 dv\,v^2(1+v^2)(3-v^2)\chi(v)\ln v^2-$$
$$-\frac{11}{3}\int_0^1 dv\chi(v)=-\frac{44}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{25}\right) \tag{4.195}$$

и

$$\int_0^1 dv\left(1-4v^2+\frac{5}{3}v^4\right)\ln\frac{1}{1-v^2}=-\frac{8}{15}, \tag{4.196}$$

мы в результате будем иметь

$$\int dv^2M^2a(M^2)=\frac{4\alpha}{15\pi}+\frac{82}{27}\frac{\alpha^2}{3\pi^2}=$$
$$=\frac{4\alpha}{15\pi}\left[1+\left(1+\frac{1}{81}\right)\frac{15\alpha}{4\pi}\right]. \tag{4.197}$$

Относительное увеличение оказывается несколько меньшим, чем в случае спина 0, но по-прежнему составляет около 1%. Аддитивная постоянная в энергетическом сдвиге заменяется теперь следующим образом:

$$-\frac{1}{5}\to-\frac{1}{5}-\left(1+\frac{1}{81}\right)\frac{3\alpha}{4\pi}, \tag{4.198}$$

где соответствующая единица [формула (4-11.113)] равна 135,6 МГц. В итоге расщепление $2s$-уровня уменьшается на 0,24 МГц, и вместо последнего теоретического результата (3.168) мы теперь имеем

$$\text{H:}\quad E_{2s_{1/2}}-E_{2p_{1/2}}=1057{,}93\ \text{МГц}, \tag{4.199}$$

что удивительно хорошо согласуется с номинальным экспериментальным значением $1057{,}90 \pm 0{,}10$ МГц. Но еще раз напомним, что мы не учли еще целый ряд эффектов.

Интегрирования, которые нужно выполнить, чтобы получить $a(M^2)$ в явном виде, аналогичны тем, которые проводились в случае спина 0. То же относится и к результатам интегрирования — подстановка $v^2 \to {}^1/_2(3-v^2)$ во всех слагаемых (4.132), куда входит этот множитель, дает нам точные аналоги соответствующих членов для частиц со спином $^1/_2$:

$$M^2 a(M^2) = \frac{\alpha}{3\pi} v \frac{1}{2}(3-v^2) + \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \left\{ \frac{1}{2}(3-v^2)(1+v^2)\left[\frac{\pi^2}{6} + \right.\right.$$
$$+ \ln\frac{1+v}{2}\ln\frac{1+v}{1-v} + 2l\left(\frac{1-v}{1+v}\right) + 2l\left(\frac{1+v}{2}\right) - 2l\left(\frac{1-v}{2}\right) -$$
$$\left. - 4l(v) + l(v^2)\right] + \left[\frac{11}{16}(3-v^2)(1+v^2) + \frac{1}{4}v^4 - \frac{3}{2}v(3-v^2)\right] \times$$
$$\left. \times \ln\frac{1+v}{1-v} + 6v\frac{3-v^2}{2}\ln\frac{1+v}{2} - 4v\frac{3-v^2}{2}\ln v + \frac{3}{8}v(5-3v^2)\right\}. \tag{4.200}$$

В предельных случаях мы имеем

$$M^2 \gg (2m)^2: \quad M^2 a(M^2) = \frac{\alpha}{3\pi} + \frac{\alpha^2}{4\pi^2} = \frac{\alpha}{3\pi}\left(1 + \frac{3\alpha}{4\pi}\right), \tag{4.201}$$

где опять вклад с α^2 целиком обусловлен последним слагаемым в фигурных скобках, и

$$M^2 \sim (2m)^2: \quad M^2 a(M^2) = \frac{\alpha}{2\pi} v + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha}{2\pi} v\left(1 + \frac{\pi\alpha}{2v}\right), \tag{4.202}$$

где член порядка α^2 обусловлен первой квадратной скобкой, обязанной своим происхождением формфактору. Действительно, множитель в формуле (4.202) оказывается таким же, как и в случае спина 0 [формула (4.134)], что, впрочем, можно было ожидать. Простая интерполяционная формула с несколько иным весом, чем для частиц со спином 0, имеет вид

$$M^2 a(M^2) \sim \frac{\alpha}{3\pi} v \frac{3-v^2}{2}\left[1 + \frac{\pi\alpha}{2v} - \frac{3+v}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4\pi}\right)\alpha\right]. \tag{4.203}$$

Причина этого различия в весах становится ясной, если провести следующее сравнение двух фигурных скобок в выражениях (4.132) и (4.200):

$$\{\ \}_{\text{спин } 1/2} - \frac{3-v^2}{2v^2}\{\ \}_{\text{спин } 0} = \left[\frac{11}{16}(3-v^2)(1+v^2) + \frac{1}{4}v^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{3-v^2}{2v^2}\left(5\left(\frac{1+v^2}{2}\right)^2 - 2\right)\right]\ln\frac{1+v}{1-v} + \frac{3}{8}v(5-3v^2) -$$
$$- \frac{3}{2}\frac{3-v^2}{2v}(1+v^2) \approx -3v, \qquad v \ll 1. \tag{4.204}$$

Если воспользоваться интерполяционными формулами, заменив весовой множитель $^3/_4$ буквой λ, то представленная выше разность примет вид

$$-\frac{3}{2}v\left[\lambda\left(\frac{1}{2}\pi^2-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi^2-3\right)\right],\quad v\ll 1. \tag{4.205}$$

Тогда отождествление двух выражений при $v \ll 1$ даст нам величину

$$\lambda=\frac{1}{2}\frac{\pi^2+2}{\pi^2-\frac{3}{2}}=0{,}71, \tag{4.206}$$

которую мы для простоты заменили близкой ей дробью $^3/_4$. Если при вычислении интеграла (4.197) применить интерполяционную формулу (4.203), то множитель при α^2/π^2 окажется равным

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{9}{40}+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}+\frac{7}{48}\right)=1{,}016, \tag{4.207}$$

тогда как точный ответ таков:

$$\frac{82}{81}=1{,}012. \tag{4.208}$$

Тут задает вопрос Гарольд.

Гарольд. Может быть, я это пропустил, но мне кажется, что Вы не упомянули об аннигиляционном механизме рассеяния, сопутствующем процессу кулоновского рассеяния, который был рассмотрен Вами при расчете энергетического сдвига, обусловленного поляризацией вакуума.

Швингер. Позвольте мне иначе сформулировать этот вопрос и тем помочь Вам припомнить. Модифицированную фотонную функцию распространения мы представили ранее в двух формах — в виде (4-3.81),

$$\overline{D}_+(k)=\frac{1}{k^2}\frac{1}{1-k^2\int dM^2\,\frac{a(M^2)}{k^2+M^2}}, \tag{4.209}$$

и в виде (4-3.83),

$$\overline{D}_+(k)=\frac{1}{k^2}+\int dM^2\,\frac{A(M^2)}{k^2+M^2}, \tag{4.210}$$

причем обе формы взаимосвязаны соотношением (4-3.85):

$$A(M^2)=\frac{a(M^2)}{\left[1-M^2P\int dM'^2\,\frac{a(M'^2)}{M^2-M'^2}\right]^2+[\pi M^2 a(M^2)]^2}. \tag{4.211}$$

Весовая функция $a(M^2)$ характеризует неприводимый процесс взаимодействия, бесконечное повторение которого учитывается знаменателем в выражении (4.209). С той точностью, которая принята в данном параграфе, достаточно разложить дробь, представив ее в виде

$$\overline{D}_+(k) \approx \frac{1}{k^2} + \int dM^2 \frac{a(M^2)}{k^2+M^2} + k^2 \left[\int dM^2 \frac{a(M^2)}{k^2+M^2} \right]^2. \qquad (4.212)$$

Последнее слагаемое здесь и отвечает аннигиляционному взаимодействию, т. е. бесконечному повторению процесса двухчастичного обмена. Как мы видим, оно не дает вклада при $k = 0$, т. е. в приближении, которое делается при расчете энергетического сдвига. Теперь можно спросить, каким образом этот вывод следует из выражения (4.210), в котором нужной нам величиной является интеграл

$$\int dM^2 \frac{A(M^2)}{M^2}, \qquad (4.213)$$

поскольку повторение основного процесса взаимодействия, несомненно, описывается функцией $A(M^2)$, даваемой формулой (4.211). Укажем просто, что с требуемой точностью

$$A(M^2) \approx a(M^2) + 2M^2 a(M^2)\, P \int dM'^2 \frac{a(M'^2)}{M^2-M'^2}, \qquad (4.214)$$

так что действительно

$$\int dM^2 a(M^2)\, P \int dM'^2 \frac{a(M'^2)}{M^2-M'^2} = $$
$$= P \int dM^2\, dM'^2 \frac{a(M^2)\, a(M'^2)}{M^2-M'^2} = 0. \qquad (4.215)$$

Кстати, я хотел бы обратить Ваше внимание на соотношение (4.214), представленное в форме

$$A(M^2) \approx \left[1 + M^2 P \int dM'^2 \frac{a(M'^2)}{M^2-M'^2} \right]^2 a(M^2), \qquad (4.216)$$

поскольку такое представление аналогично введению формфакторов для более точного выражения вклада двухчастичного обмена. Возникающий здесь формфактор представляет собой величину, на которую нужно умножить $D_+(k)$, чтобы получить $\overline{D}_+(k)$ при $k^2 = -M^2$:

$$F = \frac{1}{1 + M^2 \int dM'^2 \frac{a(M'^2)}{-M^2+M'^2-i\varepsilon}} =$$
$$= 1 - M^2 \int dM'^2 \frac{A(M'^2)}{-M^2+M'^2-i\varepsilon}. \qquad (4.217)$$

Соотношение (4.216) — приближенное; точное же соотношение, согласно формуле (4.211), имеет вид

$$A(M^2) = |F|^2 a(M^2). \qquad (4.218)$$

Такое соотношение имеет физический смысл, ибо весовая функция A (M^2) есть мера вероятности и потому может быть построена из квадратов модулей амплитуд вероятности испускания.

§ 5. ПОЗИТРОНИЙ. МЮОНИЙ

Электродинамика, в узком смысле этого слова, имеет дело со свойствами тех нескольких частиц, основные механизмы взаимодействия которых носят электромагнитный характер. К ним относятся фотон, электрон (позитрон) и мюон (положительный и отрицательный). Имеется также два сорта нестабильных составных частиц, экспериментальное исследование которых стало уже возможным: позитроний (e^+e^-) и мюоний (μ^+e^-). В данном параграфе основное внимание уделяется позитронию. Позитроний — это чисто электромагнитная система. Атомы позитрония обнаруживают тонкую и сверхтонкую структуру, отражающую досконально изученные нами электромагнитные взаимодействия, а их нестабильность выражается только в распаде на фотоны. В противоположность этому в анализ мюония вовлекаются и слабые взаимодействия, связанные с образованием нейтрино:

$$\mu^+e^- \to e^+ + e^- + 2\nu.$$

Структуры позитрония оказываются почти нерелятивистскими, причем соответствующий энергетический спектр грубо дается формулой Бора с приведенной массой $^1/_2m$. Энергии связи таковы:

$$|E_n| = \frac{1}{2n^2}\,\mathrm{Ry} = \frac{6{,}8029}{n^2}\ \text{эВ}. \tag{5.1}$$

Эти состояния с главным квантовым числом $n = 1, 2, 3, \ldots$ можно классифицировать далее по значениям квантового числа относительного орбитального момента $L = 0, 1, 2, \ldots$, спинового квантового числа $S = 0, 1$ и квантового числа полного момента $J = 0, 1, 2, \ldots$. Каждое определенное состояние обозначается символом $n^{2S+1}L_J$. Релятивистские эффекты и электромагнитные взаимодействия, отличные от кулоновского притяжения, вызывают тонкое расщепление и сверхтонкое расщепление. В отличие от случая водорода, где велико отношение масс, тонкая и сверхтонкая структуры в позитронии по величине оказываются одного и того же порядка. Особенно интересна тонкая структура основного состояния — расщепление между уровнями 1^3S_1 и 1^1S_0. Атомы позитрония, образовавшиеся в возбужденных состояниях, переходят с излучением на один из сверхтонких уровней основного состояния. В конечном итоге они полностью аннигилируют, превращаясь в фотоны. Мы начнем с того, что рассмотрим механизм аннигиляции.

Характер фотонного распада позитрония определяется правилом отбора, связанным с понятием обращения заряда. Вообще говоря, при обращении заряда ($Q \to -Q$) данное состояние переходит в какое-то другое. В случае же электрически нейтральных систем возникает еще одно состояние того же сорта, что и исходное, и можно ввести собственные векторы для операции обращения заряда. Если у нас имеются две частицы с противоположными зарядами, как в позитронии, то возможны две комбинации зарядовых состояний, симметричная и антисимметричная, которым соответствуют значения

$$r_q = \pm 1. \tag{5.2}$$

Но результат полной перестановки всех характеристик двух частиц зависит от типа их статистики; в случае частиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака, должен меняться знак. При перестановке пространственных координат в состоянии с орбитальным квантовым числом L сферическая гармоника, которой определяется угловая зависимость, приобретает множитель $(-1)^L$ [ср. с формулой (2-7.21)]. Что касается спиновых функций, то триплетное состояние симметрично, а синглетное — антисимметрично, и потому им отвечает множитель $-(-1)^S$. Итак, статистика Ферми — Дирака для электрон-позитронной системы находит свое выражение в равенстве

$$-1 = r_q\,[-(-1)^S]\,(-1)^L, \tag{5.3}$$

откуда

$$r_q = (-1)^{L+S}. \tag{5.4}$$

Следовательно, состояние ${}^1S_0$ симметрично по заряду ($r_q = +1$), а состояние ${}^3S_1$ антисимметрично по заряду ($r_q = -1$).

Состояние системы из n фотонов описывается произведением n источников, испускающих или поглощающих эти частицы. Поскольку каждый фотонный источник (ибо это электрический ток) изменяет свой знак при обращении заряда, зарядовая четность n-фотонного состояния дается формулой

$$r_q = (-1)^n. \tag{5.5}$$

Поэтому, если потребовать, чтобы зарядовая четность сохранялась во времени, то состояние 1^1S_0, для которого $r_q = +1$, будет распадаться на четное число фотонов, с наибольшей вероятностью на два ($n = 2$), тогда как состояние 1^3S_1 должно распадаться на нечетное число фотонов, преимущественно на три, поскольку испускание одного реального фотона исключается. Вследствие такого подавления механизма распада состояния ${}^3S_1$ скорость распада последнего должна быть значительно меньше, чем в случае позитрония 1^1S_0.

Заслуживает внимания и еще один вопрос, касающийся отражения рассматриваемых состояний. Речь идет о пространственной четности. Согласно формуле (2-6.39), матрица пространственного отражения имеет вид

$$r_s = i\gamma^0, \tag{5.6}$$

т. е. внутренняя четность частицы, для которой в системе покоя $\gamma^{0\prime} = +1$, равна i. Это ее значение (которое с тем же успехом можно было бы положить равным и $-i$) никак не связано со значением электрического заряда. В случае же состояний позитрония, образованного из двух частиц, для внутренней четности имеем $(\pm i)^2 = -1$, и никакого произвола здесь не остается. Эта величина комбинируется с орбитальной четностью, которая в состоянии с квантовым числом момента L равна $(-1)^L$. В итоге для полной пространственной четности получаем

$$P = -(-1)^L. \tag{5.7}$$

Чтобы согласовать нашу символику с общепринятой, мы в дальнейшем будем обозначать зарядовую четность через C:

$$C = (-1)^{L+S}. \tag{5.8}$$

Отметим также, что

$$CP = -(-1)^S. \tag{5.9}$$

В той мере, в какой C и P или по крайней мере произведение CP являются точными квантовыми числами, различие между синглетным и триплетным спиновыми состояниями строго сохраняется. Синглетный позитроний иногда называют также парапозитронием, а триплетный — ортопозитронием.

Для S-уровней, составляющих основное состояние грубой структуры, мы имеем $P = -1$, чем и определяется внутренняя четность двухчастичной системы. Следовательно, частица типа ${}^1S_0$, с нулевым полным моментом и отрицательной четностью, будет описываться псевдоскалярным полем (φ), а частица типа ${}^3S_1$, с единичным моментом и отрицательной четностью,— векторным полем (φ_μ). Феноменологически двухфотонный распад позитрония ${}^1S_0$ описывается калибровочно-инвариантной связью

$$\varphi\left(-\frac{1}{4}\right){}^*F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{5.10}$$

И в самом деле, мы уже встречались с подобной связью псевдоскалярного типа в формулах (3-13.75) и (3-13.76). Как указывалось там, при такой связи два фотона обладают взаимно перпендикулярными поляризациями. Для системы с единичным спином возможны две калибровочно-инвариантные связи, а именно:

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu)F^{\mu\nu}\left(-\frac{1}{4}\right)F^{\varkappa\lambda}F_{\varkappa\lambda} \tag{5.11}$$

и

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_\nu-\partial_\nu\varphi_\mu)\,{}^*F^{\mu\nu}\left(-\frac{1}{4}\right){}^*F^{\varkappa\lambda}F_{\varkappa\lambda}. \tag{5.12}$$

Они соответствуют двум способам, которыми можно образовать комбинацию из пары фотонов, инвариантную по отношению к четырехмерным вращениям. Ниже мы выведем точную комбинацию, отвечающую ортопозитронию, и покажем, что в природе двухфотонной и трехфотонной связей имеется глубокое различие.

Скорость распада парапозитрония можно быстро найти из сечения аннигиляции свободных частиц σ, даваемого формулой (3-13.74). Чтобы применить последнюю к аннигиляции в синглетных состояниях, следует отбросить в ней множитель $^1/_4$, который возник при усреднении по всем ориентациям спина. Тогда скорость аннигиляции получается умножением 4σ на относительный поток частиц, равный $v\,|\,\psi\,(0)\,|^2$, где ψ — нерелятивистская волновая функция относительного движения. Чтобы отразить и условия протекания релятивистского процесса аннигиляции, ее нужно взять в начале координат. Итак, для скорости распада имеем выражение

$$\gamma_{n^1S}=4\pi\,\frac{\alpha^2}{m^2}\,|\,\psi_{nS}0\,|^2=\frac{1}{2n^3}\,\alpha^5 m, \tag{5.13}$$

поскольку

$$|\,\psi_{nS}\,(0)\,|^2=\frac{1}{\pi\,(na)^3}\,, \tag{5.14}$$

где a — боровский радиус позитрония, определяющийся равенством

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{2a_0}=\frac{1}{2}\,\alpha m. \tag{5.15}$$

Отсюда для времени жизни основного уровня парапозитрония получаем

$$\tau_{\text{пара}}=\frac{2}{\alpha^5}\,\frac{1}{m}=1{,}245\cdot 10^{-10}\ \text{с}, \tag{5.16}$$

ибо в соответствии со значением энергетической единицы (4-11.113)

$$\frac{1}{2}\,\alpha^5 m=\alpha^3\,\mathrm{Ry}=3\pi\cdot 135{,}6\,(2\pi\cdot 10^6)\ \text{с}^{-1}. \tag{5.17}$$

Воспроизведем теперь этот вывод исходя из феноменологической связи (5.10), получаемой из формулы (3-13.75). Входящее сюда произведение полей вида $\psi\,(x)\,\psi\,(x')$ следует заменить двухчастичным полем $\psi\,(xx')$ для системы без взаимодействия. Поле данного атома парапозитрония имеет весьма простую природу — оно нерелятивистское. Для двух спинорных индексов мы эффективно имеем $\gamma^{0'}=+1$; зарядовые индексы в этом состоянии с $C = 1$ включаются в симметричную нормированную функцию

$$2^{-1/2}\delta_{q,\,-q'};\tag{5.18}$$

нормированная же спиновая функция антисимметричного синглетного состояния равна

$$2^{-1/2}\sigma\delta_{\sigma,\,-\sigma'}.\tag{5.19}$$

Имеются также нормированная (равновременная) волновая функция относительного движения $\psi(\mathbf{r})$ и волновая функция движения центра масс [ср. с формулами (1.113) и (1.116)], которая в системе покоя имеет вид

$$(4\,md\omega_P)^{1/2}\exp(iPx) = \left[\frac{(d\mathbf{P})}{(2\pi)^3}\right]^{1/2}\exp(-i2mx^0),\tag{5.20}$$

так как масса позитрония очень близка к $2m$. Заметим, наконец, что в условие нормировки для двух тождественных частиц входит множитель $^1/_2$, который включается для того, чтобы не учитывать их дважды. Таким образом, поле, ассоциируемое с одним конкретным атомом, равно

$$2^{1/2}\,[p^{-1/2}\delta_{q,\,-q'}]\,[2^{-1/2}\sigma\delta_{\sigma,\,-\sigma'}]\,\psi(\mathbf{r})\,(4m\,d\omega_P)^{1/2}\exp(iPx),\tag{5.21}$$

где подразумевается, что $\gamma^{0'} = +1$. Далее, антисимметричная матрица $\gamma^0\gamma_5$ антикоммутирует с γ^0, но коммутирует с зарядовой и спиновой матрицами. Поэтому она связывает равные значения γ^0 и противоположные значения зарядового и спинового квантовых чисел, поскольку все соответствующие матрицы антисимметричны. Примером тому могут служить равенства

$$\psi\gamma^0\gamma_5 q\psi = \psi q\gamma^0\gamma_5\psi = (-q\psi)\,\gamma^0\gamma_5\psi.$$

В подпространстве с $\gamma^{0'} = +1$ антисимметричная матрица $\gamma^0\gamma_5$ сводится к $\sigma\delta_{\sigma,\,-\sigma'}$, если не считать фазового множителя, фигурирующего в формуле (3-13.72), где используются индексы спиральности. Этот результат эквивалентен следующему:

$$\frac{1}{2}\psi(x)\,\gamma^0\gamma_5\psi(x) \to 2^{-1/2}\,[2^{1/2}]\,[2^{1/2}]\,\psi(0)\,(4m)^{1/2}\,\varphi(x) = $$
$$= 2^{3/2}m^{1/2}\psi(0)\,\varphi(x),\tag{5.22}$$

где для описания движения центра масс введено феноменологическое поле парапозитрония $\varphi(x)$. Тем самым член взаимодействия (3-13.75) заменяется величиной

$$W_{\text{пара}} = \frac{4\pi\alpha}{m^2}\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2}\psi(0)\int(dx)\,\varphi(x)\,\mathbf{E}(x)\cdot\mathbf{H}(x).\tag{5.23}$$

Ей соответствует скорость распада

$$\gamma_{\text{пара}} = (4\pi\alpha)^2 \frac{2}{m^2} |\psi(0)|^2 \int d\omega_k \, d\omega_{k'} (2\pi)^4 \delta(k + k' - P) = \\ = \frac{4\pi\alpha^2}{m^2} |\psi(0)|^2, \tag{5.24}$$

совпадающая, естественно, с величиной (5.13).

Вакуумная амплитуда, описывающая трехфотонный распад, равна [ср. с формулой (3-12.24)]

$$i\frac{1}{2}\int (dx)(dx')(dx'')\,\psi(x)\gamma^0 eq\gamma A(x)\,G_+(x-x') \times \\ \times eq\gamma A(x')\,G_+(x'-x'')\,eq\gamma A(x'')\,\psi(x''). \tag{5.25}$$

Выделим коэффициент при произведении $iJ^*_{k\lambda}\, iJ^*_{k'\lambda'}\, iJ^*_{k''\lambda''}$, в котором поле частицы берется в виде $\psi \exp[ip_0x]$ при условии $p_0^2 + m^2 = 0$:

$$ie^2\left[\int (dx) \exp[i(2p_0 - k - k' - k'')x]\right](d\omega_k\, d\omega_{k'}\, d\omega_{k''})^{1/2} \frac{1}{2}\psi\gamma^0 eq \times \\ \times \left\{\gamma e \frac{m - \gamma(k - p_0)}{-2kp_0}\gamma e' \frac{m - \gamma(p_0 - k'')}{-2k''p_0}\gamma e'' + \ldots\right\}\psi \tag{5.26}$$

(это выражение соответствует лишь одному из шести возможных способов расстановки трех фотонов). В приближении свободного движения частиц мы имеем

$$(\gamma p_0 + m)\psi = 0, \quad \psi\gamma^0(\gamma p_0 - m) = 0, \tag{5.27}$$

причем в дальнейшем для всех фотонов принимается калибровка

$$p_0 e = 0. \tag{5.28}$$

В итоге приходим к подстановкам

$$\psi\gamma^0\gamma e[m - \gamma(k - p_0)] = \psi\gamma^0(m - \gamma p_0)\gamma e - \psi\gamma^0\gamma e\gamma k = \\ = \psi\gamma^0 i\sigma^{\mu\nu} e_\mu k_\nu \tag{5.29}$$

и

$$[m - \gamma(p_0 - k'')]\gamma e''\psi = \gamma k''\gamma e''\psi + \gamma e''(m + \gamma p_0)\psi = i\sigma^{\mu\nu} e''_\mu k''_\nu \psi, \tag{5.30}$$

благодаря которым взаимодействие магнитного момента с электромагнитным полем выступает теперь в явной форме. Запишем последнее в трехмерном виде

$$\sigma^{\mu\nu} e_\mu k_\nu = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}\times\mathbf{k} - \gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}k^0, \tag{5.31}$$

где использовано соотношение

$$\sigma^{0l} = -\gamma_5\sigma^l \tag{5.32}$$

или, иначе,

$$\boldsymbol{\gamma} = i\gamma^0\gamma_5\boldsymbol{\sigma} \tag{5.33}$$

и учтено условие калибровки (5.28) в системе покоя импульса p_0.

Выражение в фигурных скобках в формуле (5.26) теперь можно развернуть следующим образом:

$$-\frac{i\gamma^0\gamma_5}{4kp_0k''p_0}\,[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}\times\mathbf{k}+\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}k^0\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}'\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}''\times\mathbf{k}''-\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}''k^{0''})+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}''\times$$
$$\times\mathbf{k}''+\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}''\mathbf{k}^{0''})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}'(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}\times\mathbf{k}-\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}k^0)]+\text{цикл. перест.}, \tag{5.34}$$

куда результат перестановки k, e и k'', e'' входит в явном виде. Всевозможные спиновые произведения приводятся с помощью соотношений

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{C}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}=2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{C}+2\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}-2\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} \tag{5.35}$$

и

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{C}-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}=2i\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}. \tag{5.36}$$

Последняя комбинация входит в виде произведения с γ_5. Однако получающаяся в результате структура $\psi\gamma^0 eq\gamma^0\psi$ из дираковских полей при принятых допущениях не дает никакого вклада. Это вытекает из уравнений (5.27), комбинируя которые имеем

$$0 = \psi\gamma^0 eq\,(\gamma p_0+m)\,\psi+\psi\gamma^0\,(\gamma p_0-m)\,eq\psi =$$
$$= -2m\psi\gamma^0 eq\gamma^0\psi, \tag{5.37}$$

где последняя форма записи относится к системе покоя вектора p_0. В итоге для (5.34) возникает следующее выражение:

$$-\frac{1}{2m^2}\,\frac{1}{k^0k^{0'}k^{0''}}\,[\mathbf{e}\times\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}'k^{0'}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}''\times\mathbf{k}''+\mathbf{e}''\times\mathbf{k}''\cdot\mathbf{e}'k^{0'}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}\times\mathbf{k}-$$
$$-\mathbf{e}\times\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}''\times\mathbf{k}''\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}'k^{0'}+k^0k^{0'}k^{0''}\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}''+\mathbf{e}'\cdot\mathbf{e}''\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}-$$
$$-\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}''\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}')]+\text{цикл. перест.} \tag{5.38}$$

Результат сложения трех циклических перестановок особенно прост в случае второй совокупности членов в формуле (5.38), которые дают симметричную комбинацию

$$k^0k^{0'}k^{0''}\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}''+\mathbf{e}'\cdot\mathbf{e}''\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}+\mathbf{e}''\cdot\mathbf{e}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}'). \tag{5.39}$$

В элементах $\mathbf{e}\times\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}k^0$ мы узнаем векторные характеристики магнитного и электрического полей, ассоциируемых с одним определенным фотоном. Действительно, в формуле (5.38) мы имеем комбинацию отдельных фотонных полей, порождаемую полной полевой структурой

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{H}. \tag{5.40}$$

Отождествив с точностью до множителя величины $\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^0 q\gamma_k\psi$ и $\partial_0\varphi_k - \partial_k\varphi_0$, мы придем к некоторой линейной комбинации двух величин вида (5.11) и (5.12). Несколько неожиданно для нас появление в этих феноменологических выражениях дополнительного множителя $(kp_0k'p_0k''p^0)^{-1}$, фигурирующего в формуле (5.38). Он представляет собой некий формфактор, связывающий нелокальным образом поля фотонов с полем ортопозитрония. Ретроспективно мы можем усмотреть, что двухфотонная амплитуда вероятности, выраженная через напряженности поля, тоже содержит множитель $(kp_0k'p_0)^{-1}$, однако последний определяется исключительно кинематикой. Напомним, что интуитивные представления, ассоциируемые обычно с феноменологическими связями, относятся к системе, обратные размеры которой велики сравнительно с импульсами возбуждений, испускаемых или поглощаемых ею. Здесь же мы имеем противоположный случай, так как, согласно соотношению (5.15), величина $1/a$ гораздо меньше m — характерной для процесса аннигиляции единицы. Соответственно этому и имеется нелокальность в масштабе m.

Важная роль формфактора становится особенно ясной при переходе к пределу, когда энергия одного фотона стремится к нулю и тем самым имитируется физический процесс, в котором наличие однородного магнитного поля вынуждает атом ортопозитрония распадаться с испусканием двух фотонов. Сингулярный характер предела нулевой энергии указывает на вековой рост амплитуды со временем, который реально ограничивается конечным расщеплением между основными уровнями ортопозитрония и парапозитрония и составляет основу для измерений этой величины. Если обозначить такое однородное поле через $\mathbf{H}_0$, то полевая структура, получаемая из (5.40), будет иметь вид

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{H}_0-\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{E}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{H}, \tag{5.41}$$

или

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{H}_0-(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{H}_0). \tag{5.42}$$

Последнее слагаемое не дает вклада в двухчастичный обмен — здесь импульсы фотонов равны по величине и противоположны по направлению, а поэтому

$$\mathbf{e}\times(\mathbf{e}'\times\mathbf{k}')+\mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{k})=-(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'=0. \tag{5.43}$$

Оставшаяся часть в точности совпадает с псевдоскалярной связью, которая описывает двухфотонный распад парапозитрония. Такой индуцированный распад имеет место для атомов ортопозитрония, которые поляризованы параллельно магнитному полю или, другими словами, имеют нулевое магнитное квантовое число относительно направления магнитного поля. Мы пришли к случаю смешивания парапозитрония и ортопозитрония, вызванного магнитным полем. Он обычно исследуется методом атомной теории возмущений. Некоторые детали последней, в том числе отказ от ограничения случаем слабого магнитного поля, мы рассмотрим позднее.

Приступая к вычислению скорости трехфотонного распада, рассмотрим определенное состояние системы типа $^3S_1$ ($C=-1$), имеющее, как и выше, нулевое магнитное квантовое число относительно некоторого произвольного направления с единичным вектором $\mathbf{v}$. Соответствующее ему поле, аналогичное полю (5.21), имеет вид

$$2^{1/2}\,[2^{-1/2}q\delta_{q,\,-q'}]\,[2^{-1/2}\delta_{\sigma,\,-\sigma'}]\,\psi(\mathbf{r})\,(4m\,d\omega_P)^{1/2}\exp(iPx), \tag{5.44}$$

так что

$$\frac{1}{2}\,\psi(x)\,\gamma^0 q\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\gamma}\psi(x)\to 2^{3/2}m^{1/2}\psi(0)\,\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varphi}(x). \tag{5.45}$$

Отсюда для скорости распада получаем

$$\gamma_{\text{орто}}=(4\pi\alpha)^3\,\frac{1}{2m^4}\,|\,\psi(0)\,|^2\,\frac{1}{6}\int d\omega_k\,d\omega_{k'}\,d\omega_{k''}\times$$
$$\times(2\pi)^4\,\delta(k+k'+k''-P)\sum|M|^2, \tag{5.46}$$

где

$$M=(\mathbf{e}\times\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}'+\mathbf{e}'\times\mathbf{n}'\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}''+$$
$$+(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'-\mathbf{e}\times\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}'\times\mathbf{n}')\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}''+\text{цикл. перест.}, \tag{5.47}$$

причем $\mathbf{n}$ — единичные векторы, задающие направления распространения фотонов, а суммирование в формуле (5.46) проводится по всем возможным поляризациям. Множитель $^1/_6$ включен для того, чтобы не учитывать один и тот же фотон по нескольку раз. Поскольку окончательный результат не зависит от вектора $\mathbf{v}$, сначала удобнее провести усреднение по его направлениям. Суммирования по поляризациям выполняются с помощью диадного соотношения

$$\sum_{\mathbf{e}}\mathbf{e}\mathbf{e}=\sum_{\mathbf{e}}\mathbf{e}\times\mathbf{n}\mathbf{e}\times\mathbf{n}=\mathbf{1}-\mathbf{n}\mathbf{n}, \tag{5.48}$$

которое выражает полноту совокупности двух векторов $\mathbf{e}$ и вектора $\mathbf{n}$. Примеры вычисления подобных сумм таковы:

$$\sum_{\mathbf{e}\mathbf{e}'\mathbf{e}''}(\mathbf{e}\times\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}'+\mathbf{e}'\times\mathbf{n}'\cdot\mathbf{e})^2\,(\mathbf{e}''\times\mathbf{n}'')^2=$$
$$=2\sum_{\mathbf{e}\mathbf{e}'}[(\mathbf{e}\times\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}')^2+(\mathbf{e}'\times\mathbf{n}'\cdot\mathbf{e})^2+2\mathbf{e}\times\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}'\mathbf{e}'\times\mathbf{n}'\cdot\mathbf{e}]=$$
$$=2\sum_{\mathbf{e}}[1-(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{e}\times\mathbf{n})^2+1-(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{e})^2-2\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}']=4\,(1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')^2 \tag{5.49}$$

и

$$\sum_{\mathbf{e}\mathbf{e}'\mathbf{e}''} (\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}' - (\mathbf{e}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{e}'+\mathbf{n}'))^2 (\mathbf{e}'')^2 =$$

$$= 2\sum_{\mathbf{e}\mathbf{e}'} [(1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')^2(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}')^2 + (\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}')^2(\mathbf{e}'\cdot\mathbf{n})^2 + 2(1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}'\mathbf{e}'\cdot\mathbf{n}] =$$

$$= 2\sum_{\mathbf{e}} [(1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')^2(1-(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{e})^2) + (1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')^2)(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{e})^2 -$$

$$-2(1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{e})^2] = 4(1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')^2. \qquad (5.50)$$

Члены всех других типов взаимно уничтожаются, и в итоге мы приходим к равенству

$$\sum |M|^2 = 8(1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')^2, \qquad (5.51)$$

записанному в несимметричной форме, но это несущественно ввиду эквивалентности всех фотонов по отношению к интегрированию. Итак, на данной стадии расчета мы получаем

$$\gamma_{\text{орто}} = (4\pi\alpha)^3 \frac{4}{m^4} |\psi(0)|^2 \frac{1}{6} \int d\omega_k\, d\omega_{k'}\, d\omega_{k''} \times$$

$$\times (2\pi)^4 \delta(k+k'+k''-P)(1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')^2. \qquad (5.52)$$

Представим $1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'$ в инвариантной форме:

$$1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}' = -4m^2 \frac{kk'}{kPk'P} = -4m^2 \frac{kk'}{(kk'+kk'')(kk'+k'k'')}, \qquad (5.53)$$

и сгруппируем два фотона в одну систему с массой M:

$$\int d\omega_k\, d\omega_{k'}\, d\omega_{k''} (2\pi)^4 \delta(k+k'+k''-P) =$$

$$= \int d\omega_k\, d\omega_{k'} (2\pi)^3 \delta(k+k'-K)\, dM^2 \times$$

$$\times d\omega_K d\omega_{k''} (2\pi)^4 \delta(K+k''-P), \qquad (5.54)$$

где

$$M^2 = -(k+k')^2 = -2kk' \qquad (5.55)$$

и

$$(2m)^2 = -(K+k'')^2 = M^2 - 2Kk''. \qquad (5.56)$$

В системе покоя импульса K мы имеем

$$\int d\omega_k\, d\omega_{k'} (2\pi)^3 \delta(k+k'-K)(1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')^2 =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dz \left[\frac{4m^2 \frac{1}{2} M^2}{\left(\frac{1}{2}M^2 + \frac{4m^2-M^2}{4}(1-z)\right)\left(\frac{1}{2}M^2 + \frac{4m^2-M^2}{4}(1+z)\right)} \right]^2, \qquad (5.57)$$

где z — косинус угла между векторами $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$. Выполняя интегрирование по z, получаем

$$\frac{1}{\pi^2}\,\frac{(4m^2)^2 M^4}{(4m^2+M^2)^2}\left[\frac{\ln\dfrac{4m^2}{M^2}}{(4m^2+M^2)\,(4m^2-M^2)}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{4m^2M^2}\right]. \tag{5.58}$$

Далее, поскольку

$$\int d\omega_K\, d\omega_{k''}\,(2\pi)^3\,\delta\,(K+k''-P)=\frac{1}{(4\pi)^2}\left(1-\frac{M^2}{4m^2}\right), \tag{5.59}$$

оставшийся интеграл пропорционален величине

$$\int\limits_0^{(2m)^2} dM^2\left(1-\frac{M^2}{4m^2}\right)\frac{4m^2M^4}{(4m^2+M^2)^2}\left[\frac{\ln\dfrac{4m^2}{M^2}}{(4m^2+M^2)\,(4m^2-M^2)}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{4m^2M^2}\right]=$$

$$=\int\limits_0^1 du\left[\frac{u^2}{(1+u)^3}\ln\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\,\frac{u\,(1-u)}{(1+u)^2}\right], \tag{5.60}$$

в которой

$$u=\frac{M^2}{4m^2}. \tag{5.61}$$

Последовательные интегрирования по частям дают для последнего интеграла

$$\int\limits_0^1 du\,\frac{1}{1+u}\ln\frac{1}{u}-\frac{3}{4}=\frac{1}{12}\,(\pi^2-9), \tag{5.62}$$

где проведено еще одно интегрирование по частям и использовано равенство (4.115):

$$\int\limits_0^1 du\,\frac{1}{1+u}\ln\frac{1}{u}=\int\limits_0^1 du\,\frac{1}{u}\ln(1+u)=\frac{\pi^2}{12}. \tag{5.63}$$

Собирая все это вместе, мы для скорости распада находим

$$\gamma_{n^3S}=\frac{16}{9}\,(\pi^2-9)\,\frac{\alpha^3}{m^2}\,|\,\psi(0)|^2=\frac{2}{9\pi}\,(\pi^2-9)\,\frac{1}{n^3}\,\alpha^6 m, \tag{5.64}$$

откуда для времени жизни основного уровня ортопозитрония получаем

$$\tau_{\text{орто}}=\frac{9\pi}{4}\,\frac{1}{\pi^2-9}\,\frac{1}{\alpha}\,\tau_{\text{пара}}=1{,}387\cdot 10^{-7}\ \text{с}. \tag{5.65}$$

Чтобы найти энергетический спектр позитрония, применим прежде всего результаты § 2, в частности выражение (2.134) для энергетического оператора в системе покоя, причем теперь мы имеем

$$m_1 = m_2 = m, \quad \mu = \frac{1}{2} m, \quad e_1 = -e_2 = e. \tag{5.66}$$

Это дает

$$H_0 = 2m + \frac{\mathbf{p}^2}{m} - \frac{1}{4m^3}(\mathbf{p}^2)^2 - \alpha \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{2m^2} \mathbf{p} \cdot \left(\frac{1}{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{rr}}{r^3} \right) \cdot \mathbf{p} - \right.$$
$$- \frac{\pi}{m^2} \delta(\mathbf{r}) - \frac{3}{4} \frac{1}{m^2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{p}}{r^3} -$$
$$\left. - \frac{1}{4m^2} \left(3 \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}}{r_5} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} \right) - \frac{2\pi}{3} \frac{1}{m^2} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(\mathbf{r}) \right\}. \tag{5.67}$$

Простейший случай — синглетные уровни парапозитрония, для которых эффективно выполняется равенство

$$\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 = 0, \tag{5.68}$$

так что выражение (5.67) сводится к виду

$$H_{0\ \text{пара}} = 2m + \frac{\mathbf{p}^2}{m} - \frac{1}{4m} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{m} \right)^2 -$$
$$- \alpha \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{2m^2} \mathbf{p} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{rr}}{r^3} \right) \cdot \mathbf{p} + \frac{\pi}{m^2} \delta(\mathbf{r}) \right\}. \tag{5.69}$$

Чтобы найти первые отклонения от грубой структуры, т. е. от спектра нерелятивистского оператора энергии

$$\frac{\mathbf{p}^2}{m} - \frac{\alpha}{r} = T + V, \tag{5.70}$$

мы воспользуемся формулой (2.148), заменив в ней m на $^1/_2 m$ в соответствии с тем, что эта величина ведет свое происхождение от нерелятивистского оператора энергии [преобразование (2.144)]. Вытекающее из нее следствие

$$-\frac{2\alpha}{m} \left\langle \mathbf{p} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{rr}}{r^3} \right) \cdot \mathbf{p} \right\rangle - \frac{4\pi\alpha}{m} \langle \delta(\mathbf{r}) \rangle = \langle 2\{T, V\} + V^2 \rangle \tag{5.71}$$

позволяет нам представить среднее значение оператора (5.69) в форме

$$E_{\text{рел}} - 2m = E_{\text{нерел}} + \frac{1}{4m} \langle 2\{T, V\} + V^2 - T^2 \rangle. \tag{5.72}$$

Исключив потенциальную энергию, получим

$$\langle 2\{T, V\} + V^2 - T^2 \rangle = E^2_{\text{нерел}} + 2E_{\text{нерел}} \langle T \rangle - 4 \langle T^2 \rangle =$$
$$= -E^2_{\text{нерел}} - 4 \langle T^2 \rangle, \tag{5.73}$$

так как, согласно соотношению (2.152), в кулоновском поле

$$\langle T \rangle = -E_{\text{нерел}}. \tag{5.74}$$

Мы знаем также, что в состоянии с орбитальным квантовым числом L имеет место равенство

$$\langle T^2\rangle = \frac{m^2\alpha^4}{4n^3}\left(\frac{1}{L+{}^1/_2} - \frac{3}{4n}\right), \tag{5.75}$$

получаемое из равенства (2.155) путем подстановок $l \to L$, $m \to {}^1/_2 m$. Результатом является следующее выражение для первых членов степенного разложения тонкой структуры парапозитрония:

$$E_{\text{пара}}(n,\ L) = 2m - \frac{m\alpha^2}{4n^2} - \frac{m\alpha^4}{4n^3}\left(\frac{1}{L+{}^1/_2} - \frac{11}{16n}\right). \tag{5.76}$$

Отметим, что формула (2.163) с приведенной массой, если положить в ней $M = m$, $\mu = {}^1/_2 m$ и $j = L$, воспроизводит этот результат с точностью до числового коэффициента ${}^{11}/_{16}$. [Он получился бы совсем правильным, если бы в согласии с принятым в формуле (2.163) приближении $M \gg m$ мы заменили бы в ней последнее слагаемое на $-\mu^2\alpha^4/8\,(M+m)\,n^4$.]

Спектр ортопозитрония оказывается значительно более сложным. Здесь мы должны принять во внимание спин-орбитальный член в формуле (5.67)

$$\frac{3}{4}\,\frac{\alpha}{m^2}\,\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}}{r^3} = \frac{3}{2}\,\frac{\alpha}{m^2}\,\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}}{r^3}, \tag{5.77}$$

а также входящую туда тензорную спин-спиновую связь

$$\frac{\alpha}{4m^2}\left(3\,\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\mathbf{r}\,\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2}{r^3}\right) = \frac{\alpha}{2m^2}\left(3\,\frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{r})^2}{r^5} - \frac{\mathbf{S}^2}{r^3}\right). \tag{5.78}$$

При заданном квантовом числе J, принимающем в общем случае значения $J = L+1$, L, $L-1$, достаточно вычислить среднее значение оператора (5.77) в состоянии nLJ:

$$\left\langle\frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}}{r^3}\right\rangle_{nLJ} = \frac{1}{2}\,[J\,(J+1) - L\,(L+1) - 2]\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle_{nL}. \tag{5.79}$$

Мы имеем

$$\frac{1}{2}\,[J\,(J+1) - L\,(L+1) - 2] = \begin{cases} J = L+1: & L, \\ J = L: & -1, \\ J = L-1: & -L-1 \end{cases} \tag{5.80}$$

и, согласно формуле (4-11.107) при $a_0 \to 2a_0$,

$$\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle_{nL} = \frac{\alpha^3 m^3}{8n^3}\,\frac{1}{L\,(L+{}^1/_2)(L+1)}. \tag{5.81}$$

В частном случае, когда $J = L = 1,\ 2,\ \ldots,$ спин-орбитальный энергетический сдвиг равен

$$\left\langle \frac{3}{2} \frac{\alpha}{m^2} \frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}}{r^3} \right\rangle_{nJJ} = -\frac{3}{2} \frac{\alpha}{m^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{nJ} = -\frac{3}{16} \frac{\alpha^4 m}{n^3} \frac{1}{J\left(J+\frac{1}{2}\right)(J+1)}. \tag{5.82}$$

Тензорное взаимодействие (5.78) сложнее спин-орбитальной связи, ибо оно может изменять орбитальный момент, сохраняя в то же время орбитальную четность $(-1)^L$, а тем самым может приводить к смешиванию двух типов состояний с $L = J \pm 1$. Поскольку при $J = L$ никакого смешивания нет, в подобного рода состоянии спин-угловой множитель

$$3(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})^2 - \mathbf{S}^2, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{5.83}$$

должен иметь некоторое собственное значение. В соответствии с двумя возможностями для единичного спина

$$(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})^{2\prime} = 1,\ 0 \tag{5.84}$$

указанная комбинация обладает только двумя собственными значениями:

$$[3(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})^2 - \mathbf{S}^2]' = 1,\ -2. \tag{5.85}$$

Чтобы установить, какое из них правильное при $J = L$, достаточно провести качественные рассуждения, которые асимптотически, при больших L, становятся вполне строгими. Собственные значения (5.84) соответствуют двум случаям, в одном из которых спин $\mathbf{S}$ параллелен (или антипараллелен), а в другом ортогонален вектору $\mathbf{n}$. Поскольку единичный радиус-вектор $\mathbf{n}$ ортогонален вектору $\mathbf{L}$, в первом из двух возможных вариантов, указанных в формулах (5.84) и (5.85), векторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$ взаимно ортогональны. Собственные значения оператора $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$, представленные в формуле (5.80), таковы, что при $L \gg 1$ значениям $J = L + 1, L, L - 1$ соответствуют значения $1,\ 0,\ -1$ величины $(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S})'/L$. Следовательно, асимптотический случай $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} \sim 0$, в котором собственное значение оператора (5.83) равно 1, мы имеем при $J = L$. Естественно, собственное значение 1, которое получается при $J = L$, можно вывести и более формальным путем, который не столь уж долог, но тогда останется непонятным, почему возникает именно это собственное значение. В итоге формула (5.78) дает энергетический сдвиг

$$\left\langle \frac{\alpha}{2m^2} \left(3 \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{r})^2}{r^5} - \frac{\mathbf{S}^2}{r^3}\right) \right\rangle_{nJJ} = \frac{\alpha}{2m^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{nJ} = \frac{1}{16} \frac{\alpha^4 m}{n^3} \frac{1}{J\left(J+\frac{1}{2}\right)(J+1)}. \tag{5.86}$$

Складывая величины (5.82) и (5.86), мы для состояний ортопозитрония ^3J_J, отличных от состояния S, получаем следующее энергетическое смещение по отношению к уровням парапозитрония ^1J_J:

$$E_{\text{орто}}(nJJ) - E_{\text{пара}}(nJJ) = -\frac{1}{8}\frac{\alpha^4 m}{n^3}\frac{1}{J\left(J+\frac{1}{2}\right)(J+1)}. \qquad (5.87)$$

Простейшим примером смешанных состояний ортопозитрония могут служить состояния $^3S_1 + {}^3D_1$ и $^3P_2 + {}^3F_2$, причем, если мы требуем, чтобы смешивание было ощутимым, оба орбитальных состояния должны принадлежать одному и тому же уровню грубой структуры. Следовательно, при $n = 1$, когда имеется только $L = 0$, и при $n = 2$, когда $L = 0, 1$, подобное смешивание невозможно. Поскольку все имеющиеся экспериментальные данные ограничиваются случаем $n = 1$, мы никаких дальнейших деталей, касающихся смешивания уровней, приводить не будем. Орто-пара-расщепление основного S-уровня целиком обусловлено последним слагаемым в формуле (5.67). Вспоминая, что

$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2)' = \begin{cases} S = 1: & 1 \\ S = 0: & -3, \end{cases} \qquad (5.88)$$

мы получаем

$$E_{\text{орто}} - E_{\text{пара}} = \frac{8\pi}{3}\frac{\alpha}{m^2}|\psi(0)|^2 = \frac{1}{3}\alpha^4 m. \qquad (5.89)$$

Такой же результат дает и формула сверхтонкой структуры (4-17.16), если положить в ней $M_p = m$, $Z = 1$, $S = {}^1/_2$, $g_S = 2$. Но даже с принятой здесь точностью проблема еще не исчерпывается.

Ортопозитроний, для которого $C = -1$, распадается на три фотона, так как его превращение в один реальный фотон запрещено кинематикой. Но он может испускать или поглощать один виртуальный фотон, что приводит к дополнительному смещению относительно парапозитрония. Обмен виртуальным фотоном описывается взаимодействием

$$W = \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\, j^\mu(x)\, D_+(x-x')\, j_\mu(x'), \qquad (5.90)$$

в котором, как результат сформулированного ковариантным образом соответствия (5.45),

$$j^\mu(x) \to e2^{3/2}m^{1/2}\psi(0)\,\varphi^\mu(x). \qquad (5.91)$$

Поскольку аннигиляционный механизм представляет собой обмен массой $2m$, мы эффективно имеем

$$D_+(x-x') = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{\exp[ik(x-x')]}{k^2} \to -\frac{1}{(2m)^2}\delta(x-x'), \qquad (5.92)$$

и аннигиляционная связь принимает вид

$$W_{\text{анниг}} = -\frac{8\pi\alpha}{m}\,|\psi(0)|^2 \int (dx)\,\frac{1}{2}\,\varphi^{\mu}(x)\,\varphi_{\mu}(x) = \\ = \int (dx)\left[-\delta m^{2}_{\text{орто}}\,\frac{1}{2}\,\varphi^{\mu}(x)\,\varphi_{\mu}(x)\right], \tag{5.93}$$

причем последней записью устанавливается феноменологическая интерпретация этого члена как массового сдвига. Следовательно,

$$\delta m_{\text{орто}} = (E_{\text{орто}} - E_{\text{пара}})_{\text{анниг}} = \frac{2\pi\alpha}{m^2}\,|\psi(0)|^2 = \frac{1}{4}\,\alpha^4 m, \tag{5.94}$$

так что полный результат, заменяющий (5.89), таков:

$$E_{\text{орто}} - E_{\text{пара}} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\alpha^4 m = \frac{7}{6}\,\alpha^2\,\mathrm{Ry} = 2{,}0439\cdot 10^5\ \text{МГц}. \tag{5.95}$$

Последнее же экспериментальное значение равно

$$E_{\text{орто}} - E_{\text{пара}} = (2{,}0340 \pm 0{,}0001)\cdot 10^5\ \text{МГц}. \tag{5.96}$$

Согласие с точностью в полпроцента можно считать вполне удовлетворительным, тем более что должны существовать теоретические поправки относительного порядка α.

Но прежде чем переходить к этим поправкам, выполним наше обещание и рассмотрим вопрос о смешивании ортопозитрония и парапозитрония под влиянием магнитного поля. В S-состояниях относительного движения связь с магнитным полем обусловлена целиком спиновыми магнитными моментами. Энергия такого взаимодействия при определенном выборе зарядовых индексов имеет вид

$$-\frac{e}{2m}\,(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)\cdot\mathbf{H}. \tag{5.97}$$

Из антисимметрии по двум спинам вытекает равенство нулю среднего значения этого оператора в синглетном и триплетном состояниях. Действительно, единственным результатом взаимодействия (5.97) оказывается то, что мы и ожидали,— смешивание состояния ${}^1S_0$, $C = 1$ с состоянием ${}^3S_1$, $C = -1$. С состоянием ${}^1S_0$ связан только магнитный уровень состояния ${}^3S_1$ с $m = 0$, так как проекция момента на ось z, т. е. на направление магнитного поля, продолжает сохраняться. Матричный элемент можно вычислить, заметив, что справедливо равенство

$$\langle {}^1S\,|\,[(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)_z]^2\,|\,{}^1S\rangle = \langle {}^1S\,|\,(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)_z\,|\,{}^3S\rangle\,\langle {}^3S\,|\,(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)_z\,|\,{}^1S\rangle = 4, \tag{5.98}$$

поскольку в синглетном состоянии $\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2$ дает нуль. Соответственно этому при подходящем выборе фазы субматрица оператора энергии для двух наших уровней имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_{\text{пара}} & -eH/m \\ -eH/m & E_{\text{орто}} \end{pmatrix}. \tag{5.99}$$

Ее собственные значения таковы:

$$E = \frac{1}{2}(E_{\text{орто}} + E_{\text{пара}}) \pm \left[\frac{1}{4}(E_{\text{орто}} - E_{\text{пара}})^2 + (eH/m)^2\right]^{1/2}, \qquad (5.100)$$

тогда как амплитуды двух состояний, определяемые уравнениями для собственных векторов и условием нормировки, даются формулами

$$\psi_{\text{пара}} = \frac{eH/m}{E_{\text{пара}} - E}\psi_{\text{орто}}, \quad \left[1 + \left(\frac{eH/m}{E_{\text{пара}} - E}\right)^2\right] |\psi_{\text{орто}}|^2 = 1, \qquad (5.101)$$

или

$$\psi_{\text{орто}} = \frac{eH/m}{E_{\text{орто}} - E}\psi_{\text{пара}}, \quad \left[1 + \left(\frac{eH/m}{E_{\text{орто}} - E}\right)^2\right] |\psi_{\text{пара}}|^2 = 1. \qquad (5.102)$$

Эти амплитуды позволяют нам вычислить скорость распада смешанного состояния:

$$\gamma = |\psi_{\text{пара}}|^2 \gamma_{\text{пара}} + |\psi_{\text{орто}}|^2 \gamma_{\text{орто}}. \qquad (5.103)$$

В случае слабых магнитных полей, когда

$$eH/m \ll \frac{1}{2}\Delta E, \qquad (5.104)$$

где

$$\Delta E = E_{\text{орто}} - E_{\text{пара}}, \qquad (5.105)$$

собственные значения энергии равны

$$E \approx E_{\text{орто}} + \frac{(eH/m)^2}{\Delta E}, \quad E_{\text{пара}} - \frac{(eH/m)^2}{\Delta E}. \qquad (5.106)$$

Соответственно двум этим альтернативам, т. е. возмущенному ортоуровню и возмущенному парауровню, мы имеем

$$|\psi_{\text{пара}}|^2 \approx \left(\frac{eH/m}{\Delta E}\right)^2, \quad |\psi_{\text{орто}}|^2 \approx 1 - \left(\frac{eH/m}{\Delta E}\right)^2 \qquad (5.107)$$

и

$$|\psi_{\text{орто}}|^2 \approx \left(\frac{eH/m}{\Delta E}\right)^2, \quad |\psi_{\text{пара}}|^2 \approx 1 - \left(\frac{eH/m}{\Delta E}\right)^2. \qquad (5.108)$$

Скорости распада данных состояний таковы:

$$\gamma \approx \gamma_{\text{орто}} + \left(\frac{eH/m}{\Delta E}\right)^2 (\gamma_{\text{пара}} - \gamma_{\text{орто}}) \qquad (5.109)$$

и

$$\gamma \approx \gamma_{\text{пара}} - \left(\frac{eH/m}{\Delta E}\right)^2 (\gamma_{\text{пара}} - \gamma_{\text{орто}}). \qquad (5.110)$$

Первая из формул показывает, что скорость распада возрастает за счет индуцированного процесса двухфотонного испускания.

Это и есть тот самый механизм, который мы учитывали раньше качественно, вводя формфактор, соответствующий трехфотонному распаду. Результаты, которые мы получили здесь методом теории возмущений, применимы в общем случае магнитного поля с произвольной напряженностью. В частности, в пределе сильного поля, когда неравенство (5.104) меняется на противоположное, мы имеем $\psi_{\text{пара}} = \mp\psi_{\text{орто}}$, так что обе скорости распада стремятся к одному и тому же пределу, равному среднему арифметическому $^1/_2\,(\gamma_{\text{пара}} + \gamma_{\text{орто}})$.

В качестве первого шага к вычислению модификации порядка α в орто-пара-расщеплении энергии мы рассмотрим однофотонный обмен аннигиляционного механизма. В соответствующий расчет входят совместно два элемента: примитивное взаимодействие, описывающее взаимопревращение фотона и электрон-позитронной пары, и фотонная функция распространения. Для последней мы должны взять модифицированное выражение

$$\overline{D}(k) = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{4m^2}\,\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dv\,\frac{v^2\left(1-\frac{1}{3}v^2\right)}{1+(k^2/4m^2)\cdot(1-v^2)}, \tag{5.111}$$

а примитивное взаимодействие нужно изменить в соответствии с обобщением его на случай наличия формфакторов:

$$\gamma A(k) \rightarrow F_1(k)\,\gamma A(k) + \frac{\alpha}{2\pi}\,\frac{1}{2m}\,F_2(k)\,\sigma F(k). \tag{5.112}$$

Эффекты, связанные с функцией распространения, можно рассчитать сразу же. Вычислив ее при $k^2 = -4m^2$, получим

$$\overline{D}(k) = -\frac{1}{4m^2}\left[1-\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dv\left(1-\frac{1}{3}v^2\right)\right], \tag{5.113}$$

так что аннигиляционный вклад в орто-пара-расщепление уменьшается, приобретая множитель

$$1-\frac{8}{9}\,\frac{\alpha}{\pi}. \tag{5.114}$$

Обращаясь к связи с дополнительным магнитным моментом, которая появилась в формуле (5.112), отметим, что

$$\sigma F(k) = \frac{1}{2}\,[-\gamma k,\ \gamma A(k)]. \tag{5.115}$$

В системе покоя процесса рождения мы имеем, например,

$$-\gamma k = 2m\gamma^0 \tag{5.116}$$

и

$$\psi^*\gamma^0 = \psi^*,\quad \gamma^0\psi^* = -\psi^*. \tag{5.117}$$

Это означает, что примитивное взаимодействие умножается на эффективный формфактор

$$F_e(k) = F_1(k) + \frac{\alpha}{2\pi} F_2(k). \tag{5.118}$$

Компоненты этого формфактора, в которых для нас существенна только действительная часть, даются формулами (4.183) — (4.185):

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 - \frac{\alpha}{2\pi} f_1(v), \; f_1(v) = f(v) + \chi(v), \\ F_2 &= -(1 - v^2)\chi(v), \end{aligned} \tag{5.119}$$

так что мы имеем

$$F_e = 1 - \frac{\alpha}{2\pi}[f(v) + (2 - v^2)\chi(v)]. \tag{5.120}$$

В интересующем нас нерелятивистском случае ($v \ll 1$) функция $\chi(v)$ сводится к единице, а в силу равенств (4.87) и (4.89) можно написать

$$\begin{aligned} f(v) = P\int_0^1 dv' \frac{(1+v'^2)\ln\dfrac{v'^2}{1-v'^2}}{v^2 - v'^2} + 2\left(\ln\frac{2m}{\mu} - 1\right) \times \\ \times [(1 + v^2)\chi(v) - 1] \approx -\frac{\pi^2}{2v} + 2, \end{aligned} \tag{5.121}$$

согласно формуле (4.131) в пределе малых v, когда

$$\frac{d}{dv} l(v)\,|_{v=0} = 1, \quad \frac{d}{dv} l(v)\,|_{v=1/2} = 2\ln 2. \tag{5.122}$$

Отметим, что на данном уровне точности масса фотона, этот признак инфракрасных особенностей, в формулы не вошла. В итоге модификация за счет процесса однофотонного обмена будет описываться множителем

$$[F_e]^2 \approx 1 - \frac{\alpha}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{2v} + 4\right) \approx \left(1 + \frac{\pi\alpha}{2v}\right)\left(1 - \frac{4\pi}{\pi}\right). \tag{5.123}$$

В комбинации $1 + (\pi\alpha/2v)$ можно узнать функцию, возникающую при нерелятивистской оценке $|\psi(0)|^2$ для свободных частиц [см. формулы (4.135) и (4.138)]. Но исходный расчет уже предполагает её замену оценкой, соответствующей связанному атому позитрония. Поэтому истинная поправка на рассматриваемый эффект определяется вторым сомножителем в формуле (5.123), равным

$$1 - \frac{4\alpha}{\pi}. \tag{5.124}$$

Следовательно, полное изменение орто-пара-расщепления, обусловленное однофотонной аннигиляционной частью, дается множителем

$$\left(1-\frac{8}{9}\frac{\alpha}{\pi}\right)\left(1-\frac{4\alpha}{\pi}\right)\approx 1-\frac{44}{9}\frac{\alpha}{\pi}. \tag{5.125}$$

Теперь, когда уровень точности описания изменяется соответственно дополнительному множителю α, следует учитывать также двухфотонные процессы типа аннигиляционного механизма парапозитрония. Эффективный двухфотонный источник в данном случае равен

$$iJ^{\mu}(x)\,J^{\nu}(x')\,|_{\text{эфф}}=\frac{1}{2}e^2\left[\psi(x)\,\gamma^0\gamma^{\mu}G_+(x-x')\,\gamma^{\nu}\psi(x')+\right.$$
$$\left.+\psi(x')\,\gamma^0\gamma^{\nu}G_+(x'-x)\,\gamma^{\mu}\psi(x)\right], \tag{5.126}$$

а вакуумная амплитуда, описывающая двухчастичный обмен, получается из выражения

$$\frac{1}{2}\int(dx)\,\ldots\,(dx''')\,iJ_1^{\mu}(x)\,J_1^{\nu}(x')\,|_{\text{эфф}}\times$$
$$\times D_+(x-x'')\,D_+(x'-x''')\,iJ_{2\mu}(x'')\,J_{2\nu}(x''')\,|_{\text{эфф}}. \tag{5.127}$$

При анализе этой связи мы можем воспользоваться либо каузальным, либо некаузальным методом расчета. Последний позволяет добиться некоторых упрощений за счет специфики состояния ^1S, и поэтому мы обратимся к нему, заменив (5.127) соответствующим выражением в импульсном представлении:

$$\frac{1}{2}\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\,\frac{(dk')}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2-i\varepsilon}\,\frac{1}{k'^2-i\varepsilon}\,iJ_1^{\mu}(-k)\,J_1^{\nu}(-k')\,|_{\text{эфф}}\times$$
$$\times iJ_{2\mu}(k)\,J_{2\nu}(k')\,|_{\text{эфф}}. \tag{5.128}$$

Пространственно-временнáя структура полей частиц такова:

$$\psi_1(x)=\exp\left(-i\frac{1}{2}p_1x\right)\psi^*,\quad \psi_2(x)=\exp\left(i\frac{1}{2}p_2x\right)\psi, \tag{5.129}$$

причем в системе покоя позитрония

$$p_1^0=p_2^0\approx 2m. \tag{5.130}$$

Следовательно,

$$iJ_1^{\mu}(-k)\,J_1^{\nu}(-k')\,|_{\text{эфф}}=(2\pi)^4\,\delta(k+k'-p_1)\,2\pi\alpha\psi^*\gamma^0\times$$
$$\times\left[\gamma^{\mu}\frac{1}{-\gamma\left(k-\frac{1}{2}p_1\right)+m}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\frac{1}{-\gamma\left(k'-\frac{1}{2}p_1\right)+m}\gamma^{\mu}\right]\psi^* \tag{5.131}$$

и

$$iJ_2^{\mu}(k)\,J_2^{\nu}(k')\,|_{\text{эфф}}=(2\pi)^4\,\delta(k+k'-p_2)\,2\pi\alpha\psi\gamma^0\times$$
$$\times\left[\gamma^{\mu}\frac{1}{\gamma\left(k-\frac{1}{2}p_2\right)+m}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\frac{1}{\gamma\left(k'-\frac{1}{2}p_2\right)+m}\gamma^{\mu}\right]\psi. \tag{5.132}$$

В силу ограничений, налагаемых на импульсы дельта-функциями, у нас фактически имеется только один четырехмерный импульсный интеграл. Чтобы записать его, произведем замену переменных $(p_1 = p_2 = p)$

$$k \to \frac{1}{2} p + k, \quad k' \to \frac{1}{2} p - k, \tag{5.133}$$

в результате которой выражение (5.128) приводится к виду ($-i\varepsilon$ подразумевается)

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2)(2\pi\alpha)^2 \frac{1}{2} \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2} p\right)^2} \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2} p\right)^2} \psi^* \gamma^0 \times$$
$$\times \left[\gamma^\mu \frac{m + \gamma k}{k^2 + m^2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{m - \gamma k}{k^2 + m^2} \gamma^\mu\right] \times$$
$$\times \psi^* \psi \gamma^0 \left[\gamma_\mu \frac{m - \gamma k}{k^2 + m^2} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{m + \gamma k}{k^2 + m^2} \gamma_\mu\right] \psi. \tag{5.134}$$

Свойства ^1S-состояния таковы, что можно образовать лишь псевдоскалярную и псевдовекторную комбинации полей частиц. Произведение трех γ-матриц в формуле (5.134) удовлетворяет этому требованию, так как

$$\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu = \ldots + \varepsilon^{\mu\lambda\nu\varkappa} \gamma_\varkappa \gamma_5, \tag{5.135}$$

где многоточием обозначены другие слагаемые, содержащие по одной γ-матрице. С учетом такого упрощения получаем, что величина (5.134) равна

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2)(4\pi\alpha)^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2} p\right)^2} \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2} p\right)^2} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \times$$
$$\times (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \psi^* \gamma^0 \gamma^\mu \gamma_5 \psi^* \psi \gamma^0 \gamma^\nu \gamma_5 \psi; \tag{5.136}$$

при этом использовано соотношение

$$-\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\lambda\nu\varkappa} \varepsilon_{\mu\lambda'\nu\varkappa'} = \delta^\lambda_{\lambda'} \delta^\varkappa_{\varkappa'} - \delta^\varkappa_{\lambda'} \delta^\lambda_{\varkappa'}. \tag{5.137}$$

Отметим, что наша система имеет спин 0, и благодаря этому псевдовекторная комбинация оказывается пропорциональной градиенту псевдоскаляра, а именно:

$$\psi \gamma^0 \gamma^\nu \gamma_5 \psi = -\frac{p^\nu}{2m} \psi \gamma^0 \gamma_5 \psi. \tag{5.138}$$

В справедливости данного равенства можно убедиться в системе покоя вектора p, где из соотношения $\gamma^0 \psi = \psi$ и из антисимметрии матрицы γ^0 следует, что полевая структура, содержащая матрицу $\gamma_k \gamma_5$, которая коммутирует с γ^0, равна нулю. Точно так же, но с учетом равенства $\psi^* \gamma^0 = \psi^*$, можно убедиться в справедливости соотношения

$$\psi^*\gamma^0\gamma^\mu\gamma_5\psi^* = \frac{p^\mu}{2m}\,\psi^*\gamma^0\gamma_5\psi^*. \tag{5.139}$$

В качестве конкретного следствия укажем, что

$$\psi^*\gamma^0\gamma^\mu\gamma_5\psi^*\psi\gamma^0\gamma_\mu\gamma_5\psi = \psi^*\gamma^0\gamma_5\psi^*\psi\gamma^0\gamma_5\psi. \tag{5.140}$$

Чтобы вычислить импульсный интеграл (5.136), воспользуемся представлением

$$\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}p\right)^2}\,\frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}p\right)^2}\,\frac{1}{(k^2+m^2)^2} =$$

$$= \int\limits_0^\infty ds_1\,ds_2\,ds_3\,s_3 \exp\left[-is_1\left(k+\frac{1}{2}p\right)^2\right]\times$$

$$\times\exp\left[-is_2\left(k-\frac{1}{2}p\right)^2\right]\exp\left[-is_3(k^2+m^2)\right] =$$

$$= \int\limits_0^\infty ds\,s^3\int\limits_0^1 du\,u(1-u)\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{2}dv\exp\left\{-is\left[\frac{1+v}{2}u\left(k+\frac{1}{2}p\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1-v}{2}u\left(k-\frac{1}{2}p\right)^2 + (1-u)(k^2+m^2)\right]\right\}. \tag{5.141}$$

Учитывая равенство

$$p^2 = -4m^2, \tag{5.142}$$

мы для множителя при коэффициенте $-is$ в экспоненте получаем выражение

$$k^2 + uvkp + (1-2u)m^2 = \left(k+\frac{uv}{2}p\right)^2 + (1-2u+u^2v^2)m^2. \tag{5.143}$$

После этого возникает следующий основной интеграл по импульсам:

$$\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}k_\mu k_\nu\exp\left[-is\left(k+\frac{1}{2}uvp\right)^2\right] =$$

$$= \int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left(k-\frac{1}{2}uvp\right)_\mu\left(k-\frac{1}{2}uvp\right)_\nu\exp(-isk^2) =$$

$$= \left(-\frac{i}{2s}g_{\mu\nu} + \frac{1}{4}u^2v^2p_\mu p_\nu\right)\frac{1}{(4\pi)^2}\,\frac{1}{is^2}, \tag{5.144}$$

где использованы импульсные интегралы (4-8.57) и (4-14.75). Применительно к нашему случаю имеем

$$\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}(k^2g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)\exp\left[-is\left(k+\frac{1}{2}uvp\right)^2\right] =$$

$$= \left[-\frac{3i}{2s}g_{\mu\nu} + \frac{1}{4}u^2v^2(p^2g_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu)\right]\frac{1}{(4\pi)^2}\,\frac{1}{is^2}. \tag{5.145}$$

Вследствие безвихревого характера вектора (5.138) комбинация $p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu$ вклада давать не будет. В итоге мы эффективно получаем

$$\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}p\right)^2} \frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}p\right)^2} \frac{1}{(k^2+m^2)^2} (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \to$$

$$\to -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{3}{2} g_{\mu\nu} \int_0^\infty ds \int_0^1 du\, u(1-u) \cdot \int_0^1 dv \times$$

$$\times \exp\left[-ism^2(1-2u+u^2v^2)\right] = i \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{3}{2} g_{\mu\nu} \frac{1}{m^2} I, \qquad (5.146)$$

где

$$I = \int_0^1 du\, u(1-u) \int_0^1 dv \frac{1}{1-2u+u^2v^2-i\varepsilon}. \qquad (5.147)$$

Если применить равенство (5.140) и учесть соответствие (5.22), которым вводится псевдоскалярное поле, то вакуумная амплитуда (5.136) примет вид

$$i\left[\int (dx) \exp\left[i(-p_1+p_2)x\right] \varphi_1\varphi_2\right] 48\frac{\alpha^2}{m} |\psi(0)|^2 I, \qquad (5.148)$$

т. е. мы приходим к следующему вкладу в действие:

$$48\frac{\alpha^2}{m} |\psi(0)|^2 I \int (dx) \frac{1}{2} [\varphi(x)]^2. \qquad (5.149)$$

Он имеет структуру массового члена и дает нам сдвиг квадрата массы, который в соответствии с нестабильностью частицы оказывается комплексным. Таким образом,

$$\delta m^2_{\text{пара}} - i m_{\text{пара}} \gamma_{\text{пара}} = -48\frac{\alpha^2}{m} |\psi(0)|^2 I \qquad (5.150)$$

и ($m_{\text{пара}} \approx 2m$)

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{пара}} &= 24\frac{\alpha^2}{m^2} |\psi(0)|^2 \operatorname{Im} I, \\ \delta m_{\text{пара}} &= -12\frac{\alpha^2}{m^2} |\psi(0)|^2 \operatorname{Re} I. \end{aligned} \qquad (5.151)$$

Для сравнения с полученным ранее результатом (5.24) проведем следующие выкладки:

$$\operatorname{Im} I = \pi \int_0^1 du\, u(1-u) \int_0^1 dv\, \delta(1-2u+u^2v^2) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{1/2}^1 du \frac{1-u}{(2u-1)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{2}(1-x^2) = \frac{\pi}{6}. \qquad (5.152)$$

Причем на последнем этапе произведена подстановка

$$2u - 1 = x^2. \tag{5.153}$$

Результат, вытекающий из формул (5.151), действительно согласуется с (5.24). Чтобы вычислить действительную часть величины I,

$$\operatorname{Re} I = P\int_0^1 du\, u(1-u)\int_0^1 dv\,\frac{1}{1-2u+u^2v^2}, \tag{5.154}$$

рассмотрим две области, $u < {}^1/_2$ и $u > {}^1/_2$. В первой из них имеем

$$u\int_0^1 dv\,\frac{1}{1-2u+u^2v^2} = \frac{1}{(1-2u)^{1/2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{(1-2u)^{1/2}}. \tag{5.155}$$

Преобразование

$$1 - 2u = x^2 \tag{5.156}$$

приводит этот вклад к виду

$$\int_0^1 dx\,\frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{2x} = \int_0^1 dx\,\frac{x+\frac{1}{3}x^3}{1+x^2} = \frac{1}{3}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right). \tag{5.157}$$

В области $u > {}^1/_2$ величина (5.155) заменяется величиной

$$uP\int_0^1 dv\,\frac{1}{1-2u+u^2v^2} = -\frac{1}{(2u-1)^{1/2}}\ln\frac{1+(2u-1)^{1/2}}{1-(2u-1)^{1/2}}. \tag{5.158}$$

Воспользовавшись преобразованием (5.153), мы для этого вклада в $\operatorname{Re} I$ будем иметь

$$-\int_0^1 dx\,\frac{1}{2}(1-x^2)\ln\frac{1+x}{1-x} = -\frac{1}{3}\left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\right), \tag{5.159}$$

так что

$$\operatorname{Re} I = \frac{1}{3}(1-\ln 2). \tag{5.160}$$

В результате вклад двухфотонной аннигиляции оказывается равным

$$\delta m_{\text{пара}} = -4(1-\ln 2)\frac{\alpha^2}{m^2}|\psi(0)|^2 = -\frac{1-\ln 2}{\pi}\alpha^3 \mathrm{Ry}. \tag{5.161}$$

Помимо аннигиляционных процессов, характерных для позитрония, имеются также обычные механизмы взаимодействия, при которых две частицы все время существуют как таковые. Мы будем придерживаться классификации, введенной в § 3, где исходная схема, учитывающая только мгновенное кулоновское взаимодействие, была дополнена обменом поперечными фотонами. Но теперь, когда мы рассматриваем высокоэнергетический процесс, более предпочтительно с самого начала считать, что во время актов обмена фотонами частицы практически свободны. Помимо обмена двумя поперечными фотонами, мы должны принять во внимание и то влияние кулоновского взаимодействия на обмен одним поперечным фотоном вместе со статистическим спиновым взаимодействием, которое не учитывается при использовании волновой функции $\psi(0)$. Может иметь место, например, дополнительное кулоновское взаимодействие во время пролета поперечного фотона. Кроме того, нам следует отказаться от полного пренебрежения импульсом, соответствующим относительному движению частиц, что и составляет суть использования значения $\psi(0)$. Как это уже неоднократно делалось в связи с одночастичными процессами, искомое поведение на малых расстояниях можно найти, если взять волновую функцию, получаемую из $\psi(0)$ путем однократной итерации кулоновского взаимодействия. Перечисленные нами процессы представляют собой все возможные способы, которыми поперечный фотон может комбинироваться с мгновенным кулоновским взаимодействием. В действительности нас интересует суммарный эффект от двухфотонного обмена. [Включение повторного кулоновского взаимодействия не приносит никакого вреда, поскольку оно не содержит спин-спинового взаимодействия.] В такой ситуации вместо разбиения (3.131) и (3.132), отвечающего выделению мгновенной и поперечной частей взаимодействия, несколько проще воспользоваться непосредственно ковариантной функцией распространения

$$D_+(k)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\frac{1}{k^2 - i\varepsilon}\,. \tag{5.162}$$

Если поля частиц снабдить причинными индексами, то эффективный источник, соответствующий выражению (5.126), запишется как

$$\begin{aligned} iJ^\mu(x)\,J^\nu(x')\,|_{\text{эфф}} = e^2\,[\psi_1(x)\,\gamma^0\gamma^\mu G_+(x-x')\,\gamma^\nu\psi_2(x') + \\ + \psi_1(x')\,\gamma^0\gamma^\nu G_+(x'-x)\,\gamma^\mu\psi_2(x)]. \end{aligned} \tag{5.163}$$

Две частицы мы будем различать индексами a и b, так что вакуумная амплитуда для двухфотонного обмена представляется в форме

$$\frac{1}{2}\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\,\frac{(dk')}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2 - i\varepsilon}\,\frac{1}{k'^2 - i\varepsilon}\,iJ^\mu(-k)\,J^\nu(-k')\,|_a\, iJ_\mu(k)\,iJ_\nu(k')\,|_b. \tag{5.164}$$

Вновь достаточно воспользоваться тем простым выражением для полей частиц, которое дается формулой (5.129). Из него следует, что $k' = -k$, и вакуумная амплитуда сводится к

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2)(4\pi\alpha)^2 \frac{1}{2} \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 \psi^*\gamma^0 \left[\gamma^\mu \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p-k\right)+m} \gamma^\nu + \right.$$
$$\left. + \gamma^\nu \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p+k\right)+m} \gamma^\mu \right] \psi \Big|_a \psi^*\gamma^0 \left[\gamma_\mu \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p+k\right)+m} \gamma_\nu + \right.$$
$$\left. + \gamma_\nu \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p-k\right)+m} \gamma_\mu \right] \psi \Big|_b. \tag{5.165}$$

Разделяя пространственные и временны́е компоненты и отбрасывая член, который содержит только последние, мы для данной величины получаем выражение

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2)(4\pi\alpha)^2 \frac{1}{2} \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \psi^*\gamma^0 \times$$
$$\times \left[\gamma_k \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p-k\right)+m} \gamma_l + \gamma_l \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p+k\right)+m} \gamma_k \right] \psi \Big|_a \times$$
$$\times \psi^*\gamma^0 \left[\gamma_k \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p+k\right)+m} \gamma_l + \gamma_l \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p-k\right)+m} \gamma_k \right] \psi \Big|_b -$$
$$-(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2)(4\pi\alpha)^2 \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2}\right) \psi^*\gamma^0 \times$$
$$\times \left[\gamma_k \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p-k\right)+m} \gamma^0 + \gamma^0 \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p+k\right)+m} \gamma_k \right] \psi \Big|_a \times$$
$$\times \psi^*\gamma^0 \left[\gamma_k \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p+k\right)+m} \gamma^0 + \gamma^0 \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p-k\right)+m} \gamma_k \right] \psi \Big|_b. \tag{5.166}$$

Ввиду того что в системе покоя вектора p функции ψ и ψ^* являются собственными векторами матрицы γ^0, в отдельных слагаемых величины (5.166) могут остаться только члены с четным числом γ-матриц.

В результате возникают определенные упрощения: например,

$$\gamma_k \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p-k\right)+m} \gamma_l = \gamma_k \frac{m-\gamma\left(\frac{1}{2}p-k\right)}{k^2-pk} \gamma_l \to \frac{k^0}{k^2-pk}(-i\sigma_{kl}) \tag{5.167}$$

и

$$\gamma_k \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2}p-k\right)+m}\gamma^0 \to \frac{1}{k^2-pk}(i\sigma_{kl}k_l), \tag{5.168}$$

где сохранена только нужная нам спиновая структура. Пространственный вектор из последнего выражения можно затем усреднить по всем направлениям:

$$k_l k_m \to \frac{1}{3}\delta_{lm}\mathbf{k}^2. \tag{5.169}$$

В итоге для двух слагаемых вакуумной амплитуды получим

$$(2\pi)^4\,\delta(p_1-p_2)(\psi_a\psi_b)^*\,\sigma_a\cdot\sigma_b\psi_a\psi_b\frac{(4\pi\alpha)^2}{m^2}(I_1+I_2), \tag{5.170}$$

где, в ковариантной записи,

$$I_1=\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{k^2}\right)^2\frac{(pk)^2}{4}\left(\frac{1}{k^2-pk}+\frac{1}{k^2+pk}\right)^2=$$
$$=\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{(pk)^2}{(k^2-pk)^2(k^2+pk)^2} \tag{5.171}$$

и

$$I_2=-\frac{2}{3}m^2\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{k^2}\right)^2\left(k^2+\frac{(pk)^2}{4m^2}\right)\left(\frac{1}{k^2-pk}+\frac{1}{k^2+pk}\right)^2=$$
$$=-\frac{2}{3}\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{(pk)^2+4m^2k^2}{(k^2-pk)^2(k^2+pk)^2}. \tag{5.172}$$

Сумма двух членов равна

$$I=I_1+I_2=\frac{1}{3}\int\frac{(dk)}{(2\pi)^4}\frac{(pk)^2-8m^2k^2}{(k^2-pk)^2(k^2+pk)^2}, \tag{5.173}$$

причем первый вклад под знаком интеграла можно отождествить с обменом двумя поперечными фотонами, а второй — с обменом одним поперечным фотоном.

При вычислении интегралов используется представление

$$\frac{1}{(k^2-pk)^2}\frac{1}{(k^2+pk)^2}=\int_0^\infty ds_1\,s_1\int_0^\infty ds_2\,s_2\exp\{-i\,[s_1(k^2-pk)+$$
$$+s_2(k^2+pk)]\}=\int_0^\infty ds\,s^3\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\,\frac{1-v^2}{4}\exp\{-is(k^2-pkv)\}, \tag{5.174}$$

где

$$k^2-pkv=\left(k-\frac{1}{2}pv\right)^2+m^2v^2. \tag{5.175}$$

Произведя подстановку $k - {}^1/_2 pv \to k$, мы для основного импульсного интеграла, входящего в I, получаем

$$\frac{1}{3}\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left[(pk - 2m^2v)^2 - 8m^2\left(k + \frac{1}{2}pv\right)^2\right]\exp(-isk^2) =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\left[(pk)^2 - 8m^2k^2 + 12m^4v^2\right]\exp(-isk^2) =$$
$$= \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{4m^2}{is^2}\left(\frac{3i}{2s} + m^2v^2\right). \qquad (5.176)$$

Следовательно, мы имеем

$$I = -\frac{i}{(4\pi)^2}4m^2\int_0^1 dv\frac{1-v^2}{4}\int_0^\infty ds\left(\frac{3i}{2} + m^2v^2s\right)\exp(-ism^2v^2) =$$
$$= -\frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 dv\frac{1}{2}(1-v^2)\left[\frac{3}{v^2 - i\varepsilon} - \frac{2v^2}{(v^2 - i\varepsilon)^2}\right]. \qquad (5.177)$$

Если учесть теперь равенство

$$\int_0^1 dv\frac{1}{2}(1-v^2)\left[\frac{1}{v^2 - i\varepsilon} - \frac{2v^2}{(v^2 - i\varepsilon)^2}\right] = \int_0^1 dv\frac{1}{2}(1-v^2)\frac{d}{dv}\frac{v}{v^2 - i\varepsilon} =$$
$$= \int_0^1 dv\frac{v^2}{v^2 - i\varepsilon} = 1, \qquad (5.178)$$

то интеграл (5.177) приведется к виду

$$I = -\frac{i}{(4\pi)^2}\left[\int_0^1 dv\frac{1-v^2}{v^2 - i\varepsilon} + 1\right] = -\frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 dv\frac{1}{v^2 - i\varepsilon}. \qquad (5.179)$$

Гарольд в замешательстве:

Гарольд. Здесь, конечно, что-то не так. Ведь последний интеграл не существует!

Швингер. Вы правы. Но я хотел бы напомнить об одном специальном правиле, которое входит в качестве составного элемента в методику учета поведения волновой функции на малых расстояниях. Оно выражено в формуле (4-15.45) и состоит в том, что функцию распространения частиц $(p^2 + m^2 - i\varepsilon)^{-1}$ при вычислении ее в точке $p^0 = m$ следует заменять функцией $(\mathbf{p}^2 - \varepsilon^2)^{-1}$ при $\varepsilon \to 0$, т. е. переходить к главному значению интегралов в смысле Коши. В нашем последнем случае роль величины $\mathbf{p}^2$ играет величина m^2v^2. С физической точки зрения такое отождествление обосновывается следующим образом. Первое слагаемое в правой части (5.173), обязанное своим происхождением двойному обмену поперечными фотонами, не приводит к подобному интегралу:

$$\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \frac{(pk)^2}{(k^2-pk)^2\,(k^2+pk)^2} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \int\limits_0^1 dv \, \frac{1}{2}\,(1-v^2) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{v^2-i\varepsilon} - \frac{2v^2}{(v^2-i\varepsilon)^2} \right) = -\frac{i}{(4\pi)^2} \, . \qquad (5.180)$$

За сингулярный интеграл (5.179) ответственно второе слагаемое в формуле (5.173), в которое наряду с мгновенным кулоновским взаимодействием входит один поперечный фотон. Этим и оправдывается применение правила о главном значении интеграла. Его можно было бы включить явным образом в расчет и раньше, но проще прибегать к нему по мере необходимости. С учетом сказанного интеграл, фигурирующий в формуле (5.179), следует заменить величиной

$$P \int\limits_0^1 dv \frac{1}{v^2-\varepsilon^2} \bigg|_{\varepsilon\to 0} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re} \frac{1}{2\varepsilon} \ln \frac{v+\varepsilon}{v-\varepsilon} \bigg|_0^1 = -1, \qquad (5.181)$$

так что

$$I = \frac{i}{(4\pi)^2} \, . \qquad (5.182)$$

В итоге для вакуумной амплитуды (5.170) имеем

$$i \int (dx) \exp\left[i\,(-p_1+p_2)\,x\right] (\psi_a\psi_b)^* \, \sigma_a\cdot\sigma_b \psi_a\psi_b \frac{\alpha^2}{m^2} \, . \qquad (5.183)$$

В комбинации $\psi_a\psi_b \exp(ip_2x)$ мы узнаем двухчастичное поле $\psi(xx)$, отвечающее свободным частицам, которое связано с испущенным атомом позитрония. Аналогично поле $(\psi_a\psi_b)^* \exp(-ip_1x)$ относится к детектируемому атому. При описании связанной системы их заменяют множители нормированной функции центра масс, которые исчезают при пространственном интегрировании, имеющемся в (5.183), и волновая функция относительного движения, вычисленная в начале координат, т. е. $\psi(0)$. Получающийся в результате коэффициент при $-i \int dx^0$ в (5.183) и дает нам искомый энергетический сдвиг

$$\delta E = -\frac{\alpha^2}{m^2} \, |\psi(0)|^2 \, \sigma_a\cdot\sigma_b, \qquad (5.184)$$

где

$$\sigma_a\cdot\sigma_b = \begin{cases} \text{орто:} & 1 \\ \text{пара:} & -3 \end{cases} . \qquad (5.185)$$

Следовательно, этот вклад в орто-пара-расщепление оказывается равным

$$-\frac{4\alpha^2}{m^2}|\psi(0)|^2 = -\frac{1}{\pi}\alpha^3 \,\mathrm{Ry}. \qquad (5.186)$$

На данном уровне описания следует учесть и еще один эффект. Речь идет о поправке порядка $\alpha/2\pi$ к магнитному моменту, благодаря которой величина (5.89) приобретает множитель

$$\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \approx 1+\frac{\alpha}{\pi}. \qquad (5.187)$$

Суммируя всевозможные вклады в орто-пара-расщепление порядка α^3 Ry, содержащиеся в формулах (5.125), (5.161), (5.186) и (5.187), получаем

$$\frac{1}{\pi}\alpha^3 \,\mathrm{Ry}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{44}{9}\right)+(1-\ln 2)-1+\frac{2}{3}\right], \qquad (5.188)$$

так что полная поправка к величине (5.95) равна

$$E_{\text{орто}}-E_{\text{пара}} = \left[\frac{7}{6}-\left(\frac{16}{9}+\ln 2\right)\frac{\alpha}{\pi}\right]\alpha^2 \,\mathrm{Ry}. \qquad (5.189)$$

Она приводит к уменьшению расщепления примерно на полпроцента, и в итоге численное значение (5.95) заменяется на

$$E_{\text{орто}}-E_{\text{пара}} = 2{,}0338\cdot 10^5 \text{ МГц}, \qquad (5.190)$$

что резко улучшает согласие с экспериментальным значением (5.96).

Гарольд. Как я вижу, Вы воспроизвели старый результат Карплуса — Клейна [см. книгу Selected Papers on Quantum Electrodynamics, Dover, 1958 [1])]. Но поскольку у Вас нет таких несуразностей, как расходимости, тяжелые фотоны и инфракрасное обрезание, Вы добились явного концептуального улучшения. Кроме того, вычисления значительно упростились в результате замены громоздкого аппарата двухчастичных уравнений элементарными выкладками. Вероятно, теперь можно, идя примерно по тому же пути, перейти и к следующему уровню описания?

Швингер. Мне кажется, что это действительно так, по крайней мере касательно эффектов относительного порядка $\alpha^2 \ln 1/\alpha$, но рассчитывать поправки порядка α^2 мы пока еще не готовы. Однако я лучше перейду теперь к тесно связанной с этим проблеме сверхтонкой структуры мюония.

---

1) См. также в сб. "Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954.— *Прим. ред.*

В большинстве случаев мюоний ведет себя, как водород с более легким ядром $[m_\mu/m_e = 206{,}77,\ m_{\text{прот}}/m_e = 1836{,}1]$. В частности, сверхтонкое расщепление основного состояния — величина, которую можно измерить — в основном правильно описывается теорией, развитой в гл. 4, § 17, для неподвижного ядра. Но необходимы динамические поправки, включающие отношение масс m_e/m_μ; их то мы и намерены вычислить в духе предшествующего анализа позитрония. Конечно, здесь нет никакого аналога аннигиляционному механизму, и все внимание будет уделено обсуждению процессов двухфотонного взаимодействия, описываемых в случае позитрония формулой (5.165). Единственное изменение состоит в том, что теперь следует учесть различие в массах и в соответствии с этим произвести замены

$$e:\quad m,\ \frac{1}{2}p \to m_e,\ \frac{m_e}{M}p;\qquad \mu:\quad m,\ \frac{1}{2}p \to m_\mu,\ \frac{m_\mu}{M}p, \tag{5.191}$$

где

$$M = m_\mu + m_e. \tag{5.192}$$

Вплоть до выражения (5.170) можно все точно повторить, но дальше $(1/m^2)(I_1 + I_2)$ нужно заменить на

$$\frac{4}{3}\int \frac{(dk)}{(2\pi)^4}\,\frac{[(pk)^2/M^2]-2k^2}{\left(k^2-\frac{2m_\mu}{M}pk\right)\left(k^2-\frac{2m_e}{M}pk\right)\left(k^2+\frac{2m_\mu}{M}pk\right)\left(k^2+\frac{2m_e}{M}pk\right)}. \tag{5.193}$$

Используя представление

$$\frac{1}{k^2\mp\frac{2m_\mu}{M}pk}\,\frac{1}{k^2\mp\frac{2me}{M}pk}=$$
$$=-\int ds_\pm s_\pm \frac{1}{2}dv_\pm \exp\left\{-is_\pm\left[k^2\mp\left(1+\frac{m_\mu-m_e}{M}v_\pm\right)pk\right]\right\}, \tag{5.194}$$

получаем

$$\frac{1}{k^2-\frac{2m_\mu}{M}pk}\,\frac{1}{k^2-\frac{2m_e}{M}pk}\,\frac{1}{k^2+\frac{2m_\mu}{M}pk}\,\frac{1}{k^2+\frac{2m_e}{M}pk}=$$
$$=\int_0^\infty ds\, s^3\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv_+\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv_-\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\,\frac{1-v^2}{4}\exp\{-is[k^2-Vpk]\}, \tag{5.195}$$

где

$$V=v+\frac{m_\mu-m_e}{M}\left(v_+\frac{1+v}{2}-v_-\frac{1-v}{2}\right). \tag{5.196}$$

Опять можно воспользоваться интегралом (5.176), но с подстановками $4m^2 \to M^2$, $v \to V$, а вместо выражения для $(1/m^2)\, I$, вытекающего из (5.177), теперь имеем ($-i\varepsilon$ опущено)

$$-\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{4}{M^2}\int \frac{1}{2}\,dv_+\,\frac{1}{2}\,dv_-\,\frac{1}{2}\,dv\,\frac{1-v^2}{2}\left[\frac{3}{V^2}-\frac{2V^2}{(V^2)^2}\right]. \qquad (5.197)$$

Отметим, далее, что

$$\frac{d}{dv}\frac{V}{V^2}=\left(1+\frac{m_\mu-m_e}{2M}(v_+ + v_-)\right)\left(\frac{1}{V^2}-\frac{2V^2}{(V^2)^2}\right), \qquad (5.198)$$

и после интегрирования по частям выражение (5.197) принимает вид

$$-\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{4}{M^2}\int \frac{1}{2}\,dv_+\,\frac{1}{2}\,dv_-\,\frac{1}{2}\,dv\left[\frac{1-v^2}{V^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1+\dfrac{m_\mu-m_e}{2M}(v_+ + v_-)}\frac{vV}{V^2}\right], \qquad (5.199)$$

причем комбинацию к квадратных скобках можно представить также в форме

$$\frac{1}{V^2}+\frac{[(m_\mu-m_e)/2M]\,(v_+ + v_-)}{1+[(m_\mu-m_e)/2M]\,(v_+ + v_-)}\frac{v}{V^2}. \qquad (5.200)$$

Выполним сначала интегрирование по v. Действуя так же, как и в формуле (5.181), напишем

$$\int \frac{1}{2}\,dv\,\frac{1}{V^2}=\frac{1}{1+[(m_\mu-m_e)/2M]\,(v_+ + v_-)}\,P\int\frac{1}{2}\,dV\,\frac{1}{V^2-\varepsilon^2}, \qquad (5.201)$$

причем интеграл по V берется в пределах от $1+[(m_\mu-m_e)/M]\,v_+$ до $-(1+[(m_\mu-m_e)/M]\,v_-)$. Это дает

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,dv\,\frac{1}{V^2}=-\frac{1}{1+[(m_\mu-m_e)/M]\,v_+}\,\frac{1}{1+[(m_\mu-m_e)/M]\,v_-}. \qquad (5.202)$$

Другой необходимый нам интеграл, который появляется в выражении

$$\int\frac{1}{2}\,dv\,\frac{v}{V^2}=\frac{1}{[1+[(m_\mu-m_e)/2M]\,(v_+ + v_-)]^2}\times$$
$$\times\int\frac{1}{2}\,dV\,\frac{V-[(m_\mu-m_e)/2M]\,(v_+ - v_-)}{V^2}, \qquad (5.203)$$

дается формулой

$$P\int\frac{1}{2}\,dV\,\frac{V}{V^2-\varepsilon^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+[(m_\mu-m_e)/M]\,v_+}{1+[(m_\mu-m_e)/M]\,v_-}. \qquad (5.204)$$

Комбинируя их, будем иметь

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dv\,[\quad]=\frac{1}{2}\frac{[(m_\mu-m_e)/2M](v_+-v_-)}{[1+[(m_\mu-m_e)/2M](v_++v_-)]^3}\ln\frac{1+[(m_\mu-m_e)/M]v_+}{1+[(m_\mu-m_e)/M]v_-}-$$

$$-\frac{1}{[1+[(m_\mu-m_e)/2M](v_++v_-)]^2}, \qquad (5.205)$$

где квадратными скобками в левой части обозначена комбинация (5.200). Теперь заметим, что правую часть равенства (5.205) можно получить, проводя дифференцирования в выражении

$$\frac{1}{2}\frac{M}{m_\mu-m_e}\frac{\partial}{\partial v_+}\frac{\partial}{\partial v_-}\frac{v_+-v_-}{1+[(m_\mu-m_e)/2M](v_++v_-)}\ln\frac{1+[(m_\mu-m_e)/M]v_+}{1+[(m_\mu-m_e)/M]v_-}. \qquad (5.206)$$

Это сразу же дает

$$\int\frac{1}{2}dv_+\frac{1}{2}dv_-\frac{1}{2}dv\,[\quad]=\frac{1}{2}\frac{M}{m_\mu-m_e}\ln\frac{m_\mu}{m_e}, \qquad (5.207)$$

и величина (5.199) приобретает вид

$$\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{2}{m_\mu^2-m_e^2}\ln\frac{m_\mu}{m_e}. \qquad (5.208)$$

Энергетический сдвиг мюония можно найти по формуле (5.184), соответствующей позитронию, путем подстановки

$$\frac{1}{m^2}\to\frac{2}{m_\mu^2-m_e^2}\ln\frac{m_\mu}{m_e}\approx\frac{2}{m_\mu^2}\ln\frac{m_\mu}{m_e}, \qquad (5.209)$$

дополненной подходящим выражением для $|\psi(0)|^2$:

$$|\psi(0)|^2=\frac{1}{\pi}\alpha^3\left(\frac{m_\mu m_e}{m_\mu+m_e}\right)^3. \qquad (5.210)$$

В итоге для этого вклада в сверхтонкое расщепление мюония мы будем иметь

$$-\frac{16}{\pi}\alpha^3\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2\left(\ln\frac{m_\mu}{m_e}\right)\left(1+\frac{m_e}{m_\mu}\right)^{-3}\mathrm{Ry}. \qquad (5.211)$$

При сравнении с энергетическим расщеплением, к которому приводит элементарная теория, если произвести в формуле (4-17.16) подстановки $M=M_p\to m_\mu$, $m\to m_e$, $Z=1$, $S={}^1/_2$, $g_S=2$:

$$\Delta E_{\text{нерел}}=\frac{16}{3}\alpha^2\frac{m_e}{m_\mu}\left(1+\frac{m_e}{m_\mu}\right)^{-3}\mathrm{Ry}, \qquad (5.212)$$

величину (5.211) можно квалифицировать как относительную поправку, равную

$$-\frac{3}{\pi}\alpha\frac{m_e}{m_\mu}\ln\frac{m_\mu}{m_e}=-1{,}797\cdot10^{-4}. \qquad (5.213)$$

Численно формула (5.212) дает

$$\Delta E_{\text{перел}} = 4453{,}8 \text{ МГц}, \tag{5.214}$$

тогда как экспериментальное значение таково:

$$\Delta E_{\text{эксп}} = 4463{,}3 \text{ МГц} \tag{5.215}$$

(оба результата приведены лишь с той точностью, которая достаточна здесь для наших целей). Основная доля расхождения в 9,5 МГц отпадает при учете поправки $\alpha/2\pi$ к двум магнитным моментам, за счет которой значение (5.214) возрастает до

$$\Delta E_{\text{перел}+\alpha} = 1{,}00232 \cdot 4453{,}8 \text{ МГц} = 4464{,}2 \text{ МГц}. \tag{5.216}$$

Оставшаяся разница, имеющая теперь противоположный знак, составляет 0,9 МГц. Как показывает соотношение (4-17.110), эффекты, рассмотренные в гл. 2, § 17, приводят к уменьшению теоретического значения на

$$-[1{,}64 \cdot 10^{-5}]\,[4{,}45 \cdot 10^{3} \text{ МГц}] = -0{,}073 \text{ МГц}, \tag{5.217}$$

и тем самым расхождение понижается до 0,8 МГц. Но именно такую величину и дает массовый эффект, который описывается формулой (5.213):

$$-[1{,}8 \cdot 10^{-4}]\,[4{,}45 \cdot 10^{3} \text{ МГц}] = -0{,}8 \text{ МГц}. \tag{5.218}$$

Таким образом, в отличие от сверхтонкой структуры водорода для систем позитрония и мюония оказывается достаточным чисто электродинамических механизмов, чтобы получить блестящее согласие с экспериментом.

Гарольд. В проведенном сравнении с экспериментом меня смущает одно обстоятельство. Вы учли эффекты порядка α^2 [типа (5.217)], которые возникают за счет взаимодействия между частицами, но не учли поправки того же порядка величины к характеристикам отдельных частиц — к их магнитным моментам. Не будет ли это непоследовательностью?

Швингер В принципе Вы правы. Однако практически числовые коэффициенты в упомянутых Вами эффектах столь малы, что они не будут сказываться сколько-нибудь существенным образом на результатах нашего довольно грубого (на уровне нескольких десятков на миллион) сравнения с экспериментом. Тем не менее, как уже упоминалось в гл. 4, § 3, прямые измерения с точностью, позволяющей обнаружить поправки порядка α^2 к магнитным моментам электрона и мюона, действительно проводились. Одной из наших следующих задач как раз и является построение соответствующей теории магнитного момента электрона. Но, хотя применение теории источников приводит к значительным их упрощениям, выкладки все же остаются весьма громоздкими, и, пожалуй, имеет смысл прервать здесь изложение, закончив второй том. Тогда может статься, что благодаря все более распространяющемуся знакомству с методами, подробно изложенными в данной книге, более широкий круг читателей будет подготовлен к такого рода обсуждению в третьем томе, в котором мы намерены рассмотреть методы и основные положения теории источников применительно к проблемам из области сильного и слабого взаимодействий.

Приложения

I. КАК ЧИТАТЬ ПЕРВЫЙ ТОМ

Про первый том говорилось, что он представляет собой одновременно оригинальный научный труд и учебник. К сожалению, начинающему студенту не было дано никакой путеводной нити, которая указывала бы ему, под какую именно категорию подпадает тот или иной конкретный раздел. Поэтому вот некоторые рекомендации для первого знакомства с теорией источников и с релятивистской квантовой механикой.

Глава 1

Опустить § 4.

Глава 2

В § 4 может быть опущен вывод поведения функции источника при преобразованиях Лоренца из поведения состояний. Из выражения (1.35) достаточно очевидно, что, например, $K(x)$ является скалярной функцией.

В § 2 опустить обобщения вакуумной амплитуды на многочастичный случай. Интерес они представляют главным образом в многочастичных приложениях теории, которые пока еще находятся вне сферы нашего внимания.

§ 5 нужно прочитать только для того, чтобы получить какое-то представление об общем линейном преобразовании источников и его связи со спином, а также о возможности построения произвольных спинов из более элементарных.

Рассмотрение в § 6, начинающееся с формулы (6.24), можно опустить. Достаточно просто понимать, что оператор (6.26) является ковариантным обобщением проекционной матрицы $^1/_2\,(1 + \rho_3)$, отбирающей в системе покоя определенную четность, а тем самым две компоненты, соответствующие спину $^1/_2$.

В § 7 опустить обобщения на многочастичный случай.

В § 8 достаточно познакомиться с анализом спина $^3/_2$.

Глава 3

В § 1, 2 опустить обобщения на многочастичный случай.

В § 3 опустить анализ спинов 3 и $^5/_2$.

В § 4 ограничиться изучением мультиспиноров рангов 2 и 3.

В § 5 ограничиться теми же спинами, что и раньше.

Разбросанные по § 7 рассуждения о произволе в тензоре натяжений достаточно лишь бегло прочитать.

Пространное описание магнитного заряда в § 8, 9 и той роли, которую он может играть в поведении адронов, читать не обязательно. Однако не стоит пренебрегать ни дискуссией с Гарольдом на стр. 304, 305, ни замечаниями о нормировке масс на стр. 312.

Бóльшую часть § 17 читать не обязательно. Особенно это относится к обсуждению нарушенной конформной инвариантности, космологии и спиновой гравитационной связи.

II. ОПЕЧАТКИ В ПЕРВОМ ТОМЕ

Далее приводится (заведомо неполный) перечень опечаток, обнаруженных в первом томе [1]).

1. В формуле (2.24) на стр. 24 ∂N следует заменить на dN.
2. В равенстве (3.30) на стр. 33 вместо t должно стоять i.
3. В первое уравнение (3.40) на стр. 34 вместо $1/dP^0$ входит d/dP^0.
4. В первом уравнении (3.77) на стр. 39 dx нужно заменить на ds.
5. В формулу (4.3) на стр. 41 вместо d_μ входит ∂_μ.
6. Ссылку на формулу (1.45) в первой строке после (1.51) на стр. 66 следует заменить ссылкой на формулу (1.48).
7. На стр. 79, первая строка снизу, на стр. 80, пятая строка снизу, на стр. 81 в формуле (2.51) и на стр. 82 в формуле (2.54) оба значка «плюс» и «минус» должны стоять вне фигурных скобок.
8. В показатель экспоненты во втором выражении (2.97) на стр. 88 входит не P, а p.
9. В формуле (2.110) на стр. 90 пропущен знак равенства.
10. В выражении (3.78) на стр. 103 следует убрать звездочку, стоящую справа.
11. В уравнение (4.56) на стр. 114 вместо $d\varphi^3$ входит $d\varphi^2$.
12. В (5.8) на стр. 115 символ $d\omega^\mu_\nu$ должен записываться как $d\omega^{\mu}{}_{\nu}$.
13. В формуле (5.75) на стр. 124 величину $(2m)!$ в знаменателе нужно заменить на $(2n)!$.
14. Во второй строке после формулы (5.75), стр. 124, $\mu = 2$ нужно читать как $n = 2!$.
15. В равенство (5.107) на стр. 128 вместо x^ν входит y^ν.
16. В выражении (6.71) на стр. 139 разорваны символ функции распространения G_+ и ее аргумент $(x - x')$.
17. Во второй строке (6.120) на стр. 146 γ^0 следует поставить сразу же после $\eta\,(p)^*$.

[1]) См. предисловие редактора перевода.— *Прим. ред.*

18. После формулы (8.84) на стр. 168 ссылку (6.86) нужно заменить на (5.53).
19. В одной из частей равенства (9.6) на стр. 175 следует поменять местами индексы 1 и 2.
20. В левой части равенства (9.71) на стр. 185 под знаком следа в конце необходимо поставить еще одну матрицу γ^0.
21. В первой строке выражения (1.17) на стр. 191 вместо Δ_x должно быть Δ_+.
22. В первом интеграле (1.32) на стр. 193 нужно закрыть квадратные скобки.
23. В одной из частей равенства (1.55) на стр. 195 следует переставить x и x'.
24. В формуле (1.58) на стр. 196 в показателе последней экспоненты числителя нужно закрыть знак модуля.
25. В первое уравнение (2.39) на стр. 209 вместо n входит η.
26. В соотношениях (2.45) на стр. 210 предыдущая опечатка.
27. В равенствах (3.8) на стр. 213 у второй функции G индексы μ и ν должны стоять в обратном порядке.
28. Числитель первого выражения (4.11) на стр. 230 должен возводиться не в квадрат, а в куб.
29. В самом конце формулы (4.31) на стр. 232 ψ нужно заменить на η.
30. В первой дельта-функции (8.68) на стр. 268 x_0' нужно заменить на $x^{0\prime}$.
31. Во второй строке формулы (9.26) на стр. 305 вместо ∂x^μ должно быть δx^μ.
32. В выражение (9.33) на стр. 308 входит не $x(s)$, а $x_a(s)$.
33. В первой строке на стр. 347 ссылку (3.11) следует заменить на (11.12).
34. В конце второй строки (11.88) на стр. 350 стоит не φ, а ψ.
35. В формуле (12.7) первый знак «минус» нужно заменить знаком равенства.
36. Под знаком интеграла (12.71) вместо p^0 должно быть p_b^0.
37. Во втором выражении верхней строки (12.100) на стр. 368 знак перед $2p_1k_1$ следует заменить на противоположный.
38. В знаменателе первого слагаемого (13.116) на стр. 401 m должно возводиться в квадрат.
39. В формуле (14.63) на стр. 412 в знаменателе не хватает k^0.
40. В формулах (14.89) — (14.90) на стр. 416 вместо k_2^μ должно стоять k_2^ν.
41. В формулах (14.126) на стр. 421 и (14.153), (14.154) следует заменить $k_{\text{мин}}$ на $k_{\text{макс}}$.
42. В равенстве (16.68) на стр. 462 вместо римского индекса III должен быть индекс II.
43. В формуле (17.6) на стр. 468 в одном месте переставлены местами круглая скобка и знак «плюс».

44. В третьем слагаемом уравнении (17.10) на стр. 469 вместо ∂ должно быть ∂^λ.
45. Во втором слагаемом во второй строке (17.62) знаменатель S нужно заменить на S^2.

III. ДВА ЗАМЕЧАНИЯ

В заключение мы сделаем два небольших замечания, касающихся некоторых специальных вопросов, которые были затронуты в первом томе.

1. Из анализа соотношения (1-1.44) вовсе не очевидно, что в качестве альтернативной возможности операторы смещений взаимно коммутируют (путем переопределения операторов нельзя изменить числовой коэффициент так, чтобы он из нуля превратился в единицу).

2. В тексте были просто приведены выражения для функций Лагранжа, приводящие к дифференциальным уравнениям первого порядка. Их происхождение можно пояснить на следующем примере, относящемся к случаю спина 0. Исходя из выражения 2-го порядка [формула (3-5.12)]

$$\mathcal{L} = -{}^1/_2\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - {}^1/_2 m^2\varphi^2, \tag{A.1}$$

введем независимое векторное поле φ_μ, добавляя к $\mathcal{L}$ член

$$ {}^1/_2(\varphi^\mu - \partial^\mu\varphi)(\varphi_\mu - \partial_\mu\varphi). \tag{A.2}$$

При этом природа системы не меняется, поскольку, распространив принцип действия и на φ_μ, мы увидим, что $\varphi_\mu - \partial_\mu\varphi$ обращается в нуль (может появиться только член с источником). Но при сложении (A.1) и (A.2) квадраты первых производных сократятся, и мы придем к функции Лагранжа (3-15.16), из которой следуют полевые уравнения первого порядка. Данная процедура является аналогом процедуры, применяемой в обычной квантовой механике, при которой исходят из квадратичного лагранжиана

$$L = {}^1/_2\dot{q}m\dot{q} - v(q), \tag{A.3}$$

где m — несингулярная симметричная матрица, и вводят независимые переменные p, добавляя

$$-{}^1/_2(p - m\dot{q})\,m^{-1}(p - m\dot{q}). \tag{A.4}$$

Сумма (A.3) и (A.4),

$$L = p\dot{q} - H, \quad H = {}^1/_2 pm^{-1}p + v(q), \tag{A.5}$$

приводит к эквивалентному гамильтонову формализму первого порядка.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 5. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА II

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие, просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2. Изд-во «Мир».

Ю. ШВИНГЕР | Частицы, источники, поля (том 2)

Редактор Е. КУРАНСКИЙ. Художник С. БЫЧКОВ. Художественный редактор Е. САМОЙЛОВ. Технический редактор Н. ТОЛСТЯКОВА

Сдано в набор 4/VIII 1975 г. Подписано к печати 25/XII 1975 г. Бум. тип. № 2 $60\times 90^1/_{16}$=15 бум. л. 30 печ. л. Уч.-изд. л. 31,60. Изд. № 2/8144. Цена 2 р. 39 к. Зак. 0983

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР». Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9