Г. СЕГЁ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Перевод с английского
В. С. ВИДЕНСКОГО

С предисловием и дополнениями
Я. Л. ГЕРОНИМУСА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

American Mathematical Society
Colloquium Publications volume XXIII

ORTHOGONAL POLYNOMIALS

by

GABOR SZEGÖ

professor of mathematics
Stanford University

Revised edition

Published by the
American Mathematical Society
531 West 116th Street, New York Cit
1959

Габор Сегё

Ортогональные многочлены

Редактор *Л. А. Соловьева*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакше* Корректор *З. В. Автонеева*

Сдано в набор 23/IX 1961 г. Подписано к печати 14/III 1962 г. Бумага $70\times108^1/_{16}$.
Физ. печ. л. 31,25. Условн. печ. л. 42,81. Уч.-изд. л. 41,73. Тираж 6500 экз.
Цена книги 2 р. 24 к. Зак. 1276.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза. Москва, Трехпрудный пер., 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Широкие круги советских ученых впервые услышали имя выдающегося венгерского математика Габора Сегё в 1925 г., когда вышла в свет замечательная книга Г. Полиа и Г. Сегё «Задачи и теоремы из анализа»; она была переведена на русский язык в 1937 г. и переиздана в 1956 г. Однако ученые, работающие в области теории функций и общей теории ортогональных многочленов, знали труды Г. Сегё в этой области еще с момента, когда они начали появляться в 1917 г.

Теория ортогональных многочленов неизменно привлекала и привлекает к себе внимание математиков и физиков всего мира — достаточно указать, что в библиографии по теории ортогональных многочленов Я. Шохата, Э. Хилле и Дж. Уолша [1], вышедшей в 1940 г., приведено около двух тысяч работ в этой области. Такой интерес к этим вопросам объясняется тем, что система ортогональных многочленов является простейшей — после тригонометрической системы — системой ортогональных функций и поэтому является весьма ценным аппаратом для приближенного представления функций более сложной природы. Во многих случаях разложение функции в ряд ортогональных многочленов возможно при меньших ограничениях, наложенных на неё, чем в случае разложения в ряд Маклорена. Например, если функция регулярна на отрезке $[-1, +1]$, то для сходимости ее ряда Маклорена на всем отрезке она должна быть регулярна в круге $|z| < 1$; в то же время ее разложения в ряд по многочленам Лежандра или Чебышева сходятся на всем отрезке, если только функция регулярна внутри любого малого эллипса с фокусами в точках ± 1.

Основы общей теории ортогональных многочленов были заложены П. Л. Чебышевым. Теория так называемых «классических ортогональных многочленов» (Якоби, Лагерра и Эрмита) была детально разработана еще до Г. Сегё; однако именно Г. Сегё значительно способствовал дальнейшему развитию общей теории и создал принципиально новый метод исследования.

Известно, что для исследования сходимости бесконечных процессов, связанных с теорией ортогональных многочленов, необходимо иметь характеристику поведения этих многочленов при безграничном возрастании их номера, т. е. надо знать так называемые *асимптотические формулы* для них. Эти формулы были известны до Г. Сегё для *классических ортогональных многочленов*, но эти многочлены обладают рядом специальных свойств, позволяющих найти указанные формулы: они являются полиномиальными решениями некоторых дифференциальных уравнений типа Штурма—Лиувилля. Задача нахождения асимптотических формул в общем случае ортогональных многочленов казалась неприступной, так как об этих многочленах неизвестно ничего, кроме веса, относительно которого они ортогональны; именно эта задача — весьма трудная и общая — была решена Г. Сегё в ряде работ, ставших в настоящее время классическими.

Г. Сегё начал с исследования так называемых *форм Тёплица* *); с ними он связал многочлены, ортогональные на единичной окружности. Пользуясь весьма тонкими соображениями теоретико-функционального характера, он нашел для этих многочленов асимптотические формулы сначала во внешней области, а затем на самой окружности. При помощи весьма простого соотношения он перешел от этих многочленов к многочленам, ортогональным на отрезке $[-1, +1]$, и нашел для этих последних многочленов асимптотические формулы как вне отрезка, так и на нем. Наконец, он рассмотрел многочлены, ортогональные на замкнутой аналитической кривой, и решил для них аналогичные задачи.

В 1930 г. С. Н. Бернштейн независимо от Г. Сегё нашел асимптотические формулы для многочленов, ортогональных на отрезке $[-1, +1]$; он применил в отличие от Г. Сегё методы наилучшего приближения функций **); для точек, лежащих на отрезке $[-1, +1]$, он получил результат при меньших ограничениях, чем у Г. Сегё.

Классические труды Г. Сегё и С. Н. Бернштейна послужили мощным стимулом для дальнейших исследований в общей теории ортогональных многочленов. Все многочисленные исследования, появившиеся как в СССР, так и за рубежом за последние 30 лет, в той или иной мере опираются на работы Г. Сегё и С. Н. Бернштейна.

Книга Г. Сегё, перевод которой предлагается вниманию советских читателей, посвящена не только исследованиям, проведенным ее автором,— в книге в систематической и ясной форме изложена вся общая теория ортогональных многочленов со всеми ее основными приложениями. Книге Г. Сегё, первое издание которой вышло в свет в 1939 г., предшествовала лишь монография Я. Шохата [6] (1934 г.) по общей теории ортогональных многочленов, однако в ней большинство результатов приведено без доказательств.

Переводом на русский язык книги «Ортогональные многочлены», написанной одним из крупнейших специалистов в этой области, Издательство физико-математической литературы оказывает большую услугу широким кругам советских научных работников.

Я. Л. Геронимус

---

*) В 1958 г. Г. Сегё вернулся к этим вопросам и написал совместно с У. Гренандером книгу «Тёплицевы формы и их приложения», ИЛ, 1961.

**) Г. Сегё в § 12.5 получил результаты С. Н. Бернштейна.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Последние годы наблюдался значительный прогресс в области ортогональных многочленов — предмете, который находится в тесной связи со многими важными областями анализа. Ортогональные многочлены связаны с тригонометрическими, гипергеометрическими, бесселевыми и эллиптическими функциями, с непрерывными дробями и важными проблемами интерполирования и механических квадратур, а также иногда встречаются в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Кроме того, мы черпаем в теории ортогональных многочленов сравнительно общие и поучительные иллюстрации некоторых положений теории ортогональных систем. Недавно было показано, что некоторые классы ортогональных многочленов имеют значение для квантовой механики и математической статистики.

Теория ортогональных многочленов возникла в процессе исследования некоторых типов непрерывных дробей, называемых дробями Стилтьеса. Частные случаи этих дробей были изучены Гауссом, Якоби, Кристоффелем, Меллером и другими, в то время как более общие вопросы теории этих дробей были изучены П. Л. Чебышевым, Гейне, Стилтьесом и А. А. Марковым.

Несмотря на тесные связи между непрерывными дробями и проблемой моментов, а также несмотря на недавние важные успехи в этом последнем вопросе, от непрерывных дробей как исходного пункта теории ортогональных многочленов постепенно отказались.

В основу было положено само свойство ортогональности, и как раз эта точка зрения принята в изложении предмета в настоящей монографии. Выбрав именно это основное свойство, мы исследуем некоторые специальные ортогональные многочлены, которые были весьма детально изучены независимо от общей теории и в сущности до ее возникновения. По этому поводу мы добавим к именам, упомянутым выше, имена Лапласа, Лежандра, Фурье, Абеля, Лагерра и Эрмита.

Что касается книг по ортогональным многочленам, то мы можем отметить единственное данное до сих пор систематическое изложение в монографии Шохата [6] [1]. Однако ограниченность места принудила автора этого труда быть кратким и, следовательно, лишила его возможности детально рассмотреть многие проблемы, исследование которых особенно продвинулось в последние годы. Таким образом, казалось желательным предпринять новое подробное изложение главных идей в этой области, уделяя, в частности, место недавним исследованиям распределения нулей, асимптотических представлений, разложения в ряды по ортогональным многочленам и исследованиям некоторых вопросов интерполирования и механических квадратур.

В этой монографии мы рассматриваем частично общую теорию ортогональных многочленов, а частично специальные классы этих многочленов.

---

[1]) См. библиографию.

Как и следовало ожидать, мы располагаем более полными сведениями относительно этих специальных классов; в качестве примера мы можем привести классические многочлены, удовлетворяющие линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Если, кроме того, принять во внимание первостепенную важность этих специальных классов для приложений, то не покажется удивительным тот факт, что предлагаемая книга в основном посвящена их изучению. Однако общая теория в том виде, как она излагается в главах XII и XIII, несомненно является наиболее важным достижением последних лет.

В настоящей книге мы не стремились возможно полнее охватить весь материал, относящийся к излагаемому кругу вопросов. Напротив, цель скорее состояла не столько в том, чтобы сделать книгу исчерпывающей, сколько в том, чтобы побудить мысль читателя к творческой работе. Мы стремились выделить главные и характерные методы и указать их связь с некоторыми общими идеями современного анализа. Как правило, предпочтение отдавалось тем вопросам, в которые мы могли сделать какой-нибудь новый, хотя бы и скромный, вклад, или же тем вопросам, которые мы могли представить в новой форме. Таким образом, книга содержит известное число результатов, не публиковавшихся ранее; некоторая часть из них была получена несколько лет тому назад. Например, мы включили исследование чезаровского суммирования ряда по многочленам Якоби в точке на конце отрезка ортогональности (метод, примененный здесь, представляет интерес даже для классического случая ряда по многочленам Лежандра). Далее, мы даем новый и более простой подход к асимптотическим формулам С. Н. Бернштейна для ортогональных многочленов. Упомянем также некоторые менее значительные подробности: упрощения и добавления в асимптотическом исследовании многочленов Якоби и Лагерра, а также в рассмотрении рядов по этим многочленам; исследование случаев, в которых дифференциальное уравнение Якоби имеет только полиномиальные решения; оценка числа нулей общих многочленов Якоби в промежутках $(-\infty, -1]$, $[-1, +1]$, $[+1, +\infty)$; новое доказательство теоремы Гейне — Стилтьеса о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка с коэффициентами и решениями в виде многочленов, и т. п.

Вообще, мы предпочитали рассматривать те проблемы, которые могут быть формулированы и изучены достаточно просто и которые могут быть представлены в более или менее полной форме. Поэтому, в частности, в книге не нашлось места для исключительно интересных вопросов об арифметических и алгебраических свойствах ортогональных многочленов; например, мы не останавливаемся на недавних важных исследованиях И. Шура о неприводимости и свойствах многочленов Лагерра и Эрмита, связанных с этим. Кроме того, мы придавали большое значение замене неполных или частично перекрывающихся теорем, рассеянных в литературе, полными результатами, которые излагались бы при необходимых ограничениях или же ограничениях, свойственных данному вопросу. Мы старались также использовать настолько, насколько это казалось вообще возможным, определенные методы, как, например, метод Штурма в дифференциальных уравнениях (см. §§ 6.3, 6.31, 6.32, 6.83).

Полное изложение теории многочленов Лежандра было неосуществимо и, вероятно, нежелательно в рамках общей теории. Кроме того, уже имеется полное изложение теории сферических и других гармонических функций[1]). Мы выделили и рассмотрели только те свойства многочленов Лежандра, которые были исходным пунктом для обобщений на ультра-

[1]) Например, Гобсон [1].

сферические многочлены, многочлены Якоби или на более общие многочлены. Другим вопросом, который не мог быть включен в книгу, является проблема моментов Стилтьеса, которая опущена, несмотря на ее большой интерес; включение этого вопроса потребовало бы введения большого числа сложных результатов и методов. Не рассматриваются также ортогональные многочлены более чем одной переменной [1]).

В основе книги лежит курс, читанный в Вашингтонском университете в 1935—1936 учебном году. От читателя требуется знание общих идей и методов теории функций вещественного и комплексного переменного. Иногда рассматриваются интегралы Лебега — Стилтьеса и Лебега. Однако в большей части книги эти интегралы не фигурируют и, за исключением очень небольшого числа мест, их специальные свойства не используются.

Задачи в конце книги, как правило, не новые, но они не совпадают с теми, которые имеются в сборнике задач Полиа и Сегё [1]. По своему характеру они более или менее дополняют основной текст и служат в качестве иллюстраций и упражнений; иногда они значительно отличаются друг от друга как по содержанию, так и по методу их решения.

Список литературы неполный; в него включены лишь оригинальные статьи, некоторое количество учебников первостепенной важности и монографии, на которые имеются ссылки в книге.

Вашингтонский университет, 1938. *Г. Сегё*

---

[1]) См. библиографию в работе Джексона [8].

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ПЕРЕСМОТРЕННОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание этой книги, опубликованное в 1939 г., почти полностью разошлось к 1948 г. Тогда был выпущен дополнительный тираж, но по разным причинам без каких-либо изменений в тексте. В течение двадцати лет, прошедших с тех пор, как была завершена подготовка первоначального издания, в этой области имеются значительные достижения. Достаточно беглого просмотра соответствующего отдела «Mathematical Reviews» для того, чтобы убедиться, что эта тема по-прежнему вызывает живой интерес. Систематическое изложение теории ортогональных многочленов было включено в различные современные книги, вышедшие за это время. Мы отметим лишь «Higher Transcendental Functions», изданный редколлегией Bateman Manuscript Project Staff *) (см., в частности, том 2, главу X, изданную профессором А. Эрдейи) и книгу Т р и к о м и «Vorlesungen über Orthogonalreihen» (главы IV—VI).

Недавно совет Американского математического общества предложил автору подготовить пересмотренное издание этой книги, добавив небольшое количество материала, чтобы привести ее в соответствие с современным уровнем. Естественно, что ограниченность времени и места не позволяли включить все новые результаты (или же те старые, которые были пропущены в первом издании). Добавлены только несколько исключительно интересных новых вопросов, а также некоторые детали, которые заслуживают внимания благодаря изяществу метода или оригинальности идеи. Упомянем здесь, в частности, важные многочлены Поллачека; они рассматриваются в добавлении. Кроме того, новый материал включен в виде задач и упражнений. Новые статьи в библиографию также включены с весьма большим выбором. Наконец, были исправлены опечатки и внесены другие незначительные улучшения и добавления.

Станфордский университет, 1958. *Г. Сегё*

---

*) В тексте мы для краткости цитируем эту книгу **Б э й т м а н [1].** (*Прим. перев.*)

ГЛАВА I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Обозначения

Числа в квадратных скобках представляют собой ссылки на библиографию в конце книги. Нумерация параграфов проведена по десятичной системе Пеано. Так, ссылки § 9.5 и (9.5.2) означают соответственно параграф 9.5 главы IX и формулу (9.5.2) той же главы. Аналогично нумеруются теоремы.

Мы применяем символ: $\delta_{nm} = 0$ или 1 в зависимости от того, будет ли $n \neq m$ или $n = m$.

Замкнутый вещественный отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ (a и b конечны) будем обозначать через $[a, b]$. Если же a, или b, или же они оба бесконечны, то в этом случае на соответствующем конце знак равенства исключается и ставится круглая скобка.

Мы употребляем часто для вещественного x символ

$$\operatorname{sign} x = -1,\ 0,\ +1, \tag{1.1.1}$$

соответственно для x отрицательного, равного нулю или положительного; более общим образом, для любого комплексного x мы пишем

$$\operatorname{sign} x = |x|^{-1} x. \tag{1.1.2}$$

Символ $\bar{x}$ означает значение, сопряженное с x, $\Re x$ — вещественную часть и $\Im x$ — мнимую часть комплексного числа x.

Если две последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ обладают тем свойством, что $w_n \neq 0$ и $z_n/w_n \to 1$ при $n \to \infty$, то мы пишем $z_n \cong w_n$. Если $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ комплексны, $w_n \neq 0$ и последовательность $|z_n|/|w_n|$ имеет конечные положительные пределы неопределенности, то мы пишем $z_n \sim w_n$.

Мы употребляем обозначения

$$z_n = O(a_n),\ z_n = o(a_n), \tag{1.1.3}$$

где $a_n > 0$, первое из которых означает, что последовательность z_n/a_n при $n \to \infty$ ограничена, а второе, что z_n/a_n стремится к нулю. Аналогичные обозначения применяются, когда n стремится к пределу, отличному от бесконечности.

Функция $f(x)$ называется возрастающей (строго возрастающей), если $f(x_1) < f(x_2)$ при $x_1 < x_2$; функция $f(x)$ называется неубывающей, если $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ при $x_1 < x_2$. Аналогичная терминология употребляется для убывающих функций.

Пусть $p \geqslant 1$ и пусть $\alpha(x)$ — неубывающая на $[a, b]$ функция, отличная от постоянной. Класс функци $f(x)$, измеримых относительно $\alpha(x)$ и для которых существует интеграл Лебега — Стилтьеса $\int\limits_a^b |f(x)|^p\, d\alpha(x)$ (см. § 1.4), называется $L_\alpha^p(a, b)$. В случае, когда $\alpha(x) = x$, мы применяем обозначение $L^p(a, b)$; в случае, когда $p = 1$ и $\alpha(x)$ — произвольная функция, мы пишем $L_\alpha(a, b)$. Если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу $L_\alpha^p(a, b)$, то этому же классу принадлежит их сумма $f(x) + g(x)$ (см. Качмаж и Штейнгауз [1], п. 1.2.8).

1.11. Неравенства

(1) *Неравенство Коши — Буняковского* *). Пусть $\{a_\nu\}, \{b_\nu\}, \nu = 1, \ldots, n$, — две последовательности комплексных чисел. Тогда

$$\left|\sum_{\nu=1}^n a_\nu b_\nu\right|^2 \leqslant \sum_{\nu=1}^n |a_\nu|^2 \sum_{\nu=1}^n |b_\nu|^2. \tag{1.11.1}$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда существуют два числа λ, μ, не равные оба нулю, такие, что $\lambda a_\nu + \mu \bar{b}_\nu = 0$, $\nu = 1, \ldots, n$.

(2) *Неравенство Буняковского — Шварца* *). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу $L_\alpha^2(a, b)$. Тогда $f(x)\, g(x)$ принадлежит к классу $L_\alpha(a, b)$ и

$$\left|\int_a^b f(x)\, g(x)\, d\alpha(x)\right|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\, d\alpha(x) \int_a^b |g(x)|^2\, d\alpha(x). \tag{1.11.2}$$

(3) *Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.* Если $f(x) > 0$, то

$$\frac{\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)}{\int_a^b d\alpha(x)} \geqslant \exp\left\{\frac{\int_a^b \ln f(x)\, d\alpha(x)}{\int_a^b d\alpha(x)}\right\} \tag{1.11.3}$$

в предположении, что все интегралы существуют и что $\int\limits_a^b d\alpha(x) > 0$ (см. Харди, Литтльвуд и Полиа [1], § 6.18).

(4) *Преобразование Абеля и неравенство Абеля.* Из тождества

$$f_0 g_0 + f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = (f_0 - f_1) G_0 + (f_1 - f_2) G_1 + \ldots$$
$$\ldots + (f_{n-1} - f_n) G_{n-1} + f_n G_n, \tag{1.11.4}$$

где

$$G_\nu = g_0 + g_1 + \ldots + g_\nu, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n, \tag{1.11.5}$$

мы получаем в предположении, что $f_0 \geqslant f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0$ и $|G_\nu| < G$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, неравенство

$$|f_0 g_0 + f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n| \leqslant f_0 G. \tag{1.11.6}$$

*) В английском оригинале неравенства (1.11.1) и (1.11.2) называются соответственно неравенствами Коши и Шварца. (*Прим. перев.*)

(5) *Вторая теорема о среднем в интегральном исчислении.* Пусть $f(x) \geqslant 0$ — невозрастающая функция, а $g(x)$ — непрерывная функция на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b конечны. Тогда

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a+0) \int_a^\xi g(x) dx, \quad a \leqslant \xi \leqslant b. \tag{1.11.7}$$

1.12. Алгебраические и тригонометрические многочлены

Мы будем рассматривать алгебраические многочлены от x вида

$$\rho(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m \tag{1.12.1}$$

с произвольными комплексными коэффициентами $c_0, c_1, \ldots, c_m$. Число m называется степенью, а если $c_m \neq 0$, то точной степенью многочлена $\rho(x)$. Во всем дальнейшем произвольный многочлен степени m будем обозначать через π_m. Если $\rho_0(x), \rho_1(x), \ldots, \rho_n(x)$ — такие произвольные многочлены, что $\rho_m(x)$ имеет точную степень m, то всякий π_n может быть представлен в виде линейной комбинации этих многочленов и притом единственным образом.

Тригонометрический многочлен от θ порядка m имеет вид

$$g(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta + \ldots + a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta, \tag{1.12.2}$$

где коэффициенты — произвольные комплексные числа. Число m называется порядком многочлена $g(\theta)$; m называется его точным порядком, если $|a_m| + |b_m| > 0$. Если все b_μ или все a_μ равны нулю, то $g(\theta)$ называется соответственно косинус-многочленом или синус-многочленом.

Функции $\cos m\theta$ и $\sin(m+1)\theta/\sin\theta$ являются многочленами от $\cos\theta = x$ точной степени m и называются соответственно *многочленами Чебышева первого и второго рода.* Эти многочлены играют фундаментальную роль в последующих рассмотрениях. Полагая

$$\cos m\theta = T_m(\cos\theta) = T_m(x), \quad \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta} = U_m(\cos\theta) = U_m(x), \tag{1.12.3}$$

мы видим, что произвольный косинус-многочлен порядка m является алгебраическим многочленом той же степени от $\cos\theta = x$ и обратно. Синус-многочлен порядка m, разделенный на $\sin\theta$, будет косинус-многочленом порядка $m-1$. Таким образом, синус-многочлен может быть представлен в виде произведения $\sin\theta = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ на многочлен от $\cos\theta = x$.

Многочлены (1.12.3) являются частными случаями так называемых многочленов Якоби (см. главу IV). Они содержат либо только четные, либо только нечетные степени x в зависимости от того, четно или нечетно m. Выражения $\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta/\cos\frac{\theta}{2}$ и $\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta/\sin\frac{\theta}{2}$ являются косинус-многочленами от θ порядка m; они также связаны с многочленами Якоби (см. (4.1.8)).

Мы определяем многочлен, *взаимный* к (1.12.1), соотношением

$$\rho^*(x) = x^m \bar{\rho}(x^{-1}) = \bar{c}_m + \bar{c}_{m-1} x + \bar{c}_{m-2} x^2 + \ldots + \bar{c}_0 x^m. \tag{1.12.4}$$

Если $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — нули многочлена $\rho(x)$, то нулями $\rho^*(x)$ будут $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*$, где $x_\mu^* = \bar{x}_\mu^{-1}$ — точка, получаемая из x_μ путем инверсии относительно единичной окружности $|x| = 1$ в комплексной x-плоскости. Нули при этом засчитываются столько раз, какова их кратность, $0^* = \infty$, $\infty^* = 0$; если ∞ является нулем кратности k, то это означает, что коэффициенты при k высших степенях многочлена $\rho^*(x)$ равны нулю.

1.2. Представление неотрицательных тригонометрических многочленов

Теорема 1.2.1. *Пусть* $g(\theta)$ — *тригонометрический многочлен с вещественными коэффициентами, неотрицательный при всех вещественных значениях* θ. *Тогда существует многочлен* $\rho(z)$ *той же степени, что порядок* $g(\theta)$, *такой, что* $g(\theta)=|\rho(z)|^2$, *где* $z=e^{i\theta}$. *Обратно, если* $z=e^{i\theta}$, *то выражение* $|\rho(z)|^2$ *всегда представляет собой неотрицательный тригонометрический многочлен от* θ *того же порядка, что и степень многочлена* $\rho(z)$.

См. Фейер [5]. Вторая часть утверждения очевидна. Первая часть легко выводится из (1.12.2), если учесть, что $z^k+z^{-k}=2\cos k\theta$, $z^k-z^{-k}=2i\sin k\theta$. Действительно, мы получим $g(\theta)=z^{-m}G(z)$, где $G(z)$ есть π_{2m}, причем $G^*(z)=G(z)$. Далее, те нули $G(z)$, которые отличны от 0 и от ∞ и модули которых не равны единице, могут быть объединены в пары z_μ, z_μ^*, $0<|z_\mu|<1$, где z_μ^* имеет то же значение, что в § 1.2. Кроме того, каждый вещественный нуль θ_0 многочлена $g(\theta)$ имеет четную кратность, а $e^{i\theta_0}$ является нулем той же кратности многочлена $G(z)$. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} &G(z)=cz^{2k}\prod_{\mu=1}^{\sigma}(z-z_\mu)(z-z_\mu^*)\prod_{\nu=1}^{\tau}(z-\zeta_\nu)^2,\\ &0<|z_\mu|<1,\quad |\zeta_\nu|=1,\quad k+\sigma+\tau=m. \end{aligned}\right\} \tag{1.2.1}$$

Так как $g(\theta)=|g(\theta)|=|G(z)|$, $z=e^{i\theta}$ и $|z-z_\mu|=|z_\mu|\,|z-z_\mu^*|$, $z=e^{i\theta}$, то теорема доказана.

Указанное представление, однако, не единственно. В самом деле, если α — произвольный нуль $\rho(z)$, то многочлен $\rho(z)(1-\bar{\alpha}z)/(z-\alpha)$ реализует другое представление. Таким образом, предполагая, что $g(\theta)\not\equiv 0$, мы можем постепенно удалить все нули из круга $|z|<1$ и получим следующую теорему:

Теорема 1.2.2. *Пусть* $g(\theta)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1.2.1 *и* $g(\theta)\not\equiv 0$. *Тогда существует такое представление* $g(\theta)=|h(e^{i\theta})|^2$, *где* $h(z)$ — *многочлен той же степени, что и порядок* $g(\theta)$, *причем* $h(z)\neq 0$ *в круге* $|z|<1$ *и* $h(0)>0$. *Этот многочлен определен однозначно. Если* $g(\theta)$ *есть косинус-многочлен, то коэффициенты* $h(z)$ *вещественны.*

Обобщение этого нормализованного представления (его распространение на некоторые классы неотрицательных функций $g(\theta)$) имеет важное значение при исследовании асимптотического поведения ортогональных многочленов (см. главы X—XIII).

1.21. Теорема Люкача относительно неотрицательных многочленов

(1) Теорема 1.21.1 (теорема Люкача). *Пусть* $\rho(x)$ — *неотрицательный на отрезке* $[-1, 1]$ *многочлен степени* m. *Тогда* $\rho(x)$ *может быть представлен в виде*

$$\rho(x)=\begin{cases} A^2(x)+(1-x^2)B^2(x), & \text{если } m \text{ четно},\\ (1+x)C^2(x)+(1-x)D^2(x), & \text{если } m \text{ нечетно}. \end{cases} \tag{1.21.1}$$

Здесь $A(x), B(x), C(x), D(x)$ — *такие вещественные многочлены, что степень выражений, стоящих в правой части* (1.21.1), *не превосходит* m.

Доказательство может быть основано на теореме 1.2.2. Мы имеем

$$\rho(\cos\theta)=|h(e^{i\theta})|^2=|e^{-im\theta/2}h(e^{i\theta})|^2,$$

где $h(z)$ есть π_m с вещественными коэффициентами. Но выражения

$$\cos m\theta,\quad \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta},\quad \frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}},\quad \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \tag{1.21.2}$$

все суть π_m относительно $\cos\theta$ (см. § 1.12), следовательно,

$$e^{-im\frac{\theta}{2}}h(e^{i\theta})=\begin{cases} A(\cos\theta)+i\sin\theta\, B(\cos\theta), & \text{если } m \text{ четно},\\ \sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\, C(\cos\theta)+i\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\, D(\cos\theta), & \text{если } m \text{ нечетно},\end{cases}$$

где степени $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ суть соответственно $m/2$, $m/2-1$, $(m-1)/2$, $(m-1)/2$.

(2) Следующая теорема имеет более простой характер:

Теорема. 1.21.2. *Всякий многочлен от x, неотрицательный при всех вещественных x, может быть представлен в виде $A^2(x)+B^2(x)$. Всякий многочлен, неотрицательный при $x\geqslant 0$, может быть представлен в виде*) $A^2(x)+B^2(x)+x[C^2(x)+D^2(x)]$. Здесь $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ — вещественные многочлены, степень каждого из слагаемых не превосходит степени данного многочлена.*

Эти представления могут также быть записаны соответственно в виде $|P(x)|^2$ и $|P(x)|^2+x|Q(x)|^2$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с комплексными коэффициентами; относительно их степеней справедливо предыдущее замечание.

В связи с этим параграфом см. Полиа и Сегё [1], часть II, отдел VI, задачи 44, 45, 47.

1.22. Теоремы С. Н. Бернштейна

Теорема 1.22.1. *Если $g(\theta)$ — тригонометрический многочлен порядка m, удовлетворяющий при любом вещественном θ неравенству $|g(\theta)|\leqslant 1$, то $|g'(\theta)|\leqslant m$.*

Эта теорема принадлежит С. Н. Бернштейну**) (см. М. Рисс [1]). В последнем неравенстве число m не может быть заменено меньшим, в чем легко убедиться, полагая $g(\theta)=\cos m\theta$.

Заслуживает внимания следующий частный случай этой теоремы:

Теорема 1.22.2. *Пусть $\varrho(z)$ будет π_n и удовлетворяет неравенству $|\varrho(z)|\leqslant 1$ при комплексных z в круге $|z|\leqslant 1$, тогда $|\varrho'(z)|\leqslant m$, $|z|\leqslant 1$.*

Относительно этой теоремы см. также Сас [1], стр. 516—517. Наконец, отметим такое следствие из теоремы 1.22.1:

Теорема 1.22.3. *Пусть $\varrho(x)$ будет π_m, который удовлетворяет неравенству $|\varrho(x)|\leqslant 1$ на отрезке $-1\leqslant x\leqslant +1$. Тогда*

$$|\varrho'(x)|\leqslant(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}m.$$

Это вытекает из теоремы 1.22.1, примененной к $g(\theta)=\varrho(\cos\theta)$.

---

*) Можно доказать, что в этом случае многочлен представим в виде $E^2(x)+xF^2(x)$, где $E(x)$ и $F(x)$—вещественные многочлены. См. В. С. Виденский, «Изв. АН СССР», серия матем., 15 (1951), 401—420. (*Прим. перев.*)

**) Собрание сочинений, том I, стр. 26. (*Прим. перев.*)

1.3. Приближение многочленами

(1) Теорема 1.3.1 (теорема Вейерштрасса). *Функция, непрерывная на конечном замкнутом отрезке, может быть приближена с заданной точностью многочленом. Непрерывная функция вещественной переменной с периодом 2π может быть сколь угодно хорошо приближена тригонометрическим многочленом.*

Относительно этой теоремы мы отсылаем читателя к книге Джексона [4] *). Если 2π — периодическая функция, о которой идет речь во второй части теоремы,—четна (соответственно нечетна), то в качестве приближающих тригонометрических многочленов могут быть выбраны косинус-многочлены (соответственно синус-многочлены).

Теорема 1.3.2. *Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности данной функции $f(x)$, непрерывной на конечном отрезке $[a, b]$, т. е.*

$$\omega(\delta)=\max|f(x')-f(x'')| \text{ при } |x'-x''|\leqslant\delta. \tag{1.3.1}$$

Тогда для каждого m мы можем указать такой многочлен $\varrho(x)$ степени m, что на данном отрезке длины l будем иметь

$$|f(x)-\varrho(x)|<A\omega\left(\frac{l}{m}\right). \tag{1.3.2}$$

В случае периодической функции $f(\theta)$ с периодом 2π можно найти такой тригонометрический многочлен $g(\theta)$ порядка m, для которого справедливо неравенство

$$|f(\theta)-g(\theta)|<B\omega\left(\frac{2\pi}{m}\right). \tag{1.3.3}$$

Здесь A и B — абсолютные константы.

В связи с этим см. Джексон [4], стр. 7, 15.

Теорема 1.3.3. *Пусть $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка μ, $\mu\geqslant 1$, на конечном отрезке $[a, b]$, пусть $\omega_\mu(\delta)$ означает модуль непрерывности $f^{(\mu)}(x)$. Тогда существует многочлен степени $m+\mu$ такой, что*

$$\left.\begin{aligned} |f(x)-\varrho(x)|&<C\left(\frac{l}{m}\right)^{\mu}\omega_\mu\left(\frac{l}{m}\right),\\ |f'(x)-\varrho'(x)|&<C\left(\frac{l}{m}\right)^{\mu-1}\omega_\mu\left(\frac{l}{m}\right),\quad l=b-a,\end{aligned}\right\} \tag{1.3.4}$$

где C — константа, зависящая только от μ.

Аналогичные неравенства могут быть получены для производных $f''(x), \ldots, f^{(\mu)}(x)$.

Относительно первого из неравенств (1.3.4) см. Джексон [4], стр. 18, теорема VIII. Для доказательства второго неравенства мы установим сперва следующую лемму:

Лемма. *Пусть $f(\theta)$ — периодическая функция с периодом 2π, удовлетворяющая условию Липшица*

$$|f(\theta_1)-f(\theta_2)|<\lambda|\theta_1-\theta_2|, \tag{1.3.5}$$

где λ — положительная постоянная. Тогда для каждого m существует такой тригонометрический многочлен $g(\theta)$ порядка m, что

$$|f(\theta)-g(\theta)|<\frac{D'\lambda}{m},\quad |g'(\theta)|<D''\lambda, \tag{1.3.6}$$

где D' и D'' — абсолютные константы.

---

*) См. также монографии В. Л. Гончарова «Теория интерполирования и приближения функций» Н. И. Ахиезера [3], И. П. Натансона «Конструктивная теория функций» и А. Ф. Тимана «Теория приближения функций действительного переменного». (*Прим. перев.*)

Относительно первого из неравенств (1.3.6) см. Джексон [4], стр. 2—6. Если мы используем его обозначения и рассуждения, то нам остается показать, что выражение $|\lambda^{-1} I'_m(\theta)|$ ограничено. Имеем

$$I'_m(\theta) = -\frac{h_m}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \{f(\theta + 2u) - f(\theta)\} F'_m(u)\, du \tag{1.3.7}$$

и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\,|F_m(u)|\,du = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \left| \frac{\sin mu}{m \sin u} \right|^3 \left| \frac{d}{du} \frac{\sin mu}{m \sin u} \right| du =$$

$$= O(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \left| \frac{\sin mu}{mu} \right|^3 \left| \frac{d}{du} \frac{\sin mu}{mu} \right| du +$$

$$+ O(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \left| \frac{\sin mu}{mu} \right|^3 \left| \frac{\sin mu}{mu} \right| du, \tag{1.3.8}$$

так как $u/\sin u$ — аналитическая функция на замкнутом отрезке $[0, \pi/2]$. Полагая $mu = x$, можем написать

$$O(m^{-1}) \int_0^{\infty} x \left| \frac{\sin x}{x} \right|^3 \left| \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{x} \right| dx + O(m^{-2}) \int_0^{\infty} x \left| \frac{\sin x}{x} \right|^4 dx = O(m^{-1}).$$

Теперь мы используем, что $h_m = O(m)$ (см. цитированное место).

Аналог этой леммы для многочленов может быть выведен обычным образом. При этом в правой части первого из неравенств (1.3.6) появляется множитель $b - a = l$. Удобно преобразовать отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ в $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$ (вместо отрезка $-1 \leqslant y \leqslant 1$, см. Джексон [4], стр. 14), полагая функцию равной константе на отрезках $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Для того чтобы доказать теорему 1.3.3, мы применяем теорему VIII Джексона [4], стр. 18, к $f'(x)$. (Относительно этого рассуждения см. цитированное место, стр. 16.) Мы имеем

$$|f'(x) - q(x)| < K\left(\frac{l}{m}\right)^{\mu-1} \omega_\mu\left(\frac{l}{m}\right),$$

где $q(x)$ есть надлежаще выбранный $\pi_{m+\mu-1}$. Применяя лемму к функции

$$f(x) - \int_a^x q(t)\, dt,$$

которая удовлетворяет условию Липшица с константой

$$\lambda = K\left(\frac{l}{m}\right)^{\mu-1} \omega_\mu\left(\frac{l}{m}\right),$$

мы получим такой π_m, обозначим его через $\sigma(x)$, что

$$\left| f(x) - \int_a^x q(t)\, dt - \sigma(x) \right| < K' \left(\frac{l}{m}\right)^{\mu} \omega_\mu\left(\frac{l}{m}\right),$$

$$|\sigma'(x)| < K''\left(\frac{l}{m}\right)^{\mu-1} \omega_\mu\left(\frac{l}{m}\right).$$

Остается положить

$$\int_a^x q(t)\,dt + \sigma(x) = \varrho(x),$$

и теорема доказана.

Постоянные K, K', K'' в трех последних неравенствах зависят только от μ.

(2) Теорема 1.3.4 (теорема Рунге — Уолша). *Пусть $f(x)$ — аналитическая функция, регулярная внутри жордановой кривой C и непрерывная в замкнутой области, ограниченной C. Тогда $f(x)$ может быть приближена с произвольной точностью многочленами.*

См. Уолш ([1], стр. 36). Эта теорема была доказана Рунге в предположении, что $f(x)$ аналитична на контуре C; общий случай принадлежит Уолшу.

Нам понадобится одно дополнение к предыдущей теореме, принадлежащее Уолшу ([1], стр. 75—76). Пусть C — снова жорданова кривая в комплексной x-плоскости. Пусть $x = \varphi(z)$ — функция, отображающая внешность C на внешность единичного круга ($|z| > 1$), причем точка $x = \infty$ переходит в точку $z = \infty$. Тогда окружность $|z| = R$, $R > 1$, соответствует некоторой кривой C_R, именуемой *линией уровня*.

Теорема 1.3.5. *Пусть $f(x)$ — аналитическая функция внутри и на границе C и пусть C_R — наибольшая линия уровня, внутри которой $f(x)$ регулярна. Тогда произвольному r, $0 < r < R$, соответствует такая константа $M > 0$, что для всякого m существует многочлен $\varrho_m(x)$ степени m, для которого выполняется неравенство*

$$|f(x) - \varrho_m(x)| < Mr^{-m}, \quad x \in C. \tag{1.3.9}$$

Это справедливо и в том случае, когда C — жорданова дуга, например отрезок $-1 \leqslant x \leqslant +1$. В последнем случае C_R — эллипс с фокусами ± 1, а R — сумма его полуосей (см. § 1.9).

1.4. Ортогональность; весовая функция; векторы в функциональном пространстве

(1) *Пусть $\alpha(x)$ будет неубывающей функцией на $[a, b]$, которая отлична от константы.* Если $a = -\infty$ (или $b = +\infty$), то мы предполагаем, что предел $\alpha(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} \alpha(x)$ (или соответственно $\alpha(+\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x)$) будет конечен. *Скалярное произведение* двух вещественных функций $f(x)$ и $g(x)$ при x, изменяющемся на отрезке $[a, b]$, определяется с помощью интеграла Лебега — Стилтьеса

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,d\alpha(x), \tag{1.4.1}$$

где предполагается, что $f(x)\,g(x) \in L_\alpha(a, b)$. Это имеет место, в частности, если обе функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны или обе функции имеют ограниченную вариацию, а отрезок $[a, b]$ конечен. Для фиксированной функции $\alpha(x)$ *ортогональность относительно распределения* $d\alpha(x)$ определяется соотношением

$$(f, g) = 0. \tag{1.4.2}$$

Мы будем употреблять выражение «$f(x)$ ортогональна к $g(x)$».

Если мы допустим, что $f(x)$ и $g(x)$ — комплексные функции, то определение скалярного произведения (1.4.1) должно быть изменено следующим образом:

$$(f, g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,d\alpha(x). \qquad (1.4.3)$$

Учитывая это изменение в определении (f, g), мы сохраняем определение ортогональности посредством (1.4.2).

(Относительно определения интеграла Лебега — Стилтьеса см., например, Гильдебрандт [1] *), стр. 185—194. Это определение, даваемое обычно для монотонной функции $\alpha(x)$, легко распространяется на случай, когда $\alpha(x)$ — функция с ограниченной вариацией.

Статья Гильдебрандта*) ([1], стр. 177—178) содержит также необходимые сведения относительно интеграла Римана — Стилтьеса.

В дальнейшем мы иногда будем пользоваться следующей формулой интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)+\int_a^b \alpha(x)\,df(x)=f(b)\,\alpha(b)-f(a)\,\alpha(a), \qquad (1.4.4)$$

где a и b конечны, $\alpha(x)$ — функция с ограниченной вариацией, а $f(x)$ непрерывна. Интегралы понимаются в смысле Римана — Стилтьеса.

Термин «распределение», употребленный выше, возник из классической интерпретации $d\alpha(x)$ как непрерывного или дискретного распределения масс на отрезке $[a, b]$; отрезку $[x_1, x_2]\subset[a, b]$ приписывается масса, равная $\alpha(x_2)-\alpha(x_1)$.)

(2) Если функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна, то скалярное произведение (1.4.1) может быть записано в виде

$$(f, g)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,w(x)\,dx, \qquad (1.4.5)$$

где интеграл предполагается существующим в смысле Лебега. *Здесь* $w(x)$ — *неотрицательная функция, измеримая в смысле Лебега и такая, что*

$$\int_a^b w(x)\,dx>0.$$

Мы будем называть $w(x)$ *весовой функцией* на данном отрезке. В литературе употребляется иногда термин «нормирующая функция»[1]). В случае распределения $w(x)\,dx$ общая масса, соответствующая отрезку $[x_1, x_2]$, будет, очевидно,

$$\int_{x_1}^{x_2} w(x)\,dx.$$

В дальнейшем мы будем называть распределение $d\alpha(x)$ *распределением стилтьесовского типа.*

Мы применяем то же понятие распределения и весовой функции на кривой или на дуге в комплексной плоскости, например на единичной окружности. При этом мы заменяем переменную x вещественным

*) См. также Э. Камке «Интеграл Лебега—Стилтьеса». (*Прим. перев.*)

[1]) Употребляются также термины: функция обложения, характеристическая функция (В. А. Стеклов), вес (С. Н. Бернштейн).

параметром, с помощью которого задается рассматриваемая кривая или дуга (см. главы XI и XVI).

(3) Пусть $d\alpha(x)$ или $w(x)\,dx$, $a \leqslant x \leqslant b$, будет некоторое фиксированное распределение, и рассмотрим «векторное» пространство, определенное последовательностью вещественных функций $f(x)$, принадлежащих $L_\alpha^2(a, b)$. Скалярное произведение двух векторов (функций) $f(x)$ и $g(x)$ определено по формуле (1.4.1), а длина (величина, норма) вектора $f(x)$ — равенством

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}.$$

Векторы (функции), для которых $\|f\| = 0$, называются нулевыми векторами (нулевыми функциями); векторы (функции), для которых $\|f\| = 1$, называются нормированными. Если $f(x)$ не является нулевой функцией, то $\lambda f(x)$ будет нормированной функцией при надлежаще выбранной постоянной λ, которая с точностью до знака определяется единственным образом. Если функции $\alpha(x)$ и $w(x)$ удовлетворяют условиям, указанным в (1) и (2), то в обоих случаях существуют функции положительной длины. Во втором случае $f(x)$ будет нулевой функцией тогда и только тогда, когда произведение $f^2(x)\,w(x)$ или, что то же самое, $f(x)\,w(x)$ равно нулю почти всюду на отрезке $[a, b]$. Если $f(x)$ и $w(x)$ интегрируемы в смысле Римана, то $f(x)$ является нулевой функцией при условии, что $f(x)\,w(x)$ равно нулю в каждой точке непрерывности.

Отметим неравенство Буняковского — Шварца (см. (1.11.2)):

$$|(f, g)| \leqslant \|f\|\,\|g\|; \tag{1.4.6}$$

равенство в (1.4.6) имеет место тогда и только тогда, когда $\lambda f(x) + \mu g(x)$ является нулевой функцией, где λ и μ — постоянные, не равные нулю одновременно.

Конечная последовательность функций $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_l(x)$ называется линейно независимой, если равенство

$$\|\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_l f_l(x)\| = 0$$

имеет место только при

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_l = 0.$$

Очевидно, что в такую последовательность не может входить нулевая функция. Счетная последовательность функций ($l = \infty$) называется линейно независимой, если предыдущее условие выполняется для любой ее конечной подпоследовательности.

Распространение этих понятий на комплексное векторное пространство не представляет трудности. При этом скалярное произведение определяется формулой (1.4.3).

Относительно аксиоматического обоснования этих понятий см. Стон [1], глава I.

1.5. Замкнутость; интегральные приближения

(1) Определение. *Пусть $p \geqslant 1$ и пусть $\alpha(x)$ — неубывающая на $[a, b]$ функция, отличная от константы*[1]. *Пусть функции*

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{1.5.1}$$

принадлежат классу $L_\alpha^p(a, b)$. Система (1.5.1) *называется замкнутой в $L_\alpha^p(a, b)$, если для всякой функции $f(x) \in L_\alpha^p(a, b)$ и любого $\varepsilon > 0$*

[1]) См. замечание в начале § 1.4, (1).

существует функция вида

$$k(x) = c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x), \tag{1.5.2}$$

такая, что

$$\int_a^b |f(x) - k(x)|^p \, d\alpha(x) < \varepsilon. \tag{1.5.3}$$

Относительно этого определения см. Качмаж и Штейнгауз [1], п. 2.4.1.

(2) Теорема 1.5.1. *Пусть p и $\alpha(x)$ имеют то же значение, что в предыдущем определении, и пусть функция $f(x) \in L^p_\alpha(a, b)$, причем a и b конечны. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую непрерывную функцию $F(x)$, что*

$$\int_a^b |f(x) - F(x)|^p \, d\alpha(x) < \varepsilon. \tag{1.5.4}$$

Для функций, интегрируемых в смысле Римана при $\alpha(x) = x$, утверждение следует благодаря хорошо известным рассуждениям из определения интеграла. В общем случае удобно применить метод Юнга приближения интегралов Лебега — Стилтьеса (см. Гильдебрандт [1], стр. 190).

Применяя теорему Вейерштрасса, получаем следующее предложение:

Теорема 1.5.2. *Пусть p, a, b, $\alpha(x)$, $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.5.1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $\varrho(x)$, что*

$$\int_a^b |f(x) - \varrho(x)|^p \, d\alpha(x) < \varepsilon. \tag{1.5.5}$$

Это означает замкнутость системы

$$\{x^n\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.5.6}$$

в классе $L^p_\alpha(a, b)$. В дальнейшем мы будем, в частности, рассматривать случаи $p = 1$ и $p = 2$.

Аналогичное утверждение справедливо относительно приближения в среднем функции $f(x)$ тригонометрическими многочленами, которое эквивалентно замкнутости системы

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{1.5.7}$$

в классе $L^p_\alpha(-\pi, +\pi)$.

(3) Часто теорема 1.5.2 применяется в более точной форме:

Теорема 1.5.3. *Пусть p, a, b, $\alpha(x)$, $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.5.1 и пусть $f(x)$ — вещественная функция. Тогда можно указать многочлен $\varrho(x)$, который удовлетворяет неравенству (1.5.5) и такой, что его величина заключена между верхней и нижней границами функции $f(x)$.*

Отметим также следующее свойство интегралов Римана — Стилтьеса, которое играет роль в главе X:

Теорема 1.5.4. *Пусть вещественная функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$, где a и b конечны, $\alpha(x)$ — неубывающая функция, и пусть существует интеграл Римана — Стилтьеса*

$$\int_a^b f(x) \, d\alpha(x).$$

При любом $\varepsilon > 0$ существуют такие многочлены $\varrho(x)$ и $P(x)$, что

$$\inf f(x) - \varepsilon \leqslant \varrho(x) \leqslant f(x) \leqslant P(x) \leqslant \sup f(x) + \varepsilon \tag{1.5.8}$$

и

$$\int_a^b \{P(x) - \varrho(x)\}\, d\alpha(x) < \varepsilon. \tag{1.5.9}$$

См. (при $\alpha(x) = x$) Г. Полиа и Г. Сегё [1], часть I, отдел II, задача 137.

Аналогичные утверждения справедливы для приближений тригонометрическими многочленами. Если $f(x)$ — четная функция $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, то в качестве приближающего тригонометрического многочлена может быть выбран косинус-многочлен.

1.6. Линейные функционалы

(1) Пусть $\mathfrak{U}(f)$ — функционал, ставящий в соответствие каждой непрерывной на конечном отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ число $\mathfrak{U}(f)$. Этот функционал называется *аддитивным*, если

$$\mathfrak{U}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathfrak{U}(f_1) + c_2 \mathfrak{U}(f_2), \tag{1.6.1}$$

где c_1, c_2 — постоянные, а $f_1(x)$, $f_2(x)$ — произвольные непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции. Функционал называется непрерывным, если $\mathfrak{U}(f_n) \to \mathfrak{U}(f)$, когда $f_n(x) \to f(x)$ равномерно на $[a, b]$. Аддитивный и непрерывный функционал называется *линейным*.

Функционал $\mathfrak{U}(f)$ называется ограниченным, если существует такая постоянная M, что $|\mathfrak{U}(f)| \leqslant M \max |f|$. Нижняя грань констант M называется *нормой* $\mathfrak{U}(f)$. Класс аддитивных и ограниченных функционалов совпадает с классом линейных функционалов.

В соответствии с теоремой Ф. Рисса [1] всякий линейный функционал может быть записан в виде

$$\mathfrak{U}(f) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x), \tag{1.6.2}$$

где $\alpha(x)$ — функция ограниченной вариации, определенная на $[a, b]$ и не зависящая от $f(x)$. Очевидно, что (1.6.2) всегда представляет некоторый линейный функционал. В (1.6.2) функция $\alpha(x)$ всегда может быть так нормирована, что либо $\alpha(x-0) \leqslant \alpha(x) \leqslant \alpha(x+0)$, либо $\alpha(x+0) \leqslant \alpha(x) \leqslant \alpha(x-0)$ при $a < x < b$. Тогда норма $\mathfrak{U}(f)$ будет равна интегралу

$$\int_a^b |d\alpha(x)|,$$

выражающему полную вариацию $\alpha(x)$.

(2) Пусть $K(x)$ — данная непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x) K(x)\, dx \tag{1.6.3}$$

определяет линейный функционал. Интеграл Дирихле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \frac{\sin\{(2n+1)(x-x_0)/2\}}{\sin\{(x-x_0)/2\}}\, dx, \tag{1.6.4}$$

где n — целое неотрицательное число, а x_0 — произвольная фиксированная точка, является частным случаем (1.6.3). Он представляет собой n-ю частную сумму разложения в ряд Фурье функции $f(x)$ в точке $x=x_0$. Другой важный пример — интеграл Фейера:

$$\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\left(\frac{\sin\{(n+1)(x-x_0)/2\}}{\sin\{(x-x_0)/2\}}\right)^2 dx, \qquad (1.6.5)$$

который представляет n-ю чезаровскую среднюю ряда Фурье функции $f(x)$.

Дальнейший пример линейного функционала мы получим с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа

$$L(x)=L(f;\ x)=f(x_0)\,l_0(x)+f(x_1)\,l_1(x)+\ldots+f(x_n)\,l_n(x), \qquad (1.6.6)$$

где $l_0(x),\ l_1(x),\ \ldots,\ l_n(x)$ — фундаментальные многочлены, соответствующие узлам интерполяции $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ (см. главу XIV). При фиксированном значении $x=\xi$ выражение $L(f;\ \xi)$ является линейным функционалом от $f(x)$. Наконец, общая формула механических квадратур

$$Q(f)=\lambda_0 f(x_0)+\lambda_1 f(x_1)+\ldots+\lambda_n f(x_n) \qquad (1.6.7)$$

также представляет пример линейного функционала; здесь $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots$ $\ldots,\ \lambda_n$ — так называемые коэффициенты Котеса (см. главу XV).

(3) Рассмотрим последовательность линейных функционалов

$$\mathfrak{U}_n(f)=\int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x), \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (1.6.8)$$

и функционал

$$\mathfrak{U}(f)=\int_a^b f(x)\,d\alpha(x), \qquad (1.6.9)$$

где $\alpha_n(x)$ нормированы, как в (1.6.2). Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 1.6. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{U}_n(f)=\mathfrak{U}(f),$$

где $f(x)$ — произвольная непрерывная функция, состоит в том, чтобы одновременно выполнялись два следующих соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\mathfrak{U}_n(x^k)=\mathfrak{U}(x^k), && k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\\ &\int_a^b |d\alpha_n(x)|<A, && n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (1.6.10)$$

Кроме того, *если второе из условий* (1.6.10) *не выполнено, то существует такая непрерывная функция $f(x)$, для которой последовательность $\{\mathfrak{U}_n(f)\}$ не ограничена.*

Эта важная теорема принадлежит Хелли [1], стр. 268—271; см. также Банах [1], стр. 123. Первое из условий (1.6.10) означает справедливость предельного соотношения для произвольного многочлена. Второе условие (1.6.10) означает, что полная вариация функций $\alpha_n(x)$ равномерно ограничена.

(4) Пусть $b-a=2\pi$ и пусть $f(x),\ \alpha_n(x)$ и $\alpha(x)$ будут периодическими функциями с периодом 2π. Тогда первое из условий (1.6.10) должно быть

заменено следующим:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \mathfrak{U}_n(\cos kx) = \mathfrak{U}(\cos kx),\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\\ &\lim_{n\to\infty} \mathfrak{U}_n(\sin kx) = \mathfrak{U}(\sin kx),\end{aligned}\right\} \tag{1.6.11}$$

Одним из наиболее важных приложений предыдущих рассмотрений является теория «сингулярных интегралов» Лебега

$$\mathfrak{U}_n(f) = \int_a^b f(x) K_n(x)\,dx, \tag{1.6.12}$$

где $\{K_n(x)\}$ — данная последовательность непрерывных функций. В этом случае основной интерес представляет нахождение необходимых и достаточных условий для того, чтобы $\mathfrak{U}_n(f) \to f(x_0)$, где x_0 — фиксированная точка отрезка $[a, b]$, а $f(x)$ — произвольная непрерывная функция. В соответствии с теоремой Хелли это должно иметь место, если $f(x)$ — произвольный многочлен (или тригонометрический многочлен в периодическом случае) и так называемые константы Лебега (которые являются нормами $\mathfrak{U}_n(f)$) ограничены в своей совокупности:

$$\int_a^b |K_n(x)|\,dx < A. \tag{1.6.13}$$

(См. Л е б е г [1], [2], в частности пп. 45, 46, стр. 86—88; см. также Х а а р [1]).

Для интеграла Дирихле условие (1.6.13) не выполнено; следовательно, существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится в данной точке (см. Д ю Б у а Р е й м о н д [1]; Л е б е г [2], глава IV, стр. 84—89). Это условие, однако, выполнено для интеграла Фейера (1.6.5), что обеспечивает суммируемость ряда Фурье произвольной непрерывной функции методом Чезаро (см. Ф е й е р [2], в частности стр. 60). Это же имеет место для чезаровских средних второго порядка рядов по многочленам Лежандра (см. Ф е й е р [4]).

Относительно применения теоремы Хелли к теории интерполирования и к механическим квадратурам см. главы XIV и XV.

1.7. Гамма-функция

Интеграл Эйлера второго рода

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt \tag{1.7.1}$$

определяет гамма-функцию $\Gamma(z)$ при $\Re\, z > 0$. С помощью аналитического продолжения мы получаем мероморфную функцию, которая не имеет нулей, с простыми полюсами в точках $z = 0, -1, -2, \ldots$ Справедливы следующие функциональные уравнения:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{1.7.2}$$

Другая важная формула:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(nz), \tag{1.7.3}$$

где n — натуральные числа. В дальнейшем нам понадобятся в основном случаи $n=2$ и $n=3$.

Интеграл Эйлера первого рода

$$B(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p>0, \quad q>0, \tag{1.7.4}$$

может быть выражен через гамма-функцию следующим образом:

$$B(p, q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.7.5}$$

Интеграл (1.7.4) существует также при комплексных p и q с положительными вещественными частями; формула (1.7.5) остается для них справедливой. С помощью (1.7.5) $B(p, q)$ может быть аналитически продолжена на случай произвольных комплексных p и q (см. Уиттекер и Ватсон [1], глава 12).

1.71. Функции Бесселя

(1) Функция Бесселя первого рода порядка α определяется равенством

$$J_\alpha(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2\nu}}{\nu!\,\Gamma(\nu+\alpha+1)}. \tag{1.71.1}$$

Очевидно, что $z^{-\alpha}J_\alpha(z)$ — четная целая функция. Здесь α — произвольное вещественное число. Если α — целое отрицательное число, то $\{\Gamma(\nu+\alpha+1)\}^{-1}$ нужно заменить на 0, когда $\nu+\alpha+1\leqslant 0$. Тогда мы получаем соотношение $J_\alpha(z)=(-1)^\alpha J_{-\alpha}(z)$. Если же α — не целое число, то $J_\alpha(z)$ и $J_{-\alpha}(z)$ линейно независимы. Отметим частный случай

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\cos z, \qquad J_{\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\sin z. \tag{1.71.2}$$

Функция (1.71.1) удовлетворяет дифференциальному уравнению Бесселя

$$y''+z^{-1}y'+(1-\alpha^2z^{-2})\,y=0, \quad y=J_\alpha(z). \tag{1.71.3}$$

Для неотрицательных целых α мы вводим функции Бесселя второго рода:

$$\begin{aligned}Y_\alpha(z)=\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{z}{2}\right)J_\alpha(z)-\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\alpha-1}\frac{(\alpha-\nu-1)!\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu-\alpha}}{\nu!}-\\ -\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu+\alpha}}{\nu!\,(\nu+\alpha)!}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{1}+\right.\\ \left.+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu+\alpha}\right\}, \quad \alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\end{aligned} \tag{1.71.4}$$

Здесь γ — константа Эйлера. Если $\alpha=0$, то первая сумма пропадает, выражение в фигурных скобках во второй сумме заменяется единицей при $\nu=0$, $\alpha=0$ и выражением $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\alpha}$ при $\nu=0$, $\alpha>0$. Эта функция является вторым решением уравнения (1.71.3), линейно независимым с (1.71.1) (см. Уиттекер и Ватсон [1], глава 17).

Непосредственно из (1.71.1) вытекают формулы

$$J_{\alpha-1}(z)+J_{\alpha+1}(z)=2\alpha z^{-1}J_\alpha(z), \qquad \frac{d}{dz}\{z^{-\alpha}J_\alpha(z)\}=-z^{-\alpha}J_{\alpha+1}(z), \tag{1.71.5}$$

которые проверяются сопоставлением коэффициентов правой и левой части. При $\alpha > -\frac{1}{2}$ справедливо интегральное представление

$$J_\alpha(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\alpha}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{izt}\, dt. \qquad (1.71.6)$$

Для проверки нужно e^{izt} разложить в степенной ряд, а затем почленно проинтегрировать, учитывая равенство (1.7.5).

(2) Следующая важная асимптотическая формула используется в различных приложениях:

$$J_\alpha(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(z - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right), \quad z \to +\infty. \qquad (1.71.7)$$

Эта формула является лишь частным случаем ($p = 1$) следующего асимптотического разложения (см. Уиттекер и Ватсон [1], § 17.5):

$$J_\alpha(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(z - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left\{\sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu z^{-2\nu} + O(z^{-2p})\right\} +$$

$$+ \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(z - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left\{\sum_{\nu=0}^{p-1} b_\nu z^{-2\nu-1} + O(z^{-2p-1})\right\}, \qquad (1.71.8)$$

где p — произвольное натуральное число, $a_0 = 1$; a_ν, b_ν — некоторые постоянные, зависящие лишь от ν; $z \to +\infty$.

Это же разложение справедливо при комплексных z, для которых $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$, $\delta > 0$, если мы примем, что $z^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln z\right)$ при $|\mathfrak{J}(\ln z)| \leqslant \leqslant \pi - \delta$. Отметим важное следствие из этой формулы, справедливое при $-\frac{\pi}{2} + \delta \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$:

$$e^{\frac{\alpha\pi i}{2}} J_\alpha\left(e^{-\frac{i\pi}{2}} z\right) = (2\pi z)^{-\frac{1}{2}} e^z \{1 + O(|z|^{-1})\} +$$

$$+ (2\pi z)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-z + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\pi i\right] \{1 + O(|z|^{-1})\}. \qquad (1.71.9)$$

Асимптотическая формула, аналогичная (1.71.7), справедлива и для функций Бесселя второго рода $Y_\alpha(z)$; она отличается лишь тем, что косинус заменен на синус (см. Уиттекер и Ватсон [1], § 17.6).

(3) Полезно также отметить порядок величин $J_\alpha(z)$ и $Y_\alpha(z)$ при $z \to +0$ и $z \to +\infty$. Из предыдущих формул мы видим, что при $z \to +0$ справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} &J_\alpha(z) \sim z^\alpha, \ \alpha \text{ — вещественное}, \ \alpha \neq -1, -2, -3, \ldots, \\ &Y_\alpha(z) \sim z^{-\alpha}, \ \alpha = 1, 2, 3, \ldots, \\ &Y_0(z) \sim \ln\frac{1}{z}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.71.10)$$

тогда как при $z \to \infty$ имеем

$$J_\alpha(z) = O\left(z^{-\frac{1}{2}}\right), \ Y_\alpha(z) = O\left(z^{-\frac{1}{2}}\right). \qquad (1.71.11)$$

1.8. Дифференциальные уравнения

Мы часто будем в дальнейшем применять некоторые элементарные преобразования однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

(1) Пусть $K(x)$, $M(x)$, $N(x)$ — функции, определенные в промежутке $a < x < b$, в котором $K(x)$ и $M(x)$ имеют непрерывные производные, причем $K(x) \neq 0$, а функция $N(x)$ непрерывна. Если в уравнении

$$K(x)\,y'' + M(x)\,y' + N(x)\,y = 0 \qquad (1.8.1)$$

мы сделаем подстановку $y = s(x)\,u(x)$, где $u(x)$ — новая неизвестная функция, то $s(x)$ определяется из условия, чтобы $u(x)$ удовлетворяла уравнению вида

$$u'' + \lambda(x)\,u = 0. \qquad (1.8.2)$$

Прямое вычисление дает

$$2Ks' + Ms = 0, \qquad s(x) = \exp\left\{-\int \frac{M\,dx}{2K}\right\}, \qquad (1.8.3)$$

где интегрирование осуществляется от произвольной точки x_0 до точки x. Тогда

$$\lambda(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{2K}\right) - \left(\frac{M}{2K}\right)^2 + \frac{N}{K}. \qquad (1.8.4)$$

(2) Если мы введем в (1.8.1) новую независимую переменную θ с помощью подстановки $x = \sigma(\theta)$, то получим

$$K(x)\,\sigma'(\theta)\frac{d^2y}{d\theta^2} + \{M(x)\,[\sigma'(\theta)]^2 - K(x)\,\sigma''(\theta)\}\frac{dy}{d\theta} +$$
$$+ N(x)\,[\sigma'(\theta)]^3\,y = 0. \qquad (1.8.5)$$

Если мы применим к (1.8.5) процесс, рассмотренный в (1), то можно избавиться от первой производной. Положим $y = s^*u$, тогда, учитывая (1.8.3), получим

$$s^* = \exp\left\{-\int \frac{M\sigma'^2 - K\sigma''}{2K\sigma'}\,d\theta\right\} = (\sigma')^{\frac{1}{2}}\,s, \qquad (1.8.6)$$

где s имеет тот же смысл, что в (1.8.3). Отсюда $y = (\sigma')^{\frac{1}{2}}\,su$, а u удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \lambda^* u = 0, \qquad (1.8.7)$$

где

$$\lambda^* = -\frac{d}{d\theta}\left(\frac{M\sigma'^2 - K\sigma''}{2K\sigma'}\right) - \left(\frac{M\sigma'^2 - K\sigma''}{2K\sigma'}\right)^2 + \frac{N}{K}\,\sigma'^2. \qquad (1.8.8)$$

В качестве приложения приведем преобразования дифференциального уравнения Бесселя (1.71.3), $k \neq 0$,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(k^2 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2}\right)u = 0, \qquad u(x) = x^{\frac{1}{2}}J_\alpha(kx), \qquad (1.8.9)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{k}{x} + \frac{1 - \alpha^2}{4x^2}\right)u = 0, \qquad u(x) = x^{\frac{1}{2}}J_\alpha\{2(kx)^{\frac{1}{2}}\}. \qquad (1.8.10)$$

Другой элементарной формулой, важной для нас в дальнейшем, является представление решения $y = y(x)$ *неоднородного* уравнения

$$K(x)\,y'' + M(x)\,y' + N(x)\,y = f(x) \qquad (1.8.11)$$

через фундаментальную систему $\{y_1(x), y_2(x)\}$ соответствующего однородного уравнения (1.8.1). Мы имеем

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_1(x)\,y_2(t) - y_2(x)\,y_1(t)}{y_1'(t)\,y_2(t) - y_2'(t)\,y_1(t)} \frac{f(t)}{K(t)}\,dt, \quad (1.8.12)$$

где x_0 — фиксированная точка, а c_1, c_2 — постоянные. Далее,

$$y_1'(x)\,y_2(x) - y_2'(x)\,y_1(x) = \mathrm{const}\,\exp\left\{-\int \frac{M}{K}\,dx\right\}. \quad (1.8.13)$$

Если мы полагаем $M = 0$, то выражение, стоящее слева, равно постоянной. Применяя это последнее замечание к (1.8.9), мы получаем важные формулы

$$\left.\begin{aligned} &J_\alpha'(x)\,J_{-\alpha}(x) - J_{-\alpha}'(x)\,J_\alpha(x) = \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi x} \quad \text{при } \alpha \text{ не целом},\\ &J_\alpha'(x)\,Y_\alpha(x) - Y_\alpha'(x)\,J_\alpha(x) = -\frac{2}{\pi x}, \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1.8.14)$$

Относительно оценки констант в правой части см. Ватсон [3], стр. 43, (2), стр. 76, (1).

1.81. Функция Эйри

Интересное преобразование дифференциального уравнения Бесселя (1.71.3) может быть получено при специальном предположении $\alpha = \pm\frac{1}{3}$. Если мы применим (1.8.7) и (1.8.8), то нетрудно показать, что обе целые функции

$$\left.\begin{aligned} k(x) &= \frac{\pi}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{3}}\left\{2\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{\pi}{3}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x}{3}\right)^{3\nu}}{\nu!\,\Gamma\left(\nu+\frac{2}{3}\right)},\\ l(x) &= \frac{\pi}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}}\left\{2\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{\pi}{3}\,\frac{x}{3}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x}{3}\right)^{3\nu}}{\nu!\,\Gamma\left(\nu+\frac{4}{3}\right)} \end{aligned}\right\} \quad (1.81.1)$$

удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{3}xy = 0. \quad (1.81.2)$$

При отрицательных x имеем $k(x) > 0$, $l(x) < 0$. Применяя (1.71.9) [1]), мы получаем при $x < 0$, $x \to -\infty$ соотношение

$$k(x) \cong -l(x) \cong 2^{-1}\,3^{-\frac{3}{4}}\,\pi^{\frac{1}{2}}\,|x|^{-\frac{1}{4}} \exp\{2(|x|/3)^{\frac{3}{2}}\}. \quad (1.81.3)$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя функция

$$A(x) = k(x) + l(x) \quad (1.81.4)$$

является единственным частным решением уравнения (1.81.2), ограничен-

---

[1]) При отрицательных x имеем

$$k(x) = \frac{\pi}{3}(|x|/3)^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{i\pi}{6}}\,J_{-\frac{1}{3}}\{e^{-\frac{i\pi}{2}}\,2(|x|/3)^{\frac{3}{2}}\},$$

$$l(x) = -\frac{\pi}{3}(|x|/3)^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{i\pi}{6}}\,J_{\frac{1}{3}}\{e^{-\frac{i\pi}{2}}\,2(|x|/3)^{\frac{3}{2}}\}.$$

ным при $x \to -\infty$. Действительно,

$$A(x) \cong 2^{-1} 3^{-\frac{1}{4}} \pi^{\frac{1}{2}} |x|^{-\frac{1}{4}} \exp\{-2(|x|/3)^{\frac{3}{2}}\}, \quad x \to -\infty \qquad (1.81.5)$$

(см. Ватсон [3], стр. 188—190, 202). Функция $A(x)$ называется функцией Эйри; она может быть рассматриваема как стандартное решение уравнения (1.81.2) и играет важную роль в многочисленных вопросах математической физики. Функция $l(x)/k(x)$ является возрастающей (рис. 1), поэтому произвольное вещественное решение уравнения (1.81.2) имеет не более чем один отрицательный нуль и бесконечно много положительных нулей. В частности, $A(x)$ не имеет отрицательного нуля и имеет бесконечно много положительных нулей. Так как $A(x) > 0$ при $x < 0$, то из (1.81.2) следует, что $A''(x) > 0$ при $x < 0$; следовательно, $A'(x) \to 0$ при $x \to -\infty$.

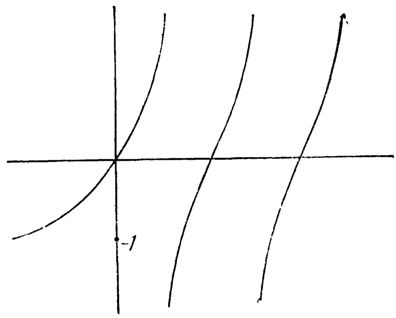

Рис. 1.

1.82. Теоремы типа теорем Штурма

Следующие «теоремы сравнения» типа теорем Штурма могут быть доказаны обычным образом (см. Сегё [20], стр. 3—4):

Теорема 1.82.1. *Пусть $f(x)$ и $F(x)$ — непрерывные функции в промежутке $x_0 < x < X_0$, причем $f(x) \leqslant F(x)$. Пусть не равные нулю тождественно функции $y(x)$ и $Y(x)$ суть соответственно решения дифференциальных уравнений*

$$y'' + f(x)y = 0, \qquad Y'' + F(x)Y = 0. \qquad (1.82.1)$$

Если x' и x'', $x' < x''$, являются последовательными нулями функции $y(x)$, то функция $Y(x)$ по крайней мере один раз меняет знак в промежутке $x' < x < x''$, если только $f(x) \not\equiv F(x)$ на отрезке $[x', x'']$.

Утверждение остается справедливым и при $x' = x_0$ $(y(x_0+0) = 0)$, если имеет место дополнительное условие

$$\lim_{x \to x_0+0} \{y'(x)Y(x) - y(x)Y'(x)\} = 0 \qquad (1.82.2)$$

(*аналогично при* $x'' = X_0$).

Из теоремы 1.82.1 мы легко получаем (см. цитированную работу, стр. 4) следующее предложение:

Теорема 1.82.2. *Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная убывающая функция в промежутке $x_0 < x < X_0$, а y — не равное нулю тождественно решение уравнения*

$$y'' + \varphi(x)y = 0. \qquad (1.82.3)$$

Если $x' < x'' < x'''$ — три последовательных нуля функции $y(x)$, то $x'' - x' < x''' - x''$, т. е. последовательность нулей функции $y(x)$ выпукла.

Последнее неравенство справедливо при следующем более общем условии:

$$\varphi(x) > \varphi(x'') > \varphi(t) \quad \text{при} \quad x < x'' < t < x'''. \qquad (1.82.4)$$

Кроме того, это же неравенство имеет место при $x' = x_0$ $(y(x_0+0) = 0)$ при дополнительном условии

$$\lim_{x \to x_0+0} (x - x_0)y'(x) = 0. \qquad (1.82.5)$$

Для того чтобы доказать, что $x''-x'=h<x'''-x''$, мы сравниваем уравнение (1.82.3) с уравнением

$$Y''+\varphi(x-h)Y=0,$$

которое имеет решение $Y(x)=y(x-h)$ на отрезке $x''\leqslant x\leqslant x'''$.

Сделаем еще следующее весьма элементарное замечание родственного характера:

Теорема 1.82.3. *Пусть $f(x)$ — непрерывная отрицательная функция в промежутке $x_0<x<X_0$. Тогда произвольное решение y уравнения $y''+f(x)y=0$, удовлетворяющее условию $y\to 0$ при $x\to X_0$, не может обращаться в нуль при $x_0\leqslant x<X_0$.*

Допустим противное. Тогда между двумя последовательными нулями $\operatorname{sign} y''=\operatorname{sign} y$ постоянен, скажем, положителен; следовательно, функция $y(x)$ положительна и выпукла, что приводит к противоречию.

Приведем следующий замечательный результат типа теорем Штурма (см. Ватсон [3], стр. 518, Макаи [2]):

Теорема 1.82.4. *Пусть $f(x)$, $F(x)$, $y(x)$, $Y(x)$, x_0, X_0, x', x'' имеют тот же смысл и удовлетворяют тем же условиям, что в теореме 1.82.1. Обозначим через ξ ближайший справа к точке x' нуль функции $Y(x)$, $x'<\xi<x''$.*

Допустим, что $y(x)>0$, $Y(x)>0$ в промежутке $x'<x<\xi$ и что

$$\lim_{x\to x'+0}\frac{y(x)}{Y(x)}\geqslant 1, \tag{1.82.6}$$

тогда $y(x)>Y(x)$ при $x'<x<\xi$.

Мы заключаем, как обычно, что функция $y'(x)Y(x)-y(x)Y'(x)$ является возрастающей на $[x', \xi]$; она равна нулю при $x=x'$ $(Y(x')=0)$ и, следовательно, положительна в промежутке $x'<x<\xi$. Отсюда вытекает, что отношение $y(x)/Y(x)$ является возрастающей функцией, и значит, благодаря 1.82.6, утверждение доказано.

Предложение сохраняет силу и при $x'=x_0$, если выполнено условие (1.82.2).

Теперь мы докажем важное следствие из предыдущей теоремы (см. Макаи [2]):

Теорема 1.82.5. *Пусть $\varphi(x)$, x', x'', x''' имеют тот же смысл, что в теореме 1.82.2, так что $x''-x'<x'''-x''$. Пусть $y(x)$ описывает отрицательную «волну» на $[x', x'']$ и положительную на $[x'', x''']$. Тогда первая «волна» целиком содержится во второй.*

Смысл последнего утверждения состоит в следующем:

$$0<-y(2x''-x)<y(x), \qquad x''<x<2x''-x'.$$

Полагая $Y(x)=-y(2x''-x)$, проводим доказательство, как обычно, учитывая соотношения

$$\lim_{x\to x''}\frac{y(x)}{-y(2x''-x)}=\lim_{x\to x''}\frac{y'(x)}{y'(2x''-x)}=1.$$

1.9. Одно элементарное конформное отображение

Пусть комплексные переменные x и z связаны между собой соотношениями

$$x=\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \qquad z=x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.9.1}$$

Внешность единичного круга, $|z|>1$, равно как и его внутренность,

$|z| < 1$, отображается на всю x-плоскость с разрезом вдоль отрезка $[-1, 1]$, причем точки $z=\infty$ и $z=0$ соответственно переходят в $x=\infty$. Если мы возьмем ту ветвь $x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$, которая бесконечна при $x=\infty$, то получим $|z|>1$; если мы возьмем другую ветвь, которая обращается в нуль при $x=\infty$, то получим $|z|<1$.

Единичная окружность $z=e^{i\theta}$ переходит в отрезок $-1 \leqslant x \leqslant +1$, описываемый дважды, так как $x=\cos\theta$.

Окружности $|z|=r$ или $|z|=r^{-1}$, $0<r\neq 1$, соответствуют эллипсу с фокусами в точках -1 и $+1$ и полуосями

$$\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right),\quad \frac{1}{2}\left|r-\frac{1}{r}\right|.$$

После подстановки $z=e^{\zeta}$ или $e^{-\zeta}$ мы получаем выражение

$$x=\operatorname{ch}\zeta. \tag{1.9.2}$$

Оно отображает полуполосу

$$\Re\zeta>0,\qquad -\pi<\Im\zeta\leqslant\pi \tag{1.9.3}$$

на ту же самую x-плоскость с разрезом вдоль $[-1, +1]$; при этом, однако, точка $x=\infty$ будет логарифмической точкой разветвления.

1.91. Принцип аргумента; теорема Руше; последовательности аналитических функций

Теорема 1.91.1 (принцип аргумента). *Пусть $f(x)$ — аналитическая функция в замкнутой области, ограниченной жордановой кривой C, и пусть $f(x)\neq 0$ на C. Тогда изменение $\Im\{\ln f(x)\}=\arg f(x)$ при обходе точкой x кривой C в положительном направлении равно $2\pi i m$, где m — число нулей функции $f(x)$ внутри C, причем это число подсчитывается с учетом кратности нулей.*

Теорема 1.91.2 (теорема Руше). *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — аналитические функции в замкнутой области, ограниченной жордановой кривой C, и пусть $|g(x)|<|f(x)|$ на C. Тогда $f(x)+g(x)$ и $f(x)$ не имеют нулей на C и имеют одинаковое число нулей внутри C.*

Теорема 1.91.3 (теорема Гурвица). *Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность аналитических функций, регулярных в области G, причем эта последовательность сходится равномерно во всяком замкнутом подмножестве области G. Допустим, что аналитическая функция $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ не равна нулю тождественно. Если точка $x=a$, лежащая внутри G, является нулем $f(x)$ кратности k, то существуют такая окрестность $|x-a|<\delta$ точки $x=a$ и такое число N, что при $n>N$ каждая функция $f_n(x)$ будет иметь точно k нулей в круге $|x-a|<\delta$.*

Последняя теорема непосредственно вытекает из теоремы 1.91.2. Относительно предыдущих теорем см. Полиа и Сегё [1], часть I, отдел III, стр. 149—154.

Пусть в теореме 1.91.3 область G симметрична относительно вещественной оси, а функции $f_n(x)$ вещественны при вещественных x. Если точка $x=a$ является простым *вещественным* нулем функции $f(x)$, то при $n>N$ каждая функция $f_n(x)$ имеет в точности один вещественный нуль в $|x-a|<\delta$, так как если $f_n(x_0)=0$, то также $f_n(\overline{x}_0)=0$.

ГЛАВА II

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ. ОСНОВНЫЕ ПРИМЕРЫ

2.1. Ортогональность

(1) В дальнейшем $\alpha(x)$ означает некоторую определенную неубывающую функцию, отличную от константы, на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ (см. замечание в начале § 1.4, (1)).

Определение. *Ортонормальная последовательность функций* $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_l(x)$, *$l$ конечно или бесконечно, определяется соотношениями*

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,d\alpha(x) = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots, l. \qquad (2.1.1)$$

Функции $\varphi_n(x)$ предполагаются вещественными и принадлежащими классу $L^2_\alpha(a, b)$.

Ортонормальные функции линейно независимы. Если $\alpha(x)$ имеет лишь конечное число N точек роста (т. е. таких, в окрестности которых $\alpha(x)$ отлична от константы), то число l конечно и $l < N$.

Теорема 2.1.1. *Пусть вещественные функции*

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x) \ (l \text{ конечно или бесконечно}) \qquad (2.1.2)$$

принадлежат классу $L^2_\alpha(a, b)$ и линейно независимы. Тогда существует ортонормальная последовательность

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_l(x), \qquad (2.1.3)$$

такая, что при $n = 0, 1, 2, \ldots, l$ справедливы равенства

$$\varphi_n(x) = \lambda_{n0}f_0(x) + \lambda_{n1}f_1(x) + \ldots + \lambda_{nn}f_n(x), \quad \lambda_{nn} > 0. \qquad (2.1.4)$$

Последовательность (2.1.3) *определяется однозначно.*

Процесс получения (2.1.3) из (2.1.2) называется *ортогонализацией* (см. Стон [1], стр. 12—13).

(2) Для ортонормальных функций (2.1.4) справедливо следующее явное выражение:

$$\varphi_n(x) = (D_{n-1}D_n)^{-\frac{1}{2}}D_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (2.1.5)$$

где при $n \geqslant 1$

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} (f_0, f_0) & (f_0, f_1) & \ldots (f_0, f_n) \\ (f_1, f_0) & (f_1, f_1) & \ldots (f_1, f_n) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ (f_{n-1}, f_0) & (f_{n-1}, f_1) & \ldots (f_{n-1}, f_n) \\ f_0(x) & f_1(x) & \ldots f_n(x) \end{vmatrix}, \qquad (2.1.6)$$

и при $n \geqslant 0$

$$D_n = [(f_\mu, f_\nu)]_{\mu, \nu=0, 1, \ldots, n} > 0. \qquad (2.1.7)$$

Мы полагаем, кроме того, $D_{-1}=1$, $D_0(x)=f_0(x)$. Определитель (2.1.7) соответствует положительно определенной квадратичной форме

$$\|u_0 f_0 + u_1 f_1 + \ldots + u_n f_n\|^2 = \int_a^b \{u_0 f_0(x) + u_1 f_1(x) + \ldots + u_n f_n(x)\}^2 \, d\alpha(x), \qquad (2.1.8)$$

поэтому $D_n > 0$ при всех n.

Далее, имеет место следующее интегральное представление:

$$D_n(x) = \frac{1}{n!} \underbrace{\int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} f_0(x_0) & f_1(x_0) & \ldots f_n(x_0) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \ldots f_n(x_1) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ f_0(x_{n-1}) & f_1(x_{n-1}) & \ldots f_n(x_{n-1}) \\ f_0(x) & f_1(x) & \ldots f_n(x) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} f_0(x_0) & f_1(x_0) & \ldots f_{n-1}(x_0) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \ldots f_{n-1}(x_1) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ f_0(x_{n-1}) & f_1(x_{n-1}) & \ldots f_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix} d\alpha(x_0)\, d\alpha(x_1) \ldots d\alpha(x_{n-1}), \quad n \geqslant 1, \qquad (2.1.9)$$

$$D_n = \frac{1}{(n+1)!} \times$$

$$\times \underbrace{\int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b}_{n+1} \begin{vmatrix} f_0(x_0) & f_1(x_0) & \ldots f_n(x_0) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \ldots f_n(x_1) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ f_0(x_n) & f_1(x_n) & \ldots f_n(x_n) \end{vmatrix}^2 d\alpha(x_0)\, d\alpha(x_1) \ldots d\alpha(x_n) \qquad (2.1.10)$$

(см. Ковалевский [1], стр. 326; Полиа и Сегё [1], часть I, отдел II, задача 68).

(3) Определение. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *данная ортонормальная система, конечная или бесконечная. Произвольной вещественной функции* $f(x)$ *соответствует формальное разложение в ряд Фурье*

$$f(x) \sim f_0\varphi_0(x) + f_1\varphi_1(x) + \ldots + f_n\varphi_n(x) + \ldots \qquad (2.1.11)$$

Коэффициенты f_n, *называемые коэффициентами Фурье функции* $f(x)$, *соответствующими данной системе, определяются по формулам*

$$f_n = (f, \varphi_n) = \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, d\alpha(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.1.12)$$

Каждая частная сумма ряда (2.1.11) обладает следующим важным минимальным свойством:

Теорема 2.1.2. *Пусть* $\varphi_n(x)$, $f(x)$, f_n *имеют тот же смысл, что и в предыдущем определении. Пусть* $l \geqslant 0$ *будет фиксированным целым числом и* $a_0, a_1, \ldots, a_l$ — *произвольные вещественные постоянные. Если положим*

$$g(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_l\varphi_l(x) \qquad (2.1.13)$$

и коэффициенты a_ν будут переменными, то интеграл

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}^2 d\alpha(x) \tag{2.1.14}$$

достигает минимума тогда и только тогда, когда $a_\nu=f_\nu$, $\nu=0, 1, 2, \ldots, l$.

Искомый минимум равен

$$\int_a^b \{f(x)\}^2 d\alpha(x)-\sum_{\nu=0}^{l} f_\nu^2=\|f\|^2-\sum_{\nu=0}^{l} f_\nu^2, \tag{2.1.15}$$

следовательно,

$$f_0^2+f_1^2+\ldots+f_l^2\leqslant\|f\|^2, \tag{2.1.16}$$

и (неравенство Бесселя)

$$f_0^2+f_1^2+f_2^2+\ldots\leqslant\|f\|^2=\int_a^b f^2(x)\,d\alpha(x). \tag{2.1.17}$$

Если левая часть неравенства (2.1.17) представляет собой бесконечный ряд, то он сходится. Исследование вопроса о возможности знака равенства приводит к понятию замкнутости (§ 1.5).

Классическим примером разложений в ряды Фурье по ортонормальным системам являются обычные ряды Фурье по тригонометрическим функциям 1, $\cos nx$, $\sin nx$, $n=1, 2, \ldots$; $-\pi\leqslant x\leqslant+\pi$.

(4) Другая важная характеристика ортонормальной последовательности (2.1.4) может быть основана на изложенном выше минимальном свойстве частных сумм. В самом деле, при переменных вещественных $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ выражение

$$\|\lambda_0 f_0(x)+\lambda_1 f_1(x)+\ldots+\lambda_{n-1}f_{n-1}(x)+f_n(x)\| \tag{2.1.18}$$

будет минимальным тогда и только тогда, когда

$$\lambda_0 f_0(x)+\lambda_1 f_1(x)+\ldots+\lambda_{n-1}f_{n-1}(x)+f_n(x)=\lambda_{nn}^{-1}\varphi_n(x). \tag{2.1.19}$$

Распространение изложенного на случай пространства комплексных функций не представляет труда. Скалярное произведение двух функций $f(x)$ и $g(x)$ определяется в этом случае по формуле (1.4.3).

2.2. Ортогональные многочлены

(1) Определение. *Пусть $\alpha(x)$ — данная неубывающая функция с бесконечным числом точек роста в конечном или бесконечном интервале $[a, b]$ и пусть существуют все «моменты»*

$$c_n=\int_a^b x^n d\alpha(x), \qquad n=0, 1, 2, \ldots \tag{2.2.1}$$

Если мы ортогонализуем последовательность неотрицательных степеней x:

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots, \tag{2.2.2}$$

в смысле, указанном в § 2.1 (линейная независимость будет доказана ниже), *то получим последовательность многочленов*

$$p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x), \ldots, \tag{2.2.3}$$

определенных единственным образом следующими условиями:

(a) $p_n(x)$ — *многочлен точной степени n с положительным коэффициентом при x^n;*

(b) *система* $\{p_n(x)\}$ *ортонормальна, т. е.*

$$\int_a^b p_n(x)\,p_m(x)\,d\alpha(x)=\delta_{nm}, \qquad n,\ m=1,\ 2,\ \ldots \tag{2.2.4}$$

Существование моментов (2.2.1) эквивалентно факту, что все функции x^n принадлежат классу $L_\alpha(a,\ b)$.

Аналогичное определение имеет место и в случае распределения вида $w(x)dx$. Тогда мы предполагаем, что $w(x)$ — неотрицательная функция. измеримая в смысле Лебега и такая, что

$$\int_a^b w(x)\,dx>0.$$

Кроме того, как и ранее, должны существовать моменты.

Мы называем $p_n(x)$ *ортогональными многочленами* [1]), соответствующими данному распределению $d\alpha(x)$ или $w(x)dx$; в последнем случае мы говорим также об ортогональных многочленах, соответствующих данной весовой функции $w(x)$. Следующие главы посвящены исследованию этих многочленов. Очевидно, что если распределение будет вида $w(x)dx$, то система

$$\{[w(x)]^{\frac{1}{2}}p_n(x)\}, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.2.5}$$

ортонормальна в обычном смысле.

Линейная независимость функций (2.2.2) может быть легко установлена. В самом деле, если $\varrho(x)$ — произвольный вещественный многочлен, то соотношение

$$\|\varrho\|^2=\int_a^b \varrho^2(x)\,d\alpha(x)=0$$

возможно лишь тогда, когда $\varrho(x)=0$ во всех точках роста функции $\alpha(x)$. Так как таких точек по предположению бесконечно много, то многочлен $\varrho(x)$ должен быть равен нулю тождественно.

Если $\alpha(x)$ имеет лишь конечное число точек роста, скажем N, то функции $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{N-1}$ будут еще линейно независимыми. Путем ортогонализации мы получаем конечную систему $\{p_n(x)\}$, $n=0,\ 1,\ \ldots$ $\ldots,\ N-1$, удовлетворяющую тем же условиям, что и в предыдущем определении (см. §§ 2.8 и 2.82).

(2) Учитывая общую формулу (2.1.5), при $n\geqslant 1$ будем иметь

$$p_n(x)=(D_{n-1}D_n)^{-\frac{1}{2}}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \end{vmatrix}, \tag{2.2.6}$$

где при $n\geqslant 0$

$$D_n=[c_{\nu+\mu}]_{\nu,\,\mu=0,\,1,\,2,\ldots,\,n}>0. \tag{2.2.7}$$

В дополнение к (2.2.6) имеем $p_0(x)=D_0^{-\frac{1}{2}}=c_0^{-\frac{1}{2}}$. Определитель (2.2.7)

[1]) Иногда их называют многочленами *Чебышева*. Мы сохраним этот термин для важного специального случая (1.12.3).

соответствует положительно определенной квадратичной форме

$$\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} c_{\nu+\mu}u_\nu u_\mu = \int_a^b (u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots+u_nx^n)^2\,d\alpha(x), \qquad (2.2.8)$$

которая называется *формой Ганкеля* или *рекуррентного типа* (см. Сегё [1]).

Определитель в формуле (2.2.6) может быть преобразован следующим образом: из последнего столбца вычитаем предпоследний, умноженный на x, затем, повторяя этот же процесс для каждого из предыдущих столбцов, при $n \geqslant 1$ получаем

$$p_n(x) = (D_{n-1}D_n)^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} c_0x-c_1 & c_1x-c_2 & \ldots & c_{n-1}x-c_n \\ c_1x-c_2 & c_2x-c_3 & \ldots & c_nx-c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1}x-c_n & c_nx-c_{n+1} & \ldots & c_{2n-2}x-c_{2n-1} \end{vmatrix}. \qquad (2.2.9)$$

Далее, в соответствии с (2.1.9) и (2.1.10) мы имеем следующие интегральные представления:

$$p_n(x) = \frac{(D_{n-1}D_n)^{-\frac{1}{2}}}{n!} \underbrace{\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b}_{n} (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\times$$

$$\times \prod_{\substack{\nu,\,\mu=0,\,1,\,\ldots,\,n-1\\ \nu<\mu}} (x_\nu-x_\mu)^2\,d\alpha(x_0)\,d\alpha(x_1)\ldots d\alpha(x_{n-1}), \qquad (2.2.10)$$

$$D_n = \frac{1}{(n+1)!}\underbrace{\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b}_{n+1} \prod_{\substack{\nu,\,\mu=0,\,1,\,\ldots,\,n\\ \nu<\mu}} (x_\nu-x_\mu)^2\,d\alpha(x_0)\,d\alpha(x_1)\ldots d\alpha(x_n). \qquad (2.2.11)$$

Относительно формул (2.2.10) и (2.2.11) см., например, Гейне [3], том 1, стр. 288. Формулы (2.2.6), (2.2.9), (2.2.10) неудобны для вывода свойств рассматриваемых многочленов. Для этой цели обычно будет предпочтительнее использовать непосредственно свойство ортогональности или другие представления, которые будут получены, исходя из ортогональности.

(3) Разложение в ряд Фурье произвольной функции $f(x)$ по многочленам $\{p_n(x)\}$ имеет вид

$$f(x) \sim f_0p_0(x)+f_1p_1(x)+\ldots+f_np_n(x)+\ldots, \qquad (2.2.12)$$

где

$$f_n = \int_a^b f(x)\,p_n(x)\,d\alpha(x), \quad n=0,1,2,\ldots \qquad (2.2.13)$$

Частные суммы этого ряда обладают минимальным свойством, формулированным в теореме 2.1.2. Отметим в качестве важного частного случая следующую прямую характеристику ортогональных многочленов (см. § 2.1, (4)). Рассмотрим множество всех многочленов $\varrho(x)$ степени n с коэффициентом единица при x^n. Интеграл

$$\int_a^b \varrho^2(x)\,d\alpha(x) \qquad (2.2.14)$$

будет минимальным тогда и только тогда, когда $\varrho(x)=\text{const}\,p_n(x)$. Постоянный множитель определяется нормирующим условием: старший коэффициент у $\varrho(x)$ равен единице. Если k_n означает старший коэффициент многочлена $p_n(x)$, то минимум интеграла, очевидно, равен k_n^{-2}. Из (2.2.8) мы находим для этого минимума значение D_n/D_{n-1}, следовательно,

$$k_n = \left(\frac{D_{n-1}}{D_n}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2.15}$$

что также непосредственно следует из (2.2.6).

2.3. Дальнейшие замечания

(1) Ограничение (a) в определении, данном в § 2.2, (1), относительно старшего коэффициента и ограничение (b) относительно интеграла от квадрата многочлена являются лишь одним из возможных путей нормирования рассматриваемых многочленов. Иногда принимаются нормирующие условия иного рода, как, например, фиксируется значение $p_n(x)$ в точке $x=a$ или $x=b$[1]), задается старший коэффициент $p_n(x)$ и т. п. Так как $p_n(x)$ имеет точную степень n, то всякий π_n можно представить как линейную комбинацию $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ (см. § 1.12). Следовательно, $p_n(x)$, $n \geqslant 1$, ортогонален к каждому π_{n-1}. В частности,

$$\int_a^b p_n(x)\, x^\nu\, d\alpha(x) = 0, \quad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{2.3.1}$$

Эти условия определяют $p_n(x)$ с точностью до постоянного множителя. Это более широкое определение ортогональности в дальнейшем часто применяется. Заметим также, что если $\varrho(x)$ есть π_n и

$$\int_a^b p_n(x)\, \varrho(x)\, d\alpha(x) = c, \tag{2.3.2}$$

то коэффициент при x^n в $\varrho(x)$ равен ck_n.

(2) Пусть отрезок $[a, b]$ будет симметричен относительно начала координат, т. е. $a=-b$, и пусть рассматривается распределение вида $w(x)dx$ с четной весовой функцией, т. е. такой, что $w(-x)=w(x)$. Тогда многочлен $p_n(x)$ будет четным или нечетным в зависимости от четности или нечетности его степени n:

$$p_n(-x) = (-1)^n\, p_n(x). \tag{2.3.3}$$

Он может содержать лишь те степени x, которые сравнимы с $n \pmod 2$. Действительно, при $\nu=0$, 1, ..., $n-1$ мы имеем

$$\int_{-a}^{a} p_n(-x)\, x^\nu w(x)\, dx = (-1)^\nu \int_{-a}^{a} p_n(x)\, x^\nu w(x)\, dx = 0.$$

Следовательно, многочлен $p_n(-x)$ обладает тем же ортогональным свойством, что и $p_n(x)$ (в широком смысле). Следовательно, сравнивая коэффициенты при x^n, получаем

$$p_n(-x) = \mathrm{const}\ p_n(x) = (-1)^n\, p_n(x).$$

---

[1]) Известно, что $p_n(a) \neq 0$, $p_n(b) \neq 0$ (см. § 3.3).

Линейная подстановка $x=kx'+l$, $k\neq 0$, переводит отрезок $[a, b]$ в отрезок $[a', b']$ (или $[b', a']$), а весовую функцию $w(x)$ в функцию $w(kx'+l)$. Тогда многочлены

$$(\operatorname{sign} k)^n \, |k|^{\frac{1}{2}} \, p_n(kx'+l) \tag{2.3.4}$$

образуют ортонормальную систему на $[a', b']$ (или на $[b', a']$) с весовой функцией $w(kx'+l)$.

2.4. Классические ортогональные многочлены

1. Пусть $a=-1$, $b=+1$, $w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$. Тогда с точностью до постоянного множителя ортогональный многочлен $p_n(x)$ есть многочлен Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ (см. § 4.1).

2. Пусть $a=0$, $b=+\infty$, $w(x)=e^{-x}x^{\alpha}$. В этом случае $p_n(x)$ с точностью до постоянного множителя есть многочлен Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ (см. § 5.1).

3. Пусть $a=-\infty$, $b=+\infty$, $w(x)=e^{-x^2}$. В этом случае $p_n(x)$ с точностью до постоянного множителя есть многочлен Эрмита $H_n(x)$ (см. § 5.5).

Отметим следующие специальные частные случаи, соответствующие предположению 1 (с точностью до постоянного множителя):

При $\alpha=\beta$ — ультрасферические многочлены.

При $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ — многочлены Чебышева первого рода, $T_n(x)=\cos n\theta$, $x=\cos\theta$ (см. (1.12.3)).

При $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ — многочлены Чебышева второго рода, $U_n(x)=$ $=\sin(n+1)\theta/\sin\theta$ (см. 1.12.3)).

При $\alpha=-\beta=\frac{1}{2}$ — многочлены $U_{2n}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta/\sin\frac{\theta}{2}$, где $x=\cos\theta$ (см. § 1.12).

При $\alpha=\beta=0$ — многочлены Лежандра $P_n(x)$.

Детальное изучение этих многочленов будет проведено в следующих главах.

2.5. Формула Кристоффеля

(1) Теорема 2.5. *Пусть $\{p_n(x)\}$ — ортонормальная на отрезке $[a, b]$ система многочленов, соответствующих распределению $d\alpha(x)$. Пусть, далее,*

$$\varrho(x)=c(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_l), \quad c\neq 0, \tag{2.5.1}$$

есть π_l, неотрицательный на этом отрезке. Тогда ортогональные многочлены $\{q_n(x)\}$, соответствующие распределению $\varrho(x)\,d\alpha(x)$, могут быть выражены через $p_n(x)$ следующим образом:

$$\varrho(x)\,q_n(x)=\begin{vmatrix} p_n(x) & p_{n+1}(x) & \ldots & p_{n+l}(x) \\ p_n(x_1) & p_{n+1}(x_1) & \ldots & p_{n+l}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_n(x_l) & p_{n+1}(x_l) & \ldots & p_{n+l}(x_l) \end{vmatrix}. \tag{2.5.2}$$

В случае если нуль x_k имеет кратность $m>1$, то соответствующие строки в определителе (2.5.2) *мы заменяем производными порядка* 0, 1, 2, …, $m-1$ *от многочленов $p_n(x)$, $p_{n+1}(x)$, …, $p_{n+l}(x)$ в точке $x=x_k$.*

Это важное предложение принадлежит Кристоффелю [1] (фактически лишь в случае $\alpha(x)=x$). Вообще говоря, многочлены $q_n(x)$ не будут нормированными.

Доказательство почти очевидно. Правая часть (2.5.2) есть π_{n+l}, который делится на $\varrho(x)$, следовательно, представим в виде $\varrho(x)\,q_n(x)$, где $q_n(x)$ есть π_n. Кроме того, он является линейной комбинацией многочленов $p_n(x), p_{n+1}(x), \ldots, p_{n+l}(x)$, так что если $q(x)$ — произвольный π_{n-1}, то

$$\int_a^b \varrho(x)\,q_n(x)\,q(x)\,d\alpha(x)=\int_a^b q_n(x)\,q(x)\,\varrho(x)\,d\alpha(x)=0. \tag{2.5.3}$$

Наконец, правая часть (2.5.2) не равна нулю тождественно. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно установить, что коэффициент при $p_{n+l}(x)$, который представляет собой определитель $[p_{n+\nu}(x_{\mu+1})]$, $\nu, \mu=0, 1, 2, \ldots, l-1$, отличен от нуля. Допустим, что он равен нулю; тогда существуют постоянные $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}$, не все равные нулю, такие, что выражение

$$\lambda_0 p_n(x)+\lambda_1 p_{n+1}(x)+\ldots+\lambda_{l-1}p_{n+l-1}(x) \tag{2.5.4}$$

обращается в нуль при $x=x_1, x_2, \ldots, x_l$. Следовательно, (2.5.4) имеет вид $\varrho(x)\,G(x)$, где $G(x)$ есть π_{n-1}. Так как многочлен (2.5.4) ортогонален к любому π_{n-1}, то мы имеем

$$\int_a^b \varrho(x)\,G(x)\cdot G(x)\,d\alpha(x)=0,$$

откуда $G(x)\equiv 0$, что противоречит допущению.

(2) Соотношение (2.5.2) дает нам возможность, например, представить ультрасферические многочлены с $\alpha=\beta=$целому числу через многочлены Лежандра, а с $\alpha+\frac{1}{2}=\beta+\frac{1}{2}=$целому числу — через многочлены Чебышева (см. § 4.21, (3)). Другие примеры могут быть даны в связи с многочленами, рассматриваемыми в § 2.6.

Используя какие-либо специальные свойства распределения $d\alpha(x)$ или многочлена $\varrho(x)$, иногда можно упростить формулу (2.5.2). Например, если $d\alpha(x)=w(x)\,dx$, $w(x)$ и $\varrho(x)$ — четные функции и $a=-b$, то вместо (2.5.2) мы будем иметь представление (l четно)

$$\varrho(x)\,q_n(x)=\begin{vmatrix} p_n(x) & p_{n+2}(x) & p_{n+4}(x) & \ldots & p_{n+l}(x) \\ p_n(x_1) & p_{n+2}(x_1) & p_{n+4}(x_1) & \ldots & p_{n+l}(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_n\left(x_{\frac{l}{2}}\right) & p_{n+2}\left(x_{\frac{l}{2}}\right) & p_{n+4}\left(x_{\frac{l}{2}}\right) & \ldots & p_{n+l}\left(x_{\frac{l}{2}}\right) \end{vmatrix},$$

где $\{\pm x_1, \pm x_2, \ldots, \pm x_{\frac{l}{2}}\}$ — множество всех нулей $\varrho(x)$.

В частности, ортогональный многочлен $q_n(x)$, соответствующий весовой функции $1-x^2$ на отрезке $[-1, 1]$, может быть записан в виде

$$(1-x^2)\,q_n(x)=\begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+2}(x) \\ P_n(1) & P_{n+2}(1) \end{vmatrix}=P_n(x)-P_{n+2}(x)$$

$\left(\text{см. } (4.7.27),\ \lambda=\frac{1}{2}\right)$.

2.6. Класс многочленов, рассмотренный С. Н. Бернштейном и Г. Сегё

Пусть $\varrho(x)$ — многочлен точной степени l, положительный на отрезке $[-1, 1]$. Тогда могут быть указаны явные выражения ортонормальных многочленов $p_n(x)$, соответствующих следующим весовым функциям:

$$w(x)=\begin{cases}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\{\varrho(x)\}^{-1}, \\ (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\{\varrho(x)\}^{-1}, \\ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\{\varrho(x)\}^{-1}\end{cases} \tag{2.6.1}$$

при предположении, что в первом случае $l<2n$, во втором $l<2(n+1)$, и в третьем $l<2n+1$. Многочлены, соответствующие первому случаю, играют важную роль в доказательстве теоремы Сегё о равносходимости ([9]; см. теорему 13.1.2). Все три случая были в дальнейшем исследованы С. Н. Бернштейном [3] в связи с его асимптотической формулой ([2]; см. теорему 12.1.4).

Теорема 2.6. *Пусть $\varrho(x)$ — многочлен точной степени l, положительный на отрезке $[-1, 1]$. Пусть $\varrho(\cos\theta)=|h(e^{i\theta})|^2$ — нормализованное представление тригонометрического многочлена $\varrho(\cos\theta)$ в смысле, указанном в теореме 1.2.2. Если мы запишем $h(e^{i\theta})$ в виде $h(e^{i\theta})=c(\theta)+is(\theta)$, где $c(\theta)$ и $s(\theta)$ вещественны, то будем иметь следующие формулы:*

$$p_n(\cos\theta)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\Re\{e^{in\theta}\overline{h(e^{i\theta})}\}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\{c(\theta)\cos n\theta+s(\theta)\sin n\theta\}, \tag{2.6.2}$$

$$w(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\{\varrho(x)\}^{-1}, \quad l<2n;$$

$$p_n(\cos\theta)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta)^{-1}\Im\{e^{i(n+1)\theta}\overline{h(e^{i\theta})}\}=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{c(\theta)\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}-s(\theta)\frac{\cos(n+1)\theta}{\sin\theta}\right\}, \tag{2.6.3}$$

$$w(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\{\varrho(x)\}^{-1}, \quad l<2(n+1);$$

$$p_n(\cos\theta)=\pi^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\Im\{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}\overline{h(e^{i\theta})}\}=$$

$$=\pi^{-\frac{1}{2}}\left\{c(\theta)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}-s(\theta)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right\}, \tag{2.6.4}$$

$$w(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\{\varrho(x)\}^{-1}, \quad l<2n+1.$$

Эти формулы должны быть соответственно видоизменены при $l=2n$, $l=2(n+1)$ и $l=2n+1$, а именно: правая часть (2.6.2) должна быть *умножена на* $(1+h_l/h_0)^{-\frac{1}{2}}$, *правые части* (2.6.3) *и* (2.6.4)—*на* $(1-h_l/h_0)^{-\frac{1}{2}}$, *где* $h_0=h(0)$, *а* h_l — *коэффициент при* z^l *в многочлене* $h(z)$.

Заметим прежде всего, что правые части (2.6.2), (2.6.3), (2.6.4) являются косинус-многочленами со старшими членами

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} h_0 \cos n\theta, \quad \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} h_0 \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad \pi^{-\frac{1}{2}} h_0 \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}. \qquad (2.6.5)$$

В первом из этих выражений если $l=2n>0$, то множитель h_0 нужно заменить через h_0+h_l; во втором и третьем, когда $l=2(n+1)$ и $l=2n+1$ соответственно, множитель h_0 нужно заменить через h_0-h_l. Дадим доказательство формулы (2.6.2). Сначала заметим, что имеют место равенства

$$\int_{-1}^{+1} p_n(x)\, x^\nu (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \{\varrho(x)\}^{-1}\, dx = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

или, что то же самое, равенства

$$\int_0^\pi p_n(\cos\theta)\cos\nu\theta\, \{\varrho(\cos\theta)\}^{-1} d\theta = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Далее имеем

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Re \left\{ \int_0^\pi e^{in\theta} \overline{h(e^{i\theta})} (e^{i\nu\theta} + e^{-i\nu\theta}) |h(e^{i\theta})|^{-2} d\theta \right\} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \Re \left\{ \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i(n+\nu)\theta} + e^{i(n-\nu)\theta}}{h(e^{i\theta})} d\theta \right\} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \Re \left\{ \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^{n+\nu}+z^{n-\nu}}{zh(z)} dz \right\} = 0,$$

так как функция $(z^{n+\nu}+z^{n-\nu})\{zh(z)\}^{-1}$ регулярна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Кроме того,

$$\int_{-1}^{+1} \{p_n(x)\}^2 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \{\varrho(x)\}^{-1} dx = \int_0^\pi \{p_n(\cos\theta)\}^2 \{\varrho(\cos\theta)\}^{-1} d\theta =$$

$$= \int_0^\pi p_n(\cos\theta) \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} h_0 \cos n\theta\, \{\varrho(\cos\theta)\}^{-1} d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} h_0 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \Re \left\{ \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^{2n}+1}{zh(z)} dz \right\} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot h_0 \cdot \frac{2\pi}{h_0} = 1.$$

Доказательство равенств (2.6.3) и (2.6.4) аналогично. В этом случае вместо $\cos\nu\theta$ мы соответственно используем $\sin(\nu+1)\theta/\sin\theta$ и $\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Big/\sin(\theta/2)$. Видоизменения, которые необходимы при $l=2n$, $l=2(n+1)$ и $l=2n+1$ соответственно в (2.6.2), (2.6.3), (2.6.4), совершенно очевидны. Наконец, отметим, что (2.6.2) вытекает из (2.6.4), (2.6.4) из (2.6.3), (2.6.2) из (2.6.3) заменой $\varrho(x)$ соответственно на $(1-x)\varrho(x)$, $(1+x)\varrho(x)$ и $(1-x^2)\varrho(x)$.

2.7. Многочлены Стилтьеса — Вигерта

Вигерт ([2], стр. 7), а также Стилтьес ([11], стр. 507—508) нашли весьма изящное явное представление ортонормальных многочленов $p_n(x)$, соответствующих весовой функции

$$w(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}k\exp(-k^2\ln^2 x)=\pi^{-\frac{1}{2}}kx^{-k^2\ln x},\quad 0<x<+\infty,\ k>0. \qquad (2.7.1)$$

Употребляя обозначение (см. Гаусс [1], стр. 16)

$$\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}=\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^{n-\nu+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^\nu)},\quad 0<\nu<n, \qquad (2.7.2)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}=1,$$

где

$$q=\exp\{-(2k^2)^{-1}\}, \qquad (2.7.3)$$

мы имеем

$$p_n(x)=(-1)^n q^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\{(1-q)\ldots(1-q^n)\}^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}q^{\nu^2}(-q^{\frac{1}{2}}x)^\nu. \qquad (2.7.4)$$

При $n=0$ произведение в скобках заменяется единицей.

Доказательство может быть основано на тождестве Гаусса

$$\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}q^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}u^\nu=(1+qu)(1+q^2u)\ldots(1+q^n u). \qquad (2.7.5)$$

См. Сегё [12], где рассмотрены другие аналогичные многочлены (связанные с теорией тэта-функции).

2.8. Распределения стилтьесовского типа; аналог многочленов Лежандра

П. Л. Чебышев [4] исследовал замечательную конечную последовательность ортогональных многочленов, соответствующих распределению стилтьесовского типа $d\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — ступенчатая функция с единичными скачками в точках $x=0, 1, 2, \ldots, N-1$ (N — фиксированное натуральное число). Это распределение того типа, который был упомянут в конце § 2.2, (1). Соответствующие многочлены с точностью до постоянного множителя даются формулами

$$t_n(x)=n!\,\Delta^n\binom{x}{n}\binom{x-N}{n},\quad n=0, 1, 2, \ldots, N-1. \qquad (2.8.1)$$

Действительно, у П. Л. Чебышева показано ([4], стр. 363, 367; см. также А. А. Марков [1], стр. 21—22), что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t_n(x)\,t_m(x)\,d\alpha(x)=\sum_{x=0,1,2,\ldots,N-1} t_n(x)\,t_m(x)=0 \quad \text{при } n\neq m \qquad (2.8.2)$$

и что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t_n^2(x)\,d\alpha(x)=\sum_{x=0,1,2,\ldots,N-1} t_n^2(x)=$$

$$=\frac{N(N^2-1^2)(N^2-2^2)\ldots(N^2-n^2)}{2n+1}, \qquad (2.8.3)$$

$$n, m=0, 1, \ldots, N-1.$$

Эти формулы справедливы при всех неотрицательных целых n и m, но они тривиальны, когда $n \geqslant N$ или $m \geqslant N$, так как $t_n(x)=0$ в точках $x=0, 1, 2, \ldots, N-1$ при $n \geqslant N$.

В (2.8.1) мы применили символы

$$\left.\begin{aligned} &\Delta f(x)=f(x+1)-f(x),\\ &\Delta^n f(x)=\Delta\{\Delta^{n-1}f(x)\}=\\ &\quad=f(x+n)-\binom{n}{1}f(x+n-1)+\ldots+(-1)^n f(x). \end{aligned}\right\} \tag{2.8.4}$$

Используя теорему о среднем

$$\Delta^n f(x)=f^{(n)}(x+\theta n),\quad 0<\theta<1 \tag{2.8.5}$$

(см., например, Полиа и Сегё [1], часть II, отдел V, задача 98), получаем при фиксированном n следующую замечательную формулу:

$$\lim_{N\to\infty} N^{-n} t_n(Nx)=P_n(2x-1), \tag{2.8.6}$$

где $P_n(x)$ — многочлен Лежандра степени n (см. § 4.1, (3)). Представление (2.8.1) является конечноразностным аналогом формулы (4.3.1), $\alpha=\beta=0$. Доказательство равенств (2.8.2) и (2.8.3) аналогично доказательствам в 4.3.

Чебышев рассмотрел также ([1], [2]) более общий случай, в котором точки $0, 1, 2, 3, \ldots, N-1$ заменены произвольной последовательностью из N различных точек. В связи с этим он получил одну интерполяционную формулу, которая имеет известное значение в математической статистике (см. Ш. Жордан [1]).

2.81. Многочлены Пуассона — Шарлье

Эти многочлены приобрели важное значение в некоторых недавних исследованиях, связанных с теорией вероятностей и статистикой (см. Дёч [2] и литературу, цитированную в работе Шмидта [1]; см. также Мейкснер [1], [2]). Они соответствуют распределению $d\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — ступенчатая функция со скачками

$$j(x)=e^{-a}a^x(x!)^{-1} \quad \text{в точках } x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ a>0. \tag{2.81.1}$$

Очевидно, что полная вариация функции $\alpha(x)$ равна

$$\alpha(+\infty)-\alpha(-\infty)=\sum_{x=0}^{\infty} j(x)=1.$$

Соответствующими ортонормальными многочленами являются

$$\begin{aligned} p_n(x)&=a^{\frac{n}{2}}(n!)^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\nu!\,a^{-\nu}\binom{x}{\nu}=\\ &=a^{\frac{n}{2}}(n!)^{-\frac{1}{2}}(-1)^n\{j(x)\}^{-1}\Delta^n j(x-n). \end{aligned} \tag{2.81.2}$$

Простое доказательство ортонормальности многочленов (2.81.2) может быть дано методом производящих функций (см. § 4.4; см. Дёч [2], стр. 260, и Мейкснер [1], [2]). При достаточно малом $|w|$ определим функцию $G(x, w)$ следующим образом:

$$G(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} (n!)^{-\frac{1}{2}} p_n(x) w^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^{n-\nu}}{n!} \binom{n}{\nu} \nu!\, a^{-\nu} \binom{x}{\nu} w^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^{n-\nu}}{n!} \binom{n}{\nu} \nu!\, a^{-\nu} \binom{x}{\nu} w^n =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} a^{-\nu} \binom{x}{\nu} w^{\nu} e^{-w} = e^{-w} (1 + a^{-1} w)^x. \quad (2.81.3)$$

Тогда имеем

$$\sum_{x=0,1,2,\ldots} f(x) G(x, u) G(x, v) =$$

$$= \sum_{x=0,1,2,\ldots} e^{-a} a^x (x!)^{-1} e^{-u} (1 + a^{-1}u)^x e^{-v} (1 + a^{-1}v)^x =$$

$$= e^{-a-u-v} e^{a(1+a^{-1}u)(1+a^{-1}v)} = e^{\frac{uv}{a}}, \quad (2.81.4)$$

так что

$$\sum_{x=0,1,2,\ldots} f(x) a^{-\frac{n}{2}} (n!)^{-\frac{1}{2}} p_n(x) a^{-\frac{m}{2}} (m!)^{-\frac{1}{2}} p_m(x) = a^{-n} (n!)^{-1} \delta_{n,m}, \quad (2.81.5)$$

$$n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Многочлены (2.81.2) связаны с многочленами Лагерра (§ 5.1) соотношением

$$p_n(x) = a^{-\frac{n}{2}} (n!)^{\frac{1}{2}} L_n^{(x-n)}(a). \quad (2.81.6)$$

Относительно разложения в ряды по многочленам Пуассона—Шарлье см. Е. Шмидт [1].

2.82. Многочлены Кравчука

Некоторые вопросы теории вероятностей приводят также к следующему распределению $d\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — ступенчатая функция со скачком в точке x, равным

$$j(x) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, N, \quad (2.82.1)$$

где N — натуральное число, $p > 0$, $q > 0$ и $p + q = 1$.

См. М. Ф. Кравчук [1]. Полная вариация функции $\alpha(x)$ равна единице. Соответствующая последовательность ортогональных многочленов конечна, как и в § 2.8.

(1) Метод производящих функций приводит к следующей формуле:

$$p_n(x) = \left\{\binom{N}{n}\right\}^{-\frac{1}{2}} (pq)^{-\frac{n}{2}} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{N-x}{n-\nu} \binom{x}{\nu} p^{n-\nu} q^{\nu}, \quad (2.82.2)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Действительно, положим

$$K(x, w) = \sum_{n=0}^{N} \left\{\binom{N}{n}\right\}^{\frac{1}{2}} (pq)^{\frac{n}{2}} p_n(x) w^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{N-x}{n-\nu} \binom{x}{\nu} p^{n-\nu} q^{\nu} w^n. \quad (2.82.3)$$

В случае, когда x целое, $0 \leqslant x \leqslant N$, второе суммирование можно распространить на все значения ν, $n=0, 1, 2, \ldots$; $\nu < n$, так как общий член обращается в нуль, если $N-x < n-\nu$ или если $x < \nu$. (Из $N-x \geqslant n-\nu$, $x \geqslant \nu$ вытекает, что $N \geqslant n$.) Таким образом, имеем

$$K(x, w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{x}{\nu} q^\nu w^\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} (-1)^{n-\nu} \binom{N-x}{n-\nu} p^{n-\nu} w^{n-\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{x}{\nu} q^\nu w^\nu (1-pw)^{N-x} = (1+qw)^x (1-pw)^{N-x}, \qquad (2.82.4)$$

откуда получаем

$$\sum_{x=0, 1, 2, \ldots, N} j(x) K(x, u) K(x, v) =$$

$$= \sum \binom{N}{x} p^x q^{N-x} (1+qu)^x (1-pu)^{N-x} (1+qv)^x (1-pv)^{N-x} =$$

$$= \{p(1+qu)(1+qv) + q(1-pu)(1-pv)\}^N = (1+pq\,uv)^N. \qquad (2.82.5)$$

Следовательно, в самом деле,

$$\sum_{x=0, 1, 2, \ldots, N} j(x) \left\{\binom{N}{n}\right\}^{\frac{1}{2}} (pq)^{\frac{n}{2}} p_n(x) \left\{\binom{N}{m}\right\}^{\frac{1}{2}} (pq)^{\frac{m}{2}} p_m(x) =$$

$$= \binom{N}{n} (pq)^n \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots, N. \qquad (2.82.6)$$

Если $n > N$, то, очевидно, $p_n(x) = 0$ при $x = 0, 1, 2, \ldots, N$.

(2) Два других класса многочленов могут быть выведены из многочленов (2.82.2) с помощью двух различных предельных переходов.

(а) Пусть z — вещественное число, а x означает наибольшее целое число, не превосходящее числа $pN + z(2pqN)^{\frac{1}{2}}$, где p, q, z фиксированы, а $N \to \infty$. Тогда при фиксированном n имеем

$$\lim_{N\to\infty} p_n(x) = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} H_n(z), \qquad (2.82.7)$$

где $H_n(z)$ — многочлен Эрмита степени n (см. § 5.5). Это непосредственно следует из (2.82.3) и (2.82.4), так как при целом x, $0 < x < N$,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left\{\binom{N}{n}\right\}^{\frac{1}{2}} (pq)^{\frac{n}{2}} p_n(x) \left\{\left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} w\right\}^n =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left\{1 + \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} qw\right\}^x \left\{1 - \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} pw\right\}^{N-x} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \exp\left\{\left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} qwx - \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} pw(N-x) - N^{-1}q^2w^2x - N^{-1}p^2w^2(N-x)\right\} =$$

$$= \exp\{2z(pq)^{\frac{1}{2}} w - pqw^2\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} \{(pq)^{\frac{1}{2}} w\}^n$$

(см. Титчмарш [1], § 2.8; см. также (5.5.7)). Поучительно заметить, что тот же предельный переход, примененный к данному распределению $d\alpha(x)$, приводит к распределению $e^{-z^2}\,dz$, соответствующему многочленам Эрмита; более точно:

$$j(x) \cong (2\pi pqN)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-z^2} \quad \text{или} \quad j(x)\,dx \cong \pi^{-\frac{1}{2}}\, e^{-z^2}\,dz. \tag{2.82.8}$$

(b) Пусть $pN=a$, где a — фиксированное положительное число, $N \to \infty$, $p \to 0$, $q \to 1$. Тогда при фиксированном n и фиксированном целом $x \geqslant 0$ мы находим, что $\lim p_n(x)$ при $N \to \infty$ существует и совпадает с многочленами Пуассона — Шарлье (2.81.2). Действительно (см. (2.81.3)),

$$\lim_{N\to\infty} (1+qw)^x (1-pw)^{N-x} =$$

$$= \lim_{p\to 0} (1+qw)^x (1-pw)^{-x} (1-pw)^{\frac{a}{p}} = (1+w)^x e^{-aw}. \tag{2.82.9}$$

2.9. Дальнейшие специальные случаи

Относительно других распределений $d\alpha(x)$ стилтьесовского типа см. А. А. Марков [1], стр. 7—18; Стилтьес [11], стр. 546—555; Готтлиб [1].

Марков рассмотрел случай, когда $\alpha(x)$ — ступенчатая функция со скачками $j(x)=q^x$ в точках q^x, $x=0, 1, 2, \ldots, N-1$, при $q>0$, $q \neq 1$. Это распределение весьма сходно с распределением, указанным в § 2.8. Справедливы формулы, аналогичные (2.8.1) и (2.8.6).

Стилтьес и Готтлиб исследовали случай, когда $\alpha(x)$ — ступенчатая функция со скачками q^x в точках x, $x=0, 1, 2, \ldots, 0<q<1$. 117

Замечательное распределение определяется весовой функцией

$$w(x) = \{x(\alpha-x)(\beta-x)\}^{-\frac{1}{2}}, \qquad 0 < x \leqslant \alpha, \ \alpha < \beta. \tag{2.9.1}$$

Гейне ([3], том I, стр. 294—296) вывел линейное дифференциальное уравнение второго порядка для соответствующих ортогональных многочленов, которое связано с эллиптическими функциями Якоби. Н. И. Ахиезер [1] исследовал ортогональные многочлены, соответствующие весовой функции

$$w(x) = \begin{cases} \{(1-x^2)(a-x)(b-x)\}^{-\frac{1}{2}}\,|c-x|, & -1 \leqslant x \leqslant a, \ b \leqslant x \leqslant +1, \\ 0, & a < x < b, \end{cases} \tag{2.9.2}$$

где $-1 < a < b < +1$, а c зависит только от a и b. Эти многочлены также связаны с эллиптическими функциями.

В отдельных случаях условие положительности весовой функции может быть в некоторой мере расширено (см. Сегё [19]).

Относительно многочленов Поллачека [1]—[4] см. добавление.

ГЛАВА III

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В этой главе мы исследуем общие свойства ортогональных многочленов, которые им присущи при распределениях, удовлетворяющих лишь некоторым условиям интегрируемости. Обычно мы будем рассматривать распределение стилтьесовского типа $d\alpha(x)$, но иногда нас будет интересовать распределение специального вида $w(x)\,dx$. Однако мы всегда будем предполагать,что $\alpha(x)$ и $w(x)$ подчинены условиям, формулированным в § 2.2, (1).

3.1. Экстремальные свойства; замкнутость

(1) Пусть $f(x)$ — данная функция из класса $L^2_\alpha(a, b)$ и пусть $x^n \in L^2_\alpha(a, b)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда, очевидно, существуют в смысле Лебега — Стилтьеса интегралы

$$\int_a^b |f(x)|^2\,d\alpha(x), \quad \int_a^b f(x)\,x^n\,d\alpha(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1.1}$$

Обозначая далее через $\{p_n(x)\}$ ортонормальную последовательность многочленов, соответствующих распределению $d\alpha(x)$ на отрезке $[a, b]$, мы формулируем следующую теорему:

Теорема 3.1.1. *Взвешенное квадратическое уклонение*

$$\int_a^b |f(x) - \varrho(x)|^2\,d\alpha(x), \tag{3.1.2}$$

где $\varrho(x)$ пробегает всю совокупность π_n, будет наименьшим тогда и только тогда, когда $\varrho(x)$ является n-й частной суммой ряда Фурье:

$$\left.\begin{aligned} &f(x) \sim f_0p_0(x) + f_1p_1(x) + f_2p_2(x) + \ldots + f_np_n(x) + \ldots, \\ &f_n = \int_a^b f(x)\,p_n(x)\,d\alpha(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3.1.3}$$

См. теорему 2.1.2 и § 2.2, (3). Искомый минимум равен

$$\int_a^b |f(x)|^2\,d\alpha(x) - \sum_{\nu=0}^{n} |f_\nu|^2. \tag{3.1.4}$$

Отсюда вытекает неравенство Бесселя

$$|f_0|^2 + |f_1|^2 + |f_2|^2 + \ldots + |f_n|^2 + \ldots \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,d\alpha(x). \tag{3.1.5}$$

(2) Заменяя n через $n-1$ и полагая $f(x)=x^n$, мы получаем следующую характеристику многочленов $p_n(x)$:

Теорема 3.1.2. *Интеграл*

$$\int_a^b |\varrho(x)|^2\, d\alpha(x), \tag{3.1.6}$$

где $\varrho(x)$ пробегает всю совокупность π_n со старшим членом x^n, будет минимальным тогда и только тогда, когда $\varrho(x)=\mathrm{const}.\, p_n(x)$.

См. § 2.2, (3). Если k_n — старший коэффициент в $p_n(x)$, то минимум интеграла (3.1.6) достигается для $\varrho(x)=k_n^{-1}p_n(x)$.

(3) Теорема 3.1.3. *Пусть x_0 — произвольное комплексное число, $\varrho(x)$ — произвольный π_n с комплексными коэффициентами, нормированный условием*

$$\int_a^b |\varrho(x)|^2\, d\alpha(x)=1. \tag{3.1.7}$$

Максимум $|\varrho(x_0)|^2$ достигается для многочленов

$$\varrho(x)=\varepsilon\{K_n(x_0, x_0)\}^{-\frac{1}{2}} K_n(x_0, x), \quad |\varepsilon|=1, \tag{3.1.8}$$

где

$$\begin{aligned} K_n(x_0, x) &= \overline{p_0(x_0)}\, p_0(x)+\overline{p_1(x_0)}\, p_1(x)+\ \dots\ +\overline{p_n(x_0)}\, p_n(x)= \\ &= p_0(\bar{x}_0)\, p_0(x)+p_1(\bar{x}_0)\, p_1(x)+\ \dots\ +p_n(\bar{x}_0)\, p_n(x). \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Искомый максимум равен $K_n(x_0, x_0)$.

Если мы напишем

$$\varrho(x)=\lambda_0 p_0(x)+\lambda_1 p_1(x)+\ \dots\ +\lambda_n p_n(x),$$

то условие (3.1.7) примет вид

$$|\lambda_0|^2+|\lambda_1|^2+\ \dots\ +|\lambda_n|^2=1.$$

По неравенству Коши — Буняковского будем иметь

$$|\varrho(x_0)|^2 \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu|^2 \sum_{\nu=0}^{n} |p_\nu(x_0)|^2 = K_n(x_0, x_0). \tag{3.1.10}$$

Равенство в (3.1.10) достигается для $\lambda_\nu=\lambda\overline{p_\nu(x_0)}$, где λ определяется из условия

$$|\lambda|^2 \sum_{\nu=0}^{n} |p_\nu(x_0)|^2=1.$$

Итак, теорема доказана.

Многочлен $K_n(x_0, x)=\overline{K_n(x, x_0)}=K_n(\bar{x}, \bar{x}_0)$ может быть применен в качестве ядра для представления n-й частной суммы $s_n(x)$ ряда Фурье (3.1.3) в интегральной форме. Действительно, мы имеем *)

$$\begin{aligned} s_n(x) &= f_0 p_0(x)+f_1 p_1(x)+\ \dots\ +f_n p_n(x)= \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x)\int_a^b f(t)\, p_\nu(t)\, d\alpha(t)=\int_a^b f(t)\, K_n(t, x)\, d\alpha(t). \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

---

*) См. сноску на стр. 56. (*Прим. перев.*)

В качестве следствия из (3.1.11) мы получаем:

$$\int_a^b K_n(t, x)\,\varrho(t)\,d\alpha(t) = \varrho(x), \tag{3.1.12}$$

где $\varrho(x)$ — произвольный π_n. Легко показать, что это является характеристическим свойством $K_n(t, x)$ как многочлена n-й степени от $\bar{t}$. В качестве дальнейшего следствия отметим такую теорему:

Теорема 3.1.4. *Пусть a и x_0 конечны, причем $x_0 \leqslant a$. Тогда многочлены $\{K_n(x_0, x)\}$ ортогональны относительно распределения $(x-x_0)\,d\alpha(x)$.*

Это непосредственно следует из (3.1.12), если положить $x = x_0$, $\varrho(t) = (t - x_0)\,r(t)$, где $r(t)$ — произвольный π_{n-1}. Аналогичный результат справедлив, когда b конечно.

(4) В соответствии с предыдущими результатами выражение (3.1.4) убывает при возрастании n, и следовательно, оно стремится к неотрицательному пределу при $n \to \infty$. Тогда и только тогда, когда этот предел равен нулю, имеет место равенство Парсеваля

$$|f_0|^2 + |f_1|^2 + |f_2|^2 + \ldots + |f_n|^2 + \ldots = \int_a^b |f(x)|^2\,d\alpha(x). \tag{3.1.13}$$

Справедливость (3.1.13), очевидно, эквивалентна тому факту, что интеграл (3.1.2) может быть сделан сколь угодно малым при надлежащем выборе $\varrho(x)$. А это как раз и есть замкнутость в $L^2_\alpha(a, b)$ последовательности $\{p_n(x)\}$ или последовательности $\{x^n\}$ (см. определение в § 1.5, (1)). В соответствии с теоремой 1.5.2 имеем следующее утверждение:

Теорема 3.1.5. *Последовательность ортогональных многочленов $\{p_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, соответствующая распределению $d\alpha(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$, замкнута в $L^2_\alpha(a, b)$.*

Более того, она замкнута в $L^p_\alpha(a, b)$, $p \geqslant 1$.

Для функции $f(x) \in L^2_\alpha(a, b)$ справедливо равенство Парсеваля (3.1.13).

Функция $f(x) \in L^2_\alpha(a, b)$, для которой $f_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, непременно является нулевой функцией.

Конечность рассматриваемого интервала является существенным ограничением. Некоторые случаи бесконечных интервалов будут рассмотрены в дальнейшем (см. § 5.7).

Предположение, что все $f_n = 0$ в последней части теоремы 3.1.5, эквивалентно факту, что

$$\int_a^b f(x)\,x^n\,d\alpha(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1.14}$$

Исследование этого условия тесно связано с единственностью проблемы моментов Стилтьеса. Приведем пример, показывающий, что теорема 3.1.5 в общем случае не верна для бесконечного интервала:

$$d\alpha(x) = \exp(-x^\mu \cos\mu\pi)\,dx, \quad f(x) = \sin(x^\mu \sin\mu\pi), \quad 0 < \mu < \frac{1}{2}. \tag{3.1.15}$$

Здесь выполняются условия (3.1.14) (см. Полиа и Сегё [1], часть I, отдел III, задача 153), причем $f(x)$ не является нулевой функцией.

В этом же случае, если $\varrho(x)$ — произвольный многочлен, имеем

$$A=\int_0^\infty f^2(x)\,d\alpha(x)=\int_0^\infty f(x)\{f(x)-\varrho(x)\}\,d\alpha(x)\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^\infty |f(x)-\varrho(x)|\,d\alpha(x)\leqslant\left\{\int_0^\infty |f(x)-\varrho(x)|^2 d\alpha(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty d\alpha(x)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда следует, что интегралы

$$\int_0^\infty |f(x)-\varrho(x)|\,d\alpha(x) \quad\text{и}\quad \int_0^\infty |f(x)-\varrho(x)|^2\,d\alpha(x)$$

не могут быть сделаны сколь угодно малыми.

3.11. Обобщения

Когда взвешенное квадратическое отклонение (3.1.2) заменяется отклонением иного типа, то возникают многочисленные аналогичные проблемы. Наиболее интересными случаями являются

$$\int_a^b |f(x)-\varrho(x)|^p\,d\alpha(x), \tag{3.11.1}$$

где p — фиксированное положительное число, и предельный случай [1]) при $p\to\infty$ (называемый также чебышевским отклонением):

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)-\varrho(x)|\,w(x)\}. \tag{3.11.2}$$

В последнем случае предполагается, что $f(x)$ и $w(x)$ — непрерывные функции. Подобным же образом интеграл (3.1.6) можно было бы заменить выражением

$$\int_a^b |\varrho(x)|^p\,d\alpha(x), \tag{3.11.3}$$

или соответственно

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|\varrho(x)|\,w(x)\}. \tag{3.11.4}$$

Многочлены данной степени, которые минимизируют выражения (3.11.1) и (3.11.2), представляют собой обобщение n-й частной суммы разложения $f(x)$ в ряд по ортогональным многочленам, соответствующим $d\alpha(x)$ или $w(x)\,dx$. Многочлены данной степени со старшим коэффициентом единица, которые минимизируют (3.11.3) и (3.11.4), представляют собой обобщение самих ортогональных многочленов.

---

[1]) Заменяя $d\alpha(x)$ через $w^p(x)\,dx$, мы будем иметь (a и b конечны, $f(x)$ и $w(x)$ непрерывны):

$$\lim_{p\to\infty}\left\{\int_a^b |f(x)-\varrho(x)|^p w^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)-\varrho(x)|\,w(x)\}.$$

Число исследований, которые могут быть классифицированы с этой общей точки зрения, весьма значительно; поэтому здесь могут быть указаны лишь наиболее важные аспекты этих исследований.

(1) При $p=2$ многочлены, минимизирующие (3.11.1), являются частными суммами разложения $f(x)$ в ряд по ортогональным многочленам (теорема 3.1.1). В случае, когда $a=-1$, $b=+1$, $w(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, мы получаем разложение $f(x)=f(\cos\theta)$ в ряд по косинусам; в случае, когда $a=-1$, $b=+1$, $w(x)=1$, мы получаем ряд Лежандра (см. главы IX и XIII).

(2) Существование и единственность минимизирующих многочленов были исследованы в общем случае (3.11.1) (см. Д ж е к с о н [1]—[3]; Ш о х а т [1], стр. 509—513, [4], стр. 160—161). Оба автора рассматривали только распределения вида $w(x)dx$. Относительно общего распределения см. Т а м а р к и н [1], стр. 118.

(3) Пусть a и b конечны, $d\alpha(x)=dx$ и $p=1$. Относительно проблем (3.11.1) и (3.11.3) см. С. Н. Б е р н ш т е й н [2], в частности, стр. 14—16, где даны ссылки на предыдущую литературу (см. также Я. Л. Г е р о н и м у с [5]). Н. И. А х и е з е р [2] исследовал проблему нахождения минимума выражения

$$\int_p^q |\varrho(x)|\,dx+\int_r^s |\varrho(x)|\,dx, \tag{3.11.5}$$

где $[p,\ q]$ и $[r,\ s]$ — данные конечные непересекающиеся отрезки, а $\varrho(x)$ пробегает все множество π_n со старшим членом x^n. Минимизирующие многочлены могут быть выражены через эллиптические функции.

(4) В случае, когда a и b конечны, $f(x)$ непрерывна, а $w(x)=1$, проблема минимума, соответствующая (3.11.2), приводит к наилучшему приближению непрерывных функций многочленами. Связь между наилучшим приближением (при $n\to\infty$) и свойствами непрерывности $f(x)$ была исследована весьма подробно (см. Д ж е к с о н [4]*)).

(5) Если a и b конечны, $f(x)$ непрерывна, $d\alpha(x)=dx$, то при $p\to\infty$ минимизирующие многочлены в (3.11.1) (при фиксированном n) стремятся к многочлену, минимизирующему выражение (3.11.2). (В обоих случаях существование и единственность имеют место). См. П о л и а [2]; также Ш о х а т [1], стр. 513—514, [4], стр. 171. Оба автора рассматривали только случай распределения $w(x)dx$. Относительно общего распределения см. Т а м а р к и н [1], стр. 125.

(6) Если $a=-1$, $b=+1$, $w(x)=1$, то решением проблемы (3.11.4) будет $\varrho(x)=2^{1-n}T_n(x)$ (см. обозначение в (1.12.3)). Это — классический результат Чебышева, он является исходным пунктом многих чрезвычайно интересных исследований (см. С. Н. Б е р н ш т е й н [1]).

3.2. Рекуррентная формула; формула Кристоффеля — Дарбу

(1) Т е о р е м а 3.2.1. *Справедливо следующее соотношение между любыми тремя последовательными ортогональными многочленами:*

$$p_n(x)=(A_nx+B_n)\,p_{n-1}(x)-C_np_{n-2}(x),\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots \tag{3.2.1}$$

Здесь A_n, B_n, C_n — постоянные, причем $A_n>0$ и $C_n>0$. Если старший коэффициент многочлена $p_n(x)$ обозначим через k_n, то будем иметь

$$A_n=\frac{k_n}{k_{n-1}},\quad C_n=\frac{A_n}{A_{n-1}}=\frac{k_nk_{n-2}}{k_{n-1}^2}. \tag{3.2.2}$$

*) См. также книги, указанные в сноске на стр. 20. (*Прим. перев.*)

Для доказательства определим прежде всего число A_n по условию, чтобы многочлен $p_n(x) - A_n x p_{n-1}(x)$ был π_{n-1}. Этот многочлен может быть записан в виде линейной комбинации $\lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \ldots + \lambda_{n-1} p_{n-1}(x)$. В силу ортогональности ясно, что $\lambda_\nu = 0$ при $\nu < n-2$, откуда вытекает (3.2.1). Первое из равенств (3.2.2) является следствием (3.2.1), второе вытекает из равенства

$$\int_a^b p_n(x) p_{n-2}(x)\, d\alpha(x) = 0 = A_n \int_a^b x p_{n-1}(x) p_{n-2}(x)\, d\alpha(x) - C_n,$$

так как интеграл правой части равен

$$\int_a^b p_{n-1}(x)(k_{n-2}x^{n-1} + \ldots)\, d\alpha(x) = \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \int_a^b p_{n-1}^2(x)\, d\alpha(x).$$

Формула (3.2.1) будет справедлива и при $n = 1$, если мы положим $p_{-1}(x) = 0$, причем C_1, очевидно, может быть любым. Тогда будет верна и первая из формул (3.2.2) при $n = 1$.

Относительно теоремы, обратной к теореме 3.2.1, см. Ф а в а р [1].

(2) Т е о р е м ы 3.2.2. *Имеет место соотношение*

$$p_0(x) p_0(y) + p_1(x) p_1(y) + \ldots + p_n(x) p_n(y) =$$
$$= \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) p_{n+1}(y)}{x-y}. \qquad (3.2.3)$$

В частном случае $d\alpha(x) = dx$ см. К р и с т о ф ф е л ь [1], а также Д а р б у [1] *). Это важное тождество легко может быть выведено из рекуррентной формулы. Действительно,

$$p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) p_{n+1}(y) =$$
$$= \{(A_{n+1}x + B_{n+1}) p_n(x) - C_{n+1} p_{n-1}(x)\} p_n(y) -$$
$$- p_n(x) \{(A_{n+1}y + B_{n+1}) p_n(y) - C_{n+1} p_{n-1}(y)\} =$$
$$= A_{n+1}(x-y) p_n(x) p_n(y) + C_{n+1}\{p_n(x) p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x) p_n(y)\}.$$

Учитывая (3.2.2), отсюда получаем тождество

$$\frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) p_{n+1}(y)}{x-y} =$$
$$= p_n(x) p_n(y) + \frac{k_{n-1}}{k_n} \frac{p_n(x) p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x) p_n(y)}{x-y},$$

которое справедливо и для $n = 0$, причем ясно, что k_{-1} может быть взято произвольным. Заменяя n через $0, 1, 2, \ldots, n$ и складывая, получаем (3.2.3).

Отметим частный случай, когда $x = y$:

$$p_0^2(x) + p_1^2(x) + \ldots + p_n^2(x) =$$
$$= \frac{k_n}{k_{n+1}} \{p'_{n+1}(x) p_n(x) - p'_n(x) p_{n+1}(x)\}. \qquad (3.2.4)$$

---

*) Н. И. Ахиезер в статье «Общая теория полиномов П. Л. Чебышева» (Научное наследие П. Л. Чебышева, вып. I, М., 1945) отмечает, что формулы (3.2.3) (а также (3.1.11)) были указаны П. Л. Ч е б ы ш е в ы м [1] для случая кусочно-постоянной $\alpha(x)$. (*Прим. перев.*)

(3) Левая часть (3.2.3) тождественно равна ядру $K_n(\bar{x}, y) = K_n(\bar{y}, x)$, введенному в (3.1.9). Применяя (3.1.12), мы можем вывести (3.2.3) иным путем, установив, что правая часть (3.2.3) (заменяем y на t) удовлетворяет соотношению (3.1.12). В самом деле, мы имеем

$$\frac{k_n}{k_{n+1}} \int_a^b \frac{p_{n+1}(x)\, p_n(t) - p_n(x)\, p_{n+1}(t)}{x-t}\, \varrho(t)\, d\alpha(t) =$$

$$= \frac{k_n}{k_{n+1}} \int_a^b \{p_{n+1}(x)\, p_n(t) - p_n(x)\, p_{n+1}(t)\} \frac{\varrho(t) - \varrho(x)}{x-t}\, d\alpha(t) +$$

$$+ \frac{k_n}{k_{n+1}} \varrho(x) \int_a^b p_n(t) \frac{p_{n+1}(x) - p_{n+1}(t)}{x-t}\, d\alpha(t) +$$

$$+ \frac{k_n}{k_{n+1}} \varrho(x) \int_a^b p_{n+1}(t) \frac{p_n(t) - p_n(x)}{x-t}\, d\alpha(t).$$

Первый и третий интегралы обращаются в нуль (также и при $n = 0$). Второе слагаемое равно $\varrho(x)$, так как

$$\frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x) - p_{n+1}(t)}{x-t} = k_n t^n + \ldots$$

Другое доказательство тождества (3.2.3) можно получить, комбинируя теорему 3.1.4 с теоремой 2.5.

3.3. Элементарные свойства нулей

Теорема 3.3.1. *Нули ортогональных многочленов $p_n(x)$, соответствующих распределению $d\alpha(x)$ на отрезке $[a, b]$, являются вещественными и простыми и расположены внутри промежутка (a, b).*

В специальных случаях, в частности в классических случаях (см. § 2.4), мы получим в дальнейшем более точные сведения относительно распределения нулей (см. главу VI). В качестве следствия из теоремы 3.3.1 имеем $\alpha(a) < \alpha(x_1 - 0)$, $\alpha(x_n + 0) < \alpha(b)$, где x_1 и x_n — соответственно наименьший и наибольший нули многочлена $p_n(x)$.

(1) Обычное доказательство предыдущей теоремы основано на свойстве ортогональности. Из равенства

$$\int_a^b p_n(x)\, d\alpha(x) = 0, \quad n \geqslant 1,$$

вытекает, что внутри промежутка (a, b) лежит по крайней мере один нуль $p_n(x)$, в котором $p_n(x)$ меняет знак. (Функция $\alpha(x)$ имеет бесконечное число точек роста.) Если $x_1, x_2, \ldots, x_l$ — абсциссы всех таких нулей, то произведение $p_n(x)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_l)$ имеет постоянный знак (т. е. неотрицательно или неположительно на всем отрезке $[a, b]$). С другой стороны, если $l < n$, то

$$\int_a^b p_n(x)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_l)\, d\alpha(x) = 0. \tag{3.3.1}$$

Так как подынтегральное выражение не является нулевой функцией, то $l \geqslant n$; следовательно, $l = n$.

(2) Предыдущее рассуждение может быть несколько видоизменено следующим образом. Пусть x_0 — произвольный нуль многочлена $p_n(x)$.

Поскольку коэффициенты $p_n(x)$ вещественны, то $p_n(x)/(x-\bar{x}_0)$ есть π_{n-1}. С другой стороны, имеем

$$\int_a^b p_n(x)\frac{p_n(x)}{x-\bar{x}_0}\,d\alpha(x)=\int_a^b (x-x_0)\left|\frac{p_n(x)}{x-x_0}\right|^2 d\alpha(x)=0, \tag{3.3.2}$$

следовательно,

$$x_0\int_a^b \left|\frac{p_n(x)}{x-x_0}\right|^2 d\alpha(x)=\int_a^b x\left|\frac{p_n(x)}{x-x_0}\right|^2 d\alpha(x). \tag{3.3.3}$$

Иными словами, точка x_0 является центром тяжести распределения масс на отрезке $[a, b]$. Поскольку интеграл в левой части (3.3.3) положителен, то число x_0 вещественно. Из (3.3.2) мы видим, что $a<x_0<b$.

Если бы точка x_0 была кратным нулем, то мы имели бы

$$\int_a^b p_n(x)\frac{p_n(x)}{(x-x_0)^2}\,d\alpha(x)=\int_a^b \left\{\frac{p_n(x)}{x-x_0}\right\}^2 d\alpha(x)=0, \tag{3.3.4}$$

что приводит к противоречию.

(3) Утверждение относительно расположения нулей в промежутке (a, b) (без указания, что они простые) вытекает также из минимального свойства, формулированного в теореме 3.1.2. Действительно, если нуль x_0 лежит вне отрезка $[a, b]$, то расстояние $|x-x_0|$ может быть уменьшено одновременно для всех x из $[a, b]$ путем смещения точки x_0. Стало быть, соответствующий интеграл (3.1.6) не может быть минимальным.

Относительно распространения этого рассуждения на многочлены, обладающие аналогичными или более общими минимальными свойствами в вещественной или комплексной области см. Фейер [7], Сегё [5].

Из свойства ортогональности ядра $K_n(x_0, x)$ (теорема 3.1.4) мы также можем вывести некоторые заключения относительно расположения нулей по x, если x_0 рассматривать как параметр (см. Сегё [5], стр. 241—244).

(4) Вещественность и простота нулей (без более подробного утверждения об их расположении на отрезке $[a, b]$) могут быть установлены из рекуррентной формулы с помощью теоремы Штурма (см. Перрон [4], том 2, стр. 7—9). В самом деле,многочлены

$$p_0(x),\ p_1(x),\ p_2(x),\ \dots,\ p_n(x) \tag{3.3.5}$$

образуют последовательность Штурма на отрезке $[a, b]$, так как: a) если $p_\nu(x_0)=0$, $\nu\geqslant 1$, то из (3.2.1) вытекает, что $p_{\nu-1}(x_0)\,p_{\nu+1}(x_0)<0$; b) $p_0(x)$ — постоянная $\neq 0$, а $p_n(x)$ — многочлен точной степени n; c) в точке x_0, в которой $p_n(x_0)=0$, мы имеем $p_n'(x_0)\,p_{n-1}(x_0)>0$. Последний факт следует из (3.2.4), если заменить n через $n-1$, а x — через x_0 (см. ниже). Далее, число изменений знака в (3.3.5) равно n, если $x<0$, и $|x|$ достаточно велик; оно равно нулю, если $x>0$, и достаточно велико (см. § 6.2, (1) и сноску к нему).

(5) Из (3.2.4) мы получаем при вещественных x важное неравенство:

$$p_{n+1}'(x)\,p_n(x)-p_n'(x)\,p_{n+1}(x)>0. \tag{3.3.6}$$

В качестве первого следствия из него отметим, что многочлены $p_n(x)$ и $p_{n+1}(x)$ не могут иметь общих нулей. Более того, мы получаем следующую теорему о взаимном разделении нулей:

Теорема 3.3.2. *Пусть $x_1<x_2<\dots<x_n$ — нули многочлена $p_n(x)$, $x_0=a$, $x_{n+1}=b$. Тогда каждый промежуток $(x_\nu, x_{\nu+1})$, $\nu=0, 1, 2, \dots, n$ содержит один и только один нуль многочлена $p_{n+1}(x)$.*

Действительно, если ξ и η, $\xi < \eta$, — два последовательных нуля многочлена $p_n(x)$, то $p_n'(\xi)\,p_n'(\eta) < 0$. С другой стороны, (3.3.6) дает $-p_n'(\xi)\,p_{n+1}(\xi) > 0$, $-p_n'(\eta)\,p_{n+1}(\eta) > 0$, следовательно, $p_{n+1}(\xi)\,p_{n+1}(\eta) < 0$. Это означает, что в промежутке $\xi < x < \eta$ лежит нечетное число нулей многочлена $p_{n+1}(x)$, значит, по крайней мере один. Пусть $\xi = x_n$ — наибольший из нулей $p_n(x)$; тогда $p_n'(\xi) > 0$ и (3.3.6) дает $p_{n+1}(\xi) < 0$. Так как $p_{n+1}(b) > 0$, то $p_{n+1}(x)$ имеет по крайней мере один нуль справа от точки $\xi = x_n$ и аналогично хотя бы один нуль слева от наименьшего нуля x_1 многочлена $p_n(x)$. Следовательно, мы можем иметь лишь по одному нулю в промежутках между x_ν и $x_{\nu+1}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$. Меняя ролями $p_n(x)$ и $p_{n+1}(x)$, можем показать, что между двумя последовательными нулями многочлена $p_{n+1}(x)$ лежит по крайней мере один нуль $p_n(x)$. Это показывает снова, что между двумя нулями многочлена $p_n(x)$ не может лежать более одного нуля многочлена $p_{n+1}(x)$.

(6) Теорема 3.3.3. *Между двумя нулями многочлена $p_n(x)$ лежит по крайней мере один нуль многочлена $p_m(x)$, $m > n$.*

См. Стилтьес [11], стр. 414—418. Относительно доказательства, приведенного ниже, см. Поповичиу [1].

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ — нули многочлена $p_m(x)$, записанные в возрастающем порядке. В соответствии с теоремой 3.4.1 мы имеем

$$\sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu p_n(\xi_\mu)\,\varrho(\xi_\mu) = \int_a^b p_n(x)\,\varrho(x)\,d\alpha(x) = 0, \tag{3.3.7}$$

где $\{\lambda_\mu\}$ — числа Кристоффеля, соответствующие последовательности $\{\xi_\mu\}$ (см. § 3.4), а $\varrho(x)$ — произвольный π_{n-1}. Далее, рассуждение, подобное приведенному выше в (1), показывает, что последовательность $\{p_n(\xi_1), p_n(\xi_2), \ldots, p_n(\xi_m)\}$ имеет не менее чем n перемен знака, следовательно, в точности n. При этом $\operatorname{sign} p_n(\xi_1) = (-1)^n$, $p_n(\xi_m) > 0$. Стало быть, имеется n различных интервалов

$$\xi_{\mu_\nu} < x < \xi_{\mu_{\nu+1}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad 1 \leqslant \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{n+1} \leqslant m,$$

содержащих точно по одному нулю многочлена $p_n(x)$.

Другими следствиями неравенства (3.3.6) являются два следующих предложения:

Теорема 3.3.4. *Пусть c — произвольная вещественная постоянная. Тогда многочлен*

$$p_{n+1}(x) - c\,p_n(x) \tag{3.3.8}$$

имеет $n+1$ различных нулей. Если $c > 0$ ($c < 0$), то эти нули лежат внутри промежутка (a, b), за исключением большего (соответственно меньшего), который лежит на отрезке $[a, b]$ только при условии $c \leqslant p_{n+1}(b)/p_n(b)$ (соответственно $c \geqslant p_{n+1}(a)/p_n(a)$).

Действительно, функция $p_{n+1}(x)/p_n(x)$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ в промежутке $x_\nu < x < x_{\nu+1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, где $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$.

Теорема 3.3.5. *Справедливо следующее разложение на элементарные дроби:*

$$\frac{p_n(x)}{p_{n+1}(x)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{l_\nu}{x - \xi_\nu}, \quad l_\nu > 0, \tag{3.3.9}$$

где $\{\xi_\nu\}$ — нули многочлена $p_{n+1}(x)$.

В самом деле, мы имеем

$$l_\nu = \frac{p_n(\xi_\nu)}{p_{n+1}'(\xi_\nu)} = \frac{p_{n+1}'(\xi_\nu)\,p_n(\xi_\nu) - p_n'(\xi_\nu)\,p_{n+1}(\xi_\nu)}{\{p_{n+1}'(\xi_\nu)\}^2} > 0. \tag{3.3.10}$$

3.4. Механическая квадратруа Гаусса—Якоби

(1) Теорема 3.4.1. *Если $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — нули многочлена $p_n(x)$, то существуют такие вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, что*

$$\int_a^b \varrho(x)\,d\alpha(x) = \lambda_1\varrho(x_1) + \lambda_2\varrho(x_2) + \ldots + \lambda_n\varrho(x_n), \tag{3.4.1}$$

где $\varrho(x)$ — произвольный π_{2n-1}. Распределение $d\alpha(x)$ и натуральное число n определяют однозначно числа λ_ν.

Последовательность нулей $\{x_\nu = x_{\nu n}\}$, так же как и последовательность чисел $\{\lambda_\nu = \lambda_{\nu n}\}$, разумеется, зависит от n. Числа λ_ν называют коэффициентами Кристоффеля (см. Гаусс [2], Якоби [1], Кристоффель [1], П. Л. Чебышев [1], Мелер [1], Гейне [3], том 2, стр. 1—31).

Достаточно доказать (3.4.1) для частных случаев $\varrho(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$. Эти случаи приводят к $2n$ условиям, которые однозначно определяют, как мы докажем, коэффициенты λ_ν и точки x_ν. (Если различные точки x_ν заданы произвольно, то можно определить λ_ν так, чтобы (3.4.1) выполнялось для всех π_{n-1}.)

Для того чтобы доказать (3.4.1), мы строим интерполяционный многочлен Лагранжа $L(x)$ степени $n-1$, который совпадает с $\varrho(x)$ в точках x_ν:

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho(x_\nu) \frac{p_n(x)}{p_n'(x_\nu)(x-x_\nu)} = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho(x_\nu)\, l_\nu(x), \tag{3.4.2}$$

где $l_\nu(x)$ — фундаментальные многочлены, соответствующие узлам интерполирования $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (см. § 14.1). Многочлен $\varrho(x) - L(x)$ делится на $p_n(x)$, так что $\varrho(x) - L(x) = p_n(x)\, r(x)$, где $r(x)$ есть π_{n-1}.

Таким образом,

$$\int_a^b \varrho(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b L(x)\,d\alpha(x) + \int_a^b p_n(x)\,r(x)\,d\alpha(x) =$$

$$= \int_a^b L(x)\,d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho(x_\nu) \int_a^b l_\nu(x)\,d\alpha(x).$$

Это доказывает (3.4.1), где

$$\lambda_\nu = \int_a^b l_\nu(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b \frac{p_n(x)}{p_n'(x_\nu)(x-x_\nu)}\,d\alpha(x), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4.3}$$

Обратно, пусть (3.4.1) имеет место для любого π_{2n-1}, который обозначим через $\varrho(x)$. Выберем $\varrho(x) = l(x)\,r(x)$, где $l(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, а $r(x)$ — произвольный π_{n-1}. Из (3.4.1) находим

$$\int_a^b l(x)\,r(x)\,d\alpha(x) = 0,$$

следовательно, $l(x) = \mathrm{const}\; p_n(x)$.

Интерпретация левой части (3.4.1) как механической квадратуры очевидна. Для любой функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, мы можем написать (см. § 15.1)

$$Q_n(f) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n). \tag{3.4.4}$$

Тогда теорема 3.4.1 может быть формулирована так:

$$Q_n(f) = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x),$$

если только $f(x)$ есть π_{2n-1}. Далее, из (3.4.3) коэффициенты Кристоффеля λ_ν представляют собой значения $Q_n(f)$ для $f(x) = l_\nu(x)$. Мы можем также исследовать для данной функции $f(x)$ сходимость $\{Q_n(f)\}$ при $n \to \infty$ (см. теорему 15.2.3 и задачу 9). Относительно формулы механической квадратуры, справедливой для любого π_{2n-k}, см. Шохат [7], стр. 465.

(2) Теорема 3.4.2. *Коэффициенты Кристоффеля λ_ν положительны и удовлетворяют равенству*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a). \tag{3.4.5}$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\lambda_\nu = \int_a^b \left[\frac{p_n(x)}{p_n'(x_\nu)(x - x_\nu)}\right]^2 d\alpha(x), \tag{3.4.6}$$

$$\lambda_\nu = \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{-1}{p_{n+1}(x_\nu)\,p_n'(x_\nu)} = \frac{k_n}{k_{n-1}} \frac{1}{p_{n-1}(x_\nu)\,p_n'(x_\nu)}, \tag{3.4.7}$$

$$\lambda_\nu^{-1} = p_0^2(x_\nu) + p_1^2(x_\nu) + \ldots + p_n^2(x_\nu) = K_n(x_\nu, x_\nu). \tag{3.4.8}$$

Здесь сохранены предыдущие обозначения.

Относительно (3.4.8) см. Шохат [3], стр. 456. Частный случай $a = -1$, $b = +1$, $d\alpha(x) = dx$ исключительно важен. Тогда абсциссы x_ν являются нулями n-го многочлена Лежандра, а сумма коэффициентов Кристоффеля равна 2, т. е. длине промежутка интегрирования. Этот случай первоначально был рассмотрен Гауссом и Якоби. Другой важный частный случай $a = -1$, $b = +1$, $d\alpha(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$ рассмотрен Мелером [1].

Положительность чисел λ_ν устанавливается каждым из представлений (3.4.6), (3.4.7), (3.4.8). В случае (3.4.7) нужно учесть неравенство (3.3.6). В соответствии с (3.4.5) сумма λ_ν равна общей массе распределения $d\alpha(x)$, сосредоточенной на данном отрезке.

Изучение формулы (3.4.7) может быть продолжено в случае классических ортогональных многочленов (см. § 15.3, (1)).

Для доказательства теоремы 3.4.2 полагаем $\varrho(x) = l_\nu^2(x)$ в (3.4.1), что дает (3.4.6). Далее, полагая $y = x_\nu$ в (3.2.3), умножая на $d\alpha(x)$ и интегрируя, мы получаем в соответствии с (3.4.3)

$$1 = \frac{k_n}{k_{n+1}} \int_a^b \frac{-p_n(x)\,p_{n+1}(x_\nu)}{x - x_\nu}\,d\alpha(x) = -\frac{k_n}{k_{n+1}}\,p_{n+1}(x_\nu)\,p_n'(x_\nu)\,\lambda_\nu.$$

Это доказывает (3.4.7). Комбинируя (3.4.7) с (3.2.4) при $x = x_\nu$, мы получаем (3.4.8).

(3) Как пример применения (3.4.1) мы получаем при произвольных вещественных $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ равенства

$$\left.\begin{aligned} F(u) &= \int_a^b (u_0+u_1x+\ldots+u_{n-1}x^{n-1})^2\,d\alpha(x) = \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu (u_0+u_1x_\nu+\ldots+u_{n-1}x_\nu^{n-1})^2, \\ G(u) &= \int_a^b x(u_0+u_1x+\ldots+u_{n-1}x^{n-1})^2\,d\alpha(x) = \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu (u_0+u_1x_\nu+\ldots+u_{n-1}x_\nu^{n-1})^2. \end{aligned}\right\} \tag{3.4.9}$$

Таким образом, характеристическими значениями пучка форм

$$G(u)-\xi F(u) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu (x_\nu-\xi)(u_0+u_1x_\nu+\ldots+u_{n-1}x_\nu^{n-1})^2 \tag{3.4.10}$$

являются как раз $\xi=x_1, x_2, \ldots, x_n$. В обозначениях (2.2.1) левая часть квадратичной формы (3.4.10) может быть записана в виде

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1} (c_{\nu+\mu+1}-\xi c_{\nu+\mu})u_\nu u_\mu. \tag{3.4.11}$$

Определителем этой формы будет π_n относительно ξ, который обращается в нуль в точках $\xi=x_1, x_2, \ldots, x_n$. Следовательно, он равен произведению $p_n(\xi)$ на постоянную. Итак, мы приходим к новому доказательству равенства (2.2.9).

См. также задачу 10.

3.41. Теорема Чебышева — Маркова — Стилтьеса о взаимном разделении

В 1874 г. Чебышев высказал замечательное утверждение относительно коэффициентов Кристоффеля (см. [6], [8]), доказательства которого были даны независимо друг от друга А. А. Марковым и Стилтьесом. Пусть $n \geqslant 2$. В силу положительности λ_ν и равенства (3.4.5) существуют такие числа[1]) $y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1}$, $a < y_1$, $y_{n-1} < b$, что

$$\lambda_\nu = \alpha(y_\nu)-\alpha(y_{\nu-1}), \quad \nu=1, 2, \ldots, n, \quad y_0=a, \quad y_n=b. \tag{3.41.1}$$

Теорема 3.41.1. *Нули $x_1, x_2, \ldots, x_n$, записанные в возрастающем порядке, взаимно разделяются с числами $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, т. е.*

$$x_\nu < y_\nu < x_{\nu+1}, \tag{3.41.2}$$

более точно:

$$\begin{aligned} \alpha(x_\nu+0)-\alpha(a) < \alpha(y_\nu)-\alpha(a) = \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\nu < \\ < \alpha(x_{\nu+1}-0)-\alpha(a), \quad \nu=1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{3.41.3}$$

---

[1]) Для того чтобы определить числа y_ν, может понадобиться изменить $\alpha(y)$ в некоторых точках разрыва, что, разумеется, не влияет на (3.4.1). Следует также заметить, что, вообще говоря, числа y_ν определяются не однозначно.

В силу (3.41.1) квадратурная формула (3.4.1) может быть записана в виде

$$\int_a^b \varrho(x)\,d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho(x_\nu)\{\alpha(y_\nu) - \alpha(y_{\nu-1})\}. \qquad (3.41.4)$$

Так как $y_{\nu-1} < x_\nu < y_\nu$, то правая часть (3.41.4) имеет вид интегральной суммы Римана — Стилтьеса.

В качестве дальнейшего следствия из (3.41.3) отметим, что $\alpha(x_\nu + 0) < \alpha(x_{\nu+1} - 0)$. Это означает, что справедливо следующее предложение:

Теорема 3.41.2. *В открытом промежутке $(x_\nu, x_{\nu+1})$ между двумя последовательными нулями многочлена $p_n(x)$ функция $\alpha(x)$ не может быть постоянной.*

Иными словами, в открытом промежутке, в котором $\alpha(x)$ постоянна, многочлен $p_n(x)$ имеет не более одного нуля.

3.411. Первое доказательство теоремы о взаимном разделении [1])

Пусть ν — целое число, такое, что $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$. Выберем в (3.4.1) $\varrho(x)$ так, чтобы это был π_{2n-2}, подчиненный $2n-1$ следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 1, 2, \ldots, \nu, \\ 0 & \text{при } k = \nu+1, \ \nu+2, \ldots, n, \end{cases} \\ &\varrho'(x_k) = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \qquad (3.411.1)$$

Этими условиями многочлен определяется однозначно.

По теореме Ролля $\varrho'(x)$ имеет по крайней мере по одному нулю в каждом из открытых промежутков

$$(x_1, x_2), \ (x_2, x_3), \ \ldots, (x_{\nu-1}, x_\nu), \quad (x_{\nu+1}, x_{\nu+2}), \ \ldots, (x_{n-1}, x_n). \qquad (3.411.2)$$

Эти нули вместе с x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, $k \neq \nu$, составляют $(n-2)+(n-1)=2n-3$ нуля многочлена $\varrho'(x)$. Так как $\varrho'(x)$ есть π_{2n-3}, то это все нули $\varrho'(x)$,

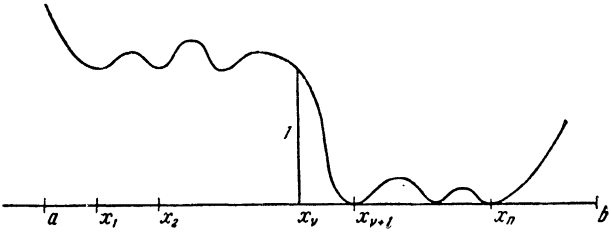

Рис. 2.

причем все они простые. Следовательно, $\varrho(x)$ — монотонная функция между двумя последовательными нулями $\varrho'(x)$; в частности, многочлен $\varrho(x)$ монотонен между нулем, лежащим в промежутке $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, и точкой $x_{\nu+1}$, стало быть, и подавно на отрезке $[x_\nu, x_{\nu+1}]$. Кроме того, $\varrho(x)$ убывает на отрезке $[x_\nu, x_{\nu+1}]$, так как $\varrho(x_\nu)=1$, $\varrho(x_{\nu+1})=0$.

Таким образом, ясно, что график $\varrho(x)$ имеет указанный на рис. 2 вид. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \varrho(x) \geqslant 1 \ \text{при } a \leqslant x \leqslant x_\nu, \\ \varrho(x) \geqslant 0 \ \text{при } x_\nu \leqslant x \leqslant b. \end{aligned}\right\} \qquad (3.411.3)$$

[1]) См. А. А. Марков [1], [2], [3]; Стилтьес [1].

Для этого многочлена из (3.4.1) получаем

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\nu=\int\limits_a^b \varrho(x)\,d\alpha(x)>\int\limits_a^{x_\nu+0}\varrho(x)\,d\alpha(x)>\int\limits_a^{x_\nu+0}d\alpha(x),$$

что доказывает часть неравенств (3.41.3).

Для того чтобы доказать остальную часть, рассмотрим распределение $d\,[-\alpha(-x)]$ на отрезке $[-b,\ -a]$). Соответствующая последовательность ортонормальных многочленов будет $\{(-1)^n p_n(-x)\}$ с нулями $-x_n<-x_{n-1}<\ldots<-x_1$. Вместо чисел $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1}$ мы имеем теперь $-y_{n-1},\ -y_{n-2},\ \ldots,\ -y_1$. Тогда в соответствии с предыдущим результатом получим $-\alpha(x_{n-\nu+1}-0)<-\alpha(y_{n-\nu})$, т. е. $\alpha(y_\nu)<\alpha(x_{\nu+1}-0)$.

3.412. Второе доказательство теоремы о взаимном разделении[1])

Пусть $V(x)$ — неубывающая ступенчатая функция, определенная следующими условиями:

$$V(x)=\begin{cases}0, & a\leqslant x<x_1,\\ \lambda_1, & x_1\leqslant x<x_2,\\ \lambda_1+\lambda_2, & x_2\leqslant x<x_3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n, & x_n\leqslant x\leqslant b.\end{cases} \tag{3.412.1}$$

Тогда (3.4.1) может быть записано в виде

$$\int\limits_a^b \varrho(x)\,d\{\alpha(x)-V(x)\}=\int\limits_a^b \varrho(x)\,d\{\alpha(x)-\alpha(a)-V(x)\}=0. \tag{3.412.2}$$

Интегрирование по частям (см. (1.4.4)) дает

$$\int\limits_a^b \{\alpha(x)-\alpha(a)-V(x)\}\,\varrho'(x)\,dx=0, \tag{3.412.3}$$

так как $V(a)=0$ и (см. (3.4.5)) $\alpha(b)-\alpha(a)-V(b)=0$.

Функция $V(x)$ постоянна в открытых промежутках $(a,\ x_1),\ (x_1,\ x_2),\ \ldots$ $\ldots,\ (x_{n-1},\ x_n),\ (x_n,\ b)$, следовательно, функция $\alpha(x)-\alpha(a)-V(x)=\beta(x)$ не убывает в этих промежутках. Мы имеем $\beta(x)\geqslant 0$ (при этом $\beta(x)\not\equiv 0$) в первом промежутке и $\beta(x)\leqslant 0$ (при этом $\beta(x)\not\equiv 0$) в последнем промежутке. В остальных промежутках $(x_\nu,\ x_{\nu+1})$ функция $\beta(x)$ либо имеет постоянный знак (постоянно неотрицательна или неположительна), либо существует такая точка y, $x_\nu<y<x_{\nu+1}$, что $\beta(y-0)<0$ и $\beta(y+0)>0$. Итак, весь отрезок $[a,\ b]$ может быть подразделен не более чем на $2n$ промежутков, в которых $\beta(x)$ последовательно неотрицательна или неположительна, не будучи равна нулю тождественно. Концами этих промежутков являются некоторые из нулей x_ν и некоторые из точек y, определенных выше. Далее из (3.412.3) мы заключаем с помощью рассуждения, аналогичного проведенному в § 3.3, (1), что число этих промежутков не менее чем $2n$, следовательно, ровно $2n$. Менее точно, $\beta(x)$ имеет $2n$ перемен знака на отрезке $[a,\ b]$, которые осуществляются в нулях x_ν, равно как и в упомянутых точках y, число которых $n-1$. В точках y мы имеем пере-

[1]) См. Стилтьес [12], в частности стр. 588—592.

ход от отрицательных значений к положительным, стало быть, в точках x_ν — переход от положительных значений к отрицательным.

Следовательно,

$$\beta(x_\nu - 0) > 0 > \beta(x_\nu + 0), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.412.4}$$

что эквивалентно утверждению теоремы 3.41.1 (первое неравенство при $\nu=1$ тривиально; это же справедливо для второго неравенства при $\nu=n$).

Мы можем также доказать предыдущее утверждение, слегка изменив проведенные рассуждения. Пусть y_ν означает точку из промежутка $(x_\nu, x_{\nu+1})$, в которой происходит такое же изменение знака, как и в точке y, тогда имеем

$$\beta(x_\nu + 0) < \beta(y_\nu) = 0 < \beta(x_{\nu+1} - 0) \tag{3.412.5}$$

(см. предыдущую сноску).

3.413. Третье доказательство теоремы о взаимном разделении[1])

Определим функции $\varphi_k\ (x,\ t)$ следующим образом:

$$\varphi_k(x, t) = \begin{cases} (x-t)^k & \text{при } x \leqslant t, \\ 0 & \text{при } x > t, \end{cases} \tag{3.413.1}$$

где k — неотрицательное целое число, x и t — произвольные и вещественные. Пусть [2])

$$F_k(t) = \int_a^b \varphi_k(x, t)\, d\alpha(x) - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \varphi_k(x_\nu, t). \tag{3.413.2}$$

Тогда в силу (3.4.1)

$$F_k(a) = F_k(b) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1. \tag{3.413.3}$$

Заметим, что при $k \geqslant 1$ функция $F_k(t)$ непрерывна; кроме того, легко видеть, что $F_0(t) = \beta(t)$, где $\beta(t)$ — функция, определенная в § 3.412. Далее имеем

$$F_k'(t) = -kF_{k-1}(t), \quad a < t < b, \quad k \geqslant 1. \tag{3.413.4}$$

(При $k=1$, $t = x_\nu$ это дает $F_1'(x_\nu \pm 0) = -F_0(x_\nu \pm 0)$.) Если мы примем во внимание (3.413.3) и (3.413.4), то по теореме Ролля заключим, что функция $F_k(t)$ имеет (включая $t=a$ и $t=b$) не менее чем $2n+1-k$ $(1 \leqslant k \leqslant 2n-1)$ нулей; это справедливо и при $k=0$ в том смысле, что $F_0(t)$ имеет не менее $2n-1$ перемен знака. Начиная с этого места, проводим рассуждение, подобное тому, которое применяется во втором доказательстве.

3.42. Другая теорема о взаимном разделении

Если $x_{1n} < x_{2n} < \ldots < x_{nn}$ означают нули многочлена $p_n(x)$, то, как мы знаем (теорема 3.3.2), последовательность $\{x_{\nu n}\}$ перемежается с последовательностью $\{x_{\nu, n+1}\}$, т. е.

$$x_{\nu-1, n} < x_{\nu, n+1} < x_{\nu n}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n+1, \quad x_{0, n} = a, \ x_{n+1, n} = b. \tag{3.42.1}$$

Пусть теперь $\{\lambda_{\nu n}\}$ означает последовательность коэффициентов Кристоффеля, соответствующих многочлену $p_n(x)$, а числа $\{y_{\nu, n}\}$ — числа y_ν,

---

[1]) Это доказательство принадлежит Полиа и Успенскому (письменное сообщение).

[2]) В случае, когда $k=0$, $t=a$, интеграл в правой части заменяется нулем.

определенные в (3.41.1). Стилтьес [12] показал, что в дополнение к теореме 3.41.1 имеет место также следующая теорема о разделении:

Теорема 3.42. *Справедливы следующие неравенства*:

$$y_{\nu-1,n} < y_{\nu,n+1} < y_{\nu n}, \tag{3.42.2}$$

т. е. имеют место неравенства:

$$\lambda_{1n} + \lambda_{2n} + \ldots + \lambda_{\nu-1,n} < \lambda_{1,n+1} + \lambda_{2,n+1} + \ldots + \lambda_{\nu,n+1} < \\ < \lambda_{1n} + \lambda_{2n} + \ldots + \lambda_{\nu n}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.42.3}$$

При $\nu=1$ *неравенства, содержащие* $y_{0,n}$ *и* λ_{0n}, *должны быть исключены.*

Аналогия между (3.42.1) и (3.42.2) очевидна.

Для доказательства мы используем ту же функцию $V(x)$, что и в § 3.412, обозначая ее теперь через $V_n(x)$ и вводя аналогичную функцию $V_{n+1}(x)$, соответствующую последовательности $\{\lambda_{\nu,n+1}\}$. Тогда по (3.412.3) имеем

$$\int_a^b \{V_n(x) - V_{n+1}(x)\} \varrho'(x)\, d\alpha(x) = 0, \tag{3.42.4}$$

где $\varrho(x)$ — произвольный π_{2n-1}. Следовательно, $V_n(x) - V_{n+1}(x)$ имеет не менее чем $2n-1$ перемен знака. Эти изменения знака могут иметь место только в точках $x_{\nu,n}$ и $x_{\nu,n+1}$. В первом случае $V_{n+1}(x)$ постоянна в окрестности этой точки, и так как $V_n(x)$ возрастает, то перемена знака состоит непременно в переходе от отрицательного значения к положительному. Противоположное заключение справедливо относительно точки $x_{\nu,n+1}$. Общее число точек $\{x_{\nu,n}\}$ и $\{x_{\nu,n+1}\}$ равно $2n+1$. Но $V_n(x)$ и $V_{n+1}(x)$ тождественны в промежутках $a \leqslant x < x'$, $x'' < x \leqslant b$, где x' — наименьший из всех нулей $x_{\nu,n}$ и $x_{\nu,n+1}$, а x'' — наибольший из них. Таким образом, в точках x' и x'' невозможно изменение знака. Следовательно, изменение знаков происходит во всех остальных нулях и носит указанный выше характер. В качестве первого следствия отсюда мы снова получаем (3.42.1), иными словами, теорему 3.3.2, а в качестве второго следствия—неравенства:

$$V_n(x_{\nu,n}-0) - V_{n+1}(x_{\nu,n}-0) < 0 < V_n(x_{\nu,n}+0) - V_{n+1}(x_{\nu,n}+0). \tag{3.42.5}$$

Это и есть неравенства (3.42.3).

3.5. Непрерывные дроби

Исторически ортогональные многочлены $\{p_n(x)\}$ впервые рассматривались в теории непрерывных дробей. Эта связь очень важна и является одной из возможных отправных точек при исследовании ортогональных многочленов (см. П. Л. Чебышев [1]—[8]; Гейне [3], том 1, стр. 260—297; Стилтьес [11]).

(1) Для записи бесконечной непрерывной дроби мы употребляем обозначение

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n} + \ldots \tag{3.5.1}$$

Как обычно, подходящая дробь R_n/S_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, определяется как конечная дробь, которая получается из (3.5.1), если остановиться на члене b_n (см., например, Перрон [3]). Мы имеем

$$\left.\begin{array}{ll} R_0 = b_0, & R_1 = b_0 b_1 + a_1, \ \ldots, \\ S_0 = 1, & S_1 = b_1, \ \ldots \end{array}\right\} \tag{3.5.2}$$

и рекуррентные формулы

$$R_n = b_n R_{n-1} + a_n R_{n-2}, \qquad S_n = b_n S_{n-1} + a_n S_{n-2}, \qquad n = 2, 3, 4 \ldots, \tag{3.5.3}$$

которые справедливы и при $n = 1$, если положить $R_{-1} = 1$, $S_{-1} = 0$. Мы легко получаем также соотношение (см. Перрон [3], стр. 16):

$$R_n S_{n-1} - R_{n-1} S_n = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n$$

или

$$\frac{R_n}{S_n} - \frac{R_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n}{S_{n-1} S_n}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{3.5.4}$$

(2) Пусть $\{p_n(x)\}$ — ортонормальная последовательность многочленов, соответствующих распределению $d\alpha(x)$ на отрезке $[a, b]$. Рекуррентная формула (3.2.1) побуждает нас ввести в рассмотрение следующую непрерывную дробь:

$$\frac{1|}{|A_1 x + B_1} - \frac{C_2|}{|A_2 x + B_2} - \frac{C_3|}{|A_3 x + B_3} - \ldots - \frac{C_n|}{|A_n x + B_n} - \ldots, \tag{3.5.5}$$

где A_n, B_n, C_n имеют тот же смысл, что и в (3.2.1). Имеем

$$b_0 = 0, \quad b_n = A_n x + B_n, \quad n \geqslant 1; \qquad a_1 = 1, \quad a_n = -C_n, \quad n \geqslant 2. \tag{3.5.6}$$

Докажем следующее предложение:

Теорема 3.5.1. *Подходящие дроби R_n/S_n для* (3.5.5) *определяются по формулам*

$$\left.\begin{aligned} R_n &= R_n(x) = c_0^{-\frac{3}{2}} (c_0 c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \int_a^b \frac{p_n(x) - p_n(t)}{x - t}\, d\alpha(t), \\ S_n &= S_n(x) = c_0^{\frac{1}{2}} p_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{3.5.7}$$

где c_n имеют тот же смысл, что в (2.2.1).

Таким образом, ортогональные многочлены являются знаменателями подходящих дробей непрерывной дроби (3.5.5).

Вторая часть теоремы вытекает непосредственно из сравнения (3.2.1) с (3.5.3) при $n \geqslant 2$, кроме того, ясно, что утверждение справедливо при $n = 0$ и $n = 1$. Относительно первой части замечаем, что она справедлива при $n = 0$ и $n = 1$. (Так как $p_1(x) = k_1 x + \text{const.}$, то соответствующий интеграл будет равен $k_1 c_0$. Затем применяем (2.2.15) и (2.2.7).) Наконец, при $n \geqslant 2$ мы имеем

$$c_0^{\frac{3}{2}} (c_0 c_2 - c_1^2)^{-\frac{1}{2}} (R_n - b_n R_{n-1} - a_n R_{n-2}) =$$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{p_n(x) - p_n(t) - (A_n x + B_n)\{p_{n-1}(x) - p_{n-1}(t)\}}{x - t} + \frac{C_n \{p_{n-2}(x) - p_{n-2}(t)\}}{x - t} \right\} d\alpha(t) =$$

$$= \int_a^b \frac{-(A_n t + B_n)\, p_{n-1}(t) + (A_n x + B_n)\, p_{n-1}(t)}{x - t}\, d\alpha(t) = A_n \int_a^b p_{n-1}(t)\, d\alpha(t) = 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Итак, числители подходящих дробей выражаются через $p_n(x)$. Очевидно, R_n является многочленом степени $n-1$ по x.

(3) Разлагая рациональную функцию $R_n(x)/S_n(x)$ в ряд по убывающим степеням x, при $n\geqslant 1$ имеем

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)}=d_{0n}x^{-1}+d_{1n}x^{-2}+d_{2n}x^{-3}+\ldots \tag{3.5.8}$$

В силу (3.5.4) это разложение должно совпадать с разложением $R_{n-1}(x)/S_{n-1}(x)$ вплоть до члена, содержащего $x^{-(2n-2)}$. Следовательно, существует такой ряд

$$d_0x^{-1}+d_1x^{-2}+d_2x^{-3}+\ldots, \tag{3.5.9}$$

что при $n\geqslant 1$ имеет место равенство

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)}=d_0x^{-1}+d_1x^{-2}+\ldots+d_{2n-1}x^{-2n}+\sum_{\nu=2n}^{\infty}d_{\nu n}x^{-\nu-1}. \tag{3.5.10}$$

Это вообще справедливо для подходящих дробей непрерывной дроби вида (3.5.5).

Теорема 3.5.2. *Имеют место равенства*

$$d_\nu=c_0^{-2}(c_0c_2-c_1^2)^{\frac{1}{2}}c_\nu,\qquad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.5.11}$$

В самом деле, если d_ν определены этими равенствами, то, применяя (3.5.7), находим

$$R_n(x)-S_n(x)(d_0x^{-1}+d_1x^{-2}+\ldots+d_{2n-1}x^{-2n})=$$
$$=c_0^{-\frac{3}{2}}(c_0c_2-c_1^2)^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b\frac{p_n(x)-p_n(t)}{x-t}\,d\alpha(t)-\right.$$
$$\left.-p_n(x)(c_0x^{-1}+\ldots+c_{2n-1}x^{-2n})\right\}.$$

Выражение, стоящее в скобках, может быть переписано в виде

$$\int_a^b\frac{p_n(x)-p_n(t)}{x-t}\,d\alpha(t)-p_n(x)\int_a^b\frac{1-x^{-2n}t^{2n}}{x-t}\,d\alpha(t)=$$
$$=\int_a^b\frac{p_n(x)-p_n(t)}{x-t}\,x^{-2n}t^{2n}\,d\alpha(t)-$$
$$-\int_a^b p_n(t)\,\frac{1-x^{-2n}t^{2n}}{x-t}\,d\alpha(t)=x^{-2n}\int_a^b\frac{p_n(x)-p_n(t)}{x-t}\,t^{2n}\,d\alpha(t)-$$
$$-x^{-2n}\int_a^b p_n(t)(x^{2n-1}+x^{2n-2}t+\ldots+xt^{2n-2}+t^{2n-1})\,d\alpha(t).$$

Так как первый интеграл правой части есть π_{n-1}, то разложение первого слагаемого начинается с члена, содержащего x^{-n-1}. При интегрировании члены с множителями 1, t, t^2, $\ldots$, t^{n-1} во втором интеграле обращаются в нуль, следовательно, разложение второго слагаемого начинается с $x^{-2n}x^{n-1}=x^{-n-1}$; деля на $S_n(x)$, мы получаем разложение вида (3.5.10). Это требование единственным образом определяет числа d_0, d_1, $\ldots$, d_{2n-1}, следовательно, всю последовательность $\{d_\nu\}$.

(4) Теорема 3.5.3. *Подходящие дроби непрерывной дроби* (3.5.5) *разлагаются следующим образом на элементарные дроби*:

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = c_0^{-2}(c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda_{\nu n}}{x - x_{\nu n}}, \tag{3.5.12}$$

где $\lambda_\nu = \lambda_{\nu n}$ *и* $x_\nu = x_{\nu n}$ *имеют тот же смысл, что в* § 3.4.

Действительно, по теореме 3.5.1 мы имеем

$$\frac{R_n(x_{\nu n})}{S_n'(x_{\nu n})} = \frac{c_0^{-\frac{3}{2}}(c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}}}{c_0^{\frac{1}{2}} p_n'(x_{\nu, n})} \int_a^b \frac{p_n(t)}{t - x_{\nu, n}} \, d\alpha(t).$$

Теперь остается применить (3.4.3).

Из (3.5.12) мы видим, что нули $R_n(x)$ вещественны и перемежаются с нулями $S_n(x)$.

(5) Наконец, рассмотрим частный случай, когда $[a, b]$ — конечный отрезок. Тогда разложение (3.5.9) представляет функцию

$$F(x) = c_0^{-2}(c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \int_a^b \frac{d\alpha(t)}{x - t}, \tag{3.5.13}$$

если только $|x|$ достаточно велик. В различных частных случаях функция $F(x)$, представимая в виде (3.5.13), может быть непосредственно разложена в непрерывную дробь вида (3.5.5), знаменатели подходящих дробей которой являются ортогональными многочленами, соответствующими распределению $d\alpha(t)$. Такой подход к изучению этих многочленов существенно отличается от примененного в главе II.

Теорема 3.5.4. *Пусть* $[a, b]$ — *конечный отрезок. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R_n(x)}{S_n(x)} = F(x), \tag{3.5.14}$$

где x — *произвольная точка комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка* $[a, b]$. *Сходимость равномерна во всякой замкнутой области, не имеющей общих точек с* $[a, b]$.

Эта теорема принадлежит А. А. Маркову ([5], отдел 1, глава VII, § 21).

Если x вещественно, причем $x > b$, то мы можем, комбинируя теорему 3.5.3 с задачей 9, получить

$$F(x) - \frac{R_n(x)}{S_n(x)} = c_0^{-2}(c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}}(x - \xi)^{-2n-1} k_n^{-2}, \qquad a \leqslant \xi \leqslant b. \tag{3.5.15}$$

Это выражение стремится к нулю при $n \to \infty$ (задача 52), если только x достаточно велико. С другой стороны, левая часть (3.5.15) равномерно ограничена вне произвольной замкнутой кривой, содержащей внутри себя отрезок $[a, b]$, так как $\lambda_{\nu, n} > 0$, и имеет место (3.4.5). Теперь утверждение следует из теоремы Витали (см. Титчмарш [1], стр. 194).

Относительно других свойств подходящих дробей см. Шерман [1] и библиографию, приведенную там. По вопросу о связи непрерывной дроби (3.5.5) и ортогональных многочленов с проблемой моментов см. Гамбургер [1], [2], М. Рисс [2] и цитированную в этих статьях литературу.

ГЛАВА IV

МНОГОЧЛЕНЫ ЯКОБИ

В этой главе мы изучим основные свойства многочленов Якоби. Эти многочлены включают в себя, как частный случай, ультрасферические многочлены, в том числе многочлены Лежандра. Свойства нулей, асимптотические выражения, проблемы разложения в ряды и свойства, связанные с интерполированием и механическими квадратурами, не рассматриваются в настоящей главе — они будут изложены в дальнейшем.

Теоремы сложения для многочленов Лежандра и ультрасферических многочленов также опущены, так как они касаются связи этих многочленов со сферическими и гармоническими функциями различных измерений. Основными соображениями для того, чтобы опустить эти вопросы, были ограниченность места и наличие исчерпывающих трудов. Читатель, которого это интересует, может обратиться к книгам Е. Т. Уиттекера и Г. Н. Ватсона ([1], часть II, § 15.7 и примеры к этой главе) и Гобсона [1].

4.1. Определение; обозначение; частные случаи

(1) Многочлены Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ были определены в § 2.4.1; они ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$. Интегрируемость функции $w(x)$ обеспечивается ограничением $\alpha > -1$, $\beta > -1$; многочлены $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ нормированы условием [1])

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}. \tag{4.1.1}$$

Ортогональные многочлены с весовой функцией $(b-x)^\alpha (x-a)^\beta$ на конечном отрезке $[a, b]$ могут быть представлены в виде

$$\text{const.}\; P_n^{(\alpha, \beta)}\left(2\frac{x-a}{b-a} - 1\right) \tag{4.1.2}$$

(см. последнее замечание в § 2.3). Часто рассматривается случай $a = 0$, $b = 1$ (см. Якоби [3]; Жордан [1], том 3, стр. 231—234; Курант и Гильберт [1], глава II, § 9, п. 3).

Стилтьес [6], стр. 75, пишет α и β, которые соответствуют в наших обозначениях числам $(\beta+1)/2$ и $(\alpha+1)/2$. Это же обозначение применяет Фейер ([13], стр. 42). Функция Жордана $Z_n(u)$ в наших обозначениях запишется в виде

$$(-1)^n \left\{\binom{n+\gamma-1}{n}\right\}^{-1} P_n^{(\alpha-\gamma,\, \gamma-1)}(2u-1).$$

---

[1]) В соответствии с § 3.3 нули многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ лежат в промежутке $-1 < x < +1$, следовательно, $P_n^{(\alpha, \beta)}(1) \neq 0$.

Функция $G_n(p, q, u)$, фигурирующая у Куранта и Гильберта, совпадает с $Z_n(u)$, если положить $p=\alpha$, $q=\gamma$.

Важное тождество

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(-x) \tag{4.1.3}$$

легко выводится из замечания, сделанного в конце § 2.3. Комбинируя (4.1.3) с (4.1.1), получаем

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}. \tag{4.1.4}$$

(2) При $\alpha=\beta$ мы получаем ультрасферические многочлены. Эти многочлены будут четными или нечетными в зависимости от четности или нечетности n (§ 2.3, (2)).

Теорема 4.1. *Справедливы следующие формулы:*

$$\left.\begin{aligned} P_{2\nu}^{(\alpha, \alpha)}(x) &= \frac{\Gamma(2\nu+\alpha+1)\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\,\Gamma(2\nu+1)} P_\nu^{\left(\alpha, -\frac{1}{2}\right)}(2x^2-1) = \\ &= (-1)^\nu \frac{\Gamma(2\nu+\alpha+1)\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\,\Gamma(2\nu+1)} P_\nu^{\left(-\frac{1}{2}, \alpha\right)}(1-2x^2), \\ P_{2\nu+1}^{(\alpha, \alpha)}(x) &= \frac{\Gamma(2\nu+\alpha+2)\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\,\Gamma(2\nu+2)} x P_\nu^{\left(\alpha, \frac{1}{2}\right)}(2x^2-1) = \\ &= (-1)^\nu \frac{\Gamma(2\nu+\alpha+2)\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\,\Gamma(2\nu+2)} x P_\nu^{\left(\frac{1}{2}, \alpha\right)}(1-2x^2). \end{aligned}\right\} \tag{4.1.5}$$

Благодаря этим важным соотношениям многочлены Якоби с α или β, равным $\pm 1/2$, могут быть выражены через ультрасферические многочлены. Для того чтобы установить первое соотношение, достаточно доказать, что

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu^{\left(\alpha, -\frac{1}{2}\right)}(2x^2-1)\,\varrho(x)\,(1-x^2)^\alpha\,dx = 0,$$

где $\varrho(x)$ — произвольный $\pi_{2\nu-1}$. Это тривиально, если многочлен $\varrho(x)$ нечетный. Пусть $\varrho(x)$ — четный многочлен, равный $r(x^2)$, где $r(x)$ есть $\pi_{\nu-1}$. Тогда мы имеем

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu^{\left(\alpha, -\frac{1}{2}\right)}(2x^2-1)\,r(x^2)\,(1-x^2)^\alpha\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 P_\nu^{\left(\alpha, -\frac{1}{2}\right)}(2x^2-1)\,r(x^2)\,(1-x^2)^\alpha\,dx =$$

$$= \int_0^1 P_\nu^{\left(\alpha, -\frac{1}{2}\right)}(2x-1)\,r(x)\,(1-x)^\alpha x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= 2^{-\alpha-\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} P_\nu^{\left(\alpha, -\frac{1}{2}\right)}(x)\,r\left(\frac{1+x}{2}\right)(1-x)^\alpha (1+x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 0.$$

Аналогичное рассуждение может быть проведено для доказательства второго соотношения. Постоянные множители определяются из условий (4.1.1) и (4.1.3).

Случай $a=-1$, $b=+1$, $w(x)=|x|^{2k}$, $k>-\frac{1}{2}$ также может быть сведен к многочленам Якоби. Соответствующие ортогональные многочлены будут (см. Сегё [2], стр. 349)

$$p_n(x)=\begin{cases} \text{const.}\, P_\nu^{\left(0,\, k-\frac{1}{2}\right)}(2x^2-1), & \text{если } n=2\nu, \\ \text{const.}\, x\, P_\nu^{\left(0,\, k+\frac{1}{2}\right)}(2x^2-1), & \text{если } n=2\nu+1, \end{cases} \tag{4.1.6}$$

где постоянные множители отличны от нуля; они зависят от ν и от k. Доказательство аналогично предыдущему.

(3) Простейшими ультрасферическими многочленами являются [1]):

$$\left.\begin{aligned} P_n^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(x)&=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\,T_n(x)=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\cos n\theta, \\ P_n^{\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)}(x)&=2\frac{1\cdot 3\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\ldots(2n+2)}\,U_n(x)=2\frac{1\cdot 3\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\ldots(2n+2)}\,\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{4.1.7}$$

где $x=\cos\theta$, а $T_n(x)$ и $U_n(x)$ — многочлены Чебышева первого и второго рода (см. (1.12.3)). Это следует из равенств

$$\begin{gathered} \int_{-1}^{+1} T_n(x)\,T_m(x)\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\int_0^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta\,d\theta=0, \\ (n\neq m), \\ \int_{-1}^{+1} U_n(x)\,U_m(x)\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx=\int_0^{\pi}\sin(n+1)\theta\sin(m+1)\theta\,d\theta=0 \end{gathered}$$

и условия (4.1.1).

В связи с этим могут быть отмечены два важных «смешанных» случая [2])

$$\left.\begin{aligned} P_n^{\left(\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(x)&=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}, \\ P_n^{\left(-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)}(x)&=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\,\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}, \end{aligned}\right\}\ x=\cos\theta. \tag{4.1.8}$$

Доказательство (4.1.8) подобно доказательству (4.1.7) (равенства (4.1.8) могут быть получены также с помощью (4.1.7), если в (4.1.5) положить $\alpha=\frac{1}{2}$ и $\alpha=-\frac{1}{2}$). Формулы (4.1.7) и (4.1.8) следуют также из § 2.6, если положить там $\varrho(x)=1$.

Другой важный ультрасферический случай — это $\alpha=\beta=0$, которому соответствуют многочлены Лежандра $P_n^{(0,\,0)}(x)=P_n(x)$. Менее элементарные случаи: $\alpha=\beta=-\frac{3}{4}$ и $\alpha=\beta=-\frac{2}{3}$; для этих случаев Кошмидер [1] указал представление через эллиптические функции.

---

[1]) В первом равенстве при $n=0$ коэффициент перед $T_n(x)$ равен единице.

[2]) При $n=0$ постоянный множитель в правой части равен единице.

4.2. Дифференциальное уравнение

Теорема 4.2.1. *Многочлен Якоби* $y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:*

$$(1-x^2)\,y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\,x]\,y' + n\,(n+\alpha+\beta+1)\,y = 0, \qquad (4.2.1)$$

которое может быть записано также в виде

$$\frac{d}{dx}\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\,y'\} + n\,(n+\alpha+\beta+1)\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,y = 0. \qquad (4.2.2)$$

Для доказательства мы отмечаем, что так как y есть π_n, то выражение

$$\frac{d}{dx}\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\,y'\}$$

может быть записано в виде $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,z$, где z есть π_n. Для того чтобы установить, что $z = \text{const.}\,y$, докажем соотношение ортогональности

$$\int_{-1}^{+1}\frac{d}{dx}\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\,y'\}\,\varrho(x)\,dx = 0,$$

где $\varrho(x)$ — произвольный π_{n-1}. Интегрирование по частям приводит левую часть последнего равенства к виду

$$-\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\,y'\varrho'(x)\,dx,$$

так как $\alpha+1$ и $\beta+1$ положительны. Вторичное интегрирование по частям дает

$$\int_{-1}^{+1} y\,\frac{d}{dx}\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\,\varrho'(x)\}\,dx.$$

Выражение, на которое умножается y под знаком интеграла, представляет собой произведение $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,r(x)$, где $r(x)$ есть π_{n-1}, следовательно, интеграл обращается в нуль и наше утверждение доказано. Постоянный множитель $-n\,(n+\alpha+\beta+1)$ может быть найден путем сравнения старших коэффициентов.

Уравнение (4.2.1) может быть также записано в иной форме:

$$\left.\begin{aligned}&(1-x^2)\,Y'' + [\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)\,x]\,Y' + (n+1)\,(n+\alpha+\beta)\,Y = 0,\\ &Y = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,y = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x).\end{aligned}\right\} \qquad (4.2.3)$$

(2) Если в (4.2.1) заменить $n\,(n+\alpha+\beta+1)$ через γ, то возникает вопрос, для каких значений γ это уравнение имеет решением многочлен, не равный нулю тождественно.

Теорема 4.2.2. *Пусть* $\alpha > -1$, $\beta > -1$. *Дифференциальное уравнение*

$$(1-x^2)\,y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\,x]\,y' + \gamma y = 0, \qquad (4.2.4)$$

где γ — параметр, имеет решением многочлен, не равный нулю тождественно, тогда и только тогда, когда γ имеет вид $n\,(n+\alpha+\beta+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *Это решение таково:* $\text{const.}\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$; *никакое другое линейно независимое с* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *решение (4.2.4) не может быть многочленом.*

Действительно, подставим

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\,(x-1)^{\nu}$$

в (4.2.4). Мы найдем

$$-(x+1)\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu(\nu-1)a_\nu(x-1)^{\nu-1}-$$
$$-[2(\alpha+1)+(\alpha+\beta+2)(x-1)]\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu a_\nu(x-1)^{\nu-1}+\gamma\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(x-1)^\nu=0,$$

откуда вытекает рекуррентная формула

$$[\gamma-\nu(\nu+\alpha+\beta+1)]\,a_\nu-2(\nu+1)(\nu+\alpha+1)\,a_{\nu+1}=0,\quad \nu=0,1,2,\ldots \tag{4.2.5}$$

Предполагая, что y — многочлен, допустим, что a_n — последний, отличный от нуля, коэффициент. Тогда мы видим из (4.2.5), что при $\nu=n$ коэффициент при a_n должен обращаться в нуль, т. е. $\gamma=n(n+\alpha+\beta+1)$. Обратно, если это условие выполнено, то $a_{n+1}=a_{n+2}=\ldots=0$, так как коэффициент при $a_{\nu+1}$ никогда не равен нулю.

Пусть теперь $\gamma=n(n+\alpha+\beta+1)$ и пусть z — второе решение уравнения (4.2.1) или (4.2.2). Если мы предположим, что $x\to\pm1$ в соотношении

$$(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}(y'z-yz')=\text{const.}, \tag{4.2.6}$$

то мы заметим, что y и z могут оба быть многочленами лишь в том случае, когда постоянная в правой части (4.2.6) равна нулю, т. е. когда y и z линейно зависимы. Это же рассуждение показывает, что функция z даже не может быть регулярной в точках $x=-1$, $x=+1$, если только y и z линейно независимы.

4.21. Гипергеометрические функции

(1) Подстановка $x=1-2x'$ в (4.2.1) дает уравнение

$$x'(1-x')\frac{d^2y}{dx'^2}+[\alpha+1-(\alpha+\beta+2)x']\frac{dy}{dx'}+n(n+\alpha+\beta+1)y=0, \tag{4.21.1}$$

которое является гипергеометрическим уравнением Гаусса. В соответствии со второй частью теоремы 4.2.2 при $n\geqslant1$ мы получаем важное представление:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\binom{n+\alpha}{n}F\left(-n,\,n+\alpha+\beta+1;\ \alpha+1;\ \frac{1-x}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(n+\alpha+\beta+1)\ldots(n+\alpha+\beta+\nu)\times$$
$$\times(\alpha+\nu+1)\ldots(\alpha+n)\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\nu}\,{}^{1)}. \tag{4.21.2}$$

Здесь, как и в дальнейшем, $F(a,b;c;x)$ представляет собой обычное обозначение гипергеометрического ряда

$$F(a,b;c;x)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{1\cdot2\ldots\nu}\,\frac{b(b+1)\ldots(b+\nu-1)}{c(c+1)\ldots(c+\nu-1)}\,x^\nu, \tag{4.21.3}$$

---

[1]) Коэффициент

$$\binom{n}{\nu}(n+\alpha+\beta+1)\ldots(n+\alpha+\beta+\nu)\,(\alpha+\nu+1)\ldots(\alpha+n)$$

следует заменить на $(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)$ при $\nu=0$ и на $(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)\ldots\ldots(2n+\alpha+\beta)$ при $\nu=n$.

который сходится при $|x| < 1$ и удовлетворяет уравнению

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{dy}{dx}-aby=0 \qquad (4.21.4)$$

(см. Уиттекер и Ватсон [1], часть II, § 14.2). Заметим, что (4.21.3) не имеет смысла, если c — неположительное целое число. Однако легко видеть, что если m — целое положительное число, то

$$\lim_{c\to-(m-1)}(c+m-1)F(a,\, b;\, c;\, x)=$$

$$=(-1)^{m-1}\frac{a(a+1)\dots(a+m-1)\,b(b+1)\dots(b+m-1)}{m!\,(m-1)!}\times$$

$$\times x^m F(a+m,\, b+m;\, m+1;\, x), \qquad (4.21.5)$$

а функция $x^m F(a+m,\, b+m;\, m+1;\, x)$ удовлетворяет уравнению (4.21.4), в котором положено $c=-(m-1)$.

(2) В формуле (4.21.2) гипергеометрический ряд обрывается на члене, содержащем x^n. Постоянный множитель в (4.21.2) определяется условием (4.1.1). Применяя (4.21.2), отметим, что коэффициент $l_n^{(\alpha,\beta)}$ при старшем члене x^n в $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ дается равенством

$$l_n^{(\alpha,\beta)}=\lim_{x\to\infty}x^{-n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=2^{-n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}. \qquad (4.21.6)$$

(3) Другим следствием (4.21.2) является полезная формула

$$\frac{d}{dx}\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}=\frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)\,P_{n-1}^{(\alpha+1,\,\beta+1)}(x), \qquad (4.21.7)$$

которая непосредственно проверяется, если обе части (4.21.7) представить по формуле (4.21.2).

Как применение (4.21.7) отметим, что последовательные производные $T_n'(x), T_n''(x),\ T_n'''(x), \dots$ многочлена Чебышева $T_n(x)$ равны с точностью до постоянных множителей многочленам $P_{n-1}^{\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)}(x)$, $P_{n-2}^{\left(\frac{3}{2},\,\frac{3}{2}\right)}(x)$, $P_{n-3}^{\left(\frac{5}{2},\,\frac{5}{2}\right)}(x), \dots$ Первый из них с точностью до постоянного множителя равен $U_{n-1}(x)$ (см. (4.1.7)). Заметим также, что производные $P_n'(x)$, $P_n''(x), \dots$ многочлена Лежандра $P_n(x)$ соответственно равны с точностью до постоянных множителей многочленам $P_{n-1}^{(1,\,1)}(x)$, $P_{n-2}^{(2,\,2)}(x), \dots$

4.22. Обобщение

(1) Правая часть (4.21.2) позволяет обобщить определение многочленов $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ на случай произвольных комплексных значений параметров α и β. Это выражение является многочленом по x, по α и по β. Мы будем в дальнейшем обозначать этот многочлен опять через $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Многие свойства многочленов $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ могут быть распространены на этот общий случай. Многочлены $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (4.2.1), и справедливы формулы (4.1.1), (4.1.3), (4.1.4). Однако некоторые другие результаты (например, теорема о распределении нулей, см. § 6.72) должны быть существенно изменены. Применяя (4.1.3), легко представить $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ как π_n от $x+1$.

(2) Путем сравнения соответствующих коэффициентов в разложении по степеням $x-1$, мы получаем тождество

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\binom{2n+\alpha+\beta}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n F\left(-n,\,-n-\alpha;\;-2n-\alpha-\beta;\;\frac{2}{1-x}\right)=$$
$$=\left(\frac{1-x}{2}\right)^n P_n^{(\alpha',\beta)}\left(\frac{x+3}{x-1}\right),\quad \alpha'=-2n-\alpha-\beta-1. \qquad (4.22.1)$$

Кроме того, справедливы следующие тождества:

$$\binom{n}{l}P_n^{(-l,\beta)}(x)=\binom{n+\beta}{l}\left(\frac{x-1}{2}\right)^l P_{n-l}^{(l,\beta)}(x),\ l\text{ — целое},\quad 1\leqslant l\leqslant n, \qquad (4.22.2)$$

и

$$\binom{n}{k-1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\binom{n+\alpha}{n-k+1}P_{k-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \qquad (4.22.3)$$
$$n+\alpha+\beta+k=0,\quad k\text{ — целое},\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

В связи с (4.22.2) см. (4.21.5).

(3) Пусть $n\geqslant 1$. Понижение степени многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ может иметь место только в том случае, когда $n+\alpha+\beta+k=0$ при некотором целом k, $1\leqslant k\leqslant n$. В этом случае точка $x=\infty$ является нулем порядка $n-k+1$, причем это точный порядок, если только не имеет места равенство $\alpha=-l$, где l — целое, $k\leqslant l\leqslant n$. Если же

$$n+\alpha+\beta+k=0,\quad \alpha=-l,\quad 1\leqslant k\leqslant l\leqslant n, \qquad (4.22.4)$$

то многочлен $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ равен нулю тождественно.

Если положим $n+\alpha+\beta+k=\varepsilon$, $\alpha+l=\eta$, то можно показать, что справедливо равенство $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\varepsilon r(x)+\eta s(x)$ с точностью до членов высшего порядка малости при $\varepsilon\to 0$, $\eta\to 0$. Здесь $r(x)$ и $s(x)$ суть π_n, не зависящие от ε и η. Из (4.22.2) и (4.22.3) следует, что с точностью до постоянного множителя, отличного от нуля, мы имеем

$$r(x)=(1-x)^l P_{n-l}^{(l,\,-n+l-k)}(x),\quad s(x)=P_{k-1}^{(-l,\,-n+l-k)}(x),$$

или

$$r(x)=(1-x)^{-\alpha}P_{n+\alpha}^{(-\alpha,\,\beta)}(x),\quad s(x)=P_{-n-\alpha-\beta-1}^{(\alpha,\,\beta)}(x), \qquad (4.22.5)$$

где α, β, n — целые, $\alpha\geqslant -n$, $\beta\geqslant -n$, $\alpha+\beta\leqslant -n-1$, $n\geqslant 1$. Оба многочлена $r(x)$ и $s(x)$ — решения уравнения (4.2.1); они линейно независимы, так как $r(1)=0$, $s(1)\neq 0$. Они имеют соответственно точные степени n и $k-1=-n-\alpha-\beta-1$. В этом случае общее решение уравнения (4.2.1) будет многочленом.

(4) Пусть опять $n\geqslant 1$. Мы видели, что $P_n^{(\alpha,\beta)}(1)\neq 0$, если только $\alpha\neq -l$, $1\leqslant l\leqslant n$. Если $\alpha=-l$, то точка $x=1$ является нулем порядка l, причем это точный порядок, если только не выполняется равенство $n+\alpha+\beta+k=0$, $1\leqslant k\leqslant l$, которое соответствует исключительному случаю (4.22.4). В силу (4.1.3) $P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)\neq 0$, если только $\beta\neq -l$, $1\leqslant l\leqslant n$. В случае же $\beta=-l$ точка $x=-1$ является нулем порядка l, причем это точный порядок, если только не выполняется равенство $n+\alpha+\beta+k=0$, $1\leqslant k\leqslant l$, которое опять по существу соответствует случаю (4.22.4).

(5) Пусть $n\geqslant 0$. Из (3) может быть выведен второй случай, когда общее решение уравнения (4.2.1) является многочленом. Если мы заменим n

через $-n-\alpha-\beta-1$, то дифференциальное уравнение (4.2.1) останется неизменным, что приводит к двум линейно независимым решениям в виде многочленов:

$$r_1(x)=(1-x)^{-\alpha}P_{-n-\beta-1}^{(-\alpha,\beta)}(x), \quad s_1(x)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{4.22.6}$$

где α, β, n — целые числа, $\alpha<-n$, $\beta<-n$, $n\geqslant 0$.

4.23. Второе решение

(1) В соответствии с теорией гипергеометрических функций второе решение уравнения (4.2.1) дается формулой

$$(1-x)^{-\alpha}F\left(-n-\alpha,\ n+\beta+1;\ 1-\alpha;\ \frac{1-x}{2}\right), \tag{4.23.1}$$

за исключением того случая, когда α является целым числом[1] (см. Уиттекер и Ватсон [1], часть II, § 14.4, в частности, см. функции, обозначенные через y_1 и y_2). Функции (4.21.2) и (4.23.1) линейно независимы.

Пусть теперь α — целое число. Если $\alpha=-l$, $0\leqslant l\leqslant n$, то функция (4.23.1) с точностью до постоянного множителя равна $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ (см. (4.22.2)). То же остается справедливым при $\alpha\to\alpha_0$, где α_0 равно целому положительному числу, если только раньше, чем перейти к пределу $\alpha\to\alpha_0$, мы умножим (4.23.1) на $\alpha-\alpha_0$ (см. (4.21.5)).

Наконец, при целых значениях α, $\alpha<-n$, многочлен $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ и функция (4.23.1) линейно независимы, так как

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}\neq 0,$$

а (4.23.1) обращается в нуль в точке $x=1$. Функция (4.23.1) будет многочленом тогда и только тогда, когда $n+\beta+1$ является неположительным целым числом, т.е. когда β — целое число, меньшее чем $-n$. Это случай, рассмотренный в § 4.22, (5).

(2) Известны многочисленные другие представления решений уравнения (4.2.1), получающиеся с помощью классических преобразований гипергеометрических функций. Единственными особыми точками этого дифференциального уравнения являются $x=+1$, -1, ∞. Меняя местами α и β, заменяя x на $-x$, мы получаем разложение в окрестности точки $x=-1$.

Разложения в окрестности точки $x=\infty$ особо важны. Из книги Уиттекера и Ватсона ([1], часть II, § 14.4[2]) известно, что решениями будут

$$(1-x)^{n}F\left(-n,\ -n-\alpha;\ -2n-\alpha-\beta;\ \frac{2}{1-x}\right), \tag{4.23.2}$$

$$(1-x)^{-n-\alpha-\beta-1}F\left(n+\alpha+\beta+1,\ n+\beta+1;\ 2n+\alpha+\beta+2;\ \frac{2}{1-x}\right). \tag{4.23.3}$$

---

[1]) Это легко может быть доказано введением в (4.21.1) подстановки $y=x^{1-\alpha}z$. Аналогичный метод может быть применен в случаях (4.23.2), (4.23.3).

[2]) В частности, см. функции, обозначенные через y_{21} и y_{22} (в соответствующих формулах там имеется опечатка: показатель при $-x$ должен быть $-A$ в y_{21} и $-B$ в y_{22}).

Первая функция с точностью до постоянного множителя равна $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ (см. (4.22.1)). Вторая функция получается из первой подстановкой вместо n числа $-n-\alpha-\beta-1$.

С точностью до постоянных множителей выражения (4.23.2) и (4.23.3) вытекают из (4.21.2) и (4.21.3), если заменить α на $-2n-\alpha-\beta-1$, $(1-x)/2$ на $2/(1-x)$, а затем умножить на $(1-x)^n$. Следовательно, выражения (4.23.2) и (4.23.3) линейно независимы, за исключением того случая, когда $-2n-\alpha-\beta-1$ является целым числом, не меньшим чем $-n$.

Т е о р е м а 4.23.1. *Пусть α, β произвольны, n — неотрицательное целое число. Общее решение уравнения* (4.2.1) *может быть представлено в следующих видах*:

$$\left.\begin{aligned}
&AP_n^{(\alpha,\beta)}(x)+B(1-x)^{-\alpha}F\left(-n-\alpha,\ n+\beta+1;\ 1-\alpha;\ \frac{1-x}{2}\right),\\
&\qquad\qquad\qquad \textit{если}\ \alpha\neq -n,\ -n+1,\ -n+2,\ \ldots,\\
&AP_n^{(\alpha,\beta)}(x)+B(1+x)^{-\beta}F\left(-n-\beta,\ n+\alpha+1;\ 1-\beta;\ \frac{1+x}{2}\right),\\
&\qquad\qquad\qquad \textit{если}\ \beta\neq -n,\ -n+1,\ -n+2,\ \ldots,\\
&AP_n^{(\alpha,\beta)}(x)+B(1-x)^{-n-\alpha-\beta-1}\times\\
&\quad\times F\left(n+\alpha+\beta+1,\ n+\beta+1;\ 2n+\alpha+\beta+2;\ \frac{2}{1-x}\right),\\
&\qquad\qquad\qquad \textit{если}\ \alpha+\beta\neq -n-1,\ -n-2,\ \ldots,
\end{aligned}\right\}\tag{4.23.4}$$

где A и B — произвольные постоянные.

(3) Предыдущие результаты позволяют нам установить следующее предложение:

Т е о р е м а 4.23.2. *Если α и β — произвольные, а n — неотрицательное целое число, то* (4.22.5) *и* (4.22.6) *представляют собой единственные случаи, когда общее решение* (4.2.1) *является многочленом. Они могут быть охарактеризованы одной из двух следующих совокупностей условий*:

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathrm{a})\ \alpha,\ \beta\ \text{— \textit{целые отрицательные}},\ \alpha\geqslant -n,\ \beta\geqslant -n,\\
&\qquad\qquad\qquad \alpha+\beta\leqslant -n-1,\ n\geqslant 1,\\
&(\mathrm{b})\ \alpha,\ \beta\ \text{— \textit{целые отрицательные}},\ \alpha< -n,\ \beta< -n,\ n\geqslant 0.
\end{aligned}\right\}\tag{4.23.5}$$

Из (4.2.6) мы видим, что в рассматриваемых случаях α и β должны быть целыми отрицательными.

Пусть $\alpha<-n$, $\beta\geqslant -n$; тогда решение (4.23.1) не является многочленом. Случай $\alpha\geqslant -n$, $\beta<-n$ исключается применением (4.1.3). Наконец, если $\alpha\geqslant -n$, $\beta\geqslant -n$, $\alpha+\beta\geqslant -n$, то решение (4.23.3) не будет многочленом.

(4) Пусть α — целое число. В особых случаях, исключенных в теореме 4.23.1, можно показать, что второе решение содержит логарифмический член при разложении в окрестности точки $x=+1$ (аналогично для $x=-1$, $x=\infty$) (см. (4.61.6)).

Возможно также распространение предыдущих исследований на произвольные значения n. Однако в дальнейшем мы ограничимся целыми неотрицательными значениями n.

Рассмотрение второго решения, надлежащим образом нормированного, будет продолжено в § 4.61, где будут указаны также некоторые другие представления.

4.24. Преобразование дифференциального уравнения

Применяя результаты § 1.8 к уравнению (4.2.1), мы получаем следующие важные представления дифференциального уравнения для многочленов Якоби:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2}+\left\{\frac{1}{4}\frac{1-\alpha^2}{(1-x)^2}+\frac{1}{4}\frac{1-\beta^2}{(1+x)^2}+\frac{n(n+\alpha+\beta+1)+(\alpha+1)(\beta+1)/2}{1-x^2}\right\}u=0,\\ &u=u(x)=(1-x)^{\frac{\alpha+1}{2}}(1+x)^{\frac{\beta+1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(x),\end{aligned}\right\} \tag{4.24.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left\{\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{\frac{1}{4}-\beta^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}+\left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2\right\}u=0,\\ &u=u(\theta)=\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta).\end{aligned}\right\} \tag{4.24.2}$$

В особенности следует отметить случаи $\alpha=\pm\frac{1}{2}$, $\beta=\pm\frac{1}{2}$.

4.3. Формула Родрига. Ортонормальная последовательность

(1) При произвольно заданных α и β мы имеем

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\}. \tag{4.3.1}$$

Допустим сначала, что α и β больше чем -1. Простое применение правила Лейбница показывает, что правая часть (4.3.1) имеет вид $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\varrho(x)$, где $\varrho(x)$ — некоторый π_n. Для того чтобы показать, что $\varrho(x)=\text{const.}\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, достаточно установить, что

$$\int_{-1}^{+1}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\}\,r(x)\,dx=0,$$

где $r(x)$ — произвольный π_{n-1}. Но интегрирование по частям n раз приводит к интегралу

$$(-1)^n\int_{-1}^{+1}(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\,r^{(n)}(x)\,dx,$$

который равен нулю, поскольку $r^{(n)}(x)\equiv 0$. Постоянный множитель затем может быть определен из (4.1.1), если положить $x=1$ (см. (4.3.2)).

Так как $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ является многочленом относительно α и β (см. (4.21.2)) и так как это же справедливо для правой части (4.3.1), разделенной на $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, то тем самым доказано, что (4.3.1) имеет место при произвольных α и β.

Вычисляя n-ю производную в (4.3.1) по правилу Лейбница, мы получаем следующее важное равенство:

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)&=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-\nu}\binom{n+\beta}{\nu}\left(\frac{x-1}{2}\right)^\nu\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-\nu}=\\ &=\binom{n+\alpha}{n}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\sum_{\nu=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\nu)}\binom{n+\beta}{\nu}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^\nu=\\ &=\binom{n+\alpha}{n}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n F\left(-n,\ -n-\beta;\ \alpha+1;\ \frac{x-1}{x+1}\right). \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

(2) Рассуждение, примененное в (1), легко приводит к следующей формуле:

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)\ \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2\,dx=$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}=h_n^{(\alpha,\beta)}. \qquad (4.3.3)$$

(Здесь мы предполагаем, что $\alpha>-1$, $\beta>-1$; при $n=0$ произведение $(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)$ нужно заменить через $\Gamma(\alpha+\beta+2)$.) Действительно, в силу (4.3.1) и (4.21.6) мы имеем

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^2\,dx=$$

$$=l_n^{(\alpha,\beta)}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta}(x)\,x^n\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^n\,n!}\,l_n^{(\alpha,\beta)}\int_{-1}^{+1}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\}\,x^n\,dx=$$

$$=2^{-n}\,l_n^{(\alpha,\beta)}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\,dx.$$

Теперь применяем (4.21.6) и (1.7.5).

Употребляя обозначение (4.3.3), мы можем следующим образом написать ортонормальную последовательность, соответствующую весовой функции $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ на отрезке $[-1,\ +1]$:

$$p_n(x)=\{h_n^{(\alpha,\beta)}\}^{-\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=$$

$$=\left\{\frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\,\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(x),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \dots \qquad (4.3.4)$$

4.4. Производящая функция

(1) Формула (4.3.2) может быть написана в виде

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\left(1+\frac{x+1}{2}z\right)^{n+\alpha}\left(1+\frac{x-1}{2}z\right)^{n+\beta}z^{-n-1}\,dz, \qquad (4.4.1)$$

где предполагается, что $x\neq\pm1$. Интегрирование производится в положительном направлении вдоль замкнутой кривой, содержащей внутри себя начало координат, и такой, что точки $-2(x\pm1)^{-1}$ не лежат ни внутри этой кривой, ни на ней самой. (Мы определяем ветви подынтегральной функции условием, чтобы каждый из множителей был равен единице при $z=0$.) Отсюда при достаточно малых значениях $|w|$ мы имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,w^n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\left(1+\frac{x+1}{2}z\right)^{\alpha}\left(1+\frac{x-1}{2}z\right)^{\beta}}{z-w\left(1+\frac{x+1}{2}z\right)\left(1+\frac{x-1}{2}z\right)}\,dz. \qquad (4.4.2)$$

Знаменатель можно представить в такой форме:

$$-\frac{1}{4}(x^2-1)wz^2-z(xw-1)-w=\frac{1}{4}(1-x^2)w(z-z_0)(z-Z_0), \quad (4.4.3)$$

где

$$z_0=z_0(w)=\frac{2}{1-x^2}\frac{xw-1+R}{w}, \quad R=R(w)=(1-2xw+w^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4.4)$$

Для $Z_0=Z_0(w)$ имеем аналогичное выражение, в котором R заменено на $-R$. Здесь z_0 и R — регулярные аналитические функции от w при $|w|$ достаточно малых; мы полагаем $R(0)=1$. В точке $w=0$ функция z_0 имеет нуль, а функция Z_0 имеет полюс. При достаточно малых $|w|$, z_0 лежит внутри, а Z_0 — вне кривой интегрирования в (4.4.2); поэтому по теореме Коши имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)w^n=\left[\frac{1}{4}(1-x^2)w\right]^{-1}\left(1+\frac{x+1}{2}z_0\right)^{\alpha}\left(1+\frac{x-1}{2}z_0\right)^{\beta}(z_0-Z_0)^{-1}.$$

Теперь мы легко получаем

$$1+\frac{x+1}{2}z_0=2(1-w+R)^{-1}, \quad 1+\frac{x-1}{2}z_0=2(1+w+R)^{-1},$$

$$z_0-Z_0=4w^{-1}(1-x^2)^{-1}R,$$

следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)w^n=2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-w+R)^{-\alpha}(1+w+R)^{-\beta}=$$

$$=2^{\alpha+\beta}(1-2xw+w^2)^{-\frac{1}{2}}\{1-w+(1-2xw+w^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-\alpha}\times$$

$$\times\{1+w+(1-2xw+w^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-\beta}. \quad (4.4.5)$$

Это — производящая функция для многочленов Якоби (Якоби [3], стр. 193—194), которая может быть установлена непосредственно для $x=\pm 1$. Выражения $\{\ \}^{-\alpha}$ и $\{\ \}^{-\beta}$ должны быть взяты положительными при $w=0$.

(2) Предыдущие рассуждения могут быть несколько видоизменены, если мы запишем (4.3.1) в следующем виде:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t-x}\right)^n\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{\beta}\frac{dt}{t-x}, \quad (4.4.6)$$

где $x\neq\pm 1$, а интегрирование осуществляется в положительном направлении вдоль замкнутого контура, заключающего в себе точку $t=x$, но не содержащего точек $t=\pm 1$. Предполагается, кроме того, что функции

$$\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\alpha} \text{ и } \left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{\beta}$$

принимают значение единица в точке $t=x$. Затем положим

$$\frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t-x}=w^{-1}, \quad t=w^{-1}\{1-(1-2xw+w^2)^{\frac{1}{2}}\}=x+\frac{1}{2}(x^2-1)w+\ldots \quad (4.4.7)$$

Здесь должна быть взята та ветвь $(1-2xw+w^2)^{\frac{1}{2}}$, которая равна $+1$ при $w=0$. Далее, если w описывает малую замкнутую кривую вокруг начала координат, то t описывает указанную выше кривую. Кроме того, мы имеем

$$\begin{gathered}\frac{1-t}{1-x}=2\left\{1-w+(1-2xw+w^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-1},\\ \frac{1+t}{1+x}=2\left\{1+w+(1-2xw+w^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-1},\\ \frac{dt}{1-x}=(1-2xw+w^2)^{-\frac{1}{2}}w^{-1}\,dw,\end{gathered} \tag{4.4.8}$$

следовательно,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int w^{-n}\,2^{\alpha}\left\{1-w+(1-2xw+w^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\alpha}\times$$
$$\times\,2^{\beta}\left\{1+w+(1-2xw+w^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\beta}(1-2xw+w^2)^{-\frac{1}{2}}w^{-1}\,dw, \tag{4.4.9}$$

что и представляет собой требуемый результат.

(3) Третий метод вывода производящей функции основан на следующем замечании. Если функцию $F(x, w)$, представляющую собой правую часть (4.4.5), мы разложим по степеням w, то заметим, что коэффициент при w^n является многочленом степени n. Для того чтобы установить, что этот многочлен совпадает с $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, мы покажем, что интеграл

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}F(x,u)F(x,v)\,dx, \tag{4.4.10}$$

рассматриваемый как функция от u и v, является функцией от произведения uv, что эквивалентно свойству ортогональности. При $x=1$ равенство (4.4.5) может быть проверено непосредственно, причем этот процесс осуществляет надлежащее нормирование многочленов.

В случае многочленов Лежандра, когда $\alpha=\beta=0$, интеграл может быть вычислен явно (см. Лежандр [1], стр. 250). В общем случае Чебышев [5] преобразовал этот интеграл к виду

$$2^{\alpha+\beta+1}\int_0^1 t^{\beta}(1-t)^{\alpha}(1-uvt)^{-\alpha}(1-uvt^2)^{-1}\,dt, \tag{4.4.11}$$

из которого вытекает наше утверждение.

Относительно четвертого метода, основанного на рядах Лагранжа, см. Полиа и Сегё [1], часть I, отдел III, задача 219.

4.5. Рекуррентная формула

(1) В случае многочленов Якоби общая формула (3.2.1) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}&2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\\ &=(2n+\alpha+\beta-1)\left\{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)\,x+\alpha^2-\beta^2\right\}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)-\\ &\qquad-2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)\,P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x),\\ &\qquad\qquad n=2,\,3,\,4,\,\ldots,\\ &\qquad P_0^{(\alpha,\beta)}(x)=1,\quad P_1^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)\,x+\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\end{aligned}\right\} \tag{4.5.1}$$

Здесь сначала с помощью (4.21.6) может быть найден коэффициент при $xP_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$; затем, полагая $x=+1$ и $x=-1$, можем найти коэффициенты при

$P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ и $P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x)$. В действительности формула является лишь специальным случаем соотношений между смежными P-функциями Римана (см. Уиттекер и Ватсон [1], часть II, § 14.7).

(2) Применяя обозначение (4.3.3), мы получим следующее выражение для ядра (см. (3.2.3)):

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\sum_{\nu=0}^{n}\{h_\nu^{(\alpha,\beta)}\}^{-1}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)P_\nu^{(\alpha,\beta)}(y)=$$

$$=\frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2}\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(y)-P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y)}{x-y}. \quad (4.5.2)$$

В частности, при $y=1$ имеем

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(x,1)=K_n^{(\alpha,\beta)}(x)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{2\nu+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\frac{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\nu+\beta+1)}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)=$$

$$=2^{-\alpha-\beta}\frac{n+\alpha+1}{2n+\alpha+\beta+2}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-\dfrac{n+1}{n+\alpha+1}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{1-x}=$$

$$=2^{-\alpha-\beta-1}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x). \quad (4.5.3)$$

Последнее выражение в (4.5.3) является следствием теоремы 3.1.4, так как $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta(1-x)=(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^\beta$. Отметим также, что

$$\left.\begin{aligned} P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)&=\frac{2}{2n+\alpha+\beta+2}\frac{(n+\alpha+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-(n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{1-x},\\ P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x)&=\frac{2}{2n+\alpha+\beta+2}\frac{(n+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+(n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{1+x}.\end{aligned}\right\} \quad (4.5.4)$$

Вторая формула получается из первой, если поменять местами α и β и применить (4.1.3). Наконец, применяя (4.21.7) и последние формулы, мы получаем

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)(1-x^2)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)=$$

$$=AP_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)+BP_n^{(\alpha,\beta)}(x)+CP_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad (4.5.5)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)},\\ B&=(\alpha-\beta)\frac{2n(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)},\\ C&=-\frac{2n(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}.\end{aligned}\right\} \quad (4.5.6)$$

Здесь $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ (или $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$) может быть выражен по формуле (4.5.1) через $xP_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ (или соответственно $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$). Это приводит к равенствам

$$\left.\begin{aligned}(2n+\alpha+\beta)(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=&\\=-n[(2n+\alpha+\beta)x+\beta-\alpha]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)&+\\+2(n+\alpha)(n+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)&,\\(2n+\alpha+\beta+2)(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=&\\=(n+\alpha+\beta+1)[(2n+\alpha+\beta+2)x+\alpha-\beta]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)&-\\-2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)&.\end{aligned}\right\} \tag{4.5.7}$$

Наконец, отметим в качестве следствия из последней части формулы (4.5.3) тождество

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(1,1)=K_n^{(\alpha,\beta)}(1)=2^{-\alpha-\beta-1}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\,\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}. \tag{4.5.8}$$

4.6. Интегральные представления в общем случае

Представление (4.3.1) и его интегральная форма (4.4.6) тесно связаны с классическим методом интегрирования гипергеометрического уравнения и других уравнений подобного типа. Начнем опять с формулы (4.4.6):

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\\=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{2\pi i}\int(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}(t-x)^{-n-1}\,dt, \tag{4.6.1}$$

где $x\neq\pm1$. Интегрирование ведется в положительном направлении вдоль замкнутой кривой, окружающей точку $t=x$, но не содержащей точек $t=\pm1$. Применяя соображение Эйлера [1] для интегрирования уравнения (4.2.1) и (4.2.3), введем функцию

$$Y=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta y=\int(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}(t-x)^{-n-1}\,dt, \tag{4.6.2}$$

где контур интегрирования выбран соответствующим образом. Здесь $x\neq\pm1$, а путь интегрирования не должен содержать точек $+1$, -1 и x. Однако мы допускаем точки $+1$ и -1 в качестве концов пути интегрирования, если только интегралы (4.6.2) и (4.6.3) сходятся.

Подставляя (4.6.2) в (4.2.3), мы получаем

$$\begin{aligned}(1-x^2)Y''+[\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)x]Y'+(n+1)(n+\alpha+\beta)Y=&\\=\int(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}(t-x)^{-n-3}\{(n+1)(n+2)(1-x^2)+&\\+(n+1)[\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)x](t-x)+&\\+(n+1)(n+\alpha+\beta)(t-x)^2\}\,dt=&\\=-(n+1)\int\frac{d}{dt}\{(1-t)^{n+\alpha+1}(1+t)^{n+\beta+1}(t-x)^{-n-2}\}\,dt.&\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Таким образом, мы видим, что (4.6.2) удовлетворяет уравнению (4.2.3), если выполняется одно из двух следующих условий:

(а) Путь интегрирования является замкнутым контуром, при обходе которого функция $(1-t)^{n+\alpha+1}(1+t)^{n+\beta+1}(t-x)^{-n-2}$ или, что то же самое, функция $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ возвращается к своему исходному значению.

(b) Интегрирование ведется вдоль дуги, конечной или бесконечной, и такой, что первое из упомянутых выше выражений обращается в нуль на ее концах.

Специализация контуров в соответствии с указанными условиями дает многочисленные интегральные представления многочленов Якоби, так же как и других решений уравнения (4.2.1) (см. §§ 4.61 и 4.82). Для выбранного контура интегрирования, на котором выполняется условие (a) или (b), мы должны сначала показать, что y не равен нулю тождественно; затем y может быть отождествлен с многочленом $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, умноженным на постоянную, или с каким-либо другим частным решением уравнения (4.2.1); наконец, должен быть определен постоянный множитель. Справедливость полученного интегрального представления может нарушаться лишь при некоторых исключительных значениях α или β.

Дальнейшие интегральные представления получены из (4.6.2) путем замены n на $-n-\alpha-\beta-1$, что не меняет уравнения (4.2.3). Итак,

$$Y=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}y=\int(1-t)^{-n-\beta-1}(1+t)^{-n-\alpha-1}(t-x)^{n+\alpha+\beta}\,dt, \quad (4.6.4)$$

где контур выбран из условия (a) или (b). Вместо первого выражения в (a) мы имеем теперь

$$(1-t)^{-n-\beta}(1+t)^{-n-\alpha}(t-x)^{n+\alpha+\beta-1}.$$

Формула Родрига (4.3.1) является частным случаем (4.6.2) в котором за путь интегрирования взята замкнутая кривая, содержащая внутри точку $t=x$, но не охватывающая точек ± 1. Условие (a) при этом будет выполнено.

4.61. Приложения; функции второго рода

(1) Теорема 4.61.1. *Пусть x — произвольная точка комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка* $[-1, 1]$. Пусть $\alpha>-1, \beta>-1$, $n\geqslant 0$. *Исключая случай $n=0$, $\alpha+\beta+1=0$, решение $y=Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ дифференциального уравнения* (4.2.1), *которое линейно независимо от $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, может быть получено в виде*

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=2^{-n-1}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\int_{-1}^{+1}(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}\frac{dt}{(x-t)^{n+1}}. \quad (4.61.1)$$

В исключительном случае: $n=0$, $\alpha+\beta+1=0$ мы имеем $Q_0^{(\alpha,\beta)}(x)=\text{const.}$; тогда решение, отличное от постоянной, дается формулой

$$Q^{(\alpha)}(x)=\ln(x+1)+\pi^{-1}\sin\pi\alpha\,(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\times$$
$$\times\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}}{x-t}\ln(1+t)\,dt. \quad (4.61.2)$$

Функции $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ называются функциями Якоби второго рода. Мы употребляем тот же термин в случае $n=0, \alpha+\beta+1=0$ для функции $Q^{(\alpha)}(x)$. В частном случае $\alpha=\beta=0$ мы пишем $Q_n^{(0,0)}(x)=Q_n(x)$ (функции Лежандра второго рода) (см. Якоби [3], стр. 195—197).

Обе функции (4.61.1) и (4.61.2) многозначны (за исключением случая, когда α и β — целые числа). Оба интеграла являются однозначными и регулярными функциями в комплексной плоскости. разрезанной вдоль отрезка $[-1, +1]$. Очевидно, $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)\sim x^{-n-\alpha-\beta-1}$ при $x\to\infty$, что показывает, что $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ линейно не зависит от $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ (за исключением случая $n=0$, $\alpha+\beta+1=0$; см. ниже). Соответствующее свойство имеет место для $Q^{(\alpha)}(x)$. Как легко видеть, справедливо тождество

$$Q^{(\alpha)}(x)=2\pi^{-1}\sin\pi\alpha\left\{\frac{\partial}{\partial\beta}Q_0^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}_{\beta=-\alpha-1}. \tag{4.61.3}$$

Функция $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.2.1); это вытекает из (4.6.2), так как отрезок $[-1, +1]$, который выбран в качестве пути интегрирования, удовлетворяет условию (b) § 4.6. Дифференцируя (4.2.1) по β и подставляя $\beta=-\alpha-1$, мы получим решение $Q^{(\alpha)}(x)$, так как $Q_0^{(\alpha,\beta)}(x)=\text{const.}$ при $\beta=-\alpha-1$.

(2) Теорема 4.61.2. *Имеет место следующее представление*:

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\int_{-1}^{+1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{x-t}dt= \tag{4.61.4}$$

$$=2^{n+\alpha+\beta}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}(x-1)^{-n-\alpha-1}(x+1)^{-\beta}\times$$

$$\times F\left(n+\alpha+1,\quad n+1;\quad 2n+\alpha+\beta+2;\quad \frac{2}{1-x}\right). \tag{4.61.5}$$

Кроме того, имеем

$$\left.\begin{gathered} Q^{(\alpha)}(x)=\ln(x+1)+\left(1-\frac{2}{1-x}\right)^{\alpha+1}\times\\ \times\sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{\alpha+\nu}{\nu}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{2}{1-x}\right)^{\nu}+c,\\ c=\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}-\ln 2. \end{gathered}\right\} \tag{4.61.6}$$

Применяя формулу Родрига, мы можем выражение (4.61.1) проинтегрировать по частям n раз, что и доказывает (4.61.4). Из (4.61.1) мы легко получаем

$$(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=$$

$$=(-2)^{-n-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{n}(1-x)^{-n-\nu-1}\int_{-1}^{+1}(1-t)^{n+\nu+\alpha}(1+t)^{n+\beta}dt=$$

$$=(-1)^{n+1}2^{\alpha+\beta-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{n}\frac{\Gamma(n+\nu+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\nu+\alpha+\beta+2)}\left(\frac{2}{1-x}\right)^{n+\nu+1}.$$

Это в соединении с (4.21.3) дает (4.61.5).

Возвращаясь к исключительному случаю, отметим сначала, что при $n=0$, $\alpha+\beta+1\neq 0$ (4.61.5) принимает вид

$$Q_0^{(\alpha,\beta)}(x)=2^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}(x-1)^{-\alpha-1}(x+1)^{-\beta}\times$$

$$\times F\left(\alpha+1,\ 1;\ \alpha+\beta+2;\ \frac{2}{1-x}\right). \tag{4.61.7}$$

При $\alpha+\beta+1=0$ это выражение становится равным постоянной, так как ((1.7.2), вторая формула)

$$\frac{1}{2}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)(x-1)^{-\alpha-1}(x+1)^{-\beta}F\left(\alpha+1,\ 1;\ 1;\ \frac{2}{1-x}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}(x-1)^{-\alpha-1}(x+1)^{-\beta}\left(1-\frac{2}{1-x}\right)^{-\alpha-1}=-\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Теперь из (4.61.7), учитывая (4.61.3), мы получаем (4.61.6).

(3) Случай $n=0$ может быть исследован иным путем на основании тождества (4.2.6). При $z=1$ оно дает

$$(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}y' = \text{const.}, \tag{4.61.8}$$

что приводит к интегральному представлению для y.

Теорема 4.61.3. *Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Тогда справедливы следующие интегральные представления:*

$$Q_0^{(\alpha,\beta)}(x) = -2^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\int_{\infty}^{x}(t-1)^{-\alpha-1}(t+1)^{-\beta-1}\,dt$$

$$\text{при } \alpha+\beta+1>0, \tag{4.61.9}$$

$$Q_0^{(\alpha,\beta)}(x) = -2^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left\{\int_{\infty}^{x}[(t-1)^{-\alpha-1}(t+1)^{-\beta-1} - \right.$$

$$\left. - t^{-\alpha-\beta-2}]\,dt - \frac{x^{-\alpha-\beta-1}}{\alpha+\beta+1}\right\} \quad \text{при } \alpha+\beta+1<0, \tag{4.61.10}$$

$$Q^{(\alpha)}(x) = \int_{\infty}^{x}\left[(t-1)^{-\alpha-1}(t+1)^{-\beta-1} - \frac{1}{t+1}\right]dt + \ln(x+1)$$

$$\text{при } \alpha+\beta+1=0. \tag{4.61.11}$$

В первом случае подынтегральная функция $\sim t^{-\alpha-\beta-2}$ при $t\to\infty$, следовательно, интеграл сходится. Постоянный множитель можно получить путем сравнения главных членов в (4.61.7) и (4.61.9).

Во втором случае главным членом подынтегральной функции будет $(\alpha-\beta)\,t^{-\alpha-\beta-3}$, следовательно, интеграл сходится. В третьем случае главный член подынтегральной функции равен $2(\alpha+1)(t+1)^{-2}$, так что интеграл опять сходится.

(4) Другое весьма общее интегральное представление для второго решения уравнения (4.2.1) можно получить, выбирая путь интегрирования в (4.6.2) таким образом, как в интеграле Жордана — Похгаммера для гамма-функций (см. рис. в книге Уиттекера и Ватсона [1], часть II, § 12.43). Этот путь интегрирования может быть определен схемой

$$(-1-),\ (+1+),\ (-1+),\ (+1-). \tag{4.61.12}$$

Условие (а) при этом выполнено, $x\neq\pm1$. Главным членом будет $x^{-n-\alpha-\beta-1}$, если интеграл

$$\int(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}\,dt$$

по рассматриваемому контуру не равен нулю, а этот интеграл обращается в нуль только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий (см. цитированную книгу, § 12.43):

$$\left.\begin{array}{l} n+\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad n+\beta=0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \\ 2n+\alpha+\beta+2=0,-1,\ -2,\ \ldots \end{array}\right\} \tag{4.61.13}$$

В частных случаях, когда $\alpha+\beta$ или $\alpha-\beta$ — целое число, контур может быть упрощен.

4.62. Дальнейшие свойства функций второго рода

Здесь мы будем опять предполагать, что $\alpha>-1$ и $\beta>-1$.

(1) Особыми точками $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ могут быть $+1$, -1, ∞. Для того чтобы исследовать эту функцию вблизи точки $x=+1$ (а также для дальнейших целей), перепишем (4.61.4) в виде

$$\begin{aligned}Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= -\frac{1}{2}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\int_{-1}^{+1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{x-t}\,dt+\\&+\frac{1}{2}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}}{x-t}\,dt=\\&=-\frac{1}{2}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\int_{-1}^{+1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{x-t}\,dt+\\&+P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,Q_0^{(\alpha,\beta)}(x).\end{aligned} \tag{4.62.1}$$

Последний интеграл есть π_{n-1} по x (произведение константы на числитель $R_n(x)$ n-й подходящей дроби для непрерывной дроби, определенной в § 3.5; см. первую часть (3.5.7)). Следовательно, когда $x\to+1$, поведение $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ в известном смысле определяется поведением $Q_0^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Исследование $Q_0^{(\alpha,\beta)}(x)$ в окрестности точки $x=+1$ не представляет труда. Разлагая множитель $(t+1)^{-\beta-1}$ подынтегральной функции в (4.61.9) в степенной ряд по $t-1$, мы получаем при $\alpha+\beta+1>0$, α — не целое число, равенство

$$Q_0^{(\alpha,\beta)}(x)=\text{const.}+(x-1)^{-\alpha}M\left(\frac{1-x}{2}\right),$$

где $M(u)$ — степенной ряд по u, сходящийся при $|u|<1$, причем $M(0)\neq0$. Аналогичное представление справедливо при $\alpha+\beta+1<0$ (см. (4.61.10)). (В исключительном случае, когда $\alpha+\beta+1=0$, это соотношение не имеет места для $Q_0^{(\alpha,\beta)}(x)$; однако оно справедливо для $Q^{(\alpha)}(x)$ (см. (4.61.11))). Пусть теперь α — целое число; используем снова (4.61.9). В силу тождеств

$$\begin{aligned}(t-1)^{-\alpha-1}(t+1)^{-\beta-1}&=2^{-\beta-1}(t-1)^{-\alpha-1}\left(1-\frac{1-t}{2}\right)^{-\beta-1}=\\&=2^{-\beta-1}(t-1)^{-\alpha-1}\left\{1+\ldots+\binom{\beta+\alpha}{\alpha}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}+\ldots\right\}\end{aligned}$$

интегрирование дает логарифмический член. Имеем

$$Q_0^{(\alpha,\beta)}(x)=\begin{cases}\text{const.}+(x-1)^{-\alpha}M_1\left(\dfrac{1-x}{2}\right)\\ \text{при } \alpha>-1,\ \beta>-1,\ \alpha\neq0,1,2,\ldots,\ \alpha+\beta+1\neq0;\\ \dfrac{(-1)^{\alpha}}{2}\ln\dfrac{1}{x-1}+(x-1)^{-\alpha}M_2\left(\dfrac{1-x}{2}\right)\\ \qquad\qquad\text{при } \alpha=0,1,2,\ldots,\ \beta>-1.\end{cases} \tag{4.62.2}$$

Здесь $M_1(u)$ и $M_2(u)$ — степенные ряды, сходящиеся при $|u|<1$, причем $M_1(0)\neq0$, $M_2(0)\neq0$ (см. ниже). Представление, аналогичное первому из (4.62.2), справедливо для $Q^{(\alpha)}(x)$.

Мы имеем, например,

$$Q_0^{(0,0)}(x)=Q_0(x)=\int_{\infty}^{x}\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}. \tag{4.62.3}$$

(Утверждение, что $M_2(0) \neq 0$, требует дальнейшего выяснения при $\alpha=0$. Полагая $x>1$ и затем интегрируя по частям, мы имеем

$$\int_{\infty}^{x} (t-1)^{-1} (t+1)^{-\beta-1}\, dt =$$

$$= (x+1)^{-\beta-1} \ln (x-1) + (\beta+1) \int_{\infty}^{x} (t+1)^{-\beta-2} \ln (t-1)\, dt,$$

следовательно,

$$M_2(0) = \lim_{x\to 1+0} \left\{ Q_0^{(\alpha,\beta)}(x) + \frac{1}{2} \ln (x-1) \right\} =$$

$$= -(\beta+1)\, 2^{\beta} \int_{\infty}^{1} (t+1)^{-\beta-2} \ln (t-1)\, dt \neq 0.)$$

(2) Теперь докажем следующую теорему:

Теорема 4.62.1. *Пусть x — вещественное число, $x>1$, и выберем $(x-1)^{\alpha}$ и $(x+1)^{\beta}$ так, чтобы они были вещественными и положительными. Тогда при $x \to 1+0$ имеем*

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) \sim \begin{cases} (x-1)^{-\alpha}, & \alpha>0, \\ \ln (x-1), & \alpha=0, \\ 1, & \alpha<0. \end{cases} \tag{4.62.4}$$

Более точно:

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) \cong \begin{cases} 2^{\alpha-1} \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} (x-1)^{-\alpha}, & \alpha>0, \\ \dfrac{(-1)^{\alpha}}{2} \ln \dfrac{1}{x-1}, & \alpha=0. \end{cases} \tag{4.62.5}$$

Поведение $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ вблизи точки $x=-1$ аналогично.

Случай $\alpha>0$ вытекает из (4.61.1):

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) \cong 2^{-n-\beta-1} (x-1)^{-\alpha} \int_{-1}^{+1} (1-t)^{\alpha-1} (1+t)^{n+\beta}\, dt.$$

В случае $\alpha=0$ мы используем (4.62.1), (4.62.2) и равенство $P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=1$. В случае $\alpha<0$ первое слагаемое в (4.62.1) обращается в нуль при $x\to 1+0$. Таким образом, утверждение эквивалентно соотношению $Q_0^{(\alpha,\beta)}(x) \sim 1$. Оно непосредственно вытекает из (4.61.9) при $\alpha+\beta+1>0$. Если же $\alpha+\beta+1<0$, то мы применим (4.61.10) и покажем, что

$$\int_{1}^{\infty} [(t-1)^{-\alpha-1} (t+1)^{-\beta-1} - t^{-\alpha-\beta-2}]\,dt + \frac{1}{\alpha+\beta+1} < 0. \tag{4.62.6}$$

Написав

$$(t-1)^{-\alpha-1} (t+1)^{-\beta-1} = (t-1)^{-1} (t+1)^{-\alpha-\beta-1} \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{\alpha},$$

мы видим, что (4.62.6) как функция от α и β возрастает вместе с α, если $\alpha+\beta$ постоянно. Но когда β стремится к -1, мы находим для левой части (4.62.2), что

$$\int_{1}^{\infty} [(t-1)^{-\alpha-1} - t^{-\alpha-1}]\,dt + \frac{1}{\alpha} = 0.$$

В качестве примера приведем случай ((4.62.1), (4.62.3)):

$$Q_n^{(0,\,0)}(x)=Q_n(x)=R(x)+\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{x+1}{x-1}, \tag{4.62.7}$$

где $R(x)$ есть π_{n-1}. Логарифмический множитель выбран так, что он стремится к нулю при $x\to\infty$.

(3) Теорема 4.62.2. *Пусть α — неотрицательное целое число. Рассмотрим функцию $Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$ (вещественную и положительную при $x>1$) в комплексной плоскости, разрезанной вдоль полупрямой $(-\infty,+1]$. Справедливо равенство*

$$Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(x+i0)-Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(x-i0)=(-1)^{\alpha-1}\pi i P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x),\quad -1<x<1. \tag{4.62.8}$$

Это вытекает из (4.62.1) и (4.62.2).

С другой стороны, функция

$$Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)=\frac{1}{2}\{Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(x+i0)+Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(x-i0)\} \tag{4.62.9}$$

является аналитической в промежутке $-1<x<+1$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.2.1). При $x\to 1-0$ она ведет себя аналогично функции $Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$. В частности, мы находим, что для функции $Q_n^{(0,\,0)}(x)=Q_n(x)$ имеют место равенства

$$Q_n(x)=R(x)+\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x}, \tag{4.62.10}$$

$$Q_n(-x)=(-1)^{n+1}Q_n(x),\quad -1<x<+1 \tag{4.62.11}$$

$$\lim_{x\to 1-0}Q_n(x)=+\infty. \tag{4.62.12}$$

Здесь $R(x)$ имеет тот же смысл, что и в (4.62.7).

Вообще, если α и β оба целые, то функция $Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$ регулярна и однозначна во всей плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[-1,+1]$.

(4) Функции второго рода удовлетворяют той же рекуррентной формуле, что и $P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$ (см. (4.5.1)), а именно:

$$\begin{aligned}2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)\,&Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)=\\ &=(2n+\alpha+\beta-1)\{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x+\alpha^2-\beta^2\}Q_{n-1}^{(\alpha,\,\beta)}(x)-\\ &\quad-2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)\,Q_{n-2}^{(\alpha,\,\beta)}(x),\quad n=2,3,4,\ldots\end{aligned} \tag{4.62.13}$$

Это вытекает из (4.62.1), если учесть (3.5.3) и теорему 3.5.1. Имеется, однако, существенное отличие при $n=1$. Тогда в соответствии с (4.62.1) мы имеем

$$\begin{aligned}Q_1^{(\alpha,\,\beta)}(x)&=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta+2)x+\alpha-\beta]\,Q_0^{(\alpha,\,\beta)}(x)-\\ &-2^{\alpha+\beta-1}(\alpha+\beta+2)\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}.\end{aligned} \tag{4.62.14}$$

Следовательно, обе системы функций (см. (4.3.3)):

$$\left.\begin{aligned}p_n(x)&=\{h_n^{(\alpha,\,\beta)}\}^{-\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x),\\ q_n(x)&=\{h_n^{(\alpha,\,\beta)}\}^{-\frac{1}{2}}Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(x),\quad n=0,1,2,\ldots,\end{aligned}\right\} \tag{4.62.15}$$

удовлетворяют одной и той же рекуррентной формуле типа (3.2.1) при $n\geqslant 1$, если мы положим

$$p_{-1}(x)=0,\quad q_{-1}(x)=(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}. \tag{4.62.16}$$

Итак, процесс, подобный примененному в § 3.2, (2), при $n \geqslant 1$ дает

$$\frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)\, q_n(y) - p_n(x)\, q_{n+1}(y)}{x-y} = \\ = p_n(x)\, q_n(y) + \frac{k_{n-1}}{k_n} \frac{p_n(x)\, q_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)\, q_n(y)}{x-y}, \quad (4.62.17)$$

где k_n означает коэффициент при x^n в нормированном многочлене $p_n(x)$. Эта формула будет справедлива и при $n=0$, если мы ее видоизменим следующим образом:

$$\frac{k_0}{k_1} \frac{p_1(x)\, q_0(y) - p_0(x)\, q_1(y)}{x-y} = p_0(x)\, q_0(y) + \text{const.} \frac{q_{-1}(y)}{x-y}. \quad (4.62.18)$$

Суммируя, получаем важный результат:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{2\nu+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\,\Gamma(\nu+\beta+1)} P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)\, Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(y) = \\ = \frac{1}{2} \frac{(y-1)^{-\alpha}(y+1)^{-\beta}}{y-x} + \\ + \frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)} \frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\, Q_n^{(\alpha,\beta)}(y) - P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y)}{x-y}. \quad (4.62.19)$$

Множитель $\frac{1}{2}$ в правой части может быть найден подстановкой $n=0$, умножением на $y^{\alpha+\beta+1}$, переходом к пределу при $y \to \infty$ с последующим применением (4.61.5).

Мы вернемся к этой формуле в § 9.2, где она будет использована в классическом вопросе о разложении функций в ряды по многочленам Якоби или по функциям Якоби второго рода.

4.7. Ультрасферические многочлены

(1) При $\alpha=\beta$ многочлены Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ называются ультрасферическими многочленами[1]). Обычно применяются следующее обозначение и нормирование:

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) = \\ = \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)} \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)} P_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\, \lambda-\frac{1}{2}\right)}(x), \quad \alpha=\lambda-\frac{1}{2}. \quad (4.7.1)$$

Здесь мы сначала предполагаем, что $\alpha > -1$, т. е. $\lambda > -\frac{1}{2}$. Важными частными случаями являются (см. (1.12.3))

$$P_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = P_n(x), \quad P_n^{(1)}(x) = U_n(x). \quad (4.7.2)$$

Если $\alpha = -\frac{1}{2}$, т. е. $\lambda=0$, то многочлен $P_n^{(\lambda)}(x)$ тождественно равен нулю при $n \geqslant 1$. Этот случай будет рассмотрен ниже (см. (4.7.8)).

---

[1]) Иногда их называют многочленами Гегенбауэра. См. его статьи [1]—[7]; см. также Гейне [3], том 1, стр. 297—301, 449—464.

Отметим некоторые формулы и теоремы, которые могут быть получены непосредственно из общей теории многочленов Якоби, если положить $\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}$, $\lambda>-\frac{1}{2}$:

$$P_n^{(\lambda)}(1)=\binom{n+2\lambda-1}{n}, \tag{4.7.3}$$

$$P_n^{(\lambda)}(-x)=(-1)^n P_n^{(\lambda)}(x), \tag{4.7.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1-x^2)y''-(2\lambda+1)xy'+n(n+2\lambda)y=0, \quad y=P_n^{(\lambda)}(x),\\ &(1-x^2)Y''+(2\lambda-3)xY'+(n+1)(n+2\lambda-1)Y=0,\\ &\qquad\qquad Y=(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}P_n^{(\lambda)}(x), \end{aligned}\right\} \tag{4.7.5}$$

$$\begin{aligned} P_n^{(\lambda)}(x)&=\binom{n+2\lambda-1}{n}F\left(-n,\ n+2\lambda;\ \lambda+\frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right)=\\ &=2^n\binom{n+\lambda-1}{n}(x-1)^n F\left(-n,\ -n-\lambda+\frac{1}{2};\ -2n-2\lambda+1;\frac{2}{1-x}\right). \end{aligned} \tag{4.7.6}$$

Последняя формула определяет $P_n^{(\lambda)}(x)$ при всех значениях λ. В случае необходимости при некоторых значениях λ, скажем $\lambda=\lambda_0$, формула может быть истолкована как предел[1]) при $\lambda\to\lambda_0$. При $\lambda=-m$, $m=0, 1, 2, \ldots$, мы имеем, очевидно (см. первую формулу (4.7.6)), $P_n^{(\lambda)}(x)\equiv 0$, если $n>2m$. В этом случае существует предел

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to -m}\frac{P_n^{(\lambda)}(x)}{\lambda+m}&=\left\{\frac{d}{d\lambda}P_n^{(\lambda)}(x)\right\}_{\lambda=-m}=\\ &=2\,\frac{(2m)!\,(n-2m-1)!}{n!}F\left(-n,\ n-2m;\ -m+\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.7.7}$$

Полученные многочлены с точностью до постоянного множителя снова будут многочленами Якоби $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$, $\alpha=-m-\frac{1}{2}$. Например (см. (1.12.3)):

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}P_n^{(\lambda)}(x)=\frac{2}{n}T_n(x), \quad n\geqslant 1. \tag{4.7.8}$$

В случае $\alpha=-l$, $(n+1)/2\leqslant l\leqslant n$, многочлены $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ тождественно равны нулю (см. § 4.22, (3)). Однако соответствующее предельное выражение для $P_n^{(\lambda)}(x)$ имеет смысл и отлично от нуля.

(2) Отметим дальнейшие формулы, содержащие $P_n^{(\lambda)}(x)$:

$$\lim_{x\to\infty}x^{-n}P_n^{(\lambda)}(x)=2^n\binom{n+\lambda-1}{n}, \tag{4.7.9}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left\{\frac{(n+\lambda)^2}{1-x^2}+\frac{\frac{1}{2}+\lambda-\lambda^2+\frac{x^2}{4}}{(1-x^2)^2}\right\}u=0, \quad u=(1-x^2)^{\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{4}}P_n^{(\lambda)}(x), \tag{4.7.10}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left\{(n+\lambda)^2+\frac{\lambda(1-\lambda)}{\sin^2\theta}\right\}u=0, \quad u=(\sin\theta)^{\lambda}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta), \tag{4.7.11}$$

$$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}P_n^{(\lambda)}(x)=\frac{(-2)^n}{n!}\,\frac{\Gamma(n+\lambda)\,\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2n+2\lambda)}\,\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}, \tag{4.7.12}$$

---

[1]) Это относится также ко всем формулам, которые получаются как следствие (4.7.6).

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \binom{n+2\lambda-1}{n}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n F\left(-n,\ -n-\lambda+\frac{1}{2};\ \lambda+\frac{1}{2};\ \frac{x-1}{x+1}\right), \tag{4.7.13}$$

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\lambda)}(x) = 2\lambda P_{n-1}^{(\lambda+1)}(x), \tag{4.7.14}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\{P_n^{(\lambda)}(x)\}^2\,dx = 2^{1-2\lambda}\pi\{\Gamma(\lambda)\}^{-2}\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{(n+\lambda)\Gamma(n+1)},\\ &\lambda > -\frac{1}{2},\quad \lambda \neq 0\,^{1)},\end{aligned}\right\} \tag{4.7.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+2\lambda)}P_n^{(\lambda)}(x)w^n =$$

$$= 2^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-2xw+w^2)^{-\frac{1}{2}}\{1-xw+(1-2xw+w^2)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}-\lambda}, \tag{4.7.16}$$

$$\left.\begin{aligned}nP_n^{(\lambda)}(x) &= 2(n+\lambda-1)xP_{n-1}^{(\lambda)}(x)-(n+2\lambda-2)P_{n-2}^{(\lambda)}(x),\\ n&=2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\\ P_0^{(\lambda)}(x)&=1,\quad P_1^{(\lambda)}(x)=2\lambda x,\end{aligned}\right\} \tag{4.7.17}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+\lambda)P_\nu^{\lambda}(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(n+2\lambda)P_n^{(\lambda)}(x)-(n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x)}{1-x}. \tag{4.7.18}$$

(3) Вторым решением уравнения (4.7.5), которое линейно независимо от $P_n^{(\lambda)}(x)$, будет (см. (4.23.1), (4.23.3), (4.61.1), (4.61.4), (4.61.5)):

$$\left.\begin{aligned}&y = (1-x)^{\frac{1}{2}-\lambda}F\left(-n-\lambda+\frac{1}{2},\ n+\lambda+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}-\lambda;\ \frac{1-x}{2}\right),\\ &\lambda \neq -n+\frac{1}{2},\ -n+\frac{3}{2},\ -n+\frac{5}{2},\ \ldots\,^{2)},\end{aligned}\right\} \tag{4.7.19}$$

$$\left.\begin{aligned}&y = (1-x)^{-n-2\lambda}F\left(n+2\lambda,\ n+\lambda+\frac{1}{2};\ 2n+2\lambda+1;\ \frac{2}{1-x}\right),\\ &\lambda \neq -\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2}-\frac{1}{2},\ -\frac{n}{2}-1,\ \ldots\,^{3)},\end{aligned}\right\} \tag{4.7.20}$$

$$\left.\begin{aligned}y &= (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}(x-t)^{-n-1}\,dt =\\ &= \text{const.}\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{P_n^{(\lambda)}(t)}{x-t}\,dt,\\ &\lambda > -\frac{1}{2},\ \lambda \neq 0,\end{aligned}\right\} \tag{4.7.21}$$

---

[1]) Применяем (1.7.3) при $n=2$. В предельном случае, когда $\lambda \to 0$, $n \geqslant 1$, мы умножаем (4.7.15) на λ^{-2}, а затем устремляем λ к нулю (см. (4.7.8)).

[2]) При $\lambda = -n-\frac{1}{2}$, $-n-\frac{3}{2}$, ... это будут многочлены, линейно независимые от $P_n^{(\lambda)}(x)$ (см. § 4.23, (1)).

[3]) См. § 4.23, (2).

$$\left.\begin{aligned} &y=(1-x)^{-n-\lambda-\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}-\lambda}\times \\ &\qquad\times F\left(n+\lambda+\frac{1}{2},\ n+1;\ 2n+2\lambda+1;\ \frac{2}{1-x}\right), \\ &\qquad\lambda\neq-\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2}-\frac{1}{2},\ -\frac{n}{2}-1,\ \ldots\ ^{1)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.7.22}$$

В соответствии с теоремой 4.23.2 общее решение уравнения (4.7.5) будет многочленом тогда и только тогда, когда $\lambda-\frac{1}{2}$ является целым числом и $\lambda\leqslant-\frac{n}{2}$.

(4) Для определения ультрасферических многочленов часто применяется производящая функция, существенно отличная от (4.7.16) (см. задачу 16) и притом более простая, а именно:

$$P_0^{(\lambda)}(x)+P_1^{(\lambda)}(x)w+P_2^{(\lambda)}(x)w^2+\ldots+P_n^{(\lambda)}(x)w^n+\ldots=(1-2xw+w^2)^{-\lambda}. \tag{4.7.23}$$

Для доказательства рассмотрим рекуррентную формулу (4.7.17), из которой следует равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n^{(\lambda)}(x)w^{n-1}=2x\sum_{n=1}^{\infty}(n+\lambda-1)P_{n-1}^{(\lambda)}(x)w^{n-1}-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}(n+2\lambda-2)P_{n-2}^{(\lambda)}(x)w^{n-1},$$

где мы приняли $P_{-1}^{(\lambda)}(x)=0$. Если мы обозначим левую часть (4.7.23) через $h(w)$, то последнее уравнение может быть записано в виде

$$h'(w)=2xw^{1-\lambda}\{w^{\lambda}h(w)\}'-w^{2-2\lambda}\{w^{2\lambda}h(w)\}'=$$
$$=2x\{\lambda h(w)+wh'(w)\}-\{2\lambda wh(w)+w^2h'(w)\},$$

откуда

$$\frac{h'(w)}{h(w)}=\frac{2\lambda(x-w)}{1-2xw+w^2}.$$

Так как $h(0)=P_0^{(\lambda)}(x)=1$, то (4.7.23) получается интегрированием.

Дифференцируя (4.7.23) по параметру λ, получаем выражение

$$-(1-2xw+w^2)^{-\lambda}\ln(1-2xw+w^2), \tag{4.7.24}$$

которое при $\lambda=-m$, $m=0, 1, 2,\ldots$, будет производящей функцией для многочленов (4.7.7), если только члены этого ряда рассматривать, начиная с $n>2m$. Эти многочлены, как отмечено в (1), являются с точностью до постоянного множителя многочленами Якоби $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ при $\alpha=-m-\frac{1}{2}$. Многочлены степени $n\leqslant 2m$, определяемые этой новой производящей функцией (4.7.24), существенно отличны от многочленов $P_n^{(\lambda)}(x)$, которые получаются как соответствующие члены ряда (4.7.23). Мы имеем,

---

[1]) Формула (4.61.5) была рассмотрена только при ограничении $\alpha>-1$, $\beta>-1$. Мы, однако непосредственно видим, что, за исключением указанных значений λ, функция (4.7.22) является решением, которое $\sim x^{-n-2\lambda}$ при $x\to\infty$, следовательно, оно не может быть многочленом.

например (см. (4.1.7)):

$$\left.\begin{aligned} &P_0^{(0)}(x)=1,\ P_n^{(0)}(x)=0,\ n\geqslant 1,\\ &-\ln(1-2xw+w^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}T_n(x)w^n=\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}P_n^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(x)w^n\,^{1)}, \end{aligned}\right\}\ \lambda=0, \tag{4.7.25}$$

$$\left.\begin{aligned} &P_0^{(-1)}(x)=1,\ P_1^{(-1)}(x)=-2x,\\ &P_2^{(-1)}(x)=1,\ P_n^{(-1)}(x)=0,\ n\geqslant 3,\\ &-(1-2xw+w^2)\ln(1-2xw+w^2)=\\ &\qquad=2xw-(2x^2+1)w^2-\\ &-32\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2\cdot 4\ldots(2n-6)}{1\cdot 3\ldots(2n-3)}P_n^{\left(-\frac{3}{2},\,-\frac{3}{2}\right)}(x)w^n, \end{aligned}\right\}\ \lambda=-1. \tag{4.7.26}$$

(5) Из (4.5.5), (4.5.6), (4.5.7), (4.7.14) мы получаем соотношения:

$$\begin{aligned} &(1-x^2)\frac{d}{dx}\{P_n^{(\lambda)}(x)\}=\\ &=[2(n+\lambda)]^{-1}\{(n+2\lambda-1)(n+2\lambda)P_{n-1}^{(\lambda)}(x)-n(n+1)P_{n+1}^{\lambda}(x)\}=\\ &=-nxP_n^{(\lambda)}(x)+(n+2\lambda-1)P_{n-1}^{(\lambda)}(x)=\\ &=(n+2\lambda)xP_n^{(\lambda)}(x)-(n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x)=\\ &=2\lambda(1-x^2)P_{n-1}^{(\lambda+1)}(x),\qquad n\geqslant 0,\ P_{-1}^{(\lambda)}(x)=0. \end{aligned} \tag{4.7.27}$$

Мы можем отсюда получить следующие тождества:

$$\left.\begin{aligned} nP_n^{(\lambda)}(x)&=x\frac{d}{dx}\{P_n^{(\lambda)}(x)\}-\frac{d}{dx}\{P_{n-1}^{(\lambda)}(x)\},\\ (n+2\lambda)P_n^{(\lambda)}(x)&=\frac{d}{dx}\{P_{n+1}^{(\lambda)}(x)\}-x\frac{d}{dx}\{P_n^{(\lambda)}(x)\}. \end{aligned}\right\} \tag{4.7.28}$$

Складывая эти формулы и учитывая (4.7.14), находим

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\{P_{n+1}^{(\lambda)}(x)-P_{n-1}^{(\lambda)}(x)\}=2(n+\lambda)P_n^{(\lambda)}(x)=\\ &\qquad=2\lambda\{P_n^{(\lambda+1)}(x)-P_{n-2}^{(\lambda+1)}(x)\},\quad n\geqslant 1,\quad P_{-1}^{(\lambda)}(x)=0. \end{aligned} \tag{4.7.29}$$

(6) Наконец, укажем несколько специальных формул, содержащих гипергеометрические функции. Комбинируя (4.1.5) и (4.21.2), мы получаем

$$\left.\begin{aligned} P_{2\nu}^{(\lambda)}(x)&=\binom{2\nu+\lambda-1}{2\nu}F\left(-\nu,\ \nu+\lambda;\ \lambda+\frac{1}{2};\ 1-x^2\right)=\\ &=(-1)^{\nu}\binom{\nu+\lambda-1}{\nu}F\left(-\nu,\ \nu+\lambda;\ \frac{1}{2};\ x^2\right),\\ P_{2\nu+1}^{(\lambda)}(x)&=\binom{2\nu+2\lambda}{2\nu+1}xF\left(-\nu,\ \nu+\lambda+1;\ \lambda+\frac{1}{2};\ 1-x^2\right)=\\ &=(-1)^{\nu}2\lambda\binom{\nu+\lambda}{\nu}xF\left(-\nu,\ \nu+\lambda+1;\ \frac{3}{2};\ x^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.7.30}$$

---

1) Первое из этих тождеств мы можем получить непосредственно, если напишем $1-2w\cos\theta+w^2=(1-we^{i\theta})(1-we^{-i\theta})$.

Постоянные множители могут быть вычислены подстановкой $x=1$ и сравнением старших коэффициентов (или же вычислением $P_{2\nu}^{(\lambda)}(0)$ и $P_{2\nu+1}^{(\lambda)\prime}(0)$ по формуле (4.7.23)).

Можно последнюю часть (4.7.30) записать также следующим образом:

$$P^{(\lambda)}(x)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\frac{\Gamma(n-m+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(n-2m+1)}(2x)^{n-2m}. \qquad (4.7.31)$$

Это последнее выражение — явная запись ультрасферических многочленов (см. задачу 15).

Формулы (4.1.5) могут быть доказаны из более общих соображений. Например, в первом случае мы можем исходить из соответствующих дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}&(1-x^2)\,y''-2(\alpha+1)\,xy'+2\nu(2\nu+2\alpha+1)\,y=0,\\&(1-x^2)\,z''-\left\{\alpha+\frac{1}{2}+\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)x\right\}z'+\nu\left(\nu+\alpha+\frac{1}{2}\right)z=0\end{aligned}\right\} \qquad (4.7.32)$$

и доказать соотношение $y(x)=z(2x^2-1)$ между их общими решениями. Это рассуждение устанавливает одновременно соотношение, аналогичное (4.1.5), между решениями уравнений (4.7.32), которые не являются многочленами. Для того чтобы получить более определенный результат, заменим величины n, α, β, x в выражении (4.23.3) сначала соответственно через ν, $-\frac{1}{2}$, α, $1-2x^2$, а затем через ν, $+\frac{1}{2}$, α, $1-2x^2$; мы получим тогда (во втором случае после умножения на x)

$$\begin{aligned}y&=x^{-n-2\alpha-1}F\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]+\alpha+\frac{1}{2},\ \left[\frac{n}{2}\right]+\alpha+1;\ n+\alpha+\frac{3}{2};\ x^{-2}\right)=\\&=x^{-n-2\lambda}F\left(\frac{n+1}{2}+\lambda,\ \frac{n}{2}+\lambda;\ n+\lambda+1;\ x^{-2}\right)\end{aligned} \qquad (4.7.33)$$

в качестве второго решения уравнения (4.7.5), которое линейно независимо от $P_n^{(\lambda)}(x)$, если $\lambda\neq-[(n+1)/2]-k$, $k=0, 1, 2, \ldots$

Исходя из первой формулы (4.7.21), мы находим с точностью до постоянного множителя

$$\begin{aligned}y&=(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}x^{-n-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+2\nu}{2\nu}x^{-2\nu}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}t^{2\nu}\,dt=\\&=(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}x^{-n-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+2\nu}{2\nu}\frac{\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+\lambda+\nu+1)}x^{-2\nu}=\\&=\frac{\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+\lambda+1)}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}x^{-n-1}F\left(\frac{n+1}{2},\ 1+\frac{n}{2};\ n+\lambda+1;\ x^{-2}\right).\end{aligned} \qquad (4.7.34)$$

Относительно дальнейших свойств ультрасферических многочленов читатель может обратиться к книге Уиттекера и Ватсона [1], часть II, §§ 15.5, 15.8, и к литературе, указанной там; см. также Вангерин [1], стр. 730—731. Функция, обозначенная через $C_n^\nu(x)$ у этих авторов, совпадает с $P_n^{(\nu)}(x)$ в наших обозначениях. Присоединенная функция Лежандра $P_n^m(x)$, m — целое (см. Гобсон [1], п. 54), может быть записана в виде (см. (4.21.7))

$$P_n^m(x)=\mathrm{const.}\,(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_{n-m}^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}(x). \qquad (4.7.35)$$

4.8. Интегральные представления многочленов Лежандра

В важном случае $\alpha=\beta=0$, т. е. для многочленов Лежандра, метод § 4.6 ведет к различным интегральным представлениям. В соответствии с (4.6.1) имеем

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{1}{2}\,\frac{t^2-1}{t-x}\right)^n\frac{dt}{t-x}, \tag{4.8.1}$$

где точка x лежит внутри контура интегрирования; в данном случае расположение точек $t=\pm 1$ относительно этого контура не существенно.

(1) *Интеграл Дирихле — Мелера.* (См. Дирихле [1], Мелер [5].) Пусть x лежит внутри промежутка $(-1,1)$, так что $x=\cos\theta$, $0<\theta<\pi$. В качестве пути интегрирования выберем окружность

$$|t-1|=|e^{i\theta}-1|=2\sin\frac{\theta}{2},\quad t=1+2\sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\psi}, \tag{4.8.2}$$

тогда

$$\frac{1}{2}\,\frac{t^2-1}{t-\cos\theta}=\frac{1+\sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\psi}}{1+\sin\frac{\theta}{2}\,e^{-i\psi}}. \tag{4.8.3}$$

Пусть теперь ψ изменяется от $-\pi$ до $+\pi$, тогда $1+\sin\frac{\theta}{2}e^{i\psi}$ описывает малую окружность (см. рис. 3). Выражение, стоящее в правой части (4.8.3), по абсолютной величине равно единице, а аргумент его равен удвоенному аргументу числителя. Поэтому, если мы положим

$$\frac{1}{2}\,\frac{t^2-1}{t-\cos\theta}=e^{i\varphi}, \tag{4.8.4}$$

то величина φ изменяется от $-\theta$ до $+\theta$, а затем от $+\theta$ до $-\theta$. Решая (4.8.4) относительно t, получаем

$$t=e^{i\varphi}+e^{\frac{i\varphi}{2}}(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.8.5}$$

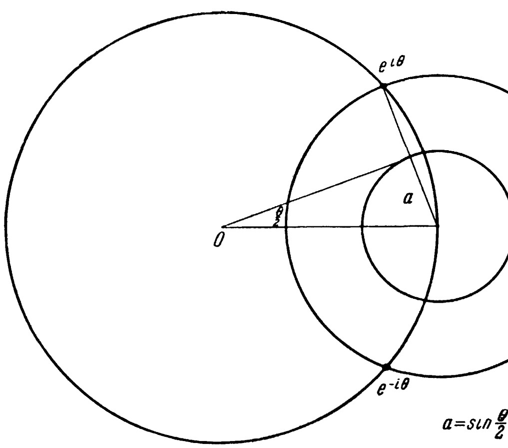

Рис. 3.

Здесь положительное значение $(\ )^{\frac{1}{2}}$ соответствует случаю $|\psi|<(\pi+\theta)/2$, т. е. «внешней» дуге, в то время как отрицательное значение соответствует случаю $|\psi|>(\pi+\theta)/2$, т. е. «внутренней» дуге. Кроме того, из (4.8.4), следует, что

$$t\,dt=e^{i\varphi}\,dt+(t-\cos\theta)\,ie^{i\varphi}\,d\varphi;$$

отсюда

$$\frac{dt}{t-\cos\theta}=\frac{ie^{i\varphi}\,d\varphi}{t-e^{i\varphi}}=\frac{ie^{\frac{i\varphi}{2}}\,d\varphi}{(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

Окончательно имеем

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{+\theta} e^{in\varphi}\frac{e^{\frac{i\varphi}{2}}\,d\varphi}{(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2\pi}\int_{+\theta}^{-\theta} e^{in\varphi}\frac{e^{\frac{i\varphi}{2}}\,d\varphi}{-(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

или

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,d\varphi, \tag{4.8.6}$$

где квадратный корень из $2\cos\varphi-2\cos\theta$ берется с положительным знаком. Это первая формула Дирихле — Мелера. Подставляя $\pi-\theta$ вместо θ и учитывая (4.1.3), получаем вторую формулу

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{(2\cos\theta-2\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}\,d\varphi. \tag{4.8.7}$$

(2) *Первый интеграл Лапласа.* (См. Уиттекер и Ватсон [1], часть II, § 15.23.) Пусть x — точка, отличная от ± 1; выберем в качестве контура интегрирования окружность

$$|t-x|=|x^2-1|^{\frac{1}{2}}. \tag{4.8.8}$$

Полагая $t=x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}$ с произвольным, но определенным выбором $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$), мы находим

$$\frac{1}{2}\,\frac{t^2-1}{t-x}=x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi,\quad \frac{dt}{t-x}=i\,d\varphi. \tag{4.8.9}$$

Следовательно,

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{x-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\}^n\,d\varphi=\pi^{-1}\int_0^{\pi}\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\}^n\,d\varphi. \tag{4.8.10}$$

Это выражение называется первым интегралом Лапласа. Оно справедливо при любых значениях x.

(3) *Второй интеграл Лапласа.* (См. Уиттекер и Ватсон [1], часть II, § 15.23; Якоби [2], стр. 153.) Этот интеграл имеет вид

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\}^{-n-1}\,d\varphi=$$

$$=\pi^{-1}\int_0^{\pi}\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\}^{-n-1}\,d\varphi. \tag{4.8.11}$$

Он может быть выведен из первого интеграла Лапласа следующим образом. Пусть $0<r<1$; положим

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{1+r^2}{1-r^2},\quad (x^2-1)^{\frac{1}{2}}=\frac{2r}{1-r^2},\\ x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi=(1-r^2)^{-1}|1+rz|^2,\quad z=e^{i\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{4.8.12}$$

тогда

$$P_n(x)=\frac{(1-r^2)^{-n}}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}|1+rz|^{2n}|dz|. \tag{4.8.13}$$

Далее, подставляя

$$z=\frac{w-r}{1-rw},\quad 1+rz=\frac{1-r^2}{1-rw},\quad \frac{dz}{dw}=\frac{1-r^2}{(1-rw)^2}, \tag{4.8.14}$$

мы получаем [1])

$$P_n(x)=\frac{(1-r^2)^{-n}}{2\pi}\int\limits_{|w|=1}\frac{(1-r^2)^{2n}}{|1-rw|^{2n}}\frac{1-r^2}{|1-rw|^2}|dw|. \tag{4.8.15}$$

Подставляя затем $w=-e^{i\varphi'}$, мы получаем (4.8.11). Осуществляя аналитическое продолжение, можно непосредственно распространить эту формулу на любые комплексные значения x.

(4) Как частный случай (4.4.9) отметим следующее представление:

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int w^{-n-1}(1-2w\cos\theta+w^2)^{-\frac{1}{2}}dw. \tag{4.8.16}$$

Интегрирование ведется в положительном направлении по контуру, содержащему точку $w=0$, но не содержащему точек $e^{\pm i\theta}$. При подходящем выборе контура из (4.8.16) можно снова получить формулы (4.8.6) и (4.8.10) (см. Полиа и Сегё [1], часть I, отдел III, задача 157).

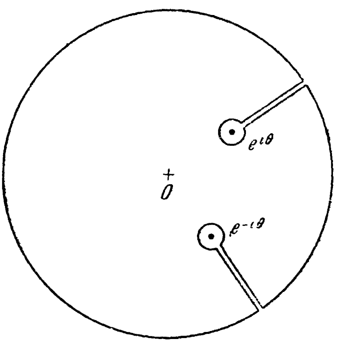

Рис. 4

(5) *Интегральное представление Стилтьеса* (Стилтьес [8]). Допустим, что $0<\theta<\pi$. Это важное представление может быть получено из (4.8.16), если интегрирование осуществить по контуру, изображенному на рис. 4. (Вывод этого выражения из формулы (4.8.1), по-видимому, слишком сложен.) Так как подынтегральная функция есть $O(w^{-n-2})$ при $w\to\infty$, то слагаемое, соответствующее окружности большого радиуса, стремится к нулю, когда радиус стремится к бесконечности. То же имеет место для слагаемых по маленьким окружностям с центрами в точках $e^{\pm i\theta}$, поскольку на них подынтегральная функция есть $O(|w-e^{\pm i\theta}|^{-\frac{1}{2}})$. Следовательно,

$$P_n(\cos\theta)=2\Re\frac{1}{2\pi i}\int w^{-n-1}(1-2w\cos\theta+w^2)^{-\frac{1}{2}}dw,$$

где интеграл берется дважды вдоль прямой $w=t^{-1}e^{i\theta}$, t возрастает от 0 до 1, а затем убывает от 1 до 0. Мы имеем

$$(1-2w\cos\theta+w^2)^{-\frac{1}{2}}=\pm te^{i\theta}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1-te^{-2i\theta})^{-\frac{1}{2}},$$

[1]) Относительно этого рассуждения см. Сегё [21].

где знаки $+$ и $-$ соответствуют первому и второму случаю $[(1-t)^{-\frac{1}{2}}=(1-te^{-2i\theta})^{-\frac{1}{2}}=1$ при $t=0]$. Таким образом,

$$P_n(\cos\theta)=4\Re\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 t^{n+1}e^{-i(n+1)\theta}te^{-i\theta}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1-te^{-2i\theta})^{-\frac{1}{2}}(-t^{-2}e^{i\theta})\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\Im\left\{e^{i(n+1)\theta}\int_0^1 t^n(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1-te^{2i\theta})^{-\frac{1}{2}}\,dt\right\}. \qquad (4.8.17)$$

(6) Дальнейшие интегральные представления получаются заменой n в (4.8.1) на $-n-1$ (см. (4.6.4)) с учетом условий (a), (b), формулированных в § 4.6 (здесь нужно рассматривать выражение $(1-t^2)^{-n}(t-x)^{n-1}$). Мы имеем

$$y=\frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{1}{2}\,\frac{t^2-1}{t-x}\right)^{-n-1}\frac{dt}{t-x}. \qquad (4.8.18)$$

Интегралы этого вида могут представлять как многочлены Лежандра, так и функции Лежандра второго рода, а также их линейные комбинации в зависимости от выбора пути интегрирования.

Применяя тот же контур, что и в пункте (1), мы снова получим интеграл Дирихле — Мелера (4.8.6), так как выражение в правой части не меняется при замене n на $-n-1$. Эта же подстановка преобразует первый интеграл Лапласа (4.8.10) во второй интеграл Лапласа (4.8.11) и обратно. Выбирая контур в (4.8.18), как в пункте (2), мы получаем второй интеграл. Выражение в правой части (4.8.11) не может представлять решение, отличное от $P_n(x)$, так как оно конечно и равно $+1$ в точке $x=+1$.

4.81. Функции Лежандра второго рода

(1) Пусть точка x лежит в комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[-1, +1]$, и пусть

$$x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \quad |z|<1.$$

Мы деформируем путь интегрирования в (4.61.1) в дугу окружности, проходящую через точки -1, z, $+1$ (см. Уиттекер и Ватсон [1], часть II, § 15.31, пример 1). Эта деформация допустима, так как $\operatorname{sign}\Im x=-\operatorname{sign}\Im z$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} t&=\frac{(z+1)e^{\tau}+(z-1)}{(z+1)e^{\tau}-(z-1)},\\ \frac{1}{2}\,\frac{t^2-1}{t-x}&=\frac{dt}{d\tau}\,\frac{1}{x-t}=\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\tau\}^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.81.1)$$

Новая переменная τ вещественна и изменяется от $-\infty$ до $+\infty$; далее, $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cong x$ при $x\to\infty$. Это дает следующее интегральное представление $Q_n^{(0,0)}(x)=Q_n(x)$, которое весьма сходно со вторым интегралом Лапласа:

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\tau\}^{-n-1}\,d\tau. \qquad (4.81.2)$$

(2) Пусть x — вещественное число, $x>1$. Положим $x=\operatorname{ch}\zeta$, $\zeta>0$. Сделаем в (4.81.2) следующую подстановку:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{ch}\zeta+\operatorname{sh}\zeta\operatorname{ch}\tau=e^{\theta},\\ &\frac{d\tau}{d\theta}=\frac{e^{\theta}}{\operatorname{sh}\zeta\operatorname{sh}\tau}=\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{(2\operatorname{ch}\theta-2\operatorname{ch}\zeta)^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}\right\} \tag{4.81.3}$$

тогда получим

$$Q_n(\operatorname{ch}\zeta)=\int\limits_{\zeta}^{\infty}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}}{(2\operatorname{ch}\theta-2\operatorname{ch}\zeta)^{\frac{1}{2}}}\,d\theta. \tag{4.81.4}$$

В этой формуле (Ватсон [2], стр. 154) мы сначала предполагаем, что $\zeta>0$. Посредством аналитического продолжения она может быть распространена на полуполосу (1.9.3). Путь интегрирования представляет собой горизонтальную прямую $\Re\theta\geqslant\Re\zeta$, $\Im\theta\geqslant\Im\zeta$. Эта формула соответствует формуле Дирихле — Мелера.

4.82. Обобщения

(1) *Обобщение интеграла Дирихле — Мелера.* (См. Фейер [12].) Путь $0<\theta<\pi$, $0<\lambda<1$. С помощью производящей функции (4.7.23) получаем

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int w^{-n-1}(1-2w\cos\theta+w^2)^{-\lambda}dw. \tag{4.82.1}$$

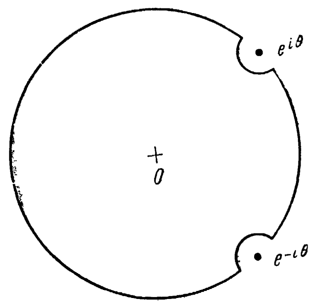

Рис. 5.

Здесь мы выбираем в качестве контура интегрирования единичную окружность $|w|=1$, из которой удалены точки $w=e^{\pm i\theta}$ (рис. 5); в окрестности этих точек подынтегральная функция есть $O(|w-e^{\pm i\theta}|^{-\lambda})$. При $w=e^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi<\theta$, мы имеем

$$(1-2w\cos\theta+w^2)^{-\lambda}=e^{-i\lambda\varphi}(w^{-1}-2\cos\theta+w)^{-\lambda}=e^{-i\lambda\varphi}(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{-\lambda},$$

а при $w=e^{i\varphi}$, $\theta<\varphi\leqslant\pi$, имеем

$$(1-2w\cos\theta+w^2)^{-\lambda}=e^{-i\lambda(\varphi-\pi)}(2\cos\theta-2\cos\varphi)^{-\lambda},$$

следовательно,

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=2\Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\theta}e^{-i(n+1)\varphi}e^{-i\lambda\varphi}(2\cos\varphi-2\cos\theta)^{-\lambda}\,ie^{i\varphi}\,d\varphi+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\theta}^{\pi}e^{-i(n+1)\varphi}e^{-i\lambda(\varphi-\pi)}(2\cos\theta-2\cos\varphi)^{-\lambda}ie^{i\varphi}\,d\varphi\right\}.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} &P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\pi^{-1}\int\limits_0^{\pi}F(\varphi)\,|2\cos\varphi-2\cos\theta|^{-\lambda}\,d\varphi,\\ &F(\varphi)=\begin{cases}\cos(n+\lambda)\varphi & \text{при } 0\leqslant\varphi<\theta,\\ \cos[(n+\lambda)\varphi-\lambda\pi] & \text{при } \theta<\varphi\leqslant\pi.\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{4.82.2}$$

Выражение, получающееся из (4.82.2) при $\lambda=\frac{1}{2}$, есть полусумма выражений (4.8.6) и (4.8.7).

(2) *Обобщение интеграла Стилтьеса.* (См. Стилтьес; Эрмит — Стилтьес [1], том 2, стр. 122, п. 284.) Если мы выберем в (4.82.1) тот же контур, что в § 4.8, (5), то рассуждение, подобное проведенному там, приводит к представлению

$$\left.\begin{gathered}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\sin\lambda\pi\,\Im e^{il(\theta)}\int_0^1 t^{n+2\lambda-1}(1-t)^{-\lambda}(1-te^{2i\theta})^{-\lambda}dt\Big\},\\ l(\theta)=(n+2\lambda)\theta+\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\lambda<1.\end{gathered}\right\}\quad(4.82.3)$$

Формулы § 4.8, (1) и (2) могут быть обобщены на многочлены Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ при целых значениях α. Однако окончательные выражения будут гораздо сложнее.

Отметим, наконец, следующее обобщение формулы (4.81.2), получающееся из (4.61.1) способом, подобным примененному в § 4.81, (1) (те же обозначения, что и там):

$$\left.\begin{gathered}Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{4z}{1-z}\right)^{\alpha}\left(\frac{4z}{1+z}\right)^{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\beta\tau}\{(1+z)e^{\tau}+1-z\}^{-\alpha-\beta}\times\\ \times\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\tau\}^{-n-1}d\tau,\\ x=\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\ |z|<1,\ \alpha>-1,\ \beta>-1;\end{gathered}\right\}\quad(4.82.4)$$

функции, входящие в (4.82.4), надлежащим образом определены.

4.9. Тригонометрические представления

(1) *Конечное представление многочленов Лежандра в виде косинус-многочленов.* Из производящей функции (4.7.23) при $\lambda=\frac{1}{2}$ мы получаем

$$(1-2w\cos\theta+w^2)^{-\frac{1}{2}}=(1-we^{i\theta})^{-\frac{1}{2}}(1-we^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}g_m w^m e^{im\theta}\sum_{m=0}^{\infty}g_m w^m e^{-im\theta},\quad(4.9.1)$$

где

$$g_0=1,\ g_m=\frac{1\cdot3\ldots(2m-1)}{2\cdot4\ldots2m},\ m=1,2,3,\ldots,\quad(4.9.2)$$

следовательно,

$$P_n(\cos\theta)=\sum_{m=0}^{n}g_m e^{im\theta}g_{n-m}e^{-i(n-m)\theta}=\sum_{m=0}^{n}g_m g_{n-m}e^{i(2m-n)\theta}=$$
$$=\sum_{m=0}^{n}g_m g_{n-m}\cos(n-2m)\theta=2g_0g_n\cos n\theta+2g_1g_{n-1}\cos(n-2)\theta+\ldots$$
$$\ldots+\begin{cases}2g_{\frac{n-1}{2}}g_{\frac{n+1}{2}}\cos\theta & \text{при } n \text{ нечетном},\\ g_{\frac{n}{2}}^2 & \text{при } n \text{ четном}.\end{cases}\quad(4.9.3)$$

Итак, $P_n(\cos\theta)$ — тригонометрический косинус-многочлен с неотрицательными коэффициентами.

Соотношение (4.9.3) может быть записано с помощью многочленов Чебышева

$$P_n(x) = 2g_0g_nT_n(x) + 2g_1g_{n-1}T_{n-2}(x) + \ldots$$

$$\ldots + \begin{cases} 2g_{\frac{n-1}{2}}\,g_{\frac{n+1}{2}}\,T_1(x) & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ g^2_{\frac{n}{2}} & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases} \qquad (4.9.4)$$

(2) *Разложение многочленов Лежандра в бесконечный ряд по синусам.* (См. Гейне [3], том 1, стр. 19, 89.) Мы имеем

$$P_n(\cos\theta) = \frac{4}{\pi}\,\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}\,\{f_0\sin(n+1)\theta + f_1\sin(n+3)\theta + \ldots$$

$$\ldots + f_\nu\sin(n+2\nu+1)\theta + \ldots\}, \qquad (4.9.5)$$

$$f_0 = 1, \quad f_\nu = f_{\nu n} = g_\nu\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+\nu)}{\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{5}{2}\right)\ldots\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

При $n=0$ множитель $(2\cdot 4\ldots 2n)/(3\cdot 5\ldots(2n+1))$ следует заменить единицей. Преобразование Абеля (§ 1.11, (4)) показывает, что этот ряд сходится при $0<\theta<\pi$ и притом равномерно на отрезке $\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$. Сходимость может быть также установлена с помощью основ теории рядов Фурье. Действительно, (4.9.5) является формальным разложением функции $P_n(\cos\theta)$ при $0<\theta<\pi$ и функции $-P_n(\cos\theta)$ при $-\pi<\theta<0$ (см. ниже). Этот ряд является обобщением классического ряда $(n=0)$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\theta}{1} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \ldots \qquad (4.9.6)$$

Первое доказательство (см. Гейне [3], цитированное место; см. также Фейер [20], стр. 24—26). Применяя обозначение (1.12.3), имеем

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta)\sin(m+1)\theta\,d\theta = \int_{-1}^{+1} P_n(t)\,U_m(t)\,dt. \qquad (4.9.7)$$

Этот интеграл обращается в нуль при $m<n$, а также при $m\geqslant n$, когда $m-n$ — нечетное число. Полагая $m=n+2\nu$ и учитывая (4.9.3), находим

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta)\sin(m+1)\theta\,d\theta = \sum_{k=0}^n g_kg_{n-k}\int_0^\pi \cos(n-2k)\theta\sin(m+1)\theta\,d\theta =$$

$$= \sum_{k=0}^n g_kg_{n-k}\left(\frac{1}{m+1+n-2k} + \frac{1}{m+1-n+2k}\right) =$$

$$= 2\sum_{k=0}^n \frac{g_kg_{n-k}}{m+1-n+2k} = \sum_{k=0}^n \frac{g_kg_{n-k}}{\nu+k+\frac{1}{2}}. \qquad (4.9.8)$$

Рассматривая ν как непрерывную переменную, мы легко проверяем с помощью вычетов тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{g_k g_{n-k}}{\nu+k+\frac{1}{2}} = \frac{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)} = 2\,\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)} f_\nu, \quad (4.9.9)$$

что и доказывает утверждение.

Второе доказательство. (См. Фейер [19], стр. 202—203.) Разложение в ряд последнего множителя в подынтегральной функции в (4.8.17) дает

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\,\Im\left\{e^{i(n+1)\theta}\sum_{m=0}^{\infty} g_m e^{2im\theta}\int_0^1 t^{n+m}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt\right\}, \quad (4.9.10)$$

где g_m имеет то же значение, что в (4.9.2). Последний интеграл может быть вычислен посредством (1.7.5), и утверждение этим будем доказано.

Третье доказательство. Применим полную индукцию по n. Учитывая рекуррентную формулу для $P_n(x)$ $\left((4.7.17),\ \lambda=\frac{1}{2}\right)$, достаточно показать, что

$$\frac{n^2}{n^2-\frac{1}{4}} f_{\nu n} = f_{\nu,\,n-1} + f_{\nu+1,\,n-1} - f_{\nu+1,\,n-2}, \quad (4.9.11)$$
$$\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ f_{\nu+1,\,-1}=0.$$

При $n=0$ имеем (4.9.6). Тождество (4.9.11) может быть проверено непосредственным вычислением.

Примечание. Формула (4.9.5) тесно связана с некоторыми рядами для функций второго рода. Из (4.61.4) при $\alpha=\beta=0$ имеем

$$Q_n^{(0,\,0)}(x) = Q_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{x-t}\,dt. \quad (4.9.12)$$

Если мы подставим $x=\frac{1}{2}(w+w^{-1})$ (см. § 1.9), то функция $Q_n\left\{\frac{1}{2}(w+w^{-1})\right\}$ будет регулярной при $|w|\leqslant 1$, $w\neq\pm 1$. Применяя (4.7.23) при $\lambda=1$, мы получаем для $|w|<1$ соотношение

$$Q_n\left\{\frac{1}{2}(w+w^{-1})\right\} = w\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{1-2tw+w^2}dt = w\int_{-1}^{+1}P_n(t)\left\{\sum_{m=0}^{\infty}U_m(t)w^m\right\}dt,$$

следовательно, в силу (4.9.7), (4.9.8) и (4.9.9) имеем

$$Q_n\left\{\frac{1}{2}(w+w^{-1}\right\} = 2\,\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu w^{n+2\nu+1}, \quad |w|<1. \quad (4.9.13)$$

Пусть $|w|<1$, $w\to e^{i\theta}$, $0<\theta<\pi$. Тогда $\frac{1}{2}(w+w^{-1}) \to \cos\theta - i0$ и имеем

$$Q_n(\cos\theta - i0) = 2\,\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu e^{i(n+2\nu+1)\theta}, \quad 0<\theta<\pi. \quad (4.9.14)$$

(Мы использовали при этом выводе сходимость последнего ряда и теорему Абеля о непрерывности; см. Титчмарш [1], § 1.22.) Заменяя i через $-i$, мы получаем

$$Q_n(\cos\theta+i0)=2\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu e^{-i(n+2\nu+1)\theta},\quad 0<\theta<\pi. \tag{4.9.15}$$

Отсюда снова можно получить (4.9.5) благодаря (4.62.8) при $\alpha=\beta=0$. Применяя (4.62.9) при $\alpha=\beta=0$, мы находим (см. Гейне [3], том 1, стр. 130):

$$Q_n(\cos\theta)=2\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu \cos(n+2\nu+1)\theta,\quad 0<\theta<\pi. \tag{4.9.16}$$

Другой вариант этих рассуждений (см. Гобсон [1], п. 36) состоит во введении $x=\frac{1}{2}(w+w^{-1})$ и $y=w^{n+1}z$ в (4.2.1). Тогда z как функция от w^2 удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению, из которого снова вытекает (4.9.13), а следовательно, также и (4.9.5). Мы заключаем из (4.9.9), что *последовательность* $\{f_\nu\}$ *вполне монотонна* (см. § 6.5, (4)).

(3) *Другое тригонометрическое представление многочленов Лежандра* (см. Стилтьес [7], [8].) Исходя опять из формулы (4.8.17), напишем

$$(1-te^{2i\theta})^{-\frac{1}{2}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}(2\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\left\{1-(1-t)\frac{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}{2\sin\theta}\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, при $2\sin\theta>1$ будем иметь

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\Im\left\{e^{i(n+1)\theta}e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}(2\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu\frac{e^{i\nu\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}{(2\sin\theta)^\nu}\int_0^1 t^n(1-t)^{\nu-\frac{1}{2}}dt\right\}$$

или

$$P_n(\cos\theta)=\frac{4}{\pi}\,\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu\frac{\cos\left\{\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\nu+\frac{1}{2}}}, \tag{4.9.17}$$

где

$$h_0=1,\ h_\nu=h_{\nu n}=g_\nu\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{5}{2}\right)\cdots\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)},\quad \nu=1,2,3,\ldots \tag{4.9.18}$$

Ряд (4.9.17) сходится при $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5\pi}{6}$. Важность этого ряда будет выявлена более полно при исследовании асимптотического поведения $P_n(\cos\theta)$ при больших значениях n (§ 8.5). Относительно связи этого представления с представлением Гейне (4.9.5) см. Стилтьес [8], стр. 244.

(4) *Ультрасферические многочлены.* Из (4.7.23) мы получаем, применяя тот же способ, что в (1), формулу

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=2\alpha_0\alpha_n\cos n\theta+2\alpha_1\alpha_{n-1}\cos(n-2)\theta+\ldots$$
$$\ldots+\begin{cases}2\alpha_{(n-1)/2}\,\alpha_{(n+1)/2}\cos\theta & \text{при } n \text{ нечетном},\\ \alpha_{n/2}^2 & \text{при } n \text{ четном},\end{cases} \tag{4.9.19}$$

где α_n — коэффициенты ряда

$$(1-u)^{-\lambda}=\alpha_0+\alpha_1 u+\alpha_2 u^2+\ldots+\alpha_n u^n+\ldots, \tag{4.9.20}$$

следовательно,

$$\alpha_n=\binom{n+\lambda-1}{n}, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{4.9.21}$$

Здесь случаи $\lambda=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ должны быть исключены. В частности, если $\lambda>0$, то коэффициенты α_n положительны, и $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ есть тригонометрический косинус-полином с *неотрицательными коэффициентами.*

Аналогичным образом может быть обобщен ряд (4.9.5). При $\lambda>0$, $\lambda\neq 1,\ 2,\ \ldots,\ 0<\theta<\pi$, мы имеем (см. Сегё [19], стр. 508—509)

$$\left.\begin{gathered}(\sin\theta)^{2\lambda-1}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2^{2-2\lambda}}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}f_\nu^{(\lambda)}\sin(n+2\nu+1)\theta,\\ f_0^{(\lambda)}=1;\ f_\nu^{(\lambda)}=f_{\nu n}^{(\lambda)}=\\ =\frac{(1-\lambda)(2-\lambda)\ldots(\nu-\lambda)}{1\cdot 2\ldots\nu}\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+\nu)}{(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)\ldots(n+\lambda+\nu)},\ \nu=1,2,3\ldots\end{gathered}\right\} \tag{4.9.22}$$

Обобщение третьего доказательства, данного в (2), особенно просто. При $n=0$ имеем

$$(\sin\theta)^{2\lambda-1}=2\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-\lambda)(2-\lambda)\ldots(\nu-\lambda)}{\Gamma(\lambda+\nu+1)}\sin(2\nu+1)\theta, \tag{4.9.23}$$

в чем можно убедиться различными путями (см. Уиттекер и Ватсон [1], часть II, глава 40, задача 40; указанную там формулу нужно умножить на $\cos x$, а затем подставить $x=\frac{\pi}{2}-\theta$, $s=2\lambda-2$).

Другим обобщением (4.9.5) является следующая формула:

$$\left.\begin{gathered}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2}{\Gamma(\lambda)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\frac{\Gamma(n+\nu+2\lambda)}{\Gamma(n+\nu+\lambda+1)}\cos\{(n+2\nu+2\lambda)\theta-\lambda\pi\},\\ 0<\lambda<1,\ 0<\theta<\pi.\end{gathered}\right\} \tag{4.9.24}$$

Этот ряд легко выводится из представления (4.82.3) посредством рассуждений, примененных во втором доказательстве, данном в (2).

Обобщением ряда (4.9.17) (см. Сегё [17], стр. 57—60) является

$$\left.\begin{gathered}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\sin\lambda\pi\,\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+\lambda)\,\Gamma(\nu-\lambda+1)}{\nu!\,\Gamma(n+\nu+\lambda+1)}\times\\ \times\frac{\cos\left\{(n+\nu+\lambda)\theta-(\nu+\lambda)\frac{\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\nu+\lambda}},\\ 0<\lambda<1,\quad \frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5\pi}{6}.\end{gathered}\right\} \tag{4.9.25}$$

Этот ряд выводится из представления (4.82.3) посредством тех же рассуждений, которые применялись в (3).

4.10. Дальнейшие свойства многочленов Якоби

(1) *Формула Родрига.* Следующее выражение является обобщением формулы Родрига (4.3.1):

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=$$
$$=\frac{(-1)^m}{2^m n(n-1)\ldots(n-m+1)}\frac{d^m}{dx^m}\{(1-x)^{m+\alpha}(1+x)^{m+\beta}P_{n-m}^{(m+\alpha,\,m+\beta)}(x)\}. \quad (4.10.1)$$

Здесь $n\geqslant m$. Доказательство подобно данному в § 4.3, (1).

(2) *Интегральное представление ультрасферических многочленов.*

(a) Комбинируя (4.1.5) и (4.3.2), мы находим

$$\left.\begin{aligned} P_{2\nu}^{(\alpha,\alpha)}(x)&=P_{2\nu}^{(\alpha,\alpha)}(1)\cdot x^{2\nu}F\left(-\nu,\ -\nu+\frac{1}{2};\ \alpha+1;\ 1-x^{-2}\right),\\ P_{2\nu+1}^{(\alpha,\alpha)}(x)&=P_{2\nu+1}^{(\alpha,\alpha)}(1)\cdot x^{2\nu+1}F\left(-\nu,\ -\nu-\frac{1}{2};\ \alpha+1;\ 1-x^{-2}\right).\end{aligned}\right\} \quad (4.10.2)$$

Таким образом, учитывая (4.7.1) и (4.7.3), имеем

$$P_n^{(\lambda)}(x)=P_n^{(\lambda)}(1)\cdot x^nF\left(-\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\ \lambda+\frac{1}{2};\ 1-x^{-2}\right)=$$
$$=\frac{2^{1-2\lambda}}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n!}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^k\binom{n}{2k}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+k+\frac{1}{2}\right)}x^{n-2k}(1-x^2)^k=$$
$$=\frac{2^{1-2\lambda}}{\Gamma^2(\lambda)}\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n!}\int_0^{\pi}\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\}^n\sin^{2\lambda-1}\varphi\,d\varphi. \quad (4.10.3)$$

Мы использовали (1.7.3) при $n=2$ и (1.7.5). Это обобщение (4.8.10) справедливо при $\lambda>0$ (см. Гегенбауэр [1], Зейдель—Сас [1]).

(b) Другим замечательным интегральным представлением, справедливым при неотрицательных целых значениях $\lambda-\frac{1}{2}$, является следующее:

$$(x^2-1)^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}}P_n^{(\lambda)}(x)=2^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)}\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\times$$
$$\times\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\}^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\cos\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi. \quad (4.10.4)$$

Для простоты мы полагаем здесь, что $x>1$, $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}>0$.

Для доказательства мы используем равенство (4.4.6), где в качестве контура интегрирования выбрана окружность (4.8.8). Так как

$$t^2-1=2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\},$$

то $\left(\alpha=\lambda-\frac{1}{2}\right)$

$$(x^2-1)^{\alpha}P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t-x}\right)^n(t^2-1)^{\alpha}\frac{dt}{t-x}=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\}^{n+\alpha}\{2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}\}^{\alpha}d\varphi,$$

что легко дает (4.10.4).

(3) *Производящие функции.* (a) Приведем следующее небольшое видоизменение рассуждений § 4.4, (3), с помощью которых устанавливается справедливость формулы (4.4.5) для производящей функции $F(x, w)$. Пусть $-1 < w < 1$; напишем (4.4.7) в виде

$$x = t + \frac{1}{2} w (1 - t^2), \tag{4.10.5}$$

так что x и t описывают отрезок $[-1, 1]$ одновременно. Используя формулу (4.4.7) и две первые из формул (4.4.8), мы находим

$$(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta F(x, w)\, dx = (1 - t)^\alpha (1 + t)^\beta\, dt,$$

так что для любого целого неотрицательного n имеем

$$\int_{-1}^{+1} (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta F(x, w)\, x^n\, dx = \int_{-1}^{+1} (1 - t)^\alpha (1 + t)^\beta \left[t + \frac{1}{2} w (1 - t^2) \right]^n dt,$$

т. е. многочлен степени n относительно w. Это доказывает, что коэффициенты ряда $F(x, w)$ с точностью до постоянных множителей должны быть многочленами Якоби. Эти множители могут быть определены, если положить $x = 1$.

(b) Для ультрасферических многочленов известна следующая производящая функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{(\lambda)}(x)}{P_n^{(\lambda)}(1)} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n + 2\lambda)} P_n^{(\lambda)}(x)\, w^n =$$

$$= 2^{\lambda - \frac{1}{2}} \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) e^{xw} \left[(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} w\right]^{\frac{1}{2} - \lambda} J_{\lambda - \frac{1}{2}} \left[(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} w\right]. \tag{4.10.6}$$

Эта формула отличается от (4.7.16) и (4.7.23). Полагая в (4.10.6) $\lambda = \frac{1}{2}$, для многочленов Лежандра получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{n!} w^n = e^{xw} J_0 \left[(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} w\right]. \tag{4.10.7}$$

Для доказательства (4.10.6) мы применяем (4.10.3); для левой части (4.10.6) мы получаем

$$\frac{2^{1 - 2\lambda} \Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)} \int_0^\pi \exp\left[w \left\{x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi\right\}\right] \cdot \sin^{2\lambda - 1}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2^{1 - 2\lambda} \Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)} e^{xw} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} w\right]^{2m}}{(2m)!} \int_0^\pi \cos^{2m}\varphi \sin^{2\lambda - 1}\varphi\, d\varphi;$$

последнее выражение легко отождествить с правой частью (4.10.6).

Относительно дальнейших формальных свойств многочленов Лежандра и ультрасферических многочленов см. Б э й т м а н [1], том 1, глава 3 и том 2, глава 10; см. также задачи 61—66, 69—71, 84.

ГЛАВА V

МНОГОЧЛЕНЫ ЛАГЕРРА И ЭРМИТА

Многие из свойств тех многочленов, которые мы будем рассматривать в этой главе, весьма сходны со свойствами многочленов Якоби и более или менее им аналогичны. Вследствие этого мы будем кратки и опустим детали, за исключением тех случаев, когда разница в утверждениях или в доказательствах столь значительна, что подробное изложение необходимо. Здесь, как и в случае многочленов Якоби, мы не остановимся на специальных проблемах (нули, экстремумы и т. п.), которым будут посвящены дальнейшие главы.

5.1. Элементарные свойства многочленов Лагерра

(1) Мы определим многочлены Лагерра $\{L_n^{(\alpha)}x\}$ при $\alpha > -1$ следующими условиями ортогональности и нормированности:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)\,L_m^{(\alpha)}(x)\,dx = \Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}\delta_{nm}, \quad n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{5.1.1}$$

Кроме того, мы предположим, что коэффициент при x^n в многочлене $L_n^{(\alpha)}(x)$ степени n имеет знак $(-1)^n$. (Это допущение отличается от условия (а) в определении, данном в § 2.2.) Мы полагаем также $L_n^{(0)}(x) = L_n(x)$.

Здесь уместно сделать следующие литературные ссылки: Лагранж [1]; Абель [1], стр. 284; П. Л. Чебышев [3], § 3; Лагерр [1], стр. 78—81 (стр. 434—437), который, впрочем, рассматривал только случай $\alpha = 0$. У Лагерра принято обозначение $f_n(x) = n!\,L_n(-x)$. В книге Куранта и Гильберта ([1], глава II, § 9) также рассмотрен лишь случай $\alpha=0$; функции, которые там обозначены через $L_n(x)$, в наших обозначениях совпадают с $n!\,L_n(x)$. Относительно общего случая $L_n^{(\alpha)}(x)$ см. Сонин [1], п. 40.

Мы имеем следующие дифференциальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&xy'' + (\alpha+1-x)\,y' + ny = 0, && y = L_n^{(\alpha)}(x),\\
&xz'' + (x+1)\,z' + \left(n+\frac{\alpha}{2}+1-\frac{\alpha^2}{4x}\right)z = 0, && z = e^{-x}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x),\\
&u'' + \left(\frac{n+\frac{\alpha+1}{2}}{x} + \frac{1-\alpha^2}{4x^2} - \frac{1}{4}\right)u = 0, && u = e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha+1}{2}}L_n^{(\alpha)}(x),\\
&v'' + \left(4n+2\alpha+2-x^2+\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{x^2}\right)v = 0 && v = e^{-\frac{x^2}{2}}x^{\alpha+\frac{1}{2}}L_n^{(\alpha)}(x^2).
\end{aligned}\right\} \tag{5.1.2}$$

Пусть опять $\alpha > -1$. Тогда рассуждение, аналогичное проведенному в § 4.2, (2), показывает, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы уравнение

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)\, y' + \lambda y = 0 \tag{5.1.3}$$

имело решением многочлен, является равенство $\lambda = n$. Единственным решением в виде многочлена является $L_n^{(\alpha)}(x)$. Это утверждение следует из соотношения

$$u_1'(x)\, u_2(x) - u_1(x)\, u_2'(x) = \text{const.}, \tag{5.1.4}$$

которое справедливо для двух любых решений третьего уравнения (5.1.2). Фактически это рассуждение дает даже несколько больше: при $\alpha > -1$ многочлен $L_n^{(\alpha)}(x)$ является единственным решением уравнения (5.1.3), которое является аналитическим в окрестности точки $x = 0$.

Аналогом формулы Родрига является равенство

$$e^{-x} x^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}). \tag{5.1.5}$$

Для определения постоянного множителя мы применяем формулу Лейбница, которая приводит к (5.1.6), и находим старший коэффициент в правой части. Далее, имеем явное выражение

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{(-x)^{\nu}}{\nu!}, \tag{5.1.6}$$

откуда

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n}, \tag{5.1.7}$$

и

$$l_n^{(\alpha)} = \frac{(-1)^n}{n!}, \tag{5.1.8}$$

где $l_n^{(\alpha)}$ — коэффициент при x^n в $L_n^{(\alpha)}(x)$. Производящей функцией будет

$$L_0^{(\alpha)}(x) + L_1^{(\alpha)}(x)\, w + \ldots + L_n^{(\alpha)}(x)\, w^n + \ldots = \\ = (1-w)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{xw}{1-w}\right). \tag{5.1.9}$$

Справедлива рекуррентная формула

$$\left.\begin{aligned} &nL_n^{(\alpha)}(x) = (-x + 2n + \alpha - 1)\, L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha - 1)\, L_{n-2}^{(\alpha)}(x), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots, \\ &L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \quad L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1. \end{aligned}\right\} \tag{5.1.10}$$

Для ядра $K_n^{(\alpha)}(x, y)$ находим следующее выражение:

$$\Gamma(\alpha+1)\, K_n^{(\alpha)}(x, y) = \sum_{\nu=0}^{n} \left\{\binom{\nu+\alpha}{\nu}\right\}^{-1} L_\nu^{(\alpha)}(x)\, L_\nu^{(\alpha)}(y) = \\ = (n+1)\left\{\binom{n+\alpha}{n}\right\}^{-1} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)\, L_{n+1}^{(\alpha)}(y) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)\, L_n^{(\alpha)}(y)}{x-y}. \tag{5.1.11}$$

Частный случай $y=0$ особенно важен:

$$x\sum_{\nu=0}^{n} L_\nu^{(\alpha)}(x)=(n+\alpha+1)L_n^{(\alpha)}(x)-(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) \qquad (5.1.12)$$

(см. теорему 2.5). Наконец, из (5.1.6) или (5.1.9) мы легко получаем

$$\sum_{\nu=0}^{n} L_\nu^{(\alpha)}(x)=L_n^{(\alpha+1)}(x), \qquad (5.1.13)$$

$$\left.\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x)&=L_n^{(\alpha+1)}(x)-L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x),\\ \frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x)&=-L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)=x^{-1}\{nL_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\}.\end{aligned}\right\} \qquad (5.1.14)$$

(2) Теорема 5.1. *Пусть J_α имеет тот же смысл, что в § 1.71. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\binom{n+\alpha}{n}\right\}^{-1}L_n^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y)w^n=$$

$$=\Gamma(\alpha+1)(1-w)^{-1}\exp\left\{-(x+y)\frac{w}{1-w}\right\}(-xyw)^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha\left\{\frac{2(-xyw)^{\frac{1}{2}}}{1-w}\right\} \qquad (5.1.15)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)}w^n=e^w(xw)^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha\{2(xw)^{\frac{1}{2}}\}. \qquad (5.1.16)$$

См. Сонин [1], п. 40, Вигерт [1], Хилле [2], Харди [1], Когбетлянц [12], Ватсон [4]. Первая формула является обобщением (5.1.9) ($y=0$). Вторая формула получается из первой заменой w на $-y^{-1}w$ и переходом к пределу при $y\to\infty$.

Прямые вычисления легко приводят к формуле (5.1.16), если учесть (5.1.6). Формула (5.1.15) вытекает из (5.1.16), если мы введем для $L_n^{(\alpha)}(y)$ его интегральное представление (5.4.1) и затем почленно проинтегрируем.

Наконец, нужно воспользоваться одной интегральной формулой, в которую входят бесселевы функции (см. Ватсон [3], стр. 395, (1)).

5.2. Обобщение

Посредством (5.1.6) определение многочленов Лагерра может быть распространено на произвольные комплексные значения α. При этом степень многочлена не может понизиться (см. (5.1.8)). При $n\geqslant 1$ мы имеем $L_n^{(\alpha)}(0)=0$ тогда и только тогда, когда $\alpha=-k$, k — целое, $1\leqslant k\leqslant n$. В этом случае точка $x=0$ является нулем k-го порядка и из (5.1.6) имеем

$$L_n^{(-k)}(x)=(-x)^k\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{\nu=0}^{n-k}\binom{n}{n-k-\nu}\frac{(-x)^\nu}{\nu!}=(-x)^k\frac{(n-k)!}{n!}L_{n-k}^{(k)}(x). \quad (5.2.1)$$

Формула (5.1.16) справедлива при любом вещественном α. Из нее снова вытекает (5.2.1).

5.3. Вырожденный гипергеометрический ряд. Соотношение между многочленами Якоби и Лагерра. Второе решение

(1) В обозначениях Похгаммера — Барнеса вырожденный гипергеометрический ряд определяется так:

$$ {}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)} \frac{x^\nu}{\nu!}. \tag{5.3.1}$$

Он получается из обычного гипергеометрического ряда (см. (4.21.3)) следующим предельным переходом:

$$\lim_{\beta\to\infty} F(\alpha,\beta,\gamma;\beta^{-1}x). \tag{5.3.2}$$

Мы имеем

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n;\alpha+1;x) \tag{5.3.3}$$

и, применяя (4.21.2), получаем следующее важное соотношение между многочленами Лагерра и многочленами Якоби:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta\to\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2\beta^{-1}x). \tag{5.3.4}$$

При этом стремление равномерно во всякой замкнутой части комплексной x-плоскости. Относительно дальнейших свойств вырожденных гипергеометрических функций см. Уиттекер и Ватсон [1], глава XVI. Интересно сравнить уравнение (B) в книге Уиттекера и Ватсона (часть II, § 16.1) с нашим третьим уравнением в (5.1.2).

(2) Из (4.23.1) с помощью предельного перехода, подобного примененному в (5.3.4), мы получаем второе решение первого из уравнений (5.1.2):

$$x^{-\alpha}{}_1F_1(-n-\alpha;1-\alpha;x). \tag{5.3.5}$$

При нецелых значениях α функции (5.3.3) и (5.3.5), очевидно, линейно независимы. То же верно и в случае, когда α есть отрицательное целое $<-n$, так как в этом случае (5.3.5) является бесконечным рядом. Однако если α целое $\geqslant -n$, то оба решения тождественны. (Если $-n\leqslant\alpha\leqslant 0$, то применяем (5.2.1). В случае $\alpha=g$, $g\geqslant 1$, необходимо умножить (5.3.5) на $\alpha-g$, а затем перейти к пределу при $\alpha\to g$.)

Представление (5.3.3) дает возможность распространить определение $L_n^{(\alpha)}(x)$ на произвольные значения n.

5.4. Интегральные представления

Теорема 5.4. *Справедливо следующее представление многочленов Лагерра через функции Бесселя:*

$$e^{-x}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t}t^{n+\frac{\alpha}{2}}J_\alpha\{2(tx)^{\frac{1}{2}}\}\,dt, \quad n=0,1,2,\ldots,\ \alpha>-1. \tag{5.4.1}$$

Относительно этой формулы читатель может обратиться к Ле Руа [1], стр. 379—384; Эрдейи [1]. Это же представление будет иметь место и при $\alpha\leqslant-1$, если только $n+\alpha>-1$. Из этого вновь вытекает (5.2.1). Могут быть даны различные доказательства этой формулы.

Частный случай $n=0$, т. е.

$$e^{-x}x^{\frac{\alpha}{2}}=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}}J_\alpha\{2(tx)^{\frac{1}{2}}\}\,dt, \tag{5.4.2}$$

может быть получен разложением $J_\alpha(z)$ в ряд (1.71.1), а затем почленным интегрированием (эта формула принадлежит Сонину; см. Ватсон [3], стр. 394, (4)). Общая формула вытекает из вычисления обеих частей (5.4.1) с помощью производящей функции; при этом применяются (5.1.9) и (5.4.2).

Может быть дано иное доказательство, основанное на более общей точке зрения. Попытаемся удовлетворить второе из уравнений (5.1.2) интегралом вида

$$z=z(x)=\int e^{-t}t^{n+\frac{\alpha}{2}}J_\alpha\{2(tx)^{\frac{1}{2}}\}\,dt \tag{5.4.3}$$

с надлежаще выбранным путем интегрирования. Подставляя это выражение в левую часть рассматриваемого уравнения, мы получаем

$$\int e^{-t}t^{n+\frac{\alpha}{2}}\Big[tJ''_\alpha\{2(tx)^{\frac{1}{2}}\}+(tx^{-1})^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)J'_\alpha\{2(tx)^{\frac{1}{2}}\}+$$
$$+\left(n+\frac{\alpha}{2}+1-\frac{\alpha^2}{4x}\right)J_\alpha\{2(tx)^{\frac{1}{2}}\}\Big]\,dt. \tag{5.4.4}$$

В силу (1.71.3) выражение в квадратных скобках может быть записано в виде

$$(tx)^{\frac{1}{2}}J'_\alpha\{2(tx)^{\frac{1}{2}}\}+\left(n+\frac{\alpha}{2}+1-t\right)J_\alpha\{2(tx)^{\frac{1}{2}}\}, \tag{5.4.5}$$

следовательно, интеграл (5.4.4) будет равен

$$\int\frac{d}{dt}\left[e^{-t}t^{n+\frac{\alpha}{2}+1}J_\alpha\{2(tx)^{\frac{1}{2}}\}\right]dt. \tag{5.4.6}$$

Таким образом, (5.4.3) будет решением (5.1.2), если

(a) путь интегрирования — замкнутая кривая, причем такая, что при ее обходе выражение $e^{-t}t^{n+\frac{\alpha}{2}+1}J_\alpha\{2(tx)^{\frac{1}{2}}\}$ принимает свое исходное значение, или если

(b) путь интегрирования представляет собой дугу, а выражение, упомянутое в (a), обращается в нуль на концах дуги.

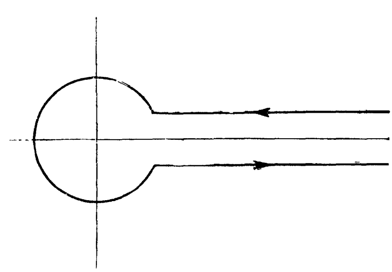

Рис. 6.

Для интервала $0\leqslant t<+\infty$ условие (b) выполнено, если только $n+\alpha+1>0$. Допуская сперва, что $\alpha>-1$, мы замечаем, что функция $x^{-\frac{\alpha}{2}}z$ будет аналитической в окрестности точки $x=0$, так что (см. замечание относительно (5.1.3)) $z=\text{const.}\ e^{-x}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)$. Постоянный множитель может быть найден сравнением «младших коэффициентов», т. е. коэффициентов при $x^{\frac{\alpha}{2}}$. Затем ограничение $\alpha>-1$ может быть снято с помощью аналитического продолжения.

Другое замечательное представление мы получим, выбирая контур интегрирования, как показано на рис. 6. Условие (b) для него опять выполнено и такое же рассуждение, как и приведенное выше, показывает, что $z = \mathrm{const.}\ e^{-x}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)$. Для того чтобы подынтегральная функция была определена, нужно соответствующим образом выбрать t^α. Выберем $\arg t=0$ на прямолинейной части контура, где $\Im t < 0$ (в ее предельном положении). Тогда «младший член» при $\alpha > -1$ и $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$ будет

$$\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)} \int e^{-t}t^{n+\alpha}\,dt = \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1-e^{-2\pi i\alpha}\right)\int_0^\infty e^{-t}t^{n+\alpha}\,dt =$$

$$= 2\sin\pi\alpha e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\frac{\alpha}{2}},$$

и, следовательно, учитывая (5.1.7), будем иметь

$$e^{-x}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(2\sin\pi\alpha)^{-1}e^{i\pi\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}}{n!}\int_{+\infty}^{(0+)} e^{-t}t^{n+\frac{\alpha}{2}}J_\alpha\{2(tx)^{\frac{1}{2}}\}\,dt. \qquad (5.4.7)$$

Эта формула может быть распространена на произвольные нецелые значения α.

Дальнейшие интегральные представления можно получить из (5.1.5) и (5.1.9) аналогично тому, как это делалось для многочленов Якоби (см. (4.4.6) и (4.4.9)). При $x\neq 0$ мы имеем, например,

$$e^{-x}x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int e^{-t}t^{n+\alpha}(t-x)^{-n-1}\,dt, \qquad (5.4.8)$$

где контур интегрирования охватывает точку $t=x$, но не содержит точки $t=0$.

5.5. Многочлены Эрмита

(1) Многочлены Эрмита определяются условиями

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)\,dx = \pi^{\frac{1}{2}}2^n n!\delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5.5.1)$$

Коэффициент при x^n в n-м многочлене $H_n(x)$ выбирается положительным.

Библиография по этому вопросу имеется в работе Х и л л е [1]. Наши обозначения соответствуют принятым у Хилле. См. также К у р а н т и Г и л ь б е р т [1], глава II, § 9, где применяются те же обозначения. В книге П о л и а и С е г ё ([1] часть II, отдел VI, задача 100) через $H_n(x)$ обозначается многочлен, который в наших обозначениях равен $(-1)^n(2^{\frac{n}{2}}n!)^{-1}H_n(2^{-\frac{1}{2}}x)$.

(2) Вывод следующих свойств многочленов Эрмита не представляет трудности:

$$\left.\begin{aligned} &y''-2xy'+2ny=0, \quad y=H_n(x),\\ &z''+(2n+1-x^2)z=0, \quad z=e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x), \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.2)$$

$$e^{-x^2}H_n(x) = (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \qquad (5.5.3)$$

$$\frac{H_n(x)}{n!} = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{(2x)^{n-2\nu}}{(n-2\nu)!}, \qquad (5.5.4)$$

$$H_{2m}(0)=(-1)^m\frac{(2m)!}{m!}, \quad H'_{2m+1}(0)=(-1)^m\frac{(2m+2)!}{(m+1)!}, \tag{5.5.5}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-n}H_n(x)=2^n, \tag{5.5.6}$$

$$H_0(x)+\frac{H_1(x)}{1!}w+\frac{H_2(x)}{2!}w^2+\ldots+\frac{H_n(x)}{n!}w^n+\ldots=\exp(2xw-w^2), \tag{5.5.7}$$

$$\left.\begin{aligned} &H_n(x)=2xH_{n-1}(x)-2(n-1)H_{n-2}(x), \quad n=2,3,4,\ldots\\ &H_0(x)=1, \quad H_1(x)=2x, \end{aligned}\right\} \tag{5.5.8}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n}(2^\nu\nu!)^{-1}H_\nu(x)H_\nu(y)=(2^{n+1}n!)^{-1}\frac{H_{n+1}(x)H_n(y)-H_n(x)H_{n+1}(y)}{x-y}. \tag{5.5.9}$$

Отметим следующие частные свойства:

$$H'_n(x)=2nH_{n-1}(x), \quad H_n(x)=2xH_{n-1}(x)-H'_{n-1}(x). \tag{5.5.10}$$

Из (5.5.7) мы получаем

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}H_\nu(x)H_{n-\nu}(y)=2^{\frac{n}{2}}H_n\{2^{-\frac{1}{2}}(x+y)\}, \tag{5.5.11}$$

и по формуле Коши имеем

$$H_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int w^{-n-1}\exp(2xw-w^2)\,dw, \tag{5.5.12}$$

где контур интегрирования охватывает начало координат.

5.6. Связь между многочленами Эрмита и Лагерра

(1) Многочлены Эрмита могут быть полностью сведены к многочленам Лагерра с параметрами $\alpha=\pm\frac{1}{2}$, так как имеют место соотношения

$$H_{2m}(x)=(-1)^m 2^{2m}m!\,L_m^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2), \quad H_{2m+1}(x)=(-1)^m 2^{2m+1}m!\,xL_m^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^2). \tag{5.6.1}$$

Эти формулы в известном смысле аналогичны формулам (4.1.5). Их доказательства подобны доказательствам, приведенным там. Отметим четвертое уравнение из (5.1.2) $\left(\alpha=\pm\frac{1}{2}\right)$ и второе уравнение из (5.5.2).

Комбинируя (5.6.1) с (5.3.4), мы получаем представление многочленов Эрмита как пределов от многочленов Якоби и вследствие (4.1.5) — как пределов от ультрасферических многочленов. Это можно вывести из (4.7.23) и (5.5.7). Действительно, мы имеем

$$\exp(2xw-w^2)=\lim_{\lambda\to\infty}\left(1-2\frac{x}{\lambda}w+\frac{w^2}{\lambda}\right)^{-\lambda}, \tag{5.6.2}$$

и, следовательно,

$$\frac{H_n(x)}{n!}=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-\frac{n}{2}}P_n^{(\lambda)}(\lambda^{-\frac{1}{2}}x). \tag{5.6.3}$$

Из (5.6.1) мы легко получаем явное выражение (5.5.4), если учесть (5.1.6). Из теоремы 5.1 для многочленов $H_n(x)$ могут быть выведены аналогичные соотношения (см. Ватсон [5]). Производящая функция (5.5.7) следует из (5.1.16), в то время как производящая функция, получающаяся из (5.1.9) при $\alpha=\pm\frac{1}{2}$, будет совсем иной природы (см. задачу 24).

Применяя (1.71.2) и (5.4.1), мы получаем следующие интегральные представления:

$$e^{-x^2}H_n(x)=(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^{n+1}\pi^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}t^n\cos(2xt)\,dt,\quad n\text{—четное},\qquad(5.6.4)$$

$$e^{-x^2}H_n(x)=(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^{n+1}\pi^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}t^n\sin(2xt)\,dt,\quad n\text{—нечетное}.$$

(2) Обратно, многочлены Лагерра могут в известной мере быть сведены к многочленам Эрмита. Мы имеем (см. Успенский [1], стр. 604, (14)):

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(-1)^n\pi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(2n)!}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}H_{2n}(x^{\frac{1}{2}}t)\,dt,\quad \alpha>-\frac{1}{2}.\qquad(5.6.5)$$

Это легко может быть доказано с помощью формул (5.1.6), (5.5.4) и (1.7.5).

(3) Мы заключим эти формальные рассмотрения следующим замечанием относительно тождеств (4.21.7), (5.1.14) и (5.5.10) для многочленов Якоби, Лагерра и Эрмита. Если ортогональные многочлены $\{p_n(x)\}$, соответствующие распределению $d\alpha(x)$, обладают тем свойством, что $\{p_n'(x)\}$ является с точностью до постоянных множителей последовательностью того же типа (т. е. соответствует некоторому распределению $d\beta(x)$), то последовательность $\{p_n(x)\}$ является (с точностью до тривиальных линейных преобразований) одной их трех упомянутых классических систем многочленов (см. Хан [3]; Кролл [1]). Аналогичное утверждение будет справедливо, если мы заменим $\{p_n'(x)\}$ на $\{p_n^{(k)}(x)\}$ (см. Кролл [2]; Хан [4]).

Иная проблема аналогичного характера была рассмотрена Бохнером [1]. Он определил все последовательности многочленов $\{p_n(x)\}$, где $p_n(x)$ — многочлен точной степени n, удовлетворяющие дифференциальному уравнению вида

$$f_0(x)y''+f_1(x)y'+[f_2(x)+\lambda]y=0,\quad y=p_n(x),\quad \lambda=\lambda_n.\qquad(5.6.6)$$

Бохнер получил, кроме классических многочленов, еще некоторые многочлены, связанные с $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, n — целые, а также многочлены тривиального типа ax^n+bx^m, где a и b — постоянные.

5.7. Замкнутость

Здесь мы докажем для многочленов Лагерра и Эрмита теорему, аналогичную теореме 3.1.5. Основная трудность этих случаев состоит в том, что интервал ортогональности бесконечен. В обычных обозначениях (§ 1.1) мы имеем следующее предложение:

Теорема 5.7.1. *Система*

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}x^n,\quad \alpha>-1,\quad n=0,1,2,\ldots,\qquad(5.7.1)$$

замкнута в $L^2(0, +\infty)$; *система*

$$e^{-\frac{x^2}{2}}x^n, \quad n=0, 1, 2, \ldots, \tag{5.7.2}$$

замкнута в $L^2(-\infty, +\infty)$.

Это утверждение эквивалентно утверждению, что соответственно замкнуты системы $\{e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)\}$ и $\{e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)\}$. Ясно, что теорема 5.7.1 будет справедлива и в том случае, если заменить соответственно $e^{-\frac{x}{2}}$ на e^{-x}, а $e^{-\frac{x^2}{2}}$ на e^{-x^2}. Идея доказательства, приводимого ниже, принадлежит Дж. фон Нейману (см. Курант и Гильберт [1], глава II, § 9).

(1) Начнем с замечания, что при $\alpha > -1$ система

$$\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{\frac{\alpha}{2}} y^n, \quad n=0, 1, 2, \ldots, \tag{5.7.3}$$

замкнута в $L^2(0,1)$. Это является следствием теоремы 3.1.5, $p=2$, так как функция $\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{\alpha}$ интегрируема на отрезке $[0,1]$.

Пусть $e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}f(x)$ принадлежит к $L^2(0, +\infty)$. Тогда функция $\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{\frac{\alpha}{2}} f\left(\ln\frac{1}{y}\right)$ принадлежит к $L^2(0, 1)$ и может быть приближена посредством функций вида $\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\varrho(y)$, где $\varrho(y)$ — многочлен. Следовательно, каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такой многочлен $\varrho(y)$, что

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha}\{f(x)-\varrho(e^{-x})\}^2\,dx < \varepsilon. \tag{5.7.4}$$

Таким образом, остается доказать, что при всяком целом неотрицательном m каждому $\delta > 0$ соответствует такой многочлен $p(x)$, что

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha}\{e^{-mx}-p(x)\}^2\,dx < \delta. \tag{5.7.5}$$

(2) Для этой цели мы применим (5.1.9), полагая

$$w=\frac{m}{m+1}, \quad m=\frac{w}{1-w} \tag{5.7.6}$$

и выбирая

$$p(x)=(1-w)^{\alpha+1}\sum_{n=0}^{N} L_n^{(\alpha)}(x)\,w^n. \tag{5.7.7}$$

Тогда

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha}\{e^{-mx}-p(x)\}^2\,dx=(1-w)^{2\alpha+2}\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha}\left\{\sum_{n=N+1}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\,w^n\right\}^2dx, \tag{5.7.8}$$

что в силу (5.1.1) равно

$$(1-w)^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=N+1}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n}w^{2n}. \tag{5.7.9}$$

Почленное интегрирование здесь законно, так как ряд

$$\sum_{n,\, n'=N+1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} \,|\, L_n^{(\alpha)}(x) \,|\,|\, L_{n'}^{(\alpha)}(x) \,|\, dx \cdot w^{n+n'} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n,\, n'=N+1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} [L_{n'}^{(\alpha)}(x)]^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} w^{n+n'}$$

сходится. Выражение (5.7.9) становится сколь угодно малым при N достаточно большом, что и доказывает утверждение.

(3) Пусть $e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)$ принадлежит к $L^2(-\infty, +\infty)$. Тогда обе функции

$$e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{1}{4}} \frac{f(y^{\frac{1}{2}}) \pm f(-y^{\frac{1}{2}})}{2} \tag{5.7.10}$$

принадлежат к $L^2(0, +\infty)$. Следовательно, благодаря предыдущему результату (полагая сначала $\alpha = -\frac{1}{2}$, а затем $\alpha = +\frac{1}{2}$) каждому $\varepsilon > 0$ соответствуют такие многочлены $\varrho_1(y)$ и $\varrho_2(y)$, для которых выполняются неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{1}{4}} \frac{f(y^{\frac{1}{2}}) + f(-y^{\frac{1}{2}})}{2} - e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{1}{4}} \varrho_1(y) \right\}^2 dy < \varepsilon, \\ &\int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{1}{4}} \frac{f(y^{\frac{1}{2}}) - f(-y^{\frac{1}{2}})}{2} - e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{1}{4}} \varrho_2(y) \right\}^2 dy < \varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{5.7.11}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \left\{ \frac{f(x) + f(-x)}{2} - \varrho_1(x^2) \right\}^2 dx < \varepsilon, \\ &2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \left\{ \frac{f(x) - f(-x)}{2} - x\varrho_2(x^2) \right\}^2 dx < \varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{5.7.12}$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \{ f(x) - \varrho_1(x^2) - x\varrho_2(x^2) \}^2 \, dx < 2\varepsilon. \tag{5.7.13}$$

Относительно другого доказательства, основанного на теории интегральных уравнений, см. Вейль [1], в частности, стр. 58—61, 64; см. также Гамбургер [1], стр. 200—205.

(4) Рассуждение, проведенное в (2), приводит к следующему результату:

Теорема 5.7.2. *Система*

$$e^{-x} x^{\alpha+n}, \quad \alpha > -1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.7.14}$$

замкнута в $L(0, +\infty)$; *система*

$$e^{-x^2} x^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.7.15}$$

замкнута в $L(-\infty, +\infty)$.

Мы снова применяем теорему 3.1.5, но при $p=1$. Посредством (5.1.1) благодаря неравенству Буняковского — Шварца находим, что

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha |L_n^{(\alpha)}(x)|\,dx = O(n^{\frac{\alpha}{2}}). \tag{5.7.16}$$

Для дальнейших целей (см. § 9.5, (1)) мы отметим следующую теорему:

Теорема 5.7.3. *Функции*

$$f_n(x) = \varphi(x)\,x^n, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{5.7.17}$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^\alpha, & 0 < x < 1, \\ e^{-x}x^\beta, & x \geqslant 1, \end{cases} \tag{5.7.18}$$

$\alpha > -1$, β — *произвольное вещественное число, образуют замкнутую систему в* $L(0, +\infty)$.

Мы применяем теорему 3.1.5 с распределением $d\alpha(y) = \frac{1}{y}\varphi\left[\ln\frac{1}{y}\right]dy$, $0 < y < 1$, при $p=1$. Затем мы применяем оценку

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,|L_n^{(\alpha)}(x)|\,dx = O(1)\int_0^1 e^{-x}x^\alpha |L_n^{(\alpha)}(x)|\,dx + \int_1^\infty e^{-x}x^\beta |L_n^{(\alpha)}(x)|\,dx.$$

Первый из интегралов в правой части есть величина $O(n^{\frac{\alpha}{2}})$; для второго интеграла неравенства Буняковского — Шварца дает оценку

$$\left\{\int_1^\infty e^{-x}x^{2\beta-\alpha}\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_1^\infty e^{-x}x^\alpha [L_n^{(\alpha)}(x)]^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} = O(n^{\frac{\alpha}{2}}).$$

По поводу других формальных свойств многочленов Лагерра и Эрмита см. Бэйтман [1], том 2, глава 10, стр. 188—196. См. также задачи 67, 68, 72—80.

ГЛАВА VI

НУЛИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В § 3.3 было доказано, что все нули ортогональных многочленов вещественны, различны и лежат внутри промежутка ортогональности. Мы проведем здесь дальнейшее и более детальное исследование распределения этих нулей. Начнем с некоторых теорем, справедливых при весьма общих условиях, наложенных на весовую функцию, затем перейдем к нулям классических многочленов и укажем различные методы, применяемые при их исследовании. Особо важным инструментом в дальнейших рассмотрениях является теорема Штурма (§ 1.82), которая во многих случаях приводит к довольно точным результатам относительно нулей многочленов, удовлетворяющих некоторым линейным дифференциальным уравнениям второго порядка.

Настоящий обзор, посвященный свойствам нулей, не носит исчерпывающего характера. По поводу литературы о нулях многочленов Лагерра и Эрмита мы отсылаем к работе Х а н а [2].

Методы этой главы совершенно элементарны. В частности, как правило, не используются асимптотические свойства ортогональных многочленов специального или общего типа (главы VIII и XII), с помощью которых можно также получить важные сведения относительно нулей.

6.1. Плотность нулей

(1) Т е о р е м а 6.1.1. *Пусть $d\alpha(x)$ — распределение, заданное на конечном отрезке $[a, b]$, и пусть $\{p_\iota(x)\}$ — соответствующая ортонормальная последовательность многочленов.*

Пусть $[a', b']$ — такая часть отрезка $[a, b]$, что

$$\int_{a'}^{b'} d\alpha(x) > 0.$$

Тогда, если n достаточно велико, то всякий многочлен $p_n(x)$ имеет на отрезке $[a', b']$ хоть один нуль.

Для доказательства мы применим формулу механической квадратуры Гаусса — Якоби (§ 3.4). Пусть $\varrho(x)$ — произвольный π_m, который не превосходит нуля на отрезке $[a, b]$, за возможным исключением отрезка $[a', b']$. Допуская, что многочлен $p_n(x)$ не имеет нулей x_ν в $[a', b']$, и полагая $2n-1 \geqslant m$, получим

$$\int_a^b \varrho(x)\, d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \varrho(x_\nu) \leqslant 0. \tag{6.1.1}$$

Отсюда на основании теоремы Вейерштрасса (теорема 1.3.1) следует, что

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \leqslant 0 \tag{6.1.2}$$

для всякой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции, которая на всем отрезке, за возможным исключением отрезка $[a', b']$, не превосходит нуля. Если мы определим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leqslant x \leqslant a', \quad b' \leqslant x \leqslant b, \\ (x-a')(b'-x) & \text{при } a' \leqslant x \leqslant b', \end{cases} \tag{6.1.3}$$

то придем к противоречию.

(2) Теорема 6.1.2. *Теорема 6.1.1 остается справедливой и для бесконечного интервала $[a, b]$, если только больший по модулю нуль многочлена $p_n(x)$ есть величина $o(n)$.*

Это замечание принадлежит Хану ([1], стр. 215—217)[1]. Если мы положим

$$\max |x_\nu - a'|\,|b' - x_\nu| = M_n, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

то из нашего предположения вытекает, что $M_n = o(n^2)$. Выберем теперь многочлен

$$\varrho(x) = T_k^2 \left\{\frac{2}{M_n}(x-a')(b'-x)+1\right\}, \quad k = \left[\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right],$$

где $T_k(x)$ — многочлен Чебышева (1.12.3). Если мы затем предположим, что отрезок $[a', b']$ не содержит нулей, то будем иметь

$$-1 \leqslant \frac{1}{M_n}(x_\nu - a')(b' - x_\nu) \leqslant 0,$$

следовательно, $\varrho(x_\nu) \leqslant 1$. Из этого вытекает, что

$$\int_{a'}^{b'} \varrho(x)\,d\alpha(x) \leqslant \int_a^q \varrho(x)\,d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \varrho(x_\nu) \leqslant \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu = \int_a^b d\alpha(x).$$

Но многочлен $T_k'(x)$ монотонно возрастает при $x \geqslant 1$, так что $T_k(\xi+1) > T_k'(1)\,\xi = k^2\xi$ при $\xi > 0$; поэтому на отрезке $[a', b']$ мы имеем

$$\varrho(x) \geqslant k^4 \left\{\frac{2}{M_n}(x-a')(b'-x)\right\}^2, \quad \int_{a'}^{b'} \varrho(x)\,d\alpha(x) > C\frac{k^4}{M_n^2},$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от n. Отсюда следует, что $n^2 M_n^{-1} = O(1)$, что противоречит допущению теоремы.

Относительно распределения нулей при больших значениях n см. теорему 12.7.2.

6.11. Расстояние между последовательными нулями

Здесь и в дальнейших пунктах мы рассматриваем распределения вида $w(x)\,dx$.

(1) Теорема 6.11.1. *Пусть $w(x)$ — весовая функция на конечном отрезке $[a, b]$, ограниченная снизу положительным числом: $w(x) \geqslant \mu > 0$.*

---

[1]) Он утверждает (не дав удовлетворительного доказательства), что если a или b конечно, то нижеследующее доказательство проходит при $o(n^2)$.

Пусть $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ — *записанные в убывающем порядке нули*[1]) *соответствующего ортонормального многочлена* $p_n(x)$. *Записывая* x_ν *в виде*

$$x_\nu = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\cos\theta_\nu, \quad 0 < \theta_\nu < \pi, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.11.1}$$

будем иметь

$$\theta_{\nu+1} - \theta_\nu < K\frac{\ln n}{n}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad \theta_0 = 0, \quad \theta_{n+1} = \pi. \tag{6.11.2}$$

Здесь константа K *зависит только от* μ, a, b (см. Кравчук [2]). Эрдёш и Туран (письменное сообщение) предполагают существование интеграла

$$\int_a^b \frac{dx}{w(x)}$$

вместо условия $w(x) \geqslant \mu > 0$. Их доказательство (см. Эрдёш и Туран [2]) основано на изучении распределения узлов интерполирования, для которых соответствующие фундаментальные многочлены (глава XIV) удовлетворяют некоторым условиям. Следующее доказательство для частного случая $w(x) \geqslant \mu > 0$ проведено Ленжиелем, который исключил из доказательства Эрдёша и Турана ссылки на теорию интерполирования.

(2) Пусть ν — целое число, $0 \leqslant \nu \leqslant n$, а $\gamma = \frac{1}{2}(\theta_\nu + \theta_{\nu+1})$. Определим многочлен

$$\varrho(x) = \varrho\left\{\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\cos\theta\right\}$$

равенством

$$2\varrho(x) = \left(\frac{\sin N\frac{\gamma+\theta}{2}}{N\sin\frac{\gamma+\theta}{2}}\right)^{2m} + \left(\frac{\sin N\frac{\gamma-\theta}{2}}{N\sin\frac{\gamma-\theta}{2}}\right)^{2m}, \tag{6.11.3}$$

где N и m — некоторые целые положительные числа.

Каждое слагаемое правой части представляет собой один и тот же тригонометрический многочлен порядка $m(N-1)$, взятый соответственно при значениях аргумента $\gamma+\theta$ и $\gamma-\theta$. Таким образом, их сумма будет косинус-многочленом порядка $m(N-1)$. Если $m(N-1) \leqslant 2n-1$, то может быть применена теорема 3.4.1.

Мы имеем

$$\frac{\theta_{\nu+1}-\theta_\nu}{4} \leqslant \frac{\gamma}{2} < \frac{\gamma+\pi}{2} \leqslant \pi - \frac{\theta_{\nu+1}-\theta_\nu}{4}, \tag{6.11.4}$$

откуда при всех значениях k, $1 \leqslant k \leqslant n$, вытекают неравенства

$$0 < \frac{\theta_{\nu+1}-\theta_\nu}{4} < \frac{\gamma+\theta_k}{2} < \pi - \frac{\theta_{\nu+1}-\theta_\nu}{4}, \tag{6.11.5}$$

следовательно,

$$\left(\sin\frac{\gamma+\theta_k}{2}\right)^{-1} < \left(\sin\frac{\theta_{\nu+1}-\theta_\nu}{4}\right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{6.11.6}$$

---

[1]) Разумеется, каждое x_ν зависит от ν и n, $x_\nu = x_{\nu n}$.

То же самое неравенство, но со знаком $\leqslant$ вместо знака $<$, справедливо для $|\sin(\gamma-\theta_\iota)/2|^{-1}$, так как $|\gamma-\theta_\iota|\geqslant(\theta_{\nu+1}-\theta_\nu)/2$. Таким образом,

$$\varrho(x_k)\leqslant\left(N\sin\frac{\theta_{\nu+1}-\theta_\nu}{4}\right)^{-2m},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{6.11.7}$$

Используя (3.4.1) и (3.4.5), получаем

$$\int_a^b\varrho(x)\,w(x)\,dx\leqslant\left(N\sin\frac{\theta_{\nu+1}-\theta_\nu}{4}\right)^{-2m}\int_a^b w(x)\,dx. \tag{6.11.8}$$

С другой стороны, значение $\varrho(x)$ при $\theta=\gamma$ не меньше, чем $\frac{1}{2}$, следовательно, если мы положим $x_0=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a)\cos\gamma$, то, опираясь на один из результатов главы VII (теорема 7.7), получим

$$\int_a^b\varrho(x)\,w(x)\,dx\geqslant\mu\int_a^b\varrho(x)\,dx\geqslant\mu Cn^{-2}\varrho(x_0)\geqslant\frac{1}{2}\mu Cn^{-2}, \tag{6.11.9}$$

где C — положительная постоянная, зависящая только от a и b. Сравнивая (6.11.8) и (6.11.9), мы получаем

$$\frac{1}{2}\mu Cn^{-2}\leqslant\left(N\sin\frac{\theta_{\nu+1}-\theta_\nu}{4}\right)^{-2m}\int_a^b w(x)\,dx$$

или

$$\sin\frac{\theta_{\nu+1}-\theta_\nu}{4}\leqslant\frac{1}{N}\left\{\frac{2}{\mu C}n^2\right\}^{\frac{1}{2m}}\left\{\int_a^b w(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2m}}. \tag{6.11.10}$$

Подставляя $N=\left[\frac{n}{\ln n}\right]$, $m=[\ln n]$, мы видим, что условие $m(N-1)\leqslant\leqslant 2n-1$ удовлетворено для больших значений n и (6.11.2) немедленно вытекает.

То же неравенство (6.11.2) можно установить без существенных изменений в доказательстве при условии $w(x)\geqslant\mu(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\mu>0$, где α и β больше, чем -1. В этом случае нужно использовать последнее замечание в § 7.71, (4). Постоянная K в (6.11.2) при этом зависит от μ, a, b, α и β.

(3) Отметим следующий простой результат:

Теорема 6.11.2. *Пусть $w(x)$ — весовая функция на отрезке $[-1,\ +1]$, такая, что*

$$A\leqslant(1-x^2)^{\frac{1}{2}}w(x)\leqslant B,\qquad -1\leqslant x\leqslant+1, \tag{6.11.11}$$

где A и B — положительные постоянные. Если $x_\nu=\cos\theta_\nu$, $(0<\theta_\nu<\pi$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$—записанные в убывающем порядке нули ортонормального многочлена $p_n(x)$, соответствующего весовой функции $w(x)$, то

$$\theta_{\nu+1}-\theta_\nu<\frac{4\pi B}{A}\cdot\frac{1}{n},\quad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad \theta_0=0,\quad \theta_{n+1}=\pi. \tag{6.11.12}$$

Это замечание также принадлежит Эрдёшу и Турану (письменное сообщение). Доказательство может быть основано на теореме 3.41.1. Обозначим через λ_ν коэффициент Кристоффеля, соответствующий точке x_ν. Тогда

$$A(\theta_{\nu+1}-\theta_\nu)\leqslant\int_{\theta_\nu}^{\theta_{\nu+1}}w(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=\int_{x_{\nu+1}}^{x_\nu}w(x)\,dx\leqslant\lambda_\nu+\lambda_{\nu+1},$$
$$\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad \lambda_0=\lambda_{n+1}=0. \tag{6.11.13}$$

С другой стороны, выражение

$$\varrho(x)=\varrho(\cos\theta)=\left(\frac{\sin\frac{n(\theta-\theta_\nu)}{2}}{n\sin\frac{\theta-\theta_\nu}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\frac{n(\theta+\theta_\nu)}{2}}{n\sin\frac{\theta+\theta_\nu}{2}}\right)^2$$

есть π_{n-1} относительно $x=\cos\theta$. Кроме того, $\varrho(x_\nu)=\varrho(\cos\theta_\nu)\geqslant 1$, следовательно (см. (1.6.5)), выполняются неравенства

$$\lambda_\nu\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varrho(x_k)=\int_{-1}^{+1}\varrho(x)w(x)\,dx\leqslant B\int_0^\pi\varrho(\cos\theta)\,d\theta=$$

$$=B\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{n\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 d\theta=\frac{2\pi B}{n}. \tag{6.11.14}$$

Справедливость требуемого неравенства вытекает из сопоставления (6.11.13) и (6.11.14).

Эрдёш и Туран [2] доказали также, что при условиях $0<A\leqslant\leqslant w(x)\leqslant B$, $-1\leqslant x\leqslant 1$ и $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ (*в обозначениях теоремы* 6.11.2) *имеют место неравенства*

$$\frac{K_1}{n}<\theta_{\nu+1}-\theta_\nu<\frac{K_2}{n}, \tag{6.11.15}$$

если только $\varepsilon\leqslant\theta_\nu\leqslant\pi-\varepsilon$. *Здесь* K_1, K_2 *зависят от* A, B, ε.

6.12. Изменение нулей в зависимости от параметра

А. А. Марков [4] доказал важное предложение относительно зависимости нулей многочлена $p_n(x)$ от параметра τ, который входит в весовую функцию $w(x)=w(x,\tau)$.

(1) Теорема 6.12.1. *Пусть* $w(x,\tau)$ — *такая весовая функция на отрезке* $[a,b]$, *зависящая от параметра* τ, *что* $w(x,\tau)$ *положительна и непрерывна при* $a<x<b$, $\tau_1<\tau<\tau_2$. *Допустим, кроме того, существование и непрерывность частной производной* $w_\tau(x,\tau)$ *при* $a<x<b$, $\tau_1<\tau<\tau_2$, *а также сходимость интегралов*

$$\int_a^b x^\nu w_\tau(x,\tau)\,dx,\qquad \nu=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,2n-1, \tag{6.12.1}$$

и притом равномерную на каждом замкнутом отрезке $\tau'\leqslant\tau\leqslant\tau''$, *лежащем внутри открытого промежутка* (τ_1,τ_2). *Обозначим нули многочлена* $p_n(x)=p_n(x,\tau)$ *через* $x_1(\tau)>x_2(\tau)>\ldots>x_n(\tau)$, *тогда* ν-*й нуль* $x_\nu(\tau)$ (*при фиксированном значении* ν) *является возрастающей функцией от* τ, *если только отношение* w_τ/w *является возрастающей функцией от* x, $a<x<b$.

Интегралы (2.2.1), определяющие моменты c_ν $(d\alpha(x)=w(x,\tau)\,dx)$, сходятся равномерно при $\tau'\leqslant\tau\leqslant\tau''$, и соотношения (2.2.1) могут быть продифференцированы по τ ($\nu=0,1,2,\ldots,2n-1$). Пусть $a<a'<b'<b$. При $a'\leqslant x\leqslant b'$, $\tau'\leqslant\tau\leqslant\tau''$ функция $w(x,\tau)$ имеет положительный минимум, стало быть, определители $D_{n\,1}$ (см. (2.2.11)) при $\tau'\leqslant\tau\leqslant\tau''$ равномерно ограничены снизу положительным числом. В соответствии с (2.2.6)

коэффициенты многочлена $p_n(x)$, а следовательно, и нули $x_\nu(\tau)$ (которые все различны), имеют непрерывную производную в промежутке $\tau_1 < \tau < \tau_2$.

Пусть $\varrho(x)$ будет фиксированным $\pi_{2\iota-1}$. Применим теорему 3.4.1, положив $d\alpha(x) = w(x)\,dx$. Коэффициенты Кристоффеля $\lambda_\nu = \lambda_\nu(\tau)$, очевидно, являются непрерывно дифференцируемыми функциями от τ (см. (3.4.3)). Дифференцируя по τ равенство (3.4.1), получаем

$$\int_a^b w_\tau(x, \tau)\,\varrho(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(\tau)\,\varrho'(x_\nu)\,x'_\nu(\tau) + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda'_\nu(\tau)\,\varrho(x_\nu). \tag{6.12.2}$$

Подставляя сюда

$$\varrho(x) = \frac{p_n^2(x)}{x - x_\nu}, \qquad \varrho'(x_\nu) = \{p'_n(x_\nu)\}^2, \tag{6.12.3}$$

имеем

$$\int_a^b w_\tau(x, \tau)\,\frac{p_n^2(x)}{x - x_\nu}\,dx = \lambda_\nu(\tau)\,\{p'_n(x_\nu)\}^2\,x'_\nu(\tau), \tag{6.12.4}$$

поскольку $\varrho'(x_\mu) = 0$ при $\mu \neq \nu$. Левая часть равенства может быть записана в виде

$$\int_a^b \left\{w_\tau(x, \tau) - \frac{w_\tau(x_\nu, \tau)}{w(x_\nu, \tau)}\,w(x, \tau)\right\} \frac{p_n^2(x)}{x - x_\nu}\,dx, \tag{6.12.5}$$

так как второе слагаемое в силу ортогональности равно нулю. В соответствии с допущением теоремы разность

$$\frac{w_\tau(x, \tau)}{w(x, \tau)} - \frac{w_\tau(x_\nu, \tau)}{w(x_\nu, \tau)} \tag{6.12.6}$$

имеет тот же знак, что $x - x_\nu$.

Таким образом, утверждение теоремы доказано[1]).

(2) Отметим такое следствие:

Теорема 6.12.2. *Пусть $w(x)$ и $W(x)$ — две весовые функции на $[a, b]$, положительные и непрерывные в промежутке $a < x < b$. Пусть $W(x)/w(x)$ — возрастающая функция. Если $\{x_\nu\}$ и $\{X_\nu\}$ означают записанные в убывающем порядке нули соответствующих ортогональных многочленов степени n, то справедливы неравенства*

$$x_\nu < X_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.12.7}$$

Полагая $w(x, \tau) = (1 - \tau)\,w(x) + \tau W(x)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, мы видим, что выражение

$$\frac{w_\tau(x, \tau)}{w(x, \tau)} = \frac{W(x) - w(x)}{(1-\tau)\,w(x) + \tau W(x)} = \tau^{-1} - \frac{\tau^{-1}}{1 - \tau + \tau\dfrac{W(x)}{w(x)}} \tag{6.12.8}$$

представляет собой возрастающую функцию относительно x при $0 < \tau < 1$. Мы имеем также $w(x, 0) = w(x)$, $w(x, 1) = W(x)$.

Различные приложения этих результатов будут даны в § 6.21.

---

[1]) Настоящее доказательство не существенно отличается от первоначального доказательства, данного А. А. Марковым, впрочем, здесь приведены несколько более ясные рассуждения.

6.2. Распределение нулей классических многочленов

Исследование этого вопроса, данное в § 3.3 для общего случая ортогональных многочленов, было основано на свойстве ортогональности. В частных случаях классических многочленов (§ 2.4) существуют различные другие подходы, которые интересны с точки зрения применяемых методов. Будем предполагать, что для многочленов Якоби $\alpha > -1$, $\beta > -1$, а для многочленов Лагерра, что $\alpha > -1$; кроме того, полагаем, что $n \geqslant 2$.

(1) Прежде всего, если мы имеем дело с классическими многочленами, то рассуждениям, указанным в § 3.3, (4), можно придать более точную форму. Действительно, для рассматриваемых многочленов число перемен знака в последовательности (3.3.5) в точках $x=a$ и $x=b$ может быть легко сосчитано [1]). Для многочленов Якоби мы применяем (4.1.1) и (4.1.4), а для многочленов Лагерра — формулы (5.1.7) и (5.1.8). Эти же соображения позволяют, кроме утверждения о вещественности и простоте нулей, получить сведения об их распределении.

В случае многочленов Якоби значение

$$\operatorname{sign}\{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\}\cdot\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

в нулях $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, может быть определено из (4.5.7) (вместо общего метода, данного в § 3.3, (4)). В случае многочленов Лагерра можно воспользоваться соотношением (5.1.14). Положение в особенности просто для многочленов Эрмита; нужно лишь применить первое из равенств (5.5.10).

(2) По теореме Ролля из формул Родрига (4.3.1), (5.1.5) и (5.5.3) снова вытекает рассматриваемое утверждение. При этом надо принять во внимание, что производные порядка 0, 1, 2, ..., $n-1$ от функций $(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}$, $e^{-x}x^n$, e^{-x^2} соответственно обращаются в нуль в точках $x=\pm 1$, $x=0$, $+\infty$, $x=\pm\infty$.

(3) Это утверждение вытекает также из дифференциальных уравнений (4.2.1), (5.1.2) и (5.5.2). С этой целью мы показываем сначала, что нули многочленов Якоби отличны от -1 и $+1$, а также друг от друга. Дифференцируя (4.2.1) k раз, мы имеем

$$(1-x^2)\,y^{(k+2)}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2k+2)\,x]\,y^{(k+1)}+\\+[n(n+\alpha+\beta+1)-k(k+\alpha+\beta+1)]\,y^{(k)}=0.$$

Если бы y обращался в нуль в точке $x=+1$ или $x=-1$, то из (4.2.1) следовало бы, что $y'=0$, тогда из только что полученного уравнения ($k=1$) вытекало бы, что $y''=0$ и т. д., так что имели бы $y\equiv 0$. (Коэффициент при $y^{(k+1)}$ отличен от нуля при $x=\pm 1$.) Следовательно, ни один нуль $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ не лежит в точках ± 1. Кроме того, все нули простые, так как если бы в некоторой точке $y=y'=0$ $(x\neq\pm 1)$, то из (4.2.1) следовало бы, что $(1-x^2)\,y''=0$, т. е. $y''=0$. Применяя уравнение для y', мы нашли бы, что $y'''=0$ и т. д., так что снова имели бы $y\equiv 0$.

Аналогично доказывается, что нули многочлена $L_n^{(\alpha)}(x)$ являются простыми и не лежат в точке $x=0$ и что нули многочлена $H_n(x)$ являются простыми.

Мы применим далее следующую теорему, принадлежащую Лагерру (см. Полиа и Сегё [1], часть II, отдел V, задача 118):

---

[1]) Профессор Полиа любезно обратил мое внимание на тот факт, что то же самое может быть сделано в общем случае ортогональных многочленов, если воспользоваться определителем (2.2.6).

Пусть $f(x)$ есть π_n и пусть x_0 — один из его простых нулей. Тогда окружность, проходящая через точки

$$x_0 \text{ и } x_0' = x_0 - 2(n-1)\frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}, \tag{6.2.1}$$

либо содержит нули в обеих областях, ею ограниченных, либо же все нули лежат на самой окружности. Это же утверждение будет справедливым, когда окружность заменяется прямой [1]).

Действительно, пусть $f(x) = (x - x_0)\,g(x)$ и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ — нули многочлена $g(x)$. Тогда $g(x_0) = f'(x_0)$, $g'(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)$, следовательно, имеет место равенство

$$\frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_0 - x_2} + \ldots + \frac{1}{x_0 - x_{n-1}} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)} = \frac{1}{2}\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{6.2.2}$$

Отсюда и из (6.2.1) получаем

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_0 - x_2} + \ldots + \frac{1}{x_0 - x_{n-1}}\right) = \frac{1}{x_0 - x_0'}. \tag{6.2.3}$$

Дробно-линейное преобразование $X = (x_0 - x)^{-1}$ переводит точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и точку x_0' в некоторые точки $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ и X_0'. Тогда имеем

$$\frac{1}{n-1}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}) = X_0', \tag{6.2.4}$$

и следовательно, прямая, проходящая через точку X_0', разделяет точки $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, если только они не лежат все на этой прямой. Возвращаясь к исходной x-плоскости, получаем теорему.

Для многочленов Якоби $y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ мы имеем из (4.2.1)

$$\frac{y'}{y''} = \frac{1 - x^2}{\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)\,x}, \text{ если } y = 0, \tag{6.2.5}$$

следовательно,

$$x_0' = x_0 - \frac{2(n-1)}{\dfrac{\alpha+1}{1 - x_0} - \dfrac{\beta+1}{1 + x_0}}. \tag{6.2.6}$$

Пусть x_0 будет нуль функции y с наибольшей мнимой частью. Если бы имелся невещественный корень, то мы имели бы $\Im x_0 > 0$ и

$$\Im\left(\frac{\alpha+1}{1 - x_0}\right) > 0, \quad \Im\left(-\frac{\beta+1}{1 + x_0}\right) > 0 \tag{6.2.7}$$

и, следовательно, $\Im x_0' > \Im x_0$. Таким образом, точка x_0' лежит в полуплоскости $\Im x > \Im x_0$, и можно через точки x_0 и x_0' провести окружность, которая не содержит нулей. (Все нули не могут лежать на этой окружности, так как в этом случае они должны были бы совпадать с x_0, что невозможно.) Отсюда вытекает, что все нули вещественны. Пусть теперь x_0 — наибольший из нулей, $x_0 \neq \pm 1$. Если бы $x_0 > 1$, то из (6.2.6) следовало бы, что $x_0' > x_0$. Рассматривая произвольную окружность, проходящую через точки x_0 и x_0', мы снова приходим к противоречию.

В случае многочленов Лагерра

$$x_0' = x_0 - \frac{2(n-1)}{1 - \dfrac{\alpha+1}{x_0}}. \tag{6.2.8}$$

---

[1]) Если $f''(x_0) = 0$, то мы имеем $x_0' = \infty$, и вместо окружности нужно рассматривать прямую, проходящую через точку x_0.

Из $\Im x_0 > 0$ мы получаем, как и раньше, что $\Im x_0' > \Im x_0$. Из допущения $x_0 < 0$ следует $x_0' < x_0$[1]).

В случае многочленов Эрмита

$$x_0' = x_0 - \frac{n-1}{x_0} \tag{6.2.9}$$

и $\Im x_0' > \Im x_0$, если $\Im x_0 > 0$.

(4) Теорема Лагерра дает также некоторые границы для нулей. Пусть x_1 — наибольший, а x_n — наименьший из нулей многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Тогда имеем

$$\frac{\alpha+1}{1-x_1} - \frac{\beta+1}{1+x_1} > 0$$

и (см. (6.2.6))

$$-1 < x_n \leqslant x_1 - \frac{2(n-1)}{\dfrac{\alpha+1}{1-x_1} - \dfrac{\beta+1}{1+x_1}} < x_1, \tag{6.2.10}$$

следовательно,

$$\frac{\alpha+1}{1-x_1} - \frac{\beta+1}{1+x_1} > \frac{2(n-1)}{1+x_1}, \quad x_1 > \frac{\beta-\alpha+2n-2}{\beta+\alpha+2n}, \tag{6.2.11}$$

а при $\beta \geqslant \alpha$

$$x_1 > \frac{n-1}{n+\alpha}. \tag{6.2.12}$$

В случае ультрасферических многочленов $x_n = -x_1$, стало быть:

$$\frac{\alpha+1}{1-x_1} - \frac{\alpha+1}{1+x_1} > \frac{n-1}{x_1}, \quad x_1 > \left(\frac{n-1}{n+2\alpha+1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.2.13}$$

(При $n=2$ знак неравенства нужно заменить знаком равенства.) Эта оценка точнее предыдущей. Обе границы имеют вид $1-(\alpha+1)/n+O(n^{-2})$. Подобным образом может быть получена верхняя граница для x_n.

Аналогичные рассуждения приводят для большего из нулей многочленов $L_n^{(\alpha)}(x)$ и $H_n(x)$ соответственно к неравенствам

$$x_0 > 2n+\alpha-1, \quad x_0 > \left\{\frac{1}{2}(n-1)\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{6.2.14}$$

При $n=2$ во втором неравенстве следует поставить знак равенства. Это весьма грубые оценки (см. теорему 6.32).

(5) Другое доказательство вещественности и простоты нулей (дающее также $a < x_\nu < b$) может легко быть получено из дифференциального уравнения, если использовать соображения § 6.7. Следует при этом напомнить, что рассматриваемые многочлены суть единственные решения в виде многочленов соответствующих дифференциальных уравнений (см. §§ 4.2, (2), 5.1, (1)).

(6) Обратимся теперь к данному Лагерром [3] весьма элементарному методу, который приводит к некоторым верхним границам для нулей классических многочленов.

Так как $g''(x_0) = \frac{1}{3} f'''(x_0)$, то из (6.2.2) следует

$$\frac{1}{(x_0-x_1)^2} + \frac{1}{(x_0-x_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(x_0-x_{n-1})^2} = -\frac{d}{dx_0}\left(\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}\right) =$$
$$= \frac{\{g'(x_0)\}^2 - g(x_0)\,g''(x_0)}{\{g(x_0)\}^2} = \frac{3\{f''(x_0)\}^2 - 4f'(x_0)\,f'''(x_0)}{12\{f'(x_0)\}^2}, \tag{6.2.15}$$

[1]) Из (6.2.8) мы находим также, что наименьший нуль $< \alpha+1$.

откуда в соответствии с неравенством Коши — Буняковского получаем

$$(n-1)\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{(x_0-x_\nu)^2}-\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{x_0-x_\nu}\right\}^2=$$

$$=(n-1)\frac{3\{f''(x_0)\}^2-4f'(x_0)f'''(x_0)}{12\{f'(x_0)\}^2}-\frac{\{f''(x_0)\}^2}{4\{f'(x_0)\}^2}\geqslant 0$$

или

$$3(n-2)\{f''(x_0)\}^2-4(n-1)f'(x_0)f'''(x_0)\geqslant 0. \tag{6.2.16}$$

Это необходимое условие для любого нуля многочлена с вещественными и различными нулями.

В случае многочленов Лежандра имеют место равенства

$$(1-x_0^2)f''(x_0)=2x_0f'(x_0),$$

$$(1-x_0^2)f'''(x_0)=4x_0f''(x_0)-(n-1)(n+2)f'(x_0)=$$

$$=\frac{2-n-n^2+(6+n+n^2)x_0^2}{1-x_0^2}f'(x_0),$$

следовательно,

$$3(n-2)4x_0^2-4(n-1)[2-n-n^2+(6+n+n^2)x_0^2]\geqslant 0;$$

отсюда вытекает оценка

$$|x_0|\leqslant(n-1)\left\{\frac{n+2}{n(n^2+2)}\right\}^{\frac{1}{2}}=1-\frac{\frac{5}{2}}{n^2}+\ldots \tag{6.2.17}$$

При $n\to\infty$ точная константа в правой части равна $\frac{j_1^2}{2}=2{,}891592\ldots$ (вместо 5/2), где j_1 — наименьший положительный нуль функции $J_0(x)$ (см. (6.3.15)).

В случае многочленов Эрмита из (5.5.2) имеем

$$f''(x_0)=2x_0f'(x_0),\quad f'''(x_0)=2(2x_0^2-n+1)f'(x_0),$$

$$3(n-2)x_0^2-2(n-1)(2x_0^2-n+1)\geqslant 0;$$

отсюда получаем

$$|x_0|\leqslant\frac{2^{\frac{1}{2}}(n-1)}{(n+2)^{\frac{1}{2}}}=(2n+1)^{\frac{1}{2}}-\frac{9}{2}(2n+1)^{-\frac{1}{2}}+\ldots \tag{6.2.18}$$

Эта граница точнее той, которая получается применением метода Штурма (см. § 6.31, (4)), хотя и она не является наилучшей, так как в соответствии с (6.32.5) истинный порядок второго слагаемого в правой части будет $n^{-\frac{1}{6}}$.

6.21. Неравенства для нулей классических многочленов

Теорема А. А. Маркова (§ 6.12) дает несколько замечательных неравенств для нулей классических многочленов.

(1) Рассматривая нули многочленов Якоби, перенумеруем опять эти нули $x_\nu=\cos\theta_\nu$ в убывающем порядке:

$$+1>x_1>x_2>\ldots>x_n>-1,\quad 0<\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_n<\pi. \tag{6.21.1}$$

Т е о р е м а 6.21.1. *Пусть* $\{x_\nu=x_\nu(\alpha,\beta)\}$ — *перенумерованные в убывающем порядке нули многочлена Якоби* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial\alpha}<0,\quad\frac{\partial x_\nu}{\partial\beta}>0,\quad \nu=1,2,\ldots,n. \tag{6.21.2}$$

В случае ультрасферических многочленов, когда $\alpha=\beta$, *мы имеем*

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial \alpha} < 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{6.21.3}$$

Применяя теорему 6.12.1 к $w(x, \tau) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, где $\alpha=\tau$, а β — фиксированное или $\beta=\tau$, а α — фиксированное, мы получаем неравенства (6.21.2) (см. А. А. Марков [4]; Стилтьес [6], стр. 76). Действительно, в первом случае отношение $\frac{w_\tau}{w} = \ln(1-x)$ является убывающей функцией от x. Доказательство аналогично и во втором случае.

Неравенство (6.21.3) для случая ультрасферических многочленов принадлежит Стилтьесу ([6], стр. 77). Для отрицательных нулей справедливо противоположное неравенство. Это неравенство непосредственно не вытекает из теоремы 6.12.1, так как для $w(x, \tau) = (1-x^2)^\tau$ отношение $\frac{w_\tau}{w} = \ln(1-x^2)$ не является монотонной функцией. Однако (6.21.3) немедленно следует из (6.21.2), если учесть (4.1.5).

[Доказательство Стилтьеса неравенств (6.21.2) и (6.21.3) совершенно иное, чем у Маркова, оно основано на дифференциальном уравнении (см. ниже § 6.22). Марков доказывал неравенство (6.21.3) на основе своей общей теоремы, но его доказательство было некорректным *). В его обозначениях ([4], стр. 49) функция

$$f(y) = \frac{(y-e)\,V(y, \xi)}{\dfrac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi}}$$

равна $y\left[\ln\frac{1}{(1-y^2)}\right]^{-1}$ в случае ультрасферических многочленов. Эта функция стремится к $+\infty$ при $y \to +0$ и к $-\infty$ при $y \to -0$. Следовательно, хотя $f'(y) < 0$, все же ничего нельзя сказать относительно знака отношения $\{f(y) - f(x_i)\}/(y - x_i)$. Стало быть, условие Маркова $\frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} > 0$ не удовлетворяется в случае ультрасферических многочленов при $y - e = 0$.

В общем случае $f(y) > 0$ при $y > e$ и $f(y) < 0$ при $y < e$. Этот факт может быть совместим со свойством убывания только в том случае, когда знаменатель $f(y)$ обращается в нуль при $y \to e$. Однако функция $f(y)$ в любом случае разрывна при $y=e$, и следовательно, в общем случае остается в силе критическое замечание, сделанное в упомянутом выше частном случае.]

По-видимому, Стилтьес знал общую теорему § 6.12 (см. [6], стр. 79, пункт 5, и замечание на стр. 88).

(2) Теорема 6.21.2. *Пусть параметры* α *и* β *многочлена Якоби* $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ *подчинены неравенствам*

$$-\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant +\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leqslant \beta \leqslant +\frac{1}{2}. \tag{6.21.4}$$

Тогда нули многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ *удовлетворяют неравенствам (обозначе-*

---

*) По этому вопросу см. примечание Н. И. Ахиезера в книге А. А. Маркова Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее к л няющихся от нуля» (стр. 378—382). (*Прим. перев.*)

ния прежние):

$$\frac{2\nu-1}{2n+1}\pi\leqslant\theta_\nu\leqslant\frac{2\nu}{2n+1}\pi,\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{6.21.5}$$

причем равенства соответственно достигаются только в случаях $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=+\frac{1}{2}$ *и* $\alpha=+\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$.

Для многочленов Лежандра, т. е. для случая $\alpha=\beta=0$, этот результат принадлежит Брунсу [1]. Общий случай рассмотрен А. А. Марковым и Стилтьесом. Для доказательства мы замечаем, что в соответствии с (6.21.2) максимум и минимум $x_\nu=\cos\theta_\nu$ достигаются в указанных частных случаях. Остается применить (4.1.8).

(3) Теорема 6.21.3. *В случае ультрасферических многочленов при*

$$-\frac{1}{2}\leqslant\alpha=\beta\leqslant+\frac{1}{2} \tag{6.21.6}$$

справедливы неравенства

$$\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\leqslant\theta_\nu\leqslant\nu\frac{\pi}{n+1},\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right], \tag{6.21.7}$$

причем знак равенства соответственно достигается только в случаях $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ *и* $\alpha=\beta=+\frac{1}{2}$.

Первое доказательство этих неравенств, которые более точны, чем соответствующие неравенства Брунса (6.21.5), было дано Стилтьесом [6]. Доказательство А. А. Маркова было некорректным (см. выше). Относительно доказательства Стилтьеса см. § 6.22; см. также § 6.3, (2) и (3). Соответствующие неравенства для отрицательных нулей получаются из соотношения симметрии: $x_\nu+x_{n+1-\nu}=0$.

Наше доказательство будет основано на теореме 6.21.1. В соответствии с (6.21.3) максимум и минимум x_ν, $\nu\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$, достигаются соответственно при $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ и при $\alpha=\beta=+\frac{1}{2}$. Нулями же многочленов (4.1.7) являются

$$\cos\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\ \text{и}\ \cos\nu\frac{\pi}{n+1},\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{6.21.8}$$

(4) В случае многочленов Лагерра мы имеем $w(x,\tau)=e^{-x}x^\alpha$, где $\alpha=\tau$, а отношение $\frac{w_\tau}{w}=\ln x$ является возрастающей функцией. Поэтому нули многочленов Лагерра являются возрастающими функциями параметра α, $\alpha>-1$. Следовательно, в соответствии с (5.6.1) справедлива следующая

Теорема 6.21.4. *Если*

$$-\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant+\frac{1}{2}, \tag{6.21.9}$$

то нули x_ν *многочлена* $L_n^{(\alpha)}(x)$, *записанные в возрастающем порядке, удовлетворяют неравенствам*

$$\xi_\nu^2\leqslant x_\nu\leqslant\eta_\nu^2, \tag{6.21.10}$$

где ξ_ν *и* η_ν *означают соответственно* ν*-е положительные нули многочленов Эрмита* $H_{2n}(x)$ *и* $H_{2n+1}(x)$.

6.22. Доказательство монотонного изменения нулей классических многочленов, данное Стилтьесом

Стилтьес ([6], стр. 73—77) указал следующее доказательство теоремы 6.21.1. Подставляя $x=x_\nu$ в (4.2.1), мы имеем

$$\frac{1}{2}\frac{y''}{y'}+\frac{1}{2}\frac{\alpha+1}{x_\nu-1}+\frac{1}{2}\frac{\beta+1}{x_\nu+1}=$$
$$=\frac{1}{x_\nu-x_1}+\ldots+\frac{1}{x_\nu-x_n}+\frac{1}{2}\frac{\alpha+1}{x_\nu-1}+\frac{1}{2}\frac{\beta+1}{x_\nu+1}=0. \quad (6.22.1)$$

Дифференцирование этого равенства по α дает

$$\frac{1}{(x_\nu-x_1)^2}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial\alpha}-\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{(x_\nu-x_2)^2}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial\alpha}-\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\right)+\ldots+\frac{1}{(x_\nu-x_n)^2}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial\alpha}-\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha+1}{(x_\nu-1)^2}\frac{\partial x_\nu}{\partial\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\beta+1}{(x_\nu+1)^2}\frac{\partial x_\nu}{\partial\alpha}-\frac{1}{2}\frac{1}{x_\nu-1}=0 \quad (6.22.2)$$

или

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial\alpha}=\frac{1}{2}\frac{1}{x_\nu-1}, \quad \nu=1,\,2,\,\ldots,\,n, \quad (6.22.3)$$

где

$$a_{\nu\nu}=\frac{1}{(x_\nu-x_1)^2}+\ldots+\frac{1}{(x_\nu-x_{\nu-1})^2}+\frac{1}{(x_\nu-x_{\nu+1})^2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(x_\nu-x_n)^2}+\frac{1}{2}\frac{\alpha+1}{(x_\nu-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{\beta+1}{(x_\nu+1)^2} \quad (6.22.4)$$

и

$$a_{\nu\mu}=a_{\mu\nu}=-\frac{1}{(x_\nu-x_\mu)^2}, \quad \nu\neq\mu. \quad (6.22.5)$$

Матрица $(a_{\nu\mu})$ является положительно определенной, так как

$$K=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}a_{\nu\mu}u_\nu u_\mu=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\substack{\nu,\,\mu=1,2,\,\ldots,\,n\\ \nu\neq\mu}}\left(\frac{u_\nu-u_\mu}{x_\nu-x_\mu}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\frac{\alpha+1}{(x_\nu-1)^2}+\frac{\beta+1}{(x_\nu+1)^2}\right\}u_\nu^2. \quad (6.22.6)$$

Затем Стилтьес применяет теорему, утверждающую, что если $A=(a_{\nu\mu})$ — положительно определенная матрица, у которой $a_{\nu\mu}<0$ при $\nu\neq\mu$, то обратная матрица $(A)^{-1}$ состоит только из положительных элементов.

(Мы можем допустить, что $a_{\nu\nu}=1$, $\nu=1,2,\ldots,n$, следовательно, $K=E-L$, где E — единичная форма, а коэффициенты формы L неотрицательны. Тогда L по абсолютному значению меньше, чем единица, если $E=1$, и форма, обратная форме K, может быть записана в виде

$$(K)^{-1}=E+L+L^2+L^3+\ldots \quad (6.22.7)$$

Все формы, входящие в правую часть, имеют неотрицательные коэффициенты, а $E+L$ — положительные коэффициенты[1]).)

[1]) Это рассуждение отличается от сравнительно более простого доказательства, приведенного у Стилтьеса. Однако настоящее рассуждение позволяет доказывать аналогичные теоремы в более сложных случаях.

На основании этой теоремы утверждение вытекает немедленно из (6.22.3). Доказательство второго из неравенств (6.21.2) аналогично. Случай ультрасферических многочленов (6.21.3) может быть выведен либо из (4.1.5), либо непосредственно (см. Стилтьес [6]). Этот же метод применим к многочленам Лагерра (теорема 6.21.4). В этом случае мы имеем

$$a_{\nu\nu}=\frac{1}{(x_\nu-x_1)^2}+\ldots+\frac{1}{(x_\nu-x_{\nu-1})^2}+\frac{1}{(x_\nu-x_{\nu+1})^2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(x_\nu-x_n)^2}+\frac{\alpha+1}{2x_\nu^2}, \tag{6.22.8}$$
$$a_{\nu\mu}=-\frac{1}{(x_\nu-x_\mu)^2}, \quad \nu\neq\mu,$$

причем правая часть уравнений, соответствующих (6.22.3), будет равна $(2x_\nu)^{-1}$.

6.3. Метод Штурма; многочлены Якоби

Метод Штурма (см. § 1.82) весьма просто приводит к некоторым неравенствам для нулей многочленов Якоби (см. Сегё [20]; Бьюл [1]). На этом пути мы не только вновь получим некоторые результаты § 6.21, но будем иметь возможность улучшить их в значительной мере. В этом пункте мы будем предполагать, что

$$-\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant+\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}\leqslant\beta\leqslant+\frac{1}{2}, \tag{6.3.1}$$

исключая вообще случай $\alpha^2=\beta^2=\frac{1}{4}$; мы нумеруем нули $x_\nu=\cos\theta_\nu$ многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ в убывающем порядке:

$$+1>x_1>x_2>\ldots>x_n>-1, \quad 0<\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_n<\pi. \tag{6.3.2}$$

(1) Теорема 6.3.1. *При указанных предположениях имеют место неравенства*

$$\theta_\nu-\theta_{\nu-1}<\frac{\pi}{n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}}, \quad \nu=1,2,\ldots,n+1. \tag{6.3.3}$$

При $\alpha^2=\beta^2=\frac{1}{4}$ *знак неравенства нужно заменить знаком равенства. Мы полагаем здесь*

$$\theta_0=\begin{cases}0, & \text{если } \alpha>-\frac{1}{2},\\ -\theta_1, & \text{если } \alpha=-\frac{1}{2},\end{cases} \qquad \theta_{n+1}=\begin{cases}\pi, & \text{если } \beta>-\frac{1}{2},\\ 2\pi-\theta_n, & \text{если } \beta=-\frac{1}{2}.\end{cases} \tag{6.3.4}$$

Отметим, что при $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$, $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha=-\beta=+\frac{1}{2}$, $\alpha=-\beta=-\frac{1}{2}$ мы имеем соответственно

$$\left.\begin{aligned}\theta_\nu=\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}, \quad \nu\frac{\pi}{n+1}, \quad \nu\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}, \quad \frac{\nu-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi,\\ \nu=0,1,\ldots,n+1.\end{aligned}\right\} \tag{6.3.5}$$

Неравенство (6.3.3) следует непосредственно из теоремы 1.82.1, если сравнить уравнение (4.24.2) с уравнением

$$\frac{d^2v}{d\theta^2}+\left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 v=0 \qquad (6.3.6)$$

и рассмотреть его решение $v=\sin\{[n+(\alpha+\beta+1)/2](\theta-\theta_{\nu-1})\}$. При $\alpha>-\frac{1}{2}$ условие, соответствующее (1.82.2), удовлетворено в точке $x_0=\theta_0=0$ (и соответственно при $\beta>-\frac{1}{2}$ в точке $X_0=\theta_{n+1}=\pi$).

(2) Теорема 6.3.2. *При указанных предположениях имеют место неравенства*

$$\frac{\dfrac{\nu+(\alpha+\beta-1)}{2}}{\dfrac{n+(\alpha+\beta+1)}{2}}\pi<\theta_\nu<\frac{\nu}{\dfrac{n+(\alpha+\beta+1)}{2}}\pi,\quad \nu=1,2,\ldots,n, \qquad (6.3.7)$$

тогда как для ультрасферического случая $\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}$ *справедливы неравенства*

$$\theta_\nu>\frac{\nu+\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{1}{4}}{n+\alpha+\dfrac{1}{2}}\pi=\frac{\nu-\dfrac{1-\lambda}{2}}{n+\lambda}\pi,\quad \nu=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]. \qquad (6.3.8)$$

Оценка (6.3.7) получается, если учесть соотношение (4.1.3), сложением неравенств (6.3.3) (см. Бьюл [1], стр. 311—312). В случае $\alpha=-\frac{1}{2}$ множитель ν в правой части (6.3.7) может быть заменен на $\nu-\frac{1}{2}$, а если $\beta=-\frac{1}{2}$, то множитель $\nu+\frac{\alpha+\beta-1}{2}$ в левой части (6.3.7) может быть заменен на $\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}$. В случаях (6.3.5) справедливы те же неравенства, но местами знак неравенства нужно заменить знаком равенства. Эти неравенства точнее, чем (6.21.5), если $\alpha+\beta>0$. В случае многочленов Лежандра ($\alpha=\beta=0$) они совпадают с (6.21.5), т. е. с неравенствами Брунса [1].

Неравенство (6.3.8) выполняется только для тех нулей, для которых $0<\theta_\nu<\frac{\pi}{2}$; оно обращается в равенство при $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ или $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$. Неравенство (6.3.8) более точно, чем нижняя оценка в (6.21.7).

Для доказательства (6.3.8) заметим, что в соответствии с (6.3.3) последовательность

$$\theta'_\nu=\theta_\nu-\frac{\nu+\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{1}{4}}{n+\alpha+\dfrac{1}{2}}\pi,\quad \nu=0,1,2,\ldots,\left[\frac{n+1}{2}\right], \qquad (6.3.9)$$

будет убывающей. При n нечетном $\theta'_{\frac{n+1}{2}}=0$. При n четном достаточно показать, что $\theta'_{\frac{n}{2}}>0$. Это вытекает из (6.3.3), поскольку $\theta_{\frac{n}{2}}+\theta_{\frac{n}{2}+1}=\pi$.

Аналогичное рассуждение может быть применено для того, чтобы уточнить левую часть в (6.3.7) для тех нулей, которые лежат в фиксированной части $\theta\leqslant\theta_\nu\leqslant c$ отрезка $[0,\pi]$. Относительно иных доказательств неравенства (6.3.8) см. (5) и § 6.6, (2).

(3) В связи со сказанным докажем следующую теорему:

Теорема 6.3.3. *Пусть $n \geqslant 2$. При условии $-\frac{1}{2} < \alpha = \beta < +\frac{1}{2}$ последовательность*

$$\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \tag{6.3.10}$$

нулей полинома $P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos\theta)$ является выпуклой, т. е. последовательность $\theta_\nu - \theta_{\nu-1}$ является возрастающей.

Это следует из теоремы 1.82.2, примененной к дифференциальному уравнению (4.7.11), $0 < \lambda < 1$. Действительно, коэффициент при u в (4.7.11) монотонно убывает. В случаях $\alpha = \beta = \pm\frac{1}{2}$ разность $\theta_\nu - \theta_{\nu-1}$ постоянна; здесь опять $\theta_0 = 0$ при $\alpha > -\frac{1}{2}$ и $\theta_0 = -\theta_1$ при $\alpha = -\frac{1}{2}$. Если n четно, то последний член последовательности (6.3.10) лежит на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, и можно применить (1.82.4). При $\alpha > -\frac{1}{2}$ условие (1.82.5) выполнено.

Из теоремы 6.3.3 легко вывести аналогичное свойство выпуклости для последовательности $\{x_\nu\}$ (см. Хилле [4]).

С помощью теоремы 6.3.3 верхняя оценка в (6.21.7), т. е.

$$\theta_\nu < \frac{\nu}{n+1}\pi, \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \alpha < +\frac{1}{2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right], \tag{6.3.11}$$

может быть получена иным путем, чем в § 6.21, (3) (см. Сегё [20], стр. 5—6, 8). Пусть $-\frac{1}{2} < \alpha < +\frac{1}{2}$. Последовательность

$$\theta''_\nu = \theta_\nu - \frac{\nu}{n+1}\pi, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]+1, \tag{6.3.12}$$

выпукла; следовательно, она достигает своего максимума либо при $\nu=0$, либо при $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]+1$. Но если n нечетно, то $\theta''_0 = \theta''_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} = 0$, если же n четно, то нужно принять во внимание, что $\theta''_{\frac{n}{2}} + \theta''_{\frac{n}{2}+1} = 0$.

(4) Наконец, применяя метод Штурма, мы получаем некоторые неравенства, в которые входят нули функций Бесселя. В известном смысле это неравенства более точные, чем предыдущие, хотя и не столь простые.

Теорема 6.3.4. *Пусть $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, $0 < \lambda < 1$. Обозначим через $j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$ положительные нули функции Бесселя $J_\alpha(x)$. Имеют место неравенства*

$$\theta_\nu < \frac{j_\nu}{n+\lambda}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{6.3.13}$$

При $\lambda=0$ и $\lambda=1$ знак неравенства в (6.3.13) следует заменить знаком равенства. Неравенства (6.3.13) вытекают из сравнения (4.7.11) с уравнением (см. (1.8.9))

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + \left\{(n+\lambda)^2 + \frac{\lambda(1-\lambda)}{\theta^2}\right\} v = 0, \quad v = \theta^{\frac{1}{2}} J_\alpha[(n+\lambda)\theta], \quad \alpha = \lambda - \frac{1}{2}. \tag{6.3.14}$$

Оценка (6.3.13) является наилучшей в том смысле, что при фиксированном ν и произвольном n множитель j_ν не может быть заменен меньшим числом, так как (см. теорему 8.1.2)

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_\nu = \lim_{n\to\infty} n\theta_{\nu n} = j_\nu. \tag{6.3.15}$$

Между прочим, при $0 < \theta_\nu \leqslant \frac{\pi}{2}$ для θ_ν может быть получена аналогичная нижняя граница, а именно:

$$\theta_\nu > j_\nu \left[(n+\lambda)^2 + k\lambda(1-\lambda)\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{6.3.16}$$

где k — положительная постоянная (см. Сегё [20], стр. 9). Таким образом, (6.3.15) следует из (6.3.13) и (6.3.16).

(5) Наконец, еще одно замечательное свойство нулей $\theta_\nu = \theta_{\nu n}$ многочлена $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ может быть доказано применением теоремы Штурма. Подставляя $\theta = \xi/(n+\lambda)$ в (4.7.11), мы получаем уравнение

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \left(1 + \frac{\lambda(1-\lambda)}{(n+\lambda)^2 \sin^2 \frac{\xi}{n+\lambda}}\right) u = 0. \tag{6.3.17}$$

Если $0<\lambda<1$, то $(n+\lambda)^2 \sin^2 \frac{\xi}{n+\lambda}$ возрастает вместе с n, если ξ фиксировано в промежутке $0<\xi<(n+\lambda)\pi$. Тогда $(n+\lambda)\theta_{\nu n}$ возрастает вместе с n при фиксированном ν [1]). Из этих рассмотрений снова получается оценка (6.3.13), если только считать известным соотношение (6.3.15). Действительно,

$$(n+\lambda)\,\theta_{\nu n} < \lim_{n\to\infty} (n+\lambda)\,\theta_{\nu n} = j_\nu.$$

В качестве другого приложения можно получить новое доказательство неравенства (6.3.8), так как

$$(n+\lambda)\,\theta_{\nu n} \geqslant (2\nu - 1 + \lambda)\,\theta_{\nu,\,2\nu-1} = (2\nu - 1 + \lambda)\frac{\pi}{2} \tag{6.3.18}$$

при $n \geqslant 2\nu - 1$ (см. задачу 32).

6.31. Метод Штурма; многочлены Лагерра и Эрмита

Пусть $\alpha > -1$.

(1) Теорема 6.31.1. *Пусть $x_\nu = x_{\nu n}(\alpha)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, будут нулями многочлена $L_n^{(\alpha)}(x)$, занумерованными в возрастающем порядке. Тогда справедливы неравенства*

$$x_\nu > \frac{\left(\frac{j_\nu}{2}\right)^2}{n + \frac{\alpha+1}{2}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.31.1}$$

где j_ν имеют тот же смысл, что в теореме 6.3.4.

Утверждение следует непосредственно из сравнения третьего уравнения в (5.1.2) с уравнением

$$U'' + \left(\frac{n + \frac{\alpha+1}{2}}{x} + \frac{1-\alpha^2}{4x^2}\right) U = 0, \tag{6.31.2}$$

решением которого является

$$U = x^{\frac{1}{2}} J_\alpha \left\{ 2x^{\frac{1}{2}} \left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \tag{6.31.3}$$

(см. (1.8.10)). Условие (1.82.2), $x'=0$, в этом случае выполняется.

---

[1]) По теореме 3.3.2 о разделении нулей $\theta_{\nu n}$ убывает с возрастанием n при фиксированном ν.

Легко может быть получена также верхняя граница аналогичного характера для x_ν. Пусть ω — положительная постоянная такая, что $\omega<4n+2(\alpha+1)$. Сравним то же уравнение (5.1.2) с уравнением

$$v''+\left\{\frac{n+\dfrac{\alpha+1}{2}-\dfrac{\omega}{4}}{x}+\frac{1-\alpha^2}{4x^2}\right\}v=0 \tag{6.31.4}$$

при $0<x\leqslant\omega$. Тогда получим, что

$$x_\nu<\frac{\left(\dfrac{j_\nu}{2}\right)^2}{n+\dfrac{\alpha+1}{2}-\dfrac{\omega}{4}}, \tag{6.31.5}$$

если правая часть (6.31.5) не превосходит ω. (При фиксированном ν и достаточно большом n это всегда имеет место.) Постоянная $\left(\frac{j_\nu}{2}\right)^2$ является наилучшей в неравенствах (6.31.1) и (6.31.5) в смысле, разъясненном в § 6.3, (4). При фиксированном ν для нуля $x_\nu=x_{\nu n}$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n x_{\nu n}=\left(\frac{j_\nu}{2}\right)^2. \tag{6.31.6}$$

Тот же результат может быть получен сравнением (1.8.9) с четвертым уравнением (5.1.2). Условие (1.82.2) при $x'=0$ опять будет выполнено.

(2) Оба упомянутых уравнения (5.1.2) дают верхние границы для нулей, если мы применим теорему 1.82.3 и примем во внимание, что соответствующее решение обращается в нуль в точке $x=+\infty$. Граница, получающаяся из четвертого уравнения (5.1.2), несколько лучше, а именно, она дается следующей теоремой:

Теорема 6.31.2. *Наибольший из нулей многочлена $L_n^{(\alpha)}(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$x_n<2n+\alpha+1+\left\{(2n+\alpha+1)^2+\frac{1}{4}-\alpha^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cong 4n. \tag{6.31.7}$$

(3) Подставляя $x=\left\{n+\frac{\alpha+1}{2}\right\}^{-1}\xi$ в третье уравнение (5.1.2), мы получаем

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\left\{\frac{1}{\xi}+\frac{1-\alpha^2}{4\xi^2}-\frac{1}{4}\left(n+\frac{\alpha+1}{2}\right)^{-2}\right\}u=0. \tag{6.31.8}$$

Так как коэффициент при u возрастает вместе с n, то из этого следует, что при фиксированном ν выражение

$$\left\{n+\frac{\alpha+1}{2}\right\}x_\nu=\left\{n+\frac{\alpha+1}{2}\right\}x_{\nu n} \tag{6.31.9}$$

убывает при возрастании n. Пределом его при $n\to\infty$ является $\left(\frac{j_\nu}{2}\right)^2$ (в соответствии с (6.31.6)). Интересным следствием из этого свойства убывания является неравенство

$$\left\{n+\frac{\alpha+1}{2}\right\}x_{\nu n}\leqslant\left\{\nu+\frac{\alpha+1}{2}\right\}x_{\nu\nu},\quad n=\nu,\ \nu+1,\ \ldots \tag{6.31.10}$$

Применяя (6.31.7) и учитывая (6.31.1), получаем следующий результат:

Теорема 6.31.3. *Пусть* $\alpha > -1$; *для нулей* $x_{\nu n}$ *многочлена* $L_n^{(\alpha)}(x)$, *занумерованных в возрастающем порядке, справедливы следующие оценки*:

$$\frac{\left(\frac{j_\nu}{2}\right)^2}{n+\frac{\alpha+1}{2}} < x_{\nu n} < \left\{\nu+\frac{\alpha+1}{2}\right\} \frac{2\nu+\alpha+1+\left\{(2\nu+\alpha+1)^2+\frac{1}{4}-\alpha^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{n+\frac{\alpha+1}{2}},$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6.31.11}$$

В частности, для наименьшего нуля x_{1n} *мы имеем*

$$\frac{\left(\frac{j_1}{2}\right)^2}{n+\frac{\alpha+1}{2}} < x_{1n} \leqslant \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)}{2n+\alpha+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6.31.12}$$

где j_ν *имеют тот же смысл, что в теореме* 6.3.4.

Если ν велико, то $\left(\frac{j_\nu}{2}\right)^2 \cong \frac{\pi^2\nu^2}{4}$ (см. (1.71.7)), в то время как коэффициент в правой части (6.31.11) $\cong 4\nu^2$. При $\nu = 1$ мы не применяем (6.31.7), так как x_{11} может быть записан явно. Действительно, $x_{11} = \alpha + 1$, откуда и следует (6.31.12).

Нейман ([2], стр. 26) при $\alpha = 0$ получил иным способом неравенство, подобное (6.31.11). В этом случае он нашел, что

$$x_{\nu n} = C_{\nu n} \frac{(\nu+1)^2}{n+1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6.31.13}$$

где $\frac{1}{4} < C_{\nu n} < 4$. Благодаря известной оценке $j_\nu > \left(\nu - \frac{1}{4}\right)\pi$ (см. (8.1.4) и задачу 32) мы можем из (6.31.11) получить неравенства

$$\left(\frac{3\pi}{16}\right)^2 < C_{\nu n} < 4. \tag{6.31.14}$$

(Верхняя граница 4 не может быть снижена; см. (8.9.15), а также задачу 33.) Хан ([1], стр. 228—238) обобщил и распространил метод Неймана для произвольных вещественных значений α.

Часть приведенных выше результатов точнее, чем отмечавшиеся ранее в литературе (см. Хан [2], стр. 228—230).

(4) Соответствующие рассуждения для многочленов Эрмита весьма просты. Второе из уравнений (5.5.2) дает для нулей верхнюю границу $(2n+1)^{\frac{1}{2}}$. Это не такой точный результат, как (6.2.18). Кроме того, при $n \geqslant 2$ мы доказываем выпуклость последовательности нулей

$$x_{0n} < x_{1n} < x_{2n} < \ldots \tag{6.31.15}$$

многочлена Эрмита $H_n(x)$, где $x_{0n} = 0$ при нечетных n и $x_{0n} = -x_{1n}$, если n четно. Во всех случаях $x_{1n}, x_{2n}, \ldots$ означает последовательность положительных нулей, занумерованных в порядке возрастания (см. Хан [1], стр. 244).

Сравнивая то же самое уравнение с уравнением $Z''+(2n+1)Z=0$, мы находим [1])

$$x_{\nu n} > \begin{cases} \dfrac{\nu-\frac{1}{2}}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}\pi, \\ \dfrac{\nu}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}\pi, \quad \nu=1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]. \end{cases} \tag{6.31.16}$$

(Это следует из (6.31.1) при $\alpha=\pm\frac{1}{2}$.) Пусть, далее, ω — фиксированное положительное число такое, что $\omega<(2n+1)^{\frac{1}{2}}$. Тогда

$$x_{\nu n} < \begin{cases} \dfrac{\nu-\frac{1}{2}}{(2n+1-\omega^2)^{\frac{1}{2}}}\pi, \\ \dfrac{\nu}{(2n+1-\omega^2)^{\frac{1}{2}}}\pi, \quad \nu=1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right], \end{cases} \tag{6.31.17}$$

если только правая часть не превосходит ω. При фиксированном ν константы $\left(\nu-\frac{1}{2}\right)$ и $\nu\pi$ являются наилучшими.

Если мы сделаем подстановку $x=(2n+1)^{-\frac{1}{2}}\xi$, то второе из дифференциальных уравнений (5.5.2) преобразуется в уравнение

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2z}{d\xi^2}+\{1-(2n+1)^{-2}\xi^2\}z=0, \\ &z=\exp\left\{-(2n+1)^{-1}\frac{\xi^2}{2}\right\}H_n\{(2n+1)^{-\frac{1}{2}}\xi\}. \end{aligned}\right\} \tag{6.31.18}$$

Коэффициент при z возрастает вместе с n; поэтому (при фиксированном ν) $(2n+1)^{\frac{1}{2}}x_{\nu n}$ убывает при возрастании n. Следовательно, мы имеем (см. (3)) соответственно неравенства $(2n+1)^{\frac{1}{2}}x_{\nu n}\leqslant(4\nu+1)^{\frac{1}{2}}x_{\nu,2\nu}$ или $(4\nu+3)^{\frac{1}{2}}x_{\nu,2\nu+1}$. Таким образом, справедливы следующие неравенства:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\nu-\frac{1}{2}}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}\pi \\ \dfrac{\nu}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}\pi \end{matrix}\right\} < x_{\nu n} < \begin{cases} \dfrac{4\nu+1}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}, \\ \dfrac{4\nu+3}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}, \quad \nu=1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]. \end{cases} \tag{6.31.19}$$

[1]) Здесь и в последующих формулах верхняя строка соответствует случаю n четного, а нижняя строка — случаю n нечетного.

Для наименьшего положительного нуля x_{1n} мы получаем $\left(x_{12}=2^{-\frac{1}{2}},\ x_{13}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}\\ \dfrac{\pi}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}\end{matrix}\right\} < x_{1n} \leqslant \left\{\begin{matrix}\left(\dfrac{\frac{5}{2}}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}},\\ \left(\dfrac{\frac{21}{2}}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \geqslant 2.\end{matrix}\right. \tag{6.31.20}$$

Здесь верхние границы точнее, чем та, которая получается из (6.31.19) при $\nu=1$. Из (6.31.20) мы можем вывести границу для минимального расстояния между последовательными нулями. Из указанного выше свойства выпуклости легко вытекает, что $d_n = x_{1n} - x_{0n}$, т. е. $d_n = 2x_{1n}$ при n четном и $d_n = x_{1n}$ при n нечетном. Следовательно,

$$\frac{\pi}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}} < d_n \leqslant \left\{\begin{matrix}\dfrac{10^{\frac{1}{2}}}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}},\\ \dfrac{\left(\frac{21}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}, \quad n \geqslant 2.\end{matrix}\right. \tag{6.31.21}$$

Во всех случаях имеем

$$\frac{\pi}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}} < d_n \leqslant \frac{\left(\frac{21}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}. \tag{6.31.22}$$

Из большого числа работ по рассматриваемому вопросу мы отмечаем следующие: Лагерр [2], стр. 105; Кораус [1]; Виман [1]; А. Брауэр [1]; Хилле [4]; Уинстон [1]. Хилле получает те же нижние границы, что в (6.31.20), и (надлежащим образом выбрав число ω в (6.31.17)) следующие верхние границы:

$$x_{1n} < \left\{\begin{matrix}\dfrac{\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\frac{1}{2}},\\ \dfrac{\pi}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\frac{1}{2}}.\end{matrix}\right. \tag{6.31.23}$$

При $n>6$ эти границы точнее, чем (6.31.20). Результаты других авторов менее точны, чем указанные выше [1]).

6.32. Метод Штурма; наибольшие нули многочленов Лагерра и Эрмита

(1) Пусть $\alpha > -1$; перенумеруем нули $x_\nu = x_{\nu n}$ многочленов $L_n^{(\alpha)}(x)$ и $H_n(x)$ в *убывающем* порядке

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots \tag{6.32.1}$$

[1]) Исключением являются нижние границы в (6.31.20) для частных случаев $n=2$ и $n=3$, в которых выражения Вимана являются точными. При $n=3$ верхняя граница, данная Виманом, совпадает с (6.31.20).

Нашей задачей будет установить оценки и асимптотические соотношения для $x_{1\iota}$, а также для $x_{\nu n}$ при фиксированном ν и $n \to \infty$.

Теорема 6.32. *Пусть $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ — вещественные нули функции Эйри $A(x)$ (§ 1.81, $i_1 > 0$). Если $|\alpha| \geq \frac{1}{4}$, $\alpha > -1$, то справедливы следующие неравенства для нулей $\{x_\nu\}$ многочлена $L_n^{(\alpha)}(x)$:*

$$x_\nu^{\frac{1}{2}} < (4n+2\alpha+2)^{\frac{1}{2}} - 6^{-\frac{1}{3}}(4n+2\alpha+2)^{-\frac{1}{6}} i_\nu; \tag{6.32.2}$$

для нулей $\{x_\nu\}$ многочлена $H_n(x)$ имеют место неравенства

$$x_\nu < (2n+1)^{\frac{1}{2}} - 6^{-\frac{1}{3}}(2n+1)^{-\frac{1}{6}} i_\nu. \tag{6.32.3}$$

Кроме того, при фиксированном ν соответственно для нулей многочленов $L_n^{(\alpha)}(x)$ и $H_n(x)$ справедливы равенства

$$x_\nu^{\frac{1}{2}} = (4n+2\alpha+2)^{\frac{1}{2}} - 6^{-\frac{1}{3}}(4n+2\alpha+2)^{-\frac{1}{6}}(i_\nu + \varepsilon_n), \tag{6.32.4}$$

$$x_\nu = (2n+1)^{\frac{1}{2}} - 6^{-\frac{1}{3}}(2n+1)^{-\frac{1}{6}}(i_\nu + \varepsilon_n), \tag{6.32.5}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Этому замечательному результату посвящена обширная литература (см. Цернике [1]; Хан [1], стр. 227; см. также Кораус [1]; Боттема [1]; Ван Вин [1]; Спенсер [1]). Мы применим для доказательства (6.32.3) метод Штурма. Аналогичное рассуждение можно использовать для установления (6.32.2) (см. четвертое из уравнений (5.1.2)). Формулы (6.32.5) и (6.32.4) следуют из некоторого асимптотического выражения для многочленов Эрмита, принадлежащего順 Планшерелю и Ротаху, и соответствующего асимптотического выражения для многочленов Лагерра; (6.32.4) выполняется при любом вещественном α. Мы рассмотрим эти формулы в главе VIII (§ 8.9, (3)). Они показывают, что постоянные i_ν в (6.32.2) и (6.32.3) являются наилучшими при фиксированном ν и произвольном n.

Отметим, что выражения

$$\left.\begin{aligned} &\{(4n+2\alpha+2)^{\frac{1}{2}} - 6^{-\frac{1}{3}}(4n+2\alpha+2)^{-\frac{1}{6}} i_1\}^2, \\ &(2n+1)^{\frac{1}{2}} - 6^{-\frac{1}{3}}(2n+1)^{-\frac{1}{6}} i_1 \end{aligned}\right\} \tag{6.32.6}$$

являются соответственно верхними границами для нулей многочленов $L_n^{(\alpha)}(x)$ и $H_n(x)$, причем $|\alpha| \geq \frac{1}{4}$, $\alpha > -1$. Здесь постоянная

$$6^{-\frac{1}{3}} i_1 = 1{,}85575\ldots \tag{6.32.7}$$

не может быть заменена меньшим числом. Это более точные оценки, чем была указана выше.

Равенства (6.32.4) и (6.32.5) могут быть соответственно записаны в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} x_\nu^{\frac{1}{2}} &= (4n)^{\frac{1}{2}} - 6^{-\frac{1}{3}} i_\nu (4n)^{-\frac{1}{6}} + o(n^{-\frac{1}{6}}), \\ x_\nu &= (2n)^{\frac{1}{2}} - 6^{-\frac{1}{3}} i_\nu (2n)^{-\frac{1}{6}} + o(n^{-\frac{1}{6}}), \quad n \to \infty. \end{aligned}\right| \tag{6.32.8}$$

Первое из них может быть представлено также в виде

$$x_\nu = 4n - 2\cdot 6^{-\frac{1}{3}} i_\nu (4n)^{\frac{1}{3}} + o(n^{\frac{1}{3}}). \tag{6.32.9}$$

(2) Полагая $h_n = (2n+1)^{\frac{1}{2}}$ и подставляя $x = h_n - \xi$ во второе из уравнений (5.5.2), мы получаем уравнение

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} + (2h_n\xi - \xi^2) z = 0. \tag{6.32.10}$$

Затем мы сравниваем это уравнение с уравнением

$$\frac{d^2Z}{d\xi^2} + 2h_n\xi Z = 0, \tag{6.32.11}$$

которое имеет решением $Z = A\{(6h_n)^{\frac{1}{3}}\xi\}$, где $A(x)$ — функция Эйри, определенная в § 1.81. Мы можем теперь применить теорему 1.82.1 на всей прямой $(-\infty, +\infty)$; условие (1.82.2) удовлетворено при $\xi = -\infty$ (см. последнее замечание в § 1.81). Таким образом, мы имеем неравенство $(6h_n)^{-\frac{1}{3}} i_\nu < h_n - x_\nu$, что и доказывает (6.32.3).

(3) Наметим здесь схему прямого доказательства (6.32.5), основанного на методе Штурма. Пусть вещественная переменная ξ будет подчинена условию $|\xi| \leqslant 2h_n\varepsilon_n$, где $0 < \varepsilon_n < 1$; выбором ε_n распорядимся далее. Мы имеем

$$2h_n\xi - \xi^2 \geqslant \begin{cases} 2h_n\xi(1-\varepsilon_n) & \text{при } \xi \geqslant 0, \\ 2h_n\xi(1+\varepsilon_n) & \text{при } \xi \leqslant 0. \end{cases} \tag{6.32.12}$$

Сравним (6.32.10) с уравнением

$$\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + 2h_n\xi(1 \pm \varepsilon_n)\zeta = 0, \tag{6.32.13}$$

где знак «+» соответствует случаю $\xi \leqslant 0$, а знак «−» случаю $\xi \geqslant 0$. Используя обозначение (1.81.1), мы рассмотрим при $-2h_n\varepsilon_n \leqslant \xi \leqslant 0$ решение

$$l\{(6h_n)^{\frac{1}{3}}(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}}\xi\} - k\{(6h_n)^{\frac{1}{3}}(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}}\xi\}\frac{l(-X_n)}{k(-X_n)}, \tag{6.32.14}$$

где

$$X_n = (6h_n)^{\frac{1}{3}}(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}} 2h_n\varepsilon_n. \tag{6.32.15}$$

Это решение обращается в нуль при $\xi = -2h_n\varepsilon_n$. С другой стороны, при $0 \leqslant \xi \leqslant 2h_n\varepsilon_n$ мы рассмотрим решение

$$\left(\frac{1+\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{3}} l\{(6h_n)^{\frac{1}{3}}(1-\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}}\xi\} - k\{(6h_n)^{\frac{1}{3}}(1-\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}}\xi\}\frac{l(-X_n)}{k(-X_n)}. \tag{6.32.16}$$

При $\xi = 0$ в силу (1.81.1) оно имеет то же значение и ту же производную, что и (6.32.14). В соответствии с теоремой Штурма $H_n(h_n - \xi)$ осциллирует на отрезке $-2h_n\varepsilon_n \leqslant \xi \leqslant +2h_n\varepsilon_n$ быстрее, чем функция $\zeta = \zeta(\xi)$, которая определяется посредством (6.32.14) и (6.32.16).

Единственным отрицательным нулем функции $\zeta(\xi)$ является $\xi = -2h_n\varepsilon_n$. Вычислим теперь положительный нуль функции (6.32.16), т. е. такое значение ξ, при котором выполняется равенство

$$\frac{l\{(6h_n)^{\frac{1}{3}}(1-\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}}\xi\}}{k\{(6h_n)^{\frac{1}{3}}(1-\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}}\xi\}} = \left(\frac{1-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{l(-X_n)}{k(-X_n)}. \tag{6.32.17}$$

Если ε_n достаточно мало, а X_n достаточно велико, то правая часть близка к -1, а рассматриваемый ν-й нуль при фиксированном ν близок к $(6h_n)^{-\frac{1}{3}}(1-\varepsilon_n)^{-\frac{1}{3}}i_\nu$. Если X_n велико и положительно, то из (1.81.3) и (1.81.5) мы получаем

$$\frac{l(-X_n)}{k(-X_n)}+1=\frac{A(-X_n)}{k(-X_n)}\cong 3^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-4\left(\frac{X_n}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}. \tag{6.32.18}$$

Пусть теперь ν_0 — фиксированное положительное целое число, а ε — произвольное положительное число. Выберем

$$\varepsilon_n=h_n^{-\frac{4}{3}}\omega,\quad X_n=2\cdot 6^{\frac{1}{3}}(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{3}}\omega>2\cdot 6^{\frac{1}{3}}\omega, \tag{6.32.19}$$

где ω — фиксированное положительное число, столь большое, что $2\cdot 6^{\frac{1}{3}}\omega>i_{\nu_0}+1$, а левая часть (6.32.18) меньше, чем ε. При достаточно малом ε и $n\to\infty$ первые ν_0 нулей выражения (6.32.17) будут иметь вид

$$(6h_n)^{-\frac{1}{3}}(1-\varepsilon_n)^{-\frac{1}{3}}(i_\nu+\delta),\quad \nu=1,\,2,\,\ldots,\,\nu_0, \tag{6.32.20}$$

где $|\delta|$ произвольно мал одновременно с ε. (Во всяком случае, предполагается, что $|\delta|<1$.) Мы видим, что при достаточно большом n выражение (6.32.20) будет меньше, чем $2h_n\varepsilon_n$. Поэтому, если мы применим теорему Штурма на отрезке $-2h_n\varepsilon_n\leqslant\xi\leqslant+2h_n\varepsilon_n$, то будем иметь

$$h_n-x_\nu<(6h_n)^{-\frac{1}{3}}(1-\varepsilon_n)^{-\frac{1}{3}}(i_\nu+\delta). \tag{6.32.21}$$

Последнее соотношение в соединении с (6.32.3) дает требуемое утверждение (6.32.5).

6.4. Теорема Полиа и Сегё о тригонометрических многочленах с монотонными коэффициентами

Теорема 6.4. *Пусть $a_0>a_1>\ldots>a_m>0$. Тогда функции*

$$\left.\begin{aligned} f(t)&=a_0\cos mt+a_1\cos(m-1)t+\ldots+a_{m-1}\cos t+a_m,\\ g(t)&=a_0\cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)t+a_1\cos\left(m-\tfrac{1}{2}\right)t+\ldots\\ &\qquad\ldots+a_{m-1}\cos\frac{3t}{2}+a_m\cos\frac{t}{2}\end{aligned}\right\} \tag{6.4.1}$$

имеют только вещественные и простые нули, причем точно по одному нулю соответственно в каждом из промежутков:

$$\frac{\mu-\frac{1}{2}}{m+\frac{1}{2}}\pi<t<\frac{\mu+\frac{1}{2}}{m+\frac{1}{2}}\pi\quad и\quad \frac{\mu-\frac{1}{2}}{m+1}\pi<t<\frac{\mu+\frac{1}{2}}{m+1}\pi, \tag{6.4.2}$$

где соответственно $\mu=1,\,2,\,\ldots,\,2m$ *и* $\mu=1,\,2,\,\ldots,\,2m+1$.

Первая часть утверждения принадлежит Полиа [3], стр. 359; в своем доказательстве он использовал принцип аргумента (теорема 1.91.1). Следующее доказательство устанавливает не только результат Полиа, но и неравенства (6.4.2) (см. Сегё [20], стр. 9—11). Оно основано на фундаментальной теореме Фейера (Фейер [1]; см. Полиа и Сегё [1], часть II, отдел VI, задача 17), которая состоит в том, что синус-полиномы

$$\sigma_n(t)=\sin\frac{t}{2}+\sin\frac{3t}{2}+\ldots+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t, \tag{6.4.3}$$
$$n=0,\,1,\,2,\,\ldots,\quad 0<t<2\pi,$$

неотрицательны.

Если $\tilde{f}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ означают соответственно функции, сопряженные с $f(t)$ и $g(t)$, то имеем

$$-\Im e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)t}\{f(t)+i\tilde{f}(t)\}=-\Im e^{-i(m+1)t}\{g(t)+i\tilde{g}(t)\}=$$
$$=\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu \sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)t. \tag{6.4.4}$$

Это выражение при $0<t<2\pi$ положительно, в чем можно убедиться с помощью преобразования Абеля (1.11.4). Следовательно, выполняются неравенства

$$\left.\begin{aligned} &f(t)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t-\tilde{f}(t)\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)t>0,\\ &g(t)\sin(m+1)t-\tilde{g}(t)\cos(m+1)t>0, \quad 0<t<2\pi.\end{aligned}\right\} \tag{6.4.5}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{sign} f\left(\frac{\mu-\frac{1}{2}}{m+\frac{1}{2}}\pi\right)=\operatorname{sign} g\left(\frac{\mu-\frac{1}{2}}{m+1}\pi\right)=(-1)^{\mu+1}. \tag{6.4.6}$$

Это показывает, что в промежутках (6.4.2) лежит по крайней мере по одному нулю. С другой стороны, функции (6.4.1) не могут иметь более чем $2m$ и соответственно $2m+1$ нулей в $[0,\ 2\pi]$.

6.5. Обобщение многочленов Лежандра, данное Фейером

(1) Исходя из представления (4.9.3) многочленов Лежандра, Ф е й е р [9] ввел «многочлены Лежандра $F_n(x)$, соответствующие данной последовательности $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots$» следующим образом:

$$F_n(\cos\theta)=2\alpha_0\alpha_n\cos n\theta+2\alpha_1\alpha_{n-1}\cos(n-2)\theta+\ldots$$
$$\ldots+\begin{cases} 2\alpha_{\frac{n-1}{2}}\alpha_{\frac{n+1}{2}}\cos\theta & \text{при } n \text{ нечетном},\\ \alpha^2_{\frac{n}{2}} & \text{при } n \text{ четном}.\end{cases} \tag{6.5.1}$$

Классические многочлены Лежандра $P_n(x)$ получаются при

$$\alpha_0=g_0=1, \quad \alpha_n=g_n=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{6.5.2}$$

а ультрасферические многочлены $P_n^{(\lambda)}(x)$ (§ 4.9, (4)) при

$$\alpha_0=1, \quad \alpha_n=\binom{n+\lambda-1}{n}, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{6.5.3}$$

Многие свойства, которыми обладают многочлены в этих частных случаях, могут быть распространены на общие многочлены $F_n(x)$, если подчинить последовательность $\{\alpha_n\}$ надлежащим ограничениям относительно монотонности и асимптотического поведения.

(2) Т е о р е м а 6.5.1. *Нули $F_n(x)$ являются вещественными и простыми и лежат в промежутке $-1<x<1$, если только $\alpha_n>0$ и последовательность*

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0},\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1},\ \ldots,\ \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}},\ \ldots \tag{6.5.4}$$

монотонно возрастает. Точнее, каждый промежуток

$$\frac{\nu-\frac{1}{2}}{n+1}\pi<\theta<\frac{\nu+\frac{1}{2}}{n+1}\pi,\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{6.5.5}$$

содержит ровно один нуль многочлена $F_n(\cos\theta)$.

См. Сегё [20], стр. 15—17. При указанных условиях коэффициенты в (6.5.1) образуют убывающую последовательность, и утверждение вытекает непосредственно из теоремы 6.4, если мы положим $n=2m$ или $n=2m+1$ (в зависимости от четности или нечетности n) и $2\theta=t$. Рассматриваемые условия выполнены для многочленов Лежандра и для ультрасферических многочленов $P_n^{(\lambda)}(x)$ при $0<\lambda<1$.

Неравенства (6.5.5) не столь точны, как неравенства Брунса (6.21.5), но зато они справедливы для сравнительно широкого класса многочленов.

(3) Теорема 6.5.2. *Пусть последовательность* $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n>0$, *будет абсолютно монотонной, т. е. все конечные разности* [1]

$$\Delta^k\alpha_n=\alpha_n-\binom{k}{1}\alpha_{n+1}+\binom{k}{2}\alpha_{n+2}-\ldots+(-1)^k\alpha_{n+k}\geqslant 0,$$
$$k,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.5.6}$$

Тогда нули $x_\nu=\cos\theta_\nu$, $0<\theta_\nu<\pi$, *многочлена* $F_n(x)$ *не только вещественны и лежат в промежутке* $(-1,\ +1)$, *но они также удовлетворяют неравенствам* (6.21.7) *Стилтьеса*

$$\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\leqslant\theta_\nu\leqslant\nu\frac{\pi}{n+1},\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{6.5.7}$$

Здесь знаки равенства имеют место тогда и только тогда, когда $F_n(x)$ *является соответственно многочленом Чебышева первого или второго рода.*

См. Фейер [17], стр. 311—312. В соответствии с важной теоремой Хаусдорфа [1] класс абсолютно монотонных последовательностей $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n>0$, тождествен классу последовательностей, которые могут быть представлены в виде

$$\alpha_n=\int_0^1 t^n\,d\alpha(t),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{6.5.8}$$

где $\alpha(t)$ — неубывающая функция, отличная от постоянной и такая, что $2\alpha(t)=\alpha(t+0)+\alpha(t-0)$ при $0<t<1$. Для последовательностей этого рода выполнены условия теоремы 6.5.1 (на основании неравенства Буняковского—Шварца). Ультрасферические многочлены $P_n^{(\lambda)}(x)$, $0<\lambda<1$, получаются (см. (1.7.2)) при

$$\alpha_n=\binom{n+\lambda-1}{n}=\pi^{-1}\sin\lambda\pi\int_0^1 t^{n+\lambda-1}(1-t)^{-\lambda}\,dt,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.5.9}$$

Многочлены Чебышева первого рода являются предельным случаем (6.5.9), так как

$$\alpha_0=1,\quad \lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}\alpha_n=\int_0^1 t^{n-1}\,dt=\frac{1}{n},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{6.5.10}$$

следовательно,

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}F_n(\cos\theta)=\frac{2}{n}\cos n\theta,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{6.5.11}$$

---

[1]) Это определение конечных разностей отличается от данного в (2.8.4).

Многочлены Чебышева второго рода получаются при $\alpha_n = r^n$, $0 < r \leqslant 1$, т. е. $\alpha(t)$ имеет только одну точку роста в интервале $0 < t \leqslant 1$.

Идея Фейера состоит в следующем:

$$F_n(\cos\theta) = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \sum_{k=0}^{n}{}' t^k u^{n-k} \cos(n-2k)\theta \right\} d\alpha(t)\, d\alpha(u). \qquad (6.5.12)$$

Элементарное преобразование подынтегральной функции дает:

$$\frac{(t-u)(t^{n+1}-u^{n+1})}{t^2-2tu\cos 2\theta+u^2}\cos n\theta + \frac{2tu(t^n+u^n)\sin^2\theta}{t^2-2tu\cos 2\theta+u^2}\cdot\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \qquad (6.5.13)$$

так что

$$F_n(\cos\theta) = A_n(\theta)\cos n\theta + B_n(\theta)\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \qquad (6.5.14)$$

где $A_n(\theta)$ и $B_n(\theta)$ — положительные функции в промежутке $0 < \theta < \pi$, если только $\alpha(t)$ имеет по меньшей мере две точки роста. Отсюда следует, что

$$\operatorname{sign} F_n\left\{\cos\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right\} = -\operatorname{sign} F_n\left\{\cos\nu\frac{\pi}{n+1}\right\} = (-1)^{\nu+1},$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right], \qquad (6.5.15)$$

что и доказывает утверждение.

Последняя часть этого рассуждения аналогична рассуждению, примененному при доказательстве теоремы 6.4.

(4) Ф е й е р ([20], стр. 40—45) рассмотрел также другое замечательное обобщение многочленов Лежандра, исходя из представления (4.9.5). Пусть $\beta_m \downarrow 0$ и пусть

$$G_n(\cos\theta) = \beta_0\sin(n+1)\theta + \beta_1\sin(n+3)\theta + \ldots$$
$$\ldots + \beta_m\sin(n+2m+1)\theta + \ldots \qquad (6.5.16)$$

Этот ряд сходится при $0 < \theta < \pi$ (см. § 4.9, (2)). Многочлены Лежандра являются частным случаем, так же как и более общие функции $(\sin\theta)^{2\lambda-1}P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1, 2, 3, \ldots$ (см. (4.9.22)). В этих случаях последовательность $\beta_m = f_m^{(\lambda)}$ (используя обозначение (4.9.22)) абсолютно монотонна. Действительно, мы имеем

$$f_m^{(\lambda)} - f_{m+1}^{(\lambda)} = f_m^{(\lambda)}\left\{\frac{n\lambda}{n+\lambda}\,\frac{1}{m+1} + \frac{\lambda(n+2\lambda)}{n+\lambda}\,\frac{1}{n+\lambda+m+1}\right\} = f_m^{(\lambda)}\gamma_m. \qquad (6.5.17)$$

Последовательность γ^m абсолютно монотонна, и в соответствии с известной формулой мы имеем

$$\Delta^{k+1}f_m^{(\lambda)} = \Delta^k\{f_m^{(\lambda)} - f_{m+1}^{(\lambda)}\} = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\Delta^\nu f_m^{(\lambda)}\Delta^{k-\nu}\gamma_{m+\nu}. \qquad (6.5.18)$$

Отсюда утверждение вытекает по индукции [1]).

Фейер доказал (цитированное место), что $G_n(\cos\theta)$ имеет по крайней мере один нуль в каждом промежутке

$$\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} < \theta < \nu\frac{\pi}{n+1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right], \qquad (6.5.19)$$

---

[1]) При $\lambda = \frac{1}{2}$ это следует непосредственно из (4.9.9).

в предположении, что

$$\beta_m \geqslant 0,\ \Delta\beta_m \geqslant 0,\ \Delta^2\beta_m \geqslant 0,\ \Delta^3\beta_m \geqslant 0, \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.5.20}$$

Его доказательство основано на положительности некоторых специальных тригонометрических полиномов. Мы докажем следующую теорему:

Теорема 6.5.3. *Функция $G_n(\cos\theta)$ имеет по крайней мере один нуль в каждом из промежутков* (6.5.19), *если только последовательность $\{\beta_m\}$ является абсолютно монотонной.*

Это условие более ограничительно, чем условие Фейера, но зато доказательство становится весьма простым. Используя (6.5.8), где вводим соответственно β_n и $\beta(t)$ вместо α_n и $\alpha(t)$, мы получаем

$$G_n(\cos\theta) = \int_0^1 \left\{\sum_{m=0}^{\infty} t^m \sin(n+2m+1)\theta\right\} d\beta(t) =$$

$$= \int_0^1 \frac{2t\, d\beta(t)}{1-2t\cos 2\theta + t^2} \sin\theta\cos n\theta + \int_0^1 \frac{(1-t)\, d\beta(t)}{1-2t\cos 2\theta + t^2} \sin(n+1)\theta. \tag{6.5.21}$$

Начиная с этого места, доказательство ведется так же, как доказательство теоремы 6.5.2.

6.6. Резюме; дополнительные замечания об ультрасферических многочленах

(1) Мы получили следующие неравенства для нулей $x_\nu = \cos\theta_\nu$, $0 < \theta_\nu < \pi$, (расположенных в убывающем порядке) ультрасферических многочленов $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$, $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$ при $0 < \lambda < 1$:

(a) Неравенства (6.5.5), выведенные из представления $P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta)$ в виде косинус-многочлена:

$$\frac{\nu - \frac{1}{2}}{n+1}\pi < \theta_\nu < \frac{\nu + \frac{1}{2}}{n+1}\pi, \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{6.6.1}$$

(b) Неравенства типа Брунса:

$$\frac{\nu - \frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi < \theta_\nu < \frac{\nu}{n+\frac{1}{2}}\pi, \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{6.6.2}$$

$$\frac{\nu+\lambda-1}{n+\lambda}\pi < \theta_\nu < \frac{\nu}{n+\lambda}\pi, \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{6.6.3}$$

Неравенства (6.6.2) следуют из неравенств (6.21.2), которые были доказаны А. А. Марковым и Стилтьесом двумя различными путями (см. (6.21.5)); (6.6.3) являются частным случаем более общих неравенств (6.3.7), доказанных методом Штурма. Неравенства (6.6.2) являются более точными, чем (6.6.1) и (6.6.3) при $\lambda < \frac{1}{2}$; при $\lambda > \frac{1}{2}$ справедливо противоположное утверждение.

(c) Неравенства типа Стилтьеса:

$$\frac{\nu - \frac{1}{2}}{n}\pi < \theta_\nu < \frac{\nu}{n+1}\pi, \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{6.6.4}$$

Они вытекают из (6.21.3) и были доказаны Стилтьесом. Они также могут быть легко выведены из неравенств (6.21.2), которые принадлежат А. А. Маркову и Стилтьесу. Фейер получает их из (4.9.19) или (4.9.22) (см. теоремы 6.5.2 и 6.5.3). Сегё установил верхнюю границу методом Штурма (см. § 6.3, (3)). Верхняя граница здесь точнее, чем в предыдущих неравенствах; нижняя граница лучше, чем в (6.6.2), и при $\lambda < \frac{1}{2}$ лучше, чем в (6.6.3).

(d) Нижняя граница, указанная Сегё:

$$\theta_\nu > \frac{\nu - \frac{1-\lambda}{2}}{n+\lambda}\pi, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{6.6.5}$$

Она получается методом Штурма двумя различными путями (см. 6.3, (2) и (5)). Относительно третьего метода см. ниже в (2). Эта нижняя граница точнее, чем каждая из предыдущих.

(2) (e) Комбинируя интегральное представление (4.82.3) с рассуждениями, проведенными при доказательстве теорем 6.4, 6.5.2, 6.5.3, Ф е й е р ([19], стр. 208) получил неравенства:

$$\frac{\nu - \frac{1-\lambda}{2}}{n+\lambda}\pi < \theta_\nu < \frac{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}{n+2\lambda}\pi, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{6.6.6}$$

Нижняя граница та же, что и в (6.6.5). Верхняя граница при $\lambda < \frac{1}{2}$ меньше, а при $\lambda > \frac{1}{2}$ больше, чем верхняя граница в (6.6.4).

Для доказательства мы подставляем границу (6.6.5) в (4.82.3), $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, и находим, что

$$\operatorname{sign} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = (-1)^\nu \operatorname{sign} \mathfrak{J}\left\{e^{i\lambda\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}(1-te^{2i\theta})^{-\lambda}\right\}. \tag{6.6.7}$$

Оказывается, что последний знак является постоянным при изменении t в промежутке $0 < t < 1$. Действительно, аргумент выражения, стоящего в скобках, лежит между 0 и $-\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$. Следовательно, (6.6.7) равно $(-1)^{\nu+1}$.

После подстановки верхней границы (6.6.6) в (4.82.3) мы получаем

$$\operatorname{sign} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = (-1)^\nu \operatorname{sign} \mathfrak{J}\{1-te^{2i\theta})^{-\lambda}\} = (-1)^\nu, \tag{6.6.8}$$

что и доказывает утверждение.

Итак, резюмируем: нижняя граница (6.6.5) является лучшей среди указанных здесь нижних границ; что же касается верхней границы, то либо (6.6.4), либо (6.6.6) будет соответственно более точной в зависимости от того, будет ли $\lambda > \frac{1}{2}$ или же $\lambda < \frac{1}{2}$. Мы не рассматривали здесь тех неравенств, которые содержат нули функций Бесселя.

6.7. Электростатическая интерпретация нулей классических многочленов

С т и л т ь е с ([4], [5], [6], стр. 75—76; см. также Ш у р [1]) сделал из дифференциальных уравнений классических многочленов весьма интересные выводы, которые тесно связаны с дискриминантами этих многочленов (см. § 6.71) и могут быть трактованы как задачи электростатического равновесия.

(1) Задача. *Пусть p и q — два данных положительных числа. Пусть n единичных масс ($n \geqslant 2$) распределены в переменных точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ промежутка $(-1, +1)$, а фиксированные массы p и q расположены соответственно в точках $+1$ и -1. При каком распределении точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выражение*

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T(x) = \prod_{k=1}^{n} (1-x_k)^p (1+x_k)^q \prod_{\substack{\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n \\ \nu < \mu}} |x_\nu - x_\mu| \tag{6.7.1}$$

достигает максимума?

Очевидно, $\ln T^{-1}$ может быть истолкован как энергия системы электростатических масс, только что определенных. Они создают отталкивающие силы по закону логарифмического потенциала. Распределение точек при максимуме соответствует электростатическому равновесию. Максимум существует, так как T непрерывная функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при $-1 \leqslant x_\nu \leqslant +1$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что в максимальном положении точки x_ν отличны от ± 1 и друг от друга. Кроме того, это распределение точек x_ν однозначно определено. Для того чтобы это показать, допустим (см. Поповичиу [2], стр. 74), что

$$\left.\begin{aligned} &+1 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n > -1, \\ &+1 > x_1' > x_2' > \ldots > x_n' > -1 \end{aligned}\right\} \tag{6.7.2}$$

суть две различные системы этого рода; положим

$$y_\nu = \frac{x_\nu + x_\nu'}{2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.7.3}$$

Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned} &|y_\nu - y_\mu| = \frac{|x_\nu - x_\mu| + |x_\nu' - x_\mu'|}{2} \geqslant |x_\nu - x_\mu|^{\frac{1}{2}} |x_\nu' - x_\mu'|^{\frac{1}{2}}, \\ &|1 \pm y_\nu| \geqslant |1 \pm x_\nu|^{\frac{1}{2}} |1 \pm x_\nu'|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.4}$$

следовательно, $T(y) \geqslant \{T(x)\}^{\frac{1}{2}} \{T(x')\}^{\frac{1}{2}}$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_\nu = x_\nu'$. Этим единственность доказана.

Теорема 6.7.1. *Пусть $p > 0$, $q > 0$ и пусть $\{x_\nu\}$, $-1 \leqslant x_\nu \leqslant 1$, будет системой значений, при которых выражение* (6.7.1) *достигает максимума. Тогда $\{x_\nu\}$ суть нули многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, где $\alpha = 2p - 1$, $\beta = 2q - 1$.*

Из этого факта снова вытекает единственность максимального распределения точек x_ν. Для того чтобы имел место максимум, должны выполняться условия $\dfrac{\partial T}{\partial x_\nu} = 0$ или

$$\frac{1}{x_\nu - x_1} + \ldots + \frac{1}{x_\nu - x_{\nu-1}} + \frac{1}{x_\nu - x_{\nu+1}} + \ldots + \frac{1}{x_\nu - x_n} + \frac{p}{x_\nu - 1} + \frac{q}{x_\nu + 1} = 0. \tag{6.7.5}$$

Если мы положим $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, то (6.7.5) примет вид

$$\frac{1}{2} \frac{f''(x_\nu)}{f'(x_\nu)} + \frac{p}{x_\nu - 1} + \frac{q}{x_\nu + 1} = 0 \tag{6.7.6}$$

или

$$(1 - x_\nu^2) f''(x_\nu) + \{2q - 2p - (2q + 2p) x_\nu\} f'(x_\nu) = 0.$$

Последнее равенство показывает, что многочлен

$$(1 - x^2) f''(x) + \{\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2) x\} f'(x)$$

степени n обращается в нуль в нулях многочлена $f(x)$; следовательно, это выражение равно const. $f(x)$. Сравнивая коэффициенты при x^n, мы найдем, что постоянный множитель равен $-n(n+\alpha+\beta+1)$. Полученное таким образом дифференциальное уравнение совпадает с (4.2.1), и по теореме 4.2.2 многочлен $f(x)$ равен const. $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

См. также задачу 37.

(2) Нули многочленов Лагерра и Эрмита допускают аналогичную интерпретацию.

Теорема 6.7.2. *Рассмотрим положительную массу p в фиксированной точке $x=0$ и единичные массы в переменных точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на полупрямой $[0, \infty)$ с центром тяжести, подчиненным условию*

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \leqslant K, \tag{6.7.7}$$

где K — данное положительное число. Максимум выражения

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} x_k^p \prod_{\substack{\nu, \mu=1, 2, \ldots, n \\ \nu<\mu}} |x_\nu - x_\mu| \tag{6.7.8}$$

достигается тогда и только тогда, когда $\{x_\nu\}$ есть последовательность нулей многочлена Лагерра $L_n^{(\alpha)}(cx)$, где $\alpha=p-1$, $c=K^{-1}(n+\alpha)$.

Теорема 6.7.3. *Рассмотрим единичные массы в каждой из переменных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, лежащих на вещественной оси $(-\infty, +\infty)$, причем момент инерции подчинен условию*

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n} \leqslant L, \tag{6.7.9}$$

где L — данное положительное число. Максимум выражения

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{\nu, \mu=1, 2, \ldots, n \\ \nu<\mu}} |x_\nu - x_\mu| \tag{6.7.10}$$

достигается тогда и только тогда, когда $\{x_\nu\}$ есть последовательность нулей многочлена Эрмита $H_n(c'x)$, где $c'=(2L)^{-\frac{1}{2}}(n-1)^{\frac{1}{2}}$.

Существование и единственность распределения точек максимума в обоих случаях очевидны. Соответствующие x_ν отличны друг от друга: в первом случае они положительны. Ясно далее, что для максимального распределения x_ν в (6.7.7) и (6.7.9) соответственно достигается знак равенства. Отсюда, если ϱ означает надлежаще выбранный постоянный множитель, то в первом случае будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{x_\nu-x_1}+\frac{1}{x_\nu-x_2}+\ldots+\frac{1}{x_\nu-x_n}+\frac{p}{x_\nu}=\frac{\varrho}{n}, \\ &x_\nu f''(x_\nu)+\left(2p-\frac{2\varrho}{n}x_\nu\right)f'(x_\nu)=0, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.11}$$

а во втором случае

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{x_\nu-x_1}+\frac{1}{x_\nu-x_2}+\ldots+\frac{1}{x_\nu-x_n}=\frac{2\varrho}{n}x_\nu, \\ &f''(x)-\frac{4\varrho}{n}x_\nu f'(x_\nu)=0. \end{aligned}\right\} \tag{6.7.12}$$

В обоих случаях мы полагаем $f(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_n)$. Если мы заменим x через cx, где c — надлежащим образом подобранная постоянная, то эти условия приводят соответственно к первому из уравнений (5.1.2) и к первому из уравнений (5.5.2).

Следовательно, в первом случае

$$f(x) = \text{const.}\, L_n^{(\alpha)}(cx), \quad \alpha = 2p-1, \quad c = \frac{2\varrho}{n},$$

а во втором случае

$$f(x) = \text{const.}\, H_n(c'x), \quad c' = \left(\frac{2\varrho}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Постоянные c и c' могут быть определены из условий (6.7.7) и (6.7.9), в которых при этом имеет место знак равенства. Заметим, что в соответствии с (5.1.6) сумма нулей $L_n^{(\alpha)}(x)$ равна $n(n+\alpha)$; в соответствии с (5.5.4) сумма квадратов нулей $H_n(x)$ равна $\frac{n(n-1)}{2}$.

См. также задачу 38.

6.71. Дискриминанты классических многочленов

Экстремальные проблемы, рассмотренные в предыдущем пункте, тесно связаны с вычислением дискриминантов классических многочленов (см. Гильберт [1], Стилтьес [4], [5]). Следующий метод принадлежит Шуру [2] (см. Поповичиу [2]).

(1) Пусть $\{\varrho_n(x)\}$ - последовательность многочленов, удовлетворяющих следующей рекуррентной формуле:

$$\varrho_n(x) = (a_n x + b_n)\varrho_{n-1}(x) - c_n\varrho_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, 4, \ldots;$$

$$\varrho_0(x) = 1, \quad \varrho_1(x) = a_1 x + b_1. \tag{6.71.1}$$

Мы предполагаем, что $a_n c_n \neq 0$. Обозначим через $\{x_{\nu n}\}$ последовательность нулей $\varrho_n(x)$ и покажем, что

$$\Delta_n = \prod_{\nu=1}^{n} \varrho_{n-1}(x_{\nu n}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\nu=1}^{n} \{a_\nu^{n-2\nu+1} c_\nu^{\nu-1}\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.71.2}$$

Допустим, что $n \geqslant 2$. Коэффициент при x^{n-1} в $\varrho_{n-1}(x)$ равен $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$, поэтому имеем

$$\Delta_n = (a_1 a_2 \ldots a_{n-1})^n \prod_{\nu=1}^{n} (x_{\nu n} - x_{1,\, n-1})(x_{\nu n} - x_{2,\, n-1}) \ldots (x_{\nu n} - x_{n-1,\, n-1}) =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 \ldots a_{n-1})^n}{(a_1 a_2 \ldots a_n)^{n-1}} \varrho_n(x_{1,\, n-1})\varrho_n(x_{2,\, n-1}) \ldots \varrho_n(x_{n-1,\, n-1}). \tag{6.71.3}$$

Применяя рекуррентную формулу, мы получаем

$$\Delta_n = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n^{1-n} (-c_n)^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n-1} \varrho_{n-2}(x_{\nu,\, n-1}) =$$

$$= (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n^{1-n} c_n^{n-1} \Delta_{n-1}, \tag{6.71.4}$$

что и доказывает утверждение.

(2) Теорема 6.71. *Дискриминанты многочленов* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $L_n^{(\alpha)}(x)$, $H_n(x)$ *соответственно равны*

$$D_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{-n(n-1)} \prod_{\nu=1}^{n} \nu^{\nu-2n+2} (\nu+\alpha)^{\nu-1} (\nu+\beta)^{\nu-1} (n+\nu+\alpha+\beta)^{n-\nu}, \tag{6.71.5}$$

$$D_n^{(\alpha)} = \prod_{\nu=1}^{n} \nu^{\nu-2n+2} (\nu+\alpha)^{\nu-1}, \tag{6.71.6}$$

$$D_n = 2^{\frac{3n(n-1)}{2}} \prod_{\nu=1}^{n} \nu^{\nu}. \tag{6.71.7}$$

Мы начинаем с известного выражения (см., например, Перрон [4], том I, стр. 259, (12), (13); стр. 260, (16))

$$D_n^{(\alpha,\beta)} = \{l_n^{(\alpha,\beta)}\}^{2n-2} \prod_{\substack{\nu,\,\mu=1,\,2,\,\ldots,\,n\\ \nu<\mu}} (x_{\nu n} - x_{\mu n})^2 =$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \{l_n^{(\alpha,\beta)}\}^{n-2} \prod_{\nu=1}^{n} P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_{\nu n}), \tag{6.71.8}$$

где $l_n^{(\alpha,\beta)}$ имеет тот же смысл, что в (4.21.6), а $\{x_{\nu n}\}$ — последовательность нулей $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Определители $D_n^{(\alpha)}$ и D_n допускают аналогичные представления. В соответствии с первой формулой (4.5.7) в точках, где $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$, мы имеем

$$(1-x^2)\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{6.71.9}$$

следовательно,

$$D_n^{(\alpha,\beta)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \{l_n^{(\alpha,\beta)}\}^{n-2} \left[\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta}\right]^n \prod_{\nu=1}^{n} \frac{P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x_{\nu n})}{1-x_{\nu n}^2} =$$
$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \{l_n^{(\alpha,\beta)}\}^{n} \left[\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta}\right]^n \frac{\prod_{\nu=1}^{n} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x_{\nu n})}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)\, P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)}. \tag{6.71.10}$$

Последний множитель может быть вычислен с помощью (6.71.2), и, учитывая (4.21.6), (4.1.1), (4.1.4) и (4.1.5), мы получаем (6.71.5).

Выражение (6.71.6) может быть вычислено таким же путем, если применить (5.1.14), (5.1.8), (5.1.7) и (5.1.10); или даже более просто из (6.71.5) предельным переходом, указанным в (5.3.4). Действительно, если $\{x_{\nu n} = x_{\nu n}(\beta)\}$ означает нули $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, записанные в убывающем порядке, то при фиксированном ν и n мы получаем

$$\lim_{\beta\to\infty} \beta(1-x_{\nu n}) = 2\xi_{\nu n}, \tag{6.71.11}$$

где $\{\xi_{\nu n}\}$ — нули многочлена $L_n^{(\alpha)}(x)$, записанные в возрастающем порядке. Следовательно,

$$D_n^{(\alpha)} = \{l_n^{(\alpha)}\}^{2n-2} \prod_{\substack{\nu,\,\mu=1,\,2,\,\ldots,\,n\\ \nu<\mu}} (\xi_{\nu n} - \xi_{\mu n})^2 =$$
$$= \{l_n^{(\alpha)}\}^{2n-2} \lim_{\beta\to\infty} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n(n-1)} \prod_{\substack{\nu,\,\mu=1,\,2,\,\ldots,\,n\\ \nu<\mu}} (x_{\mu n} - x_{\nu n})^2 =$$
$$= \{l_n^{(\alpha)}\}^{2n-2} \lim_{\beta\to\infty} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n(n-1)} \{l_n^{(\alpha,\beta)}\}^{-2n+2} D_n^{(\alpha,\beta)}, \tag{6.71.12}$$

что и доказывает утверждение.

Дискриминант D_n также может быть получен либо непосредственно из (6.71.5) с помощью (5.6.3), либо из (6.71.6) с помощью (5.6.1). Первый метод проще. Используя (5.5.6), (5.5.10), (5.5.8) и (6.71.2), мы находим (6.71.7).

6.72. Распределение нулей обобщенных многочленов Якоби

(1) Пусть α и β — произвольные вещественные числа, а $n \geqslant 1$, и пусть $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ означает обобщенный многочлен Якоби, определенный в § 4.22. Для него также выполняется (6.71.5).

Из (4.1.1) и (4.21.2) следует, что точка $x=+1$ будет нулем $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha = -1, \ -2, \ \ldots, \ -n. \tag{6.72.1}$$

(Кратность этого нуля равна $|\alpha|$; см. (4.22.2).) Аналогично, точка $x=-1$ будет нулем $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\beta = -1, \ -2, \ \ldots, \ -n. \tag{6.72.2}$$

Наконец, из (4.21.6) вытекает, что точка $x=\infty$ будет нулем $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ тогда и только тогда, когда

$$n+\alpha+\beta = -1, \ -2, \ \ldots, \ -n. \tag{6.72.3}$$

Если такие значения α и β исключены из рассмотрения, то нули $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ отличны от ± 1 и ∞; кроме того, (6.71.5) показывает, что они различны между собой. (Это следует также из (4.2.1); см. § 6.2, (3).)Пусть N_1, N_2, N_3 означает соответственно число нулей в промежутках $-1<x<+1$, $-\infty<x<-1$, $+1<x<+\infty$. Мы определим теперь эти числа как функции от α и β.

Гильберт [1] определил число $N_1+N_2+N_3$ вещественных нулей. Замечание Стилтьеса ([5], стр. 444) показывает, что он получил значения N_1, N_2, N_3 на три года раньше, чем появилась статья Гильберта. Результат Клейна ([1], стр. 562—567) относительно числа нулей общей гипергеометрической функции легко приводит к этим числам (см. также Шибата [1], Фудживара [1], Сен и Рангачариар [1]). Применяя символ Клейна

$$E(u) = \begin{cases} 0 \text{ при } u \leqslant 0, \\ [u] \text{ при } u>0, \text{ если } u \text{ — нецелое}, \\ u-1 \text{ при } u=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \end{cases} \tag{6.72.4}$$

мы можем формулировать следующую теорему:

Теорема 6.72. *Пусть α, β — произвольные вещественные числа и пусть*

$$\left.\begin{aligned} X &= X(\alpha,\beta) = E\left\{\tfrac{1}{2}(|2n+\alpha+\beta+1|-|\alpha|-|\beta|+1)\right\}, \\ Y &= Y(\alpha,\beta) = E\left\{\tfrac{1}{2}(-|2n+\alpha+\beta+1|+|\alpha|-|\beta|+1)\right\}, \\ Z &= Z(\alpha,\beta) = E\left\{\tfrac{1}{2}(-|2n+\alpha+\beta+1|-|\alpha|+|\beta|+1)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{6.72.5}$$

Если мы исключим из рассмотрения случаи (6.72.1), (6.72.2) *и* (6.72.3), *то число нулей $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ в промежутках $-1<x<+1$, $-\infty<x<-1$,*

$+1 < x < \infty$ *соответственно равно*

$$N_1 = N_1(\alpha,\ \beta) = \begin{cases} 2\left[\dfrac{X+1}{2}\right] & \text{при } (-1)^n \dbinom{n+\alpha}{n}\dbinom{n+\beta}{n} > 0, \\ 2\left[\dfrac{X}{2}\right]+1 & \text{при } (-1)^n \dbinom{n+\alpha}{n}\dbinom{n+\beta}{n} < 0, \end{cases} \tag{6.72.6}$$

$$N_2 = N_2(\alpha,\ \beta) = \begin{cases} 2\left[\dfrac{Y+1}{2}\right] & \text{при } \dbinom{2n+\alpha+\beta}{n}\dbinom{n+\beta}{n} > 0, \\ 2\left[\dfrac{Y}{2}\right]+1 & \text{при } \dbinom{2n+\alpha+\beta}{n}\dbinom{n+\beta}{n} < 0, \end{cases} \tag{6.72.7}$$

$$N_3 = N_3(\alpha,\ \beta) = \begin{cases} 2\left[\dfrac{Z+1}{2}\right] & \text{при } \dbinom{2n+\alpha+\beta}{n}\dbinom{n+\alpha}{n} > 0, \\ 2\left[\dfrac{Z}{2}\right]+1 & \text{при } \dbinom{2n+\alpha+\beta}{n}\dbinom{n+\alpha}{n} < 0. \end{cases} \tag{6.72.8}$$

Заметим, что $2\left[\frac{X+1}{2}\right]$, $2\left[\frac{X}{2}\right]+1$ принимают соответственно значения X и $X+1$ при четном X, а при нечетном X — значения $X+1$ и X, следовательно, N_1 равно либо X, либо $X+1$. Мы видим также, что условия

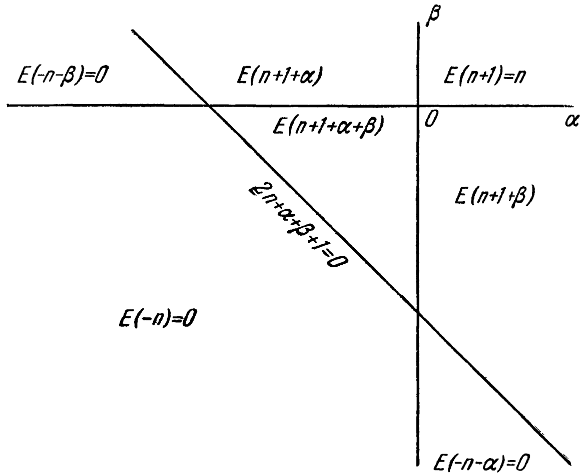

Рис. 7.

в (6.72.6) эквивалентны соответственно неравенствам $P_n^{(\alpha,\ \beta)}(1)\,P_n^{(\alpha,\ \beta)}(-1) > 0$ или же < 0. Например, если $\operatorname{sign} P_n^{(\alpha,\ \beta)}(1)\,P_n^{(\alpha,\ \beta)}(-1) = (-1)^X$ или $(-1)^{X+1}$, то соответственно имеем $N_1(\alpha,\ \beta) = X$ или $X+1$. Аналогичные замечания справедливы для N_2 и N_3.

Достаточно вычислить только N_1. В силу (4.22.1) мы получим N_2, заменяя α через $-2n-\alpha-\beta-1$ в (6.72.6), а N_3 получим из N_2, меняя местами α и β. Доказательство, которое будет приведено, основано на непрерывности нулей как функций от α и β.

(2) Для удобства обозначим функцию, стоящую в правой части (6.72.6), через $M(\alpha,\ \beta)$, так что мы должны доказать, что $N_1(\alpha,\ \beta) = M(\alpha,\ \beta)$. Если точка $(\alpha,\ \beta)$ перемещается, то функция $N_1(\alpha,\ \beta)$ может измениться только в том случае, когда $(\alpha,\ \beta)$ пересекает одну из прямых линий (6.72.1) или (6.72.2). Докажем сначала, что тем же свойством обладает функция $M(\alpha,\ \beta)$.

Нетрудный подсчет дает значения $X(\alpha,\ \beta)$ в семи областях, ограниченных прямыми линиями $\alpha=0$, $\beta=0$ и $2n+\alpha+\beta+1=0$ (рис. 7). Единственными точками разрыва функции $E(u)$ являются точки $u=1, 2, 3, \ldots$; отсюда следует, что, кроме как на прямых линиях (6.72.1) и (6.72.2), функция $M(\alpha, \beta)$ может иметь скачки только в треугольнике, где $X(\alpha, \beta)=E(n+1+\alpha+\beta)$ при условии, что $n+1+\alpha+\beta$ совпадает с одним из целых k, $1\leqslant k\leqslant n$. Пусть $\alpha=\alpha_0$ и $\beta=\beta_0$ — отрицательные нецелые числа, $n+1+\alpha_0+\beta_0=k$, и выберем целые p и q так, чтобы выполнялись неравенства

$$-p<\alpha_0<-p+1, \quad -q<\beta_0<-q+1,$$
$$1\leqslant p\leqslant n, \quad 1\leqslant q\leqslant n. \tag{6.72.9}$$

Тогда мы непременно имеем $k=n+2-p-q$. Исследуем $M(\alpha, \beta)$ при $n+1+\alpha+\beta=k\pm\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, где $|\alpha-\alpha_0|$ и $|\beta-\beta_0|$ достаточно малы. Очевидно,

$$\operatorname{sign}(-1)^n\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n}=(-1)^n(-1)^{p-1}(-1)^{q-1}=(-1)^k;$$

кроме того, $X(\alpha, \beta)=E(n+1+\alpha+\beta)=E(k\pm\varepsilon)$, что соответственно равно k или $k-1$. Иными словами, $k=X$ или $k=X+1$. Тогда (см. замечание к теореме 6.72) $M(\alpha, \beta)=k$ в обоих случаях, т. е. $M(\alpha, \beta)$ не изменяется.

(3) Покажем теперь, что когда точка (α, β) пересекает одну из прямых (6.72.1) или (6.72.2), то скачки функций $N_1(\alpha, \beta)$ и $M(\alpha, \beta)$ одинаковые. Это и будет доказывать утверждение (6.72.6), так как при $\alpha>0$, $\beta>0$ мы имеем $N_1(\alpha, \beta)=n$ и $X(\alpha, \beta)=M(\alpha, \beta)=n$.

В силу симметрии относительно α и β достаточно рассмотреть случай $\alpha=-k\pm\varepsilon$, $\varepsilon>0$, $1\leqslant k\leqslant n$, β — нецелое, и изучить распределение нулей вблизи точки $x=+1$.

Из (4.21.2) мы получаем при $\alpha=-k+\varepsilon$

$$\frac{2^k k!\,(n-k)!}{(n+\alpha+\beta+1)\ldots(n+\alpha+\beta+k)(\alpha+k+1)\ldots(\alpha+n)}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=$$
$$=c_0(\varepsilon)+c_1(\varepsilon)(x-1)+\ldots+c_{k-1}(\varepsilon)(x-1)^{k-1}+(x-1)^k+$$
$$+c_{k+1}(\varepsilon)(x-1)^{k+1}+\ldots+c_n(\varepsilon)(x-1)^n. \tag{6.72.10}$$

Здесь коэффициенты являются вещественными рациональными функциями от ε, регулярными при $\varepsilon=0$ и

$$c_0(0)=c_1(0)=\ldots=c_{k-1}(0)=0. \tag{6.72.11}$$

Кроме того,

$$\left.\begin{aligned} c_0(\varepsilon)&=2^k\left\{\binom{n}{k}\right\}^{-1}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)}{(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)\ldots(n+\alpha+\beta+k)},\\ c_0'(0)&=(-1)^{k-1}2^k\left\{\binom{n}{k}\right\}^{-1}\frac{(k-1)!}{(n+\beta)(n+\beta-1)\ldots(n+\beta-k+1)}\neq 0.\end{aligned}\right\} \tag{6.72.12}$$

Посредством простых соображений из теории аналитических функций (см. ниже), мы получим следующий результат. Если δ — произвольно малое положительное число $\left(\delta<\sin\frac{\pi}{k},\ k>1\right)$, то для достаточно малого $\varepsilon>0$ функция $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $\alpha=-k+\varepsilon$, имеет точно k различных нулей в окрестности точки $x=+1$. Более точно, если $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ означают числа, удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{sign}c_0'(0)+\eta^k=0, \tag{6.72.13}$$

то эти корни лежат в круге

$$x=1+(\varepsilon\,|c_0'(0)|)^{\frac{1}{k}}(\eta_\nu+z), \quad |z|<\delta, \quad \nu=1, 2, \ldots, k. \tag{6.72.14}$$

Заменяя ε на $-\varepsilon$ (т. е. $\alpha=-k-\varepsilon$), получаем тот же результат в круге

$$x=1+(\varepsilon\,|\,c_0'(0)\,|\,)^{\frac{1}{k}}(\zeta_\nu+z), \quad |z|<\delta, \tag{6.72.15}$$

где $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ — корни уравнения

$$-\operatorname{sign} c_0'(0)+\zeta^k=0. \tag{6.72.16}$$

Корень, соответствующий вещественному η_ν или ζ_ν, очевидно, вещественный.

Для того чтобы доказать предыдущее утверждение, мы подставляем $x=1+(\varepsilon\,|\,c_0'(0)\,|)^{\frac{1}{k}}y$ в (6.72.10) и получаем

$$\varepsilon c_0'(0)+\frac{\varepsilon^2}{2!}c_0''(0)+\ldots+\frac{\varepsilon^\nu}{\nu!}c_0^{(\nu)}(0)+\ldots+c_1(\varepsilon)(\varepsilon\,|\,c_0'(0)\,|)^{\frac{1}{k}}y+\ldots$$
$$\ldots+c_{k-1}(\varepsilon)(\varepsilon\,|\,c_0'(0)\,|)^{\frac{k-1}{k}}y^{k-1}+\varepsilon\,|\,c_0'(0)\,|\,y^k+$$
$$+c_{k+1}(\varepsilon)(\varepsilon\,|\,c_0'(0)\,|)^{\frac{k+1}{k}}y^{k+1}+\ldots+c_n(\varepsilon)(\varepsilon\,|\,c_0'(0)\,|)^{\frac{n}{k}}y^n=0. \tag{6.72.17}$$

Если разделить это выражение на $\varepsilon\,|\,c_0'(0)\,|$, то «главными членами» будут $\operatorname{sign} c_0'+y^k$. Теперь мы можем применить теорему 1.91.2 (теорема Руше), и требуемое утверждение отсюда вытекает непосредственно.

Мы интересуемся в особенности числом вещественных нулей $x<+1$ в окрестности точки $x=+1$. Из предыдущего результата мы видим, что в зависимости от того, будет ли $(-1)^k c_0'(0)$ положительным или отрицательным, это число возрастает или убывает на одну единицу, если мы заменяем ε на $-\varepsilon$. Учитывая (6.72.12), мы видим, что это эквивалентно соответственно условию

$$\binom{n+\beta}{k}<0 \quad \text{или} \quad >0.$$

(4) С другой стороны, мы изучим скачок функции $M(\alpha, \beta)$, когда точка (α, β) пересекает прямую $\alpha=-k$ при нецелом β. Допустим сперва, что $\beta>0$, следовательно, $X(\alpha, \beta)=E(n+1+\alpha)$. При $\alpha=-k\pm\varepsilon$, $\varepsilon>0$ мы соответственно имеем

$$X(\alpha, \beta)=E(n+1-k\pm\varepsilon)=\begin{cases} n+1-k, \\ n-k, \end{cases} \tag{6.72.18}$$

и

$$\operatorname{sign}(-1)^n\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n}=\operatorname{sign}(-1)^n\binom{n+\alpha}{n}=\begin{cases} (-1)^{n+k-1}, \\ (-1)^{n+k}, \end{cases} \tag{6.72.19}$$

что в обоих случаях может быть записано в виде $(-1)^{X(\alpha,\beta)}$. Отсюда следует, что (см. замечание к теореме 6.72) $M(\alpha, \beta)$ изменяется от $n+1-k$ до $n-k$, т. е. уменьшается на единицу. В этом случае имеем

$$\binom{n+\beta}{k}>0.$$

Пусть теперь β — отрицательное нецелое число. Тогда $n+1+\alpha+\beta$ будет нецелым числом вблизи точки $\alpha=-k$, следовательно, $X(\alpha, \beta)$ остается постоянным в ее окрестности. Более точно:

$$X(\alpha, \beta)=\begin{cases} n+1-k+[\beta] & \text{при} \quad n+1-k+\beta>0, \\ 0 & \text{при} \quad n+1-k+\beta<0. \end{cases} \tag{6.72.20}$$

В первом случае при $\alpha = -k \pm \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, мы имеем

$$\operatorname{sign}(-1)^n \binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n} = \begin{cases} (-1)^n(-1)^{k-1}(-1)^{[\beta]+1}, \\ (-1)^n(-1)^k(-1)^{[\beta]+1}, \end{cases} \tag{6.72.21}$$

что соответственно равно $(-1)^{X(\alpha,\beta)+1}$ и $(-1)^{X(\alpha,\beta)}$. Откуда следует, что (см. замечание к теореме 6.72) функция $M(\alpha, \beta)$ изменяется от $X(\alpha, \beta)+1$ до $X(\alpha, \beta)$, т. е. уменьшается на единицу. В этом случае опять

$$\binom{n+\beta}{k} > 0.$$

Теперь рассмотрим второй случай в (6.72.20). Тогда

$$\operatorname{sign}(-1)^n \binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n} =$$

$$= \operatorname{sign}(-1)^n \binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{k}\frac{k!}{n!}(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-k) =$$

$$= -\operatorname{sign}\binom{n+\beta}{k} \text{ или } \operatorname{sign}\binom{n+\beta}{k} \tag{6.72.22}$$

соответственно при $\alpha = -k \pm \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Например, если

$$\binom{n+\beta}{k} < 0,$$

то $M(\alpha, \beta)$ изменяет свое значение от 0 до 1, т. е. снова на единицу. Имеет место противоположное обстоятельство, если

$$\binom{n+\beta}{k} > 0.$$

Это доказывает теорему 6.72.

6.73. Распределение нулей обобщенных многочленов Лагерра

Формула для дискриминанта многочлена Лагерра (6.71.6) справедлива для $L_n^{(\alpha)}(x)$ при произвольном вещественном α и $n \geqslant 1$. В соответствии с (5.1.7) точка $x=0$ будет нулем $L_n^{(\alpha)}(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha = -1, \ -2, \ \ldots, \ -n. \tag{6.73.1}$$

(Кратность этого нуля равна $|\alpha|$; см. (5.2.1). Если эти значения α исключить из рассмотрения, то нули $L_n^{(\alpha)}(x)$ конечны и отличны от нуля; кроме того, из (6.71.6) (или из дифференциального уравнения (5.1.2)) мы заключаем, что эти нули различны между собой. Пусть $n_1(\alpha)$ и $n_2(\alpha)$ соответственно означают число положительных и отрицательных нулей. Применяя теорему 1.91.3 (теорема Гурвица) и (5.3.4), мы видим, что если β велико, то $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ имеет по крайней мере $n_1(\alpha)$ нулей в промежутке $(-1, +1)$, $n_2(\alpha)$ — в промежутке $(+1, +\infty)$ и по крайней мере $n-n_1(\alpha)-n_2(\alpha)$ комплексных нулей. Следовательно, используя обозначения предыдущего параграфа, мы видим, что при β достаточно большом $n_1(\alpha)=N_1(\alpha, \beta)$ и $n_2(\alpha)=N_3(\alpha, \beta)$, т. е.

$$n_1(\alpha) = \lim_{\beta\to+\infty} N_1(\alpha, \beta), \quad n_2(\alpha) = \lim_{\beta\to+\infty} N_3(\alpha, \beta). \tag{6.73.2}$$

Ясно, что если $\alpha > -1$, то $n_1(\alpha)=n$, $n_2(\alpha)=0$.

Допустим теперь, что $\alpha < -1$, $\alpha \neq -2, -3, \ldots, -n$. Из (6.72.5) мы получаем

$$\lim_{\beta\to+\infty} X(\alpha, \beta) = E(n+\alpha+1) = \begin{cases} n+[\alpha]+1 & \text{при } \alpha > -n, \\ 0 & \text{при } \alpha < -n, \end{cases}$$

так как аргумент функции E в формуле $X(\alpha, \beta)$ не является целым положительным числом; кроме того,

$$\lim_{\beta\to+\infty} Z(\alpha, \beta) = E(-n) = 0.$$

Далее,

$$\operatorname{sign}(-1)^n \binom{n+\alpha}{n} = \begin{cases} (-1)^{n+[\alpha]+1} & \text{при} \quad \alpha > -n, \\ 1 & \text{при} \quad \alpha < -n. \end{cases}$$

Таким образом, в первом случае $N_1(\alpha, \beta) = n+[\alpha]+1$, а во втором случае $N_1(\alpha, \beta) = 0$. Следовательно,

$$n_1(\alpha) = \begin{cases} n+[\alpha]+1 & \text{при} \quad \alpha > -n, \\ 0 & \text{при} \quad \alpha < -n. \end{cases} \tag{6.73.3}$$

Кроме того,

$$n_2(\alpha) = 0 \text{ или } 1 \tag{6.73.4}$$

в зависимости от того, будет ли

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n} > 0 \text{ или } < 0.$$

Теорема 6.73. *Пусть α — произвольное вещественное число, $\alpha \neq -1, -2, \ldots, -n$. Число положительных нулей $L_n^{(\alpha)}(x)$ равно n, если $\alpha > -1$; оно равно $n+[\alpha]+1$, если $-n < \alpha < -1$; оно равно нулю, если $\alpha < -n$. Число отрицательных нулей равно либо нулю, либо единице.*

Этот результат также может быть получен прямым методом, аналогичным указанному в § 6.72. Действительно, числа $n_1(\alpha)$ и $n_2(\alpha)$ могут изменяться только в том случае, когда α проходит одно из целых чисел -1, $-2, \ldots, -n$. Если α, убывая, проходит через нечетное число этих чисел, то мы теряем один положительный нуль и приобретаем один отрицательный. Если же проходимое число четно, то мы теряем один положительный и один отрицательный нуль. При $\alpha < -n$ вещественных нулей нет, если n четно, если же n нечетно, то есть один вещественный нуль (отрицательный) (см. Лотон [1], Хан [1]).

6.8. Многочлены, которые удовлетворяют линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка. Теорема Гейне — Стилтьеса

Гейне ([3], том 1, стр. 472—479) исследовал следующую задачу:

Задача. *Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — данные многочлены соответственно степени $p+1$ и p. Определить многочлен $C(x)$ степени $p-1$, такой, чтобы дифференциальное уравнение*

$$A(x)\frac{d^2y}{dx^2} + 2B(x)\frac{dy}{dx} + C(x)\,y = 0 \tag{6.8.1}$$

имело своим решением многочлен данной степени n.

Гейне утверждает, что в общем случае имеется ровно

$$\sigma = \sigma_{np} = \binom{n+p-1}{n} \tag{6.8.2}$$

различных $C(x)$ этого рода.

Гипергеометрические уравнения (4.2.1) и (4.21.1) являются уравнениями этого типа, в которых $p=1$. Функции Ламэ удовлетворяют уравнению этого типа при $p \geqslant 2$. Этот случай и был исходным пунктом исследований Гейне по этому вопросу. Стилтьес [3] исследовал лишь частный случай (6.8.1), который, однако, имеет первостепенное значение. Он получил следующий результат:

Теорема 6.8. *Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — данные многочлены точной степени $p+1$ и соответственно p и пусть старшие коэффициенты многочленов $A(x)$ и $B(x)$ имеют один и тот же знак. Если нули $A(x)$ и $B(x)$ вещественны, различны и взаимно разделены, то имеется ровно σ многочленов $C(x)$ степени $p-1$, таких, что дифференциальное уравнение* (6.8.1) *имеет своим решением многочлен данной степени n. Здесь σ имеет смысл, указанный в* (6.8.2).

Доказательство Стилтьеса частично опирается на утверждение Гейне, что σ является верхней границей числа многочленов $C(x)$, обладающих требуемым свойством. Он получает, однако, не только утверждение о существовании σ различных решений, но также следующую их характеристику: n нулей этих решений распределены всевозможными способами в p промежутках между $p+1$ нулями многочлена $A(x)$. (Ясно, что число таких распределений равно σ.) Решение получается посредством рассмотрения задачи на максимум, аналогичной той, которая трактовалась в § 6.7.

Приводимое ниже доказательство теоремы Стилтьеса использует упомянутую идею задачи на максимум, но процесс исключения, который применял Гейне (что дает верхнюю границу σ), здесь заменен некоторыми элементарными соображениями, связанными с теоремой Штурма (см. § 1.82). Таким образом, наше доказательство не зависит от работы Гейне.

6.81. Предварительные замечания

Предположим, как это делает Стилтьес, что

$$A(x) = (x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_p), \quad a_0 < a_1 < \ldots < a_p, \tag{6.81.1}$$

и

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \frac{\varrho_0}{x-a_0} + \frac{\varrho_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{\varrho_p}{x-a_p}, \quad \varrho_\nu > 0, \quad \nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ p. \tag{6.81.2}$$

Это допущение эквивалентно тому, что нули $A(x)$ перемежаются с нулями $B(x)$ и что старшие коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ имеют один и тот же знак.

Пусть $C(x)$ — данный многочлен. Тогда (6.8.1) не может иметь в качестве решений два линейно независимых между собой многочлена y и z. В самом деле, в противном случае при $x \neq 0$ мы имели бы

$$\left.\begin{aligned} &A(x)(y'z-yz')' + 2B(x)(y'z-yz') = 0,\\ &y'z-yz' = \text{const.}\exp\left\{-\int\frac{2B(x)}{A(x)}dx\right\} = \text{const.}\prod_{\nu=0}^{p}|x-a_\nu|^{-2\varrho_\nu}.\end{aligned}\right\} \tag{6.81.3}$$

Последнее произведение стремится к ∞ при $x \to a_\nu$, что приводит к противоречию, если не имеет места тождественное равенство $y'z-yz' \equiv 0$.

Пусть y — многочлен, являющийся решением уравнения (6.8.1), причем $y \not\equiv 0$. Мы покажем, что $y \neq 0$ в точке $x=a_\nu$. Если бы, наоборот, это имело место, то подстановка $x=a_\nu$ в (6.8.1) давала бы $y'=0$. Дифференцируя (6.8.1) k раз, мы получим дифференциальное уравнение порядка $k+2$ относительно y, которое имеет вид

$$A(x)\,y^{(k+2)} + \{kA'(x) + 2B(x)\}\,y^{(k+1)} + \ldots = 0;$$

остальные коэффициенты являются также многочленами. Из (6.81.2) вытекает, что $B(a_\nu) = \varrho_\nu A'(a_\nu)$, так что $kA'(a_\nu) + 2B(a_\nu) \neq 0$. Следовательно, если $y=y'=y''=\ldots=y^{(k)}=0$, то $y^{(k+1)}=0$. Тем же путем мы можем показать, что все нули многочлена y различны.

Докажем теперь, что все нули многочлена y лежат на отрезке $[a_0, a_p]$. Полагая $y=f(x)=\mathrm{const.}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ в соответствии с (6.8.1), мы будем иметь

$$A(x_k)f''(x_k)+2B(x_k)f'(x_k)=0; \tag{6.81.4}$$

используя (6.2.2) и (6.81.2), можем записать это в виде

$$\frac{1}{x_k-x_1}+\frac{1}{x_k-x_2}+\ldots+\frac{1}{x_k-x_{k-1}}+\frac{1}{x_k-x_{k+1}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{x_k-x_n}+\sum_{\nu=0}^{p}\frac{\varrho_\nu}{x_k-a_\nu}=0. \tag{6.81.5}$$

Допустим, что некоторые из нулей $f(x)$ лежат вне отрезка $[a_0, a_p]$. Пусть x_k — один из нулей, обладающих тем свойством, что отрезок $[a_0, a_p]$ и все остальные нули лежат в замкнутой полуплоскости, по отношению к которой x_k является граничной точкой, причем сам отрезок лежит в открытой полуплоскости. Комплексные векторы

$$x_k-x_m,\quad x_k-a_\nu$$

при всех ν и m, $m\neq k$, лежат внутри угла, не превосходящего π, то же справедливо и для обратных к ним векторов. Векторы x_k-a_ν направлены внутрь этого угла. Но мы замечаем, что это находится в противоречии с (6.81.5) (по поводу этого рассуждения см. Полиа [1]).

Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_p$ означают соответственно число нулей многочлена y, лежащих на отрезках $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_{p-1}, a_p]$. Тогда мы будем говорить, что y типа $\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$. Здесь $n_1+n_2+\ldots+n_p=n$, а σ равно числу всевозможных типов. Нашей целью является доказать, что существует ровно одно полиномиальное решение каждого типа, соответствующее σ различным определениям многочлена $C(x)$ степени $p-1$.

6.82. Задача на максимум

Следуя Стилтьесу [3], покажем сначала, что существует решение каждого типа в виде многочлена.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные точки, каждая из которых отлична от a_ν, расположенные на $[a_0, a_p]$ так, что на каждом отрезке $[a_{\nu-1}, a_\nu]$ лежит некоторое определенное число n_ν этих точек, $n_1+\ldots+n_p=n$. Заставляя x_k изменяться в фиксированном промежутке, мы рассматриваем максимум произведения

$$W=\prod_{\substack{k=1,2,\ldots,n\\ \nu=0,1,\ldots,p}}|x_k-a_\nu|^{\varrho_\nu}\prod_{\substack{\lambda,\mu=1,2,\ldots,n\\ \lambda<\mu}}|x_\lambda-x_\mu|. \tag{6.82.1}$$

Ясно, что этот максимум существует и положителен. В положении, которое соответствует максимуму, точки x_k отличны от точек a_ν и друг от друга и принадлежат заданному типу. Кроме того, мы имеем $\frac{\partial W}{\partial x_k}=0$; отсюда снова вытекает (6.81.5). Если $f(x)$ — многочлен с нулями x_k, то последнее равенство означает, что выражение $A(x)f''(x)+2B(x)f'(x)$ обращается в нуль при $x=x_k$, т. е. делится на $f(x)$. Если мы обозначим это частное через $-C(x)$, то получим (6.8.1). Ясно, что $\ln(W^{-1})$, не считая постоянного множителя $\varrho_\mu\varrho_\nu\ln|a_\mu-a_\nu|^{-1}$, $\mu\neq\nu$, равен энергии системы масс ϱ_ν, сосредоточенных в a_ν, и единичных масс, сосредоточенных в x_k (см. § 6.7, (1)).

Рассуждение, примененное в § 6.7, (1), показывает, что система $\{x_k\}$, соответствующая максимуму, однозначно определена. Это не то же самое, что единственность решения данного типа, так как (6.81.5) не эквивалентно свойству максимума. Однако легко показать (см. (6.22.6)), что (6.81.5) эквивалентно относительному максимуму функции W.

6.83. Единственность

Пусть $C(x)$, y и $D(x)$, z — два различных решения, принадлежащих одному и тому же типу, $C(x) \not\equiv D(x)$. Допустим, что оба многочлена y и z имеют положительный старший коэффициент. Комбинируя (6.8.1) с соответствующим уравнением для z, мы находим соотношение

$$\frac{d}{dx}(y'z-yz')+2\sum_{\nu=0}^{p}\frac{\varrho_\nu}{x-a_\nu}(y'z-yz')+\frac{C(x)-D(x)}{A(x)}yz=0. \quad (6.83.1)$$

Полагая

$$H=\prod_{\nu=0}^{p}|x-a_\nu|^{2\varrho_\nu}$$

при $x \neq a_\nu$, мы получаем

$$\frac{d}{dx}\{H(y'z-yz')\}=\frac{D(x)-C(x)}{A(x)}yzH. \quad (6.83.2)$$

Допустим, что функция $\frac{D(x)-C(x)}{A(x)}$ является неотрицательной в фиксированном промежутке $a_{\nu-1}<x<a_\nu$. Тогда между двумя последовательными нулями α и β $(\alpha<\beta)$ многочлена y, лежащими в этом промежутке, многочлен z должен менять свой знак по крайней мере один раз. В противном случае произведение yz имело бы постоянный знак, положительный или отрицательный; следовательно, функция $H(y'z-yz')$ должна монотонно возрастать или убывать в промежутке $\alpha<x<\beta$. Однако при $x=\alpha+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, последнее выражение имеет тот же знак, что $y'z$ или yz, а при $x=\beta-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, тот же знак, что $y'z$ или $-yz$. Следовательно, если $yz>0$, то рассматриваемое выражение переходит от положительного значения к отрицательному, а если $yz<0$, то от отрицательного значения к положительному, что противоречит упомянутому выше монотонному характеру изменения функции $H(y'z-yz')$.

Если мы по-прежнему будем предполагать, что функция $\frac{D(x)-C(x)}{A(x)}$ неотрицательна, то функция z должна также менять свой знак в $(a_{\nu-1}, \gamma)$ и в (δ, a_ν), где γ — наименьший, а δ — наибольший нуль функции y в $(a_{\nu-1}, a_\nu)$. В противном случае каждая из функций y и z будет иметь постоянный знак в этих промежутках; более того, y и z будут иметь один и тот же знак в данном промежутке, поскольку они одного и того же типа. Тогда $H(y'z-yz')$ будет возрастающей функцией. Она обращается в нуль при $x\to a_{\nu-1}+0$, а также при $x\to a_\nu-0$; следовательно, функция $y'z-yz'$ должна быть положительной в промежутке $(a_{\nu-1},\gamma)$ и отрицательной в (δ, a_ν). Но при $x=\gamma$, очевидно, $\operatorname{sign}(y'z-yz')=\operatorname{sign}y'z$, который равен $\operatorname{sign}y'y$ в точке $x=\gamma-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, т. е. отрицателен. Мы пришли к противоречию. Аналогичное рассуждение можно провести в точке $x=\delta$.

Наконец, при том же предположении относительно функции $\frac{D(x)-C(x)}{A(x)}$ мы замечаем, что многочлен z должен обращаться в нуль в $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ даже в том случае, если y не имеет нулей в этом промежутке. Если бы это было не так, то в силу (6.83.2) функция $H(y'z-yz')$ была бы монотонной, но последнее не имеет места, ибо H обращается в нуль в точках $x=a_{\nu-1}$, $x=a_\nu$.

Итак, эти рассуждения показывают, что в промежутке $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ функция z имеет по крайней мере одним нулем больше, чем функция y, что невозможно. Следовательно, отношение $\frac{D(x)-C(x)}{A(x)}$ должно быть отрицательным в некоторой точке промежутка $a_{\nu-1}<x<a_\nu$. Меняя местами $C(x)$, y и $D(x)$, z, мы видим, что та же самая функция должна быть положительной в некоторой точке промежутка $a_{\nu-1}<x<a_\nu$; отсюда вытекает, что разность $D(x)-C(x)$ должна иметь не менее, чем одну перемену знака в $(a_{\nu-1}, a_\nu)$. Так как это справедливо при $\nu=1, 2, \ldots, p$, то $D(x)-C(x)$ имеет не менее чем p перемен знака в (a_0, a_p), что невозможно, поскольку $D(x)-C(x)$ — многочлен степени $p-1$.

6.9. Нули функций Лежандра второго рода; обобщение

(1) В связи со вторым обобщением многочленов Лежандра, которое дал Фейер (§ 6.5, (4)), мы рассмотрим функцию

$$H_n(\cos\theta)=\beta_0\cos(n+1)\theta+\beta_1\cos(n+3)\theta+\ldots+\beta_m\cos(n+2m+1)\theta+\ldots \quad (6.9.1)$$

Здесь $\beta_m ! 0$, так что ряд сходится при $0<\theta<\pi$. Это — ряд, сопряженный с рядом $G_\iota(\cos\theta)$, который определен формулой (6.5.16). Функция $Q_n(\cos\theta)$ из (4.9.16) является частным случаем функций $H_n(\cos\theta)$; последовательность β_m определяется равенствами (4.9.5) и абсолютно монотонна. Докажем следующую теорему:

Теорема 6.9.1. *Пусть $\beta_m>0$ и $\{\beta_m\}$ — абсолютно монотонная последовательность. Функция $H_n(\cos\theta)$, определенная рядом* (6.9.1), *имеет не менее чем по одному нулю в каждом из промежутков*

$$\frac{\nu}{n+\frac{1}{2}}\pi<\theta<\frac{\nu+\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi, \quad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \quad (6.9.2)$$

Более точно, $H_n(\cos\theta)$ имеет нечетное число нулей в каждом из этих промежутков. Для доказательства мы опять применим представление Хаусдорфа и из (6.9.1) получим

$$\int_0^1\left\{\sum_{m=0}^{\infty}t^m\cos(n+2m+1)\theta\right\}d\beta(t)=\int_0^1\frac{\cos(n+1)\theta-t\cos(n-1)\theta}{1-2t\cos2\theta+t^2}\,d\beta(t), \quad (6.9.3)$$

где $\beta(t)$ — функция того же типа, что $\alpha(t)$ в (6.5.8). Подставляя

$$\theta=\frac{\nu}{n+\frac{1}{2}}\pi \quad \text{и} \quad \theta=\frac{\nu+\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi,$$

мы соответственно находим

$$\cos(n+1)\theta-t\cos(n-1)\theta=\begin{cases}(-1)^\nu\left(\cos\frac{\theta}{2}-t\cos\frac{3\theta}{2}\right),\\(-1)^{\nu+1}\left(\sin\frac{\theta}{2}+t\sin\frac{3\theta}{2}\right).\end{cases} \quad (6.9.4)$$

Оба выражения в скобках положительны, что и доказывает утверждение теоремы. (При $\nu=0$ или $\nu=n$ мы должны учесть, что

$$\lim_{\theta\to+0} H_n(\cos\theta)=(-1)^{n+1}\lim_{\theta\to\pi-0} H_n(\cos\theta)>0$$

(равен $+\infty$, если ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\beta_m$ расходится).)

(2) Теорема 6.9.2. *Функция* $Q_n(\cos\theta)$ (см. § 4.62,(3)) *имеет ровно* $n+1$ *нулей в промежутке* $0<\theta<\pi$, *которые лежат в промежутках* (6.9.2).

В этом частном случае теоремы 6.9.1 в каждом из промежутков (6.9.2) не может лежать более чем один нуль; в противном случае полином $P_n(\cos\theta)$ имел бы по теореме Штурма более чем n нулей.

Неравенства (6.9.2) для нулей $Q_n(\cos\theta)$ принадлежат Стилтьесу ([8], стр. 252), его доказательство отличается от данного выше. Фейер ([20], стр. 51—52) получил менее точные неравенства способом, аналогичным приведенному здесь; однако его предположения относительно $\{\beta_m\}$ были менее ограничительными.

(3) Теорема 6.9.3. *Функция Лежандра второго рода* $Q_n(x)$ (§ 4.61,(1)) *не имеет нулей в комплексной плоскости, с разрезом вдоль отрезка* $[-1, +1]$, *за исключением точки* $x=+\infty$, *которая является нулем кратности* $n+1$.

Эта теорема принадлежит Эрмиту [3] и Стилтьесу [9] (см. также Эрмит—Стилтьес [1], том 2, стр. 80—104, № 267—274). Следующее рассуждение представляет собой небольшое видоизменение второго доказательства Стилтьеса.

Мы исходим из (4.62.10). Функция $Q_n(x)$ имеет $n+1$ нулей внутри промежутка $(-1, +1)$, которые перемежаются с нулями $P_n(x)$ (см. теорему 6.9.2). Пусть $+1=x_0>x_1>\ldots>x_n>x_{n+1}=-1$ означают нули многочлена $(1-x^2)P_n(x)$, записанные в убывающем порядке. Тогда

$$\operatorname{sign} Q_n(x_\nu)=(-1)^\nu,\quad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1. \tag{6.9.5}$$

Кроме того, $Q_n(x)$ — решение (4.2.1), $\alpha=\beta=0$, следовательно, $\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}$ является возрастающей функцией на отрезке $-1\leqslant x\leqslant+1$ (см. (4.2.6)); она обращается в бесконечность в каждой точке x_ν.

Рис. 8.

Кривая на рис. 8 окружает точки $x=\pm1$ и обходит нули многочлена $P_n(x)$ по полуокружностям. Мы покажем, что изменение $\arg\left\{\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}\right\}$ вдоль этой кривой равно $2\pi(2n+1)$. Тогда по теореме 1.91.1 (принцип аргумента) функция $\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}$ имеет ровно $2n+1$ нулей вне этой кривой. Но поскольку она имеет нуль кратности $2n+1$ в точке $x=\infty$, то наше утверждение будет установлено.

Пусть ε — достаточно малое положительное число. Так как x обходит точку $+1$ в отрицательном направлении (по часовой стрелке) от $1+\varepsilon$ к $1-\varepsilon$, то изменение рассматриваемого аргумента приближенно равно (см. (4.62.7)) изменению аргумента $\ln\frac{1}{x-1}$ — величине, которая стремится к нулю вместе с ε. Если x пробегает отрезок от $x_\nu-\varepsilon$ до $x_{\nu+1}-\varepsilon$ $(\nu=0,1,\ 2,\ \ldots,n)$ вдоль «нижнего края» разреза $[-1,\ +1]$, то мы имеем

$$y=\frac{Q_n(x-i0)}{P_n(x)}=\frac{i\pi}{2}+\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}. \tag{6.9.6}$$

При этом y изменяется вдоль прямой линии $\Im y=\frac{\pi}{2}$ в направлении убывающих абсцисс. Изменение аргумента y равно $+\pi$.

В окрестности точек x_ν $(\nu=1,2,\ldots,n)$ функция $\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}$ отличается только ограниченным слагаемым от

$$\frac{Q_n(x_\nu)}{P'_n(x_\nu)}\frac{1}{x-x_\nu},\text{ где }\frac{Q_n(x_\nu)}{P'_n(x_\nu)}<0. \tag{6.9.7}$$

Следовательно, полуокружность в нижней полуплоскости с центром в точке x_ν перейдет в кривую, приближающуюся к большой полуокружности в нижней полуплоскости; при этом аргумент y возрастет на $+\pi$.

Наконец, если мы обходим точку $x=-1$ в отрицательном направлении от $-1+\varepsilon$ к $-1-\varepsilon$, то изменение аргумента y опять стремится к нулю вместе с ε.

Итак, когда x перемещается вдоль нижнего края кривой от $+1+\varepsilon$ к $-1-\varepsilon$, общее изменение аргумента y равно $(n+1)\pi+n\pi=(2n+1)\pi$. То же самое имеет место, когда x изменяется вдоль верхнего края кривой от $-1-\varepsilon$ к $+1+\varepsilon$. Этим теорема доказана.

6.10. Дальнейшие результаты

(1) Пусть $\{\theta_{\nu n}\}$ — нули многочлена $P_n(\cos\theta)$ на отрезке $[0,\ \pi]$, занумерованные в порядке возрастания. Туран [1] доказал, что последовательность $x_{\nu n}-x_{\nu,n-1}$, где $x_{\nu n}=\cos\theta_{\nu n}$, является возрастающей при изменении ν от 1 до $\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$. Сегё доказал (в переписке с Тураном в 1946 г.) тот же факт для разностей $\theta_{\nu,n-1}-\theta_{\nu n}$.

(2) По поводу вопросов, рассмотренных в §§ 6.8—6.83, см. также Макаи [3].

(3) Рассуждение, указанное в § 6.9, (3), приводит к более общему результату относительно числа нулей функции $Q_n(x)-aP_n(x)$ в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-1,1]$, где a — данное комплексное число (см. цитированные работы Эрмита и Стилтьеса). Это число равно $2n+1$, если $-\frac{\pi}{2}<\Im a<\frac{\pi}{2}$, и равно n, если $\Im a\geqslant+\frac{\pi}{2}$ или $\Im a\leqslant-\frac{\pi}{2}$.

В самом деле, в случае $-\frac{\pi}{2}<\Im a<+\frac{\pi}{2}$ нет надобности вносить какие-либо существенные изменения в предыдущие рассуждения. Пусть теперь $\Im a>\frac{\pi}{2}$. Если x описывает отрезок от $x_\nu-\varepsilon$ до $x_\nu+\varepsilon$ вдоль нижнего края разреза $[-1,\ 1]$, то аргумент функции $y-a$ изменится на $-\pi$. Обход по полуокружностям вокруг x_ν, а также обход по верхнему краю разреза не вносят изменений. Значит, общее возрастание аргумента функций $y-a$ будет

$$-(n+1)\pi+n\pi+(n+1)\pi+n\pi=2n\pi.$$

Пусть $\Im a = +\frac{\pi}{2}$. На отрезке $[x_\nu - \varepsilon, x_\nu + \varepsilon]$ есть единственная точка ξ, в которой $Q_n(\xi)/P_n(\xi) = \Re a$. Мы должны применить некоторое распространение контура в нижнюю полуплоскость и учесть, что при $\delta > 0$

$$\left(\frac{Q_n(x-i0)}{P_n(x)}\right)_{x=\xi-i\delta} = \left(\frac{Q_n(x-i0)}{P_n(x)}\right)_{x=\xi} - i\delta\left(\frac{d}{dx}\frac{Q_n(x-i0)}{P_n(x)}\right)_{x=\xi} + \ldots;$$

мнимая часть выражения, стоящего справа, равна

$$\frac{\pi}{2} - \delta' < \frac{\pi}{2},$$

где $\delta' > 0$. Рассуждения аналогичны, когда $\Im a = -\frac{\pi}{2}$.

ГЛАВА VII
НЕРАВЕНСТВА

Для общих ортогональных многочленов не известны какие-либо неравенства, кроме тривиальных. Однако неравенства, включающие в себя константу, величина которой не определена, легко могут быть выведены при некоторых условиях относительно весовой функции $\varpi(x)$. Более точные оценки могут быть получены, если $\varpi(x)$ монотонна; при этом дополнительном ограничении устанавливается большое число специальных неравенств.

Другой, весьма обширный класс неравенств может быть получен для классических ортогональных многочленов. В настоящей главе мы укажем и сравним различные методы, применяемые для вывода этих неравенств. За исключением интегральных представлений и рядов, основным инструментом исследования являются дифференциальные уравнения. Мы должны заметить, что по существу это метод получения неравенств для решений некоторых дифференциальных уравнений (см. теорему 7.31.1). В последние годы этот метод с небольшими видоизменениями применялся несколько раз в отдельных специальных задачах (не только для многочленов) в первую очередь Ватсоном и С. Н. Бернштейном; эта идея, впрочем, восходит к Н. Я. Сонину [1]).

В конце этой главы мы применяем упомянутые выше неравенства при рассмотрении некоторых экстремальных задач, содержащих многочлены данной степени.

При выборе материала, излагаемого в этой главе, мы должны были учесть нужды последующих глав, в особенности IX, XIV и XV. Исторически большая часть неравенств для классических многочленов возникла при исследовании соответствующих разложений в ряды.

Мы отложим до главы VIII асимптотическое вычисление некоторых максимумов (которые могут быть выражены и в терминах неравенств), так как это требует более трудных вычислений. Однако мы сочли необходимым в настоящей главе воспользоваться некоторыми асимптотическими результатами главы VIII.

7.1. Грубые границы для ортогональных многочленов

В этом параграфе мы существенно используем представление положительных функций, рассмотренное в § 10.2. Однако это не будет играть роли в остальной части главы VII.

(1) Пусть $\varpi(x)$ — такая весовая функция на отрезке $[-1, +1]$, что существует в смысле Лебега интеграл

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \ln \varpi(x)\, dx. \qquad (7.1.1)$$

---

[1]) См. Н. Я. Сонин [2], § 16. Автор обязан этой ссылкой Шохату.

(Из этого допущения следует, что $w(x)$ не может обращаться в нуль на целом отрезке.) Пусть $D(f; z)=D(z)$ — функция, ассоциированная с функцией $f(\theta)=w(\cos\theta)|\sin\theta|$ в смысле, определенном в § 10.2, (2).

Конформное отображение $x=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$ переводит единичный круг $|z|<1$ (или $|z|>1$) в x-плоскость с разрезом вдоль отрезка $-1\leqslant x\leqslant +1$. При $z=e^{i\theta}$ мы имеем $x=\cos\theta$ (см. § 1.9).

Теорема 7.1.1. *Пусть $\{p_\iota(x)\}$ — ортонормальная последовательность многочленов, соответствующих весовой функции $w(x)$, $-1\leqslant x\leqslant +1$, для которой существует интеграл* (7.1.1); *тогда*

$$|\pi^{\frac{1}{2}}D(z)\,p_n(x)\,z^n|<(1-|z|^2)^{-\frac{1}{2}},\quad |z|<1, \tag{7.1.2}$$

где $x=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$ — произвольная точка плоскости с разрезом.

Действительно (см. (10.2.9)),

$$1=\int_{-1}^{+1}p_n^2(x)\,w(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}p_n^2(\cos\theta)\,w(\cos\theta)\,|\sin\theta|\,d\theta=$$

$$=\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|p_n\left[\frac{1}{2}(z+z^{-1})\right]z^n\right|^2|D(z)|^2d\theta,\quad z=re^{i\theta}. \tag{7.1.3}$$

Но если функция $f(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mz^m$ регулярна в круге $|z|<1$, то по неравенству Коши — Буняковского мы имеем

$$|f(z)|^2\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}|c_m|^2\sum_{m=0}^{\infty}|z^{2m}|=(1-|z|^2)^{-1}\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta, \tag{7.1.4}$$

что и доказывает утверждение.

Граница в (7.1.2) становится бесконечной, если x лежит на отрезке $[-1, +1]$; для всех других значений x она дает первую оценку величины $p_\iota(x)$ при достаточно общих условиях. Это сравнительно точный результат; мы покажем в дальнейшем (см. теорему 12.1.2), что при фиксированном x и $n\to\infty$ левая часть (7.1.2) стремится к $2^{-\frac{1}{2}}$. Весьма замечательно, что при выводе (7.1.2) свойство ортогональности не было использовано; мы опирались лишь на нормированность $p_n(x)$.

(2) Теорема 7.1.2. *Пусть $w(x)$ — функция, ограниченная снизу положительным числом, т. е. $w(x)>\mu>0$. Если x не принадлежит отрезку $[-1, +1]$, то*

$$|p_n(x)|<A\,|x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}|^n, \tag{7.1.5}$$

где $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ выбрано из условия $|x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}|>1$. Постоянная A зависит от x и μ, но не зависит от n; A равномерно ограничена вне замкнутой кривой, содержащей внутри себя отрезок $[-1, +1]$.

В этом случае $|D(z)|>\left|\frac{\mu(1-z^2)}{2}\right|^{\frac{1}{2}}$ (см. (10.2.10)), откуда, учитывая (7.1.2), получаем неравенство

$$\left|\frac{\pi\mu(1-z^2)}{2}\right|^{\frac{1}{2}}|p_n(x)\,z^n|<(1-|z|^2)^{-\frac{1}{2}},\quad |z|<1. \tag{7.1.6}$$

(3) При том же предположении, что $w(x) \geqslant \mu > 0$, мы можем также легко найти границы для $p_n(x)$ на самом отрезке ортогональности $-1 \leqslant x \leqslant +1$. Действительно, если $|z| < 1$, то в силу неравенства (7.1.6) мы имеем $\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(1-|z|^2)^{\frac{1}{2}}|p_n(x)z^n| < (1-|z|^2)^{-\frac{1}{2}}$. Пусть точка x принадлежит отрезку $[-1, +1]$, $x = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$, где $|z| = 1$. Тогда $p_n(x)z^n$ есть π_{2n} относительно переменной z, и при $-1 \leqslant x \leqslant +1$, $|z|=1$, $r<1$ мы имеем

$$|p_n(x)| = |p_n(x)z^n| < \max_{|\zeta|=\frac{1}{r}} |p_n(\xi)\zeta^n| = r^{-2n}\max_{|\zeta|=r}|p_n(\xi)\zeta^n| <$$

$$< r^{-2n}\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}(1-r^2)^{-1},$$

где $\xi = \frac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1})$. Полагая $r^2 = 1-\frac{1}{n}$ при $n \geqslant 2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, получаем неравенство

$$|p_n(x)| < \left(\frac{\pi\mu}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} n < 4\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} n. \tag{7.1.7}$$

При $-1 < x < +1$ мы можем показатель степени при n, равный единице, в (7.1.7) заменить показателем $\frac{1}{2}$ (см. (7.71.28)).

(4) Этот же элементарный метод дает представление о величине многочлена Якоби при больших n. В этом случае $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, и (см. (10.2.13)) будем иметь

$$D(z) = 2^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}}(1-z)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+z)^{\beta+\frac{1}{2}}. \tag{7.1.8}$$

Из (7.1.2) вытекает неравенство

$$\pi^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}}|1-z|^{\alpha+\frac{1}{2}}|1+z|^{\beta+\frac{1}{2}}|p_n(x)z^n| < (1-|z|^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$x = \frac{1}{2}(z+z^{-1}), \quad |z| < 1. \tag{7.1.9}$$

Предположим теперь, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$; мы получаем, подобно тому, как в (3), неравенство

$$|p_n(x)| < Cr^{-2n}(1-r^2)^{-\frac{1}{2}}\max_{|\zeta|=r}|1-\zeta|^{-\alpha-\frac{1}{2}}|1+\zeta|^{-\beta-\frac{1}{2}}, \tag{7.1.10}$$

где C зависит только от α и β, а r лежит в промежутке $0 < r < 1$. Положим опять $r^2 = 1-\frac{1}{n}$. Рассматривая правую часть (7.1.10) при $|\zeta| = r$, $\Re(\zeta) \geqslant 0$, и при $|\zeta| = r$, $\Re(\zeta) \leqslant 0$, мы получаем

$$|p_n(x)| < C'n^{\max\left(\alpha+1,\ \beta+1,\ \frac{1}{2}\right)}, \quad -1 \leqslant x \leqslant +1, \tag{7.1.11}$$

где C' зависит только от α и β. «Истинный» показатель степени при n должен быть $\max\left(\alpha+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}, 0\right)$ (см. (7.32.2)).

Для дальнейшего формулируем (7.1.9) в терминах многочленов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ (см. (4.3.4)). Если x не принадлежит отрезку $[-1, +1]$, то

$$\left.\begin{aligned} &P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=n^{-\frac{1}{2}}O(|z|^{-n}),\\ &x=\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\ |z|<1,\ \alpha>-1,\ \beta>-1,\ n\to\infty,\end{aligned}\right\} \qquad (7.1.12)$$

причем это имеет место равномерно во внешности любой замкнутой кривой, содержащей внутри себя отрезок $[-1, +1]$. Неравенство (7.1.12) следует, очевидно, непосредственно из асимптотической формулы (8.21.9).

(5) Следующая теорема весьма полезна при получении оценок для ортонормальных многочленов.

Теорема 7.1.3. *Пусть $w(x)$ и $\widetilde{w}(x)$ — две весовые функции на отрезке $[-1, +1]$ и пусть $\frac{w(x)}{\widetilde{w}(x)}=k(x)$. Предположим, что $k(x)\geqslant k>0$ и что эта функция удовлетворяет условию Липшица*

$$|k(x_1)-k(x_2)|<\lambda|x_1-x_2|. \qquad (7.1.13)$$

Если $\{p_n(x)\}$ и $\{\widetilde{p}_n(x)\}$ — ортонормальные многочлены, соответствующие весовым функциям $w(x)$ и $\widetilde{w}(x)$, то

$$|p_n(x)|\leqslant k^{-\frac{1}{2}}|\widetilde{p}_n(x)|+\lambda k^{-\frac{3}{2}}\{|\widetilde{p}_n(x)|+|\widetilde{p}_{n-1}(x)|\}. \qquad (7.1.14)$$

Эта теорема принадлежит Кораусу [3]. Доказательство вытекает из тождества (см. (3.2.3))

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \int_{-1}^{+1} p_n(t)\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\widetilde{p}_\nu(x)\widetilde{p}_\nu(t)\right\}\widetilde{w}(t)\,dt=\\ &=\frac{k_n}{\widetilde{k}_n}\widetilde{p}_n(x)+\int_{-1}^{+1}p_n(t)\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\widetilde{p}_\nu(x)\widetilde{p}_\nu(t)\right\}\widetilde{w}(t)\left(1-\frac{k(t)}{k(x)}\right)dt=\\ &=\frac{k_n}{\widetilde{k}_n}\widetilde{p}_n(x)+\frac{\widetilde{k}_{n-1}}{\widetilde{k}_n}\frac{1}{k(x)}\int_{-1}^{+1}p_n(t)\{\widetilde{p}_n(x)\widetilde{p}_{n-1}(t)-\\ &\qquad -\widetilde{p}_{n-1}(x)\widetilde{p}_n(t)\}\widetilde{w}(t)\frac{k(x)-k(t)}{x-t}\,dt,\end{aligned}$$

где k_n имеет то же значение, что в (2.2.15), а $\widetilde{k}_n$ — соответствующее значение для $\widetilde{p}_n(x)$. По неравенству Буняковского—Шварца имеем

$$\begin{aligned}\frac{k_n}{\widetilde{k}_n} &= \int_{-1}^{+1}p_n(t)\widetilde{p}_n(t)\widetilde{w}(t)\,dt\leqslant\left\{\int_{-1}^{+1}p_n^2(t)\widetilde{w}(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{-1}^{+1}\widetilde{p}_n^2(t)\widetilde{w}(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}=\\ &=\left\{\int_{-1}^{+1}[k(t)]^{-1}w(t)\,p_n^2(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant k^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$\frac{\widetilde{k}_{n-1}}{\widetilde{k}_n}=\int_{-1}^{+1}t\widetilde{p}_{n-1}(t)\widetilde{p}_n(t)\widetilde{w}(t)\,dt\leqslant\int_{-1}^{+1}|\widetilde{p}_{n-1}(t)|\,|\widetilde{p}_n(t)|\,|\widetilde{w}(t)|\,dt\leqslant 1,$$

$$\left|\int_{-1}^{+1}p_n(t)\widetilde{p}_{n-1}(t)\widetilde{w}(t)\,dt\right|\leqslant\left\{\int_{-1}^{+1}p_n^2(t)\widetilde{w}(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant k^{-\frac{1}{2}},$$

откуда и вытекает (7.1.14).

Отметим два важных частных случая, которые непосредственно вытекают из (7.1.14), если применить оценки для многочленов Лежандра и Чебышева (по поводу первого случая см. (7.21.1) и (7.3.8)).

a) Если $w(x)$ положительна и удовлетворяет условию Липшица $|w(x_1)-w(x_2)|<\lambda|x_1-x_2|$, то мы имеем

$$|p_n(x)|<\begin{cases} An^{\frac{1}{2}}, \\ A'(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad -1<x<+1, \end{cases} \tag{7.1.15}$$

где положительные постоянные A и A' не зависят от x и n.

b) Если $w(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}k(x)$, где $k(x)$ – положительная функция, удовлетворяющая условию Липшица $|k(x_1)-k(x_2)|<\lambda|x_1-x_2|$, то мы имеем

$$|p_n(x)|<A, \qquad -1<x<+1, \tag{7.1.16}$$

где A не зависит от x и n.

По поводу других элементарных рассуждений аналогичного характера см. Шохат [4], стр. 165—166, и Джексон [6], стр. 893—898; см. также § 7.71, (6).

7.2. Монотонные весовые функции

Теорема 7.2. *Пусть $w(x)$ — весовая функция, не убывающая на отрезке $[a, b]$, где b — конечное число. Если $\{p_n(x)\}$ — последовательность соответствующих ортогональных многочленов, то функция $\{w(x)\}^{\frac{1}{2}}|p_n(x)|$ достигает своего максимума в $[a, b]$ в точке $x=b$.*

См. Сегё [3]. Соответствующее утверждение справедливо также для отрезка $[x_0, b]$, являющегося частью $[a, b]$, если только функция $w(x)$ монотонна в $[x_0, b]$.

Доказательство основано на тождестве

$$w(b)\,p_n^2(b)-w(x)\,p_n^2(x)=2\int_x^b w(t)\,p_n(t)\,p_n'(t)\,dt+\int_x^b p_n^2(t)\,dw(t),$$

которое вытекает из (1.4.4). Достаточно показать, что это выражение неотрицательно на $a\leqslant x\leqslant b$. Обозначая через $x_1<x_2<\ldots<x_n$ нули многочлена $p_n(x)$, записанные в возрастающем порядке, мы имеем $p_n(t)\,p_n'(t)>0$ при $t>x_n$ и $p_n(t)\,p_n'(t)<0$ при $t<x_1$. Следовательно, утверждение тривиально для отрезка $x_n\leqslant x\leqslant b$, а для $a\leqslant x\leqslant x_1$ вытекает из тождества

$$\int_x^b w(t)\,p_n(t)\,p_n'(t)\,dt=\int_a^b w(t)\,p_n(t)\,p_n'(t)\,dt-$$
$$-\int_a^x w(t)\,p_n(t)\,p_n'(t)\,dt=-\int_a^x w(t)\,p_n(t)\,p_n'(t)\,dt.$$

Здесь мы использовали монотонность $w(x)$ только на отрезке $x\leqslant t\leqslant b$.

Пусть теперь $x_\nu\leqslant x\leqslant x_{\nu+1}$, $\nu=1, 2, \ldots, n-1$; $n\geqslant 2$. Если мы введем новую весовую функцию

$$W(x)=w(x)\{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\nu)\}^2,$$

то соответствующим ортогональным многочленом степени $n-\nu$ будет с точностью до положительного постоянного множителя

$$q_{n-\nu}(x) = \frac{p_n(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_\nu)},$$

с нулями $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \dots, x_n$. Действительно, если $\rho(x)$ — произвольный $\pi_{n-\nu-1}$, то

$$\int_a^b W(x)\, q_{n-\nu}(x)\, \rho(x)\, dx = \int_a^b w(x)\, p_n(x)\, (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_\nu)\, \rho(x)\, dx = 0.$$

Но $W(x)$ монотонно возрастает на отрезке $x_\nu \leqslant x \leqslant b$, следовательно, в силу предыдущих рассуждений при $x_\nu \leqslant x \leqslant x_{\nu+1}$ мы имеем

$$W(b)\, q_{n-\nu}^2(b) - W(x)\, q_{n-\nu}^2(x) = w(b)\, p_n^2(b) - w(x)\, p_n^2(x) \geqslant 0.$$

В дополнение мы заключаем, что равенство $w(b)\, p_n^2(b) = w(\xi)\, p_n^2(\xi)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\xi < x_1$, а $w(t)$ обращается в нуль в $[a, \xi]$ (ясно, что это условие не имеет смысла, если $a=\xi$) и кусочно-постоянна в $[\xi, b]$. Кроме того, $p_n(t)$ должна обращаться в нуль в точках роста $w(t)$. (Весовая функция $w(x)$ не может обращаться в нуль при $x \geqslant x_1$.)

7.21. Применения

Полагая $a=-1$, $b=+1$ и $w(x)=1$, мы получаем важное неравенство:

$$|P_n(x)| \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant x \leqslant +1, \tag{7.21.1}$$

для многочленов Лежандра $P_n(x)$, $P_n(1)=1$. Если $n>0$, то знак равенства достигается только в точках $x=\pm 1$.

Другой интересный случай: $a=-1$, $b=+1$, $w(x)=|x|^{2k}$, $k>0$. В силу (4.1.6) мы имеем $|x|^k \left| P_\nu^{\left(0,\, k-\frac{1}{2}\right)}(2x^2-1) \right| \leqslant P_\nu^{\left(0,\, k-\frac{1}{2}\right)}(1) = 1$, следовательно,

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} |P_n^{(\alpha,0)}(x)| \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \qquad \alpha \geqslant -\frac{1}{2}. \tag{7.21.2}$$

Знак равенства имеет место только при $x=-1$. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ при больших n это неравенство менее точно, чем первое из неравенств (7.32.6).

В случае $a=0$, $b=+\infty$, $w(x)=e^{-x}$ мы получаем для многочленов Лагерра оценку

$$e^{-\frac{x}{2}} |L_n(x)| \leqslant 1, \qquad x \geqslant 0, \tag{7.21.3}$$

причем равенство достигается только в точке $x=0$, если $n>0$. В связи с этим случаем см. Сегё [2] и [3].

7.3. Многочлены Лежандра

Другое доказательство (7.21.1) и различные иные важные неравенства можно получить, используя дифференциальное уравнение для многочленов Лежандра.

(1) Теорема 7.3.1. *Пусть $n \geqslant 2$. Последовательные относительные максимумы $|P_n(x)|$ при убывании x от единицы до нуля образуют убывающую последовательность. Точнее говоря, если $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ означают*

максимумы, соответствующие убывающим значениям x, то

$$1>\mu_1>\mu_2>\ldots>\mu_{\left[\frac{n}{2}\right]}. \qquad (7.3.1)$$

Отсюда снова вытекает (7.21.1). Если n четно, то

$$\mu_{\frac{n}{2}}=|P_n(0)|=\frac{1\cdot 3\ldots(n-1)}{2\cdot 4\ldots n}.$$

Для доказательства положим

$$n(n+1)f(x)=n(n+1)P_n^2(x)+(1-x^2)P_n'^2(x). \qquad (7.3.2)$$

Тогда мы имеем $f(x)=P_n^2(x)$ в точках, где $P_n'(x)=0$, а также при $x=\pm 1$. Следовательно,

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant +1} P_n^2(x)\leqslant \max_{-1\leqslant x\leqslant +1} f(x). \qquad (7.3.3)$$

Далее, учитывая (4.2.1), имеем

$$n(n+1)f'(x)=2P_n'(x)\{n(n+1)P_n(x)-xP_n'(x)+(1-x^2)P_n''(x)\}=$$
$$=2P_n'(x)\cdot xP_n'(x)=2xP_n'^2(x), \qquad (7.3.4)$$

следовательно, функция $f(x)$ является убывающей при $x<0$ и возрастающей при $x>0$. Это доказывает наше утверждение.

(2) Теорема 7.3.2. *Пусть $n\geqslant 2$. Последовательные относительные максимумы функции $(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}|P_n(\cos\theta)|$ при θ возрастающих от 0 до $\frac{\pi}{2}$ образуют возрастающую последовательность.*

Из (4.24.2) при $\alpha=\beta=0$ мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u}{d\theta^2}+\varphi(\theta)u=0, \qquad u=u(\theta)=(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}P_n(\cos\theta),\\ &\varphi(\theta)=(2\sin\theta)^{-2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (7.3.5)$$

Полагая

$$f(\theta)=u^2(\theta)+\psi(\theta)u'^2(\theta), \qquad \psi(\theta)=\{\varphi(\theta)\}^{-1}, \qquad (7.3.6)$$

мы получаем

$$f'(\theta)=2u'(\theta)\left\{u(\theta)+\psi(\theta)u''(\theta)+\frac{1}{2}\psi'(\theta)u'(\theta)\right\}=\psi'(\theta)u'^2(\theta). \qquad (7.3.7)$$

Так как $\psi(\theta)$ — возрастающая функция на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, то $f'(\theta)>0$, и стало быть, $f(\theta)$ — возрастающая функция. Но $f(\theta)=u^2(\theta)$ при $u'(\theta)=0$; это и доказывает теорему.

(3) Важным применением теоремы 7.3.2 является результат:

Теорема 7.3.3. *Имеет место неравенство*

$$(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}|P_n(\cos\theta)|<\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \qquad (7.3.8)$$

причем константа $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ не может быть заменена меньшей.

Первое доказательство неравенства вида (7.3.8) с константой A вместо $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ было дано Стильтьесом ([8], стр. 241). Другие доказательства были указаны Гронуоллом ([1], стр. 221) и Фейером ([9], стр. 289—291). Приводимое ниже доказательство принадлежит

С. Н. Бернштейну ([2], стр. 65); это было первое доказательство, которое привело к точной константе $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Пусть n — четное. По теореме (7.3.2) имеем

$$(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\,|P_n(\cos\theta)|\leqslant|P_n(0)|,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \tag{7.3.9}$$

где знак равенства достигается при $\theta=\frac{\pi}{2}$. Пусть теперь n — нечетное число. Тогда при $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ мы будем иметь

$$(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\,|P_n(\cos\theta)|<\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}\{f(\theta)\}^{\frac{1}{2}}=\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\left\{\frac{1}{4}+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}|P_n'(0)|, \tag{7.3.10}$$

где $f(\theta)$ определяется равенством (7.3.6). Используя обозначения (4.9.2), мы можем написать [1])

$$\left.\begin{aligned}
&|P_n(0)|=g_{\frac{n}{2}}<\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}, && n\text{ — четное},\\
&|P_n'(0)|=(n+1)\,g_{\frac{n+1}{2}}<\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{1}{2}}, && n\text{ — нечетное}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.3.11}$$

(Во втором случае мы можем применить (4.7.31).) Но так как

$$\left\{\frac{1}{4}+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}(n+1)^{\frac{1}{2}}<n^{-\frac{1}{2}},$$

то отсюда вытекает (7.3.8).

То, что константа $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ является наилучшей, легко видеть, рассматривая $|P_n(0)|$ при четных n. Кроме того, мы имеем (см. (7.32.9), $\alpha=\beta=0$)

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\,|P_n(\cos\theta)|\cong\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}},\quad n\to\infty. \tag{7.3.12}$$

7.31. Теорема Сонина. Функции Бесселя

Рассуждения, примененные в предыдущем параграфе, могут быть различными путями обобщены. В частности, справедлива следующая важная теорема:

Теорема 7.31.1. *Пусть $y=y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$y''+\varphi(x)\,y=0, \tag{7.31.1}$$

[1]) Последовательность $\{m^{\frac{1}{2}}g_m\}$ — возрастающая, поэтому

$$m^{\frac{1}{2}}g_m<\lim_{m\to\infty}m^{\frac{1}{2}}g_m=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

где $\varphi(x)$ — положительная функция, имеющая непрерывную производную постоянного знака в промежутке $x_0 < x < X_0$. Тогда последовательные относительные максимумы функции $|y|$ при x, возрастающем от x_0 до X_0, образуют возрастающую или убывающую последовательность в соответствии с тем, убывает или возрастает функция $\varphi(x)$ [1]).

Действительно, если мы положим

$$f(x) = y^2(x) + \{\varphi(x)\}^{-1} y'^2(x) = y^2(x) + \psi(x) y'^2(x), \tag{7.31.2}$$

то будем иметь $f(x) = y^2(x)$, если $y'(x) = 0$, и

$$f'(x) = 2y'(x)\left\{y(x) + \psi(x) y''(x) + \frac{1}{2}\psi'(x) y'(x)\right\} = \psi'(x) y'^2(x). \tag{7.31.3}$$

Следовательно, $\operatorname{sign} f'(x) = -\operatorname{sign} \varphi'(x)$; из этого следует справедливость утверждения теоремы.

В качестве иллюстрации мы применим этот результат к уравнению (1.8.9) при $k=1$, $x>0$. Мы имеем

$$\varphi(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2}, \tag{7.31.4}$$

и, следовательно, $\varphi(x)$ — убывающая функция при $\alpha^2 < \frac{1}{4}$ и возрастающая при $\alpha^2 > \frac{1}{4}$. В последнем случае x надо выбрать столь большим, чтобы $\varphi(x) > 0$. Мы заключаем из этого, что относительные максимумы функции $x^{\frac{1}{2}} |J_\alpha(x)|$ образуют возрастающую последовательность при $\alpha^2 < \frac{1}{4}$ и убывающую последовательность при $\alpha^2 > \frac{1}{4}$. В первом случае $x > 0$, а во втором случае $x > \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

В соответствии с (1.71.7) имеется бесконечная последовательность таких максимумов, причем они стремятся к $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$. Мы можем формулировать следующую теорему:

Теорема 7.31.2. *Если через $J_\alpha(x)$ обозначена бесселева функция порядка α, то справедливо соотношение*

$$\sup_{x \geqslant 0} \{x^{\frac{1}{2}} |J_\alpha(x)|\} = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{при } -\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}, \\ \text{конечен}, \quad > \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{при } \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{7.31.5}$$

При $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ можно применить формулу (1.71.2). При $\alpha < -\frac{1}{2}$ мы имеем $x^{\frac{1}{2}} J_\alpha(x) \to \infty$ при $x \to 0$ (см. (1.71.1)). В этом случае справедливо

---

[1]) Профессор Полиа любезно указал мне следующее обобщение этой теоремы. *Пусть $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$(k(x) y')' + \varphi(x) y = 0,$$

где $k(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ и обе функции $k(x)$ и $\varphi(x)$ имеют непрерывные производные. Тогда относительные максимумы функции $|y|$ образуют возрастающую или убывающую последовательность в соответствии с тем, убывает или возрастает функция $k(x)\varphi(x)$.

утверждение второй части теоремы, если только рассматриваемая верхняя грань берется на произвольной полупрямой $[x_0, +\infty)$ при $x_0 > 0$.

См. Сегё [17], стр. 40—44, а также аналогичные теоремы в книге Ватсона [3], стр. 488—489. См. также § 7.8.

7.32. Многочлены Якоби

(1) Рассуждения, проведенные в § 7.3, легко могут быть распространены на ультрасферические многочлены. Это будет сделано в § 7.33. Однако сначала мы остановимся на общих многочленах Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Основная трудность в применении предыдущего метода к многочленам $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ состоит в том, что нет такой специальной точки $x=\xi$ внутри промежутка $(-1, +1)$, в которой бы многочлен $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ и его производные легко вычислялись, как это имеет место в случае ультрасферических многочленов, в частности многочленов Лежандра, в точке $x=0$. Ввиду этого нам приходится здесь опираться на некоторые сравнительно простые результаты главы VIII[1]). А именно, следующие:

(a) Формула типа Мелера—Гейне (см. (8.1.1)):

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} P_n^{(\alpha, \beta)}\left(\cos\frac{z}{n}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(z),$$

которая справедлива равномерно в круге $|z| \leqslant R$, где R фиксировано.

(b) Формула Дарбу (см. (8.21.10)):

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos\theta) = n^{-\frac{1}{2}} k(\theta)\cos(N\theta+\gamma) + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$k(\theta) = \pi^{-\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}},$$

$$N = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \quad \gamma = -\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi-\varepsilon, \quad n \to \infty.$$

Здесь ε—фиксированное положительное число; оценка остаточного члена имеет место равномерно. Как в (a), так и в (b) параметры α и β суть произвольные вещественные числа.

Относительно результатов этого пункта и следующих см. Когбетлянц ([19], стр. 125), С. Н. Бернштейн [2], Сегё [17].

(2) Теорема 7.32.1. *Пусть* $\alpha > -1$, $\beta > -1$,

$$x_0 = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+1}. \tag{7.32.1}$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant+1} |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| = \begin{cases} \binom{n+q}{n} \sim n^q, & \text{если } q = \max(\alpha, \beta) \geqslant -\frac{1}{2}, \\ |P_n^{(\alpha, \beta)}(x')| \sim n^{-\frac{1}{2}}, & \text{если } q = \max(\alpha, \beta) < -\frac{1}{2}, \end{cases} \tag{7.32.2}$$

где x' — одна из двух ближайших к точке x_0 точек, в которых достигается относительный максимум.

---

1) После того как рукопись уже была закончена, автор получил статью Корауса [5], в которой некоторые из результатов § 7.32 выведены с помощью дифференциального уравнения для многочленов Якоби, но без применения асимптотических формул (8.1.1) и (8.21.10).

Знак $\sim$ относится к предельному переходу при $n \to \infty$. Во втором случае $-1 < x_0 < +1$, и можно применить (8.21.10). Приводимое ниже рассуждение дает более точный результат, состоящий в том, что $\max |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)|$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ равен $n^{\max\left(\alpha, -\frac{1}{2}\right)}$; аналогичный результат имеет место при $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

Для доказательства обобщим рассуждение § 7.3, (1) следующим образом. Пусть $n \geqslant 1$ и пусть

$$n(n+\alpha+\beta+1) f(x) =$$
$$= n(n+\alpha+\beta+1)\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}^2 + (1-x^2)\left\{\frac{}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\right\}^2. \qquad (7.32.3)$$

Учитывая (4.2.1), получаем

$$n(n+\alpha+\beta+1) f'(x) = 2\{\alpha-\beta+(\alpha+\beta+1)x\}\left\{\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\right\}^2, \quad (7.32.4)$$

так что функция $f'(x)$ может изменить свой знак только в точке $x = x_0$. Итак, условие $-1 < x_0 < +1$ эквивалентно условию $\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\left(\beta + \frac{1}{2}\right) > 0$.

Пусть теперь $\alpha > -\frac{1}{2}$ и $\beta > -\frac{1}{2}$. Тогда последовательность, образованная относительными максимумами функции $|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)|$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant x_0$ и значением этой функции при $x = -1$, является убывающей, в то время как максимумы на отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant +1$ и значение в точке $x = +1$ образуют возрастающую последовательность. Следовательно, $|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)|$ достигает своего абсолютного максимума на отрезке $[-1, +1]$ в одном из концов отрезка.

В случае, когда $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$ и $-1 < \beta \leqslant -\frac{1}{2}$, линейная функция $\alpha - \beta + (\alpha+\beta+1)x$ неотрицательна, и последовательность относительных максимумов, которую мы рассматриваем, является возрастающей на отрезке $[-1, +1]$, за исключением случая $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, когда все члены последовательности равны; заключения будут иметь противоположный смысл, если $\beta \geqslant -\frac{1}{2}$, $-1 \leqslant \alpha \leqslant -\frac{1}{2}$. Наконец, пусть $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$, $-1 < \beta < -\frac{1}{2}$, тогда опять $-1 < x_0 < +1$; последовательность максимумов будет возрастающей на отрезке $[-1, x_0]$ и убывающей на отрезке $[x_0, 1]$. Стало быть, абсолютный максимум функции $|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)|$ на отрезке $[-1, +1]$ достигается в экстремальной точке, ближайшей к x_0 слева или справа.

См. задачу 39.

(3) Теорема 7.32.2. *Пусть α и β — произвольные вещественные числа, а c — фиксированная положительная постоянная. Тогда при $n \to \infty$*

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos\theta) = \begin{cases} \theta^{-\alpha-\frac{1}{2}} O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right), & \textit{если } cn^{-1} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ O(n^\alpha), & \textit{если } 0 \leqslant \theta \leqslant cn^{-1}. \end{cases} \qquad (7.32.5)$$

См. работу С. Н. Бернштейна ([2], стр. 56—65), в которой используется теорема Сонина, но где доказательство, быть может, несколько более сложно, чем наше. Сегё ([17], стр. 77) исходил из асимптотической формулы (8.21.17), которая несомненно является более сложным аппаратом, чем формулы (8.1.1) и (8.21.10), применяемые ниже.

Границы в (7.32.5) точны относительно порядка n. Как было упомянуто, они вытекают также из более сложной асимптотической формулы (8.21.17) типа формул Гильба. Учитывая (4.1.3), мы можем получить аналогичные оценки для отрезка $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Отметим полезные соотношения, которые следуют из (7.32.5):

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=\begin{cases}\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),\\ O(n^{\alpha}),\end{cases}\qquad 0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad \alpha\geqslant-\frac{1}{2},\tag{7.32.6}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),\qquad 0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad \alpha\leqslant-\frac{1}{2}.\tag{7.32.7}$$

Относительно второй оценки в (7.32.6) и относительно (7.32.7) см. § 7.32, (2).

Заметим, что $\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\sim n^{\alpha}$ при $\theta\sim n^{-1}$; следовательно, достаточно доказать (7.32.5) при частном значении c. Применим теорему 7.31.1 к уравнению (4.24.2), полагая

$$\left.\begin{aligned}&x=\theta,\ \ y=u_n(\theta)=\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta),\\ &\varphi(\theta)=\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{\frac{1}{4}-\beta^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}+\left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2.\end{aligned}\right\}\tag{7.32.8}$$

Пусть сначала $\delta=\delta(\alpha,\beta)$ — достаточно малое фиксированное положительное число. Тогда функция $\varphi(\theta)$ будет положительной и убывающей в $0<\theta\leqslant\delta$, если $\alpha^2<\frac{1}{4}$. Она будет положительной и возрастающей на отрезке $kn^{-1}\leqslant\theta\leqslant\delta$, если $\alpha^2>\frac{1}{4}$; здесь k—фиксированное число, такое, что $k>\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, а n — достаточно большое. Следовательно, в обоих случаях функция $\varphi(\theta)$ положительна и монотонна на отрезке $kn^{-1}\leqslant\theta<\delta$, где $k=k(\alpha,\beta)$, $\delta=\delta(\alpha,\beta)$, а n достаточно велико. То же справедливо при $\alpha^2=\frac{1}{4}$, $\beta^2\neq\frac{1}{4}$. Таким образом, последовательность относительных максимумов функции $|u_n(\theta)|$ на отрезке $kn^{-1}\leqslant\theta\leqslant\delta$ является возрастающей, если $\alpha^2<\frac{1}{4}$, и убывающей, если $\alpha^2>\frac{1}{4}$. В соответствии с (8.1.1) и (8.21.10) мы находим в обоих случаях, что $u_n(\theta)=O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$. (Мы имеем $\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}\sim\theta^{\alpha+\frac{1}{2}}$). Этим доказана первая часть (7.32.5) при $c=k$. Вторая часть непосредственно вытекает из (8.1.1).

В случае $\alpha^2=\beta^2=\frac{1}{4}$, исключенном выше, функция $\varphi(\theta)$ равна постоянной. Многочлены $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$ известны в явном виде (см. (4.1.7) и (4.1.8)).

(4) Теорема 7.32.3. *Пусть $u_n(\theta)$ имеет тот же смысл, что в* (7.32.8), *а* $M_n=\max|u_n(\theta)|$ *при* $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}M_n=\begin{cases}\pi^{-\frac{1}{2}},&\text{если }-\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant+\frac{1}{2},\\ \text{конечен},\ >\pi^{-\frac{1}{2}},&\text{если }\alpha>\frac{1}{2}.\end{cases}\tag{7.32.9}$$

Здесь β предполагается большим чем -1.

См. С. Н. Бернштейн [2], стр. 56—65, Сегё [17], стр. 79—80; см. теорему 7.31.2. Предыдущие рассуждения нуждаются лишь в небольшом видоизменении. Нужно рассмотреть максимум функции $n^{\frac{1}{2}}|u_n(\theta)|$ при $\delta\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, если $-\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant+\frac{1}{2}$, и при $\theta=n^{-1}z$, $0\leqslant z\leqslant c$, если $\alpha>\frac{1}{2}$. В первом случае (в соответствии с (8.21.10)) этот максимум $\cong\pi^{-\frac{1}{2}}$ при $n\to\infty$; во втором случае он будет

$$\cong n^{\frac{1}{2}}\max_{0\leqslant z\leqslant c}\left\{\left(\frac{z}{2n}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}n^{\alpha}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha}|J_\alpha(z)|\right\}=\max_{0\leqslant z\leqslant c}\left\{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}|J_\alpha(z)|\right\}$$

(в соответствии с (8.1.1)). При достаточно больших c это выражение не зависит от c и больше чем $\pi^{-\frac{1}{2}}$ (теорема 7.31.2).

(5) Наконец, в качестве приложения тождества (4.21.7) отметим следующее обобщение теоремы 7.32.2:

Теорема 7.32.4. *Пусть α и β — произвольные вещественные числа, а c — фиксированная положительная постоянная, $n\to\infty$. Тогда*

$$\left\{\frac{d^k}{dx^k}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}_{x=\cos\theta}=\begin{cases}\theta^{-\alpha-k-\frac{1}{2}}O\left(n^{k-\frac{1}{2}}\right) & \textit{при}\quad cn^{-1}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\\ O(n^{2k+\alpha}) & \textit{при}\quad 0\leqslant\theta\leqslant cn^{-1}.\end{cases}\qquad(7.32.10)$$

Из этого следует, что равномерно по x, $-1\leqslant x\leqslant+1$, выполняется соотношение

$$\frac{d^k}{dx^k}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=O(n^q),\quad q=\max\left(2k+\alpha,\ 2k+\beta,\ k-\frac{1}{2}\right).\qquad(7.32.11)$$

7.33. Ультрасферические многочлены

В случае ультрасферических многочленов предыдущие рассуждения могут быть упрощены.

(1) С помощью тех же рассуждений, что в § 7.32, (2), мы находим, что функция

$$n(n+2\lambda)f(x)=n(n+2\lambda)\{P_n^{(\lambda)}(x)\}^2+(1-x^2)\left\{\frac{d}{dx}P_n^{(\lambda)}(x)\right\}^2$$

является монотонно возрастающей на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$, если $\lambda>0$, и монотонно убывающей, если $\lambda<0$; здесь предполагается, что λ — нецелое число. В первом случае считаем, что $n>0$, а во втором, — что $n>-2\lambda$. Мы получаем следующую теорему:

Теорема 7.33.1. *Справедливы соотношения*

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant+1}|P_n^{(\lambda)}(x)|=\begin{cases}\binom{n+2\lambda-1}{n}, & \textit{если}\quad\lambda>0,\\ |P_n^{(\lambda)}(x')|, & \textit{если}\quad\lambda<0,\quad\lambda - \textit{нецелое},\end{cases}\qquad(7.33.1)$$

где x' — одна из двух ближайших к точке $x=0$ точек, где достигается относительный максимум, когда n — нечетное число; $x'=0$ при n четном.

В первом случае мы применяем (4.7.3) (см. также теорему 7.4.1). Во втором случае, если n четно, то мы имеем

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P_n^{(\lambda)}(x)|=|P_n^{(\lambda)}(0)|=\left|\binom{\frac{n}{2}+\lambda-1}{\frac{n}{2}}\right|;\qquad(7.33.2)$$

в случае же, когда n нечетно, то

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P_n^{(\lambda)}(x)| < \{f(0)\}^{\frac{1}{2}} = \{n(n+2\lambda)\}^{-\frac{1}{2}} |P_n^{(\lambda)\prime}(0)| =$$

$$= |2\lambda| \{n(n+2\lambda)\}^{-\frac{1}{2}} \left| \binom{\lambda+\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} \right|. \quad (7.33.3)$$

При $n \to \infty$ обе границы в (7.33.2) и (7.33.3) будут $\cong 2^{1-\lambda} |\Gamma(\lambda)|^{-1} n^{\lambda-1}$; первая из границ достигается при $x=0$, вторая точна в асимптотическом смысле.

(2) Исходя из уравнения (4.7.11), мы получаем, рассуждая подобно тому, как в § 7.3, (2), (3), следующий результат:

Теорема 7.33.2. *Пусть* $0<\lambda<1$. *При* $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ *справедливы неравенства*

$$(\sin\theta)^\lambda |P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \alpha_{\frac{n}{2}} & \text{при } n \text{ четном}, \\ \{\lambda(1-\lambda)+(n+\lambda)^2\}^{-\frac{1}{2}}(n+1)\,\alpha_{\frac{n+1}{2}} & \text{при } n \text{ нечетном}. \end{cases} \quad (7.33.4)$$

и

$$(\sin\theta)^\lambda |P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)| < 2^{1-\lambda}\{\Gamma(\lambda)\}^{-1} n^{\lambda-1}. \quad (7.33.5)$$

Здесь константа $2^{1-\lambda}\{\Gamma(\lambda)\}^{-1}$ *не может быть заменена меньшей;* α_n *имеет тот же смысл, что в* (4.9.21).

В (7.33.4) знак равенства имеет место только при четных n в точке $\theta=\frac{\pi}{2}$. Далее, $\alpha_n \cong \{\Gamma(\lambda)\}^{-1} n^{\lambda-1}$, причем $\alpha_n < \{\Gamma(\lambda)\}^{-1} n^{\lambda-1}$, так как последовательность $\{n^{1-\lambda}\alpha_n\}$ — возрастающая; кроме того [1], $\{\lambda(1-\lambda)+(n+\lambda)^2\}^{-\frac{1}{2}}(n+1)^\lambda < n^{\lambda-1}$, откуда и следует (7.33.5).

Менее точные (но более общие) неравенства могут быть получены из общего результата (7.32.5) при $\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}$. Мы имеем

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \begin{cases} \theta^{-\lambda} O(n^{\lambda-1}), & cn^{-1}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ O(n^{2\lambda-1}), & 0\leqslant\theta\leqslant cn^{-1}, \end{cases} \quad (7.33.6)$$

где λ — произвольное вещественное, $\lambda\neq 0, -1-2, \ldots, c>0$.

(3) Отметим один интересный частный случай соотношений (7.33.6), а именно $\lambda=\frac{3}{2}$ (см. Сегё [16]). Мы имеем $P_n'(x) = P_{n-1}^{\left(\frac{3}{2}\right)}(x)$ (см. (4.7.14)), следовательно,

$$P_n'(\cos\theta) = \begin{cases} \theta^{-\frac{3}{2}} O\left(n^{\frac{1}{2}}\right), & cn^{-1}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ O(n^2), & 0\leqslant\theta\leqslant cn^{-1}. \end{cases} \quad (7.33.7)$$

---

[1]) Ввиду выпуклости кверху функции $\ln x$ мы имеем

$$(1-\lambda)\ln(n-1)+\lambda\ln n < \ln(n+\lambda-1),$$

$$(1-\lambda)\ln n^2+\lambda\ln(n+1)^2 < \ln\{(1-\lambda)n^2+\lambda(n+1)^2\}.$$

Первая оценка может применяться на всем промежутке $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ (см. (7.32.6)). В соответствии с (7.33.1) справедливо неравенство

$$|P'_n(x)|\leqslant\frac{n(n+1)}{2},\quad -1\leqslant x\leqslant+1, \tag{7.33.8}$$

причем знак равенства достигается при $n=0,1$, а при $n>1$ только в точках $x=\pm 1$.

Исходя из тождества (4.7.27), мы находим

$$(1-x^2)P'_n(x)=\frac{n(n+1)}{2n+1}\{P_{n-1}(x)-P_{n+1}(x)\}. \tag{7.33.9}$$

Мы заключаем из первой оценки (7.33.7) (которая имеет место теперь во всем интервале $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$; см. предыдущее замечание), что справедливо следующее предложение:

Теорема 7.33.3. *Если $P_n(x)$ означает многочлен Лежандра, то при $0<\theta<\pi$ имеем*

$$P_{n-1}(\cos\theta)-P_{n+1}(\cos\theta)=(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right), \tag{7.33.10}$$

причем множитель в $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$ не зависит от θ.

Этот результат без множителя $(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}$ принадлежит Стилтьесу (см. Эрмит—Стилтьес [1], том 2, стр. 174—177; Фейер [9], стр. 295—298). Настоящая форма теоремы является частным случаем более общих результатов С. Н. Бернштейна, Сегё и Когбетлянца; см. Сегё [16].

7.34. Оценки интегралов, содержащих многочлены Якоби

Теорема 7.34. *Пусть α, β, μ — вещественные числа, каждое из которых больше, чем -1. Тогда при $n\to\infty$ (относительно второй части утверждения см. ниже) имеем*

$$\int_0^1(1-x)^{\mu}|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\,dx\sim\begin{cases} n^{\alpha-2\mu-2}, & 2\mu<\alpha-\frac{3}{2},\\ n^{-\frac{1}{2}}\ln n, & 2\mu=\alpha-\frac{3}{2},\\ n^{-\frac{1}{2}}, & 2\mu>\alpha-\frac{3}{2}.\end{cases} \tag{7.34.1}$$

См. Сегё [17], стр. 84—86, где доказано существование пределов соответствующих отношений и вычислены эти пределы. Доказательство второй части (7.34.1) требует более сложного аппарата (а именно (8.21.18)); здесь мы докажем только, что

$$u_n=n^{\frac{1}{2}}\int_0^1(1-x)^{\mu}|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\,dx=O(\ln n)\ \text{и что}\ u_n\to\infty. \tag{7.34.2}$$

Этого будет достаточно для дальнейшего (см. § 9.41, (5)).

Применим (7.32.5), тогда будем иметь

$$\int_0^1(1-x)^{\mu}|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\,dx=O(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^{2\mu+1}|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)|\,d\theta=$$

$$=O(1)\int_0^{\frac{1}{n}}\theta^{2\mu+1}n^{\alpha}\,d\theta+O(1)\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\theta^{2\mu+1}\,\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\,d\theta=$$

$$=O(n^{\alpha-2\mu-2})+O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\left\{O(1)+O\left(n^{\alpha-2\mu-\frac{3}{2}}\right)\right\}. \quad (7.34.3)$$

Если $2\mu-\alpha+\frac{3}{2}=0$, то последнее слагаемое надо заменить через $O(\ln n)$.

С другой стороны,

$$\int_0^1(1-x)^{\mu}\,|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\,dx>\begin{cases}A\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\theta^{2\mu+1}\,|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)|\,d\theta, & 2\mu<\alpha-\frac{3}{2},\\ A\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)|\,d\theta, & 2\mu>\alpha-\frac{3}{2},\end{cases} \quad (7.34.4)$$

где A — некоторая положительная постоянная, выбранная надлежащим образом. В соответствии с (8.1.1) первая из этих границ будет

$$\cong A\int_0^1\left(\frac{z}{n}\right)^{2\mu+1}n^{\alpha}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha}|J_{\alpha}(z)|\,n^{-1}\,dz\sim n^{\alpha-2\mu-2},$$

а вторая граница в соответствии с (8.21.10) будет

$$\sim n^{-\frac{1}{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos(N\theta+\gamma)|\,d\theta\sim n^{-\frac{1}{2}}.$$

В случае когда $2\mu=\alpha-\frac{3}{2}$, $\alpha>-\frac{1}{2}$, мы имеем

$$\int_0^1(1-x)^{\mu}\,|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\,dx>A'\int_0^{\frac{\omega}{n}}\theta^{2\mu+1}\,|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)|\,d\theta,$$

где ω — фиксированное положительное число, а постоянная A' не зависит от n и ω. Из этого неравенства, учитывая (8.1.1), находим, что

$$\varliminf_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\int_0^1(1-x)^{\mu}\,|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\,dx\geqslant 2^{\alpha}A'\int_0^{\omega}z^{-\frac{1}{2}}|J_{\alpha}(z)|\,dz.$$

Второй интеграл неограниченно возрастает вместе с ω, что и доказывает вторую часть (7.34.2).

7.4. Обобщение многочленов Лежандра, данное Фейером

(1) Теорема 7.4.1. *Пусть $\{\alpha_n\}$ — положительная последовательность. Тогда «многочлены Лежандра» $F_n(x)$, определенные по $\{\alpha_n\}$ формулой* (6.5.1), *удовлетворяют неравенствам*

$$|F_n(x)|\leqslant F_n(1), \quad -1\leqslant x\leqslant+1. \quad (7.4.1)$$

Знак равенства достигается только при $n=0$ и при $n>0$ в точках $x=-1$ или $x=+1$.

Это дает новое доказательство (7.21.1) и первой части (7.33.1).

(2) Неравенства (7.3.8) и (7.33.5) стилтьесовского типа могут быть подобным образом распространены на $F_\iota(x)$, впрочем, с несколько большими константами. Мы докажем следующее предложение:

Теорема 7.4.2. *Пусть*

$$\alpha_n > 0,\ \Delta\alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} > 0, \quad \Delta^2\alpha_n = \alpha_n - 2\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} > 0, \\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{7.4.2}$$

и

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots \tag{7.4.3}$$

Тогда «многочлены Лежандра» $F_n(x)$, соответствующие последовательности $\{\alpha_n\}$, удовлетворяют неравенствам

$$|F_n(\cos\theta)| \leqslant 4\alpha_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} f(e^{2i\theta})|, \quad 0 < \theta < \pi, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{7.4.4}$$

См. Фейер [9], стр. 291—295; Сегё [1], стр. 179. Сегё получил бо́льшую границу при более ограничительных условиях. Неравенство (7.4.4) и приводимое доказательство являются новыми.

При допущении (7.4.2) функция $f(z)$ регулярна при $|z| < 1$ и непрерывна при $|z| \leqslant 1$, $|z-1| \geqslant \delta$, где δ — произвольно малое положительное число. Действительно, мы видим, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_\iota = \alpha \geqslant 0$. Если $\alpha = 0$, то мы применим известное неравенство Абеля (1.11.6); если же $\alpha > 0$, то напишем $\alpha_n = (\alpha_n - \alpha) + \alpha$.

В силу (6.5.1) мы можем написать

$$F_n(\cos\theta) = z^{-\frac{n}{2}} {\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}}' \alpha_k\alpha_{n-k} z^k + z^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha_k\alpha_{n-k} z^{-k}, \quad z = e^{2i\theta}, \tag{7.4.5}$$

где штрих означает, что при n четном последнее слагаемое, соответствующее $k = \frac{n}{2}$, должно быть взято с множителем 1/2. Таким образом, имеем

$$|F_n(\cos\theta)| \leqslant 2\left|{\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}}' \alpha_k\alpha_{n-k} z^k\right|, \quad z = e^{2i\theta}. \tag{7.4.6}$$

Благодаря (1.11.6), мы получаем

$$|F_n(\cos\theta)| \leqslant 2\alpha_m \max_{0\leqslant\nu\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]} \left|{\sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n}{2}\right]}}' \alpha_k z^k\right|, \quad m = n - \left[\frac{n}{2}\right], \quad z = e^{2i\theta}. \tag{7.4.7}$$

Полагая

$$\varrho_n(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n+1} z^{n+1} + \alpha_{n+2} z^{n+2} + \ldots, \tag{7.4.8}$$

мы имеем по теореме Фейера—Сегё [1] неравенства

$$|f(z)| \geqslant |\varrho_1(z)| \geqslant |\varrho_2(z)| \geqslant \ldots, \quad |z| \leqslant 1, \quad z \neq 1. \tag{7.4.9}$$

Но поскольку

$${\sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n}{2}\right]}}' \alpha_k z^k = \begin{cases} \varrho_\nu(z) - \frac{1}{2}\{\varrho_{\frac{n}{2}}(z) + \varrho_{\frac{n}{2}+1}(z)\}, & n \text{ — четное}, \\ \varrho_\nu(z) - \varrho_{\frac{n+1}{2}}(z), & n \text{ — нечетное}, \end{cases} \tag{7.4.10}$$

то модуль суммы в обоих случаях не превосходит $2|f(z)|$, откуда и вытекает (7.4.4).

Наметим кратко ход доказательства неравенств (7.4.9). Достаточно показать, что $|f(z)| \geqslant |\varrho_1(z)|$, или что $|f(z)| \geqslant |f(z)-\alpha_0|$, или что $\Re[f(z)] \geqslant \frac{\alpha_0}{2}$ при $|z|<1$. Далее, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \geqslant 0$. Так как мы можем заменить $f(z)$ на $f(z)-\alpha(1-z)^{-1}$, то можно без ограничения общности уже сначала предположить, что $\alpha=0$. При $|z|<1$ можем написать

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2\alpha_n\{n+1+nz+(n-1)z^2+\ldots+z^n\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2\alpha_n(n+1)+\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2\alpha_n\left\{\frac{n+1}{2}+nz+(n-1)z^2+\ldots+z^n\right\}=$$

$$=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2\alpha_n\left\{\frac{n+1}{2}+nz+(n-1)z^2+\ldots+z^n\right\}.$$

Но для вещественного θ имеют место следующие равенства:

$$\Re\left\{\frac{n+1}{2}+ne^{i\theta}+(n-1)e^{2i\theta}+\ldots+e^{ni\theta}\right\}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos\nu\theta\right)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2.$$

См. Фейер [1]; а также Полиа и Сегё [1], часть II, стр. 90, 291, задача 17. Фейер ([9], стр. 295 – 298) распространил также неравенство Стилтьеса для $P_{n-1}(x)-P_{n+1}(x)$ (теорема 7.33.3) на многочлены $F_n(x)$ *).

7.5. Резюме

В последних параграфах мы дали различные выводы важного неравенства (7.21.1):

(a) из свойства ортогональности, применяя теорему 7.2;

(b) из дифференциального уравнения (§ 7.3, (1));

(c) из тригонометрического представления (4.9.3).

Кроме того, оно следует также

(d) из интегрального представления Лапласа (4.8.10); действительно, если $-1 \leqslant x \leqslant +1$, то

$$|x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi|=|x+i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi|=$$

$$=\{x^2+(1-x^2)\cos^2\varphi\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \{x^2+(1-x^2)\}^{\frac{1}{2}}=1.$$

---

*) Недавно В. С. Виденский («Докл. АН СССР», 124 (1959), 973—975) доказал, что $(1-x^2)|F_n'(x)|=O(n)$. (*Прим. перев.*)

7.6. Многочлены Лагерра и Эрмита

(1) Теорема 7.6.1. *Пусть α — произвольное вещественное число. Последовательность, образованная относительными максимумами функции $|L_n^{(\alpha)}(x)|$ и значением этой функции в точке $x=0$, является убывающей при $x<\alpha+\frac{1}{2}$ и возрастающей при $x>\alpha+\frac{1}{2}$. Последовательность относительных максимумов функции $|H_n(x)|$ является убывающей при $x\leqslant 0$ и возрастающей при $x\geqslant 0$.*

В самом деле, функция

$$n\{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2+x\left\{\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x)\right\}^2 \tag{7.6.1}$$

убывает при $x<\alpha+\frac{1}{2}$ и возрастает при $x>\alpha+\frac{1}{2}$. Функция

$$2n\{H_n(x)\}^2+\{H_n'(x)\}^2 \tag{7.6.2}$$

убывает при $x<0$ и возрастает при $x>0$. Оба утверждения вытекают из дифференцирования этих функций подобно тому, как в § 7.3, (1); мы применяем соответственно первое из дифференциальных уравнений (5.1.2) и (5.5.2).

(2) Теорема 7.6.2. *Пусть α — произвольное вещественное число. Последовательные относительные максимумы функций*

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha+1}{2}}|L_n^{(\alpha)}(x)| \text{ и } e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}|L_n^{(\alpha)}(x)| \tag{7.6.3}$$

образуют возрастающие последовательности при $x>x_0$. В первом случае

$$x_0=\begin{cases}0 & \text{при } \alpha^2\leqslant 1,\\ \dfrac{\alpha^2-1}{2n+\alpha+1} & \text{при } \alpha^2>1.\end{cases} \tag{7.6.4}$$

Во втором случае

$$x_0=\begin{cases}0 & \text{при } \alpha^2\leqslant\dfrac{1}{4},\\ \left(\alpha^2-\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{при } \alpha^2>\dfrac{1}{4}.\end{cases} \tag{7.6.5}$$

В первом случае n выбираем столь большим, чтобы $2n+\alpha+1>0$.

Для доказательства применяем теорему Сонина 7.31.1 к функциям u и v, соответственно фигурирующим в третьем и четвертом уравнениях (5.1.2). Если γ_n означает больший из нулей коэффициента при u в (5.1.2), то γ_n является верхней границей нулей функции u (см. теоремы 1.82.3 и 6.31.2)[1]. Дифференциальное уравнение показывает также, что $x=\gamma_n$ является последней точкой перегиба функции u; следовательно, γ_n является также верхней границей точек, где достигаются относительные экстремумы функции u. Аналогично, если γ_n' означает больший из нулей функции $4n+2\alpha+2-x+\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)x^{-1}$, то $(\gamma_n')^{\frac{1}{2}}$ является верхней гра-

[1]) Если этот коэффициент постоянно отрицателен при $x>x_0$, то $|u|$ не имеет ни нулей, ни максимумов; аналогично для функции v. Эти случаи могут быть исключены.

ницей точек, где достигаются относительные экстремумы функции v. (Граница в теореме 6.31.2 есть γ_n'.) Если x_0 выбрано, как в (7.6.4) или в (7.6.5), то мы соответственно имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n+\frac{\alpha+1}{2}}{x}+\frac{1-\alpha^2}{4x^2}-\frac{1}{4}>0, \quad -\frac{n+\frac{\alpha+1}{2}}{x^2}-\frac{1-\alpha^2}{2x^3}<0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } x_0<x<\gamma_n, \\ &4n+2\alpha+2-x+\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{x}>0, \quad -1-\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{x^2}<0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } x_0<x<\gamma_n'. \end{aligned}\right\} \tag{7.6.6}$$

Этим наше утверждение доказано.

Т е о р е м а 7.6.3. *Последовательность относительных максимумов функции*

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\,|H_n(x)| \tag{7.6.7}$$

является возрастающей при $x\geqslant 0$.

Для доказательства может быть использовано второе из уравнений (5.5.2).

(3) Границы, аналогичные (7.32.5), могут быть легко получены с помощью асимптотических формул (8.1.8) и (8.22.1), которые соответствуют (8.1.1) и (8.21.10). Удобно применять с этой целью четвертое из уравнений (5.1.2). Функция $4n+2\alpha+2-x+\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)x^{-1}$ положительна и убывает в промежутке $0<x\leqslant\delta$, если $\alpha^2\leqslant\frac{1}{4}$; она положительна и возрастает на отрезке $kn^{-1}\leqslant x\leqslant\delta$, если $\alpha^2>\frac{1}{4}$, $4k>\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)$, а n достаточно велико. Здесь $\delta=\delta(\alpha)$ — достаточно малое положительное число. Таким образом, как в § 7.32, (3), мы получаем следующий результат:

Т е о р е м а 7.6.4. *Пусть α — произвольное вещественное число, c и ω — фиксированные положительные постоянные. При $n\to\infty$ справедливы соотношения*

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\begin{cases} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) & \text{при } cn^{-1}\leqslant x\leqslant\omega, \\ O(n^{\alpha}) & \text{при } 0\leqslant x\leqslant cn^{-1}. \end{cases} \tag{7.6.8}$$

Эти границы точны относительно порядка n; они вытекают также из более сложной формулы (8.22.4) типа формул Гильба.

При $\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$ обе оценки справедливы в обоих интервалах; следовательно,

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\left\{\begin{aligned} &x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right), \\ &\qquad\qquad\qquad 0<x\leqslant\omega,\ \alpha\geqslant-\frac{1}{2}. \\ &O(n^{\alpha}), \end{aligned}\right. \tag{7.6.9}$$

С другой стороны, имеем

$$L_n^{(\alpha)}(x)=O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right), \quad 0\leqslant x\leqslant\omega,\ \alpha\leqslant-\frac{1}{2}. \tag{7.6.10}$$

Вообще, при α произвольном и вещественном

$$L_n^{(\alpha)}(x)=O(n^a),\quad a=\max\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4},\ \alpha\right),\quad 0\leqslant x\leqslant\omega. \tag{7.6.11}$$

Наконец, мы получаем следующий аналог теоремы 7.32.3:

Теорема 7.6.5. *Пусть*

$$M_n=\max_{0<x\leqslant\omega} e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\,|L_n^{(\alpha)}(x)|.$$

Имеют место равенства

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}M_n=\begin{cases}\pi^{-\frac{1}{2}} & \text{при}\quad -\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant+\frac{1}{2},\\ \text{конечен},\ >\pi^{-\frac{1}{2}} & \text{при}\quad \alpha>\frac{1}{2}.\end{cases} \tag{7.6.12}$$

Доказательство весьма сходно с приведенным в § 7.32, (4); ясно, что (7.6.12) вытекает также из более глубокой формулы (8.22.4), соединенной с (7.31.5).

7.7. Теорема Люкача

(1) Задача, о которой будет идти речь в этом параграфе (см. Люкач [1]), касается более точной формы теоремы о среднем значении

$$A\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leqslant B, \tag{7.7.1}$$

где $A=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, $B=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ в предположении, что $f(x)$ является многочленом фиксированной степени n.

Теорема 7.7. *Если $f(x)$ — произвольный π_n с максимумом A и минимумом B на отрезке $[a, b]$, то*

$$A+\frac{B-A}{\tau_n}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leqslant B-\frac{B-A}{\tau_n}, \tag{7.7.2}$$

где

$$\tau_n=\begin{cases}(m+1)^2, & \text{если}\quad n=2m,\\ (m+1)(m+2), & \text{если}\quad n=2m+1.\end{cases} \tag{7.7.3}$$

Число τ_n не может быть заменено меньшим.

Этот результат является аналогом теоремы Фейера, рассматривающей подобный вопрос для тригонометрических многочленов данного порядка n на отрезке длины 2π. В этом случае $\tau_n=n+1$. Доказательство теоремы Фейера может быть основано на теореме 1.2.1; однако известны и различные другие методы (см. Полиа и Сегё [1], часть II, отдел VI, задача 50).

Достаточно доказать первое из неравенств (7.7.2); второе будет вытекать из первого, если заменить $f(x)$ на $-f(x)$. Кроме того, не уменьшая общности, можно считать $A=0$. Легко видеть, что τ_n является наибольшим значением $f(x)$, когда x изменяется на отрезке $[a, b]$, а $f(x)$ пробегает класс неотрицательных на отрезке $[a, b]$ многочленов степени n, которые удовлетворяют условию

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=1. \tag{7.7.4}$$

Пусть теперь $\max f(b)=M_n$ относительно той же последовательности неотрицательных многочленов степени n. Докажем, что $\tau_n=M_n$. Ясно, что $\tau_n \geqslant M_n$. С другой стороны, если x_0 — произвольная точка отрезка $[a, b]$, то с помощью линейного преобразования мы убеждаемся в справедливости неравенств

$$f(x_0) \leqslant M_n \frac{1}{x_0-a} \int_a^{x_0} f(x)\,dx, \quad f(x_0) \leqslant M_n \frac{1}{b-x_0} \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx. \tag{7.7.5}$$

Умножая первое из них на x_0-a, а второе на $b-x_0$ и складывая, находим

$$f(x_0) \leqslant M_n \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = M_n. \tag{7.7.6}$$

(2) *Первый способ вычисления* M_n (См. Полиа и Сегё [1], часть II, отдел VI, задача 108.) Полагая $a=-1$, $b=+1$, применим теорему 1.21.1 и представим многочлены в (1.21.1) как линейные комбинации надлежаще выбранных многочленов. При произвольных вещественных u_ν, v_ν (подчиненных только условию нормировки (7.7.8)) мы можем написать

$$f(x)=\begin{cases} \left\{\sum\limits_{\nu=0}^{m} u_\nu P_\nu^{(0,0)}(x)\right\}^2+(1-x^2)\left\{\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} v_\nu P_\nu^{(1,1)}(x)\right\}^2 & \text{при } n=2m, \\ (1-x)\left\{\sum\limits_{\nu=0}^{m} u_\nu P_\nu^{(1,0)}(x)\right\}^2+(1+x)\left\{\sum\limits_{\nu=0}^{m} v_\nu P_\nu^{(0,1)}(x)\right\}^2 & \text{при } n=2m+1. \end{cases} \tag{7.7.7}$$

В силу ортогональности многочленов Якоби, используя обозначения (4.3.3), мы имеем

$$2=\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{m} h_\nu^{(0,0)}u_\nu^2+\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} h_\nu^{(1,1)}v_\nu^2 & \text{при } n=2m, \\ \sum\limits_{\nu=0}^{m} h_\nu^{(1,0)}u_\nu^2+\sum\limits_{\nu=0}^{m} h_\nu^{(0,1)}v_\nu^2 & \text{при } n=2m+1. \end{cases} \tag{7.7.8}$$

Но, с другой стороны,

$$f(1)=\begin{cases} \left\{\sum\limits_{\nu=0}^{m} u_\nu P_\nu^{(0,0)}(1)\right\}^2 & \text{при } n=2m, \\ 2\left\{\sum\limits_{\nu=0}^{m} v_\nu P_\nu^{(0,1)}(1)\right\}^2 & \text{при } n=2m+1, \end{cases} \tag{7.7.9}$$

следовательно,

$$M_n=\begin{cases} 2\sum\limits_{\nu=0}^{m} \{h_\nu^{(0,0)}\}^{-1}\{P_\nu^{(0,0)}(1)\}^2 & \text{при } n=2m, \\ 4\sum\limits_{\nu=0}^{m} \{h_\nu^{(0,1)}\}^{-1}\{P_\nu^{(0,1)}(1)\}^2 & \text{при } n=2m+1. \end{cases} \tag{7.7.10}$$

Максимум достигается в первом случае при $u_\nu=\text{const.}\ \{h_\nu^{(0,0)}\}^{-1} P_\nu^{(0,0)}(1)$, $v_\nu=0$, а во втором случае — при $u_\nu=0$, $v_\nu=\text{const.}\ \{h_\nu^{(0,1)}\}^{-1} P_\nu^{(0,1)}(1)$, $\nu=0, 1, 2, \ldots, m$. Соответствующие многочлены являются, очевидно, многочленами $K_m^{(\alpha,\beta)}(x)$ (см. (4.5.3)) для случаев $\alpha=\beta=0$ и $\alpha=0$, $\beta=1$, т. е. равны соответственно произведению постоянной на $P_m^{(1,0)}(x)$

или на $P_m^{(1,1)}(x)$. Следовательно, мы имеем $f(x)=\text{const.}\ \{P_m^{(1,0)}(x)\}^2$ или $f(x)=\text{const.}\ (1+x)\{P_m^{(1,1)}(x)\}^2$. Мы получаем теперь (7.7.3) из (7.7.10) прямым вычислением или, еще проще, по индукции, переходя от m к $m+1$.

(3) *Второй способ вычисления* M_n. (См. Л ю к а ч [1][1]). Этот способ основан на некоторой формуле механической квадратуры, связанной с рассуждениями, подобными проведенным в § 3.4.

Пусть $n=2m$, $x_0=1$; обозначим нули многочлена $(1-x)P_m^{(1,0)}(x)$ через $x_0, x_1, \ldots, x_m$. Если $f(x)$ есть π_n и $L(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа степени m, совпадающий с $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_m$, то

$$f(x)-L(x)=(1-x)P_m^{(1,0)}(x)\varrho(x),$$

где $\varrho(x)$ есть некоторый π_{m-1}. Следовательно,

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx-\int_{-1}^{+1} L(x)\,dx=\int_{-1}^{+1}(1-x)P_m^{(1,0)}(x)\varrho(x)\,dx=0. \qquad (7.7.11)$$

Таким образом, как в (3.4.1), имеем

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{m}\lambda_\nu f(x_\nu), \qquad (7.7.12)$$

где коэффициенты λ_ν не зависят от $f(x)$. Полагая

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)\left\{\dfrac{P_m^{(1,0)}(x)}{x-x_\nu}\right\}^2 & \text{при } \nu>0,\\ \{P_m^{(1,0)}(x)\}^2 & \text{при } \nu=0,\end{cases} \qquad (7.7.13)$$

мы замечаем, так же как в § 3.4, (2), что числа λ_ν положительны. Далее, учитывая, что $f(x)\geqslant 0$ и удовлетворяет (7.7.4), мы получаем из (7.7.12) неравенство

$$1\geqslant\lambda_0 f(1), \text{ т. е. } f(1)\leqslant\lambda_0^{-1}; \qquad (7.7.14)$$

это — точная верхняя граница для $f(1)$, которая достигается тогда и только тогда, когда $f(x_\nu)=0$, $\nu=1, 2, \ldots, m$; т. е. для $f(x)=\text{const.}\ \{P_m^{(1,0)}(x)\}^2$. Для того чтобы найти λ_0, подставим $f(x)=\gamma P_m^{(1,0)}(x)$ в (7.7.12) (см. (3.4.3)), где γ — постоянная; тогда, принимая во внимание (4.5.3) при $\alpha=\beta=0$, имеем

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\frac{\gamma}{2}\int_{-1}^{+1}P_m^{(1,0)}(x)\,dx=\frac{\gamma}{m+1}\int_{-1}^{+1}K_m^{(0,0)}(x)\,dx=\frac{\gamma}{m+1}=1.$$

Следовательно, $\lambda_0^{-1}=\gamma P_m^{(1,0)}(1)=(m+1)^2$.

Пусть теперь $n=2m+1$, $x_0=1$, $x_{m+1}=-1$; обозначим нули многочлена $(1-x^2)P_m^{(1,1)}(x)$ через $x_0, x_1, \ldots, x_{m+1}$. Те же рассуждения, что и выше, приводят нас к формуле

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{m+1}\lambda_\nu f(x_\nu), \quad \lambda_\nu>0, \qquad (7.7.15)$$

[1]) Этот второй способ Люкач применил в своей работе [1], но он владел также и первым способом (см. [1], стр. 296).

где $f(x)$ — произвольный π_n. Интересующий нас максимум опять будет λ_0^{-1}; этот максимум достигается тогда и только тогда, когда $f(x_\nu)=0$, $\nu=1, 2, \ldots, m+1$, т. е. для $f(x)=\text{const.}\,(1+x)\{P_m^{(1,1)}(x)\}^2$. Для того чтобы найти λ_0, возьмем $f(x)=\gamma(1+x)P_m^{(1,1)}(x)$ и, учитывая (4.5.3) при $\alpha=0$, $\beta=1$, будем иметь

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\frac{\gamma}{2}\int_{-1}^{+1}(1+x)P_m^{(1,1)}(x)\,dx=$$

$$=\frac{2\gamma}{m+2}\int_{-1}^{+1}(1+x)\,K_m^{(0,1)}(x)\,dx=\frac{2\gamma}{m+2}=1, \qquad (7.7.16)$$

откуда получаем

$$\lambda_0^{-1}=2\gamma(m+1)=(m+1)(m+2).$$

7.71. Обобщения; применения

(1) Пусть $d\alpha(x)$ — произвольное распределение на конечном или бесконечном промежутке, $\{p_n(x)\}$ — соответствующая ему последовательность ортонормальных многочленов, x_0 — произвольная, но фиксированная точка. Если $\varrho(x)$ — произвольный π_m, подчиненный условию

$$\int_a^b |\varrho(x)|^2\,d\alpha(x)=1, \qquad (7.71.1)$$

то мы имеем

$$|\varrho(x_0)|^2\leqslant\sum_{\nu=0}^{m}|p_\nu(x_0)|^2, \qquad (7.71.2)$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$\varrho(x)=\text{const.}\sum_{\nu=0}^{m}\overline{p_\nu(x_0)}\,p_\nu(x).$$

Это было доказано в § 3.1, (3).

В отдельных частных случаях можно вычислить максимум (или некоторую верхнюю границу) правой части (7.71.2), когда x_0 изменяется в некотором заданном промежутке. Полученная оценка имеет место равномерно в этом интервале для последовательности многочленов $\varrho(x)$ степени m, удовлетворяющих (7.71.1). В дальнейшем изложении мы рассмотрим различные распределения вида $d\alpha(x)=w(x)\,dx$; $\varrho(x)$ означает произвольный π_m, удовлетворяющий условию (7.71.1).

(2) Положим $a=-1$, $b=+1$, $w(x)=1$.

Теорема 7.71.1. *Пусть $\varrho(x)$ — произвольный π_m, подчиненный условию*

$$\int_{-1}^{+1}|\varrho(x)|^2\,dx=1. \qquad (7.71.3)$$

Тогда при $-1\leqslant x_0\leqslant+1$ справедливы неравенства

$$|\varrho(x_0)|\leqslant\begin{cases}2^{-\frac{1}{2}}(m+1),\\ A(1-x_0^2)^{-\frac{1}{4}}m^{\frac{1}{2}},\end{cases} \qquad (7.71.4)$$

где A — абсолютная константа.

Первая граница является точной, она достигается в точках $x_0 = \pm 1$ для надлежаще выбранного π_n. Оба неравенства вытекают из (7.71.2), если мы применим (7.21.1) и (7.3.8).

Положим $a = -1$, $b = +1$, $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$.

Теорема 7.71.2. *Пусть* $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\varrho(x)$ — *произвольный* π_m, *подчиненный условию*

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} |\varrho(x)|^2 dx = 1. \tag{7.71.5}$$

Тогда

$$\varrho(\cos\theta) = \begin{cases} \theta^{-\alpha-\frac{1}{2}} O(m^{\frac{1}{2}}), & \text{если } cm^{-1} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ O(m^{\alpha+1}), & \text{если } 0 \leqslant \theta \leqslant cm^{-1}. \end{cases} \tag{7.71.6}$$

Здесь c — *произвольное, но фиксированное положительное число, а постоянная под знаком* O *зависит только от* α, β, c. *Аналогичные оценки имеют место на отрезке* $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Для доказательства мы замечаем, что в этом случае $p_n(x) \sim n^{\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ (см. (4.3.3)); в соответствии с (7.32.5) мы имеем

$$\sum_{\nu=1}^{m} \nu \{P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\}^2 = \sum_{\nu\theta<c} \nu O(\nu^{2\alpha}) + \sum_{\nu\theta\geqslant c} \nu\theta^{-2\alpha-1} O(\nu^{-1}) =$$
$$= O(\theta^{-2\alpha-2}) + \theta^{-2\alpha-1} O(m) = \theta^{-2\alpha-1} O(m),$$

если $cm^{-1} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Для той же суммы мы получаем границу

$$\sum_{\nu=1}^{m} \nu O(\nu^{2\alpha}) = O(m^{2\alpha+2}),$$

если $0 \leqslant \theta \leqslant cm^{-1}$.

Подобным же образом, применяя (7.32.2), можно получить некоторые точные границы.

Пусть $a = 0$, $b = +\infty$, $w(x) = e^{-x}$. Учитывая (7.21.3), мы получим

$$e^{-\frac{x_0}{2}} |\varrho(x_0)| \leqslant (m+1)^{\frac{1}{2}}, \quad x_0 \geqslant 0, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} |\varrho(x)|^2 dx = 1. \tag{7.71.7}$$

Эта граница достигается в точке $x_0 = 0$, когда $\varrho(x)$ — надлежащим образом выбранный многочлен степени m.

Случай $a = 0$, $b = \infty$, $w(x) = e^{-x}x^{\alpha}$, $\alpha > -1$, может быть рассмотрен подобно случаю многочленов Якоби, исследованному раньше (см. (7.6.8)).

(3) Пусть теперь $[a, b]$ — конечный отрезок, а $f(x)$ — произвольный π_n, неотрицательный на $[a, b]$ и удовлетворяющий условию

$$\int_a^b f(x) w(x) dx = 1. \tag{7.71.8}$$

Мы хотим определить максимум $|f(x_0)|$ при фиксированном x_0 — вещественном или комплексном.

По теореме 1.21.1 мы можем написать

$$f(x)=\begin{cases}\left\{\sum_{\nu=0}^{m} u_\nu p_\nu(x)\right\}^2+(x-a)(b-x)\left\{\sum_{\nu=0}^{m-1} v_\nu q_\nu(x)\right\}^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } n=2m, \\ (x-a)\left\{\sum_{\nu=0}^{m} u_\nu r_\nu(x)\right\}^2+(b-x)\left\{\sum_{\nu=0}^{m} v_\nu s_\nu(x)\right\}^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } n=2m+1,\end{cases} \tag{7.71.9}$$

где $\{p_\nu(x)\}$, $\{q_\nu(x)\}$, $\{r_\nu(x)\}$, $\{s_\nu(x)\}$ — последовательности ортонормальных многочленов, соответствующие весовым функциям

$$w(x),\ (x-a)(b-x)\,w(x),\ (x-a)\,w(x),\ (b-x)\,w(x),\quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{7.71.10}$$

Третья и четвертая последовательности являются частными случаями ($x_0=a$ и $x_0=b$) «ядерных» многочленов (теорема 3.1.4); вторая последовательность может быть найдена с помощью теоремы 2.5. В обоих случаях, $n=2m$ и $n=2m+1$, мы имеем для вещественных u_ν и v_ν равенство

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{m} u_\nu^2+\sum_{\nu=0}^{m} v_\nu^2=1,\quad v_m=0 \text{ при } n=2m, \tag{7.71.11}$$

следовательно, в силу неравенства Коши — Буняковского

$$|f(x_0)|\leqslant\begin{cases}\max\left\{\sum_{\nu=0}^{m}|p_\nu(x_0)|^2,\ |x_0-a|\,|b-x_0|\sum_{\nu=0}^{m-1}|q_\nu(x_0)|^2\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } n=2m, \\ \max\left\{|x_0-a|\sum_{\nu=0}^{m}|r_\nu(x_0)|^2,\ |b-x_0|\sum_{\nu=0}^{m}|s_\nu(x_0)|^2\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } n=2m+1.\end{cases} \tag{7.71.12}$$

В случае $a\leqslant x_0\leqslant b$ можно отбросить знаки абсолютных значений. Правая часть (7.71.12) представляет собой искомый максимум.

(4) Пусть $a=-1$, $b=+1$, $w(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, α и $\beta>-1$. Тогда четырьмя последовательностями многочленов, о которых шла речь в (3), с точностью до постоянных множителей будут

$$\{P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)\},\quad \{P_\nu^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\},\quad \{P_\nu^{(\alpha,\beta+1)}(x)\},\quad \{P_\nu^{(\alpha+1,\beta)}(x)\}. \tag{7.71.13}$$

В частном случае $x_0=1$ для максимума $f(1)$ мы получаем (см. (4.5.3)):

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=0}^{m}\{p_\nu(1)\}^2=K_m^{(\alpha,\beta)}(1) &&\text{при } n=2m,\\ &2\sum_{\nu=0}^{m}\{r_\nu(1)\}^2=2K_m^{(\alpha,\beta+1)}(1) &&\text{при } n=2m+1.\end{aligned}\right\} \tag{7.71.14}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 7.71.3. *Пусть $f(x)$ — произвольный π_n, неотрицательный на $[-1,+1]$ и удовлетворяющий условию*

$$\int_{-1}^{+1} f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx=1,\quad \alpha>-1,\quad \beta>-1. \tag{7.71.15}$$

Тогда

$$f(1) \leqslant \begin{cases} 2^{-\alpha-\beta-1} \dfrac{\Gamma(m+\alpha+2)\,\Gamma(m+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\beta+1)} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } n=2m, & \\ 2^{-\alpha-\beta-1} \dfrac{\Gamma(m+\alpha+2)\,\Gamma(m+\alpha+\beta+3)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\beta+2)} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } n=2m+1. & \end{cases} \tag{7.71.16}$$

Это точные границы; при $m \to \infty$ в обоих случаях эти границы $\sim m^{2\alpha+2}$.

См. Полиа и Сегё [1], часть II, отдел VI, задача 110. Меняя местами α и β, мы получим соответствующие границы для $f(-1)$. Вообще, при тех же условиях, что в теореме 7.71.3 (см. теорему 7.71.2), мы находим, что

$$f(\cos\theta) = \begin{cases} \theta^{-2\alpha-1} O(m), & \text{если } cm^{-1} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ O(m^{2\alpha+2}), & \text{если } 0 \leqslant \theta \leqslant cm^{-1}. \end{cases} \tag{7.71.17}$$

Аналогичные оценки для $f(\cos\theta)$ мы получаем на отрезке $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$. Кроме того, оценка вида $O(m^c)$, где $c=\max(2\alpha+2,\ 2\beta+2,\ 1)$, имеет место равномерно на отрезке $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Постоянные под знаком O зависят только от α, β и c.

(5) С помощью теоремы 1.21.2 мы можем рассмотреть следующую задачу. Пусть $f(x)$ — произвольный π_n, неотрицательный на полуоси $x \geqslant 0$, и такой, что

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha f(x)\,dx = 1, \quad \alpha > -1. \tag{7.71.18}$$

Найти максимум $f(0)$.

Мы пишем (см. (5.1.1))

$$f(x) = \begin{cases} \left|\sum\limits_{\nu=0}^{m} u_\nu \left\{\Gamma(\alpha+1)\dbinom{\nu+\alpha}{\nu}\right\}^{-\frac{1}{2}} L_\nu^{(\alpha)}(x)\right|^2 + \\ \quad + x\left|\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} v_\nu \left\{\Gamma(\alpha+2)\dbinom{\nu+\alpha+1}{\nu}\right\}^{-\frac{1}{2}} L_\nu^{(\alpha+1)}(x)\right|^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } n=2m, \\ \left|\sum\limits_{\nu=0}^{m} u_\nu \left\{\Gamma(\alpha+1)\dbinom{\nu+\alpha}{\nu}\right\}^{-\frac{1}{2}} L_\nu^{(\alpha)}(x)\right|^2 + \\ \quad + x\left|\sum\limits_{\nu=0}^{m} v_\nu \left\{\Gamma(\alpha+2)\dbinom{\nu+\alpha+1}{\nu}\right\}^{-\frac{1}{2}} L_\nu^{(\alpha+1)}(x)\right|^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } n=2m+1, \end{cases} \tag{7.71.19}$$

где комплексные числа u_ν, v_ν удовлетворяют условию

$$\sum_{\nu=0}^{m} |u_\nu|^2 + \sum_{\nu=0}^{m} |v_\nu|^2 = 1. \tag{7.71.20}$$

(Во второй сумме $v_m = 0$ при $n = 2m$.) Далее в обоих случаях мы имеем (см. (5.1.7)):

$$f(0) = \left| \sum_{\nu=0}^{m} u_\nu \left\{ \Gamma(\alpha+1) \binom{\nu+\alpha}{\nu} \right\}^{-\frac{1}{2}} L_\nu^{(\alpha)}(0) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{m} \left\{ \Gamma(\alpha+1) \binom{\nu+\alpha}{\nu} \right\}^{-1} \{L_\nu^{(\alpha)}(0)\}^2 =$$

$$= \{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1} \sum_{\nu=0}^{m} \binom{\nu+\alpha}{\nu} = \{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1} \binom{m+\alpha+1}{m}; \qquad (7.71.21)$$

это и есть искомый максимум.

Если $\alpha = 0$, то получаем

$$f(0) \leqslant \left[\frac{n}{2} \right] + 1, \quad \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx = 1, \qquad (7.71.22)$$

предполагая, что $f(x)$ есть π_n, неотрицательный при $x \geqslant 0$. Легко можно доказать более общее неравенство:

$$e^{-x} f(x) \leqslant \left[\frac{n}{2} \right] + 1, \qquad (7.71.23)$$

где многочлен $f(x)$ подчинен тем же условиям, что в (7.71.22). Действительно, пусть x_0 — произвольное положительное число. Применяя (7.71.22) к многочлену

$$f(x + x_0) \left\{ \int_0^\infty e^{-x} f(x + x_0)\, dx \right\}^{-1},$$

который удовлетворяет требуемому условию, мы получаем неравенство

$$f(x_0) \left\{ \int_0^\infty e^{-x} f(x + x_0)\, dx \right\}^{-1} \leqslant \left[\frac{n}{2} \right] + 1.$$

Отсюда мы получаем

$$e^{-x_0} f(x_0) \leqslant \left(\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right) e^{-x_0} \int_0^\infty e^{-x} f(x + x_0)\, dx =$$

$$= \left(\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right) \int_{x_0}^\infty e^{-x} f(x)\, dx \leqslant \left[\frac{n}{2} \right] + 1.$$

См. задачу 42.

(6) Из предыдущих результатов могут быть выведены некоторые оценки для ортонормальных многочленов $\{p_n(x)\}$, если мы предположим, что весовая функция $w(x)$ удовлетворяет одному из неравенств следующего типа:

$$w(x) \geqslant \mu > 0, \quad a \leqslant x \leqslant b, \qquad (7.71.24)$$

$$w(x) \geqslant \mu (x-a)^\alpha (b-x)^\beta, \quad a < x < b, \quad \alpha > -1, \ \beta > -1, \qquad (7.71.25)$$

$$w(x) \geqslant \mu x^\alpha, \quad x > 0, \quad \alpha > -1. \qquad (7.71.26)$$

В первом и во втором случаях a и b конечны.

В частности, при условии (7.71.24) мы получаем

$$\int_a^b p_n^2(x)\, dx \leqslant \mu^{-1} \int_a^b p_n^2(x)\, w(x)\, dx = \mu^{-1}. \qquad (7.71.27)$$

Следовательно, в соответствии с теоремой 7.71.1 справедливы неравенства

$$|p_n(x_0)| < \begin{cases} Am, \\ A'\,[(x_0-a)(b-x_0)]^{-\frac{1}{4}} m^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad a < x_0 < b, \tag{7.71.28}$$

где A и A' — положительные постоянные, зависящие только от a, b и μ.

Аналогичные рассуждения применимы в случаях (7.71.25) и (7.71.26).

Если мы предположим, что функция $w(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то границы m и $m^{\frac{1}{2}}$ в (7.71.28) можно соответственно заменить на $m^{\frac{1}{2}}$ и 1 (см. (7.1.15)).

(7) Наконец, применяя теорему 7.32.4, мы получаем следующее обобщение неравенств (7.71.28). Пусть $w(x) \geqslant \mu > 0$, $a=-1$, $b=+1$, k — неотрицательное целое число. Тогда

$$p_n^{(k)}(\cos\theta) = \begin{cases} (\sin\theta)^{-k-\frac{1}{2}} O\left(n^{k+\frac{1}{2}}\right), \\ O\left(n^{2k+1}\right), \end{cases} \quad 0 < \theta < \pi. \tag{7.71.29}$$

Постоянные, входящие в O, зависят только от μ и k.

Для доказательства применяем рассуждения, подобные тем, которые мы использовали, доказывая теорему 7.71.2.

7.72. Задача Чебышева

(1) Задача. *Пусть $w(x)$ — весовая функция на отрезке $[a, b]$, а $W(x)$ — данная вещественная функция, определенная на том же отрезке и такая, что существуют интегралы*

$$\int_a^b W(x)\,x^k\,dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{7.72.1}$$

Пусть $f(x)$ — произвольный, не равный нулю тождественно многочлен фиксированной степени n, неотрицательный на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Определить максимум и минимум отношения

$$\int_a^b f(x)\,W(x)\,dx : \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx. \tag{7.72.2}$$

См. Чебышев [7]. Пусть a и b конечны. Применяя опять представление (7.71.9), мы легко находим, что искомые величины суть максимум и минимум следующих квадратичных форм относительно $\{u_\nu\}$ и $\{v_\nu\}$:

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b \Big\{\sum_{\nu=0}^{m} u_\nu p_\nu(x)\Big\}^2 W(x)\,dx + \\ &\qquad + \int_a^b \Big\{\sum_{\nu=0}^{m-1} v_\nu q_\nu(x)\Big\}^2 (x-a)(b-x)\,W(x)\,dx \quad \text{при } n=2m, \\ &\int_a^b \Big\{\sum_{\nu=0}^{m} u_\nu r_\nu(x)\Big\}^2 (x-a)\,W(x)\,dx + \\ &\qquad + \int_a^b \Big\{\sum_{\nu=0}^{m} v_\nu s_\nu(x)\Big\}^2 (b-x)\,W(x)\,dx \quad \text{при } n=2m+1 \end{aligned}\right\} \tag{7.72.3}$$

при условии, что

$$\sum_{\nu=0}^{m} u_\nu^2 + \sum_{\nu=0}^{m} v_\nu^2 = 1.$$

(В первом случае $v_m = 0$.) Здесь $\{p_\nu(x)\}$, $\{q_\nu(x)\}$, $\{r_\nu(x)\}$, $\{s_\nu(x)\}$ имеют тот же смысл, что в (7.71.9).

Пусть теперь a конечно, $b = +\infty$. Тогда нам нужно рассмотреть максимум и минимум формы

$$\int_a^\infty \Big\{ \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} u_\nu p_\nu(x) \Big\}^2 W(x)\,dx + \int_a^\infty \Big\{ \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} v_\nu q_\nu(x) \Big\}^2 (x-a) W(x)\,dx \quad (7.72.4)$$

при условии

$$\sum u_\nu^2 + \sum v_\nu^2 = 1.$$

Здесь $\{p_\nu(x)\}$ и $\{q_\nu(x)\}$ — ортонормальные последовательности, соответствующие весовым функциям $w(x)$ и $(x-a)w(x)$ при $x \geqslant a$.

В случае $a = -\infty$, $b = +\infty$ мы должны рассмотреть форму

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} u_\nu p_\nu(x) \Big\}^2 W(x)\,dx, \qquad \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} u_\nu^2 = 1, \quad (7.72.5)$$

где $\{p_\nu(x)\}$ — ортонормальная последовательность, соответствующая $w(x)$ и $(-\infty, +\infty)$.

Таким образом, во всех этих случаях рассматриваемая задача сводится к определению наибольшего и наименьшего характеристического значения некоторой квадратичной формы. Изучая сумму двух квадратичных форм соответственно относительно $\{u_\nu\}$ и $\{v_\nu\}$, мы находим наибольшее характеристическое значение каждой из форм в отдельности, и большее из этих значений будет искомым максимумом. Аналогичное замечание справедливо и для минимума. Однако, фактическое применение этого метода трудно, — часто бывает предпочтительнее использовать некоторые формулы механических квадратур (см. ниже).

Аналогичные рассуждения применимы в случае, когда интегралы в (7.72.2) заменяются интегралами Стилтьеса.

(2) Пусть $a = -1$, $b = +1$, $W(x) = xw(x)$. Достаточно определить максимум и минимум отношения

$$\int_{-1}^{+1} \varrho^2(x)\, xw(x)\,dx : \int_{-1}^{+1} \varrho^2(x)\, w(x)\,dx, \quad (7.72.6)$$

где $\varrho(x)$ есть произвольный π_m с вещественными коэффициентами, не равный нулю тождественно. Затем мы должны заменить $w(x)$ соответственно через $(1-x^2)w(x)$; $(1 \pm x)w(x)$; см. ниже. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_m$ — нули многочлена $p_{m+1}(x)$, соответствующего весовой функции $w(x)$; в соответствии с (3.4.1) мы находим для отношения (7.72.6) представление

$$\sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu \varrho^2(x_\nu)\, x_\nu : \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu \varrho^2(x_\nu), \quad (7.72.7)$$

где λ_ν — числа Кристоффеля. Следовательно, искомые максимум и минимум совпадают соответственно с наибольшим и наименьшим нулем многочлена $p_{m+1}(x)$ (см. § 3, 4, (3)). Если $\hat{p}$ означает наибольший из нулей многочлена $p(x)$, то из (7.72.3) видно, что максимум отношения (7.72.2) в этом случае будет равен

$$\left.\begin{aligned} &\max(\hat{p}_{m+1}, \hat{q}_m) \quad \text{при } n=2m, \\ &\max(\hat{r}_{m+1}, \hat{s}_{m+1}) \quad \text{при } n=2m+1. \end{aligned}\right\} \tag{7.72.8}$$

Аналогичный результат имеем для минимума.

(3) На этом общие рассуждения П. Л. Чебышева заканчиваются (см. [7], § 9). Мы, однако, можем доказать, что выражения (7.72.8) соответственно равны $\hat{p}_{m+1}$ и $\hat{r}_{m+1}$, следовательно, справедлива такая теорема:

Теорема 7.72.1. *Пусть $w(x)$ будет весовой функцией на отрезке $[-1, +1]$. Пусть $f(x)$ — произвольный π_n, неотрицательный на $[-1, +1]$ и не равный нулю тождественно. Тогда максимум отношения*

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,x w(x)\,dx : \int_{-1}^{+1} f(x)\,w(x)\,dx \tag{7.72.9}$$

равен бо́льшему из нулей многочлена $p_{m+1}(x)$, если $n=2m$, и бо́льшему из нулей многочлена $p_{m+2}(-1)\,p_{m+1}(x) - p_{m+1}(-1)\,p_{m+2}(x)$, если $n=2m+1$. Здесь $\{p_n(x)\}$ является последовательностью ортонормальных многочленов, соответствующих весовой функции $w(x)$ на отрезке $[-1, +1]$.

В соответствии с теоремой 2.5 мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &(1-x^2)\,q_m(x) = \text{const.}\begin{vmatrix} p_m(x) & p_{m+1}(x) & p_{m+2}(x) \\ p_m(-1) & p_{m+1}(-1) & p_{m+2}(-1) \\ p_m(1) & p_{m+1}(1) & p_{m+2}(1) \end{vmatrix}, \\ &(1+x)\,r_m(x) = \text{const.}\begin{vmatrix} p_m(x) & p_{m+1}(x) \\ p_m(-1) & p_{m+1}(-1) \end{vmatrix}, \\ &(1-x)\,s_m(x) = \text{const.}\begin{vmatrix} p_m(x) & p_{m+1}(x) \\ p_m(1) & p_{m+1}(1) \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{7.72.10}$$

Пусть $\xi_0 > \xi_1 > \ldots > \xi_m$ — нули многочлена $p_{m+1}(x)$, записанные в убывающем порядке. Мы покажем, что первый определитель в правой части (7.72.10) не равен нулю, если $\xi_0 < x < 1$. В самом деле, в соответствии с (3.2.1) справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} p_m(x) & p_{m+1}(x) & p_{m+2}(x) \\ p_m(-1) & p_{m+1}(-1) & p_{m+2}(-1) \\ p_m(1) & p_{m+1}(1) & p_{m+2}(1) \end{vmatrix} =$$

$$= A_{m+2}\begin{vmatrix} p_m(x) & p_{m+1}(x) & x p_{m+1}(x) \\ p_m(-1) & p_{m+1}(-1) & -p_{m+1}(-1) \\ p_m(1) & p_{m+1}(1) & p_{m+1}(1) \end{vmatrix} =$$

$$= A_{m+2}\,p_{m+1}(x)\,p_{m+1}(-1)\,p_{m+1}(1)\begin{vmatrix} h(x) & 1 & x \\ h(-1) & 1 & -1 \\ h(1) & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

где $h(x) = p_m(x)/p_{m+1}(x)$. Далее, применяя (3.3.9), мы видим, что последний определитель положителен при $\xi_0 < x < 1$, так как

$$\begin{vmatrix} (x-\xi_\nu)^{-1} & 1 & x \\ (-1-\xi_\nu)^{-1} & 1 & -1 \\ (1-\xi_\nu)^{-1} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2(1-x^2)}{(1-\xi_\nu^2)(x-\xi_\nu)} > 0.$$

С другой стороны, $h(x)$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$ между ξ_1 и ξ_0 и от $+\infty$ до $h(1)$ между ξ_0 и 1 (см. доказательство теоремы 3.3.4). Кроме того, $h(-1)<0$, $h(1)>0$. Стало быть, наибольший из нулей $r_m(x)$, или $h(x)-h(-1)$, более, чем наибольший из нулей $s_m(x)$, или $h(x)-h(1)$, $x<1$.

(4) П. Л. Чебышев подробно исследовал случай

$$a=-1, \quad b=+1, \quad w(x)=1, \quad W(x)=x \tag{7.72.11}$$

(см. П. Л. Чебышев [7], § 11, а также Сегё [13], стр. 627—629). С точностью до постоянных множителей мы имеем

$$\left.\begin{aligned} p_{m+1}(x)&=P_{m+1}(x), \quad q_m(x)=P_m^{(1,1)}(x)=\text{const.}\,P'_{m+1}(x),\\ r_{m+1}(x)&=P_{m+1}^{(0,1)}(x)=\text{const.}\,\{P_{m+1}(x)+P_{m+2}(x)\}(1+x)^{-1},\\ s_{m+1}(x)&=P_{m+1}^{(1,0)}(x)=\text{const.}\,\{P_{m+1}(x)-P_{m+2}(x)\}(1-x)^{-1}.\end{aligned}\right\} \tag{7.72.12}$$

Это дает следующую теорему:

Теорема 7.72.2. *Пусть $f(x)$ — не равный нулю тождественно произвольный π_n, неотрицательный на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$. Тогда максимум отношения*

$$\int_{-1}^{+1} xf(x)\,dx : \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \tag{7.72.13}$$

равен большему из нулей многочлена $P_{m+1}(x)$, если $n=2m$; если же $n=2m+1$, то максимум равен большему из нулей многочлена $P_{m+1}(x)+P_{m+2}(x)$.

Расстояние от максимального значения до единицы есть величина порядка n^{-2} при $n\to\infty$. Минимум, очевидно, равен соответствующему отрицательному значению.

По поводу других уточнений теоремы о среднем значении мы отсылаем читателя к работе Чакалова [1]. См. задачу 43. Относительно других экстремальных задач и связанных с ними неравенств см. Я. Л. Геронимус [2], [3], [4] и Шохат [2].

7.8. Дальнейшие результаты

(1) С помощью теоремы 1.82.5 мы выводим следующее усиление теоремы Сонина 7.31.1. Пусть $y=y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (7.31.1) и пусть $y(x)$ имеет бесконечную последовательность нулей $\{x_m\}$, занумерованных в возрастающем порядке: $x_1<x_2<x_3<\ldots$; $\varphi(x)$ — положительная, непрерывная, убывающая функция. Пусть p будет фиксированным положительным числом. Тогда последовательность интегралов

$$\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} |y(x)|^p\,dx$$

будет возрастающей.

Аналогичный результат справедлив, если $\varphi(x)$ — возрастающая функция.

При $p\to 0$ формулированный факт приводится к теореме 1.82.2. Беря корень p-й степени от интеграла и устремляя p к бесконечности, получим теорему Сонина. Таким образом, приведенное здесь предложение является обобщением обеих упомянутых теорем (см. Макаи [2]).

В работе Макаи [2] указаны интересные частные случаи этой полезной теоремы.

(2) Пусть $\mu_{r,n}$ — последовательные относительные максимумы $|P_n(x)|$, когда x изменяется от $+1$ до -1. По теореме 7.3.1 мы имеем

$$1 > \mu_{1,n} > \mu_{2,n} > \ldots > \mu_{h,n}, \quad \text{где } h = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Можно доказать (см. Сегё [23]), что при фиксированном r

$$\mu_{r,n} > \mu_{r,n+1}, \quad n \geqslant r+1. \tag{7.8.1}$$

ГЛАВА VIII

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Исследование асимптотических свойств ортогональных многочленов $\{p_n(x)\}$ при $n \to \infty$ приводит к двум основным проблемам: асимптотическое поведение рассматриваемых многочленов вне промежутка ортогональности, в особенности в комплексной плоскости, и асимптотическое поведение на самом промежутке ортогональности. В общем случае вторая проблема является более глубокой и более трудной, чем первая. Мы начинаем изложение с исследования многочленов Лежандра, получая для них различные важные асимптотические формулы. Наша цель состоит не только в том, чтобы дать обзор результатов, но также и в том, чтобы указать различные применяемые здесь методы. Мы приводим также результаты для случая ультрасферических многочленов и обобщенных многочленов Якоби. Исследование асимптотики многочленов Лагерра и Эрмита вообще требует новых рассмотрений, хотя по существу в этих случаях могут быть применены те же методы, что и раньше.

Простейший частный случай

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}), \quad x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}),$$

— случай многочленов Чебышева первого рода — является хорошим примером, характеризующим наши дальнейшие результаты. Если x лежит вне отрезка $[-1, +1]$, то, беря $|z| > 1$, мы видим, что

$$T_n(x) \cong \frac{z^n}{2}, \quad n \to \infty.$$

На отрезке $[-1, +1]$ мы полагаем $z = e^{i\theta}$, $T_n(x) = \cos n\theta$. Здесь график многочлена колеблется между $+1$ и -1.

Эти результаты требуют лишь небольших изменений для многочленов Лежандра и даже для многочленов Якоби, если только $x \neq \pm 1$. Возникают, однако, новые трудности в окрестности концов отрезка ± 1, которые в известном смысле являются исключительными точками. Это в основном объясняется тем, что коэффициент при $d\theta$ в выражении

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx = -(1-\cos\theta)^\alpha (1+\cos\theta)^\beta \sin\theta \, d\theta,$$

вообще говоря, обращается в нуль или в бесконечность в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Если это имеет место, то функции вида $\cos n\theta$ непригодны для приближенного представления рассматриваемых многочленов в окрестности точек $x = \pm 1$. С этой целью мы используем некоторые функции Бесселя.

Обычно задачи и результаты для многочленов Лагерра и Эрмита аналогичны. Но весьма интересно, что в соответствующих асимптотических выражениях появляется величина $n^{\frac{1}{2}}$ вместо n. В общем случае многочленов Лагерра функции Бесселя нужны вблизи точки $x = 0$, в то время как для многочленов Эрмита точка $x = 0$ не играет какой-либо исключительной роли. В обоих случаях возникают новые трудности в связи с тем, что промежуток интегрирования бесконечен. Для разложения в ряды весьма важно иметь асимптотические формулы, которые справедливы в промежутках, длина которых стремится к бесконечности при $n \to \infty$.

8.1. Формулы типа формул Мелера—Гейне

Эта важная формула носит элементарный характер, и мы здесь кратко остановимся на ней прежде, чем приступим к общим рассмотрениям §§ 8.21 — 8.23.

(1) Теорема 8.1.1. *Пусть α и β — произвольные вещественные числа. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\cos\frac{z}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(z), \tag{8.1.1}$$

где $J_\alpha(z)$ имеет тот же смысл, что в (1.71.1). *Эта формула справедлива равномерно в каждой ограниченной области комплексной z-плоскости.*

Для многочленов Лежандра, т. е. когда $\alpha = \beta = 0$, формула (8.1.1) принадлежит Мелеру ([3], стр. 140) и Гейне ([3], том 1, стр. 184). Относительно дальнейшей литературы мы отсылаем читателя к книге Ватсона ([3], стр. 155). В случае $\alpha = \beta = 0$ весьма простое доказательство вытекает из первого интеграла Лапласа (см. (4.8.10)) и (1.71.6)). При $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ функция в правой части (8.1.1) с точностью до постоянного множителя равна соответственно $z^{-1}\sin z$ и $\cos z$ (см. (1.71.2)). Формула (8.1.1) тривиальна для элементарных случаев (4.1.7) и (4.1.8)

Доказательство может быть основано на формуле (4.21.2). Действительно, если $x = \cos\frac{z}{n}$ и ν фиксировано, то при $n \to \infty$ для $(\nu+1)$-го слагаемого в (4.21.2) справедливо следующее асимптотическое выражение:

$$\frac{1}{\nu!\,(n-\nu)!}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+\nu+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)}\left(-\sin^2\frac{z}{2n}\right)^{\nu} \cong$$

$$\cong \frac{n^\alpha}{\nu!\,\Gamma(\nu+\alpha+1)}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^{\nu}. \tag{8.1.2}$$

Здесь мы исключаем случай, когда α — целое отрицательное число. Переход к пределу под знаком суммы законен, так как существует легко определяемая мажоранта для всей суммы. В самом деле, если n достаточно велико, то справедливо неравенство

$$\frac{n^{-\alpha}}{(n-\nu)!}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+\nu+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{2^\nu n^{2\nu}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^{-\alpha}}{n!}\, n^\nu (2n+\alpha+\beta)^\nu\, \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{2^\nu n^{2\nu}} = O(1)$$

равномерно по ν, когда $0 \leqslant \nu \leqslant n$. Рассуждение нужно лишь слегка видоизменить, если α — целое отрицательное число.

Формула (8.1.1) дает полную характеристику функции $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$ при $\theta = O(n^{-1})$. В качестве важного следствия отметим такое предложение:

Теорема 8.1.2. *Пусть* $x_{1n} > x_{2n} > \ldots$ — *нули многочлена* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *на отрезке* $[-1, +1]$, *записанные в убывающем порядке* (α, β — *вещественные, но не обязательно бо́льшие, чем* -1). *Если положим* $x_{\nu n} = \cos\theta_{\nu n}$, $0 < \theta_{\nu n} < \pi$, *то при фиксированном* ν *имеем*

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_{\nu n} = j_\nu, \tag{8.1.3}$$

где j_ν *есть* ν-*й положительный нуль функции* $J_\alpha(z)$.

(2) Соотношение (8.1.1) дает нам возможность вывести некоторые свойства функций Бесселя, исходя из соответствующих свойств многочленов Якоби или Лежандра. Мы употребляем символ (a) $\to$ (b), который означает, что, сделав подстановку $x = \cos\frac{z}{n}$, мы получим предельным переходом при $n \to \infty$ из формулы (a) другую формулу (b). Мы имеем следующие соотношения:

(4.1.7) и (4.1.8) $\to$ (1.71.2),
(4.2.1) $\to$ (1.71.3),
(4.22.2) $\to J_{-l}(z) = (-1)^l J_l(z)$, l — целое,
(4.24.2) $\to$ (1.8.9),
каждое из представлений (4.8.6), (4.8.10), (4.9.3) $\to$ (1.71.6) в частном случае $\alpha = 0$ и (4.9.19) $\to$ (1.71.6) в общем случае.

См. также задачу 44.

Из теоремы 1.91.3 (теорема Гурвица) при $\alpha > -1$ вытекает вещественность нулей функции $z^{-\alpha}J_\alpha(z)$. Из (6.6.5) и (6.6.3) (или (6.6.2)) для положительных нулей j_ν функции $J_\alpha(z)$ мы получаем неравенства $\left(\lambda = \alpha + \frac{1}{2}\right)$:

$$\left(\nu + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\right)\pi \leqslant j_\nu \leqslant \nu\pi, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, \quad -\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant +\frac{1}{2} \tag{8.1.4}$$

Нижняя граница может быть заменена через $(\nu + \alpha)\pi$, если $-\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 0$ (см. (6.6.6)). Кроме того (см. Ватсон [3], стр. 49, (1); см. (7.31.5)), мы имеем

$$(7.33.1) \to \Gamma(\alpha+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} |J_\alpha(z)| \leqslant 1, \quad z > 0, \quad \alpha \geqslant -\frac{1}{2}. \tag{8.1.5}$$

$$(7.33.5) \to z^{\frac{1}{2}} |J_\alpha(z)| \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad z > 0, \ -\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}. \tag{8.1.6}$$

Ряд (4.9.17), (8.21.5) и оценка остаточного члена (8.21.6) дают важную формулу (см. Стилтьес [8], стр. 242):

$$\left.\begin{aligned} J_0(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{\{1\cdot 3\ldots(2\nu-1)\}^2}{2\cdot 4\ldots 2\nu} \cdot \frac{\cos\left\{z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\}}{2^{2\nu} z^\nu} + \varepsilon_p(z), \\ |\varepsilon_p(z)| &\leqslant \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\{1\cdot 3\ldots(2p-1)\}^2}{2\cdot 4\ldots 2p} \cdot \frac{1}{2^{2p} z^p}, \quad z > 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.1.7}$$

Таким образом, погрешность $\varepsilon_p(z)$ численно меньше, чем первый отброшенный член (в котором cos заменен единицей). При $p = 1$ мы получаем частный случай $\alpha = 0$ формулы (1.71.7) (с численной постоянной в оценке остаточного члена).

(3) Теорема 8.1.3. *Пусть* α — *произвольное вещественное число. Тогда для произвольного комплексного* z *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{z}{n}\right) = z^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2z^{\frac{1}{2}}), \tag{8.1.8}$$

причем равномерно при ограниченных z.

Эта формула аналогична формуле (8.1.1) и дает аналогичные результаты. Доказательство ее может быть проведено тем же путем. В частных случаях $\alpha=\pm\frac{1}{2}$ мы опять получаем тригонометрические функции. Из этого случая можно вывести аналогичную формулу для многочленов Эрмита. См. задачу 45.

Правые части в формулах (8.1.1) и (8.1.8) являются первыми членами соответствующих асимптотических разложений. Относительно многочленов Лагерра в случае $\alpha=0$ см. Мёклин [1], стр. 28.

8.21. Асимптотические формулы для многочленов Лежандра и Якоби

С точки зрения асимптотических задач многочлены Лежандра $P_n(x)$ представляют собой простейший нетривиальный случай. Мы начнем с перечисления нескольких классических результатов относительно поведения $P_n(x)$ при $n\to\infty$. Доказательства, основанные на различных методах, будут даны в последующих параграфах. В дальнейшем ε означает такое фиксированное число, что $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, следовательно, отрезок $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ лежит целиком внутри отрезка $[0, \pi]$; p — фиксированное целое положительное число.

(1) Теорема 8.21.1 (формула Лапласа — Гейне; Гейне [3], том 1, стр. 174). *Пусть x — произвольное вещественное или комплексное число, которое не принадлежит отрезку* $[-1, +1]$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$P_n(x)\cong(2\pi n)^{-\frac{1}{2}}(x^2-1)^{-\frac{1}{4}}\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\}^{n+\frac{1}{2}}. \tag{8.21.1}$$

Здесь $(x^2-1)^{-\frac{1}{4}}$, $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ *и* $\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\}^{n+\frac{1}{2}}$ *вещественны и положительны, когда x — вещественное число, большее чем единица. Вне произвольной замкнутой кривой, которая заключает в себе отрезок* $[-1, +1]$, *эта формула имеет место равномерно в том смысле, что отношение стремится равномерно к единице.*

Теорема 8.21.2. (Формула Лапласа; Гейне [3], том 1, стр. 175.)

$$P_n(\cos\theta)=2^{\frac{1}{2}}(\pi n\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right\}+O(n^{-\frac{3}{2}}),\quad 0<\theta<\pi. \tag{8.21.2}$$

Оценка для остаточного члена равномерна на отрезке $\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$.

Теорема 8.21.3 (обобщение формулы Лапласа — Гейне). *Пусть x — точка комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка* $[-1, +1]$; *пусть* $x=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$, $|z|>1$. *Тогда*

$$P_n(x)=g_n z^n\sum_{\nu=0}^{p-1} g_\nu\frac{1\cdot 3\ldots(2\nu-1)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2\nu+1)}z^{-2\nu}(1-z^{-2})^{-\nu-\frac{1}{2}}+ \\ +O(n^{-p-\frac{1}{2}}|z|^n). \tag{8.21.3}$$

Здесь g_ν имеют тот же смысл, что в (4.9.2), т. е.

$$g_0=1,\quad g_\nu=\frac{1\cdot 3\ldots(2\nu-1)}{2\cdot 4\ldots 2\nu},\quad \nu=1, 2, 3, \ldots$$

Формула (8.21.3) справедлива равномерно в указанном в теореме 8.21.1 смысле.

Теорема 8.21.4 (обобщение формулы Лапласа, данное Дарбу [1], стр. 39).

$$P_n(\cos\theta) = \\ = 2g_n \sum_{\nu=0}^{p-1} g_\nu \frac{1\cdot 3 \ldots (2\nu-1)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2\nu+1)} \frac{\cos\left\{\left(n-\nu+\frac{1}{2}\right)\theta - \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\nu+\frac{1}{2}}} + \\ + O\left(n^{-p-\frac{1}{2}}\right), \quad 0<\theta<\pi. \quad (8.21.4)$$

Здесь g_ν имеют тот же смысл, что в теореме 8.21.3. *Оценка для остаточного члена равномерна на отрезке* $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$.

Теорема 8.21.5 (обобщение формулы Лапласа, данное Стилтьесом [7], [8]).

$$P_n(\cos\theta) = \frac{4}{\pi} \frac{2\cdot 4 \ldots 2n}{3\cdot 5 \ldots (2n+1)} \sum_{\nu=0}^{p-1} h_\nu \frac{\cos\left\{\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)\theta - \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\nu+\frac{1}{2}}} + \\ + R_p(\theta), \quad 0<\theta<\pi. \quad (8.21.5)$$

Здесь h_ν имеют тот же смысл, что в (4.9.18), *т. е.*

$$h_0 = 1, \quad h_\nu = \frac{1\cdot 3 \ldots (2\nu-1)}{2\cdot 4 \ldots 2\nu} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{5}{2}\right)\cdots\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)}, \quad \nu = 1, 2, 3 \ldots.$$

Справедливо неравенство

$$|R_p(\theta)| < \frac{4}{\pi} \frac{2\cdot 4 \ldots 2n}{3\cdot 5 \ldots (2n+1)} h_p \frac{M}{(2\sin\theta)^{p+\frac{1}{2}}}, \quad M = \max\left(|\cos\theta|^{-1}, \ 2\sin\theta\right). \quad (8.21.6)$$

Множитель M удовлетворяет неравенствам $1 < M < 2$. Следовательно, остаточный член численно меньше, чем удвоенный первый отброшенный член (в котором cos *заменен единицей).*

Теорема 8.21.6 (формула Хильба [1]).

$$P_n(\cos\theta) = \left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}} J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (8.21.7)$$

равномерно при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$. Более точно, для остаточного члена справедливы следующие оценки:

$$\left.\begin{array}{ll} \theta^{\frac{1}{2}} O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right), & \text{если } \frac{c}{n} \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon, \\ \theta^2 O(1), & \text{если } 0 < \theta \leqslant \frac{c}{n}, \end{array}\right\} \quad (8.21.8)$$

где c — фиксированная положительная постоянная.

(2) Часть этих результатов может быть распространена на многочлены Якоби. Распространение формулы (8.21.1) принадлежит Дарбу [1].

Теорема 8.21.7. *Пусть α и β — произвольные вещественные числа. Тогда*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \cong (x-1)^{-\alpha/2}(x+1)^{-\beta/2}\{(x+1)^{1/2} + \\ + (x-1)^{1/2}\}^{\alpha+\beta}(2\pi n)^{-1/2}(x^2-1)^{-1/4}\{x+(x^2-1)^{1/2}\}^{n+1/2}, \quad (8.21.9)$$

где x — точка, не принадлежащая отрезку $[-1, 1]$. *Эта формула имеет место равномерно в смысле, указанном в теореме* 8.21.1. *Определение многозначной функции, встречающейся в* (8.21.9), *очевидно.*

Распространение формулы (8.21.2) также принадлежит Дарбу [1]; это — важная формула, на которую мы ссылались в § 7.32.

Теорема 8.21.8. *Пусть α и β — произвольные вещественные числа. Тогда*

$$\left.\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) &= n^{-\frac{1}{2}}k(\theta)\cos(N\theta+\gamma)+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right),\\ k(\theta) &= \pi^{-\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}},\\ N &= n+\frac{\alpha+\beta+1}{2},\quad \gamma=-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2},\quad 0<\theta<\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (8.21.10)$$

Оценка остаточного члена равномерна на отрезке $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$.

Обобщение теорем 8.21.3 и 8.21.4 на многочлены Якоби осуществляется легко. Однако закон для коэффициентов в этом случае сложнее.

Теорема 8.21.9. *Пусть α и β — произвольные вещественные числа. Существует последовательность аналитических функций $\varphi_\nu(z)=\varphi_\nu(\alpha,\beta;z)$, которые вещественны при вещественных z и регулярны при $|z|>1$ и при $|z|=1$, $z\neq\pm1$, таких, что*

$$z^{-n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{\nu=0}^{p-1}\varphi_\nu(z)\,n^{-\nu-\frac{1}{2}}+O\left(n^{-p-\frac{1}{2}}\right),\quad x=\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\ |z|>1, \qquad (8.21.11)$$

равномерно при $|z|\geqslant R$, $R>1$.

Кроме того,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=2\Re\left\{e^{in\theta}\sum_{\nu=0}^{p-1}\varphi_\nu(e^{i\theta})\,n^{-\nu-\frac{1}{2}}\right\}+O\left(n^{-p-\frac{1}{2}}\right),\quad 0<\theta<\pi, \qquad (8.21.12)$$

равномерно на отрезке $\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$.

Эти обобщения приобретают в случае ультрасферических многочленов следующую более точную форму:

Теорема 8.21.10. *Пусть* $x=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$, $|z|>1$, *а* $\lambda>0$ *или* $\lambda<0$, $\lambda\neq-1, -2, -3, \ldots$ *Тогда*

$$P_n^{(\lambda)}(x)=\alpha_n z^n\sum_{\nu=0}^{p-1}\alpha_\nu\frac{(1-\lambda)(2-\lambda)\ldots(\nu-\lambda)}{(n+\lambda-1)(n+\lambda-2)\ldots(n+\lambda-\nu)}z^{-2\nu}(1-z^{-2})^{-\nu-\lambda}+ \\ +O\left(n^{\lambda-p-1}|z|^n\right). \qquad (8.21.13)$$

Кроме того,

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)= \\ =2\alpha_n\sum_{\nu=0}^{p-1}\alpha_\nu\frac{(1-\lambda)(2-\lambda)\ldots(\nu-\lambda)}{(n+\lambda-1)(n+\lambda-2)\ldots(n+\lambda-\nu)}\,\frac{\cos\left\{(n-\nu+\lambda)\theta-(\nu+\lambda)\frac{\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\nu+\lambda}}+ \\ +O\left(n^{\lambda-p-1}\right),\quad 0<\theta<\pi. \qquad (8.21.14)$$

Здесь α_ν имеют тот же смысл, что и в (4.9.21). *Относительно равномерности справедливо то же замечание, что в предыдущей теореме.*

Частный случай, когда λ принимает целые значения, рассмотрен в § 8.4, (5).

Имеет место следующее распространение теоремы 8.21.5 на ультрасферические многочлены:

Теорема 8.21.11. *Пусть* $0 < \lambda < 1$. *Справедливо соотношение*

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \\ = \frac{2}{\pi}\sin\lambda\pi\,\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)}\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{\Gamma(\nu+\lambda)\,\Gamma(\nu-\lambda+1)}{\nu!\,\Gamma(n+\nu+\lambda+1)}\,\frac{\cos\left\{(n+\nu+\lambda)\,\theta-(\nu+\lambda)\frac{\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\nu+\lambda}}+ \\ +R_p(\theta),\quad 0<\theta<\pi,\qquad (8.21.15)$$

где

$$|R_p(\theta)| < \frac{2}{\pi}\sin\lambda\pi\,\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)}\,\frac{\Gamma(p+\lambda)\,\Gamma(p-\lambda+1)}{p!\,\Gamma(n+p+\lambda+1)}\,\frac{M}{(2\sin\theta)^{p+\lambda}}.\qquad (8.21.16)$$

Здесь M *имеет тот же смысл, что в теореме* 8.21.5.

(3) Наконец, мы упомянем следующую теорему типа теорем Хильба (см. Сегё [17], стр. 77; Рау [2], стр. 691—692):

Теорема 8.21.12. *Пусть* $\alpha > -1$, *а* β — *произвольное вещественное число. Тогда*

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = N^{-\alpha}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}J_\alpha(N\theta)+ \\ +\begin{cases}\theta^{\frac{1}{2}}O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right), & \text{если } cn^{-1}\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon,\\ \theta^{\alpha+2}O(n^{\alpha}), & \text{если } 0<\theta\leqslant cn^{-1},\end{cases}\qquad (8.21.17)$$

где N *имеет тот же смысл, что и в* (8.21.10); c *и* ε — *фиксированные положительные числа.*

Очевидно, остаточный член всюду есть $\theta^{\frac{1}{2}}O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$. Если мы применим (4.1.3), то получим аналогичную формулу в промежутках $\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-cn^{-1}$ и $\pi-cn^{-1}\leqslant\theta<\pi$, допуская, что $\beta>-1$. Благодаря формуле (1.71.7), это приводит к следующему важному результату:

Теорема 8.21.13. *Пусть* $\alpha>-1$, $\beta>-1$. *В тех же обозначениях, что в* (8.21.10), *имеем*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = n^{-\frac{1}{2}}k(\theta)\left\{\cos(N\theta+\gamma)+(n\sin\theta)^{-1}O(1)\right\},\quad cn^{-1}\leqslant\theta\leqslant\pi-cn^{-1},\qquad (8.21.18)$$

где c — *фиксированное положительное число.*

Эта формула (см. Сегё [17], стр. 77) более точна, чем (8.21.10); при $\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}$, $0<\lambda<1$, она вытекает из теоремы 8.21.11, $p=1$. Ограничение $\alpha>-1$, $\beta>-1$ не существенно (см. Сегё, [17], а также Обрешков [2]).

(4) Аналогичные формулы имеют место для функций Якоби второго рода $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ и, в частности, для функций Лежандра второго рода $Q_n(x)$, когда x лежит в плоскости с разрезом, а также для $\mathbf{Q}_n(\cos\theta)$, если $0<\theta<\pi$. Здесь мы отметим только формулу, аналогичную формуле Лапласа (8.21.2).

Теорема 8.21.14. *При* $0<\theta<\pi$

$$\mathbf{Q}_n(\cos\theta) = \pi^{\frac{1}{2}}(2n\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right\}+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right).\qquad (8.21.19)$$

Эта формула имеет место равномерно на отрезке $[\varepsilon,\ \pi-\varepsilon]$.

8.22. Асимптотические формулы для многочленов Лагерра и Эрмита

Аналогичные формулы, хотя и несколько более сложные, имеют место для многочленов Лагерра и Эрмита. Мы предполагаем в дальнейшем, что $n \to \infty$; мы обозначаем через ε и ω фиксированные положительные числа, $\varepsilon < \omega$, а через p — целое положительное число.

(1) Теорема 8.22.1 (формула Фейера [3]). *Пусть α — произвольное вещественное число; тогда*

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left\{2(nx)^{\frac{1}{2}} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\} + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right),\quad x > 0. \tag{8.22.1}$$

Оценка остаточного члена равномерна на отрезке $[\varepsilon, \omega]$.

Теорема 8.22.2 (обобщение формулы Фейера, данное Перроном [2], стр. 78, (49)). *Пусть α — произвольное вещественное число. При $x > 0$ справедливо соотношение*

$$\begin{gathered} L_n^{(\alpha)}(x) = \\ = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left\{2(nx)^{\frac{1}{2}} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\} \left\{\sum_{\nu=0}^{p-1} A_\nu(x) n^{-\frac{\nu}{2}} + O\left(n^{-\frac{p}{2}}\right)\right\} + \\ + \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \sin\left\{2(nx)^{\frac{1}{2}} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\} \left\{\sum_{\nu=0}^{p-1} B_\nu(x) n^{-\frac{\nu}{2}} + O\left(n^{-\frac{p}{2}}\right)\right\}, \end{gathered} \tag{8.22.2}$$

где $A_\nu(x)$ и $B_\nu(x)$ — некоторые функции от x, не зависящие от n, регулярные при $x > 0$. Оценка остаточного члена равномерна на отрезке $[\varepsilon, \omega]$.

Отметим, что $A_0(x) = 1$, $B_0(x) = 0$.

Теорема 8.22.3 (формула Перрона в комплексной области; цитированная статья). *Пусть α — произвольное вещественное число. Тогда*

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} (-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \exp\left[2(-nx)^{\frac{1}{2}}\right] \left\{\sum_{\nu=0}^{p-1} C_\nu(x) n^{-\frac{\nu}{2}} + O\left(n^{-\frac{p}{2}}\right)\right\}, \tag{8.22.3}$$

где $C_\nu(x)$ опять не зависит от n; эта функция регулярна в комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной части вещественной оси. Формула (8.22.3) имеет место при x, лежащем в упомянутой плоскости с разрезом; функции $(-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}$ и $(-x)^{\frac{1}{2}}$ выбраны так, что они вещественны и положительны при $x < 0$. Оценка остаточного члена равномерна во всякой замкнутой области, не пересекающейся с полуосью $x \geqslant 0$.

Здесь $C_0(x) = 1$.

Теорема 8.22.4 (асимптотическая формула типа формулы Хильба). *При $\alpha > -1$*

$$\left.\begin{aligned} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) &= N^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} J_\alpha\{2(Nx)^{\frac{1}{2}}\} + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right), \\ N &= n + \frac{\alpha+1}{2}, \quad x > 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.22.4}$$

где оценка равномерна в промежутке $0 < x \leqslant \omega$. Более точно, имеют место следующие оценки:

$$\left.\begin{aligned} &x^{\frac{5}{4}} O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right), \quad \text{если } cn^{-1} \leqslant x \leqslant \omega, \\ &x^{\frac{\alpha}{2}+2} O(n^{\alpha}), \quad \text{если } 0 < x \leqslant cn^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{8.22.5}$$

В случае, когда $\alpha=0$, последняя оценка должна быть заменена оценкой $x^2 \ln(x^{-1}n^{-1})$; в (8.22.5) c — фиксированное положительное число.

Ясно, что остаточный член в (8.22.5) равен $x^{\frac{5}{4}} O(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}})$ при $0 < x \leqslant \omega$.

Как следствие из (8.22.4), мы получаем следующий аналог формулы (8.21.18), который является более точным результатом, чем (8.22.1).

Теорема 8.22.5. *Пусть $\alpha > -1$ и $cn^{-1} \leqslant x \leqslant \omega$; тогда*

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \left\{ \cos\left[2(nx)^{\frac{1}{2}} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] + (nx)^{-\frac{1}{2}} O(1) \right\}, \tag{8.22.6}$$

где c и ω — фиксированные положительные постоянные.

Заметим, что $N^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} = O(n^{-\frac{1}{2}})$, где N имеет тот же смысл, что в (8.22.4).

(2) Подставляя $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ в (8.22.4), мы находим, используя (5.6.1) и (1.71.2), формулу типа формулы Хильба для многочленов Эрмита. Она содержится в следующей, более общей теореме.

Теорема 8.22.6 (асимптотическое разложение для многочленов Эрмита). *Для вещественных x справедливо соотношение*

$$\lambda_n^{-1} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = \cos\left(N^{\frac{1}{2}} x - \frac{n\pi}{2}\right) \sum_{\nu=0}^{p-1} u_\nu(x) N^{-\nu} +$$

$$+ N^{-\frac{1}{2}} \sin\left(N^{\frac{1}{2}} x - \frac{n\pi}{2}\right) \sum_{\nu=0}^{p-1} v_\nu(x) N^{-\nu} + O(n^{-p}), \quad N = 2n+1, \tag{8.22.7}$$

где

$$\lambda_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad \text{или} \quad \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)} N^{-\frac{1}{2}},$$

в зависимости от того, четно или нечетно n; $u_\nu(x)$ и $v_\nu(x)$ — многочлены, зависящие от ν; они содержат соответственно только четные или нечетные степени x. Оценка погрешности равномерна на любом конечном отрезке вещественной оси независимо от того, содержит ли он начало координат или нет.

Для произвольного n мы имеем

$$\lambda_n = \left\{ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right\} \{1 + O(n^{-1})\}, u_0(x) = 1, \ v_0(x) = \frac{x^3}{6},$$

так что

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) =$$

$$= \cos\left(N^{\frac{1}{2}} x - \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{x^3}{6} N^{-\frac{1}{2}} \sin\left(N^{\frac{1}{2}} x - \frac{n\pi}{2}\right) + O(n^{-1}). \tag{8.22.8}$$

Теорема 8.22.7 (асимптотическое разложение для многочленов Эрмита в комплексной области). *Соотношение* (8.22.7) *справедливо в комплексной x-плоскости, если мы заменим остаточный член на* $\exp\{N^{\frac{1}{2}} |\Im x|\} O(n^{-p})$. *Это имеет место равномерно при $|x| \leqslant R$, где R — произвольное фиксированное положительное число.*

(3) Наконец мы остановимся на другом типе асимптотических формул, вывод которых требует более сложных рассмотрений.

Теорема 8.22.8 (формула для многочленов Лагерра типа формулы Планшереля — Ротаха). *Пусть α — произвольное вещественное число, ε и ω — фиксированные положительные числа. Справедливы следующие соотношения:*

(a) *при* $x=(4n+2\alpha+2)\cos^2\varphi$, $\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon n^{-\frac{1}{2}}$

$$e^{-\frac{x}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)=(-1)^n(\pi\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\times$$
$$\times\left\{\sin\left[\left(n+\frac{\alpha+1}{2}\right)(\sin 2\varphi-2\varphi)+\frac{3\pi}{4}\right]+(nx)^{-\frac{1}{2}}O(1)\right\};\qquad(8.22.9)$$

(b) *при* $x=(4n+2\alpha+2)\operatorname{ch}^2\varphi$, $\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant\omega$

$$e^{-\frac{x}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{2}(-1)^n(\pi\operatorname{sh}\varphi)^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\times$$
$$\times\exp\left[\left(n+\frac{\alpha+1}{2}\right)(2\varphi-\operatorname{sh}2\varphi)\right][1+O(n^{-1})];\qquad(8.22.10)$$

(c) *при* $x=4n+2\alpha+2-2\left(\frac{2n}{3}\right)^{\frac{1}{3}}t$, t — *ограниченное комплексное число,*

$$e^{-\frac{x}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)=(-1)^n\pi^{-1}2^{-\alpha-\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}n^{-\frac{1}{3}}\{A(t)+O(n^{-\frac{2}{3}})\},\qquad(8.22.11)$$

где $A(t)$ — функция Эйри, определенная в § 1.81.

Во всех этих формулах оценка остаточного члена равномерна.

Соответствующие формулы для многочленов Эрмита (Планшерель — Ротах [1]) даются следующим предложением:

Теорема 8.22.9. *Пусть ε и ω — фиксированные положительные числа. Справедливы следующие соотношения:*

(a) *при* $x=(2n+1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi$, $\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant\pi-\varepsilon$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)=2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}(n!)^{\frac{1}{2}}(\pi n)^{-\frac{1}{4}}(\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left\{\sin\left[\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)(\sin 2\varphi-2\varphi)+\frac{3\pi}{4}\right]+O(n^{-1})\right\};\qquad(8.22.12)$$

(b) *при* $x=(2n+1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\varphi$, $\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant\omega$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)=2^{\frac{n}{2}-\frac{3}{4}}(n!)^{\frac{1}{2}}(\pi n)^{-\frac{1}{4}}(\operatorname{sh}\varphi)^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\exp\left[\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)(2\varphi-\operatorname{sh}2\varphi)\right][1+O(n^{-1})];\qquad(8.22.13)$$

(c) *при* $x=(2n+1)^{\frac{1}{2}}-2^{-\frac{1}{2}}3^{-\frac{1}{3}}n^{-\frac{1}{6}}t$, t — *ограниченное комплексное число,*

$$e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)=3^{\frac{1}{3}}\pi^{-\frac{3}{4}}2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}(n!)^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{12}}\{A(t)+O(n^{-\frac{2}{3}})\}.\qquad(8.22.14)$$

Во всех этих формулах оценка остаточного члена равномерна.

Отметим, что формула (8.22.12) имеет место равномерно в окрестности точки $x=0$.

8.23. Замечания по поводу предыдущих результатов

(1) Среди всех формул, перечисленных в § 8.21, формула (8.21.1) имеет простейший характер. Она может быть доказана различными способами. Ее развитием является асимптотический ряд (8.21.3). Соответствующие формулы имеют место для многочленов Якоби (§ 8.21, (2)). Следующее простое следствие формулы (8.21.9) важно для различных целей:

$$|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|^{\frac{1}{n}} \cong |x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}|, \quad n\to\infty, \tag{8.23.1}$$

где x лежит в плоскости с разрезом. Правая часть в (8.23.1) больше единицы и представляет собой полусумму осей эллипса с фокусами ± 1, проходящего через точку x. Интересно сравнить (8.23.1) со следующей формулой для функций Якоби второго рода:

$$|Q_n^{(\alpha,\beta)}(y)|^{\frac{1}{n}} \cong |y-(y^2-1)^{\frac{1}{2}}|, \tag{8.23.2}$$

где y лежит в плоскости с разрезом. Правая часть в (8.23.2) меньше единицы (см. (8.71.19)).

Мы дадим также несколько доказательств классической формулы Лапласа (8.21.2). Она аналогичным образом может быть обобщена в различных направлениях.

Формула Дарбу (8.21.4) является наиболее важной иллюстрацией принадлежащего ему метода [1]. Этот метод дает асимптотические формулы для коэффициентов степенного ряда, особенности которого на окружности сходимости имеют в известном смысле простой характер. Этот же метод позволяет установить формулу (8.21.3), а также соответствующее ее распространение на многочлены Якоби (см. § 8.4).

Значение формулы Стилтьеса состоит в том, что она безоговорочно справедлива во всем промежутке $0<\theta<\pi$ (несмотря на то, что граница для остаточного члена (8.21.6) стремится к бесконечности, когда $\theta\to 0$ или $\theta\to\pi$). Вследствие этого она может быть использована в различных случаях не только внутри промежутка $(0, \pi)$, но и в окрестности его концов, где формулы Лапласа и Дарбу в общем случае неприменимы. При $p=0$ она имеет место в том смысле, что $P_n(\cos\theta)=R_0(\theta)$. Таким образом, (8.21.6) дает неравенство (7.3.8), но с большим множителем справа $\left(\text{а именно } 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ вместо } \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$. Из формулы Стилтьеса легко можно найти произвольное число членов в (8.21.4). Однако, по-видимому, трудно этим путем найти общий закон образования коэффициентов в (8.21.4).

Важность формулы Хильба также состоит в ее безоговорочной справедливости в окрестности точки $\theta=0$, причем с дополнительным преимуществом, что остаточный член стремится к нулю в этой окрестности. Она непосредственно дает формулу Мелера — Гейне (8.1.1) и позволяет получить формулу Лапласа (8.21.2) благодаря (1.71.7). Оценка (8.21.8) является небольшим улучшением результата Хильба. Наше доказательство (§ 8.62) в основном то же, что у Хильба. Сегё [15] указал асимптотическое разложение по функциям Бесселя возрастающего порядка и обобщил результат Хильба. Аналогичные формулы справедливы для функций Лежандра второго рода. Сегё получил также ([15], стр. 450) аналог формулы (8.21.1), который дает результат, имеющий место в плоскости с разрезом, произвольно близко от ее границы. Эта формула содержит функции Бесселя с мнимыми аргументами.

Иная формула того же типа, что (8.21.7), была дана Ватсоном [2], причем указывается численная оценка остатка. В эту формулу входят функции $J_0(z)$ и $Y_0(z)$.

Теорема 8.21.12 является распространением формулы Хильба на многочлены Якоби. Ее доказательство, данное в § 8.63, ведется таким же образом, как и доказательство в § 8.62.

Доказательства теорем 8.21.1 — 8.21.14 основаны на следующих методах:

(a) ряды или интегральные представления;

(b) метод Дарбу;

(c) метод Лиувилля — Стеклова (метод интегро-дифференциальных уравнений);

(d) метод перевала.

Краткий обзор этих методов будет дан в соответствующих местах.

(2) Вывод формулы (8.22.1), данный Фейером, основан на производящей функции (5.1.9), которая в этом случае имеет существенную особенность в точке $w=1$ на окружности сходимости $|w|=1$. Это рассуждение носит характер, подобный методу Дарбу. Более сложный тип особенности в этом случае требует более тщательного исследования; оно осуществляется Фейером с помощью элементарного способа, подобного второй теореме о среднем в интегральном исчислении.

В первом доказательстве справедливости формулы (8.22.3) (в частном случае $p=1$) Перрон [1] использует комплексное интегрирование. Он получает полные разложения (8.22.2) и (8.22.3), используя некоторые общие асимптотические результаты относительно вырожденных гипергеометрических функций.

Дальнейшие выводы формулы Фейера (частично дающие более точные оценки для остаточного члена и справедливые на некоторых отрезках, концы которых стремятся к $+0$ или к $+\infty$) были даны Ротахом [1], Сегё [10], Когбетлянцем [14]. Они применяли либо метод перевала, либо аналогичные рассуждения. Формула Фейера содержится в (8.22.4); последний результат следует из некоторой общей асимптотической теоремы типа теоремы Хильба, принадлежащей Райту ([1], стр. 261, однако, только при фиксированном x). Мы приводим доказательство формулы (8.22.4), используя метод Лиувилля — Стеклова (§ 8.64).

Частные случаи $\alpha=\pm\frac{1}{2}$ соответствуют многочленам Эрмита (см. (8.22.7)); эти случаи были исследованы еще до Фейера Адамовым [1]. Адамов получил остаточный член с некоторыми численными оценками.

Мы выводим (8.22.7), применяя метод Лиувилля — Стеклова. Формула Успенского (5.6.5) приводит непосредственно к соответствующему асимптотическому разложению для многочленов Лагерра, содержащему функции Бесселя. Мы указываем это в § 8.66. По поводу этого выражения см. Райт [1]; его первый член есть (8.22.4). Из этого асимптотического разложения легко вытекают формулы Перрона (8.22.2) и (8.22.3). Другое доказательство этих формул может быть дано методом перевала (§ 8.72).

Первый член упомянутого асимптотического разложения для многочленов Эрмита дает формула (8.22.8). Формула Адамова менее точна. (С другой стороны, она содержит численные постоянные.) Сравнение формулы (8.22.8) с формулой Успенского ([1], стр. 597, (6)) показывает, что более удобно полагать $N=2n+1$, чем $N=2n$.

Весьма детальное асимптотическое исследование многочленов Эрмита принадлежит Ватсону ([1], вторая статья).

Отметим следующее простое следствие теорем 8.22.3 и 8.22.7.

Пусть x лежит в комплексной плоскости, разрезанной вдоль неотрицательной вещественной оси. Тогда

$$n^{-\frac{1}{2}} \ln | L_n^{(\alpha)}(x) | \to 2\Re[(-x)^{\frac{1}{2}}], \quad n \to \infty. \tag{8.23.3}$$

Функция $(-x)^{\frac{1}{2}}$ выбрана так, что она вещественна и положительна при $x < 0$. Если x — мнимое число, то

$$(2n)^{-\frac{1}{2}} \ln \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)} | H_n(x) | \right\} \to | \Im x |, \quad n \to \infty. \tag{8.23.4}$$

Теоремы 8.22.8 и 8.22.9 тесно связаны с важным результатом Планшереля — Ротаха [1]. Эти авторы рассматривали исключительно многочлены Эрмита и применяли метод перевала; они получили полное асимптотическое разложение во всех трех случаях теоремы 8.22.9. Их рассуждения были применены к многочленам $L_n(x)$ Мёклиным [1]. Мы выведем (§§ 8.73—8.75) только главные члены этого разложения, но для общих многочленов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$, применяя метод перевала. Наши рассуждения основаны на производящей функции (5.1.16) и на асимптотическом разложении функции Бесселя в комплексной области.

Формулы (8.22.9)—(8.22.11) характеризуют многочлены Лагерра соответственно в области, где график многочлена колеблется, вне ее и в окрестности наибольшего из нулей. То же самое относится к формулам (8.22.12)—(8.22.14).

Ван Вин ([1], [2]) вывел асимптотический ряд, соответствующий формуле (8.22.12), и указал численные оценки. Швид [1] применил метод Лиувилля — Стеклова (в более точной форме, принадлежащей Лангеру [1]) к асимптотическому исследованию многочленов Эрмита.

8.3. «Элементарное» доказательство формул Лапласа—Гейне и Лапласа

(1) Начнем с представления (4.9.4) и докажем сначала формулу (8.21.1). Пусть $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, $|z| > 1$; тогда имеем

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} g_m g_{n-m} z^{n-2m} = g_n z^n \cdot \sum_{m=0}^{n} \frac{g_{n-m}}{g_n} g_m z^{-2m}. \tag{8.3.1}$$

Мы покажем сейчас, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{g_{n-m}}{g_n} - 1 \right) g_m z^{-2m} = 0, \tag{8.3.2}$$

причем равномерно при $|z| \geqslant R$, $R > 1$. Действительно, выражение в скобках стремится к нулю, когда m фиксированно, а $n \to \infty$. С другой стороны, легко найти мажоранту; мы имеем, например,

$$0 \leqslant \left(\frac{g_{n-m}}{g_n} - 1 \right) g_m \leqslant \frac{g_{n-m} g_m}{g_n}.$$

Далее, числа $(n+1)^{\frac{1}{2}}g_n$ ограничены в совокупности снизу и сверху положительными постоянными и, кроме того,

$$\frac{(n+1)^{\frac{1}{2}}}{(n-m+1)^{\frac{1}{2}}(m+1)^{\frac{1}{2}}} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant m \leqslant n.$$

(2) Мы можем доказать (8.3.2) иным путем, используя весьма элементарные свойства последовательности $\{g_n\}$. Пусть $\delta > 0$ — произвольное число, а M — такое целое положительное число, что

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} R^{-2m} < \delta.$$

Числа $\frac{g_{n-m}}{g_n} - 1$ положительны и возрастают вместе с m; следовательно, при $n > M$ мы имеем

$$\sum_{m=0}^{M} \left(\frac{g_{n-m}}{g_n} - 1\right) g_m R^{-2m} \leqslant \left(\frac{g_{n-M}}{g_n} - 1\right) \sum_{m=0}^{M} g_m R^{-2m} <$$
$$< \left(\frac{g_{n-M}}{g_n} - 1\right) \sum_{m=0}^{\infty} g_m R^{-2m}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$, так как $\frac{g_n}{g_{n-1}} \to 1$. С другой стороны, выполняется неравенство

$$\sum_{m=M+1}^{n} \left(\frac{g_{n-m}}{g_n} - 1\right) g_m R^{-2m} < \sum_{m=M+1}^{n} \frac{g_{n-m} g_m}{g_n} R^{-2m}.$$

Но отношение $\frac{g_m}{g_{m-1}}$ возрастает, поэтому

$$\frac{g_{n-m} g_m}{g_{n-m+1} g_{m-1}} \leqslant 1 \text{ или } \geqslant 1$$

в соответствии с тем, будет ли $m \leqslant (n+1)/2$ или же $m \geqslant (n+1)/2$. Следовательно, $g_{n-m}\, g_m$ достигает своего максимума, когда m изменяется от нуля до n, при $m = 0$ и $m = n$, то есть $g_{n-m}\, g_m \leqslant g_n$, так что

$$\sum_{m=M+1}^{n} \left(\frac{g_{n-m}}{g_n} - 1\right) g_m R^{-2m} \leqslant \sum_{m=M+1}^{n} R^{-2m} \leqslant \sum_{m=M+1}^{\infty} R^{-2m} < \delta.$$

Это доказывает (8.3.2).

Таким образом, выражение

$$(g_n z^n)^{-1} P_n(x) - \sum_{m=0}^{n} g_m z^{-2n} \tag{8.3.3}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, равномерно при $|z| \geqslant R$, $R > 1$. Последняя сумма стремится к $(1 - z^{-2})^{-\frac{1}{2}}$; отсюда (8.21.1) легко выводится.

(3) Для доказательства (8.21.2) мы используем (4.9.3). При $0 < \theta < \pi$ мы имеем

$$P_n(\cos\theta) = 2g_n \Re\left\{e^{-in\theta} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \frac{g_{n-m}}{g_n} g_m e^{2im\theta}\right\} =$$

$$= 2g_n\Re\left\{e^{-in\theta} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \left(\frac{g_{n-m}}{g_n} - 1\right) g_m e^{2im\theta}\right\} +$$

$$+ 2g_n\Re\left\{e^{-in\theta} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' g_m e^{2im\theta}\right\}, \qquad (8.3.4)$$

где Σ' имеет то же значение, что в (7.4.5). Последовательность $\{g_m\}$ монотонно стремится к нулю и при $0 < \theta < \pi$ справедливо равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_m e^{2im\theta} = (1 - e^{2i\theta})^{-\frac{1}{2}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} (2\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}.$$

Этот ряд сходится равномерно при $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$.

Обозначая через δ произвольное положительное число, определим целое положительное M так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{m=M'}^{M''} g_m e^{2im\theta}\right| < \delta, \quad M'' > M' > M. \qquad (8.3.5)$$

Так как числа $\frac{g_{n-m}}{g_n} - 1$ положительны и возрастают вместе с m, если $n > 2M$, то в соответствии с неравенством Абеля мы имеем

$$\left|\sum_{m=0}^{M} \left(\frac{g_{n-m}}{g_n} - 1\right) g_m e^{2im\theta}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{g_{n-M}}{g_n} - 1\right) \max_{0 \leqslant \mu \leqslant M} \left|\sum_{m=\mu}^{M} g_m e^{2im\theta}\right| < K\left(\frac{g_{n-M}}{g_n} - 1\right), \qquad (8.3.6)$$

где K — фиксированная постоянная. С другой стороны,

$$\sum_{m=M+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \left(\frac{g_{n-m}}{g_n} - 1\right) g_m e^{2im\theta}\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{g_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}}{g_n} - 1\right) \max_{M < \mu \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]} \left|\sum_{m=\mu}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' g_m e^{2im\theta}\right| < \delta \frac{g_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}}{g_n}. \qquad (8.3.7)$$

Так как отношение $\frac{g_n}{g_{2n}}$ ограниченно, то мы видим, что первая сумма $\sum'$ в правой части (8.3.4) стремится к нулю. Из этого следует, что

$$(2g_n)^{-1} P_n(\cos\theta) = \Re\left\{e^{-in\theta} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} (2\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\right\} + \delta_n, \qquad (8.3.8)$$

где $\delta_n \to 0$ равномерно при $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$. Это и есть формула Лапласа с остаточным членом $o(n^{-\frac{1}{2}})$.

(4) Хотя эти «элементарные» рассуждения и не приводят к остаточному члену $O(n^{-\frac{3}{2}})$, входящему в формулу (8.21.2), они весьма важны, так как используют только очень простые свойства последовательности $\{g_n\}$. В то же время они дают некоторые асимптотические формулы для введенных в § 6.5 многочленов Фейера $F_n(x)$, справедливые соответственно в плоскости с разрезом и внутри промежутка $-1 < x < +1$, если мы только допустим, что последовательность $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет некоторым условиям. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 8.3. *Пусть $\{\alpha_m\}$ — такая положительная последовательность, что $\alpha_m \to 0$, $\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}} \uparrow 1$. Тогда имеет место следующая асимптотическая формула*:

$$F_n(x) \cong \alpha_n z^n \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m z^{-2m}, \quad n \to \infty, \tag{8.3.9}$$

где x лежит в плоскости с разрезом, $x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $|z| > 1$. Если, кроме того, отношение $\frac{\alpha_m}{\alpha_{2m}}$ остается ограниченным, то имеем

$$F_n(\cos\theta) = 2\alpha_n \Re\left\{e^{in\theta} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m e^{-2im\theta}\right\} + o(\alpha_n), \quad n \to \infty, \tag{8.3.10}$$

где $0 < \theta < \pi$. Обе формулы имеют место равномерно в том же смысле, как (8.21.1) *и соответственно* (8.21.2).

Асимптотическое равенство (8.3.9) является новым обобщением формулы Лапласа — Гейне; относительно обобщения (8.3.10) см. Сегё [11], стр. 186—187.

Заметим, что ряд в (8.3.9) является сходящимся, а ряд в (8.3.10) является равномерно сходящимся на отрезке $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$. По поводу последнего факта обратим внимание, что так как $\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}} \leqslant 1$, то α_m убывает. В качестве приложения теоремы 8.3 мы получаем аналоги формул (8.21.1) и (8.21.2) (с менее точной оценкой остаточного члена во втором случае) для ультрасферических многочленов $P_n^{(\lambda)}(x)$ при $\lambda > 0$.

8.4. Формула Дарбу, доказанная методом Дарбу

(1) Мы докажем формулу (8.21.4), а также другие формулы посредством важного метода, указанного Дарбу [1], и начнем с иллюстрации этого метода. Полагая $0 < \theta < \pi$, рассмотрим производящую функцию для многочленов Лежандра (см. (4.7.23))

$$h(w) = (1 - we^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}(1 - we^{i\theta})^{-\frac{1}{2}} \tag{8.4.1}$$

в окрестности точки $e^{i\theta}$, мы можем написать

$$h(w) = (1 - we^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}(1 - e^{2i\theta})^{-\frac{1}{2}}\left\{1 - \frac{e^{2i\theta}}{e^{2i\theta} - 1}(1 - we^{-i\theta})\right\}^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= (1 - e^{2i\theta})^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \left(\frac{e^{2i\theta}}{e^{2i\theta} - 1}\right)^{\nu} (1 - we^{-i\theta})^{\nu - \frac{1}{2}}. \tag{8.4.2}$$

Аналогичное представление справедливо в окрестности точки $e^{-i\theta}$. Обозначая L-е частные суммы этих разложений (т. е. останавливаясь на члене $\nu=L$) соответственно через $s_L^{(1)}(w)$ и $s_L^{(2)}(w)$, рассмотрим разность

$$H(w)=h(w)-s_L^{(1)}(w)-s_L^{(2)}(w). \tag{8.4.3}$$

Мы сразу видим, что L-я производная $H^{(L)}(w)$ имеет непрерывные граничные значения в круге $|w|\leqslant 1$. Таким образом, если мы разложим $H(w)$ в степенной ряд в окрестности точки $w=0$, то коэффициенты функции $H^{(L)}(w)$ стремятся к нулю. Это простое замечание показывает, что коэффициенты d_ι функции $H(w)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} n^L d_n=0. \tag{8.4.4}$$

Каждое из слагаемых конечных сумм $s_L^{(1)}(w)$ и $s_L^{(2)}(w)$ имеет только одну особенность на единичной окружности. ν-е слагаемое из $s_L^{(1)}(w)$ присоединяет к коэффициенту при w^n в $h(w)$ (а следовательно, к $P_n(\cos\theta)$ выражение вида

$$(1-e^{2i\theta})^{-\frac{1}{2}} g_\nu\left(\frac{e^{2i\theta}}{e^{2i\theta}-1}\right)^\nu \binom{\nu-\frac{1}{2}}{n}(-e^{-i\theta})^n; \tag{8.4.5}$$

ν-е слагаемое из $s_L^{(2)}(w)$ дает сопряженное к (8.4.5) выражение. Оба выражения имеют порядок $O(n^{-\nu-\frac{1}{2}})$. При фиксированном значении p коэффициент при w^n в $H(w)$ будет более высокого порядка, чем $n^{-p-\frac{1}{2}}$, если L достаточно велико.

Применяя то же самое рассуждение, можно получить следующую общую теорему:

Т е о р е м а 8.4. *Пусть $h(w)$ — регулярная функция в круге $|w|<1$ и пусть она имеет конечное число особенностей*

$$e^{i\varphi_1},\ e^{i\varphi_2},\ \ldots,\ e^{i\varphi_l},\ e^{i\varphi_\alpha}\neq e^{i\varphi_\beta},\ \alpha\neq\beta, \tag{8.4.6}$$

на единичной окружности $|w|=1$. Пусть

$$h(w)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(k)}(1-we^{-i\varphi_k})^{a_k+\nu b_k},\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,l, \tag{8.4.7}$$

в окрестности $e^{i\varphi_k}$, где $b_k>0$. Тогда выражение

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{l} c_\nu^{(k)}\binom{a_k+\nu b_k}{n}(-e^{i\varphi_k})^n \tag{8.4.8}$$

дает асимптотическое разложение коэффициента при w^n в $h(w)$ в следующем смысле: если Q — произвольное положительное число и если во внешней сумме в (8.4.8) взять достаточно большое число членов, то мы получим выражение, которое приближает рассматриваемый коэффициент с погрешностью $O(n^{-Q})$.

Простое рассуждение показывает, что в этой сумме достаточно остановиться на члене с номером $\nu=p-1$, где p — такое целое положительное число, что

$$p\geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant l} b_k^{-1}\{Q-\Re(a_k)-1\}. \tag{8.4.9}$$

Можно допустить также, что $h(w)$ имеет логарифмические особенности.

(2) В случае $P_n(\cos\theta)$ это асимптотическое разложение принимает вид

$$2\Re\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu (1-e^{2i\theta})^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{2i\theta}}{e^{2i\theta}-1}\right)^{\nu}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{n}(-e^{-i\theta})^n\right\}. \tag{8.4.10}$$

Общий член есть $O\left(n^{-\nu-\frac{1}{2}}\right)$; таким образом, если мы остановимся на члене с номером $\nu=p-1$, то погрешность будет $O\left(n^{-p-\frac{1}{2}}\right)$. Это находится в соответствии с формулой (8.21.4). Ясно также, что оценка остаточного члена справедлива равномерно на отрезке $\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$.

Этот же метод может быть применен для доказательства асимптотического разложения (8.21.3), которое соответствует формуле Лапласа — Гейне (8.21.1). (Действительно, это более простой случай, чем предыдущий.) Пусть $|z|>1$, тогда

$$h(w)=(1-zw)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{w}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu\left(\frac{z^{-2}}{z^{-2}-1}\right)^{\nu}(1-zw)^{\nu-\frac{1}{2}}; \tag{8.4.11}$$

отсюда (8.21.3) легко следует.

(3) Бесконечный ряд, соответствующий формуле Дарбу (8.21.4), сходится в обычном смысле и представляет $P_n(\cos\theta)$, если $2\sin\theta>1$, т. е. при $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5\pi}{6}$. Действительно, представление (8.4.2) имеет место равномерно в окрестности $w=0$, если

$$|(1-we^{-i\theta})(e^{2i\theta}-1)^{-1}|<1. \tag{8.4.12}$$

(4) Метод Дарбу может быть применен также к общим многочленам Якоби, в частности к ультрасферическим многочленам, и приводит к теоремам 8.21.9 и 8.21.10. Другой метод вывода асимптотического разложения, указанного в теореме 8.21.9, будет дан в § 8.71, (4) и (5).

(5) Наконец, отметим, что разложение (8.21.4) заканчивается на члене с номером $\nu=\lambda-1$, если λ — целое положительное число. В этом случае мы получим точное представление

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=$$
$$=2\alpha_n\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}\alpha_\nu\frac{(1-\lambda)(2-\lambda)\ldots(\nu-\lambda)}{(n+\lambda-1)(n+\lambda-2)\ldots(n+\lambda-\nu)}\frac{\cos\left\{(n-\nu+\lambda)\theta-(\nu+\lambda)\frac{\pi}{2}\right\}}{(2\sin\theta)^{\nu+\lambda}},$$
$$n=0,\,1,\,2,\,\ldots,\;\lambda=1,\,2,\,3,\,\ldots,\;\alpha_n=\binom{n+\lambda-1}{n}. \tag{8.4.13}$$

В самом деле, в этом случае разность (8.4.3) (при $L=\lambda-1$) будет рациональной функцией, которая не имеет особенностей ни при каком w (включая $w=\infty$) и которая обращается в нуль при $w\to\infty$. Следовательно, она должна быть равна нулю тождественно.

Аналогичное представление для $P_n^{(\lambda)}(x)$ при $|z|>1$ и λ целом положительном несколько более сложно; оно легко может быть выведено из (8.4.13).

8.5. Доказательство формулы Стилтьеса

(1) Формула Стилтьеса (4.9.17) была выведена в § 4.9, (3) из интегрального представления (4.8.17). Этот вывод давал для остаточного члена $R_p(\theta)$ (8.21.5) следующее выражение:

$$R_p(\theta)=\frac{2}{\pi}\,\mathfrak{I}\left\{e^{i(n+1)\theta}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}(2\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 t^n(1-t)^{-\frac{1}{2}}\varrho_p(t)\,dt\right\},\tag{8.5.1}$$

где (g_ν имеет тот же смысл, что в теореме 8.21.3)

$$\varrho_p(t)=(1-z)^{-\frac{1}{2}}-\sum_{\nu=0}^{p-1}g_\nu z^\nu,\quad z=(1-t)\frac{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}{2\sin\theta}.\tag{8.5.2}$$

Следуя Стилтьесу, пишем

$$g_\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin^{2\nu}\varphi\,d\varphi,\qquad (1-z)^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu=0}^{p-1}g_\nu z^\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{z^p\sin^{2p}\varphi}{1-z\sin^2\varphi}\,d\varphi.\tag{8.5.3}$$

Последняя формула очевидна при допущении, что $|z|<1$; затем она может быть продолжена на всю полосу $0\leqslant\mathfrak{R}(z)\leqslant\frac{1}{2}$ без ограничений. Затем, полагая $(1-t)\sin^2\varphi=r$, находим

$$|1-z\sin^2\varphi|^2=\left|1-\frac{r}{2}+\frac{ir}{2}\operatorname{ctg}\theta\right|^2=\left(\sin\theta-\frac{r}{2\sin\theta}\right)^2+\cos^2\theta.$$

Минимум этого выражения равен $\cos^2\theta$ или $(2\sin\theta)^{-2}$ в зависимости от того, будет ли $2\sin^2\theta\leqslant 1$ или же $2\sin^2\theta\geqslant 1$. Следовательно,

$$|\varrho_p(t)|\leqslant g_p(1-t)^p(2\sin\theta)^{-p}M,\tag{8.5.4}$$

где M имеет тот же смысл, что в (8.21.6). Таким образом, мы получаем

$$|R_p(\theta)|\leqslant\frac{2}{\pi}(2\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 t^n(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1-t)^p g_p(2\sin\theta)^{-p}M\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}g_p\frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+p+\frac{3}{2}\right)}\frac{M}{(2\sin\theta)^{p+\frac{1}{2}}},\tag{8.5.5}$$

что эквивалентно (8.21.6).

Аналогичная формула теоремы 8.21.11 для ультрасферических многочленов $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$, $0<\lambda<1$, следует из (4.82.3) (см. Сегё, [17], стр. 57—60). Формула (8.21.15) представляет собой разложение (4.9.25), дополненное оценкой погрешности, если мы остановимся на члене с номером $\nu=p-1$. Эта погрешность опять вдвое меньше, чем первый член, которым мы пренебрегаем, если в нем cos заменить на единицу. Доказательство такое же, как и выше; для чисел α_ν, определенных в (4.9.21), мы применяем представление (см. (6.5.9))

$$\alpha_\nu=\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\int_0^\pi|\operatorname{tg}\varphi|^{2\lambda-1}\sin^{2\nu}\varphi\,d\varphi.\tag{8.5.6}$$

То же самое замечание, что в § 8.4, (3), применимо к бесконечному ряду, соответствующему формуле Стилтьеса и ее обобщению (см. (4.9.17), (4.9.25)).

8.61. Метод Лиувилля — Стеклова; формула Лапласа

Мы выведем теперь формулу Лапласа из дифференциального уравнения (7.3.5). Основная идея состоит в преобразовании этого уравнения в интегральное уравнение типа Вольтерра, что дает возможность последовательного улучшения рассматриваемой асимптотической формулы. Это очень старая идея, она появилась в трудах Лиувилля о дифференциальных уравнениях типа Штурма — Лиувилля. В. А. Стеклов [1] применил этот метод к асимптотическому исследованию некоторых классических многочленов.

Недавно Лангер [1], [2], [3] использовал этот метод систематически и существенно усилил его эффективность. В основном он рассматривал особые случаи, подобные (4.24.2) или одному из уравнений (5.1.2) соответственно в окрестности точки $\theta = 0$ или $x = 0$, и получил общие асимптотические формулы типа формулы Хильба. Он дал также применение этого метода в комплексной области.

(1) Мы пишем дифференциальное уравнение (7.3.5) в виде

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\{(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta)\} + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 (\sin\theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta) = -\frac{(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta)}{4\sin^2\theta}. \qquad (8.61.1)$$

Рассматривая это соотношение как неоднородное уравнение относительно $(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta)$, мы можем применить (1.8.12); соответствующее однородное уравнение имеет фундаментальной системой решений

$$\left\{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta,\ \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\},$$

следовательно,

$$(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta) = c_1\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + c_2\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-t)\right\}}{4\sin^2 t}(\sin t)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos t)\,dt, \qquad (8.61.2)$$

где θ_0, c_1, c_2 — некоторые постоянные. Если мы положим $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $0 < \theta < \pi$, то последний интеграл и его производная обращаются в нуль при $\theta = \frac{\pi}{2}$. Это замечание позволяет нам определить c_1 и c_2. Мы находим, что

$$(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta) = \lambda_n\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right\} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-t)\right\}}{4\sin^2 t}(\sin t)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos t)\,dt, \qquad (8.61.3)$$

где

$$\lambda_n = \begin{cases} g_{\frac{n}{2}} \text{ при } n \text{ четном}, \\ \dfrac{n+1}{n+\frac{1}{2}} g_{\frac{n+1}{2}} \text{ при } n \text{ нечетном}. \end{cases} \tag{8.61.4}$$

Это и есть упомянутое выше уравнение Вольтерра. Если θ лежит на отрезке $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, а M_n означает максимум абсолютного значения левой части (8.61.3), то мы имеем неравенство

$$M_n \leqslant \lambda_n + \frac{\pi}{2n+1} \frac{M_n}{4 \sin^2 \varepsilon}\,. \tag{8.61.5}$$

Следовательно, если n достаточно велико, то

$$M_n < 2\lambda_n = O(n^{-\frac{1}{2}})$$

и

$$(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta) = \lambda_n \cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right\} + O(n^{-\frac{3}{2}}), \tag{8.61.6}$$

откуда легко получается формула Лапласа.

(2) Последовательное применение (8.61.3) приводит к разложению типа Дарбу, а именно к формуле

$$(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta) = \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta \sum_{\nu=0}^{p-1} A_\nu(\theta)\, n^{-\nu-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta \sum_{\nu=0}^{p-1} B_\nu(\theta)\, n^{-\nu-\frac{1}{2}} + O(n^{-p-\frac{1}{2}}), \quad \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon, \tag{8.61.7}$$

где $A_\nu(\theta)$ и $B_\nu(\theta)$ — некоторые аналитические в промежутке $0 < \theta < \pi$ функции, не зависящие от n и p. Однако явное определение этих функций, т. е. отождествление формулы (8.61.7) с формулами Дарбу или Стилтьеса, по-видимому, весьма трудно.

Для доказательства мы применяем математическую индукцию. Допуская справедливость формулы (8.61.7), из (8.61.3) получаем

$$(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta) = \lambda_n \cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right\} -$$

$$- \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-t)\right]}{4\sin^2 t} \left\{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right) t \sum_{\nu=0}^{p-1} A_\nu(t)\, n^{-\nu-\frac{1}{2}} +\right.$$

$$\left. + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t \sum_{\nu=0}^{p-1} B_\nu(t)\, n^{-\nu-\frac{1}{2}}\right\} dt + O(n^{-p-\frac{3}{2}}).$$

Но

$$2\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-t)\right\} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right) t =$$

$$= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-2t)\right\},$$

и интегрирование по частям дает

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-2t)\right\} \frac{A_\nu(t)}{4\sin^2 t}\,dt = \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta \sum_{\mu=0}^{p-1} a_\mu(\theta)\, n^{-\mu} + \\ + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta \sum_{\mu=0}^{p-1} b_\mu(\theta)\, n^{-\mu} + O(n^{-p}),$$

где $a_\mu(\theta)$ и $b_\mu(\theta)$ — некоторые функции того же типа, что $A_\nu(\theta)$ и $B_\nu(\theta)$. Интегралы, содержащие $B_\nu(t)$, могут быть преобразованы таким же образом. Это приводит, если применить ряд Стирлинга (см. Полиа и Сегё [1], часть I, отдел I, задача 155) к представлению вида

$$(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta) = \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta \sum_{\nu=0}^{p} A_\nu^{(1)}(\theta)\, n^{-\nu-\frac{1}{2}} + \\ + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta \sum_{\nu=0}^{p} B_\nu^{(1)}(\theta)\, n^{-\nu-\frac{1}{2}} + O\left(n^{-p-\frac{3}{2}}\right).$$

Сравнивая это выражение с (8.61.7), находим, что

$$A_\nu^{(1)}(\theta) = A_\nu(\theta), \quad B_\nu^{(1)}(\theta) = B_\nu(\theta), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, p-1.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} A_0(\theta) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\pi}{4} = \pi^{-\frac{1}{2}}, \\ B_0(\theta) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\pi}{4} = \pi^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{8.61.8}$$

Этот же метод может быть применен для асимптотической оценки функции $Q_n(\cos\theta)$ (см. задачу 18), а также для ультрасферических многочленов. В первом случае мы получаем теорему 8.21.14. Применение метода к обобщенным многочленам Якоби более трудно, так как не известно их явное значение в точке $\theta = \frac{\pi}{2}$ (или в какой-нибудь другой фиксированной точке из промежутка $0 < \theta < \pi$) [1]).

8.62. Метод Лиувилля — Стеклова; формула Хильба

(1) Выведем опять некоторое интегральное уравнение для $P_n(\cos\theta)$, отличное от (8.61.3) и содержащее функции Бесселя. Записав (7.3.5) в виде

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left\{(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta)\right\} + \left\{\frac{1}{4\theta^2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\} (\sin\theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta) = \\ = \left\{\frac{1}{4\theta^2} - \frac{1}{4\sin^2\theta}\right\} (\sin\theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta), \tag{8.62.1}$$

мы применим (1.8.12). Соответствующим однородным уравнением будет (1.8.9) ($\alpha = 0$, $k = n + \frac{1}{2}$) с решениями

$$\theta^{\frac{1}{2}} J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}, \quad \theta^{\frac{1}{2}} Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}. \tag{8.62.2}$$

[1]) См., впрочем, Караус [3].

Следовательно, при некоторых постоянных θ_0, c_1, c_2 мы будем иметь

$$(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}P_n(\cos\theta)=c_1\theta^{\frac{1}{2}}J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}+c_2\theta^{\frac{1}{2}}Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}+$$

$$+\frac{\theta^{\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}}\int_{\theta_0}^{\theta}t^{-\frac{1}{2}}\frac{J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}-Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}}{J_0'\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}-Y_0'\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{4\sin^2 t}\right)(\sin t)^{\frac{1}{2}}P_n(\cos t)\,dt. \qquad (8.62.3)$$

В соответствии с (1.8.14) имеет место равенство

$$J_0'\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}-Y_0'\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}=$$

$$=-\frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)t}. \qquad (8.62.4)$$

Но функция $t^{-2}-(\sin t)^{-2}$ является аналитической функцией в точке $t=0$; следовательно, мы можем положить $\theta_0=0$ и тогда получим тождество

$$(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}P_n(\cos\theta)=c_1\theta^{\frac{1}{2}}J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}+$$

$$+c_2\theta^{\frac{1}{2}}Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}-\frac{\pi}{2}\theta^{\frac{1}{2}}\int_0^{\theta}t^{\frac{1}{2}}\left[J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}-\right.$$

$$\left.-Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}\right]\left(\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{4\sin^2 t}\right)(\sin t)^{\frac{1}{2}}P_n(\cos t)\,dt.$$

Если это равенство разделить на $\theta^{\frac{1}{2}}$, а затем θ устремить к нулю, то последний член будет стремиться к нулю, а левая часть к единице. Поэтому (см. (1.71.10) и (1.71.1)) $c_2=0$, $c_1=1$, и при $0<\theta<\pi$ находим

$$\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}}P_n(\cos\theta)=$$

$$=J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}+\frac{\pi}{8}\int_0^{\theta}\left[J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}-\right.$$

$$\left.-Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}\right]\frac{1}{t}\left\{\left(\frac{1}{\sin t}\right)^2-1\right\}\times$$

$$\times\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}P_n(\cos t)\,dt. \qquad (8.62.5)$$

Это и есть требуемое интегральное уравнение.

(2) Допустим сначала, что $0<n\theta\leqslant 1$. Тогда в соответствии с (1.71.1) и (1.71.4) будем иметь

$$J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}-Y_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}=$$

$$=J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}\left[\frac{2}{\pi}\ln\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}+O(1)\right]-$$

$$-J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}\left[\frac{2}{\pi}\ln\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}+O(1)\right]=$$

$$= -\frac{2}{\pi} J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\} J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}\ln\frac{\theta}{t}+O(1)=$$
$$= O(1)\ln\frac{\theta}{t} = O(1). \qquad (8.62.6)$$

Таким образом, интеграл в правой части (8.62.5) (в силу (7.21.1)) равен

$$O(1)\int_0^\theta t\ln\frac{\theta}{t}\,dt+O(1)\int_0^\theta t\,dt = O(1)\,\theta^2\int_0^1 t\ln\frac{1}{t}\,dt+O(\theta^2)=O(\theta^2).$$

(3) Пусть теперь $n\theta\geqslant 1$, $\theta\leqslant\pi-\varepsilon$. Разобьем интеграл в правой части (8.62.5) на два: первый — по промежутку $0<t\leqslant\frac{1}{n}$ и второй — по отрезку $\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant\theta$. Тогда первый из них, благодаря (1.71.10) и (1.71.11), есть величина порядка

$$O\{(n\theta)^{-\frac{1}{2}}\}\int_0^{\frac{1}{n}} t\,|Y_0(nt)|\,dt+O\{(n\theta)^{-\frac{1}{2}}\}\int_0^{\frac{1}{n}} t\,|J_0(nt)|\,dt = O\{(n\theta)^{-\frac{1}{2}}\}\,n^{-2}=$$
$$=O(\theta^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{5}{2}})=(n\theta)^{-1}\,O(\theta^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{2}})=O(\theta^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{2}}),$$

а второй благодаря (7.3.8) есть величина порядка

$$O\{(n\theta)^{-\frac{1}{2}}\}\int_{\frac{1}{n}}^{\theta}(nt)^{-\frac{1}{2}}\,t\,(nt)^{-\frac{1}{2}}\,dt = O(\theta^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{2}}).$$

8.63. Метод Лиувилля—Стеклова; распространение формулы Хильба на многочлены Якоби

Применяя интегрирование по комплексной переменной, Сегё [17] распространил формулу Хильба и соответствующее асимптотическое разложение, упомянутое в § 8.23, (1), на ультрасферические многочлены и даже на обобщенные многочлены Якоби. Следуя Рау [2], мы выведем главный член этого общего разложения посредством метода Лиувилля — Стеклова и получим формулу (8.21.17). Оценки остаточного члена лучше, чем у Сегё [17], стр. 77, (47), и чем у Рау [2], стр. 691—692, (29), (30).

(1) Пусть $\alpha>-1$. Напишем (4.24.2) в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left(\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\theta^2}+N^2\right)u=\left\{\frac{\beta^2-\frac{1}{4}}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}+\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)\left(\frac{1}{\theta^2}-\frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)\right\}u,\\
&u=\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta),\quad N=n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}.
\end{aligned}\right\}\quad(8.63.1)$$

Применяя снова (1.8.12), мы получаем благодаря (1.8.9) соотношение

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=c_1\theta^{\frac{1}{2}}J_\alpha(N\theta)+c_2\theta^{\frac{1}{2}}J_{-\alpha}(N\theta)+$$
$$+\frac{\theta^{\frac{1}{2}}}{N}\int_{\theta_0}^{\theta}t^{-\frac{1}{2}}\,\frac{J_\alpha(N\theta)\,J_{-\alpha}(Nt)-J_{-\alpha}(N\theta)\,J_\alpha(Nt)}{J'_\alpha(Nt)\,J_{-\alpha}(Nt)-J'_{-\alpha}(Nt)\,J_\alpha(Nt)}\times$$

$$\times\left\{\frac{\beta^2-\frac{1}{4}}{4\cos^2\frac{t}{2}}+\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\right)\right\}\times$$

$$\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\,dt. \quad (8.63.2)$$

Здесь и в дальнейшем $J_{-\alpha}(z)$ следует заменять через $Y_\alpha(z)$, если α — целое число. Мы опять используем тождество (1.8.14), в силу которого

$$J'_\alpha(Nt)\,J_{-\alpha}(Nt)-J'_{-\alpha}(Nt)\,J_\alpha(Nt)=\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi Nt}. \quad (8.63.3)$$

(Если α — целое число, то $\sin\alpha\pi$ надо заменить на — 1.) Следовательно,

$$\theta^{-\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=$$

$$=c_1J_\alpha(N\theta)+c_2J_{-\alpha}(N\theta)+\int_{\theta_0}^{\theta}\{J_\alpha(N\theta)\,J_{-\alpha}(Nt)-$$

$$-J_{-\alpha}(N\theta)\,J_\alpha(Nt)\}\,t^{\frac{1}{2}}f(t)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\,dt, \quad (8.63.4)$$

где $f(t)$ регулярна в $0\leqslant t<\pi$ и не зависит от n.

Последний интеграл сходится при $\theta_0=0$; при фиксированном n и $\theta\to+0$ этот интеграл равен

$$O(1)\int_0^\theta(\theta^\alpha t^{-\alpha}+\theta^{-\alpha}t^\alpha)\,t^{\frac{1}{2}}\,t^{\alpha+\frac{1}{2}}dt=$$

$$=O(\theta^\alpha)\int_0^\theta t\,dt+O(\theta^{-\alpha})\int_0^\theta t^{2\alpha+1}\,dt=O(\theta^{\alpha+2}).$$

Это справедливо как для целых, так и для нецелых значений α (см. (1.71.10)), за исключением $\alpha=0$. В этом случае мы имеем

$$O(1)\int_0^\theta\left(\ln\frac{1}{t}+\ln\frac{1}{\theta}\right)t^{\frac{1}{2}}\,t^{\frac{1}{2}}\,dt=O\left(\theta^2\ln\frac{1}{\theta}\right).$$

Деля (8.63.4) на θ^α и устремляя θ к $+0$, мы находим (см. (1.71.1)) соотношение вида

$$2^{-\alpha-\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(1)+O(\theta^2)=c_1\left\{\frac{\left(\frac{N}{2}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+O(\theta^2)\right\}+c_2\theta^{-\alpha}J_{-\alpha}(N\theta)+O(\theta^2).$$

(Последний член должен быть изменен при $\alpha=0$.) Отсюда следует, что при $\alpha\geqslant 0$

$$c_2=0,\quad c_1=2^{-\frac{1}{2}}N^{-\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)\,(n!)^{-1}.$$

Тот же результат справедлив и при $-1<\alpha<0$, если мы примем во внимание, что «главный член» выражения $\theta^{-\alpha}J_{-\alpha}(N\theta)$ есть $\theta^{-2\alpha}$. Таким образом, при $0 < \theta < \pi$ имеем

$$\theta^{-\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) =$$
$$= 2^{-\frac{1}{2}} N^{-\alpha}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} J_\alpha(N\theta) + \int_0^\theta \{J_\alpha(N\theta)J_{-\alpha}(Nt) -$$
$$- J_{-\alpha}(N\theta)J_\alpha(Nt)\} t^{\frac{1}{2}} f(t)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\,dt. \quad (8.63.5)$$

(2) Пусть теперь $n \to \infty$. Мы находим оценки для последнего интеграла, рассуждая как в § 8.62. Пусть сперва $0 < n\theta \leqslant 1$. Тогда при $\alpha \neq 0$ рассматриваемый интеграл равен (см. вторую оценку в (7.32.5))

$$O(1)\int_0^\theta \{(n\theta)^\alpha (nt)^{-\alpha} + (n\theta)^{-\alpha}(nt)^\alpha\} t^{\frac{1}{2}} t^{\alpha+\frac{1}{2}} n^\alpha\,dt = O(n^\alpha \theta^{\alpha+2}).$$

В случае, когда $\alpha = 0$, мы рассуждаем так же, как в § 8.62, (2), и получаем ту же оценку, а именно $O(\theta^2)$. Если же мы положим $n^{-1} \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$, то интеграл, взятый по $0 < t \leqslant n^{-1}$, будет (см. вторую оценку в (7.32.5))

$$O(1)\int_0^{\frac{1}{n}} (n\theta)^{-\frac{1}{2}}\{|J_{-\alpha}(Nt)| + |J_\alpha(Nt)|\} t^{\frac{1}{2}} t^{\alpha+\frac{1}{2}} n^\alpha\,dt = O(1)(n\theta)^{-\frac{1}{2}} n^{-\alpha-2} n^\alpha =$$
$$= O(\theta^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{5}{2}}) = (n\theta)^{-1} O(\theta^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}}) = O(\theta^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}}).$$

(Здесь $J_{-\alpha}$ нужно заменить на Y_0, если $\alpha = 0$.) При $t \geqslant \frac{1}{n}$ мы используем первую из оценок (7.32.5) и получаем

$$O(1)\int_{\frac{1}{n}}^\theta (n\theta)^{-\frac{1}{2}}(nt)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}\,dt = O(\theta^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}}).$$

8.64. Метод Лиувилля—Стеклова; асимптотическая формула (типа формулы Хильба) для многочленов Лагерра

Если применить четвертое из уравнений (5.1.2), то этот метод легко приводит к (8.22.4). Подобным же образом может быть применено третье уравнение, но при этом вычисления будут несколько более сложными. Относительно асимптотического разложения, связанного с формулой (8.22.4) $\left(\text{по крайней мере при } \alpha > -\frac{1}{2}\right)$ см. § 8.66.

(1) Пусть $\alpha > -1$. Записывая рассматриваемое уравнение в виде

$$v'' + \left(4N + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2}\right) v = x^2 v,\ v = e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\alpha+\frac{1}{2}} L_n^{(\alpha)}(x^2),\ N = n + \frac{\alpha+1}{2}, \quad (8.64.1)$$

мы можем применить (1.8.12) и (1.8.9). Тогда

$$e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\alpha+\frac{1}{2}} L_n^{(\alpha)}(x^2) = c_1 x^{\frac{1}{2}} J_\alpha(2N^{\frac{1}{2}}x) + c_2 x^{\frac{1}{2}} J_{-\alpha}(2N^{\frac{1}{2}}x) +$$
$$+ \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2N^{\frac{1}{2}}}\int_{x_0}^x \frac{J_\alpha(2N^{\frac{1}{2}}x)J_{-\alpha}(2N^{\frac{1}{2}}t) - J_{-\alpha}(2N^{\frac{1}{2}}x)J_\alpha(2N^{\frac{1}{2}}t)}{J'_\alpha(2N^{\frac{1}{2}}t)J_{-\alpha}(2N^{\frac{1}{2}}t) - J'_{-\alpha}(2N^{\frac{1}{2}}t)J_\alpha(2N^{\frac{1}{2}}t)} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{\alpha+2} L_n^{(\alpha)}(t^2)\,dt,$$

где x_0, c_1, c_2 — некоторые постоянные. Применяем снова (8.63.3) и получаем

$$e^{-\frac{x^2}{2}} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x^2) = c_1 J_\alpha(2N^{\frac{1}{2}} x) + c_2 J_{-\alpha}(2N^{\frac{1}{2}} x) + \\ + \frac{\pi}{2\sin\alpha\pi} \int_{x_0}^{x} \{J_\alpha(2N^{\frac{1}{2}} x) J_{-\alpha}(2N^{\frac{1}{2}} t) - \\ - J_{-\alpha}(2N^{\frac{1}{2}} x) J_\alpha(2N^{\frac{1}{2}} t)\} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{\alpha+3} L_n^{(\alpha)}(t^2)\, dt.$$

Если α — целое число, то $J_{-\alpha}(z)$ нужно заменить на $Y_\alpha(z)$, а $\sin\alpha\pi$ на -1.

Пусть $x_0 = 0$. При фиксированном n и $x \to +0$ последний интеграл будет

$$O(1) \int_0^x (x^\alpha t^{-\alpha} + x^{-\alpha} t^\alpha)\, t^{\alpha+3}\, dt = O(x^{\alpha+4}).$$

(Если $\alpha = 0$, то эта оценка должна быть умножена на $\ln(1/x)$.) Таким образом, как и в § 8.63, $c_2 = 0$ и $L_n^{(\alpha)}(0) = c_1 N^{\frac{\alpha}{2}} \{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1}$, откуда имеем

$$c_1 = N^{-\frac{\alpha}{2}} \Gamma(n+\alpha+1)(n!)^{-1}. \tag{8.64.2}$$

Следовательно,

$$e^{-\frac{x^2}{2}} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x^2) = N^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} J_\alpha(2N^{\frac{1}{2}} x) + \\ + \frac{\pi}{2\sin\alpha\pi} \int_0^x \{J_\alpha(2N^{\frac{1}{2}} x) J_{-\alpha}(2N^{\frac{1}{2}} t) - \\ - J_{-\alpha}(2N^{\frac{1}{2}} x) J_\alpha(2N^{\frac{1}{2}} t)\} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{\alpha+3} L_n^{(\alpha)}(t^2)\, dt. \tag{8.64.3}$$

(2) При $n \to \infty$ остаточный член может быть оценен так же, как в предыдущем случае. Однако мы избегаем здесь применения оценки типа (7.32.5). (В § 7.6, (3) мы вывели такие оценки в качестве следствия из (8.1.8) и формулы Фейера (8.22.1); но это весьма близко к формуле (8.22.4), которую мы хотим теперь установить.) В приводимом ниже доказательстве мы используем только элементарную формулу (8.1.8) типа формулы Мелера — Гейне, в частности, лишь вторую оценку (7.6.8).

Пусть сначала $0 < x \leqslant n^{-\frac{1}{2}}$. Тогда $L_n^{(\alpha)}(t^2) = O(n^\alpha)$ при $0 \leqslant t \leqslant x$. Отсюда следует, что интеграл в (8.64.3) равен

$$O(1) \int_0^x (n^{\frac{\alpha}{2}} x^\alpha n^{-\frac{\alpha}{2}} t^{-\alpha} + n^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\alpha} n^{\frac{\alpha}{2}} t^\alpha)\, t^{\alpha+3} n^\alpha\, dt = O(x^{\alpha+4} n^\alpha); \tag{8.64.4}$$

при $\alpha = 0$ эта оценка должна быть умножена на $\ln(x^{-1} n^{-\frac{1}{2}})$.

Пусть теперь $n^{-\frac{1}{2}} \leqslant x \leqslant \omega^{\frac{1}{2}}$, где ω — фиксированное положительное число. Пусть M_n — максимум функции $e^{-\frac{x^2}{2}} x^\alpha |L_n^{(\alpha)}(x^2)|$ на этом отрезке. Тогда интеграл по отрезку $0 \leqslant t \leqslant n^{-\frac{1}{2}}$ при $\alpha \neq 0$ равен

$$O(1) \int_0^{n^{-\frac{1}{2}}} (n^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{\alpha}{2}} t^{-\alpha} + n^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}} t^\alpha)\, t^{\alpha+3} n^\alpha\, dt = O(x^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{9}{4}}). \tag{8.64.5}$$

Этот же результат справедлив и в том случае, когда $\alpha = 0$. Остальная часть интеграла по отрезку $n^{-\frac{1}{2}} \leqslant t \leqslant x$ будет равна

$$O(1) \int_0^x n^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{2}} t^3 M_n \, dt = O(1)\, n^{-\frac{1}{2}} x^3 M_n = M_n \cdot o(1). \qquad (8.64.6)$$

Учитывая (8.64.3) и применяя такое же рассуждение, как в § 8.61, мы находим, что

$$M_n = O(n^{-\frac{\alpha}{2}})\, O(n^{\alpha})\, O(n^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}}) = O(x^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}). \qquad (8.64.7)$$

(Это, разумеется, совпадает с первой оценкой (7.6.8).) Следовательно, если $n^{-\frac{1}{2}} \leqslant x \leqslant \omega^{\frac{1}{2}}$, то в силу (8.64.5), (8.64.6) и (8.64.7) мы получаем для остаточного члена следующую оценку:

$$O(x^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}}) + O(1)\, n^{-\frac{1}{2}} x^3\, O(x^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}) =$$
$$= O(x^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}}) + O(x^{\frac{5}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}) = O(x^{\frac{5}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}).$$

8.65. Метод Лиувилля — Стеклова; многочлены Эрмита

(1) Интегральное уравнение (8.64.3) принимает особенно простой вид в случае, когда $\alpha = \pm\frac{1}{2}$, т. е. для многочленов Эрмита. Применяя (5.6.1) и (1.71.2) и полагая соответственно $n = 2m$ при $\alpha = -\frac{1}{2}$, $n = 2m + 1$ при $\alpha = +\frac{1}{2}$, мы получаем

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = \lambda_n \cos\left(N^{\frac{1}{2}} x - \frac{n\pi}{2}\right) + \\ + N^{-\frac{1}{2}} \int_0^x \sin\{N^{\frac{1}{2}}(x-t)\}\, t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)\, dt, \qquad (8.65.1)$$

где

$$\lambda_n = |H_n(0)| \text{ или } |H_n'(0)|\, N^{-\frac{1}{2}} \qquad (8.65.2)$$

в зависимости от того, будет ли n четным или нечетным, и $N = 2n + 1$. Но более удобно вывести это непосредственно из второго уравнения (5.5.2).

Мы докажем (8.22.7) методом математической индукции. Утверждение справедливо при $p = 0$, когда обе суммы $\sum_{\nu=0}^{p-1}$ заменяются нулем. Действительно, если M_n означает максимум $e^{-\frac{x^2}{2}} |H_n(x)|$ на фиксированном отрезке вещественной оси, то из (8.65.1) находим

$$M_n \leqslant \lambda_n + O(n^{-\frac{1}{2}})\, M_n, \qquad (8.65.3)$$

откуда следует, что $M_n = \lambda_n O(1)$.

(2) Допуская теперь, что (8.22.7) справедливо при некотором произвольном p, мы получаем из (8.65.1) равенство

$$e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)=\lambda_n\cos\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)+\lambda_n N^{-\frac{1}{2}}\int_0^x \sin\{N^{\frac{1}{2}}(x-t)\}\left\{\cos\left(N^{\frac{1}{2}}t-\frac{n\pi}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\nu=0}^{p-1} t^2u_\nu(t)N^{-\nu}+N^{-\frac{1}{2}}\sin\left(N^{\frac{1}{2}}t-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{p-1} t^2v_\nu(t)N^{-\nu}\right\}dt+\lambda_n O\left(n^{-p-\frac{1}{2}}\right). \tag{8.65.4}$$

Второе слагаемое правой части содержит выражения следующего типа:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_n N^{-\nu-\frac{1}{2}}\int_0^x \sin\{N^{\frac{1}{2}}(x-t)\}\cos\left(N^{\frac{1}{2}}t-\frac{n\pi}{2}\right)t^k\,dt=\\
&\qquad=\frac{1}{2k+2}\lambda_n N^{-\nu-\frac{1}{2}}x^{k+1}\sin\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)+\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2}\lambda_n N^{-\nu-\frac{1}{2}}\int_0^x t^k\sin\left\{N^{\frac{1}{2}}(x-2t)+\frac{n\pi}{2}\right\}dt,\\
&\lambda_n N^{-\nu-1}\int_0^x \sin\{N^{\frac{1}{2}}(x-t)\}\sin\left(N^{\frac{1}{2}}t-\frac{n\pi}{2}\right)t^l\,dt=\\
&\qquad=-\frac{1}{2l+2}\lambda_n N^{-\nu-1}x^{l+1}\cos\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)+\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2}\lambda_n N^{-\nu-1}\int_0^x t^l\cos\left\{N^{\frac{1}{2}}(x-2t)+\frac{n\pi}{2}\right\}dt,
\end{aligned}\right\}\tag{8.65.5}$$

где k четно, а l нечетно ($k\geqslant 2$, $l\geqslant 3$). Интегрирование по частям дает

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^x t^k\sin\left\{N^{\frac{1}{2}}(x-2t)+\frac{n\pi}{2}\right\}dt=\frac{1}{2}N^{-\frac{1}{2}}x^k\cos\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{2}kN^{-\frac{1}{2}}\int_0^x t^{k-1}\cos\left\{N^{\frac{1}{2}}(x-2t)+\frac{n\pi}{2}\right\}dt,\\
&\int_0^x t^l\cos\left\{N^{\frac{1}{2}}(x-2t)+\frac{n\pi}{2}\right\}dt=\frac{1}{2}N^{-\frac{1}{2}}x^l\sin\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)+\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2}lN^{-\frac{1}{2}}\int_0^x t^{l-1}\sin\left\{N^{\frac{1}{2}}(x-2t)+\frac{n\pi}{2}\right\}dt,
\end{aligned}\right\}\tag{8.65.6}$$

последняя формула справедлива также при $l=1$, и мы имеем

$$\int_0^x \sin\left\{N^{\frac{1}{2}}(x-2t)+\frac{n\pi}{2}\right\}dt=\begin{cases}0, & n \text{ четно}\\ N^{-\frac{1}{2}}\cos\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right), & n \text{ нечетно.}\end{cases}\tag{8.65.7}$$

Эти вычисления приводят к формуле вида

$$e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)=\lambda_n\left\{\cos\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{p} u_\nu^{(1)}(x)N^{-\nu}+\right.$$

$$\left.+N^{-\frac{1}{2}}\sin\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{p-1} v_\nu^{(1)}(x)N^{-\nu}+O\left(n^{-p-\frac{1}{2}}\right)\right\}.$$

Повторное применение тех же рассуждений дает нам

$$e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)=\lambda_n\left\{\cos\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{p}u_\nu^{(2)}(x)N^{-\nu}+\right.$$
$$\left.+N^{-\frac{1}{2}}\sin\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{p}v_\nu^{(2)}(x)N^{-\nu}+O(n^{-p-1})\right\}.$$

Мы легко замечаем, что $u_\nu^{(1)}(x)$, $u_\nu^{(2)}(x)$, $v_\nu^{(1)}(x)$, $v_\nu^{(2)}(x)$ — многочлены того же типа, что $u_\nu(x)$, $v_\nu(x)$ и, кроме того, что $u_\nu(x)=u_\nu^{(1)}(x)=u_\nu^{(2)}(x)$, $v_\nu(x)=v_\nu^{(1)}(x)=v_\nu^{(2)}(x)$, $\nu\leqslant p-1$; отсюда вытекает (8.22.7).

Доказательство теоремы 8.22.7 может быть проведено таким же путем.

8.66. Применение к многочленам Лагерра

(1) Асимптотическое разложение (8.22.7) вместе с формулой (5.6.5) Успенского легко дает для многочленов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$, по крайней мере при $\alpha>-\frac{1}{2}$, асимптотическое разложение типа формулы Хильба. Мы наметим лишь ход доказательства.

Подставляя (8.22.7) в (5.6.5), мы получим асимптотическое разложение, главным членом которого с точностью до тривиального постоянного множителя, зависящего от n, будет выражение

$$\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{\frac{xt^2}{2}}\left\{\cos\left[(4n+1)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t\right]u_\nu\left(x^{\frac{1}{2}}t\right)+\right.$$
$$\left.+(4n+1)^{-\frac{1}{2}}\sin\left[(4n+1)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t\right]v_\nu\left(x^{\frac{1}{2}}t\right)\right\}dt. \quad (8.66.1)$$

Здесь $u_\nu(x)$ — четные, а $v_\nu(x)$ — нечетные многочлены, не зависящие от n. Формула (8.66.1) является линейной комбинацией выражений вида

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{\frac{xt^2}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}t\right)^k\cos\left[(4n+1)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t\right]dt,\\&(4n+1)^{-\frac{1}{2}}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{\frac{xt^2}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}t\right)^l\sin\left[(4n+1)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t\right]dt,\end{aligned}\right\}\quad (8.66.2)$$

где k и l — неотрицательные целые числа, k — четные, а l — нечетные. Если мы разложим функцию $e^{\frac{\tau}{2}}\tau^{\frac{k}{2}}$ в степенной ряд в окрестности точки $\tau=x$, то для первого интеграла мы получим слагаемые вида

$$\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\alpha+q-\frac{1}{2}}\cos\left\{(4n+1)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t\right\}dt,$$

где q — целые неотрицательные числа. Эти интегралы могут быть выражены через функции Бесселя (см. (1.71.6)). Этот же метод дает для второго интеграла (8.66.2) члены вида

$$\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\alpha+q-\frac{1}{2}}t\sin\left\{(4n+1)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t\right\}dt,$$

где опять q — целые неотрицательные числа. Эти интегралы также можно выразить через функции Бесселя (комбинируя вторую формулу (1.71.5) с (1.71.6)).

Если мы остановимся в разложении первого из выражений (8.66.2) на некотором члене, то остаток можно представить в виде

$$\int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} f[x(1-t^2)] \cos\{(4n+1)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} t\}\, dt, \tag{8.66.3}$$

где $f(\tau)=c_m\tau^m+c_{m+1}\tau^{m+1}+\ldots$ — целая функция с нулем порядка m в точке $\tau=0$; здесь m — произвольное целое число. Для второго интеграла (8.66.2) остаточный член имеет аналогичный вид. Полагая

$$g(t)=(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} f[x(1-t^2)],$$

мы видим, что функции $g(t)$, $g'(t)$, $g''(t)$, $\ldots$, $g^{(m-1)}(t)$ обращаются в нуль в точках $t=\pm 1$; они все суть $x^m O(1)$, где $O(1)$ равномерно ограничено на отрезке $-1\leqslant t\leqslant +1$ и на фиксированном конечном отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ независимо от того, содержит ли он начало координат или нет. Интегрируя по частям, мы находим для (8.66.3) равномерную по x при $a\leqslant x\leqslant b$ оценку вида $O(n^{-K})$, где K - произвольно большое число, если m достаточно велико.

Аналогичный результат справедлив для второго остатка.

(2) Первый член этого разложения дает (8.22.4). Мы легко получаем также распространение (8.22.4) на комплексную область.

Допустим теперь, что $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant\omega$. Затем, применяя (1.71.8), мы получим асимптотическое разложение Перрона (8.22.2) (см. Успенский [1], стр. 608—610). Нетрудно вывести этим же путем комплексную формулу Перрона (8.22.3).

Во всех этих рассмотрениях мы предполагали, что $\alpha>-\frac{1}{2}$. Распространение формулы Перрона на любые вещественные α можно осуществить с помощью второй формулы (5.1.13). По поводу второго доказательства формулы Перрона (методом перевала) см. § 8.72.

8.71. Метод перевала; многочлены Лежандра и связанные с ними функции

(1) Этот метод может быть применен для асимптотического вычисления интегралов вида

$$\int \{F(t)\}^n g(t)\,dt=\int e^{nf(t)} g(t)\,dt, \tag{8.71.1}$$

взятых вдоль некоторой дуги или замкнутой кривой, где $F(t)=e^{f(t)}$ и $g(t)$ - данные аналитические функции, регулярные в некоторой части комплексной t-плоскости, а $n\to\infty$. По теореме Коши контур интегрирования может быть деформирован. Во многих случаях удобно выбрать в качестве пути интегрирования линию, проходящую через точку t_0, в которой $f'(t_0)=0$ (точка перевала); кроме того, направление контура в точке t_0 (критическое направление) должно быть выбрано так (предполагаем, что $f''(t_0)\neq 0$), чтобы выражение

$$\frac{1}{2} nf''(t_0)(t-t_0)^2 \tag{8.71.2}$$

было вещественным и отрицательным, если t лежит в достаточно малой окрестности точки t_0. Тогда

$$\{F(t)\}^n=\{F(t_0)\}^n \exp\left\{\frac{1}{2} nf''(t_0)(t-t_0)^2+\frac{1}{6} nf'''(t_0)(t-t_0)^3+\ldots\right\}.$$

Отсюда следует, что при надлежащих предположениях относительно поведения функции $f(t)$ на остальной части пути интегрирования окрестность точки перевала

$$t-t_0=O\left(n^{\delta-\frac{1}{2}}\right), \qquad 0<\delta<\frac{1}{2} \tag{8.71.3}$$

дает при $n\to\infty$ главную часть интеграла, которая равна

$$e^{nf(t_0)}g(t_0)\,n^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-n^\delta}^{+n^\delta} e^{-a\varrho^2}d\varrho \cong e^{nf(t_0)}g(t_0)\left(\frac{\pi}{an}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad a>0, \quad n\to\infty. \tag{8.71.4}$$

(Дополнительные трудности возникают, если $f''(t_0)=0$; относительно этого случая см. § 8.75.)

Термин «метод перевала» возник из следующих соображений. Пусть $t=u+iv$. Тогда, рассматривая u, v, $\Re\{f(t)\}$ как декартовы координаты в обычном евклидовом пространстве, мы получаем поверхность с точкой перевала (седловой точкой) $t=t_0$, а кривая, проходящая в критическом направлении, является на этой поверхности линией наиболее крутого спуска в этой точке.

Ясно, что есть большая свобода в выборе контура; мы стеснены лишь в выборе его направления в точке перевала. Однако точное вычисление точки перевала t_0 как корня уравнения $f'(t_0)=0$, и в особенности соответствующего критического направления, может в некоторых случаях представить задачу значительной сложности. Поэтому следующее замечание может сильно упростить дело. Вместо самогó критического направления можно взять для пути интегрирования некоторое иное направление через точку перевала, лишь бы оно образовывало с критическим направлением угол, меньший чем $\frac{\pi}{4}$. Тогда постоянная в (8.71.4) будет комплексным числом с положительной вещественной частью. Геометрически это означает, что, проходя через точку перевала на поверхности, нельзя подняться на более высокий уровень в окрестности этой точки, чем в самой точке.

Для наших целей мы предпочтем контур, удовлетворяющий последнему условию, вдоль которого $\Re\{f(t)\}$ изменяется *монотонно*. Тогда исследование подынтегральной функции вне окрестности (8.71.3) становится сравнительно простым.

Относительно истории вопроса, дальнейших деталей и важных приложений этого метода мы отсылаем читателя к книге Ватсона [3], стр. 235—236.

(2) В качестве первой иллюстрации метода рассмотрим функции Лежандра второго рода, т. е. частный случай (4.61.1) при $\alpha=\beta=0$. Пусть $x=\cos\theta-i0$, $0<\theta<\pi$. Тогда

$$Q_n^{(0,\,0)}(\cos\theta-i0)=Q_n(\cos\theta-i0)=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}\,\frac{t^2-1}{t-\cos\theta}\right)^n\frac{dt}{\cos\theta-t}. \tag{8.71.5}$$

Первоначальный путь интегрирования, $-1\leqslant t\leqslant +1$, может быть деформирован в верхнюю полуокружность единичного радиуса, описываемую в отрицательном направлении. Условие, определяющее точку перевала, будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\frac{t^2-1}{t-\cos\theta}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{t^2-2t\cos\theta+1}{(t-\cos\theta)^2}=0, \quad \text{откуда} \quad t=e^{\pm i\theta}; \tag{8.71.6}$$

и мы видим, что новый путь интегрирования проходит через точку перевала $t=e^{i\theta}$. При $t=e^{i\theta}$ мы имеем

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{t^2-1}{t-\cos\theta}\right)=\frac{1}{i\sin\theta}; \tag{8.71.7}$$

следовательно, в окрестности этой точки

$$\frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t-\cos\theta}=e^{i\theta}+\frac{(t-e^{i\theta})^2}{2i\sin\theta}+\dots \tag{8.71.8}$$

В критическом направлении выражение $e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}(t-e^{i\theta})^2$ должно быть вещественным и отрицательным, иными словами, должно быть

$$\arg(t-e^{i\theta})=\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\quad\text{или}\quad\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}. \tag{8.71.9}$$

Далее, угол между этой прямой и касательной к единичной окружности в точке $e^{i\theta}$ равен

$$\arg\left\{e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}:e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right\}=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2} \tag{8.71.10}$$

и $\left|\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right|\leqslant\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}$, если $\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$. Итак, мы можем использовать в качестве пути интегрирования[1]) верхнюю полуокружность $|t|=1$.

Подставляя $t=e^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, мы находим, что функция

$$\left|\frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t-\cos\theta}\right|=\frac{\sin\varphi}{[(\cos\varphi-\cos\theta)^2+\sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}}}=\left\{\left(\frac{\cos\varphi-\cos\theta}{\sin\varphi}\right)^2+1\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{8.71.11}$$

является возрастающей функцией φ при $0\leqslant\varphi\leqslant\theta$ и убывающей при $\theta\leqslant\varphi\leqslant\pi$. Затем рассмотрим интеграл по дуге

$$\varphi=\theta+n^{-\frac{1}{2}}\varrho,\qquad -n^{\delta}\leqslant\varrho\leqslant+n^{\delta}, \tag{8.71.12}$$

где δ — подходящим образом выбранное положительное число. На этой дуге мы имеем

$$e^{i\varphi}-e^{i\theta}=e^{i\theta}[\exp(in^{-\frac{1}{2}}\varrho)-1]=e^{i\theta}\left\{in^{-\frac{1}{2}}\varrho+\frac{(in^{-\frac{1}{2}}\varrho)^2}{2!}+\dots\right\}$$

и в силу (8.71.8) получаем

$$\frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t-\cos\theta}=e^{i\theta}-\frac{e^{2i\theta}}{2i\sin\theta}n^{-1}\varrho^2\{1+c_1n^{-\frac{1}{2}}\varrho+c_2(n^{-\frac{1}{2}}\varrho)^2+\dots\}$$

при $\delta<\frac{1}{2}$. Здесь c_1, c_2, … — некоторые функции θ, не зависящие от n, причем $c_m=O(A^m)$ равномерно по θ при $\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$ и по m; $A=A(\varepsilon)$.

Далее,

$$\left(\frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t-\cos\theta}\right)^n=e^{in\theta}\exp\left\{-\frac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}\varrho^2\right\}e^W,$$

где

$$W=-\frac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}\varrho^2\{c_1n^{-\frac{1}{2}}\varrho+c_2(n^{-\frac{1}{2}}\varrho)^2+\dots\}-$$
$$-\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}\right)^{\nu}n^{1-\nu}\varrho^{2\nu}(1+c_1n^{-\frac{1}{2}}\varrho+\dots)^{\nu}.$$

---

[1]) Критическое направление дается биссектрисой острого угла между касательной в точке $e^{i\theta}$ и горизонтальным направлением.

Пусть $\delta < \frac{1}{6}$; если M — произвольно большое целое положительное число, то функции W и e^W могут быть представлены в виде конечных сумм плюс остаточный член порядка $O(n^{-M})$. Это приводит к соотношению

$$\left(\frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t-\cos\theta}\right)^n = e^{in\theta}\exp\left\{-\frac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}\varrho^2\right\}\times$$
$$\times\{1+u_1(\varrho,\theta)n^{-\frac{1}{2}}+u_2(\varrho,\theta)n^{-1}+u_3(\varrho,\theta)n^{-\frac{3}{2}}+\ldots\}. \quad (8.71.13)$$

Ряд в скобках является асимптотическим разложением. Если взять только m его членов, то остаток будет меньше произвольно большой степени n^{-1}, если m достаточно велико; $u_\nu(\varrho,\theta)$ — многочлен относительно ϱ и аналитическая функция относительно θ при $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi-\varepsilon$. Кроме того, имеем

$$u_\nu(-\varrho,\theta) = (-1)^\nu u_\nu(\varrho,\theta).$$

(3) Умножим (8.71.13) на выражение

$$\frac{1}{2}\frac{dt}{\cos\theta-t} = \frac{1}{2}\frac{ie^{i\varphi}\,d\varphi}{\cos\theta-e^{i\varphi}} = \frac{1}{2}\frac{ie^{i\theta}e^{in^{-\frac{1}{2}}\varrho}n^{-\frac{1}{2}}\,d\varrho}{\cos\theta-e^{i\theta}e^{in^{-\frac{1}{2}}\varrho}} =$$
$$= -\frac{e^{i\theta}}{2\sin\theta}n^{-\frac{1}{2}}\{1+c_1'n^{-\frac{1}{2}}\varrho+c_2'(n^{-\frac{1}{2}}\varrho)^2+\ldots\}\,d\varrho,$$

где $\{c_m'\}$ — последовательность, аналогичная последовательности $\{c_m\}$; это не меняет основного характера равенства (8.71.13). Мы получаем, что интеграл по дуге (8.71.12) дает

$$-\frac{e^{i(n+1)\theta}}{2\sin\theta}n^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{+n^\delta}^{-n^\delta}\exp\left\{-\frac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}\varrho^2\right\}\times$$
$$\times\{1+v_1(\varrho,\theta)n^{-\frac{1}{2}}+v_2(\varrho,\theta)n^{-1}+v_3(\varrho,\theta)n^{-\frac{3}{2}}+\ldots\}\,d\varrho, \quad (8.71.14)$$

где $\{v_\nu(\varrho,\theta)\}$ — последовательность многочленов, аналогичных последовательности $\{u_\nu(\varrho,\theta)\}$. Последний ряд является асимптотическим разложением того же типа, что (8.71.13).

В концевых точках рассматриваемой дуги модули подынтегральной функции в (8.71.14) суть $O(e^{-c\varrho^2})$, т. е.

$$O(e^{-cn^{2\delta}}),\quad c>0;$$

это же имеет место для интеграла по остальной части дуги ввиду монотонного характера изменения функции (8.71.11). Таким образом,

$$Q_n(\cos\theta-i0) = \frac{e^{i(n+1)\theta}}{2\sin\theta}n^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-n^\delta}^{+n^\delta}\exp\left\{-\frac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}\varrho^2\right\}\times$$
$$\times\{1+v_1(\varrho,\theta)n^{-\frac{1}{2}}+v_2(\varrho,\theta)n^{-1}+\ldots\}\,d\varrho+O(e^{-cn^{2\delta}}).$$

Члены, соответствующие нечетным степеням $n^{-\frac{1}{2}}$, обращаются в нуль после интегрирования. Дополняя интервал интегрирования, получаем соотношение

$$Q_n(\cos\theta - i0) = \frac{e^{i(n+1)\theta}}{2\sin\theta}\, n^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}\,\varrho^2\right\} d\varrho + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{e^{i(n+1)\theta}}{2\sin\theta}\, n^{-\frac{1}{2}} \left\{\frac{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}{2\sin\theta}\right\}^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2n\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{i\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right]\right\} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right), \qquad (8.71.15)$$

причем оценка остаточного члена равномерна на отрезке $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$.

Этот метод приводит к полному асимптотическому разложению $Q_n(\cos\theta - i0)$ вида (8.61.7) при $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$; однако, по-видимому, трудно, применяя его, найти общий вид коэффициентов.

Из (8.71.15) мы получаем соответствующее асимптотическое разложение для $Q_n(\cos\theta + i0)$ простой заменой i на $-i$. Отсюда и из (4.62.8) мы легко получаем формулу Лапласа. Формула (8.61.7) может быть выведена таким же путем. Одновременно мы получаем подобное же асимптотическое разложение для $\boldsymbol{Q}_n^{(0,\,0)}(\cos\theta) = \boldsymbol{Q}_n(\cos\theta)$ с главным членом (8.21.19).

(4) Ясно, что можно провести аналогичные рассмотрения для многочленов Якоби $P_n^{(\alpha,\,\beta)}(\cos\theta)$, где α и β — произвольные вещественные числа, $n \to \infty$, а θ снова лежит на отрезке $-\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$. В соответствии с (4.4.6) мы имеем

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = 2\Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int \left(\frac{1}{2}\,\frac{t^2-1}{t-\cos\theta}\right)^n \left(\frac{1-t}{1-\cos\theta}\right)^\alpha \left(\frac{1+t}{1+\cos\theta}\right)^\beta \frac{dt}{\cos\theta - t}\right\}, \qquad (8.71.16)$$

где контур такой же, как в (2) [1]. Дополнительный множитель

$$\frac{2}{\pi i}\left(\frac{1-t}{1-\cos\theta}\right)^\alpha \left(\frac{1+t}{1+\cos\theta}\right)^\beta \qquad (8.71.17)$$

не создает новых трудностей и при $t = e^{i\theta}$ дает

$$\frac{2}{\pi i}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta} \exp\left\{i\left[\frac{\alpha(\theta-\pi)}{2} + \frac{\beta\theta}{2}\right]\right\}. \qquad (8.71.18)$$

Отсюда мы находим (8.21.10) и разложение вида (8.21.12).

(5) Этот же метод может быть легко применен к функциям $Q_n(x)$, $P_n(x)$ или в общем случае к $Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$ и $P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$, когда x — произвольное вещественное или комплексное число, не лежащее на отрезке $[-1, +1]$. Это приводит к (8.21.9), а также к разложению (8.21.11). В случае $Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$ мы исходим из (4.61.1). Следует заменить полуокружность, использованную выше, дугой окружности, проходящей через точки ± 1 и $z = x - (x^2-1)^{\frac{1}{2}}$, $|z| < 1$ (x лежит в плоскости с разрезом), которая была введена в § 4.81, (1). В результате получим тот же интеграл, что в (4.82.4). Применяя метод перевала, мы получаем формулу вида

$$(x-1)^\alpha (x+1)^\beta Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(x) \cong n^{-\frac{1}{2}}\{x - (x^2-1)^{\frac{1}{2}}\}^{n+1}\varphi(x), \qquad (8.71.19)$$

где $|x - (x^2-1)^{\frac{1}{2}}| < 1$, а $\varphi(x)$ не зависит от n, регулярна и отлична от нуля в плоскости с разрезом.

---

[1]) Мы должны исключить точки $t = \pm 1$ с помощью маленьких полуокружностей.

8.72. Метод перевала; формула Перрона для многочленов Лагерра

В качестве дальнейшего применения этого метода мы опять выведем асимптотические разложения (8.22.2) и (8.22.3). Приводимое доказательство основано на интегральном представлении (5.4.1), которое справедливо при произвольном вещественном α, если n достаточно велико.

(1) Пусть x произвольно, но отлично от нуля. Будем исходить из асимптотического разложения (1.71.8) функции Бесселя $J_\alpha(z)$, z — комплексное. Часть интеграла (5.4.1), взятая по отрезку интегрирования $0 \leqslant t \leqslant 1$, есть $(n!)^{-1} O(1)$. Таким образом, мы можем ограничиться значениями $t \geqslant 1$ и применить (1.71.8). Подстановка этого разложения в (5.4.1) приводит к интегралам вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}} (tx)^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left\{2(tx)^{\frac{1}{2}} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\} dt, \quad m \text{ — четно},\\ &\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}} (tx)^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} \sin\left\{2(tx)^{\frac{1}{2}} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\} dt, \quad m \text{ — нечетно},\\ &\qquad\qquad m = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{8.72.1}$$

(Здесь область интегрирования снова дополнена до всей полуоси $0 \leqslant t < \infty$.) Остаточный член будет иметь вид

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}-q} \exp\{2t^{\frac{1}{2}} |\Re(-x)^{\frac{1}{2}}|\} dt, \tag{8.72.2}$$

где q — фиксированное положительное число, которое может быть взято произвольно большим; выбор ветви $(-x)^{\frac{1}{2}}$ тот же, что в теореме 8.22.3. Если x—фиксированное положительное число, то это есть величина порядка $O(n^{\frac{\alpha}{2}-q})$. Если x — комплексное число, то исследование остаточного члена становится более трудным. Рассуждения, которые будут приведены в (2), дают оценку и в этом случае.

(2) Для удобства исследуем сначала интеграл

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-t} t^n \exp(t^{\frac{1}{2}}\xi)\, dt = \frac{n^{n+1}e^{-n}}{n!}\int_0^\infty (e^{1-t}t)^n \exp(n^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}\xi)\, dt \tag{8.72.3}$$

($\xi \neq 0$ — произвольное комплексное число), к которому могут быть сведены интегралы (8.72.1) и (8.72.2); здесь $n \to +\infty$, но n — не обязательно целое. В последнем интеграле точкой перевала является «по существу» $t = 1$, а положительная вещественная ось — критическим направлением [1]). Если мы положим, как в (8.71.12),

$$t = 1 + n^{-\frac{1}{2}}\varrho, \quad -n^\delta \leqslant \varrho \leqslant +n^\delta, \tag{8.72.4}$$

то при $0 < \delta < \frac{1}{6}$ получим

$$\begin{aligned} (e^{1-t}t)^n &= \exp\{n(1-t) + n\ln[1 + (t-1)]\} =\\ &= e^{-\frac{\varrho^2}{2}} \exp\left\{n\sum_{\nu=3}^\infty (-1)^{\nu-1}\frac{(n^{-\frac{1}{2}}\varrho)^\nu}{\nu}\right\} =\\ &= e^{-\frac{\varrho^2}{2}}\{1 + u_1(\varrho)n^{-\frac{1}{2}} + u_2(\varrho)n^{-1} + \ldots\}, \end{aligned} \tag{8.72.5}$$

---

[1]) Этот случай не является прямым применением метода, указанного в § 8.71, (1), так как подынтегральная функция имеет вид $[F(t)]^n [G(t)]^{\sqrt{n}}$.

где $u_\nu(\varrho)$ — многочлены относительно ϱ, не зависящие от n. Это асимптотическое разложение по своему характеру подобно разложению (8.71.13). Кроме того,

$$\exp(n^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}\xi) = \exp\{n^{\frac{1}{2}}\xi + n^{\frac{1}{2}}\xi[(1+(t-1))^{\frac{1}{2}}-1]\} =$$
$$= \exp\{n^{\frac{1}{2}}\xi + \frac{\varrho\xi}{2} + n^{\frac{1}{2}}\xi\sum_{\nu=2}^{\infty} c_\nu (n^{-\frac{1}{2}}\varrho)^\nu\}, \qquad (8.72.6)$$

где c_ν — некоторые числовые постоянные. Это дает произведение $\exp(n^{\frac{1}{2}}\xi + \varrho\xi/2)$ на выражение, подобное тому, которое стоит в скобках в (8.72.5). В этом случае коэффициенты, соответствующие $u_\nu(\varrho)$, будут многочленами относительно ϱ и ξ. Мы видим также, что интеграл, взятый по области, дополнительной к отрезку (8.72.4), равен $O\{\exp(-cn^{2\delta})\}$, $c > 0$. Следовательно, так же, как в (8.71.14), будем иметь

$$\int_0^\infty (e^{1-t}t)^n \exp(n^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}\xi)\,dt =$$
$$= n^{-\frac{1}{2}}\exp(n^{\frac{1}{2}}\xi)\int_{-n^\delta}^{+n^\delta}\exp\left(-\frac{\varrho^2}{2}+\frac{\varrho\xi}{2}\right)\{1+v_1(\varrho,\xi)\,n^{-\frac{1}{2}}+v_2(\varrho,\xi)\,n^{-1}+\ldots\}\,d\varrho =$$
$$= n^{-\frac{1}{2}}\exp(n^{\frac{1}{2}}\xi)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\varrho^2}{2}+\frac{\varrho\xi}{2}\right)\{1+v_1(\varrho,\xi)\,n^{-\frac{1}{2}}+v_2(\varrho,\xi)\,n^{-1}+\ldots\}\,d\varrho,$$

где $v_\nu(\varrho, \xi)$ — многочлены относительно ϱ и ξ. Далее, если q — неотрицательное целое число, то мы вообще имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\varrho^2}{2}+\frac{\varrho\xi}{2}\right)\varrho^q\,d\varrho = e^{\frac{\xi^2}{8}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\varrho^2}{2}}\left(\varrho+\frac{\xi}{2}\right)^q d\varrho,$$

и последний интеграл есть π_q относительно ξ. (При $q = 0$ мы получаем $(2\pi)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\xi^2}{8}}$.) Благодаря формуле Стирлинга из (8.72.3) вытекает разложение вида

$$\exp\left(n^{\frac{1}{2}}\xi+\frac{\xi^2}{8}\right)\{1+v_1(\xi)\,n^{-\frac{1}{2}}+v_2(\xi)\,n^{-1}+\ldots\},$$

где $v_\nu(\xi)$ — многочлены.

Применяя этот результат к (8.72.1) (заменяя n на $n+\frac{\alpha}{2}-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}$), мы получаем требуемое разложение. Частный случай $\xi > 0$ дает требуемую оценку остаточного члена (8.72.2).

8.73. Метод перевала; многочлены Лагерра при $1 \leqslant x \leqslant (4-\eta)\,n$

В этом и двух следующих параграфах мы выведем формулы (8.22.9), (8.22.10) и (8.22.11) методом перевала. Заметим, что в первом случае условие $x = (4n+2\alpha+2)\cos^2\varphi$, $\varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon n^{-\frac{1}{2}}$ означает, что x удовлетворяет неравенству $x_0 \leqslant x \leqslant (4-\eta)\,n$, где ε, x_0 и η — фиксированные положительные числа, $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, $\eta<4$, n достаточно велико. Параметр α — произвольное вещественное число.

(1) Мы исходим из формулы (5.1.16) (см. замечание в конце § 5.2), в которой мы заменяем x на ξ^2, а w — на $-\frac{w^2}{4}$; таким образом, можем написать

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{(\alpha)}(\xi^2)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left(-\frac{w^2}{4}\right)^n=2^\alpha e^{-\frac{w^2}{4}}(\xi w)^{-\alpha}e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}J_\alpha\left(e^{-\frac{i\pi}{2}}\xi w\right). \qquad (8.73.1)$$

Следовательно,

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{L_n^{(\alpha)}(\xi^2)}{\Gamma(n+\alpha+1)}=\frac{2^\alpha\xi^{-\alpha}}{2\pi i}\int e^{-\frac{w^2}{4}}w^{-2n-\alpha-1}e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}J_\alpha\left(e^{-\frac{i\pi}{2}}\xi w\right)dw. \qquad (8.73.2)$$

Интегрирование осуществляется вдоль контура, охватывающего начало координат. Мы выберем его в виде окружности с центром в начале координат и радиусом, величину которого определим ниже. Функция (8.73.1) вещественна при вещественных w. Так как $\xi=x^{\frac{1}{2}}$, то

$$\xi=l_n\cos\varphi,\quad l_n=(4n+2\alpha+2)^{\frac{1}{2}},\quad \varepsilon\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon n^{-\frac{1}{2}}. \qquad (8.73.3)$$

Следовательно, ξ ограничено снизу положительной постоянной. В соответствии с (1.71.9) при $|w|\to\infty$ на отрезке $0\leqslant\arg w\leqslant\pi$ мы имеем равномерно соотношение

$$e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}J_\alpha\left(e^{-\frac{i\pi}{2}}\xi w\right)=(2\pi\xi w)^{-\frac{1}{2}}e^{\xi w}\{1+O(\xi^{-1}|w|^{-1})\}+$$
$$+(2\pi\xi w)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\xi w+\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi i\right\}\{1+O(\xi^{-1}|w|^{-1})\}. \qquad (8.73.4)$$

Отсюда и из (8.73.2), полагая $\xi=l_n\cos\varphi$, $w=l_nz$, имеем

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{L_n^{(\alpha)}(\xi^2)}{\Gamma(n+\alpha+1)}=$$
$$=2^\alpha\xi^{-\alpha}(2\pi\xi)^{-\frac{1}{2}}l_n^{-2n-\alpha-\frac{1}{2}}2\Re\left[\frac{1}{2\pi i}G+\frac{1}{2\pi i}H+K\right], \qquad (8.73.5)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
G&=\int z^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{4}l_n^2z^2+l_n^2z\cos\varphi-\frac{1}{2}l_n^2\ln z\right\}dz,\\
H&=e^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi i}\int z^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{4}l_n^2z^2-l_n^2z\cos\varphi-\frac{1}{2}l_n^2\ln z\right\}dz,\\
K&=O(\xi^{-1}l_n^{-1})\int\left|\exp\left\{-\frac{1}{4}l_n^2z^2\pm l_n^2z\cos\varphi-\frac{1}{2}l_n^2\ln z\right\}\right||dz|.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.73.6)$$

Здесь интегрирование производится по верхней полуокружности $|z|=1$, а $\ln z$ равен 0 при $z=1$. В последнем интеграле мы выбираем тот из двух знаков плюс или минус, при котором интеграл принимает большее значение. Полагая теперь

$$f(z)=-\frac{1}{4}z^2+z\cos\varphi-\frac{1}{2}\ln z, \qquad (8.73.7)$$

найдем точку перевала для первого интеграла из уравнения

$$f'(z) = -\frac{z}{2} + \cos\varphi - (2z)^{-1} = 0, \text{ т. е. } z = e^{\pm i\varphi}.$$

Так как $f''(e^{i\varphi}) = \sin\varphi e^{-i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}$, то в окрестности $e^{i\varphi}$ мы имеем

$$f(z) = f(e^{i\varphi}) + \frac{1}{2}\sin\varphi e^{-i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}(z-e^{i\varphi})^2 + \ldots \tag{8.73.8}$$

Следовательно, критическое направление можно определить таким же способом, какой был применен в § 8.71, (2).

(2) На окружности $z = e^{i\varphi}$

$$\Re\{f(e^{i\psi})\} = -\frac{1}{4}\cos 2\psi + \cos\psi\cos\varphi \tag{8.73.9}$$

— возрастающая функция при $0 \leqslant \psi \leqslant \varphi$ и убывающая при $\varphi \leqslant \psi \leqslant \pi$. Следовательно, достаточно рассмотреть интеграл по дуге

$$\psi = \varphi + l_n^{-1}\varrho, \quad -n^\delta \leqslant \varrho \leqslant +n^\delta, \tag{8.73.10}$$

где δ — фиксированное положительное число, $\delta < \frac{1}{6}$. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} z = e^{i\psi} &= e^{i\varphi}\left\{1 + il_n^{-1}\varrho + \frac{(il_n^{-1}\varrho)^2}{2!} + \ldots\right\}, \\ dz &= e^{i\varphi}il_n^{-1}\left\{1 + il_n^{-1}\varrho + \frac{(il_n^{-1}\varrho)^2}{2!} + \ldots\right\}d\varrho, \\ z - e^{i\varphi} &= e^{i\varphi}il_n^{-1}\varrho\left\{1 + \frac{il_n^{-1}\varrho}{2} + \ldots\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{8.73.11}$$

Отсюда и из (8.73.8) получаем

$$f(z) = f(e^{i\varphi}) - \frac{1}{2}\sin\varphi e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)} l_n^{-2}\varrho^2\{1 + c_1 l_n^{-1}\varrho + c_2\,(l_n^{-1}\varrho)^2 + \ldots\}, \tag{8.73.12}$$

где c_ν — функции от φ, не зависящие от n и ϱ, и $c_m = O(A^m)$ равномерно на отрезке $\varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \pi - \varepsilon$ и равномерно относительно m; $A = A(\varepsilon)$. (Отметим, что это условие относительно φ является более общим, чем условие в (8.22.9).) Отсюда мы получаем в том же смысле, как в (8.71.14), следующее асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} G = e^{-\frac{i\varphi}{2}} \exp\{l_n^2 f(e^{i\varphi})\}\, e^{i\varphi} il_n^{-1} \times \\ \times \int_{-n^\delta}^{+n^\delta} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sin\varphi e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\varrho^2\right\}\{1 + l_n^{-1}(c_1'\varrho + c_1''\varrho^3) + \\ + l_n^{-2}(c_2'\varrho^2 + c_2''\varrho^4 + c_2'''\varrho^6) + \ldots\}\,d\varrho, \end{aligned} \tag{8.73.13}$$

где c_1', c_1'', c_2', c_2'', c_2''', ... — постоянные. Главный член дает

$$\begin{aligned} G &= e^{-\frac{i\varphi}{2}} \exp\{l_n^2 f(e^{i\varphi})\}\, e^{i\varphi}\, il_n^{-1}\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\{1 + O(l_n^{-2})\} = \\ &= \left(\frac{2\pi}{\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-i(2n+\alpha+1)\varphi + \frac{3\pi}{4}i\right\} l_n^{-1} \times \\ &\times \exp\left\{\frac{1}{2}l_n^2\cos^2\varphi + \frac{1}{4}l_n^2 + \frac{1}{2}il_n^2\sin\varphi\cos\varphi\right\}\{1 + O(l_n^{-2})\}, \end{aligned} \tag{8.73.14}$$

так как интегралы с нечетными степенями ϱ обращаются в нуль. Оценка остаточного члена имеет место равномерно при $\varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \pi - \varepsilon$.

Подынтегральная функция в H получается заменой φ на $\pi - \varphi$, так что

$$H = \left(\frac{2\pi}{\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\pi i - i(2n+\alpha+1)(\pi - \varphi) + \frac{3\pi i}{4}\right\} \times \\ \times l_n^{-1} \exp\left\{\frac{1}{2} l_n^2 \cos^2\varphi + \frac{1}{4} l_n^2 - \frac{1}{2} i l_n^2 \sin\varphi\cos\varphi\right\}\{1 + O(l_n^{-2})\}. \quad (8.73.15)$$

Беря абсолютные значения подынтегральных функций в G и H, при $\varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon n^{-\frac{1}{2}}$ мы получаем

$$K = O(\xi^{-1} l_n^{-1})\, l_n^{-1} \exp\left\{\frac{1}{2} l_n^2 \cos^2\varphi + \frac{1}{4} l_n^2\right\}. \quad (8.73.16)$$

Легко видеть, что с точностью до членов высшего порядка $H = -\bar{G}$. Следовательно,

$$\Re\left\{\frac{1}{2\pi i} G + \frac{1}{2\pi i} H + K\right\} = \left(\frac{2}{\pi\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} l_n^{-1} \exp\left\{\frac{1}{2} l_n^2 \cos^2\varphi + \frac{1}{4} l_n^2\right\} \times \\ \times\left\{\sin\left[\frac{1}{2} l_n^2 \sin\varphi\cos\varphi - (2n+\alpha+1)\varphi + \frac{3\pi}{4}\right] + O(\xi^{-1} l_n^{-1})\right\}, \quad (8.73.17)$$

так как $l_n^{-2} = O(\xi^{-1} l_n^{-1})$. Вводя это выражение в (8.73.5), мы получаем

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{L_n^{(\alpha)}(\xi^2)}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \pi^{-1} (\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\alpha - \frac{1}{2}} 2^{\alpha+1} l_n^{-2n-\alpha-\frac{3}{2}} \times \\ \times \exp\left\{\frac{1}{2} l_n^2 \cos^2\varphi + \frac{1}{4} l_n^2\right\}\left\{\sin\left[\frac{1}{2} l_n^2 \sin\varphi\cos\varphi - \right.\right. \\ \left.\left. - (2n+\alpha+1)\varphi + \frac{3\pi}{4}\right] + O(\xi^{-1} l_n^{-1})\right\}.$$

Далее,

$$l_n = 2n^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\alpha+1}{4n}\right)\{1 + O(n^{-2})\},$$

$$4^n\,\Gamma(n+\alpha+1) = \pi^{\frac{1}{2}}\, 2^{2n+\frac{1}{2}}\, n^{n+\alpha+\frac{1}{2}} e^{-n}\{1 + O(n^{-1})\};$$

и так как $n^{-1} = O(\xi^{-1} l_n^{-1})$, то мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &L_n^{(\alpha)}(\xi^2) = (-1)^n (\pi\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\alpha-\frac{1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \times \\ &\qquad \times \exp\left\{-n - \frac{\alpha+1}{2}\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}\xi^2 + n + \frac{\alpha+1}{2}\right\} \times \\ &\times\left\{\sin\left[\frac{1}{2} l_n^2 \sin\varphi\cos\varphi - (2n+\alpha+1)\varphi + \frac{3\pi}{4}\right] + O(\xi^{-1} l_n^{-1})\right\}, \\ &\qquad e^{-\frac{\xi^2}{2}} L_n^{(\alpha)}(\xi^2) = (-1)^n (\pi\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\alpha-\frac{1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \times \\ &\times\left\{\sin\left[\left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right)\sin 2\varphi - (2n+\alpha+1)\varphi + \frac{3\pi}{4}\right] + O(\xi^{-1} l_n^{-1})\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (8.73.18)$$

Это тождественно с (8.22.9).

Заметим, что при применении этого результата к многочленам Эрмита возможны некоторые упрощения. При $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ остаточные члены в (1.71.9) и в (8.73.4) тождественно равны нулю, благодаря чему K в (8.73.5) может быть вычеркнуто, а ξ может быть взято произвольно близко к нулю. Таким образом, если учесть (5.6.1), то отсюда легко вытекает (8.22.12).

8.74. Метод перевала; многочлены Лагерра при $(4+\eta)n \leqslant x \leqslant An$

Мы опять исходим из формулы (8.73.2) и интегрируем по надлежаще выбранной окружности с центром в начале координат. Применяя обозначения, аналогичные обозначениям предыдущего параграфа, положим

$$\xi = l_n \operatorname{ch} \varphi, \qquad \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \omega, \qquad w = l_n z. \tag{8.74.1}$$

Мы можем написать

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{L_n^{(\alpha)}(\xi^2)}{\Gamma(n+\alpha+1)} = 2^\alpha \xi^{-\alpha} (2\pi\xi)^{-\frac{1}{2}} l_n^{-2n-\alpha-\frac{1}{2}} \left\{\frac{1}{2\pi i} G_1' + \frac{1}{2\pi i} H_1' + \right.$$
$$\left. + 2\Re\left(\frac{1}{2\pi i} G_2'\right) + 2\Re\left(\frac{1}{2\pi i} H_2'\right) + K'\right\}, \tag{8.74.2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} G_1' &= \int z^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{4} l_n^2 z^2 + l_n^2 z \operatorname{ch} \varphi - \frac{1}{2} l_n^2 \ln z\right\} dz, \\ H_1' &= e^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi i} \int z^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{4} l_n^2 z^2 - l_n^2 z \operatorname{ch} \varphi - \frac{1}{2} l_n^2 \ln z\right\} dz, \\ K' &= O(\xi^{-1} l_n^{-1}) \int \left|\exp\left\{-\frac{1}{4} l_n^2 z^2 \pm l_n^2 z \operatorname{ch} \varphi - \frac{1}{2} l_n^2 \ln z\right\}\right| |dz|. \end{aligned}\right\} \tag{8.74.3}$$

Как в G_1', так и в H_1' мы интегрируем вдоль двух дуг

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant +\frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{5\pi}{4}$$

окружности $|z| = e^{-\varphi}$, а в G_2' и H_2' (которые имеют соответственно те же подынтегральные функции, что G_1' и H_1') мы интегрируем по дуге $\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{4}$; в K' мы берем дугу $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ предыдущего параграфа. Мы можем опять применить (8.73.4) (см. (1.71.9)). В этом случае мы рассмотрим функцию

$$f(z) = -\frac{1}{4} z^2 + z \operatorname{ch} \varphi - \frac{1}{2} \ln z. \tag{8.74.4}$$

Условие $f'(z) = 0$ дает $z = e^{\pm\varphi}$, и мы имеем $f''(e^{-\varphi}) = (e^{2\varphi} - 1)/2 = e^\varphi \operatorname{sh} \varphi$. Следовательно, окружность $|z| = e^{-\varphi}$ проходит через точку перевала с меньшим модулем и имеет критическое направление в этой точке. Для второго интеграла точками перевала будут $-e^{\pm\varphi}$, откуда следует, что здесь опять может быть использована окружность $|z| = e^{-\varphi}$. Ясно, что при $z = e^{-\varphi + i\psi}$

$$\Re\{f(z)\} = -\frac{1}{4} e^{-2\varphi} \cos 2\psi + e^{-\varphi} \operatorname{ch} \varphi \cos \psi + \frac{\varphi}{2} \tag{8.74.5}$$

— убывающая функция ψ, когда ψ возрастает от нуля до π.

Полагая $\psi = l_n^{-1}\varrho$, $-n^\delta \leqslant \varrho \leqslant +n^\delta$, $0<\delta<\frac{1}{6}$, мы получаем

$$\left.\begin{aligned} z &= e^{-\varphi+i\psi} = e^{-\varphi}\left\{1 + il_n^{-1}\varrho + \frac{(il_n^{-1}\varrho)^2}{2!} + \ldots\right\}, \\ dz &= e^{-\varphi}\, il_n^{-1}\left\{1 + il_n^{-1}\varrho + \frac{(il_n^{-1}\varrho)^2}{2!} + \ldots\right\} d\varrho, \\ z - e^{-\varphi} &= e^{-\varphi}\, il_n^{-1}\varrho\left\{1 + \frac{il_n^{-1}\varrho}{2!} + \ldots\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{8.74.6}$$

отсюда вытекает, что

$$f(z) = f(e^{-\varphi}) - \frac{1}{2}\operatorname{sh}\varphi e^{-\varphi}\, l_n^{-2}\varrho^2\{1 + c_1 l_n^{-1}\varrho + c_2 (l_n^{-1}\varrho)^2 + \ldots\}. \tag{8.74.7}$$

Здесь коэффициенты $c_1, c_2, \ldots$ (а также $c_1', c_1'', c_2', c_2'', c_2''', \ldots$, которые вводятся ниже) аналогичны соответствующим коэффициентам § 8.73. Отсюда, в том же смысле, что и ранее, мы имеем асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} G_1' &= e^{\frac{\varphi}{2}} \exp\{l_n^2 f(e^{-\varphi})\}\, e^{-\varphi}\, il_n^{-1} \int_{-n^\delta}^{+n^\delta} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{sh}\varphi e^{-\varphi}\varrho^2\right\} \times \\ &\quad \times \{1 + l_n^{-1}(c_1'\varrho + c_1''\varrho^3) + l_n^{-2}(c_2'\varrho^2 + c_2''\varrho^4 + c_2'''\varrho^6) + \ldots\}\, d\varrho = \\ &= e^{\frac{\varphi}{2}} \exp\{l_n^2 f(e^{-\varphi})\}\, e^{-\varphi}\, il_n^{-1}\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{sh}\varphi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\varphi}{2}}\{1 + O(l_n^{-2})\} = \\ &= \left(\frac{2\pi}{\operatorname{sh}\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{(2n+\alpha+1)\varphi}\, il_n^{-1} \exp\left\{l_n^2 \operatorname{ch}^2\varphi - \frac{1}{4} l_n^2 e^{2\varphi}\right\}\{1 + O(l_n^{-2})\}. \end{aligned} \tag{8.74.8}$$

Главные части G_1' и H_1' вычисляются соответственно на дугах

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant +\frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{5\pi}{4}.$$

Если мы заменим z на $e^{i\pi}z$ в H_1', то сразу видим, что эти главные части тождественны. Следовательно, мы имеем $G_1' = H_1'$ с точностью до членов высшего порядка малости, чем остаточный член в (8.74.8); кроме того, G_2' и H_2' также имеют более высокий порядок малости, чем тот же самый остаточный член. Поскольку $\xi^{-1} l_n^{-1} = O(l_n^{-2})$, то мы имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} G_1' + \frac{1}{2\pi i} H_1' + 2\Re\left(\frac{1}{2\pi i} G_2'\right) + 2\Re\left(\frac{1}{2\pi i} H_2'\right) + K' = \\ &= \left(\frac{2}{\pi\operatorname{sh}\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{(2n+\alpha+1)\varphi}\, l_n^{-1} \exp\left\{l_n^2 \operatorname{ch}\varphi - \frac{1}{4} l_n^2 e^{2\varphi}\right\}\{1 + O(l_n^{-2})\}, \end{aligned} \tag{8.74.9}$$

откуда вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{L_n^{(\alpha)}(\xi^2)}{\Gamma(n+\alpha+1)} &= \pi^{-1}(\operatorname{sh}\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,\xi^{-\alpha-\frac{1}{2}}\, 2^\alpha\, l_n^{-2n-\alpha-\frac{3}{2}} \times \\ &\quad \times \exp\left\{\xi^2 - \frac{1}{4} l_n^2 e^{2\varphi} + (2n+\alpha+1)\varphi\right\}\{1 + O(l_n^{-2})\} \end{aligned} \tag{8.74.10}$$

или

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\xi^2}{2}} L_n^{(\alpha)}(\xi^2) &= \frac{1}{2}(-1)^n (\pi\operatorname{sh}\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,\xi^{-\alpha-\frac{1}{2}}\, n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \times \\ &\quad \times \exp\left[\left(n + \frac{\alpha+1}{2}\right)(2\varphi - \operatorname{sh} 2\varphi)\{1 + O(n^{-1})\}\right]. \end{aligned} \tag{8.74.11}$$

Возвращаясь к переменной x, мы получаем (8.22.10). Отсюда непосредственно вытекает результат (8.22.13).

8.75. Метод перевала; многочлены Лагерра при $x = 4n + O(n^{\frac{1}{3}})$

(1) Пусть сначала t вещественно и ограниченно. Положим, подобно тому, как ранее,

$$x = \xi^2,$$
$$\xi = l_n - (6l_n)^{-\frac{1}{3}} t,$$
$$w = l_n z,$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{L_n^{(\alpha)}(\xi^2)}{\Gamma(n+\alpha+1)} = 2^\alpha \xi^{-\alpha} (2\pi\xi)^{-\frac{1}{2}} l_n^{-2n-\alpha-\frac{1}{2}} 2\Re\left\{\frac{1}{2\pi i} G'' + \frac{1}{2\pi i} H'' + K''\right\}, \tag{8.75.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} G'' &= \int z^{-\frac{1}{2}} \exp\{l_n^2 f_1(z) - 6^{-\frac{1}{3}} l_n^{\frac{2}{3}} tz\} dz, \\ H'' &= e^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi i} \int z^{-\frac{1}{2}} \exp\{l_n^2 f_2(z) + 6^{-\frac{1}{3}} l_n^{\frac{2}{3}} tz\} dz, \\ K'' &= O(l_n^{-2}) \int |\exp\{l_n^2 f_\nu(z) \mp 6^{-\frac{1}{3}} l_n^{\frac{2}{3}} tz\}| \cdot |dz|, \quad \nu = 1, 2, \end{aligned}\right\} \tag{8.75.2}$$

и

$$\left.\begin{aligned} f_1(z) &= -\frac{1}{4}z^2 + z - \frac{1}{2}\ln z, \\ f_2(z) &= -\frac{1}{4}z^2 - z - \frac{1}{2}\ln z. \end{aligned}\right\} \tag{8.75.3}$$

Интегралы (8.75.2) берутся по верхней половине надлежаще выбранной кривой, симметричной относительно вещественной оси, на которой $|z|$ и $|z|^{-1}$ ограничены.

Условие $f_1'(z) = -\frac{z}{2} + 1 - (2z)^{-1} = 0$, определяющее точку перевала, дает $z = 1$, и мы замечаем, что $f_1''(1) = 0$, а $f_1'''(1) = -1$. Следовательно, это точка перевала другого характера, чем предыдущие.

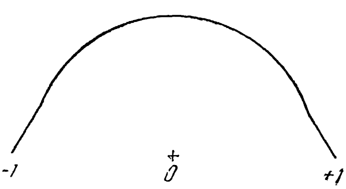

Рис. 9.

Будем интегрировать сначала вдоль отрезка

$$z = 1 + 6^{\frac{1}{3}} l_n^{-\frac{2}{3}} \varrho e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant n^\delta, \tag{8.75.4}$$

где δ — фиксированное положительное число, $\delta < \frac{1}{6}$, затем вдоль отрезка, симметричного к этому относительно мнимой оси, и, наконец, вдоль дуги окружности с центром в точке $z = 0$, которая соединяет концы упомянутых отрезков (рис. 9). При некоторых определенных постоянных $c_4, c_5, \ldots$, мы имеем

$$f_1(z) = f_1(1) + \frac{1}{3!}(z-1)^3 f_1'''(1) + \ldots =$$
$$= \frac{3}{4} - l_n^{-2}\varrho^3 + c_4 (l_n^{-\frac{2}{3}} \varrho)^4 + c_5 (l_n^{-\frac{2}{3}} \varrho)^5 + \ldots \tag{8.75.5}$$

Кроме того, если обозначим через r радиус дуги рассматриваемой окружности, то выражение

$$\Re\{f_1(re^{i\psi})\} = -\frac{1}{4} r^2 \cos 2\psi + r\cos\psi - \frac{1}{2}\ln r \tag{8.75.6}$$

будет убывающей функцией при $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$, так как $r\cos\psi < 1$. Теперь мы получаем следующее разложение:

$$G'' \doteq \exp\left\{\frac{3}{4}l_n^2 - 6^{-\frac{1}{3}} l_n^{\frac{2}{3}} t\right\} 6^{\frac{1}{3}} l_n^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{2\pi i}{3}} \times$$
$$\times \int_0^{n^\delta} \exp\left(-\varrho^3 - \varrho e^{\frac{2\pi i}{3}} t\right)\left\{1 + (c_1'\varrho + c_1''\varrho^4) l_n^{-\frac{2}{3}} + \right.$$
$$\left. + (c_2'\varrho^2 + c_2''\varrho^5 + c_2'''\varrho^8) l_n^{-\frac{4}{3}} + \ldots\right\} d\varrho. \quad (8.75.7)$$

Это — асимптотическое разложение в обычном смысле. В конечной точке $\varrho = n^\delta$ мы имеем для подынтегральной функции оценку $O[\exp(-cn^{3\delta})]$, $c > 0$, которая в то же время является оценкой интеграла по остальной части дуги. (Небольшое изменение окружности в окрестности точки $z = -1$ несущественно.) Таким образом,

$$G'' = \exp\left\{\frac{3}{4}l_n^2 - 6^{-\frac{1}{3}} l_n^{\frac{2}{3}} t\right\} \cdot 6^{\frac{1}{3}} l_n^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{2\pi i}{3}} \left\{\int_0^\infty \exp\left(-\varrho^3 - \varrho e^{\frac{2\pi i}{3}} t\right) d\varrho + O\left(l_n^{-\frac{2}{3}}\right)\right\}. \quad (8.75.8)$$

Таким же образом мы убеждаемся, что главная часть H'' соответствует маленькому отрезку

$$z = -1 + 6^{\frac{1}{3}} l_n^{-\frac{2}{3}} \varrho e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad (8.75.9)$$
$$0 \leqslant \varrho \leqslant n^\delta.$$

Мы находим, что

$$f_2(z) = f_2(-1) + \frac{1}{3!}(z+1)^3 f_2'''(-1) + \ldots = \frac{3}{4} - \frac{i\pi}{2} - l_n^{-2}\varrho^3 + \ldots \quad (8.75.10)$$

Поэтому

$$H'' = -e^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi i} e^{-\frac{i\pi}{2}} \exp\left\{\frac{3}{4}l_n^2 - \frac{i\pi}{2} l_n^2 - 6^{-\frac{1}{3}} l_n^{\frac{2}{3}} t\right\} \times$$
$$\times 6^{\frac{1}{3}} l_n^{-\frac{2}{3}} e^{\frac{\pi i}{3}} \left\{\int_0^\infty \exp\left(-\varrho^3 + \varrho e^{\frac{\pi i}{3}} t\right) d\varrho + O\left(l_n^{-\frac{2}{3}}\right)\right\}, \quad (8.75.11)$$

$$K'' = O\left(l_n^{-2}\right) l_n^{-\frac{2}{3}} \exp\left\{\frac{3}{4}l_n^2 - 6^{-\frac{1}{3}} l_n^{\frac{2}{3}} t\right\}. \quad (8.75.12)$$

Теперь легко видеть, что $H'' = -\overline{G''}$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка. Итак, мы имеем

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{L_n^{(\alpha)}(\xi^2)}{\Gamma(n+\alpha+1)} =$$
$$= \pi^{-\frac{3}{2}} 2^{\alpha+\frac{1}{2}} 6^{\frac{1}{3}} \xi^{-\alpha-\frac{1}{2}} l_n^{-2n-\alpha-\frac{7}{6}} \exp\left\{\frac{3}{4}l_n^2 - 6^{-\frac{1}{3}} l_n^{\frac{2}{3}} t\right\} \times$$
$$\times \left\{\Im\left[e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_0^\infty \exp\left(-\varrho^3 - \varrho e^{\frac{2\pi i}{3}} t\right) d\varrho\right] + O\left(l_n^{-\frac{2}{3}}\right)\right\}. \quad (8.75.13)$$

Мнимая часть в фигурных скобках есть функция Эйри $A(t)$ (см. задачу 2). Подставляя приближенные значения величин

$$4^n\Gamma(n+\alpha+1), \qquad l_n^{-2n-\alpha-\frac{7}{6}}$$

и

$$\xi^{-\alpha-\frac{1}{2}}=l_n^{-\alpha-\frac{1}{2}}\{1+O(l_n^{-\frac{4}{3}})\}$$

и замечая, что

$$\frac{1}{2}\xi^2=\frac{1}{2}l_n^2-6^{-\frac{1}{3}}l_n^{\frac{2}{3}}t+O(l_n^{-\frac{2}{3}}), \tag{8.75.14}$$

мы получаем

$$e^{-\frac{\xi^2}{2}}L_n^{(\alpha)}(\xi^2)=(-1)^n\pi^{-1}2^{-\alpha-\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}n^{-\frac{1}{3}}\{A(t)+O(l_n^{-\frac{2}{3}})\},$$

что совпадает с (8.22.9), но с менее точным остаточным членом $O(n^{-\frac{1}{3}})$.

(2) Непосредственное вычисление последующего члена в (8.75.5) дает

$$c_4=\frac{1}{4!}f_1^{(4)}(1)\,6^{\frac{4}{3}}e^{\frac{8\pi i}{3}}=\frac{1}{8}6^{\frac{4}{3}}e^{\frac{8\pi i}{3}}. \tag{8.75.15}$$

Кроме того, из (8.75.4) следует, что

$$z^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}6^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2\pi i}{3}}l_n^{-\frac{2}{3}}\varrho+O(l_n^{-\frac{4}{3}}\varrho^2). \tag{8.75.16}$$

Следовательно, выражение в фигурных скобках в (8.75.8) может быть переписано в виде

$$\int_0^\infty \exp(-\varrho^3-\varrho e^{\frac{2\pi i}{3}}t)\,d\varrho\left[1+\left(-\frac{1}{2}6^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\varrho+\frac{1}{8}6^{\frac{4}{3}}e^{\frac{8\pi i}{3}}\varrho^4\right)l_n^{-\frac{2}{3}}+O(l_n^{-\frac{4}{3}})\right].$$

Соответствующее уточнение (8.75.13) может быть получено подстановкой в фигурные скобки следующего выражения:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{J}\left[e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_0^\infty \exp(-\varrho^3-\varrho e^{\frac{2\pi i}{3}}t)\,d\varrho\right]-\\
&\quad-\frac{1}{2}6^{\frac{1}{3}}l_n^{-\frac{2}{3}}\mathfrak{J}\left[e^{\frac{4\pi i}{3}}\int_0^\infty \exp(-\varrho^3-\varrho e^{\frac{2\pi i}{3}}t)\,\varrho\,d\varrho\right]+\\
&\quad+\frac{1}{8}6^{\frac{4}{3}}l_n^{-\frac{2}{3}}\mathfrak{J}\left[e^{\frac{10\pi i}{3}}\int_0^\infty \exp(-\varrho^3-\varrho e^{\frac{2\pi i}{3}}t)\,\varrho^4\,d\varrho\right]+O(l_n^{-\frac{4}{3}})=\\
&\quad=A(t)+\left\{\frac{1}{2}6^{\frac{1}{3}}A'(t)+\frac{1}{8}6^{\frac{4}{3}}A^{(4)}(t)\right\}l_n^{-\frac{2}{3}}+O(l_n^{-\frac{4}{3}})=\\
&\quad=A(t)+\frac{1}{2}6^{-\frac{2}{3}}l_n^{-\frac{2}{3}}t^2A(t)+O(l_n^{-\frac{4}{3}}).
\end{aligned}$$

Здесь мы применили дифференциальное уравнение (1.81.2). Теперь мы можем (8.75.14) записать в более точной форме:

$$\frac{1}{2}\xi^2=\frac{1}{2}l_n^2-6^{-\frac{1}{3}}l_n^{\frac{2}{3}}t+\frac{1}{2}6^{-\frac{2}{3}}l_n^{-\frac{2}{3}}t^2,$$

следовательно,

$$e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \exp\left(-\frac{1}{2}l_n^2 + 6^{\frac{1}{3}}l_n^{\frac{2}{3}}t\right)\left\{1 - \frac{1}{2}6^{-\frac{1}{3}}l_n^{-\frac{2}{3}}t^2 + O\left(l_n^{-\frac{4}{3}}\right)\right\}.$$

Отсюда легко получается (8.22.9) с остаточным членом $O\left(l_n^{-\frac{4}{3}}\right) = O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)$.

(3) Для случая произвольного комплексного t нужно слегка видоизменить рассуждения п.(1).

Соответствующая асимптотическая формула для многочленов Эрмита следует непосредственно из (5.6.1).

8.8. Дифференцирование некоторых асимптотических формул

Дифференцирование асимптотической формулы по входящему в нее параметру в общем случае операция незаконная. Однако для некоторых формул, рассмотренных выше, допустимость такого дифференцирования легко устанавливается. Мы должны, конечно, соответствующим образом изменить остаточный член. Рассмотрим с этой точки зрения формулы (8.21.18) и (8.22.6), содержащие многочлены Якоби и Лагерра; мы воспользуемся при этом важными тождествами (4.21.7) и (5.1.14).

(1) Рассмотрим сначала формулу (8.21.18), которая содержит в себе формулу Дарбу (8.21.10). Мы докажем, что

$$\frac{d}{d\theta}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = n^{\frac{1}{2}}k(\theta)\{-\sin(N\theta+\gamma) + (n\sin\theta)^{-1}O(1)\}, \qquad (8.8.1)$$

$$\alpha > -1, \quad \beta > -1, \quad cn^{-1} \leqslant \theta \leqslant \pi - cn^{-1},$$

где применяются те же обозначения, что в (8.21.10). Отметим, что $k'(\theta) = k(\theta)(\sin\theta)^{-1}O(1)$.

Для доказательства перепишем левую часть (8.8.1) в виде

$$-\frac{1}{2}\sin\theta\,(n+\alpha+\beta+1)\,P_{n-1}^{(\alpha+1,\,\beta+1)}(\cos\theta) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sin\theta\,(n+\alpha+\beta+1)\,(n-1)^{-\frac{1}{2}}k(\theta)\times$$

$$\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\left\{\cos\left(N\theta+\gamma-\frac{\pi}{2}\right) + (n\sin\theta)^{-1}O(1)\right\},$$

откуда и вытекает утверждение. Ясно, что остаточный член в (8.8.1) может быть заменен через $\theta^{-\alpha-\frac{3}{2}}O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$ при $cn^{-1} \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$ и через $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$ при $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$. Из (8.8.1) мы выводим следующие важные формулы:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta_1) - P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta_2)}{\theta_1-\theta_2} = n^{-\frac{1}{2}}k(\theta_1)\frac{\cos(N\theta_1+\gamma)-\cos(N\theta_2+\gamma)}{\theta_1-\theta_2} + \\
&\qquad + \theta_1^{-\alpha-\frac{3}{2}}O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) + (\pi-\theta_2)^{-\beta-\frac{3}{2}}O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right), \\
&\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta_1) - P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta_2)}{\cos\theta_1-\cos\theta_2} = n^{-\frac{1}{2}}k(\theta_1)\frac{\cos(N\theta_1+\gamma)-\cos(N\theta_2+\gamma)}{\cos\theta_1-\cos\theta_2} + \\
&\qquad + \theta^{-\alpha-\frac{5}{2}}O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) + (\pi-\theta_2)^{-\beta-\frac{5}{2}}O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right), \\
&\alpha > -1, \quad \beta > -1, \quad cn^{-1} \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \pi - cn^{-1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.8.2)$$

Аналогичные формулы справедливы, если в правой части $k(\theta_1)$ заменить на $k(\theta_2)$.

Для доказательства мы применяем теорему о среднем значении к функции

$$\varphi(\theta) = P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) - n^{-\frac{1}{2}} k(\theta)\cos(N\theta+\gamma).$$

Мы имеем

$$\frac{\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)}{\theta_1-\theta_2} = \varphi'(\tau_1), \quad \frac{\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)}{\cos\theta_1-\cos\theta_2} = -\frac{\varphi'(\tau_2)}{\sin\tau_2}, \quad \left\{\begin{array}{l}\theta_1<\tau_1<\theta_2,\\ \theta_1<\tau_2<\theta_2.\end{array}\right.$$

Но $\varphi'(\tau_1) = n^{\frac{1}{2}} k(\tau_1)(n\sin\tau_1)^{-1} O(1)$, что равно $\theta_1^{-\alpha-\frac{3}{2}} O(n^{-\frac{1}{2}})$, если $\tau_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, и равно $(\pi-\theta_2)^{-\beta-\frac{3}{2}} O(n^{-\frac{1}{2}})$, если $\tau_1 \geqslant \frac{\pi}{2}$. Кроме того,

$$\frac{k(\theta_1)\cos(N\theta_1+\gamma)-k(\theta_2)\cos(N\theta_2+\gamma)}{\theta_1-\theta_2} =$$
$$= k(\theta_1)\frac{\cos(N\theta_1+\gamma)-\cos(N\theta_2+\gamma)}{\theta_1-\theta_2} + \cos(N\theta_2+\gamma)\frac{k(\theta_1)-k(\theta_2)}{\theta_1-\theta_2}.$$

Последняя дробь равна $k'(\tau) = \theta_1^{-\alpha-\frac{3}{2}} O(1) + (\pi-\theta_2)^{-\beta-\frac{3}{2}} O(1)$, $\theta_1<\tau<\theta_2$. Подобные же рассуждения приводят ко второй формуле (8.8.2).

Если θ_1 и θ_2 лежат на отрезке $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi-\varepsilon$, то остаточные члены в (8.8.2) имеют порядок $O(n^{-\frac{1}{2}})$.

(2) Теперь рассмотрим формулу (8.22.6), которая содержит в себе формулу Фейера (8.22.1). Мы напишем (8.22.6) в виде

$$\left.\begin{array}{c} L_n^{(\alpha)}(x) = k(x)\, n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \{\cos[2(nx)^{\frac{1}{2}}+\gamma] + (nx)^{-\frac{1}{2}} O(1)\}, \\ k(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, \quad \gamma = -\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}, \\ \alpha > -1, \quad cn^{-1} \leqslant x \leqslant \omega, \end{array}\right\} \qquad (8.8.3)$$

где c и ω — фиксированные положительные числа. С помощью (5.1.14) мы получим

$$\frac{d}{d(x^{\frac{1}{2}})} L_n^{(\alpha)}(x) = 2k(x)\, n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \{-\sin[2(nx)^{\frac{1}{2}}+\gamma] + (nx)^{-\frac{1}{2}} O(1)\}, \qquad (8.8.4)$$

если заметим, что

$$\frac{d}{d(x^{\frac{1}{2}})} k(x) = k(x)\, O(x^{-\frac{1}{2}})$$

и что $(n-1)^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} = O(n^{-\frac{1}{2}})$. Теорема о среднем значении в предположении, что x_1 и x_2 принадлежат отрезку $cn^{-1} \leqslant x \leqslant \omega$, дает нам равенство

$$\frac{L_n^{(\alpha)}(x_1)-L_n^{(\alpha)}(x_2)}{x_1^{\frac{1}{2}}-x_2^{\frac{1}{2}}} = k(x_1)\, n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \frac{\cos[2(nx_1)^{\frac{1}{2}}+\gamma]-\cos[2(nx_2)^{\frac{1}{2}}+\gamma]}{x_1^{\frac{1}{2}}-x_2^{\frac{1}{2}}} +$$
$$+ x_1^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} O(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}) + x_2^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} O(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}), \quad \alpha > -1. \qquad (8.8.5)$$

Доказательство подобно тому, которое было проведено в случае многочленов Якоби.

8.9. Применения; асимптотические свойства нулей многочленов Якоби и Лежандра

(1) Мы хотим отметить сначала некоторые следствия из формул (8.21.18) и (8.8.1), которые будут важны при исследовании интерполирования с узлами Якоби (глава XIV). Полагая $c=1$ в (8.21.8) и используя те же обозначения, что и выше, мы получаем следующий результат:

Теорема 8.9.1. *Пусть* $\alpha>-1$, $\beta>-1$ *и пусть* $0<\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_n<\pi$ *суть нули* $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$. Тогда

$$\theta_\nu=\frac{1}{n}[\nu\pi+O(1)], \tag{8.9.1}$$

где $O(1)$ *равномерно ограниченно для всех значений* $\nu=1, 2, \ldots, n$; $n=1, 2, \ldots$ *Кроме того,*

$$|P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(\cos\theta_\nu)|\sim\nu^{-\alpha-\frac{3}{2}}n^{\alpha+2},\quad 0<\theta_\nu\leqslant\frac{\pi}{2}, \tag{8.9.2}$$

в том смысле, что отношение этих выражений заключено между двумя положительными постоянными, зависящими только от α *и* β.

Пусть ϱ — фиксированное число, $0<\varrho<\frac{\pi}{2}$. Подставим в (8.21.18)

$$N\theta=\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi-\gamma\pm\varrho,\quad \nu>0,\quad \nu-\text{целое},\quad 0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{8.9.3}$$

Первый член правой части, т. е. $\pm(-1)^\nu n^{-\frac{1}{2}}k(\theta)\sin\varrho$, является главным членом, если только остаточный член $\theta^{-\alpha-\frac{3}{2}}O(n^{-\frac{3}{2}})$ меньше, чем $n^{-\frac{1}{2}}k(\theta)\sin\varrho$. Это имеет место, когда n и ν достаточно велики, $\nu\geqslant M=M(\alpha, \beta, \varrho)$. То же верно и для формулы (8.8.1). Если M выбрано надлежащим образом, то имеем также $\theta>0$. Кроме того, пусть $\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi-\gamma+\varrho\leqslant N\frac{\pi}{2}$, так что $\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Для значений (8.9.3) соответственно будем иметь

$$\operatorname{sign}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=(-1)^\nu \text{ и } (-1)^{\nu+1}. \tag{8.9.4}$$

Следовательно, $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$ имеет по крайней мере один нуль в пределах, даваемых значениями (8.9.3), и так как в силу (8.8.1) рассматриваемый многочлен будет монотонным в этом промежутке, то он имеет только один нуль в нем. Мы видим также, что на том же отрезке

$$\frac{d}{d\theta}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\sim n^{\frac{1}{2}}k(\theta)\sim n^{\frac{1}{2}}\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}, \tag{8.9.5}$$

а на дополнительных к $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ отрезках

$$|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)|\sim n^{-\frac{1}{2}}k(\theta)\sim n^{-\frac{1}{2}}\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}. \tag{8.9.6}$$

Утверждения (8.9.5) и (8.9.6) имеют тот смысл, что отношения рассматриваемых выражений заключены между двумя положительными постоянными равномерно по θ, когда θ лежит на указанных отрезках; здесь n достаточно велико, $\nu\geqslant M(\alpha, \beta, \varrho)$ и $\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi-\gamma+\varrho\leqslant N\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$ не имеет нулей на дополнительных отрезках.

На отрезке $0 \leqslant \theta \leqslant N^{-1}\left\{\left(M-\frac{1}{2}\right)\pi-\gamma-\varrho\right\}$ лежит конечное число нулей, которые имеют вид $n^{-1}(j_k+\varepsilon_n)$, где j_k означают положительные нули $J_\alpha(z)$, а $\varepsilon_n \to 0$ (см. (8.1.1) и (8.1.3)). Это доказывает (8.9.1) при $0 < \theta_\nu \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если примем во внимание формулу (4.1.3), то получим утверждение (8.9.1) полностью.

В дополнение мы находим, используя (8.9.5), что

$$|P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(\cos\theta_\nu)| \sim \theta_\nu^{-1} n^{\frac{1}{2}} \theta_\nu^{-\alpha-\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}} \theta_\nu^{-\alpha-\frac{3}{2}}, \tag{8.9.7}$$

если только выполняются указанные условия. Распространение на весь отрезок опять осуществляется с помощью (8.8.1). Комбинируя этот результат с (8.9.1), мы получаем (8.9.2).

Для нулей θ_ν, лежащих на данном отрезке $[a, b]$ внутри $[0, \pi]$, т. е. при $0 < a < b < \pi$, соотношение (8.9.1) может быть записано в более точной форме:

$$\theta_\nu = N^{-1}\left\{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi-\gamma+K\pi+\varepsilon_n\right\}, \tag{8.9.8}$$

где K — фиксированное целое число (зависящее только от α, β, a, b), а $\varepsilon_n \to 0$. В этом случае (8.9.2) принимает более простой вид:

$$|P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(\cos\theta_\nu)| \sim n^{\frac{1}{2}}. \tag{8.9.9}$$

(2) Аналогичные утверждения для многочленов Лагерра следуют из (8.22.6), (8.1.8) и (8.8.4). Мы применяем здесь те же обозначения, что и раньше.

Теорема 8.9.2. *Пусть $\alpha > -1$ и пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — нули $L_n^{(\alpha)}(x)$. Тогда для нулей x_ν, лежащих в $0 < x \leqslant \omega$, справедливо равенство*

$$2x_\nu^{\frac{1}{2}} = n^{-\frac{1}{2}}\{\nu\pi+O(1)\}. \tag{8.9.10}$$

Кроме того,

$$|L_n^{(\alpha)\prime}(x_\nu)| \sim x_\nu^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \sim \nu^{-\alpha-\frac{3}{2}} n^{\alpha+1}. \tag{8.9.11}$$

Пусть ϱ — фиксированное положительное число. Подставляя в (8.22.6)

$$2(nx)^{\frac{1}{2}} = \left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi-\gamma\pm\varrho, \quad \nu>0, \quad \nu - \text{целое}, \quad 0<x\leqslant\omega, \tag{8.9.12}$$

мы получим значения противоположных знаков, если только $\nu \geqslant M = M(\alpha, \varrho)$, а n достаточно велико. Затем из (8.8.4) мы видим, что многочлен $L_n^{(\alpha)}(x)$ изменяется монотонно между соответствующими значениями x, откуда следует, что $L_n^{(\alpha)}(x)$ имеет ровно один нуль в соответствующем промежутке. Учитывая (8.1.8), мы находим (8.9.10) подобно тому, как это делалось в (1). Из (8.8.4) и (8.1.8) при $0 < x_\nu \leqslant \omega$ снова имеем

$$|L_n^{(\alpha)\prime}(x_\nu)| \sim x_\nu^{-\frac{1}{2}} k(x_\nu)\, n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}.$$

Для нулей x_ν, лежащих на фиксированном положительном отрезке $\varepsilon \leqslant x_\nu \leqslant \omega$, $\varepsilon > 0$, мы получаем

$$|L_n^{(\alpha)\prime}(x_\nu)| \sim n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}. \tag{8.9.13}$$

(3) Пусть α — произвольное вещественное число. Предыдущие результаты (в особенности формула (8.22.11)) позволяют нам исследовать наибольший нуль многочлена $L_n^{(\alpha)}(x)$. Пусть $i_1<i_2<i_3<\ldots$ — нули функции Эйри $A(t)$; тогда единственными нулями многочлена $L_n^{(\alpha)}(x)$ в промежутке

$$x=4n+2\alpha+2-2\left(\frac{2n}{3}\right)^{\frac{1}{3}}t, \tag{8.9.14}$$

t вещественное и ограниченное, являются нули, соответствующие $t=i_\nu$. (Вблизи точки $t=i_\nu$ мы имеем ровно один нуль, если n достаточно велико; это следует из равномерной справедливости формулы (8.22.11) при ограниченных комплексных значениях t и теоремы Гурвица (1.91.3).) С другой стороны, верхняя граница нулей (6.31.7) принадлежит этому промежутку. Следовательно, если мы расположим нули многочлена $L_n^{(\alpha)}(x)$ в убывающем порядке, $x_1>x_2>\ldots>x_n$, то будем иметь

$$x_\nu=x_{\nu n}=4n+2\alpha+2-2\left(\frac{2n}{3}\right)^{\frac{1}{3}}(i_\nu+\varepsilon_n), \quad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0, \quad \nu \text{ фиксированно.} \tag{8.9.15}$$

Это тождественно с (6.32.9). Аналогичный результат справедлив для многочленов Эрмита, а именно (6.32.5). Он следует непосредственно из (8.22.14). Эта формула была доказана в § 6.32 методом Штурма.

8.91. Применения; асимптотические свойства максимумов многочленов Лагерра и Эрмита

Другим применением является исследование величины многочленов Лагерра при положительных x, а многочленов Эрмита — при вещественных x.

(1) Теорема 8.91.1. *Пусть α — произвольное вещественное число, $a>0$, $0<\eta<4$. При $n\to\infty$ справедливы следующие соотношения:*

$$\max e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha+1}{2}}\,|L_n^{(\alpha)}(x)|\sim\begin{cases} n^{\frac{\alpha}{2}}, & \text{если } a\leqslant x\leqslant(4-\eta)\,n,\\ n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{6}}, & \text{если } x\geqslant a,\end{cases} \tag{8.91.1}$$

$$\max e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\,|L_n^{(\alpha)}(x)|\sim\begin{cases} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \text{если } a\leqslant x\leqslant(4-\eta)\,n,\\ n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{12}}, & \text{если } x\geqslant a.\end{cases} \tag{8.91.2}$$

Максимумы берутся по отрезкам, указанным в правой части.

Эти асимптотические формулы играют важную роль при исследовании рядов по многочленам Лагерра (глава IX)[1].

---

[1]) Когбетлянц ([22], стр. 144; [23], стр. 39, 51—53) ошибочно утверждал справедливость оценки $L_n^{(\alpha)}(x)=O\left(e^{\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right)$, $x\geqslant\alpha$. Ошибка была допущена в [22], стр. 154, где применена некоторая оценка, справедливая лишь для $H_n(x)$ при $|x|<cn^{\frac{1}{2}}$ к произвольному $H_m(x)$, $m\leqslant n$. К сожалению, основные результаты статьи [23] (а частично и результаты работы [24]) были основаны на этом ошибочном утверждении.

При $n \to \infty$ возможна и более точная характеристика этих максимумов. Мы можем заменить $\sim$ на $\cong$, вводя в правые части соответственно следующие постоянные множители:

$$\left.\begin{array}{ll} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{\eta}-1\right)^{\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\pi}(12)^{\frac{1}{3}} \max A(t), \\ \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{\eta}\right)^{\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\pi}(18)^{\frac{1}{6}} \max A(t). \end{array}\right\} \tag{8.91.3}$$

Это легко вытекает из доказательства, которое следует ниже. Заметим, что эти множители не зависят от α и a. Первый максимум функции $A(t)$ положителен и фактически является наибольшим значением $|A(t)|$ при всех вещественных t (см. теорему 7.31.1 и (1.81.2)).

(2) Пусть $t=j_1$ — первая максимальная точка функции $A(t)$, $0<j_1<i_1$. Выберем два таких значения t', t'', что $0<t'<t''<j_1$, и обозначим значения x, соответствующие им по формуле (8.9.14), через x', x''. Следовательно, $x'>x''>x_{1n}$ при достаточно больших n. Тогда $A(t')<A(t'')$ и по (8.22.11) имеем

$$(-1)^n e^{-\frac{x'}{2}} L_n^{(\alpha)}(x') < (-1)^n e^{-\frac{x''}{2}} L_n^{(\alpha)}(x''). \tag{8.91.4}$$

Из этого вытекает, что обе точки x' и x'' не могут лежать слева от последней экстремальной точки функции $e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x)$, и значит, эта экстремальная точка лежит в промежутке (8.9.14).

Те же рассмотрения применимы к $e^{-\frac{x}{2}} x^{\lambda} L_n^{(\alpha)}(x)$, где λ — произвольное, но фиксированное вещественное число. В самом деле, $x^{\lambda}=(4n)^{\lambda}\{1+O(n^{-\frac{2}{3}})\}$. Таким образом, формула, аналогичная (8.22.11), справедлива для $e^{-\frac{x}{2}} x^{\lambda} L_n^{(\alpha)}(x)$ с дополнительным множителем $(4n)^{\lambda}$ в правой части.

(3) На отрезке $a \leqslant x \leqslant (4-\eta)n$ может быть применена формула (8.22.9). В силу соотношений

$$x^{\frac{\alpha+1}{2}} (\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}} (\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \sim n^{\frac{\alpha}{2}} (\operatorname{ctg}\varphi)^{\frac{1}{2}},$$

$$x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} (\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} = (\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}},$$

рассматриваемые максимумы соответственно будут $\sim n^{\frac{\alpha}{2}}$ и $n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}$.

Для того чтобы вычислить максимумы при $x \geqslant a$, используем теорему 7.6.2. Последовательности относительных максимумов функций

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha+1}{2}} |L_n^{(\alpha)}(x)| \quad \text{и} \quad e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} |L_n^{(\alpha)}(x)| \tag{8.91.5}$$

являются возрастающими при $x>x_0$, где x_0 — некоторое неотрицательное число, зависящее от α, а n достаточно велико. Следовательно, если учесть рассуждения п. (1), абсолютный максимум функций (8.91.5) при $x \geqslant a$ достигается на отрезке (8.91.4). Из (8.22.11) следует, что эти максимумы соответственно будут $\sim n^{\frac{\alpha+1}{2}} n^{-\frac{1}{3}}$ и $n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{3}}$. На отрезке $[a, x_0]$ нужно применить формулу Фейера (8.22.1). Этим доказательство полностью завершается.

(4) Можно легко доказать следующую более общую теорему:

Теорема 8.91.2. *Пусть α и λ — произвольные вещественные числа, $a>0$, $0<\eta<4$. При $n\to\infty$ справедливо соотношение*

$$\max e^{-\frac{x}{2}}x^{\lambda}\,|L_n^{(\alpha)}(x)|\sim n^{Q}, \tag{8.91.6}$$

где

$$Q=\begin{cases}\max\left(\lambda-\frac{1}{2},\ \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right), & \text{если } a\leqslant x\leqslant(4-\eta)\,n,\\ \max\left(\lambda-\frac{1}{3},\ \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right), & \text{если } x\geqslant a.\end{cases} \tag{8.91.7}$$

В первом случае, иными словами на отрезке $a\leqslant x\leqslant(4-\eta)n$, мы снова применяем (8.22.9). Мы имеем

$$x^{\lambda}(\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\sim n^{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)^{2\lambda-\alpha-\frac{1}{2}}(\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}}.$$

Это выражение достигает своего максимума на отрезке $\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon n^{-\frac{1}{2}}$ в точках $\varphi=\varepsilon$ или $\varphi=\frac{\pi}{2}-\varepsilon n^{-\frac{1}{2}}$ в зависимости от того, будет ли $\lambda\geqslant\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}$ или же $\lambda<\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}$. Максимум соответственно будет $\sim n^{\lambda-\frac{1}{2}}$ или $n^{\lambda-\frac{1}{2}}\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)^{2\lambda-\alpha-\frac{1}{2}}=n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}$. Это доказывает первую часть утверждения. Мы видим также, что максимум достигается вблизи $x=(4-\eta)\,n$, если $\lambda\geqslant\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}$, и вблизи $x=a$, если $\lambda<\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}$. На отрезке $(4-\eta)\,n\leqslant\leqslant x\leqslant 4n+O\left(n^{\frac{1}{3}}\right)$ мы имеем

$$\max e^{-\frac{x}{2}}x^{\lambda}\,|L_n^{(\alpha)}(x)|\sim n^{\lambda-\frac{\alpha+1}{2}}\max e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha+1}{2}}\,|L_n^{(\alpha)}(x)|.$$

Благодаря (8.91.1) это завершает доказательство второй части утверждения. Максимум достигается вблизи точки $x=4n$, если $\lambda-\frac{1}{3}>\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}$, и вблизи точки $x=a$, если $\lambda-\frac{1}{3}<\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}$.

(5) Применяя (5.6.1), или непосредственно из (8.22.12) и (8.22.14) мы получаем соответствующий результат для многочленов Эрмита.

Теорема 8.91.3. *Пусть λ — произвольное вещественное число, $a>0$, $0<\eta<2$. Тогда*

$$\max e^{-\frac{x^2}{2}}x^{\lambda}\,|H_n(x)|\sim(2^n n!)^{\frac{1}{2}}\,n^{S}, \tag{8.91.8}$$

где

$$S=\begin{cases}\max\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\right), & \text{если } a\leqslant|x|\leqslant[(2-\eta)\,n]^{\frac{1}{2}},\\ \max\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{12},\ -\frac{1}{4}\right), & \text{если } |x|\geqslant a;\ x \text{ вещественно}.\end{cases} \tag{8.91.9}$$

Мы имеем, в частности (теорема 7.6.3),

$$\max e^{-\frac{x^2}{2}}\,|H_n(x)|\cong(2^n n!)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{3}}\pi^{-\frac{3}{4}}n^{-\frac{1}{12}}\max A(t). \tag{8.91.10}$$

Здесь x и t принимают все вещественные значения (см. Хилле [1], стр. 436, (30)).

8.92. Дальнейшие результаты

(1) Г а т т е с к и ([1], [2]) исследовал различные асимптотические формулы, содержащие классические многочлены и их нули, и заменил обычно неопределенные постоянные, входящие в них под знаком O, численными значениями. В качестве иллюстрации приведем здесь следующее замечательное уточнение теоремы 8.21.6.

Мы имеем

$$P_n(\cos\theta) = (\theta/\sin\theta)^{\frac{1}{2}} J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\} + \sigma,$$

где

$$|\sigma| < 0{,}09\theta^2, \text{ если } 0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2n},$$

$$|\sigma| < 0{,}63\theta^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}}, \text{ если } \frac{\pi}{2n} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Следующая формула имеет еще более точный характер:

$$\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta) = J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\} - \frac{\theta}{24\left(n+\frac{1}{2}\right)} J_1\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\} + \sigma',$$

где

$$|\sigma'| < 0{,}03\theta^4, \text{ если } 0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2n},$$

$$|\sigma'| < 0{,}25\theta^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{3}{2}}, \text{ если } \frac{\pi}{2n} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Эти формулы могут быть использованы для оценки «первого» нуля с указанием численной постоянной в остаточном члене (см. также Т р и к о м и [4]).

(2) Дальнейшие сведения относительно асимптотического поведения многочленов Якоби и Лагерра и их нулей можно найти в следующих трудах: Б э й т м а н [1], том 2, глава 10, стр. 196—202; Т р и к о м и [5], стр. 219—224; Т о р н [1] и Э р д е й и и С у о н с о н [1]. См. также литературу, цитированную в этих трудах.

Недавно Э р д е й и [1] получил две новые асимптотические формулы для многочленов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$, справедливые при $x \leqslant a(4n+2\alpha+2)$ и при $x \geqslant b(4n+2\alpha+2)$, где a и b — фиксированные числа, $0 < b < a < 1$. Эти формулы содержат соответственно функции Бесселя и функции Эйри, они справедливы на вышеуказанных полупрямых, которые имеют общие точки и покрывают всю вещественную ось. Это весьма полный результат.

ГЛАВА IX

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯДЫ ПО КЛАССИЧЕСКИМ МНОГОЧЛЕНАМ

Формальное разложение функций в ряды по общим ортогональным многочленам было определено в § 3.1 (см. (3.1.3)); здесь мы сосредоточим наше внимание на разложении в ряды по классическим многочленам. В связи с этим мы остановимся на следующих проблемах:

Разложение аналитической функции в ряды по многочленам Якоби, Лагерра и Эрмита; исследование области сходимости.

Разложение «произвольной» функции в ряды по многочленам Якоби, Лагерра и Эрмита; исследование равносходимости и теоремы о суммируемости.

Основной интерес для нас представит вторая проблема; мы будем предполагать, что «произвольная» функция является функцией, подчиненной лишь некоторым условиям интегрируемости или непрерывности и условиям, содержащим существование некоторых интегралов.

Два ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

называются равносходящимися, если сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (u_n - v_n)$ или, более обще, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n - Av_n), \quad A \neq 0.$$

Мы будем стараться найти простые тригонометрические ряды (ряды Фурье), которые были бы равносходящимися с данным типом рядов по многочленам. Это приведет нас к необходимости свести исследование разложения по многочленам к исследованию тригонометрических рядов при очень общих условиях.

Среди различных методов суммирования нас будут прежде всего интересовать методы суммирования Чезаро. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ называется (C, k)-суммируемым, $k > -1$, к сумме s, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{(k)}}{C_n^{(k)}} = s,$$

где

$$(1-r)^{-k-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} r^n,$$

$$(1-r)^{-k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} r^n.$$

Очевидно, случай $k=0$ соответствует сходимости в обычном смысле. Если $k'>k$, то легко показать, что (C, k)-суммируемость влечет за собой (C, k')-суммируемость к той же сумме. Необходимым условием (C, k)-суммируемости, $k \geqslant 0$, является $u_n = O(n^k)$. Суммируемость некоторого порядка k в смысле Чезаро влечет за собой суммируемость в смысле Абеля, т. е. существование предела

$$\lim_{r \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n,$$

и притом к той же сумме.

9.1. Результаты

(1) Напишем формальное разложение функции $f(x)$ в ряд по многочленам Якоби (см. (4.3.3))

$$\left.\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \\ h_n^{(\alpha, \beta)} a_n &= \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{9.1.1}$$

Аналогично напишется разложение $f(x)$ в ряд по многочленам Лагерра (см. (5.1.1))

$$\left.\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(x), \\ \Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n} a_n &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^\alpha f(x) L_n^{(\alpha)}(x)\, dx, \end{aligned}\right\} \tag{9.1.2}$$

и в ряд по многочленам Эрмита (см. (5.5.1))

$$\left.\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x), \\ \pi^{\frac{1}{2}} 2^n n! a_n &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x)\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{9.1.3}$$

Во всех этих случаях предполагается, что $f(x)$ — измеримая функция и что все встречающиеся здесь интегралы существуют.

В дальнейшем мы будем считать в случае многочленов Якоби, что $\alpha > -1$, $\beta > -1$, и в случае многочленов Лагерра, что $\alpha > -1$.

(2) При этих допущениях могут быть установлены следующие результаты:

Теорема 9.1.1 (разложение аналитической функции в ряд по многочленам Якоби). *Пусть $f(x)$ — аналитическая функция на отрезке $[-1, +1]$. Рассмотрим разложение $f(x)$ в ряд по многочленам Якоби; этот ряд сходится внутри наибольшего эллипса с фокусами в точках ± 1, в котором $f(x)$ регулярна. Вне этого эллипса ряд расходится. Если применить обозначение* (9.1.1), *то полусумма R осей эллипса сходимости определяется формулой*

$$R = \varliminf_{n\to\infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}}. \tag{9.1.4}$$

Теорема 9.1.2 (теорема о равносходимости для ряда по многочленам Якоби внутри промежутка $(-1, +1)$). *Пусть $f(x)$ — измеримая в смысле Лебега функция на отрезке $[-1, +1]$ и пусть существуют интегралы*

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} |f(x)|\, dx, \\ &\int_{-1}^{+1} (1-x)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} (1+x)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} |f(x)|\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{9.1.5}$$

Если $s_n(x)$ означает n-ю частную сумму ряда по многочленам Якоби функции $f(x)$, а $\mathbf{s}_n(\cos\theta)$ означает n-ю частную сумму ряда Фурье (по косинусам) функции

$$(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} (1+\cos\theta)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}} f(\cos\theta), \tag{9.1.6}$$

тогда в промежутке $-1 < x < +1$

$$\lim_{n\to\infty} \{s_n(x) - (1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} (1+x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \mathbf{s}_n(x)\} = 0 \tag{9.1.7}$$

равномерно на отрезке $-1+\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$, ε — фиксированное положительное число, $\varepsilon < 1$.

Теорема 9.1.3 (теорема о суммируемости ряда по многочленам Якоби в концевых точках $x = \pm 1$). *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[-1, +1]$. Ряд по многочленам Якоби функции $f(x)$ (C, k)-суммируем в точке $x = +1$, если $k > \alpha + \frac{1}{2}$. Это, вообще говоря, неверно при $k = \alpha + \frac{1}{2}$. Аналогичное утверждение справедливо в точке $x = -1$, при этом α заменяется на β.*

Теорема 9.1.4 (обобщенная теорема о суммируемости ряда по многочленам Якоби). *Пусть $f(x)$ — измеримая в смысле Лебега функция на отрезке $[-1, +1]$, непрерывная в точке $x = +1$. Тогда, если существует интеграл*

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} |f(x)|\, dx, \tag{9.1.8}$$

то ряд по многочленам Якоби (C, k)-суммируем, $k > \alpha + \frac{1}{2}$, в точке $x = +1$, если только в случае

$$\beta > -\frac{1}{2}, \quad \alpha + \frac{1}{2} < k < \alpha + \beta + 1 \tag{9.1.9}$$

предположить, что выполняется следующее дополнительное «антиполярное» условие: существует интеграл

$$\int_{-1}^{0} (1+x)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} |f(x)|\, dx. \tag{9.1.10}$$

(При $k \geqslant \alpha + \beta + 1$ в антиполярном условии нет необходимости.) При $k \leqslant \alpha + \frac{1}{2}$ или при $k > \alpha + \frac{1}{2}$, но без антиполярного условия, утверждение неверно.

Теорема 9.1.5 (теорема о равносходимости для ряда по многочленам Лагерра при $x>0$). *Пусть $f(x)$ — измеримая в смысле Лебега функция на полуоси $[0, +\infty)$ и пусть существуют интегралы*

$$\int_0^1 x^{\alpha}|f(x)|\,dx, \quad \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\,|f(x)|\,dx. \tag{9.1.11}$$

Если выполнено условие

$$\int_n^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{13}{12}}\,|f(x)|\,dx = o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right), \quad n\to\infty, \tag{9.1.12}$$

и если $s_n(x)$ означает n-ю частную сумму ряда $f(x)$ по многочленам Лагерра, то при $x>0$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{s_n(x)-\frac{1}{\pi}\int_{x^{\frac{1}{2}}-\delta}^{x^{\frac{1}{2}}+\delta} f(\tau^2)\frac{\sin\left[2n^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-\tau\right)\right]}{x^{\frac{1}{2}}-\tau}\,d\tau\right\}=0, \tag{9.1.13}$$

где δ — фиксированное положительное число, $\delta<x^{\frac{1}{2}}$. Соотношение (9.1.13) *выполняется равномерно на положительном отрезке $\varepsilon\leqslant x\leqslant\omega$, $\delta<\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.*

Та же теорема о равносходимости (9.1.13) *справедлива, если существуют интегралы* (9.1.11), *а условие* (9.1.12) *заменено следующими:*

$$\left.\begin{aligned}&\int_1^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\,|f(x)|\,dx \ \textit{сходится},\\ &\int_n^{\infty} e^{-x}x^{\alpha-2}\,|f(x)|^2\,dx = o\left(n^{-\frac{3}{2}}\right),\quad n\to\infty.\end{aligned}\right\} \tag{9.1.14}$$

Теорема 9.1.6 (теорема о равносходимости для ряда по многочленам Эрмита при любых вещественных x). *Пусть $f(x)$ — измеримая в смысле Лебега функция на оси $(-\infty, +\infty)$ и пусть при любом $a>0$ существует интеграл*

$$\int_{-a}^{+a}|f(x)|\,dx. \tag{9.1.15}$$

Если выполнено условие

$$\int_n^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\frac{5}{3}}\{|f(x)|+|f(-x)|\}\,dx = o\left(n^{-1}\right), \quad n\to\infty, \tag{9.1.16}$$

и если $s_n(x)$ означает n-ю частную сумму ряда $f(x)$ по многочленам Эрмита, то при произвольном вещественном x

$$\lim_{n\to\infty}\left\{s_n(x)-\frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\frac{\sin\left[(2n)^{\frac{1}{2}}(x-t)\right]}{x-t}\,dt\right\}=0, \tag{9.1.17}$$

где δ — фиксированное положительное число. Кроме того, (9.1.17) *выполняется равномерно на любом конечном отрезке.*

Та же теорема о равносходимости (9.1.17) *справедлива, если существует интеграл* (9.1.15), *а условие* (9.1.16) *заменено следующими:*

$$\left.\begin{aligned} &\int_1^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} x^{-1}\{|f(x)|+|f(-x)|\}\,dx \ \text{ сходится}, \\ &\int_n^\infty e^{-x^2} x^{-4}\{|f(x)|^2+|f(-x)|^2\}\,dx = o(n^{-3}), \quad n\to\infty. \end{aligned}\right\} \tag{9.1.18}$$

Теорема 9.1.7 (теорема о суммируемости ряда по многочленам Лагерра в точке $x=0$). *Пусть* $f(x)$ — *измеримая в смысле Лебега функция на полуоси* $[0, +\infty)$, *непрерывная в точке* $x=0$. *Если существует интеграл*

$$\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}} x^{\alpha-k-\frac{1}{2}} |f(x)|\,dx, \tag{9.1.19}$$

то ряд по многочленам Лагерра функции $f(x)$ (C, k)-*суммируем к сумме* $f(0)$, *если только* $k>\alpha+\frac{1}{2}$. *Это утверждение неверно при* $k\leqslant\alpha+\frac{1}{2}$.

9.11. Замечания

(1) Теорема 9.1.1 хорошо известна в случае многочленов Чебышева и Лежандра[1]). Формула для определения эллипса сходимости (9.1.4) аналогична известной формуле Коши — Адамара.

(2) Важность теоремы 9.1.2 состоит в том, что она позволяет применять к задачам сходимости и суммируемости рядов по многочленам Якоби результаты, полученные для аналогичных задач в классической теории обыкновенных рядов Фурье. Эта теорема была доказана в частном случае $\alpha=\beta=0$ (ряды по многочленам Лежандра) Хааром [2] и Юнгом [1] с условиями относительно $f(x)$, несколько отличными от тех, которые получаются из нашей общей теоремы при $\alpha=\beta=0$. Юнг рассматривал также ряды по многочленам Лежандра, которые не являются рядами Фурье в обычном смысле по этим многочленам. Доказательство теоремы 9.1.2, данное в § 9.3, принадлежит Сегё ([17], стр. 88—92). Обрешков [2] рассмотрел ту же проблему, применяя в качестве основного инструмента исследования формулу Дарбу в уточненной форме (8.21.18).

Теоремы о суммируемости во внутренних точках были ранее установлены (в случае ультрасферических многочленов) Адамовым [2], а также (в случае ультрасферических многочленов и в общем случае многочленов Якоби) Когбетлянцем [1], [2], [3], [7], [18], [19]. Относительно свойств этих разложений, аналогичных свойствам римановой теории тригонометрических рядов (в частности, теорема единственности), см. Когбетлянц [6], [20] и Зигмунд [1].

При рассмотрении рядов по многочленам Якоби мы должны требовать существования первого из интегралов (9.1.5). Применяя очевидное обозначение, мы легко получаем, что

$$\int_0^1 (1-x)^\alpha |f(x)|\,dx \rightleftarrows \int_0^1 (1-x)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} |f(x)|\,dx \tag{9.11.1}$$

---

[1]) Случай многочленов Лежандра обычно приписывают Ф. Нейману (см. Уиттекер и Ватсон [1], часть II, § 15.41).

в зависимости от того, будет ли $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$ или же $-1<\alpha\leqslant -\frac{1}{2}$. Тот факт, что условие существования второго интеграла не может быть улучшено при $\alpha > -\frac{1}{2}$, вытекает из рассмотрения специальной функции $f(x)=(1-x)^{\mu}$ при $\mu=-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}$ (см. § 9.3, (4)). Существование обоих интегралов (9.1.5) вытекает из существования интеграла

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f^2(x)\,dx. \tag{9.11.2}$$

Вместо функции (9.1.6) может быть рассмотрена функция

$$(1-\cos\theta)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+\cos\theta)^{\beta+\frac{1}{2}} f(\cos\theta) \tag{9.11.3}$$

(см. Сегё [17]). Совершенно очевидно изменение, которое при этом должно быть внесено в (9.1.7). Обе функции (9.1.6) и (9.11.3) интегрируемы на отрезке $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$. Разность (9.1.7) может быть записана в виде

$$\int_{-1}^{+1} f(t)\,[(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}K_n^{(\alpha,\,\beta)}(x,\ t)-$$
$$-(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}K_n^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(x,\ t)]\,dt; \tag{9.11.4}$$

здесь использовано обозначение (4.5.2). Возможно также сравнение $s_n(x)=s_n(\alpha,\ \beta;\ x)$ с $s_n(\gamma,\ \delta;\ x)$, где γ и δ произвольны.

(3) По поводу теорем 9.1.3 и 9.1.4 имеется обширная литература. Гронуолл ([1], [2]) исследовал частный случай $\alpha=\beta=0$ (ряд по многочленам Лежандра). Его доказательства значительно были упрощены Люкачем [2], Хильбом [1] и Фейером [8]. Случай ультрасферических многочленов был рассмотрен весьма подробно Когбетлянцем ([2], [4], [19], [21], стр. 70—73; см. также Обрешков [1]). Метод, применяемый в §§ 9.4—9.42, является новым и сравнительно простым. Он основан на специальном соотношении между многочленом Якоби $P_n^{(\alpha+k+1,\,\beta)}(x)$ и ядром k-х чезаровских средних ряда по многочленам Якоби с параметрами α и β. (В случае многочленов Лагерра соответствующее соотношение тривиально (см. § 9.6).) Случай ряда по многочленам Лежандра (если мы рассматриваем этот ряд в точке $x=+1$ на конце отрезка) эквивалентен ряду Лапласа; отсюда термин «антиполярное» условие. В точке $x=-1$ на другом конце отрезка справедлива аналогичная теорема; в этом случае индекс суммируемости k должен быть больше, чем $\beta+\frac{1}{2}$, а «антиполярное» условие должно выполняться вблизи точки $x=+1$.

Теорема 9.1.3 обеспечивает сходимость ряда по многочленам Якоби в точке $x=+1$ в конце отрезка, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1,\ +1]$ и $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ (см. также Рау [1]).

В случае рядов по многочленам Лежандра *ядра Чезаро второго порядка неотрицательны* (Фейер [4]). Этот факт, разумеется, имеет важные следствия. По поводу аналогичных теорем для разложений по ультрасферическим многочленам см. Когбетлянц [19].

В частном случае рядов по многочленам Лежандра Когбетлянц [16] указал важные уточнения теорем 9.1.3 и 9.1.4. Между прочим, он исследовал C-суммирование надлежащего порядка в точках $x=\pm 1$

в конце отрезка в случае, когда $f(x)$ стремится к бесконечности с известной скоростью в «антиполюсе».

По поводу некоторых старых (весьма сложных) результатов о сходимости рядов по ультрасферическим многочленам в концевых точках $x = \pm 1$ см. Адамов [2].

(4) Проблема равносходимости для рядов по многочленам Лагерра и Эрмита была исследована (для первого из них только в специальном случае $\alpha=0$) Ротахом [1] и (в общем случае) независимо от него Сегё [10]. Для частного случая многочленов Лагерра при $\alpha=0$ условия Сегё более ограничительны, чем условия Ротаха, это же относится к случаю многочленов Эрмита. Условия, формулированные в § 9.1, однако, имеют еще несколько более общий характер, чем условия Ротаха[1]).

Тот факт, что требование существования второго интеграла (9.1.11) не может быть ослаблено, можно обнаружить рассмотрением ряда по многочленам Лагерра для функции $f(x)=x^{\mu}$, $\mu=-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}$ (§ 9.5, (6)).

Ни одна из двух последовательностей достаточных условий, высказанных в теореме 9.1.5, не содержит другой. В самом деле, функция $f(x)=e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}}$ удовлетворяет условиям (9.1.14), но не удовлетворяет условию (9.1.12). С другой стороны, если мы положим

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } m^2 \leqslant x < m^2+1, \; m=1,\,2,\,\ldots, \\ 0 \text{ в остальных промежутках,}\end{cases} \tag{9.11.5}$$

то (9.1.12) удовлетворяется, но не удовлетворяется вторая часть условий (9.1.14).

Ясно, что условие (9.1.12) включает в себя сходимость интеграла, стоящего в левой части. Из условия (9.1.12) следует первая часть (9.1.14). Действительно, если мы положим

$$u(x)=\int_x^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{13}{12}}\,|f(t)|\,dt, \tag{9.11.6}$$

то из (1.4.4) найдем, что интеграл

$$\int_1^{\omega} x^{\frac{1}{3}}\,du(x)=\omega^{\frac{1}{3}}u(\omega)-u(1)-\frac{1}{3}\int_1^{\omega} x^{-\frac{2}{3}}u(x)\,dx \tag{9.11.7}$$

ограничен при $\omega\to\infty$, так как $u(x)=o(x^{-\frac{1}{2}})$.

Достаточным условием для того, чтобы выполнялось (9.1.13), является

$$f(x)=O(e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}-\delta}), \quad \delta>0, \quad x\to\infty, \tag{9.11.8}$$

тогда условия (9.1.14) удовлетворены. С другой стороны, для функции

---

[1]) Второе условие Ротаха b_2' на стр. 8 делает первую часть условия b_1' излишней. Первая последовательность его условий эквивалентна (9.1.11) и (9.1.14) (при $\alpha=0$), в то время как вторая последовательность его условий более ограничительна, чем (9.1.11) и (9.1.12). В теореме на стр. 6 второе условие b_2 должно быть исправлено следующим образом: «$\int_1^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4}}\,|f(\pm z)|\,z^{\frac{3}{2}}\,dz$ существует». (Автор обязан этим замечанием письменному сообщению順 Планшереля.) Это, разумеется, содержит b_1. Первая последовательность условий более ограничительна, чем (9.1.18), а вторая последовательность — более ограничительна, чем (9.1.16). (Обозначения Ротаха отличаются от наших; мы должны положить $z=2^{\frac{1}{2}}x$.)

$f(x)=e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}$ выполняются условия (9.1.11), но не выполняются условия (9.1.12) и (9.1.14), и (как будет показано в § 9.5, (7)) ряд по многочленам Лагерра расходится при $x>0$.

Достаточным условием для того, чтобы выполнялось (9.1.17), является

$$f(x)=O(e^{\frac{x^2}{2}}|x|^{-\delta}), \quad \delta>0, \quad x\to\infty. \tag{9.11.9}$$

Тогда условие (9.1.18) удовлетворено. Аналогичным контрпримером здесь будет $f(x)=xe^{\frac{x^2}{2}}$.

Из теорем 9.1.5 и 9.1.6 следуют обычные теоремы о сходимости и суммируемости рядов по многочленам Лагерра и Эрмита. В самом деле, интегралы, встречающиеся в (9.1.13) и (9.1.17), являются по существу частными суммами порядка $[n^{\frac{1}{2}}]$ ряда Фурье (см. (1.6.4)).

Еще в 1907 г. Адамов [2] получил теорему о сходимости ряда по многочленам Эрмита. По этому вопросу имеется обширная дальнейшая литература; Е. Р. Нейман [1], Гальбрен [1], Вигерт [1], Хилле [1], [2], [3], Крамер [1], Успенский [1], Кораус [1], [2], Стон [1], Мюнц [1] и Коваллик [1] дали непосредственное исследование разложения «произвольных» функций в ряды по многочленам Лагерра и Эрмита. (По поводу разложения аналитической функции в ряд по многочленам Эрмита см. Ватсон [1] (первая статья). Эти авторы получили результаты о сходимости и суммируемости, но не рассматривали теорем о равносходимости, за исключением Корауса (цитированные статьи). Условия в точке $x=\infty$, которые накладывали все эти авторы, более ограничительны, чем соответствующие условия наших теорем. Например, в случае разложения в ряд по многочленам Лагерра Кораус требовал сходимости интеграла

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}|f(x)|\,dx; \tag{9.11.10}$$

для разложения по многочленам Эрмита Коваллик и Успенский требовали соответственно сходимости интегралов

$$\int_1^\infty e^{-x^2}|f(\pm x)|^2\,dx, \quad \int_1^\infty e^{-x^2}x\,|f(\pm x)|^2\,dx. \tag{9.11.11}$$

Наконец, отметим более ранние исследования рядов по многочленам Лагерра и Эрмита посредством теории интегральных уравнений (Миллер-Лебедева [1], Вейль [1]).

По поводу работ Когбетлянца [22], [23], [24] см. сноску в § 8.91. Относительно теоремы 9.1.7 см. Сегё [10] и Когбетлянц [10]. Условие (9.1.19) выполнено, если

$$f(x)=O(e^{\frac{x}{2}}x^{k-\alpha-\frac{2}{3}-\delta}), \quad \delta>0, \quad x\to+\infty. \tag{9.11.12}$$

С другой стороны, ряд не будет (C, k)-суммируем для функции $f(x)=e^{\frac{x}{2}}x^{k-\alpha}$, $k>\alpha+\frac{1}{2}$ (см. § 9.6, (3)).

Явление Гиббса в случае разложений по многочленам Эрмита было изучено Жакобом [2].

9.2. Разложение аналитической функции в ряды по многочленам Якоби, Лагерра и Эрмита

(1) Теорема 9.2.1. *Пусть* $\alpha > -1$, $\beta > -1$ *и пусть* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $h_n^{(\alpha,\beta)}$ *имеют тот же смысл, что в главе* IV (*см.* § 4.61 *и* (4.3.3)). *Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{h_n^{(\alpha,\beta)}\}^{-1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,Q_n^{(\alpha,\beta)}(y)=\frac{1}{2}\,\frac{(y-1)^{-\alpha}(y+1)^{-\beta}}{y-x}, \tag{9.2.1}$$

где x лежит внутри, а y — вне произвольного эллипса с фокусами в точках ± 1. Этот ряд сходится равномерно, если x и y принадлежат замкнутым множествам, одно из которых соответственно лежит внутри, а другое — вне рассматриваемого эллипса.

Функции $(y-1)^{\alpha}(y+1)^{\beta}Q_n^{(\alpha,\beta)}(y)$ однозначны и регулярны в комплексной y-плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-1,+1]$.

Эта важная формула хорошо известна в частном случае $\alpha=\beta=0$ (см. Гейне [3], стр. 78). Общая формула получается из тождества (4.62.19), в котором n устремляется к бесконечности. Положим $x=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$, $y=\frac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1})$, $1<|z|<|\zeta|$. Используя (8.23.1) и (8.23.2), мы находим остаточный член в (4.62.19):

$$\frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2}\,\frac{\Gamma(n+2)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}\,\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\,Q_n^{(\alpha,\beta)}(y)-P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y)}{x-y}=$$
$$=O(n)\,O[(|z|+\varepsilon)^n]\,O[(|\zeta|^{-1}+\varepsilon)^n] \tag{9.2.2}$$

при $n\to\infty$ и произвольно малом $\varepsilon>0$. Он стремится к нулю при $n\to\infty$ и достаточно малом ε.

(2) Пусть теперь $f(x)$ регулярна, когда x лежит внутри эллипса $|z|=R>1$. Умножая (9.2.1) на

$$\frac{1}{\pi i}(y-1)^{\alpha}(y+1)^{\beta}f(y)$$

и интегрируя по эллипсу $|\zeta|=R-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\frac{R}{2}$, мы получаем разложение $f(x)$ в ряд по многочленам Якоби, который равномерно сходится при $|z|\leqslant R-2\varepsilon$. Простое почленное интегрирование вдоль отрезка $[-1,+1]$ позволяет отождествить полученное разложение с разложением (9.1.1), а для коэффициентов a_n мы получаем представление

$$a_n=\frac{1}{\pi i h_n^{(\alpha,\beta)}}\int(y-1)^{\alpha}(y+1)^{\beta}Q_n^{(\alpha,\beta)}(y)\,f(y)\,dy,\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{9.2.3}$$

где интегрирование ведется по эллипсу $|\zeta|=R-\varepsilon$ в положительном направлении.

(3) Формула (8.23.1) позволяет исследовать формальный ряд

$$a_0P_0^{(\alpha,\beta)}(x)+a_1P_1^{(\alpha,\beta)}(x)+\ldots+a_nP_n^{(\alpha,\beta)}(x)+\ldots, \tag{9.2.4}$$

который может и не быть рядом Фурье в обычном смысле. Пусть R имеет тот же смысл, что и в (9.1.4); допустим, что $R>1$. Тогда ряд (9.2.4) имеет областью сходимости эллипс, фигурирующий в теореме 9.1.1. Внутри этого эллипса рассматриваемый ряд представляет аналитическую функцию.

(4) Ряды по функциям Якоби второго рода, которые аналогичны рядам Лорана, могут также быть легко рассмотрены.

Теорема 9.2.2. *Пусть* $\alpha > -1$, $\beta > -1$ *и пусть* $F(y)$ *регулярна в точке* $y = \infty$, *причем* $F(\infty) = 0$. *Тогда*

$$(y-1)^{-\alpha}(y+1)^{-\beta} F(y) = b_0 Q_0^{(\alpha, \beta)}(y) + b_1 Q_1^{(\alpha, \beta)}(y) + \ldots + b_n Q_n^{(\alpha, \beta)}(y) + \ldots \tag{9.2.5}$$

Этот ряд сходится во внешности наименьшего эллипса с фокусами в точках ± 1, *вне которого* $F(y)$ *регулярна. Внутри указанного эллипса ряд расходится. Сумма полуосей этого эллипса определяется формулой*

$$\varrho = \overline{\lim_{n \to \infty}} |b_n|^{\frac{1}{n}}. \tag{9.2.6}$$

Очевидно, $\varrho \geqslant 1$. В случае $\varrho = 1$ формулировка нуждается в некотором изменении. Коэффициенты ряда (9.2.5) могут быть представлены следующим образом:

$$b_n = \frac{1}{\pi i h_n^{(\alpha, \beta)}} \int F(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9.2.7}$$

где интегрирование ведется в положительном направлении по эллипсу $|z| = \varrho + \varepsilon$, $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, $\varepsilon > 0$.

Можно также рассматривать формальные ряды по функциям Якоби второго рода.

(5) Граница области сходимости ряда по многочленам Лагерра

$$a_0 L_0^{(\alpha)}(x) + a_1 L_1^{(\alpha)}(x) + \ldots + a_n L_n^{(\alpha)}(x) + \ldots \tag{9.2.8}$$

характеризуется условием $\Re\{(-x)^{\frac{1}{2}}\} = \mathrm{const}$. Следовательно, эта граница является параболой с фокусом в начале координат. Ряд сходится внутри этой параболы и расходится вне ее. Имеет место формула, аналогичная формуле Коши — Адамара. Доказательство основано на соотношении (8.23.3).

Для ряда по многочленам Эрмита

$$a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + \ldots + a_n H_n(x) + \ldots \tag{9.2.9}$$

соответствующим условием будет $|\Im x| = \mathrm{const}$, которое определяет полосу с вещественной осью в качестве оси симметрии (см. (8.23.4)). Ряд сходится внутри и расходится вне этой полосы, и в этом случае справедлива формула, аналогичная формуле Коши — Адамара.

Относительно разложения в ряд по многочленам Эрмита данной аналитической функции, регулярной в полосе $|\Im x| \leqslant a$, $a > 0$, см. Ватсон [1] (первая статья).

9.3. Доказательство теоремы 9.1.2

(1) Заменим сначала $f(x)$ многочленом $\varrho(x)$. Тогда $s_n(x) = \varrho(x)$ при n, превосходящем степень многочлена $\varrho(x)$. Далее,

$$(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} s_n(x) \to \varrho(x) \text{ при } n \to \infty$$

на основании элементарных признаков сходимости рядов Фурье (см., например, Зигмунд [2], § 2.6). Интеграл

$$\int_{-1}^{+1} (1-t)^a (1+t)^b \, |f(t)-\varrho(t)| \, dt, \qquad \left| \begin{aligned} a &= \min\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right), \\ b &= \min\left(\beta, \frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}\right), \end{aligned} \right. \tag{9.3.1}$$

может быть сделан сколь угодно малым, если надлежащим образом выбрать $\varrho(x)$ (см. теорему 1.5.2). Поэтому достаточно доказать, что разность (9.11.4) допускает оценку

$$O(1) \int_{-1}^{+1} (1-t)^a (1+t)^b \, |f(t)| \, dt + o(1), \quad n \to \infty, \tag{9.3.2}$$

причем $O(1)$ и $o(1)$ равномерны по x на отрезке $-1+\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$ и $O(1)$ не зависит от $f(x)$.

(2) В дальнейших рассуждениях мы используем формулу Дарбу (8.21.10) для $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$, а также вторую формулу (8.8.2) для отношения разностей. В последнем случае мы будем предполагать, что θ_1 и θ_2 лежат на отрезке, находящемся целиком внутри отрезка $[0, \pi]$.

В соответствии с (4.5.2) мы имеем

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(x, t) = \lambda_n \left\{ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t) - P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{t-x} - P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t) - P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{t-x} \right\}, \tag{9.3.3}$$

где

$$\lambda_n = 2^{-\alpha-\beta-1}\{n + O(1)\}. \tag{9.3.4}$$

Полагая $x = \cos\theta$, $t = \cos\varphi$ и используя обозначения (8.21.10) при $-1 < x < +1$, $-1 < t < +1$, мы находим

$$\begin{aligned} K_n^{(\alpha,\beta)}(x, t) &= 2^{-\alpha-\beta-1} k(\theta) k(\varphi) \left\{ \cos(N\theta+\gamma) \frac{\cos[(N+1)\varphi+\gamma] - \cos[(N+1)\theta+\gamma]}{\cos\varphi - \cos\theta} - \right. \\ &\quad \left. - \cos[(N+1)\theta+\gamma] \frac{\cos(N\varphi+\gamma) - \cos(N\theta+\gamma)}{\cos\varphi-\cos\theta} + O(1) \right\} = \\ &= 2^{-\alpha-\beta-2} k(\theta) k(\varphi) \left\{ \frac{\cos[N(\varphi+\theta)+\varphi+2\gamma] + \cos[N(\varphi-\theta)+\varphi]}{\cos\varphi-\cos\theta} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos[N(\varphi+\theta)+\theta+2\gamma] + \cos[N(\varphi-\theta)-\theta]}{\cos\varphi-\cos\theta} + O(1) \right\} = \\ &= 2^{-\alpha-\beta-2} k(\theta) k(\varphi) \left\{ \frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)(\varphi+\theta)+2\gamma\right]}{\sin\frac{\varphi+\theta}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\theta)\right]}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}} + O(1) \right\}. \end{aligned} \tag{9.3.5}$$

Допустим теперь, что $-1+\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-1+\frac{\varepsilon}{2}}^{1-\frac{\varepsilon}{2}} &(1-t)^\alpha (1+t)^\beta f(t) K_n^{(\alpha,\beta)}(x, t) \, dt = \\ &= \int_\eta^{\pi-\eta} 2^{\alpha+\beta+1} \left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{2\beta+1} f(\cos\varphi) K_n^{(\alpha,\beta)}(x, t) \, d\varphi, \end{aligned}$$

где $\cos\eta = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Затем заменим $K_n^{(\alpha,\beta)}(x, t)$ через (9.3.5). По лемме Римана (Зигмунд [2], § 2.211) при $n \to \infty$ мы получим в результате

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{\pi-\eta} f(\cos\varphi)\frac{\sin(2n+1)\frac{\varphi-\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\,d\varphi + O(1)\int_{-1+\frac{\varepsilon}{2}}^{1-\frac{\varepsilon}{2}} |f(t)|\,dt + o(1). \tag{9.3.6}$$

Оценка $O(1)$ не зависит от $f(x)$. Если мы заменим α и β через $-\frac{1}{2}$, а $f(t)$ через $(1-t)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}f(t)$, то повторное применение леммы Римана дает следующий результат:

$$\int_{-1+\frac{\varepsilon}{2}}^{1-\frac{\varepsilon}{2}} (1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} f(t)\,K_n^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(x, t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{\pi-\eta} (1-\cos\varphi)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+\cos\varphi)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}} f(\cos\varphi)\frac{\sin(2n+1)\frac{\varphi-\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\,d\varphi +$$

$$+ O(1)\int_{-1+\frac{\varepsilon}{2}}^{1-\frac{\varepsilon}{2}} |f(t)|\,dt + o(1) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(1-\cos\theta)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+\cos\theta)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}\int_{\eta}^{\pi-\eta} f(\cos\varphi)\frac{\sin(2n+1)\frac{\varphi-\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\,d\varphi +$$

$$+ O(1)\int_{-1+\frac{\varepsilon}{2}}^{1-\frac{\varepsilon}{2}} |f(t)|\,dt + o(1). \tag{9.3.7}$$

Следовательно, часть (9.11.4), соответствующая отрезку $-1+\frac{\varepsilon}{2} \leqslant t \leqslant 1-\frac{\varepsilon}{2}$, имеет вид (9.3.2).

(3) Рассмотрим теперь выражения

$$O(n)\,|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^{1}\left|\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t)-P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{t-x}\right|(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}|f(t)|\,dt, \tag{9.3.8}$$

$$O(n)\,\left|P_n^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(x)\right| \times$$

$$\times \int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^{1}\left|\frac{P_{n+1}^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(t)-P_{n+1}^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(x)}{t-x}\right|(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}|f(t)|\,dt \tag{9.3.9}$$

и соответствующие интегралы, взятые по отрезку $-1 \leqslant t \leqslant -1+\frac{\varepsilon}{2}$.

Интеграл (9.3.8) равен

$$O(n)\,O(n^{-\frac{1}{2}})\int\limits_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^{1}\{|P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t)|+|P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)|\}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}|f(t)|\,dt=$$

$$=O(n)\,O(n^{-\frac{1}{2}})\int\limits_{0}^{\eta}|P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(\cos\varphi)|\,\varphi^{2\alpha+1}|f(\cos\varphi)|\,d\varphi+$$

$$+O(n)\,O(n^{-\frac{1}{2}})\,O(n^{-\frac{1}{2}})\int\limits_{-1}^{+1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}|f(t)|\,dt.$$

Из (7.32.6) и (7.32.7) следует, что при $\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$ первый член правой части будет равен

$$O(1)\int\limits_{0}^{\eta}\varphi^{-\alpha-\frac{1}{2}}\varphi^{2\alpha+1}|f(\cos\varphi)|\,d\varphi=O(1)\int\limits_{-1}^{+1}(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}|f(t)|\,dt,$$

а при $\alpha\leqslant-\frac{1}{2}$ будет равен

$$O(1)\int\limits_{0}^{\eta}\varphi^{2\alpha+1}|f(\cos\varphi)|\,d\varphi=O(1)\int\limits_{-1}^{+1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}|f(t)|\,dt.$$

Благодаря (4.1.7) выражение (9.3.9) равно

$$O(n)\,O(n^{-\frac{1}{2}})\,O(n^{-\frac{1}{2}})\int\limits_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^{1}(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}|f(t)|\,dt=$$

$$=O(1)\int\limits_{-1}^{+1}(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}|f(t)|\,dt.$$

Аналогично рассматриваются интегралы, соответствующие отрезку $-1\leqslant t\leqslant-1+\frac{\varepsilon}{2}$.

(4) Наконец, рассмотрим ряд по многочленам Якоби для функции[1])

$$f(x)=(1-x)^{\mu} \tag{9.3.10}$$

и покажем, что при надлежащем выборе значений μ первый интеграл в (9.1.5) существует, а второй не существует. Кроме того, ряд по многочленам Якоби будет расходящимся в промежутке $-1<x<+1$. Здесь $\alpha>-\frac{1}{2}$.

С этой целью отметим, что в соответствии с (4.3.1) и (4.3.3) при $n\to\infty$ справедливо соотношение

$$\{h_n^{(\alpha,\beta)}\}^{-1}\int\limits_{-1}^{+1}(1-t)^{\mu+\alpha}(1+t)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\,dt=$$

$$=\frac{(-1)^n\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{h_n^{(\alpha,\beta)}2^n n!}\int\limits_{-1}^{+1}(1-t)^{n+}\ (1+t)^{n+\beta}(1-t)^{\mu-n}\,dt\cong$$

$$\cong2^{-\alpha-\beta}n\,\frac{n^{-\mu-1}}{2^n\Gamma(-\mu)}\,2^{n+\mu+\alpha+\beta+1}n^{-\mu-\alpha-1}\Gamma(\mu+\alpha+1)\sim n^{-2\mu-\alpha-1}\quad\text{при } n\to\infty. \tag{9.3.11}$$

---

[1]) В частном случае $\alpha=\beta$ см. Когбетлянц [19], стр. 184, (62).

Если мы предположим, что $\mu+\alpha>-1$, $\mu\neq 0, 1, 2, \ldots$, и допустим, что $0<\theta<\pi$, то общий член ряда по многочленам Якоби будет порядка $n^{-2\mu-\alpha-\frac{3}{2}}\cos(N\theta+\gamma)$. Требуемыми значениями μ являются те, которые лежат в интервале

$$-1-\alpha<\mu\leqslant-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}. \tag{9.3.12}$$

9.4. Доказательство теоремы 9.1.3; предварительные формулы

(1) Выведем сперва следующее важное тождество:

$$P_n^{(\alpha+k+1,\,\beta)}(x)=2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+2)}\times$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\Gamma(n+\nu+\alpha+\beta+k+2)}{\Gamma(n+\nu+\alpha+\beta+2)}C_{n-\nu}^{(k)}\{h_\nu^{(\alpha,\,\beta)}\}^{-1}P_\nu^{(\alpha,\,\beta)}(1)\,P_\nu^{(\alpha,\,\beta)}(x), \tag{9.4.1}$$

где $h_n^{(\alpha,\,\beta)}$ и $C_n^{(k)}$ имеют тот же смысл, что и выше (см. (4.3.3) и введение к главе IX). Это есть обобщение формулы (4.5.3) (последнее тождество), к которой (9.4.1) сводится при $k=0$.

Для доказательства вычислим интеграл

$$\int_{-1}^{+1}P_n^{(\alpha+k+1,\,\beta)}(x)\,P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)\,(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx. \tag{9.4.2}$$

В соответствии с (4.3.1) последнее выражение равно

$$\frac{(-1)^\nu}{2^\nu\nu!}\int_{-1}^{+1}P_n^{(\alpha+k+1,\,\beta)}(x)\,\frac{d^\nu}{dx^\nu}\{(1-x)^{\nu+\alpha}(1+x)^{\nu+\beta}\}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2^\nu\nu!}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\nu+\alpha}(1+x)^{\nu+\beta}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\{P_n^{(\alpha+k+1,\,\beta)}(x)\}\,dx,$$

что в силу (4.21.7) и (4.3.1) в свою очередь равно

$$\frac{1}{2^\nu\nu!}\cdot\frac{1}{2^\nu}(n+\alpha+\beta+k+2)(n+\alpha+\beta+k+3)\ldots(n+\alpha+\beta+k+\nu+1)\times$$
$$\times\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\nu+\alpha}(1+x)^{\nu+\beta}P_{n-\nu}^{(\alpha+k+\nu+1,\,\beta+\nu)}(x)\,dx=$$
$$=\frac{(-1)^{n-\nu}}{2^{n+\nu}\nu!\,(n-\nu)!}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+\nu+2)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+2)}\times$$
$$\times\int_{-1}^{+1}(1-x)^{-k-1}\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}\{(1-x)^{n+\alpha+k+1}(1+x)^{n+\beta}\}\,dx=$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n-\nu)}{2^{n+\nu}\nu!\,(n-\nu)!}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+\nu+2)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+2)}\times$$
$$\times\int_{-1}^{+1}(1-x)^{-k-1-n+\nu}(1-x)^{n+\alpha+k+1}(1+x)^{n+\beta}\,dx;$$

отсюда мы получим требуемое утверждение, если учтем (1.7.5).

(2) Подставляя явные выражения для $P_n^{(\alpha,\beta)}(1)$ и $h_n^{(\alpha,\beta)}$ (см. (4.1.1) и (4.3.3)), мы получим

$$P_n^{(\alpha+k+1,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+2)}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\Gamma(n+\nu+\alpha+\beta+k+2)}{\Gamma(n+\nu+\alpha+\beta+2)}\times$$
$$\times C_{n-\nu}^{(k)}(2\nu+\alpha+\beta+1)\frac{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x). \qquad (9.4.3)$$

Так как это тождество относительно α, β, k, то мы можем заменить α через $\alpha+k+1$, а k через $-k-2$. Это приведет нас к формуле обращения

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\Gamma(n+\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\nu+\alpha+\beta+k+3)}\times$$
$$\times C_{n-\nu}^{(-k-2)}(2\nu+\alpha+\beta+k+2)\frac{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+k+2)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}P_\nu^{(\alpha+k+1,\beta)}(x). \qquad (9.4.4)$$

Следовательно,

$$S_n^{(k)}(x)=\sum_{m=0}^{n}C_{n-m}^{(k)}\{h_m^{(\alpha,\beta)}\}^{-1}P_m^{(\alpha,\beta)}(1)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)=$$
$$=\frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{\nu=0}^{n}G_\nu(n,k)(2\nu+\alpha+\beta+k+2)\frac{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+k+2)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}P_\nu^{(\alpha+k+1,\beta)}(x), \qquad (9.4.5)$$

где

$$G_\nu(n,k)=\sum_{m=\nu}^{n}C_{n-m}^{(k)}C_{m-\nu}^{(-k-2)}(2m+\alpha+\beta+1)\frac{\Gamma(m+\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(m+\nu+\alpha+\beta+k+3)}. \qquad (9.4.6)$$

Выражение $S_n^{(k)}(x)$ представляет собой числитель n-го ядра Чезаро порядка k.

9.41. Продолжение; «константы Лебега» порядка k

(1) Для доказательства теоремы 9.1.3 в силу теоремы 1.6 (теорема Хелли) достаточно доказать, что последовательность «констант Лебега»

$$L_n^{(k)}=\{C_n^{(k)}\}^{-1}\int_{-1}^{+1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,|S_n^{(k)}(x)|\,dx \qquad (9.41.1)$$

ограничена в том и только в том случае, когда $k>\alpha+\frac{1}{2}$. Так как для $k>\alpha+\frac{1}{2}$ (см. (7.34.1) первый и третий случаи) мы имеем

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,|P_n^{(\alpha+k+1,\beta)}(x)|\,dx=$$
$$=O(1)\int_0^1(1-x)^\alpha\,|P_n^{(\alpha+k+1,\beta)}(x)|\,dx+O(1)\int_0^1(1-x)^\beta|P_n^{(\beta,\alpha+k+1)}(x)|\,dx=$$
$$=O(n^{k-\alpha-1})+O(n^{-\frac{1}{2}})=O(n^{k-\alpha-1}), \qquad (9.41.2)$$

то, учитывая (9.4.5), получаем

$$L_n^{(k)}=O(n^{-k})\sum_{\nu=0}^{n}|G_\nu(n,\ k)|\,\nu^{2k+1}, \tag{9.41.3}$$

где при $\nu=0$ множитель ν^{2k+1} следует заменить единицей.

(2) Пусть сперва k будет целым неотрицательным числом. Тогда в (9.4.6) мы должны рассмотреть только члены с номерами $\nu\leqslant m\leqslant \nu+k+1$, так что $G_\nu(n,\ k)$ может быть записано в виде $G(n-\nu-1)$, где [1])

$$G(u)=\sum_{m=\nu}^{\nu+k+1}(-1)^{m-\nu}\binom{u+k+1-m+\nu}{k}\times$$
$$\times\binom{k+1}{m-\nu}(2m+\alpha+\beta+1)\frac{\Gamma(m+\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(m+\nu+\alpha+\beta+k+3)}. \tag{9.41.4}$$

Это — многочлен k-й степени относительно u, содержащий ν и k в качестве параметров. Формула Ньютона (см. А. А. Марков [5], часть 1, глава 1, § 5; мы применяем те же обозначения, что в (2.8.4)) дает

$$G(u)=\sum_{\varrho=0}^{k}\binom{u}{\varrho}\Delta^\varrho G(0), \tag{9.41.5}$$

и из (9.41.4) следует, что

$$\Delta^\varrho G(0)=\sum_{m=\nu}^{\nu+\varrho+1}(-1)^{m-\nu}\binom{k+1-m+\nu}{k-\varrho}\binom{k+1}{m-\nu}\times$$
$$\times(2m+\alpha+\beta+1)\frac{\Gamma(m+\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(m+\nu+\alpha+\beta+k+3)}=$$
$$=\frac{1}{(k-\varrho)!}\int_0^1\sum_{m=\nu}^{\nu+\varrho+1}\frac{(-1)^{m-\nu}(2m+\alpha+\beta+1)}{(m-\nu)!\,(\varrho+1-m+\nu)!}t^{m+\nu+\alpha+\beta}(1-t)^{k+1}\,dt=$$
$$=\frac{1}{(k-\varrho)!}\int_0^1\Big\{-2\sum_{m=\nu+1}^{\nu+\varrho+1}(-1)^{m-\nu-1}\frac{t^{m+\nu+\alpha+\beta}(1-t)^{k+1}}{(m-\nu-1)!\,(\varrho+1-m+\nu)!}+$$
$$+(2\nu+\alpha+\beta+1)\sum_{m=\nu}^{\nu+\varrho+1}(-1)^{m-\nu}\frac{t^{m+\nu+\alpha+\beta}(1-t)^{k+1}}{(m-\nu)!\,(\varrho+1-m+\nu)!}\Big\}\,dt=$$
$$=\frac{1}{(k-\varrho)!\,(\varrho+1)!}\int_0^1\{-2(\varrho+1)\,t^{2\nu+\alpha+\beta+1}(1-t)^{k+\varrho+1}+$$
$$+(2\nu+\alpha+\beta+1)\,t^{2\nu+\alpha+\beta}(1-t)^{k+\varrho+2}\}\,dt=$$
$$=O(\nu^{-k-\varrho-2})+O(\nu)\,O(\nu^{-k-\varrho-3})=O(\nu^{-k-\varrho-2}),\quad \nu\geqslant 1. \tag{9.41.6}$$

Последняя интегральная формула показывает также, что $\Delta^k G(0)=0$ при $\nu\geqslant 1$; в частности, $G(u)\equiv 0$ при $k=0$, $\nu\geqslant 1$. Оба утверждения справедливы также при $\nu=0$, в чем можно убедиться посредством аналитиче-

---

[1]) Если $\nu+k+1>n$, то в $G(u)$ появляются некоторые дополнительные слагаемые, которых нет в (9.4.6). Однако, когда мы подставляем $u=n-\nu-1$ эти слагаемые обращаются в нуль, за исключением случая $\nu=n$, $m=n+k+1$. В последнем случае дополнительный член к $G(u)=G(-1)$ есть $O(m)(m+\nu)^{-k-2}=O(n^{-k-1})$. Умножение этого выражения на $\nu^{2k+1}=n^{2k+1}$, как это требуется в формуле (9.41.3), дает окончательную добавку $O(n^{-k})O(n^k)=O(1)$.

ского продолжения относительно $\alpha+\beta$. Тем самым в случае $k=0$ преодолевается затруднение, упомянутое в последней сноске. При $k>0$ имеем

$$G_\nu(n, k)=\sum_{\varrho=0}^{k-1}(n-\nu)^\varrho O(\nu^{-k-\varrho-2}), \tag{9.41.7}$$

причем в случае $\nu=n$ (на основании той же сноски) к этому выражению нужно добавить слагаемое $O(n^{-k-1})$. В этом случае множитель $(n-\nu)^\varrho$, а в случае $\nu=0$ множитель $\nu^{-k-\varrho-2}$ следует заменить единицей. При $k>\alpha+\frac{1}{2}$ это дает требуемый результат:

$$L_n^{(k)}=O(n^{-k})\sum_{\varrho=0}^{k-1}n^\varrho+O(n^{-k})\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{\varrho=0}^{k-1}(n-\nu)^\varrho\nu^{-k-\varrho-2}\nu^{2k+1}+$$
$$+O(n^{-k})\left\{\sum_{\varrho=0}^{k-1}n^{-k-\varrho-2}n^{2k+1}+n^{-k-1}n^{2k+1}\right\}=O(1). \tag{9.41.8}$$

(3) Теперь рассмотрим случай $k>\alpha+\frac{1}{2}$, когда k — нецелое число. Тогда в соответствии с предыдущим результатом

$$L_n^{(k')}\leqslant A, \quad n=0, 1, 2, \ldots, \tag{9.41.9}$$

где $k'=[k]+1$, A — надлежащая постоянная, не зависящая от n.

Пусть $\sigma>k'$. Если мы положим $u_n(x)=\{h_n^{(\alpha,\beta)}\}^{-1}P_n^{(\alpha,\beta)}(1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, то формула (9.4.5) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n^{(k')}(x)r^n=(1-r)^{-k'-1}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)r^n.$$

Далее имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n^{(\sigma)}(x)r^n=(1-r)^{k'-\sigma}(1-r)^{-k'-1}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)r^n=$$
$$=(1-r)^{k'-\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}S_n^{(k')}(x)r^n,$$

откуда вытекает, что

$$S_n^{(\sigma)}(x)=\sum_{m=0}^{n}C_{n-m}^{(\sigma-k'-1)}S_m^{(k')}(x)$$

и

$$L_n^{(\sigma)}\leqslant(C_n^{(\sigma)})^{-1}\sum_{m=0}^{n}C_{n-m}^{(\sigma-k'-1)}C_m^{(k')}L_m^{(k')}\leqslant A(C_n^{(\sigma)})^{-1}\sum_{m=0}^{n}C_{n-m}^{(\sigma-k'-1)}C_m^{(k')}.$$

Следовательно,

$$L_n^{(\sigma)}\leqslant A, \quad \sigma\geqslant k', \quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{9.41.10}$$

Это справедливо, в частности, при $\sigma=k+1$, $k+2$, ...

(4) Докажем теперь следующее тождество:

$$\frac{\Gamma(n+\nu+\alpha+\beta+k+2)}{\Gamma(n+\nu+\alpha+\beta+2)}C_{n-\nu}^{(k)}=\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2k+3)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+k+3)}\sum_{\varrho=0}^{\infty}(-1)^\varrho\binom{k+\varrho}{\varrho}\times$$
$$\times\frac{k(k-1)\ldots(k-\varrho+1)}{(2n+\alpha+\beta+k+3)\ldots(2n+\alpha+\beta+k+\varrho+2)}C_{n-\nu}^{(k+\varrho)}, \quad 0\leqslant\nu\leqslant n. \tag{9.41.11}$$

Ряд в правой части сходится абсолютно при $n\geqslant1$. (При $\varrho=0$ дробь под знаком суммы нужно заменить единицей.) Для доказательства применим следующее преобразование левой части:

$$\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2k+3)}{\Gamma(n+\nu+\alpha+\beta+2)}\,\frac{1}{(n-\nu)!\,\Gamma(k+1)}\int_0^1 t^{n-\nu+k}\,(1-t)^{n+\nu+\alpha+\beta+k+1}\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2k+3)}{\Gamma(n+\nu+\alpha+\beta+2)}\,\frac{1}{(n-\nu)!\,\Gamma(k+1)}\times$$

$$\times\sum_{\varrho=0}^{\infty}(-1)^{\varrho}\binom{k}{\varrho}\int_0^1 t^{n-\nu+k+\varrho}\,(1-t)^{n+\nu+\alpha+\beta+1}\,dt.$$

Вычисление последнего интеграла завершает доказательство. Почленное интегрирование законно, так как все члены ряда, за исключением конечного числа, имеют один и тот же знак. Следовательно, из (9.4.1) мы получаем представление

$$P_n^{(\alpha+k+1,\,\beta)}(x)=2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\,\frac{\Gamma(n+\beta+1)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+2k+3)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+2)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+k+3)}\times$$

$$\times\sum_{\varrho=0}^{\infty}(-1)^{\varrho}\binom{k+\varrho}{\varrho}\frac{k(k-1)\ldots(k-\varrho+1)}{(2n+\alpha+\beta+k+3)\ldots(2n+\alpha+\beta+k+\varrho+2)}\,S_n^{(k+\varrho)}(x),\tag{9.41.12}$$

откуда следует, что

$$S_n^{(k)}(x)=$$

$$=\left\{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\,\frac{\Gamma(n+\beta+1)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+2k+3)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+2)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+k+3)}\right\}^{-1}P_n^{(\alpha+k+1,\,\beta)}(x)-$$

$$-\sum_{\varrho=1}^{\infty}(-1)^{\varrho}\binom{k+\varrho}{\varrho}\frac{k(k-1)\ldots(k-\varrho+1)}{(2n+\alpha+\beta+k+3)\ldots(2n+\alpha+\beta+k+\varrho+2)}\,S_n^{(k+\varrho)}(x).\tag{9.41.13}$$

Если учесть (9.41.2), то это дает

$$L_n^{(k)}=O(n^{-k})\,O(n^{\alpha+1})\,O(n^{k-\alpha-1})+O(n^{-k})\,A_n=O(1)+O(n^{-k})\,A_n,\tag{9.41.14}$$

где

$$A_n=\sum_{\varrho=1}^{\infty}\binom{k+\varrho}{\varrho}\frac{|\,k(k-1)\ldots(k-\varrho+1)\,|}{(2n+\alpha+\beta+k+3)\ldots(2n+\alpha+\beta+k+\varrho+2)}\times$$

$$\times\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,|\,S_n^{(k+\varrho)}(x)\,|\,dx.\tag{9.41.15}$$

В соответствии с (9.41.10) имеем

$$A_n\leqslant A\sum_{\varrho=1}^{\infty}\binom{k+\varrho}{\varrho}\frac{|\,k(k-1)\ldots(k-\varrho+1)\,|}{(2n+\alpha+\beta+k+3)\ldots(2n+\alpha+\beta+k+\varrho+2)}\,C_n^{(k+\varrho)}=$$

$$=O(1)\sum_{\varrho=1}^{\infty}\left|\binom{k}{\varrho}\right|\binom{n+k}{k}\frac{(n+k+1)\ldots(n+k+\varrho)}{(2n+\alpha+\beta+k+3)\ldots(2n+\alpha+\beta+k+\varrho+2)}=$$

$$=O(n^k)\sum_{\varrho=1}^{\infty}\left|\binom{k}{\varrho}\right|\frac{(k+2)\ldots(k+\varrho+1)}{(\alpha+\beta+k+5)\ldots(\alpha+\beta+k+\varrho+4)}=O(n^k),\tag{9.41.16}$$

так как $(n+k+l)/(2n+\alpha+\beta+k+l+2)$ убывает при возрастании n, если $l>\alpha+\beta-k+2$. Этим заканчивается доказательство первой части утверждения теоремы 9.1.3.

(5) Наконец, пусть $k=\alpha+\frac{1}{2}$. Применяя предыдущие обозначения, мы имеем из (9.41.13)

$$L_n^{(k)} > \left\{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\frac{\Gamma(n+\beta+1)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+2k+3)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+2)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+k+3)}\right\}^{-1}\times$$
$$\times (C_n^{(k)})^{-1}\int\limits_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,|P_n^{(\alpha+k+1,\,\beta)}(x)|\,dx-(C_n^{(k)})^{-1}A_n.$$

Первый член в правой части $\sim n^{\alpha+1}n^{-k}n^{-\frac{1}{2}}\ln n=\ln n$ (в соответствии со второй частью (7.34.1)[1]); второй член будет ограничен, как следует из результатов п. (4). Итак,

$$L_n^{(k)} > A\ln n,\quad A>0,\; k=\alpha+\frac{1}{2}, \tag{9.41.17}$$

и следовательно, разложение непрерывной функции в ряд по многочленам Якоби, вообще говоря, не является $(C,\,k)$-суммируемым при $k=\alpha+\frac{1}{2}$.

9.42. Доказательство теоремы 9.1.4

(1) Пусть $f(x)$ непрерывна в точке $x=1$ и пусть $f(1)=0$; предположим, что $k>\alpha+\frac{1}{2}$. Сначала рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-1}^{+1}|f(x)|\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,|P_n^{(\alpha+k+1,\,\beta)}(x)|\,dx \tag{9.42.1}$$

при $n\to\infty$. Обозначая через ε произвольное положительное число, $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, разобьем промежуток интегрирования $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $x=\cos\theta$, на следующие части:

$$0\leqslant\theta\leqslant\varepsilon,\;\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon,\;\pi-\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi. \tag{9.42.2}$$

Соответствующие интегралы I, II, III могут быть оценены следующим образом (см. (9.41.2), (7.32.6) и (7.32.7)):

$$\mathrm{I}=\max_{0\leqslant\theta\leqslant\varepsilon}|f(\cos\theta)|\int\limits_{\cos\varepsilon}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,|P_n^{(\alpha+k+1,\,\beta)}(x)|\,dx=$$
$$=\max_{0\leqslant\theta\leqslant\varepsilon}|f(\cos\theta)|\,O(n^{k-\alpha-1}),$$

$$\mathrm{II}=O(n^{-\frac{1}{2}})=o(n^{k-\alpha-1}),$$

[1]) Если мы воспользуемся лишь (7.34.2), то получим, что $L_n^{(k)}\to\infty$ при $n\to\infty$, этого достаточно для нашей цели.

$$
\mathrm{III}=\begin{cases}
\int\limits_{\pi-\varepsilon}^{\pi} |f(\cos\theta)|\,(\pi-\theta)^{2\beta+1}\,O(n^{-\frac{1}{2}})\,d\theta = O(n^{-\frac{1}{2}}) = o(n^{k-\alpha-1}),\\
\int\limits_{\pi-\varepsilon}^{\pi} |f(\cos\theta)|\,(\pi-\theta)^{2\beta+1}\,O(n^{\beta})\,d\theta = \\
\qquad\qquad = O(n^{k-\alpha-1}) \int\limits_{\pi-\varepsilon}^{\pi} |f(\cos\theta)|\,(\pi-\theta)^{2\beta+1}\,d\theta,\\
\int\limits_{\pi-\varepsilon}^{\pi} |f(\cos\theta)|\,(\pi-\theta)^{2\beta+1}\,(\pi-\theta)^{-\beta-\frac{1}{2}}\,O(n^{-\frac{1}{2}})\,d\theta = \\
\qquad\qquad = O(n^{-\frac{1}{2}}) = o(n^{k-\alpha-1}),
\end{cases}
$$

в зависимости от того, будет ли $-1<\beta\leqslant-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<\beta\leqslant k-\alpha-1$ или же $\beta>k-\alpha-1$. В последнем случае мы используем антиполярное условие теоремы 9.1.4. Так как ε произвольно мало, то интеграл (9.42.1) во всех случаях есть $o(n^{k-\alpha-1})$.

(2) Введем затем в рассмотрение константы

$$
M_n^{(k)} = (C_n^{(k)})^{-1} \int\limits_{-1}^{+1} |f(x)|\,(1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\beta}\,|S_n^{(k)}(x)|\,dx,\quad n=0,\,1,\,2,\,\ldots, \tag{9.42.3}
$$

где $S_n^{(k)}$ имеет тот же смысл, что и в (9.4.5). Мы получим следующую формулу, аналогичную (9.41.3):

$$
M_n^{(k)} = O(n^{-k}) \sum_{\nu=0}^{n} |G_\nu(n,\,k)|\,o(\nu^{2k+1}).
$$

При $\nu=0$ последний множитель $o(\nu^{2k+1})$ должен быть заменен единицей. Итак, если k — любое целое положительное число, то мы имеем, как в (9.41.8),

$$
M_n^{(k)} = O(n^{-k}) \sum_{\varrho=0}^{k-1} n^{\varrho} + O(n^{-k}) \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{k-1} (n-\nu)^{\varrho}\,\nu^{-k-\varrho-2}\,o(\nu^{2k+1}) +
$$
$$
+ O(n^{-k}) \left\{ \sum_{\varrho=0}^{k-1} n^{-k-\varrho-2}\,o(n^{2k+1}) + n^{-k-1}o(n^{2k+1}) \right\} = o(1). \tag{9.42.4}
$$

То же справедливо и в случае $k=0$, для которого $G(u)\equiv 0$ (см. замечание в сноске к § 9.41, (2)).

(3) Для нецелых k мы опять применяем (9.41.13). Пусть ε — произвольное положительное число и пусть n_0 выбрано так, что

$$
M_n^{(k')} \leqslant \varepsilon \text{ при } n \geqslant n_0, \tag{9.42.5}
$$

где $k'=[k]+1$. Тогда при $n\geqslant n_0$ и $\sigma>k'$ мы находим подобно тому, как это делалось в § 9.41,(3), что

$$
M_n^{(\sigma)} \leqslant (C_n^{(\sigma)})^{-1} \sum_{m=0}^{n} C_{n-m}^{(\sigma-k'-1)}\,C_m^{(k')}\,M_m^{(k')}.
$$

Мы разбиваем последнюю сумму на две части:

$$
\sum_{m=0}^{n_0-1} \text{ и } \sum_{m=n_0}^{n}.
$$

Ко второй из них мы применим (9.42.5) и получим

$$M_n^{(\sigma)} \leqslant (C_n^{(\sigma)})^{-1} \sum_{m=0}^{n_0-1} C_{n-m}^{(\sigma-k'-1)} C_m^{(k')} M_m^{(k')} + \varepsilon\, (C_n^{(\sigma)})^{-1} \sum_{m=n_0}^{n} C_{n-m}^{(\sigma-k'-1)} C_m^{(k')}.$$

Второе слагаемое правой части меньше, чем ε. Следовательно,

$$M_n^{(\sigma)} < \varepsilon + A\,(C_n^{(\sigma)})^{-1}\, C_n^{(\sigma-k'-1)}, \tag{9.42.6}$$

где A — положительная постоянная, зависящая от ε, но не зависящая от σ. Это имеет место, в частности, когда $\sigma = k+1,\ k+2,\ \ldots$. Мы должны заменить $C_n^{(\sigma-k'-1)}$ на $C_{n-n_0+1}^{(\sigma-k'-1)}$, если $\sigma < k'+1$, что может случиться при $\sigma = k+1$, но не может иметь места при $\sigma \geqslant k+2$. Наконец, мы получаем, как в (9.41.14), неравенство

$$\begin{aligned} M_n^{(k)} &< O(n^{-k})\, O(n^{\alpha+1})\, o(n^{k-\alpha-1}) + \\ &+ O(n^{-k}) \sum_{\varrho=1}^{\infty} \binom{k+\varrho}{\varrho} \frac{|k(k-1)\ldots(k-\varrho+1)|}{(2n+\alpha+\beta+k+3)\ldots(2n+\alpha+\beta+k+\varrho+2)} \times \\ &\qquad\qquad \times \{\varepsilon C_n^{(k+\varrho)} + A C_n^{(k+\varrho-k'-1)}\}. \end{aligned} \tag{9.42.7}$$

(При $\varrho = 1$ мы должны заменить $C_n^{(k+\varrho-k'-1)}$ на $C_{n-n_0+1}^{(k+\varrho-k'-1)}$.) Первое слагаемое в правой части есть $o(1)$. Второе слагаемое может быть разбито на две части. Первая из этих частей в соответствии с § 9.41, (4) будет $\varepsilon O(1)$. Для оценки второй части мы используем следующее неравенство:

$$\frac{C_n^{(k+\varrho-k'-1)}}{C_n^{(k+\varrho)}} = \frac{\Gamma(n+k+\varrho-k')\,\Gamma(k+\varrho+1)}{\Gamma(n+k+\varrho+1)\,\Gamma(k+\varrho-k')} < B\left(\frac{k+\varrho}{n+k+\varrho}\right)^{k'+1},$$

где $B > 0$ зависит только от k. Таким образом, мы получаем для второй части такую оценку (см. (9.41.16)):

$$O(1) \sum_{\varrho=1}^{\infty} \left|\binom{k}{\varrho}\right| \frac{(n+k+1)\ldots(n+k+\varrho)}{(2n+\alpha+\beta+k+3)\ldots(2n+\alpha+\beta+k+\varrho+2)} \left(\frac{k+\varrho}{n+k+\varrho}\right)^{k'+1}.$$

Разбивая эту сумму на две части

$$\sum_{\varrho=1}^{P} \text{ и } \sum_{\varrho=P+1}^{\infty},$$

где P — произвольное целое положительное число, получаем оценку

$$O(1) \sum_{\varrho=1}^{P} \left(\frac{k+\varrho}{n+k+\varrho}\right)^{k'+1} + O(1) \sum_{\varrho=P+1}^{\infty} \left|\binom{k}{\varrho}\right| \frac{(k+2)\ldots(k+\varrho+1)}{(\alpha+\beta+k+5)\ldots(\alpha+\beta+k+\varrho+4)}.$$

Первый член стремится к нулю при $n \to \infty$. Второй член произвольно мал, если P достаточно велико. Следовательно, $M_n^{(k)} = o(1)$ при $n \to \infty$.

Относительно случая $k = \alpha + \frac{1}{2}$ ср. § 9.41, (5).

(4) З а м е ч а н и е. *Непрерывность в точке $x = +1$ может быть заменена более общим условием*

$$\int_0^{\delta} |f(\cos\theta) - f(1)|\, d\theta = o(\delta), \quad \delta \to +0. \tag{9.42.8}$$

Для доказательства нужно лишь слегка изменить оценку интеграла I (см. (9.42.2)). Если $f(1)=0$, то, применяя (7.32.5), мы имеем

$$\mathrm{I}=O(n^{\alpha+k+1})\int_0^{\frac{1}{n}}\theta^{2\alpha+1}\,|f(\cos\theta)|\,d\theta+O(n^{-\frac{1}{2}})\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon}\theta^{\alpha-k-\frac{1}{2}}\,|f(\cos\theta)|\,d\theta.$$

В обоих интегралах мы интегрируем по частям (см. Фейер [8], стр. 280). Пусть

$$\int_0^{\theta}|f(\cos t)|\,dt=F(\theta).$$

Тогда имеем

$$\mathrm{I}=O(n^{\alpha+k+1})\,n^{-2\alpha-1}F\left(\frac{1}{n}\right)+O(n^{\alpha+k+1})\int_0^{\frac{1}{n}}\theta^{2\alpha}F(\theta)\,d\theta+$$

$$+O(n^{-\frac{1}{2}})\left\{\varepsilon^{\alpha-k-\frac{1}{2}}F(\varepsilon)+n^{k-\alpha+\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{n}\right)\right\}+O(n^{-\frac{1}{2}})\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon}\theta^{\alpha-k-\frac{3}{2}}F(\theta)\,d\theta=$$

$$=o(n^{k-\alpha-1})+o(n^{k-\alpha-1})+O(n^{-\frac{1}{2}})+o(n^{k-\alpha-1})+$$

$$+O(n^{k-\alpha-1})\max_{0<\theta\leqslant\varepsilon}\{\theta^{-1}F(\theta)\}=o(n^{k-\alpha-1})+O(n^{k-\alpha-1})\max_{0<\theta\leqslant\varepsilon}\{\theta^{-1}F(\theta)\}.$$

(5) Наконец, покажем, что утверждение теоремы 9.1.4, вообще говоря, не имеет места, если не выполнено «антиполярное условие». Рассмотрим функцию (см. § 9.3, (4))

$$f(x)=(1+x)^{\mu}. \tag{9.42.9}$$

Ее разложение в точке $x=1$ будет

$$\sum_{n=0}^{\infty}(h_n^{(\alpha,\beta)})^{-1}\binom{n+\alpha}{n}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\mu+\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(h_n^{(\alpha,\beta)})^{-1}\binom{n+\alpha}{n}\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\mu+\beta}(1+x)^{\alpha}P_n^{(\beta,\alpha)}(x)\,dx. \tag{9.42.10}$$

В соответствии с (9.3.11) с точностью до постоянного множителя, отличного от нуля, главная часть общего члена ряда (9.42.10) равна

$$(-1)^n n^{\alpha-\beta-2\mu-1}\quad\text{или}\quad(-1)^n C_n^{(\alpha-\beta-2\mu-1)}. \tag{9.42.11}$$

Но ряд (9.42.10) не может быть (C, k)-суммируемым, если $k\leqslant\alpha-\beta-2\mu-1=\lambda$. В самом деле,

$$(1-r)^{-k-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_n^{(\lambda)}r^n=(1-r)^{-k-1}(1+r)^{-\lambda-1}. \tag{9.42.12}$$

Если применить метод Дарбу (§ 8.4), то он дает для коэффициента при r^n

в разложении этой функции в степенной ряд главную часть

$$AC_n^{(k)}+B(-1)^n C_n^{(\lambda)}, \tag{9.42.13}$$

где A и B — фиксированные постоянные, отличные от нуля.

Пусть теперь выполнено условие (9.1.9). Если мы положим

$$-\beta-1<\mu\leqslant\frac{1}{2}(\alpha-\beta-k-1), \tag{9.42.14}$$

то ряд по многочленам Якоби существует, интеграл (9.1.10) расходится $\left(\text{так как } \frac{1}{2}(\alpha-\beta-k-1)<-\frac{\beta}{2}-\frac{3}{4}\right)$ и ряд (9.42.10) не является $(C,\ k)$-суммируемым.

9.5. Доказательства теорем 9.1.5 и 9.1.6

(1) Мы исходим из представления n-й частной суммы ряда по многочленам Лагерра, соответствующего функции $f(x)$, в виде

$$s_n(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^\alpha f(t)\,K_n^{(\alpha)}(x,\ t)\,dt, \tag{9.5.1}$$

где ядро $K_n^{(\alpha)}(x,\ t)$ имеет тот же смысл, что и в (5.1.11). Напишем указанную там формулу в более удобном виде:

$$\Gamma(\alpha+1)\,K_n^{(\alpha)}(x,\ t)=\frac{n+1}{\binom{n+\alpha}{n}}\,\frac{L_{n+1}^{(\alpha)}(x)\,L_{n+1}^{(\alpha-1)}(t)-L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)\,L_{n+1}^{(\alpha)}(t)}{x-t}=$$

$$=\frac{n+1}{\binom{n+\alpha}{n}}\left\{L_{n+1}^{(\alpha)}(x)\,\frac{L_{n+1}^{(\alpha-1)}(t)-L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)}{x-t}-L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)\,\frac{L_{n+1}^{(\alpha)}(t)-L_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{x-t}\right\}. \tag{9.5.2}$$

Это вытекает из (5.1.11), если вместо $L_n^{(\alpha)}(x)$ мы подставим $L_{n+1}^{(\alpha)}(x)-L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)$ и аналогично поступим с $L_n^{(\alpha)}(t)$ (см. (5.1.13)).

Допустим прежде всего, что интеграл (9.1.11) существует и что условие (9.1.12) выполнено. Тогда существует первый из интегралов (9.1.14) (см. замечание в § 9.11, (4)). Пусть $f(x)$ будет многочленом $\varrho(x)$, тогда справедливо утверждение (9.1.13). Следовательно, в соответствии со свойством замкнутости, указанным в теореме 5.7.3, достаточно установить, что разность в (9.1.13) допускает оценку вида

$$O(1)\int_0^1 t^a\,|f(t)|\,dt+O(1)\int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\,|f(t)|\,dt+o(1),\quad n\to\infty, \tag{9.5.3}$$

где $a=\min\left(\alpha,\ \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)$, а оценки $O(1)$ и $o(1)$ имеют место равномерно по x при $\varepsilon\leqslant x\leqslant\omega$. Кроме того, оба множителя $O(1)$ не зависят от $f(x)$.

(2) Рассмотрим теперь часть интеграла (9.5.1), определяющего $s_n(x)$, взятую по отрезку $0\leqslant t\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. При $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$ в соответствии с первой

формулой (9.5.2) и с (7.6.9) эта часть будет равна

$$O(n^{1-\alpha})\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} t^{\alpha}|f(t)|\{n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{4}}+n^{\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\}\,dt=$$

$$=O(1)\int_0^{\varepsilon} t^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}|f(t)|\,dt+O(1)\int_0^{\varepsilon} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}|f(t)|\,dt=O(1)\int_0^{\varepsilon} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}|f(t)|\,dt. \tag{9.5.4}$$

Если $-\frac{1}{2}\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$, то мы используем (7.6.9) и (7.6.10), а если $\alpha<-\frac{1}{2}$, то используем (7.6.10). В первом случае остается справедливым результат (9.5.4), в то время как во втором случае мы получаем $O(1)\int_0^{\varepsilon} t^{\alpha}|f(t)|\,dt$.

(3) Рассмотрим далее часть интеграла (9.5.1), взятую по отрезку $\frac{\varepsilon}{2}\leqslant t\leqslant 2\omega$, и применим (8.8.3) и (8.8.5) ко второй формуле (9.5.2). Здесь переменные лежат на фиксированном положительном отрезке; поэтому остаточные члены в (8.8.3) и (8.8.5) зависят только от n. Мы находим (в тех же обозначениях, что в (8.8.3))

$$K_n^{(\alpha)}(x,t)=n^{1-\alpha}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{4}}\frac{k(x)\,k(t)}{x^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\left\{t^{\frac{1}{2}}\cos\left[2(nx)^{\frac{1}{2}}+\gamma\right]\frac{\sin[2(nt)^{\frac{1}{2}}+\gamma]-\sin[2(nx)^{\frac{1}{2}}+\gamma]}{t^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}-\right.$$

$$\left.-x^{\frac{1}{2}}\sin[2(nx)^{\frac{1}{2}}+\gamma]\,\frac{\cos[2(nt)^{\frac{1}{2}}+\gamma]-\cos[2(nx)^{\frac{1}{2}}+\gamma]}{t^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}+O(1)\right\}. \tag{9.5.5}$$

Теорема о среднем значении позволяет нам заменить $n'=n+1$ через n. Пусть, например,

$$\varphi(m,\ t)=\cos(2m^{\frac{1}{2}}t+\gamma),$$

тогда

$$\frac{[\varphi(n',t)-\varphi(n,t)]-[\varphi(n',x)-\varphi(n,x)]}{(n'-n)(t-x)}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial m\,\partial t}$$

в надлежаще выбранной точке $\overline{m}$, $\overline{t}$, где $\overline{m}$ лежит между n и n', а $\overline{t}$ — между x и t. Это легко приводит к формуле

$$K_n^{(\alpha)}(x,t)=\frac{k(x)\,k(t)}{x^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}}\,x^{\frac{1}{2}}\left\{\cos[2(nx)^{\frac{1}{2}}+\gamma]\,\frac{\sin[2(nt)^{\frac{1}{2}}+\gamma]-\sin[2(nx)^{\frac{1}{2}}+\gamma]}{t^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}-\right.$$

$$\left.-\sin[2(nx)^{\frac{1}{2}}+\gamma]\,\frac{\cos[2(nt)^{\frac{1}{2}}+\gamma]-\cos[2(nx)^{\frac{1}{2}}+\gamma]}{t^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}+O(1)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}}k^2(x)\,t^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\sin[2n^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})]}{t^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}+O(1). \tag{9.5.6}$$

Отсюда по лемме Римана при $\varepsilon < 1 < \omega$ будем иметь

$$\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{2\omega} e^{-t}t^{\alpha}f(t)\,K_n^{(\alpha)}(x,t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-x}x^{\alpha+\frac{1}{2}}k^2(x)\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{2\omega} t^{-\frac{1}{2}}f(t)\,\frac{\sin\left[2n^{\frac{1}{2}}\left(t^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\right]}{t^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}\,dt+O(1)\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{2\omega}|f(t)|\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{x^{\frac{1}{2}}-\delta}^{x^{\frac{1}{2}}+\delta} f(\tau^2)\,\frac{\sin\left[2n^{\frac{1}{2}}\left(\tau-x^{\frac{1}{2}}\right)\right]}{\tau-x^{\frac{1}{2}}}\,d\tau+O(1)\int_0^1 t^{\alpha}|f(t)|\,dt+$$

$$+O(1)\int_1^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}|f(t)|\,dt+o(1). \tag{9.5.7}$$

(4) На отрезке $2\omega \leqslant t \leqslant 3n$ (n достаточно велико) в соответствии с первым утверждением (8.91.2) мы имеем

$$e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\left|L_n^{(\alpha)}(t)\right|=O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right). \tag{9.5.8}$$

Следовательно, из первой формулы (9.5.2) вытекает, что

$$\int_{2\omega}^{3n} e^{-t}t^{\alpha}f(t)\,K_n^{(\alpha)}(x,t)\,dt=O\left(n^{1-\alpha}\right)n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\int_{2\omega}^{3n} e^{-t}t^{\alpha-1}|f(t)|\,\left|L_{n+1}^{(\alpha-1)}(t)\right|\,dt+$$

$$+O\left(n^{1-\alpha}\right)n^{\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{4}}\int_{2\omega}^{3n} e^{-t}t^{\alpha-1}|f(t)|\left|L_{n+1}^{(\alpha)}(t)\right|\,dt=$$

$$=O\left(n^{1-\alpha}\right)n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{4}}\int_{2\omega}^{3n} e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}|f(t)|\,dt+$$

$$+O\left(n^{1-\alpha}\right)n^{\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\int_{2\omega}^{3n} e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}|f(t)|\,dt, \tag{9.5.9}$$

что равняется

$$O(1)\int_1^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}|f(t)|\,dt. \tag{9.5.10}$$

В интервале $3n \leqslant t < +\infty$ по теореме 8.91.2

$$\left(x \geqslant a,\ \lambda=\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{12}\right)$$

мы имеем

$$e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{12}}\left|L_n^{(\alpha)}(t)\right|=O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right). \tag{9.5.11}$$

Следовательно, из (5.1.11), учитывая (9.1.12), получим

$$\int_{3n}^{\infty} e^{-t}t^{\alpha}f(t)\,K_n^{(\alpha)}(x, t)\,dt=$$

$$=O(n^{1-\alpha})\,n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\int_{3n}^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}|f(t)|\{|L_n^{(\alpha)}(t)|+|L_{n+1}^{(\alpha)}(t)|\}\,dt=$$

$$=O(n^{1-\alpha})\,n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\int_{3n}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{13}{12}}|f(t)|\,dt=o(1). \qquad (9.5.12)$$

(5) Если условие (9.1.12) заменить требованиями (9.1.14), то на отрезке $2\omega\leqslant t\leqslant 3n$ можно применить исследование, приведенное в (4). В интервале $3n\leqslant t<\infty$ применим неравенство Буняковского — Шварца:

$$O(n^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}})\int_{3n}^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}\,|f(t)|\,|L_n^{(\alpha)}(t)|\,dt=$$

$$=O(n^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}})\left\{\int_{3n}^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-2}\,|f(t)|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{3n}^{\infty} e^{-t}t^{\alpha}\,[L_n^{(\alpha)}(t)]^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (9.5.13)$$

Но последний интеграл есть $O(n^{\alpha})$ (см. (5.1.1)), и этим утверждение доказано.

(6) Пусть

$$f(x)=x^{\mu} \qquad (9.5.14)$$

(см. Блюменталь [1], стр. 32—33). Мы покажем, что при надлежащим образом выбранных значениях μ существует первый из интегралов (9.1.11), но второй из них не существует. Кроме того, ряд по многочленам Лагерра расходится для $x>0$. При этом мы предполагаем, что $\alpha>-\frac{1}{2}$.

Коэффициент a_n соответствующего ряда Лагерра определяется формулой

$$\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}a_n=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\alpha+\mu}L_n^{(\alpha)}(x)\,dx=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^{\mu}\frac{d^n}{dx^n}\{e^{-x}x^{n+\alpha}\}\,dx \qquad (9.5.15)$$

(см. (5.1.5)). Интегрируя по частям, получаем

$$a_n=\frac{\Gamma(\mu+\alpha+1)}{\Gamma(-\mu)}\,\frac{\Gamma(n-\mu)}{\Gamma(n+\alpha+1)}. \qquad (9.5.16)$$

Здесь мы предполагаем, что $\mu+\alpha>-1$, $\mu\neq 0, 1, 2, \ldots$ Тогда $a_n\sim n^{-\mu-\alpha-1}$, и в силу формулы Фейера (8.22.1)] главный член ряда по многочленам Лагерра ведет себя, как

$$n^{-\mu-\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}\cos\left\{2(nx)^{\frac{1}{2}}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right\} \qquad (9.5.17)$$

при $x>0$. Следовательно, этот ряд будет расходящимся (см. задачу 47) тогда и только тогда, когда $\mu+\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}\leqslant\frac{1}{2}$. Если $\alpha>-\frac{1}{2}$ и

$$-\alpha-1<\mu\leqslant-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}, \qquad (9.5.18)$$

то первый из интегралов (9.1.11) существует, а второй из них не существует, и, кроме того, ряд расходится при $x>0$.

(7) Рассмотрим также функцию

$$f(x)=e^{\frac{x}{2}}x^{\mu} \tag{9.5.19}$$

и покажем, что при подходящем выборе значения μ (в частности, при $\mu=-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}$) интегралы (9.1.11) существуют, но не выполнены условия (9.1.12) и (9.1.14), и ряд по многочленам Лагерра при $x>0$ расходится. Здесь мы предполагаем, что $\alpha>-1$, $\alpha+\mu>-1$.

Интеграл

$$\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}a_n=\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{x}{2}}x^{\alpha+\mu}L_n^{(\alpha)}(x)\,dx \tag{9.5.20}$$

может быть вычислен с помощью производящей функции (см. (5.1.9))

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}a_nr^n=(1-r)^{-\alpha-1}\int\limits_0^{\infty}e^{-x\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{1-r}\right)}x^{\alpha+\mu}dx=$$

$$=\Gamma(\alpha+\mu+1)(1-r)^{-\alpha-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{1-r}\right)^{-\alpha-\mu-1}=$$

$$=\Gamma(\alpha+\mu+1)\,2^{\alpha+\mu+1}(1-r)^{\mu}(1+r)^{-\alpha-\mu-1}. \tag{9.5.21}$$

Таким образом, метод Дарбу (§ 8.4) дает для a_n главный член

$$An^{-\alpha-\mu-1}+B(-1)^nn^{\mu},\quad n\to\infty, \tag{9.5.22}$$

где A и B — фиксированные постоянные, $A\neq 0$, $B\neq 0$; мы имеем $A=0$ при $\mu=0,1,2,\ldots$

Это показывает, если учесть формулу Фейера (8.22.1), что при $x>0$ выражение $a_nL_n(x)$ не стремится к нулю, когда $\mu=-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}$.

(8) Рассмотрим, наконец, ряд по многочленам Эрмита

$$f(x)\sim a_0H_0(x)+a_1H_1(x)+\ldots+a_nH_n(x)+\ldots \tag{9.5.23}$$

Полагая $y=x^2$, мы легко находим (см. (5.6.1)), что ряды

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}H_{2m}(x)$$

и

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m+1}H_{2m+1}(x)$$

представляют собой разложения функций

$$\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}=\frac{1}{2}\{f(y^{\frac{1}{2}})+f(-y^{\frac{1}{2}})\}$$

и

$$\frac{1}{2x}\{f(x)-f(-x)\}=\frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}}\{f(y^{\frac{1}{2}})-f(-y^{\frac{1}{2}})\}$$

в ряды по многочленам Лагерра соответственно с параметром $\alpha=-\frac{1}{2}$

и $\alpha=+\frac{1}{2}$. Применяя теорему 9.1.5 к этим функциям соответственно при $\alpha=-\frac{1}{2}$ и $\alpha=\frac{1}{2}$, мы получим условия (9.1.11), (9.1.12) и (9.1.14) в следующем виде:

$$\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}|f(\pm y^{\frac{1}{2}})|\,dy=2\int_0^1|f(\pm x)|\,dx \text{ существует;}$$

$$\int_n^\infty e^{-\frac{y}{2}}y^{-\frac{4}{3}}|f(\pm y^{\frac{1}{2}})|\,dy=o(n^{-\frac{1}{2}})$$

или

$$\int_n^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-\frac{5}{3}}|f(\pm x)|\,dx=o(n^{-1});$$

$$\int_1^\infty e^{-\frac{y}{2}}y^{-1}|f(\pm y^{\frac{1}{2}})|\,dy=2\int_1^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}x^{-1}|f(\pm x)|\,dx \text{ существует;}$$

$$\int_n^\infty e^{-y}y^{-\frac{5}{2}}|f(\pm y^{\frac{1}{2}})|^2\,dy=o(n^{-\frac{3}{2}})$$

или

$$\int_n^\infty e^{-x^2}x^{-4}|f(\pm x)|^2\,dx=o(n^{-3}).$$

Это доказывает (9.1.17) в предположении, что x принадлежит интервалу, не содержащему начала координат.

Для того чтобы завершить доказательство в случае, когда x лежит на отрезке вида $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, мы должны только показать, что

$$e^{-t^2}\sum_{\nu=0}^{n}(2^\nu\nu!\pi^{\frac{1}{2}})^{-1}H_\nu(x)H_\nu(t)-\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin[(2n)^{\frac{1}{2}}(x-t)]}{x-t}=O(1) \tag{9.5.24}$$

равномерно, когда обе переменные x и t принадлежат отрезку $[-\varepsilon, +\varepsilon]$. Первый член этой разности в силу (5.5.9) будет

$$(2^{n+1}n!\pi^{\frac{1}{2}})^{-1}e^{-t^2}\left\{H_{n+1}(x)\frac{H_n(t)-H_n(x)}{x-t}-H_n(x)\frac{H_{n+1}(t)-H_{n+1}(x)}{x-t}\right\}. \tag{9.5.25}$$

Затем, применяя обозначения теоремы (8.22.6), мы получаем

$$\lambda_n^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)=\cos\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)+O(n^{-\frac{1}{2}}),$$

$$\lambda_n^{-1}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)-e^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t)}{x-t}=\frac{\cos\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)-\cos\left(N^{\frac{1}{2}}t-\frac{n\pi}{2}\right)}{x-t}+O(1).$$

Вторая формула выводится с помощью рассуждений, подобных тем, которые применялись в § 8.8 (см. первую из формул (5.5.10)). Ее левая часть может быть также записана в виде

$$\lambda_n^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{H_n(x)-H_n(t)}{x-t}+O(1).$$

Заменяя $N^{\frac{1}{2}}$ через $(N+c)^{\frac{1}{2}}$, где c — фиксированная постоянная, мы находим, что допускаемая при этом в правой части погрешность есть $O(1)$.

Эти асимптотические формулы дают для (9.5.25), если применить формулу Стирлинга, следующее выражение:

$$(2^{n+1}n!\pi^{\frac{1}{2}})^{-1}\lambda_n\lambda_{n+1}e^{x^2-t^2}\times$$

$$\times\left\{\sin\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)\frac{\cos\left(N^{\frac{1}{2}}t-\frac{n\pi}{2}\right)-\cos\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)}{x-t}-\right.$$

$$\left.-\cos\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)\frac{\sin\left(N^{\frac{1}{2}}t-\frac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(N^{\frac{1}{2}}x-\frac{n\pi}{2}\right)}{x-t}+O(1)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin[N^{\frac{1}{2}}(x-t)]}{x-t}+O(1)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin[(2n)^{\frac{1}{2}}(x-t)]}{x-t}+O(1).$$

9.6. Доказательство теоремы 9.1.7

(1) Чезаровские средние ряда по многочленам Лагерра в точке $x=0$ могут быть представлены в исключительно простой форме. Действительно, из (5.1.7) мы имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nL_n^{(\alpha)}(0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\alpha}f(t)\,L_n^{(\alpha)}(t)\,dt. \tag{9.6.1}$$

Отсюда, применяя (5.1.9), находим, что чезаровские средние порядка k будут

$$\frac{1}{C_n^{(k)}\,\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\alpha}f(t)\,L_n^{(\alpha+k+1)}(t)\,dt. \tag{9.6.2}$$

Допустим, что $k>\alpha+\frac{1}{2}$, и подразделим полупрямую $[0, +\infty)$ на части $[0, \varepsilon]$, $[\varepsilon, \omega]$ и $[\omega, +\infty)$. Мы получим тогда для (9.6.2) оценку

$$O(n^{-k})\max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}|f(t)|\int_0^{\varepsilon}t^{\alpha}\,|L_n^{(\alpha+k+1)}(t)|\,dt+$$

$$+O(n^{-k})\int^{\omega}e^{-t}t^{\alpha}\,|f(t)|\,|L_n^{(\alpha+k+1)}(t)|\,dt+O(n^{-k})\int_{\omega}^{\infty}e^{-t}t^{\alpha}\,|f(t)|\,|L_n^{(\alpha+k+1)}(t)|\,dt. \tag{9.6.3}$$

Из (7.6.8) вытекает, что первый из этих интегралов равен

$$O(1)\int_0^{\frac{1}{n}}t^{\alpha}n^{\alpha+k+1}dt+O(1)\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon}t^{\alpha}t^{-\frac{\alpha+k+1}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha+k+1}{2}-\frac{1}{4}}\,dt=O(n^{k}). \tag{9.6.4}$$

Второй интеграл равен $O(n^{\frac{\alpha+k+1}{2}-\frac{1}{4}})=o(n^{k})$.

Затем применим теорему 8.91.2, в которой заменим α на $\alpha+k+1$ и положим $\lambda=k+\frac{1}{3}$; мы видим, что $\lambda-\frac{1}{3}=k>\frac{\alpha+k+1}{2}-\frac{1}{4}$; отсюда получаем, что третий интеграл равен

$$O(1)\int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}t^{\alpha}|f(t)|\,t^{-k-\frac{1}{3}}n^{k}\,dt=O(n^{k})\int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}t^{\alpha-k-\frac{1}{3}}|f(t)|\,dt. \qquad (9.6.5)$$

Таким образом, выражение (9.6.2) может быть представлено в виде

$$O(1)\max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}|f(t)|+O(1)\int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}t^{\alpha-k-\frac{1}{3}}|f(t)|\,dt+o(1). \qquad (9.6.6)$$

Здесь постоянные, входящие в $O(1)$, не зависят от ε и ω. В предположении, что $f(0)=0$, утверждение доказано.

(2) Пусть $k=\alpha+\frac{1}{2}$; применим теорему 1.6 (теорему Хелли) к линейным операторам

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{U}_n(f)&=\frac{1}{C_n^{(k)}\Gamma(\alpha+1)}\int_0^1 e^{-t}t^{\alpha}f(t)\,L_n^{(\alpha+k+1)}(t)\,dt,\\ \mathfrak{U}(f)&=f(0). \end{aligned}\right\} \qquad (9.6.7)$$

Достаточно доказать, что второе из условий (1.6.10) не выполнено. В самом деле, если это условие не выполнено, то существует такая непрерывная функция $f(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$, для которой не имеет места соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{U}_n(f)=\mathfrak{U}(f).$$

Продолжая эту функцию при $x>1$ условием $f(x)=0$, мы получим требуемый контрпример. (Применяя замечание, сделанное в связи с теоремой 1.6, можно построить такую непрерывную функцию $f(x)$, для которой выражение (9.6.2) будет неограниченным при $n\to\infty$.)

Пусть теперь Ω — положительная постоянная, не зависящая от n, тогда

$$\frac{1}{C_n^{(k)}\Gamma(\alpha+1)}\int_0^1 e^{-t}t^{\alpha}|L_n^{(\alpha+k+1)}(t)|\,dt>An^{-k}\int_0^{\frac{\Omega}{n}} t^{\alpha}|L_n^{(\alpha+k+1)}(t)|\,dt, \qquad (9.6.8)$$

где A — положительная постоянная, не зависящая от Ω и n. Последнее выражение в соответствии с (8.1.8) будет

$$\sim\int_0^{\Omega} z^{\alpha}z^{-\frac{\alpha+k+1}{2}}|J_{\alpha+k+1}(2z^{\frac{1}{2}})|\,dz=\int_0^{\Omega} z^{-\frac{3}{4}}|J_{\alpha+k+1}(2z^{\frac{1}{2}})|\,dz.$$

Этот интеграл произвольно велик вместе с Ω.

(3) Интеграл (9.1.19) существует, если

$$f(x)=O\left(e^{\frac{x}{2}}x^{k-\alpha-\frac{2}{3}-\delta}\right),\quad \delta>0,\quad x\to+\infty. \qquad (9.6.9)$$

С другой стороны, нетрудно доказать, что ряд по многочленам Лагерра

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' a_nL_n^{(\alpha)}(x),$$

соответствующий функции $f(x)=e^{\frac{x}{2}}x^{k-\alpha}$, $(C,\ k)$-несуммируем в точке $x=0$. Здесь предполагается, что выполнено условие $k>\alpha+\frac{1}{2}$. Действительно, из (9.5.21) при $\mu=k-\alpha$ мы получаем

$$(1-r)^{-k-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nL_n^{(\alpha)}(0)\,r^n=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\,2^{k+1}(1-r)^{-\alpha-1}(1+r)^{-k-1}. \tag{9.6.10}$$

Метод Дарбу дает для коэффициента при r^n в разложении этой функции число

$$C(-1)^nn^k+o(n^k),\quad C>0,\quad n\to\infty. \tag{9.6.11}$$

Это доказывает утверждение.

Заметим также, что ряд по многочленам Лагерра $(C,\ k)$-суммируем с произвольным $k>\alpha+\frac{1}{2}$ в точке $x=0$, если $f(x)$ непрерывна при $x=0$ и

$$f(x)=O\left(e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{1}{6}}\right),\quad x\to\infty. \tag{9.6.12}$$

Но для специальной функции $f(x)=e^{\frac{x}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ ряд по многочленам Лагерра $(C,\ k)$-несуммируем в точке $x=0$ *ни при каком* $k>\alpha+\frac{1}{2}$.

ГЛАВА X

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей главе мы рассмотрим одно обобщение теоремы Фейера о представлении неотрицательных тригонометрических многочленов (см. § 1.2) на некоторый общий класс неотрицательных функций. В частности, при исследовании этого представления нас будет интересовать, подчинена ли данная функция каким-либо условиям непрерывности. Распространения теоремы Фейера в этом направлении важны для исследования асимптотического поведения общих ортогональных многочленов, соответствующих распределению на конечном вещественном отрезке или на единичной окружности (глава XI). Нам кажется более удобным отделить эти вопросы от самого предмета изучения.

Относительно результатов этой главы см. Сегё [6], [7], [8], [9], а также Гренандер и Сегё [1], пп. 1.12—1.15.

10.1. Теоремы Фату

Теорема 10.1.1. *Пусть $f(\theta)$ — функция, интегрируемая в смысле Лебега, и пусть*

$$f(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\,dt \tag{10.1.1}$$

— соответствующий интеграл Пуассона. Тогда почти всюду на отрезке $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pm\pi$

$$\lim_{r\to 1-0} f(r, \theta)=f(\theta). \tag{10.1.2}$$

См. Зигмунд [2], § 3.442.

Теорема 10.1.2. *Пусть*

$$F(z)=c_0+c_1 z+c_2 z^2+\ldots+c_n z^n+\ldots \tag{10.1.3}$$

— регулярная функция в круге $|z|<1$ и пусть интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |F(re^{i\theta})|^2\,d\theta \tag{10.1.4}$$

ограничен при $r<1$. (Это условие эквивалентно сходимости ряда

$$|c_0|^2+|c_1|^2+|c_2|^2+\ldots+|c_n|^2+\ldots) \tag{10.1.5}$$

Тогда почти всюду на отрезке $-\pi\leqslant\theta\leqslant+\pi$

$$\lim_{r\to 1-0} F(re^{i\theta})=F(e^{i\theta}). \tag{10.1.6}$$

Кроме того, $F(e^{i\theta})$ измерима и $|F(e^{it})|^2$ интегрируема в смысле Лебега. Ряд Фурье функции $F(e^{i\theta})$ получается из (10.1.3) подстановкой $z=e^{i\theta}$.

Эта теорема принадлежит Фату [1]. Мы говорим, что $F(z)$ принадлежит классу H_2. Всякая функция $F(z)$, регулярная и ограниченная в круге $|z|<1$, принадлежит этому классу. Относительно более общих классов H_δ см. Ф. Рисс [2] и В. И. Смирнов [2] *). В частности, если $F(z)$ принадлежит классу H_1, то граничные значения $F(e^{i\theta})$ существуют почти всюду, $|F(e^{i\theta})|$ интегрируема в смысле Лебега, и применима теорема Коши на окружности $|z|=1$ (см. цитированные статьи Ф. Рисса, стр. 94, c) и В. И. Смирнова, стр. 337—338).

10.2. Обобщение представления Фейера

В связи с этим параграфом см. Сегё [7].

(1) Пусть $g(\theta)$ — неотрицательный тригонометрический многочлен, не обращающийся в нуль тождественно. В соответствии с теоремой 1.2.2 существует многочлен $h(z)$ той же степени, который определяется однозначно следующими условиями:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(a) } g(\theta)=|h(z)|^2, \text{ где } z=e^{i\theta};\\ \text{(b) } h(z) \text{ не обращается в нуль в круге } |z|<1;\\ \text{(c) } h(0) \text{ вещественно и положительно.}\end{array}\right\} \tag{10.2.1}$$

Мы имеем, очевидно,

$$\ln g(\theta)=2\Re\{\ln h(z)\}, \quad z=e^{0i}. \tag{10.2.2}$$

Функция $\ln h(z)$ регулярна в круге $|z|\leqslant 1$, за исключением тех точек $z=e^{i\theta}$, которые соответствуют нулям $g(\theta)$; в этих точках обе функции $\ln g(\theta)$ и $\ln h(z)$ логарифмически бесконечны; $\ln h(0)$ — вещественное число. Функция $2\Re\{\ln h(z)\}$ — регулярная гармоническая функция в круге $|z|<1$, ее граничные значения даются абсолютно интегрируемой функцией $\ln g(\theta)$. Применяя теорему Гаусса о среднем значении, мы получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\ln g(\theta)\,d\theta=2\Re\{\ln h(0)\}=2\ln h(0), \tag{10.2.3}$$

следовательно,

$$h^2(0)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\ln g(\theta)\,d\theta\right\}=\mathfrak{G}(g). \tag{10.2.4}$$

Последнее выражение называется *средним геометрическим* функции $g(\theta)$.

(2) Выражение (10.2.2) позволяет нам распространить рассматриваемое представление на произвольные неотрицательные функции $f(\theta)$ (вместо $g(\theta)$), определенные на отрезке $[-\pi, \pi]$, интегрируемые в смысле Лебега, и такие, что $\mathfrak{G}(f)>0$. Последнее условие эквивалентно существованию интеграла

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\ln f(\theta)\,d\theta=\int_{0\leqslant f(\theta)\leqslant 1}\ln f(\theta)\,d\theta+\int_{f(\theta)>1}\ln f(\theta)\,d\theta. \tag{10.2.5}$$

Существование второго интеграла в правой части вытекает из интегрируемости $f(\theta)$. Таким образом, условие $\mathfrak{G}(f)>0$ эквивалентно существованию

*) См. также монографию И. И. Привалова «Граничные свойства аналитических функций», М.—Л., 1950. (*Прим. перев.*)

первого из интегралов в правой части. Это представляет собой ограничение «близости» $f(\theta)$ к нулю. Следствием этого условия является то, что функция $f(\theta)$ может обращаться в нуль лишь на множестве меры нуль.

Мы введем теперь гармоническую функцию $u(re^{i\theta})$ посредством интеграла Пуассона от функции $\frac{1}{2}\ln f(\theta)$:

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\ln f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\,dt,\quad 0\leqslant r<1. \tag{10.2.6}$$

В случае непрерывной функции $f(\theta)>0$ известно (см., например, З и г м у н д [2], § 3.41), что

$$\lim_{r\to 1-0}u(re^{i\theta})=\frac{1}{2}\ln f(\theta) \tag{10.2.7}$$

равномерно по θ. В общем случае, рассмотренном выше, соотношение (10.2.7) имеет место почти всюду, причем без равномерной сходимости (см. теорему 10.1.2). Если теперь мы дополним функцию u до аналитической функции $u+iv=k(z)$ с условием, что $k(0)$ вещественно, то $k(z)$ будет однозначно определена. Полагая $D(z)=e^{k(z)}$, мы получим аналог (обобщение) функции $h(z)$, рассмотренной выше. Эта функция $D(z)=D(f;z)$ имеет следующие свойства (см. С е г ё [7], стр. 237):

(a′) $D(z)$ принадлежит классу H_2 (§ 10.1); почти всюду на отрезке $-\pi\leqslant\theta\leqslant+\pi$ существует предел

$$\lim_{r\to 1-0}D(re^{i\theta})=D(e^{i\theta})\ \text{ и }\ f(\theta)=|D(e^{i\theta})|^2; \tag{10.2.8}$$

(b′) $D(z)\neq 0$ в круге $|z|<1$;

(c′) $D(0)$ вещественно и положительно.

Мы имеем снова $D^2(0)=\mathfrak{G}(f)$; это очевидно из (10.2.6). Кроме того, мы покажем, что для произвольной непрерывной функции $F(\theta)$ периода 2π имеет место равенство

$$\lim_{r\to 1-0}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\theta)\,|D(re^{i\theta})|^2\,d\theta=\int_{-\pi}^{+\pi}F(\theta)\,f(\theta)\,d\theta. \tag{10.2.9}$$

Если $D(z)=d_0+d_1z+d_2z^2+\ldots$, то в силу неравенства Буняковского—Шварца имеем

$$\left\{\int_{-\pi}^{+\pi}\big||D(e^{i\theta})|^2-|D(re^{i\theta})|^2\big|\,d\theta\right\}^2\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\pi}^{+\pi}(|D(e^{i\theta})|-|D(re^{i\theta})|)^2\,d\theta\int_{-\pi}^{+\pi}(|D(e^{i\theta})|+|D(re^{i\theta})|)^2\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-\pi}^{+\pi}|D(e^{i\theta})-D(re^{i\theta})|^2\,d\theta\int_{-\pi}^{+\pi}(|D(e^{i\theta})|^2+|D(re^{i\theta})|^2)\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant 8\pi\int_{-\pi}^{+\pi}|D(e^{i\theta})|^2\,d\theta\sum_{n=1}^{\infty}(1-r^n)^2|d_n|^2\to 0$$

при $r \to 1-0$. Здесь мы применили свойство (a′) (см. также В. И. Смирнов [2], стр. 338).

Следует заметить, что функция $D(z)$ определена неоднозначно условиями (a′), (b′) и (c′). Мы можем, например, умножить ее на $\exp\{-(1+z)/(1-z)\}$. Об этом см. Сегё [7], стр. 241.

(3) Из (10.2.6) мы можем получить следующее явное выражение для $D(z)$ через $f(\theta)$:

$$D(z) = D(f;\, z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln f(t)\, \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\, dt\right\}, \quad |z|<1. \tag{10.2.10}$$

Если $f(\theta)$ — четная функция, то разложение $D(z)$ в степенной ряд в окрестности $z=0$ имеет вещественные коэффициенты. Пусть $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ — произвольные функции, удовлетворяющие тем же условиям, что и $f(\theta)$, и пусть ϱ — произвольное комплексное число, $\varrho \neq 0$. Тогда

$$D(f_1;\, z)\, D(f_2;\, z) = D(f_1 f_2;\, z), \quad \{D(f;\, z)\}^{\varrho} = D(f^{\varrho};\, z). \tag{10.2.11}$$

В качестве примера приведем случай $f(\theta) = g(\theta)$, рассмотренный в (1). Мы имеем

$$D(g;\, z) = h(z), \quad D(g^{-1};\, z) = \{h(z)\}^{-1}. \tag{10.2.12}$$

Во второй формуле мы предполагаем, что тригонометрический многочлен $g(\theta)$ положителен.

Другим примером является

$$f(\theta) = 2^{\gamma+\delta}(1-\cos\theta)^{\gamma}(1+\cos\theta)^{\delta}, \quad D(f,\, z) = (1-z)^{\gamma}(1+z)^{\delta},$$
$$\gamma > -\frac{1}{2}, \quad \delta > -\frac{1}{2}. \tag{10.2.13}$$

10.3. Дальнейшее изучение представления положительных функций

Вывод асимптотической формулы для многочленов, ортогональных на единичной окружности, требует знания некоторых дополнительных свойств определенного выше представления. В частности, нам нужно будет выяснить поведение функции $D(z)$ на единичной окружности $|z|=1$. В связи с этим будет необходимо подчинить функцию $f(\theta)$ некоторым ограничениям.

(1) Сначала опять рассмотрим случай неотрицательного тригонометрического многочлена $g(\theta)$, не равного нулю тождественно; пусть $g(\theta) = |h(z)|^2$, $z = e^{i\theta}$, будет нормализованное представление, определенное в теореме 1.2.2. Тогда по (10.2.10) при $0 \leqslant r < 1$ мы будем иметь

$$D(g;\, z) = h(z) = h(re^{i\theta}) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln g(t)\, \frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\, dt\right\}. \tag{10.3.1}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{sign} h(re^{i\theta}) = |h(re^{i\theta})|^{-1} h(re^{i\theta}) = \exp\left\{\frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln g(t)\, \frac{2r\sin(\theta-t)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\, dt\right\} =$$
$$= \exp\left\{\frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [\ln g(t) - \ln g(\theta)]\, \frac{2r\sin(\theta-t)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\, dt\right\}. \tag{10.3.2}$$

Таким образом, для всех значений θ, за исключением нулей $g(\theta)$, будем иметь

$$\operatorname{sign} h(e^{i\theta}) = |h(e^{i\theta})|^{-1} h(e^{i\theta}) = [g(\theta)]^{-\frac{1}{2}} h(e^{i\theta}) =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln g(t) \operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [\ln g(t) - \ln g(\theta)] \operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt\right\}. \qquad (10.3.3)$$

Первый интеграл взят в смысле главного значения Коши, второй — абсолютно сходящийся.

(2) Рассматриваемые представления легко могут быть распространены на положительные непрерывные функции $f(\theta)$, удовлетворяющие некоторым достаточным условиям существования интегралов, соответствующих тем, которые фигурируют в (10.3.3). Так как $f(\theta)$ непрерывна, то, определяя $D(z)$ как в § 10.2, мы имеем равномерно для всех значений θ

$$\lim_{r\to 1-0} |D(re^{i\theta})|^2 = f(\theta). \qquad (10.3.4)$$

Если интеграл

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\ln f(t) - \ln f(\theta)| \left|\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\right| dt \qquad (10.3.5)$$

существует, то существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \ln f(t) \operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt \qquad (10.3.6)$$

в смысле главного значения Коши. Докажем затем существование граничного значения для

$$\operatorname{sign} D(re^{i\theta}) = \exp\left\{\frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln f(t) \frac{2r\sin(\theta-t)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\,dt\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [\ln f(t) - \ln f(\theta)] \frac{2r\sin(\theta-t)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\,dt\right\}. \qquad (10.3.7)$$

Действительно, если ε — фиксированное положительное число, то мы имеем

$$\lim_{r\to 1-0} \int_{|\theta-t|>\varepsilon} [\ln f(t) - \ln f(\theta)] \frac{2r\sin(\theta-t)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\,dt =$$

$$= \int_{|\theta-t|>\varepsilon} [\ln f(t) - \ln f(\theta)] \operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt.$$

С другой стороны, $1-2r\cos(\theta-t)+r^2 \geqslant 2r\{1-\cos(\theta-t)\}$; таким образом,

$$\left|\int_{|\theta-t|\leqslant\varepsilon} [\ln f(t) - \ln f(\theta)] \frac{2r\sin(\theta-t)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|\theta-t|\leqslant\varepsilon} |\ln f(t) - \ln f(\theta)| \frac{|\sin(\theta-t)|}{1-\cos(\theta-t)}\,dt,$$

и последний интеграл произвольно мал вместе с ε.

Следовательно, при указанных условиях предел

$$\lim_{r\to 1-0} D(re^{i\theta}) = D(e^{i\theta}) \tag{10.3.8}$$

существует, и справедливо представление, аналогичное (10.3.3), для $\operatorname{sign} D(e^{i\theta})$:

$$\operatorname{sign} D(e^{i\theta}) = \exp\left\{\frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln f(t)\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [\ln f(t)-\ln f(\theta)]\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt\right\}. \tag{10.3.9}$$

Итак, в этом случае мы имеем $f(\theta) = |D(e^{i\theta})|^2$.

Условие (10.3.5) выполнено, если функция $f(\theta)$ подчинена условию Дини — Липшица

$$|f(\theta+\delta)-f(\theta)| < L|\ln\delta|^{-1-\lambda}, \tag{10.3.10}$$

где L и λ — фиксированные положительные постоянные. В настоящем параграфе это последнее условие будем предполагать выполненным. *Тогда предел* (10.3.8) *существует равномерно по* θ, *и функция* $D(e^{i\theta})$ *непрерывна.*

Предыдущие рассуждения могут быть существенно упрощены, если применить теорию сопряженных функций (см. З и г м у н д [2], §§ 3.321 и 3.45).

(3) Пусть m — целое положительное число. Тогда существует такой положительный тригонометрический многочлен $g(\theta)$ порядка m, что

$$|f(\theta)-\{g(\theta)\}^{-1}| < P(\ln m)^{-1-\lambda}, \tag{10.3.11}$$

где P — постоянная зависящая от максимума и минимума функции $f(\theta)$, а также от L и λ. Этот результат получается, если применить теорему 1.3.2 к функции $\{f(\theta)\}^{-1}$, которая удовлетворяет условию Дини — Липшица

$$|\{f(\theta+\delta)\}^{-1}-\{f(\theta)\}^{-1}| < \{\min f(\theta)\}^{-2} L(\ln\delta)^{-1-\lambda}.$$

Если $D(z)$ и $h(z)$ означают те же функции, что в § 10.2, соответствующие $f(\theta)$ и $g(\theta)$, то можно показать, что

$$|D(z)-\{h(z)\}^{-1}| < Q(\ln m)^{-\lambda} \tag{10.3.12}$$

равномерно в круге $|z|\leqslant 1$. Постоянная Q зависит от максимума и минимума $f(\theta)$, а также от L и λ.

Достаточно это доказать при $|z|=1$. Аналогичное неравенство для разности $|D(z)|$ и $|h(z)|^{-1}$ тривиально даже с $(\ln m)^{-1-\lambda}$. Таким образом, нам нужно получить лишь оценку выражения

$$\operatorname{sign} h(e^{i\theta})\{\operatorname{sign} D(e^{i\theta})-\operatorname{sign}[h(e^{i\theta})]^{-1}\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{\ln f(t)-\ln[g(t)]^{-1}\}\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt\right\}-1; \tag{10.3.13}$$

или, что сводится к тому же, оценку выражения

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\{\ln f(t)-\ln[g(t)]^{-1}\}\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt. \tag{10.3.14}$$

Для этого применим теорему 1.22.1. Мы имеем

$$|g(\theta+\delta)-g(\theta)| \leqslant \delta m\{\max g(\theta)\}, \tag{10.3.15}$$

следовательно,

$$|\ln g(\theta+\delta) - \ln g(\theta)| \leqslant \delta m \frac{\max g(\theta)}{\min g(\theta)}. \tag{10.3.16}$$

Пусть $E = E(\theta, m, \lambda)$ — множество значений t, определяемых условием

$$|\theta - t| \leqslant m^{-1}(\ln m)^{-\lambda},$$

а E' — множество, дополнительное к E на отрезке $[-\pi, \pi]$. Переписывая (10.3.14) в виде

$$\int_E \{\ln f(t) - \ln f(\theta) - \ln [g(t)]^{-1} + \ln [g(\theta)]^{-1}\} \operatorname{ctg}\frac{\theta - t}{2}\, dt +$$

$$+ \int_{E'} \{\ln f(t) - \ln [g(t)]^{-1}\} \operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\, dt \tag{10.3.17}$$

и применяя (10.3.10) и (10.3.16), мы получаем для первого интеграла

$$O(1)\int_E |\ln|\theta - t||^{-1-\lambda}|\theta - t|^{-1}\,dt + O(m)\int_E |\theta - t|\left|\operatorname{ctg}\frac{\theta - t}{2}\right| dt =$$

$$= O[(\ln m)^{-\lambda}] + O(m)\,O[m^{-1}(\ln m)^{-\lambda}] = O[(\ln m)^{-\lambda}].$$

С другой стороны, (10.3.11) дает для второго интеграла следующую оценку:

$$O[(\ln m)^{-1-\lambda}]\int_{E'}\left|\operatorname{ctg}\frac{\theta - t}{2}\right| dt = O[(\ln m)^{-\lambda}].$$

Этим утверждение доказано.

10.4. «Локальные» свойства представления положительных функций

В этом параграфе мы доказываем несколько теорем о представлении положительных функций, которые имеют важные применения в главах XII и XIII.

(1) Справедлива следующая теорема:

Теорема 10.4.1. *Пусть $f(\theta)$ — интегрируемая в смысле Римана функция, имеющая вид*

$$f(\theta) = \varphi(\theta)\,|(z - z_1)^{\sigma_1}(z - z_2)^{\sigma_2}\ldots(z - z_l)^{\sigma_l}|, \quad z = e^{i\theta}, \tag{10.4.1}$$

где $0 < A \leqslant \varphi(\theta) \leqslant B$, $z_\nu = e^{i\theta_\nu}$ — различные точки на единичной окружности, $\sigma_\nu > 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, l$. Пусть $f(\theta)$ дифференцируема в фиксированной точке $\theta = \alpha$, $a = e^{i\alpha} \neq z_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, l$, и пусть в окрестности точки $\theta = \alpha$ отношение

$$\frac{f(\theta) - f(\alpha) - f'(\alpha)(\theta - \alpha)}{(\theta - \alpha)^2} \tag{10.4.2}$$

ограниченно.

Если $D(f; z)$ означает аналитическую функцию, соответствующую $f(\theta)$ в смысле § 10.2, то существуют следующие пределы:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{r\to 1-0} D(f; re^{i\alpha}) &= D(f; e^{i\alpha}) = D(f; a), \\ \lim_{r\to 1-0} D'(f; re^{i\alpha}) &= D'(f; e^{i\alpha}) = D'(f; a). \end{aligned}\right\} \tag{10.4.3}$$

Это утверждение сохраняет силу и при более общих условиях (см. Зигмунд [2], § 3.44 и пример 13). Следующее элементарное рассуждение основано на формуле (10.2.10). Если мы интегрируем вдоль фиксированной дуги, не содержащей точки a, то соответствующие пределы очевидно существуют. Если t близко к α, то мы можем написать

$$\ln f(t) = c + d\,(e^{-it} - e^{-i\alpha}) + O(1)\,(t-\alpha)^2, \tag{10.4.4}$$

где c и d — некоторые постоянные. Но если $|z| < 1$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \{c + d\,(e^{-it} - e^{-i\alpha})\}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,dt = c - de^{-i\alpha}. \tag{10.4.5}$$

Таким образом, остается показать, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то функция

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} O(1)\,(t-\alpha)^2\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,dt \tag{10.4.6}$$

так же, как и ее производная по z, произвольно мала, когда $r \to 1-0$, $z = re^{i\alpha}$. Это справедливо для производной, так как

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{(t-\alpha)^2\,dt}{|1-re^{i(\alpha-t)}|^2} = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{(t-\alpha)^2}{1-2r\cos(\alpha-t)+r^2}\,dt < \frac{1}{4r}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{(t-\alpha)^2}{\sin^2\frac{\alpha-t}{2}}\,dt. \tag{10.4.7}$$

Рассуждения еще проще для самой функции, так как в этом случае в последнем знаменателе стоит $|\sin\{(\alpha-t)/2\}|$ вместо $\sin^2\{(\alpha-t)/2\}$.

(2) Теперь мы докажем следующую теорему:

Теорема 10.4.2. *Пусть $f(\theta)$ — интегрируемая в смысле Римана функция, такая, что $0 < A \leqslant f(\theta) \leqslant B$ при $-\pi \leqslant \theta \leqslant +\pi$. Допустим, кроме того, что $f(\theta)$ дифференцируема в фиксированной точке $\theta = \alpha$ и что выражение* (10.4.2) *ограниченно в окрестности точки $\theta = \alpha$.*

Если ε — произвольное положительное число, то существуют такие положительные тригонометрические многочлены $g_1(\theta)$ и $g_2(\theta)$, что

$$f_1(\theta) \leqslant f(\theta) \leqslant f_2(\theta),\quad f_1(\alpha) = f_2(\alpha), \tag{10.4.8}$$

где $f_1(\theta) = \{g_1(\theta)\}^{-1}$, $\quad f_2(\theta) = \{g_2(\theta)\}^{-1}$ *и*

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{f_2(\theta)-f_1(\theta)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta < \varepsilon. \tag{10.4.9}$$

Если m и M представляют собой соответственно нижнюю и верхнюю границы отношения (10.4.2) *при $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, то функция $f_1(\theta)$ больше, чем некоторое положительное число, которое зависит только от m, A, $f(\alpha)$ и $f'(\alpha)$; аналогично функция $f_2(\theta)$ меньше, чем некоторое положительное число, зависящее только от M, $f(\alpha)$ и $f'(\alpha)$.*

Заметим, что из (10.4.8) вытекает, что

$$f_1(\alpha) = f(\alpha) = f_2(\alpha),\qquad f_1'(\alpha) = f'(\alpha) = f_2'(\alpha), \tag{10.4.10}$$

следовательно, интеграл (10.4.9) существует; кроме того, из (10.4.9) следует, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\ln f_2(\theta)-\ln f_1(\theta)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta < \varepsilon', \tag{10.4.11}$$

где ε' произвольно мало вместе с ε.

Для доказательства мы применим теорему 1.5.4 к двум интегрируемым в смысле Римана функциям

$$\left.\begin{aligned} p(\theta) &= \frac{[f(\theta)]^{-1} - c - d\sin(\theta-\alpha)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}, \\ c &= \{f(\alpha)\}^{-1}, \quad d = -f'(\alpha)\{f(\alpha)\}^{-2}, \\ q(\theta) &= \frac{f(\theta) - f(\alpha) - f'(\alpha)\sin(\theta-\alpha)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{10.4.12}$$

Поэтому если дано $\delta > 0$, то существуют такие тригонометрические многочлены $P(\theta)$ и $Q(\theta)$, что

$$\left.\begin{aligned} p(\theta) \leqslant P(\theta), \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \{P(\theta) - p(\theta)\}\, d\theta < \delta, \\ q(\theta) \leqslant Q(\theta), \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \{Q(\theta) - q(\theta)\}\, d\theta < \delta. \end{aligned}\right\} \tag{10.4.13}$$

Здесь $\max P(\theta)$ и $\max Q(\theta)$ меньше, чем некоторые константы, зависящие соответственно только от m, A, $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ и от M и $f'(\alpha)$. Полагая

$$g_1(\theta) = c + d\sin(\theta-\alpha) + P(\theta)\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}, \quad f_1(\theta) = \{g_1(\theta)\}^{-1}, \tag{10.4.14}$$

мы найдем, что $\{f(\theta)\}^{-1} \leqslant g_1(\theta)$, т. е. $f_1(\theta) \leqslant f(\theta)$, $f_1(\alpha) = f(\alpha)$, и что

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(\theta) - f_1(\theta)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\, d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) f_1(\theta) \frac{g_1(\theta) - \{f(\theta)\}^{-1}}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\, d\theta \leqslant B^2\delta. \tag{10.4.15}$$

Здесь функция $f_1(\theta)$ больше, чем положительная константа, зависящая от m, A, $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$.

С другой стороны, рассматривая непрерывную функцию

$$G(\theta) = \frac{\left\{f(\alpha) + f'(\alpha)\sin(\theta-\alpha) + Q(\theta)\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right\}^{-1} - c - d\sin(\theta-\alpha)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\{R(\theta)\}^{-1} - c - d\sin(\theta-\alpha)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}} > \frac{R^{-1} - c - d\sin(\theta-\alpha)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}, \tag{10.4.16}$$

имеем $f(\theta) \leqslant R(\theta) < R$, где R — константа, зависящая от M, $f(\alpha)$ и $f'(\alpha)$. Далее, в соответствии с теоремой 1.3.1 можно определить такой тригонометрический многочлен $S(\theta)$, что

$$\frac{R^{-1} - c - d\sin(\theta-\alpha)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}} < S(\theta) < G(\theta) < S(\theta) + \delta. \tag{10.4.17}$$

Если мы положим

$$g_2(\theta) = c + d\sin(\theta-\alpha) + S(\theta)\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}, \quad f_2(\theta) = \{g_2(\theta)\}^{-1}, \tag{10.4.18}$$

то получим

$$R^{-1} < g_2(\theta) < \{R(\theta)\}^{-1} < g_2(\theta) + \delta\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}. \tag{10.4.19}$$

Кроме того, $g_2(\theta) < \{f(\theta)\}^{-1}$. Учитывая последнее неравенство в (10.4.19) и (10.4.13), мы получаем

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f_2(\theta)-f(\theta)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\left\{g_2(\theta)+\delta\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right\}^{-1}-f(\theta)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta +$$

$$+\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\{g_2(\theta)\}^{-1}-\left\{g_2(\theta)+\delta\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right\}^{-1}}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta < \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R(\theta)-f(\theta)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta +$$

$$+\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\{g_2(\theta)\}^{-1}-\left\{g_2(\theta)+\delta\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right\}^{-1}}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta <$$

$$< \delta + \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\{g_2(\theta)\}^{-1}-\left\{g_2(\theta)+\delta\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right\}^{-1}}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta. \qquad (10.4.20)$$

Последний интеграл произвольно мал вместе с δ (так как $g_2(\theta) > R^{-1}$).

Складывая (10.4.15) с (10.4.20) и выбирая δ достаточно малым, мы получаем требуемое утверждение.

(3) Т е о р е м а 10.4.3. *Для аналитических функций $D(f_1; z)$, $D(f; z)$, $D(f_2; z)$, соответствующих в смысле § 10.2 функциям $f_1(\theta)$, $f(\theta)$, $f_2(\theta)$ теоремы 10.4.2, справедливы следующие неравенства:*

$$|D(f; a)-D(f_\nu; a)| < \varepsilon', \quad |D'(f; a)-D'(f_\nu; a)| < \varepsilon', \qquad (10.4.21)$$

где $a=e^{i\alpha}$, $\nu=1, 2$, а ε' произвольно мало вместе с ε.

Символы $D(f; a)$, $D'(f; a)$ имеют те же значения, что и в (10.4.3).

В соответствии с (10.2.10) при $|z|<1$, $\nu=1, 2$, мы имеем

$$\left.\begin{aligned}
\ln D(f; z)-\ln D(f_\nu; z) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{\ln f(t)-\ln f_\nu(t)\}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,dt,\\
z\frac{D'(f; z)}{D(f; z)}-z\frac{D'(f_\nu; z)}{D(f_\nu; z)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{\ln f(t)-\ln f_\nu(t)\}\frac{ze^{-it}}{(1-ze^{-it})^2}\,dt,
\end{aligned}\right\} \qquad (10.4.22)$$

и при $z=re^{i\alpha}=ra$, $r\to 1-0$, имеем

$$\left.\begin{aligned}
\ln D(f; a)-\ln D(f_\nu; a) &= \frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{\ln f(t)-\ln f_\nu(t)\}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-t}{2}\,dt,\\
a\frac{D'(f; a)}{D(f; a)}-a\frac{D'(f_\nu; a)}{D(f_\nu; a)} &= -\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\ln f(t)-\ln f_\nu(t)}{\sin^2\frac{t-\alpha}{2}}\,dt.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.4.23)$$

Оба интеграла абсолютно сходятся и произвольно малы вместе с ε (см. (10.4.11)); $D(f; a)$ — определенное число, отличное от нуля.

(4) Т е о р е м а 10.4.4. *Пусть $f(\theta)$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы 10.4.1. Если ε — данное произвольное положительное число, то существуют такие положительные тригонометрические многочлены $g_1(\theta)$ и $g_2(\theta)$, что полагая*

$$\left.\begin{aligned}
f_1(\theta) &= \{g_1(\theta)\}^{-1}\,|(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_l)|^{\sigma}, \quad z=e^{i\theta},\\
f_2(\theta) &= \{g_2(\theta)\}^{-1},
\end{aligned}\right\} \qquad (10.4.24)$$

будем иметь

$$0 \leqslant f_1(\theta) \leqslant f(\theta) \leqslant f_2(\theta), \quad f_1(\alpha) = f_2(\alpha), \tag{10.4.25}$$

и

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\ln f_2(\theta) - \ln f_1(\theta)}{\sin^2 \frac{\theta - \alpha}{2}} d\theta < \varepsilon. \tag{10.4.26}$$

Здесь σ — *наименьшее целое четное число, большее чем* $\max(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l)$; $\max f_2(\theta)$ *ограничен сверху, а* $\min\{g_1(\theta)\}^{-1}$ *ограничен снизу, причем обе границы не зависят от* ε.

Для функций $D(f_1; z)$, $D(f; z)$ *и* $D(f_2; z)$, *соответствующих функциям* $f_1(\theta)$, $f(\theta)$ *и* $f_2(\theta)$, *справедливо утверждение, аналогичное теореме* 10.4.3.

З а м е ч а н и е. Мы можем в качестве σ выбрать любое четное число, большее чем $\max(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l)$; в частности, можно выбрать число, кратное четырем. Это существенно для некоторых дальнейших целей (см. § 13.5, (2)).

Пусть функция $\hat{f}(\theta)$ совпадает с $f(\theta)$ всюду, за исключением некоторых отрезков вокруг точек θ_ν, $\nu = 1, \ldots, l$, в которых $\hat{f}(\theta) = 1$. Эти отрезки выбираются столь малыми, чтобы они взаимно не пересекались, не содержали точки α, и чтобы в каждом из них $f(\theta) \leqslant 1$. Кроме того, пусть

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\ln \hat{f}(\theta) - \ln f(\theta)}{\sin^2 \frac{\theta - \alpha}{2}} d\theta < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10.4.27}$$

Тогда $f(\theta) \leqslant \hat{f}(\theta)$ при всех θ и $f(\theta) = \hat{f}(\theta)$ в некоторой окрестности точки α, которая может быть выбрана независимо от ε, если только ε достаточно мало. Функция $\hat{f}(\theta) = \hat{f}(\varepsilon; \theta)$ удовлетворяет условиям теоремы 10.4.2 и зависит от ε, хотя и имеет верхнюю границу, не зависящую от ε. Это же относится к верхней границе $\hat{M}$ отношения, соответствующего (10.4.2).

Определим теперь тригонометрический многочлен таким образом, чтобы для $f_2(\theta) = \{g_2(\theta)\}^{-1}$ выполнялись соотношения

$$\left.\begin{aligned} & f(\theta) \leqslant \hat{f}(\theta) \leqslant f_2(\theta), \quad f(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = f_2(\alpha), \\ & \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\ln f_2(\theta) - \ln \hat{f}(\theta)}{\sin^2 \frac{\theta - \alpha}{2}} d\theta < \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}\right\} \tag{10.4.28}$$

Отметим, что $\max f_2(\theta)$ меньше, чем некоторая постоянная, которая не зависит от ε. (Мы используем здесь независимость величины $\hat{M}$ от ε.)

С другой стороны, пусть функция $\check{f}(\theta)$ совпадает с $f(\theta)$ всюду, за исключением непересекающихся отрезков вокруг θ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, l$, не содержащих α, и таких, что на них имеет место неравенство

$$|(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_l)|^\sigma \leqslant |(z - z_1)^{\sigma_1} (z - z_2)^{\sigma_2} \ldots (z - z_l)^{\sigma_l}|, \tag{10.4.29}$$

где $z = e^{i\theta}$. На этих отрезках мы определим $\check{f}(\theta)$ так:

$$\check{f}(\theta) = \varphi(\theta)\, |(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_l)|^\sigma, \quad z = e^{i\theta}. \tag{10.4.30}$$

Предположим еще, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\ln f(\theta) - \ln \check{f}(\theta)}{\sin^2 \frac{\theta - \alpha}{2}} d\theta < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10.4.31}$$

Следовательно, $\check{f}(\theta) \leqslant f(\theta)$ и $\check{f}(\theta) = f(\theta)$ вблизи точки $\theta = \alpha$. Кроме того, функция

$$\check{f}(\theta)\,|(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_l)|^{-\sigma}, \quad z=e^{i\theta}, \tag{10.4.32}$$

удовлетворяет условиям теоремы 10.4.2 и зависит от ε, хотя и имеет положительную нижнюю границу, не зависящую от ε; то же самое справедливо для нижней границы m (не обязательно положительной) отношения, соответствующей (10.4.2).

Мы определим положительный тригонометрический многочлен $g_1(\theta)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\{g_1(\theta)\}^{-1} \leqslant \check{f}(\theta)\,|(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_l)|^{-\sigma}, \quad z=e^{i\theta}, \tag{10.4.33}$$

причем в точке $\theta=\alpha$ имеет место равенство, и

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\ln\{\check{f}(\theta)\,|(z-z_1)\ldots(z-z_l)|^{-\sigma}\} - \ln\{g_1(\theta)\}^{-1}}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10.4.34}$$

Тогда, используя обозначения (10.4.24), получаем

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\ln\check{f}(\theta) - \ln f_1(\theta)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10.4.35}$$

Сложение неравенств (10.4.27), (10.4.28), (10.4.31) и (10.4.35) приводит к (10.4.26). Заметим, что $\min\{g_1(\theta)\}^{-1}$ больше, чем положительная константа, не зависящая от ε.

Утверждение относительно $D(f_1;\, z)$, $D(f;\, z)$ и $D(f_2;\, z)$ устанавливается так же, как в теореме 10.4.3.

(5) Теорема 10.4.5. *Пусть $f(\theta)$ — четная функция, удовлетворяющая условиям теоремы* 10.4.1; *допустим, что $\varphi(\theta) = \varphi(-\theta)$ и что все невещественные «нули» z_ν функции $f(\theta)$ входят вместе с их сопряженными с той же «кратностью». Далее, пусть $0 < \alpha < \pi$. Тогда функции $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ теоремы* 10.4.4 *могут быть выбраны четными, и вместо* (10.4.26) *имеем*

$$\int_{0}^{+\pi} \frac{\ln f_2(\theta) - \ln f_1(\theta)}{(\cos\theta - \cos\alpha)^2}\,d\theta < \varepsilon. \tag{10.4.36}$$

Аналогичное добавление может быть сделано к теореме 10.4.2. Предыдущие доказательства требуют только незначительных видоизменений. Вместо первого отношения в (10.4.12) рассматриваем выражение

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\{f(\theta)\}^{-1} - c - d(\cos\theta - \cos\alpha)}{(\cos\theta - \cos\alpha)^2}, \\ &c = \{f(\alpha)\}^{-1}, \quad d\sin\alpha = f'(\alpha)\{f(\alpha)\}^{-2}. \end{aligned}\right\} \tag{10.4.37}$$

Другие отношения, которые встречаются при доказательстве теоремы 10.4.2, должны быть видоизменены аналогичным образом. При этом нужно учесть дополнения относительно четных функций к теоремам 1.3.1 и 1.5.4. Функции $\hat{f}(\theta)$ и $\check{f}(\theta)$, фигурирующие при доказательстве теоремы 10.4.4, могут быть выбраны четными. Неравенство (10.4.36) эквивалентно неравенству (10.4.26), так как функция

$$\frac{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}{(\cos\theta - \cos\alpha)^2} \tag{10.4.38}$$

при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ ограничена сверху и снизу положительными постоянными.

ГЛАВА XI

МНОГОЧЛЕНЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

Если весовая функция задана на некоторой кривой, то мы можем распространить определение ортогональных многочленов на вещественном интервале на более общую комплексную область. Соответствующие многочлены, таким образом, будут ортогональны с этой весовой функцией на рассматриваемой кривой в комплексной плоскости (глава XVI).

Среди различных частных случаев наибольший интерес представляет случай окружности, и в этой главе мы рассмотрим многочлены, ортогональные на единичной окружности с заданной весовой функцией. Мы увидим, что эти многочлены обладают свойствами, которые в известном смысле проще, чем свойства, установленные для многочленов, ортогональных в вещественном промежутке. Более того, существует связь между случаем окружности и случаем конечного вещественного отрезка, что позволяет применить некоторые результаты, полученные в этой главе, к многочленам, ортогональным на вещественном отрезке.

Относительно §§ 11.1—11.4 см. Сегё [4]; см. также Гренандер и Сегё [1], глава 2.

11.1. Определение. Предварительные сведения.

(1) Пусть $f(\theta)$ — неотрицательная функция с периодом 2π, интегрируемая в смысле Лебега на $[-\pi, +\pi]$, и такая, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,d\theta > 0. \tag{11.1.1}$$

Введем коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,e^{-in\theta}\,d\theta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{11.1.2}$$

Очевидно, что $c_{\,n} = c_n$, так что матрица «типа матрицы Тёплица»

$$T_n = (c_{\nu-\mu}) \quad \nu, \mu = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{11.1.3}$$

будет эрмитовой. Соответствующая эрмитова форма

$$H_n = \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} c_{\nu-\mu}u_\mu\bar{u}_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,|u_0 + u_1z + \ldots + u_nz^n|^2\,d\theta, \tag{11.1.4}$$

где $z = e^{i\theta}$, будет положительно определенной и будет иметь положительный детерминант

$$D_n = [c_{\nu-\mu}] \quad \nu, \mu = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{11.1.5}$$

(2) Определение. *Если мы ортогонализуем систему*[1]

$$\{f^{\frac{1}{2}}(\theta)\, z^n\},\quad z=e^{i\theta},\quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{11.1.6}$$

то получим систему многочленов

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \ldots,\ \varphi_n(z),\ \ldots, \tag{11.1.7}$$

обладающую следующими свойствами:

(a) $\varphi_n(z)$ — *многочлен точной степени n с вещественным и положительным коэффициентом при z^n;*

(b) *система $\{\varphi_n(z)\}$ ортогональна, т. е.*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,\varphi_n(z)\,\overline{\varphi_m(z)}\,d\theta=\delta_{nm},\quad z=e^{i\theta},\quad n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{11.1.8}$$

Более того, система $\{\varphi_n(z)\}$ однозначно определена условиями (a) и (b). Если $f(\theta)$ — четная функция, т. е. $f(\theta)=f(-\theta)$, то коэффициенты $\varphi_n(z)$ вещественны.

(3) Мы имеем (см. § 2.2, (2))

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_n(z)&=(D_{n-1}D_n)^{-\frac{1}{2}}\begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \ldots & c_{-n}\\ c_1 & c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \ldots & c_{-1}\\ 1 & z & z^2 & \ldots & z^n\end{vmatrix}=\\
&=(D_{n-1}D_n)^{-\frac{1}{2}}\begin{vmatrix} c_0z-c_{-1} & c_{-1}z-c_{-2} & \ldots & c_{-n+1}z-c_{-n}\\ c_1z-c_0 & c_0z-c_{-1} & \ldots & c_{-n+2}z-c_{-n+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{n-1}z-c_{n-2} & c_{n-2}z-c_{n-3} & \ldots & c_0z-c_{-1}\end{vmatrix},\\
&\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,\\
\varphi_0(z)&=D_0^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{11.1.9}$$

Коэффициентом при z^n в $\varphi_n(z)$ будет

$$k_n=(D_{n-1}D_n^{-1})^{\frac{1}{2}}. \tag{11.1.10}$$

Легко выводятся аналоги представлений (2.2.10) и (2.2.11).

(4) Мы переходим теперь к рассмотрениям, соответствующим тем, которые были проведены в (1), (2) и (4) § 3.1.

Теорема 11.1.1. *Пусть $F(e^{i\theta})$ — данная измеримая функция, для которой существует интеграл*

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,|F(e^{i\theta})|^2\,d\theta. \tag{11.1.11}$$

Взвешенное квадратическое уклонение

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,|F(z)-\varrho(z)|^2\,d\theta,\quad z=e^{i\theta}, \tag{11.1.12}$$

[1] См. последнее замечание в § 2.1, (4).

где $\varrho(z)$ пробегает множество всех многочленов π_n, будет наименьшим, когда $\varrho(z)$ является n-й частной суммой ряда Фурье

$$\left.\begin{aligned} &F(z) \sim F_0\varphi_0(z) + F_1\varphi_1(z) + \ldots + F_n\varphi_n(z) + \ldots, \\ &F_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) F(z) \overline{\varphi_n(z)}\, d\theta, \quad z = e^{i\theta}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{11.1.13}$$

В качестве непосредственного следствия отсюда вытекает неравенство Бесселя

$$|F_0|^2 + |F_1|^2 + \ldots + |F_n|^2 + \ldots \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) |F(e^{i\theta})|^2 d\theta. \tag{11.1.14}$$

Формула Парсеваля (т. е. (11.1.14) со знаком равенства) будет справедлива при выполнении одной из двух следующих систем условий:

(i) $F(z)$ регулярна и ограничена в круге $|z| < 1$;

(ii) $f(\theta)$ ограничена, а $F(z)$ принадлежит классу H_2 (см. § 10.1).

По поводу более общих условий см. Смирнов [2], стр. 363.

В качестве следствия из теоремы 1.11.1 имеем:

Теорема 11.1.2. *Многочлен $k_n^{-1}\varphi_n(z)$ минимизирует интеграл*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) |z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n|^2 d\theta, \quad z = e^{i\theta}, \tag{11.1.15}$$

когда $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ пробегает множество всех многочленов π_n с коэффициентом единица при z^n. Минимум равен k_n^{-2}.

11.2. Пример

Важным частным случаем, в котором система $\{\varphi_n(z)\}$ может быть найдена в явном виде, за исключением конечного числа первых многочленов, является случай

$$f(\theta) = \{g(\theta)\}^{-1}, \tag{11.2.1}$$

где $g(\theta)$ — положительный тригонометрический многочлен порядка m.

Теорема 11.2. *Пусть $f(\theta)$ — функция, определенная равенством* (11.2.1), *и пусть $g(\theta) = |h(z)|^2$, $z = e^{i\theta}$, — нормализованное представление $g(\theta)$, определенное в теореме* 1.2.2. *Используя обозначение* (1.12.4), *имеем*

$$\varphi_n(z) = z^{n-m} h^*(z) = z^n \bar{h}(z^{-1}), \quad n = m, m+1, \ldots \tag{11.2.2}$$

Очевидно, что условие (a) определения § 11.1, (2) выполнено. Для того чтобы доказать ортогональность, рассмотрим произвольный многочлен $\varrho(z)$ степени $\leqslant n-1$. Если $z = e^{i\theta}$, то по теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \varphi_n(z) \overline{\varrho(z)}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \{h(z)\bar{h}(z^{-1})\}^{-1} z^n \bar{h}(z^{-1})\, \bar{\varrho}(z^{-1}) \frac{dz}{iz} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^{n-1}\bar{\varrho}(z^{-1})}{h(z)} dz = 0.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) |\varphi_n(z)|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |h(z)|^{-2} |z^n \bar{h}(z^{-1})|^2 d\theta = 1.$$

Простейший случай соответствует функции $f(\theta) \equiv 1$. Тогда

$$\varphi_n(z) = z^n, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{11.2.3}$$

Относительно других случаев, когда возможно явное вычисление $\varphi_n(z)$, см. Сегё [4], стр. 187—188, и [12], стр. 245—247; см. также (11.5.3) и (11.5.4).

11.3. Задача о максимуме

Ввиду сходства рассматриваемой задачи с той, которая была исследована в § 3.1, (3), мы можем опустить детали.

(1) Теорема 11.3. 1. *Пусть $\varrho(z)$ — произвольный π_n, подчиненный условию*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,|\varrho(z)|^2\,d\theta = 1, \quad z = e^{i\theta}. \tag{11.3.1}$$

Для произвольной точки a максимум $|\varrho(a)|^2$ достигается при

$$\varrho(z) = \varepsilon\{s_n(a,\ a)\}^{-\frac{1}{2}} s_n(a,\ z), \quad |\varepsilon| = 1, \tag{11.3.2}$$

где

$$s_n(a,\ z) = \sum_{\nu=0}^{n} \overline{\varphi_\nu(a)}\,\varphi_\nu(z). \tag{11.3.3}$$

Максимум равен $s_n(a,\ a)$.

Многочлены $s_n(a,\ z)$ могут быть использованы для представления частных сумм ряда (11.1.13) в виде интегралов (см. (3.1.11)).

(2) Теорема 11.3.2. *При $a \neq 0$ многочлены* (11.3.2) *удовлетворяют тождеству*

$$s_n(a,\ z) = (\bar{a}z)^n\, \bar{s}_n(\bar{z}^{-1},\ \bar{a}^{-1}). \tag{11.3.4}$$

Кроме того,

$$s_n(0,\ z) = \sum_{\nu=0}^{n} \overline{\varphi_\nu(0)}\,\varphi_\nu(z) = k_n z^n \bar{\varphi}_n(z^{-1}) = k_n\,\varphi_n^*(z), \tag{11.3.5}$$

где k_n имеет тот же смысл, что в (11.1.10); *наконец,*

$$s_n(0,\ 0) = \sum_{\nu=0}^{n} |\varphi_\nu(0)|^2 = k_n^2 = \frac{D_{n-1}}{D_n}. \tag{11.3.6}$$

Последняя формула справедлива и при $n = 0$, если $D_{-1} = 1$. Полагая $\varrho^*(z) = r(z)$ или $\varrho(z) = r^*(z)$, мы имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,|\varrho(z)|^2\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,|r(z)|^2\,d\theta = 1, \quad z = e^{i\theta}, \tag{11.3.7}$$

и при $a \neq 0$

$$|\varrho(a)|^2 = |a^n \bar{r}(a^{-1})|^2 = |a|^{2n}\,|r(\bar{a}^{-1})|^2. \tag{11.3.8}$$

Это дает $s_n(a,\ a) = |a|^{2n} s_n(\bar{a}^{-1},\ \bar{a}^{-1})$, т. е. (11.3.4) при $z = a$, а также

$$\{s_n(a,\ a)\}^{-\frac{1}{2}} s_n(a,\ z) = \varepsilon\,\{[s_n(\bar{a}^{-1},\ \bar{a}^{-1})]^{-\frac{1}{2}} s_n(\bar{a}^{-1},\ z)\}^*, \tag{11.3.9}$$

где ε — надлежащая постоянная, $|\varepsilon|=1$. (Символ* относится к переменной z.) Комбинируя это с предыдущим результатом, мы получаем (11.3.4). Тождество (11.3.5) получается в пределе при $a \to 0$, откуда при $z=0$ следует (11.3.6).

(3) Теорема 11.3.3. *Пусть $f(\theta)$ интегрируема в смысле Лебега*[1]. *Тогда существуют следующие пределы*:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(a, a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(a)|^2, \quad |a|<1, \tag{11.3.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(a, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\varphi_\nu(a)}\, \varphi_\nu(z), \quad |a|<1,\ |z|<1, \tag{11.3.11}$$

$$\lim_{n\to\infty} k_n = k > 0, \quad \lim_{n\to 0} z^{-n}\varphi_n(z), \quad |z|>1, \tag{11.3.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = 0, \quad |z|<1. \tag{11.3.13}$$

Мы рассмотрим сначала частный случай $f(\theta) \geqslant \mu > 0$, предполагая, что $|a|<1$. Пусть $\varrho(z)$ — многочлен (11.3.2). Тогда по неравенству Коши — Буняковского (см. (7.1.4)) будем иметь

$$|\varrho(a)|^2 \leqslant \frac{1}{1-|a|^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\varrho(z)|^2\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu^{-1}}{1-|a|^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,|\varrho(z)|^2\,d\theta = \frac{\mu^{-1}}{1-|a|^2}, \quad z=e^{i\theta}; \tag{11.3.14}$$

следовательно, то же самое неравенство справедливо при $n\to\infty$. Итак, в этом случае доказаны (11.3.10) и (11.3.11). При $a=0$ (11.3.6) и (11.3.5) показывают, что существуют пределы (11.3.12); (11.3.13) вытекает из сходимости (11.3.10).

Для того чтобы доказать утверждение в общем случае, заметим прежде всего, что максимум в задаче теоремы 11.3.1 достигается для многочлена $\varrho(z)$, который не обращается в нуль при $|z|<1$; мы опять считаем $|a|<1$. В самом деле, если z_0 является нулем $\varrho(z)$, $|z_0|<1$, то мы имели бы

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\left|\varrho(z)\frac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0}\right|^2 d\theta = 1, \quad |\varrho(a)|^2 < \left|\varrho(a)\frac{1-\bar{z}_0 a}{a-z_0}\right|^2, \quad z=e^{i\theta}.$$

Положим теперь $a=re^{i\varphi}$, $0\leqslant r<1$, $z=e^{i\theta}$, в соответствии с (1.11.3)

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,|\varrho(z)|^2\,d\theta \geqslant \frac{1-r}{1+r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,|\varrho(z)|^2\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1-r}{1+r}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln f(\theta)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln|\varrho(z)|^2\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta\right\}.$$

Последний интеграл представляет собой интеграл Пуассона от гармонической функции $2\Re \ln \varrho(z)$, которая регулярна в круге $|z|<1$. Последний

[1] См. § 10.2, (2).

экспоненциальный множитель, стало быть, равен

$$\exp\{2\Re \ln \varrho(a)\} = |\varrho(a)|^2;$$

это доказывает ограниченность $\max|\varrho(a)|^2 = s_n(a,a)$.

Дальнейшие формулы выводятся таким же образом. Далее (см. § 12.3, (6)) мы вычислим пределы (11.3.10) — (11.3.12).

11.4. Алгебраические свойства

(1) Пусть a — фиксированная точка, $|a| < 1$. Предыдущее исследование показывает, что нули многочлена $s_n(a, z)$ лежат в области $|z| \geqslant 1$. Ясно, что это же относится и к случаю $|a| \leqslant 1$. Из (11.3.5) мы заключаем, что нули $\varphi_n(z)$ лежат в круге $|z| \leqslant 1$.

Мы докажем теперь более точное утверждение:

Теорема 11.4.1. *При $|a| < 1$ нули $s_n(a, z)$ лежат в области $|z| > 1$, при $|a| > 1$ — в круге $|z| < 1$, при $|a| = 1$ — на окружности $|z| = 1$. Нули $\varphi_n(z)$ лежат в круге $|z| < 1$.*

Пусть z_0 — произвольный нуль $s_n(a, z)$. Если мы положим

$$f_1(\theta) = f(\theta)\left|\frac{s_n(a, z)}{z - z_0}\right|^2, \quad z = e^{i\theta}, \tag{11.4.1}$$

и рассмотрим все линейные функции $\varrho(z)$, для которых

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\theta)|\varrho(z)|^2 d\theta = 1, \quad z = e^{i\theta}, \tag{11.4.2}$$

то ясно, что $\max|\varrho(a)|^2$ достигается при $\varrho(z) = \mathrm{const.}\,(z - z_0)$. Следовательно, достаточно рассмотреть случай $n = 1$. Из (11.1.9) получаем многочлен

$$s_1(a, z) = \overline{\varphi_0(a)}\,\varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(a)}\,\varphi_1(z) = D_0^{-1} + D_0^{-1}D_1^{-1}(c_0\bar{a} - c_1)(c_0 z - \bar{c}_1) \tag{11.4.3}$$

с нулем в точке

$$z = \frac{\bar{c}_1\bar{a} - c_0}{c_0\bar{a} - c_1}. \tag{11.4.4}$$

Это доказывает утверждение относительно $s_n(a, z)$, так как $|c_1| < c_0$ (см. (11.1.2)). Утверждение относительно нулей $\varphi_n(z)$ следует из (11.3.5).

(2) Теорема 11.4.2. *Справедливы тождество*

$$s_n(a, z) = \sum_{\nu=0}^{n} \overline{\varphi_\nu(a)}\,\varphi_\nu(z) = \frac{\overline{\varphi_{n+1}^*(a)}\,\varphi_{n+1}^*(z) - \overline{\varphi_{n+1}(a)}\,\varphi_{n+1}(z)}{1 - \bar{a}z} \tag{11.4.5}$$

и «рекуррентные формулы»

$$k_n z\varphi_n(z) = k_{n+1}\varphi_{n+1}(z) - \varphi_{n+1}(0)\,\varphi_{n+1}^*(z), \tag{11.4.6}$$

$$k_n\varphi_{n+1}(z) = k_{n+1}z\varphi_n(z) + \varphi_{n+1}(0)\,\varphi_n^*(z). \tag{11.4.7}$$

Первое тождество соответствует в известном смысле формуле Кристоффеля — Дарбу (3.2.3). Доказательство может быть проведено так же, как в § 3.2, (3). Как и в случае вещественного промежутка, мы можем характеризовать $s_n(a, z)$ посредством уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,s_n(a, z)\,\overline{\varrho(z)}\,d\theta = \overline{\varrho(a)}, \quad z = e^{i\theta}, \tag{11.4.8}$$

которое имеет место, когда $\varrho(z)$ — произвольный π_n. Однако

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,\frac{\overline{\varphi_{n+1}^*(a)}\,\varphi_{n+1}^*(z)-\overline{\varphi_{n+1}(a)}\,\varphi_{n+1}(z)}{1-\bar{a}z}\,\overline{\varrho(z)}\,d\theta =$$

$$=\overline{\varrho(a)}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,\frac{\overline{\varphi_{n+1}^*(a)}\,\varphi_{n+1}^*(z)-\overline{\varphi_{n+1}(a)}\,\varphi_{n+1}(z)}{1-\bar{a}z}\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,\{\overline{\varphi_{n+1}^*(a)}\,\varphi_{n+1}^*(z)-\overline{\varphi_{n+1}(a)}\,\varphi_{n+1}(z)\}\,\frac{\overline{\varrho(z)}-\overline{\varrho(a)}}{1-\bar{a}z}\,d\theta,\quad z=e^{i\theta}. \qquad (11.4.9)$$

Последний интеграл обращается в нуль, так как если положим $\varrho(z)-\varrho(a)=(z-a)\,r(z)$, то будем иметь

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,\varphi_{n+1}^*(z)\,\overline{zr(z)}\,d\theta=\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,\varphi_{n+1}(z)\,\bar{z}\,\overline{r(z)}\,d\theta=0,\quad z=e^{i\theta}. \qquad (11.4.10)$$

Следовательно,

$$\frac{\overline{\varphi_{n+1}^*(a)}\,\varphi_{n+1}^*(z)-\overline{\varphi_{n+1}(a)}\,\varphi_{n+1}(z)}{1-\bar{a}z}=cs_n(a,\,z), \qquad (11.4.11)$$

где c не зависит от z. Меняя местами a и z и беря слева и справа сопряженные комплексные величины, мы замечаем, что c не зависит также и от a. Полагая $z=a=0$, получаем

$$k_{n+1}^2-|\varphi_{n+1}(0)|^2=c\sum_{\nu=0}^{n}|\varphi_\nu(0)|^2, \qquad (11.4.12)$$

так что $c=1$ в силу (11.3.6). Сравнение коэффициентов при $\bar{a}^n$ в (11.4.5) приводит к (11.4.6). Беря взаимные многочлены (см. § 1.12) в обеих частях (11.4.6) и исключая $\varphi_{n+1}^*(z)$, находим (11.4.7).

11.5. Связь с многочленами, ортогональными на отрезке вещественной оси

(1) Теорема 11.5. *Пусть* $w(x)$ — *весовая функция на отрезке* $[-1,\ +1]$ *и пусть*

$$f(\theta)=w(\cos\theta)\,|\sin\theta|. \qquad (11.5.1)$$

Пусть далее $\{p_n(x)\}$ *и* $\{q_n(x)\}$ — *последовательности ортонормальных многочленов, ассоциированные соответственно с весовыми функциями* $w(x)$ *и* $(1-x^2)\,w(x)$ *на отрезке* $-1\leqslant x\leqslant +1$, *а* $\{\varphi_n(z)\}$ — *ортонормальная последовательность, ассоциированная с* $f(\theta)$ *на окружности* $z=e^{i\theta}$. *Тогда, полагая* $x=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$, *при* $n\geqslant 1$ *будем иметь*

$$\left.\begin{aligned}
p_n(x)&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{\varphi_{2n}(0)}{k_{2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\{z^{-n}\varphi_{2n}(z)+z^n\varphi_{2n}(z^{-1})\}=\\
&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{\varphi_{2n}(0)}{k_{2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\{z^{-n+1}\varphi_{2n-1}(z)+z^{n-1}\varphi_{2n-1}(z^{-1})\},\\
q_n(x)&=(2/\pi)^{\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{\varphi_{2n+2}(0)}{k_{2n+2}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\frac{z^{-n-1}\varphi_{2n+2}(z)-z^{n+1}\varphi_{2n+2}(z^{-1})}{z-z^{-1}}=\\
&=(2/\pi)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{\varphi_{2n+2}(0)}{k_{2n+2}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\frac{z^{-n}\varphi_{2n+1}(z)-z^n\varphi_{2n+1}(z^{-1})}{z-z^{-1}}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.5.2)$$

См. Сегё [6], стр. 204—206. Второе равенство следует из первого, а четвертое из третьего, благодаря (11.4.7). Функция $f(\theta)$ четна, так что коэффициенты многочленов $\varphi_n(z)$ вещественны.

Постоянные множители в этих равенствах отличны от нуля (см. (11.3.6)). Эти формулы, за исключением второй, имеют смысл и при $n=0$.

(2) Правая часть первого равенства представляет собой π_n относительно x; свойство ортогональности может быть выражено равенством

$$\int_{-\pi}^{+\pi} p_n(\cos\theta)\cos\nu\theta\cdot w(\cos\theta)\,|\sin\theta|\,d\theta=0,$$

или при $z=e^{i\theta}$,

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\{z^{-n}\varphi_{2n}(z)+z^n\varphi_{2n}(z^{-1})\}\{z^\nu+z^{-\nu}\}f(\theta)\,d\theta=0,\quad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Последнее имеет место в силу равенств

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_{2n}(z)\,(\bar{z}^{n-\nu}+\bar{z}^{n+\nu})\,f(\theta)\,d\theta=0$$

и $\bar{\varphi}_{2n}(z)=\varphi_{2n}(z)$. Кроме того,

$$\int_{0}^{\pi}|z^{-n}\varphi_{2n}(z)+z^n\varphi_{2n}(z^{-1})|^2 f(\theta)\,d\theta=$$

$$=\pi+\pi+\Re\left\{\int_{-\pi}^{+\pi}z^{-n}\varphi_{2n}(z)\cdot\overline{z^n\varphi_{2n}(z^{-1})}\,f(\theta)\,d\theta\right\}=$$

$$=2\pi+\Re\left\{\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_{2n}(z)\,\overline{z^{2n}\varphi_{2n}(z^{-1})}\,f(\theta)\,d\theta\right\}=2\pi+2\pi\frac{\varphi_{2n}(0)}{k_{2n}}.$$

Доказательство третьей формулы аналогично, за исключением того, что теперь ортогональность более удобно выразить в форме

$$\int_{-\pi}^{+\pi}q_n(\cos\theta)\frac{\sin(\nu+1)\theta}{\sin\theta}\sin^2\theta\cdot w(\cos\theta)\,|\sin\theta|\,d\theta=0,\quad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Из первой и третьей формул (11.5.2), если учесть (11.2.2), может быть получено новое доказательство формул (2.6.2) и (2.6.3).

Если в двух последних равенствах (11.5.2) мы заменим n на $n-1$, то сможем выразить $z^{-n}\varphi_{2n}(z)$ и $z^{-n+1}\varphi_{2n-1}(z)$ как линейные комбинации $p_n(x)$ и $(1-x^2)\,q_{n-1}(x)$, где $x=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$ (см. Сегё [18], стр. 9—11).

Эти соотношения позволяют нам выразить многочлены $\varphi_n(z)$, связанные с весовой функцией

$$f(\theta)=|(1-z)^\gamma(1+z)^\delta|^2=2^{\gamma+\delta}(1-\cos\theta)^\gamma(1+\cos\theta)^\delta,\quad z=e^{i\theta},\quad (11.5.3)$$

через многочлены Якоби. Мы находим

$$\left.\begin{aligned} z^{-n}\varphi_{2n}(z) &= AP_n^{\left(\gamma-\frac{1}{2},\,\delta-\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{1}{2}(z+z^{-1})\right\}+\\ &\qquad + B(z-z^{-1})\,P_{n-1}^{\left(\gamma+\frac{1}{2},\,\delta+\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{1}{2}(z+z^{-1})\right\},\\ z^{-n+1}\varphi_{2n-1}(z) &= CP_n^{\left(\gamma-\frac{1}{2},\,\delta-\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{1}{2}(z+z^{-1})\right\}+\\ &\qquad + D(z-z^{-1})\,P_{n-1}^{\left(\gamma+\frac{1}{2},\,\delta+\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{1}{2}(z-z^{-1})\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (11.5.4)$$

где A, B, C, D — надлежащие вещественные постоянные.

ГЛАВА XII

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБЩИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В следующих параграфах будут рассмотрены асимптотические свойства многочленов, ортогональных на единичной окружности, или на конечном вещественном отрезке, когда степень n этих многочленов стремится к бесконечности. В обоих случаях весовая функция будет подчинена лишь некоторым условиям непрерывности и ограниченности.

В связи с многочленами, ортогональными на единичной окружности, возникают две важные задачи. Это, во-первых, задача (a) об асимптотическом поведении вне единичной окружности и, во-вторых, задача (b) о поведении на самой единичной окружности. Для весовой функции, равной тождественно единице, ассоциированной с ней ортогональной системой является $\{z^n\}$. Этот пример в некотором смысле типичен.

Для многочленов, ортогональных на конечном отрезке, возникают соответствующие задачи:

(a′) задача об асимптотическом поведении в комплексной плоскости с разрезом вдоль данного отрезка;

(b′) задача о поведении на самом отрезке (см. главу VIII). Следующий пример является характерным:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}), \qquad x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}).$$

Задачи (a) и (a′) проще, и относительно них будут получены сравнительно общие результаты. Только недавно задачи (b) и (b′), которые гораздо труднее, были иссл дованы С. Н. Бернштейном и Г. Сегё. Отметим, что условия, налагаемые на весовую функцию в случае (b), более ограничительны, чем в случае (a). Это же замечание справедливо относительно (a′) и (b′).

При исследовании формулированных задач будут использованы результаты главы X. Мы рассматриваем сначала вопросы (a) и (a′). Относительно (b′) мы можем указать, что главный результат С. Н. Бернштейна получен здесь новым и более кратким путем, а именно мы следуем здесь старому методу Сегё, применяя его к случаю (b′).

12.1. Результаты

(1) Обозначим через G класс функций $f(\theta) \geqslant 0$, определенных и измеримых на $[-\pi, +\pi]$, для которых существуют интегралы

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\, d\theta, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} |\ln f(\theta)|\, d\theta, \qquad (12.1.1)$$

причем первый из них положителен. Такой функции $f(\theta)$ мы поставили в соответствие в § 10.2 однозначно определенную аналитическую функцию $D(f;\ z) = D(z)$, регулярную и отличную от нуля в круге $|z| < 1$, $D(0) > 0$. Условия, наложенные на класс G, обеспечивают существование среднего геометрического $\mathfrak{G}(f) = D^2(0)$ функции $f(\theta)$.

Теорема 12.1.1 (асимптотическая формула для многочленов, ортогональных на единичной окружности, рассматриваемых при z *вне* единичной окружности). *Пусть $f(\theta)$, принадлежащая классу G, будет весовой функцией на единичной окружности $z = e^{i\theta}$. Если $\{\varphi_n(z)\}$ — ассоциированная с ней ортонормальная последовательность многочленов, то вне единичной окружности*

$$\varphi_n(z) \cong z^n \{\overline{D}(z^{-1})\}^{-1}, \quad |z| > 1. \tag{12.1.2}$$

Это соотношение выполняется равномерно при $|z| \geqslant R > 1$.

Теорема 12.1.2 (асимптотическая формула для многочленов, ортогональных на отрезке $[-1,\ +1]$, рассматриваемых при x *вне* этого отрезка). *Пусть $w(x)$ — такая весовая функция на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$, что $w(\cos\theta)\,|\sin\theta| = f(\theta)$ принадлежит классу G. Если $D(f;\ z) = D(z)$ означает аналитическую функцию, соответствующую $f(\theta)$ в упомянутом смысле, то для ортонормальных многочленов $\{p_n(x)\}$, ассоциированных с $w(x)$, справедлива асимптотическая формула*

$$p_n(x) \cong (2\pi)^{-\frac{1}{2}} z^n \{D(z^{-1})\}^{-1}. \tag{12.1.3}$$

Здесь x лежит в комплексной плоскости с разрезом вдоль вещественного отрезка $[-1,\ +1]$, и $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, где $|z| > 1$. Формула (12.1.3) *справедлива равномерно при $|z| \geqslant R > 1$.*

(2) Для того чтобы получить более глубокие асимптотические формулы, справедливые соответственно на окружности $|z| = 1$ и на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$, мы должны ввести некоторые дальнейшие ограничения на $f(\theta)$ и $w(x)$.

Теорема 12.1.3 (асимптотическая формула для многочленов, ортогональных на единичной окружности, рассматриваемых при z, лежащем *на* единичной окружности). *Пусть $f(\theta)$ — положительная весовая функция на единичной окружности, удовлетворяющая условию Дини—Липшица:*

$$|f(\theta + \delta) - f(\theta)| < L\,|\ln\delta|^{-1-\lambda}, \tag{12.1.4}$$

где L и λ — фиксированные положительные числа. Тогда при $|z| = 1$

$$\varphi_n(z) = z^n \{\overline{D}(z^{-1})\}^{-1} + \varepsilon_n(z) = z^n \{\overline{D(z)}\}^{-1} + \varepsilon_n(z), \tag{12.1.5}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n(z) = 0$ равномерно при $|z| = 1$. Более точно:

$$|\varepsilon_n(z)| < C(\ln n)^{-\lambda}; \tag{12.1.6}$$

положительная постоянная C зависит от L, λ, минимума и максимума функции $f(\theta)$.

Теорема 12.1.4 (асимптотическая формула для многочленов, ортогональных на отрезке $[-1,\ +1]$, рассматриваемых при x, лежащем *на* этом отрезке). *Пусть $w(x)$ — такая весовая функция на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$, $x = \cos\theta$, что $w(\cos\theta)|\sin\theta| = f(\theta)$ удовлетворяет условиям теоремы 12.1.3. Полагая*

$$\operatorname{sign} D(e^{i\theta}) = |D(e^{i\theta})|^{-1} D(e^{i\theta}) = e^{i\gamma(\theta)}, \tag{12.1.7}$$

мы имеем равномерно на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$, *или при* $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $x = \cos\theta$, *соотношение*

$$(1-x^2)^{\frac{1}{4}} (w(x))^{\frac{1}{2}} p_n(x) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \cos\{n\theta + \gamma(\theta)\} + O\{(\ln n)^{-\lambda}\}. \qquad (12.1.8)$$

Постоянный множитель, входящий в O. *зависит только от* L, λ, *минимума и максимума функции* $f(\theta)$.

(3) Наконец, мы докажем две теоремы, аналогичные теоремам 12.1.3 и 12.1.4 при условиях, носящих «локальный» характер.

Теорема 12.1.5 (асимптотическая формула для многочленов, ортогональных *на* единичной окружности, при $|z| = 1$ и весовой функции, подчиненной «локальному» условию). *Пусть* $f(\theta)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 10.4.1. *Тогда при* $z = a = e^{i\alpha}$ *имеет место* (12.1.5) *в менее полной форме*:

$$\varphi_n(a) = a^n \{\overline{D(a)}\}^{-1} + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0. \qquad (12.1.9)$$

Отсюда мы получаем следующую теорему «локального» характера, соответствующую теореме 12.1.4.

Теорема 12.1.6 (асимптотическая формула для многочленов, ортогональных на отрезке $[-1, +1]$, при x, лежащем *на* этом отрезке, и весовой функции, подчиненной «локальному» условию). *Пусть* $w(x)$ *интегрируема в смысле Римана и пусть она имеет вид*

$$w(x) = t(x) |x - x_1|^{\tau_1} |x - x_2|^{\tau_2} \ldots |x - x_l|^{\tau_l}, \qquad (12.1.10)$$

где $0 < A \leqslant t(x) \leqslant B$, $-1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_l \leqslant 1$, $\tau_\nu > 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, l$ [1]). *Пусть, далее,* $w(x)$ *дифференцируема в определенной точке* $x = \xi$, $-1 < \xi < +1$, *причем* $\xi \neq x_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, l$, *и пусть отношение*

$$\frac{w(x) - w(\xi) - (x-\xi) w'(\xi)}{(x-\xi)^2} \qquad (12.1.11)$$

ограничено при x, *близких к* ξ. *Тогда* (12.1.8) *справедливо в менее полной форме*:

$$(1-\xi^2)^{\frac{1}{4}} (w(\xi))^{\frac{1}{2}} p_n(\xi) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \cos\{n\alpha + \gamma(\alpha)\} + \varepsilon_n, \qquad (12.1.12)$$

$$\xi = \cos\alpha, \quad 0 < \alpha < \pi, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

где $\gamma(\alpha)$ *имеет тот же смысл, что в* (12.1.7).

12.2. Замечания

(1) Теоремы 12.1.2, 12.1.4 и 12.1.6 легко вытекают соответственно из теорем 12.1.1, 12.1.3 и 12.1.5. Заметим, что $D(z) = \overline{D}(z)$ в (12.1.3), т. е. в этом случае $D(z)$ — «вещественная» функция.

В теоремах 12.1.3 — 12.1.6 функция $D(z)$ имеет граничные значения в рассматриваемой точке (в теоремах 12.1.3 и 12.1.4 даже непрерывные граничные значения на всей единичной окружности $|z| = 1$). Это следует из рассмотрений главы X.

Важная функция $\gamma(\theta)$, введенная равенством (12.1.7), полностью определена с точностью до слагаемого, кратного 2π. Если мы

---

[1]) При $x_1 = -1$ достаточно допустить, что $\tau_1 > -\frac{1}{2}$, аналогично при $x_l = +1$

положим (см. (10.3.9))

$$\gamma(\theta)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[\ln f(t)-\ln f(\theta)]\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt, \tag{12.2.1}$$

то $\gamma(\theta)$ будет непрерывной функцией. В теоремах 12.1.4 и 12.1.6 $\gamma(\theta)$ легко может быть выражена через весовую функцию $w(x)$. Пусть

$$f(\theta)=w(\cos\theta)|\sin\theta|=W(\cos\theta). \tag{12.2.2}$$

Из (10.3.9) мы получаем (см. С. Н. Бернштейн [2], стр. 11)

$$\gamma(\theta)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{\ln W(\cos t)-\ln W(\cos\theta)\}\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi}\{\ln W(\cos t)-\ln W(\cos\theta)\}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\theta+t}{2}\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\{\ln W(\cos t)-\ln W(\cos\theta)\}\frac{\sin\theta}{\cos t-\cos\theta}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\ln W(\xi)-\ln W(x)}{\xi-x}\left(\frac{1-x^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}d\xi,\quad x=\cos\theta. \tag{12.2.3}$$

В этом случае

$$\gamma(-\theta)=-\gamma(\theta). \tag{12.2.4}$$

Для функций $\{f^{\frac{1}{2}}(\theta)\varphi_n(z)\}$, $z=e^{i\theta}$, $n=0,1,2,\ldots$, которые образуют ортонормальную систему в обычном смысле (см. определение в § 11.1, (2)), мы получаем из (12.1.5) простое асимптотическое выражение

$$z^n e^{i\gamma(\theta)}=e^{i[n\theta+\gamma(\theta)]}.$$

(2) Теорема 12.1.1 является прямым следствием теоремы 12.1.3, если только предположить, что выполнено условие (12.1.4). Действительно, функция

$$z^{-n}\varphi_n(z)-\{\overline{D}(z^{-1})\}^{-1}$$

регулярна при $|z|>1$ и непрерывна при $|z|\geqslant 1$. В этом специальном случае соотношение (12.1.2) может быть написано в более точной форме:

$$z^{-n}\varphi_n(z)=\{\overline{D}(z^{-1})\}^{-1}+O\{(\ln n)^{-\lambda}\} \tag{12.2.5}$$

равномерно при $|z|\geqslant 1$.

(3) Относительно теорем 12.1.1 и 12.1.2 см. Сегё [6]. При более ограничительных условиях, чем в теореме 12.1.2, Фабер [4] доказал, что

$$\lim_{n\to\infty}|p_n(x)|^{\frac{1}{n}}=|z|,\quad |z|>1. \tag{12.2.6}$$

Это менее сильное утверждение бывает достаточным для различных приложений, например для целей § 12.7, (2) и (3). Теорема 12.1.3 является новой, а теорема 12.1.4 принадлежит С. Н. Бернштейну [2]. Доказательства теорем 12.1.3 и 12.1.4, данные соответственно в §§ 12.4 и 12.5, (2), существенно основаны на идее С. Н. Бернштейна, примененной в его собственном доказательстве, а также на другой идее, подобной той, которая была использована в связи с методом Лиувилля—Стеклова (§ 8.61). Как уже упоминалось, такой порядок изложения кажется более простым, чем первоначальный путь С. Н. Бернштейна. Теорема 12.1.5 и являющаяся ее следствием теорема 12.1.6 принадлежат Сегё [8]. Условия, вводимые в настоящей монографии, несколько более общи, чем в цитированной выше статье.

Вместо (12.1.4) С. Н. Бернштейн ([2], стр. 11, (18)) предполагает, что

$$|W(x+\delta)-W(x)|<L\,|\ln\delta|^{-1-\lambda},\quad -1\leqslant x\leqslant +1,\quad -1\leqslant x+\delta\leqslant +1.$$

Эти условия, впрочем, эквивалентны, так как отношение

$$\frac{\ln|\cos\theta_1-\cos\theta_2|^{-1}}{\ln|\theta_1-\theta_2|^{-1}}$$

ограничено сверху и снизу положительными постоянными, когда θ_1 и θ_2 — произвольные точки отрезка $[0, \pi]$, такие, что $|\theta_1-\theta_2|<1/2$ [1]).

12.3. Доказательство теоремы 12.1.1; применения

(1) Раньше, чем перейти к этому доказательству, рассмотрим частный случай $f(\theta)=\{g(\theta)\}^{-1}$, где $g(\theta)$ — положительный тригонометрический многочлен порядка m. Пусть $h(z)$ имеет тот же смысл, что и в § 10.2, (1). В соответствии со второй формулой в (10.2.12) мы имеем $D(f; z)=\{h(z)\}^{-1}$. С другой стороны, в силу (11.2.2)

$$\varphi_n(z)=z^n\overline{h}(z^{-1})=z^n\{\overline{D}(z^{-1})\}^{-1},\quad n\geqslant m. \tag{12.3.1}$$

Поэтому *в нашем случае предельное соотношение* (12.1.2) *может быть заменено одним из равенств* (12.3.1), *если только* $n\geqslant m$.

(2) Пусть теперь $f(\theta)$ опять будет произвольной функцией, удовлетворяющей условиям теоремы 12.1.1. Пусть $\rho(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ — произвольный π_n со старшим коэффициентом единица. В соответствии с теоремой 11.1.2 минимум $\mu_n(f)$ интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)|\rho(z)|^2\,d\theta,\quad z=e^{i\theta}, \tag{12.3.2}$$

равен k_n^{-2} и достигается для многочлена $\rho(z)=k_n^{-1}\varphi_n(z)$.

Лемма. *Пусть $f(\theta)$ удовлетворяет условиям теоремы* 12.1.1 *и пусть $\mu_n(f)$ имеет указанное выше значение. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(f)=\mathfrak{G}(f), \tag{12.3.3}$$

где $\mathfrak{G}(f)$ — среднее геометрическое $f(\theta)$ [2]).

Если $\rho(z)$ — один из рассматриваемых многочленов, то $z\rho(z)$ есть π_{n+1} со старшим членом z^{n+1} и $|z\rho(z)|^2=|\rho(z)|^2$ при $z=e^{i\theta}$. Следовательно, $\mu_{n+1}(f)\leqslant\mu_n(f)$. (Это вытекает также из (11.3.6).) Стало быть, предел $\lim_{n\to\infty}\mu_n(f)=\mu(f)$ существует и $\mu(f)\geqslant 0$. Нужно показать, что $\mu(f)=\mathfrak{G}(f)$.

---

[1]) Если $|\theta_1-\theta_2|=\delta$, $\delta\leqslant\pi/2$, то максимумом и минимумом разности $|\cos\theta_1-\cos\theta_2|$ соответственно будут $2\sin\frac{\delta}{2}$ и $2\sin^2\frac{\delta}{2}$.

[2]) См. § 10.2.

(3) Используя неравенство между арифметическим и геометрическим средними, при $z=e^{i\theta}$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)|\varrho(z)|^2 d\theta \geqslant \mathfrak{G}(f)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\ln|\varrho(z)|^2 d\theta\right\} =$$

$$=\mathfrak{G}(f)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\ln|\varrho^*(z)|^2 d\theta\right\} \geqslant \mathfrak{G}(f)|\varrho^*(0)|^2 = \mathfrak{G}(f) \qquad (12.3.4)$$

в соответствии с теоремой Иенсена (см., например, Титчмарш [1], § 3.61). Следовательно, $\mu_n(f)\geqslant\mathfrak{G}(f)$ и $\mu(f)\geqslant\mathfrak{G}(f)$.

С другой стороны, пусть $T(\theta)$ — неотрицательный тригонометрический многочлен порядка k, не равный нулю тождественно, и пусть $T(\theta)=|P(e^{i\theta})|^2$ — соответствующее нормализованное представление в смысле теоремы 1.2.2. Тогда $\mathfrak{G}(T)=P^2(0)$. Старший коэффициент многочлена $\{\overline{P}(0)\}^{-1}P^*(z)$ равен единице, так что

$$\mathfrak{G}(f)\leqslant\mu(f)\leqslant\mu_k(f)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)|\{\overline{P}(0)\}^{-1}P^*(z)|^2 d\theta =$$

$$=\{\mathfrak{G}(T)\}^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)T(\theta)\,d\theta, \quad z=e^{i\theta}. \qquad (12.3.5)$$

По теореме Вейерштрасса неравенство

$$\mathfrak{G}(f)\leqslant\mu(f)\leqslant\{\mathfrak{G}(T)\}^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)T(\theta)\,d\theta \qquad (12.3.6)$$

справедливо для произвольной положительной непрерывной и периодической с периодом 2π функции $T(\theta)$. В частном случае, когда функция $f(\theta)$ положительна и непрерывна, наша лемма следует из (12.3.6), если принять $T(\theta)=\{f(\theta)\}^{-1}$.

(4) Переходя к общему случаю, допустим сначала, что $f(\theta)\geqslant\mu>0$, и выберем произвольное положительное число ε. По теореме 1.5.3 найдется такой тригонометрический многочлен $\varphi(\theta)$, что $\varphi(\theta)\geqslant\mu$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(\theta)-\varphi(\theta)|\,d\theta<\varepsilon. \qquad (12.3.7)$$

Мы имеем

$$\ln\varphi(\theta)-\ln f(\theta)\leqslant\mu^{-1}|\varphi(\theta)-f(\theta)|, \qquad (12.3.8)$$

отсюда $\mathfrak{G}(\varphi)\leqslant\mathfrak{G}(f)e^{\mu^{-1}\varepsilon}$. Положим в (12.3.6) $T(\theta)=\{\varphi(\theta)\}^{-1}$. Тогда

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)T(\theta)\,d\theta-1\right|\leqslant\mu^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(\theta)-\varphi(\theta)|\,d\theta<\mu^{-1}\varepsilon, \qquad (12.3.9)$$

откуда вытекает, что

$$\mathfrak{G}(f)\leqslant\mu(f)\leqslant\mathfrak{G}(f)e^{\mu^{-1}\varepsilon}(1+\mu^{-1}\varepsilon); \qquad (12.3.10)$$

и так как ε произвольно, то $\mu(f)=\mathfrak{G}(f)$.

В общем случае мы используем очевидное неравенство $\mu(f)\leqslant\mu(f+\varepsilon)=\mathfrak{G}(f+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, откуда опять следует $\mu(f)=\mathfrak{G}(f)$. Этим доказательство леммы завершается.

(5) Для доказательства теоремы 12.1.1 рассмотрим функцию

$$D(z)\varphi_n^*(z)-1=[D(0)k_n-1]+d_{n1}z+d_{n2}z^2+\ldots, \tag{12.3.11}$$

которая регулярна в круге $|z|<1$. При $r<1$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|D(re^{i\theta})\varphi_n^*(re^{i\theta})-1|^2d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|D(re^{i\theta})|^2|\varphi_n^*(re^{i\theta})|^2d\theta+$$
$$+1-2\Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}D(re^{i\theta})\varphi_n^*(re^{i\theta})\,d\theta\right\}. \tag{12.3.12}$$

Ясно, что третье слагаемое равно $-2\Re\{D(0)\varphi_n^*(0)\}=-2D(0)k_n$. Применяя (10.2.9) при $r\to1-0$, мы получаем

$$\lim_{r\to1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|D(re^{i\theta})\varphi_n^*(re^{i\theta})-1|^2d\theta=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\theta)|\varphi_n^*(e^{i\theta})|^2d\theta+1-2D(0)k_n=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\theta)|\varphi_n(e^{i\theta})|^2d\theta+1-2D(0)k_n=2-2D(0)k_n=$$
$$=2-2\{\mathfrak{G}(f)\}^{\frac{1}{2}}\{\mu_n(f)\}^{-\frac{1}{2}},$$

или в иной форме

$$|D(0)k_n-1|^2+|d_{n1}|^2+|d_{n2}|^2+|d_{n3}|^2+\ldots=$$
$$=2-2\{\mathfrak{G}(f)\}^{\frac{1}{2}}\{\mu_n(f)\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{12.3.13}$$

В силу неравенства Коши — Буняковского

$$|d_{n1}z+d_{n2}z^2+d_{n3}z^3+\ldots|^2\leqslant(|d_{n1}|^2+|d_{n2}|^2+\ldots)\frac{|z|^2}{1-|z|^2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|z^2|}{1-|z|^2}\left[2-2\{\mathfrak{G}(f)\}^{\frac{1}{2}}\{\mu_n(f)\}^{-\frac{1}{2}}\right], \tag{12.3.14}$$

но при $n\to\infty$ последнее выражение стремится к нулю равномерно по z при $|z|\leqslant r<1$. То же самое справедливо и для $|D(0)k_n-1|^2$. Теперь теорема 12.1.1 непосредственно следует из (12.3.11).

(6) В качестве приложения вычислим пределы, встречающиеся в теореме 11.3.3. Второй предел в (11.3.12) дается формулой (12.1.2); частный случай, когда $z=\infty$, дает

$$\lim_{n\to\infty}k_n=\lim_{n\to\infty}\lim_{z\to\infty}\{z^{-n}\varphi_n(z)\}=\{D(0)\}^{-1}=\{\mathfrak{G}(f)\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{12.3.15}$$

Та же формула (12.1.2) при $|z|<1$ приводит к соотношению

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{n+1}^*(z)=\lim_{n\to\infty}z^{n+1}\overline{\varphi}_{n+1}(z^{-1})=\{D(z)\}^{-1}, \tag{12.3.16}$$

и аналогичная формула справедлива для $\varphi_{n+1}^*(a)$, $|a|<1$. Так как, кроме того, $\varphi_{n+1}(a)\to0$ и $\varphi_{n+1}(z)\to0$ (см. (11.3.13)), то из (11.4.5) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}s_n(a,z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\overline{\varphi_\nu(a)}\,\varphi_\nu(z)=\frac{1}{1-\bar{a}z}\,\frac{1}{\overline{D(a)}}\,\frac{1}{D(z)}. \tag{12.3.17}$$

Например,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(z)|^2 = \frac{1}{1-|z|^2}\frac{1}{|D(z)|^2}, \quad |z|<1, \tag{12.3.18}$$

и, в частности (см. (11.3.6)),

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(0)|^2 = \lim_{n\to\infty} k_n^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{D_{n-1}}{D_n} = \frac{1}{|D(0)|^2} = \frac{1}{\mathfrak{G}(f)}. \tag{12.3.19}$$

Из последнего равенства снова вытекает (12.3.15).

12.4. Доказательство теоремы 12.1.3

(1) Пусть $g(\theta)$ — положительный тригонометрический многочлен порядка m, определенный так же, как в § 10.3, (3), и пусть $D(g;\ z)=h(z)$, тогда (см. (10.2.12)) $D(g^{-1};\ z)=\{h(z)\}^{-1}$. Пусть $\{\psi_n(z)\}$ — ортонормальная последовательность многочленов, ассоциированная с весовой функцией $\{g(\theta)\}^{-1}$, на единичной окружности. По теореме 11.2 мы имеем

$$\psi_n(z) = z^n\overline{h}(z^{-1}), \quad n \geqslant m. \tag{12.4.1}$$

Следуя идее С. Н. Бернштейна ([2], стр. 34, (75)), мы выразим многочлен $\varphi_m(z)$, ассоциированный с весом $f(\theta)$, через многочлены $\psi_\nu(z)$, ассоциированные с весом $\{g(\theta)\}^{-1}$:

$$\varphi_m(z) = \sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu\psi_\nu(z) = \alpha_m\psi_m(z) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{g(t)\}^{-1}\varphi_m(\zeta)\left\{\sum_{\nu=0}^{m-1}\overline{\psi_\nu(\zeta)}\,\psi_\nu(z)\right\}dt =$$

$$= \alpha_m\psi_m(z) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[\{g(t)\}^{-1} - f(t)]\,\varphi_m(\zeta)\left\{\sum_{\nu=0}^{m-1}\overline{\psi_\nu(\zeta)}\,\psi_\nu(z)\right\}dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\varphi_m(\zeta)\left\{\sum_{\nu=0}^{m-1}\overline{\psi_\nu(\zeta)}\,\psi_\nu(t)\right\}dt, \quad \zeta = e^{it}. \tag{12.4.2}$$

Последний член обращается в нуль ввиду ортогональности $\varphi_m(z)$.

Пусть k_m и $k'_m = h(0)$ являются соответственно старшими коэффициентами многочленов $\varphi_m(z)$ и $\psi_m(z)$; тогда $\alpha_m = k_m/k'_m = k_m[h(0)]^{-1}$. Кроме того, в силу § 12.3, (2) мы имеем

$$\{D(0)\}^2 = \mathfrak{G}(f) \leqslant \mu_m(f) = k_m^{-2} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\,|\{h(0)\}^{-1}h^*(z)|^2\,d\theta =$$

$$= \{h(0)\}^{-2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|D(z)\,h(z)|^2\,d\theta, \quad z = e^{i\theta},$$

и благодаря (10.3.12) это равно

$$\{h(0)\}^{-2}\{1 + O[(\ln m)^{-\lambda}]\} = D^2(0) + O[(\ln m)^{-\lambda}],$$

так что

$$k_m = \{D(0)\}^{-1} + O[(\ln m)^{-\lambda}], \quad \alpha_m = 1 + O[(\ln m)^{-\lambda}]. \tag{12.4.3}$$

(2) Мы укажем здесь верхнюю границу для

$$\max_{|z|=1}|\varphi_m(z)| = M = M(m). \tag{12.4.4}$$

Применяя (10.3.11), из (12.4.2) находим, что

$$M \leqslant O(1) + O[(\ln m)^{-1-\lambda}] M \max_{|z|=1} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{m-1} \overline{\psi_\nu(\zeta)} \psi_\nu(z) \right| dt, \quad \zeta = e^{it}. \quad (12.4.5)$$

Соотношение (11.4.5) позволяет написать сумму, стоящую под знаком интеграла, следующим образом:

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \overline{\psi_\nu(\zeta)} \psi_\nu(z) = \frac{\overline{h(\zeta)}\, h(z) - \overline{h^*(\zeta)}\, h^*(z)}{1-\bar{\zeta} z}. \quad (12.4.6)$$

Покажем теперь, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{\overline{h(\zeta)}\, h(z) - \overline{h^*(\zeta)}\, h^*(z)}{1-\bar{\zeta} z} \right| dt = O(\ln m), \quad \zeta = e^{it}, \quad (12.4.7)$$

равномерно относительно z при $|z|=1$. Действительно, числитель есть π_m относительно z, который обращается в нуль при $z=\zeta$. Теорема С. Н. Бернштейна 1.22.2 (см. М. Рис [1], в частности, стр. 357) дает для подынтегральной функции оценку $O(m)$. Поэтому интеграл по дуге $|\zeta - z| \leqslant m^{-1}$ есть $O(1)$, а интеграл по дополнительной дуге $|\zeta - z| > m^{-1}$ равен

$$O(1) \int_{|\zeta - z| > m^{-1}} \frac{dt}{|1-\bar{\zeta} z|} = O(\ln m).$$

Возвращаясь к (12.4.5), получаем

$$M \leqslant O(1) + O[(\ln m)^{-\lambda}] M,$$

так что окончательно $M = O(1)$. Отсюда, учитывая (12.4.3), (12.4.1), (10.3.11) и (12.4.7), из равенства (12.4.2) получаем

$$\varphi_m(z) = \{1 + O[(\ln m)^{-\lambda}]\} z^m \overline{h}(z^{-1}) + O[(\ln m)^{-1-\lambda}] O(1) O(\ln m). \quad (12.4.8)$$

Теперь доказательство теоремы 12.1.3 заканчивается благодаря (10.3.12). Все константы, входящие под знаки O, зависят только от L, λ и от минимума и максимума функции $f(\theta)$.

12.5. Асимптотические формулы для многочленов на конечном отрезке; доказательство теорем 12.1.2 и 12.1.4

Теоремы 12.1.2 и 12.1.4 следуют соответственно из теорем 12.1.1 и 12.1.3 почти непосредственно, если применить (11.5.2). Достаточно использовать первую формулу.

(1) Если x и z имеют те же значения, что в теореме 12.1.2, то

$$\left. \begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} z^{-2n} \varphi_{2n}(z) = \{D(z^{-1})\}^{-1}, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_{2n}(z^{-1}) = 0, \\ &\lim_{n\to\infty} \varphi_{2n}(0) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} k_{2n} = k > 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.5.1)$$

Здесь мы принимаем во внимание (12.1.2), (11.3.13) и (11.3.12). Если мы теперь рассмотрим (11.5.2), то этим и будет закончено доказательство теоремы 12.1.2.

(2) Перейдем к доказательству теоремы 12.1.4. Пусть n — произвольное натуральное число, $m=n-1$, и пусть $g(\theta)$ и $h(z)$ имеют тот же

смысл, что и в § 10.3, (3). Из (12.1.5) и (12.1.6) получаем

$$\varphi_n(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_n(z)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}z^n[\{D(\bar z)\}^{-1}-h(\bar z)]\,d\theta+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}z^nh(\bar z)\,d\theta+O[(\ln n)^{-\lambda}],\quad z=e^{i\theta}.\quad (12.5.2)$$

Первый интеграл справа равен $O[(\ln n)^{-\lambda}]$, а второй обращается в нуль, так как $h(z)$ есть π_{n-1}. Итак,

$$\varphi_n(0)=O[(\ln n)^{-\lambda}].\quad (12.5.3)$$

Последовательность $\{k_{2n}\}$ ограничена снизу положительным числом ($k_n^2\geqslant|\varphi_0(0)|^2\geqslant\{\max f(\theta)\}^{-1}$ в соответствии с (11.3.6)), так что

$$p_n(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\{1+O[(\ln n)^{-\lambda}]\}\,2\Re\{z^n[D(z)]^{-1}+O[(\ln n)^{-\lambda}]\}=$$
$$=(2/\pi)^{\frac{1}{2}}|D(e^{i\theta})|^{-1}\cos\{n\theta+\gamma(\theta)\}+O[(\ln n)^{-\lambda}],\quad x=\cos\theta,\quad z=e^{i\theta},\quad (12.5.4)$$

что тождественно с (12.1.8). Утверждение относительно констант, входящих под знаки O, вытекает непосредственно.

Тот же результат может быть получен из второй формулы (11.5.2).

12.6. Асимптотическая задача при «локальных» условиях; доказательство теорем 12.1.5 и 12.1.6

В этом параграфе будут существенно использованы приближения, указанные в теоремах 10.4.4 и 10.4.5.

(1) Сначала рассмотрим следующую задачу:

Задача. *Пусть λ, μ и a — произвольные комплексные числа и пусть $f(\theta)$ — произвольная весовая функция на единичной окружности. Определить максимум выражения*

$$|\lambda\varrho(0)+\mu\varrho(a)|^2,\quad (12.6.1)$$

где $\varrho(z)$ пробегает множество всех π_n, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\theta)|\varrho(z)|^2\,d\theta=1,\quad z=e^{i\theta}.\quad (12.6.2)$$

Относительно частного случая $\lambda=0$, $\mu=1$ см. § 11.3.

Напишем

$$\varrho(z)=u_0\varphi_0(z)+u_1\varphi_1(z)+\ldots+u_n\varphi_n(z),$$

где $\{\varphi_n(z)\}$ — ортонормальная последовательность, ассоциированная с $f(\theta)$. Тогда

$$\sum_{\nu=0}^{n}|u_\nu|^2=1;$$

сохраняя обозначения, принятые в (11.3.3), и применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$|\lambda\varrho(0)+\mu\varrho(a)|^2=\left|\sum_{\nu=0}^{n}u_\nu\{\lambda\varphi_\nu(0)+\mu\varphi_\nu(a)\}\right|^2\leqslant\sum_{\nu=0}^{n}|\lambda\varphi_\nu(0)+\mu\varphi_\nu(a)|^2=$$
$$=|\lambda|^2s_n(0,\ 0)+2\Re\{\bar\lambda\mu s_n(0,\ a)\}+|\mu|^2s_n(a,\ a).\quad (12.6.3$$

Выражение, стоящее в правой части, и есть искомый максимум.

(2) Для ясности будем теперь писать $s_n(f;\ a,\ z)$ вместо $s_n(a,\ z)$, примем аналогичное обозначение для ортонормальных многочленов

$$\varphi_n(z)=\varphi_n(f;\ z),$$

ассоциированных с функцией $f(\theta)$, а также их старших коэффициентов $k_n=k_n(f)$. Решение предыдущей задачи о максимуме непосредственно приводит к следующим неравенствам для функций $f_1(\theta)$, $f(\theta)$, $f_2(\theta)$, фигурирующих в теореме 10.4.4:

$$\begin{aligned}|\lambda|^2 s_n(f_1;\ 0,\ 0)+2\Re\{\bar{\lambda}\mu s_n(f_1;\ 0,\ a)\}+|\mu|^2 s_n(f_1;\ a,\ a)\geqslant\\ \geqslant|\lambda|^2 s_n(f;\ 0,\ 0)+2\Re\{\bar{\lambda}\mu s_n(f;\ 0,\ a)\}+|\mu|^2 s_n(f;\ a,\ a)\geqslant\\ \geqslant|\lambda|^2 s_n(f_2;\ 0,\ 0)+2\Re\{\bar{\lambda}\mu s_n(f_2;\ 0,\ a)\}+|\mu|^2 s_n(f_2;\ a,\ a).\end{aligned}\qquad(12.6.4)$$

В частности, для произвольного a имеем

$$s_n(f_1;\ a,\ a)\geqslant s_n(f;\ a,\ a)\geqslant s_n(f_2;\ a,\ a).\qquad(12.6.5)$$

Кроме того, мы находим, что

$$\begin{aligned}|s_n(f;\ 0,\ a)-s_n(f_2;\ 0,\ a)|^2\leqslant\\ \leqslant\{s_n(f;\ 0,\ 0)-s_n(f_2;\ 0,\ 0)\}\{s_n(f;\ a,\ a)-s_n(f_2;\ a,\ a)\}\leqslant\\ \leqslant\{s_n(f_1,\ 0,\ 0)-s_n(f_2;\ 0,\ 0)\}\{s_n(f_1;\ a,\ a)-s_n(f_2;\ a,\ a)\}.\end{aligned}\qquad(12.6.6)$$

Тогда в силу (11.3.5) и (11.3.6) можем написать

$$\begin{aligned}|k_n(f)\varphi_n^*(f;\ a)-k_n(f_2)\varphi_n^*(f_2;\ a)|^2\leqslant\\ \leqslant\{k_n^2(f_1)-k_n^2(f_2)\}\{s_n(f_1;\ a,\ a)-s_n(f_2;\ a,\ a)\}.\end{aligned}$$

Здесь φ_n^* означает многочлен, взаимный к φ_n. Если $|a|=1$, то то же самое неравенство будет справедливо и для φ_n, т. е.

$$\begin{aligned}|k_n(f)\varphi_n(f;\ a)-k_n(f_2)\varphi_n(f_2;\ a)|^2\leqslant\\ \leqslant\{k_n^2(f_1)-k_n^2(f_2)\}\{s_n(f_1;\ a,\ a)-s_n(f_2;\ a,\ a)\}.\end{aligned}\qquad(12.6.7)$$

Далее, если n достаточно велико, то

$$\varphi_n(f_2;\ a)=a^n\{\overline{D(f_2;\ a)}\}^{-1}\qquad(12.6.8)$$

(см. теорему 11.2). Но в силу (12.3.15)

$$\lim_{n\to\infty}k_n(f)=\{\mathfrak{G}(f)\}^{-\frac{1}{2}}=\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\ln f(\theta)\,d\theta\right\};\qquad(12.6.9)$$

аналогичные соотношения справедливы для f_1 и f_2.

По теореме 10.4.4 имеем

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{G}(f_1)\}^{-1}-\{\mathfrak{G}(f_2)\}^{-1}=\\ =\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\ln f_2(\theta)\,d\theta\right\}\left\{\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[\ln f_2(\theta)-\ln f_1(\theta)]\,d\theta\right)-1\right\}<\\ <\{\mathfrak{G}(f)\}^{-1}(e^{\frac{\varepsilon}{2\pi}}-1).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\varphi_n(f;\ a) - \left\{\frac{\mathfrak{G}(f)}{\mathfrak{G}(f_2)}\right\}^{\frac{1}{2}} a^n \{\overline{D(f_2;\ a)}\}^{-1}\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (e^{\frac{\varepsilon}{2\pi}} - 1) \overline{\lim_{n\to\infty}} \{s_n(f_1;\ a,\ a) - s_n(f_2;\ a,\ a)\}$$

или (см. теорему 10.4.4)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\varphi_n(f;\ a) - a^n \{\overline{D(f;\ a)}\}^{-1}|^2 <$$
$$< \varepsilon'' + (e^{\frac{\varepsilon}{2\pi}} - 1) \overline{\lim_{n\to\infty}} \{s_n(f_1;\ a,\ a) - s_n(f_2;\ a,\ a)\}, \qquad (12.6.10)$$

где ε'' произвольно мало вместе с ε. Этим доказательство утверждения сведено к исследованию разности

$$s_n(f_1;\ a,\ a) - s_n(f_2;\ a,\ a).$$

(3) Для краткости письма положим $D(f_2^{-1};\ z) = h(z)$. Мы находим из (11.4.5) и из теоремы 11.2, что

$$s_n(f_2;\ a,\ z) = \frac{\overline{h(a)}\, h(z) - (\bar{a}z)^{n+1}\, h(a)\, \bar{h}(z^{-1})}{1 - \bar{a}z}, \qquad (12.6.11)$$

если только n больше, чем порядок многочлена $\{f_2(\theta)\}^{-1} = g_2(\theta)$. Следовательно, применяя правило Лопиталя, получим ($a = e^{i\alpha}$):

$$s_n(f_2;\ a,\ a) = (n+1)\,|h(a)|^2 - 2\mathfrak{R}\{a\overline{h(a)}\, h'(a)\} =$$
$$= \{f_2(\alpha)\}^{-1} \left\{n + 1 + 2\mathfrak{R}\left[a \frac{D'(f_2;\ a)}{D(f_2;\ a)}\right]\right\}. \qquad (12.6.11')$$

(4) Исследование функции $s_n(f_1;\ a,\ a)$ несколько более сложно. Из (10.4.24) вытекает, что

$$D(f_1;\ z) = D(g_1^{-1};\ z)\{(1 - \bar{z}_1 z)(1 - \bar{z}_2 z) \ldots (1 - \bar{z}_l z)\}^{\frac{\sigma}{2}}. \qquad (12.6.12)$$

Пусть $\varrho(z)$ пробегает множество π_n, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\theta)\, |\varrho(z)|^2\, d\theta = 1, \quad z = e^{i\theta}, \qquad (12.6.13)$$

которое может быть записано в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \{g_1(\theta)\}^{-1} |\{(1 - \bar{z}_1 z) \ldots (1 - \bar{z}_l z)\}^{\frac{\sigma}{2}} \varrho(z)|^2\, d\theta = 1, \quad z = e^{i\theta}. \qquad (12.6.14)$$

Поэтому, полагая $l' = \sigma l/2$, из теоремы 11.3.1 имеем

$$s_{n+l'}(g_1^{-1};\ a,\ a) \geqslant \max |(1 - \bar{z}_1 a)(1 - \bar{z}_2 a) \ldots (1 - \bar{z}_l a)|^{\sigma}\, |\varrho(a)|^2 =$$
$$= |(1 - \bar{z}_1 a)(1 - \bar{z}_2 a) \ldots (1 - \bar{z}_l a)|^{\sigma} s_n(f_1;\ a,\ a). \qquad (12.6.15)$$

Учитывая предыдущий результат, получаем

$$s_n(f_1;\ a,\ a) \leqslant |(1 - \bar{z}_1 a)(1 - \bar{z}_2 a) \ldots (1 - \bar{z}_l a)|^{-\sigma} \times$$
$$\times g_1(\alpha) \left\{n + l' + 1 + 2\mathfrak{R}\left[a \frac{D'(g_1^{-1};\ a)}{D(g_1^{-1};\ a)}\right]\right\}, \qquad (12.6.16)$$

если только $n+l'$ больше, чем порядок многочлена $g_1(\theta)$. Из (12.6.12) вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} a\frac{D'(g_1^{-1};\ a)}{D(g_1^{-1};\ a)} &= a\frac{D'(f_1;\ a)}{D(f_1;\ a)}-\frac{\sigma}{2}\sum_{\nu=1}^{l}\frac{-az_\nu}{1-\bar z_\nu a},\\ 2\Re\left[a\frac{D'(g_1^{-1};\ a)}{D(g_1^{-1};\ a)}\right] &= 2\Re\left[a\frac{D'(f_1;\ a)}{D(f_1;\ a)}\right]-\frac{\sigma l}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(12.6.17)$$

Таким образом, при достаточно большом n справедливо следующее важное неравенство:

$$s_n(f_1;\ a,\ a)\leqslant\{f_1(\alpha)\}^{-1}\left\{n+1+2\Re\left[a\frac{D'(f_1;\ a)}{D(f_1;\ a)}\right]\right\}.\qquad(12.6.18)$$

Так как

$$f_1(\alpha)=f_2(\alpha)=f(\alpha),$$

то мы имеем

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}\{s_n(f_1;\ a,\ a)-s_n(f_2;\ a,\ a)\}&\leqslant\\ \leqslant\{f(\alpha)\}^{-1}\,2\Re\left\{a\frac{D'(f_1;\ a)}{D(f_1;\ a)}-a\frac{D'(f_2;\ a)}{D(f_2;\ a)}\right\}&\leqslant\\ \leqslant 2\{f(\alpha)\}^{-1}\left|\frac{D'(f_1;\ a)}{D(f_1;\ a)}-\frac{D'(f_2;\ a)}{D(f_2;\ a)}\right|.&\qquad(12.6.19)\end{aligned}$$

Но это выражение произвольно мало вместе с ε. Этим доказательство теоремы 12.1.5 заканчивается.

(5) По предположениям теоремы 12.1.6 функция

$$f(\theta)=w(\cos\theta)\,|\sin\theta|\qquad(12.6.20)$$

удовлетворяет условиям теоремы 12.1.5 или теоремы 10.4.1. В самом деле, полагая

$$x_\nu=\cos\theta_\nu,\quad 0\leqslant\theta_\nu\leqslant\pi,\quad e^{i\theta_\nu}=\zeta_\nu,$$

мы имеем

$$f(\theta)=2^{-\tau_1-\tau_2-\ldots-\tau_l-1}t(\cos\theta)\left|(z^2-1)\prod_{\nu=1}^{l}(z-\zeta_\nu)^{\tau_\nu}(z-\bar\zeta_\nu)^{\tau_\nu}\right|,\quad z=e^{i\theta};\qquad(12.6.21)$$

отсюда

$$\varphi(\theta)=2^{-\tau_1-\tau_2-\ldots-\tau_l-1}t(\cos\theta).\qquad(12.6.22)$$

Мы замечаем также, что функция $f(\theta)$ дифференцируема в точке $\theta=\alpha$ и что отношение (10.4.2) ограничено в окрестности точки $\theta=\alpha$.

Как и в § 12.5, мы применяем теорему 11.5, в частности, первую из формул (11.5.2), и находим, что $k_{2n}=k_{2n}(f)$ стремится к положительному пределу и что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{2n}(0)=0$. Таким образом,

$$p_n(\xi)=p_n(\cos\alpha)=(2/\pi)^{\frac{1}{2}}\{1+\varepsilon_n\}\,\Re\left[a^n\{\overline{D(f;\ a)}\}^{-1}\right],\quad\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0.$$

Вводя функцию $\gamma(\alpha)$, исследованную в § 12.2, (1), мы получаем

$$\Re\{a^n[\overline{D(f;\ a)}]^{-1}\}=|D(f;\ a)|^{-1}\,\Re\{a^ne^{i\gamma(\alpha)}\}=\{f(\alpha)\}^{-\frac{1}{2}}\cos\{n\alpha+\gamma(\alpha)\}.$$

Теорема 12.1.6 доказана.

Недавно Фрайд [3] продолжил асимптотическое разложение (12.1.9).

12.7. Применения

(1) С помощью теоремы 12.1.2 мы легко можем вывести некоторые асимптотические формулы для старших коэффициентов ортонормальных многочленов $\{p_n(x)\}$.

Теорема 12.7.1. *Пусть $w(x)$ — весовая функция на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$, удовлетворяющая условиям теоремы 12.1.2, и пусть*

$$p_n(x) = k_{n0}x^n + k_{n1}x^{n-1} + k_{n2}x^{n-2} + \ldots, \quad n = 0, 1, 2 \ldots, \tag{12.7.1}$$

— ассоциированная с ней ортонормальная система. Тогда при $n \to \infty$

$$k_{n0} \cong \pi^{-\frac{1}{2}} 2^n \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \ln w(x)\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right\} \tag{12.7.2}$$

и

$$k_{n1} \cong -\pi^{-\frac{3}{2}} 2^{n-1}\int_{-1}^{+1} x\ln w(x)\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\ln w(x)\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}. \tag{12.7.3}$$

Относительно этих формул см. Шохат [2], стр. 577. Если правая часть (12.7.3) равна нулю, то мы читаем (12.7.3) так: $\lim 2^{-n}k_{n1} = 0$ при $n \to \infty$. Нетрудно вывести соответствующие формулы для последующих коэффициентов $k_{n\nu}$ при фиксированном ν (см. задачи 54, 55, 56). Из (12.7.2) мы легко находим асимптотическую формулу для D_n/D_{n-1}, где D_n — детерминант Ганкеля, определенный формулой (2.2.7) (см. (2.2.15)). Первое асимптотическое исследование этих детерминантов предпринял Сегё [1], стр. 517. В главе II мы обозначали коэффициент k_{n0} через k_n (см. (2.2.15)).

Доказательство следует непосредственно из (12.1.3). Если

$$D(z) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots,$$

то мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\left(\frac{1+(1-x^{-2})^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-n}(k_{n0} + k_{n1}x^{-1} + k_{n2}x^{-2} + \ldots) =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}(d_0 + d_1 z^{-1} + \ldots)^{-1} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left(d_0^{-1} - \frac{d_1}{2d_0^2}x^{-1} + \ldots\right).$$

Используем теперь (10.2.10) и теорему о равномерно сходящихся рядах аналитических функций (см. Титчмарш [1], § 2.8). Заметим, что в силу теоремы Гаусса о среднем значении

$$\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\ln|\sin\theta|\,d\theta\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\ln\left|\frac{1-z^2}{2}\right|d\theta\right\} =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Сопоставляя теорему 12.7.1 с формулами (3.2.2), мы получаем для коэффициентов A_n и C_n рекуррентной формулы (3.2.1) соотношения

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 2, \quad \lim_{n\to\infty} C_n = 1, \tag{12.7.4}$$

если только выполнены условия теоремы 12.7.1. Если мы сравним коэффициенты при x^{n-1} в правой и левой частях (3.2.1), то получим

$$B_n = \frac{k_{n0}}{k_{n-1,\,0}}\left(\frac{k_{n1}}{k_{n0}} - \frac{k_{n-1,\,1}}{k_{n-1,\,0}}\right). \tag{12.7.5}$$

Тогда при тех же предположениях

$$\lim_{n\to\infty} B_n = 0. \tag{12.7.6}$$

Формулы (12.7.4) и (12.7.6) заслуживают внимания с точки зрения классической теоремы Пуанкаре о рекуррентных формулах (см. Блюменталь [1], стр. 16).

(2) Для дальнейших применений нам понадобится лишь менее общая асимптотическая формула (12.2.6).

Теорема 12.7.2 (распределение нулей). *Пусть весовая функция $w(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 12.1.2 и пусть*

$$x_{1n},\ x_{2n},\ \ldots,\ x_{nn} \tag{12.7.7}$$

—нули ортогонального многочлена $p_n(x)$. Положим $x_{\nu n} = \cos\theta_{\nu n}$, $0 < \theta_{\nu n} < \pi$. Если $F(\theta)$—произвольная интегрируемая в смысле Римана функция, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(\theta_{1n}) + F(\theta_{2n}) + \ldots + F(\theta_{nn})}{n} = \pi^{-1}\int_0^{\pi} F(\theta)\,d\theta. \tag{12.7.8}$$

Употребляя терминологию Вейля, мы будем говорить, что значения $\{\theta_{\nu n}\}$ равномерно распределены на отрезке $[0, \pi]$ (см. Полиа и Сегё [1], часть I, отдел II, глава 4, § 2). Этот результат при несколько более ограничительных условиях был установлен Сегё [1], стр. 531. Весьма замечательно, что асимптотический характер распределения не зависит от весовой функции. Как следствие из (12.7.8), мы получаем следующий результат: *пусть $[a, b]$ есть часть отрезка $[-1, +1]$ и пусть $a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$, $\pi \geqslant \alpha > \beta \geqslant 0$. Если $N = N(n, a, b)$ означает число нулей многочлена $p_n(x)$, лежащих на отрезке $[a, b]$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n, a, b)}{n} = \beta - \alpha. \tag{12.7.9}$$

Таким образом, плотность распределения нулей $x_{\nu n}$ становится большей к концам отрезка.

Для доказательства теоремы 12.7.2 напишем (12.2.6) в следующей форме (см. (12.7.2)):

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\{\ln|p_n(x)| - \ln|k_{n0}x^n|\} = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n} \ln\left|1 - \frac{x_{\nu n}}{x}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{z}{2x}\right| = \pi^{-1}\int_0^{\pi} \ln\left|1 - \frac{\cos\theta}{x}\right| d\theta. \tag{12.7.10}$$

Здесь $|z| > 1$. Последняя формула следует из теоремы Гаусса о среднем значении, так как

$$\left|1 - \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{z + z^{-1}}\right| = \left|\frac{(\zeta - z)(\zeta - \bar z)}{2x\bar z}\right|, \quad \zeta = e^{i\theta}, \quad |z| > 1.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n} \Re\left\{\ln\left(1 - \frac{\cos\theta_{\nu n}}{x}\right)\right\} = \pi^{-1}\int_0^{\pi} \Re\left\{\ln\left(1 - \frac{\cos\theta}{x}\right)\right\} d\theta, \tag{12.7.11}$$

следовательно (см. Титчмарш [1], § 2.8),

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} (\cos\theta_{\nu n})^k = \pi^{-1} \int_0^{\pi} (\cos\theta)^k \, d\theta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{12.7.12}$$

Этим теорема доказана (см. Полиа и Сегё [1], цитированное место).

(3) В качестве дальнейших применений получаем следующие теоремы:

Теорема 12.7.3 (разложение аналитической функции в ряд по ортогональным многочленам). *Пусть весовая функция $w(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 12.1.2, а $p_n(x)$ — ассоциированная с $w(x)$ ортонормальная система многочленов. Пусть $f(x)$ — аналитическая функция, регулярная на отрезке $[-1, +1]$, и пусть*

$$\left.\begin{aligned} &f(x) \sim f_0 p_0(x) + f_1 p_1(x) + \ldots + f_n p_n(x) + \ldots, \\ &f_n = \int_{-1}^{+1} f(x)\, p_n(x)\, w(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{12.7.13}$$

— ее разложение в ряд Фурье. Если R — сумма полуосей наибольшего эллипса с фокусами в точках ± 1, в котором $f(x)$ регулярна, то ряд Фурье (12.7.13) сходится (к сумме $f(x)$) внутри и расходится вне этого эллипса. Сходимость равномерна на каждом замкнутом множестве, лежащем внутри эллипса. Кроме того,

$$\varliminf_{n\to\infty} |f_n|^{-\frac{1}{n}} = R. \tag{12.7.14}$$

Теорема 12.7.4. *Пусть весовая функция $w(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 12.1.2 и пусть*

$$f_0 p_0(x) + f_1 p_1(x) + \ldots + f_n p_n(x) + \ldots \tag{12.7.15}$$

— бесконечный ряд по ортонормальным многочленам $p_n(x)$, ассоциированным с $w(x)$. Если

$$\varliminf_{n\to\infty} |f_n|^{-\frac{1}{n}} = R, \tag{12.7.16}$$

то ряд (12.7.15) сходится внутри эллипса с фокусами в точках ± 1, сумма полуосей которого равна R; вне этого эллипса ряд расходится. Ряд сходится к аналитической функции, которая регулярна внутри этого эллипса и имеет по крайней мере одну особую точку на самом эллипсе. Разложение этой функции в ряд по многочленам $p_n(z)$ тождественно совпадает с (12.7.15).

Таким образом, эллипс регулярности совпадает с эллипсом сходимости; (12.7.14) и (12.7.15) аналогичны формуле Коши—Адамара (см. (9.1.4)). Относительно этих теорем см. Сегё [1], стр. 538; [6], стр. 193. Теорема 12.7.4 должна быть очевидным образом видоизменена, если $R \leqslant 1$ или если $R = \infty$.

В качестве следствия из (12.2.6) получаем, что область сходимости ряда типа (12.7.15) есть всегда $|z| = \text{const}$. Для доказательства теоремы 12.7.3 применим теорему 1.3.5. Мы можем найти такой π_{n-1}, скажем $\varrho(x)$, что

$$|f(x) - \varrho(x)| < M(R^{-1} + \varepsilon)^n, \tag{12.7.17}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало, а $M = M(\varepsilon)$ не зависит от n. Так как

$$f_n = \int_{-1}^{+1} f(x) p_n(x) w(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} \{f(x) - \varrho(x)\} p_n(x) w(x)\, dx,$$

то

$$|f_n|^2 \leqslant M^2 (R^{-1} + \varepsilon)^{2n} \int_{-1}^{+1} p_n^2(x) w(x)\, dx \int_{-1}^{+1} w(x)\, dx;$$

отсюда $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} |f_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant R^{-1}$. Этим доказано утверждение теоремы 12.7.3 относительно сходимости. Далее, последнее соотношение должно быть равенством, так как в противном случае ряд сходился бы равномерно в большем эллипсе, чем эллипс регулярности, и функция была бы в нем регулярна. Это же соображение устанавливает расходимость вне эллипса регулярности.

Теорема 12.7.4 также доказывается без труда. Весьма замечательно, что область сходимости рядов (12.7.13) и (12.7.15) не зависит от весовой функции $w(x)$ (ср. с теоремой 9.1.1).

ГЛАВА XIII

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯДЫ ПО ОБЩИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ

Мы докажем здесь четыре теоремы о равносходимости, понимаемой в том смысле, как это указано во введении к главе IX. Две из них, а именно теоремы 13.1.2 и 13.1.4, посвящены разложению функции, заданной на конечном отрезке, в ряд по многочленам, ортогональным на этом отрезке. Две другие теоремы, 13.1.1 и 13.1.3, касаются разложения граничных значений аналитической функции, регулярной внутри единичного круга $|z| < 1$, в ряд по многочленам, ортогональным на единичной окружности. Во всех случаях рассматриваемые ряды сравниваются с тригонометрическими и степенными рядами, а весовые функции подчинены условиям, подобным тем, которые встречались в асимптотических теоремах главы XII. Относительно функций, которые разлагаются в ряды, делаются весьма общие предположения, что они удовлетворяют лишь некоторым условиям интегрируемости.

Основная идея метода доказательства теорем 13.1.1 и 13.1.2 принадлежит Сегё (см. [9], где рассмотрен только случай отрезка). Наше теперешнее изложение этих теорем слегка отличается от изложения, приведенного в работе Сегё [9], и носит более общий характер. Две другие теоремы являются новыми. Примечательно, что асимптотические результаты предыдущей главы непосредственно не используются, однако методы весьма тесно связаны.

После того как рукопись была закончена, автор познакомился с тремя важными работами Корауса [3], [4], [5].

В работе [3] Кораус исследует ту же задачу, которая рассматривается в теореме 13.1.2. Его условия носят локальный характер, но менее ограничительны, чем требования теоремы 13.1.2. Метод Корауса совершенно отличается от метода, примененного Сегё в [9] и в настоящей монографии.

В работах [4] и [5] Кораус доказывает две другие теоремы о равносходимости, обобщающие теорему 9.1.5 о рядах по многочленам Лагерра.

13.1. Результаты и замечания

(1) Теорема 13.1.1 (о равносходимости на единичной окружности $|z|=1$, когда весовая функция подчинена «локальным» условиям). *Пусть $f(\theta)$ — весовая функция на единичной окружности, удовлетворяющая условиям теоремы* 12.1.5 (=10.4.1). *Пусть $F(z)$ — аналитическая функция, регулярная в круге $|z| < 1$ и принадлежащая классу H_2* (см. § 10.1).

Пусть $\{\varphi_n(z)\}$ — ортонормальная последовательность, ассоциированная с весовой функцией $f(\theta)$. Если $s_n(z)$ означает n-ю частную сумму ряда по $\{\varphi_n(z)\}$, соответствующего граничным значениям $F(z)$, $|z|=1$, *а* $\boldsymbol{s}_n(z)$ — *n-ю частную сумму обычного степенного ряда функции* $F(z)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\{s_n(a)-\boldsymbol{s}_n(a)\}=0, \tag{13.1.1}$$

где $a=e^{i\alpha}$ *имеет то же значение, что и в теореме* 12.1.5.

Теорема 13.1.2 (о равносходимости на конечном вещественном отрезке, когда весовая функция подчинена «локальным» условиям). *Пусть* $w(x)$ — *весовая функция на отрезке* $[-1, +1]$, *подчиненная условиям теоремы* 12.1.6. *Пусть* $\Phi(x)$ — *такая произвольная, измеримая в смысле Лебега вещественная функция, что существуют интегралы*

$$\int_{-1}^{+1}\Phi^2(x)\,w(x)\,dx, \qquad \int_{-1}^{+1}|\Phi(x)|\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx. \tag{13.1.2}$$

Если $s_n(x)$ *и* $\boldsymbol{s}_n(x)$ *соответственно означают n-ю частную сумму разложения функции* $\Phi(x)$ *в ряд по ортонормальным многочленам* $\{p_n(x)\}$, *ассоциированным с* $w(x)$, *и n-ю частную сумму разложения той же функции в ряд по многочленам Чебышева* $\{\cos n\theta\}$, $\cos\theta=x$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\{s_n(\xi)-\boldsymbol{s}_n(\xi)\}=0, \tag{13.1.3}$$

где $-1<\xi<+1$, ξ *имеет тот же смысл, что и в теореме* 12.1.6.

Замечательно, что в обоих случаях широкие классы разложений обладают одними и теми же свойствами сходимости. Разложение в ряд по $\cos n\theta$, фигурирующее в теореме 13.1.2, есть, разумеется, обычный ряд Фурье по косинусам для функции $\Phi(\cos\theta)$. Легко также может быть осуществлено сравнение $s_n(\xi)$ с другими специальными разложениями, причем нужно будет сделать предположения относительно существования некоторых других интегралов. Применяя эти теоремы, можно легко распространить результаты о сходимости и суммируемости классических рядов Фурье на рассматриваемые общие разложения. Теорема 13.1.2 легко может быть распространена на произвольный конечный отрезок.

Эти теоремы имеют место при тех же условиях «локального» характера, при которых доказаны теоремы 12.1.5 и 12.1.6.

(2) Следующие теоремы содержат условия типа условий, введенных С. Н. Бернштейном, которые встречались в теоремах 12.1.3 и 12.1.4.

Теорема 13.1.3 (о равносходимости на единичной окружности при условиях типа условий С. Н. Бернштейна). *Пусть* $f(\theta)$ — *весовая функция на единичной окружности* $z=e^{i\theta}$, *которая удовлетворяет условиям теоремы* 12.1.3 *при* $\lambda>1$. *Пусть* $F(z)$ — *аналитическая функция, регулярная и ограниченная в круге* $|z|<1$. *Пользуясь теми же обозначениями, что и в теореме* 13.1.1, *мы имеем*

$$\lim_{n\to\infty}\{s_n(z)-\boldsymbol{s}_n(z)\}=0, \qquad |z|\leqslant 1, \tag{13.1.4}$$

равномерно во всем замкнутом единичном круге $|z|\leqslant 1$.

Функция $F(z)$ имеет интегрируемые граничные значения $F(e^{i\theta})$ (почти для всех θ).

Теорема 13.1.4 (о равносходимости на конечном вещественном отрезке при условиях типа условий С. Н. Бернштейна). *Пусть* $w(x)$ — *весовая функция на отрезке* $-1\leqslant x\leqslant +1$, $x=\cos\theta$, *которая удовлетворяет условиям теоремы* 12.1.4 *при* $\lambda>1$. *Пусть* $\Phi(x)$ — *произвольная ограниченная функция, измеримая по Лебегу. Пользуясь теми же обозначениями,* *что и в теореме* 13.1.2, *мы имеем*

$$\lim_{n\to\infty}\{s_n(x)-\boldsymbol{s}_n(x)\}=0, \qquad -1<x<+1, \tag{13.1.5}$$

равномерно на отрезке $[-1+\varepsilon, +1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$.

При доказательстве теорем 13.1.3 и 13.1.4 существенно используются соответственно теоремы 12.1.3 и 12.1.4.

13.2. Задача о максимуме на единичной окружности

(1) Пусть $f(\theta)$ и $F(z)$ — функции, имеющие тот же смысл, что и в теореме 13.1.1. Если положим $G(\theta)=(2\pi)^{-1}f(\theta)F(e^{i\theta})$, то интеграл

$$\int_{-\pi}^{+\pi}|G(\theta)|\,d\theta \tag{13.2.1}$$

сходится. В дальнейшем мы можем менять $f(\theta)$, но $G(\theta)$ будем предполагать фиксированной функцией, для которой существует интеграл (13.2.1).

Задача. *Пусть* λ *и* μ — *произвольные комплексные числа и пусть* $|a|=1$. *Найти максимум выражения*

$$\left|\lambda\varrho(a)+\mu\int_{-\pi}^{+\pi}\overline{G(\theta)}\,\varrho(z)\,d\theta\right|^2, \qquad z=e^{i\theta}, \tag{13.2.2}$$

когда $\varrho(z)$ *пробегает множество всех* π_n, *которые удовлетворяют условию*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\theta)\,|\varrho(z)|^2\,d\theta=1, \qquad z=e^{i\theta}. \tag{13.2.3}$$

Относительно частного случая, когда $\lambda=1$, $\mu=0$, см. § 11.3. См. также § 12.6, (1). Напишем опять

$$\varrho(z)=u_0\varphi_0(z)+u_1\varphi_1(z)+\ldots+u_n\varphi_n(z), \tag{13.2.4}$$

где $\{\varphi_n(z)\}$ имеет обычный смысл. Тогда $\sum_{\nu=0}^{n}|u_\nu|^2=1$ и

$$\left|\lambda\varrho(a)+\mu\int_{-\pi}^{+\pi}\overline{G(\theta)}\,\varrho(z)\,d\theta\right|^2=$$

$$=\left|\sum_{\nu=0}^{n}u_\nu\left\{\lambda\varphi_\nu(a)+\mu\int_{-\pi}^{+\pi}\overline{G(\theta)}\,\varphi_\nu(z)\,d\theta\right\}\right|^2\leqslant\sum_{\nu=0}^{n}\left|\lambda\varphi_\nu(a)+\mu\int_{-\pi}^{+\pi}\overline{G(\theta)}\,\varphi_\nu(z)\,d\theta\right|^2=$$

$$=|\lambda|^2 s_n(a,a)+2\Re\{\lambda\bar{\mu}s_n(a)\}+|\mu|^2H_n, \qquad z=e^{i\theta}. \tag{13.2.5}$$

Здесь, как и в теореме 13.1.1, $s_n(a)$ означает n-ю частную сумму разложения функции $2\pi G(\theta)\{f(\theta)\}^{-1}$ в ряд по многочленам $\{\varphi_n(z)\}$ и

$$H_n\equiv\sum_{\nu=0}^{n}\left|\int_{-\pi}^{+\pi}\overline{G(\theta)}\,\varphi_\nu(z)\,d\theta\right|^2, \qquad z=e^{i\theta}. \tag{13.2.6}$$

Правая часть (13.2.5) и есть искомый максимум.

(2) Для ясности, как и в § 12.6, (2), будем обозначать введенные выше выражения через $s_n(f;a,z)$, $s_n(f;a)$, $\varphi_n(f;a)$, $H_n(f)$, чтобы указать на их

связь с весовой функцией $f(\theta)$. Напомним, что $s_n(f;\ a)$ является n-й частной суммой разложения функции $2\pi G(\theta)\{f(\theta)\}^{-1}$ в ряд по многочленам $\varphi_n(f;\ z)$, ассоциированным с функцией $f(\theta)$. Добавим, что во всем дальнейшем даже в случае, когда функция $f(\theta)$ заменяется некоторой другой весовой функцией, через $G(\theta)$ будем обозначать функцию, введенную выше. Вновь применяя теорему 10.4.4, мы получаем

$$\begin{aligned}|\lambda|^2 s_n(f_1;\ a,\ a)+2\Re\{\lambda\bar{\mu}s_n(f_1;\ a)\}+|\mu|^2H_n(f_1)\geqslant\\ \geqslant|\lambda|^2 s_n(f;\ a,\ a)+2\Re\{\lambda\bar{\mu}s_n(f;\ a)\}+|\mu|^2H_n(f)\geqslant\\ \geqslant|\lambda|^2 s_n(f_2;\ a,\ a)+2\Re\{\lambda\bar{\mu}s_n(f_2;\ a)\}+|\mu|^2H_n(f_2).\end{aligned}\tag{13.2.7}$$

В частности, имеем

$$s_n(f_1;\ a,\ a)\geqslant s_n(f;\ a,\ a)\geqslant s_n(f_2;\ a,\ a),\tag{13.2.8}$$

$$H_n(f_1)\geqslant H_n(f)\geqslant H_n(f_2),\tag{13.2.9}$$

$$\begin{aligned}|s_n(f;\ a)-s_n(f_2;\ a)|^2\leqslant\{H_n(f)-H_n(f_2)\}\{s_n(f;\ a,\ a)-s_n(f_2;\ a,\ a)\}\leqslant\\ \leqslant H_n(f)\{s_n(f_1;\ a,\ a)-s_n(f_2;\ a,\ a)\}.\end{aligned}\tag{13.2.10}$$

13.3. Доказательство теоремы 13.1.1

Неравенство Бесселя позволяет нам заключить, что

$$H_n(f)\leqslant 2\pi\int_{-\pi}^{+\pi}|\overline{G(\theta)}\{f(\theta)\}^{-1}|^2f(\theta)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|F(e^{i\theta})|^2f(\theta)\,d\theta.\tag{13.3.1}$$

Отсюда и из (12.6.19) получаем

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|s_n(f;\ a)-s_n(f_2;\ a)|^2\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|F(e^{i\theta})|^2f(\theta)\,d\theta\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\{s_n(f_1;\ a,\ a)-s_n(f_2;\ a,\ a)\}\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|F(e^{i\theta})|^2f(\theta)\,d\theta\cdot 2\{f(\alpha)\}^{-1}\left|\frac{D'(f_1;\ a)}{D(f_1;\ a)}-\frac{D'(f_2;\ a)}{D(f_2;\ a)}\right|.\end{aligned}\tag{13.3.2}$$

Правая часть произвольно мала вместе с ε, введенным в теореме 10.4.4.

(2) Изучим теперь поведение частной суммы $s_n(f_2;\ a)$ при $n\to\infty$. Как и в § 12.6, (3), мы будем употреблять более краткое обозначение $D(f_2^{-1};\ z)=h(z)$. Мы находим, что при достаточно большом n (см. (12.6.11)) имеет место равенство

$$\begin{aligned}s_n(f_2;\ a)=\int_{-\pi}^{+\pi}G(\theta)\,s_n(f_2;\ z,\ a)\,d\theta=\int_{-\pi}^{+\pi}G(\theta)\frac{h(a)\overline{h(z)}-(a\bar{z})^{n+1}\overline{h(a)}\,h(z)}{1-a\bar{z}}\,d\theta=\\ =\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\theta)\,F(z)\frac{h(a)\overline{h(z)}-(a\bar{z})^{n+1}\overline{h(a)}\,h(z)}{1-a\bar{z}}\,d\theta,\qquad z=e^{i\theta}.\end{aligned}\tag{13.3.3}$$

Сравнивая это последнее выражение с выражением

$$s_n(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(z)\frac{1-(a\bar{z})^{n+1}}{1-a\bar{z}}\,d\theta,\qquad z=e^{i\theta},\tag{13.3.4}$$

мы получаем

$$s_n(f_2;\ a)-\boldsymbol{s}_n(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(z)\frac{f(\theta)h(a)\overline{h(z)}-1}{1-a\bar{z}}\,d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(z)\frac{f(\theta)\overline{h(a)}h(z)-1}{1-\bar{a}z}(\bar{a}z)^{n+1}\,d\theta,\qquad z=e^{i\theta}. \tag{13.3.5}$$

Второй интеграл стремится к нулю при $n\to\infty$, так как отношение

$$\frac{f(\theta)\overline{h(a)}h(z)-1}{1-\bar{a}z},\quad z=e^{i\theta}, \tag{13.3.6}$$

имеет предел в точке $\theta=\alpha$. Первый интеграл может быть записан следующим образом:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}F(z)\frac{f_2(\theta)h(a)\overline{h(z)}-1}{1-a\bar{z}}\,d\theta+\int_{-\pi}^{+\pi}F(z)\frac{f(\theta)-f_2(\theta)}{1-a\bar{z}}h(a)\overline{h(z)}\,d\theta=$$

$$=\int_{-\pi}^{+\pi}F(z)\frac{f(\theta)-f_2(\theta)}{1-a\bar{z}}h(a)\overline{h(z)}\,d\theta,\qquad z=e^{i\theta}, \tag{13.3.7}$$

поскольку (см. замечание в конце § 10.1)

$$\int_{|z|=1}F(z)\frac{1-h(a)/h(z)}{a-z}\,dz=0. \tag{13.3.8}$$

В силу неравенства Буняковского — Шварца имеем

$$4\pi^2\varlimsup_{n\to\infty}|s_n(f_2;\ a)-\boldsymbol{s}_n(a)|^2\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\pi}^{+\pi}|F(z)|^2\,d\theta\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\{f_2(\theta)-f(\theta)\}^2}{4\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\{f(\alpha)\}^{-1}\{f_2(\theta)\}^{-1}\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\{4f(\alpha)\}^{-1}\int_{-\pi}^{+\pi}|F(z)|^2\,d\theta\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{f_2(\theta)-f(\theta)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\{4f(\alpha)\}^{-1}\max f_2(\theta)\int_{-\pi}^{+\pi}|F(z)|^2\,d\theta\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\ln f_2(\theta)-\ln f(\theta)}{\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta,\qquad z=e^{i\theta}.$$

Комбинируя этот результат с (13.3.2), мы находим, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}|s_n(f;\ a)-\boldsymbol{s}_n$$

будет сколь угодно мал вместе с ε, фигурирующим в теореме 10.4.4. Этим теорема доказана.

13.4. Частный случай теоремы 13.1.2

(1) В этом параграфе мы рассмотрим тот частный случай, когда

$$w(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\{\varrho(x)\}^{-1}, \tag{13.4.1}$$

где $\varrho(x)$ есть π_l, который положителен на отрезке $[-1,+1]$. Соответствующие ортогональные многочлены (при $2n>l$) вычислены в § 2.6. Проверим справедливость теоремы 13.1.2 в этом частном случае. Для этого достаточно предположить, что существует интеграл

$$\int_{-1}^{+1} |\Phi(x)|\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx; \tag{13.4.2}$$

это более общее условие, чем допущения, сделанные в теореме 13.1.2. Как и в формулировке теоремы, положим $\xi = \cos\alpha$, $-1 < \xi < +1$, $0 < \alpha < \pi$.

На основании формулы Кристоффеля — Дарбу (3.2.3) имеем

$$s_n(\xi) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \int_{-1}^{+1} \Phi(x)\, \frac{p_{n+1}(x)\,p_n(\xi) - p_n(x)\,p_{n+1}(\xi)}{x-\xi}\, w(x)\,dx;$$

или

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} s_n(\cos\alpha) =$$

$$= \int_0^{\pi} \Phi(\cos\theta)\, \frac{p_{n+1}(\cos\theta)\,p_n(\cos\alpha) - p_n(\cos\theta)\,p_{n+1}(\cos\alpha)}{\cos\theta - \cos\alpha}\, \{\varrho(\cos\theta)\}^{-1}\,d\theta. \tag{13.4.3}$$

Пусть $2n > l$. Применим формулу (2.6.2) и положим $(2/\pi)^{\frac{1}{2}} e^{in\theta}\overline{h(e^{i\theta})} = u_n(\theta) + iv_n(\theta)$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} p_n(\cos\theta) &= u_n(\theta), \\ p_{n+1}(\cos\theta) &= \Re\{e^{i\theta}[u_n(\theta) + iv_n(\theta)]\} = u_n(\theta)\cos\theta - v_n(\theta)\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{13.4.4}$$

так что

$$\frac{p_{n+1}(\cos\theta)\,p_n(\cos\alpha) - p_n(\cos\theta)\,p_{n+1}(\cos\alpha)}{\cos\theta - \cos\alpha} =$$

$$= \frac{\{u_n(\theta)\cos\theta - v_n(\theta)\sin\theta\}\,u_n(\alpha) - u_n(\theta)\,\{u_n(\alpha)\cos\alpha - v_n(\alpha)\sin\alpha\}}{\cos\theta - \cos\alpha} =$$

$$= u_n(\theta)\,u_n(\alpha) - v_n(\theta)\,u_n(\alpha)\,\frac{\sin\theta - \sin\alpha}{\cos\theta - \cos\alpha} +$$

$$+ \frac{u_n(\theta)\,v_n(\alpha) - v_n(\theta)\,u_n(\alpha)}{\cos\theta - \cos\alpha}\sin\alpha. \tag{13.4.5}$$

В силу леммы Римана это приводит нас к соотношению

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} s_n(\cos\alpha) =$$

$$= \sin\alpha \int_0^{\pi} \Phi(\cos\theta)\, \frac{u_n(\theta)\,v_n(\alpha) - v_n(\theta)\,u_n(\alpha)}{\cos\theta - \cos\alpha}\, \{\varrho(\cos\theta)\}^{-1}\,d\theta + o(1), \quad n \to \infty. \tag{13.4.6}$$

Но

$$\{\varrho(\cos\theta)\}^{-1}\{u_n(\theta)\,v_n(\alpha) - v_n(\theta)\,u_n(\alpha)\} =$$

$$= -\{\varrho(\cos\theta)\}^{-1}\,\Im\{u_n(\theta) + iv_n(\theta)\}\,\{u_n(\alpha) - iv_n(\alpha)\} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\{\varrho(\cos\theta)\}^{-1}\,\Im\{e^{in(\theta-\alpha)}\overline{h(e^{i\theta})}\,h(e^{i\alpha})\} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\,\Im\left\{e^{in(\theta-}\ \frac{h(e^{i\alpha})}{h(e^{i\theta})}\right\}. \tag{13.4.7}$$

Повторное применение леммы Римана показывает, что $h(e^{i\alpha})\{h(e^{i\theta})\}^{-1}$ может быть заменено единицей, а выражение

$$\sin\alpha(\cos\theta-\cos\alpha)^{-1}=\sin\alpha\left\{2\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\right\}^{-1}$$

— через $\left\{2\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\right\}^{-1}$. Таким образом, правая часть (13.4.6) примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi(\cos\theta)\frac{\sin n(\theta-\alpha)}{\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta+o(1)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi(\cos\theta)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-\alpha)}{\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}\,d\theta+o(1).$$

Наконец, $k_n/k_{n+1}=\frac{1}{2}$ при достаточно больших n (см. (2.6.5)), и наше утверждение доказано.

(2) Вычислим в этом же частном случае $K_n(\xi,\ \xi)$, где K_n — многочлен, определенный формулой (3.1.9). Из (3.2.4) мы имеем

$$K_n(\xi,\ \xi)=\frac{k_n}{k_{n+1}}\{p'_{n+1}(\xi)\,p_n(\xi)-p'_n(\xi)\,p_{n+1}(\xi)\}. \tag{13.4.8}$$

С другой стороны, из (13.4.4) при достаточно больших n следуют равенства

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha p'_n(\cos\alpha)&=-u'_n(\alpha),\\ \sin\alpha p'_{n+1}(\cos\alpha)&=-u'_n(\alpha)\cos\alpha+v'_n(\alpha)\sin\alpha+\\ &\quad+u_n(\alpha)\sin\alpha+v_n(\alpha)\cos\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{13.4.9}$$

и $k_n/k_{n+1}=\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}2\sin\alpha\,K_n(\cos\alpha,\ \cos\alpha)&=\{-u'_n(\alpha)\cos\alpha+v'_n(\alpha)\sin\alpha+\\ &\quad+u_n(\alpha)\sin\alpha+v_n(\alpha)\cos\alpha\}\,u_n(\alpha)+u'_n(\alpha)\{u_n(\alpha)\cos\alpha-v_n(\alpha)\sin\alpha\}=\\ &=\sin\alpha\,\Im\{[u_n(\alpha)-iv_n(\alpha)]\,[u'_n(\alpha)+iv'_n(\alpha)]\}+\\ &\quad+u_n(\alpha)\,\Im\{[u_n(\alpha)+iv_n(\alpha)]\,e^{i\alpha}\},\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{2\sin\alpha}{|u_n(\alpha)+iv_n(\alpha)|^2}K_n(\cos\alpha,\ \cos\alpha)=$$

$$=\sin\alpha\,\Im\left\{\frac{u'_n(\alpha)+iv'_n(\alpha)}{u_n(\alpha)+iv_n(\alpha)}\right\}+\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\Im\left\{\frac{[u_n(\alpha)+iv_n(\alpha)]^2}{|u_n(\alpha)+iv_n(\alpha)|^2}e^{i\alpha}\right\}.$$

Замечая, что

$$\Im\left\{\frac{u'_n(\alpha)+iv'_n(\alpha)}{u_n(\alpha)+iv_n(\alpha)}\right\}=-\Im\left\{\frac{u'_n(\alpha)-iv'_n(\alpha)}{u_n(\alpha)-iv_n(\alpha)}\right\}=$$

$$=n-\Im\left[ie^{i\alpha}\frac{h'(e^{i\alpha})}{h(e^{i\alpha})}\right]=n-\Re\left[a\frac{h'(a)}{h(a)}\right],$$

получаем важную формулу

$$\pi\{\varrho(\xi)\}^{-1}K_n(\xi,\ \xi)=n+\frac{1}{2}-\Re\left[a\frac{h'(a)}{h(a)}\right]+(2\sin\alpha)^{-1}\Im\left[a^{2n+1}\frac{\overline{h(a)}}{h(a)}\right],$$

$$\xi=\cos\alpha,\quad a=e^{i\alpha},\quad 0<\alpha<\pi, \tag{13.4.10}$$

которая имеет место при достаточно больших n.

13.5. Вспомогательные предложения для доказательства теоремы 13.1.2

(1) Пусть $w(x)$ и $\Phi(x)$ — функции, имеющие те же значения, что и в теореме 13.1.2. Положим $G(x)=w(x)\Phi(x)$, тогда интеграл

$$\int_{-1}^{+1} |G(x)|\,dx \tag{13.5.1}$$

будет сходящимся. В последующих рассмотрениях мы будем менять весовую функцию $w(x)$, но функцию $G(x)$ будем считать фиксированной и такой, что интеграл (13.5.1) существует.

(2) В дальнейшем мы будем применять теорему 10.4.5, полагая $f(\theta)=w(\cos\theta)\,|\sin\theta|$. Эта функция удовлетворяет условиям упомянутой теоремы (см. § 12.6, (5)). Мы определим функции $w_1(x)$ и $w_2(x)$ из равенств

$$f_\nu(\theta)=w_\nu(\cos\theta)\,|\sin\theta|,\quad \nu=1,\ 2. \tag{13.5.2}$$

Очевидно, при $\xi=\cos\alpha$, $0<\alpha<\pi$ справедливы соотношения

$$0\leqslant w_1(x)\leqslant w(x)\leqslant w_2(x),\quad w_1(\xi)=w(\xi)=w_2(\xi). \tag{13.5.3}$$

Кроме того, $w_2(x)$ имеет вид (13.4.1), а $w_1(x)=k(x)\,u(x)=r^2(x)\,u(x)$, где $u(x)$ имеет вид (13.4.1), а $r(x)$ — многочлен степени $\frac{1}{4}\sigma l$ (см. замечание к теореме 10.4.4).

(3) З а д а ч а. *Пусть λ и μ — произвольные комплексные числа, и пусть $-1<\xi<+1$. Определить максимум выражения*

$$\left|\lambda\varrho(\xi)+\mu\int_{-1}^{+1} G(x)\,\varrho(x)\,dx\right|^2, \tag{13.5.4}$$

когда $\varrho(x)$ пробегает множество всех π_n, удовлетворяющих условию

$$\int_{-1}^{+1} |\varrho(x)|^2\,w(x)\,dx=1. \tag{13.5.5}$$

Эта задача соответствует задаче, рассмотренной в § 13.2. Напишем опять

$$\varrho(x)=u_0p_0(x)+u_1p_1(x)+\ldots+u_np_n(x), \tag{13.5.6}$$

где $\{p_n(x)\}$ — ортонормальная последовательность многочленов, ассоциированная с $\quad x)$. Тогда $\sum\limits_{\nu=0}^{n}|u_\nu|^2=1$ и в силу неравенства Коши—Буняковского будем иметь

$$\left|\lambda\varrho(\xi)+\mu\int_{-1}^{+1} G(x)\,\varrho(x)\,dx\right|^2=\left|\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu\left\{\lambda p_\nu(\xi)+\mu\int_{-1}^{+1} G(x)\,p_\nu(x)\,dx\right\}\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu=0}^{n}\left|\lambda p_\nu(\xi)+\mu\int_{-1}^{+1} G(x)\,p_\nu(x)\,dx\right|^2=|\lambda|^2K_n(\xi)+2\Re\,[\bar\lambda\mu s_n(\xi)]+|\mu|^2H_n. \tag{13.5.7}$$

Здесь мы пользовались следующими обозначениями: $K_n(\xi) = K_n(w;\, \xi)$ — это ядро $K_n(\xi,\, \xi)$, и

$$s_n(\xi) \equiv s_n(w;\, \xi) = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(\xi) \int_{-1}^{+1} G(x)\, p_\nu(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} G(x)\, K_n(\xi,\, x)\, dx, \qquad (13.5.8)$$

$$H_n \equiv H_n(w,\, \xi) = \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ \int_{-1}^{+1} G(x)\, p_\nu(x)\, dx \right\}^2. \qquad (13.5.9)$$

Отметим, что $s_n(\xi)$ — это n-я частная сумма разложения функции $\Phi(x) = w\{(x)\}^{-1} G(x)$ в ряд по многочленам $p_n(x)$, ассоциированным с $w(x)$.

Правая часть (13.5.7) и есть искомый максимум. Из этого следует, что

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 K_n(w_1;\, \xi) + 2\Re[\bar{\lambda}\mu s_n(w_1;\, \xi)] + |\mu|^2 H_n(w_1) &\geqslant \\ \geqslant |\lambda|^2 K_n(w;\, \xi) + 2\Re[\bar{\lambda}\mu s_n(w;\, \xi)] + |\mu|^2 H_n(w) &\geqslant \\ \geqslant |\lambda|^2 K_n(w_2;\, \xi) + 2\Re[\bar{\lambda}\mu s_n(w_2;\, \xi)] + |\mu|^2 H_n(w_2). & \qquad (13.5.10) \end{aligned}$$

В частности,

$$K_n(w_1;\, \xi) \geqslant K_n(w;\, \xi) \geqslant K_n(w_2;\, \xi), \qquad (13.5.11)$$

$$H_n(w_1) \geqslant H_n(w) \geqslant H_n(w_2). \qquad (13.5.12)$$

Кроме того, учитывая неравенство Бесселя, имеем

$$\begin{aligned} |s_n(w;\, \xi) - s_n(w_2;\, \xi)|^2 &\leqslant \{H_n(w) - H_n(w_2)\}\{K_n(w;\, \xi) - K_n(w_2;\, \xi)\} \leqslant \\ &\leqslant H_n(w)\{K_n(w_1;\, \xi) - K_n(w_2;\, \xi)\} \leqslant \\ &\leqslant \int_{-1}^{+1} \Phi^2(x)\, w(x)\, dx\, \{K_n(w_1;\, \xi) - K_n(w_2;\, \xi)\}. \qquad (13.5.13) \end{aligned}$$

Мы покажем далее, что последняя разность произвольно мала вместе с ε равномерно относительно n.

13.6. Доказательство теоремы 13.1.2

Основными инструментами для этого доказательства являются специальная теорема о равносходимости § 13.4, (1) и представление ядра в виде (13.4.10). Последнее непосредственно дает соотношение

$$\pi f(\alpha)\, K_n(w_2;\, \xi) = n + \frac{1}{2} + \Re\left[a \frac{D'(f_2;\, a)}{D(f_2;\, a)} \right] + (2\sin\alpha)^{-1} \Im\left[a^{2n+1} \frac{\overline{D(f_2;\, a)}}{D(f_2;\, a)} \right], \qquad (13.6.1)$$

так как $\{g_2(\alpha)\}^{-1} = f_2(\alpha) = f(\alpha)$. С другой стороны, мы выводим для $K_n($[illegible] оценку, аналогичную оценке (12.6.18). Используя обозначения, введенные в § 13.5, (2), и полагая $\frac{1}{2}\sigma l = l'$, мы получаем, как в § 12.6, (4),

$$K_{n+l'/2}(u;\, \xi) \geqslant r^2(\xi)\, K_n(w_1;\, \xi) = k(\xi)\, K_n(w_1;\, \xi). \qquad (13.6.2)$$

Так как $u(x) = u(\cos\theta) = \{g_1(\theta)\}^{-1} |\sin\theta|^{-1}$, то из (13.4.10) следует, что

$$\begin{aligned} \pi\{g_1(\alpha)\}^{-1} K_{n+l'/2}(u;\, \xi) &= n + \frac{l'}{2} + \frac{1}{2} - \Re\left[a \frac{D'(g_1;\, a)}{D(g_1;\, a)} \right] + \\ &+ (2\sin\alpha)^{-1} \Im\left[a^{2n+l'+1} \frac{\overline{D(g_1;\, a)}}{D(g_1;\, a)} \right] = n + \frac{l'}{2} + \frac{1}{2} + \\ &+ \Re\left[a \frac{D'(g_1^{-1};\, a)}{D(g_1^{-1};\, a)} \right] + (2\sin\alpha)^{-1} \Im\left[a^{2n+l'+1} \frac{\overline{D(g_1^{-1};\, a)}}{D(g_1^{-1};\, a)} \right], \qquad (13.6.3) \end{aligned}$$

где, как и ранее, $\xi=\cos\alpha$, $a=e^{i\alpha}$. Теперь мы можем применить (12.6.17). Кроме того, (12.6.12) позволяет написать

$$\frac{D(f_1;\, a)}{\overline{D(f_1;\, a)}}=\frac{D(g_1^{-1};\, a)}{\overline{D(g_1^{-1};\, a)}}\prod_{\nu=1}^{l}\left(\frac{1-\bar{z}_\nu a}{1-z_\nu \bar{a}}\right)^{\frac{\sigma}{2}}=a^{l'}\frac{D(g_1^{-1};\, a)}{\overline{D(g_1^{-1};\, a)}};\tag{13.6.4}$$

так как $\{g_1(\alpha)\}^{-1}k(\xi)=f_1(\alpha)=f(\alpha)$, то из (13.6.2) вытекает неравенство

$$\pi f(\alpha)K_n(w_1;\,\xi)\leqslant n+\frac{1}{2}+\Re\left[a\frac{D'(f_1;a)}{D(f_1;\, a)}\right]+(2\sin\alpha)^{-1}\Im\left[a^{2n+1}\frac{D(f_1;\, a)}{\overline{D(f_1;\, a)}}\right].\tag{13.6.5}$$

Сравнивая это с (13.6.1), будем иметь

$$\begin{gathered}K_n(w_1;\,\xi)-K_n(w_2;\,\xi)\leqslant\{\pi f(\alpha)\}^{-1}\left\{\Re\left[a\frac{D'(f_1;\, a)}{D(f_1;\, a)}-a\frac{D'(f_2;\, a)}{D(f_2;\, a)}\right]+\right.\\ \left.+(2\sin\alpha)^{-1}\Im\left[a^{2n+1}\frac{D(f_1;\, a)}{\overline{D(f_1;\, a)}}-a^{2n+1}\frac{D(f_2;\, a)}{\overline{D(f_2;\, a)}}\right]\right\}\leqslant\\ \leqslant\{\pi f(\alpha)\}^{-1}\left|\frac{D'(f_1;\, a)}{D(f_1;\, a)}-\frac{D'(f_2;\, a)}{D(f_2;\, a)}\right|+\\ +\{2\pi f(\alpha)\sin\alpha\}^{-1}\left|\frac{D(f_1;\, a)}{\overline{D(f_1;\, a)}}-\frac{D(f_2;\, a)}{\overline{D(f_2;\, a)}}\right|.\end{gathered}\tag{13.6.6}$$

Левая часть этого неравенства неотрицательна, а правая произвольно мала вместе с ε.

Обращаясь к (13.5.13), отметим, что $s_n(w_2;\,\xi)$ является n-й частной суммой разложения функции $\{w_2(x)\}^{-1}G(x)=\{w_2(x)\}^{-1}w(x)\Phi(x)$ в ряд по многочленам, ассоциированным с весовой функцией $w_2(x)$. Так как $\{w_2(x)\}^{-1}w(x)\leqslant 1$ и так как второй из интегралов (13.1.2) существует, то может быть применен результат § 13.4, (1). Таким образом, $s_n(w_2;\,\xi)=s_n(w_2;\,\cos\alpha)$ может быть заменена n-й частной суммой ряда Фурье с ошибкой $o(1)$ при $n\to\infty$. Поскольку $\{w_2(x)\}^{-1}w(x)=1$ в точке $x=\xi$, то рассматриваемая частная сумма может быть заменена частной суммой ряда Фурье функции $\Phi(x)$, которая и есть $s_n(\xi)$. Этим завершается доказательство теоремы 13.1.2.

З а м е ч а н и е. Легко показать, что разность

$$H_n(w)-H_n(w_2),\tag{13.6.7}$$

встречающаяся в (3.5.13), также произвольно мала вместе с ε. Если бы мы воспользовались этим фактом, то было бы достаточно получить лишь оценку сверху левой части (13.6.6). Для того чтобы осуществить это указание, требуется небольшое видоизменение предыдущих рассуждений.

13.7. Доказательство теоремы 13.1.3

(1) Достаточно доказать справедливость утверждения при $|z|=1$. Исследуемые суммы могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\zeta)\,s_n(\zeta,\, z)\,f(x)\,dx\ \text{ и }\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\zeta)\,\frac{1-(\bar{\zeta}z)^{n+1}}{1-\bar{\zeta}z}\,dx,\quad \zeta=e^{ix},\tag{13.7.1}$$

где $s_n(\zeta,z)$ имеет обычный смысл. Введем в рассмотрение разность ядер

$$\Delta_n(\xi,\, z)=s_n(\zeta,\, z)f(x)-\frac{1-(\bar{\zeta}z)^{n+1}}{1-\bar{\zeta}z}\tag{13.7.2}$$

и покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\zeta)\,\Delta_n(\zeta, z)\,dx = 0,\quad \zeta = e^{ix}, \tag{13.7.3}$$

равномерно на единичной окружности $|z| = 1$.

(2) По предположению функция $f(\theta)$ удовлетворяет условию Дини—Липшица (10.3.10). Из этого непосредственно вытекает, что аналогичному условию удовлетворяет (с показателем $-\lambda$ вместо $-1-\lambda$) функция $D(f;\ z) = D(z)$, т. е., что

$$|D(e^{i(\theta+\delta)}) - D(e^{i\theta})| < L'\,|\ln\delta|^{-\lambda}, \tag{13.7.4}$$

где L' — положительная постоянная. Пусть m — произвольное целое число. Применяя (10.3.12), получим

$$|D(e^{i(\theta+\delta)}) - D(e^{i\theta}) < 2Q(\ln m)^{-\lambda} + |\{h(e^{i(\theta+\delta)})\}^{-1} - \{h(e^{i\theta})\}^{-1}|.$$

Последнее слагаемое в силу теоремы 1.22.2 равно $\delta O(m)$; таким образом, мы имеем оценку $O[(\ln m)^{-\lambda}] + \delta O(m)$. Выбирая $m \sim \delta^{-1}|\ln\delta|^{-\lambda}$, находим $(\ln m)^{-\lambda} \sim |\ln\delta|^{-\lambda}$ и $\delta m \sim |\ln\delta|^{-\lambda}$, что и доказывает наше утверждение. Это дает также для функции $\gamma(\theta) = \mathfrak{J}\{\ln D(e^{i\theta})\}$, определенной равенством (12.1.7), соотношение

$$|\gamma(\theta+\delta) - \gamma(\theta)| < L''\,|\ln\delta|^{-\lambda}, \tag{13.7.5}$$

где L'' — положительная постоянная. Эти результаты справедливы при произвольном $\lambda > 0$.

Те же рассуждения приводят к более общему неравенству

$$|D(z_1) - D(z_2)| < L'\,|\ln|z_1 - z_2||^{-\lambda}, \tag{13.7.6}$$

где z_1, z_2 — произвольные точки единичного круга $|z| \leqslant 1$.

(3) Пусть $|z| = |\zeta| = 1$, $z \neq \zeta$. Из (11.4.5) и теоремы 12.1.3 следует равенство

$$\begin{aligned}\Delta_n(\zeta, z) &= \frac{\{\overline{D(\zeta)}\,D(z)\}^{-1} - (\bar\zeta z)^{n+1}\{D(\zeta)\,\overline{D(z)}\}^{-1}}{1-\bar\zeta z}\,|D(\zeta)|^2 - \\ &\quad - \frac{1-(\bar\zeta z)^{n+1}}{1-\bar\zeta z} + |1-\bar\zeta z|^{-1}\,O[(\ln n)^{-\lambda}] = \frac{D(\zeta)\{D(z)\}^{-1}-1}{1-\bar\zeta z} - \\ &\quad - (\bar\zeta z)^{n+1}\,\frac{\overline{D(\zeta)}\{\overline{D(z)}\}^{-1}-1}{1-\bar\zeta z} + |1-\bar\zeta z|^{-1}\,O[(\ln n)^{-\lambda}].\end{aligned} \tag{13.7.7}$$

Далее, по теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} F(\zeta)\,\frac{D(\zeta)\{D(z)\}^{-1}-1}{\zeta - z}\,d\zeta = 0, \tag{13.7.8}$$

так как подынтегральная функция является функцией от ζ, принадлежащей классу H_1 (см. замечание в конце § 10.1). Здесь мы воспользовались условием $\lambda > 1$. По лемме Римана

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|\zeta|=1} (\bar\zeta z)^{n+1} F(\zeta)\,\frac{\overline{D(\zeta)}\{\overline{D(z)}\}^{-1}-1}{1-\bar\zeta z}\,dx = 0,\quad \zeta = e^{ix} \tag{13.7.9}$$

(относительно равномерности см. ниже). Пусть ε — произвольное положительное число. Если мы обозначим через $E = E(z, n, \varepsilon)$ множество таких точек ζ на единичной окружности $|\zeta| = 1$, для которых $|\zeta - z| \geqslant \varepsilon n^{-1}$, а через

E' — дополнительное множество, то получим соотношения

$$\int_E F(\zeta)\,\Delta_n(\zeta, z)\,dx = -\int_{E'} F(\zeta)\left\{\frac{D(\zeta)\{D(z)\}^{-1}-1}{1-\bar\zeta z} -\right.$$

$$\left.-(\bar\zeta z)^{n+1}\frac{\overline{D(\zeta)}\,\{\overline{D(z)}\}^{-1}-1}{1-\bar\zeta z}\right\}dx + o(1) + O\{(\ln n)^{-\lambda}\}\int_E |1-\bar\zeta z|^{-1}dx =$$

$$= O(1)\int_{E'} |1-\bar\zeta z|^{-1}\,|\ln|z-\zeta||^{-\lambda}dx + o(1) + O\{(\ln n)^{-\lambda}\}\int_E |1-\bar\zeta z|^{-1}dx =$$

$$= O\{(\ln n)^{1-\lambda}\} + o(1) + O\{(\ln n)^{-\lambda}\}\,O(\ln n) = o(1), \quad \zeta = e^{ix}, \quad n\to\infty.$$

С другой стороны, в этом случае числитель в (11.4.5) ограничен, и учитывая теорему 1.22.2 (см. § 12.4, (2)), будем иметь $s_n(\xi, z) = O(n)$, а отсюда также и $\Delta_n(\zeta, z) = O(n)$. Это выполняется равномерно при $|z| = |\zeta| = 1$. Следовательно,

$$\int_{E'} F(\zeta)\,\Delta_n(\zeta, z)\,dx = O(n)\,\varepsilon n^{-1} = \varepsilon O(1), \quad \zeta = e^{ix},$$

где $O(1)$ не зависит ни от ε ни от n. Этим (13.7.3) доказано.

(4) Утверждение о равномерной сходимости (13.7.9) нуждается в некоторых объяснениях. В соответствии с (13.7.4) (см. замечание в конце (2)) функция

$$\frac{\overline{D}(\zeta)\{\overline{D(z)}\}^{-1}-1}{1-\zeta z} = K(\zeta)$$

от переменной ζ принадлежит классу H_1. Если $\varrho_n(\zeta)$ означает n-е чезаровское среднее частных сумм разложения функции $F(\zeta)$ в степенной ряд, то будем иметь

$$\int_{|\zeta|=1} \bar\zeta^{n+1} F(\zeta)\,K(\bar\zeta)\,dx = \int_{|\zeta|=1} \bar\zeta^{n+1}\{F(\zeta)-\varrho_n(\zeta)\}\,K(\bar\zeta)\,dx = \int_{E_1} + \int_{E_1'},$$

где E_1 — множество точек на $|\zeta| = 1$, для которых $|\zeta - z| \geqslant \varepsilon$, а E_1' — дополнительное множество. Интеграл по E_1 при $n\to\infty$ равен

$$O(1)\int_{E_1} |F(\zeta)-\varrho_n(\zeta)|\,dx = O(1)\int_{-\pi}^{+\pi} |F(\zeta)-\varrho_n(\zeta)|\,dx = o(1).$$

Интеграл по E_1' (так как разность $F(\zeta)-\varrho_n(\zeta)$ равномерно ограничена) равен

$$O(1)\int_{E_1'} |K(\bar\zeta)|\,dx$$

и, следовательно, произвольно мал вместе с ε.

13.8. Доказательство теоремы 13.1.4

(1) Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1} \Phi(\xi)\,\Delta_n'(\xi, x)\,(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\xi = 0 \tag{13.8.1}$$

равномерно на отрезке $-1+\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$; здесь $\Delta_n'(\xi, x)$ означает разность ядер, которая в силу формулы Кристоффеля может быть записана в виде

$$\Delta_n'(\xi, x) = (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} w(\xi) \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)\, p_n(\xi) - p_n(x)\, p_{n+1}(\xi)}{x-\xi} -$$
$$- \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin(2n+1)\frac{\theta+\varphi}{2}}{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}} + \frac{\sin(2n+1)\frac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}\right\}, \qquad (13.8.2)$$
$$\xi = \cos\varphi, \quad x = \cos\theta.$$

Через k_n обозначен старший коэффициент многочлена $p_n(x)$.

(2) Отметим прежде всего, что из (11.5.2) при $n \geqslant 1$ имеем

$$k_n = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{\varphi_{2n}(0)}{k_{2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}} 2^n \{k_{2n} + \varphi_{2n}(0)\} =$$
$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{\varphi_{2n}(0)}{k_{2n}}\right\}^{\frac{1}{2}} 2^n k_{2n}; \qquad (13.8.3)$$

из (13.8.3) следует, если учесть формулы (12.4.3) и (12.5.3) (см. также теорему 12.7.1), что

$$k_n = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\{1 + O[(\ln n)^{-\lambda}]\}\, 2n \{[D(0)]^{-1} + O[(\ln n)^{-\lambda}]\} =$$
$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\{D(0)\}^{-1} 2^n \{1 + O[(\ln n)^{-\lambda}]\}, \quad \frac{k_n}{k_{n+1}} = \frac{1}{2} + O[(\ln n)^{-\lambda}]. \qquad (13.8.4)$$

Из (12.1.8) мы заключаем, используя обозначение (12.2.2), что

$$\Delta_n'(\xi, x) = \Delta_n'(\cos\varphi, \cos\theta) =$$
$$= \pi^{-1}(x-\xi)^{-1}\{W(x)\}^{-\frac{1}{2}}\{W(\xi)\}^{\frac{1}{2}}\{\cos[(n+1)\theta + \gamma(\theta)]\cos[n\varphi + \gamma(\varphi)] -$$
$$- \cos[n\theta + \gamma(\theta)]\cos[(n+1)\varphi + \gamma(\varphi)]\} -$$
$$- \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin(2n+1)\frac{\varphi+\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi+\theta}{2}} + \frac{\sin(2n+1)\frac{\varphi-\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\right\} + |x-\xi|^{-1} O[(\ln n)^{-\lambda}] =$$
$$= A_n(\varphi, \theta) - B_n(\varphi, \theta) + |x-\xi|^{-1} O[(\ln n)^{-\lambda}]. \qquad (13.8.5)$$

Первое слагаемое может быть написано в форме

$$A_n(\varphi, \theta) = (2\pi)^{-1}\left\{2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\right\}^{-1}\{W(\cos\theta)\}^{-\frac{1}{2}}\{W(\cos\varphi)\}^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \{\cos[n\varphi + (n+1)\theta + \gamma(\varphi) + \gamma(\theta)] + \cos[n\varphi - (n+1)\theta + \gamma(\varphi) - \gamma(\theta)] -$$
$$- \cos[(n+1)\varphi + n\theta + \gamma(\varphi) + \gamma(\theta)] - \cos[(n+1)\varphi - n\theta + \gamma(\varphi) - \gamma(\theta)]\} =$$
$$= \left\{2\pi\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\right\}^{-1}\{W(\cos\theta)\}^{-\frac{1}{2}}\{W(\cos\varphi)\}^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left\{\sin\left[(2n+1)\frac{\varphi+\theta}{2} + \gamma(\varphi) + \gamma(\theta)\right]\sin\frac{\varphi-\theta}{2} +\right.$$
$$\left. + \sin\left[(2n+1)\frac{\varphi-\theta}{2} + \gamma(\varphi) - \gamma(\theta)\right]\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\{W(\cos\theta)\}^{-\frac{1}{2}}\{W(\cos\varphi)\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\varphi+\theta}{2} + \gamma(\varphi) + \gamma(\theta)\right]}{\sin\frac{\varphi+\theta}{2}} +\right.$$
$$\left. + \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\varphi-\theta}{2} + \gamma(\varphi) - \gamma(\theta)\right]}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\right\}. \qquad (13.8.6)$$

(3) Интегралы

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{\{W(\cos\theta)\}^{-\frac{1}{2}}\{W(\cos\varphi)\}^{\frac{1}{2}}\cos[\gamma(\varphi)\pm\gamma(\theta)]-1}{\sin\frac{\varphi\pm\theta}{2}}\right|d\varphi,\\
&\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{\sin[\gamma(\varphi)\pm\gamma(\theta)]}{\sin\frac{\varphi\pm\theta}{2}}\right|d\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{13.8.7}$$

существуют (см. (12.2.4), (12.1.4) и (13.7.5)), и по лемме Римана

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi(\cos\varphi)\{A_n(\varphi,\theta)-B_n(\varphi,\theta)\}\,d\varphi=0 \tag{13.8.8}$$

равномерно относительно θ. Пусть η — произвольное положительное число, $E=E(\theta,n,\eta)$ — множество точек, для которых $|\cos\varphi-\cos\theta|\geqslant\eta n^{-1}$, а E' — дополнительное множество. Мы имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{+\pi}\Phi(\cos\varphi)\,\Delta_n'(\cos\varphi,\cos\theta)\,d\varphi=\\
&\quad=\int_E\Phi(\cos\varphi)\{A_n(\varphi,\theta)-B_n(\varphi,\theta)\}\,d\varphi+O[(\ln n)^{-\lambda}]\int_E|\cos\varphi-\cos\theta|^{-1}\,d\varphi+\\
&\quad+\int_{E'}\Phi(\cos\varphi)\,\Delta_n'(\cos\varphi,\cos\theta)\,d\varphi=\\
&\quad=-\int_{E'}\Phi(\cos\varphi)\{A_n(\varphi,\theta)-B_n(\varphi,\theta)\}\,d\varphi+o(1)+\\
&\quad+O[(\ln n)^{-\lambda}]\int_E|\cos\varphi-\cos\theta|^{-1}\,d\varphi+\int_{E'}\Phi(\cos\varphi)\,\Delta_n'(\cos\varphi,\cos\theta)\,d\varphi.
\end{aligned} \tag{13.8.9}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
|A_n(\varphi,\theta)|&\leqslant\pi^{-1}\left\{\frac{\max W(x)}{\min W(x)}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{2n+1+\left|\frac{\sin\{\gamma(\varphi)+\gamma(\theta)\}}{2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}}\right|+\right.\\
&\left.+\left|\frac{\sin\{\gamma(\varphi)-\gamma(\theta)\}}{2\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\right|\right\}=O(n)+O(1)\,|\varphi-\theta|^{-1}\,|\ln|\varphi-\theta||^{-\lambda},
\end{aligned} \tag{13.8.10}$$

$$|B_n(\varphi,\theta)|\leqslant\pi^{-1}(2n+1),$$

так что первое слагаемое в правой части (13.8.9) равно

$$O(n)\int_{E'}d\varphi+O(1)\int_{E'}|\varphi-\theta|^{-1}\,|\ln|\varphi-\theta||^{-\lambda}\,d\varphi=\eta O(1)+(\ln n)^{-\lambda+1}\,O(1),$$

$$n\to\infty,$$

где $O(1)$ в слагаемом $\eta O(1)$ не зависит от η. Третье слагаемое равно $O[(\ln n)^{-\lambda}]\,O(\ln n)$. Наконец, для оценки последнего слагаемого мы применим теорему 1.22.3. Так как многочлен $p_{n+1}(x)\,p_n(\xi)-p_n(x)\,p_{n+1}(\xi)$ равномерно ограничен при $-1\leqslant x\leqslant+1$, $-1\leqslant\xi\leqslant+1$, то $\Delta_n'(\xi,x)=O(n)$ равномерно относительно x и ξ, когда эти точки изменяются на отрезке $[-1+\varepsilon,+1-\varepsilon]$. Таким образом, мы получаем для рассматриваемого слагаемого оценку $\eta n^{-1}O(n)=\eta O(1)$, где $O(1)$ опять не зависит от η. Этим заканчивается доказательство теоремы 13.1.4.

ГЛАВА XIV

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

В этой главе мы рассмотрим некоторые задачи теории интерполирования, связанные с теорией ортогональных многочленов. В частности, нас будет интересовать интерполирование с узлами, которые являются нулями ортогональных многочленов $p_n(x)$, ассоциированных с распределением типа $d\alpha(x)$ или $w(x)\,dx$. Мы будем изучать обыкновенные многочлены Лагранжа и «S-многочлены» («step polynomials»), введенные Фейером. Эта тема тесным образом связана с материалом следующей главы, посвященной механическим квадратурам.

В связи с содержанием этой и следующей глав см. монографию Фельдгейма [4].

14.1. Определения. Задачи

(1) Пусть $[a, b]$ — конечный или бесконечный промежуток и пусть

$$S_n: x_{1n} < x_{2n} < \ldots < x_{nn}, \quad x_{1n} \geqslant a, \quad x_{nn} \leqslant b, \tag{14.1.1}$$

n различных точек этого промежутка. Пусть $l(x)$ — не равный нулю тождественно многочлен степени n, который обращается в нуль в точках $x = x_{\nu n}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$; он определен этими условиями с точностью до отличного от нуля постоянного множителя. В случае, когда это не будет вызывать никаких сомнений, мы будем писать x_ν вместо $x_{\nu n}$. Многочлены

$$l_\nu(x) = \frac{l(x)}{l'(x_\nu)(x - x_\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{14.1.2}$$

называются *фундаментальными многочленами* интерполирования по способу Лагранжа, соответствующими последовательности S_n. Они обладают следующим свойством:

$$l_\nu(x_\mu) = \delta_{\nu\mu}, \quad \nu, \mu = 1, 2, \ldots, n. \tag{14.1.3}$$

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — произвольные числа. Выражение

$$L_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu l_\nu(x) \tag{14.1.4}$$

представляет собой однозначно определенный π_{n-1}, который принимает значения f_ν в точках $x = x_\nu$. Этот многочлен называется n-м *многочленом Лагранжа*, соответствующим абсциссам S_n; точки S_n часто называют узлами интерполирования *). Легко видеть, что

$$l_1(x) + l_2(x) + \ldots + l_n(x) = 1. \tag{14.1.5}$$

*) Последним термином в оригинале автор не пользуется; мы ввели его для краткости речи, учитывая его общепринятость в математической литературе. (*Прим. перев.*)

(2) Пусть $\{S_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ — матрица узлов интерполирования. Если $f(x)$ — данная на отрезке $[a,\ b]$ функция, мы можем рассмотреть последовательность многочленов Лагранжа $L_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, определенных равенством (14.1.4), где $f_\nu = f(x_{\nu n})$. Различные свойства сходимости и расходимости этой последовательности были изучены при тех или иных предположениях о характере непрерывности функции $f(x)$. В дальнейшем мы будем интересоваться исключительно тем случаем, в котором узлы интерполирования S_n являются нулями ортогональных многочленов, ассоциированных с заданным распределением. При этом могут быть рассмотрены различные типы сходимости, например:

(a) обыкновенная сходимость: $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(x) = f(x)$;

(b) сходимость в среднем: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b |L_n(x) - f(x)|^2\,dx = 0$;

(c) обобщенная сходимость в среднем, получающаяся из случая (b) заменой показателя 2 на p, где $p > 0$;

(d) квадратурная сходимость: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \{L_n(x) - f(x)\}\,dx = 0$.

Последний случай особенно важен с точки зрения теории, излагаемой в главе XV. Разумеется, в интегральные условия может быть введена некоторая весовая функция.

(3) Пусть a и b конечны. Если допустить лишь непрерывность $f(x)$, то поведение многочленов Лагранжа при заданной матрице интерполирования может быть весьма нерегулярным. Фабер [2] (см. также Фейер [11], стр. 450—453; Марцинкевич [1]) доказал, что для данной матрицы узлов интерполирования $\{S_n\}$ существует такая непрерывная функция $f(x)$, что соответствующая ей последовательность многочленов $\{L_n(x)\}$ не является равномерно сходящейся. С. Н. Бернштейн [4] доказал даже, что существует такая функция $f(x)$, для которой последовательность $\{L_n(x)\}$ не ограниченна в заданной точке x_0. В соответствии с теоремой Хелли (§ 1.6) это эквивалентно неограниченности последовательности «констант Лебега»

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\, l_\nu(x_0)\,| \ \text{ при } n \to \infty. \tag{14.1.6}$$

В частном случае, когда

$$x_{\nu n} = \cos(2\nu - 1)\frac{\pi}{2n}, \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

$a=-1$, $b=+1$, т. е. когда $x_{\nu n}$ являются нулями многочлена Чебышева $T_n(x)$, известно еще больше. Грюнвальд [1] и Марцинкевич [2] доказали существование такой непрерывной функции $f(x)$, для которой последовательность многочленов Лагранжа, соответствующая этим $x_{\nu n}$, расходится всюду и даже не ограниченна всюду.

(4) Для того чтобы получить сходящиеся последовательности интерполяционных многочленов, необходимо ввести дополнительные ограничения либо (a) на функцию $f(x)$, в частности на модуль ее непрерывности (см. теорему 1.3.2), либо (b) на интерполяционные многочлены, например, на их производные или что-либо подобное.

Введем в рассмотрение многочлены

$$\left.\begin{aligned} h_\nu(x) &= \left\{1 - \frac{l''(x_\nu)}{l'(x_\nu)}(x - x_\nu)\right\} l_\nu^2(x) = v_\nu(x)\, l_\nu^2(x), \\ \mathfrak{h}_\nu(x) &= (x - x_\nu)\, l_\nu^2(x), \end{aligned}\right\} \tag{14.1.7}$$

которые будем называть *фундаментальными многочленами* первого и второго рода интерполирования по способу Эрмита (соответствующего узлам S_n). Эти π_{2n-1} полностью определены следующими условиями:

$$\left.\begin{aligned} &h_\nu(x_\mu) = \delta_{\nu\mu}, \quad h'_\nu(x_\mu) = 0, \\ &\mathfrak{h}_\nu(x_\mu) = 0, \quad \mathfrak{h}'_\nu(x_\mu) = \delta_{\nu\mu}, \quad \nu, \ \mu = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{14.1.8}$$

Если заданы значения f_ν, f'_ν, то многочлен $(2n-1)$-й степени

$$W_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu h_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} f'_\nu \mathfrak{h}_\nu(x) \tag{14.1.9}$$

однозначно определен равенствами

$$W_n(x_\nu) = f_\nu, \quad W'_n(x_\nu) = f'_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{14.1.10}$$

(5) Пусть $\{S_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — матрица узлов интерполирования. Если данная функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ производную, то мы можем положить $f_\nu = f(x_{\nu n})$, $f'_\nu = f'(x_{\nu n})$ и рассмотреть последовательность $\{W_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, интерполяционных многочленов Эрмита, определенных по (14.1.9). Если же известно лишь, что функция $f(x)$ непрерывна, то f'_ν могут быть выбраны произвольно; можно положить, например, $f'_\nu = 0$. Если мы выберем все $f'_\nu = 0$, то соответствующие многочлены $W_n(x)$ будем называть *S-многочленами*, соответствующими $\{S_n\}$. В более общем случае, когда $|f'_\nu| < A$, где A — постоянная, которая не зависит ни от ν, ни от n, мы будем их называть *обобщенными S-многочленами*.

Обыкновенные и обобщенные S-многочлены $W_n(x)$ при $n \to \infty$ обладают более регулярным поведением, чем многочлены Лагранжа $L_n(x)$. Они совпадают с данной функцией $f(x)$ в тех же точках, что и соответствующие многочлены Лагранжа, но они удовлетворяют дополнительным ограничениям относительно их первых производных. Их степень $2n-1$ вместо $n-1$. Мы докажем, что для некоторых матриц узлов интерполирования $\{S_n\}$ S-многочлены (даже обобщенные S-многочлены), соответствующие произвольной непрерывной функции $f(x)$, равномерно сходятся к ней.

S-многочлены и их обобщения были введены и исследованы Фейером [10], [11], [13], [16]. Тригонометрический аналог для $f'_\nu = 0$ в простейшем случае равноотстоящих узлов был рассмотрен Джексоном ([4], стр. 145, теорема VI). Для фундаментальных многочленов (14.1.7) справедливы следующие важные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &h_1(x) + h_2(x) + \ldots + h_n(x) = 1, \\ &\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu h_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{h}_\nu(x) = x. \end{aligned}\right\} \tag{14.1.11}$$

Из первого тождества может быть сделано, в частности, важное заключение относительно S-многочленов, т. е. для случая, когда $f'_\nu = 0$. Пусть $\{S_n\}$ такова, что

$$h_\nu(x) \geqslant 0, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{14.1.12}$$

Из (14.1.9) вытекает, что

$$\min f_\nu \leqslant W_n(x) \leqslant \max f_\nu, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{14.1.13}$$

Заметим, далее, что (14.1.12) эквивалентно тому, что линейные функции

$$v_\nu(x) = 1 - \frac{l''(x_\nu)}{l'(x_\nu)}(x - x_\nu) \tag{14.1.14}$$

не должны обращаться в нуль в открытом промежутке $a < x < b$, или, что сводится к тому же, что «сопряженные точки»

$$x_\nu + \frac{l'(x_\nu)}{l''(x_\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{14.1.15}$$

должны лежать вне этого промежутка (см. Фейер [13], [16]).

14.2. Фундаментальные многочлены интерполирования по способу Лагранжа

(1) Теорема 14.2.1 [1]). *Пусть* $d\alpha(x)$ — *произвольное распределение на отрезке* $[a, b]$, $\{p_n(x)\}$ — *ассоциированные ортонормальные многочлены,* $l_1(x)$, $l_2(x)$, ..., $l_n(x)$ — *фундаментальные многочлены* (14.1.2) *интерполирования по способу Лагранжа, узлы которого совпадают с нулями* $p_n(x)$. *Тогда*

$$\int_a^b l_\nu(x)\, l_\mu(x)\, d\alpha(x) = \lambda_\nu \delta_{\nu\mu}, \quad \nu, \mu = 1, 2, \ldots, n, \tag{14.2.1}$$

где λ_ν — *коэффициенты Кристоффеля, определенные с помощью* (3.4.1).

Это непосредственно вытекает из (3.4.1), так как $l_\nu(x)\, l_\mu(x)$ обращается в нуль в нулях $p_n(x)$, если $\nu \neq \mu$. При $\nu = \mu$ точка x_ν является единственным исключением, причем $l_\nu^2(x_\nu) = 1$.

Из (14.1.8) вытекают соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b h_\nu(x)\, d\alpha(x) = \lambda_\nu, \quad \int_a^b h'_\nu(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b x h'_\nu(x)\, d\alpha(x) = 0 \\ &\int_a^b \mathfrak{h}_\nu(x)\, d\alpha(x) = 0, \quad \int_a^b \mathfrak{h}'_\nu(x)\, d\alpha(x) = \lambda_\nu, \quad \int_a^b x\mathfrak{h}'_\nu(x)\, d\alpha(x) = \lambda_\nu x_\nu. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nu = 1, \ldots, n \end{aligned}\right\} \tag{14.2.2}$$

(2) В качестве важного следствия мы получаем такой результат:

Теорема 14.2.2. *Пусть* $K_n(x_0, x)$ *имеет тот же смысл, что и в* (3.1.9). *Тогда справедливо следующее тождество*:

$$K_{n-1}(x_0, x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \overline{p_\nu(x_0)}\, p_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{-1} \overline{l_\nu(x_0)}\, l_\nu(x). \tag{14.2.3}$$

Действительно, пусть $\varrho(x)$ — произвольный π_{n-1}. Многочлен $K_{n-1}(x_0, x)$ однозначно определен условием (3.1.12). Но (14.1.4) и (14.2.1) дают

$$\int_a^b \left\{\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{-1} \overline{l_\nu(x_0)} l_\nu(x)\right\} \left\{\sum_{\mu=1}^{n} \varrho(x_\mu)\, l_\mu(x)\right\} d\alpha(x) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \varrho(x_\nu) \overline{l_\nu(x_0)} = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho(x_\nu)\, l_\nu(\bar{x}_0) = \varrho(\bar{x}_0),$$

что и доказывает утверждение. Полагая в (14.2.3) $x_0 = x = x_\nu$, мы получаем новое доказательство равенства (3.4.8).

(3) Если учесть (14.2.1), то из (14.1.4) вытекает, что

$$\int_a^b |L_n(x)|^2\, d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu |f_\nu|^2. \tag{14.2.4}$$

---

[1]) Эрдёш и Туран [1].

Кроме того, пусть $f(x)$ — произвольная комплекснозначная функция, для которой существуют интегралы $\int_a^b f(x)\,x^\nu d\alpha(x)$, $\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Тогда (14.2.3) дает тождество

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\int_a^b f(x)\,p_\nu(x)\,d\alpha(x)\right|^2=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu^{-1}\left|\int_a^b f(x)\,l_\nu(x)\,d\alpha(x)\right|^2. \qquad (14.2.5)$$

Это приводит нас благодаря неравенству Бесселя (см. (3.1.5)) к неравенству

$$\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu^{-1}\left|\int_a^b f(x)\,l_\nu(x)\,d\alpha(x)\right|^2\leqslant\int_a^b|f(x)|^2\,d\alpha(x), \qquad (14.2.6)$$

если только последний интеграл существует.

14.3. Сходимость в среднем многочленов Лагранжа

(1) Теорема 14.3.1 [1]. *Пусть $d\alpha(x)$ — произвольное распределение на конечном отрезке $[a,\,b]$ и пусть $\{p_n(x)\}$ — ассоциированные ортонормальные многочлены. Пусть для комплекснозначной функции $f(x)$ существуют интегралы Римана—Стилтьеса*

$$\int_a^b f(x)\,x^n\,d\alpha(x),\quad \int_a^b|f(x)|^2\,d\alpha(x),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (14.3.1)$$

Если $L_n(x)$ — многочлен Лагранжа степени $n-1$, который совпадает с $f(x)$ в нулях $p_n(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f(x)-L_n(x)|^2\,d\alpha(x)=0. \qquad (14.3.2)$$

Сходимость в среднем в обычном смысле вытекает из (14.3.2) для любой функции $f(x)$, интегрируемой в смысле Римана, в случае, когда $d\alpha(x)=w(x)\,dx$, $w(x)\geqslant\mu>0$.

Для доказательства мы используем (14.2.4), (14.2.6) и дальнейшую теорему 15.2.3 о квадратурной сходимости. Мы имеем

$$\begin{gathered}\int_a^b|f(x)-L_n(x)|^2\,d\alpha(x)=\int_a^b|f(x)|^2\,d\alpha(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu|f(x_\nu)|^2-\\
-2\Re\sum_{\nu=1}^{n}\overline{f(x_\nu)}\int_a^b f(x)\,l_\nu(x)\,d\alpha(x)\leqslant\int_a^b|f(x)|^2\,d\alpha(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu|f(x_\nu)|^2+\\
+2\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu|f(x_\nu)|^2\right\}^{\frac12}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu^{-1}\left|\int_a^b f(x)\,l_\nu(x)\,d\alpha(x)\right|^2\right\}^{\frac12}\leqslant\\
\leqslant\int_a^b|f(x)|^2\,d\alpha(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu|f(x_\nu)|^2+\\
+2\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu|f(x_\nu)|^2\right\}^{\frac12}\left\{\int_a^b|f(x)|^2\,d\alpha(x)\right\}^{\frac12}. \qquad (14.3.3)\end{gathered}$$

[1] Эрдёш и Туран [1], Шохат [8].

Отсюда, учитывая теорему 15.2.3, получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_a^b |f(x)-L_n(x)|^2\,d\alpha(x)\leqslant 4\int_a^b |f(x)|^2\,d\alpha(x). \qquad (14.3.4)$$

Затем, пусть ε — произвольное положительное число, а $\varrho(x)$ — многочлен, для которого (см. теорему 1.5.2)

$$\int_a^b |f(x)-\varrho(x)|^2\,d\alpha(x)<\varepsilon. \qquad (14.3.5)$$

Если $L_n(f;\ x)$ означает многочлен Лагранжа степени $n-1$, соответствующий $f(x)$, то мы имеем

$$f(x)-L_n(f;\ x)=f(x)-\varrho(x)-L_n(f-\varrho;\ x), \qquad (14.3.6)$$

предполагая, что n больше, чем степень многочлена $\varrho(x)$. Этим утверждение доказано.

(2) В случае $d\alpha(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$, $a=-1$, $b=+1$ (т. е. для узлов Чебышева первого рода) Эрдёш и Фельдгейм [1]) показали, что можно даже утверждать справедливость следующей теоремы:

Теорема 14.3.2. *Пусть p — произвольное положительное число и пусть $f(x)$ — непрерывная функция. Тогда для многочленов Лагранжа, соответствующих узлам Чебышева первого рода, имеем*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1} |f(x)-L_n(x)|^p(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx=0. \qquad (14.3.7)$$

Достаточно установить это для целых четных значений p. В доказательстве, основанном на индукции по целым четным p, существенно используется свойство чебышевских узлов, сформулированное в задаче 57 (см. ниже). Фельдгейм ([2], стр. 330) отмечает, что (14.3.2), вообще говоря, не будет верно, если $d\alpha(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$, $a=-1$, $b=+1$ (т. е. для узлов Чебышева второго рода) и если показатель 2 заменить показателем $p=4$. Для тех же узлов *не имеет места* соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1} |f(x)-L_n(x)|^2\,dx=0. \qquad (14.3.8)$$

В обоих случаях верхний предел рассматриваемых интегралов может быть равен $+\infty$ для надлежаще выбранной непрерывной функции.

(3) Из теоремы 14.3.1 сходимость в среднем в смысле (14.3.8) непосредственно следует для узлов интерполирования Якоби, т. е. для нулей многочленов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, в предположении, что $\max(\alpha,\ \beta)\leqslant 0$ (см. Эрдёш и Туран [1]); здесь $f(x)$ — произвольная непрерывная (или даже интегрируемая в смысле Римана) функция.

Холло [1] доказал сходимость в среднем для узлов Якоби при $\max(\alpha,\ \beta)<\frac{1}{2}$, предполагая непрерывность $f(x)$. Граница $\frac{1}{2}$ является точной, если учесть результат Фельдгейма, упомянутый в (2). Холло исследовал также справедливость соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1} |f(x)-L_n(x)|\,dx=0, \qquad (14.3.9)$$

---

1) Эрдёш и Фельдгейм [1]; см. также Фельдгейм [2] и [3], стр. 33-36.

где $f(x)$ непрерывна, и показал, что (14.3.9) имеет место при $\max(\alpha, \beta) < \frac{3}{2}$. Это опять точная граница в том смысле, что при $\max(\alpha, \beta) > \frac{3}{2}$ и надлежаще выбранной непрерывной функции $f(x)$ равенство (14.3.9) нарушается. (Это вытекает из второй части теоремы 15.4.)

14.4. Многочлены Лагранжа для узлов Якоби

Для дальнейшего исследования играет очень важную роль теорема 8.9.1, но будут использованы также оценки многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos\theta)$, полученные в § 7.32.

(1) Допустим, что $\alpha > -1$, $\beta > -1$, и пусть $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ — нули многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, записанные в убывающем порядке. Здесь $x_\nu = \cos\theta_\nu$, $0 < \theta_\nu < \pi$. Мы можем высказать следующую теорему:

Теорема 14.4. *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[-1, +1]$ с модулем непрерывности $\omega(\delta)$* [1]*. Тогда многочлены Лагранжа с узлами интерполирования, которые совпадают с нулями многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, сходятся равномерно к $f(x)$ на всяком отрезке $[-1+\varepsilon, +1-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, если только $\omega(\delta) = o(|\ln\delta|^{-1})$. То же самое справедливо на отрезке $[-1+\varepsilon, 1]$, если выполняются условия $\alpha \leqslant -\frac{1}{2}$ и $\omega(\delta) = o(|\ln\delta|^{-1})$ или же $\mu - \frac{1}{2} \leqslant \alpha < \mu + \frac{1}{2}$* [2] *и функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка μ с модулем непрерывности $\omega_\mu(\delta) = o(\delta^{\alpha-\mu+\frac{1}{2}})$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$*

В случае, когда $\alpha < -\frac{1}{2}$, многочлены Лагранжа сходятся в точке $x = +1$ для произвольной непрерывной функции $f(x)$.

На отрезке $[-1, +1]$ существует непрерывная функция, для которой многочлены Лагранжа расходятся (неограниченны) в заданной точке x_0, $-1 < x_0 < +1$; то же самое имеет место для точки $x_0 = +1$, если только $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$.

Аналогичные утверждения имеют место на отрезке $[-1, 1-\varepsilon]$ и в точке $x = -1$, если мы заменим α на β. Сходимость равномерна на всем отрезке $[-1, +1]$, если $\max(\alpha, \beta) \leqslant -\frac{1}{2}$ и $\omega(\delta) = o(|\ln\delta|^{-1})$ или же $\mu - \frac{1}{2} \leqslant \max(\alpha, \beta) < \mu + \frac{1}{2}$ и $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка μ с модулем непрерывности $\omega_\mu(\delta) = o(\delta^{\max(\alpha, \beta)-\mu+\frac{1}{2}})$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ Опять при $\mu = 0$ знак равенства должен быть исключен, т. е. исключается случай $\max(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}$.

См. Фейер [13], стр. 22, 24, 27; Шохат [5], стр. 146. Приведенные здесь результаты более точны, чем полученные в этих статьях.

(2) Начнем с исследования «констант Лебега»

$$\sum_{\nu=1}^{n} |l_\nu(x_0)|, \tag{14.4.1}$$

---

[1] См. теорему 1.3.2.

[2] При $\mu = 0$ знак равенства исключается, т. е. исключается случай $\alpha = -\frac{1}{2}$.

где $-1<x_0<+1$. Пусть δ — фиксированное положительное число, $\delta<1-|x_0|$. Тогда $P_n^{(\alpha,\beta)}(x_0)=O(n^{-\frac{1}{2}})$ и

$$\sum_{|x_\nu-x_0|>\delta}|l_\nu(x_0)|=O(n^{-\frac{1}{2}})\sum_{|x_\nu-x_0|>\delta}|P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_\nu)|^{-1}=$$

$$=O(n^{-\frac{1}{2}})\sum_{\nu=1}^{n}|P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_\nu)|^{-1}. \qquad (14.4.2)$$

В соответствии с (8.9.2) имеем

$$\sum_{\nu=1}^{n}|P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_\nu)|^{-1}=O(1)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{-\alpha-2}+O(1)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta+\frac{3}{2}}n^{-\beta-2}=O(n^{\frac{1}{2}}). \qquad (14.4.3)$$

Следовательно,

$$\sum_{|x_\nu-x_0|>\delta}|l_\nu(x_0)|=O(1). \qquad (14.4.4)$$

С другой стороны, если $|x_\nu-x_0|\leqslant\delta$, то при фиксированном ν мы имеем (см. (8.8.2))

$$l_\nu(x_0=O(n^{-\frac{1}{2}})\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x_\nu)-P_n^{(\alpha,\beta)}(x_0)}{x_\nu-x_0}=O(1), \qquad (14.4.5)$$

так что, полагая $x_0=\cos\theta_0$, $0<\theta_0<\pi$, получаем

$$\sum_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta}|l_\nu(x_0)|=\sum_{n^{-1}<|\theta_\nu-\theta_0|\leqslant\delta'}|l_\nu(x_0)|+O(1)=$$

$$=O(n^{-\frac{1}{2}})\,O(n^{-\frac{1}{2}})\sum_{n^{-1}<|\theta_\nu-\theta_0|\leqslant\delta'}|\theta_\nu-\theta_0|^{-1}+O(1), \qquad (14.4.6)$$

где δ' — фиксированное положительное число. В соответствии с (8.9.1) последнее выражение равно $O(\ln n)$. Эта же оценка справедлива для (14.4.1), причем равномерно, если выполняется условие $-1+\varepsilon\leqslant x_0\leqslant+1-\varepsilon$.

Мы можем также показать, что

$$\sum_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta}|l_\nu(x_0)|\sim\ln n, \qquad (14.4.7)$$

когда $n\to\infty$, пробегая некоторую подходящим образом выбранную последовательность целых чисел. Достаточно выбрать n таким образом, чтобы $|\cos(N\theta+\gamma)|\geqslant\cos\varepsilon$, где N и γ имеют тот же смысл, что и в формуле Дарбу (глава VIII), а $\varepsilon=\frac{1}{2}\min(\theta_0,\ \pi-\theta_0)$. Это, очевидно, возможно, так как из неравенств

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi-\varepsilon<N\theta_0+\gamma<\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi+\varepsilon,$$

где m — целое, следуют неравенства

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi+\varepsilon<(N+1)\,\theta_0+\gamma<\left(m+\frac{3}{2}\right)\pi-\varepsilon.$$

Теперь формула Дарбу, если учесть предыдущие рассуждения и равенство (8.9.1), дает требуемый результат.

(3) В качестве следствия из результата (2) мы можем заключить на основании теоремы 1.6 (теоремы Хилле), что существует такая непрерывная функция $f(x)$, для которой многочлены Лагранжа не ограничены во внутренней точке x_0. С другой стороны, пусть $f(x)$ имеет модуль непрерыв-

ности $\omega(\delta)=o(|\ln\delta|^{-1})$, а $L_n(f; x)$ — соответствующий ей многочлен Лагранжа степени $n-1$. Приблизим функцию $f(x)$ многочленом $\varrho(x)$ степени $n-1$ так, чтобы

$$f(x)-\varrho(x)=o[(\ln n)^{-1}], \quad -1\leqslant x\leqslant +1, \tag{14.4.8}$$

(теорема 1.3.2). Тогда (см. (14.3.6) имеем

$$|L_n(f; x)-f(x)|=|L_n(f-\varrho; x)-\{f(x)-\varrho(x)\}|= \\ =o\{(\ln n)^{-1}\}\,O(\ln n)=o(1). \tag{14.4.9}$$

(4) Допустим, что $1-\delta\leqslant x_0\leqslant 1$. Полагая $\mu=n+1-\nu$, $\mu=O(n)$, из теоремы 7.32.2 и формулы (8.9.2) имеем

$$\sum_{|x_\nu-x_0|>\delta}|l_\nu(x_0)|=O(1)\,|P_n^{(\alpha,\beta)}(x_0)|\sum_{|x_\nu-x_0|>\delta}|P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_\nu)|^{-1}= \\ =O(n^a)\sum\mu^{\beta+\frac{3}{2}}n^{-\beta-2}=O(n^{a+\frac{1}{2}}),\quad a=\max\left(\alpha,\ -\frac{1}{2}\right). \tag{14.4.10}$$

Перейдем теперь к определению верхней границы выражения

$$\sum_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta}|l_\nu(x_0)|=\sum\left|\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta_0)}{\cos\theta_0-\cos\theta_\nu}\right||P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(\cos\theta_\nu)|^{-1}= \\ =O(1)\,|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta_0)|\sum\frac{\nu^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{-\alpha-2}}{|\theta_0^2-\theta_\nu^2|}, \tag{14.4.11}$$

так как $(\theta_0^2-\theta^2)/(\cos\theta_0-\cos\theta)$ ограничено. В дальнейшем мы используем обе оценки (14.4.11). Учитывая (4.21.7), мы получаем

$$\left|\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta_0)-P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta_\nu)}{\cos\theta_0-\cos\theta_\nu}\right||P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(\cos\theta_\nu)|^{-1}= \\ =O(1)\,|P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos\tau)|\,\nu^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{-\alpha-1}, \tag{14.4.12}$$

где τ лежит между θ_0 и θ_ν.

Пусть $\theta_0=n^{-1}\xi$, и рассмотрим случай $\xi=O(1)$. Пусть, кроме того, $\nu=O(1)$. Тогда выражение (14.4.12) будет $O(1)\,n^{\alpha+1}\nu^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{-\alpha-1}=O(1)$. С другой стороны, если ν больше, чем достаточно большое фиксированное положительное число, то второе выражение в правой части (14.4.11) равно (см. вторую оценку в (7.32.5))

$$O(1)\,n^\alpha\sum\nu^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{-\alpha-2}\theta_\nu^{-2}=O(1)\sum\nu^{\alpha-\frac{1}{2}}=O(n^{\alpha+\frac{1}{2}}),\quad O(\ln n),\quad O(1), \tag{14.4.13}$$

в зависимости от того, будет ли $\alpha>-\frac{1}{2}$, $\alpha=-\frac{1}{2}$ или $\alpha<-\frac{1}{2}$.

Пусть теперь ξ будет «велико» и пусть $\xi-\nu\pi=O(1)$, так что число таких значений ν ограниченно. Тогда из (14.4.2) мы получаем (см. первую оценку в (7.32.5))

$$O(1)\,\tau^{-\alpha-\frac{3}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\nu^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{-\alpha-1}=O(1)\,(\nu/n)^{-\alpha-\frac{3}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\nu^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{-\alpha-1}=O(1). \tag{14.4.14}$$

Наконец, допустим, что ξ и $\xi-\nu\pi$ «велики». Тогда второе выражение в правой части (14.4.11) будет (см. первую оценку в (7.32.5))

$$O(\xi^{-\alpha-\frac{1}{2}})\sum\frac{\nu^{\alpha+\frac{3}{2}}}{|\xi^2-\nu^2\pi^2|}=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3, \tag{14.4.15}$$

где суммирование соответственно распространено на интервалы $\nu\pi \leqslant \xi/2$, $\xi/2 < \nu\pi \leqslant 3\xi/2$, $\nu\pi > 3\xi/2$. Здесь мы должны принять во внимание, что отношение

$$\left| \frac{\xi^2 - [\nu\pi + O(1)]^2}{\xi^2 - \nu^2\pi^2} \right|$$

имеет положительную нижнюю границу. Во второй сумме $|\xi - \nu\pi|$ больше, чем фиксированное положительное число. Мы находим, что

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= O(\xi^{-\alpha-\frac{1}{2}}) O(\xi^{-2}) \sum_{\nu\pi \leqslant \xi/2} \nu^{\alpha+\frac{3}{2}} = O(1), \\ \Sigma_2 &= O(\xi^{-\alpha-\frac{1}{2}}) O(\xi^{\alpha+\frac{1}{2}}) \sum_{\xi/2 < \nu\pi \leqslant 3\xi/2} |\xi - \nu\pi|^{-1} = O(\ln \xi) = O(\ln n), \quad (14.4.16) \\ \Sigma_3 &= O(\xi^{-\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{\nu\pi > 3\xi/2} \nu^{\alpha-\frac{1}{2}} = O(n^{\alpha+\frac{1}{2}}), \quad O(\ln n), \quad O(1), \end{aligned}$$

в зависимости от того, будет ли $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ или $\alpha < -\frac{1}{2}$.

Резюмируя, мы получаем для констант Лебега (14.4.1) оценки $O(n^{\alpha+\frac{1}{2}})$ или $O(\ln n)$ равномерно на отрезке $-1+\varepsilon \leqslant x_0 \leqslant 1$ в зависимости от того, будет ли $\alpha > -\frac{1}{2}$ или же $\alpha \leqslant -\frac{1}{2}$. Мы получим подобный результат для отрезка $-1 \leqslant x_0 \leqslant 1-\varepsilon$, если заменим α на β. Мы получим на всем отрезке $-1 \leqslant x_0 \leqslant 1$ оценки $O(n^{\gamma+\frac{1}{2}})$ и соответственно $O(\ln n)$ при $\gamma > -\frac{1}{2}$ и $\gamma \leqslant -\frac{1}{2}$, где $\gamma = \max(\alpha, \beta)$.

Применим теперь рассуждение, аналогичное приведенному в (3) Допустим сначала, что $-1+\varepsilon \leqslant x_0 \leqslant 1$ и что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 14.4. В соответствии с теоремой 1.3.3 существует такой многочлен $(n-1)$-й степени $\varrho(x)$, что

$$f(x) - \varrho(x) = \begin{cases} n^{-\mu} o(n^{-\alpha+\mu-\frac{1}{2}}) = o(n^{-\alpha-\frac{1}{2}}), \\ o[(\ln n)^{-1}], \quad -1 \leqslant x \leqslant +1, \end{cases} \qquad (14.4.17)$$

в зависимости от того, будет ли $\alpha > -\frac{1}{2}$ или же $\alpha \leqslant -\frac{1}{2}$. Это доказывает утверждение относительно отрезка $[-1+\varepsilon, 1]$. Доказательство, очевидно, будет таким же для $[-1, 1-\varepsilon]$ и $[-1, +1]$.

(5) Остается исследовать константы Лебега для $x_0 = +1$, т. е. выражения

$$\sum_{\nu=1}^{n} |l_\nu(1)| \sim n^\alpha \sum_{\nu=1}^{n} (1 - x_\nu)^{-1} |P_n^{(\alpha, \beta)\prime}(x_\nu)|^{-1}. \qquad (14.4.18)$$

Сумма по положительным узлам x_ν равна

$$\sim n^\alpha \sum (\nu/n)^{-2} \nu^{\alpha+\frac{3}{2}} n^{-\alpha}{}_{-2} = \sum \nu^{\alpha-\frac{1}{2}};$$

это выражение будет $O(n^{\alpha+\frac{1}{2}})$, $O(\ln n)$, $O(1)$ в соответствии с тем, будет ли $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ или $\alpha < -\frac{1}{2}$. Сумма по отрицательным узлам x_ν равна

$$n^\alpha \sum |P_n^{(\alpha, \beta)\prime}(x_\nu)|^{-1} \sim n^\alpha \sum \nu^{\beta+\frac{3}{2}} n^{-\beta-2} \sim n^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

Остается сделать еще один шаг, а именно применить теорему Хелли, чтобы закончить доказательство теоремы 14.4.

14.5. Предварительное исследование S-многочленов в классических случаях

Мы вычислим линейную функцию $v_\nu(x)$, фигурирующую в (14.1.7), соответственно для узлов Якоби, Лагерра и Эрмита. Допустим, что $\alpha > -1$, $\beta > -1$ в первом случае и что $\alpha > -1$ во втором случае.

(1) Из (4.2.1) в случае узлов Якоби мы получаем

$$\frac{l''(x_\nu)}{l'(x_\nu)} = \frac{\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)\,x_\nu}{1-x_\nu^2}, \tag{14.5.1}$$

так как $l(x_\nu)=0$. Отсюда

$$v_\nu(x) = \frac{1-x\,[\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)\,x_\nu]+(\alpha-\beta)\,x_\nu+(\alpha+\beta+1)\,x_\nu^2}{1-x_\nu^2}. \tag{14.5.2}$$

В частности,

$$\left.\begin{aligned} v_\nu(-1) &= \frac{(1+\alpha)(1+x_\nu)-\beta\,(1-x_\nu)}{1-x_\nu}, \\ v_\nu(+1) &= \frac{(1+\beta)(1-x_\nu)-\alpha\,(1+x_\nu)}{1+x_\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{14.5.3}$$

Нули x_ν всюду плотны на отрезке $[-1, +1]$ (теорема 6.1.1) при больших n. Таким образом, $v_\nu(-1)$ неотрицательно для всех ν и n тогда и только тогда, когда $\beta \leqslant 0$. Аналогично $v_\nu(+1) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha \leqslant 0$. Так как $v_\nu(x)$ — линейная функция, то мы получаем следующий результат:

Теорема 14.5. *Фундаментальные многочлены $h_\nu(x)$ первого рода, соответствующие узлам Якоби, неотрицательны при всех ν и n тогда и только тогда, когда*

$$-1 < \alpha \leqslant 0, \quad -1 < \beta \leqslant 0. \tag{14.5.4}$$

(2) В случае узлов Лагерра (см. (5.1.2), первое уравнение)

$$v_\nu(x) = \frac{x_\nu(x_\nu-\alpha)+x\,(\alpha+1-x_\nu)}{x_\nu}, \quad v_\nu(0) = x_\nu-\alpha. \tag{14.5.5}$$

Здесь $v_\nu(x)$ меняют свои знаки при всех α и ν, если n выбрано подходящим образом.

В случае узлов Эрмита (см. (5.5.2), первое уравнение)

$$v_\nu(x) = 1 - 2x_\nu x + 2x_\nu^2. \tag{14.5.6}$$

14.6. S-многочлены и интерполяционные многочлены Эрмита для узлов Якоби

Предположим опять, что $\alpha > -1$, $\beta > -1$, и применим те же обозначения, что и в § 14.4.

Теорема 14.6. *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-1, +1]$. Обобщенные S-многочлены* (14.1.9) ($f_\nu = f(x_\nu)$, $|f'_\nu| < A$) *сходятся равномерно к $f(x)$ на всяком отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Это же справедливо на отрезке $[-1+\varepsilon, 1]$, если $\alpha < 0$. S-многочлены, вообще говоря, расходятся в точке $x = +1$, если $f(x)$ лишь непрерывна, а $\alpha \geqslant 0$.*

Интерполяционные многочлены Эрмита (14.1.9) ($f_\nu = f(x_\nu)$, $f'_\nu = f'(x_\nu)$) *сходятся равномерно к $f(x)$ на отрезке $[-1+\varepsilon, 1]$, если $\alpha < \frac{1}{2}$ и $f(x)$ имеет* *непрерывную вторую производную, или если* $\mu/2 \leqslant \alpha < (\mu+1)/2$ *и* $f(x)$ *имеет непрерывную производную порядка* $\mu+1$ *с модулем непрерывности* $\omega_{\mu+1}(\delta) = o(\delta^{2\alpha-\mu})$, $\mu = 1, 2, \ldots$

Аналогичные утверждения справедливы на отрезке $[-1, 1-\varepsilon]$ и в точке $x = -1$, если заменить α на β, а также на всем отрезке $[-1, +1]$, если заменить α на $\max(\alpha, \beta)$ (см. Шохат [5], стр. 138—139; Сегё [14]).

(1) Начнем с изучения сходимости для $-1 < x_0 < +1$. Здесь опять совершенно необходима теорема 8.9.1.

Если $x = x_\nu$, то числитель $v_\nu(x)$ в (14.5.2) будет

$$1 - x_\nu[\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)x_\nu] + (\alpha-\beta)x_\nu + (\alpha+\beta+1)x_\nu^2 = \\ = 1 - x_\nu^2 > 0. \qquad (14.6.1)$$

Поэтому $v_\nu(x_0)$ положительно, если $|x_\nu - x_0|$ достаточно мало, т. е. если $|x_\nu - x_0| \leqslant \delta$. Это же, очевидно, справедливо для $h_\nu(x_0)$. Кроме того, $v_\nu(x_0)$ имеет для этих ν положительную нижнюю границу, которая не зависит от δ. Поэтому, учитывая первое из тождеств (14.1.11), мы получаем

$$\sum_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta} |h_\nu(x_0)| = \sum_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta} h_\nu(x_0) = 1 - \sum_{|x_\nu-x_0|>\delta} h_\nu(x_0), \qquad (14.6.2)$$

и из (14.1.7) следует, что

$$\sum_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta} |\mathfrak{h}_\nu(x_0)| \leqslant \delta \sum_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta} \frac{|h_\nu(x_0)|}{v_\nu(x_0)} = O(1)\,\delta \sum_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta} h_\nu(x_0). \qquad (14.6.3)$$

Здесь множитель $O(1)$ не зависит от δ.

Найдем теперь оценки для соответствующих сумм, когда $|x_\nu - x_0| > \delta$. Из (14.5.2) и (8.9.2) следует

$$\sum_{|x_\nu-x_0|>\delta} |h_\nu(x_0)| = O(1) \sum_{|x_\nu-x_0|>\delta} (1-x_\nu^2)^{-1} l_\nu^2(x_0) = \\ = O(1)\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x_0)\}^2 \sum_{|x_\nu-x_0|>\delta} (1-x_\nu^2)^{-1}\{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_\nu)\}^{-2} = \\ = O(n^{-1}) \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\nu}{n}\right)^{-2} \nu^{2\alpha+3} n^{-2\alpha-4} + \\ + O(n^{-1}) \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\nu}{n}\right)^{-2} \nu^{2\beta+3} n^{-2\beta-4} = O(n^{-1}). \qquad (14.6.4)$$

Кроме того, отметим, что

$$\sum_{|x_\nu-x_0|>\delta} |\mathfrak{h}_\nu(x_0)| = O(1) \sum_{|x_\nu-x_0|>\delta} l_\nu^2(x_0) = \\ = O(1)\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x_0)\}^2 \sum_{|x_\nu-x_0|>\delta} \{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_\nu)\}^{-2} = \\ = O(n^{-1}) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2\alpha+3} n^{-2\alpha-4} + O(n^{-1}) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2\beta+} n^{-2\beta-4} = O(n^{-1}). \qquad (14.6.5)$$

Это дает сходимость обобщенных S-многочленов для непрерывной функции, если $-1 < x_0 < +1$. Действительно, в силу (14.1.9) и (14.1.11) мы имеем

$$|W_n(x_0)-f(x_0)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu)-f(x_0)|\,|h_\nu(x_0)| + A\sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta} |f(x_\nu)-f(x_0)| \sum_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta} h_\nu(x_0) + O(1)\sum_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta} |\mathfrak{h}_\nu(x_0)| +$$

$$+ 2\max|f(x)| \sum_{|x_\nu-x_0|>\delta} |h_\nu(x_0)| + O(1)\sum_{|x_\nu-x_0|>\delta} |\mathfrak{h}_\nu(x_0)| =$$

$$= \max_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta} |f(x_\nu)-f(x_0)|\,O(1) + \delta O(1) + O(n^{-1}) + O(n^{-1}). \qquad (14.6.6)$$

Фигурирующие в последнем выражении множители $O(1)$ не зависят от δ.

(2) Допустим теперь, что $\alpha<0$ и что $1-\delta\leqslant x_0\leqslant 1$. Вторая формула в (14.5.3) показывает, что $v_\nu(x_0)$ и $h_\nu(x_0)$ снова положительны, причем $v_\nu(x_0)$ ограничена снизу положительным числом, если $|x_\nu-x_0|\leqslant\delta$, где δ достаточно мало. (Мы имеем $v_\nu(x_0)\geqslant v_\nu(+1)$, если $\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)x_\nu>0$.) Формулы, аналогичные (14.6.2) и (14.6.3), получаются непосредственно. В (14.6.4) и (14.6.5) необходимо внести небольшие видоизменения, связанные с тем, что в этом случае

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x_0) = O(n^a), \quad a = \max\left(\alpha, -\frac{1}{2}\right).$$

(Формулы, соответствующие (14.6.4) и (14.6.5), имеют место при произвольном $\alpha>-1$; это замечание используется в (3).) Так как $a<0$, то заключения, сделанные в (1), остаются в силе; этим устанавливается сходимость обобщенных S-многочленов, когда $\alpha<0$ и $f(x)$ непрерывна. (Разумеется, то же самое справедливо для интерполяционных многочленов Эрмита, если $f'(x)$ ограничена.)

(3) Временно отложим исследование S-многочленов в точке $x=+1$, когда $f(x)$ непрерывна и $\alpha\geqslant 0$, и перейдем к исследованию интерполяционных многочленов Эрмита при $1-\delta\leqslant x_0\leqslant 1$ с α произвольным, но бо́льшим, чем -1. Сначала мы заметим, что числитель в (14.5.2) обращается в нуль при $x=x_\nu=+1$, так что при $|x_\nu-x_0|\leqslant\delta$ мы будем иметь

$$|v_\nu(x_0)| < (1-x_\nu^2)^{-1}\varepsilon(\delta), \qquad (14.6.7)$$

где $\varepsilon(\delta)\to 0$, когда $\delta\to 0$. Тогда

$$\sum_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta} |h_\nu(x_0)| = \varepsilon(\delta)\sum_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta} (1-x_\nu^2)^{-1} l_\nu^2(x_0) =$$

$$= \varepsilon(\delta)\sum_{|x_\nu-x_0|\leqslant\delta} (1-x_\nu^2)^{-1}\left\{\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x_0)}{x_0-x_\nu}\right\}^2 \{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_\nu)\}^{-2}. \qquad (14.6.8)$$

Применяя обозначения и рассуждения § 14.4, (4), мы получаем для стоящей выше суммы следующие оценки:

(a) $O(n^2)$, если $\xi=O(1)$, $\nu=O(1)$;

(b) $O(1)\sum \nu^{2\alpha-1}(\nu/n)^{-2} = O(n^{2\alpha})$, $O(n^2\ln n)$, $O(n^2)$, в зависимости от того, будет ли $\alpha>1$, $\alpha=1$ или $\alpha<1$, если $\xi=O(1)$ и ν «велико»;

(c) $O(1)(\nu/n)^{-2}=O(n^2)$, если ξ «велико» и $\xi-\nu\pi=O(1)$;

(d) $O(1)\xi^{-2\alpha-1}\sum \nu^{2\alpha+3}(\xi^2-\nu^2\pi^2)^{-2}(\nu/n)^{-2} = \Sigma_1'+\Sigma_2'+\Sigma_3'$, если ξ и $\xi-\nu\pi$ «велики». Суммирование в последних трех суммах ведется по тем же значениям ν, что и в (14.4.16). Мы имеем

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_1' &= O(\xi^{-2\alpha-5}) \sum_{\nu\pi\leqslant\xi/2} \nu^{2\alpha+3}\left(\frac{\nu}{n}\right)^{-2} = O(\xi^{-3}n^2) = O(n^2),\\
\Sigma_2' &= O(1) \sum_{\xi/2<\nu\pi\leqslant 3\xi/2} (\xi-\nu\pi)^{-2}\left(\frac{\nu}{n}\right)^{-2} = O(\xi^{-2}n^2) = O(n^2),\\
\Sigma_3' &= O(\xi^{-2\alpha-1}) \sum_{\nu\pi>3\xi/2} \nu^{2\alpha-1}\left(\frac{\nu}{n}\right)^{-2} = O(n^{2\alpha}),\ O(n^2\ln n),\ O(n^2),
\end{aligned}\right\} \quad (14.6.9)$$

в зависимости от того, будет ли $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ или же $\alpha < 1$. Этим случаям соответствуют оценки 168

$$\sum_{|x_\nu - x_0|\leqslant\delta} |h_\nu(x_0)| = \varepsilon(\delta)\,O(n^{2\alpha}),\quad \varepsilon(\delta)\,O(n^2\ln n),\quad \varepsilon(\delta)\,O(n^2). \quad (14.6.10)$$

Для того чтобы получить аналогичные оценки для $\mathfrak{h}_\nu(x_0)$, мы вычеркиваем в (14.6.8) множитель $(1-x_\nu^2)^{-1} \sim (\nu/n)^{-2}$. Таким образом, мы легко получаем, что

$$\sum_{|x_\nu - x_0|\leqslant\delta} |\mathfrak{h}_\nu(x_0)| = \delta O(n^{2\alpha}),\quad \delta O(\ln n),\quad \delta O(1), \quad (14.6.11)$$

в зависимости от того, будет ли $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ или же $\alpha < 0$.

Соответствующие границы при $|x_\nu - x_0| > \delta$ равны $O(n^{2\alpha})$ (см. замечание, сделанное в (2)). Таким образом, (14.1.9) и первая из формул (14.1.11) дают следующий результат:

$$\begin{aligned}
|W_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant{} & \max_{|x_\nu - x_0|\leqslant\delta} |f(x_\nu) - f(x_0)|\,\varepsilon(\delta) \begin{Bmatrix} O(n^{2\alpha}) \\ O(n^2\ln n) \\ O(n^2) \end{Bmatrix} + \\
&+ \max_{|x_\nu - x_0|\leqslant\delta} |f'(x_\nu)|\,\delta \begin{Bmatrix} O(n^{2\alpha}) \\ O(\ln n) \\ O(1) \end{Bmatrix} + \max|f(x)|\,O(n^{2a}) + \\
&+ \max|f'(x)|\,O(n^{2a});\quad a = \max\left(\alpha,\ -\frac{1}{2}\right). \quad (14.6.12)
\end{aligned}$$

В первом слагаемом мы должны различать случаи $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha < 1$, а во втором $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$. Выражения под знаком O не зависят от $f(x)$ и δ.

Мы применяем теперь обычное рассуждение. Пусть $W_n(f;\,x)$ — интерполяционный многочлен Эрмита, соответствующий функции $f(x)$, а $\varrho(x)$ — произвольный π_{2n-1}. Тогда

$$W_n(f;\,x_0) - f(x_0) = W_n(f-\varrho;\,x_0) - [f(x_0) - \varrho(x_0)]. \quad (14.6.13)$$

При условиях, указанных в теореме 14.6, мы можем определить многочлен $\varrho(x)$ (см. теорему 1.3.3) так, чтобы

$$\left.\begin{aligned}
&f(x) - \varrho(x) = o(n^{-2}),\ f'(x) - \varrho'(x) = o(n^{-1}),\ \text{если } \alpha < \frac{1}{2},\\
&f(x) - \varrho(x) = o(n^{-2\alpha-1}),\ f'(x) - \varrho'(x) = o(n^{-2\alpha}),\\
&\qquad\qquad \text{если } \frac{1}{2}\mu \leqslant \alpha < \frac{1}{2}(\mu+1),\ \mu = 1,\,2,\,3,\,\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (14.6.14)$$

Это доказывает утверждение относительно интерполяционных многочленов Эрмита.

(4) Наконец, исследуем выражение (см. (14.5.3))

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(1)| = \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{(1+\beta)(1-x_\nu) - \alpha(1+x_\nu)}{1+x_\nu} \right| l_\nu^2(1). \tag{14.6.15}$$

Часть этой суммы, соответствующая $x \geqslant 1-\delta$, при $\alpha \neq 0$ будет

$$\sim n^{2\alpha} \sum_{x_\nu \geqslant 1-\delta} (1-x_\nu)^{-2} \{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_\nu)\}^{-2} \sim n^{2\alpha} \sum_{x_\nu \geqslant 1-\delta} \left(\frac{\nu}{n}\right)^{-4} \nu^{2\alpha+3} n^{-2\alpha-4}, \tag{14.6.16}$$

что равно $O(n^{2\alpha})$ или $O(1)$ в зависимости от того, будет ли $\alpha > 0$ или же $\alpha < 0$. Это показывает, что S-многочлены (а также обобщенные S-многочлены) для непрерывной функции, вообще говоря, расходятся в точке $x = +1$ при $\alpha > 0$. (Сходимость при $\alpha < 0$ была доказана в (2).) В случае $\alpha = 0$ возможна и расходимость, достаточно рассмотреть функцию $f(x) = 1 - x$. Действительно, соответствующий S-многочлен равен

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(1) f(x_\nu) = (1+\beta) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(1-x_\nu)^2}{1+x_\nu} l_\nu^2(1) =$$

$$= (1+\beta) \sum_{\nu=1}^{n} (1+x_\nu)^{-1} \{P_n^{(0,\beta)\prime}(x_\nu)\}^{-2} \sim \sum \left(\frac{\nu}{n}\right)^{-2} \nu^{2\beta+3} n^{-2\beta-4} \sim 1; \tag{14.6.17}$$

ясно, что последовательность этих многочленов не может сходиться к $f(1) = 0$. Еще проще доказательство расходимости S-многочленов, соответствующих функции $f(x) = (1+\beta)(1-x) - \alpha(1+x)$ при $\alpha > 0$, так как $f(1) = -2\alpha < 0$.

14.7. S-многочлены для узлов Лагерра

Предположим, что $\alpha > -1$. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — нули многочлена $L_n^{(\alpha)}(x)$. Докажем следующую теорему:

Теорема 14.7 [1]). *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на полуоси $x \geqslant 0$ и пусть $f(x) = O(x^m)$ при $x \to +\infty$, где m — произвольное, но фиксированное положительное число. Обобщенные S-многочлены* (14.1.9) $(f_\nu = f(x_\nu),\ |f'_\nu| < A)$ *сходятся к $f(x)$ на всяком положительном отрезке $\varepsilon \leqslant x \leqslant \omega$. Это же верно на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \omega$, если $\alpha < 0$. S-многочлены, вообще говоря, расходятся в точке $x = 0$, если $f(x)$ непрерывна и $\alpha \geqslant 0$.*

Для доказательства мы проведем рассуждения, подобные тем, которые были проведены в случае узлов Якоби (§ 14.6). В частности, мы используем теорему 8.9.2. Некоторые изменения в рассуждениях необходимы, так как теперь последовательность нулей неограниченна. В качестве нового важного инструмента исследования мы применим механические квадратуры (см. (15.3.5)).

(1) Пусть $0 < \varepsilon \leqslant x_0 \leqslant \omega$. Если $v_\nu(x)$ имеет тот же смысл, что и в (14.5.5), то значения $v_\nu(x_0)$ и $h_\nu(x_0)$ положительны, причем $v_\nu(x_0)$ ограничено снизу и сверху положительными числами, если $|x_\nu - x_0|$ достаточно мало. Итак, при достаточно малом δ имеем ($O(1)$ не зависит от δ)

$$\sum_{|x_\nu - x_0| \leqslant \delta} |h_\nu(x_0)| = \sum_{|x_\nu - x_0| \leqslant \delta} h_\nu(x_0) = 1 - \sum_{|x_\nu - x_0| > \delta} h_\nu(x_0), \tag{14.7.1}$$

$$\sum_{|x_\nu - x_0| \leqslant \delta} |\mathfrak{h}_\nu(x_0)| = \delta O(1) \sum_{|x_\nu - x_0| \leqslant \delta} h_\nu(x_0). \tag{14.7.2}$$

---

[1]) См. Шохат [5], стр. 139; Сегё [14], стр. 597.

Если x_ν мало, то $v_\nu(x_0)=O(x_\nu^{-1})$; если x_ν велико, то $v_\nu(x_0)=O(x_\nu)$. Поэтому (см. (7.6.8))

$$\sum_{|x_\nu-x_0|>\delta}|h_\nu(x_0)|=O(1)\sum_{x_\nu<x_0-\delta}x_\nu^{-1}\left\{\frac{L_n^{(\alpha)}(x_0)}{L_n^{(\alpha)\prime}(x_\nu)(x_0-x_\nu)}\right\}^2+$$

$$+O(1)\sum_{x_\nu>x_0+\delta}x_\nu\left\{\frac{L_n^{(\alpha)}(x_0)}{L_n^{(\alpha)\prime}(x_\nu)(x_0-x_\nu)}\right\}^2=$$

$$=O(n^{\alpha-\frac{1}{2}})\sum_{x_\nu<x_0-\delta}x_\nu^{-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_\nu)\}^{-2}+O(n^{\alpha-\frac{1}{2}})\sum_{x_\nu>x_0+\delta}x_\nu^{-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_\nu)\}^{-2}=$$

$$=O(n^{\alpha-\frac{1}{2}})\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^{-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_\nu)\}^{-2}. \qquad (14.7.3)$$

Но, комбинируя (15.3.5) с (3.4.5), мы находим

$$\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^{-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_\nu)\}^{-2}=\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}, \qquad (14.7.4)$$

что дает для (14.7.3) оценку

$$O(n^{\alpha-\frac{1}{2}})\,O(n^{-\alpha})=O(n^{-\frac{1}{2}}).$$

Из (15.3.5) и (3.4.1) мы получаем более общее тождество, справедливое для целых положительных m, не превосходящих $2n-1$,

$$\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^{m-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_\nu)\}^{-2}=\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}. \qquad (14.7.5)$$

Те же рассуждения, что и выше, приводят при фиксированном m к оценке

$$\sum_{|x_\nu-x_0|>\delta}x_\nu^m|h_\nu(x_0)|=O(n^{-\frac{1}{2}}). \qquad (14.7.6)$$

Мы имеем также

$$\sum_{|x_\nu-x_0|>\delta}|\mathfrak{h}_\nu(x_0)|=O(n^{-\frac{1}{2}}). \qquad (14.7.7)$$

Равенства (14.7.1), (14.7.2), (14.7.6) и (14.7.7) доказывают равномерную сходимость S-многочленов на отрезке $\varepsilon\leqslant x_0\leqslant\omega$ (см. (14.6.6)).

(2) Допустим теперь, что $\alpha<0$, $0\leqslant x_0\leqslant\delta$. Если δ достаточно мало и $|x_\nu-x_0|\leqslant\delta$, то $v_\nu(x_0)$ и $h_\nu(x_0)$ положительны, причем $v_\nu(x_0)>c>0$. Тогда опять имеют место (14.7.1) и (14.7.2). В (14.7.3) нужно заменить лишь оценку $\{L_n^{(\alpha)}(x_0)\}^2$. В соответствии с (7.6.11) это величина порядка $O(n^{2a})$, где $a=\max\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4},\ \alpha\right)$. Поэтому

$$\sum_{|x_\nu-x_0|>\delta}|h_\nu(x_0)|=O(n^{2a-\alpha}), \qquad (14.7.8)$$

и та же оценка справедлива для сумм (14.7.6) и (14.7.7). Так как показатель $2a-\alpha=\max\left(-\frac{1}{2},\ \alpha\right)<0$, то эти суммы стремятся к нулю. Отсюда следует равномерная сходимость на отрезке $0\leqslant x\leqslant\omega$.

(3) Случай $x_0=0$, $\alpha\geqslant 0$ легко может быть рассмотрен, если положить $f(x)=x-\alpha$. В самом деле,

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\,h_\nu(0)=\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-\alpha)^2\, l_\nu^2(0)\cong$$

$$\cong n^{2\alpha}\{\Gamma(\alpha+1)\}^{-2}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{x_\nu-\alpha}{x_\nu}\right)^2\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_\nu)\}^{-2}. \qquad (14.7.9)$$

Так как это выражение положительно, то оно не может стремиться к $f(0)=-\alpha$, когда α положительно. Когда $\alpha=0$, последнее выражение в (14.7.9) равно единице (см. (14.7.9), $m=1$), а $f(0)=0$.

14.8. Многочлены Лагранжа для некоторых общих классов узлов интерполирования

(1) Пусть $x_{1n}>x_{2n}>\ldots>x_{nn}$ — нули n-го ортогонального многочлена $p_n(x)$, ассоциированного с весовой функцией $w(x)$ на отрезке $-1\leqslant x\leqslant +1$. Рассмотрим два класса А и В весовых функций, характеризуемых следующими условиями:

А. Существует такое положительное число μ, что

$$w(x)\geqslant\mu, \quad -1\leqslant x\leqslant +1. \qquad (14.8.1)$$

В. Существует такое положительное число μ, что

$$w(x)\geqslant\mu(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad -1<x<+1. \qquad (14.8.2)$$

Приняв эти обозначения, докажем следующее предложение:

Теорема 14.8. *Пусть $f(x)$ — функция, определенная на отрезке $-1\leqslant x\leqslant +1$. Пусть $\{L_n(f;\,x)\}$ — соответствующая этой функции последовательность многочленов Лагранжа с узлами интерполирования $x_{\nu n}$, которые являются нулями ортогонального многочлена $p_n(x)$, ассоциированного с весом $w(x)$ на $[-1,\ +1]$. Тогда, если $f(x)$ имеет непрерывную производную на $[-1,\ +1]$, а $w(x)$ принадлежит классу* А, *то $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(f;\,x)=f(x)$ равномерно на отрезке $[-1,\ +1]$. Тот же вывод остается в силе, если $w(x)$ принадлежит классу* В, *а $\omega(\delta)=o(\delta^{\frac{1}{2}})$. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(f;\,x)=f(x)$ равномерно на отрезке $[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$, где $0<\varepsilon<1$, если $w(x)$ принадлежит классу* А *и $\omega(\delta)=o(\delta^{\frac{1}{2}})$.*

См. Шохат [7], Грюнвальд и Туран [1]. Здесь, как и раньше, $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$ на $[-1,\ +1]$.

(2) Мы покажем, что для фундаментальных многочленов интерполирования по Лагранжу справедливы оценки

$$\sum_{\nu=1}^{n}|l_\nu(x)|=\begin{cases} O(n), & -1\leqslant x\leqslant +1,\\ O(n^{\frac{1}{2}}), & -1\leqslant x\leqslant +1,\\ O(n^{\frac{1}{2}}), & -1+\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon,\end{cases} \qquad (14.8.3)$$

где $w(x)$ принадлежит классу А в первом и третьем случаях и классу В во втором случае. Утверждение теоремы вытекает из (14.8.3) в силу теорем 1.3.2 и 1.3.3.

Пусть x зафиксировано, $\varepsilon_\nu = \operatorname{sign} l_\nu(x)$. В случае А мы можем написать

$$\varrho(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu l_\nu(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu P_\nu(t), \tag{14.8.4}$$

где $P_\nu(t)$ есть ν-й многочлен Лежандра. Тогда

$$\varrho(x) = \sum_{\nu=1}^{n} |l_\nu(x)| = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu P_\nu(x) \leqslant \left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{c_\nu^2}{\nu+\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\nu+\frac{1}{2}\right) P_\nu^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{\int_{-1}^{+1} \varrho^2(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\nu+\frac{1}{2}\right) P_\nu^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \mu^{-\frac{1}{2}} \left\{\int_{-1}^{+1} w(t)\,\varrho^2(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\nu+\frac{1}{2}\right) P_\nu^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{14.8.5}$$

В соответствии с (14.2.4) мы имеем

$$\int_{-1}^{+1} w(t)\,\varrho^2(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \varrho^2(x_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \varepsilon_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu = \int_{-1}^{+1} w(t)\,dt. \tag{14.8.6}$$

Теперь утверждение (14.8.3) легко вытекает из (7.21.1) и (7.3.8).

Единственное существенное отличие в доказательстве для случая В состоит в том, что мы полагаем

$$\varrho(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu l_\nu(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} d_\nu T_\nu(t), \tag{14.8.7}$$

где $T_\nu(t)$ — многочлен Чебышева первого рода.

14.9. Дальнейшие результаты по теории интерполирования

Мы укажем вкратце несколько новых результатов по теории интерполирования.

(1) Будем употреблять обозначения, принятые в § 14.8. Пусть весовая функция $w(x)$ непрерывна и имеет положительный минимум на отрезке $[-1, 1]$ и пусть $\varepsilon > 0$.

Тогда

$$\max |l_\nu(x)| \to 1 \text{ при } n \to \infty,$$

где максимум берется на отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, а предельное соотношение справедливо для последовательности $\nu = \nu(n)$, для которой соответствующие нули $x_\nu = x_{\nu n}$ лежат на $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$. (Э р д ё ш и Л е н ж и е л ь [1].)

(2) Результат Г р ю н в а л ь д а [1] и М а р ц и н к е в и ч а [2], упомянутый в § 14.1, (3), был углублен в работах Э р д ё ш а и Г р ю н в а л ь д а [1] и Э р д ё ш а [2]. В качестве узлов интерполирования рассматриваются нули многочлена Чебышева $T_n(x)$.

Э р д ё ш и Г р ю н в а л ь д [1] доказали существование такой непрерывной функции $f(x) = f(\cos\theta)$, ряд Фурье которой равномерно сходится, но в то же время соответствующая последовательность многочленов Лагранжа $L_n(x)$ расходится всюду, и даже, более того, — всюду неограниченна.

Эрдёш [2] показал, что если $x_0 = \cos\frac{p\pi}{q}$, где p и q нечетны, то существует такая непрерывная функция $f(x)$, для которой $L_n(x_0) \to \infty$. Еще раньше Эрдёш и Туран [1] доказали, что это обстоятельство не может иметь места в других точках x_0; см. также Эрдёш [2], стр. 313.

(3) Важный результат был получен Эрдёшом для «нормальных» последовательностей узлов, введенных в рассмотрение и исследованных Фейером. Эти последовательности характеризуются тем, что «сопряженные точки» (14.1.15) лежат вне отрезка интерполирования $[a, b]$.

Фейер показал, что для нормальных последовательностей разность $x_\nu - x_{\nu-1}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Эрдёш и Туран [2] усилили этот результат, а Эрдёш [1] доказал, что

$$x_\nu - x_{\nu-1} = \frac{\pi}{n}(1 - x_\nu^2)^{-\frac{1}{2}} + O(n^{-\frac{3}{2}}),$$

где узлы $x_\nu = x_{\nu n}$ предполагаются лежащими на фиксированном отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Эрдёш [1] решил следующую замечательную экстремальную задачу. Рассмотрим все нормальные последовательности $\{x_{\nu n}\}$ при фиксированных ν и n. (Мы следуем обозначениям (14.1.1).) Каковы минимум и максимум $x_{\nu n}$? Они даются точками z_ν и $-z_{n-\nu}$, где $z_\nu = z_{\nu n}$ — нули многочлена $P_n(z) + P_{n-1}(z)$.

(4) Грюнвальд [1] и Вебстер [1] изучили некоторые типы «суммирования» для многочленов Лагранжа, аналогичные методу Рогозинского для частных сумм ряда Фурье. Применяемые узлы являются нулями многочленов Чебышева соответственно первого или второго рода.

Грюнвальд [3] дал обзор свойств расходимости многочленов Лагранжа. В этой статье рассмотрен также вопрос о сходимости интерполяционных многочленов Лагранжа и Эрмита в предположении, что абсциссы образуют «нормальную» последовательность.

(5) Наконец, Балаж и Туран [1], [2] и Шураньи и Туран [1] исследовали различные свойства некоторых интерполяционных многочленов, узлы которых совпадают с нулями ультрасферических многочленов. Новой особенностью этих исследований является изучение интерполяционных многочленов, для которых заданы $f(x)$ и $f''(x)$.

ГЛАВА XV

МЕХАНИЧЕСКИЕ КВАДРАТУРЫ

Напомним, что в § 3.4 мы уже рассматривали механическую квадратуру Гаусса — Якоби. В настоящей главе мы обратимся к другим задачам из теории механических квадратур, которые также связаны с ортогональными многочленами.

15.1. Определения

(1) Пусть $[a, b]$ — конечный или бесконечный промежуток и пусть

$$S_n: x_{1n} < x_{2n} < \ldots < x_{nn}, \quad a \leqslant x_{1n}, \ x_{nn} \leqslant b \tag{15.1.1}$$

представляют собой n различных точек этого промежутка. Пусть далее

$$\Lambda_n: \lambda_{1n}, \ \lambda_{2n}, \ \ldots, \ \lambda_{nn} \tag{15.1.2}$$

— некоторая последовательность вещественных чисел. Если $f(x)$ — произвольная функция, заданная на $[a, b]$, то мы полагаем

$$Q_n(f) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu n} f(x_{\nu n}). \tag{15.1.3}$$

Мы называем числа $x_{\nu n}$ абсциссами, а $\lambda_{\nu n}$ — коэффициентами Котеса механической квадратуры $Q_n(f)$. При заданных матрицах $\{S_n\}$ и $\{\Lambda_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ нас будут интересовать вопросы сходимости последовательности

$$Q_1(f), \ Q_2(f), \ \ldots, \ Q_n(f), \ \ldots, \tag{15.1.4}$$

связанной с данной функцией $f(x)$.

Как и в главе XIV, в тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, мы будем писать x_ν и λ_ν вместо $x_{\nu n}$ и $\lambda_{\nu n}$.

(2) Важным частным случаем является следующий. Пусть $\{S_n\}$ — произвольная матрица различных точек на $[a, b]$ и пусть $u(x)$ — данная неубывающая функция. Определим коэффициенты Котеса требованием, чтобы равенство

$$Q_n(f) = \int_a^b f(x)\, du(x) \tag{15.1.5}$$

было справедливо для произвольного π_{n-1}. Ясно, что из этого условия вытекают формулы

$$\lambda_\nu = \int_a^b l_\nu(x)\, du(x), \qquad \nu = 1, \ 2, \ \ldots, \ n, \tag{15.1.6}$$

где $l_\nu(x)$ — фундаментальные многочлены (14.1.2) интерполирования по способу Лагранжа с матрицей узлов $\{S_n\}$. В этом случае $Q_n(f)$ называется *квадратурой интерполяционного типа*.

Ясно, что квадратура Гаусса—Якоби есть частный случай квадратуры интерполяционного типа, когда $\{S_n\}$ — матрица нулей ортогональных многочленов, соответствующих распределению $du(x)$. Мы имеем другой интересный случай интерполяционного типа, когда $u(x)=x$, а $\{S_n\}$ — произвольная матрица. Тогда (15.1.5) является обыкновенным интегралом от $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, который при этом предполагается конечным.

15.2. Общая теорема о сходимости механических квадратур. Теорема Стеклова — Фейера

(1) Теорема 15.2.1 [1]. *Пусть $[a, b]$ — конечный отрезок и пусть матрицы $\{S_n\}$ (на $[a; b]$) и $\{\Lambda_n\}$ произвольны; пусть $Q_n(f)$ определены посредством* (15.1.3). *Обозначим через $u(x)$ неубывающую функцию и допустим, что имеет место «квадратурная сходимость»*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x)\,du(x) \tag{15.2.1}$$

для любого многочлена $f(x)$. Тогда необходимое и достаточное условие для того, чтобы (15.2.1) *было справедливо для произвольной непрерывной функции $f(x)$, состоит в ограниченности последовательности «констант Лебега»*

$$|\lambda_{n1}|+|\lambda_{n2}|+\ldots+|\lambda_{nn}|, \qquad n\to\infty. \tag{15.2.2}$$

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 1.6 (теоремы Хелли). Нужно отметить, что условие (15.2.1) выполняется, в частности, для любого многочлена $f(x)$, если рассматриваемые квадратуры будут интерполяционного типа (см. § 15.1, (2)).

(2) В качестве приложения докажем следующую важную теорему Стеклова и Фейера:

Теорема 15.2.2 [2]. *Пусть $[a, b]$ — конечный отрезок и пусть коэффициенты Котеса $\{\Lambda_n\}$ неотрицательны. Предположим, что квадратурная сходимость* (15.2.1) *имеет место для произвольного многочлена $f(x)$. Тогда квадратурная сходимость имеет место для всякой функции, для которой существует интеграл Римана—Стилтьеса в правой части* (15.2.1).

В этом случае выражение (15.2.2) будет ограниченным, так как суммы

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\lambda_{\nu n}| = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu n} = Q_n(1) \tag{15.2.3}$$

имеют предел при $n\to\infty$. Следовательно, (15.2.1) справедливо для непрерывных функций $f(x)$. Распространение на функции, интегрируемые в смысле Римана, осуществляется с помощью теоремы 1.5.4.

Теорема 15.2.2 остается в силе, если строки матрицы $\{\Lambda_n\}$ неотрицательны, начиная лишь с некоторого значения n.

(3) Мы получим замечательный частный случай теоремы 15.2.1, если рассмотрим произвольную квадратуру интерполяционного типа (определенную монотонной неубывающей функцией $u(x)$), а в качестве матрицы $\{S_n\}$ выберем нули ортогональных многочленов $\{p_n(x)\}$, ассоциированных с данным распределением $d\alpha(x)$. Здесь $\alpha(x)$, вообще говоря,

---

[1] См. Полиа, [4], стр. 267, теорема 1.

[2] См. В. А. Стеклов [2], стр. 176—179; Фейер [15], стр. 291, Полиа [4], стр. 282, d); Шохат [7], стр. 474—476.

отлична от $u(x)$. Тогда соотношение (15.2.1) будет справедливо для произвольного многочлена $f(x)$.

Квадратура Гаусса—Якоби получается отсюда как частный случай, когда $\alpha(x)=u(x)$. Тогда коэффициенты Котеса тождественны с коэффициентами Кристоффеля, введенными в § 3.4; они все положительны. Применяя теорему 15.2.2, мы получаем следующий результат:

Теорема 15.2.3. *Пусть $d\alpha(x)$ — произвольное распределение на конечном отрезке $[a, b]$ и пусть $Q_n(f)$ — соответствующая механическая квадратура Гаусса—Якоби (т. е. $x_{\nu n}$ являются нулями ортогональных многочленов $p_n(x)$, ассоциированных с распределением $d\alpha(x)$, а $\lambda_{\nu n}$ — коэффициенты Кристоффеля). Тогда «квадратурная сходимость»*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \tag{15.2.4}$$

имеет место для произвольной функции $f(x)$, для которой существует интеграл Римана—Стилтьеса, стоящий в правой части.

(4) Другой замечательный частный случай соответствует выбору $u(x)=x$ с произвольным $\alpha(x)$. При этом мы можем формулировать следующую теорему:

Теорема 15.2.4 [1]). *Пусть x_ν — нули ортогонального многочлена $p_n(x)$, ассоциированного с распределением $d\alpha(x)$ на конечном или бесконечном промежутке $[a, b]$. Если $Q_n(f)$ означает механическую квадратуру интерполяционного типа, для которой в условиях § 15.1, (2) положено $u(x)=x$, то соответствующие коэффициенты Котеса могут быть представлены в следующем виде:*

$$\lambda_\nu = -\frac{k_{n+1}}{k_n}\,\frac{K_n(x_\nu)}{p_n'(x_\nu)\,p_{n+1}(x_\nu)}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{15.2.5}$$

где

$$K_n(x) = \int_a^b K_n(x, t)\,dt = \int_a^b \left\{\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x)\,p_\nu(t)\right\} dt = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x)\int_a^b p_\nu(t)\,dt. \tag{15.2.6}$$

Обозначения k_n и $K_n(x_0, t)$ употребляются здесь в смысле, указанном в (2.2.15) и в (3.1.9); x_ν и λ_ν пишутся соответственно вместо $x_{\nu n}$ и $\lambda_{\nu n}$.

Для доказательства напишем (15.1.6) в виде

$$\lambda_\nu = \{p_n'(x_\nu)\,p_{n+1}(x_\nu)\}^{-1}\int_a^b \frac{p_n(t)\,p_{n+1}(x_\nu) - p_{n+1}(t)\,p_n(x_\nu)}{t-x_\nu}\,dt. \tag{15.2.7}$$

Сравнение этой формулы с равенством (3.2.3) доказывает наше утверждение. В соответствии с (3.3.6) мы имеем

$$\operatorname{sign}\lambda_\nu = \operatorname{sign} K_n(x_\nu). \tag{15.2.8}$$

В частности, если $K_n(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, то коэффициенты Котеса неотрицательны, и может быть применена теорема Стеклова—Фейера.

Следующее условие является характеристическим для многочлена $K_n(x)$:

$$\int_a^b K_n(x)\,\varrho(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b \varrho(x)\,dx, \tag{15.2.9}$$

[1]) См. Сегё [17], стр. 94.

где $\rho(x)$ — произвольный π_n. В случае, когда $d\alpha(x) = w(x)\,dx$, мы видим, что $K_n(x)$ представляет собой n-ю частную сумму разложения функции $[w(x)]^{-1}$ в ряд по многочленам $p_n(x)$.

(5) В следующих параграфах мы рассмотрим ранее упомянутые случаи, а именно:

$$\text{(a)}\quad u(x) = \alpha(x) \quad (\text{см. } (3));$$
$$\text{(b)}\quad u(x) = x \quad (\text{см. } (4)),$$

где $\{S_n\}$ — матрица нулей ортонормальных многочленов, ассоциированных с распределением $d\alpha(x)$, с дополнительным предположением, что это классические многочлены.

15.3. Коэффициенты Котеса — Кристоффеля в случае $u(x) = \alpha(x)$ (квадратура Гаусса — Якоби) для классических абсцисс

(1) Мы применим представление (3.4.7) коэффициентов Кристоффеля λ_ν и расположим нули x_ν в убывающем порядке для случая многочленов Якоби и Эрмита и в возрастающем порядке для случая многочленов Лагерра. Относительно следующих результатов см. Уинстон [1]. Представление (15.3.5) уже было использовано нами в § 14.7.

Если применить (4.3.4) и (4.21.6), то вторая из формул (4.5.7) дает для *абсцисс Якоби* формулу

$$\lambda_\nu = 2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}(1-x_\nu^2)^{-1}\{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_\nu)\}^{-2}$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, n, \quad \alpha > -1, \ \beta > -1, \tag{15.3.1}$$

и, в частности, для *ультрасферических абсцисс* (см. (4.7.1) и (1.7.3))

$$\lambda_\nu = 2^{2-2\lambda}\pi\{\Gamma(\lambda)\}^{-2}\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+1)}(1-x_\nu^2)^{-1}\{P_n^{(\lambda)\prime}(x_\nu)\}^{-2},$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, n, \quad \lambda > -\frac{1}{2}, \quad \lambda \neq 0. \tag{15.3.2}$$

При $\lambda = 0$ (случай Мелера) $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ мы находим, что

$$\lambda_\nu = \frac{\pi}{n}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{15.3.3}$$

т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$. При $\lambda = 1$, т. е. в случае $w(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, мы получаем

$$\lambda_\nu = \frac{\pi}{n+1}(1-x_\nu^2) = \frac{\pi}{n+1}\sin^2\frac{\nu\pi}{n+1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.3.4}$$

Для *абсцисс Лагерра* из (5.1.10) и (5.1.14) мы имеем

$$\lambda_\nu = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}x_\nu^{-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_\nu)\}^{-2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \ \alpha > -1, \tag{15.3.5}$$

а для *абсцисс Эрмита* из второго тождества (5.5.10) выводим равенство

$$\lambda_\nu = \pi^{\frac{1}{2}}2^{n+1}n!\{H_n'(x_\nu)\}^{-2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.3.6}$$

(2) В случае абсцисс Якоби рассуждение § 7.32, (2) показывает, что при $\alpha > -\frac{1}{2}$ и $\beta > -\frac{1}{2}$ та часть последовательности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, которая соответствует нулям $x_\nu > x_0$ (см. (7.32.1)), является возрастающей, а та, которая соответствует нулям $x_\nu < x_0$, является убывающей. Противоположное утверждение имеет место, когда $\alpha < -\frac{1}{2}$, $\beta < -\frac{1}{2}$. Если $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta < -\frac{1}{2}$;

или же $\alpha < -\frac{1}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$, то вся рассматриваемая последовательность в первом случае будет возрастающей, а во втором — убывающей. В случае ультрасферических многочленов это рассуждение приводит к неравенствам

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{[(n+1)/2]} \quad \text{при } \lambda > 0 \tag{15.3.7}$$

и неравенствам

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{[(n+1)/2]} \quad \text{при } \lambda < 0. \tag{15.3.8}$$

Соотношение симметрии (задача 11) приводит к аналогичным утверждениям для остальных λ_ν. Значения (15.3.3) соответствуют случаю $\lambda=0$. Для многочленов Лежандра выполняется (15.3.7).

В случаях абсцисс Лагерра и Эрмита мы применяем рассуждение § 7.6, (1). В случае абсцисс Лагерра последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ является возрастающей для $x_\nu < \alpha + \frac{1}{2}$ и убывающей для $x_\nu > \alpha + \frac{1}{2}$. В случае абсцисс Эрмита мы имеем $(x_1 > x_2 > \ldots)$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{[(n+1)/2]}. \tag{15.3.9}$$

(3) В случае абсцисс Якоби, если мы положим $x_\nu = \cos\theta_\nu$ и допустим, что θ_ν принадлежит фиксированному отрезку, лежащему внутри $[0, \pi]$, то асимптотическая формула Дарбу (см. (8.21.10) и (8.8.1)) дает соотношение

$$\lambda_\nu = \lambda_{\nu n} \cong \frac{2^{\alpha+\beta+1}\pi}{n}\left(\sin\frac{\theta_\nu}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\theta_\nu}{2}\right)^{2\beta+1}. \tag{15.3.10}$$

Здесь при $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ символ $\cong$ может быть заменен знаком равенства в соответствии с (15.3.3). То же самое будет верно и в случае $\alpha=\beta=+\frac{1}{2}$ (см. (15.3.4)), если мы заменим n на $n+1$. С другой стороны, при фиксированном ν и $n \to \infty$, используя соотношение (8.1.1), мы получаем

$$\lambda_\nu = \lambda_{\nu n} \cong 2^{\alpha+\beta+1}\left(\frac{j_\nu}{2}\right)^{2\alpha}\{J'_\alpha(j_\nu)\}^{-2} n^{-2\alpha-2}, \tag{15.3.11}$$

где j_ν есть ν-й положительный нуль функции $J_\alpha(z)$. $\left(\text{Здесь символ } \cong \text{ может быть заменен знаком равенства, когда } \alpha=\beta=-\frac{1}{2}.\right)$ Следовательно, учитывая свойство монотонности, доказанное в (2), мы имеем равномерно по ν оценку

$$\lambda_\nu = O(n^{-1}) \quad \text{или} \quad O(n^{-2\alpha-2}), \qquad 0 < \theta_\nu < \pi - \varepsilon, \tag{15.3.12}$$

в зависимости от того, будет ли $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$ или же $\alpha \leqslant -\frac{1}{2}$. Здесь ε — фиксированное положительное число.

Применяя рассуждения и обозначения § 7.32, (3), мы легко замечаем, что при возрастающих ν, $\nu \geqslant \nu_0$, последовательность

$$\varphi(\theta_\nu)\left(\sin\frac{\theta_\nu}{2}\right)^{-2\alpha-1}\left(\cos\frac{\theta_\nu}{2}\right)^{-2\beta-1}\lambda_\nu \tag{15.3.13}$$

будет возрастающей или убывающей в зависимости от того, будет ли $\alpha^2 \geqslant \frac{1}{4}$ или $\alpha^2 \leqslant \frac{1}{4}$, и $0 < \theta_\nu \leqslant \delta$, где δ — достаточно малое положительное число. (Когда n достаточно велико, $\varphi(\theta_\nu) > 0$, $\nu \geqslant \nu_0$.) Таким образом, (15.3.13) имеет равномерно порядок n, если $0 < \theta_\nu \leqslant \delta$. В силу (15.3.10) и (15.3.11) при $0<\theta_\nu\leqslant\pi-\varepsilon$ это дает (см. (8.9.1))

$$\lambda_\nu \sim \theta_\nu^{2\alpha+1}n^{-1} \sim \nu^{2\alpha+1}n^{-2\alpha-2}, \qquad 0<\theta_\nu\leqslant\pi-\varepsilon; \tag{15.3.14}$$

иными словами, отношение этих выражений ограничено сверху и снизу положительными постоянными при произвольных ν и n, когда $0<\theta_\nu<\pi-\varepsilon$. Выражение в правой части (15.3.14) достигает своего наибольшего значения при $\nu\sim n$ или $\nu\sim 1$ в соответствии с тем, будет ли $\alpha\geqslant -\frac{1}{2}$ или $\alpha\leqslant -\frac{1}{2}$. Это опять дает (15.3.12). Аналогичные результаты могут быть получены при условии, что θ_ν лежат на отрезке $\varepsilon\leqslant\theta_\nu\leqslant\pi$.

(4) В случае абсцисс Лагерра, когда $\varepsilon\leqslant x_\nu\leqslant\omega$, мы получаем (см. (8.22.1) и (8.8.4))

$$\lambda_\nu=\lambda_{\nu n}\cong \pi e^{-x_\nu}x_\nu^{\alpha+\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}, \qquad n\to\infty, \tag{15.3.15}$$

где ε и ω — фиксированные положительные числа. С другой стороны, если ν фиксировано и $n\to\infty$, то из (8.1.8) мы находим

$$\lambda_\nu=\lambda_{\nu n}\cong (j_\nu/2)^{2\alpha}\{J'_\alpha(j_\nu)\}^{-2}n^{-\alpha-1}, \tag{15.3.16}$$

где j_ν имеют те же значения, что и выше.

Применяя рассуждение, подобное тому, которое было проведено в случае абсцисс Якоби, к четвертому из уравнений (5.1.2) и учитывая рассуждения § 7.6, (2), мы заключаем, что последовательности

$$\left.\begin{aligned} &\left(4n+2\alpha+2-x_\nu+\frac{1-4\alpha^2}{4x_\nu}\right)^{-1}e^{-x_\nu}x_\nu^{\alpha+\frac{3}{2}}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_\nu)\}^2,\\ &\left(4n+2\alpha+2-x_\nu+\frac{1-4\alpha^2}{4x_\nu}\right)e^{x_\nu}x_\nu^{-\alpha-\frac{1}{2}}\lambda_\nu \end{aligned}\right\} \tag{15.3.17}$$

монотонны при возрастающем ν, если $\alpha^2\leqslant\frac{1}{4}$ и $0<x_\nu\leqslant\omega$. В случае, когда $\alpha^2>\frac{1}{4}$, эти последовательности состоят из двух монотонных частей $(\nu\geqslant\nu_0)$. В соответствии с (15.3.15) и (15.3.16) мы устанавливаем, что вторая из последовательностей (15.3.17) будет равномерно порядка $n^{\frac{1}{2}}$, т. е.

$$\lambda_\nu\sim x_\nu^{\alpha+\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}, \qquad 0<x_\nu\leqslant\omega. \tag{15.3.18}$$

В силу (8.9.10) мы можем написать

$$\lambda_\nu\sim \nu^{2\alpha+1}n^{-\alpha-1}, \qquad 0<x_\nu\leqslant\omega. \tag{15.3.19}$$

Условие $x_\nu=O(1)$ эквивалентно условию $\nu=O(n^{\frac{1}{2}})$.

15.4. Квадратура интерполяционного типа в случае $u(x)=x$ для абсцисс Якоби

(1) В этом параграфе мы докажем следующую теорему:

Теорема 15.4. *Допустим, что $\alpha>-1$, $\beta>-1$, и определим механическую квадратуру $Q_n(f)$ следующими условиями:*

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{a})\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x_\nu)=0, \qquad \nu=1,2,\ldots,n,\\ &(\mathrm{b})\quad Q_n(x^k)=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu x_\nu^k=\int_{-1}^{+1}x^k\,dx, \qquad k=0,1,\ldots,n-1. \end{aligned}\right\} \tag{15.4.1}$$

Предположим, что $\max(\alpha, \beta) \leqslant \frac{3}{2}$. *Тогда для произвольной непрерывной на отрезке* $[-1, +1]$ *функции* $f(x)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx. \tag{15.4.2}$$

Если числа α *и* β *таковы, что* $\max(\alpha, \beta) > \frac{3}{2}$, *то существует такая непрерывная функция* $f(x)$, *для которой* (15.4.2) *не имеет места.*

Обратим внимание на разницу между этой теоремой и теоремой 15.2.3 За исключением частного случая $\max(\alpha, \beta) = \frac{3}{2}$, $\alpha \neq \beta$, эта теорема была доказана Сегё ([17], стр. 102—108). Приведенное здесь доказательство проще; оно основано на оценках (7.32.5) многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ и на теореме 8.9.1 относительно его нулей. Мы используем здесь обозначения, принятые в § 14.4.

(2) Допустим сначала, что $\alpha \leqslant \frac{3}{2}$, $\beta \leqslant \frac{3}{2}$. Мы должны доказать ограниченность суммы (15.2.2), где $\lambda_\nu = \lambda_{\nu n}$ определены с помощью (15.4.1). Мы рассмотрим λ_ν только в случае $0 \leqslant x_\nu < 1$, или $0 < \theta_\nu \leqslant \pi/2$. Для оценки остальных значений мы можем применить (4.1.3). В силу (8.9.2) имеем

$$\lambda_\nu \sim \nu^{\alpha+\frac{3}{2}} n^{-\alpha-2} \int_0^\pi \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{\cos\theta - \cos\theta_\nu} \sin\theta\,d\theta. \tag{15.4.3}$$

Разобьем последний интеграл на пять частей I, II, III, IV, V, соответствующих следующим промежуткам интегрирования:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\theta_1}{2}, \quad \dfrac{\theta_1}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\theta_\nu}{2}, \quad \dfrac{\theta_\nu}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\theta_\nu}{2}, \\ \dfrac{3\theta_\nu}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{4}, \quad \dfrac{3\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \pi, \end{array}\right\} \tag{15.4.4}$$

и заметим, что отношение $(\theta^2 - \theta_\nu^2)/(\cos\theta - \cos\theta_\nu)$ ограниченно на всех этих отрезках.

Так как $\theta_1 = O(n^{-1})$, то

$$\mathrm{I} = O(n^\alpha) \int_0^{\theta_1/2} \theta_\nu^{-2} \theta\,d\theta = O(n^{\alpha-2}) \left(\frac{\nu}{n}\right)^{-2} = O(\nu^{-2} n^\alpha). \tag{15.4.5}$$

Далее, применяя (8.21.18), получаем

$$\mathrm{II} = \int_{\theta_1/2}^{\theta_\nu/2} \frac{n^{-\frac{1}{2}} k(\theta)}{\cos\theta - \cos\theta_\nu} \cos(N\theta + \gamma) \sin\theta\,d\theta + O(1) \int_{\theta_1/2}^{\theta_\nu/2} \frac{\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}}}{\theta_\nu^2 - \theta^2}\,d\theta. \tag{15.4.6}$$

Первая из подынтегральных функций может быть записана в следующем виде:

$$n^{-\frac{1}{2}} \frac{\theta^{-\alpha+\frac{1}{2}}}{\theta_\nu^2 - \theta^2} \varphi(\theta_\nu, \theta) \cos(N\theta + \gamma), \tag{15.4.7}$$

где функция $\varphi(\theta_\nu, \theta)$ и ее частная производная по θ остаются ограниченными на рассматриваемом отрезке (равномерно по ν). Стало быть, интегрирование по частям дает

$$O(n^{-\frac{3}{2}}) \left[\frac{\theta^{-\alpha+\frac{1}{2}}}{\theta_\nu^2 - \theta^2}\right]_{\theta_1/2}^{\theta_\nu/2} + O(n^{-\frac{3}{2}}) \int_{\theta_1/2}^{\theta_\nu/2} \left|\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{\theta^{-\alpha+\frac{1}{2}}}{\theta_\nu^2 - \theta^2} \varphi(\theta_\nu, \theta)\right\}\right| d\theta. \tag{15.4.8}$$

Здесь символ $[f(\theta)]_a^b$ означает $f(b)-f(a)$. Простое вычисление дает для первого слагаемого в (15.4.8) (см. (8.9.1)) оценку

$$O\left(n^{-\frac{3}{2}}\theta_\nu^{-\alpha-\frac{3}{2}}\right)+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\theta_1^{-\alpha+\frac{1}{2}}\theta_\nu^{-2}\right)=O\left(\nu^{-\alpha-\frac{3}{2}}n^{\alpha}\right)+O\left(\nu^{-2}n^{\alpha}\right), \quad (15.4.9)$$

а для второго слагаемого оценку

$$O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\int\limits_{\theta_1/2}^{\theta_\nu/2}\left\{\frac{\theta^{-\alpha+\frac{1}{2}}}{\theta_\nu^2-\theta^2}+\frac{\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{\theta_\nu^2-\theta^2}+\frac{\theta^{-\alpha+\frac{3}{2}}}{(\theta_\nu^2-\theta^2)^2}\right\}d\theta. \quad (15.4.10)$$

Мы легко усматриваем, что (15.4.10) может быть комбинировано со вторым интегралом из II. Полагая в этом интеграле $\theta=\theta_\nu x$, мы получаем

$$n^{-\frac{3}{2}}\int\limits_{\theta_1/2}^{\theta_\nu/2}\frac{\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{\theta_\nu^2-\theta^2}d\theta=\theta_\nu^{-\alpha-\frac{3}{2}}n^{-\frac{3}{2}}\int\limits_{\theta_1/(2\theta_\nu)}^{\frac{1}{2}}\frac{x^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{1-x^2}dx. \quad (15.4.11)$$

Нижний предел интегрирования $\frac{\theta_1}{2\theta_\nu}\sim\frac{1}{\nu}$, так что последний интеграл будет величиной порядка $O\left(\nu^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$, $O(\ln\nu)$ или $O(1)$ в зависимости от того, будет ли $\alpha>\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{1}{2}$ или же $\alpha<\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\mathrm{II}=O(\nu^{-2}n^{\alpha}),\quad O\left(\nu^{-2}n^{\frac{1}{2}}\ln\nu\right)\quad\text{или}\quad O\left(\nu^{-\alpha-\frac{3}{2}}n^{\alpha}\right) \quad (15.4.12)$$

в зависимости от того, будет ли $\alpha>\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{1}{2}$ или $\alpha<\frac{1}{2}$.

В силу (8.8.2) имеем

$$\mathrm{III}=\int\limits_{\theta_\nu/2}^{3\theta_\nu/2}n^{-\frac{1}{2}}k(\theta_\nu)\frac{\cos(N\theta+\gamma)-\cos(N\theta_\nu+\gamma)}{\cos\theta-\cos\theta_\nu}\sin\theta\,d\theta+O(1)\,\theta_\nu^{-\alpha-\frac{5}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\theta_\nu^{2}. \quad (15.4.13)$$

Здесь $n^{-\frac{1}{2}}k(\theta_\nu)=O\left(n^{-\frac{1}{2}}\theta_\nu^{-\alpha-\frac{1}{2}}\right)=O\left(\nu^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{\alpha}\right)$, и та же оценка справедлива для второго слагаемого. Кроме того,

$$\int\limits_{\theta_\nu/2}^{3\theta_\nu/2}\frac{\sin N\frac{\theta-\theta_\nu}{2}}{\sin\frac{\theta-\theta_\nu}{2}}\sin\left(N\frac{\theta-\theta_\nu}{2}+N\theta_\nu+\gamma\right)\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta+\theta_\nu}{2}}d\theta=$$

$$=\int\limits_{\theta_\nu/2}^{3\theta_\nu/2}\frac{\sin N\frac{\theta-\theta_\nu}{2}}{\sin\frac{\theta-\theta_\nu}{2}}\sin\left(N\frac{\theta-\theta_\nu}{2}+N\theta_\nu+\gamma\right)d\theta+O(1)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin(N\theta_\nu+\gamma)\int\limits_{\theta_\nu/2}^{3\theta_\nu/2}\frac{\sin N(\theta-\theta_\nu)}{\sin\frac{\theta-\theta_\nu}{2}}d\theta+O(1), \quad (15.4.14)$$

так как $|\sin\theta-\sin(\theta+\theta_\nu)/2|<|(\theta-\theta_\nu)/2|$ и выражение $\theta_\nu[\sin(\theta+\theta_\nu)/2]^{-1}$ ограниченно. Слагаемое с $\cos(N\theta_\nu+\gamma)$ обращается в нуль, так как подынтегральное выражение является нечетной функцией относительно $\theta-\theta_\nu$.

Знаменатель в последнем интеграле может быть заменен через $(\theta-\theta_\nu)/2$. Из этого вытекает, что интеграл (15.4.14) ограничен и, следовательно,

$$\mathrm{III}=O\left(\nu^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{\alpha}\right). \tag{15.4.15}$$

Далее, как и в II, получаем

$$\mathrm{IV}=\int_{3\theta_\nu/2}^{3\pi/4} n^{-\frac{1}{2}}\frac{\theta^{-\alpha+\frac{1}{2}}}{\theta_\nu^2-\theta^2}\varphi(\theta_\nu,\ \theta)\cos(N\theta+\gamma)\,d\theta+O(1)\int_{3\theta_\nu/2}^{3\pi/4}\frac{\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{2}}}{\theta^2-\theta_\nu^2}\,d\theta, \tag{15.4.16}$$

первый из этих интегралов равен

$$O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\left[\frac{\theta^{-\alpha+\frac{1}{2}}}{\theta^2-\theta_\nu^2}\right]_{3\theta_\nu/2}^{3\pi/4}+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\int_{3\theta_\nu/2}^{3\pi/4}\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{\theta^{-\alpha+\frac{1}{2}}}{\theta^2-\theta_\nu^2}\varphi(\theta_\nu,\ \theta)\right\}\right|d\theta=$$

$$=O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\theta_\nu^{-\alpha-\frac{3}{2}}+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\int_{3\theta_\nu/2}^{3\pi/4}\left\{\frac{\theta^{-\alpha+\frac{1}{2}}}{\theta^2-\theta_\nu^2}+\frac{\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{\theta^2-\theta_\nu^2}+\frac{\theta^{-\alpha+\frac{3}{2}}}{(\theta^2-\theta_\nu^2)^2}\right\}d\theta=$$

$$=O\left(\nu^{-\alpha-\frac{3}{2}}n^{\alpha}\right)+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\int_{3\theta_\nu/2}^{3\pi/4}\frac{\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{\theta^2-\theta_\nu^2}\,d\theta. \tag{15.4.17}$$

Полагая $\theta=\theta_\nu x$, мы имеем

$$n^{-\frac{3}{2}}\int_{3\theta_\nu/2}^{3\pi/4}\frac{\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{\theta^2-\theta_\nu^2}\,d\theta=n^{-\frac{3}{2}}\theta_\nu^{-\alpha-\frac{3}{2}}\int_{\frac{3}{2}}^{3\pi/(4\theta_\nu)}\frac{x^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{x^2-1}\,dx=O\left(\nu^{-\alpha-\frac{3}{2}}n^{\alpha}\right), \tag{15.4.18}$$

откуда

$$\mathrm{IV}=O\left(\nu^{-\alpha-\frac{3}{2}}n^{\alpha}\right). \tag{15.4.19}$$

Наконец, вторая теорема о среднем дает (ср. (4.21.7), а также § 7.32, (2))

$$\mathrm{V}=-(\cos\theta_\nu-\cos[3\pi/4])^{-1}\int_{3\pi/4}^{\theta'}P_n^{(\alpha,\,\beta)}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=$$

$$=O(n^{-1})\left|P_{n+1}^{(\alpha-1,\,\beta-1)}(\cos\theta')-P_{n+1}^{(\alpha-1,\,\beta-1)}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)\right|=$$

$$=O\left[n^{\max\left(\beta-2,\,-\frac{3}{2}\right)}\right]=O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),\qquad \frac{3\pi}{4}\leqslant\theta'\leqslant\pi. \tag{15.4.20}$$

Здесь мы использовали допущение, что $\beta\leqslant\frac{3}{2}$. Отсюда

$$\lambda_\nu=O(1)\,\nu^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{-\alpha-2}\left(\nu^{-2}n^{\alpha}+\nu^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{\alpha}+n^{-\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=O(1)\,\nu^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{-\alpha-2}\left(\nu^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{\alpha}+n^{-\frac{1}{2}}\right)=O(1)\left(\nu n^{-2}+\nu^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{-\alpha-\frac{5}{2}}\right). \tag{15.4.21}$$

Во всех случаях мы получаем

$$\sum_{0\leqslant x_\nu<1}|\lambda_\nu|=O(1), \tag{15.4.22}$$

что доказывает ограниченность (15.2.2) и первую часть утверждения теоремы.

(3) Предположим теперь, что $\alpha \geqslant \beta$, $\alpha > \frac{3}{2}$. Допустим, что θ_ν лежит на фиксированном отрезке $[a, b]$, $0 < a < b < \pi$; тогда $\nu \sim n$, и число нулей θ_ν, удовлетворяющих этому условию, тоже $\sim n$. Пусть ε и ω — фиксированные положительные числа, причем $\varepsilon < \min(a, \pi - b)$. Разобьем рассматриваемый интеграл на части I, II, III, IV, V, соответствующие следующим промежуткам интегрирования:

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\omega}{n}, \quad \frac{\omega}{n} \leqslant \theta \leqslant \theta_\nu - \varepsilon, \quad \theta_\nu - \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \theta_\nu + \varepsilon, \\ &\theta_\nu + \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \frac{\omega}{n}, \quad \pi - \frac{\omega}{n} \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{aligned}\right\} \tag{15.4.23}$$

Тогда

$$\mathrm{I} = (1 - \cos\theta_\nu)^{-1} \int_0^{\frac{\omega}{n}} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta + O(1) \int_0^{\frac{\omega}{n}} |P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos\theta)|\,\theta^2\, d\theta. \tag{15.4.24}$$

Первый из этих интегралов мы можем вычислить, учитывая (4.21.7), и мы получим (см. (7.32.5))

$$\mathrm{I} = (1 - \cos\theta_\nu)^{-1} \frac{2}{n+\alpha+\beta} \left\{P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(1) - P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}\left(\cos\frac{\omega}{n}\right)\right\} +$$

$$+ O(n^{\alpha-4}) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \frac{n^{\alpha-2}}{1 - \cos\theta_\nu} + \omega^{-\alpha+\frac{1}{2}} O(n^{\alpha-2}) + O(n^{\alpha-3}). \tag{15.4.25}$$

Постоянная, входящая в $O(n^{\alpha-2})$, не зависит от ω. Таким же образом мы находим, что

$$\mathrm{V} = (-1)^{n-1} \int_0^{\frac{\omega}{n}} \frac{P_n^{(\beta, \alpha)}(\cos\theta)}{\cos\theta + \cos\theta_\nu} \sin\theta\, d\theta =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{2}{\Gamma(\beta)} \frac{n^{\beta-2}}{1 + \cos\theta_\nu} + \omega^{-\beta+\frac{1}{2}} O(n^{\beta-2}) + O(n^{\beta-3}), \tag{15.4.26}$$

где постоянная, входящая в $O(n^{\beta-2})$, не зависит от ω. (При $\beta = 0$ первое слагаемое равно нулю.)

Кроме того,

$$\mathrm{II} + \mathrm{IV} = O(n^{-\frac{1}{2}}) \int_{\frac{\omega}{n}}^{\theta_\nu - \varepsilon} \theta^{-\alpha+\frac{1}{2}} d\theta + O(n^{-\frac{1}{2}}) \int_{\theta_\nu + \varepsilon}^{\pi - \frac{\omega}{n}} (\pi - \theta)^{-\beta+\frac{1}{2}} d\theta =$$

$$= \omega^{-\alpha+\frac{3}{2}} O(n^{\alpha-2}) + \omega^{-\beta+\frac{3}{2}} O(n^{\beta-2}) + O(n^{-\frac{1}{2}}). \tag{15.4.27}$$

Здесь остается в силе предыдущее замечание относительно постоянных под знаком O.

Наконец, в силу (8.8.2) имеем

$$\mathrm{III} = n^{-\frac{1}{2}} k(\theta_\nu) \int_{\theta_\nu - \varepsilon}^{\theta_\nu + \varepsilon} \frac{\cos(N\theta + \gamma) - \cos(N\theta_\nu + \gamma)}{\cos\theta - \cos\theta_\nu} \sin\theta\, d\theta + O(n^{-\frac{1}{2}}) =$$

$$= O(n^{-\frac{1}{2}}) \int_{\theta_\nu - \varepsilon}^{\theta_\nu + \varepsilon} \left| \frac{\sin N \frac{\theta - \theta_\nu}{2}}{\sin \frac{\theta - \theta_\nu}{2}} \right| d\theta + O(n^{-\frac{1}{2}}). \tag{15.4.28}$$

Последний интеграл равен $O(\ln n)$ (см. Зигмунд [2], § 8.3); отсюда

$$\mathrm{III} = O(n^{-\frac{1}{2}} \ln n). \tag{15.4.29}$$

Допустим теперь, что $\alpha > \beta$, $\alpha > \frac{3}{2}$; тогда предыдущие результаты дают

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} + \mathrm{V} = n^{\alpha-2}\left\{\frac{2}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{1-\cos\theta_\nu} + \omega^{-\alpha+\frac{3}{2}} O(1)\right\} + o(n^{\alpha-2}), \tag{15.4.30}$$

где $O(1)$ не зависит от ω. Отсюда благодаря (15.4.3) получаем

$$\sum_{a \leqslant \theta_\nu \leqslant b} |\lambda_\nu| \sim n^{\alpha-\frac{3}{2}}. \tag{15.4.31}$$

В более сложном случае $\alpha = \beta > \frac{3}{2}$ мы находим

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} + \mathrm{V} =$$

$$= n^{\alpha-2}\left\{\frac{2}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{1-\cos\theta_\nu} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \frac{(-1)^{n-1}}{1+\cos\theta_\nu} + \omega^{-\alpha+\frac{3}{2}} O(1)\right\} + o(n^{\alpha-2}), \tag{15.4.32}$$

где $O(1)$ опять не зависит от ω. Это приводит к тому же результату (15.4.31).

15.5. Другой метод для случая ультрасферических многочленов

В случае ультрасферических многочленов $\alpha = \beta$ сходимость (15.4.2) вытекает из следующей теоремы:

Теорема 15.5. *Пусть* $-1 < \alpha = \beta \leqslant \frac{3}{2}$. *Тогда коэффициенты Котеса* λ_ν, *определенные формулой* (15.4.1), *все положительны при достаточно большом* n. *В случаях* $-1 < \alpha = \beta \leqslant 0$ *и* $\frac{1}{2} \leqslant \alpha = \beta \leqslant 1$ *утверждение справедливо для всех значений* n.

В силу теоремы Стеклова — Фейера (теоремы 15.2.2; см. последнее замечание в § 15.2, (2)) это действительно приводит к новому доказательству теоремы сходимости § 15.4 и притом даже для функций, интегрируемых в смысле Римана. Весьма вероятно, что $\lambda_\nu > 0$ при всех n, когда $-1 < \alpha = \beta \leqslant \frac{3}{2}$.

В связи с настоящим параграфом см. Сегё [17], стр. 95—99, 109—110, где доказана положительность λ_ν для $-\frac{1}{2} \leqslant \alpha = \beta \leqslant 0$ и для некоторых других частных случаев.

(1) Мы доказываем, что $\lambda_\nu > 0$, устанавливая положительность функции $K_n(x) = K_n^{(\lambda)}(x)$ (см. § 15.2) при $-1 < x < +1$; здесь $d\alpha(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx$, где $\lambda = \alpha + \frac{1}{2}$ (см. (15.2.8)). Мы будем предполагать в этом параграфе, что n четно, так как при n нечетном последний интеграл в (15.2.6) равен нулю.

В соответствии с (4.7.15), (4.7.14) и (4.7.3) мы имеем (см. (1.7.3)):

$$K_n^{(\lambda)}(x) = 2^{3-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)} \sum \frac{\lambda+m}{(2\lambda+m-1)(m+1)} P_m^{(\lambda)}(x) =$$

$$= \sum d_m^{(\lambda)} P_m^{(\lambda)}(x), \qquad m = 0, 2, 4, \ldots, n. \tag{15.5.1}$$

Пусть $\lambda < 2$. Благодаря теореме 9.1.2 из замечания, сделанного в связи с формулой (15.2.9), при $-1 < x < +1$ вытекает соотношение

$$\lim_{n\to\infty} K_n^{(\lambda)}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}, \tag{15.5.2}$$

причем равномерно на отрезке $-1+\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$.

(2) Допустим сначала, что $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Тогда

$$d_0^{(\lambda)} > 0, \quad d_m^{(\lambda)} < 0, \qquad m = 2,\ 4,\ 6\ \ldots \tag{15.5.3}$$

Кроме того, тригонометрический косинус-многочлен $P_m^{(\lambda)}(\cos\theta)$ имеет неотрицательные коэффициенты (см. (4.9.19)). Следовательно, $K_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ достигает своего минимума при $\theta = 0$, причем этот минимум *убывает* с возрастанием n. Далее имеем

$$\sum_{m=0,\,2,\,4,\,\ldots} d_m^{(\lambda)} P_m^{(\lambda)}(1) = 2^{2-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \sum_{m=0,\,2,\,4,\,\ldots} \left(\frac{1}{2\lambda+m-1}+\frac{1}{m+1}\right)\binom{2\lambda+m-1}{m} =$$

$$= 2^{2-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda-1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)} \sum_{m=0,\,2,\,4,\,\ldots} \left\{\binom{2\lambda+m-2}{m}+\binom{2\lambda+m-1}{m+1}\right\} =$$

$$= 2^{2-2\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda-1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2\lambda+m-2}{m} = 0, \tag{15.5.4}$$

что и доказывает утверждение для $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Если $\lambda = \frac{1}{2}$, то $d_m^{(\lambda)} = 0$, $m = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$, и $K_n^{(\lambda)}(x) = 1$. В предельном случае, когда $\lambda \to 0$, мы находим, что

$$\lim_{\lambda\to 0} K_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m+1}\right)\cos m\theta, \quad m = 2,\ 4,\ \ldots,\ n. \tag{15.5.5}$$

Таким образом, этот случай может быть рассмотрен, как и предыдущий (см. Сегё [17], стр. 96).

(3) Предположим затем, что $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$. В этом случае $d_m^{(\lambda)} > 0$. В силу (4.9.19) коэффициенты тригонометрического многочлена $P_m^{(\lambda)}(\cos\theta)$ неотрицательны, за исключением старшего коэффициента при $\cos m\theta$, который отрицателен, $m > 0$. Таким образом, коэффициент при произвольном $\cos m\theta$ ($m > 0$ и четно) в $K_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ представим в виде суммы $-u_0+u_1+u_2+\ldots+u_l$, где $u_0, u_1, \ldots, u_l$ неотрицательны, $l = (n-m)/2$. Если m фиксировано, а $n \to \infty$, $l \to \infty$, то это выражение стремится к коэффициенту при $\cos m\theta$ в разложении функции $(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda} = |\sin\theta|^{1-2\lambda}$. Но он отрицателен (см., например, Полиа и Сегё [2], стр. 31—32), так что это верно и для частной суммы $-u_0+u_1+u_2+\ldots+u_l$. Следовательно, $K_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ опять того же типа, что и в предыдущем случае, и достигает своего минимума в точке $\theta = 0$. Слагаемые $d_m^{(\lambda)} P_m^{(\lambda)}(1)$ отрицательны при всех m, за исключением $m = 0$. Тем самым утверждение доказано.

(4) В случае $1 < \lambda \leqslant \frac{3}{2}$ мы исходим из тождества

$$(1-x^2)K_n^{(\lambda)}(x) = K_n^{(\lambda-1)}(x) + \sigma_\lambda P_{n+2}^{(\lambda-1)}(x), \quad n \text{ четно}, \tag{15.5.6}$$

где σ_λ — некоторая надлежащим образом выбранная постоянная. Мы легко устанавливаем (полагая $x=1$ или сравнивая старшие коэффициенты, см. (4.7.9)), что $\sigma_\lambda < 0$. Для дальнейших целей напишем σ_λ в явном виде:

$$\sigma_\lambda = \frac{2^{1-2\lambda}}{1-\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)} \frac{n+2}{2\lambda+n-1}. \tag{15.5.7}$$

Для того чтобы доказать (15.5.6), возьмем произвольный многочлен n-й степени $\rho(x)$ и, учитывая (15.2.9), напишем

$$\int_{-1}^{+1} \{(1-x^2)^{\lambda-\frac{3}{2}}[K_n^{(\lambda-1)}(x) + \sigma_\lambda P_{n+2}^{(\lambda-1)}(x)] - 1\}\, \rho(x)\, dx = 0, \tag{15.5.8}$$

где σ_λ определяется из условия, чтобы правая часть (15.5.6) обращалась в нуль при $x=1$.

В соответствии с результатом п. (2) коэффициенты при $\cos m\theta$, $m>0$, в правой части (15.5.6) опять неположительны, и минимум достигается при $\theta=0$, т. е. $x=1$; отсюда вытекает, что $(1-x^2)K_n^{(\lambda)}(x) > 0$, $-1 < x < +1$.

Это рассуждение требует лишь небольшого видоизменения при $\lambda = 1$ (см. Сегё [17], стр. 96—97).

(5) Теперь докажем, что $K_n^{(\lambda)}(x) > 0$ при $-1 < x < +1$ для достаточно больших n, когда $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ или $\frac{3}{2} < \lambda \leqslant 2$.

Мы можем предполагать, что n четно и что $0 < x < 1$. Пусть сначала $\lambda < 1$. Из (7.33.6) при $\theta \geqslant cn^{-1}$ мы имеем

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \theta^{-\lambda} O(n^{\lambda-1}). \tag{15.5.9}$$

Из (15.5.2) при четном n имеем

$$K_n^{(\lambda)}(\cos\theta) \geqslant (\sin\theta)^{1-2\lambda} - \sum_{m=n+2,\, n+4,\, \ldots} |d_m^{(\lambda)}|\, |P_m^{(\lambda)}(\cos\theta)|. \tag{15.5.10}$$

Последняя сумма (см. (15.5.1)) равна

$$O(1)\sum m^{-1}\theta^{-\lambda} m^{\lambda-1} = \theta^{-\lambda} O(n^{\lambda-1}), \tag{15.5.11}$$

так как $n^{-1} > m^{-1}$ и $\lambda < 1$; это дает

$$K_n^{(\lambda)}(\cos\theta) > \frac{1}{2}(\sin\theta)^{1-2\lambda} > 0$$

при достаточно большом n и $\theta > cn^{-1}$, где c — надлежащим образом выбранная положительная постоянная.

Это рассуждение остается в силе и при $\lambda = 1$, если внести следующее изменение. Мы имеем (см. (4.7.2))

$$K_n^{(1)}(\cos\theta) = \frac{4}{\pi}\sum \frac{1}{m+1}\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{1}{m+1}\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Здесь m четно; в первой сумме $m \leqslant n$, а во второй сумме $m > n$. Применяя (1.11.6), находим, что

$$K_n^{(1)}(\cos\theta) = (\sin\theta)^{-1} + \theta^{-2} O(n^{-1}) > 0 \tag{15.5.12}$$

при $\theta > cn^{-1}$, $c > 0$.

В случае $\frac{3}{2} < \lambda < 2$ мы используем (15.5.6) и (15.5.7); принимая во внимание предыдущий результат, мы получаем

$$K_n^{(\lambda-1)}(\cos\theta) > \frac{1}{2}(\sin\theta)^{1-2(\lambda-1)}, \quad \sigma_\lambda P_{n+2}^{(\lambda-1)}(\cos\theta) = \theta^{1-\lambda} O(n^{\lambda-2}), \quad \theta > cn^{-1}, \tag{15.5.13}$$

что опять доказывает положительность $K_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ при $\theta > c'n^{-1}$, где c' — надлежащим образом выбранная положительная постоянная. При $\lambda = 2$ мы применяем (15.5.12). Так как $\sigma_2 = -2/\pi + O(n^{-1})$, то при $\theta > c'n^{-1}$ имеет место неравенство

$$\sin^2\theta\, K_n^{(2)}(\cos\theta) > \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)(\sin\theta)^{-1} + \\ + \theta^{-2} O(n^{-1}) + O(n^{-1})(\sin\theta)^{-1} > 0. \tag{15.5.14}$$

Наконец, допустим, что $\theta > 0$, $\theta = O(n^{-1})$, n четно. В соответствии с (4.7.1) мы имеем $\left(\lambda = \alpha + \frac{1}{2}\right)$:

$$K_n^{(\lambda)}\left(\cos\frac{x}{n}\right) = \frac{2^{2-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sum \frac{\lambda+m}{(2\lambda+m-1)(m+1)} \frac{\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma\left(m+\lambda+\frac{1}{2}\right)} P_m^{(\alpha,\alpha)}\left(\cos\frac{x}{n}\right)$$

где $m = 0, 2, 4, \ldots, n$. При $\alpha > 0$ благодаря (8.1.1) мы получаем

$$K_n^{(\lambda)}\left(\cos\frac{x}{n}\right) = \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} n^{2\alpha} x^{-2\alpha} \frac{2x}{n} \sum \left\{\left(\frac{mx}{n}\right)^{\alpha-1} J_\alpha\left(\frac{mx}{n}\right)\right\} + \\ + \sum m^{2\alpha-1} o(1) + O(1), \quad m = 2, 4, \ldots, n. \tag{15.5.15}$$

Если $n \to \infty$, то первое слагаемое в правой части будет

$$\cong 2^{1-\alpha}\{\Gamma(\alpha)\}^{-1} n^{2\alpha} x^{-2\alpha} f_\alpha(x)$$

равномерно по x, $0 < x \leqslant x_0$, где

$$x^{-2\alpha} f_\alpha(x) = x^{-2\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} J_\alpha(t)\,dt = \int_0^1 t^{2\alpha-1} \{(tx)^{-\alpha} J_\alpha(tx)\}\,dt. \tag{15.5.16}$$

Второе слагаемое равно $o(n^{2\alpha})$, $\alpha > 0$.

Очевидно, $\lim\limits_{x\to+0} x^{-2\alpha} f_\alpha(x)$ существует и положителен. Докажем, что целая функция $f_\alpha(x) > 0$ при $x > 0$, если только $0 < \alpha \leqslant \frac{3}{2}$.

Имеет место представление (см. В а т с о н [3], стр. 170, (3))

$$t^{\alpha-1} J_\alpha(t) = \frac{2^{\alpha+1}\pi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \int_1^\infty \frac{t^{-1}\sin tu}{(u^2-1)^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,du, \quad t > 0, \tag{15.5.17}$$

при $-\frac{1}{2} < \alpha < +\frac{1}{2}$. Предполагая, что $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, мы можем проинтегрировать по частям. Мы получим, таким образом, следующее представление:

$$t^{\alpha-1} J_\alpha(t) = \frac{2^\alpha \pi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)} \int_1^\infty \frac{(tu)^{-1}\sin tu - \cos tu}{u(u^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}}\,du, \quad t > 0, \tag{15.5.18}$$

справедливое при $0 < \alpha < \frac{3}{2}$. Это приводит наше утверждение к исследованию частного случая

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} f_{\frac{3}{2}}(x) = \int_0^x (t^{-1}\sin t - \cos t)\,dt = \int_0^x t^{-1}\sin t\,dt - \sin x. \qquad (15.5.19)$$

Эта функция возрастает при $0 < x < t_1$ и убывает при $t_1 < x < t_2$, где t_1 и t_2 — наименьшие положительные корни $\sin t - t\cos t = 0$, $t_1 < 2\pi < t_2$. Таким образом, нам нужно доказать лишь, что $f_{\frac{3}{2}}(x) > 0$ при $x \geqslant 2\pi$. Но при $x \geqslant 2\pi$ мы имеем

$$\int_0^x t^{-1}\sin t\,dt = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty t^{-1}\sin t\,dt. \qquad (15.5.20)$$

В соответствии со второй теоремой о среднем значении абсолютная величина последнего интеграла меньше, чем $2x^{-1} \leqslant 2(2\pi)^{-1}$. Следовательно, левая часть (15.5.20) больше, чем $\frac{\pi}{2} - 2(2\pi)^{-1} > 1$.

ГЛАВА XVI

МНОГОЧЛЕНЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЙ

В главе XI были введены некоторые системы многочленов, играющих на единичной окружности такую же роль, какую играют исследованные раньше ортогональные многочлены на вещественном промежутке. Мы дадим здесь краткий обзор дальнейших обобщений, в которых используются спрямляемые жордановы кривые вместо единичной окружности или вещественного отрезка.

16.1. Предварительные сведения; определения

(1) Пусть T — односвязная область комплексной x-плоскости, содержащая внутри себя точку $x=\infty$; пусть граница C области T представляет собой континуум, состоящий из конечного числа спрямляемых жордановых дуг. При интегрировании вдоль C части границы C описываются в произвольном фиксированном порядке; вдоль дуг, имеющих характер разреза, интегрирование производится дважды. Рассматриваемые интегралы имеют вид

$$\int\limits_C f(x)\,|dx|. \tag{16.1.1}$$

Функция $f(x)$ определена на C и интегрируема в смысле Лебега, а $|dx|$ — элемент дуги на C. Будем обозначать общую длину границы C через L, считая разрезы дважды.

Исключительно важным является случай спрямляемой жордановой кривой. Другой замечательный случай — это случай жордановой дуги. Случай конечного отрезка относится к этому типу.

(2) Пусть

$$x=\varphi(z)=cz+c_0+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}+\ldots,\quad c>0, \tag{16.1.2}$$

— аналитическая функция, регулярная и однолистная при $|z|>1$, которая конформно отображает $|z|>1$ на область T, сохраняя неподвижной бесконечно удаленную точку и направление в ней. В соответствии с теоремой Осгуда и Каратеодори (Каратеодори [1], стр. 86) функция $\varphi(z)$ непрерывна в области $|z|\geqslant 1$ и осуществляет взаимно однозначное и непрерывное соответствие между единичной окружностью $|z|=1$ и границей C области T (описываемой в порядке, указанном выше). Функция $\varphi(z)$ определена однозначно; число c называется *трансфинитным диаметром* (*константой Робена*, *емкостью*) кривой C (см. § 16.2, (5)).

Пусть C — жорданова кривая и пусть x_0 — заданная точка внутри C. В этом случае мы можем рассматривать также функцию

$$x=\psi(z)=x_0+d_1z+d_2z^2+\ldots,\ d_1>0, \tag{16.1.3}$$

которая регулярна и однолистна в круге $|z|<1$ и которая осуществля конформное отображение круга $|z|<1$ на внутреннсть U кривой C; он переводит начало $z=0$ в точку $x=x_0$ и сохраняет направление в начале; $\psi(z)$ также однозначно определена и непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$.

Для отрезка $-1\leqslant x\leqslant +1$ мы имеем $\varphi(z)=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$ (см. § 1.9), но $\psi(z)$ в этом случае смысла не имеет. Для окружности $|x|=1$, $x_0=0$, мы имеем $\varphi(z)=\psi(z)=z$.

Функции, обратные к функциям (16.1.2) и (16.1.3), обозначим соответственно $z=\Phi(x)$, $z=\Psi(x)$.

Особенно простым случаем является тот, когда граница C области T (или U) состоит из конечного числа *аналитических дуг*. Тогда $\varphi(z)$ аналитична на $|z|=1$, за исключением конечного числа точек, соответствующих угловым точкам C. Длина части дуги C, соответствующая $z=e^{i\theta}$, $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$, может быть записана в виде

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}|\varphi'(e^{i\theta})|\,d\theta \tag{16.1.4}$$

(аналогично для отображения (16.1.3)).

(3) Пусть C — жорданова кривая, а $w(x)$ — положительная непрерывная весовая функция, определенная на C. Затем рассуждения § 10.2 могут быть применены к функциям $w[\varphi(e^{-i\theta})]$ и $w[\psi(e^{i\theta})]$, которые положительны и непрерывны на единичной окружности $z=e^{i\theta}$; $-\pi\leqslant\theta\leqslant+\pi$. Подставляя в соответствующие аналитические функции $D_e(z)$ и $D_i(z)$ функции $z=\{\Phi(x)\}^{-1}$ и $z=\Psi(x)$, мы получаем некоторые аналитические функции $\Delta_e(x)$ и $\Delta_i(x)$, которые обладают следующими свойствами:

(a) $\Delta_e(x)$ регулярна в T, включая $x=\infty$, $\Delta_i(x)$ регулярна в U;

(b) $\Delta_e(x)\neq 0$, $\Delta_i(x)\neq 0$;

(c) $\Delta_e(\infty)$ и $\Delta_i(x_0)$ вещественны и положительны.

Кроме того, мы имеем

$$\lim_{x_e\to x}|\Delta_e(x_e)|^2=\lim_{x_i\to x}|\Delta_i(x_i)|^2=w(x), \tag{16.1.5}$$

где $x_e\to x$ означает стремление извне к точке x границы C, а $x_i\to x$ указывает на стремление изнутри к точке x границы C. В обоих случаях сходимость равномерна относительно x.

Эти рассуждения могут быть обобщены, если заменить требование непрерывности $w(x)$ более общими условиями, а также кривую C более общим точечным множеством. Если C является дугой (в частности, если C—конечный отрезок), то функция $\Delta_i(x)$ не имеет смысла.

(4) Мы определяем скалярное произведение двух функций $f(x)$ и $g(x)$ на C интегралом

$$(f,\,g)=\frac{1}{L}\int_C f(x)\overline{g(x)}\,|dx|. \tag{16.1.6}$$

Следовательно, мы можем ортогонализовать систему

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots, \tag{16.1.7}$$

причем этот процесс приведет нас к системе многочленов, однозначно определяемых следующими условиями:

(a) $p_n(x)$ — многочлен степени n с вещественным и положительным коэффициентом при x^n;

(b) система $\{p_n(x)\}$ ортонормальна, т. е.

$$\frac{1}{L}\int_C p_n(x)\overline{p_m(x)}\,w(x)\,|dx|=\delta_{nm},\quad n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{16.1.8}$$

Если C — конечный вещественный отрезок или единичная окружность, то мы получаем многочлены, которые были рассмотрены нами раньше. В следующих параграфах мы остановимся на некоторых основных свойствах многочленов $p_n(x)$, которые могут быть классифицированы следующим образом: формальные свойства (минимум-максимум свойства, нули), асимптотическое поведение $p_n(x)$ при $n \to \infty$, когда x лежит внутри C, асимптотическое поведение $p_n(x)$ при $n \to \infty$, когда x лежит вне C, асимптотическое поведение $p_n(x)$ при $n \to \infty$, когда x лежит на C.

Мы даем лишь краткие указания относительно доказательств, в особенности в тех случаях, когда они не существенно отличаются от рассуждений, примененных в предыдущих частных случаях.

По поводу определений и основных свойств ортогональных многочленов см. Сегё [5] и Уолш [1], глава VI. Большинство этих свойств имеет аналоги для многочленов, ортогональных по области U, лежащей *внутри* C; они соответствуют следующему определению скалярного произведения:

$$(f;\, g) = \frac{1}{A} \iint\limits_U f(x)\overline{g(x)}\, d\sigma, \tag{16.1.9}$$

где A — площадь, а $d\sigma$ — элемент площади области U. Эти многочлены были исследованы Карлеманом ([1], стр. 20—30). Здесь также может быть введена весовая функция.

16.2. Формальные свойства

(1) Пусть $D_n > 0$ — детерминант положительно определенной квадратичной формы (см. (2.2.8) и (11.1.4))

$$\frac{1}{L} \int\limits_C |u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n|^2 w(x)\,|dx| =$$

$$= \sum_{\nu,\, \mu = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n} k_{\nu\mu} u_\nu \overline{u}_\mu, \tag{16.2.1}$$

$$k_{\nu\mu} = \frac{1}{L} \int\limits_C x^\nu \overline{x}^\mu w(x)\,|dx| \tag{16.2.2}$$

(см. (2.2.1) и (11.1.2)). Ортогональные многочлены $p_n(x)$ могут быть представлены следующим образом (см. (2.2.6), (2.2.10) и (11.1.9)):

$$p_0(x) = D_0^{-\frac{1}{2}},$$

$$p_n(x) = (D_{n-1} D_n)^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} k_{00} & k_{10} & \ldots & k_{n0} \\ k_{01} & k_{11} & \ldots & k_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ k_{0,\, n-1} & k_{1,\, n-1} & \ldots & k_{n,\, n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(D_{n-1} D_n)^{-\frac{1}{2}}}{L^n n!} \int\limits_C \ldots \int\limits_C (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \times$$

$$\times \prod_{\substack{\nu,\, \mu = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1 \\ \nu < \mu}} |x_\nu - x_\mu|^2 w(x_0) w(x_1) \ldots w(x_{n-1})\,|dx_0|\,|dx_1| \ldots |dx_{n-1}|. \tag{16.2.3}$$

Мы имеем (см. (2.2.7), (2.2.11) и (11.1.5))

$$D_n = [k_{\nu\mu}]_{\nu,\,\mu=0,\,1,\,2,\dots,\,n} = \\ = \frac{1}{L^{n+1}(n+1)!} \int_C \dots \int_C \prod_{\substack{\nu,\,\mu=0,\,1,\,2,\dots,\,n \\ \nu<\mu}} |x_\nu - x_\mu|^2 w(x_0) w(x_1) \dots \\ \dots w(x_n)\,|dx_0|\,|dx_1| \dots |dx_n|. \quad (16.2.4)$$

(2) [1]) Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная на C. Тогда частные суммы $s_n(x)$ ряда Фурье

$$\left.\begin{aligned} & f(x) \sim f_0 p_0(x) + f_1 p_1(x) + f_2 p_2(x) + \dots + f_n p_n(x) + \dots, \\ & f_n = \frac{1}{L} \int_C f(x) \overline{p_n(x)}\,|dx|, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots, \end{aligned}\right\} \quad (16.2.5)$$

минимизируют интеграл

$$\frac{1}{L} \int_C |f(x) - \varrho(x)|^2 w(x)\,|dx|, \quad (16.2.6)$$

где $\varrho(x)$ пробегает множество всех π_n. Минимум равен

$$\frac{1}{L} \int_C |f(x)|^2 w(x)\,|dx| - |f_0|^2 - |f_1|^2 - \dots - |f_n|^2. \quad (16.2.7)$$

Это дает также неравенство Бесселя

$$|f_0|^2 + |f_1|^2 + |f_2|^2 + \dots \leqslant \frac{1}{L} \int_C |f(x)^2 w(x)\,|dx|. \quad (16.2.8)$$

Пусть C — спрямляемая жорданова кривая и пусть $f(x)$ — аналитическая функция, регулярная внутри C и непрерывная на C. Тогда в (16.2.8) нужно поставить знак равенства; иными словами, справедливо равенство Парсеваля. Это вытекает из теоремы 1.3.4.

В. И. Смирнов [1] исследовал справедливость этой формулы для более общего класса функций $f(x)$, для которых

$$f\{\psi(z)\} D_i(z) \{\psi'(z)\}^{\frac{1}{2}} \quad (16.2.9)$$

принадлежит классу H_2 в круге $|z| < 1$ (см. § 10.1); здесь мы используем обозначения, введенные раньше. Равенство Парсеваля имеет место для этого класса тогда и только тогда, когда отображающая функция $\psi(z)$ удовлетворяет условию

$$\ln|\psi'(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \ln|\psi'(e^{it})| \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\,dt, \quad 0 \leqslant r < 1. \quad (16.2.10)$$

См. В. И. Смирнов [1], стр. 164—168. Как показали М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев [1], существуют спрямляемые кривые, для которых требование (16.2.10) не удовлетворяется.

(3) Пусть $\varrho(x)$ — произвольный π_n со старшим коэффициентом единица. Тогда

$$\min \frac{1}{L} \int_C |\varrho(x)|^2 w(x)\,|dx| \quad (16.2.11)$$

достигается в том и только в том случае, когда $\varrho(x) = (D_n/D_{n-1})^{\frac{1}{2}} p_n(x)$ и минимум этот равен D_n/D_{n-1}.

---

[1]) В связи с рассуждениями пп. (2), (3), (4) см. §§ 3.1, 11.1, 11.3.

(4) Пусть x_0 — произвольная, но фиксированная точка комплексной плоскости и пусть $\rho(x)$ — произвольный π_n, удовлетворяющий условию $\rho(x_0)=1$. Тогда минимум интеграла (16.2.11) достигается для $\rho(x)=\{K_n(x_0, x_0)\}^{-1}K_n(x_0, x)$, где

$$K_n(x_0, x)=\overline{p_0(x_0)}\,p_0(x)+\ldots+\overline{p_n(x_0)}\,p_n(x). \tag{16.2.12}$$

Минимум равен $\{K_n(x_0, x_0)\}^{-1}$. (Этот же результат может быть выражен как некоторое максимальное свойство; см. § 3.1, (3) и § 11.3.) Характеристическим свойством «ядра» $K_n(x_0, x)$ является равенство

$$\frac{1}{L}\int\limits_C K_n(x_0, x)\,\overline{\rho(x)}\,w(x)\,|dx|=\overline{\rho(x_0)}, \tag{16.2.13}$$

где $\rho(x)$ — произвольный π_n (см. (3.1.12)).

Используя $K_n(x_0, x)$, мы можем представить n-ю частную сумму $s_n(x)$ разложения (16.2.5) в следующем виде:

$$s_n(x)=\frac{1}{L}\int\limits_C f(\xi)\,K_n(\xi, x)\,w(\xi)\,|d\xi|. \tag{16.2.14}$$

(5) Экстремальная задача, рассмотренная в (3), может быть обобщена, как и в случае отрезка (§ 3.11). В частности, задача о чебышевском уклонении, соответствующая (16.2.11), состоит в определении минимума $\max|\rho(x)|$ при $x\in C$, где $\rho(x)$ – произвольный π_n со старшим коэффициентом единица. Многочлены, решающие эту задачу, были исследованы Фабером [3]. Если μ_n — рассматриваемый минимум, то (Фабер [3])

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n^{\frac{1}{n}}=c, \tag{16.2.15}$$

где c — трансфинитный диаметр, определенный в § 16.1, (2). Мы увидим, что аналогичная формула справедлива для минимума в задаче (3) (см. (16.4.3)).

Фекете [1] распространил определение трансфинитного диаметра для произвольного замкнутого множества в комплексной плоскости, доказав, что для соответствующего минимума μ_n (который имеет смысл, если мы заменим кривую C произвольным замкнутым множеством) предел (16.2.15) существует.

Обобщенный трансфинитный диаметр является замечательной функцией множества, которая может быть явно вычислена в различных случаях (см., например Сегё [5], стр. 254).

Относительно распространения результата, приведенного в § 3.11, (5), на произвольную кривую см. Жюлиа [1].

(6) *Нули $p_n(x)$ лежат в наименьшей выпуклой области, содержащей кривую C*. См. Сегё [5], стр. 236—241; Фейер [7]. Доказательство может быть основано на рассуждении, подобном тому, которое применялось в § 3.3, (2) (см. также § 16.4, (1), (a)).

Относительно распределения нулей «ядра» $K_n(x_0, x)$ см. Сегё [5], стр. 241—244; см. также теорему 11.4.1 и задачи 5 и 49.

16.3. Асимптотическое поведение $K_n(x_0, x)$ внутри кривой C

(1) В этом параграфе мы предполагаем, что C является аналитической жордановой кривой и что весовая функция $w(x)$, определенная на кривой C, положительна и непрерывна на ней. Пусть x_0 — произвольная точка, лежащая внутри C; обозначим через $z=\Psi(x)=\Psi(x_0,x)$ функцию, обратную

к отображающей функции $x=\psi(z)$, которая определена формулой (16.1.3). В этом случае $\psi(z)$ регулярна и однолистна в некотором круге $|z|\leqslant P$, где $P>1$. Пусть $\Delta_i(x)$ имеет тот же смысл, что в § 16.1, (3). Мы докажем следующую теорему:

Теорема 16.3. *Пусть $\{p_n(x)\}$ — последовательность ортогональных многочленов, определенных условиями* (16.1.8). *Тогда ряд*

$$K(x_0, x)=\overline{p_0(x_0)}\,p_0(x)+\overline{p_1(x_0)}\,p_1(x)+\ldots+\overline{p_n(x_0)}\,p_n(x)+\ldots \tag{16.3.1}$$

сходится, если x_0 и x — произвольные точки внутри C. Сходимость равномерна по x_0 и x, если обе точки x_0 и x принадлежат замкнутому множеству, лежащему целиком в C. Кроме того, мы имеем

$$K(x_0, x)=\frac{L}{2\pi}\{\Delta_i(x_0)\,\Delta_i(x)\}^{-1}\{\Psi'(x_0)\,\Psi'(x)\}^{\frac{1}{2}}. \tag{16.3.2}$$

Случай $w(x)=1$ см. Сегё [5], стр. 244—251. Допущения этой теоремы относительно $w(x)$ и C могут быть обобщены (см. В. И. Смирнов [2], стр. 353—356). Для жордановой дуги (в частности, для отрезка) эти рассуждения смысла не имеют. Для частного случая, когда C — единичная окружность, см. (12.3.17).

В качестве следствия из сходимости ряда (16.3.1) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x)=0, \tag{16.3.3}$$

если x — точка, лежащая внутри C (равномерно, когда x принадлежит замкнутому множеству, целиком лежащему внутри C).

(2) Пусть $\varrho(x)$ — произвольный π_n и пусть x_0 — точка, лежащая внутри C. Тогда по теореме Коши

$$\varrho^2(x_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varrho^2(x)}{x-x_0}\,dx. \tag{16.3.4}$$

Следовательно,

$$|\varrho(x_0)|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \frac{|\varrho(x)|^2}{|x-x_0|}\,|dx|\leqslant\frac{L}{2\pi\delta\mu}\,\frac{1}{L}\int\limits_C |\varrho(x)|^2 w(x)\,|dx|, \tag{16.3.5}$$

где $w(x)\geqslant\mu$, а δ — наименьшее расстояние от точки x_0 до точек $x\in C$. Принимая во внимание утверждение § 16.2, (4), мы имеем

$$K_n(x_0, x_0)\leqslant\frac{L}{2\pi\delta\mu}\,. \tag{16.3.6}$$

Отсюда вытекает, что ряд $K(x_0, x_0)$, а следовательно, благодаря неравенству Коши — Буняковского и ряд (16.3.1) сходятся.

(3) Теперь мы покажем, что

$$K(x_0, x_0)=\lim_{n\to\infty} K_n(x_0, x_0)\geqslant\frac{L}{2\pi}\{\Delta_i(x_0)\}^{-2}\Psi'(x_0). \tag{16.3.7}$$

С этой целью рассмотрим функцию

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\{\Delta_i(x)\}^{-1}\{\Psi'(x)\}^{\frac{1}{2}}=F(z), \tag{16.3.8}$$

которая регулярна внутри C, т. е. при $|z|<1$; $x=\psi(z)$, $z=\Psi(x)$. (Последний множитель регулярен даже в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$.) Пусть r фиксированно, $0<r<1$, и ε — произвольное положительное число.

В соответствии с теоремой 1.3.4 мы можем найти такой многочлен $Q(x)$, что

$$|F(rz)-Q(x)|<\varepsilon, \quad x\in C. \tag{16.3.9}$$

Полагая $\rho(x)=\{Q(x_0)\}^{-1}Q(x)$, мы из § 16.2, (4) получаем для достаточно больших n неравенство

$$\{K(x_0, x_0)\}^{-1}\leqslant\{K_n(x_0, x_0)\}^{-1}\leqslant\frac{|Q(x_0)|^{-2}}{L}\int_C |Q(x)|^2 w(x)\,|dx|; \tag{16.3.10}$$

отсюда, устремляя ε к нулю, получаем

$$\{K(x_0, x_0)\}^{-1}\leqslant\frac{|F(0)|^{-2}}{L}\int_C |F(rz)|^2 w(x)\,|dx|. \tag{16.3.11}$$

Если теперь $r\to 1-0$, то мы будем иметь

$$\{K(x_0, x_0)\}^{-1}\leqslant\frac{|F(0)|^{-2}}{2\pi}\int_C |\Psi'(x)|\,|dx|=|F(0)|^{-2}, \tag{16.3.12}$$

что эквивалентно (16.3.7).

(4) Наконец, мы рассмотрим

$$\begin{aligned}J_n=\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{L}\int_{|z|=r}\Big|K_n(x_0, x)\,\Delta_i(x)\,\{\Psi'(x)\}^{-\frac{1}{2}}-\\ -\frac{L}{2\pi}\{\Delta_i(x_0)\}^{-1}\{\Psi'(x_0)\}^{\frac{1}{2}}\Big|^2|dz|=\frac{1}{L}\int_C |K_n(x_0, x)|^2 w(x)\,|dx|-\\ -\lim_{r\to 1-0}\pi^{-1}r\,\{\Delta_i(x_0)\}^{-1}\{\Psi'(x_0)\}^{\frac{1}{2}}\int_{|z|=r}K_n(x_0, x)\,\Delta_i(x)\,\{\Psi'(x)\}^{-\frac{1}{2}}\frac{dz}{iz}+\\ +\frac{L}{2\pi}\{\Delta_i(x_0)\}^{-2}\Psi'(x_0).\end{aligned} \tag{16.3.13}$$

Первый член равен $K_n(x_0, x_0)$; для второго члена мы получаем

$$\begin{aligned}-\pi^{-1}\{\Delta_i(x_0)\}^{-1}\{\Psi'(x_0)\}^{\frac{1}{2}}\,2\pi K_n(x_0, x_0)\,\Delta_i(x_0)\,\{\Psi'(x_0)\}^{-\frac{1}{2}}=\\ =-2K_n(x_0, x_0);\end{aligned} \tag{16.3.14}$$

таким образом,

$$J_n=-K_n(x_0, x_0)+\frac{L}{2\pi}\{\Delta_i(x_0)\}^{-2}\,\Psi'(x_0). \tag{16.3.15}$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}J_n=0$ в силу (16.3.7). Из этого вытекает при $|z|<1$, т. е. при x, лежащем внутри C, что (см. (7.1.4))

$$\lim_{n\to\infty}K_n(x_0, x)\,\Delta_i(x)\,\{\Psi'(x)\}^{-\frac{1}{2}}=\frac{L}{2\pi}\{\Delta_i(x_0)\}^{-1}\{\Psi'(x_0)\}^{\frac{1}{2}}, \tag{16.3.16}$$

что эквивалентно (16.3.2).

16.4. Асимптотическое поведение $p_n(x)$ вне кривой C

(1) Сохраним относительно кривой C и весовой функции $w(x)$ те же предположения, которые были приняты в § 16.3. Обозначим через $z=\Phi(x)$ функцию, обратную к отображающей функции $x=\varphi(z)$, которая определена формулой (16.1.2). В этом случае $\varphi(z)$ регулярна и однолистна

в замкнутой области, внешней по отношению к некоторой окружности $|z|=r$, где $r<1$. Пусть $\Delta_e(x)$ имеет тот же смысл, что в § 16.1, (3). Мы можем высказать следующее утверждение:

Теорема 16.4. *Пусть $\{p_n(x)\}$ — последовательность ортогональных многочленов, определенных условиями* (16.1.8). *Если точка x лежит вне кривой C, то*

$$p_n(x) \cong \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \{\Delta_e(x)\}^{-1} \{\Phi'(x)\}^{\frac{1}{2}} \Phi^n(x). \tag{16.4.1}$$

Отношение этих выражений при $n \to \infty$ стремится равномерно к единице в каждой конечной или бесконечной замкнутой области, лежащей вне C.

Случай $w(x)=1$ см. Сегё [5], стр. 260—263.

Заслуживают внимания такие следствия из (16.4.1):

(a) Нули $p_n(x)$ при $n \to \infty$ равномерно стремятся к замкнутой области, ограниченной контуром C (применить теорему 1.91.3 (теорему Гурвица)).

(b) Если x лежит вне кривой C, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}(x)}{p_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \{p_n(x)\}^{\frac{1}{n}} = \Phi(x). \tag{16.4.2}$$

Справедливость этой формулы может быть легко распространена на случай произвольной спрямляемой кривой C (см. (12.2.6)).

(c) Областью сходимости ряда (16.2.5) для аналитической функции, регулярной в замкнутой области, ограниченной кривой C, является внутренняя область, ограниченная линией уровня C_R конформного отображения $x=\varphi(z)$ (см. § 1.3, (2)). Определение R по коэффициентам f_n аналогично соответствующему определению в случае степенного разложения (см. теоремы 1.3.5 и 12.7.3).

(d) Пусть k_n — коэффициент при x^n в $p_n(x)$. Тогда

$$k_n \cong \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \{\Delta_e(\infty)\}^{-1} c^{-n-\frac{1}{2}}, \tag{16.4.3}$$

где c — трансфинитный диаметр кривой C (см. § 16.1, (2); § 16.2, (5)). Этот результат может быть легко выражен в терминах детерминантов D_n, введенных в (16.2.4).

(2) Доказательство соотношения (16.4.1) основано на рассуждении, подобном приведенному в § 16.3; здесь используется минимальное свойство, указанное в § 16.2, (3). Мы докажем сначала, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, c^{-2n-1} k_n^{-2} \leqslant \frac{2\pi}{L} \Delta_e^2(\infty). \tag{16.4.4}$$

С этой целью рассмотрим многочлены $f_n(x)$, аналогичные многочленам Фабера (см. Фабер [1]), определяемые как полиномиальная часть разложения функции

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \{\Delta_e(x)\}^{-1} \{\Phi'(x)\}^{\frac{1}{2}} \Phi^n(x) = g_n(x) \tag{16.4.5}$$

в ряд Лорана в окрестности точки $x=\infty$. Функция $g_n(x)$ регулярна при $|z| \geqslant r$, а $f_n(x)$, очевидно, π_n. Пусть C_r — кривая, соответствующая окружности $|z|=r$. Применяя теорему Коши к кольцеобразной области, ограниченной кривой C_r и большой окружностью, мы получаем при $x \in C$

$$g_n(x) - f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{g_n(\xi) - f_n(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{g_n(\xi)}{\xi - x}\, d\xi, \tag{16.4.6}$$

где интегрирование ведется в отрицательном направлении. Отсюда вытекает, что

$$|g_n(x)-f_n(x)|<Mr^n, \quad x\in C, \tag{16.4.7}$$

где M — постоянная, зависящая только от C и r. Функции $g_n(x)$ равномерно ограничены, когда $x\in C$.

Пусть теперь $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ — произвольные постоянные, $n>m$. Многочлен

$$\varrho(x)=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} c^{n+\frac{1}{2}}\{f_n(x)+\gamma_1 f_{n-1}(x)+\gamma_2 f_{n-2}(x)+\ldots+\gamma_m f_{n-m}(x)\} \tag{16.4.8}$$

степени n имеет старший коэффициент, равный единице. В соответствии с § 16.2, (3) и неравенством (16.4.7) имеем

$$k_n^{-2}\leqslant\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{-1} c^{2n+1}\frac{1}{L}\int_C |f_n(x)+\gamma_1 f_{n-1}(x)+\ldots+\gamma_m f_{n-m}(x)|^2 w(x)\,|dx| =$$
$$=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{-1} c^{2n+1}\frac{1}{L}\int_C |g_n(x)+\gamma_1 g_{n-1}(x)+\ldots$$
$$\ldots+\gamma_m g_{n-m}(x)|^2 w(x)\,|dx|+c^{2n}O(r^n). \tag{16.4.9}$$

Таким образом,

$$\varlimsup_{n\to\infty} c^{-2n-1}k_n^{-2}\leqslant\frac{1}{L}\int_{|z|=1}|1+\gamma_1 z^{-1}+\gamma_2 z^{-2}+\ldots+\gamma_m z^{-m}|^2 w(x)\,|dz|; \tag{16.4.10}$$

или

$$\varlimsup_{n\to\infty} c^{-2n-1}k_n^{-2}\leqslant\frac{1}{L}\int_{|z|=1}|\gamma(z)|^2 w(x)\,|dz|, \tag{16.4.11}$$

где $\gamma(z)$ — произвольная аналитическая функция, регулярная при $|z|\geqslant 1$, причем $\gamma(\infty)=1$. Полагая

$$\gamma(z)=\left\{\frac{\Delta_e[\varphi(Rz)]}{\Delta_e(\infty)}\right\}^{-1}, \quad R>1, \tag{16.4.12}$$

и устремляя R к $1+0$, мы получаем неравенство (16.4.4).

(3) Теперь рассмотрим

$$J_n'=\lim_{R\to 1+0}\frac{1}{L}\int_{|z|=R}\left|p_n(x)\,\Delta_e(x)\,\{\Phi'(x)\}^{-\frac{1}{2}}\{\Phi(x)\}^{-n}-\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\right|^2|dz| =$$
$$=\frac{1}{L}\int_C |p_n(x)|^2 w(x)\,|dx| -$$
$$-\lim_{R\to 1+0}\frac{2R}{L}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{|z|=R} p_n(x)\,\Delta_e(x)\,\{\Phi'(x)\}^{-\frac{1}{2}}\{\Phi(x)\}^{-n}\frac{dz}{iz}+1. \tag{16.4.13}$$

Второй член равен

$$-\frac{2}{L}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}2\pi\lim_{x\to\infty}p_n(x)\,\Delta_e(x)\,\{\Phi'(x)\}^{-\frac{1}{2}}\{\Phi(x)\}^{-n}=-2\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta_e(\infty)\,c^{n+\frac{1}{2}}k_n.$$

Следовательно,

$$J_n'=2-2\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta_e(\infty)\,c^{n+\frac{1}{2}}k_n. \tag{16.4.14}$$

В силу (16.4.4) это влечет за собой $\lim\limits_{n\to\infty}J_n'=0$, что и доказывает (16.4.1).

16.5. Асимптотическое поведение $p_n(x)$ на кривой C

Наконец мы имеем следующий результат.

Теорема 16.5. *Асимптотическая формула* (16.4.1) *справедлива равномерно вне и на кривой C, если функция $\Delta_e(x)$ регулярна в замкнутой внешности C; более точно*:

$$p_n(x) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \{\Delta_e(x)\}^{-1} \{\Phi'(x)\}^{\frac{1}{2}} \Phi^n(x) + O(h^n), \qquad (16.5.1)$$

где $0 < h < 1$; постоянная h зависит от C и от $w(x)$.

Эта же формула справедлива в достаточно малой окрестности C внутри C.

(1) Для доказательства мы используем многочлены $F_n(x)$, аналогичные многочленам Фабера, связанные с функциями

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \{\Delta_e(x)\}^{-1} \{\Phi'(x)\}^{\frac{1}{2}} \Phi^n(x) = G_n(x) \qquad (16.5.2)$$

(которые являются «главной частью» правой части (16.5.1)) в том же смысле, как многочлены $f_n(x)$, определенные в § 16.4, (2), связаны с функциями (16.4.5). Если $0 < r < 1$ и r достаточно близко к единице, то функция $G_n(x)$ регулярна при $|z| \geqslant r$. Мы опять имеем

$$|G_n(x) - F_n(x)| < Mr^n, \quad x \in C, \qquad (16.5.3)$$

где M зависит только от C, r и $w(x)$. Функции $G_n(x)$ равномерно ограничены на C.

Положим (см. § 16.4, (2))

$$\varrho(x) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \Delta_e(\infty)\, c^{n+\frac{1}{2}} F_n(x). \qquad (16.5.4)$$

Это π_n со старшим коэффициентом, равным единице. Отсюда вытекает неравенство

$$k_n^{-2} \leqslant \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{-1} \Delta_e^2(\infty)\, c^{2n+1} \frac{1}{L} \int_C |F_n(x)|^2 w(x)\,|dx| =$$

$$= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{-1} \Delta_e^2(\infty)\, c^{2n+1} \frac{1}{L} \int_C |G_n(x)|^2 w(x)\,|dx| + c^{2n} O(r^n) =$$

$$= \frac{2\pi}{L} \Delta_e^2(\infty)\, c^{2n+1} + c^{2n} O(r^n). \qquad (16.5.5)$$

(Теперь рассуждения проще, благодаря регулярности $\Delta_e(x)$ на кривой C.) С другой стороны,

$$1 = \frac{1}{L} \int_C |p_n(x)|^2 w(x)\,|\,|dx| = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left|\frac{p_n(x)}{G_n(x)}\right|^2 |dz| \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{x\to\infty} \left|\frac{p_n(x)}{G_n(x)}\right|^2 = \frac{2\pi}{L} \Delta_e^2(\infty)\, c^{2n+1} k_n^2, \qquad (16.5.6)$$

так что

$$k_n^{-2} \geqslant \frac{2\pi}{L} \Delta_e^2(\infty)\, c^{2n+1}; \qquad (16.5.7)$$

следовательно,

$$k_n^{-2} = \frac{2\pi}{L} \Delta_e^2(\infty)\, c^{2n+1} + c^{2n} O(r^n). \qquad (16.5.8)$$

(2) Пусть теперь

$$p_n(x) = \lambda_0 F_0(x) + \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \ldots + \lambda_n F_n(x), \tag{16.5.9}$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие постоянные, $\lambda_\nu = \lambda(\nu, n)$; мы имеем

$$\lambda_n = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta_e(\infty)\, c^{n+\frac{1}{2}} k_n, \tag{16.5.10}$$

так что λ_n вещественно и

$$\lambda_n = 1 + O(r^n). \tag{16.5.11}$$

Из определения $F_n(x)$ мы заключаем, что

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta_e(x)\{\Phi'(x)\}^{-\frac{1}{2}}\{p_n(x) - \lambda_n F_n(x)\} =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta_e(x)\{\Phi'(x)\}^{-\frac{1}{2}}\{\lambda_0 F_0(x) + \lambda_1 F_1(x) + \ldots + \lambda_{n-1} F_{n-1}(x)\} =$$

$$= \lambda_0 + \lambda_1 \Phi(x) + \lambda_2 \Phi^2(x) + \ldots + \lambda_{n-1}\Phi^{n-1}(x) + \gamma_1 x^{-1} + \gamma_2 x^{-2} + \ldots =$$

$$= \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \ldots + \lambda_{n-1} z^{n-1} + \gamma_1' z^{-1} + \gamma_2' z^{-2} + \ldots, \tag{16.5.12}$$

где γ_ν, γ_ν' — некоторые постоянные. Следовательно,

$$|\lambda_0|^2 + |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_{n-1}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi}{L}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} |\Delta_e(x)\{\Phi'(x)\}^{-\frac{1}{2}}\{p_n(x) - \lambda_n F_n(x)\}|^2 |dz| =$$

$$= \frac{1}{L}\int\limits_C |p_n(x) - \lambda_n F_n(x)|^2 w(x)\,|dx| = \frac{1}{L}\int\limits_C |p_n(x)|^2 w(x)\,|dx| -$$

$$- \frac{2\lambda_n}{L}\int\limits_C p_n(x)\overline{F_n(x)}\, w(x)\,|dx| + \frac{\lambda_n^2}{L}\int\limits_C |F_n(x)|^2 w(x)\,|dx|. \tag{16.5.13}$$

Во втором члене многочлен $F_n(x)$ может быть заменен на $\lambda_n^{-1} p_n$; в третьем члене мы используем (16.5.11) и (16.5.3) и получаем

$$|\lambda_0|^2 + |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_{n-1}|^2 \leqslant -1 + \frac{1}{L}\int\limits_C |G_n(x)|^2 w(x)\,|dx| + O(r^n), \tag{16.5.14}$$

т. е.

$$|\lambda_0|^2 + |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_{n-1}|^2 = O(r^n). \tag{16.5.15}$$

Но $F_n(x) = O(1)$ равномерно при $x \in C$. Отсюда благодаря неравенству Буняковского — Шварца вытекает, что

$$\lambda_0 F_0(x) + \lambda_1 F_1(x) + \ldots + \lambda_{n-1} F_{n-1}(x) = O(n^{\frac{1}{2}} r^{\frac{n}{2}}); \tag{16.5.16}$$

из (16.5.9), (16.5.11) и (16.5.3) следует, что

$$p_n(x) = \lambda_n F_n(x) + O(n^{\frac{1}{2}} r^{\frac{n}{2}}) = F_n(x) + O(n^{\frac{1}{2}} r^{\frac{n}{2}}) = G_n(x) + O(n^{\frac{1}{2}} r^{\frac{n}{2}}). \tag{16.5.17}$$

Этим утверждение доказано. Распространение формулы (16.5.1) внутрь C осуществляется непосредственно, так как неравенство (16.5.3) справедливо, когда x лежит внутри C и достаточно близко к C.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Обозначим через $i_1 < i_2 < \ldots$ положительные нули функции Эйри $A(x)$ (§ 1.81). Тогда $i_\nu \sim \nu^{\frac{2}{3}}$ при $\nu \to \infty$. (Применить (1.81.4), (1.81.1) и (1.71.7).)

2. Пусть $A(x)$ — функция Эйри (§ 1.81). Для вещественных значений x справедливо равенство

$$\Im\left\{e^{2\pi i/3}\int_0^\infty \exp(-\varrho^3-\varrho e^{2\pi i/3}x)\,d\varrho\right\}=A(x).$$

(Разложить обе части в ряд по степеням x; см. (1.81.4), (1.81.1) и (1.7.3).)

3. Пусть $p_n(x)$ — многочлен Пуассона — Шарлье (2.81.2); тогда многочлен

$$(-1)^n a^{-n/2}(n!)^{\frac{1}{2}}\,p_n(x)=\boldsymbol{p}_n(x)$$

удовлетворяет при $x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ соотношению

$$\boldsymbol{p}_n(x)=\boldsymbol{p}_x(n).$$

4. Если мы примем обозначения (2.2.1) и (2.2.7), то «ядро» $K_n(x_0, x)$ (см. (3.1.9)) может быть представлено в виде

$$K_n(x_0,\ x)=-D_n^{-1}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n & 1\\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} & \bar{x}_0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \ldots & c_{2n} & \bar{x}_0^n\\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^n & 0\end{vmatrix}.$$

(Применить (3.1.12), полагая $\varrho(x)=x^\nu$, $\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n$.)

5. *Расположение нулей «ядра»* $K_n(x_0,\ x)$ (см. (3.1.9)). Пусть a и b конечны и пусть x_0 — произвольное мнимое число. Всякий нуль ξ многочлена $K_n(x_0,\ x)$ лежит в области, ограниченной отрезком $[a,\ b]$ и дугой окружности, проходящей через точки a и b, продолжение которой проходит через точку x_0. (См. Сегё [5], стр. 244. В силу (3.1.12) имеем

$$\int_a^b\left|(x-x_0)\frac{K_n(x_0,\ x)}{x-\xi}\right|^2\frac{x-\xi}{x-x_0}\,d\alpha(x)=0.$$

При конформном отображении $(x-\xi)/(x-x_0)=x'$ образом отрезка $a\leqslant x\leqslant b$ будет дуга окружности; отрезок, ограниченный этой дугой и ее хордой, содержит точку $x'=0$.)

6. Вывести из (3.2.1) при $n = 1, 2, \ldots$ представление:

$$p_n(x) = p_0(x) \begin{vmatrix} A_1x + B_1 & C_2^{\frac{1}{2}} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ C_2^{\frac{1}{2}} & A_2x + B_2 & C_3^{\frac{1}{2}} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & C_3^{\frac{1}{2}} & A_3x + B_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C_n^{\frac{1}{2}} & A_nx + B_n \end{vmatrix}.$$

7. Доказать вещественность нулей $p_n(x)$, применяя (2.2.9) или задачу 6.

8. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные точки отрезка $[a, b]$ и пусть $f(x)$ имеет производную порядка $2n$ на $[a, b]$. Если $H(x)$ есть π_{2n-1}, удовлетворяющий условиям

$$H(x_\nu) = f(x_\nu), \quad H'(x_\nu) = f'(x_\nu), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

то на $[a, b]$ существует такая точка $\xi = \xi(x)$, что

$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \ldots (x - x_n)^2.$$

(См. А. А. Марков [5], часть I, глава I, § 3. Пусть x — фиксированная точка, $x \neq x_\nu$. К функции переменной z

$$f(z) - H(z) - \frac{f(x) - H(x)}{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \ldots (x - x_n)^2}(z - x_1)^2 (z - x_2)^2 \ldots (z - x_n)^2$$

применить теорему Ролля.)

9. Пусть $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $2n$ на $[a, b]$. Используя теорему 3.4.1, получим формулу

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} k_n^{-2}.$$

Здесь ξ — некоторая точка отрезка $[a, b]$, а k_n — старший коэффициент ортонормального многочлена $p_n(x)$, ассоциированного с распределением $d\alpha(x)$ (см. (2.2.15)). (См. А. А. Марков [5], часть I, глава VII, § 19. Применить предыдущую задачу.)

10. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — нули ортогонального многочлена $p_n(x)$, ассоциированного с данным распределением $d\alpha(x)$ на отрезке $[a, b]$, и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — коэффициенты Кристоффеля (3.4.3). Определим скалярное произведение двух функций $f(x)$, $g(x)$ соотношением

$$(f, g) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu) g(x_\nu).$$

Функции $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ линейно независимы; ортогонализуя эту систему, мы получим многочлены $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$, которые совпадают с ортогональными многочленами, ассоциированными с распределением $d\alpha(x)$.

11. Если $d\alpha(x) = w(x)\,dx$, $w(-x) = w(x)$ и $a + b = 0$, то коэффициенты Кристоффеля (3.4.3) удовлетворяют равенству

$$\lambda_\nu = \lambda_{n+1-\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

12. Для многочленов Якоби $P_n^{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x)$ коэффициенты Кристоффеля равны

$$\lambda_\nu = \frac{2\pi}{2n+1}(1+x_\nu), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

(см. (4.1.8) и (15.3.1)).

13. В частном случае $P_n^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x)$ числа $y_\nu = \cos\varphi_\nu$, $0 < \varphi_\nu < \pi$, фигурирующие в теореме о взаимном разделении § 3.41, определяются равенством

$$\varphi_\nu = (n-\nu)\pi/n, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Проверить справедливость теоремы о взаимном разделении для многочленов

$$P_n^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x), \quad P_n^{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x), \quad P_n^{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x).$$

14. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нули многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Тогда

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (\beta - \alpha)\frac{n}{2n+\alpha+\beta}$$

(см. (4.21.2)).

15. *Новое доказательство формулы* (4.7.31). Комбинируя правую часть (4.1.5) (многочлены по степеням $1-2x^2$) с первой формулой (4.22.1), мы находим

$$P_n^{(\lambda)}(x) = 2^n \binom{n+\lambda-1}{n} x^n F(-n/2, (1-n)/2, -n-\lambda+1; x^{-2}).$$

16. Производящие функции (4.7.16) и (4.7.23) для ультрасферических многочленов тождественны тогда и только тогда, когда $\lambda = 1/2$, иными словами, в случае многочленов Лежандра.

17. Функциональное уравнение

$$(1-x) f'(x) = \lambda f(-x),$$

где λ — параметр, имеет решение в виде многочлена $f(x) \not\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda = (-1)^n (n+1)$, а $f(x) = \text{const.}\{P_n(x) + P_{n+1}(x)\}$, $n = -1, 0, 1, \ldots$; $P_{-1}(x) = 0$. (Положить

$$f(x) = \sum_{\nu=-1}^{N} c_\nu \{P_\nu(x) + P_{\nu+1}(x)\},$$

где $c_{-1}, c_0, \ldots, c_N$ — постоянные, и применить тождество

$$(1-x)\{P_n'(x) + P_{n+1}'(x)\} = (n+1)\{P_n(x) - P_{n+1}(x)\},$$

которое вытекает из (4.7.27).)

18. Показать, что

$$Q_n'(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2\cdot 4 \ldots n}{1\cdot 3 \ldots (n-1)}, \quad n \text{ — четное},$$

$$Q_n(0) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2\cdot 4 \ldots (n-1)}{3\cdot 5 \ldots n}, \quad n \text{ — нечетное}.$$

Здесь $Q_0'(0) = 1$, $Q_1(0) = -1$. (Применить рекуррентные формулы (4.62.13), (4.62.14), (4.62.3).)

19. Преобразование Лапласа

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

функции Лагерра $F(t)=t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t)$ равно

$$f(s)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}\,s^{-n-\alpha-1}(s-1)^n.$$

(См. Сонин [1]. Применить метод производящих функций.)

20. Если мы положим

$$x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)(\Gamma(n+\alpha+1))^{-1}=f(n,\ \alpha;\ x),$$

то при $\alpha>\beta>-1$ будем иметь

$$f(n,\ \alpha;\ x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^x (x-u)^{\alpha-\beta-1} f(n,\ \beta;\ u)\,du.$$

(См. Когбетлянц [22], стр. 156. Рассмотреть производящую функцию для обеих частей и применить (5.1.16); полученную формулу для функций Бесселя можно проверить с помощью (1.71.1) и (1.7.5).)

21. Если мы положим $e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(x)=f(x)$, то будем иметь

$$f_n(x)=\frac{(-1)^n}{2}\int_0^\infty J_\alpha\left[(xy)^{\frac{1}{2}}\right]f_n(y)\,dy.$$

(См. Харди [1], стр. 139. Применить (5.1.9) и (1.71.1).)

22. Пусть $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $\max(x,\ y)>0$; тогда

$$e^{-x-y}\sum_{n=0}^\infty \frac{L_n(x)\,L_n(y)}{n+1}=\int_{\max(x,\,y)}^\infty t^{-1}e^{-t}\,dt.$$

(См. Е. Р. Нейман [1], Ватсон [6]. Применить теорему 9.1.5 и воспользоваться формулой

$$(n+1)\int_0^x L_n(t)\,dt=x\{L_n(x)-L_n'(x)\}.$$

См. (5.1.2).)

23. Из (5.1.15) вывести формулу Мелера

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{H_n(x)\,H_n(y)}{n!}\left(\frac{w}{2}\right)^n=(1-w^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\frac{2xyw-(x^2+y^2)\,w^2}{1-w^2}.$$

(См. Ватсон [5], Эрдейи [2]).

24. Из (5.1.9) и (5.6.1) вывести следующую производящую функцию для многочленов Эрмита:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{H_n(x)}{m!}w^n=(1+4w^2)^{-\frac{3}{2}}(1+2xw+4w^2)\exp\left(\frac{4x^2w^2}{1+4w^2}\right),$$

где $m=[n/2]$. (См. Дёч [1], стр. 590, (7)).

25. Пусть $k>-1/2$ и пусть $H_n^{(k)}(x)$ — ортогональные многочлены, соответствующие весу $e^{-x^2}|x|^{2k}$ на $(-\infty,\ +\infty)$. Справедливы следующие

дифференциальные уравнения:

$$xy'' + 2(k - x^2)y' + (2nx - \varepsilon x^{-1})y = 0, \quad \varepsilon = \begin{cases} 0, & n \text{ четно} \\ 2k, & n \text{ нечетно}, \end{cases} \quad y = H_n^{(k)}(x);$$

$$z'' + \left\{2n + 2k + 1 - x^2 + \frac{(-1)^n k - k^2}{x^2}\right\} z = 0, \quad z = e^{-\frac{x^2}{2}} x^k H_n^{(k)}(x).$$

(Обобщения уравнений (5.5.2).)

26. При фиксированных значениях β, n и x имеем

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{-n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n.$$

(Применить (4.21.2).)

27. Пусть $\{x_\nu\}$ — нули многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, записанные в убывающем порядке; $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Тогда при $\nu = 1, 2, \ldots, n$ справедливы равенства

$$\lim_{\alpha \to +\infty} x_\nu = -1, \quad \lim_{\beta \to +\infty} x_\nu = +1.$$

В первом случае фиксированы β и n, а во втором соответственно α и n. (Применить задачу 26 и формулу (4.1.3).)

28. Пусть $\{x_\nu\}$ — нули многочлена $P_n^{(\lambda)}(x)$, $\lambda > 0$. При фиксированном n мы имеем

$$\lim_{\lambda \to +\infty} x_\nu = 0.$$

(Из (4.7.6) следует, что $\lim\limits_{\lambda \to \infty} (2\lambda)^{-n} P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{x^n}{n!}$; см. также (5.6.3).)

29. Допустим $\alpha > -1$, $\beta > -1$; если $\{x_\nu\}$ — нули многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, записанные в убывающем порядке, а $\{x'_\nu\}$ — нули многочлена $L_n^{(\alpha)}(x)$, записанные в возрастающем порядке, то при фиксированных α, n и ν мы имеем

$$\lim_{\beta \to +\infty} \beta(1 - x_\nu) = 2x'_\nu.$$

(Применить (5.3.4).)

30. При фиксированных n и x имеем

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{-n} L_n^{(\alpha)}(\alpha x) = \frac{(1-x)^n}{n!}.$$

(Применить (5.1.6).)

31. Пусть $j_0 = 0 < j_1 < j_2 < \ldots$ — положительные нули функции Бесселя $J_\alpha(x)$. Тогда при $-\frac{1}{2} < \alpha < +\frac{1}{2}$ $\{j_\nu\}$ — выпуклая последовательность, т. е. $j_{\nu+1} - j_\nu$ возрастает. Кроме того, последовательность $\nu^{-1} j_\nu$ возрастает. (Применить теорему 1.82.2 к (1.8.9).)

32. При допущениях и обозначениях задачи 31 справедливо неравенство

$$j_\nu > \left(\nu + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

(Положить $n = 2\nu - 1$ в (6.3.13).)

33. Для множителя $C_{\nu n}$, фигурирующего в (6.31.13), справедливы оценки

$$(j_1/4)^2 < C_{\nu n} < 4,$$

где j_1 — наименьший положительный нуль функции $J_0(x)$. Эти границы улучшены быть не могут. (Использовать монотонное возрастание последовательности $\nu^{-1}j_\nu$; см. задачу 31.)

34. Допустим, что $\alpha > -1$, и обозначим через $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ нули многочлена $L_n^{(\alpha)}(x)$. Если $\alpha^2 \leqslant 1/4$, то последовательность $x_\nu^{\frac{1}{2}} - x_{\nu-1}^{\frac{1}{2}}$ $(\nu = 2, 3, \ldots, n)$ возрастающая; если $\alpha^2 > 1/4$, то это верно при $x_{\nu-1} > (\alpha^2 - 1/4)^{1/2}$. (Применить теорему 1.82.2 к четвертому из уравнений в (5.1.2).)

35. Сохраняя обозначения предыдущей задачи, доказать, что

$$\min (x_\nu^{\frac{1}{2}} - x_{\nu-1}^{\frac{1}{2}}) \sim n^{-\frac{1}{2}},$$

$$\max (x_\nu^{\frac{1}{2}} - x_{\nu-1}^{\frac{1}{2}}) = x_n^{\frac{1}{2}} - x_{n-1}^{\frac{1}{2}} \cong 2^{-\frac{2}{3}} 3^{-\frac{1}{3}} (i_2 - i_1) n^{-\frac{1}{6}}, \quad n \to \infty,$$

где i_1 и i_2 — наименьшие положительные нули функции Эйри $A(x)$. (Применить (8.1.8), (8.22.1) и (8.9.15).)

36. Пусть $x_1 > x_2 > \ldots > x_{[(n+1)/2]}$ — неотрицательные нули многочлена Эрмита $H_n(x)$. Положим

$$x_\nu = x_{\nu n} = h_n - (6h_n)^{-\frac{1}{3}} t_{\nu n}, \quad h_n = (2n+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда при фиксированном ν и возрастающем n числа $t_{\nu n}$ убывают. Кроме того, показать, что при $1 \leqslant \nu \leqslant (n+1)/2$

$$x_{\nu n} = h_n - \nu^{\frac{2}{3}} n^{-\frac{1}{6}} \varrho_{\nu n},$$

где $P < \varrho_{\nu n} < Q$, P и Q — абсолютные положительные константы. (Полагая в (6.32.10) $\xi = (6h_n)^{-\frac{1}{3}} t$, мы имеем

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left\{ \frac{t}{3} - (6h_n)^{-\frac{4}{3}} t^2 z \right\} = 0.$$

Монотонность $t_{\nu n}$ вытекает из теоремы 1.82.1. Кроме того (см. (6.32.3)),

$$i_\nu < t_{\nu n} \leqslant t_{\nu,\, 2\nu-1} = 6^{\frac{1}{3}} h_{2\nu-1}^{\frac{4}{3}}.$$

Затем применить задачу 1.)

37. Рассмотрим n единичных масс, $n \geqslant 2$, сосредоточенных в n переменных точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на отрезке $[-1, +1]$. При каком расположении этих точек выражение

$$\prod_{\substack{\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n \\ \nu < \mu}} |x_\nu - x_\mu|$$

достигает максимума? (См. Стилтьес [4], стр. 441; максимальное распределение этих точек такое же, как в теореме 6.7.1, если заменить n на $n-2$ и принять $p = q = 1$. Мы имеем $(1 - x^2) P_{n-2}^{(1,1)}(x) = \mathrm{const.} \{P_n(x) - P_{n-2}(x)\} = \mathrm{const.} (1 - x^2) P'_{n-1}(x)$; см. (4.7.27).)

38. Рассмотрим n единичных масс, $n \geqslant 2$, сосредоточенных в n точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на полуоси $[0, \infty)$ таким образом, что

$$n^{-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \leqslant K,$$

где K — фиксированное положительное число. При каком распределении этих точек выражение

$$\prod_{\substack{\nu, \mu=1, 2, \ldots, n \\ \nu<\mu}} |x_\nu - x_\mu|$$

достигает максимума? (См. задачу 37 и теорему 6.7.2. Мы имеем $xL_{n-1}^{(1)}(x) = \text{const.}\{L_n(x) - L_{n-1}(x)\} = \text{const.}\, xL_n'(x)$; см. (5.1.14).)

39. Допустим $\alpha > -1$, $\beta > -1$. В обозначениях (7.32.2) при $n \to \infty$ мы имеем

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant +1} |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| \cong \begin{cases} [\Gamma(q+1)]^{-1} n^q, & \text{если } q \geqslant -\frac{1}{2}, \\ \pi^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \left|\alpha + \frac{1}{2}\right|^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \left|\beta + \frac{1}{2}\right|^{-\frac{\beta}{2} - \frac{1}{4}} |\alpha + \beta + 1|^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}}, & \\ \qquad\qquad \text{если } -1 < q \leqslant -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

(См. (7.32.2)).

40. Из (7.33.10) вывести соотношение

$$P_n(\cos\theta) - P_{n+1}(\cos\theta) = \theta^{\frac{1}{2}} O(n^{-\frac{1}{2}}), \quad 0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

(Применить тождество

$$(1-x)\{P_n'(x) + P_{n+1}'(x)\} = (n+1)\{P_n(x) - P_{n+1}(x)\}$$

(см. задачу 17 и (7.33.9).)

41. При $0 < \theta < \pi$ справедлива оценка

$$(\sin\theta)^{\frac{1}{2}} |Q_n(\cos\theta)| < \{\pi/(2n)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Константа $(\pi/2)^{\frac{1}{2}}$ не может быть заменена меньшей. (См. Гобсон [1], где получена оценка $(\pi/n)^{\frac{1}{2}}$; сравнить с теоремой 7.3.3 и задачей 18.)

42. Пусть $f(x)$ — произвольный π_n, неотрицательный при всех вещественных x, и пусть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx = 1.$$

Тогда

$$\max f(0) = \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{3 \cdot 5 \ldots (2m+1)}{2 \cdot 4 \ldots 2m} \cong \pi^{-1} n^{\frac{1}{2}}, \quad m = \left[\frac{n}{4}\right], \quad n \to \infty.$$

(Применить теорему 1.21.1, (7.71.2), (5.5.9) и (5.5.5).)

43. *Теорема о среднем значении для многочленов.* Пусть $f(x)$ есть π_{2n}. Тогда

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi),$$

где ξ — некоторая точка отрезка

$$\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a)x_1 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)x_1.$$

Здесь через x_1 обозначен наибольший нуль многочлена Лежандра $P_n(x)$. (См. Чакалов [1]. Применить (3.4.1).)

44. Вывести формулу Липшица

$$\int_0^\infty e^{-at} J_0(bt)\,dt = (a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad a>0,\ b>0,$$

из производящей функции для многочленов Лежандра, т. е. из (4.7.23) при $\lambda = 1/2$. (Положить $w = e^{-a/N}$, $x = \cos(b/N)$, a и b фиксированы, $N \to \infty$; разбить ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} P_m(x) w^m$ на две части $m \leqslant \omega N$ и $m > \omega N$ (ω — фиксированное положительное число) и применить (8.1.1) и (7.3.8).)

45. Вывести (5.4.2) из (5.1.9), полагая $x = a/N$, $w = e^{-b/N}$; a и b фиксированы, $b > 0$, $N \to +\infty$. (См. задачу 44. Применить (8.1.8) и (7.6.8).)

46. *Новое доказательство асимптотической формулы* (8.22.4) *типа формулы Хильба для многочленов Лагерра.* Из производящей функции (5.1.9) мы получаем

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{(1-)} \exp\left\{-\frac{x}{2}\frac{1+w}{1-w}\right\}(1-w)^{-\alpha-1} w^{-n-1}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp\left\{-\frac{x}{2}\frac{1+e^{-z}}{1-e^{-z}}\right\}(1-e^{-z})^{-\alpha-1} e^{nz}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{nz - z^{-1}x} z^{-\alpha-1}\,\Phi(x, z)\,dz,$$

где $\Phi(x, z)$ — регулярная функция в круге $|z| < 2\pi$. Если мы разложим $\Phi(x, z)$ в ряд по степеням z, то полученные при этом интегралы могут быть выражены через функции Бесселя (см. Ватсон [3], стр. 176, (1)). (Это рассуждение дает не только доказательство формулы (8.22.4) для произвольного вещественного α, но дает также асимптотическое разложение, аналогичное разложению Хильба, членами которого являются функции Бесселя; см. Райт [1]. Приведенные соображения аналогичны рассуждениям Сегё [15] для многочленов Лежандра.)

47. Пусть a — вещественное число, отличное от нуля. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\lambda} e^{ia\sqrt{n}}$$

сходится при $\lambda > 1/2$ и расходится при $\lambda \leqslant 1/2$ (при $\lambda > 0$ сходимость ряда эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_1^\infty x^{-\lambda} e^{ia\sqrt{x}}\,dx$).

48. Многочлены $s_n(a, z)$ (см. (11.3.3)) в обозначениях § 11.1 могут быть представлены следующим образом:

$$s_n(a, z) = -D_n^{-1} \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1} & c_{-n} & 1 \\ c_1 & c_0 & \ldots & c_{-n+2} & c_{-n+1} & \bar{a} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n-1} & \ldots & c_1 & c_0 & \bar{a}^n \\ 1 & z & \ldots & z^{n-1} & z^n & 0 \end{vmatrix}$$

(см. задачу 4).

49. *Второе доказательство теоремы* 11.4.1 *о нулях* $s_n(a, z)$. Применить рассуждения задачи 5. (Если z_0 — рассматриваемый нуль и $(z-z_0)/(z-a) = z'$, то образ окружности $|z| = 1$ содержит точку $z' = 0$.)

50. Теорема 11.3.3 о сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\varphi_n(z)|^2$, $|z|<1$, не имеет места, если весовая функция $f(\theta)$ такова, что функция $\ln f(\theta)$ неинтегрируема в смысле Лебега. (Положить $f(\theta)=0$ при $-\varepsilon<\theta<+\varepsilon$, $f(\theta)=1$ при $\varepsilon\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\varepsilon$ и применить (16.4.2). В этом случае $|\varphi_n(0)|^{\frac{1}{n}}\to R$, $R>1$.)

51. Пусть $f(\theta)$ — такая весовая функция на единичной окружности $-\pi\leqslant\theta\leqslant+\pi$, для которой существует интеграл

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\ln f(\theta)\,d\theta.$$

Допустим, что $p>0$, и обозначим через $\mu_n=\mu_n(f;\,p)$ минимум интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}f(\theta)\,|\varrho(z)|^p\,d\theta,\quad z=e^{i\theta},$$

где $\varrho(z)=z^n+\ldots$ есть π_n со старшим коэффициентом, равным единице. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(f;\,p)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\ln f(\theta)\,d\theta\right\}=\mathfrak{G}(f).$$

(Это обобщает (12.3.3); см. рассуждения, использованные в § 12.3, (2).)

52. Пусть k_{n0} — старший коэффициент ортонормального многочлена $p_n(x)$, ассоциированного с распределением $d\alpha(x)$ на конечном отрезке $[a,\,b]$. Тогда

$$k_{n0}>2^{2n-1}(b-a)^{-n}\left\{\int\limits_a^b d\alpha(x)\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

(См. теорему 12.7.1; Шохат [2], стр. 575, (24). Использовать экстремальное свойство, выраженное теоремой 3.1.2, выбрав

$$\varrho(x)=2^{1-2n}(b-a)^nT_n\{2(x-a)/(b-a)-1\}.)$$

53. Сохраним обозначения, принятые в задаче 52. Пусть $[a',\,b']$ — такой отрезок, лежащий внутри отрезка $[a,\,b]$, что $\alpha(x)$ постоянна на $[a',\,b']$. Тогда существуют две такие положительные постоянные A и B, $B>4/(b-a)$, что $k_{n0}>AB^n$. (См. Шохат [2], стр. 577. Применить экстремальное свойство, выраженное теоремой 3.1.2 и выбрать в качестве $\varrho(x)$ «чебышевский» в смысле § 16.2, (5) многочлен, соответствующий двум непересекающимся отрезкам.)

54. Применяя обозначения § 12.7 при допущениях теоремы 12.7.1, мы имеем

$$k_{n\nu}\cong\begin{cases}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{(-1)^{\frac{\nu}{2}}}{(\nu/2)!}\,2^{n-\nu}n^{\frac{\nu}{2}}d_0^{-1}, & \nu\ \text{четно},\\[2ex] (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{(-1)^{\frac{\nu+1}{2}}}{[(\nu-1)/2]!}\,2^{n-\nu}n^{\frac{\nu-1}{2}}d_0^{-2}d_1, & \nu\ \text{нечетно}.\end{cases}$$

Здесь ν фиксировано, $n\to\infty$. Если $d_1=0$, то вторая формула понимается в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty}2^{-n}n^{\frac{1-\nu}{2}}k_{n\nu}=0.$$

(Частный случай см. Шохат [2], стр. 577. Применить теорему 12.1.2, учитывая, что если положить

$$2^{-n}\{1+(1-x^{-2})^{\frac{1}{2}}\}^n=1+\gamma_{n1}x^{-2}+\gamma_{n2}x^{-4}+\ldots,$$

то $\gamma_{n\nu}\cong(2^{2\nu}\nu!)^{-1}(-n)^{\nu}$, ν фиксировано, $n\to\infty$.)

55. В случае многочленов Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=l_{n0}^{(\alpha,\beta)}x^n+l_{n1}^{(\alpha,\beta)}x^{n-1}+\ldots$$

при фиксированном ν и $n\to\infty$ мы имеем

$$l_{n\nu}\cong\begin{cases}\pi^{-\frac{1}{2}}\dfrac{(-1)^{\frac{\nu}{2}}}{\left(\frac{\nu}{2}\right)!}2^{n-\nu+\alpha+\beta}n^{\frac{\nu-1}{2}}, & \nu \text{ четно},\\[2ex] (\alpha-\beta)\pi^{-\frac{1}{2}}\dfrac{(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}}{[(\nu-1)/2]!}2^{n-\nu+\alpha+\beta}n^{\frac{\nu}{2}-1}, & \nu \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Во втором случае предполагается, что $\alpha\neq\beta$. (См. Я. Л. Геронимус [1], стр. 380. Применить результат задачи 54; в нашем случае мы имеем

$$d_0=2^{\frac{-(\alpha+\beta+1)}{2}},\quad d_1=(\beta-\alpha)\,2^{\frac{-(\alpha+\beta+1)}{2}}.)$$

56. При обозначениях и допущениях задачи 54 мы имеем

$$\frac{k_{n2}}{k_{n0}}=-\frac{n}{4}+c+\varepsilon_n,\quad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0,$$

где c — константа. (См. Шохат [2], стр. 577. Применить те же рассуждения, что и в задаче 54.)

57. Пусть $l_\nu(x)$ ($\nu=1, 2, \ldots, n$) — фундаментальные многочлены интерполирования по способу Лагранжа с узлами в нулях $T_n(x)$. Тогда при четном k справедливо равенство

$$\int_{-1}^{+1}l_{\nu_1}(x)\,l_{\nu_2}(x)\ldots l_{\nu_k}(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx=0.$$

Здесь $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ — различные целые числа отрезка $[1, n]$. (См. Фельдгейм [1], $\{T_n(x)\}^{k-1}$, $x=\cos\theta$, является косинус-многочленом, не содержащим слагаемых с $\cos\nu\theta$ при $\nu<n$.)

58. В случае ультрасферических многочленов $\alpha=\beta$, $-1<\alpha=\beta<0$ мы имеем при $-1\leqslant x\leqslant+1$ (обозначения такие же, как и в задаче 57)

$$l_1^2(x)+l_2^2(x)+\ldots+l_n^2(x)\leqslant|\alpha|^{-1}.$$

(При $\alpha=-1/2$ см. Фейер [13], стр. 5. Применить задачу 59 и первое из тождеств (14.1.11).)

59. В случае ультрасферических многочленов $\alpha=\beta>-1$ мы имеем (см. (14.5.2))

$$v_\nu(x)=\frac{1-2(\alpha+1)xx_\nu+(2\alpha+1)x_\nu^2}{1-x_\nu^2}\geqslant-\alpha,\quad -1\leqslant x\leqslant+1.$$

60. В случае многочленов Лежандра мы имеем

$$v_\nu(x)\geqslant\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{4(2n+1)},\quad -1\leqslant x\leqslant+1.$$

(См. Фейер [13], стр. 23. Применить (6.6.5).)

61. Доказать следующие тождества:

$$P'_{2n}(x) = (2n+1)\, x P_{n-1}^{\left(1,\frac{1}{2}\right)}(2x^2-1),$$

$$xP'_n(x) = nP_n(x) + (2n-3)\,P_{n-2}(x) + (2n-7)\,P_{n-4}(x) + \ldots,$$

$$(1-x^2)\,P''_n(x) = -n(n-1)\,P_n(x) + 2(2n-3)\,P_{n-2}(x) + 2(2n-7)\,P_{n-4}(x) + \ldots$$

62. Доказать, что

$$P_n^{(1)}(x) = U_n(x),$$

$$P_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x) = \begin{cases} -x & \text{при} \quad n=1, \\ \displaystyle\int_x^1 P_{n-1}(t)\,dt & \text{при} \quad n \geqslant 2. \end{cases}$$

63. Доказать формулу

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\, x^{n+2\nu}\, dx = \frac{1}{2^n} \frac{(n+2\nu)!}{(2\nu)!} \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\nu+\frac{3}{2}\right)}, \quad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

64. Доказать тождество

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = i^{-n} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda).$$

(Применить задачу 63 и (1.71.1).)

65. Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = \begin{cases} (2\pi)^{\frac{1}{2}} i^n P_n(x) & \text{при} \quad -1 < x < 1, \\ 0 & \text{при } x > 1 \text{ или } x < -1. \end{cases}$$

(Использовать задачу 64, применяя формулу обращения Фурье.)

66. Доказать тождество

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{P_\nu^{(\lambda)}(x)}{P_\nu^{(\lambda)}(1)}\, y^{n-\nu} = (1+2xy+y^2)^{\frac{n}{2}} \frac{P_n^{(\lambda)}\{(1+2xy+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x+y)\}}{P_n^{(\lambda)}(1)}$$

и, в частности, тождество

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} P_\nu(x)\, y^{n-\nu} = (1+2xy+y^2)^{\frac{n}{2}}\, P_n\{(1+2xy+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x+y)\}.$$

(Применить (4.7.23).)

67. Доказать тождество

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{L_\nu^{(\alpha)}(x)}{L_\nu^{(\alpha)}(0)}\, y^{n-\nu} = (y+1)^n \frac{L_n^{(\alpha)}\{(y+1)^{-1}x\}}{L_n^{(\alpha)}(0)}.$$

(Применить (5.1.9).)

68. Доказать тождество

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} H_\nu(x)\,(2y)^{n-\nu} = H_n(x+y).$$

(Применить (5.5.7).)

69. Пусть x — параметр, $-1<x<1$. Доказать, что все нули многочлена относительно z

$$P_0(x)+\binom{n}{1}P_1(x)z+\binom{n}{2}P_2(x)z^2+\ldots+P_n(x)z^n$$

вещественны. (Применить задачу 66.)

70. Доказать неравенство Турана

$$P_n^2(x)-P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)\geqslant 0, \qquad -1\leqslant x\leqslant +1$$

(см. Туран [1]; см. также Сегё [22]). Если a_1 и a_2 означают первую и вторую элементарные симметрические функции от n вещественных чисел, то мы имеем

$$\left(\frac{a_1}{n}\right)^2\geqslant\frac{a_2}{\binom{n}{2}}.$$

(Применить задачу 69.)

71. Вывести из задачи 66 производящую функцию (4.10.6) и, в частности, (4.10.7). (Положить $y=\frac{n}{z}$, $n\to\infty$; применить (8.1.1).)

72. Вывести из задачи 67 производящую функцию (5.1.16). (Положить $y=\frac{n}{z}$, $n\to\infty$; применить (8.1.8).)

73. Доказать следующую формулу, аналогичную формуле Родрига:

$$e^{-x}x^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+1}\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-\frac{1}{t}}t^{-\alpha-1}\right), \qquad xt=1.$$

(Использовать формулу Тейлора и производящую функцию (5.1.9). В частном случае $\alpha=0$ эта формула принадлежит Полиа, 1941.)

74. Пусть даны две последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Каждое из двух следующих соотношений влечет за собой другое:

$$u_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-\nu}(-1)^{\nu}v_{\nu}, \qquad v_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-\nu}(-1)^{\nu}u_{\nu}.$$

75. Применяя задачу 74 и формулу (5.1.6), доказать, что

$$\frac{x^n}{n!}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-\nu}(-1)^{\nu}L_{\nu}^{(\alpha)}(x).$$

76. Пусть даны две последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Каждое из двух следующих соотношений влечет за собой другое:

$$u_n=\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}v_{n-2\nu}, \qquad v_n=\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}u_{n-2\nu}.$$

77. Доказать тождество

$$\frac{(2x)^n}{n!}=\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{\nu!}\frac{H_{n-2\nu}(x)}{(n-2\nu)!}.$$

(Применить задачу 76 и формулу (5.5.4).)

78. Доказать следующие тождества:

$$y'' + 2xy' + 2(n+1)y = 0, \quad y = e^{-x^2}H_n(x),$$

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 6^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{12}\right)^{\nu} \frac{H_{2\nu+1}(x)}{(2\nu+1)\,\nu!}.$$

79. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{y}{n}\right)^n H_n\left(\frac{n}{2y}\right) = e^{-y^2}.$$

(Применить (5.5.4). См. Туран, Matematikai Lapok, 5 (1954), 134—137.)

80. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-\frac{n}{2}} L_n^{(\alpha)}(\alpha^{\frac{1}{2}}x + \alpha) = (-1)^n 2^{-\frac{n}{2}} (n!)^{-1} H_n(2^{-\frac{1}{2}}x).$$

81. Пусть $\{p_m(x)\}$ — ортонормальные многочлены, ассоциированные с распределением $d\alpha(x)$ на полуоси $0 \leqslant x < +\infty$. Если мы обозначим через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ некоторые нули многочлена $p_m(x)$, то будем иметь

$$f(t) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \{(\xi_1 - x)\ldots(\xi_k - x)\}^{-1} p_m^2(x)\,d\alpha(x) > 0, \quad t > 0.$$

(См. Карлин и Мак-Грегор [1], стр. 507—509. Так как $f(0)=0$, то мы имеем

$$e^{-\xi_k t} \frac{d}{dt} e^{\xi_k t} f(t) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \{(\xi_1 - x)\ldots(\xi_{k-1} - x)\}^{-1} p_m^2(x)\,d\alpha(x) = \varphi(t),$$

$$f(t) = e^{-\xi_k t} \int_0^t e^{\xi_k \tau} \varphi(\tau)\,d\tau.$$

Затем применить индукцию.)

82. Сохраним обозначения и допущения задачи 81 и положим, кроме того, $p_m(0) > 0$ при всех m. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} p_m(x)\,p_n(x)\,d\alpha(x) > 0, \quad t > 0.$$

(См. Карлин и Мак-Грегор [1], цитированное место. Пусть $m > n$. Представить $p_n(x)$ по интерполяционной формуле Лагранжа с узлами $\xi_{\mu_1}, \ldots, \xi_{\mu_{n+1}}$, выбранными, как в § 3.3, (6); применить задачу 81.)

83. Пусть $\{p_n(x)\}$ — многочлены Пуассона — Шарлье (§ 2.81, $\operatorname{sign} p_n(0) = (-1)^n$). Пусть далее $\lambda > 0$, $m \geqslant n$, $j(x)$ — функция, определенная равенством (2.81.1), тогда

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda x} j(x)\,p_n(x)\,p_m(x) =$$

$$= \exp\left[a(e^{-\lambda} - 1)\right] a^{\frac{n+m}{2}} \left(\frac{m!}{n!}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (e^{-\lambda} - 1)^{n+m-2\nu} \frac{(ae^{\lambda})^{-\nu}}{(m-\nu)!}.$$

84. Пусть $\lambda > -\frac{1}{2}$, $\lambda \neq 0$. Если мы применим обозначение (4.9.21), то будем иметь

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_l^{(\lambda)}(x)\, P_m^{(\lambda)}(x)\, P_n^{(\lambda)}(x)\, dx =$$

$$= \frac{\alpha_{s-l}\alpha_{s-m}\alpha_{s-n}}{\alpha_s} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \{P_s^{(\lambda)}(x)\}^2\, dx,$$

если только $l+m+n=2s$ четно и существует треугольник со сторонами l, m, n. Во всяком другом случае интеграл в левой части равен нулю (см. (4.7.15); см. Хсю [1]).

ДОБАВЛЕНИЕ

ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В недавних работах Поллачек [1]—[4] ввел некоторые замечательные обобщения многочленов Лежандра и других классических многочленов. В сжатом виде его результаты будут приведены в этом добавлении. Поведение многочленов Поллачека во многих отношениях имеет особый характер. Кратко эти вопросы излагаются в монографии Бэйтман [1], том 2, стр. 218—221. См. также Сегё [24].

1. Определения и формальные свойства

Пусть a и b — вещественные параметры, причем $a > |b|$. Положим

$$h(\theta) = \frac{a\cos\theta + b}{2\sin\theta} \tag{1.1}$$

и определим многочлены $P_n(x;\ a,\ b) = k_n x^n + \ldots$ с помощью производящей функции

$$f(x, w) = f(\cos\theta, w) = \sum_{n=0}^{\infty} = P_n(x;\ a,\ b)\, w^n =$$
$$= (1 - we^{i\theta})^{-\frac{1}{2} + ih(\theta)} (1 - we^{-i\theta})^{-\frac{1}{2} - ih(\theta)}, \tag{1.2}$$

или в другом виде:

$$f(x, w) = (1 - 2xw + w^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{(ax + b) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^m}{m} U_{m-1}(x)\right\}, \tag{1.3}$$

где $U_{m-1}(x)$ имеет тот же смысл, что и в (1.12.3). Многочлены $P_n(x;\ a,\ b)$ совпадают с многочленами Лежандра в предельном случае, когда $a = b = 0$.

Легко проверяются следующие тождества:

$$P_n(x;\ a,\ b) = (-1)^n P_n(-x;\ a,\ -b), \tag{1.4}$$

$$P_n(1;\ a,\ b) = L_n(-a-b),\quad P_n(-1;\ a,\ b) = (-1)^n L_n(-a+b), \tag{1.5}$$

где $L_n(x) = L_n^{(0)}(x)$ — многочлены Лагерра (глава V). Старший коэффициент k_n многочлена $P_n(x;\ a,\ b)$ может быть получен, если в формуле (1.3) заменить w на $\frac{w}{x}$, а затем x устремить к бесконечности. Мы находим

$$k_n = 2^n \binom{n + \frac{1}{2}(a-1)}{n} \cong 2^n \frac{n^{\frac{1}{2}(a-1)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(a+1)\right)} \text{ при } n \to \infty. \tag{1.6}$$

Справедлива следующая рекуррентная формула (см. Бэйтман [1], цитированное место):

$$nP_n(x;\ a,\ b) = [(2n-1+2a)x+2b]P_{n-1}(x;\ a,\ b) - \\ -(n-1)P_{n-2}(x;\ a,\ b), \quad n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots \tag{1.7}$$

Здесь $P_0 = 1$, $P_1 = (2a+1)x + 2b$.

Имеет место важное соотношение ортогональности (см. Сегё [24]):

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x;\ a,\ b) P_m(x;\ a,\ b) w(x;\ a,\ b)\,dx = \left(n+\frac{1}{2}(a+1)\right)^{-1}\delta_{nm}, \tag{1.8}$$

$$n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где весовая функция определена равенством

$$w(\cos\theta;\ a,\ b) = e^{(2\theta-\pi)h(\theta)}[\operatorname{ch}(\pi h(\theta))]^{-1}. \tag{1.9}$$

Отметим, что

$$w(\cos\theta; a, b) = 2\exp\left\{(a+b)\left(1-\frac{\pi}{\theta}\right)\right\} \text{ при } \theta \to +0. \tag{1.10}$$

При $\theta \to \pi - 0$ поведение функции w аналогично.

Справедливо следующее представление через гипергеометрические функции (см. Бэйтман [1], цитированное место):

$$P_n(\cos\theta;\ a,\ b) = e^{in\theta}F\left(-n,\ \frac{1}{2}+ih(\theta);\ 1;\ 1-e^{-2i\theta}\right). \tag{1.11}$$

2. Обобщение

Пусть λ — вещественное число, $\lambda > -\frac{1}{2}$. Определим многочлены $P_n^{(\lambda)}(x;\ a,\ b)$ посредством производящей функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x;\ a,\ b)\,w^n = (1-2xw+w^2)^{-\lambda}\exp\left\{(ax+b)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w^m}{m}U_{m-1}(x)\right\}. \tag{2.1}$$

При $a = b = 0$ мы получаем ультрасферические многочлены $P_n^{(\lambda)}(x)$. Случай, рассмотренный в § 1, соответствует значению $\lambda = \frac{1}{2}$. Многочлены $P_n^{(\lambda)}(x;\ a,\ b)$ ортогональны на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1, x = \cos\theta$ с весом

$$w^{(\lambda)}(x;\ a,\ b) = \pi^{-1}2^{2\lambda-1}e^{(2\theta-\pi)h(\theta)}(\sin\theta)^{2\lambda-1}\,|\Gamma(\lambda+ih(\theta))|^2. \tag{2.2}$$

Относительно рекуррентной формулы и представления через гипергеометрические функции см. Бэйтман [1], цитированное место.

3. Интегральные представления

Справедливы следующие обобщения интеграла Лапласа (4.8.11) и интегралов Мелера (4.8.6) и (4.8.7) (см. Новиков [1]):

$$P_n(\cos\theta;\ a,\ b) = \\ = \pi^{-1}e^{-2\theta h(\theta)}(\operatorname{ch}\pi h(\theta))\int_0^{\pi}\exp\left\{2ih(\theta)\ln\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right\}(\cos\theta+i\cos t\sin\theta)^{-n-1}\,dt. \tag{3.1}$$

$$P_n(\cos\theta;\ a,\ b) = e^{-\theta h(\theta)}\operatorname{ch}(\pi h(\theta))\,\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\theta \cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t - h(\theta)\ln\frac{\sin\frac{\theta+t}{2}}{\sin\frac{\theta-t}{2}}\right\}\times$$
$$\times(2\cos t - 2\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}dt. \qquad (3.2)$$

$$P_n(\cos\theta;\ a,\ b) =$$
$$= e^{(\pi-\theta)h(\theta)}\operatorname{ch}(\pi h(\theta))\,\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t - h(\theta)\ln\frac{\sin\frac{t+\theta}{2}}{\sin\frac{t-\theta}{2}}\right\}\times$$
$$\times(2\cos\theta - \cos t)^{-\frac{1}{2}}dt. \qquad (3.3)$$

В этих формулах $0<\theta<\pi$.

4. Бесконечный промежуток

Поллачек [3] ввел также другой замечательный класс многочленов $P_n^{(\lambda)}(x;\ \alpha)$ с помощью следующей производящей функции:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x;\ \alpha)\,w^n = (1-we^{i\alpha})^{-\lambda+ix}(1-we^{-i\alpha})^{-\lambda-ix}, \qquad (4.1)$$

где $0<\alpha<\pi$, $\lambda>0$. Эти многочлены ортогональны на $-\infty<x<\infty$ с весовой функцией

$$\pi^{-1}(2\sin\alpha)^{2\lambda-1}e^{-(\pi-2\alpha)x}\,|\Gamma(\lambda+ix)|^2. \qquad (4.2)$$

Многочлены Лагерра являются предельным случаем. Действительно, заменяя x на $\frac{x}{\alpha}$ и устремляя α к нулю, мы получаем

$$\lim_{\alpha\to 0}(1-we^{i\alpha})^{-\lambda}(1-we^{-i\alpha})^{-\lambda}\exp\left\{\frac{ix}{\alpha}\ln\frac{1-we^{i\alpha}}{1-we^{-i\alpha}}\right\} =$$
$$=(1-w)^{-2\lambda}\exp\left(2x\frac{w}{1-w}\right),$$

так что (см. (5.1.9))

$$\lim_{\alpha\to 0}P_n^{(\lambda)}\left(\frac{x}{\alpha};\ \alpha\right) = L_n^{(\beta)}(-2x),\ \ \beta = 2\lambda-1. \qquad (4.3)$$

Ясно также, что многочлены § 2 связаны с многочленами $P_n^{(\lambda)}(x;\ \alpha)$ следующим образом:

$$P_n^{(\lambda)}(h(\theta);\ \theta) = P_n^{(\lambda)}(\cos\theta;\ a,\ b). \qquad (4.4)$$

5. Асимптотические свойства

(а) С помощью производящей функции (1.1) нетрудно получить асимптотическое выражение для $P_n(x;\ a,\ b)$ при $n\to\infty$. Мы можем для этого применить метод Дарбу (§ 8.4).

Пусть сначала x лежит вне замкнутого отрезка $[-1,\ 1]$. Полагая $x=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$, $z=e^{i\theta}$, $\Im\theta>0$, мы находим

$$P_n(x;\ a,\ b) =$$
$$=\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}+ih(\theta)\right)\right\}^{-1}(1-e^{2i\theta})^{-\frac{1}{2}+ih(\theta)}e^{-in\theta}\,n^{-\frac{1}{2}+ih(\theta)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (5.1)$$

Нетрудно получить из этого асимптотическое разложение.

Пусть теперь $-1 < x < +1$; беря действительную часть от правой части выражения (5.1), мы получим асимптотическую формулу для $\frac{1}{2} P_n(x;\, a,\, b)$. Наконец, благодаря (1.5) мы находим из (8.22.3), что

$$P_n(1;\, a,\, b) \cong \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(a+b)} (a+b)^{-\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{4}} \exp\{2(a+b)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\}. \tag{5.2}$$

(b) Новиков [1] исследовал асимптотическое поведение $P_n(\cos(tn^{-\frac{1}{2}});\, a,\, b)$ при фиксированном $t > 0$. Его основные результаты состоят в следующем:

$$\left.\begin{aligned} &P_n(\cos(tn^{-\frac{1}{2}});\, a,\, b) = \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} (a+b-t^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}(a+b)\right) \times \\ &\qquad \times n^{-\frac{1}{4}} \exp\left\{n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\frac{a+b}{t} + \lambda(t)\right)\right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ &\qquad \lambda(t) = a_1 t - \frac{a+b}{t} \operatorname{arctg} a_1, \\ &\qquad a_1 = t^{-1}(a+b-t^2)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < t < (a+b)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &P_n(\cos(tn^{-\frac{1}{2}});\, a,\, b) = \pi^{-\frac{1}{2}} (t^2-a-b)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}(a+b)\right) \times \\ &\times n^{-\frac{1}{4}} \exp\left\{n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\frac{a+b}{t}\right)\right\} \left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} - n^{\frac{1}{2}}\mu(t)\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}, \\ &\qquad \mu(t) = \alpha_1 t - \frac{a+b}{2t} \ln\frac{1+\alpha_1}{1-\alpha_1}, \\ &\qquad \alpha_1 = t^{-1}(t^2-a-b)^{\frac{1}{2}}, \quad t > (a+b)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Из (5.3) и (5.4) могут быть выведены интересные следствия относительно «экстремальных» нулей многочленов $P_n(x;\, a,\, b)$. Обозначим, как и в главе VI, нули этих многочленов через $\cos\theta_\nu$, где $0<\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_n<\pi$; $\theta_\nu = \theta_{\nu n}$. Тогда при фиксированном значении ν имеем

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} \theta_{\nu n} = (a+b)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.5}$$

6. Ассоциированные ортогональные многочлены

(а) Рассмотрим систему $\{\varphi_n(z)\}$ многочленов, ортогональных на единичной окружности $|z| = 1$, ассоциированных с весовой функцией

$$f(\theta) = w(\cos\theta)\,|\sin\theta|; \tag{6.1}$$

где $w(x)$ имеет тот же смысл, что в (1.9). Эти многочлены также имеют во многих отношениях особое поведение.

Связь с многочленами Поллачека может быть выражена формулами (11.5.2):

$$\left.\begin{aligned} z^{-n}\varphi_{2n}(z) \\ z^{-n+1}\varphi_{2n-1}(z) \end{aligned}\right\} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{1 \pm \frac{\varphi_{2n}(0)}{k_{2n}}\right\}^{\frac{1}{2}} p_n(x) + \\ + \frac{1}{2}(z - z^{-1}) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{1 \mp \frac{\varphi_{2n}(0)}{k_{2n}}\right\} q_{n-1}(x), \tag{6.2}$$

где $p_n(x) = \left\{n + \frac{1}{2}(a+1)\right\}^{\frac{1}{2}} P_n(x;\, a,\, b)$ (см. (1.8)), а система $\{q_n(x)\}$ ортонормальна с весовой функцией $(1-x^2)\,w(x)$; кроме того, k_{2n} означает (положительный) старший коэффициент многочлена $\varphi_{2n}(z)$. Переменные x и z связаны равенством $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$.

(b) Пусть $|z| < 1$. Исследуем асимптотическое поведение многочленов $\varphi_n(z)$ при $n \to \infty$. Пусть $z \neq 0$, $z = e^{i\theta}$, $\Im\theta > 0$. Перепишем (5.1) в виде

$$\left.\begin{aligned} p_n(x) &= A(x)\, n^{ih(\theta)} z^{-n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ A(x) &= \left\{\Gamma\left(\frac{1}{2} + ih(\theta)\right)\right\}^{-1} (1 - z^2)^{-\frac{1}{2} + ih(\theta)}. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Многочлены $\{q_n(x)\}$ могут быть выражены через многочлены $\{p_n(x)\}$ по формуле Кристоффеля (2.5.2). Учитывая (1.5), получаем

$$(1 - x^2)\, q_{n-1}(x) = \mathrm{const.} \begin{vmatrix} P_{n-1}(x;\, a,\, b) & P_n(x;\, a,\, b) & P_{n+1}(x;\, a,\, b) \\ L_{n-1} & L_n & L_{n+1} \\ L'_{n-1} & -L'_n & L'_{n+1} \end{vmatrix},$$

$$L_n = L_n(-a - b), \quad L'_n = L_n(-a + b).$$

Обозначая последний определитель через $\Delta_n(x)$, посредством нетрудного вычисления находим

$$(1 - x^2)\, q_{n-1}(x) = (L_{n-1}L'_n + L_n L'_{n-1})^{-\frac{1}{2}} (L_n L'_{n+1} + L_{n+1}L'_n)^{-\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left(\frac{k_{n-1}}{k_{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{n - 1 + \frac{1}{2}(a+1)\right\}^{\frac{1}{2}} \Delta_n(x).$$

Используя (1.5), (8.22.3) и (1.6), мы получаем

$$(1 - x^2)\, q_{n-1}(x) = \frac{1}{2} A(x)\, n^{ih(\theta)} z^{-n-1} \times$$
$$\times \left\{\left(1 + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}\right) z^2 + (\varepsilon - \varepsilon')\, z - \left(1 - \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}\right)\right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{6.4}$$
$$\varepsilon = (a + b)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon' = (a - b)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}.$$

(c) Так как $1 - x^2 = -(1 - z^2)^2 (2z)^{-2}$, то из (6.3) и (6.4) мы заключаем, что

$$\frac{\frac{1}{2}(z - z^{-1})\, q_{n-1}(x)}{p_n(x)} =$$
$$= \frac{1}{1 - z^2} \left\{\left(1 + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}\right) z^2 + (\varepsilon - \varepsilon')\, z - \left(1 - \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}\right)\right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{6.5}$$

Обозначая через $k'_n = \left\{n + \frac{1}{2}(a+1)\right\}^{\frac{1}{2}} k_n$ коэффициент при x^n в многочлене $p_n(x)$, а через l_{n-1} — коэффициент при x^{n-1} в многочлене $q_{n-1}(x)$, мы находим из (6.5), устремляя z к нулю, что

$$\frac{l_{n-1}}{k'_n} = \left(1 - \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Первая из формул (6.2) дает

$$\left.\begin{aligned} &k_{2n} \\ &\varphi_{2n}(0) \end{aligned}\right\} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{\varphi_{2n}(0)}{k_{2n}}\right\}^{\frac{1}{2}} \frac{k'_n}{2^n} \pm \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{1 - \frac{\varphi_{2n}(0)}{k_{2n}}\right\}^{\frac{1}{2}} \frac{l_{n-1}}{2^n},$$

так что

$$k_{2n}=2^{-n}\pi^{\frac{1}{2}}\{(k_n')^2+l_{n-1}^2\}^{\frac{1}{2}}=\pi^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}k_n\cdot 2^{-n+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{4}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(a+1)\right)}n^{\frac{a}{2}}\left(1-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{4}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{6.6}$$

$$\varphi_{2n}(0)=\pi^{\frac{1}{2}}\frac{(k_n')^2-l_{n-1}^2}{\{(k_n')^2+l_{n-1}^2\}^{\frac{1}{2}}}2^{-n}=\pi^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}k_n\cdot 2^{-n-\frac{1}{2}}\left(\varepsilon+\varepsilon'+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(a+1)\right)}n^{\frac{a}{2}}\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{6.7}$$

В частности,

$$\frac{\varphi_{2n}(0)}{k_{2n}}=\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{6.8}$$

(d) Мы получаем из (6.2) при $|z|<1$ благодаря (6.3), (6.5), (6.8) формулы

$$\varphi_{2n}(z)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}A(x)\,n^{ih(\theta)}\left\{1+\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{4}+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{4}\right)\frac{\left(1+\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon')\right)z^2+(\varepsilon-\varepsilon')z-\left(1-\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon')\right)}{1-z^2}\right\}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(1-z^2)^{\alpha(z)}}{\Gamma(\beta(z))}n^{\gamma(z)}\{(a+b)^{\frac{1}{2}}(1+z)+(a-b)^{\frac{1}{2}}(1-z)\}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{6.9}$$

$$\varphi_{2n-1}(z)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}A(x)\,n^{ih(\theta}z^{-1}\left\{1-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{4}+\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{4}\right)\frac{\left(1+\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon')\right)z^2+(\varepsilon-\varepsilon')z-\left(1-\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon')\right)}{1-z^2}\right\}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(1-z^2)^{\alpha(z)}}{\Gamma(\beta(z))}n^{\gamma(z)}\{(a+b)^{\frac{1}{2}}(1+z)-(a-b)^{\frac{1}{2}}(1-z)\}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{6.10}$$

где для краткости мы положили

$$\left.\begin{aligned}
\alpha(z)&=\frac{\frac{1}{2}(a-3)+bz+\frac{1}{2}(a+3)z^2}{1-z^2},\\
\beta(z)&=\frac{\frac{1}{2}(a+1)+bz+\frac{1}{2}(a-1)z^2}{1-z^2},\\
\gamma(z)&=\frac{\frac{1}{2}(a-1)+bz+\frac{1}{2}(a+1)z^2}{1-z^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Аргумент Г-функции может быть записан в виде

$$\beta(z)=\frac{a}{2}\frac{1+z^2}{1-z^2}+b\frac{z}{1-z^2}+\frac{1}{2}, \tag{6.12}$$

вещественная часть этого выражения $> \frac{1}{2}$ при $|z| < 1$. Отсюда следует, что функция $1/\Gamma$ нигде не обращается в нуль при $|z| < 1$. Единственной предельной точкой множества нулей многочленов $\{\varphi_m(z)\}$ в круге $|z| < 1$ будет точка

$$-\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}-(a-b)^{\frac{1}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}}+(a-b)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}-a}{b},$$

появляющаяся только при $m = 2n - 1$.

Действительная часть $\gamma(z)$, показателя при n, больше чем $-\frac{1}{2}$. Следовательно, ряд $\sum|\varphi_m(z)|^2$ расходится при всех z в круге $|z| < 1$. В частности,

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_{2n}(0)\\ \varphi_{2n-1}(0)\end{array}\right\}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}(a+1)\right)\right\}^{-1}n^{\frac{1}{2}(a-1)}\left((a+b)^{\frac{1}{2}}\pm(a-b)^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{6.13}$$

Если принять во внимание (11.3.6), то это опять дает главный член выражения (6.6).

(e) Резюмируя, мы можем отметить некоторые свойства многочленов Поллачека, которые указывают на весьма отличный характер их поведения в сравнении с классическими многочленами.

Весовые функции $w(x)$ или $f(\theta)$ в теоремах 12.1.1 или 12.1.2 соответственно таковы, что $\ln w(\cos\theta)$ и $\ln f(\theta)$ интегрируемы. Весовая функция $w(x)$ для многочленов Поллачека имеет в точках $x = \pm 1$ на конце отрезка нуль столь высокого порядка, что $\ln w(\cos\theta)$ неинтегрируем (см. (1.10)).

Нормированные многочлены Якоби имеют в точках $x = \pm 1$ соответственно порядок $n^{\alpha+\frac{1}{2}}$ и $n^{\beta+\frac{1}{2}}$. Ортонормальные многочлены Поллачека в точках $x = \pm 1$ имеют порядок $n^{\frac{1}{4}}\exp\{2(a+b)^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}\}$ (см. 5.2)).

Минимум Тёплица $\mu_n(f)$ (см. § 12.3), соответствующий весовой функции $f(\theta)$, в предположениях теоремы 12.1.1, стремится к положительному пределу. В случае многочленов, рассмотренных в § 6, этот предел равен нулю; весовая функция определяет «детерминированный» процесс. В этом случае мы имеем $\mu_n(f) = k_n^{-2} \sim n^{-\alpha}$. Пусть $f(\theta) = 0$ в некотором промежутке, скажем, $-\varepsilon < \theta < +\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi$, и $f(\theta) = 1$ на остальной части отрезка. Тогда мы снова имеем $\mu_n(f) \to 0$, и даже более точно: $\mu_n(f) \sim r^n$, $r < 1$ (см. (16.4.3) и задачу 50).

Ортонормальные многочлены, определенные в теореме 12.1.2, асимптотически имеют порядок $(x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}})^n$, если x не принадлежит отрезку $[-1, 1]$. Многочлены Поллачека при тех же условиях имеют порядок $n^K(x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}})^n$, где K есть функция от x. Аналогичное расхождение имеется и в том случае, когда x лежит на отрезке $[-1, 1]$.

Для «наибольшего» нуля $\cos\theta_\nu$, $0 < \theta_\nu < \pi$, $\theta_\nu = \theta_\nu(n)$, ν фиксировано, $n \to \infty$, многочленов Якоби мы имели $\theta_\nu(n) \cong n^{-1} j_\nu$, где j_ν—соответствующий нуль функции Бесселя $J_\alpha(x)$ (см. (6.3.15)). Аналогичные нули многочленов Поллачека удовлетворяют соотношению $\theta_\nu(n) \cong n^{-\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{2}}$ (см. (5.5)); порядок величин различный, а константа не зависит от ν.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА[1])

Абель (Abel N. H.)

*1. *Oeuvres Complètes*, 2, 1881.

Адамов А. А.

1. Об асимптотическом выражении полиномов $U_n(x)=e^{ax^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-ax^2/2}$. Изв.СПб. политехн. ин-та, 5 (1906), 127—143.

2. О разложениях произвольной функции одной вещественной переменной в ряды, расположенные по функциям определенного рода. СПб., 1907.

Ахиезер Н. И.

1. Über eine Eigenschaft der «elliptischen» Polynome. Сообщ. Харьк. матем. о-ва, (4), 9 (1934), 3—8.

2. Verallgemeinerung einer Korkine-Zolotareffschen Minimum-Aufgabe. Там же, (4), 13 (1936), 3—14.

3. Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1947.

Банах (Banach S.)

*1. Théorie des opérations linéaires. Warszawa-Lwów, 1932. *Украинский перевод*: Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.

Балаж и Туран (Balázs J. and Turán P.)

1. Notes on interpolation. II. (Explicit formulae). Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae, 8 (1957), 201—215.

2. Notes on interpolation. III. (Convergence). Там же, 9 (1958), 195—214.

Бернштейн С. Н.

*1. Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Paris, 1926.

2. О многочленах, ортогональных на конечном отрезке (1930—31). *Собрание сочинений*, 2, стр. 7—106; изд. АН СССР, 1 (1952), 2 (1954).

3. Об одном классе ортогональных многочленов (1930). Дополнение (1932). *Сочинения*, 1, стр. 452—465, 466—467.

4. Об ограничении значений многочлена $P_n(x)$ степени n на всем отрезке по его значениям в $n+1$ точках отрезка (1931). *Сочинения*, 2, стр. 107—126.

Блюменталь (Blumenthal O.)

1. Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Nennern des Kettenbruches für $\int\limits_{-\infty}^{0}[\varphi(\xi)/(z-\xi)]\,d\xi$. Inauguraldissertation. Göttingen, 1898.

Боттема (Bottema O.)

1. Die Nullstellen der Hermiteschen Polynome. Koninklijke Acad. van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings, 33 (1930), 495—503.

2. Die Nullstellen gewisser durch Rekursionsformeln definierten Polynome. Там же, 34 (1931), 681—691.

Бохнер (Bochner S.)

1. Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme. Math. Zeitschr., 29 (1929), 730—736.

Брауэр (Brauer A.)

1. Über die Nullstellen der Hermiteschen Polynome. Math. Ann., 107 (1932), 87—89.

Брунс (Bruns H.)

1. Zur Theorie der Kugelfunctionen. Journ. für Math., 90 (1881), 322—328.

Бьюл (Buell C. E.)

1. The zeros of Jacobi and related polynomials. Duke Math. Journ., 2 (1936), 304—316.

---

[1]) Звездочками отмечены те работы, которые не относятся к теории ортогональных многочленов.

Б э й т м а н (Bateman Manuscript Project, director A. Erdélyi)
1. Higher transcendental functions, **1**, **2**, **3**. New York — Toronto — London, 1953, **1955**.
В а н В и н (V a n V e e n S. C.)
1. Asymptotische Entwicklung und Nullstellenabschätzung der Hermiteschen Funktionen. Koninklijke Acad. van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings, **34** (1931), 257—267.
В а н г е р и н (W a n g e r i n A.)
1. Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen, insbesondere der Laméschen und Besselschen (Theorie spezieller, durch lineare Differentialgleichungen definierter Funktionen). Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, том II. **1**, **2**, стр. 695—759.
В а т с о н (W a t s o n G. N.)
1. The harmonic functions associated with the parabolic cylinder. Proc. Lond. Math. Soc., (2), 8 (1910), 393—421; (2), **17** (1918), 116—148.
2. Approximate formulae for Legendre functions. Messenger of Math., **47** (1918), 151—160.
3. A treatise on the theory of Bessel Functions. Cambridge, 1922. *Русский перевод*: Теория бесселевых функций, ч. I, II. ИЛ, 1949.
4. Notes on generating functions of polynomials: (1) Laguerre polynomials. Journ. Lond. Math. Soc., 8 (1933), 189—192.
5. Notes of generating functions of polynomials: (2) Hermite polynomials. Там же, 8 (1933), 194—199.
6. Über eine Reihe aus verallgemeinerten Lagerre'schen Polynomen. Sitzungsberichte der math.-natur. Klasse der Acad. Wien, IIa, **147** (1938), 151—159.
В е б с т е р (W e b s t e r M. S.)
1. A convergence theorem for certain Lagrange interpolation polynomials. Bull. Amer. Math. Soc., **49** (1943), 114—119.
В е й л ь (W e y l H.)
1. Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems. Inauguraldissertation, Göttingen, 1908. Math. Ann., **66** (1909), 273—324.
В и г е р т (W i g e r t S.)
1. Contributions à la théorie des polynomes d'Abel-Laguerre. Arkiv för Mat., Astr. och Fysik, **15** (1921), № 25, 22 стр.
2. Sur les polynomes orthogonaux et l'approximation des fonctions continues. Там же, **17** (1923), № 18, 15 стр.
В и м а н (W i m a n A.)
1. Über eine asymptotische Eigenschaft der Ableitungen der ganzen Funktionen von den Geschlechtern 1 und 2 mit einer endlichen Anzahl von Nullstellen. Math. Ann., **104** (1931), 169—181.
В и т а л и и С а н с о н е (V i t a l i G. and S a n s o n e G.)
1. Moderna teoria delle funzioni di variabile reale. II. Sviluppi in Serie di funzioni ortogonali. Bologna, 1952.
Г а л ь б р е н (G a l b r u n H.)
1. Sur un développement d'une fonction à variable réelle en séries de polynomes. Bull. Soc. Math. de France, **41** (1913), 24—47.
Г а м б у р г е р (H a m b u r g e r H.)
1. Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche. Math. Zeitschr., **4** (1919), 186—222.
2. Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems. Math., Ann., **81**, (1920), 235—319; **82** (1920), 120—164, 168—187.
Г а т т е с к и (G a t t e s c h i L.)
1. Approssimazione asintotica degli zeri dei polinomi ultrasferici. Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni, (5), 8 (1949), 399—411.
2. Limitazione degli errori nelle formule asintotiche per le funzioni speciali. Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino, **16** (1956—1957), 83—94.
Г а у с с (G a u s s C. F.)
*1. Summatio quarumdam serierum singularium. *Werke*, **2**, стр. 9—45.
2. Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. *Werke*, 3, стр. 163—196.
Г е г е н б а у э р (G e g e n b a u e r L.)
1. Über bestimmte Integrale. Sitzungsberichte der math.-natur. Klasse der Akad. der Wissenschaften in Wien., Abteilung IIa, **70** (1874), 433—443.
2. Über die Funktionen $C_n^\nu(x)$. Там же, **75** (1877), 891—905.
3. Über die Funktionen $C_n^\nu(x)$. Там же, **97** (1888), 259—270.
4. Zur Theorie der gypergeometrischen Reihe. Там же, **100** (1891), 225—244.

5. Das Additionstheorem der Funktionen $C_n^\nu(x)$. Там же, **102** (1893), 942—950.

6. Zur Theorie der Funktionen $C_n^\nu(x)$. Denkschriften der Akad. der Wissenschaften in Wien, math.-natur. Klasse, 48 (1884), 293—316.

7. Einige Sätze über die Funktionen $C_n^\nu(x)$. Там же, **57** (1890), 425—480.

Гейне (Heine E.)

1. Mittheilung über Kettenbrüche. Journ. für Math., **67** (1867), 315—326.

2. Die Fourier-Besselsche Funktion. Там же, **69** (1869), 128—141.

3. Handbuch der Kugelfunktionen, **1**, **2**. Berlin, 1878, 1881.

Геронимус Я. Л.

1. Sur le polynome multiplement monotone qui s'écarte le moins de zéro, dont un coefficient est donné. Изв. АН СССР (1929), 377—389.

2. Sur l'écart minimal quadratique de zéro d'un polynome. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **54** (1930), 298—313.

3. On some problems of Tchebycheff. Amer. Journ. of Math., **53** (1931), 597—604.

4. On a problem of M. J. Shohat. Там же, **54** (1932), 85—91.

5. On some extremal properties of polynomials. Annals of Math., (2), **37** (1936), 483—517.

Гильберт (Hilbert D.)

1. Über die Discriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe. Journ. für Math., **103** (1888), 337—345.

Гильдебрандт (Hildebrandt T. H.)

*1. On integrals related to and extensions of the Lebesgue integrals. Bull. Amer. Math. Soc., **24** (1918), 113—144, 177—202.

Гобсон (Hobson E. W.)

1. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge, 1931. *Русский перевод*: Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, 1952.

Готтлиб (Gottlieb M. J.)

1. Concerning some polynomials orthogonal on a finite or enumerable set of points. Amer. Journ. of Math., **60** (1938), 453—458.

Гренандер и Сегё (Grenander U. and Szegö G.)

1. Toeplitz forms and their applications. Berkeley — Los Angeles, 1958. *Русский перевод*: Тёплицевы формы и их приложения. ИЛ, 1961.

Гронуолл (Gronwall T. H.)

1. Über die Laplacesche Reihe. Math. Ann., **74** (1913), 213—270.

2. Über die Summierbarkeit der Reihen von Laplace und Legendre. Там же, **75** (1914), 321—375.

Грюнвальд (Grünwald G.)

1. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome stetiger Funktionen. Annals of Math., (2), **37** (1936), 908—918.

2. On a convergence theorem for the Lagrange interpolation polynomials. Bull. Amer. Math. Soc., **47** (1941), 271—275.

3. On the theory of interpolation. Acta Math., **75** (1943), 219—245.

Грюнвальд и Туран (Grünwald G. and Turan P.)

1. Über Interpolation. Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa, (2), **7** (1938), 137—146.

Дарбу (Darboux G.)

1. Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres. Journ. de Math., (3), **4** (1878), 5—56, 377—416.

Дёч (Doetsch G.)

1. Integraleigenschaften der Hermiteschen Polynome. Math. Zeitschr., **32** (1930), 587—599.

2. Die in der Statistik seltener Ereignisse auftretenden Charlierschen Polynome und eine damit zusammenhängende Differentialdifferenzengleichung. Math., Ann., **109** (1933), 257—266.

3. Handbuch der Laplace-Transformationen. **2**. Anwendungen der Laplace-Transformationen, 1 Abteilung. Basel — Stuttgart, 1955.

Джексон (Jackson D.)

1. On functions of closest approximation. Trans. Amer. Math. Soc., **22** (1921), 117—128.

2. Note on a class of polynomials of approximation. Там же, **22** (1921), 320—326.

3. A generalized problem in weighted approximation. Там же, **26** (1924), 133—154.

4. The theory of approximation. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, **11**, 1930.

5. Series of orthogonal polynomials. Annals of Math., (2), **34** (1933), 527—545.

6. Certain problems of closest approximation. Bull. Amer. Math. Soc., **39** (1933), 889—906.

7. The summation of series of orthogonal polynomials. Там же, **40** (1934), 743—752.

8. Formal properties of orthogonal polynomials in two variables. Duke Math. Journ., **2** (1936), 423—434.
Дирихле (Dirichlet G. L.)
1. Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données. Journ. für. Math., **17** (1837), 35—56.
Дю Буа Реймонд (Du Bois-Reymond P.)
*1. Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln. Abhandlungen der Akad. München, **12** (1876), 1—103.
Жакоб (Jacob M. M.)
1. Sullo sviluppo di una funzione di ripartizione in serie di polinomi di Hermite. Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, **2** (1931), 100—106, 356—368.
2. Sur le phénomène de Gibbs dans les développements de séries de polynomes d'Hermite. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., Paris, **204** (1937), 1540—1543.
Жордан К. (Jordan Camille)
*1. Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, **3**, 2d edition. Paris, 1896.
Жордан Ш. (Jordan Charles)
1. Sur une série de polynomes dont chaque somme partielle représente la meilleure approximation d'un degré donné suivant la méthode des moindres carrés, Proc. Lond. Math. Soc., (2), **20** (1920), 297—325.
Жюлиа (Julia G.)
1. Sur les polynomes de Tchebichef. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. Paris, **182** (1926), 1201—1202.
Зейдель и Сас (Seidel W. and Szasz O.)
1. On positive harmonic functions and ultraspherical polynomials. Journ. Lond. Math. Soc., **26** (1951), 36—41.
Зигмунд (Zygmund A.)
1. Sur la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux, II. Prace Mathematyczno-Fizyczne, **39** (1932), 73—117.
2. Trigonometrical Series. Warszawa — Lwów, 1935. Second edition, New York, 1952. *Русский перевод*: Тригонометрические ряды. Гостехиздат, 1939.
Каратеодори (Carathéodory C.)
*1. Conformal representation. Cambridge, 1932. *Русский перевод*: Конформное отображение, М.—Л., 1934.
Карлеман (Carleman T.)
1. Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Agregate von vorgegebenen Potenzen. Arkiv för Mat. Astr. och Fysik, **17** (1923), № 9, 30 стр.
Карлин и Мак-Грегор (Karlin S. and McGregor J. L.)
1. The differential equations of birth-and-death processes, and the Stieltjes moment problem. Trans. Amer. Math. Soc., **85** (1957), 489—546.
Качмаж и Штейнгауз (Kaczmarz St. and Steinhaus H.)
*1. Theorie der Orthogonalreihen. Warszawa — Lwów, 1935. *Русский перевод*: Теория ортогональных рядов. Физматгиз, 1958.
Келдыш М. В. и Лаврентьев М. А.
1. Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables. Ann. Sc. de l'École Normal Sup., (3), **54** (1937), 1—38.
Клейн (Klein F.)
1. Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Math. Ann., **37** (1890), 573—590. *Gesammelte Abhandlungen*, **2**, стр. 550—567.
Ковалевский (Kowalewski G.)
*1. Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig, 1909.
Коваллик (Kowallik U.)
1. Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Hermiteschen Orthogonalfunktionen. Math. Zeitschr., **31** (1930), 498—518.
Когбетлянц (Kogbetliantz E.)
1. Sur les séries de fonctions ultrasphériques. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., Paris, **163** (1916), 601—603.
2. Sur la sommation des séries ultrasphériques. Там же, **164** (1917), 510—513, 626—628, 778—780; **169** (1919), 54—57.
3. Sur les développements de Jacobi. Там же, **168** (1919), 992—994.
4. Sur les séries ultrasphériques. Там же, **169** (1919), 322—324.
5. Nouvelles observations sur les séries ultrasphériques. Там же, **169** (1919), 423—426.
6. Sur l'unicité des développements ultrasphériques. Там же, **169** (1919), 769—770, 950—953.
7. Sur les développements de Jacobi. Там же, **172** (1921), 1333—1334; **192** (1931), 915—918.
8. Sur la sommabilité (C, δ) de développements suivant les polynomes d'Hermite. Там же, **192** (1931), 662—663.

9. Nouvelles observations sur le système orthogonal de polynomes d'Hermite. Там же, **192** (1931), 1696—1698.

10. Sur les séries d'Hermite et de Laguerre. Там же, **193** (1931), 386—389.

11. Sur la convergence des séries d'Hermite. Там же, **194** (1932), 161—163.

12. Sur les développements de Laguerre. Там же, **194** (1932), 1422—1424.

13. Sur la série de Laguerre. Там же, **196** (1933), 523—525.

14. Expression approchée du polynome de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$. Там же, **196** (1933), 1079—1080.

15. Sur la détermination du saut $D(X_0)$ de $f(x)$. Там же, **196** (1933), 464—466.

16. Über die (C, δ) Summierbarkeit der Laplaceschen Reihe für $\frac{1}{2} < \delta < 1$. Math. Zeitschr., **14** (1922), 99—109.

17. Analogie entre les séries trigonométriques et les séries sphériques au point de vue de leur sommabilité par les moyennes arithmétiques. Thèse. Paris, 1923, 65 стр.

18. Sur la sommabilité de la série ultrasphérique à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$ par la méthode des moyennes arithmétiques. Bull. Soc. Math. de France, **51** (1923), 244—295.

19. Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmétiques. Journ. de Math., (9), **3** (1924), 107—187.

20. Recherches sur l'unicité des séries ultrasphériques. Там же, (9), 5 (1926), 125—196.

21. Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques. Mémorial des Sc. Math., **51**. Paris, 1931.

22. Recherches sur la sommabilité des séries d'Hermite. Annales Sc. de l'École Norm. Sup., (3), **49** (1932), 137—221.

23. Sur les moyennes arithmétiques de séries-noyaux des développements en séries d'Hermite et de Laguerre et sur celles de ces séries-noyaux dérivées terme à terme. Journ. of Math. and Phys., Massachusetts Institute of Technology, **14** (1935), 37—99.

24. Contribution a l'étude du saut d'une fonction donnée par son développement en séries d'Hermite ou de Laguerre. Trans. Amer. Math. Soc., **38** (1935), 10—47.

Корaус (Korous J.)

1. O rezvoji funkci jedné reálné proměnné v řadu Hermiteových polynomů. Rozpravy České Akademie, (2), **37** (1928), № 11, 34 стр.

2. O řadách Laguerrových polynomů (рез. франц.). Там же, № 40, 23 стр.

3. O rozvoji funkci jedné reálné proměnné v řadu jistých ortogonálních polynomů (рез. англ.). Там же, **48** (1938), 12 стр.

4. Über Reihenentwicklungen nach verallgemeinerten Laguerreschen Polynomen mit drei Parametern. Věstník Královské České Společnosti Nauk, Třida Matemat.-Přírodověd., 1937, 26 стр.

5. Über Entwicklungen der Funktionen einer reelen Veränderlichen in Reihen einer gewissen Klasse orthogonaler Polynome im unendlichen Intervalle. Там же, 1937, 19 стр.

Кошмидер (Koschmieder L.)

1. Über besondere Jakobische Polynome. Math. Zeitschr., 8, (1920), 123—137.

Кравчук М. Ф.

1. Sur une généralisation des polynomes d'Hermite. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., Paris, **189** (1929), 620—622.

2. Sur la distribution des racines des polynomes orthogonaux. Там же, 196 (1933), 739—741.

Крамер (Cramér H.)

1. On some classes of series used in mathematical statistics. Comptes Rendus du Sixième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm, 1926, стр. 399—425.

Кристоффель (Christoffel E. B.)

1. Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben. Journ. für Math., 55 (1858), 61—82.

Кролл (Krall H. L.)

1. On derivatives of orthogonal polynomials. Bull. Amer. Math. Soc., **42** (1936), 423—428.

2. On higher derivatives of orthogonal polynomials. Там же, **42** (1936), 867—870.

Кронекер (Kronecker L.)

*1. Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen. Monatsberichte der Preussischen Akad. der Wissenschaften zu Berlin, 1881, стр. 535—600.

Курант и Гильберт (Courant R. and Hilbert D.)

1. Methoden der mathematischen Physik, vol. 1. Berlin, 1931. *Русский перевод*: Методы математической физики, том. 1. Гостехиздат, 1951.

Лагерр (Laguerre E. N.)

1. Sur l'intégrale $\int\limits_x^\infty x^{-1} e^{-x} dx$. Bull. Soc. Math. de France, **7** (1879), 72—81. *Oeuvres*, **1**, стр. 428—437.

2. Sur l'approximation des fonctions circulaires au moyen des fonctions algébriques. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., Paris, **90** (1880), 304—307. *Oeuvres*, **1**, стр. 104—107.

3. Sur les équations algébriques dont le premier membre satisfait à une équation linéaire du second ordre. Там же, **90** (1880), 809—812. *Oeuvres*, **1**, стр. 126—132.

Лагранж (Lagrange J. L.)

1. *Oeuvres*, **1**, стр. 534—539, 1867.

Лангер (Langer R. E.)

*1. The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to the Stokes phenomenon. Bull. Amer. Math. Soc., **40** (1934), 545—582.

*2. The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of the second order. Trans. Amer. Math. Soc., **36** (1934), 90—106.

*3. On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with reference to the Stokes phenomenon about a singular point. Там же, **37** (1935), 397—416.

Лебег (Lebesgue H.)

*1. Sur la divergence et la convergence non-uniforme des séries de Fourier. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. Paris, **141** (1905), 875—877.

*2. Leçons sur les séries trigonométriques. Paris, 1906.

Лежандр (Legendre A. M.)

1. Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes. **2**. Paris, 1817.

Ле Руа (Le Roy É.)

1. Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor. Ann. Faculté des Sc. de Toulouse, (2), **2** (1900), 317—430.

Лотон (Lawton W.)

1. On the zeros of certain polynomials related to Jacobi and Laguerre polynomials. Bull. Amer. Math. Soc., **38** (1932), 442—448.

Люкач (Lukács F.)

1. Verschärfung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung für rationale Polynome. Math. Zeitschr., **2** (1918), 295—305.

2. Über die Laplacesche Reihe. Там же, **14** (1922), 250—262.

Магнус и Обергеттингер (Magnus W. and Oberhettinger F.)

1. Formeln und Lehrsätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin, 1948.

Макаи (Makai E.)

1. Über die Nullstellen von Funktionen, die Lösungen Sturm-Liouville'scher Differentialgleichungen sind. Commentarii Math. Helvetici, **16** (1944), 153—199.

2. On a monotonic property of certain Sturm-Liouville functions. Acta Math. Acad. Scien. Hungaricae, **3** (1952), 165—172.

3. On systems of polynomials orthogonal in two intervals. Publicationes Mathematicae, **2** (1952), 222—228.

Марков А. А.

1. О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей, СПб., 1884, 131 стр.

2. Доказательство некоторых неравенств П. Л. Чебышева (1884). Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. Гостехиздат, 1948, стр. 15—24.

3. Выдержка из одного письма Эрмиту (1885). Избранные труды, стр. 25—31.

4. О корнях некоторых уравнений. II. (1886). Избранные труды, стр. 44—50.

5. Исчисление конечных разностей. Одесса, 1910.

Марцинкевич (Marcinkiewicz J.)

*1. Quelques remarques sur l'interpolation. Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, 8 (1937), 127—130.

2. Sur la divergence des polynomes d'interpolation. Там же, 8 (1937), 131—135.

Мейкснер (Meixner J.)

1. Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion. Journ. of the London Mathematical Society, **9** (1934), 6—13.

2. Erzeugende Funktionen der Charlierschen Polynome. Math. Zeitschr., **44** (1938), 531—535.

Мёклин (Moecklin E.)

1. Asymptotische Entwicklungen der Laguerreschen Polynome. Commentarii Math. Helvetici, **7** (1934), 24—46.

Мелер (Mehler F. G.)

1. Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen. Journ. für Math., **63** (1864), 152—157.

2. Über die Entwicklung einer Funktion von beliebig vielen Variablen nach Laplaceschen Funktionen höherer Ordnung. Там же, **66** (1866), 161—176.
3. Über die Vertheilung der statischen Elektricität in einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper. Там же, **68** (1868), 134—150.
4. Über die Darstellung einer willkürlichen Funktion zweier Variablen durch Cylinderfunktionen. Math. Ann., **5** (1872), 135—140.
5. Notiz über die Dirichlet'schen Integralausdrücke für die Kugelfunktion $P^n(\cos\theta)$ und über eine analoge Integralform für die Cylinderfunktion $J(x)$. Там же, **5** (1872), 141—144.

Миллер-Лебедева (Myller-Lebedeff V.)
1. Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen. Math. Ann., **64** (1907), 388—416.

Мюнц (Müntz C.)
1. Über die Potenzsummation einer Entwicklung nach Hermiteschen Polynomen. Math. Zeitschr., **31** (1929), 350—355.

Нейман (Neumann E. R.)
1. Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen auf Grund der Theorie der Integralgleichungen. Inauguraldissertation. Breslau, 1912.
2. Beiträge zur Kenntnis der Laguerreschen Polynome. Jahresber. der DMV, **30** (1921), 15—35.

Новиков (Novikoff A.)
1. On a special system of orthogonal polynomials. Dissertation Stanford University, 1954.

Обрешков (Obrechkoff N.)
1. Sur la sommation de la série ultrasphérique par la méthode des moyennes arithmétiques. Rendiconti del Circolo Math. di Palermo, **59** (1936), 266—287.
2. Formules asymptotiques pour les polynomes de Jacobi et sur les séries suivant les mêmes polynomes. Annuaire de l'Université de Sofia, Faculté Physico-Mathématique, **1** (1936), 39—133.

Перрон (Perron O.)
1. Über das infinitäre Verhalten der Koeffizienten einer gewissen Potenzreihe. Archiv der Math. und Phys., (3), **22** (1914), 329—340.
2. Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines Parameters. Journal für Math., **151** (1921), 63—78.
3. Die Lehre von den Kettenbrüchen. 2d edition. Leipzig, 1929.
*4. Algebra. Vols. I, II, 2d edition. Berlin, 1932, 1933.

Планшерель и Ротах (Plancherel M. and Rotach W.)
1. Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$. Commentarii Math. Helvetici, **1** (1929), 227—254.

Полиа (Polya G.)
1. Sur un théorème de Stiltjes. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., Paris, **155** (1912), 767—769.
2. Sur un algorithme toujours convergent pour obtenir les polynomes de meilleure approximation de Tchebychef pour une fonction continue quelconque. Там же, **157** (1913), 840—843.
*3. Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen. Math. Zeitshr., **2** (1918), 352—383.
4. Über die Konvergenz von Quadraturverfahren. Там же, **37** (1933), 264—286.

Поллачек (Pollaczek F.)
1. Sur une généralisation des polynomes de Legendre. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., Paris, **228** (1949), 1363—1365.
2. Systèmes de polynomes biorthogonaux qui généralisent les polynomes ultrasphériques. Там же, **228** (1949), 1998—2000.
3. Sur une famille de polynomes orthogonaux qui contient les polynomes d'Hermite et de Laguerre comme cas limites. Там же, **230** (1950), 1563—1565.
4. Sur une généralisation des polynomes de Jacobi. Mémorial des Sc. Math., **131** (1956).

Поповичиу (Popoviciu T.)
1. Sur la Distribution des zéros de certains polynomes minimisants. Bull. de l'Académie Roumaine, **16** (1934), 214—217.
2. Sur certains problèmes de maximum de Stieltjes. Bull. Math. Soc. Roumaine de Sc., **38** (1936), 73—96.

Райт (Wright E. M.)
1. The coefficients of a certain power series. Journ. Lond. Math. Soc., **7** (1932), 256—262.

Рау (Rau H.)
1. Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen. Journ. für Math., **161** (1929), 237—254.
2. Über eine asymptotische Darstellung der Jacobischen Polynome durch Besselsche Funktionen. Math. Zeitshr., **40** (1936), 683—692.
Рисс М. (Riesz M.)
1. Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome. Jahresber. der DMV, **23** (1915), 354—368.
2. Sur le problème des moments. Arkiv för Mat. Astr. och Fysik, **16** (1921), № 12, 23 стр.; **16** (1922), № 19, 21 стр.; **17** (1923), № 16, 52 стр.
Рисс Ф. (Riesz F.)
*1. Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales. Annales Sc. de l'École Norm. Super., (3), **28** (1911), 33—62.
*2. Über die Randwerte einer analytischen Funktion. Math. Zeitschr., **18** (1923), 87—95.
Ротах (Rotach W.)
1. Reihenentwicklungen einer willkürlichen Funktion nach Hermiteschen und Laguerreschen Polynomen. Inauguraldissertation, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1925.
Сас (Szász O.)
*1. Korlátos hatványsorokról. Matematikai és Természettudományi Értesítö, **43** (1926), 504—520.
Сегё (Szegö G.)
1. A Hankel-féle formákról. Matematikai és Természettudományi Értesítö, **36** (1918), 497—538.
2. Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi. Math. Zeitschr., **1** (1918), 341—356.
3. Über Orthogonalsysteme von Polynomen. Там же, **4** (1919), 139—151.
4. Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen. II. Там же, **9** (1921), 167—190.
5. Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. Там же, **9** (1921), 218—270.
6. Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems. Math. Ann., **82** (1921), 188—212.
7. Über die Randwerte analytischer Funktionen. Там же, **84** (1921), 232—244.
8. Über den asymptotischen Ausdruck von Polynomen, die durch eine Orthogonalitäts-eigenschaft definiert sind. Там же, **86** (1922), 114—139.
9. Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems. Math. Zeitschr., **12** (1921), 61—94.
10. Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. I. Entwicklungssätze. Там же, **25** (1926), 87—115.
11. Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome. Там же, **25** (1926), 172—187.
12. Ein Beitrag zur Theorie der Thetafunktionen. Sitzungsber. der Preuss. Akad. der Wissenschaften, phys.-math. Klasse, 1926, 242—252.
13. Koeffizientenabschätzungen bei ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen. Math. Ann., **96** (1927), 601—632.
14. Über gewisse Interpolationspolynome, die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören. Math. Zeitschr. **35** (1932), 579—602.
15. Über einige asymptotische Entwicklungen der Legendreschen Funktionen. Proc. London Math. Soc., (2), **36** (1932), 427—450.
16. Über eine von Herrn S. Bernstein herrührende Abschätzung der Legendreschen Polynome. Math. Ann., **108** (1933), 360—369.
17. Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome. Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, naturwiss. Klasse, **10** (1933), 35—112.
18. Bemerkungen zu einem Satz von E. Schmidt über algebraische Gleichungen. Sitzungsber. der Preuss. Akad. der Wissenschaften, phys.-math. Klasse, 1934, 3—15.
19. Über gewisse orthogonale Polynome, die zu einer oszillierenden Belegungsfunktion gehören. Math. Ann. **110** (1934), 501—513.
20. Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related functions. Trans. Amer. Math. Soc., **39** (1936), 1—17.
21. An integral equation for the square of a Laguerre polynomial. Journ. London Math. Soc., **12** (1937), 162—163.
22. On an inequality of P. Turàn concerning Legendre polynomials. Bull. Amer. Math. Soc., **54** (1948), 401—405.
23. On the relative extrema of Legendre polynomials. Bollettino della Unione Matematica Italiana, (3), **5** (1950), 120—121.
24. On certain special sets of orthogonal polynomials. Proc. Amer. Math. Soc., **1** (1950), 731—737.

Сен и Рангачариар (Sen D. N. and Rangachariar V.)

1. Generalized Jacobi polynomials. Bull. Amer. Math. Soc., **42** (1936), 901—908

Смирнов В. И.

1. Sur la théorie des polynomes orthogonaux à une variable complexe. Журнал Ленингр. физ.-матем. о-ва, **2** (1928), 155—179.

2. Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent Изв. АН СССР, 1932, 337—372.

Смит (Smith E. R.)

1. Zeros of the Hermitian polynomials. Amer. Math. Monthly, **43** (1936), 354—358.

Сонин Н. Я.

1. Исследования о цилиндрических функциях и о разложении непрерывных функций в ряды (1880). Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. Гостехиздат, 1954, стр. 17—115.

2. О точности определения предельных величин интегралов (1892). Там же, стр. 170—196.

Спенсер (Spencer V. E.)

1. Asymptotic expressions for the zeros of generalized Laguerre polynomials and Weber functions. Duke Math. Journ., **3** (1937), 667—675.

Стеклов В. А.

1. Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles linéaires du second order et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les-dites fonctions. Сообщ. Харьк. матем. о-ва, (2), **10** (1907), 97—200. Remarque complémentaire, 201. *Русский перевод*: Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка, и их применении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям. Харьков, 1956.

2. О приближенном вычислении определенных интегралов при помощи формул механических квадратур, I, II. Изв. имп. АН, (6), **10** (1916), 169—186, 829—850.

Стилтьес (Stieltjes T. J.)

1. Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites méchaniques. Annales Sc. de l'École Norm. Supèr., (3), **1** (1884), 409—426. *Oeuvres Complètes*, **1**, 377—394.

2. Note à l'occasion de la réclamation de M. Markoff. Там же, (3), **2** (1885), 183—184. *Oeuvres Complètes*, **1**, 430—431.

3. Sur certains polynomes qui verifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé. Acta Math., **6** (1885), 321—326. *Oeuvres Complètes*, **1**, 434—439.

4. Sur quelques théorèmes d'algèbre. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., Paris, **100** (1885), 439—440. *Oeuvres Complètes* **1**, 440—441.

5. Sur les polynomes de Jacobi. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., Paris, **100** (1885), 620—622. *Oeuvres Complètes*, **1**, 442—444.

6. Sur les racines de l'équation $X_n=0$. Acta Math., **9** (1886), 385—400. *Oeuvres Complètes*, **2**, 73—88.

7. Sur la valeur asymptotique des polynomes de Legendre. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., Paris, **110** (1890), 1026—1027. *Oeuvres Complètes*, **2**, 234—235.

8. Sur les polynomes de Legendre. Annales Faculté des Sc. de Toulouse, 4 (1890), 17. *Oeuvres Complètes*, **2**, 236—252.

9. Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce. Annales Faculté des Sc., de Toulouse, **4** (1890), 10. *Oeuvres Complètes*, **2**, 253—262.

10. Recherches sur les fractions continues. Comptes Rendus de l'acad, des Sc., Paris, **118** (1894), 1401—1403. *Oeuvres Complètes*, **2**, 398—401.

11. Recherches sur les fractions continues. Annales Faculté des Sc., de Toulouse 8 (1894), 122; **9**, 1895, 47. *Oeuvres Complètes*, **2**, 402—566. *Русский перевод*: Стилтьес Т. И., Исследования о непрерывных дробях. Харьков, 1936.

12. Sur certaines inégalités dues à M. P. Tchebychef. Article rédigé d'après un manuscript inédit. *Oeuvres Complètes*, **2**, 586—593.

Стон (Stone M. H.)

1. Developments in Hermite polynomials. Annals of Math., (2), **29** (1928), 1—13.

Тамаркин (Tamarkin J. D.)

1. On the theory of polynomials of approximation. Lecture delivered at Brown University, 1935—1936.

Титчмарш (Titchmarsh E. C.)

1*. The theory of functions. Oxford, 1932. *Русский перевод*: Теория функций. Гостехиздат, 1951.

Торн (Thorne R. C.)

1. The asymptotic expansion of Legendre functions of large degree and order. Technical Report, Office of Naval Research. California Institute of Technology, 1956.

Трикоми (Tricomi F.)
1. Trasformazione di Laplace e polynomi di Laguerre. I. Inversione della trasformazione. Rendiconti della R. Academia dei Lincei, (6), **21** (1935), 232—239.
2. Sul comportamento asintotico dell'n-essimo polinomio di Laguerre nell'intorno dell'ascissa 4n. Commentarii Math. Helvetici, **22** (1949), 150—167.
3. Sul comportamento asintotico dei polinomidi Laguerre. Annali di Mat., (4), **28** (1949), 263—289.
4. Sugli zeri dei polinomi sferici ed ultrasferici. Там же, (4), **31** (1950), 93—97.
5. Vorlesungen über Orthogonalreihen. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.
Туран (Turán P.)
1. On the zeros of the polynomials of Legendre. Časopis pro Pěstováni Matematiky a Fisiky, **75** (1950), 113—122.
Уинстон (Winston C.)
1. On mechanical quadratures formulae involving the classical orthogonal polynomials. Annals of Math., (2), **35** (1934), 658—677.
Уиттекер и Ватсон (Whittaker E. T. and Watson G. N.)
1. A course of modern analysis. Cambridge, 1935. *Русский перевод*: Современный анализ. ГТТИ, 1933—1934.
Уолш (Walsh J. L.)
1. Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Amer. Math. Soc. Colloq. Public., **20**, 1935. *Русский перевод*. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. ИЛ, 1961.
Успенский (Uspensky J. V.)
1. On the development of arbitrary functions in series of Hermite's and Laguerre's polynomials. Annals of Math., (2), **28**, (1927), 593—619.
Фабер (Faber G.)
1. Über polynomische Entwicklungen. Math. Ann., **57** (1903), 389—408.
*2. Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen. Jahresber. der DMV, **23** (1914), 192—210.
3. Tschebyscheffsche Polynome. Journal für. Math., **150** (1919), 79—106.
4. Über nach Polynomen fortschreitende Reihen. Sitzungsber. der Bayrischen Akad. der Wissenschaften, 1922, стр. 157—178.
Фавар (Favard J.)
1. Sur les polynomes de Tchebicheff. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., Paris, **200** (1935), 2052—2053.
Фату (Fatou P.)
*1. Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Math., **30** (1906), 335—400.
Фейер (Fejér L.)
*1. Sur les fonctions bornées et intégrables. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., Paris, **131** (1900), 984—987.
*2. Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Math. Ann., **58** (1904), 51—69.
3. Asymptotikus értékek meghatórozásáról. Matematikai és Természettudományi Értesitö, **27** (1909), 1—33.
4. Über die Laplacesche Reihe. Math. Ann., **67** (1909), 76—109.
*5. Über trigonometrische Polynome. Journ. für Math., **146** (1915), 53—82.
6. Über Interpolation. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, (1916), 66—91.
7. Über die Lage der Nullstellen von Polynomen die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen. Math. Ann., **85** (1922), 41—48.
8. Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel. Math. Zeitschr., **24** (1925), 267—284.
9. Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome. Math. Zeitschr., **24** (1925), 285—298.
10. Über Weierstrass'sche Approximation, besonders durch Hermitesche Interpolation. Math. Ann., **102** (1930), 707—725.
11. Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen. Math. Zeitschr., **32** (1930), 426—457.
12. Ultrasphärikus polynomok összegéröl. Matematikai és Fizikai Lapok, **38** (1931), 161—164.
13. Lagrangesche Interpolation und die Zugehörigen konjugierten Punkte. Math. Ann., **106** (1932), 1—55.
14. Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein möglichst Kleines Maximum besitzt. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, (2), **1** (1932), 3—16.
15. Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen. Math. Zeitschr., **37** (1933), 287—309.

16. On the characterization of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points. Amer. Math. Monthly, **41** (1934), 1—14.

17. Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge und ihre Legendre Polynome. Proc. Cambridge Philosophical Soc., **31** (1935), 307—316.

18. A hatványsorról és a vele kapcsolatos Legendre-féle többtagúakról. Matematikai és Természettudományi Értesitö, **53** (1935), 1—17.

19. Bestimmung von Grenzen für die Nullstellen des Legendreschen Polynoms aus der Stieltjesschen Integraldarstellung desselben. Monatshefte für Math. und Physik, **43** (1936), 193—209.

20. Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. Trans. Amer. Math. Soc., **39** (1936), 18—59.

Фейер и Сегё (Fejér L. and Szegö G.)

*1. Über die monotone Konvergenz von Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. Prace Matematyczno-Fizyczne, **44** (1935), 15—25.

Фекете (Fekete M.)

*1. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Zeitschr., **17** (1923), 228—249.

Фельдгейм (Feldheim E.)

1. Sur l'orthogonalité des fonctions fondamentales de l'interpolation de Lagrange. C. R. Acad. Sc., Paris, **203** (1936), 650—652.

2. О характере сходимости при интерполировании методом Лагранжа. Докл. АН СССР, **14** (1937), 329—333.

3. Sur l'orthogonalité des fonctions fondamentales, et sur la forte convergence en moyenne des polynomes d'interpolation de Lagrange dans le cas des abscisses de Tchebychef. Bull. Soc. Math. de France, **65** (1937), 1—40.

4. Théorie de la convergence des procédés d'interpolation et de quadrature mécanique. Mémorial des Sc. Math., **95**, Paris, 1939.

Фрайд (Freud G.)

1. Az Hermite-Fejér-féle interpolációs eljárás konvergenciajáról. Magyar Tudománuos Akadémia. III. Osztályának közleményei, **5** (1955), 29—47.

2. Ortogonális polinómokról. Dissertation. Budapest, 1956.

3. Über die Asymptotik orthogonaler Polynome. Académie Serbe des Sc., **11** (1957), 19—32.

Фридрихс (Friedrichs K.)

1. On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables. Trans. Amer. Math. Soc., **41** (1937), 321—364.

Фудживара (Fujiwara M.)

1. On the zeros of Jacobi polynomials. Jap. Journ. of Math., **2** (1925), 1—2.

Хаар (Haar A.)

*1. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. I. Math. Ann., **69** (1910), 331—371.

2. Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen. Там же, **78** (1917), 121—136.

Хан (Hahn W.)

1. Die Nullstellen der Laguerreschen und Herniteschen Polynome. Inauguraldissertation, Berlin. Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin, **1** (1933), 213—244.

2. Bericht über Nullstellen der Laguerreschen und der Hermiteschen Polynome. Jahresber. der DMV, **44** (1934), 215—236. Nachtrag, там же, **45** (1935), 211.

3. Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen. Math. Zeitschr., **39** (1935), 634—638.

4. Über höhere Ableitung von Orthogonalpolynomen. Там же, **43** (1937), 101.

Харди (Hardy G. H.)

1. Summation of a series of polynomials of Laguerre. Journ. Lond. Math. Soc., **7**, (1932), 138—139, 192.

Харди, Литтльвуд и Полиа (Hapdy G. H., Littlewood J. E. and Pólya G.)

*1. Inequalities. Cambridge, 1934. *Русский перевод*: Неравенства, ИЛ, 1948.

Хаусдорф (Hausdorff F.)

*1. Momentprobleme für ein endliches Intervall. Math. Zeischr., **16** (1923), 220—248.

Хелли (Helly E.)

*1. Über lineare Funktionaloperationen. Sitzungsber. der math.-natur. Klasse der Akad. in Wien, Abteilung IIa, **121** (1912), 265—297.

Хилле (Hille E.)

1. A class of reciprocal functions. Annals of Math., (2), **27** (1926), 427—464.

2. On Laguerre's series. I, II, III. Proc. of the Nat. Acad. of Sc., **12** (1926), 261—265, 265—269, 348—352.

3. Bemerkung zu einer Arbeit des Herrn Müntz. Math. Zeitschr., **32** (1930), 422—425.

4. Über die Nullstellen der Hermiteschen Polynome. Jahresber. der DMV, 44 (1933), 162—165.
Хильб (Hilb E.)
1. Über die Laplacesche Reihe. Math. Zeitschr., 5 (1919), 17—25; 8 (1920), 79—90.
Холло́ (Holló A).
1. A mechanikus quadraturáról. Thesis. Budapest, 1939, 23 стр.
Хсю (Hsü H).
1. Certain integrals and infinite series involving ultraspherical polynomials and Bessel functions. Duke Math. Journ, 4 (1938), 374—383.
Цернике (Zernike F.)
1. Eine asymptotische Entwicklung für grösste Nullstelle der Hermiteschen Polynome. Koninklijke Akad. van Wetenschappen te Amsterdam. Proceedings, **34** (1931). 673—680.
Чакалов (Tchakaloff L.)
1. Sur la structure des ensembles linéaires définis par une cartaine propriété minimale. Acta Math., **63** (1934), 77—97.
Чебышев П. Л.
1. О непрерывных дробях (1855). *Полное собрание сочинений*, **2**, стр. 103—126; изд. АН СССР, **2** (1947), **3** (1948).
2. Об интерполировании по способу наименьших квадратов (1859). *Сочинения*, **2**, стр. 314—334.
3. О разложении функций одной переменной (1859). *Сочинения*, **2**, стр. 335—341.
4. Об интерполировании (1864). *Сочинения*, **2**, стр. 357—374.
5. О функциях, подобных функциям Лежандра (1870). *Сочинения*, **3**, стр. 5—12.
6. О предельных величинах интегралов (1874). *Сочинения*, **3**, стр. 63—65.
7. Об отношении двух интегралов, распространенных на одни и те же величины переменной (1883). *Сочинения*, **3**, стр. 132—156.
8. О представлении предельных величин интегралов посредством интегральных вычетов (1886). *Сочинения*, **3**, стр. 172—190.
Швид (Schwid N.)
1. The asymptotic forms of the Hermite and Weber functions. Trans. Amer. Math. Soc., **37** (1935), 339—362.
Шерман (Scherman J.)
1. On the numerators of the convergents of the Stieltjes continued fractions. Trans. Amer. Math. Soc., **35** (1933), 64—87.
Шибата (Shibata K.)
1. On the distribution of the roots of a polynomial satisfying a certain differential equation of the second order. Jap. Journ. of Math., **1** (1924), 147—153.
Шмидт (Schmidt E.)
1. Über die Charlier-Jordansche Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach der Poissonschen Funktion und ihren Ableitungen. Zeitschr. für angew. Math. und Mech., **13** (1933), 139—142.
Шохат (Schohat J.)
1. On the polynomial of the best approximation to a given continuous function. Bull. Amer. Math. Soc., **31** (1925), 509—514.
2. On a general formula in the theory of Tchebycheff polynomials and its applications. Trans. Amer. Math. Soc., **29** (1927), 569—583.
3. On a certain formula of mechanical quadratures with non-equidistant ordinates. Там же, **31** (1929), 448—463.
4. On the polynomial and trigonometric approximation of measurable bounded functions on a finite interval. Math. Ann., **102** (1929), 157—175.
5. On Interpolation. Annals of Math., (2), **34** (1933), 130—146.
6. Théorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebichef. Mémorial des Sc. Math. **61**, Paris, 1934.
7. On mechanical quardatures, in particular, with positive coefficients, Trans. Amer. Math. Soc., **42** (1937), 461—496.
8. On the convergence properties of Lagrange interpolation based on the zeros of orthogonal Tchebycheff polynomials. Annals of Math., (2), **38** (1937), 758—769.
Шохат, Хилле и Уолш (Shohat J. A., Hille E. and Walsh J. L.)
1. A bibliography on orthogonal polynomials. Washington, 1940.
Шур (Schur J.)
1. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Zeitschr., **1** (1918), 377—402.
2. Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome. Jorn. für Math., **165** (1931), 52—58.
Шураньи и Туран (Surányi J. and Turán P.)
1. Notes on interpolation. I. (On some interpolatorical properties of the ultraspherical polynomials). Acta Math. Acad. Sc. Hungaricae, **6** (1955), 67—79.

Эйлер (Euler L.)
*1. Institutiones calculi integralis. Vol. 2, sect. I, chap. X, problem 130. *Opera Omnia*, Ser. 1, vol. 12, стр. 224.
Эрдёш (Erdös P.)
1. On the distribution of normal point groups. Proc. Nat. Acad. Sc., **26** (1940), 294—297.
2. On divergence properties of the Lagrange interpolation parabolas. Annals of Math., **42** (1941), 309—315.
Эрдёш и Грюнвальд (Erdös P. and Grünwald G.)
1. Über einen Faber'schen Satz. Annals of Math., **39** (1938), 257—261.
Эрдёш и Ленжиель (Erdös P. and Lengyel B. A.)
1. On fundamental functions of Lagrangean interpolation. Bull. Amer. Math. Soc., **44** (1938), 828—834.
Эрдёш и Туран (Erdös P. and Turán P.)
1. On interpolation. I. Quadrature - and mean-convergence in the Lagrange interpolation. Annals of Math., (2), **38** (1937), 142—155.
2. On interpolation. II. On the distribution of the fundamental points of Lagrange and Hermite interpolation. Там же, **39** (1938), 703—724.
3. On interpolation. III. Interpolatory theory of polynomials. Там же, **41** (1940), 510—553.
Эрдёш и Фельдгейм (Erdös P. and Feldheim E.)
1. Sur le mode de convergence pour l'interpolation de Lagrange. Comptes Rendus. Acad. Sc., Paris, **203** (1936), 913—915.
Эрдейи (Erdélyi A.)
1. Über eine Integraldarstellung der *Mk*, *m*-Funktionen und ihre asymptotische Darstellung für grosse Werte von Rek. Math., Ann., **113** (1936), 357—362.
2. Über eine arzeugende Funktion von Produkten Hermitescher Polynome. Math. Zeitschr., **44** (1938), 201—211.
3. Asymptotic forms for Laguerre polynomials. Golden Jubillee Comemoration Volume of the Jndian Mathematical Soc., 1959.
Эрдейи и Суонсон (Erdélyi A. and Swanson C. A.)
1. Asymptotic forms of Whittaker's confluent hypergeometric functions. Memoirs Amer. Math. Soc., **25**, 1957.
Эрмит (Hermite C.)
1. Sur les polynomes de Legendre. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **4** (1890), 146—152. *Oeuvres*, **4**, стр. 314—320.
2. Sur les polynomes de Legendre. Journ. für. Math., **107** (1891), 80—83. *Oeuvres*, **4**, стр. 321—326.
3. Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce. Ann. Fac. Sc. de Toulouse, **4** (1890), 10 стр. *Oeuvres*, **4**, стр. 327—336.
Эрмит и Стилтьес (Hermite C. et Stieltjes T. J).
1. Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, **1**, **2**. Paris, 1905.
Юнг (Young W. H.)
1. On the connexion between Legendre series and Fourier series. Proc. Lond. Math. Soc., (2), **18** (1919), 141—162.
Якоби (Jacobi C. G. L.)
1. Über Gauss'neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden. Journ. für Math., 1 (1826), 301—308. *Gesammelte Werke*, **6**, стр. 3—11.
2. Über die Entwicklung des Ausdrucks $(aa-2aa'\,[\cos\omega\cos\varphi+\sin\omega\sin\varphi\times\cos(\theta-\theta')]+aa')^{-\frac{1}{2}}$. Там же, **26** (1843), 81—87. *Gesammelte Werke*, **6**, стр. 148—155.
3. Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. Там же, **56** (1859), 149—165. *Gesammelte Werke*, **6**, стр. 184—202.

ДОПОЛНЕНИЯ

(*Я. Л. Геронимус*)

По сравнению с первым изданием книги Г. Сегё (1939 г.) ее второе издание является не переработанным, не дополненным, а лишь *пересмотренным*, как это указывает автор; поэтому нам казалось полезным сделать к нему некоторые дополнения. Эти дополнения посвящены, с одной стороны, работам (в области теории ортогональных многочленов), опубликованным после 1939 г.— главным образом, хотя и не исключительно, советским работам. С другой стороны, в дополнениях рассмотрены некоторые другие вопросы, тесно связанные с теорией ортогональных многочленов и содержащие многие положения этой теории как частные случаи гораздо более общих теорем; в частности, многие положения теории ортогональных многочленов вытекают из общих свойств непрерывных дробей, из общих результатов теории моментов Гамбургера, из общих свойств многочленов, определяемых производящей функцией специального вида, или имеющих некоторую специальную форму и т. п.

Сделанные нами дополнения не могут, конечно, претендовать на исчерпывающую полноту. Кроме того, вполне естественно, что они носят на себе отпечаток индивидуальных интересов их автора — например, сделано гораздо больше дополнений к теории многочленов, ортогональных относительно произвольного распределения $d\alpha\ (x)$ типа Стилтьеса, чем к частному случаю классических ортогональных многочленов.

Для удобства читателя мы расположили дополнения по главам.

Для экономии места все ссылки на работы советских авторов, вышедшие в свет в период 1917—1957 гг., мы обозначили звездочками, и полное название и библиографические данные для этих работ следует искать в сборнике «Математика в СССР за сорок лет 1917—1957», том II; например, наша ссылка «С. Н. Бернштейн [96 *]» означает работу указанного автора «О многочленах, ортогональных в конечном интервале», приведенную под № 96 на стр. 73 указанного сборника.

Все формулы в дополнениях мы нумеруем двумя числами, первое из которых, написанное римскими цифрами, соответствует номеру дополнений к соответствующей главе; так, например, обозначение (III.4) соответствует формуле № 4 дополнений к главе III. Обозначения без римских цифр относятся к основному тексту книги.

ГЛАВА I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.4, 1.6. Г. Сегё вводит только *линейные функционалы* $\mathfrak{U}\ (f)$, которые каждой функции $f\,(x)$ ставят в соответствие число; для того чтобы охватить дальнейшие рассуждения более общими формулировками, рассмотрим *линейные операторы* $U\,(f)$, которые каждой функции $f\,(x)$ ставят в соответствие некоторую другую *функцию* $\varphi(x)$; примеры (при x_0 переменном, а не фиксированном): 1) интерполяционный многочлен Лагранжа (1.6.6); 2) частная сумма $s_n(x)$ (3.1.11) разложения функции $f(x)$ в ряд ортонормальных многочленов $\{p_k(x)\}_0^n$, а также интеграл Дирихле (1.6.4), интеграл Фейера (1.6.5) и т. п.

Так же, как в § 1.6, введем *норму* $\|U\|$ *оператора* $U(f)$ в метрике пространства C функций, непрерывных на $[a, b]$; тогда

$$\max|U(f)| \leqslant \|U\| \max|f(x)|, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{I.1}$$

Пусть многочлен $\tilde{\varrho}_n(x)$ осуществляет на отрезке $[a, b]$ наилучшее приближение $E_n(f)$ функции $f(x)$:

$$\max|f(x)-\varrho_n(x)| \geqslant \max|f(x)-\tilde{\varrho}_n(x)| = E_n(f), \quad a \leqslant x \leqslant b; \tag{I.2}$$

пусть оператор $U_n(f)$ оставляет неизменным любой многочлен $\varrho_n(x)$ степени не выше n, т. е. пусть $U_n(\varrho_n)=\varrho_n(x)$, тогда

$$\left.\begin{aligned} &U_n(f)-f(x)=\{U_n(f)-\tilde{\varrho}_n(x)\}+\{\tilde{\varrho}_n(x)-f(x)\}=U_n(f-\tilde{\varrho}_n)+\{\tilde{\varrho}_n(x)-f(x)\},\\ &|U_n(f)-f(x)| \leqslant \|U_n\| E_n(f)+E_n(f)=E_n(f)\{\|U_n\|+1\}, \quad a \leqslant x \leqslant b; \end{aligned}\right\} \tag{I.3}$$

следовательно, для сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(f)=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ достаточно условие

$$\lim_{n\to\infty}\{E_n(f)\|U_n\|\}=0. \tag{I.4}$$

В двух указанных выше частных случаях нормы $\|U_n\|$ оператора таковы:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \|U_n\|=\max L_n(x), \quad L_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|l_k(x)|, \quad a \leqslant x \leqslant b,\\ &2)\ \|U_n\|=\max L_n(x), \quad L_n(t)=\int_a^b |K_n(t, x)|\,d\alpha(x), \end{aligned}\right\} \tag{I.5}$$

т. е. являются *константами Лебега*, а $L_n(x)$ — *функциями Лебега* для интерполяционного процесса Лагранжа и, соответственно, процесса Фурье.

С. М. Лозинский, В. Ф. Николаев и Ф. И. Харшиладзе доказали весьма общую теорему [1]): *если* $U_n(f)$ — *линейный оператор, переводящий любую функцию* $f(x) \in C$ *в многочлен степени* $\leqslant n$ *и оставляющий неизменным всякий такой многочлен, то* $\|U_n\| \geqslant \dfrac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}$ — *поэтому не существует последовательности операторов указанного типа* $\{U_n(f)\}_0^\infty$, *для которых мы имели бы*

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f)=f(x) \tag{I.6}$$

равномерно на $[a, b]$ *для любой функции* $f(x) \in C$.

Таким образом, нормы операторов указанного типа растут не медленнее, чем $O(\ln n)$ — если они имеют именно этот порядок, то сходимость (I.5) будет иметь место для каждой непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей на $[a, b]$ *условию Дини* $\omega(\delta)\ln\frac{1}{\delta} \to 0$, ибо отсюда вытекает

$$\lim_{n\to\infty}\{E_n(f)\|U_n\|\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right\}=0. \tag{I.7}$$

---

1) См., например, И. П. Натансон [36*], доб. 3; из этой теоремы вытекает, например, известная теорема Бернштейна—Фабера.

Г. Сегё в 14.4, (3) применил эти рассуждения к частному случаю сходимости интерполяционного процесса Лагранжа — однако, как было сказано, эти же результаты мы имеем и для сходимости разложения в ряд ортонормальных многочленов.

ГЛАВА II

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ. ОСНОВНЫЕ ПРИМЕРЫ

2.2. Ввиду того что многие соотношения в теории ортогональных многочленов выводятся чисто формальным методом, они справедливы при гораздо более общих предположениях, чем это сделано в данной книге.

Будем исходить из последовательности несингулярных билинейных форм

$$H_m = \sum_{i,\ k=0}^{m} c_{ik} x_i \bar{x}_k \quad (m = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{II.1}$$

или, что то же самое, из последовательности $\{c_{ik}\}_0^m$ $(m=0, 1, \ldots)$ комплексных чисел, называемых *моментами* и подчиненных условиям

$$D_n = |\, c_{ik}\,|_{i,\ k=0}^{n} \neq 0 \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots,\ m; \quad m = 0,\ 1,\ \ldots); \tag{II.2}$$

определим в пространстве многочленов линейный функционал $\mathfrak{S}$ с помощью равенств

$$\mathfrak{S}\{z^i \bar{z}^k\} = c_{ik}, \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m; \quad m = 0,\ 1,\ \ldots); \tag{II.3}$$

многочлены $\{P_n(z) = z^n + \ldots\}$, удовлетворяющие условиям

$$\mathfrak{S}\{P_i(z)\overline{P_k(z)}\} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m; \quad m = 0,\ 1,\ \ldots), \\ h_k = \dfrac{D_k}{D_{k-1}} \neq 0, & i = k, \end{cases} \tag{II.4}$$

будем называть *ортогональными относительно последовательности* $\{c_{ik}\}$. Нетрудно видеть, что они выражаются следующей формулой:

$$P_n(z) = \frac{1}{D_{n-1}} \begin{vmatrix} c_{00} & c_{10} & \ldots & c_{n0} \\ c_{01} & c_{11} & \ldots & c_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{0,\ n-1} & c_{1,\ n-1} & \ldots & c_{n,\ n-1} \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{vmatrix} \quad (n=0,\ 1,\ \ldots,\ m;\ m=0,\ 1,\ \ldots),\ D_{-1}=1. \tag{II.5}$$

Из этой формулы ясно, что многочлены $\left\{p_n(z) = \dfrac{P_n(z)}{\sqrt{h_n}}\right\}_0^\infty$ *ортонормальны относительно последовательности* $\{c_{ik}\}$, т. е.

$$\mathfrak{S}\{p_i(z)\overline{p_k(z)}\} = \delta_{ik} \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m; \quad m = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{II.6}$$

Мы рассмотрели весьма общее определение ортогональности; покажем, что в нем содержатся все случаи, рассмотренные в данной книге.

1) *Пусть* $z = \bar{z}$; так как это равенство характеризует вещественную ось, то в этом случае будем говорить *об ортогональности на вещественной оси* (см. гл. II—IX, XIV—XV); мы имеем

$$\mathfrak{S}\{z^i \bar{z}^k\} = c_{ik} = \mathfrak{S}\{z^{i+k}\} = c_{0,\ i+k} = c_{1,\ i+k-1} = \ldots = c_{i+k,\ 0} = c_{i+k},$$

если введем обозначение

$$c_{i+k}=c_{0,\, i+k}=c_{i+k,\, 0} \quad (i,\, k=0,\, 1,\, \ldots,\, m; \quad m=0,\, 1,\, \ldots); \qquad (\text{II}.7)$$

следовательно, в этом случае форма (II.1) такова: $H_m=\sum_{i,\, k=0}^{m} c_{i+k}x_i\bar{x}_k$.

2) *Пусть теперь* $\bar{z}=\frac{1}{z}$; так как это равенство характеризует единичную окружность, то в этом случае будем говорить об *ортогональности на единичной окружности* (см. гл. XI—XIII); при этом будем иметь

$$c_{ik}=\mathfrak{S}\{z^i\bar{z}^k\}=c_{i-1,\, k-1}=\ldots=c_{i-2,\, k-2}=\ldots=c_{i-k},$$

если введем обозначение

$$c_{i-k}=c_{i-k,\, 0}=c_{0,\, k-i} \quad (i,\, k=0,\, 1,\, \ldots,\, m; \quad m=0,\, 1,\, \ldots). \qquad (\text{II}.8)$$

В этом случае форма (II.1) такова: $H_m=\sum_{i,\, k=0}^{m} c_{i-k}x_i\bar{x}_k$.

3) Общий случай соответствует *ортогональности на любой кривой*, или *ортогональности по области* (см. гл. XVI). В первом случае, если кривая алгебраическая с уравнением $f(x,y)=0$, то, произведя замену $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$, мы приведем его к виду $\sum_{r,\, j=0}^{n} a_{rj}z^r\bar{z}^j=0$; умножая на $z^i\bar{z}^k$ и применяя наш функционал, мы получим соотношения между моментами[1])

$$\sum_{r,\, j=0}^{n} a_{rj}c_{r+i,\, k+j}=0 \quad (i,\, k=0,\, 1,\, \ldots);$$

во втором случае z и $\bar{z}$ — независимые переменные и моменты не связаны никакими соотношениями.

В рассмотренном нами общем случае ортогональности мы смогли только указать формулу (II.5); наложим теперь на наш функционал $\mathfrak{S}$, а следовательно, и на нашу последовательность $\{c_{ik}\}$ так называемое *условие неотрицательности*: если многочлен $G(z)$ имеет вещественное неотрицательное значение, то величина $\mathfrak{S}\{G(z)\}$ также должна быть вещественной и неотрицательной; нетрудно видеть, что это условие эквивалентно такому: $\{D_n\}_0^\infty \geqslant 0$.

Так как при этом условии мы имеем $c_{ik}=\bar{c}_{ki}$ $(i,\, k=0,\, 1,\, \ldots)$, то билинейная форма (II.1) будет в общем случае *эрмитовой формой*; в случае ортогональности на вещественной оси она будет *формой Ханкеля* $H_m=\sum_{i,k=0}^{m} c_{i+k}x_i\bar{x}_k$, причем все моменты $\{c_i\}_0^\infty$ вещественны; в случае ортогональности на единичной окружности она будет *формой Тёплица* $H_m=\sum_{i,\, k=0}^{m} c_{i-k}x_i\bar{x}_k$, причем $c_{k-i}=\bar{c}_{i-k}$ $(i,\; k=0,\; 1,\; \ldots)$.

При неотрицательном функционале мы можем в самом общем случае указать некоторые свойства ортогональных многочленов:

1) многочлен $P_n(z)$ минимизирует функционал $\mathfrak{S}\{|z^n+\ldots|^2\}$, т. е. $h_n=\mathfrak{S}\{|P_n(z)|^2\}\leqslant\mathfrak{S}\{|z^n+\ldots|^2\}$; (II.9)

2) если ввести обозначение

$$K_n(z,\, x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{P_\nu(z)\,\overline{P_\nu(x)}}{h_\nu}=\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(z)\,\overline{p_\nu(x)}, \quad \varrho_n(x)=\frac{1}{K_n(x,\, x)}, \qquad (\text{II}.10)$$

---

[1]) См. М. Г. Крейн [11*].

то многочлен $\dfrac{K_n(z, x)}{K_n(x, x)}$ минимизирует функционал

$$\mathfrak{S}\{|1-(x-z)(a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0)|^2\}, \qquad (II.11)$$

т. е. имеет место неравенство

$$\varrho_n(x)=\mathfrak{S}\left\{\left|\frac{K_n(z, x)}{K_n(x, x)}\right|^2\right\}\leqslant\mathfrak{S}\{|1-(x-z)(a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0)|^2\}; \qquad (II.12)$$

3) так как $\varrho_{n+1}(z)\leqslant\varrho_n(z)$, то в каждой точке z существует предельная функция $\varrho(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\varrho_n(z)\geqslant 0$.

Займемся сперва детальным рассмотрением *ортогональности на вещественной оси*.

Нетрудно видеть, что формула (2.2.6), выражающая ортогональный многочлен непосредственно через моменты $\{c_k\}_0^{2n-1}$, справедлива и в общем случае ортогональности относительно этой последовательности, ибо является частным случаем формулы (II.5) при $c_{ik}=c_{i+k}$ $(i, k=0, 1, \ldots)$, однако в этом общем случае старший коэффициент k_n (2.2.15) может уже не быть вещественным и положительным.

В том частном случае, когда все моменты $\{c_n\}_0^\infty$ *вещественны*, возникает вопрос о возможности представления (2.2.1). Так называемая *проблема моментов* (Гамбургера) ставит следующие вопросы и дает ответы на них: 1) найти условия, которым должны удовлетворять заданные моменты $\{c_n\}_0^\infty$ *для возможности этого представления*; 2) найти условия *определенности* решения, при которых любые два решения *эквивалентны*, т. е. характеризуют одно и то же распределение масс; 3) построить решение по заданным моментам.

Ответ на вопрос 1) весьма прост: *для возможности представления* (2.2.1), *в котором $\alpha(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации с бесчисленным множеством точек роста, необходимы и достаточны условия* [1])

$$D_n>0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \qquad (II.13)$$

2.7, 2.8, 2.81. Рассмотрим систему многочленов $\{P_n(x)\}$, имеющих следующую форму:

$$P_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}a_{n-\nu}b_\nu\omega_\nu(x), \quad \omega_\nu(x)=\prod_{k=1}^{\nu}(x-x_k) \ (\nu=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots),$$
$$P_0=a_0b_0, \qquad (II.14)$$

где $\{a_k\}_0^\infty$, $\{b_k\}_0^\infty\neq 0$, $\{x_k\}_0^\infty$ — произвольные комплексные числа; под этот тип подходят многие системы многочленов, рассмотренные различными авторами (Ангелеско, Аппелем, Бейтменом, Вигертом, Готтлибом, Жорданом, Лагерром, Мейкснером, Пуассоном, Стилтьесом, Фельдгеймом, Шарлье, Эрмитом и др.).

Нетрудно вывести условия, достаточные для ортогональности этих многочленов относительно некоторой числовой последовательности, а также найти эту последовательность.

2.9. Кроме результатов А. А. Маркова, Н. И. Ахиезера, В. Ф. Бржечка и автора, относящихся к тому случаю, когда вес обращается в нуль на множестве положительной меры [2]), отметим еще работу Г. И. Баркова

---

[1]) Ответы на вопросы 2), 3) будут даны в дополнениях к гл. III.

[2]) См. Я. Л. Геронимус [97*], §§ 10—11; Н. И. Ахиезер [1].

[1], рассмотревшего многочлены, ортогональные относительно таких весов:

$$\left.\begin{aligned} w_1(x) &= \begin{cases} |x+\alpha|(x^2-\xi^2)^p(1-x^2)^q, & x\in F_1=[-1,\ -\xi]+[\xi,\ 1],\quad p,\ q>-1,\\ 0, & x\bar{\in} F_1,\end{cases}\\ w_2(x) &= \begin{cases} |x+\alpha|(x^2-\xi^2)^p e^{-(x^2-\xi^2)}, & x\in F_2=(-\infty,\ -\xi]+[\xi,\ +\infty),\quad p>-1,\\ 0, & x\bar{\in} F_2.\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{II.15}$$

Ортогональные многочлены, соответствующие весу $w_1(x)$, являются обобщением ультрасферических многочленов и многочленов, рассмотренных В. Ф. Бржечка; если же в формуле для $w_2(x)$ положить $\alpha=\xi=0$, то получим многочлены, рассмотренные впервые Н. Я. Сониным, а затем А. А. Марковым [1]); они являются обобщением многочленов Эрмита [2]).

Отметим также работу Тартлера [1], у которого

$$\alpha(x)=\int_a^x (t-\alpha_1)\,d\alpha_0(t),\quad \text{или}\quad \alpha(x)=\int_a^x (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\,d\alpha_0(t), \tag{II.16}$$

где α_1, α_2 лежат внутри отрезка $[a,\ b]$, а $\alpha_0(x)$, $x\in[a,\ b]$ — неубывающая функция ограниченной вариации.

Отметим еще класс многочленов $\{P_n^{(\omega)}(x)\}$, определяемых соотношением [3])

$$\Delta P_n^{(\omega)}(x)=\frac{P_n^{(\omega)}(x+\omega)-P_n^{(\omega)}(x)}{\omega}=\lambda_n P_{n-1}^{(\omega)}(x)\quad (n=1,\ 2,\ \ldots); \tag{II.17}$$

эти многочлены могут быть представлены в явной форме

$$P_n^{(\omega)}(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\frac{x}{\omega}}{\nu}\omega^\nu c_{n-\nu}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{II.18}$$

и характеризуются производящей функцией

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\omega)}(x)\,t^n=(1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}}\varphi(t),\quad \varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k. \tag{II.19}$$

Они подходят под тип (II. 14) и являются обобщением многочленов Пуассона — Шарлье, соответствующих случаю $\varphi(t)=e^{-at}$.

С другой стороны, рассматривая многочлены, определяемые Мейкснером [1] при помощи производящей функции

$$e^{xu(t)}f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)\,t^n}{n!},\quad f(0)=1,\quad u(0)=0,\quad u'(0)=1, \tag{II.20}$$

мы видим, что многочлены Обрешкова соответствуют частному случаю

$$u(t)=\frac{1}{\omega}\ln(1+\omega t).$$

Многочлены Мейкснера являются обобщением многочленов Эрмита, Лагерра и Пуассона — Шарлье; если $t(u)$ — функция, обратная функции

---

1) См. Я. Л. Геронимус [97*], § 9.
2) См. также Г. И. Барков [2].
3) Обрешков [1].

$u(t)$, то основное свойство многочленов Мейкснера таково:

$$t(D) P_n(x) = n P_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{II.21}$$

где $D = \frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования. При $u(t) = t$ получим так называемые *многочлены Аппеля* [1]), обладающие рядом интересных свойств; единственная система многочленов Аппеля, обладающая свойством ортогональности, это система многочленов Эрмита.

В случае многочленов Обрешкова оператор $t(D)$ таков:

$$t(D) = \frac{e^{\omega D} - 1}{\omega} = \frac{\Delta}{\omega}, \tag{II.22}$$

т. е. сводится к нахождению *разделенной конечной разности.*

Более общий оператор

$$Lf(x) = \frac{f(qx+\omega) - f(x)}{(q-1)x+\omega}, \quad |q| \neq 1, \tag{II.23}$$

рассмотрен Ханом [1]; он показал, что следующие условия определяют один и тот же класс многочленов: 1) система многочленов $\{Lp_n(x)\}$ является ортогональной одновременно с системой $\{p_n(x)\}$; 2) $y = p_n(x)$ является решением уравнения

$$(a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13}) L^2 y + (a_{21}x + a_{22}) Ly + a_3 y = 0. \tag{II.24}$$

ГЛАВА III
ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

1.5, 3.1. Обозначим через L^p_α пространство функций $f(x)$ (в общем случае комплекснозначных) с нормой

$$\|f\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, d\alpha(x) \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad p \geqslant 1. \tag{III.1}$$

Как было сказано, система многочленов $\{p_n(x)\}_0^\infty$, или, что то же самое, система степеней $\{x^n\}_0^\infty$, называется *замкнутой* в L^p_α, если для каждой функции $f(x) \in L^p_\alpha$ и для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такой многочлен $\varrho_n(x)$, чтобы иметь $\|f - \varrho_n\| < \varepsilon$; мы видим, что при $p = 2$ на основании (3.1.4), (3.1.5) замкнутость эквивалентна справедливости равенства Парсеваля (3.1.13).

Отметим важную теорему *Рисса—Фишера*: если задана произвольная последовательность комплексных чисел $\{f_i\}_0^\infty$, причем $\sum_{i=0}^{\infty} |f_i|^2 < \infty$, то существует единственная функция $f(x) \in L^2_\alpha$, для которой эти числа являются коэффициентами Фурье

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, p_k(x) \, d\alpha(x) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{III.2}$$

и для которой выполняется условие замкнутости (3.1.13).

Будем называть систему многочленов $\{p_n(x)\}_0^\infty$ *полной* относительно пространства L^p_α, если ее нельзя пополнить, т. е. если единственной

---

[1]) См. Аппель [1], Шохат [1], Я. Л. Геронимус [38*].

функцией $\varphi(x) \in L^p_\alpha$, ортогональной ко всем многочленам $\{p_n(x)\}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, p_n(x)\, d\alpha(x) = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{III.3}$$

является функция, эквивалентная нулю, т. е. равная нулю на множестве точек роста функции $\alpha(x)$.

Нетрудно показать, что *при $p=2$ понятия полноты и замкнутости эквивалентны.* Действительно, пусть система $\{p_n(x)\}_0^\infty$ замкнута в L^2_α; если бы она не была полной, то существовала бы функция $\varphi(x) \in L^2_\alpha$, удовлетворяющая (III.3), все коэффициенты Фурье которой, таким образом, равнялись бы нулю, поэтому разность (3.1.4) не стремилась бы к нулю при $n \to \infty$, что противоречило бы условию замкнутости.

Наоборот, пусть система $\{p_n(x)\}_0^\infty$ полна в L^2_α; если бы она не была замкнутой, то нашлась бы функция $\varphi(x) \in L^2_\alpha$, для которой мы имели бы

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k|^2 < \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\, d\alpha(x); \tag{III.4}$$

но по теореме Рисса — Фишера существовала бы функция $\psi(x) \in L^2_\alpha$ с теми же коэффициентами Фурье $\{\varphi_k\}_0^\infty$, для которой выполнялось бы условие замкнутости, т. е. эта функция не была бы эквивалентна $\varphi(x)$ и мы имели бы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{|\varphi(x)|^2 - |\psi(x)|^2\}\, d\alpha(x) > 0. \tag{III.5}$$

С другой стороны, мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(x) - \psi(x)\}\, p_n(x)\, d\alpha(x) = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

откуда на основании полноты вытекала бы эквивалентность функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Вопрос о замкнутости ортогональной системы $\{p_n(x)\}_0^\infty$ в пространстве L^2_α подробно рассмотрен в нашей книге [97 *], (§§ 3, 23), где приведены основные результаты П. Л. Чебышева, В. А. Стеклова и М. Рисса; сформулируем лишь окончательный результат, дополняющий теорему 3.1.5: для замкнутости системы многочленов $\{p_n(x)\}_0^\infty$ в пространстве L^2_α *в случае бесконечного интервала ортогональности* необходимо и достаточно, чтобы соответствующая проблема моментов была определенной, или же если она неопределенна, то чтобы функция $\alpha(x)$ была так называемым *экстремальным решением* [1]).

3.11. Остановимся на случае $p=1$, $d\alpha(x) = dx$ и будем искать многочлен $\varrho_n(x) = x^n + \ldots$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике пространства L, т. е. минимизирующий интеграл $\int_{-1}^{1} |\varrho_n(x)|\, dx$.

Можно показать справедливость неравенства $\int_{-1}^{1} |\varrho_n(x)|\, dx \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$, причем знак равенства имеет место лишь для многочлена Чебышева

---

[1]) Мы еще вернемся к этому вопросу в конце дополнений к этой главе и в дополнениях к главе IV.

второго рода

$$\widetilde{\varrho}_n(x)=\frac{1}{2^n}U_n(x)=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},\quad x=\cos\varphi. \tag{III.6}$$

Рассмотренная задача привлекала к себе внимание многих математиков — она была рассмотрена П. Л. Чебышевым [1], затем А. Н. Коркиным и Е. И. Золотаревым [1], затем М. Фудживара [1] и, наконец, С. Н. Бернштейном [26*][1]); она является частным случаем более общей задачи, рассмотренной Стилтьесом, а затем А. А. Марковым [1] и С. Н. Бернштейном [96*]; ее решение дается следующей теоремой: если заданы вес $w(x)>0$ и функция $f(x)$, n-я производная которой не изменяет знака на $[-1, +1]$, то минимум интеграла $\int\limits_{-1}^{1} w(x)\,|f(x)-\varrho_{n-1}(x)|\,dx$ достигается для многочлена $\widetilde{\varrho}_{n-1}(x)$, значения которого совпадают со значениями данной функции $f(x)$ в корнях многочлена, минимизирующего интеграл $\int\limits_{-1}^{1} w(x)\,|x^n+\ldots|\,dx$; таким образом, задача наилучшего приближения в метрике пространства L_1 сводится к интерполяционной задаче, если найден многочлен $x^n+\ldots$, наименее уклоняющийся от нуля в этой метрике.

С. Н. Бернштейну [96*] принадлежат следующие основные теоремы, связывающие между собой отклонения многочлена $\varrho_n(x)=x^n+\ldots$ от нуля при различных значениях p в (3.11.1): 1) многочлен Чебышева $T_n(x)$ минимизирует интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} f(|\varrho_n(x)|)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

где $f(x)$ — произвольная неубывающая выпуклая функция; 2) если $w(x)=\frac{t(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, где функция $t(x)$ непрерывна на $[-1, +1]$ и удовлетворяет неравенствам

$$0<m\leqslant t(x)\leqslant M,\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

то ортогональные многочлены $\{P_n(x)\}_0^\infty$, минимизирующие интеграл

$$H_n^{(l)}(t)=\int\limits_{-1}^{1}\{t(x)\,|\varrho_n(x)|\}^l\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

при $l=2$, минимизируют его асимптотически (т. е. при $n\to\infty$) при любом $l>2$, а также минимизируют взвешенное произведение

$$L_n(t)=\max\{t(x)\,|\varrho_n(x)|\},\quad -1\leqslant x\leqslant 1;$$

при этом

$$\min H_n^{(l)}(t)\sim\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right)}\{\min L_n(t)\}^l;$$

[1]) В последнее время эта задача была обобщена в различных направлениях Н. И. Ахиезером [37*], Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном [45*], [34*], а также Я. Л. Геронимусом [56*], [62*], [65*].

при $t(x) \equiv 1$ все эти соотношения являются не асимптотическими, а точными и справедливы при любом $l \geqslant 1$.

3.2. Обе теоремы (3.2.1 и 3.2.2) носят чисто формальный характер и справедливы при ортогональности относительно числовой последовательности; если заданные комплексные моменты $\{c_n\}_0^\infty$ удовлетворяют единственному условию $\{D_n\}_0^\infty \neq 0$, то ортогональные многочлены $\left\{P_n(x) = \frac{p_n(x)}{k_n}\right\}_0^\infty$ связаны трехчленной рекуррентной формулой

$$P_n(x) = (x - \alpha_n) P_{n-1}(x) - \beta_n P_{n-2}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad P_{-1} = 0, \quad P_0 = 1, \tag{III.7}$$

эквивалентной формуле (3.2.1); ее коэффициенты выражаются через моменты формулами

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{D_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-2} & c_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-3} & c_{2n-1} \end{vmatrix} - \\
&\qquad - \frac{1}{D_{n-2}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-3} & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-2} & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-2} & c_{n-1} & \ldots & c_{2n-5} & c_{2n-3} \end{vmatrix}, \quad \alpha_1 = \frac{c_1}{c_0}, \\
\beta_n &= \frac{D_{n-1} D_{n-3}}{D_{n-2}^2}, \quad D_{-1} = 1 \quad (n = 2, 3, \ldots).
\end{aligned}\right\} \tag{III.8}$$

Наоборот, если даны две последовательности комплексных чисел $\{\alpha_n\}_1^\infty$, $\{\beta_n\}_2^\infty \neq 0$, то многочлены $\{P_n(x)\}_0^\infty$, построенные по формуле (III. 7), ортогональны относительно некоторой последовательности $\{c_n\}_0^\infty$, причем эти числа последовательно, одно за другим, могут быть найдены из формул (III.8), если задать $c_0 \neq 0$.

Если все числа $\{\alpha_n\}_1^\infty$, $\{\beta_n\}_2^\infty > 0$ вещественны, то многочлены $\{P_n(x)\}_0^\infty$, построенные по формуле (III.7), ортогональны в обычном смысле слова

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) P_m(x)\, d\alpha(x) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ h_n > 0, & n = m. \end{cases} \tag{III.9}$$

Сегё приписывает этот последний результат Фавару; иногда его приписывают Шохату, но значительно раньше он уже фигурировал в рассуждениях Гамбургера.

3.5. Рассмотрим снова многочлены $\{P_n(x) = x^n + \ldots\}_0^\infty$, ортогональные относительно числовой последовательности $\{c_n\}_0^\infty$, и связывающую их рекуррентную формулу (III.7); рассмотрим непрерывную дробь

$$K(z) \sim \frac{\beta_1 \mid}{\mid z - \alpha_1} - \frac{\beta_2 \mid}{\mid z - \alpha_2} - \ldots \frac{\beta_n \mid}{\mid z - \alpha_n} - \ldots, \tag{III.10}$$

и пусть $\{K_n(z)\}_1^\infty$ — ее подходящие дроби; если рассмотреть уравнение в конечных разностях

$$y_n - (z - \alpha_n) y_{n-1} + \beta_n y_{n-2} = 0, \tag{III.11}$$

то на основании свойств непрерывных дробей ему удовлетворяют и числители, и знаменатели подходящих дробей; таким образом, имеем

$$K_n(z) = \frac{R_{n-1}(z)}{P_n(z)} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{III.12}$$

где числитель называется *многочленом второго рода*; двумя частными линейно независимыми между собой решениями уравнения в конечных разностях (III.11) являются, таким образом,

$$\left.\begin{array}{l} y_n = P_n(x), \\ y_n = R_{n-1}(x) \end{array}\right\} (n=1, 2, \ldots), \quad \left.\begin{array}{ll} y_0=1, & y_{-1}=0, \\ y_0=1, & y_1=\beta_1. \end{array}\right\} \qquad \text{(III.13)}$$

Нетрудно убедиться в том, что многочлены второго рода могут быть найдены по формуле

$$R_{n-1}(z) = \mathfrak{S}\left\{\frac{P_n(z)-P_n(x)}{z-x}\right\} \quad (n=1, 2, \ldots); \qquad \text{(III.14)}$$

для доказательства достаточно подставить в правую часть

$$P_n(z) = (z-\alpha_n)P_{n-1}(z) - \beta_n P_{n-2}(z),$$

$$P_n(x) = (x-z)P_{n-1}(x) + (z-\alpha_n)P_{n-1}(x) - \beta_n P_{n-2}(x)$$

и показать, что многочлен в левой части равенства удовлетворяет (III.11), причем $R_{-1}=0$, $R_0=\beta_1$.

Из рекуррентных соотношений вытекает простая формула

$$P_n(x)R_{n-2}(x) - P_{n-1}(x)R_{n-1}(x) = -\beta_1\beta_2\ldots\beta_n \quad (n=1, 2, \ldots). \qquad \text{(III.15)}$$

Как обобщение многочленов второго рода рассмотрим многочлены $\{P_n^{(k)}(x)\}_0^\infty$, определяемые трехчленной рекуррентной формулой

$$P_n^{(k)}(x) = (x-\alpha_{n+k})P_{n-1}^{(k)}(x) - \beta_{n+k}P_{n-2}^{(k)}(x) \quad (n=1, 2, \ldots),$$
$$P_{-1}=0, \; P_1=1. \qquad \text{(III.16)}$$

Очевидно, мы имеем

$$\left.\begin{array}{l} P_n^{(0)}(x) \equiv P_n(x), \\ P_n^{(1)}(x) \equiv \dfrac{1}{\beta_1}R_n(x) \end{array}\right\} (n=0, 1, \ldots), \qquad \text{(III.17)}$$

$$\frac{P_{n-1}^{(k+1)}(x)}{P_n^{(k)}(x)} = \frac{1\;|}{|\,x-\alpha_{k+1}} - \frac{\beta_{k+2}\;|}{|\,x-\alpha_{k+2}} - \ldots - \frac{\beta_{n+k}\;|}{|\,x-\alpha_{k+n}}$$
$$(n=1, 2, \ldots, \quad k=0, 1, \ldots). \qquad \text{(III.18)}$$

Каждая система многочленов $\{P_n^{(k)}(x)\}_0^\infty$ ортогональна относительно своей последовательности $\{c_n^{(k)}\}_0^\infty$, ибо построена по рекуррентной формуле (III.16), причем $\{\beta_{i+k}\}_0^\infty \neq 0$ [1]). Эти многочлены были рассмотрены Стилтьесом ([1], § 2), а затем Перроном ([1], § 5). Мы широко использовали их в работе [120*] [2]).

Рассмотрим теперь вопрос об определении ортогональной системы $\{P_k(x)\}_0^n$ по некоторым данным. Прежде всего ясно, что задание моментов $\{c_k\}_0^{2n-1}$ определяет ненормированную систему $\{P_k(x)\}_0^n$, но для нахождения нормированной системы $\{p_k(x)\}_0^n$ надо знать еще c_{2n}. Точно так же задание чисел $\{\alpha_i\}_1^n$ и $\{\beta_i\}_2^n \neq 0$ определяет по формуле (III.7) систему $\{P_k(x)\}_0^n$, а для нахождения системы $\{R_k(x)\}_0^{n-1}$ надо еще знать $\beta_1 = c_0 \neq 0$.

Пусть теперь заданы два произвольных многочлена

$$P_{n-1}(x) = x^{n-1} + \ldots, \quad P_n(x) = x^n + \ldots, \qquad \text{(III.19)}$$

---

[1]) В нашей работе [70*] показано, что многочлены $\{R_n(x)\}_0^\infty$ ортогональны относительно последовательности $\{c_n^{(1)}\}_0^\infty$, которую находим из соотношений $c_0c_\nu^{(1)} + c_1c_{\nu-1}^{(1)} + \ldots + c_\nu c_0^{(1)} = c_{\nu+2}c_0 - c_{\nu+1}c_1$ $(\nu=0, 1, \ldots)$.

[2]) Недавно Дикинсон [1] рассмотрел эти же многочлены, не зная, по-видимому, указанных работ.

не имеющие общих нулей; по формуле

$$\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \frac{1 \mid}{\mid x-\alpha_n} - \frac{\beta_n \mid}{\mid x-\alpha_{n-1}} - \ldots - \frac{\beta_2 \mid}{\mid x-\alpha_1} \tag{III.20}$$

можно найти все числа $\{\alpha_k\}_1^n$ и $\{\beta_k\}_2^n \neq 0$ — если бы мы имели $\beta_k = 0$, $2 \leqslant k \leqslant n$, то правая часть равенства была бы дробью, знаменателем которой был бы многочлен степени $n-k+1$, что противоречит условию; точно так же, если заданы произвольные многочлены

$$P_n(x) = x^n + \ldots, \quad R_{n-1}(x) = \beta_1 x^{n-1} + \ldots, \quad \beta_1 \neq 0, \tag{III.21}$$

не имеющие общих нулей, то числа $\{\alpha_k\}_1^n$ и $\{\beta_k\}_2^n \neq 0$ находим из равенства

$$\frac{R_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \frac{\beta_1 \mid}{\mid x-\alpha_1} - \frac{\beta_2 \mid}{\mid x-\alpha_2} - \ldots - \frac{\beta_n \mid}{\mid x-\alpha_n}. \tag{III.22}$$

Если заданы нули многочлена $P_n(x)$, которые предположим простыми, и соответствующие коэффициенты Кристоффеля $\{\lambda_k\}_1^n$, то, сопоставляя формулу

$$\frac{R_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x-x_{in}}, \quad P_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_{in}) \tag{III.23}$$

с (III.22), найдем все числа $\{\alpha_k\}_1^n$ и $\{\beta_i\}_1^n \neq 0$.

Во всех случаях мы будем иметь при этих данных всю систему $\{P_k(x)\}_0^n$.

Можно показать, что для того, чтобы система многочленов $\{P_k(x)\}_0^n$ была системой Чебышева

$$P_n(x) = \frac{(x-a+\sqrt{(x-a)^2-b})^n + (x-a-\sqrt{(x-a)^2-b})^n}{2^n} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{III.24}$$

достаточно каждое из условий: 1) для $k=1$ и $k=2$ справедливы представления $c_k = \frac{c_0}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{in}^k$; 2) при $m = 2, 3, \ldots, n$ одинаковы три старших коэффициента многочленов $R_{m-1}(x)$ и $\frac{\beta_1}{m} P'_m(x)$; 3) среднее арифметическое и среднеквадратическое значения нулей многочленов $\{P_k(x)\}_1^n$ не зависят от n.

Если заданы вещественные моменты $\{c_k\}_0^{2n}$, удовлетворяющие условиям $\{D_k\}_0^n > 0$, то через $\alpha_n(x)$ назовем любое решение так называемой *укороченной проблемы моментов* [1])

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\alpha_n(x) = c_k \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n). \tag{III.25}$$

Если введем функцию $\mathfrak{R}_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_n(x)}{z-x}$, $\mathfrak{I} z \neq 0$, то можно показать, что при фиксированном z точка $w_n = \mathfrak{R}_n(z)$ не выходит за пределы круга, радиус которого [2])

$$r_n(z) = \frac{1}{2\,|z-\bar{z}\,|} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} |\,p_k(z)\,|^2}$$

---

[1]) Среди решений $\alpha_n(x)$ укороченной проблемы моментов содержится, очевидно, решение $\alpha(x)$ проблемы моментов (2.2.1), соответствующее $n = \infty$.

[2]) См., например, Н. И. Ахиезер [2].

и центр $\gamma_n(z)$ определяются заданными моментами; соответствующая окружность $C_n(z)$ касается изнутри окружности $C_{n-1}(z)$. Так как всегда существует $\lim\limits_{n\to\infty}\{\sum\limits_{k=0}^{n-1}|p_k(z)|^2\}^{-1}\geqslant 0$, то возможны, очевидно, два случая: после предельного перехода (при $n\to\infty$) получим окружность $C_\infty(z)$, или точку; этот результат не зависит от выбора точки z.

В случае точки *проблема моментов определенна*; при этом непрерывная дробь $K(z)$ сходится для всех комплексных z к пределу

$$K(z)=\frac{\beta_1\ |}{|\,z-\alpha_1}-\frac{\beta_2\ |}{|\,z-\alpha_2}-\ldots-\frac{\beta_n\ |}{|\,z-\alpha_n}-\ldots=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(x)}{z-x},\quad \Im z\neq 0. \tag{III.26}$$

В случае окружности *проблема моментов неопределенна*; каждой точке внутри $C_\infty(z)$ соответствует бесчисленное множество решений, а каждой точке на $C_\infty(z)$ соответствует одно определенное решение $\alpha_\varphi(x)$, называемое *экстремальным*, представляющее собой ступенчатую функцию с бесконечно большим числом точек роста.

Пусть заданные числа $\{\alpha_n\}_1^\infty$, $\{\beta_n\}_2^\infty>0$ таковы, что проблема моментов определенна (для этого достаточно, например, условие Карлемана $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\beta_n}}=\infty$); если мы сможем найти значение $K(z)$ непрерывной дроби, то мы должны будем найти функцию $\alpha(x)$ из уравнения

$$K(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(x)}{z-x},\qquad \Im z\neq 0. \tag{III.27}$$

Это можно сделать по *формуле обращения Стилтьеса — Перрона*

$$\frac{\alpha(x+0)+\alpha(x-0)}{2}=\mathrm{const}+\lim_{y\to+0}\Re\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{x_0+iy}^{x+iy}K(z)\,dz\right\}. \tag{III.28}$$

Экстремальное решение $\alpha_\varphi(x)$ находится по той же формуле из уравнения [1])

$$w=\gamma_\infty(i)-ie^{-i\varphi}r_\infty(i)=\frac{i(1-e^{-i\varphi})-2\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k(-i)\,r_k(i)}{2\sum\limits_{k=0}^{\infty}|p_k(i)|^2}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha_\varphi(x)}{x-i}, \tag{III.29}$$

причем [1])

$$r_k(y)=\mathfrak{S}\left\{\frac{p_k(x)-p_k(y)}{x-y}\right\}; \tag{III.30}$$

вместо $C_\infty(i)$ можно было бы рассмотреть любую окружность $C_\infty(z)$, $\Im z\neq 0$.

В качестве первого примера рассмотрим рекуррентное соотношение $I_{\nu-1}(x)+I_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}I_\nu(x)$ между функциями Бесселя; из него вытекает формальное разложение в непрерывную дробь

$$\frac{I_\nu\left(\frac{1}{z}\right)}{I_{\nu-1}\left(\frac{1}{z}\right)}\sim\frac{\frac{1}{2\nu}\ \Big|}{|\ z}-\frac{\frac{1}{4\nu(\nu+1)}\Big|}{|\ \ z}-\frac{\frac{1}{4(\nu+1)(\nu+2)}\Big|}{|\ \ z}-\ldots; \tag{III.31}$$

---

[1]) См. Н. И. Ахиезер [50* .

полагая $\nu > 0$, мы видим по условию Карлемана, что соответствующая проблема моментов определенна, и мы имеем

$$\frac{I_\nu\left(\frac{1}{z}\right)}{I_{\nu-1}\left(\frac{1}{z}\right)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(x)}{z-x}, \qquad \Im z \neq 0; \tag{III.32}$$

так как левая часть является мероморфной функцией с полюсами первого порядка в точках $\left\{x_k = \frac{1}{z_k^{(\nu-1)}}\right\}_{-\infty}^{\infty}$, где $\{z_k^{(\nu-1)}\}_{-\infty}^{\infty}$ — нули функции $z^{1-\nu}I_{\nu-1}(z)$, а вычеты в этих полюсах равны $\{[z_k^{(\nu-1)}]^{-2}\}_{-\infty}^{\infty}$ [1]), то $\alpha(x)$ — ступенчатая функция, и мы имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_m(x)P_n(x)\,d\alpha(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^2 P_m(x_k)P_n(x_k) \begin{cases} = 0, & m \neq n, \\ > 0, & m = n. \end{cases} \tag{III.33}$$

Мы пришли к так называемым многочленам Ломмеля [2]).

Рассмотрим теперь тот случай, когда мы легко сможем найти значение дроби $K(z)$ и фактически решить проблему моментов, — именно рассмотрим случай *периодичности*

$$\alpha_n = 0, \quad \beta_n = \frac{1}{4} \quad (n = s+1,\ s+2,\ \ldots), \quad s \geqslant 1. \tag{III.34}$$

Пусть $G_s(x) = x^s + \ldots$, $G_{s-1}(x) = x^{s-1} + \ldots$ — два произвольных многочлена, все нули которых вещественны, различны, перемежаются и лежат внутри отрезка $[-1, +1]$; полагая $P_{s-1}(x) \equiv G_{s-1}(x)$, $P_s(x) \equiv G_s(x)$, мы сможем построить, как было сказано выше, всю систему многочленов $\{P_k(x)\}_0^{s-2}$; так как значение периодической непрерывной дроби легко найти, то мы сможем решить задачу до конца [3]): на отрезке $[-1, +1]$ имеем непрерывное распределение масс с плотностью

$$w(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{G_s^2(x) - xG_s(x) + \frac{1}{4}G_{s-1}^2(x)}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1; \tag{III.35}$$

кроме того, в тех нулях $\{x_\nu\}$ знаменателя, для которых $|G_s(x_\nu)| < \frac{1}{2}|G_{s-1}(x_\nu)|$, мы имеем концентрированные массы

$$m_\nu = \alpha(x_\nu + 0) - \alpha(x_\nu - 0) = 2\lim_{x \to x_\nu}\{w(x)\,|x - x_\nu|\}; \tag{III.36}$$

многочлены $\{P_n(x)\}_{s-1}^{\infty}$ можно представить в явной форме

$$\left.\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{\varrho_1^{n-s+1}[G_s(x) - \varrho_2 G_{s-1}(x)] - \varrho_2^{n-s+1}[G_s(x) - \varrho_1 G_{s-1}(x)]}{\sqrt{x^2-1}}, \\ \varrho_{1,2} &= \frac{x \pm \sqrt{x^2-1}}{2} \quad (n = s-1,\ s,\ s+1,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{III.37}$$

---

[1]) Это вытекает из формулы $I'_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} I_{\nu-1}(x) - I_\nu(x)$.

[2]) См. Шварц [1].

[3]) См. Я. Л. Геронимус [120*].

Сопоставим наши результаты с результатом С. Н. Бернштейна и Сеге (§ 2.6). Наш вес подходит под тип 2 формулы (2.6.1); в нашем случае

$$\varrho(x)=G_s^2(x)-xG_s(x)G_{s-1}(x)+\frac{1}{4}G_{s-1}^2(x)=$$
$$=\left|G_s(x)-\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}G_{s-1}(x)\right|^2, \quad \text{(III.38)}$$

причем в плоскости x с разрезом вдоль отрезка $[-1, +1]$ выбрано то значение радикала, при котором $|z|=|x+\sqrt{x^2-1}|<1$; при этом $l=2s-1$. Если выполнить в многочленах $G_{s-1}(x)$, $G_s(x)$ замену

$$x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \quad \sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right),$$

то легко видеть, что

$$h_1(z)=z^s\left\{G_s\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]-\frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{z}\right)G_{s-1}\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\left(z-\frac{1}{z}\right)G_{s-1}\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\right\}$$

является многочленом степени $2s-1$, причем $\varrho(\cos\theta)=|h_1(e^{i\theta})|^2$, однако в нашем случае мы не можем утверждать, что все нули многочлена $h_1(z)$ лежат в области $|z|>1$, ибо мы его построили по заданным произвольным многочленам $G_{s-1}(x)$ и $G_s(x)$. Наша формула (III.37) справедлива и при $n=s-1, n=s$, ибо мы решали уравнение в конечных разностях $y_n-xy_{n-1}+$ $+\frac{1}{4}y_{n-2}=0$ при начальных условиях $y_{s-1}=G_{s-1}(x)=P_{s-1}(x)$, $y_s=G_s(x)=$ $=P_s(x)$.

С. Н. Бернштейн и Сеге исходили из заданной абсолютно непрерывной функции

$$\alpha(x)=\int_{-1}^{x}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\varrho(x)}dx; \quad \text{(III.39)}$$

этим они определили всю ортогональную систему, причем если в нашем случае мы имеем

$$P_{s-1}(x)=\frac{z^sh_1(z^{-1})-z^{-s}h_1(z)}{z-z^{-1}}, \qquad P_s(x)=\frac{z^{s+1}h_1(z^{-1})-z^{-s-1}h_1(z)}{z-z^{-1}},$$

то для их многочленов $P_{s-1}(x)$, $P_s(x)$, $h(z)$ эти равенства могут и не выполняться.

В том частном случае, когда для всех нулей $\{x_\nu\}$ нашего многочлена $\varrho(x)$ выполнены условия $|G_s(x_\nu)|>\frac{1}{2}|G_{s-1}(x_\nu)|$, наш многочлен $h_1(z)$ будет иметь все нули в области $|z|>1$, концентрированных масс не будет, и наши результаты совпадут с результатами § 2.6.

Пусть, например, $s=2$, $G_1(x)=x$, $G_2(x)=x^2-\alpha^2$, $-1<\alpha<1$; мы имеем

$$\varrho(x)=\left(x^2-\alpha^2-\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}x\right)\left(x^2-\alpha^2-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2}x\right)=$$
$$=\frac{4\alpha^4-x^2(4\alpha^2-1)}{4};$$

находим многочлен

$$h_1(z)=z^2\left\{\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^2-2\alpha^2-\frac{1}{4}\left(z^2-\frac{1}{z^2}\right)\right\}=\frac{1-z^2(4\alpha^2-1)}{2};$$

он имеет при $|\alpha| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ нули в области $|z| < 1$; следовательно, по общей теории в точках $x_1 = -x_2 = \frac{2\alpha^2}{\sqrt{4\alpha^2-1}}$ имеем концентрированные массы $m_1 = m_2 = 1 - \frac{1}{2\alpha^2}$. Если же представить $\varrho(x)$ в таком виде:

$$\varrho(x) = \varrho(\cos\theta) = |h(e^{i\theta})|^2, \quad h(z) = \frac{(\sqrt{4\alpha^2-1}-z)(\sqrt{4\alpha^2-1}+z)}{4},$$

то многочлен $h(z)$ не равен нулю при $|z| < 1$.

Мы рассмотрели простейший случай периодичности; совершенно аналогично можно решить задачу и в общем случае периодичности

$$\alpha_n = a_\nu, \quad \beta_n = l_\nu > 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k), \quad n - s \equiv \nu \,(\mathrm{mod}\, k), \quad n \geqslant s+1, \quad s \geqslant 0;$$

при $k = 2$ мы получим обобщение ортогональных многочленов, рассмотренных В. Ф. Бржечка [23*].

Возвращаясь к общей теории, рассмотрим многочлены второго рода $\{R_n(x)\}_0^\infty$ и найдем то распределение $d\alpha^{(1)}(x)$, относительно которого они ортогональны [1]); на основании (III.18), (III.26) и (III.27) мы имеем

$$K^{(1)}(z) = \frac{\beta_2|}{|z-\alpha_2} - \frac{\beta_3|}{|z-\alpha_3} - \ldots = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha^{(1)}(x)}{z-x}, \quad \Im z \neq 0, \tag{III.40}$$

откуда легко находим

$$K(z) = \frac{\beta_1}{z-\alpha_1-K^{(1)}(z)}, \quad K^{(1)}(z) = z - \alpha_1 - \frac{\beta_1}{K(z)},$$

причем, как нетрудно видеть, $K(z) \neq 0$ при $\Im z \neq 0$. По формуле обращения (III.28) найдем

$$\frac{\alpha^{(1)}(x+0)+\alpha^{(1)}(x-0)}{2} = \mathrm{const} + \lim_{y\to+0} \Re\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{x_0+iy}^{x+iy} K^{(1)}(z)\,dz\right\} =$$

$$= \mathrm{const} + \lim_{y\to+0} \Re\left\{\frac{i\beta_1}{\pi}\int_{x_0+iy}^{x+iy} \frac{dz}{K(z)}\right\}. \tag{III.41}$$

Например, в случае многочленов Лежандра $d\alpha(x) = dx$, и мы имеем

$$K(z) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{z-x} = \ln\frac{z+1}{z-1}, \quad z = x+iy, \tag{III.42}$$

где в плоскости z с разрезом вдоль отрезка $[-1, +1]$ мы выбрали значение логарифма, равное $-i\pi$ при $z=0$; для $y=0$ и $-1 < x < 1$ имеем

$$\ln\frac{z+1}{z-1} = \ln\frac{1+x}{1-x} - i\pi, \quad \frac{1}{K(z)} = \frac{\ln\frac{1+x}{1-x}+i\pi}{\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+\pi^2};$$

таким образом, многочлены второго рода, соответствующие многочленам Лежандра, ортогональны на отрезке $[-1, +1]$ с весом

$$w^{(1)}(x) = \frac{1}{\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+\pi^2}. \tag{III.43}$$

---

[1]) См. Шерман [1], Шохат и Шерман [1].

Отметим еще следующее обстоятельство: как видно из формулы (III.46), при $k=1$ многочлены второго рода $\left\{\frac{1}{\beta_2} R_n(x)\right\}_0^\infty$ не зависят от величин α_1 и β_2; например, если мы имеем

$$K(z)=\frac{\beta_1 \mid}{\mid z-\alpha_1}-\frac{\beta_2 \mid}{\mid z-\alpha_2}-\frac{\frac{1}{4}\Big|}{\mid z}-\frac{\frac{1}{4}\Big|}{\mid z}-\ldots=$$
$$=\frac{\beta_1\left[z(1-2\beta_2)-\alpha_1+2\beta_2 \sqrt{z^2-1}\right]}{z^2(1-4\beta_2)-2z\alpha_1(1-2\beta_2)+4\beta_2^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(x)}{z-x}, \quad \Im z \neq 0, \tag{III.44}$$

то нетрудно найти функцию $\alpha(x)$; многочленами второго рода независимо от величин α_1 и β_2 будут многочлены Чебышева второго рода $\{U_n(x)\}_0^\infty$; в частности, это имеет место для многочленов Якоби при $|\alpha|=|\beta|=\frac{1}{2}$.

В заключение главы рассмотрим один метод изучения систем ортогональных многочленов, оказавшийся весьма плодотворным [1]).

Из формул (3.2.1) для ортонормальных многочленов мы получим на основании (3.2.2) формулу

$$\begin{gathered} xp_n(x)=b_{n-1}p_{n-1}(x)+a_np_n(x)+b_np_{n+1}(x), \\ b_n=\frac{k_n}{k_{n+1}}, \qquad a_n=-\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \\ p_{-1}=0, \quad p_0=1, \quad b_{-1}=0, \end{gathered} \tag{III.45}$$

которая позволяет построить систему многочленов $\{p_n(x)\}$. Образуем гильбертово пространство многочленов, определяя скалярное произведение двух многочленов $Q(x)=\sum_{i=0}^{n} q_ip_i(x)$, $G(x)=\sum_{k=0}^{m} g_kp_k(x)$ формулой

$$(Q,\ G)=\sum_{s=0}^{r} q_s\bar{g}_s, \qquad r=\min(n,\ m). \tag{III.46}$$

Нетрудно видеть, что построенные многочлены $\{p_n(x)\}$ *ортонормальны*, т. е. удовлетворяют соотношениям

$$(p_m,\ p_n)=\delta_{mn} \quad (m,\ n=0,\ 1,\ \ldots); \tag{III.47}$$

они ортогональны относительно числовой последовательности $\{c_k\}_0^\infty$, определяемой формулой

$$(x^k,\ 1)=c_k, \quad (k=0,\ 1,\ \ldots); \quad c_0=1. \tag{III.48}$$

Будем считать все числа $\{a_n\}_0^\infty$, $\{b_n\}_0^\infty>0$ вещественными; тогда и моменты $\{c_k\}_0^\infty$ будут вещественными и будем иметь $\{D_k\}_0^\infty>0$.

Для изучения свойств решения соответствующей проблемы моментов

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k\,d\alpha(x)=c_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \quad c_0=1, \tag{III.49}$$

и изучения свойств ортогональной системы $\{p_n(x)\}_0^\infty$ вводим бесконечную *якобиеву матрицу*

$$\|A\|=\left\|\begin{matrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & 0\ldots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0\ldots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0\ldots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & b_3\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right\|. \tag{III.50}$$

---

[1]) См. М. Г. Крейн [48*], ст. VI, Н. И. Ахиезер [50*].

Через l^2 обозначим векторное пространство, где каждый вектор z характеризуется числовой последовательностью $\{z_n\}_0^\infty$, для которой $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$.

Матрице $\|A\|$ сопоставим два линейных оператора A и A^*, определяемых следующим образом: оператор A^* определен на многообразии Ω_{A^*} тех векторов $x = \{x_n\} \in l^2$, для которых имеем

$$y = A^*x \in l^2, \quad y = \{y_n\}, \quad y_n = b_{n-1}x_{n-1} + a_n x_n + b_n x_{n+1}; \qquad \text{(III.51)}$$

оператор A определен той же формулой $y = Ax$ на многообразии Ω_A тех векторов $x \in \Omega_{A^*}$, для которых $(A^*x, z) = (x, A^*z)$ для любого вектора $z \in \Omega_{A^*}$; таким образом, оператор A симметрический, оператор A^* сопряжен с A и оба оператора замкнуты.

Оператор A будет *самосопряженным* тогда и только тогда, когда $\Omega_A = \Omega_{A^*}$.

Справедлива следующая основная теорема: проблема моментов (III.49) будет определенной тогда и только тогда, когда оператор A самосопряженный; если он не самосопряженный, то существует континуум различных самосопряженных расширений A_φ, каждое из которых порождает *экстремальное* решение $\alpha_\varphi(x)$.

ГЛАВА IV
МНОГОЧЛЕНЫ ЯКОБИ

4.61, 4.81, 4.82. В указанных параграфах[1]). Сегё вводит так называемые *функции второго рода* только для случаев многочленов Якоби; ввиду того значения, которое они имеют в ряде вопросов, мы дадим общее определение этих функций и укажем некоторые их свойства.

Функции второго рода, соответствующие данной системе ортогональных многочленов, определяются формулой

$$q_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(x)\,d\alpha(x)}{z-x}, \text{ или } Q_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)\,d\alpha(x)}{z-x}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots), \quad \Im z \neq 0, \qquad \text{(IV.1)}$$

откуда прежде всего ясно, что $K(z) \equiv Q_0(z)$. Из определения вытекают следующие основные свойства этих функций:

1) имеет место соотношение

$$Q_0(z) P_n(z) = R_{n-1}(z) + Q_n(z) \quad (n = 1, 2, \ldots); \qquad \text{(IV.2)}$$

2) функции второго рода являются решением уравнения в конечных разностях

$$y_n - (z - \alpha_n) y_{n-1} + \beta_n y_{n-2} = 0, \quad y_0 = Q_0(z), \quad y_{-1} = 1; \qquad \text{(IV.3)}$$

3) справедливы формулы, аналогичные формуле Кристоффеля — Дарбу:

$$\left.\begin{aligned} & p_{n+1}(z)\, q_n(z) - p_n(z)\, q_{n+1}(z) = \frac{k_{n+1}}{k_n}, \\ & \sum_{k=0}^{n} p_k(y)\, q_k(z) = \frac{1}{z-y} + \frac{k_n}{k_{n+1}} \cdot \frac{q_{n+1}(z)\, p_n(y) - q_n(z)\, p_{n+1}(y)}{z-y}, \\ & \sum_{k=0}^{n} q_k(y)\, q_k(z) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \cdot \frac{q_{n+1}(z)\, q_n(y) - q_n(z)\, q_{n+1}(y)}{z-y} + \frac{q_0(y) - q_0(z)}{k_0(z-y)}; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.4)}$$

---
[1]) А также в §§ 6.9, 8.21, 8.23, 8.7.

4) имеет место разложение в непрерывную дробь

$$\frac{Q_k(z)}{Q_{k-1}(z)} \sim \frac{\beta_{k+1}}{|z-\alpha_{k+1}} - \frac{\beta_{k+2}}{|z-\alpha_{k+2}} - \ldots, \tag{IV.5}$$

подходящими дробями которой для $n=1, 2, \ldots$ являются по (III.18) $\left\{\frac{P_{n-1}^{(k+1)}(z)}{P_n^{(k)}(z)}\right\}$; очевидно, эти непрерывные дроби при любом $k=1, 2, \ldots$ сходятся одновременно с (III.26).

5) При фиксированном невещественном z величины $\{q_n(z)\}_0^\infty$ являются коэффициентами Фурье функции $\frac{1}{z-x} \in L_\alpha^2$, поэтому имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q_n(z)|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(x)}{|z-x|^2}, \quad \Im z \neq 0, \tag{IV.6}$$

т. е. этот бесконечный ряд сходится для всех невещественных значений z и таким образом $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(z) = 0$, $\Im z \neq 0$.

6) Для исследования сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k(x)\, q_k(z)$ в метрике пространства L_α^2 к функции $\frac{1}{z-x}$ [1]) найдем

$$\delta_n = \min_{\varrho_n} \left\| \frac{1}{z-x} - \varrho_n(x) \right\|_\alpha^2. \tag{IV.7}$$

Очевидно, мы имеем по (3.1.4)

$$\delta_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(x)}{|z-x|^2} - \sum_{k=0}^{n} |q_k(z)|^2 \geqslant 0;$$

если ввести обозначение $w = q_0(z)$, воспользоваться (IV.1) и тем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(x)}{|z-x|^2} = \frac{1}{\bar{z}-z} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{\bar{z}-x}\right) d\alpha(x) = \frac{w-\bar{w}}{\bar{z}-z},$$

то мы получим

$$\frac{w-\bar{w}}{\bar{z}-z} - |w|^2 \sum_{k=0}^{n} |p_k(z)|^2 - \sum_{k=1}^{n} |r_{k-1}(z)|^2 - w \sum_{k=1}^{n} p_k(z)\, r_{k-1}(\bar{z}) - \\ - \bar{w} \sum_{k=1}^{n} p_k(\bar{z})\, r_{k-1}(z) \geqslant 0; \tag{IV.8}$$

так как z фиксировано, то полученное условие имеет геометрический смысл: точка w не должна выходить за пределы некоторой окружности, зависящей от z, $\{p_k(z)\}_0^n$, $\{r_{k-1}(z)\}_1^n$; так как все эти многочлены зависят только от моментов $\{c_k\}_0^{2n}$, то мы можем положить

$$w = k_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(x)}{z-x} = k_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_n(x)}{z-x};$$

[1]) Сходимость в обычном смысле слова будет рассмотрена в дополнениях к главе XIII.

мы пришли к той же окружности $C_n(z)$, о которой шла речь в примечаниях к предыдущей главе. Отсюда вывод:

7) существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{z-x}-\sum_{k=0}^{n}p_k(x)\,q_k(z)\right\|_\alpha^2=0 \tag{IV.9}$$

эквивалентно тому, что точка w лежит на окружности $C_\infty(z)$; это возможно либо в случае определенности проблемы моментов, либо тогда, когда $\alpha(x)$ является экстремальным решением в случае неопределенности проблемы моментов.

Доказав, что множество функций $\left\{\frac{1}{z-x}\right\}$ (при любом невещественном значении z) плотно в L_α^2, М. Рисс показывает, что выполнение условия замкнутости для одной лишь функции $\frac{1}{z_0-x}$, где z_0 — фиксированное мнимое число, эквивалентно выполнению этого условия для любой функции $f(x)\in L_\alpha^2$, т. е. замкнутости системы многочленов $\{p_n(x)\}_0^\infty$ в пространстве L_α^2.

Рассмотрим *явное выражение функций второго рода* для некоторых систем ортогональных многочленов; в случае (III.34) мы найдем $Q_0(z)\equiv K(z)$ и сможем найти при $\{\alpha_k\}_2^\infty=0$, $\{\beta_k\}_3^\infty=\frac{1}{4}$

$$\left.\begin{aligned}&Q_1(z)=(z-\alpha_1)\,Q_0(z)-\beta_1,\\&Q_2(z)=zQ_1(z)-\beta_2Q_0(z)=(z^2-\alpha_1z-\beta_2)\,Q_0(z)-\beta_1z;\end{aligned}\right\} \tag{IV.10}$$

общее решение уравнения в конечных разностях (IV.3) в случае (III.34) таково:

$$Q_n(z)=A(z)\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^n+B(z)\left(\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^n; \tag{IV.11}$$

но из формулы (IV.1) видно, что $\lim\limits_{n\to\infty}Q_n(z)=0$; следовательно,

$$Q_n(z)=A(z)\left(\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^n, \tag{IV.12}$$

причем в плоскости z с разрезом вдоль отрезка $[-1,+1]$ выбрано то значение радикала, при котором $|z+\sqrt{z^2-1}|>1$; окончательно находим

$$Q_n(z)=Q_2(z)\left(\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^{n-2}\quad(n=2,\ 3,\ \ldots). \tag{IV.13}$$

При $\alpha_1=0$, $\beta_2=\frac{1}{4}$ имеем

$$Q_n(z)=\left(\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^{n+1}\quad(n=0,\ 1\ \ldots), \tag{IV.14}$$

что соответствует многочленам Чебышева второго рода; при $\alpha_1=0$, $\beta_2=\frac{1}{2}$ имеем

$$Q_n(z)=\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^n\quad(n=0,\ 1,\ \ldots), \tag{IV.15}$$

что соответствует многочленам Чебышева. При $\alpha_1=-\frac{1}{2}$, $\beta_2=\frac{1}{4}$ находим

$$Q_n(z)=\left(1-\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\right)\left(\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^n\quad(n=0,\ 1,\ \ldots), \tag{IV.16}$$

что соответствует многочленам Якоби при $\alpha=-\beta=\frac{1}{2}$. Наконец, для $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\beta_2=\frac{1}{4}$ имеем

$$Q_n(z)=\left(\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}-1\right)\left(\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^n \quad (n=0,\ 1,\ \ldots), \tag{IV.17}$$

что соответствует многочленам Якоби при $\alpha=-\beta=-\frac{1}{2}$.

Последние два случая подходят под такой тип многочленов Якоби:

$$\alpha=-\beta=\omega, \quad -1<\omega<1. \tag{IV.18}$$

Нетрудно найти, что в этом случае имеем

$$Q_n(z)=\frac{\pi}{\sin\pi\omega}\left\{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\omega}P_n(z)-(-1)^nP_n(-z)\right\} \quad (n=0,\ 1,\ \ldots). \tag{IV.19}$$

Произведя предельный переход $\omega\to 0$, получим случай многочлена Лежандра.

Возвращаясь к общему случаю, рассмотрим *главное значение функции* $Q_n(z)$ на множестве точек роста функции $\alpha(x)$:

$$\mathbf{Q}_n(x)=\frac{1}{2}\{Q_n(x+i0)+Q_n(x-i0)\} \quad (n=0,\ 1,\ \ldots). \tag{IV.20}$$

Очевидно, оно также является решением уравнения в конечных разностях (IV.3). В том частном случае, когда $\mathbf{Q}_0(x)=\mathrm{const}$ почти всюду на множестве точек роста функции $\alpha(x)$, все функции $\{\mathbf{Q}_n(x)\}_0^\infty$ являются многочленами соответствующих степеней, построенными по той же рекуррентной формуле, что и многочлены $\{P_n(x)\}_0^\infty$, следовательно, эта новая система многочленов также ортогональна. Этот вопрос, а также исследования Н. И. Ахиезера [51*] о связанных с ним формулах обращения сингулярных интегралов рассмотрены в нашей книге [97*] (§ 30).

4.9. В этом параграфе, а также в §§ 6.5, 7.4 Сегё рассматривает принадлежащее Фейеру и ему обобщение ультрасферических многочленов: пусть функция $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ регулярна в области $|z|<1$, тогда многочлены Фейера — Сегё определяются при помощи производящей функции

$$|f(re^{i\theta})|^2=\sum_{n=0}^{\infty}r^nP_n(\cos\theta), \quad r<1; \tag{IV.21}$$

при $f(z)=(1-z)^{-\lambda}$ получим ультрасферические многочлены, при $\lambda=\frac{1}{2}$ — многочлены Лежандра.

Возникает вопрос, каким условиям должна удовлетворять функция $f(z)$ (или ее коэффициенты $\{\alpha_n\}_0^\infty$) для того, чтобы многочлены Фейера — Сегё могли быть ортогональными? Ответ был получен одновременно И. Л. Ланцевицким [2*] и Фельдгеймом [1]: необходимо, чтобы числа $\left\{b_n=\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\right\}_1^\infty$ определялись по формуле

$$\left.\begin{aligned} b_{n+1}&=b_2+(b_2-b_1)\frac{U_{n-2}(\xi)}{U_n(\xi)} \quad (n=2,\ 3,\ \ldots),\\ \xi&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_3-b_1}{b_3-b_2}}, \end{aligned}\right\} \tag{IV.22}$$

где величины b_1, b_2, b_3, или, что то же самое, величины b_1, b_2, ξ произвольны; при выполнении этих условий для ортогональности достаточны следующие ограничения:

$$\left.\begin{aligned} -\xi < \frac{b_1}{2b_2} < 1, \quad & \xi \geqslant 1, \\ -\eta^2 < \frac{b_1}{2b_2} < 1, \quad & \xi = i\eta, \ \eta \geqslant 0; \end{aligned}\right\} \tag{IV.23}$$

при $0 < \xi < 1$ ортогональность невозможна ни при каких значениях b_1, b_2.

Рассмотрим еще одно свойство многочленов Лежандра, которому за последнее время посвящено много работ.

Введем в рассмотрение величины

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} P_n(x) P_{n+1}(x) \\ P_{n-1}(x) P_n(x) \end{vmatrix}, \quad D_n(x) = \begin{vmatrix} P'_n(x) P'_{n+1}(x) \\ P'_{n-1}(x) P'_n(x) \end{vmatrix} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Как указано в задаче 70, Туран доказал, что для многочленов Лежандра имеем $\Delta_n(x) \geqslant 0$ на отрезке $[-1, +1]$; Наньюндиа [1] установил равенство

$$(1 - x^2) D_n(x) \equiv n(n+1) \Delta_n(x), \tag{IV.24}$$

откуда вытекает новое неравенство $D_n(x) > 0$. Сансоне [1] нашел неравенство

$$(1 - x^2) D_n(x) > \frac{1}{2} \left\{ \int_x^1 P_n^2(x)\, dx \right\}^2. \tag{IV.25}$$

Сегё дал четыре доказательства справедливости неравенства $\Delta_n(x) \geqslant 0$ и обобщил его на случай ультрасферических многочленов. Сас [1] получил неравенство

$$\frac{1 - P_n^2(x)}{(n+1)(2n+1)} \leqslant \Delta_n(x) \leqslant \frac{2n+1}{3n(n+1)}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{IV.26}$$

путем предельного перехода; он получил аналогичное неравенство для бесселевых функций

$$I_n^2(x) - I_{n-1}(x) I_{n+1}(x) > \frac{1}{n+1} I_n^2(x), \quad x > 0, \ n > 0.$$

Эвейда [1] показал, что (в случае многочленов Лежандра): 1) $\Delta_n(x) < 0$, $x > 1$, $x < -1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta_n(x)}{1 - x^2} = \frac{1}{2}$; 3) $\frac{d}{dt} \Delta_n(x) = 0$ только при $x = 0$; в этой точке $\Delta_n(x)$ достигает максимума; 4) неравенство $\Delta_n(x) > 0$ справедливо и для производных любого порядка $P_n^{(r)}(x)$, $1 \leqslant r \leqslant n - 1$, $n \geqslant 1$.

Данезе [1] получил в некоторых случаях явные выражения для величин $\Delta_n(x)$, $D_n(x)$, которые он назвал «турановыми».

Сковгор [1] показал, что неравенство $\Delta_n(x) \geqslant 0$ является не чем иным, как неравенством Лагерра

$$\begin{vmatrix} F^{(n)}(x) & F^{(n+1)}(x) \\ F^{(n-1)}(x) & F^{(n)}(x) \end{vmatrix} \geqslant 0, \tag{IV.27}$$

примененным к производящей функции $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n P_n(x)}{n!}$. Оно было установлено Лагерром для того случая, когда $F(z)$ — целая функция

$$F(z) = Ce^{-\alpha z^2 + \beta z} z^r \prod_m \left(1 - \frac{z}{z_m}\right) e^{\frac{z}{z_m}},$$

где $\alpha=0$, β, C, r — вещественные числа и $\sum\limits_m z_m^{-2} < \infty$; он показывает, что неравенство Лагерра остается справедливым и при $\alpha > 0$, откуда следует его справедливость для различных систем многочленов; он исследовал также справедливость неравенства $D_n(x) \geqslant 0$ для производных любого порядка от ультрасферических многочленов.

Мерли [1] показал справедливость неравенства $P_n^2(x) > kP_{n+1}(x) P_{n-1}(x)$ при всех вещественных значениях x для ультрасферических многочленов, нормированных условием $\{P_n(1)\}_0^\infty = 1$, если

$$0 < k \leqslant \frac{n(n+\lambda+1)}{n(n+\lambda+1)+\lambda}, \quad 1 < \lambda < 2.$$

ГЛАВА V

МНОГОЧЛЕНЫ ЛАГЕРРА И ЭРМИТА

В нашей книге [97*] (§ 9) мы указали, что общий случай многочленов Лагерра при любом $\alpha > -1$ рассмотрел впервые Ю. В. Сохоцкий до Н. Я. Сонина; многочлены Эрмита были рассмотрены Лапласом, а затем П. Л. Чебышевым за пять лет до Эрмита; там же (§§ 9, 22, 23) мы рассмотрели исследования П. Л. Чебышева, К. А. Поссе, Ю. В. Сохоцкого, Н. Я. Сонина, А. А. Маркова, посвященные этим многочленам, а также исследования указанных авторов и В. А. Стеклова, посвященные замкнутости этих ортогональных систем.

Для нахождения некоторых свойств этих многочленов рассмотрим сперва свойства многочленов Мейкснера (II.20), частным случаем которых являются многочлены Лагерра и Эрмита.

Если ввести функции $\{Q_n(z)\}_0^\infty$ как коэффициенты формального разложения $\frac{1}{z-x} \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x) Q_n(z)$, то мы имеем следующие выражения для многочленов Мейкснера и соответствующих им функций второго рода через некоторые простые операторы:

$$\left.\begin{aligned} P_n(z) &= f[t(D)]\, t'(D) \left\{\frac{D}{t(D)}\right\}^{n+1}(z^n), \quad D=\frac{d}{dz} \\ &\qquad (n=1,\,2,\,\ldots), \\ Q_n(z) &= \frac{t^n(-D)}{n!\,f[t(-D)]}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{t^n(-D)}{n!}\,Q_0(z) = \widetilde{P}_{n-1}(z), \end{aligned}\right\} \tag{V.1}$$

где многочлены $\{\widetilde{P}_n(x)\}_0^\infty$ определяются при помощи производящей функции

$$\frac{u'(t)}{f(t)}\, e^{-xu(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \widetilde{P}_n(x), \tag{V.2}$$

аналогичной (III.20).

Многочлены Лагерра $\left\{L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} P_n(x)\right\}$ соответствуют частному случаю

$$f(t) = (1-t)^{-\alpha-1}, \quad u(t) = \frac{t}{1-t}, \quad t(D) = \frac{D}{1+D}, \tag{V.3}$$

поэтому по (V.1) и (V.2) получим для них и для соответствующих функций второго рода следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} &L_n^{(\alpha)}(z) = (-1)^n (1-D)^{n+\alpha}(z^n) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \\ &Q_n^{(\alpha)}(z) = (1-D)^{-n-\alpha-1}(z^{-n-1}) = (-1)^{n+1} L_{-n-1}^{(-\alpha)}(z), \end{aligned}\right\} \tag{V.4}$$

Пользуясь (5.4.5), нетрудно вывести свойство функций второго рода

$$\frac{d}{dz} Q_n^{(\alpha)}(z) = -(n+1)\, Q_{n+1}^{(\alpha-1)}(z), \tag{V.5}$$

аналогичное (5.1.14); отсюда находим

$$Q_n^{(\alpha)}(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dz^n} Q_0^{(\alpha+k)}(z) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}x^{n+\alpha}}{(z-x)^{n+}} \quad (n=0,\ 1,\ \ldots). \tag{V.6}$$

Если в (II.20) положить $u(h)=h$, то, как было сказано, получим многочлены Аппеля, для которых имеем

$$\left.\begin{aligned} &P_n(z) = f(D)(z^n), \\ &\qquad\qquad\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots); \\ &Q_n(z) = \frac{1}{f(-D)}(z^{-n-1}) = \frac{(-1)^n}{n!} D^n Q_0(z), \end{aligned}\right\} \tag{V.7}$$

если положить $f(h)=e^{-h^2}$, то имеем $H_n(x)=P_n(2x)$, откуда находим выражения для многочленов Эрмита и соответствующих функций второго рода

$$\left.\begin{aligned} &H_n\left(\frac{z}{2}\right) = e^{-D^2}(z^n), \\ &Q_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!} D^n Q_0(z) = e^{D^2}(z^{-n-1}) = i^{n+1}e^{-D^2}[(iz)^{-n-1}] = \\ &= i^{n+1}H_{-n-1}\left(\frac{iz}{2}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}\,dx}{(z-x)^{n+1}} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{V.8}$$

В нашей работе [38*] мы рассмотрели многочлены $\{\Omega_n(x,\ y,\ a)\}_0^\infty$, определяемые при помощи производящей функции

$$e^{hx}(1+h)^y a(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}\Omega_n(x,\ y,\ a), \quad a(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k h^k}{k!}. \tag{V.9}$$

Многочлены Лагерра подходят под этот тип, поэтому они обладают рядом свойств этих многочленов; например, мы имеем для них

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_\alpha L_n^{(\alpha)}(x) = nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x),\ x^n = L_n^{(\alpha)}[L^{(\alpha)}] = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-\nu}\frac{(-1)^\nu L_\nu^{(\alpha)}(x)}{\nu!}, \\ &\frac{x^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} = (-1)^n \Delta^n\left\{\frac{L_0^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(\alpha+1+0)}\right\}, \\ &\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(\alpha+n+1)} = (-1)^n \Delta^n\left\{\frac{x^0}{\Gamma(\alpha+1+0)}\right\}^{1)}. \end{aligned}\right\} \tag{V.10}$$

---

[1]) Если $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, то $f(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k P_k(x)$; кроме того,

$$\Delta^k f(0) = \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^{k-s} f(s).$$

Под этот же тип подходят и многочлены Эрмита; если положить $H_n\left(\frac{x}{2}\right) = \Omega_n(x)$, то будем иметь $x^n = \Omega_n(\Omega)$ аналогично тому, как мы имеем для многочленов Лагерра.

Указанное свойство многочленов Лагерра и Эрмита Эндль [1] назвал *инволюционным*; он построил систему ортогональных многочленов $\{P_{k,\,n}(x)\}_0^\infty$, обладающую инволюционным свойством при любом $k=1, 2, \ldots$; многочлены Лагерра и Эрмита соответствуют случаям $k=1$ и $k=2$[1]).

Тоскано [1] изучил свойства многочленов, определяемых формулой

$$\left.\begin{aligned} L_n^{(\alpha,\,\nu)}(x) &= \frac{(-1)^n\,\Gamma(\alpha+n\nu+1)}{n!\;x^\alpha}\,\Delta_\alpha^n\left\{\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1+0)}\right\},\\ \Delta_\alpha f(\alpha) &= f(\alpha+\nu)-f(\alpha),\quad \Delta_\alpha^n f(\alpha)=\Delta_\alpha\left\{\Delta_\alpha^{n-1}f(\alpha)\right\};\end{aligned}\right\} \tag{V.11}$$

на основании (V.10) они переходят при $\nu=1$ в многочлены Лагерра. Он же [2] и Палама [1] рассмотрели многочлены второго рода, соответствующие многочленам ультрасферическим, Лагерра и Эрмита.

Ангелеско [1] и независимо от него Састри [1] рассмотрели многочлены

$$P_n(x) = \frac{e^x}{n!}\,D^n\{e^{-x}A_n(x)\}\quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{V.12}$$

где $\{A_n(x)\}_0^\infty$ — многочлены Аппеля (для которых $DA_n(x) = nA_{n-1}(x)$); производящая функция для многочленов $\{P_n(x)\}$ такова:

$$\frac{1}{1-h}\,\varphi\left(\frac{h}{1-h}\right)e^{\frac{hx}{1-h}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x),\qquad e^{hx}\varphi(h) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n A_n(x)}{n!}; \tag{V.13}$$

многочлены Лагерра $\{L_n^{(0)}(x)\}$ соответствуют случаю $\varphi(h)=1$, т. е. $A_n(x)=x^n$.

И. М. Денисюк [13*], [18*] рассмотрел многочлены, определяемые при помощи производящей функции

$$\frac{1-t}{(1+t)^2}\,e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \mathfrak{M}_n(x),\qquad \frac{1}{1+t}\,e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n M_n(x). \tag{V.14}$$

Они аналогичны многочленам Лагерра и являются частными случаями многочленов Мейкснера при

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1-t}{(1+t)^2}, & u(t) &= \frac{t}{t-1},\\ f(t) &= \frac{1}{1+t}, & u(t) &= \frac{t}{t-1}. \end{aligned} \tag{V.15}$$

В общем случае многочленов, ортогональных на отрезке $[0, \infty)$, Уиддер [1] рассмотрел функцию второго рода

$$-Q_0(-z) = \int_0^\infty \frac{d\alpha(x)}{z+x} = \int_0^\infty e^{-zu}\,du\int_0^\infty e^{-ux}\,d\alpha(x)$$

как преобразование Лапласа функции $\varphi(u) = \int_0^\infty e^{-ux}\,d\alpha(x)$; если же

[1]) Ренвилл [1] рассмотрел ряд формальных соотношений между многочленами Лежандра, Лагерра и Эрмита.

функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна $d\alpha(x) = w(x)\,dx$, то

$$\varphi(u) = \int_0^\infty e^{-ux} w(x)\,dx, \quad -Q_0(-z) = \int_0^\infty e^{-zu}\varphi(u)\,du, \tag{V.16}$$

т. е. в этом случае функция $-Q_0(-z)$ является результатом двух последовательных преобразований Лапласа функции $w(x)$; в частном случае многочленов $\{L_n^{(0)}(x)\}$ имеем $w=e^{-x}$, и функция второго рода является преобразованием Лапласа функции $\frac{1}{u+1}$.

Благодаря этой связи с преобразованием Лапласа, многочлены Лагерра находят широкое применение в операционном исчислении, ибо их «изображение» таково:

$$p\int_0^\infty e^{-px} L_n^{(0)}(x)\,dx = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{V.17}$$

следовательно, изображением функции $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(0)}(x)$ будет функция $\varphi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$; например, если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} L_n^{(0)}(x)$, то $\varphi(p) = e^{\lambda\left(1-\frac{1}{p}\right)}$; но эта последняя функция служит изображением функции $e^{\lambda} I_0(2\sqrt{\lambda x})$, откуда вытекает (5.1.16) для $\alpha = 0$. В случае $\alpha \neq 0$ изображением многочлена Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ будет функция $\left(-\frac{1}{p}\right)^n (1-p)^{n+\alpha}$, где следует отбросить все члены, содержащие p, p^2, ...; в таком условном смысле изображением многочлена Эрмита служит функция $\left(\frac{2}{p}\right)^n e^{-p^2}$.

Данезе [1] нашел тураново выражение для многочленов Лагерра

$$D_n(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} \{L_k^{(\alpha)}(x)\}^2, \quad n \geqslant 1, \tag{V.18}$$

откуда вытекает неравенство $D_n(x) \geqslant 0$; Сегё показал, что $\Delta_n(x)$ положительно при всех $x \neq 0$; Эвейда [1] нашел, что $\lim_{x\to\infty} \frac{\Delta_n(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, и показал, что $\Delta_n(x)$ имеет единственный экстремум и притом минимум при $x=0$. Мунхерджи и Наньюндиа [1] показали, что $\Delta_n(x) \geqslant 0$ для многочленов Лагерра и Эрмита, а Кошмидер [1] — для многочленов Эрмита и соответствующих многочленов второго рода.

5.7. Если положить $P_n(x) = (-1)^n n!\, L_n^{(\alpha)}(x) = x^n + \ldots$, то получим по (5.1.10)

$$P_n(x) = [x - (2n+\alpha-1)]\, P_{n-1}(x) - (n-1)(n+\alpha-1)\, P_{n-2}(x),$$
$$\beta_n = (n-1)(n+\alpha-1); \tag{V.19}$$

точно так же, если положить $P_n(x) = 2^{-n} H_n(x) = x^n + \ldots$, то по (5.5.8) имеем

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - \frac{n-1}{2} P_{n-2}(x), \quad \beta_n = \frac{n-1}{2}; \tag{V.20}$$

в обоих случаях $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\beta_n}} = \infty$, откуда по условию Карлемана вытекает определенность проблемы моментов и, следовательно, теорема 5.7.2.

Для многочленов Сонина—Маркова, ортогональных на всей вещественной оси с весом $w(x)=|x|^{2c}e^{-x^2}$, $c>-\frac{1}{2}$, имеем [1])

$$\beta_{2k}=c+\frac{2k+1}{2},\quad \beta_{2k+1}=k \quad (k=1,\,2,\,\ldots), \tag{V.21}$$

откуда снова вытекает определенность соответствующей проблемы моментов и, следовательно, замкнутость рассматриваемой ортогональной системы.

К этим же выводам можно прийти при помощи теоремы, найденной Хьюиттом [1], в которой условие накладывается непосредственно на вес: если $d\alpha(x)=w(x)\,dx$, то для определенности проблемы моментов и, следовательно, для замкнутости ортогональной системы в пространстве $L_\alpha^2(-\infty,\,\infty)$ достаточно, чтобы $w(x)\neq 0$ почти всюду и чтобы при $x\to\infty$ мы имели бы $w(x)=O(e^{-\alpha|x|})$, где α — некоторое положительное число. Для доказательства он рассмотрел произвольную функцию $f(x)\in L^2(-\infty,\,\infty)$и преобразование Фурье

$$F(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{izx}\sqrt{w(x)}\,\overline{f(x)}\,dx,\quad z=u+iv,$$

функции $\sqrt{w(x)}\,\overline{f(x)}$; так как при $x\to\infty$ имеем $|e^{izx}\sqrt{w(x)}|\leqslant\leqslant e^{|vx|}O(e^{-\frac{\alpha}{2}|x|})$, то функция $F(z)$ регулярна в полосе $-\frac{\alpha}{2}<v<\frac{\alpha}{2}$, причем

$$F^{(n)}(z)=i^n\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{izx}x^n\sqrt{w(x)}\,\overline{f(x)}\,dx \quad (n=0,\,1,\,\ldots).$$

Если мы предположим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^n\sqrt{w(x)}\,\overline{f(x)}\,dx=0 \quad (n=0,\,1,\,\ldots),$$

то будем иметь $\{F^{(n)}(0)\}_0^\infty=0$, откуда $F(z)\equiv 0$ в указанной полосе. Следовательно, преобразование Фурье функции $\sqrt{w(x)}\,\overline{f(x)}\in L^1(-\infty,\,\infty)$ тождественно равно нулю на всей вещественной оси, откуда по теореме единственности $\sqrt{w(x)}\,f(x)=0$ почти всюду, и поэтому $f(x)=0$ при $w(x)\neq 0$, т. е. почти всюду. Таким образом, функция $f(x)$, ортогональная ко всем функциям $\{\sqrt{w(x)}\,x^n\}_0^\infty$, эквивалентна нулю, т. е. эта система функций $\{\sqrt{w(x)}\,x^n\}_0^\infty$ полна, а следовательно, и замкнута в $L^2(-\infty,\,\infty)$. Мы имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}w(x)\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right|^2dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\sqrt{w(x)}\,f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\sqrt{w(x)}\,x^k\right|^2dx,$$

и, кроме того, условия $f(x)\in L_\alpha^2$ и $\sqrt{w(x)}\,f(x)\in L^2$ эквивалентны, поэтому система $\{x^n\}_0^\infty$ замкнута в пространстве $L_\alpha^2(-\infty,\,\infty)$.

Нетрудно видеть, что достаточное условие Хьюитта близко к необходимому: если $w(x)=e^{-x^\beta}$, $\beta=\frac{2s}{2s+1}$, $s=1,\ 2,\ \ldots,$ то ортогональная

---

[1]) См., например, Я. Л. Геронимус [97*], § 9.

система незамкнута [1]), хотя показатель β можно взять сколь угодно близким к единице.

Рассмотрим теперь некоторые общие свойства *классических ортогональных многочленов* [2]) и выясним, в какой мере они характеризуют именно эти многочлены.

Бохнер [3]) рассмотрел линейное дифференциальное однородное уравнение типа Штурма — Лиувилля

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y + \lambda_n y = 0 \tag{V.22}$$

и нашел условия, при которых его частным решением будет многочлен; он показал, что для этого оно должно иметь такую форму:

$$py'' + qy' + \lambda_n y = 0, \quad p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad q = \delta x + \varepsilon. \tag{V.23}$$

Ортогональные многочлены будут его частным решением в том случае, когда уравнение $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ имеет два вещественных различных корня $a < b$ (не исключены бесконечные значения) и когда выполняются условия

$$\varrho(a)\,p(a) = \varrho(b)\,p(b) = 0, \quad \varrho(x)\,p(x) = \exp\left\{\int \frac{q(x)}{p(x)}\,dx\right\},$$
$$\varrho(x) \geqslant 0, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{V.24}$$

Отсюда легко получаются классические ортогональные многочлены: Якоби — при $\alpha \neq 0$, Лаггерра — при $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, Эрмита — при $\alpha = \beta = 0$, $\gamma \neq 0$, а также некоторые другие системы многочленов—например, при $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 1$ многочлены

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{s=0}^{n} s!\binom{n}{s}\binom{-n-k}{s}x^s.$$

Бренке [1] поставил аналогичную задачу — он рассмотрел уравнение

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + \lambda_n p_2(x)\,y = 0 \tag{V.25}$$

в предположении, что λ_n является многочленом относительно n; он снова пришел к уравнению (V.23) при условии $\lambda_n = n - n(n-1)\alpha$ [4]).

Хан [2] рассмотрел дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{i=0}^{4} p_i(x)\,y^{(i)}(x) = 0,$$

где $\{p_i(x)\}_0^4$ — многочлены степени $\leqslant i$ относительно x, которые могут зависеть и от n, и вывел условия, при которых оно имеет частным решением ортогональные многочлены; он нашел четыре типа таких ортогональных многочленов, зависящих от k $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ параметров, — они являются обобщением классических ортогональных многочленов и многочленов Ломмеля; для этих четырех типов он нашел производящую функцию и коэффициенты рекуррентной формулы.

Рассмотрим теперь формулу Родрига

$$P_n(x) = \frac{C_n}{\varrho(x)} D^n\{\varrho(x)\,p^n(x)\} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{V.26}$$

---

[1]) См. В. А. Стеклов [1].

[2]) См., например, Я. Л. Геронимус [97*], § 9.

[3]) См. ссылку в конце § 5.6.

[4]) См. также Сен и Рангачариар [1].

для классических ортогональных многочленов и выясним, в какой мере она их характеризует.

М. С. Шун [5*] показал следующее: если ортогональные многочлены $\{P_n(x)\}_1^\infty$ допускают представление (V.26), причем все функции $\{\varrho(x)p^n(x)\}_\infty^1$ имеют нули в двух фиксированных точках $a<b$ вещественной оси и $\varrho(x)\geqslant 0$ для $a\leqslant x\leqslant b$, то $\{P_n(x)\}_1^\infty$ — классические ортогональные многочлены.

Ацел [1] получил более общий результат: пусть функции $\{u_n(x)\}$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $Q_n(x)u_n'(x)=L_n(x)u_n(x)$, где $L_n(x)$, $Q_n(x)$ — многочлены не выше первой и соответственно второй степени, и пусть все функции $\{u_n(x)\}_1^\infty$ имеют по крайней мере два общих вещественных корня $a<b$; пусть существует такая функция $\varrho(x)$, что для каждого $n=1,\ 2,\ \ldots$ выражение $\frac{u_n^n(x)}{\varrho(x)}=P_n(x)$ является многочленом степени n; тогда $\{P_n(x)\}_0^\infty$ — классические ортогональные многочлены Якоби, Лагерра или Эрмита в зависимости от того, будет ли $Q_n(x)$ многочленом второй, первой или нулевой степени; таким образом, Ацел не требует, чтобы функции $u_n(x)$ имели форму $u_n=\varrho p^n$, а также того, чтобы многочлены $\{P_n(x)\}_0^\infty$ были ортогональны.

Г. К. Энгелис [3*], [1] рассмотрел многочлены, определяемые формулой (V.26) при таких предположениях:

$$p(x)=\sum_{k=0}^{s+1}\beta_k x^k,\quad s\geqslant 1,\quad \frac{\varrho'(x)}{\varrho(x)}=\frac{\alpha(x)}{p(x)},\quad \alpha(x)=\sum_{k=0}^{s}\alpha_k x^k,\quad |\alpha_s|+|\beta_s|>0, \tag{V.27}$$

где α_k, β_k — комплексные числа; он показал, что $\{P_n(x)\}$ является единственным многочленным решением некоторого линейного дифференциального уравнения порядка $s+1$.

Отметим, что из формулы (V.26) вытекает такая производящая функция для многочленов $\{P_n(x)\}$:

$$F(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(x)\,\frac{t^n}{n!}=\frac{\varrho(y)}{\varrho(x)}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}, \tag{V.28}$$

где y — тот корень уравнения $y=x+t\varrho(y)$, который стремится к x при $t\to 0$; этот результат принадлежит Дарбу и Абрамеско[1]).

Рассмотрим теперь такое свойство ортогональных классических многочленов: *одновременно с ними ортогональны и их производные.* Сегё в 5.6, (3) ссылается на работы Хана и Кролла, однако Н. Я. Сонин [1] еще в 1887 г. доказал, что только классические ортогональные многочлены обладают этим свойством; эту же теорему доказал Хан; Кролл доказал, что если производные $\{P_n^{(r)}(x)\}_r^\infty$ ортогональны на конечном промежутке, то $\{P_n(x)\}$ — многочлены Якоби; Вебстер [1] обобщил метод Кролла на случай бесконечного промежутка и пришел к многочленам Лагерра и Эрмита. Все указанные авторы заранее полагали $d\alpha(x)=w(x)\,dx$.

В нашей работе [71*] рассмотрен наиболее общий случай и доказана следующая теорема: если многочлены $\{P_n(x)\}_0^\infty$ ортогональны относительно некоторой числовой последовательности $\{c_n\}_0^\infty$, то для одновременной ортогональности их производных $\left\{\frac{1}{n}P_n'(x)\right\}_1^\infty$ относительно некоторой после-

---

[1]) См., например, Шохат [2], стр. 36.

довательности $\{c_n'\}_0^\infty$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{c_n\}_0^\infty$ была построена по рекуррентной формуле

$$[a(n+3)-d]\,c_{n+2}+[b(n+2)-e]\,c_{n+1}+c(n+1)\,c_n=0 \quad (n=-1,\,0,\,1,\,\ldots), \tag{V.29}$$

где c_0, a, b, c, d, e — произвольные числа, подчиненные условиям

$$d-(n+2)\,a\neq 0 \quad (n=0,\,1,\,\ldots), \quad |a|+|b|+|c|\neq 0; \tag{V.30}$$

при этом

$$c_n'=ac_{n+2}+bc_{n+1}+cc_n \qquad (n=0,\,1,\,\ldots); \tag{V.31}$$

решая уравнение в конечных разностях (V.29) по методу Лапласа, придем к классическим ортогональным многочленам.

Рассмотренная нами задача об одновременной ортогональности системы многочленов и их производных является частным случаем более общей задачи, поставленной Н. Н. Лузиным [1]: выяснить, существуют ли, кроме тригонометрической системы, ортогональные системы функций, производные которых также образуют ортогональную систему?

Н. Г. Чеботарев [88*] поставил и решил (при некоторых ограничениях) более общую задачу, в которой обе системы функций могут быть ортогональны относительно различных весов.

Исчерпывающее изложение этих вопросов можно найти в обзорных статьях Б. М. Гагаева [27*], [43*], [44*], [46*], где приведены результаты работ Н. Г. Чеботарева, Б. В. Гнеденко, Льюиса, Планшереля, самого Б. М. Гагаева и его учеников С. Н. Андрианова и Е. А. Синева.

ГЛАВА VI

НУЛИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

6.1. Будем называть *спектром* E_α функции $\alpha(x)$ множество точек x, для которых $\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} d\alpha(y)>0$ при любом $\varepsilon>0$; *точечным спектром* назовем множество точек x, для которых

$$\alpha(x+0)-\alpha(x-0)>0.$$

Пользуясь результатами §§ 3.3, 3.41, можно утверждать, что каждая точка спектра E_α является предельной точкой нулей ортогональных многочленов $\{p_n(x)\}$.

Из перемежаемости нулей ортогональных многочленов вытекают неравенства

$$\ldots<x_{1n}<x_{1,\,n-1}<\ldots<x_{12}<x_{11}<x_{22}<\ldots<x_{n-1,\,n-1}<x_{nn}<\ldots,$$

откуда следует существование пределов

$$\lim_{n\to\infty} x_{1n}=a\geqslant-\infty, \quad \lim_{n\to\infty} x_{nn}=b\leqslant+\infty; \tag{VI.1}$$

при этом $a=\inf E_\alpha$, $b=\sup E_\alpha$, т. е. спектр E_α не выходит за пределы отрезка $[a,\,b]$, который называется поэтому *истинным отрезком ортогональности*, ибо вне его имеем $\alpha(x)\equiv\text{const}$.

Отсюда ясно, что изучение спектра E_α функции $\alpha(x)$ позволяет сделать некоторые заключения о распределении нулей ортогональных многочленов.

Так как ортогональные многочлены $\{P_n(x)\}_0^\infty$ удовлетворяют уравнению в конечных разностях (III.11), то задача заключается в том, чтобы по двум числовым последовательностям $\{\alpha_n\}_1^\infty$, $\{\beta_n\}_1^\infty > 0$ сделать заключение о характере спектра E_α.

Отметим, например, следующие простые неравенства:

$$a < x_{1n} < \alpha_n < x_{nn} < b, \quad \beta_n < \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \qquad (n=1, 2, \ldots)\,^{1)} \qquad \text{(VI.2)}$$

и простые соотношения

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \mu_1^{(n)}, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n}\beta_i = \{\mu_2^{(n)}\}^2, \qquad \text{(VI.3)}$$

где мы положили

$$\mu_k^{(n)} = \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{in}^k\right\}^{\frac{1}{k}} \qquad (n=1, 2, \ldots). \qquad \text{(VI.4)}$$

Шохату [1] принадлежит следующий результат: спектр E_α конечен тогда и только тогда, когда обе последовательности $\{\alpha_n\}_1^\infty$, $\{\beta_n\}_2^\infty$ ограничены; если истинный отрезок полубесконечен, то обе последовательности не ограничены; если только одна из них ограничена, то $-a = b = +\infty$.

В нашей работе [120*] рассмотрен случай предельной периодичности последовательностей $\{\alpha_n\}_1^\infty$, $\{\beta_n\}_1^\infty$: в случае существования пределов

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = a_\nu, \quad \lim_{n\to\infty}\beta_n = l_\nu > 0, \qquad n \equiv \nu \,(\mathrm{mod}\, k), \qquad \text{(VI.5)}$$

рассматриваем непрерывную дробь

$$\frac{l_1 \,|}{|\, z-a_1} - \frac{l_2 \,|}{|\, z-a_2} - \ldots - \frac{l_k \,|}{|\, z-a_k} \qquad \text{(VI.6)}$$

с подходящими дробями $\left\{\frac{\varrho_{i-1}(z)}{\pi_i(z)}\right\}_1^k$; пусть

$$F = [z_1, z_2] + [z_3, z_4] + \ldots + [z_{2r-1}, z_{2r}], \qquad r \leqslant k, \qquad \text{(VI.7)}$$

где $\{z_i\}_1^{2r}$ — точки разветвления функции $\sqrt{[\pi_k(z) - \varrho_{k-2}(z)]^2 - 4l_1l_2 \ldots l_k}$; тогда $E_\alpha = E_1 + E_2$, где E_1 всюду плотно на F, а E_2 — ограниченное изолированное счетное множество. При $k=1$, $\varrho_{-1}=0$ получаем результат О. Блюменталя, в этом случае множеством F является отрезок $[a_1 - 2\sqrt{l_1}, a_1 + 2\sqrt{l_1}]$.

Исследование предельных точек спектра E_α проведено М. Г. Крейном ([48*], стр. VI); рассматривая якобиеву матрицу $\|A\|$ (III.50), он показал прежде всего, что условие $\sup|a_n| + 2\sup|b_n| < R$ достаточно для того, чтобы $[a, b] \subset [-R, R]$. Исследуя свойства соответствующего оператора A, он получил следующий результат: для того чтобы единственными предельными точками спектра E_α были заданные точки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, необходимо и достаточно, чтобы элементы якобиевой матрицы были ограничены в своей совокупности и чтобы для элементов g_{ik} матрицы $\|G\|$, определяемой формулой

$$\|G\| = g(\|A\|), \quad g(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_p) \qquad \text{(VI.8)}$$

существовали пределы $\lim\limits_{i,k\to\infty} g_{ik} = 0$; в частности, при условиях $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,

---

1) См. Я. Шохат [1].

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ единственной предельной точкой будет точка a, как это следует и из теоремы Блюменталя.

Пользуясь этим же оператором, П. Б. Найман [1] уточнила результат Блюменталя: пусть существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b > 0$ и пусть

$$\delta_n = \frac{b - b_{n-1}}{b}, \quad \omega_n = \frac{b_{n-1} + b_n - a_n + a - 2b}{b} > 0. \tag{VI.9}$$

Обозначим через $E_0 \subset E_\alpha$ ту часть спектра E_α, которая лежит левее точки $a - 2b$; если существует число $N > 0$ такое, что для $n > N$ имеем

$$b\omega_n \leqslant \frac{b_{n-1}}{2n}\left(1 - \frac{1}{4n}\right) - \frac{b_n}{2(n+1)}\left[1 + \frac{1}{4(n+1)}\right], \tag{VI.10}$$

то E_0 конечно; если же для некоторого $\delta > 0$ существует такое N, что при всех $n > N$ имеем

$$\beta\omega_n > \frac{b_{n-1}}{2n}\left(1 - \frac{1-\delta}{4n}\right) - \frac{b_n}{2(n+1)}\left[1 + \frac{1}{4(n+1)}\right], \tag{VI.10$'$}$$

то E_0 бесконечно; если для некоторого $s > 0$ и для больших значений n имеем $\delta_n = \frac{C}{n^s} + O\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right)$, то E_0 конечно, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n^2\omega_n < \frac{1}{4}$, и бесконечно, если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n^2\omega_n > \frac{1}{4}$.

Для более детального изучения расположения нулей необходимо ввести некоторые функции распределения.

Т. А. Сарымсаков [2*], [15*], [36*] рассматривает дифференциальное уравнение $u'' + u\varphi(x, \nu) = 0$, где ν — некоторый параметр; через $[a, b]$ он обозначает отрезок (который может зависеть от ν), на котором расположены все нули некоторого решения этого уравнения, число которых n_ν, а через $N_{n_\nu}(\alpha, \beta)$ обозначено число нулей этого решения на отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$; если функция $\varphi(x, \nu) > 0$ и непрерывна на $[a, b]$, а $\lim\limits_{\nu\to\nu_0} n_\nu = \infty$ и если ввести обозначение

$$\omega(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \lim_{\nu\to\nu_0} \frac{N_{n_\nu}(x, x+\Delta x)}{n_\nu}, \tag{VI.11}$$

то имеем

$$\omega(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\nu\to\nu_0} \frac{\sqrt{\varphi(x, \nu)}}{n_\nu}, \tag{VI.12}$$

если этот предел существует.

Так как классические ортогональные многочлены удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению второго порядка, которое можно привести к рассматриваемой форме, то отсюда можно сделать вывод о распределении их нулей; в частности, дифференциальное уравнение (4.24.1) имеет решением $u = (1 - x)^{\frac{\alpha+1}{2}} (1 + x)^{\frac{\beta+1}{2}} P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, где $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — многочлен Якоби, а роль $\varphi(x, n)$ играет выражение в фигурных скобках, откуда $\omega(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Т. А. Сарымсаков рассмотрел также произвольную последовательность многочленов $\{a_n P_n(z) = a_n z^n + \ldots\}_1^\infty$ и ввел функцию множества $\psi_n(e) = \frac{N_n(e)}{n}$, где $N_n(e)$ — число нулей многочлена $P_n(z)$ на множестве e; следуя Деланжу [1], он говорит, что последовательность многочленов $\{P_n(z)\}_1^\infty$ имеет *регулярное распределение нулей*, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(e)=\psi(e)$; в этом случае при $a_n\neq 0$ имеем, обозначая через M замыкание множества всех нулей всех многочленов $\{P_n(z)\}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{P_n(z)}{a_n}\right|}=\exp\left\{\int\limits_M \ln|z-\xi|\,d\psi(e)\right\},\qquad z\,\overline{\in}\,M,\tag{VI.13}$$

если этот интеграл существует (бесконечно малое множество e содержит точку ζ). Если M ограничено и $z\,\overline{\in}\,M$ и если, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\max\{|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots\ |a_{n-1}|\}}{|a_n|}}<\infty,\tag{VI.14}$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{\left|\frac{P_n(z)}{a_n}\right|}\leqslant\exp\left\{\int\limits_M \ln|z-\zeta|\,d\psi(e)\right\}.\tag{VI.15}$$

Деланж рассмотрел последовательность многочленов

$$P_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_{in}),\quad \{x_{in}\}_1^n<a\ (n=1,\ 2,\ \ldots)\tag{VI.16}$$

и обозначил через $\nu_n(x)$ число нулей x_{in}, удовлетворяющих неравенству $x_{in}\geqslant x$; пусть $\varphi(n)>0$ и пусть комплексное число c_n подобрано так, что $\frac{\ln|c_nP_n(z)|}{\varphi(n)}$ стремится к пределу в достаточно малой области справа от точки a; тогда существует предел $\nu(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\nu_n(x)}{n}$ всюду, где функция $\nu(x)$ непрерывна; он применяет эти рассуждения к многочленам, связанным трехчленной рекуррентной формулой (3.2.1), т. е. к ортогональным многочленам, в частности к многочленам Лагерра.

Венцль [1] для любых многочленов $\{P_n(x)\}_1^\infty$, корни которых простые и лежат на отрезке $[-1,+1]$, вводит некоторую функцию $\varrho_n(x)$, которую называет *относительной плотностью нулей*:

$$\varrho_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n(x_{\nu+1,n}-x_{\nu n})}, & x_{\nu n}\leqslant x<x_{\nu+1,n}\ (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),\\ 0, & x<x_{1n},\ \text{или}\ x\geqslant x_{nn}.\end{cases}\tag{VI.17}$$

Пусть на отрезке $I=[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$, все функции $\{\varrho_n(x)\}_1^\infty$ равномерно ограничены; пусть $x\in I$, причем

$$x_{mn}<x<x_{m+1,n},\quad x-x_{m,n},\quad x_{m+1,n}-x\geqslant\frac{x_{m+1,n}-x_{mn}}{q_0},\quad q_0>2;\tag{VI.18}$$

тогда имеем

$$\frac{1}{n}\ln|P_n(x)|=\ln\sqrt[n]{|P_n(x)|}=\int\limits_{-1}^{1}\ln|x-t|\,\varrho_n(t)\,dt+\frac{\mu\ln n}{n},$$

$$\mu<M\quad(n=1,\ 2,\ \ldots).\tag{VI.19}$$

Таким образом, в рассмотренных работах предполагается существование некоторых пределов, но не указываются те условия, при которых это имеет место.

Для одного частного, но весьма важного случая, такая задача была полностью разрешена Эрдёшем и Тураном [1]; они доказали следующее: если $\{P_n(x)\}_1^\infty$ — произвольные многочлены, все нули которых лежат на отрезке $[-1, +1]$, и если на этом отрезке имеем $|P_n(x)| \leqslant \leqslant \frac{A(n)}{2^n}$, где $A(n)$ — монотонно возрастающая функция, то, полагая $\{x_{in} = \cos\theta_{in}\}_1^n$, мы имеем для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$

$$\left| \sum_{\alpha \leqslant \theta_{in} \leqslant \beta} 1 - \frac{\beta - \alpha}{\pi} n \right| < \frac{8}{\ln 3} \sqrt{n \ln A(n)}; \tag{VI.20}$$

в частности, если многочлены $\{P_n(x)\}_1^\infty$ минимизируют интеграл $\int_{-1}^{1} |x^n + \cdots|^p w(x)\, dx$, причем $p > 0$, $w(x) \geqslant m > 0$, $x \in [-1, +1]$, то

$$A(n) \leqslant 4 \left\{ \frac{2n^2}{m} \int_{-1}^{1} w(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{VI.21}$$

и таким образом имеем

$$\left| \sum_{\alpha \leqslant \theta_{in} \leqslant \beta} 1 - \frac{\beta - \alpha}{\pi} n \right| < C \sqrt{n \ln n}, \tag{VI.22}$$

где C не зависит от n; если же известно только то, что $w(x) > 0$ почти всюду на $[-1, +1]$, то

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{\alpha \leqslant \theta_{in} \leqslant \beta} 1 \right\} = \frac{\beta - \alpha}{\pi}. \tag{VI.23}$$

Такое распределение авторы, следуя Вейлю, называют *равномерным*: если все точки отрезка $[-1, +1]$ рассматривать как проекции точек полуокружности $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$, то на ней будем иметь равномерное распределение, при котором число точек на любой дуге пропорционально ее длине.

Для многочленов, все нули которых вещественны, введем ступенчатую функцию распределения $\psi_n(x)$, имеющую положительный скачок $\frac{k}{n}$ в каждом корне x_{in} многочлена $P_n(x)$ кратности k; функции, введенные ранее упомянутыми авторами, выражаются, очевидно, следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} & N_n(a, b) = \psi_n(b + 0) - \psi_n(a - 0), \quad \nu_n(x) = 1 - \psi_n(x - 0), \\ & \sum_{\alpha \leqslant \theta_{in} \leqslant \beta} 1 = \psi_n(\cos\alpha + 0) - \psi_n(\cos\beta - 0). \end{aligned} \right\} \tag{VI.24}$$

По первой теореме Хелли из каждой бесконечной подпоследовательности этих функций распределения можно выделить подпоследовательность $\{\psi_{n_\nu}(x)\}$, сходящуюся на всюду плотном множестве к некоторой предельной функции $\lim\limits_{\nu \to \infty} \psi_{n_\nu}(x) = \psi(x)$ (по теореме Полиа сходимость равномерна, если функция $\psi(x)$ непрерывна).

Функция $\omega(x)$, рассмотренная Т. А. Сарымсаковым, имеет следующее значение:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(x, x + \Delta x)}{n} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \lim_{n \to \infty} \{\psi_n(x + \Delta x + 0) - \psi_n(x - 0)\} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\psi(x + \Delta x + 0) - \psi(x - 0)}{\Delta x} = \psi'(x), \end{aligned} \tag{VI.25}$$

т. е. является *плотностью распределения нулей*, но лишь в том частном случае, когда предельная функция $\psi(x)$ абсолютно непрерывна.

Если некоторая функция $f(x)$ непрерывна на конечном отрезке $[a, b]$, то по второй теореме Хелли существует предел

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b f(x)\,d\psi_{n_\nu}(x)=\int_a^b f(x)\,d\psi(x). \tag{VI.26}$$

В частности, имеем

$$\ln\sqrt[n]{|P_n(z)|}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln|z-x_{in}|=\int_a^b \ln|z-x|\,d\psi_n(x), \tag{VI.27}$$

причем всегда существует подпоследовательность, для которой существует

$$\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[n_\nu]{|P_{n_\nu}(z)|}=\exp\left\{\int_a^b \ln|z-x|\,d\psi(x)\right\},\quad z\,\bar{\in}\,[a, b]. \tag{VI.28}$$

Нетрудно сопоставить эти формулы с указанной формулой Венцля; однако при его условиях невозможно выполнить предельный переход, ибо расстояние точки x от двух соседних корней не будет оставаться ограниченным, и, кроме того, нельзя поручиться за равномерную ограниченность функций $\varrho_n(x)$.

Особый интерес представляет тот случай, когда вся последовательность $\{\psi_n(x)\}_1^\infty$ сходится к *единственной предельной функции распределения нулей*; в случае многочленов, ортогональных на конечном отрезке, для этого необходимо и достаточно существование конечных пределов

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\,\mathrm{Sp}I_n^k\right\}=\gamma_k \quad (k=1, 2, \ldots), \tag{VI.29}$$

где $\mathrm{Sp}\,I_n^k$ — след k-й степени якобиевой матрицы

$$I_n=\begin{Vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \beta_2 & \alpha_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_n & \alpha_n \end{Vmatrix}\quad (n=1, 2, \ldots). \tag{VI.30}$$

Рассмотрим теперь так называемую *функцию Робена* $\mu(\zeta)$ множества F, т. е. функцию, характеризующую такое распределение положительной единичной массы на ограниченном замкнутом множестве F точек плоскости, при котором логарифмический потенциал распределения $d\mu(\zeta)$ сохраняет на F постоянное значение

$$\int_F \ln\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\mu(\zeta)=\gamma=\mathrm{const}, \tag{VI.31}$$

где γ — так называемая *константа Робена*, а $d=e^{-\gamma}$ — *емкость множества* F или *трансфинитный диаметр* множества G, дополнительного к F [1]).

Множество F будем считать *регулярным*, т. е. будем предполагать дополнительное множество G связным и обладающим функцией Грина

[1]) Сегё вводит эти понятия лишь в главе XVI для того частного случая, когда множество F состоит из спрямляемых жордановых дуг; однако эти понятия весьма полезны и при рассмотрении распределения нулей.

$g(z, \infty)$ с полюсом на бесконечности; если ввести сопряженную с $g(z, \infty)$ гармоническую функцию $h(z, \infty)$ и построить комплексную функцию Грина $G(z, \infty) = g(z, \infty) + ih(z, \infty)$, то функция Робена такова: $\mu(\zeta) = C - \frac{1}{\pi} h(\zeta, \infty)$, а функция

$$w = \varphi(z) = \exp\{G(z, \infty)\} = \exp\{g(z, \infty) + ih(z, \infty)\}$$

отображает область G на область $|w| > 1$. Например, для множества

$$F = [-1, -\alpha] + [\alpha, 1], \quad 0 < \alpha < 1, \tag{VI.32}$$

имеем

$$\left.\begin{aligned} &G(z, \infty) = \ln \frac{\sqrt{z^2-1} + \sqrt{z^2-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad \gamma = \ln \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad d = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{2}, \\ &\mu(x) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{x^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}, \quad x \in F; \end{aligned}\right\} \tag{VI.33}$$

при $\alpha = 0$ множеством F является весь отрезок $[-1, +1]$, и мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &G(z, \infty) = \ln(z + \sqrt{z^2-1}), \quad \gamma = \ln 2, \quad d = \frac{1}{2}, \\ &\mu(x) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos x, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{VI.34}$$

Рассмотрим следующий вопрос: если многочлены $\{P_n(x)\}_0^\infty$ ортогональны на ограниченном замкнутом множестве F вещественной оси, то при каких условиях существует предельная функция распределения нулей $\psi(x)$, совпадающая с функцией Робена $\mu(x)$ этого множества?

Рассмотрим сперва условия, достаточные для существования

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P_n(z)|} = d\,|\varphi(z)|, \quad z \,\overline{\in}\, F; \tag{VI.35}$$

не будем пока связывать их с существованием предельной функции распределения нулей.

Воспользуемся теоремой Уолша: пусть множество точек

$$\begin{matrix} x_{11}, \\ x_{12}, \; x_{22}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n}, \; x_{2n}, \; \ldots \; x_{nn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{matrix} \qquad P_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_{in}) \tag{VI.36}$$

не имеет предельных точек вне множества F и пусть

$$\max_{x\in F} |P_n(x)| = M_n \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{VI.37}$$

тогда существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} = d \tag{VI.38}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы предельное соотношение (VI.35) имело место равномерно на любом множестве внутри G.

Пусть множеством F является сумма конечного числа отрезков e_k вещественной оси длиною $\geqslant h$ каждый; тогда для выполнения (VI.38) для многочленов, ортогональных относительно распределения $d\alpha(x)$, достаточно каждое из условий:

1) $\alpha'(x) > 0$ почти всюду на F [1]);

2) функция $x = \lambda(y)$, обратная монотонной функции $y = \alpha(x)$, не имеет сингулярной компоненты (т. е. состоит только из функции скачков и абсолютно непрерывной компоненты);

3) $\lim\limits_{\delta\to 0}\{\sqrt{\delta}\ln a(\delta, \alpha)\} = 0$, где $a(\delta, \alpha)$ — так называемый *модуль роста* [2]) функции $\alpha(x)$, т. е.

$$a(\delta, \alpha) = \inf \int_x^{x+\delta} d\alpha(x), \quad x, x+\delta \in e_{\iota}. \tag{VI.39}$$

Если $F = [-1, +1]$, то достаточно любое из условий:

$$\left.\begin{array}{ll} 4)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A(n)} = 1, & M_n = \dfrac{A(n)}{2^n}; \\ 5)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} = \dfrac{1}{2}; & \\ 6)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k_n} = 2, & p_n(x) = k_n x^n + \cdots = k_n P_n(x); \\ 7)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{m_n} = 1, & m_n = \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |p_n(x)|. \end{array}\right\} \tag{VI.40}$$

Покажем, что каждое из условий 1)—3) достаточно также и для существования функции распределения нулей, совпадающей с функцией Робена; действительно, мы имеем (VI.27), откуда на основании теорем Хелли находим при выполнении любого из условий 1), 2), 3)

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[n_\nu]{|P_{n_\nu}(z)|} = \exp\left\{\int_F \ln|z-x|\,d\psi(x)\right\}, \quad z \bar{\in} F;$$

но для распределения Робена мы имеем вне множества F

$$\exp\left\{\int_F \ln|z-x|\,d\mu(x)\right\} = e^{-\gamma+g(z,\infty)} = d\,|\varphi(z)|.$$

Отсюда вытекает равенство функций

$$\int_F \ln|z-x|\,d\psi(x) = \int_F \ln|z-x|\,d\mu(x), \quad z \bar{\in} F,$$

а следовательно, и равенство всех моментов

$$\int_F x^k\,d\psi(x) = \int_F x^k\,d\mu(x) \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Благодаря определенности проблемы моментов для конечного отрезка отсюда вытекает эквивалентность обеих функций $\psi(x)$ и $\mu(x)$.

В частности, если $F = [-1, +1]$, то любое из условий 1)—7) достаточно для существования

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{|P_n(z)|} = \frac{|z+\sqrt{z^2-1}|}{2}, \quad |z+\sqrt{z^2-1}| \geqslant 1+\varepsilon, \ \varepsilon > 0. \tag{VI.41}$$

---

[1]) В том случае, когда $F = [-1, +1]$, а функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна на F, условие 1) найдено Эрдёшем и Тураном.

[2]) См. Шохат [3], ч. III.

6.11. Пользуясь тем же многочленом (6.11.3), можно придать теореме 6.11.1 локальный характер и получить неравенство (6.11.2) при более общих условиях.

Введем функцию $\sigma(\theta) = -\alpha(\cos\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; рассмотрим отрезки $e = [a, b] \subset [-1, +1]$, $e' = [\arccos b, \arccos a]$ и обозначим через $a(\delta, \sigma)$ модуль роста функции $\sigma(\theta)$ на отрезке e'; в таком случае справедливо неравенство

$$\theta_{\nu+1} - \theta_\nu \leqslant C\delta_n, \quad \theta_\nu, \theta_{\nu+1} \in e', \tag{VI.42}$$

где $\delta = \delta_n$ является корнем уравнения

$$\frac{1}{\delta} \ln \frac{2c_0}{a(\delta, \sigma)} = n. \tag{VI.43}$$

В частности, если $-1 < a < b < 1$ и если на $[a, b]$

$$w(x) = w_1(x) w_2(x), \ 0 < m \leqslant w_1(x) \leqslant M, \ w_2(x) \geqslant C |x - x_0|^\alpha, \tag{VI.44}$$
$$\alpha > -1, \ a < x_0 < b,$$

то будем иметь $a(\delta, \sigma) = O(\delta^{1+\alpha})$ и легко найдем $\delta_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$; таким образом, оценка (6.11.2) справедлива не только при условии $w(x) \geqslant m > 0$, $x \in [a, b]$, но и в случае особенности, имеющей, так сказать, «алгебраический характер».

Ф р а й д [1] уточнил оценку (6.11.15): он рассмотрел многочлены, ортогональные на отрезке $[-1, +1]$, причем $d\alpha(x) = w(x)\,dx$ и вес $w(x)$ удовлетворяет неравенствам:

$$m\sqrt{1-x^2} \leqslant w(x) \leqslant M\sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 < m < M; \tag{VI.45}$$

тогда справедливо неравенство

$$\frac{m}{40M} \cdot \frac{1}{n+2} \leqslant \theta_{k+1} - \theta_k \leqslant \frac{4\pi M}{m} \cdot \frac{1}{2n+1-\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2n+1}}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{VI.46}$$

Аналогичные оценки (с другими константами) имеем в таких случаях:

$$m\sqrt{\frac{1 \pm x}{1 \mp x}} \leqslant w(x) \leqslant M\sqrt{\frac{1 \pm x}{1 \mp x}}. \tag{VI.47}$$

Укажем еще следующее уточнение оценки (6.11.14) для коэффициента Кристоффеля λ_ν: если рассмотрим ряд Фурье—Стилтьеса четной функции $\sigma(\theta)$:

$$d\sigma(\theta) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos k\theta \, d\sigma(\theta) \ (k = 0, 1, \ldots), \tag{VI.48}$$

то имеем оценку[1])

$$\lambda_\nu \leqslant \frac{2\pi}{n} \sigma_{n-1}^{(1)}(\theta_\nu), \tag{VI.49}$$

где $\sigma_{n-1}^{(1)}(\theta)$ — *сумма Фейера* указанного ряда; отсюда, в частности, имеем: если на внутреннем отрезке $[a, b]$ функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна и $\alpha'(x) \leqslant M$, то аналогичными свойствами будет обладать и функция $\sigma'(\theta)$, отсюда на основании известных свойств сумм Фейера будет вытекать оценка (6.11.14) для x_ν, лежащего внутри $[a, b]$.

---

[1]) См. Н. И. А х и е з е р [42*], Я. Л. Г е р о н и м у с [1], гл. IV.

Если же функция $\alpha(x)$ только непрерывна на $[a, b]$, то на основании (3.41.1) имеем оценку

$$\lambda_\nu \leqslant C\omega(\delta_n, \alpha), \tag{VI.50}$$

где $\omega(\delta, \alpha)$ — модуль непрерывности функции $\alpha(x)$ на отрезке $[a, b]$, а δ_n находится из уравнения (VI.43).

6.2. Шпехт [1] доказал следующую теорему: если $f(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(z)$ — многочлен степени не выше n с любыми комплексными коэффициентами разложения по ортонормальным многочленам $\{p_k(z)\}_0^n$, то все его нули лежат в полосе

$$|\Im z| \leqslant \frac{k_{n-1}}{k_n} \cdot \frac{\sqrt{|b_0|^2 + |b_1|^2 + \ldots + |b_{n-1}|^2}}{|b_n|}; \tag{VI.51}$$

если же $\gamma > 0$ и если ввести обозначение

$$\beta^* = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \left| \frac{k_{n-\nu} b_{n-\nu}}{k_n b_n} \gamma^\nu \right|, \tag{VI.52}$$

то полоса такова: $|\Im z| \leqslant \frac{1+\beta^*}{\gamma}$; эти результаты автор применяет к случаю многочлена Лежандра, Чебышева, Эрмита и обобщенных многочленов Лагерра.

ГЛАВА VII
НЕРАВЕНСТВА

7.1. Для многочленов, ортогональных с весом

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta q(x), \ \alpha, \beta > -1, \ q(x) \geqslant m > 0, \ -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{VII.1}$$

т. е. обобщенных многочленов Якоби, справедлива оценка

$$|p_n(x)| \leqslant C\sqrt{n}, \quad x \in [a, b], \quad -1 < a < b < 1 (n = 1, 2, \ldots). \tag{VII.2}$$

В работе [10*] В. А. Стеклов показал ее справедливость для веса более общего вида

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta q(x) \prod_{j=1}^{m} (x - x_j)^{2\alpha_j}, \tag{VII.3}$$

где $\alpha_j > 0$ – целые числа; оценка справедлива внутри каждого отрезка $[x_j, x_{j+1}]$.

В работе [12*] В. А. Стеклов поставил вопрос о равномерной ограниченности всей ортогональной системы

$$|p_n(x)| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{VII.4}$$

на всем отрезке ортогональности или на его части: он писал: «К сожалению, мы не имеем способа выразить совокупность общих достаточных условий, которым должен удовлетворять вес $w(x)$ для того, чтобы неравенство (VII.4) имело место для всех многочленов, соответствующих функции $w(x)$, удовлетворяющей указанным условиям. Я думаю, что это неравенство является общим свойством всех ортогональных многочленов, вес которых не обращается в нуль внутри данного интервала; однако в данный момент мне не удалось ни найти строгого доказательства этого утверждения, ни обнаружить пример, в котором это неравенство не выполнялось бы в каждой точке внутри этого интервала».

В наших работах [100*], [1] указаны некоторые условия, достаточные для выполнения (VII.4); если ввести функцию

$$f(\theta) \doteq w(\cos\theta)\,|\sin\theta|, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{VII.5}$$

и предположить, что $f(\theta) \geqslant m > 0$, $\theta \in [0, \pi]$, то для выполнения (VII.4) на $-1 \leqslant x \leqslant 1$ достаточно любое из условий:

1) $f(\theta) \leqslant M$ и $f(\theta) \in \mathrm{Lip}\,(1, 1)$;
2) $f(\theta)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, \pi]$;
3) $f(\theta) \leqslant M$ и $f(\theta) \in \mathrm{Lip}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$;
4) $f(\theta)$ непрерывна и удовлетворяет условию Дини — Липшица (12.1.4)[1].

Наоборот, если известно, что существует бесконечная последовательность $\{n_\nu\}$, для которой

$$|p_{n_\nu}(x)| \leqslant M \ (\nu = 1, 2, \ldots), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{VII.6}$$

то отсюда вытекает неравенство

$$\frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)\,d\theta \geqslant \frac{1}{M^2}, \tag{VII.7}$$

где θ_1, $\theta_2 \in [0, \pi]$ — любые две точки непрерывности функции $f(\theta)$.

В таблице II нашей книги [1] указано несколько неравенств, принадлежащих различным авторам; они дают оценку порядка роста ортогональных многочленов на всем отрезке $[-1, +1]$ в зависимости от тех или иных условий, наложенных на функцию $f(\theta)$; например, из неравенства $f(\theta) \geqslant m > 0$ вытекает неравенство $p_n(x) = o(\sqrt{n})$; у Сегё (7.1.7) при условии $w(x) \geqslant \mu > 0$ указано неравенство $|p_n(x)| \leqslant Cn$, а для внутренних точек отрезка — неравенство $|p_n(x)| \leqslant C\sqrt{n}$.

Одна из наиболее общих оценок такова: если выполняется неравенство (7.1.1), то на всем отрезке $[-1, +1]$ справедлива оценка

$$\left.\begin{aligned} &|p_n(x)| < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha \exp\{\gamma\sqrt{2n}\}, \quad \alpha = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \ln f(\theta)\,d\theta\right\}, \\ &\gamma = \sqrt{\ln(c_0\alpha^2)}, \quad c_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi f(\theta)\,d\theta; \end{aligned}\right\} \tag{VII.8}$$

показано, что можно построить ортогональные многочлены, порядок роста которых сколь угодно близок к указанному.

Отметим еще оценку, позволяющую оценить порядок роста на отрезке $[-1, +1]$ по поведению старшего коэффициента k_n; если выполняется (7.1.1) и если имеем $2^{-n}k_n - \gamma = O\left(\frac{1}{n}\right)$, где γ — некоторая положительная константа, то для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ имеем

$$\max|p_n(x)| = |p_n(\cos\theta_0)| \simeq \frac{1}{|D(re^{i\theta_0})|}, \quad 1 - r = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{VII.9}$$

---

[1]) Случай 4) вытекает из теории С. Н. Бернштейна [96*]; Сегё (7.1.16) при условии $f(\theta) \geqslant m > 0$ и при более ограничительном условии $f(\theta) \in \mathrm{Lip}\,1$ утверждает справедливость (VII.4) лишь *внутри* отрезка $[-1, +1]$.

Например, для многочленов Якоби имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{D(z)} &= 2^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}}(1-z)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(1+z)^{-\beta-\frac{1}{2}}, \quad z\in[-1,\ +1], \\ k_n^2 &= \frac{(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma^2(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{2n+\alpha+\beta+1}\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}; \end{aligned}\right\} \quad (\text{VII.10})$$

применяя формулу Стирлинга, находим

$$2^{-2n}k_n^2 - \gamma^2 = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(0)}};$$

поэтому при $\alpha,\ \beta \geqslant -\frac{1}{2}$ имеем для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ оценку

$$\max|p_n(x)| \simeq O(n^{\omega+\frac{1}{2}}), \quad \omega = \max(\alpha,\ \beta). \quad (\text{VII.11})$$

В таблице III нашей книги [1] указаны некоторые *локальные оценки*: например, оценка (VII.2) В. А. Стеклова справедлива внутри отрезка $[a,\ b]$ при единственном условии $w(x) \geqslant m > 0$ на $[a,\ b]$; если же, кроме того, выполняется условие (7.1.1), то $p_n(x) = o(\sqrt{n})$ внутри $[a,\ b]$. Если же существует интеграл $\int\limits_0^\pi [f(\theta)]^{-1}\,d\theta$, а на отрезке $[a,\ b] \subset [-1, +1]$ функция $w(x)$ имеет ограниченную вариацию, то внутри $[a,\ b]$ выполняется (VII.2).

Отметим, что многие оценки таблиц II, III справедливы в самом общем случае ортогональности (2.2.4), в этом случае через $w(x)$ обозначена существующая почти всюду производная $\alpha'(x)$; в указанных локальных оценках предполагается абсолютная непрерывность функции $\alpha(x)$ лишь на внутреннем отрезке $[a,\ b]$ (из оценок III, IV, V таблицы III видно, что оценка роста многочлена на внутреннем отрезке зависит при условии (7.1.7) только от поведения функции $w(x)$ на этом отрезке).

Укажем еще локальную оценку Фрайда [1]): пусть функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна на всем отрезке $[-1,\ +1]$ и пусть функция $\frac{1}{f(\theta)}$ суммируема на $[0,\ \pi]$; если для $\theta_0 \in [0,\ \pi]$ имеем $f(\theta_0) > 0$ и если в окрестности этой точки имеем $f(\theta) - f(\theta_0) = O(|\theta-\theta_0|)$, то вся ортонормальная система ограничена в точке $x_0 = \cos\theta_0$.

7.3. Теорему 7.3.1 можно обобщить следующим образом: для любой производной $P_n^{(i)}(x)$ многочлена Лежандра абсолютные величины экстремальных значений возрастают вместе с $|x|$.

Отметим также следующие оценки Л. Фейера:

$$\left.\begin{aligned} \left|\int\limits_{-1}^{x} P_n(t)\,dt\right| &\leqslant C_1 n^{-\frac{3}{2}}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \left|\frac{dP_n(x)}{dx}\right| &\leqslant \frac{C_2\sqrt{n}}{1-x^2}, \quad -1 < x < 1. \end{aligned}\right\} \quad (\text{VII.12})$$

Можно указать такой локальный аналог теоремы Корауса 7.1.3: пусть имеем две системы многочленов, ортогональных на отрезке $[-1,\ +1]$ относительно распределений $d\alpha^{(1)}(x)$ и $d\alpha^{(2)}(x)$, причем пусть

$$d\alpha^{(2)}(x) = k(x)\,d\alpha^{(1)}(x), \quad 0 < m \leqslant k(x) \leqslant M, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1; \quad (\text{VII.13})$$

[1]) См. ссылку в конце § 12.6.

для $x \in [a, b] \subset [-1, +1]$ пусть имеем $k(x) \in \mathrm{Lip}\,1$; тогда из условий $\{|p_n^{(1)}(x)|\}_0^\infty \leqslant C_1$, $x \in [a, b]$, вытекают неравенства $\{|p_2(x)|\}_0^\infty \leqslant C_2$ внутри $[a, b]$; это же заключение справедливо, если на $[a, b]$ имеем

$$d\alpha^{(1)}(x) = w(x)\,dx, \quad w(x) \leqslant C, \quad k(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1. \qquad \text{(VII.14)}$$

7.72. Рассмотрим общую задачу Чебышева о нахождении пределов отношения

$$\psi = \int_{-1}^{1} y(x)\,u(x)\,dx : \int_{-1}^{1} y(x)\,v(x)\,dx, \qquad \text{(VII.15)}$$

где $y(x)$ — многочлен степени не выше n, причем $y(x)$ и функция $v(x)$ неотрицательны на отрезке $[-1, +1]$; пользуясь методом Чебышева, можно показать, что $y(x)$ должен иметь такую форму:

$$y(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta z_m^2(x), \quad \alpha,\ \beta = 0 \text{ или } 1, \quad \alpha+\beta+2m = n, \qquad \text{(VII.16)}$$

после чего находим

$$\psi(x) = \int_{-1}^{1} \theta_0(x)\,z_m^2(x)\,dx : \int_{-1}^{1} \theta(x)\,z_m^2(x)\,dx, \;\; \theta(x) \geqslant 0, \;\; x \in [-1, +1]. \qquad \text{(VII.17)}$$

Можно решить задачу до конца без применения непрерывных дробей и найти искомые пределы $\mu_1 \leqslant \psi \leqslant \mu_2$.

В частном случае, когда $\theta(x) = (1-x)^h$, $\theta_0(x) = (1-x)^{h+1}$ ($h > 0$ — целое число), имеем (при $m \to \infty$ и фиксированном h) $\mu_1 \simeq \frac{2u}{m^2}$, где u является наименьшим положительным нулем функции Бесселя[1]):

$$I_h(2\sqrt{u}) = (\sqrt{u})^h \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r u^r}{r!\,(h+r)!}. \qquad \text{(VII.18)}$$

Если же $\theta(x) = (1-x)^h$, $\theta_0(x) = (1-x)^{h+2}$, то имеем $\sqrt{\mu_1} \simeq \frac{2z_0}{m^2}$, где z_0 — наименьший положительный корень целой функции

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{k!\,(h+k)!\,(h+2k+1)!}. \qquad \text{(VII.19)}$$

ГЛАВА VIII

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

В нашей книге [97*] (§§ 24—25) рассмотрены работы А. А. Адамова, В. А. Стеклова, К. А. Поссе и С. Н. Бернштейна, посвященные асимптотическим свойствам классических ортогональных многочленов.

8.21. Отметим, что С. Н. Бернштейн [41*] показал, что при $n \to \infty$ асимптотическое значение уклонения от нуля произведения

$$(1-x)^{\varrho_1}(1+x)^{\varrho_2}\,|x^n + \ldots|, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \qquad \text{(VIII.1)}$$

не превосходит $2^{-(n+\varrho_1+\varrho_2+1)}$, причем экстремальным многочленом будет

[1]) См. С. Н. Бернштейн [27*].

многочлен Якоби, для которого $\alpha=2\varrho_1-\frac{1}{2}$, $\beta=2\varrho_2-\frac{1}{2}$ и выполняются неравенства $-\frac{1}{2}\leqslant\alpha$, $\beta\leqslant\frac{1}{2}$.

В примечаниях к главе XII мы рассмотрим общий случай многочленов, ортогональных на отрезке $[-1, +1]$ относительно некоторого веса; из этого общего случая мы получим для частного случая многочленов Якоби формулы (8.21.19), (8.23.1), (8.23.2), (8.9.1).

8.22. Сансоне [2] нашел явные выражения для многочленов u_0, v_0 в (8.22.7), а Мерли [2] — для u_1, v_1; в обоих случаях найдены оценки для остаточных членов.

ГЛАВА IX

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯДЫ ПО КЛАССИЧЕСКИМ МНОГОЧЛЕНАМ

9.1. В примечаниях к главе XII мы рассмотрим общий вопрос о разложении функции в ряд многочленов, ортогональных на отрезке $[-1, +1]$ (или на любом конечном отрезке) относительно некоторого веса; оттуда, как частный случай, получим теоремы 9.1.1, 9.2.2.

Рассмотрим несколько результатов, относящихся к рядам по многочленам Якоби. Б. М. Яхнин [1], [2], [3] вывел следующие теоремы для случая $|\alpha|=|\beta|=\frac{1}{2}$:

1) если $f(x)\in C[-1, +1]$, то для функций Лебега

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sup_{|f(x)|\leqslant 1}|s_n^{(\alpha,\beta)}(f; x)|, \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \tag{IX.1}$$

справедливы оценки

$$\begin{gathered} L_n^{(\alpha,\beta)}(x)=L_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)+O\{|P_m^{(\alpha,\beta)}(x)|+1\}, \\ m=n-\alpha-\beta, \quad P_m^{(\alpha,\beta)}(x)=2^m x^m+\ldots \end{gathered} \tag{IX.2}$$

Пользуясь оценкой А. Ф. Тимана для $L_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)$, он получил внутри отрезка $[-1, +1]$ оценки

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1). \tag{IX.3}$$

На концах отрезка эти величины имеют порядок $O(n)$.

2) Если $f(x)\in\operatorname{Lip}\gamma$, $0<\gamma\leqslant 1$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, то частные суммы $s_n^{(\alpha,\beta)}(f, x)$ разложения $f(x)$ по многочленам Якоби связаны при $n\to\infty$ асимптотическими равенствами

$$s_n^{(\alpha,\beta)}(f; x)=s_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(f; x)+O\left\{\frac{|P_m^{(\alpha,\beta)}(x)|}{n^\gamma}+\frac{1}{n^\gamma}\right\}, \quad m=n-\alpha-\beta. \tag{IX.4}$$

3) Если $f^{(r)}(x)\in\operatorname{Lip}\gamma$, $0<\gamma\leqslant 1$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, то остаточные члены $R_n^{(\alpha,\beta)}(f; x)$ указанных разложений связаны при $n\to\infty$ асимптотическими равенствами

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(f; x)=R_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(f; x)+O\left\{\frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(x)}{n^{\gamma+r}}+\frac{1}{n^{\gamma+r}}\right\}, \quad m=n-\alpha-\beta. \tag{IX.5}$$

Отметим еще результаты Г. И. Натансона [2*], [1], применившего к разложениям в ряд по классическим ортогональным многочленам метод суммирования Бернштейна — Рогозинского: если

$$B_n(f;\,x)=\frac{1}{2}\{s_n(f;\,x_1)+s_n(f;\,x_2)\}, \tag{IX.6}$$

где точки x_1, x_2 специальным образом выбраны, то во всех точках Лебега функции $f(x)\in L_\alpha^2$, лежащих строго внутри интервала ортогональности, имеем $\lim\limits_{n\to\infty}B_n(f;\,x)=f(x)$; если же функция $f(x)$ непрерывна, то сходимость равномерна на каждом отрезке, лежащем строго внутри интервала ортогональности; мы имеем следующие частные случаи:

1) многочлены Якоби

$$x_{1,\,2}=x\cos\alpha_n\pm\sqrt{1-x^2}\sin\alpha_n,\quad \alpha_n=\frac{\pi}{2n+\alpha+\beta+1}; \tag{IX.7}$$

теорема остается в силе, если точки x_1, x_2 сдвинуть на величину порядка $O\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$; указанный метод суммирования эквивалентен методу множителей с матрицей

$$\left\{\cos\frac{2k+\alpha+\beta+1}{2}\alpha_n\right\}\quad (k=0,\,1,\,\ldots,\,n;\ n=0,\,1,\,\ldots); \tag{IX.8}$$

это последнее утверждение останется в силе, если сдвиг порядка

$$O\left(n^{-\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)}\right),\quad \varepsilon>0.$$

2) Многочлены Лагерра: $x_{1,2}=x\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x}{n}+\frac{\pi^2}{16n}}$; функция $f(x)$ измерима на $[0,\,\infty)$, и существуют интегралы

$$\left.\begin{gathered}\int_0^1 x^\alpha|f(x)|\,dx,\quad \int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{4}}|f(x)|\,dx,\quad \int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{2\alpha-5}{4}}|f(x)|\,dx,\\ \lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n}\int_n^\infty e^{-x}x^{\alpha-2}[f(x)]^2\,dx\right\}=0.\end{gathered}\right\} \tag{IX.9}$$

3) Многочлены Эрмита: $x_{1,\,2}=x\pm\frac{\pi}{2\sqrt{2n}}$; функция $f(x)$ измерима на $(-\infty,\ +\infty)$, и существуют интегралы

$$\left.\begin{gathered}\int_{-a}^{a}|f(x)|\,dx,\ a>0,\quad \int_1^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{|f(x)|+|f(-x)|}{x}\,dx,\\ \lim_{n\to\infty}\left\{n\int_n^\infty e^{-x^2}\frac{[f(x)]^2+[f(-x)]^2}{x^2}\,dx\right\}=0.\end{gathered}\right\} \tag{IX.10}$$

Метод суммирования в случаях 2), 3) эквивалентен методу множителей с матрицей

$$\left\{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{k}{n}}\right\}\quad (k=0,\,1,\,\ldots,\,n;\ n=1,\,2,\,\ldots). \tag{IX.11}$$

Поллард [1] рассмотрел ультрасферические многочлены при $\lambda\geqslant 0$ и доказал, что разложение функции $f(x)\in L_\alpha^p$ в ряд этих многочленов сходится к $f(x)$ в метрике L_α^p, если $2-\frac{1}{\lambda+1}<p<2+\frac{1}{\lambda}$; при $\lambda>0$ это верно при всех $p>1$.

В случаях многочленов Якоби ($\alpha, \beta \geqslant 0$) ряд сходится в метрике L^p, если $\frac{4}{3} < p < 4$; если же

$$4 \min \left\{ \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}, \frac{\beta+1}{2\beta+1} \right\} < p < 4 \max \left\{ \frac{\alpha+1}{2\alpha+3}, \frac{\beta+1}{2\beta+3} \right\}, \qquad \text{(IX.12)}$$

то ряд сходится к $f(x)$ в метрике L^p_α и расходится для значений p вне указанного отрезка.

Дж. Нейман и Рудин [1] дополнили указанный результат: разложение функции $f(x) \in L^p$ по многочленам Лежандра расходится в метрике L^p для $p = \frac{4}{3}$ и $p = 4$.

9.2. В дополнение к (5) отметим следующие результаты:

Хилле [1] обозначил через C_a область абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$, где $\{P_n(z)\}_0^\infty$ — некоторая система многочленов, не обязательно ортогональных; он доказал некоторые общие теоремы, аналогичные теореме Абеля в теории степенных рядов — например, если все нули $\{P_n(z)\}$ вещественны и $z_0 \in C_a$, то и $z \in C_a$, если $\Re z = \Re z_0$, $|\Im z| \leqslant |\Im z_0|$; если, кроме того, все корни неотрицательны и $z_0 \in C_a$, то и $z \in C_a$, если $|z| \leqslant |z_0|$, $\Re z \geqslant \Re z_0$.

Он показал, в частности, что в случае многочленов Лежандра область C_a ограничена эллипсом $|z-1| + |z+1| = \mathrm{const}$, в случае многочленов Лагерра — параболой $|\Im \sqrt{z}| = \mathrm{const}$, в случае многочленов Эрмита — двумя параллельными прямыми $|\Im z| = \mathrm{const}$.

Фольк [1] рассмотрел дифференциальное уравнение с параметром

$$p_0(z) y'' + p_1(z) y' + [p_2(z) + \lambda_n^2] y = 0, \qquad \text{(IX.13)}$$

положив

$$\varrho(z) = \frac{1}{p_0(z)} \exp \left\{ \int\limits_{z_0}^{z} \frac{p_1(z)}{p_0(z)} dz \right\}; \quad t = \varphi + i\psi = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{p_0(z)}} \qquad \text{(IX.14)}$$

и проведя в плоскости z разрезы по линиям, соединяющим нули $p_0(z)$, он рассмотрел обратную функцию $z = \Phi(t)$ с вещественным периодом φ_1; тогда прямые $\psi = \beta > 0$ перейдут в некоторые замкнутые кривые C плоскости z (например, при $p_0(z) = z$ получим $t = 2\sqrt{z}$, разрезом будет вещественная положительная полуось, и прямые $\Im t = \mathrm{const}$ преобразуются в параболы $|\Im \sqrt{z}| = \mathrm{const}$).

Если $y = y_n(z)$ является решением (IX.13), регулярным внутри C, и если положить

$$Q_n(u) = \int\limits_{z_0}^{z_2} \frac{\varrho(z) y_n(z)}{u - z} dz \quad (n = 0, 1, \ldots), \qquad \text{(IX.15)}$$

где z_0, z_2 — корни $p_0(z)$, то ряд

$$\frac{1}{u-z} \sim \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(u) y_n(z) \qquad \text{(IX.16)}$$

равномерно сходится, если u лежит на кривой C_1, охватывающей кривую C. Если функция $f(z)$ регулярна внутри C, то ее разложение по функциям $\{y_n(z)\}$ можно неограниченно дифференцировать внутри C.

В том частном случае, когда функции $\{y_n(z)\}$ совпадают с классическими ортогональными многочленами, $\{Q_n(u)\}$ являются соответствующими функциями второго рода.

Из рассмотренной общей теории можно найти граничные кривые C для случая классических ортогональных многочленов. В случае многочленов Лагерра $\{L_n^{(0)}(z)\}$ ряд (IX.16) сходится внутри параболы $|\Im\sqrt{z}|=|\Im\sqrt{u}|$; если функция $f(z)$ регулярна внутри параболы $|\Im\sqrt{z}|=\beta$ и если $\lim\limits_{z\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z}\right|=0$ и интеграл $\int\frac{f(z)}{z}\,dz$, взятый по дуге этой параболы, равномерно сходится, то разложение функции $f(z)$ по многочленам Лагерра сходится внутри указанной параболы.

В случае многочленов Эрмита ряд (IX.16) сходится внутри полосы $|\Im z|<|\Im u|$; если функция $f(z)$ регулярна внутри полосы $|\Im z|<\beta$ и $\lim\limits_{z\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z}\right|=0$ и абсолютно сходятся четыре интеграла

$$\int\limits_{\pm i\beta}^{\pm\infty\pm i\beta}\frac{f(z)}{z}\,dz, \tag{IX.17}$$

то разложение функции по многочленам Эрмита сходится внутри указанной полосы. Рассмотрим еще такой частный случай:

$$-z^2y''-zy'+(n^2-z^2)\,y=0; \tag{IX.18}$$

в этом случае $\{y_n=I_n(z)\}_0^\infty$ — функции Бесселя, кривыми C являются окружности $|z|=\text{const}$, а функции второго рода $\{Q_n(u)=O_n(u)\}_0^\infty$ являются многочленами степени $n+1$ относительно $\frac{1}{u}$; они называются *многочленами Бесселя*.

ГЛАВА X

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

10.1. Если вместо интеграла Пуассона—Лебега (10.1.1) рассмотреть интеграл Пуассона — Стилтьеса

$$u(r,\ \theta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\,d\sigma(t),\quad r<1 \tag{X.1}$$

(как это придется делать в дальнейшем), причем $\sigma(t)$ — ограниченная неубывающая функция, то по функции $u(r,\theta)$ мы можем найти функцию $\sigma(t)$ по известной *формуле обращения*

$$\frac{\sigma(t+0)+\sigma(t-0)}{2}=\text{const}+\lim_{r\to 1-0}\int\limits_0^t u(r,\ \theta)\,d\theta. \tag{X.2}$$

Во всякой точке t_0, в которой существует обобщенная симметричная производная первого порядка

$$\sigma_{(1)}(t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sigma(t_0+h)-\sigma(t_0-h)}{2h}, \tag{X.3}$$

мы имеем $\lim\limits_{r\to 1-0}u(r,t_0)=\sigma_{(1)}(t_0)$; в частности, если существует производная $\sigma'(t_0)$, то мы имеем $\lim\limits_{r\to 1-0}u(r,\ t_0)=\sigma'(t_0)$.

10.2. Речь идет о построении функции $D(z) \in H_2$ по граничным значениям ее модуля почти всюду в $[0, 2\pi]$:

$$\lim_{r \to 1-0} |D(re^{it})|^2 = |D(e^{it})|^2 = f(t). \tag{X.4}$$

В. И. Смирнов [17*] нашел следующее параметрическое представление функций $\varphi(z) \in H_\delta\ (\delta > 0)$ [1]):

$$\varphi(z) = \varphi_1(z)\,\varphi_2(z)\,\varphi_3(z), \quad |z| < 1; \tag{X.5}$$

здесь

$$\varphi_1(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(t)\,\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt\right\}, \quad |z|<1, \tag{X.6}$$

причем $f(t)$ — заданная неотрицательная функция, для которой $[f(t)]^\delta$, $\ln f(t) \in L_1$; $\varphi_2(z)$ — произведение Бляшке:

$$\varphi_2(z) = e^{i\alpha} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha}_n z}\cdot\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, \quad |z| < 1, \tag{X.7}$$

где $m \geqslant 0$ — целое число, $\{|\alpha_n|\}_1^\infty < 1$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < \infty$; наконец,

$$\varphi_3(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)\right\}, \quad |z| < 1, \tag{X.8}$$

где $\mu(t)$ — невозрастающая функция с производной, равной нулю почти всюду в $[0, 2\pi]$; при этом почти всюду в $[0, 2\pi]$ имеем

$$|\varphi(e^{it})| = |\varphi_1(e^{it})| = f(t).$$

Сегё, а затем В. И. Смирнов показали, что из всех функций $\varphi(z) \in H_\delta$, определяемых по граничным значениям их модуля, функция $\varphi_1(z)$ имеет *наибольший модуль* в области $|z| < 1$, т. е.

$$|\varphi_1(z)| \geqslant |\varphi(z)|, \quad |z| < 1. \tag{X.9}$$

Функция $D(z)$ (10.2.10) является именно такой функцией, имеющей в области $|z| < 1$ наибольший модуль по сравнению со всеми остальными функциями $\varphi(z) \in H_2$, определяемыми условием $|\varphi(e^{it})| = \sqrt{f(t)}$ почти всюду в $[0, 2\pi]$.

10.3. В дальнейшем, при выводе асимптотических формул для ортогональных многочленов, важно выяснить условия существования граничных значений

$$D(e^{it_0}) = \lim_{r \to 1-0} D(re^{it_0}). \tag{X.10}$$

Очевидно, функции $\ln|D(re^{it})|$ и $\arg D(re^{it})$ являются гармоническими сопряженными функциями, причем первая из них имеет почти всюду граничные значения

$$\ln|D(e^{it})| = \frac{1}{2}\ln f(t) \in L_1; \tag{X.11}$$

поэтому существование в этих точках граничного значения $D(e^{it})$ эквивалентно существованию граничного значения сопряженной функции $\arg D(re^{it})$.

---

[1]) См. также И. И. Привалов [71*], гл. II.

Применяя метод суммирования Абеля—Пуассона к тригонометрическому ряду, сопряженному с рядом Фурье функции $\frac{1}{2}\ln f(t)$, получим, что это граничное значение существует почти всюду в $[0, 2\pi]$ и выражается сингулярным интегралом

$$\arg D(e^{i\theta}) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(t) \operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt. \tag{X.12}$$

Следовательно, в тех точках, где существует граничное значение $\ln D(e^{i\theta})$ и существует этот сингулярный интеграл, существует и граничное значение $D(e^{i\theta})$.

В работе Ф р а й д а [8], а также в нашей работе [115*] и в книге [1], гл. IV, рассмотрены различные случаи, в которых по тем или иным свойствам известной функции $f(\theta)$ делаются заключения об аналогичных свойствах функции $D(e^{i\theta})$; вопрос сводится к изучению свойств функции, сопряженной с данной.

Пусть, например, функция $f(\theta)$ непрерывна и положительна на отрезке $[\alpha, \beta]\subset[0, 2\pi]$ и пусть ее модуль непрерывности $\omega(\delta)=\omega(\delta, f)$ на этом отрезке таков, что существует интеграл $\int_0^a \omega(x)x^{-1}\,dx$; тогда оба указанных тригонометрических ряда равномерно сходятся внутри отрезка $[\alpha, \beta]$, т. е. существует граничное значение $D(e^{i\theta})$; в частности, рассмотренный интеграл существует, если выполнено условие Дини—Липшица (10.3.10).

Можно оценить модуль непрерывности функции, сопряженной с данной: если вещественная 2π-периодическая функция $u(\theta)\in L_1$ непрерывна на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, причем существует интеграл

$$\int_0^a \frac{\omega\left(x\ln\frac{1}{x},\ u\right)}{x}\,dx < \infty, \tag{X.13}$$

то модуль непрерывности сопряженной функции $v(\theta)$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(\delta,\ v) \leqslant \int_0^\delta \frac{\omega\left(x\ln\frac{1}{x},\ u\right)}{x}\,dx. \tag{X.14}$$

Функция $\varphi(z)=\varphi(re^{i\theta})=u(r, \theta)+iv(r, \theta)$, $r<1$, также непрерывна на $[\alpha, \beta]$ с тем же модулем непрерывности; следовательно, если функция $f(\theta)$ положительная и непрерывна на $[\alpha, \beta]$ с модулем непрерывности, удовлетворяющим условию (XI.13), то функция $D(e^{i\theta})$ имеет модуль непрерывности, удовлетворяющий условию (XI.14); в частности, если $u(\theta)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha<1$, то и $v(\theta)\in\mathrm{Lip}\ \alpha$; если $u(\theta)$ удовлетворяет условию Дини—Липшица с показателем $\alpha>1$, то $v(\theta)$ удовлетворяет тому же условию с показателем $\alpha-1$; если почти всюду в $[0, 2\pi]$ имеем $f(\theta)\geqslant m>0$ и если $f(\theta)\in\mathrm{Lip}\,(\alpha, 2)$, то и $D(e^{i\theta})\in\mathrm{Lip}\,(\alpha,\ 2)$.

Рассмотрим еще один вопрос, связанный с представлением функций и важный для дальнейшего (например, для условия В. И. Смирнова (16.2.10)).

Пусть функция $\varphi(z)\in H_\delta$ не равна нулю в $|z|<1$; в таком случае ее произведение Бляшке $\varphi_2(z)\equiv 1$, и мы имеем

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\ln f(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t), \quad |z|<1. \tag{X.15}$$

Функция $\ln\varphi(z)$ регулярна в $|z|<1$, причем для ее вещественной части имеем

$$\left.\begin{aligned} \ln|\varphi(re^{i\theta})| &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\ t-\theta)\ln f(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\ t-\theta)\,d\mu(t),\\ P(r,\ \alpha) &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos\alpha+r^2},\quad r<1; \end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{X}.16)$$

относительно сопряженной функции $\arg\varphi(re^{i\theta})$ мы можем утверждать лишь то, что она принадлежит классу L_s, $s<1$; поэтому в общем случае будем иметь $\ln\varphi(z)\in H_s$, $s<1$. Вещественная часть этой функции выражается формулой (X.16), т. е. эта гармоническая функция не может быть выражена через свои граничные значения $\ln f(t)$ посредством одного первого интеграла, являющегося интегралом *Пуассона — Лебега*, а выражается суммой двух интегралов, т. е. интегралом *Пуассона — Стилтьеса*.

Наложим на функцию $f(t)$ дополнительное ограничение—потребуем, например, чтобы $\ln f(t)\in L_p$, $p>1$; тогда сопряженная функция будет принадлежать классу L_1, функция $\ln\varphi(z)$ будет принадлежать классу H_1 и не будет второго интеграла в выражении для $\ln|\varphi(re^{i\theta})|$.

ГЛАВА XI

МНОГОЧЛЕНЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

Рассмотрим последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_0^\infty$, удовлетворяющую условиям $D_n=|c_{i-k}|_0^n\neq 0$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$; как было показано в примечаниях к главе II, многочлены, построенные по формуле (11.1.9), будут ортогональны относительно этой последовательности

$$\mathfrak{S}\left\{\varphi_k(z)\,\overline{\varphi}_s\left(\frac{1}{z}\right)\right\}=\delta_{ks};\qquad(\mathrm{XI}.1)$$

легко видеть, что для них будут справедливы формула Кристоффеля — Дарбу (11.4.5) и рекуррентные соотношения (11.4.6), (11.4.7).

Если наряду с нормированными многочленами $\{\varphi_n(z)\}_0^\infty$ рассмотрим многочлены $\left\{\Phi_n(z)=\frac{\varphi_n(z)}{k_n}=z^n+\ldots\right\}_0^\infty$, то вместо (11.4.6) и (11.4.7) получим соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{n+1}(z)=z\Phi_n(z)-\overline{a}_n\Phi_n^*(z),\quad \Phi_{n+1}^*(z)=\Phi_n^*(z)-a_nz\Phi_n(z),\\ &\Phi_n^*(z)=z^n\overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right)\ (n=0,\ 1,\ \ldots), \end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{XI}.2)$$

где параметры $\{a_n\}_0^\infty$ выражаются через моменты следующими формулами:

$$a_n=-\overline{\Phi}_{n+1}(0)=(-1)^n\,|c_{i-k+1}|_0^n:|c_{i-k}|_0^n\quad(n=0,\ 1,\ \ldots),\qquad(\mathrm{XI}.3)$$

причем условия $\{D_n\}_0^\infty\neq 0$ эквивалентны условиям $\{|a_n|\}_0^\infty\neq 1$; задание моментов $\{c_k\}_0^n$, удовлетворяющих условиям $\{D_k\}_0^n\neq 0$, эквивалентно заданию параметров $\{a_k\}_0^{n-1}$, удовлетворяющих условиям $\{|a_k|\}_0^{n-1}\neq 1$.

Из (XI.1) вытекают трехчленные рекуррентные формулы

$$\left.\begin{aligned} &\overline{a}_n\Phi_{n+2}(z)=(\overline{a}_nz+\overline{a}_{n+1})\Phi_{n+1}(z)-\overline{a}_{n+1}z(1-|a_n|^2)\Phi_n(z),\\ &a_n\Phi_{n+2}^*(z)=(a_n+a_{n+1}z)\Phi_{n+1}^*(z)-a_{n+1}z(1-|a_n|^2)\Phi_n^*(z)\\ &(n=0,\ 1,\ \ldots),\ \Phi_0=1,\ \Phi_1(z)=z-\overline{a}_0. \end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{XI}.4)$$

Наоборот, если многочлены $\{\Phi_n(z)\}_0^\infty$ удовлетворяют (XI.1) или (XI.3), причем $\{|a_n|\}_0^\infty \neq 1$, то они ортогональны на единичной окружности относительно числовой последовательности $\{c_n\}_0^\infty$, причем эти моменты можно последовательно один за другим найти в зависимости от чисел $\{a_n\}_0^\infty$ по формулам (VI.2). Определим еще многочлены второго рода формулами

$$\Psi_n(y) = \frac{1}{c_0}\mathfrak{S}\left\{\frac{z+y}{z-y}[\Phi_n(z)-\Phi_n(y)]\right\} = y^n + \ldots = \frac{\psi_n(y)}{k_n} \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{XI.5}$$

аналогичными (III.14); нетрудно видеть, что они удовлетворяют той же трехчленной рекуррентной формуле, или соотношениям (XI.1) с заменой параметров $\{a_n\}_0^\infty$ параметрами $\{-a_n\}_0^\infty$; поэтому они также ортогональны относительно некоторой последовательности $\{c_n'\}_0^\infty$, которую нетрудно найти.

Ортогональные многочлены и соответствующие многочлены второго рода связаны соотношением

$$c_0\{\psi_n(z)\varphi_n^*(z) + \psi_n^*(z)\varphi_n(z)\} = 2z^n \quad (n=0, 1, \ldots),$$

аналогичным (III.15); отсюда, в частности, имеем

$$c_0\mathfrak{R}\left\{\frac{\psi_n^*(e^{i\theta})}{\varphi_n^*(e^{i\theta})}\right\} = \frac{1}{|\varphi_n^*(e^{i\theta})|^2} \quad (n=0, 1, \ldots). \tag{XI.6}$$

Если рассмотрим непрерывную дробь

$$K(z) \sim 1 + \frac{2a_0z\,|}{|1-a_0z} - \frac{a_1z(1-|a_0|^2)\,|}{|\;a_0+a_1z} - \frac{a_0a_2z(1-|a_1|^2)\,|}{|\;a_1+a_2z} - \ldots, \tag{XI.7}$$

то на основании (XI.4) ее подходящие дроби таковы:

$$K_n(z) = \frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{XI.8}$$

Если функционал $\mathfrak{S}$ неотрицателен, то, как было сказано в примечаниях к главе II, имеем

$$c_{-k} = \bar{c}_k, \quad D_k > 0 \quad (k=0, 1, \ldots), \tag{XI.9}$$

что эквивалентно условиям $\{|a_k|\}_0^\infty < 1$; эти условия эквивалентны возможности такого представления:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}d\sigma(\theta) = c_n \quad (n=0, 1, \ldots), \tag{XI.10}$$

где $\sigma(\theta)$ — ограниченная неубывающая функция, однозначно определяющаяся заданными моментами; если $\{|a_k|\}_0^{n-1} < 1$, $|a_n| = 1$, то $\sigma(\theta)$ имеет только $n+1$ точек роста $\{\theta_\nu\}_1^{n+1}$, причем $\{e^{i\theta_\nu}\}_1^{n+1}$ — нули многочлена $\varphi_{n+1}(z)$.

Если $\{|a_n|\}_0^\infty < 1$, то непрерывная дробь (XI.7) сходится в области $|z| < 1$, равномерно внутри этой области, к функции

$$K(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)} = \frac{1}{2\pi c_0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\sigma(t), \quad |z| < 1, \tag{XI.11}$$

которая при $|z| < 1$ регулярна и имеет положительную вещественную часть; на основании формулы (X.2) можем найти по ней функцию $\sigma(t)$:

$$\frac{\sigma(t+0)+\sigma(t-0)}{2} = \text{const.} + c_0\lim_{r\to 1-0}\mathfrak{R}\int_0^t K(re^{i\theta})\,d\theta. \tag{XI.12}$$

Аналогично тому, как были определены функции второго рода формулой (IV.1) для многочленов, ортогональных на вещественной оси, введем функции второго рода в случае ортогональности на единичной окружности

$$q_n(z)=\frac{1}{2\pi c_0}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\sigma(\theta),\ |z|<1\ (n=0,\ 1\ \ldots); \tag{XI.13}$$

очевидно, имеем $K(z)\equiv q_0(z)$ и справедливо соотношение

$$q_0(z)\varphi_n(z)=q_n(z)-\psi_n(z)\ (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{XI.14}$$

аналогичное (IV.2).

Рассмотрим многочлены

$$\left.\begin{aligned} P_n(x)&=\frac{\Phi^*_{2n}(z)+\Phi_{2n}(z)}{(2z)^n(1-a_{2n-1})}=\frac{z\Phi_{2n-1}(z)+\Phi^*_{2n-1}(z)}{(2z)^n},\\ R_{n-1}(x)&=2\pi c_0\frac{\Psi_{2n}(z)-\Psi^*_{2n}(z)}{(2z)^n\left(z-\frac{1}{z}\right)(1-a_{2n-1})}=2\pi c_0\frac{z\Psi_{2n-1}(z)-\Psi^*_{2n-1}(z)}{(2z)^n\left(z-\frac{1}{z}\right)}\ (n=1,\ 2,\ \ldots),\end{aligned}\right\} \tag{XI.15}$$

где $x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$; можно показать, что в случае вещественных параметров $\{a_n\}_0^\infty$ эти многочлены связаны трехчленной рекуррентной формулой (III.7), где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n&=\frac{a_{2n-4}(1+a_{2n-3})-a_{2n-2}(1-a_{2n-3})}{2}\ (n=2,\ 3,\ \ldots),\ \alpha_1=a_0,\\ \beta_n&=\frac{(1-a_{2n-5})(1-a^2_{2n-4})(1+a_{2n-3})}{4}\ (n=3,\ 4,\ \ldots),\ \beta_2=\frac{(1-a_0^2)(1+a_1)}{2},\ \beta_2=\pi c_0.\end{aligned}\right\} \tag{XI.16}$$

Так как $\{\beta_n\}_1^\infty\neq 0$, то многочлены $\{P_n(x)\}_0^\infty$ ортогональны на отрезке $[-1,\ +1]$ относительно некоторой числовой последовательности, а $\{R_{n-1}(x)\}_1^\infty$ — соответствующие многочлены второго рода. Наоборот, параметры $\{a_k\}_0^{2n-2}$ можно выразить через числа $\{\alpha_k\}_1^n$, $\{\beta_k\}_1^n$. Таким образом, формулы (11.5.2) Сегё справедливы и в общем случае ортогональности относительно числовой последовательности.

В том частном случае, когда функционал $\mathfrak{S}$ неотрицателен и многочлены $\{\Phi_n(z)\}_0^\infty$ ортогональны относительно распределения $d\sigma(\theta)$, многочлены $\{P_n(x)\}_0^\infty$ ортогональны относительно распределения $d\alpha(x)$, причем

$$\alpha(x)=\alpha(\cos\theta)=-\sigma(\theta),\quad -1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi; \tag{XI.17}$$

если же функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна, $d\sigma(\theta)=f(\theta)d\theta$, то имеем

$$\alpha'(x)=w(x)=w(\cos\theta)=\frac{f(\theta)}{|\sin\theta|},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi. \tag{XI.18}$$

Рассмотрим весьма интересный частный случай: пусть $\{a_k\}_m^\infty=a$, $|a|\neq 1$. Если $a\neq 0$, то по (XI.3) имеем уравнение в конечных разностях:

$$y_{n+2}-(z+1)y_{n+1}+z(1-|a|^2)y_n=0, \tag{XI.19}$$

частными решениями которого являются $\Phi_n^*(z)$ и $\Psi_n^*(z)$.

Назовем областью B плоскость z с разрезом вдоль дуги $[e^{i\alpha},\ e^{i(2\pi-\alpha)}]$ окружности $|z|=1$, где мы положим

$$e^{i\alpha}=1-2|a|^2+2i|a|\sqrt{1-|a|^2}; \tag{XI.20}$$

введем также функции

$$w_{1,2} = w_{1,2}(z) = \frac{z+1 \pm \sqrt{(z-e^{i\alpha})(z-e^{-i\alpha})}}{2}, \qquad \text{(XI.21)}$$

причем функции $w_1(z)$, $w_2(z)$ отображают область B на внешность и соответственно на внутренность окружности $|w| = \varrho = \sqrt{1-|a|^2}$; в таком случае решение уравнения (XI.19) таково:

$$y_n = \frac{w_1^{n-m}(y_{m+1} - w_2 y_m) + w_2^{n-m}(w_1 y_m - y_{m+1})}{\sqrt{(z+1)^2 - 4\varrho^2 z}} \quad (n = m,\ m+1, \ldots). \qquad \text{(XI.22)}$$

По (XI.7) находим

$$K(z) = \frac{\Psi_{m+1}^*(z) - w_2\Psi_m^*(z)}{\Phi_{m+1}^*(z) - w_2\Phi_m^*(z)} = \frac{\Psi_m^*(z)(1-w_2) + az\Psi_m(z)}{\Phi_m^*(z)(1-w_2) - az\Phi_m(z)}. \qquad \text{(XI.23)}$$

По формуле (XI.12) находим, что при $\alpha \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \alpha$ функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна:

$$\left.\begin{aligned} \sigma'(\theta) = f(\theta) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}}{|A(e^{i\theta})|}, \\ A(z) &= \bar{a}\,[\varphi_m^*(z)]^2 + (1-z)\,\varphi_m^*(z)\,\varphi_m(z) - az\,[\varphi_m(z)]^2; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI.24)}$$

кроме того, распределение $d\sigma(\theta)$ имеет концентрированные массы в тех точках $\{\theta_\nu\}$, для которых $A(e^{i\theta_\nu}) = 0$ и в то же время

$$\left| \frac{\varphi_m^*(z_\nu) - az_\nu\varphi_m(z_\nu)}{\varphi_m(z_\nu)} \right| < \varrho, \quad z_\nu = e^{i\theta_\nu}. \qquad \text{(XI.25)}$$

В частности, если $m=0$, то имеем

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}, \quad \beta = \arg\frac{1+a}{1-\bar{a}}, \qquad \text{(XI.26)}$$

причем в точке $\theta = \beta$, $-\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha$ сконцентрирована масса

$$\mu = \begin{cases} 2\pi\cdot\dfrac{a+\bar{a}+2|a|^2}{|1+a|}, & |2a+1| > 1, \\ 0, & |2a+1| \leqslant 1. \end{cases} \qquad \text{(XI.27)}$$

Если же $m \neq 0$, но $\{a_\nu\}_m^\infty = a = 0$, то функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна, причем $f(\theta) = |\varphi_m^*(e^{i\theta})|^{2}$, т. е. мы приходим к результатам § 11.2; интересно отметить, что в этом случае многочлены $\{P_n(x)\}_0^\infty$, построенные по формуле (XI.15), будут многочленами Бернштейна — Сегё, рассмотренными в § 2.6.

В том более общем случае, когда существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $|a| < 1$, множество точек роста E_σ функции $\sigma(\theta)$ таково: $E_\sigma = E_1 + E_2$, где E_1 всюду плотно на отрезке $e = [\alpha, 2\pi - \alpha]$, а E_2 — изолированное счетное множество, расположенное на дополнении отрезка e до $[0, 2\pi]$.

ГЛАВА XII

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБЩИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

12.1. Асимптотическая формула (12.1.2) справедлива при условиях более общих, чем условия теоремы 12.1.1. Именно эквивалентны следующие утверждения:

1) существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \sigma'(\theta)\, d\theta > -\infty; \tag{XII.1}$$

2) система многочленов $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$, а следовательно, и система степеней $\{e^{in\theta}\}_0^\infty$ незамкнута в пространстве L_σ^2;

3) условие замкнутости не имеет места ни для одной функции $f(\theta) \in L_\sigma^2$, которая не эквивалентна граничным значениям $F(e^{i\theta})$ некоторой функции $F(z)$, регулярной в области $|z| < 1$;

4) существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varkappa_n = \varkappa$;

5) ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2$ сходится хоть в одной точке области $|z| < 1$;

6) существует подпоследовательность $\{\varphi_{n_\nu}^*(z)\}$, ограниченная хоть в одной точке области $|z| < 1$;

7) сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$.

Таким образом, не предполагая абсолютной непрерывности функции $\sigma(\theta)$, мы видим, что условие (XII.1) не только достаточно, но и необходимо для справедливости асимптотической формулы (12.1.2).

Эквивалентность утверждений 1) и 2) показана А. Н. Колмогоровым [89*], [91*] и М. Г. Крейном [84*]; эквивалентность условия 1) незамкнутости системы степеней $\{e^{in\theta}\}_0^\infty$ в пространстве L_σ^r, $r \geqslant 1$, показана Н. И. Ахиезером [52*]. Оценка погрешности асимптотической формулы (12.1.2) такова:

$$\varphi_n^*(z) = \pi(z) + o(\delta_n), \quad \pi(z) = \frac{1}{D(z)}, \quad |z| < 1, \tag{XII.2}$$

где величина δ_n имеет следующее значение:

$$\delta_n = \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2} = \min_{\varrho_n} \| \pi_0(\theta) - \varrho_n(e^{i\theta}) \|_\sigma^2 \to 0, \quad \pi_0(\theta) = \pi(e^{i\theta})\,\gamma_\varepsilon(\theta)\,^{1)} \tag{XII.3}$$

Можно показать, что невозрастающая последовательность $\{\delta_n\}_1^\infty$ может стремиться к нулю сколь угодно медленно; задавая произвольно такую последовательность, мы сможем по ней найти модули всех параметров $\{|a_n|\}_1^\infty$; отметим также оценку

$$\sqrt{\frac{\varkappa_0 + \varkappa}{\varkappa^2}} \cdot \sqrt{\varkappa - \varkappa_n} \leqslant \delta_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{\varkappa}} \cdot \sqrt{\varkappa - \varkappa_n} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{XII.4}$$

---

[1]) Через $\gamma_\varepsilon(\theta)$ обозначена характеристическая функция множества, на котором существует $\sigma'(\theta) > 0$. То обстоятельство, что для функции $\pi_0(\theta)$ имеет место условие замкнутости, было доказано в случае абсолютно непрерывной функции $\sigma(\theta)$ В. И. Смирновым [17*].

В таблице I нашей книги [1] (для случая абсолютно непрерывной функции $\sigma(\theta)$) приведено несколько оценок для δ_n через интегральные модули непрерывности функции $f(\theta)$; например, если $0 < m \leqslant f(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, то $\delta_n \leqslant C \sqrt{\omega_1\left(\frac{1}{n}; f\right)}$; оценка Фрайда [3] такова:

$$\delta_n \leqslant \sqrt{\sup_{|h|\leqslant\frac{1}{n}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\theta+h)-f(\theta)|}{f(\theta)}\, d\theta}. \tag{XII.5}$$

Укажем некоторые дальнейшие асимптотические свойства:

8) последовательность многочленов $\{\Phi_n^*(e^{i\theta})\}_0^\infty$ сходится в метрике пространства L_σ^2 к некоторой предельной функции $f_0(\theta) \in L_\sigma^2$, причем все коэффициенты Фурье - Чебышева функции $e^{-it}f_0(\theta)$ равны нулю;

9) условие 1) эквивалентно такому условию:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\varphi_n^*(e^{i\theta})}{\pi(e^{i\theta})} - 1 \right|^2 d\theta = 0; \tag{XII.6}$$

следовательно, при выполнении условия 1) существует подпоследовательность многочленов $\{\varphi_{n_\nu}^*(e^{i\theta})\}$, сходящаяся к $\pi(e^{i\theta})$ почти всюду на $[0, 2\pi]$;

10) если $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sigma'(\theta)} < \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n^*(e^{i\theta}) - \pi(e^{i\theta})|\, d\theta = 0; \tag{XII.7}$$

11) если функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна, то условие 1) эквивалентно такому:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\varphi_n^*(e^{i\theta})} - \frac{1}{\pi(e^{i\theta})} \right| d\theta = 0; \tag{XII.8}$$

12) условие $\sigma'(\theta) > 0$ почти всюду в $[0, 2\pi]$ достаточно для существования предела

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varphi_n(z)} = z, \quad |z| > 1; \tag{XII.9}$$

13) условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ эквивалентно существованию предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_{n+1}(z)}{\Phi_n(z)} = z, \quad |z| > 1. \tag{XII.10}$$

Перейдем к предельным соотношениям на окружности $|z| = 1$ при условии (XII.1). Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^*(z) = \pi(z)$ при $|z| < 1$, то вопрос о существовании $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^*(e^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta})$ приводит к *тауберовой проблеме*: найти условия, при которых из существования первого предела

$$\pi(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0} [\lim_{n\to\infty} \varphi_n^*(re^{i\theta})], \quad \lim_{n\to\infty} [\lim_{r\to 1-0} \varphi_n^*(re^{i\theta})] \tag{XII.11}$$

вытекало бы существование второго и их равенство. Одно из этих условий, выраженное через параметры, таково: $a_n = o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$. Укажем условие

Фрайда [8]: если на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна, причем функция $f(\theta)$ имеет ограниченную вариацию и $0 < m \leqslant f(\theta) \leqslant M$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^*(e^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta})$ в каждой точке θ, в которой существует (10.3.6), т. е. почти всюду в $[0, 2\pi]$.

Условие ограниченности вариации функции $f(\theta)$ эквивалентно условию $f(\theta) \in \mathrm{Lip}(1, 1)$, откуда вытекает, что $f(\theta) \in \mathrm{Lip}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ и $\omega_2(\delta, f) \leqslant C\sqrt{\delta}$[1]); если это условие заменить немного более ограничительным условием $\omega_2(\delta, f) = o(\delta)$, то на всей окружности $|z| = 1$ справедливо равенство

$$\varphi_n^*(e^{i\theta}) - \pi(e^{i\theta}) = \varepsilon_n(\theta), \quad |\varepsilon_n(\theta)| \leqslant C_1 |\pi(e^{i\theta}) - \pi(re^{i\theta})| + C_2 \sqrt[3]{n\omega_2^2\left(\frac{1}{n}, f\right)},$$

$$r = 1 - \left\{\frac{1}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}; f\right)\right\}^{\frac{2}{3}}, \tag{XII.12}$$

откуда вытекает справедливость асимптотической формулы на $|z| = 1$ с оценкой соответствующей погрешности. В частности, если

$$\int\limits_0^a x^{-\frac{3}{2}}\omega_2(x; f)\,dx < \infty, \tag{XII.13}$$

то

$$|\varepsilon_n(\theta)| \leqslant C \int\limits_0^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{3}{2}}\omega_2(x, f)\,dx.$$

Отметим еще локальное условие Фрайда[2]): для справедливости асимптотической формулы в точке $e^{i\theta_0}$ достаточно, чтобы на отрезке $[0, 2\pi]$ имело место неравенство $0 < m \leqslant f(\theta) \leqslant M$ и чтобы $f(\theta) - f(\theta_0) = O(|\theta - \theta_0|)$ в окрестности точки θ_0.

В дополнение к этому условию и к условию теоремы 12.1.3 рассмотрим условия, которым должна удовлетворять функция $f(\theta)$ на всем отрезке $[0, 2\pi]$ и на внутреннем отрезке $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ (который может быть сколь угодно малым, но фиксированным) для того, чтобы предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^*(e^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta})$ имело место во всех точках внутри $[\alpha, \beta]$.

В таблице V нашей книги [1] приведено несколько таких достаточных условий; например, достаточно, чтобы выполнялось (XII.1) и на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция $\sigma(\theta)$ была абсолютно непрерывна, а функция $f(\theta) \geqslant m > 0$ была непрерывна с модулем непрерывности

$$\omega(\delta, f) \leqslant C\sqrt{\delta}\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-\gamma}, \quad \gamma > 1; \tag{XII.14}$$

если же на отрезке $[0, 2\pi]$ имеем

$$0 < m \leqslant f(\theta) \leqslant M, \qquad f(\theta) \in \mathrm{Lip}\left(\frac{1}{2}, 2\right),$$

---

[1]) Если бы мы имели условие $f(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$, $\alpha > \frac{1}{2}$, то по теореме Харди и Литтльвуда функция $f(\theta)$ была бы эквивалентна непрерывной функции класса $\mathrm{Lip}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$, тогда мы имели бы тривиальный случай теоремы 12.1.3.

[2]) См. ссылку в конце § 12.6.

то в условии (XII.14) можно отбросить множитель $\sqrt{\delta}$; в этом случае можно указать оценку погрешности [1]).

Рассмотрим еще некоторые предельные соотношения для $s_n(z, z)$; при условии (XII.1) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{s_n(e^{i\theta}, e^{i\theta})f(\theta)}{n+1}-1\right\|^1=0; \tag{XII.15}$$

если же, кроме того, на $[\alpha, \beta]\subset[0, 2\pi]$ функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна, а функция $f(\theta)\geqslant m>0$ непрерывна, то внутри $[\alpha, \beta]$ имеем равномерно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n(e^{i\theta}, e^{i\theta})f(\theta)}{n+1}=1. \tag{XII.16}$$

При выводе всех предельных соотношений, о которых шла речь выше, предполагалось, что имеет место (XII.1). Н. И. Ахиезер [3] вывел асимптотическую формулу для одного случая, когда это не имеет места. Он рассмотрел такой вес:

$$f(\theta)\begin{cases}\geqslant 0, & \theta\in l=[\alpha, 2\pi-\alpha],\\ =0, & \theta\,\bar{\in}\, l;\end{cases} \tag{XII.17}$$

если функция $t(\theta)=\dfrac{f(\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}$ непрерывна и положительна при $\theta\in l$, то, обозначая через B плоскость z с разрезом по дуге $L=[e^{i\alpha}, e^{i(2\pi-\alpha)}]$, он строит функцию $g(z)$, регулярную и отличную от нуля в B, определяемую по граничным значениям своего модуля формулой $|g(e^{i\theta})|^2=\dfrac{1}{t(\theta)}$, $\theta\in l$. Справедлива асимптотическая формула

$$\varphi_n(z)\sim\frac{\sqrt{(z+1)^2-4\gamma^2z}+z-1-2\sin\frac{\alpha}{2}}{2(z-1)\sqrt{1+\sin\frac{\alpha}{2}}}\left\{\frac{z+1+\sqrt{(z+1)^2-4\gamma^2z}}{2\gamma}\right\}^n g(z),$$

$$\gamma=\cos\frac{\alpha}{2}, \tag{XII.18}$$

равномерно внутри B, причем выбрана ветвь радикала, положительная при $z=1$. Если же функция $t(\theta)$ удовлетворяет для $\theta\in l$ условию (12.1.4), то равномерно на всей дуге l справедлива асимптотическая формула

$$\varphi_n(e^{i\theta})\sim\frac{\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\,e^{i\lambda}-\sqrt{1+\sin\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\frac{i\theta}{2}}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}\cdot e^{in\left(\frac{\theta}{2}+\lambda\right)}g_+(e^{i\theta})+$$
$$+\frac{\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\,e^{-i\lambda}-\sqrt{1+\sin\frac{\alpha}{2}}\,e^{-\frac{i\theta}{2}}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}\cdot e^{in\left(\frac{\theta}{2}-\lambda\right)}g_-(e^{-i\theta}), \tag{XII.19}$$

причем $\cos\lambda=\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, $0\leqslant\lambda\leqslant\pi$, а g_+ и g_- — граничные значения функции $g(\theta)$ на дуге L при подходе к ней извне и изнутри окружности $|z|=1$.

---

[1]) См. также Фрей [1], А. Л. Кузьмина [3*].

При более общих предположениях относительно распределения $d\sigma(\theta)$ можно получить более грубые результаты: именно, если $\sigma'(\theta) > 0$ почти всюду на l, а точечная часть спектра E_σ не имеет предельных точек вне l, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Phi_n(z)} = \frac{z+1+\sqrt{(z+1)^2-4\gamma^2 z}}{2}, \qquad z\in B. \tag{XII.20}$$

Если же последовательность параметров $\{a_n\}_0^\infty$ сходится, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $0 < |a| < 1$, то непрерывная часть спектра всюду плотна на l, а точечная часть не имеет предельных точек вне l, причем существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_{n+1}(z)}{\Phi_n(z)} = \frac{z+1+\sqrt{(z+1)^2-4\gamma^2 z}}{2}, \qquad z\in B,$$

где α выражается через $|a|$ формулой (IX.20).

Переходя к ортогональности на отрезке $[-1, +1]$, отметим прежде всего эквивалентность следующих трех условий:

1) сходимость произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty} 4\beta_k$;

2) справедливость асимптотической формулы (12.1.3) хоть в одной точке вне отрезка $[-1, +1]$ и хоть для одной бесконечной подпоследовательности $\{n_\nu\}$;

3) существование интеграла в смысле Лебега

$$\int_{-1}^{1} \frac{\ln \alpha'(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} > -\infty. \tag{XII.21}$$

Из асимптотической формулы (12.1.8) С. Н. Бернштейн ([96*], глава II) сделал вывод относительно асимптотического распределения нулей $\{x_{kn} = \cos\theta_{kn}\}_1^n$ ортогональных многочленов; он показал, что

$$\left.\begin{aligned} x_{kn} &= \cos\frac{k\pi}{n} + \frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n}\left[\gamma\left(\frac{k\pi}{n}\right)+\eta_k\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ \theta_{kn} &= \frac{k\pi}{n} - \frac{1}{n}\left[\gamma\left(\frac{k\pi}{n}\right)+\eta_k'\right], \end{aligned}\right\} \tag{XII.22}$$

где η_k, η_k' равномерно на всем отрезке $[-1, +1]$ стремятся к нулю вместе с $\frac{1}{n}$. Первая из этих формул является обобщением и уточнением формулы (8.9.1) для многочленов Якоби.

Наоборот, если задать сдвиг порядка $\frac{1}{n}$ нулей многочлена $p_n(x)$ относительно нулей многочлена Чебышева, охарактеризовав этот сдвиг непрерывной функцией $\frac{1}{n}\gamma(\cos\theta)$, то этим определится функция $f(\cos\theta)$, ибо функция $\ln f(\cos\theta)$ характеризуется тригонометрическим рядом, сопряженным с тригонометрическим рядом функции $2\gamma(\cos\theta)$.

Асимптотическая формула (12.1.8) справедлива лишь в том случае, когда функция $w(x)\sqrt{1-x^2}$ положительна на всем отрезке $[-1, +1]$, что накладывает существенные ограничения на поведение веса в концах отрезка. С. Н. Бернштейн ([96*], глава IV) рассмотрел более общий случай, когда вес $w(x)$ таков:

$$w(x) = t_0(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \alpha,\ \beta > -1, \qquad 0 < L_1 \leqslant t_0(x) \leqslant L, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1; \tag{XII.23}$$

ту роль, которую раньше играли многочлены Чебышева при его выводе асимптотической формулы (12.1.8), теперь будут играть многочлены Якоби.

Если $\alpha=\beta=0$, то, полагая $z_n=P_n(x)\sqrt[4]{1-x^2}$, где $P_n(x)$ — нормированный многочлен Лежандра, С. Н. Бернштейн [51*] получил асимптотическую формулу

$$\left.\begin{aligned} &(1-x^2)^{\frac{1}{4}}[w(x)]^{\frac{1}{2}}\,p_n(x)\sim z_n\cos\gamma-\mu_n z_n'\sin\gamma,\\ &\mu_n=\frac{1-x^2}{\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2(1-x^2)+\frac{1}{4}}}, \end{aligned}\right\}\qquad\text{(XII.24)}$$

справедливую на всем отрезке $[-1,\ +1]$, если функция $t_0(x)$ на отрезке $[-1,\ +1]$ непрерывна с модулем непрерывности (12.1.4).

Если же $\alpha^2+\beta^2>0$, то приходится ввести дополнительное ограничение: предположить, что функция $t_0(x)$ имеет на отрезке $[-1,\ +1]$ непрерывную производную с модулем непрерывности (12.1.4) при $\lambda=1$.

При этих предположениях С. Н. Бернштейн получил при $-\frac{1}{2}\leqslant\alpha$, $\beta\leqslant\frac{1}{2}$ асимптотическую формулу

$$\left.\begin{aligned} &(1-x^2)^{\frac{1}{4}}[w(x)]^{\frac{1}{2}}\,p_n(x)\sim f_n\cos\gamma+\lambda_n\frac{df_n}{d\theta}\sin\gamma,\qquad x=\cos\theta,\\ &f_n=(1-x)^{\varrho_1}(1+x)^{\varrho_2}R_n^{(\alpha,\beta)}(x),\quad \alpha=2\varrho_1-\frac{1}{2},\quad \beta=2\varrho_2-\frac{1}{2},\\ &\lambda_n^2=\frac{1-x^2}{(1-x^2)(n+\varrho_1+\varrho_2)^2+(1+x)\varrho_1(1-2\varrho_1)+(1-x)\varrho_2(1-2\varrho_2)}, \end{aligned}\right\}\qquad\text{(XII.25)}$$

справедливую на всем отрезке; здесь $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлен Якоби со старшим членом x^n; если же $-1<\alpha$, $\beta<-\frac{1}{2}$, то на всем отрезке $[-1,\ +1]$ имеем

$$p_n(x)\sqrt{t_0(x)}\sim\hat{R}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\cos\gamma+\frac{1}{\sqrt{n(n+\alpha+\beta+1)}}\,\frac{d\hat{R}_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{d\theta}\cdot\sin\gamma,\qquad\text{(XII.26)}$$

где $\hat{R}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — нормированный многочлен Якоби. Отметим еще, что при условиях теоремы 12.1.4 тураново выражение $\Delta_n(x)$ стремится на основании (12.1.8) к пределу

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_n(x)=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi w(x)}\geqslant 0,\qquad -1\leqslant x\leqslant 1,\qquad\text{(XII.27)}$$

причем для многочленов Бернштейна — Сегё (§ 2.6) это равенство справедливо при любых значениях n.

12.2 (3), 12.7 (3). Предельное соотношение (12.2.6) справедливо при условиях гораздо более общих, чем условие теоремы 12.1.2; некоторые из этих условий приведены в дополнениях к главе VI; в этих условиях, достаточных для существования предела (12.2.6), требовалось, чтобы мера множества E тех точек, где существует $\alpha'(x)>0$, равнялась бы мере множества E_α точек роста функции $\alpha(x)$. П. П. Коровкин [1], [2] получил принципиально новые результаты: пусть многочлены $\{P_n(x)\}_0^\infty$ наименее уклоняются от нуля в метрике пространства L_α^r, $r>0$, и пусть $H\subset E$ — множество точек Лебега множества E; тогда для справедливости предельного соотношения (12.2.6) достаточно равенство трансфинитных диаметров множеств H и E_α; этот результат справедлив и в том случае, когда множество E_α расположено не на вещественной оси, а на любой спрямляемой кривой, а также на некоторой области (в этом случае вместо функции точки $\alpha(x)$ надо ввести функцию области, характеризующую распределение на ней неотрицательной массы).

В частности, П. П. Коровкин показал, что (12.2.6) справедливо и для некоторых классов сингулярных функций $\alpha(x)$, для которых, таким образом, мера множества E_α равна нулю.

Рассмотрим некоторые частные, наиболее интересные случаи. Пусть сперва многочлены $\{p_n(x)\}_0^\infty$ ортонормальны на отрезке $[-1, +1]$, причем либо $\alpha'(x) > 0$ почти всюду на $[-1, +1]$, либо трансфинитный диаметр множества точек Лебега функции $\alpha'(x)$ равен $1/2$; в таком случае существует предел (12.2.6) и справедливы теоремы 12.7.3 и 12.7.4.

Если применить эти теоремы к формальному разложению

$$\frac{1}{z-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z)\, p_n(x), \tag{XII.28}$$

то оно сходится, если x лежит внутри эллипса регулярности с фокусами ± 1, проходящего через точку z; отсюда вытекает предельное соотношение для функций второго рода

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|q_n(z)|} = |z - \sqrt{z^2-1}|, \quad |z+\sqrt{z^2-1}| \geqslant 1+\varepsilon, \quad \varepsilon > 0; \tag{XII.29}$$

теорема 9.2.1 и формула (8.23.2) являются частным случаем.

Отметим теорему, аналогичную теореме Абеля в теории степенных рядов: если при наших условиях ортогональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p_n(z)$ сходится в некоторой точке z_0 вне $[-1, +1]$, то он сходится внутри эллипса регулярности, проходящего через эту точку, причем внутри эллипса сходимость абсолютна и равномерна. Отсюда вытекает следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 9.2.2: при наших условиях, если функция $F(z)$ регулярна в окрестности точки $z=\infty$, причем $F(\infty)=0$, то ряд

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q_n(z) \tag{XII.30}$$

сходится вне наименьшего эллипса регулярности, вне которого функция регулярна, и расходится внутри его. Для получения коэффициентов $\{b_n\}_0^\infty$ достаточно умножить обе части (XII.40) на $F(z)$ и проинтегрировать по C, взяв за контур C наименьший эллипс регулярности функции $F(z)$, причем точка z должна лежать вне его; мы придем к формулам, являющимся обобщением формул (9.2.3).

12.7. Сегё показывает, что из теоремы 12.1.2 вытекает существование пределов для коэффициентов рекуррентной формулы; в обозначениях (III.7) мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{1}{4}; \tag{XII.31}$$

однако условия теоремы 12.1.2 только достаточны, но не необходимы для существования этих пределов, ибо, как было сказано, эти условия эквивалентны существованию предела (12.1.3); с другой стороны, существование пределов (XII.31) достаточно для существования пределов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = x+\sqrt{x^2-1}, \quad x \bar{\in} [-1, +1], \tag{XII.32}$$

что, таким образом, может иметь место и без существования (12.1.3).

Рассмотрим подробнее случай (XII.31); можно показать, что при этих условиях спектр E_α состоит из двух частей $E_\alpha = E_1 + E_2$, причем E_1 всюду плотно на $[-1, +1]$, а E_2 — изолированное счетное множество вне отрезка $[-1, +1]$.

Кроме предельного соотношения (XII.32), мы имеем при условии (XII.31) предельные соотношения для многочленов и функций второго рода

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r_{n+1}(x)}{r_n(x)} = x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{q_{n+1}(x)}{q_n(x)} = x - \sqrt{x^2 - 1}, \quad x \bar{\in} [-1, +1]; \tag{XII.33}$$

при более ограничительном условии (XII.21) имеем асимптотическую формулу для функций второго рода:

$$\left. \begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} \{p_n(x) q_n(x)\} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \\ &q_n(x) \simeq \frac{\sqrt{2\pi} D(z^{-1})}{z^n (z - z^{-1})}, \quad |z = x + \sqrt{x^2 - 1}| \geqslant 1 + \varepsilon, \ \varepsilon > 0, \end{aligned} \right\} \tag{XII.34}$$

которую можно вывести из первой формулы (IV.4).

Отметим, что и теорема 12.7.2 справедлива при гораздо более общих условиях, чем условие теоремы 12.1.2; при тех условиях, которые достаточны для существования (VI.35), существует, как было сказано, предельная функция распределения нулей многочленов $\{p_n(x)\}_0^\infty$, совпадающая с функцией Робена, поэтому по (VI.34) имеем

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F(x_{kn}) = \int_{-1}^{1} F(x)\, d\psi_n(x), \quad \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F(x_{kn}) \right\} = \\ &\quad = \int_{-1}^{1} F(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} F(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} F(\cos\theta)\, d\theta. \end{aligned} \right\} \tag{XII.35}$$

Точно так же выводится (12.7.8), ибо предельной функции (VI.34) соответствует равномерное распределение на полуокружности

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geqslant 0.$$

Рассмотрим теперь более общий случай: пусть многочлены $\{P_n(x)\}_0^\infty$ ортогональны на множестве $E = [-1, -\alpha] + [\alpha, +1]$, причем пусть $\alpha'(x) > 0$ почти всюду на E, или пусть трансфинитный диаметр множества точек Лебега функции $\alpha'(x)$ равен $d = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{2}$; по общей теории существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = \frac{|\sqrt{x^2 - \alpha^2} + \sqrt{x^2 - 1}|}{2}, \quad x \bar{\in} E, \tag{XII.36}$$

причем плоскость x разрезана вдоль множества E и выбраны те знаки радикалов, при которых числитель больше d.

В этом случае область сходимости ортогонального ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(x)$ ограничена кривой

$$|\sqrt{x^2 - \alpha^2} + \sqrt{x^2 - 1}| = C > \sqrt{1 - \alpha^2}; \tag{XII.37}$$

если $\sqrt{1-\alpha^2} < C < 1+\alpha$, то кривая состоит из двух замкнутых ветвей, охватывающих отрезки $[-1, -\alpha]$ и $[\alpha, +1]$ и не имеющих общих точек; при $C=1+\alpha$ имеем двойную точку при $x=0$; при $C>1+\alpha$ кривая состоит из одной ветви; в рассматриваемом случае существует предельная функция распределения нулей (VI.33) [1]).

ГЛАВА XIII

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯДЫ ПО ОБЩИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ

Если многочлены $\{\varphi_n(z)\}_0^\infty$ ортонормальны на окружности $z=e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, относительно распределения $d\sigma(\theta)$, то ортогональные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} g_n\varphi_n(z)$ обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам хорошо известных рядов — степенных и тригонометрических.

Именно, справедлива теорема, аналогичная теореме Лузина в теории тригонометрических рядов; если $\sigma'(\theta)>0$ почти всюду в $[0, 2\pi]$, то справедливы теоремы, аналогичные теоремам Абеля, Коши—Адамара. Если существует (XII.1), то для $\theta\in E$ справедлива теорема, аналогичная теореме Таубера, если только

$$g_n = o\left\{\frac{1}{n\sqrt[3]{M_n}}\right\}, \quad M_n = \max_{|z|\leqslant 1} |\varphi_n(z)|, \; M_1\leqslant M_2\leqslant \ldots \leqslant M_n \leqslant \ldots; \tag{XIII.1}$$

вместо этого достаточно условие $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|g_n|^2 M_n^{\frac{2}{3}} < \infty$ — это условие при $M_n = C$ переходит в условие Фейера тауберовой теоремы для степенных рядов. Если $\sigma(\theta_2)-\sigma(\theta_1)\geqslant m(\theta_2-\theta_1)$, $\theta_1, \theta_2\in[0, 2\pi]$, то для справедливости тауберовой теоремы достаточно условие $g_n = o(n^{-\frac{7}{6}})$; если же функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$, а $f(e^{i\theta})\in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$, где $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$, то достаточно условие $g_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

При выполнении (XII.1) условие замкнутости для функции $\varphi(\theta)\in L_\sigma^2$ выполняется тогда и только тогда, когда она эквивалентна граничным значениям $F(e^{i\theta})$ некоторой функции $F(z)$, регулярной в области $|z|<1$, причем $F(z)D(z)\in H_2$ [2]). Если задана произвольная последовательность комплексных чисел $\{g_n\}_0^\infty$, удовлетворяющая условию $\sum_{n=0}^{\infty}|g_n|^2<\infty$, то все функции $\varphi(\theta)\in L_\sigma^2$, для которых эти числа являются коэффициентами Фурье, определяются формулой

$$\varphi(\theta) = \varphi_0(\theta) + e^{-i\theta}\pi_0(\theta)\overline{\mu(e^{i\theta})}; \tag{XIII.2}$$

здесь $\mu(z)$ — произвольная функция класса H_2, $\varphi_0(\theta)$ — та единственная функция с заданными коэффициентами, для которой по теореме Рисса — Фишера имеет место условие замкнутости, причем она эквивалентна

---

[1]) Эти кривые, сходные с овалами Кассини, детально исследованы в работе В. Ф. Бржечка [23*].

[2]) См. В. И. Смирнов [15*], М. Г. Крейн [84*], Г. Ц. Тумаркин [6*].

граничным значениям функции

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n\varphi_n(z), \quad |z|<1, \quad F(z)D(z)\in H_2.$$

Таким образом, функция $e^{-i\theta}\pi_0(\theta)\overline{\mu(e^{i\theta})}$ — это та наиболее общая функция класса L^2_σ, для которой все коэффициенты Фурье равны нулю.

Отметим еще равенство

$$\lim_{n\to\infty}\min_{\varrho_n}\|\varphi(\theta)-\varrho_n(e^{i\theta})\|^2_\sigma=\|\mu(e^{i\theta})\|^2. \tag{XIII.3}$$

Отсюда вытекает следующий результат: если функция $\varphi(\theta)\in L^2_\sigma$ эквивалентна граничным значениям функции $F(z)$, мероморфной при $|z|<1$, непрерывной при $|z|\leqslant 1$, за исключением полюсов, то

$$\lim_{n\to\infty}\min_{\varrho_n}\|\varphi(\theta)-\varrho_n(e^{i\theta})\|^2_\sigma=\|H(e^{i\theta})\|^2, \tag{XIII.4}$$

где $H(z)$ — главная часть функции $F(z)D(z)$; отсюда при $F(z)=z^{-m}$ получим

$$\lim_{n\to\infty}\min_{\varrho_n}\|e^{-im\theta}-\varrho_n(e^{i\theta})\|^2_\sigma=\sqrt{1+\sum_{k=1}^{m}|r_k|^2\cdot\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\sigma'(\theta)\,d\theta\right\}}, \tag{XIII.5}$$

где

$$\ln\sigma'(\theta)\sim\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta),\quad \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-ib_k)z^k\right\}=1+\sum_{k=1}^{\infty}r_kz^k;$$

этот результат получен А. Н. Колмогоровым [89*], [91*] в теории стационарных случайных последовательностей. При $F(z)=\frac{1}{z-\alpha}$, $|\alpha|<1$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\min_{\varrho_n}\left\|\frac{1}{e^{i\theta}-\alpha}-\varrho_n(e^{i\theta})\right\|^2_\sigma=\frac{D(\alpha)}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}. \tag{XIII.6}$$

Переходя к вопросу о разложении функции в ряд по многочленам $\{\varphi_n(z)\}_0^\infty$, отметим прежде всего локальную оценку для констант Лебега процесса Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|s_n(e^{i\theta_0}, e^{i\theta})|\,d\sigma(\theta)\leqslant C_1\mu_n^2\ln n, \quad \alpha+\varepsilon\leqslant\theta_0\leqslant\beta-\varepsilon, \quad \varepsilon>0; \tag{XIII.7}$$

предполагается, что на отрезке $[\alpha,\beta]\subset[0,2\pi]$ функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна, $f(\theta)\leqslant M$ и $|\varphi_n(e^{i\theta})|\leqslant\mu_n$.

Если $\mu_n=C$, то константы Лебега будут порядка $O(\ln n)$; как было сказано в примечаниях к главе I, — это наиболее медленный рост этих констант.

Если функция $F(e^{i\theta})\in L^2_\sigma$ ограничена на отрезке $[\alpha,\beta]$, то для частных сумм ее разложения Фурье имеем локальную оценку

$$|s_n(F;e^{i\theta_0})|\leqslant C_2\mu_n^2\ln n, \quad \alpha+\varepsilon'\leqslant\theta_0\leqslant\beta-\varepsilon', \quad \varepsilon'>0. \tag{XIII.8}$$

В таблице VI нашей книги [1] приведено несколько условий, достаточных для сходимости на всей окружности $|z|=1$ разложения Фурье функции $F(z)$, регулярной в области $|z|<1$ и непрерывной в замкнутой области $|z|\leqslant 1$; в таблице VII приведены условия, достаточные для сходимости такого разложения внутри дуги $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}]$, если функция $F(z)$ непрерывна внутри сектора

$$0 \leqslant |z| \leqslant 1, \quad \alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta.$$

У. Сегё рассмотрены два случая равносходимости: в одной точке (теорема 13.1.1) и на всей окружности (теорема 13.1.3) — в дополнение к ним мы рассматриваем условия равномерной равносходимости на дуге при условии (XII.1), наложенном на ортонормальную систему; в таблице VIII приведены условия, достаточные для равносходимости внутри дуги $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}]$ разложения Фурье и Маклорена функции $F(z)$, удовлетворяющей условиям $F(z) \in H_2$, $F(z)D(z) \in H_2$, ограниченной на этой дуге.

Пользуясь связью (11.5.2) между многочленами, ортонормальными на окружности и на отрезке, можно перенести на второй случай все результаты, полученные для первого; в таблице IX нашей книги приведены условия сходимости на отрезке $[a, b] \subset [-1, +1]$ разложения Фурье функции $f(x) \in L_1$; нетрудно получить и условия равносходимости на этом отрезке разложения Фурье и разложения по многочленам Чебышева. Для разложений по многочленам, ортогональным на отрезке, рассмотрим вопрос о *принципе локализации*, т. е. вопрос об условиях, которым должна удовлетворять ортогональная система для того, чтобы для двух функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ некоторого класса, совпадающих на отрезке $[a, b]$, иметь

$$\lim_{n\to\infty} \{s_n(f_1; x) - s_n(f_2, x)\} = 0 \tag{XIII.9}$$

внутри этого отрезка; очевидно, для этого надо найти условия, при которых из равенства $f(x) \equiv 0$, $a \leqslant x \leqslant b$, вытекало бы $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(f, x) = 0$ внутри $[a, b]$; в таком случае сходимость разложения Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ зависела бы исключительно от поведения функции на этом отрезке, сколь малым он бы ни был.

Д ж е к с о н ([1], глава XI) указал такое достаточное условие: $\{|p_n(x)|\}_0^\infty \leqslant M$ для $x \in E = [a, b]$; кроме того, $f(x) \in L^1_\alpha$ на $[-1, +1]$ и $f(x) \in L^2_\alpha$ на CE. Ф р а й д [4] указал такое достаточное условие: на отрезке $[-1, +1]$ имеем $\{|p_n(x)|\}_0^\infty \leqslant K(x)$ и, кроме того, $K(x)$, $K(x)f(x) \in L^1_\alpha$.

В таблице IX нашей книги, как было сказано, приведены достаточные условия сходимости разложения Фурье данной функции; при этом на функцию $f(x)$ и на ортогональную систему, т. е. на функцию $\alpha(x)$, наложены некоторые ограничения на всем отрезке $[-1, +1]$ и на отрезке $[a, b]$; если мы положим $f(x) \equiv 0$, $a \leqslant x \leqslant b$, то последняя графа этой таблицы отпадает, ибо функция $f(x) \equiv 0$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ всем условиям; мы получим, таким образом, несколько условий, каждое из которых достаточно для принципа локализации; например, достаточно, чтобы

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{w(x)\sqrt{1-x^2}} < \infty, \quad f(x) \in L^2_\alpha, \tag{XIII.10}$$

и на отрезке $[a, b]$ функция $w(x)$ имела ограниченную вариацию или была непрерывна с модулем непрерывности (12.1.4).

Рассмотрим результаты С. Н. Б е р н ш т е й н а ([96*], глава IV), относящиеся к сходимости разложений Фурье, умноженных на дополнительный множитель; пусть

$$w(x) = \frac{t(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad t(x) = (1-x)^{2\varrho_1}(1+x)^{2\varrho_2}\, t_0(x), \tag{XIII.11}$$

причем на отрезке $[-1, +1]$ имеем $0 < L_1 \leqslant t_0(x) \leqslant L_2$ и существует непрерывная производная $t_0'(x)$ с модулем непрерывности (12.1.4) при $\lambda = 1$; тогда при $\varrho_1, \varrho_2 \geqslant 0$ разложение функции $f(x)$, умноженное на $(1-x)^{\varrho_1}(1+x)^{\varrho_2}$, равномерно сходится на всем отрезке $[-1, +1]$, если только функция $f_1(x) = f(x)(1-x)^{\varrho_1}(1+x)^{\varrho_2}$ удовлетворяет на нем условию Дини и $f_1(\pm 1) = 0$; тем более достаточно, чтобы сама функция $f(x)$ удовлетворяла условию Дини; если же условие Дини для $f_1(x)$ заменить условием $\operatorname{Lip}\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$, то сходимость будет не только равномерной, но и абсолютной. Без указанного множителя разложение может и не сходиться на всем отрезке — даже при более ограничительных условиях, наложенных на функцию $f(x)$; например, если положить $\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{1}{2}$, $t_0(x) = 1$ и рассмотреть функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^4 \arccos x)}{n^2} \in \operatorname{Lip}\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{8}, \tag{XIII.12}$$

то ее разложение расходится на концах отрезка.

Если $-\frac{1}{4} < \varrho_1, \varrho_2 \leqslant 0$, то само разложение функции $f(x)$ будет равномерно сходящимся на всем отрезке $[-1, +1]$, если функция $f_1(x) = f(x)(1-x)^{2\varrho_1}(1+x)^{2\varrho_2}$ удовлетворяет условию Дини и $f_1(\pm 1) = 0$.

Отметим некоторые результаты, относящиеся к сходимости разложения Фурье *почти всюду на* $[-1, +1]$. И. П. Натансон [4*] показал следующее: если на отрезке $[-1, +1]$ функция $f(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$, то ее разложение Фурье сходится к $f(x)$ почти всюду на $[-1, +1]$, если $d\alpha(x) = w(x)\,dx$ и вес $w(x)$ почти всюду строго положителен. А. Н. Колмогоров [50*] получил более общий результат: сходимость почти всюду имеет место при любом $\alpha > 0$, а также если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дини—Липшица (12.1.4). И. П. Натансон [6*] показал также, что при условии $w(x) \leqslant \frac{M}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, разложение функции ограниченной вариации сходится почти всюду на $[-1, +1]$.

Алексич [1] показал, что разложение Фурье функции $f(x) \in L_\alpha^2$ сходится почти всюду на $[a, b] \subset [-1, +1]$, если она непрерывна на $[a, b]$, причем $\frac{\omega^2(\delta)}{\delta} \in L_1$, а функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1, +1]$ и почти всюду $0 < w(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; кроме того, ортонормальная система предполагается равномерно ограниченной на $[a, b]$.

С. Н. Андрианов [3*] рассмотрел некоторые вопросы, связанные с ортогональными рядами $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(x)$.

По аналогии с тригонометрическими рядами он назвал U-множеством, или *множеством единственности ортонормальной системы* $\{p_n(x)\}_0^\infty$, множество точек отрезка $[-1, +1]$, обладающее следующим свойством: если ортогональный ряд сходится к нулю на $[-1, +1]$ вне U, то все его коэффициенты $\{a_n\}_0^\infty$ равны нулю; U'-множеством называется множество точек отрезка $[-1, +1]$, обладающее следующим свойством: каждый ортогональный ряд, сходящийся на $[-1, +1]$ вне U' к некоторой конечной интегрируемой функции, является ее рядом Фурье.

Для тригонометрической системы — следовательно, для многочленов Чебышева $\{T_n(x)\}_0^\infty$ — каждое измеримое U-множество имеет меру нуль.

С. Н. Андрианов приводит примеры ортонормальных систем, для которых U-множество имеет положительную меру; пусть, например, на некотором отрезке $[a, b] \subset [-1, +1]$ вся ортонормальная система ограничена $\{|p_\iota(x)|\}_0^\infty \leqslant M$ и пусть $[a, b] = E_1 + E_2$, $E_1 \cdot E_2 = 0$, где множество E_1 меры нуль всюду плотно в $[a, b]$; пусть существует точка x_0 на $[-1, +1]$ вне $[a, b]$, в которой $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n(x_0)} < \infty$; тогда множество E_2 положительной меры является U-множеством; указанное условие, в частности, имеет место, если $|p_n(x_0)| = O\{n(\ln n)^{1+\varepsilon}\}$, $\varepsilon > 0$ — например, для многочленов Якоби при $x_0 = \pm 1$, если $\alpha, \beta \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon'$, $\varepsilon' > 0$, ибо в этом случае имеем

$$p_n(1) = O(n^{\alpha + \frac{1}{2}}), \quad p_n(-1) = O(n^{\beta + \frac{1}{2}}). \tag{XIII.13}$$

Таким образом, для решения задач о нахождении U-множества нужны оценки для модулей ортонормальных многочленов не сверху, а снизу, или точные порядки их роста.

С. Н. Андрианов сравнил между собой U-множества различных систем ортонормальных многочленов, опираясь на рассмотрение равносходимости соответствующих ортогональных рядов; например, он сравнил между собой две системы ортонормальных многочленов $\{p_n^{(1)}(x)\}_0^\infty$ и $\{p_n^{(2)}(x)\}_0^\infty$, соответствующие распределениям $d\alpha^{(1)}(x)$ и $d\alpha^{(2)}(x) = h(x)\, d\alpha^{(1)}(x)$, где $h(x)$ — многочлен, неотрицательный на $[-1, +1]$; если первая система равномерно ограничена на $[-1, +1]$, то каждое измеримое U'-множество первой системы является U'-множеством второй; наоборот, каждое измеримое U'-множество второй системы, содержащее нули $h(x)$, лежащие на $[-1, +1]$, является U'-множеством первой системы.

Отметим результат Ф р а й д а [3], относящийся к исследованиям возможности почленного дифференцирования разложения Фурье данной функции: если $w(x) \geqslant m > 0$ на $[a, b] \subset [-1, +1]$ и $\omega(\delta; f^{(k)})$ — модуль непрерывности производной $f^{(k)}(x)$ на $[a, b]$, удовлетворяющий условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, \omega\left(\frac{1}{n}; f^{(k)}\right) < \infty$, то указанное разложение, продифференцированное почленно k раз, сходится к $f^{(k)}(x)$ абсолютно и равномерно внутри $[a, b]$; если же, кроме того, $w(x)\sqrt{1-x^2} \leqslant M$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то предыдущее утверждение справедливо при условии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, \omega_2\left(\frac{1}{n}; g^{(k)}\right)$, где $g(\theta) = f(\cos\theta)$, а $\omega_2(\delta; g^{(k)})$ — интегральный модуль непрерывности функции $g^{(k)}(\theta)$ в метрике пространства L^2. Он получил также следующие результаты, аналогичные условиям С. Н. Бернштейна, С. Б. Стечкина, Жордана, Харди и Литтльвуда в теории тригонометрических рядов [1]: если $g(\theta) = f(\cos\theta)$ и если выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, \omega\left(\frac{1}{n}; g\right) < \infty, \quad K_n(x_0, x_0) = O(n), \tag{XIII.14}$$

[1]) См. Ф р а й д [4], [5].

то разложение Фурье функции $f(x)$ абсолютно сходится в точке x_0; если на всем отрезке $[-1, +1]$ выполняются неравенства

$$w(x) \leqslant C_1(1-x^2)^{-\alpha}, \ |p_n(x)| \leqslant C_2(1-x^2)^{-\beta} \ (n=1, 2, \ldots), \ \alpha, \beta > 0, \quad \text{(XIII.15)}$$

и если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b] \subset \subset [-1, +1]$ и непрерывна в точке c, где $a < c < b$, то ее разложение сходится в точке c; если же при условиях (XIII.15) имеем

$$a_n = \int_{-1}^{1} w(x) f(x) p_n(x)\, dx = O(n^{-\gamma}), \ \ \gamma > 0, \ |f(x_0+h) - f(x_0)| = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{h}}\right), \quad \text{(XIII.16)}$$

то отсюда вытекает сходимость в точке x_0.

Укажем также, что Фрайд, Тандори, Алексич и Г. И. Натансон получили ряд результатов, относящихся к суммируемости разложений Фурье. В частности, Г. И. Натансон [1] показал сходимость процесса суммирования Бернштейна — Рогозинского во всех точках Лебега функции $f(x) \in L^2_\alpha$, если функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1, +1]$, а вес удовлетворяет условиям теоремы 12.1.4 при $\lambda = 1$; при этом в формулах (IX.6), (IX.7) надо положить $\alpha_n = \frac{\pi}{2n}$.

ГЛАВА XIV
ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

Ряд результатов по теории интерполирования рассмотрен в книге «Математика в СССР за сорок лет 1917—1957» (т. I, стр. 319—323), а также в книгах В. Л. Гончарова ([37*], глава I, глава IV, § 55), Я. С. Безиковича ([6*], глава III), И. П. Натансона ([36*], ч. III, главы I — IV) и Я. Л. Геронимуса ([97*], § 29]).

14.1. Как было сказано в дополнениях к главе I, решающую роль при исследовании сходимости бесконечных процессов, в частности интерполяционного процесса Лагранжа, играет оценка констант Лебега этого процесса; если на отрезке $[a, b] \subset [-1, +1]$ функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна, причем $0 < m \leqslant \alpha'(x) \leqslant M$, то имеем такую оценку:

$$\sum_{[a, b]} |l_k(x)| \leqslant CM_n^2 \ln n, \quad a+\varepsilon \leqslant x \leqslant b-\varepsilon, \ \varepsilon > 0,$$
$$|p_n(x)| \leqslant M_n, \ a \leqslant x \leqslant b; \quad \text{(XIV.1)}$$

в частности, если $M_n = C$, то имеем наиболее медленный порядок $O(\ln n)$ роста констант Лебега; для случая интерполяционного процесса Лагранжа это было показано С. Н. Бернштейном в работе [64*]. Локальная оценка (XIV.1) для случая абсолютно непрерывной функции $\alpha(x)$ и для $M_n = C$ указана Фрайдом [6].

Если $M_n = C$, то для $[a, b] \subset [-1, +1]$ процесс равномерно сходится внутри $[a, b]$, если $f(x) \in L^2_\alpha$, а на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дини [1]); если же не ставить условия $M_n = C$, а потребовать лишь

---

[1]) Фрайд [6] доказал равномерную сходимость интерполяционного процесса Лагранжа внутри $[a, b]$ в предположении, что функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна на всем отрезке $[-1, +1]$, удовлетворяет на $[a, b]$ условиям $0 < m \leqslant w(x) \leqslant M$, ортонормальная система $\{|p_n(x)|\}_0^\infty$ равномерно ограничена на $[a, b]$, а функция $f(x)$ непрерывна на всем отрезке $[-1, +1]$, а на внутреннем отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условию Дини.

выполнения условия (XII.21), то для сходимости достаточно, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема на $[a, b]$, причем чтобы ее производная удовлетворяла на $[a, b]$ условию Дини. Из формулы (3.4.8) и квадратурной формулы Гаусса—Якоби (3.4.4) вытекают следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} p_i(x_{kn}) p_j(x_{kn}) = \delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n-1), \\ &\sum_{i=0}^{n-1} p_i(x_{kn}) p_i(x_{rn}) = \begin{cases} 0, & k \neq r, \\ \dfrac{1}{\lambda_{kn}}, & k = r \end{cases} \quad (k, r = 1, 2, \ldots n). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV.2)}$$

Ш о х а т [3] называет их «вторым свойством ортогональности» системы $\{p_k(x)\}_0^n$. Это название будет понятнее, если мы введем ступенчатую функцию распределения $\alpha_n(x)$, имеющую в каждой точке $\{x_{kn}\}$ скачок $\{\lambda_{kn}\}$ — в данном случае положительный; очевидно, эта функция совпадает с функцией $V(x)$ (3.412.1). Пользуясь ею, мы можем записать формулу Гаусса—Якоби следующим образом:

$$Q_n(\varrho_{2n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \varrho_{2n-1}(x_{kn}) \lambda_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_{2n-1}(x)\, d\alpha_n(x), \qquad \text{(XIV.3)}$$

откуда вытекает такая форма записи соотношений (XIV.2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_i(x) p_j(x)\, d\alpha_n(x) = \delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n-1). \qquad \text{(XIV.4)}$$

Так как по (3.23), (3.47) имеем

$$l_\nu(x) = \frac{p_n(x)}{p_n'(x_{\nu n})(x - x_{\nu n})} = \frac{p_n(x) p_{n-1}(x_{\nu n}) - p_n(x_{\nu n}) p_{n-1}(x)}{p_n'(x_{\nu n}) p_{n-1}(x_{\nu n})(x - x_{\nu n})} =$$

$$= \frac{k_n}{k_{n-1}} \cdot \frac{K_{n-1}(x_{\nu n}, x)}{p_n'(x_{\nu n}) p_{n-1}(x_{\nu n})} = \lambda_{\nu n} K_{n-1}(x_{\nu n}, x), \qquad \text{(XIV.5)}$$

то интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами в нулях ортогонального многочлена $p_n(x)$ может быть записан в такой форме:

$$L_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu(x) f(x_{\nu n}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) K_{n-1}(t, x)\, d\alpha_n(t); \qquad \text{(XIV.6)}$$

сравнивая с (3.1.11), видим, что его можно рассматривать как частную сумму $(n-1)$-го порядка разложения функции $f(x)$ по многочленам $\{p_i(x)\}_0^{n-1}$, ортонормальным относительно распределения $d\alpha_n(x)$; в такой форме интерполяционный многочлен Лагранжа записан еще П. Л. Ч е б ы ш е в ы м [2].

Если ввести коэффициенты разложения

$$\left.\begin{aligned} &f_i = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_i(x)\, d\alpha(x), \quad s_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i p_i(x), \\ &f_{i,n} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_i(x)\, d\alpha_n(x), \quad L_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f_{i,n} p_i(x), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV.7)}$$

то Шохат [3] показал, что в случае конечного отрезка ортогональности для каждой функции $f(x) \in L_\alpha^2$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (f_{i,n} - f_i)^2 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} f_{i,n} = f_i; \tag{XIV.8}$$

поэтому если i безгранично возрастает вместе с n, то отсюда вытекает предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f_{i,n} = \lim\limits_{i\to\infty} f_i = 0$. В частности, если $d\alpha(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, то мы имеем особенно простой результат

$$\left.\begin{aligned} &L_n(\cos\theta) = \frac{f_{0,n}}{2} + \sum_{k=1}^{n} f_{k,n} \cos k\theta, \quad f_{k,n} = \frac{2}{n} \sum_{r=1}^{n} f(\cos\theta_r) \cos k\theta_r, \\ &\theta_r = \frac{(2r-1)\pi}{2n} \quad (r = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n-1), \end{aligned}\right\} \tag{XIV.9}$$

т. е. значение коэффициентов $f_{k,n}$ в разложении интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$ по ортогональным многочленам $\{T_k(x)\}_0^{n-1}$ можно рассматривать как приближенные значения коэффициентов разложения той же функции в тригонометрический ряд Фурье

$$\left.\begin{aligned} &f(\cos\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos k\theta, \\ &f_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos\theta)\, d\theta, \quad f_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos\theta) \cos k\theta\, d\theta \quad (k = 1, 2, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{XIV.10}$$

вычисленные при помощи формулы прямоугольников.

14.3. Пользуясь этими соображениями, мы можем сделать следующий вывод из теоремы 14.3.1: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, +1]$, то

$$|L_n(x) - s_{n-1}(x)| \leqslant C E_{n-1}(f) \sqrt{K_{n-1}(x, x)}; \tag{XIV.11}$$

следовательно, если $\omega(\delta, f) = o\left(\sqrt{\delta}\right)$, то внутри каждого отрезка, на котором $0 < m \leqslant \alpha'(x)$, будем иметь *равномерную равносходимость* двух бесконечных процессов Лагранжа и Фурье.

14.9. Отметим еще некоторые результаты.

В. И. Крылов [22*] рассмотрел случай *многочленов Чебышева* и доказал сходимость интерполяционного процесса Лагранжа в каждой точке непрерывности функции $f(x)$, имеющей ограниченную вариацию на $[a, b] \subset$ $\subset [-1, +1]$, а также его равномерную сходимость в случае абсолютно непрерывной функции.

Г. И. Натансон [1] рассмотрел случай *многочленов Якоби* и применил к интерполяционному процессу Лагранжа метод суммирования Бернштейна — Рогозинского: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, +1]$ и если положим

$$A_n(f; x) = \frac{1}{2}\{L_n(x_1) + L_n(x_2)\}, \tag{XIV.12}$$

где точки $x_{1,2}$ такие же, как в (IX.7), то будем иметь

$$f(x) - A_n(f; x) = O(1)\,\omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad -1 + 2\varepsilon \leqslant x \leqslant 1 - 2\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}. \tag{XIV.13}$$

Скажем еще несколько слов об условиях сходимости интерполяционного процесса Лагранжа для функции $f(x)$, регулярной в некоторой области, содержащей внутри себя отрезок $[-1, +1]$; известно, что для этого надо рассмотреть вопрос о существовании предела (VI.35) [1]), который мы исследовали в дополнениях к главе VI.

Отсюда легко вытекает условие сходимости в простейших случаях: 1) если $\alpha'(x)>0$ на отрезке $[-1, +1]$, то интерполяционный процесс Лагранжа сходится внутри наибольшего эллипса регулярности функции $f(x)$ с фокусами в точках ± 1; 2) если $\alpha'(x)>0$ на множестве $F=[-1, -\alpha]+[\alpha, 1]$, то процесс сходится внутри кривой C (XII.37) при том наибольшем значении величины C, при котором функция регулярна внутри кривой C.

Таким образом, и в этом вопросе важную роль играет существование предела (VI.35).

ГЛАВА XV
МЕХАНИЧЕСКИЕ КВАДРАТУРЫ

Ряд результатов по теории механических квадратур рассмотрен в книгах: «Математика в СССР за тридцать лет 1917—1947» (стр. 767—772), «Математика в СССР за сорок лет 1917—1957» (т. I, стр. 830—833), В. Л. Гончаров ([37*], §§ 20, 39, 55), Я. С. Безикович ([6*], глава VI), И. П. Натансон ([36*], ч. III.), Я. Л. Геронимус ([97*], §§ 17, 18, 27, 28).

Общий квадратурный процесс (15.3) был рассмотрен Г. Полиа [2]); он рассмотрел следующие три условия:

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(x^k)=\int_a^b x^k p(x)\,dx; \tag{I}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_{\nu n}| < L \quad (n=1, 2, \ldots); \tag{II}$$

существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{I} |\lambda_{\nu n}|=\Lambda(I)$, где сумма распространена на те значения индекса ν, при которых узлы $x_{\nu n}$ лежат на отрезке I, причем

$$\lim_{m\to\infty}\Lambda(I_m)=0,\ I_1\supset I_2\supset\ldots\supset I_m\supset\ldots,\ \lim_{m\to\infty}\operatorname{Mes}(I_m)=0. \tag{III}$$

Для сходимости на отрезке $[a, b]$ квадратурного процесса для всех многочленов необходимо и достаточно условие (I) (ср. теорему 1.6); для его сходимости для всех непрерывных функций необходимы и достаточны условия (I), (II) (ср. теорему 1. 6); для его сходимости для любой функции $f(x)$, собственно интегрируемой по Риману, необходимы и достаточны условия (I), (II), (III). Нетрудно видеть, что условие (II) означает, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\lambda_{\nu n}|=\int_a^b |d\alpha_1(x)|<L, \tag{XV.1}$$

т. е. все функции распределения $\{\alpha_n(x)\}_0^\infty$ имеют равномерно ограниченные вариации на отрезке $[a, b]$; можно указать и значение условия (III).

---

[1]) См., например, В. Л. Гончаров [37*], § 59.

[2]) См. ссылку в теореме 15.2.1. В рассматриваемом общем случае числа $\{\lambda_{\nu n}\}$ могут быть и отрицательными

Рассмотрим обобщение квадратурной формулы, принадлежащее Турану [1]; он рассмотрел формулу

$$\int_{-1}^{1} w(x) f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\nu=1}^{n} f^{(i)}(x_\nu) \lambda_\nu^{(i)} \qquad (XV.2)$$

(где $\lambda_\nu^{(i)}$ не зависит от выбора функции $f(x)$), причем она должна быть точной для всех многочленов степени $\leqslant (k+1)n-1$ (где k — целое нечетное число); если $w(x) \equiv 1$, то узлы $\{x_\nu\}_1^n$ должны быть нулями многочлена $\pi_{n,\,k+1}(x) = x^n + \ldots$, наименее уклоняющегося от нуля в метрике пространства L^{k+1}; предельная функция распределения нулей этих многочленов существует и совпадает с функцией Робена; в частности, при $k=1$ получим квадратурную формулу Гаусса — Якоби с узлами в нулях многочлена Лежандра; при $k=3$ мы должны иметь

$$\int_{-1}^{1} \omega^3(x) x^\nu dx = 0 \ (\nu = 0,\ 1, \ldots, n-1), \qquad \omega(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu). \quad (XV.3)$$

Если же узлы $\{x_\nu\}_1^n$ заданы и являются абсциссами Чебышева, то квадратурная формула (XV.2) при $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ точна для всех многочленов степени $\leqslant (k+1)n-1$.

Рассмотрим теперь обычную квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\, du(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu n} f(y_{\nu n}) \qquad (XV.4)$$

с неотрицательными коэффициентами Котеса $\{\lambda_{\nu n}\}_1^n$ и с n вещественными различными узлами $\{y_{\nu n}\}_1^n$, лежащими на отрезке $[a, b]$; частные случаи: формула Котеса — при равноотстоящих узлах $\left\{y_{\nu n} = a + \frac{\nu-1}{n-1}(b-a)\right\}_1^n$; формула Чебышева — при равных коэффициентах Котеса $\lambda_{\nu n} = \frac{1}{n}\int_a^b du(x)$.

Обозначим через M_n степень точности формулы (XV.4), т. е. ту наибольшую степень многочленов, для которых она точна. При $u(x) \equiv x$, $a=0$, $b=1$ С. Н. Бернштейн [97*] показал, что $M_n < 4\sqrt{n-1}$ для формулы Котеса и $M_n < 4\sqrt{n}$ для формулы Чебышева; таким образом, формула Котеса с n узлами не может быть точной для всех многочленов степени $\geqslant 4\sqrt{n-1}$ ни при каких неотрицательных коэффициентах Котеса $\{\lambda_{\nu n}\}_1^n$; если она должна быть точна для всех многочленов степени n, то имеем следующий результат: Успенский [1] (для $u(x) \equiv x$) и Р. О. Кузьмин [13*] (для $du(x) = p(x)\,dx$, где функция $p(x)$ на отрезке $[0, 1]$ конечна, интегрируема по Риману и дифференцируема на концах отрезка) показали, что для больших значений n имеем

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{\nu n} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{n \ln^2 n}\binom{n}{\nu}\left\{\frac{p(0)}{\nu} + \frac{(-1)^{n-1} p(1)}{n-\nu}\right\}\left\{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\nu = 2,\ 3, \ldots, n-1), \\ &\lambda_{1n} = \frac{p(0)}{n \ln n}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad \lambda_{nn} = \frac{p(1)}{n \ln n}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \end{aligned}\right\} \quad (XV.5)$$

т. е. коэффициенты Котеса не могут быть все неотрицательными.

Л. Фейер [1]) показал, что при $u(x)\equiv x$, $a=-1$, $b=1$ все коэффициенты Котеса неотрицательны, если за узлы взять нули таких многочленов

$$P_n(x)-P_{n-2}(x),\quad P_n(x)-P_{n-1}(x),\quad P_n(x),\quad T_n(x),\quad U_n(x),\tag{XV.6}$$

где $P_n(x)$ — многочлен Лежандра.

Так как в формуле Чебышева заданы числа $\{\lambda_{\nu n}\}_1^n$, то она не может быть точной для всех многочленов степени $\geqslant 4\sqrt{n}$ ни при каких вещественных узлах; если же она должна быть точной при n узлах для всех многочленов степени $\leqslant n$, то уже при $n>9$ некоторые из узлов обязательно будут комплексными; эти исследования С. Н. Бернштейна были дополнены Р. О. Кузьминым [25*], [26*], [32*], нашедшим закон распределения узлов в комплексной плоскости.

При доказательстве своей теоремы С. Н. Бернштейн использовал оценки для наименьшего нуля многочлена Лежандра и его производной. Рассмотрим квадратурную формулу (XV.4) с $u(x)=\alpha(x)$; если $\alpha'(x)>0$ почти всюду на отрезке $e=[-1,\ -1+\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$ сколь угодно мало, и если

$$\lim_{x\to-1}\{\alpha(x)(1+x)^{-\frac{1}{2}}\}=0,\tag{XV.7}$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}(M_n\lambda_{1n})=0$; следовательно, если, например, $\lambda_{1n}=O\left(\frac{1}{n}\right)$, как в формуле Чебышева, то $M_n=o(n)$, т. е. формула (XV.4) не может быть точной для всех многочленов степени не выше n.

15.2. Теорема 15.2.3 выведена лишь для случая конечного промежутка. Для того случая, когда интервал ортогональности E бесконечен, а функция $f(x)$ непрерывна на нем [2]), Шохат [3], [4] показал, что следующие утверждения эквивалентны: а) процесс механических квадратур Гаусса — Якоби сходится для любой функции $f(x)$, непрерывной на E; б) проблема моментов

$$\int\limits_E x^k\,d\alpha(x)=c_k\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\tag{XV.8}$$

где интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса, определенна; в) для любой функции указанного типа справедливо равенство Парсеваля.

Он показал также [3] связь между сходимостью «в среднем» интерполяционного процесса Лагранжа (14.3.2) и сходимостью механических квадратур Гаусса — Якоби: г) для всякой функции $f(x)\in L_\alpha^2$ обе последовательности

$$Q_n(f^2),\quad \int\limits_E\{f(x)-L_n(x)\}^2\,d\alpha(x)\tag{XV.9}$$

одновременно ограничены, или не ограничены; д) если проблема моментов (XV.8) определенна или если $\alpha(x)$ является таким ее решением, при котором для рассматриваемой функции $f(x)$ справедливо равенство Парсеваля, то обе эти последовательности одновременно сходятся к пределам

$$\lim_{n\to\alpha}Q_n(f^2)=\int\limits_E f^2(x)\,d\alpha(x),\quad \lim_{n\to\infty}\int\limits_E\{f(x)-L_n(x)\}^2\,d\alpha(x)=0;\tag{XV.10}$$

е) в этом последнем случае справедливо предельное соотношение (XIV.8).

---

[1]) См. сноску [2]) на стр. 355.

[2]) Это значит, что она непрерывна на любом конечном отрезке $[a,\ b]\subset E$ и стремится к определенному пределу при $x\to\infty$.

15.3. Формула (15.3.3) показывает, что в случае многочленов Чебышева все коэффициенты Кристоффеля $\{\lambda_{\nu n}\}_1^n$ равны между собой; в этом случае квадратурная формула Гаусса—Якоби является в то же время квадратурной формулой Чебышева; как показали К. А. Поссе [1] и затем Н. Я. Сонин [1], это единственный случай такого совпадения. В связи с этим возникает более общий вопрос, в какой степени ортогональная система $\{P_k(x)\}_0^n$ характеризуется заданием ее коэффициентов Кристоффеля [1])

$$\{\lambda_{\nu k}\} \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ k; \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Ответ на этот вопрос таков: зададим произвольно две положительные убывающие числовые последовательности

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{12} > \lambda_{13} > \ldots > \lambda_{1n}, \\ &\lambda_{22} > \lambda_{33} > \ldots > \lambda_{nn}; \end{aligned}\right\} \tag{XV.11}$$

если числа λ_{1k}, λ_{kk} принять за коэффициенты Кристоффеля, соответствующие наименьшему и наибольшему нулям ортогонального многочлена $P_k(x)$ $(k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$, то этим определится вся ортогональная система $\{P_k(x)\}_0^n$ вплоть до линейного преобразования.

Рассмотрим теперь асимптотические формулы для коэффициентов Кристоффеля.

Поскольку обе функции распределения $\psi_n(x)$ и $\alpha_n(x)$ имеют положительные скачки $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\{\lambda_{\nu n}\}$ в одних и тех же точках $[x_{\nu n}]$, то мы имеем

$$\lambda_{\nu n} : \frac{1}{n} = n\lambda_{\nu n} = \frac{\alpha_n(x_{\nu n} + \varepsilon) - \alpha_n(x_{\nu n} - \varepsilon)}{\psi_n(x_{\nu n} + \varepsilon) - \psi_n(x_{\nu n} - \varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0, \tag{XV.12}$$

где малое число ε подобрано таким образом, чтобы на отрезке $e = [x_{\nu n} - \varepsilon,\ x_{\nu n} + \varepsilon]$ был только один узел $x_{\nu n}$. Введем обозначение $x_{\nu n} = x_0$ и не будем изменять x_0 и ε при изменении n; так как всегда существует предельная функция распределения $\alpha(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(x)$, то при существовании предельной функции распределения нулей $\psi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x)$ мы будем иметь

$$n\lambda_{\nu n} = \frac{\alpha(x_0 + \varepsilon) - \alpha(x_0 - \varepsilon)}{\psi(x_0 + \varepsilon) - \psi(x_0 - \varepsilon)} + \eta_n, \quad \lim_{n\to\infty} \eta_n = 0, \tag{XV.13}$$

если $x_0 \pm \varepsilon$ — точки непрерывности обеих функций $\alpha(x)$, $\psi(x)$; стремление к нулю равномерно на отрезке $[-1,\ +1]$, если обе эти функции непрерывны на нем. Если же эти функции дифференцируемы на e и $\psi'(x) \neq 0$, $x \in e$, то по теореме Коши имеем

$$n\lambda_{\nu n} = \frac{\alpha'(\zeta)}{\psi'(\zeta)} + \eta_n, \quad x_0 - \varepsilon < \zeta < x_0 + \varepsilon; \tag{XV.14}$$

если к тому же обе функции $\alpha'(x)$, $\psi'(x)$ непрерывны на e, то

$$n\lambda_{\nu n} = \frac{\alpha'(x_0)}{\psi'(x_0)} + \eta_n + \eta'(\varepsilon),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \eta'(\varepsilon) = 0;$$

---

[1]) См., например, М. Ф. Кравчук [72*], М. Ф. Кравчук и С. С. Мовшиц [86*].

окончательно асимптотическая формула для коэффициентов Кристоффеля такова:

$$n\lambda_{\nu n} \simeq \frac{\alpha'(x_{\nu n})}{\psi'(x_{\nu n})}. \tag{XV.15}$$

В частности, если на отрезке ортогональности $[-1, +1]$ функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна и $\alpha'(x) > 0$ почти всюду на $[-1, +1]$, то мы имеем по (VI.34)

$$n\lambda_{\nu n} \simeq \pi w(x_{\nu n}) \sqrt{1 - x_{\nu n}^2}; \tag{XV.16}$$

отсюда, например, вытекает формула (15.3.10) без применения асимптотической формулы Дарбу для многочленов Якоби. Если же функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна на множестве

$$E = [-1, -\alpha] + [\alpha, 1]$$

и $\alpha'(x) > 0$ почти всюду на E, то по (VI.33) имеем

$$n\lambda_{\nu n} \simeq \frac{\pi w(x_{\nu n}) \sqrt{(1 - x_{\nu n}^2)(x_{\nu n}^2 - \alpha^2)}}{|x_{\nu n}|}. \tag{XV.17}$$

Асимптотическую формулу для коэффициентов Кристоффеля можно вывести из других соображений: если ввести обозначение

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{K_{n-1}(x, x)} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k^2(x)}, \tag{XV.18}$$

то по (3.4.8) $\lambda_{\nu n} = \varrho_n(x_{\nu n})$; таким образом, надо найти асимптотическое значение величины

$$n\varrho_n(x) = 1 : \left\{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x)\right\}, \tag{XV.19}$$

которая обратна среднеарифметическому значению суммы квадратов ортонормальных многочленов $\{p_k(x)\}_0^{n-1}$; в случае отрезка $[-1, +1]$ мы получим

$$\lim_{n\to\infty} n\varrho_n(x) = \pi w(x) \sqrt{1 - x^2}. \tag{XV.20}$$

В предположении, что функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна на всем отрезке $[-1, +1]$, эта формула была выведена несколькими авторами: Сегё вывел ее для всех точек, в которых функция $w(x)$ дважды дифференцируема; Н. И. Ахиезер [42*] показал, что если функция $w(x)\sqrt{1-x^2}$ непрерывна на $[-1, +1]$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\varrho_n(x) \leqslant \pi w(x) \sqrt{1 - x^2};$$

если же, кроме того,

$$w(x) \sqrt{1 - x^2} \geqslant m > 0$$

на всем отрезке, то справедливо (XV.20); Эрдёш и Туран показали справедливость (XV.20) при этих же условиях; обобщая метод этих авторов так же, как мы сделали в нашей книге [1] (§ 5.6), можно показать справедливость (XV.20) на любом внутреннем отрезке, если функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна на нем.

ГЛАВА XVI

МНОГОЧЛЕНЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЙ

Ряд работ, посвященных многочленам, ортогональным на произвольной кривой, рассмотрен в сборнике «Математика в СССР за 30 лет» (стр. 383—385) и в нашей книге [97*] (§§ 35—38).

В работе П. К. Суетина [7*] рассмотрен тот случай, когда существуют производная веса $w^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ и производная отображающей функции $\varphi^{(p+\nu)}(z) \in H_1$; в таком случае справедлива асимптотическая формула

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{l}{2\pi}}\,[\Delta_e(x)]^{-1}\sqrt{\Phi'(x)}\,[\Phi(x)]^n(1+\varepsilon_n) \qquad \text{(XVI.1)}$$

с оценкой остаточного члена: $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha}}\right)$ для x вне C и $\varepsilon_n = O\left(\frac{\sqrt{n}}{n^{p+\alpha}}\right)$ для x на C.

При этих же условиях всякая функция $f(x)$, регулярная внутри C, у которой примитивная p-го порядка представима интегралом Коши через свои угловые граничные значения, разлагается в ряд по ортогональным многочленам, равномерно сходящийся внутри C.

Е. К. Синев [2] рассмотрел тот случай, когда C — замкнутая спрямляемая кривая Жордана; необходимое и достаточное условие того, чтобы все ортогональные многочлены $\{p_n(x)\}_1^\infty$ имели общий нуль x_0 внутри C, таково: $w(x) = C\,|\Psi'(x)|$ почти всюду на C; если, кроме того, все многочлены $\{p_n(x)\}_2^\infty$ должны иметь еще один общий нуль x_1 внутри C, то необходимо и достаточно, чтобы контур был окружностью.

Для того чтобы ортогональные многочлены имели такой вид:

$$p_n(x) = \sum_{s=n-k}^{n} a_s^{(n)} x^s \qquad (n \geqslant k), \qquad \text{(XVI.2)}$$

где k не зависит от n, необходимо и достаточно, чтобы контур был окружностью с центром в начале координат, а $w(\cos\theta) = \frac{C}{|R_k(e^{i\theta})|^2}$, где $R_k(x)$ — произвольный многочлен степени k, не равный нулю внутри C.

Е. А. Синев [1] показал также, что в случае аналитического контура оба ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad x = \varphi(z), \qquad \text{(XVI.3)}$$

в соответствующих точках границ их областей сходимости одновременно сходятся, или расходятся, их суммы в окрестностях этих точек одновременно являются аналитическими функциями, или имеют особенности и т. п.

Ввиду того, что для вывода асимптотических формул для ортогональных многочленов сперва приходится выводить эти формулы для обобщенных многочленов Фабера (§§ 16.4, 16.5), представляет интерес изучение свойств многочленов Фабера в связи с ортогональными многочленами; этому вопросу посвящена наша работа [59*], а в последнее время работы П. К. Суетина [2*], [1]; им найдены некоторые условия, при которых для рядов по многочленам Фабера справедливы теоремы Абеля и Таубера.

Пусть C — замкнутая спрямляемая кривая Жордана; рассмотрим пространство L_σ^p комплекснозначных функций $f(x)$, определенных на C, с нормой

$$\|f\|_\sigma^p = \left\{ \int_C |f(x)|^p \, d\sigma(s) \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad p > 0, \tag{XVI.4}$$

где $\sigma(s)$ — неубывающая функция ограниченной вариации, а s — дуговая координата точки на C; если многочлен $P_n(x) = x^n + \ldots$ наименее уклоняется от нуля в метрике этого пространства, то при условии

$$\int_C \ln \sigma'(s) \, |\Phi'(x) \, dx| > -\infty \tag{XVI.5}$$

в нашей работе [92*] выведена для этих многочленов асимптотическая формула во внешней области; показано также, что это условие необходимо и достаточно для незамкнутости системы многочленов $\{P_n(x)\}_0^\infty$ (а следовательно, и системы степеней $\{x^n\}_0^\infty$) в пространстве L_σ^p; Г. Ц. Тумаркин [6*] показал, что это же условие справедливо не только при $p \geqslant 1$, как предполагалось в нашей работе, но и при любом положительном p.

В нашей книге [97*] (§ 38) приведены результаты работ, в которых исследуется система многочленов, ортогональных одновременно на нескольких контурах; М. А. Лисовский [2*] рассмотрел эту задачу для системы многочленов $\{P_k(x)\}_n^\infty$, ортогональной, начиная с некоторого номера n.

Укажем также, что в нашей работе [69*] показано, что все пять типов многочленов, найденных Сегё при решении вышеуказанной задачи об ортогональности на нескольких контурах, являются обобщенными многочленами Фабера, т. е. должны удовлетворять соотношению

$$x\Phi_n(x) = \Phi_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} c^k c_k \Phi_{n-k}(x) - \alpha_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \quad \Phi_0 = 1, \tag{XVI.6}$$

где функция $\alpha(z) = \sum\limits_{k=-1}^{\infty} \frac{\alpha_{k-1}}{(cz)^{k-1}}$, $(\alpha_{-1} = 1)$ регулярна и не равна нулю при $|z| > 1$; мы нашли также условие, необходимое и достаточное для того, чтобы эти обобщенные многочлены Фабера были ортогональны на некотором аналитическом контуре C с весом, положительным и непрерывным на C, и нашли необходимую форму этого веса

$$\Delta_e[\varphi(z)] = \frac{z\sqrt{c\varphi'(z)}\,\Delta_i(\infty)}{\alpha(z)}. \tag{XVI.7}$$

Рассмотрим еще один вид ортогональности на контуре: пусть

$$\int_C F(z) P_n(z) P_m(z) \, dz \begin{cases} = 0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n = m, \end{cases} \tag{XVI.8}$$

где $F(z)$ — аналитическая функция, имеющая особенности внутри контура C. В этом случае наш функционал $\mathfrak{S}$ таков:

$$\mathfrak{S}\{z^n\} = c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^n F(z) \, dz \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{XVI.9}$$

и многочлены $\{P_n(z)\}_0^\infty$ выражаются формулой (2.2.6).

Если заданная функция $F(z)$ имеет существенно особую точку $z = a$, а контур C охватывает эту точку, то, очевидно, моменты $\{c_n\}_0^\infty$ являются коэффициентами лорановского разложения функции $F(z)$ в окрестности точки a.

Если многочлены $\{P_n(z)\}_0^\infty$ ортогональны на конечном отрезке $[a, b]$ вещественной оси, то нетрудно показать, что роль функции $F(z)$ играет функция

$$Q_0(z)=\int_a^b \frac{d\alpha(x)}{z-x}, \qquad z \,\overline{\in}\, [a, b], \tag{XVI.10}$$

а контуром C может быть любая замкнутая кривая, охватывающая отрезок $[a, b]$ [1]).

Кролл и Фольк рассмотрели тот случай, когда

$$F(z)=z^m e^{\frac{1}{z}} \qquad (m=-1, 0, 1, 2, \ldots), \tag{XVI.11}$$

а контур C охватывает точку $z=0$; они нашли дифференциальное уравнение и уравнение в конечных разностях, частным решением которых являются многочлены $\{P_n(z)\}_0^\infty$, а также нашли их явное выражение и формулу, аналогичную формуле Родрига; при $m=0$ получим многочлены Бесселя, совпадающие с многочленами $\{P_n^{(k)}(z)\}$ (при $k=1$), рассмотренными Бохнером.

Тот же случай (XVI. 11) рассмотрел Обрешков [2], [3]; он нашел асимптотическую формулу

$$P_n(z) \approx z^n e^{-\frac{1}{2z}}, \qquad |z| > \delta > 0, \tag{XVI.12}$$

для многочленов $\{P_n(z)\}$ и аналогичную формулу для соответствующих функций второго рода; он показал, что всякая функция, регулярная в круге $|z| < r$, может быть разложена в ряд по этим многочленам, равномерно сходящийся при $|z| \leqslant r' < r$.

Сегё только упоминает о многочленах, ортогональных по площади S с весом $n(x)$, т. е. удовлетворяющих условиям

$$\iint_S n(x)\, p_n(x)\, \overline{p_m(x)}\, dS = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n=m, \end{cases} \tag{XVI.13}$$

где x — точка области S, ограниченной контуром C, а dS — элемент площади; исследованию асимптотических свойств систем этих многочленов и их замкнутости посвящено большое количество работ (П. П. Коровкин, А. И. Маркушевич, М. В. Келдыш, А. Л. Шагинян, М. М. Джрбашян и др. [2])).

В том случае, когда C — аналитический контур, Е. А. Синев [2] нашел асимптотическую формулу для этих многочленов внутри области при иных условиях, чем П. П. Коровкин; он определяет вес формулой $n(x)=|\mu(x)|^2$, $x \in S$, где функция $\mu(x)$, регулярная в области S, имеющая в ней конечное число нулей и непрерывная в замкнутой области, определяется из условия на контуре $|\mu(x)|^2=|\nu(x)|^2$, причем функция $\nu(x)$ регулярна и не равна нулю в кольце между C и $C_r (0 < \varrho \leqslant r < 1)$ и $\nu(\infty) > 0$. Он нашел также условие

$$\nu(x)=\text{const.}\, \nu_1(x) \sqrt{\psi'(x)}, \qquad |\psi(x)| > 1, \tag{XVI.14}$$

---

1) См. Я. Л. Геронимус [35*].

2) См. «Математика в СССР за 30 лет», стр. 385—387, «Математика в СССР за 40 лет», стр. 395—396, 441—442, а также нашу книгу [97*] § 39.

необходимое для того, чтобы многочлены $\{p_n(x)\}_0^\infty$ были одновременно ортогональны по области с указанным весом $|\mu(x)|^2$ и по ее контуру с весом $|\nu_1(x)|^2$. Если контуром является окружность, то такая одновременная ортогональность возможна только для системы степеней $\{x^n\}_0^\infty$.

Е. А. Синев [1], [2] исследовал также одновременную ортогональность по контуру и по площади области, а также ортогональность на нескольких областях, ограниченных кривыми C_r, и доказал, что существует только четыре типа многочленов, обладающих этим свойством [1]).

П. К. Суетин [2] рассмотрел случай, когда C — спрямляемая кривая Жордана и $n(x) = |\mu(x)|^2$, $x \in S$, где функция $\mu(x)$ регулярна в области S, не равна нулю и непрерывна в замкнутой области; пусть существует $\mu^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ и пусть функция $\Psi(x)$ $p+2$ раз непрерывно дифференцируема для $x \in S$; при этих условиях для любого замкнутого множества $F \subset S$ справедлива оценка

$$|p_n(x)| \leqslant \frac{C(F)}{n^{p+\alpha}}, \qquad x \in F \quad (n = 1, 2, \ldots); \qquad \text{(XVI.15)}$$

если же функция $\mu(x)$ регулярна в замкнутой области $\bar{S}$, а C — правильная аналитическая кривая, то имеет место оценка

$$|p_n(x)| \leqslant C_1(F)\, q^n, \qquad 0 < q < 1, \qquad x \in F \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad \text{(XVI.16)}$$

[1]) Эти вопросы до Е. А. Синева были рассмотрены Н. Арпьярьяном [1], [2], [3].

ЛИТЕРАТУРА К ДОПОЛНЕНИЯМ

Алексич Г. (Alexits G.)

1. Über die Konvergenz der Orthogonalpolynomenentwicklungen. Acta Math. Acad. sci. hung., 6 (1955), 1—4.

Ангелеско А. (Angelesco A.)

1. Sur certains polynomes genéralisant les polynomes de Laguerre. C. R. Acad. sci Roum., 2 (1938), 199—201.

Аппель П. (Appell P.)

1. Sur une classe de polynomes. Ann. Sci. de l'École Norm. Sup., 9 (1880), 118—144.

Арпьярьян Н. (Arpiarian N.)

1. Polynomes trigonometriques orthogonaux relatifs à une ellipse de foyers (—1,+1). C. R., 219 (1944), 668—669.

2. Sur la suite de fonctions orthogonales par rapport à un ensemble de courbes ou de domains différents. Там же, 226 (1948), 771—772.

3. Orthogonalité sur un domain et sur son contour. Там же, 226 (1948), 865—866.

Ахиезер Н. И.

1. Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах. ДАН СССР, 184 (1960), 9—12.

2. Классическая проблема моментов. Физматгиз, 1961.

3. О полиномах, ортогональных на дуге окружности. ДАН СССР, 130 (1960), 247—250.

Ацел Я. (Aczel J.)

1. Eine Bemerkung über die Charakterisierung der «klassischen» ortogonalen Polynome. Acta math. Acad. sci. hung., 4 (1953), 315—321.

Барков Г. И.

1. О некоторых системах многочленов, ортогональных на двух симметричных интервалах. Изв. высш. учебн. зав., «Математика», № 4 (1960), 3—16.

2. О свойствах некоторых систем ортогональных многочленов. Уч. зап. Челяб. гос. пед. ин-та, 5 (1960), 304—312.

Бренке В. (Brenke W.)

1. On polynomial solutions of a class of linear differential equations of the second order. Bull. Amer. Math. Soc., 36 (1930), 77—84.

Вебстер М. (Webster M.)

1. Orthogonal polynomials with orthogonal derivatives. Bull. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 880—888.

Венцль Ф. (Wenzl F.)

1. Nullstellendichte reeller Polynome und Tschebyscheffsche Approximation. Math. Zeitschr., 59 (1953), 17—39.

Геронимус Я. Л.

1. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. М., 1958.

Данезе А. (Danese A.)

1. Explicit evaluations of Turán expressions. Ann. mat. pura ed appl., 38 (1955), 339—348.

2. Some inequalities involving Hermite polynomials. Amer. Math. Monthly, 64 (1957), 344—346.

Деланж Г. (Delange H.)

1. Sur les suites de polynomes ou de fonctions entières à zéros réels. Ann. sci. École Norm. Sup. (3), 62 (1945), 115—183.

Джексон Д. (Jackson D.)

1. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М., 1948.

Дикинсон Д. (Dickinson D.)

1. On certain polynomials associated with orthogonal polynomials. Boll. Unione mat. ital., 13 (1958), 116—124.

Коркин А. Н. и Золотарев Е. И.
1. Sur un certain minimum. Nouv. Ann. de Math., 1873.
Коровкин П. П.
1. Асимптотическое представление полиномов, минимизирующих интеграл. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Физматгиз, М., 1961, стр. 273—276.
2. Емкость множества и полиномы, минимизирующие интеграл. Зап. Калинингр. пед. ин-та, вып. 5 (1958), 34—52.
Кошмидер Л. (Koschmieder L.)
1. Das Vorzeichen gewisser aus Hermiteschen Polynomen zweiter Art gebildeten Determinanten. Anz. Öster. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl., (1951), 165—167.
Лузин Н. Н.
1. Интеграл и тригонометрический ряд. *Собрание сочинений*, т. I (1953), 98—212.
Марков А. А.
1. О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием. Избр. труды. Гостехиздат, 1948, 146—230.
Мейкснер Дж. (Meixner J.)
1. Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion. Journ. of the London Math. Soc., **9** (1934), 6—12.
Мерли Л. (Merli L.)
1. Sorpa alcune disugualianze riguardamenti i polinomi ultrasferici di Jacobi. Atti IV Congr. Unione Mat. Ital., **2** (1953), 151—155.
2. Una formula di approssimazione asintotica per i polinomi de Tchebyschef—Hermite e valutazione numerica del resto. Atti dei Lincei. Rend. cl. sci. fis., mat. e natur., **16** (1954), 611—614.
Найман П. Б.
1. О множестве изолированных точек роста спектральной функции предельно-постоянной якобиевой матрицы. Изв. вузов, «Математика» (1959), 129—135.
Наньюндиа Т. (Nanjundiah T. S.)
1. A note on an inequality of P. Turán for Legendre polynomials. Half-yearly J. Mysore Univ., Sect. B, N. S. **11** (1950), 57—61.
Натансон Г. И.
1. О некоторых новых применениях метода суммирования Бернштейна—Рогозинского. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, **166** (1958), 185—211.
Нейман Дж. и Рудин У. (Neuman J. and Rudin W.)
1. Mean convergence of orthogonal series. Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1952), 219—222.
Обрешков Н. (Obrechkoff N.)
1. Sur quelques classes de polynomes et de fonctions rationnels. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-math., **33** (1937), 39—161.
2. Sur le développement des fonctions analytiques suivant les polynomes othogonaux. Докл. Бълг. АН, **7** (1954), 5—8.
3. Върху някои ортогонални полиноми в комплексна област. Изв. Мат. ин-та Бълг. АН, **2** (1956), 45—68.
Палама Дж. (Palama G.)
1. Polinomi piu generali di altri classici e dei loro associati e relationi tra essi. Riv. mat. Univ. Parma, **4** (1953), 363—386.
Перрон О. (Perron O.)
1. Die Lehre von den Kettenbrüchen. 2d. ed. Leipzig 1929.
Поллард Х. (Pollard H.)
1. The mean convergence of orthogonal series of polynomials. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **32** (1946), 5—10.
2. The mean convergence of orthogonal series. I — Trans. Amer. Math. Soc., **62** (1947), 387—403. II — Ibidem, **63** (1948), 355—367. III — Duke Math. J., 16 (1949), 189—191.
Поссе К. А.
1. Sur les quadratures. Nouv. Ann. de Math., **14** (1875), 49—62.
Ренвилл Е. (Rainville E.)
1. Symbolic relations among classical polynomials. Amer. Mathem. Monthly, **53** (1946), 299—304.
Сансоне Дж. (Sansone G.)
1. Su una disugualianza di P. Turán relativa ai polinomi di Legendre. Boll. Union. Mat. Ital. **3**, (1949), 221—223.
Сас О. (Szász O.)
1. On an inequality of P. Turán concerning Legendre polynomials. Bull. Amer. Math. Soc., **54** (1948), 401—405.
Састри Б. (Sastry B.)
1. A generalisation of certain properties of Laguerre polynomials. Proc. Edin. Math. Soc., **7** (1945), 83.

Сен Д. и Рангачариар В. (Sen D. and Rangachariar B.)
1. Generalized Jacobi polynomials. Bull. Amer. Math. Soc., **42** (1936), 901—908.
Синев Е. А.
1. Некоторые свойства ортогональных многочленов. Автореферат диссертации (1953).
2. О некоторых свойствах ортогональных многочленов. Изв. вузов, «Математика», 4 (5), (1958), 222—235.
Сонин Н. Я.
1. О приближенном вычислении определенных интегралов и входящих при этом вычислении целых функций. Варш. универ. изв. (1887), 1—76.
Стеклов В. А.
1. Application de la théorie de fermeture à la solution des certains questions qui se rattachent au problème des moments. Зап. Акад. наук, **33**, № 8 (1915), 1—59.
Стилтьес Т.
1. Исследования о непрерывных дробях. Харьков 1936.
Суетин П. К.
1. Некоторые асимптотические свойства многочленов. ДАН СССР, **129** (1959), 30—33.
2. О многочленах, ортогональных на площади. Там же, **126** (1959), 943—945.
Тартлер А. (Tartler A).
1. On a certain class of orthogonal polynomials. Amer. Journ. of Math., **57** (1935), 627—644.
Тоскано Л. (Toscano L.)
1. Una generalizzazione dei polinomi di Laguerre. Giorn. mat. Battaglini, **84** (1956), 123—128.
2. Polinomi associati ai polinomi classici. Riv. mat. Univ. Parma, 4 (1953), 387—402.
Туран П. (Turán P.)
1. On the theory of mechanical quadrature. Acta sci. math., **12**, part A (1950), 30—37.
Уиддер Д. (Widder D.)
1. On application of Laguerre polynomials. Duke Math. Journ., **1** (1935), 126—135.
Успенский Я. (Uspensky J.)
1. Sur les valeurs asymptotiques des coefficients de Cotes. Bull. Amer. Math. Soc., **31** (1925), 145—156.
Фельдгейм Э. (Feldheim E.)
1. Об обобщенных полиномах Лежандра. Изв. АН СССР, 5 (1941), 241—254.
Фольк О. (Volk O.)
1. Über die Entwicklung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen nach Funktionen die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem Parameter genügen. Math. Ann., **86** (1922), 296—316.
Фрайд Г. (Freud G.)
1. Über einen Satz von P. Erdös und P. Turán. Acta Math. Acad. sci. hung., **4** (1953), 255—266.
2. Über orthogonale Polynome. Там же, **5** (1954), 291—298.
3. Über das gliedweise Differenzieren einer orthogonalen Polynomreihe. Там же, **6** (1955), 221—226.
4. Über die Konvergenz von orthogonalen Polynomreihen. Там же, **3** (1952), 89—98.
5. Über die absolute Konvergenz von orthogonalen Polynomreihen. Там же, **4** (1953), 127—135.
6. Über die Lebesgueschen Funktionen der Lagrangeschen Interpolation. Там же, **4** (1953), 137—142.
7. Über orthogonalen Polynome. Там же, **5** (1954), 291—297.
8. Eine Bemerkung zur asymptotischen Darstellung von Orthogonalpolynomen. Math. Scand., 5 (1957), 285—290.
Фрей Т. (Frey T.).
1. Об асимптотическом поведении ортогональных последовательностей полиномов. Матем. сб., **49** (1959), 133—180.
Фудживара М. (Fujiwara M.)
1. Über die Polynome von der kleinsten totalen Schwankung. Tohoku Math. Journ., **3**, (1913), 133.
Хан В. (Hahn W.)
1. Über Orthogonalpolynome die q-Differenzgleichungen genügen. Math. Nachr., **2** (1949), 4—34.
2. Über Orthogonalpolynome mit drei Parametern. Deutsche Math., 5 (1940), 273—278.
Хилле Э. (Hille E.)
1. On the absolute convergence of polynomial series. Amer. Math. Monthly, **45** (1938), 220—226.

Хьюитт Э. (Hewitt E.)

1. Remark on orthogonal sets in $L_2(a, b)$. Amer. Math. Monthly, **61** (1954), 249—250.

Чебышев П. Л.

1. Об интерполировании в случае большого числа данных, доставляемых наблюдениями. *Сочинения* 2, 245—314.

2. О непрерывных дробях. Там же, 103—126.

Шварц Х. (Schwartz H. M.)

1. A class of continued fractions. Duke Math. Journ., **6** (1940), 48—65.

Шерман Я. (Sherman J.)

1. On the numerators of the convergent of the Stieltjes continued fractions. Trans. Amer. Math. Soc., **35** (1933), 64—87.

Шохат Я. (Shohat J.)

1. The relation of the classical orthogonal polynomials to the polynomials of Appell. Amer. Journ. of Math., **58** (1936), 453—464.

2. Théorie genérale des polynomes orthogonaux de Tchebychef. Mémorial des Sciences Mathématiques, **66**, 1934.

3. Application of orthogonal Tchebycheff polynomials to Lagrangean interpolation and to the general theory of polynomials. Ann. di Mat., **18** (1939), 201—238.

4. Sur la convergence des quadratures mécaniques dans un intervalle infini. Applications au problème des moments, au calcul des probabilités. C.R., **186** (1928), 344—346.

Шохат Я. и Шерман Я. (Schohat J. and Sherman J.)

1. On the numerators of the continued fraction $\frac{\lambda_1|}{|x-c_1} - \frac{\lambda_2|}{|x-c_2} - \ldots$ Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **18**, (1932), 283—287.

Шпехт В. (Specht W.)

1. Die Lage der Nullstellen eines Polynoms. Math. Nachr., **15** (1956), 353—374; **16** (1957), 257—263.

Эвейда М. (Eweida M.)

1. On Turan's determinant for Legendre and Laguerre polynomials. Rev. mat. hisp. amer., **15** (1955), 79—87.

2. On an inequality concerning the derivatives of the Legendre polynomials. Там же, **15** (1955), 161—164.

Энгелис Г. К.

1. О полиномах, заданных формулой Родрига. Уч. Зап. Латв. ун-та, т. XX, (1958), 137—143.

Эндль К. (Endl K.)

1. Sur les systèmes de polynomes orthogonaux en involution. C.R., **241** (1955), 682—684.

Эрдёш П. и Туран П. (Erdös, P. and Turan P.)

1. On the uniformly-dense distribution of certain sequences of points. Ann. of Math., **41** (1940), 162—173.

Яхнин Б. М.

1. О функциях Лебега разложений в ряды по полиномам Якоби для случаев $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$; $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$; $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$. Успехи матем. наук, **13** (1958), 207—211.

2. О частных суммах разложения в ряд Фурье по полиномам Якоби функций, принадлежащих классу Lip α. Изв. вузов, «Математика», № 3 (1960), 261—267.

3. Об остаточных членах разложения в ряд Фурье по полиномам Якоби функций, r-я производная которых удовлетворяет условию Липшица. Укр. матем. журнал, **12** (1960), 196—204.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ