В. Серпинский

О решении уравнений в целых числах

ФМ

WACŁAW SIERPIŃSKI

O ROZWIĄZYWANIU RÓWNAŃ W LICZBACH CAŁKOWITYCH

WARSZAWA 1956

В. СЕРПИНСКИЙ

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Перевод с польского

И. Г. МЕЛЬНИКОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

АННОТАЦИЯ

В книге рассматривается решение уравнений в натуральных, целых или рациональных числах. Имея в виду широкий круг читателей, автор подобрал такие уравнения, решение которых удается получить, не прибегая к средствам теории чисел. Впрочем, иногда, чтобы обеспечить систематичность изложения, автор дает краткую информацию о результатах исследований, выполненных при помощи аппарата теории чисел. Наряду с классическими задачами в книгу вошли многие задачи, рассмотренные за последние 20—30 лет.

Книга может быть использована учащимися старших классов средней школы, имеющими склонность к математике, студентами и учителями. Последние найдут в этой книге большой материал для занятий математического кружка.

Вацлав Серпинский

О решении уравнений в целых числах

Редактор *Г. П. Акилов*

Техн. редактор *А. А. Лукьянов* Корректор *В. С. Иванова*

Сдано в набор 28/IV 1961 г. Подписано к печати 1/VII 1961 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 2,75 Усл. печ. л. 4,51 Уч. изд. л. 3,10
Тираж 30 000 экз. Цена книги 9 коп. Заказ № 2488

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

В этой книге выдающегося польского математика Вацлава Серпинского рассматриваются уравнения и системы уравнений с целыми коэффициентами, которые нужно решить в натуральных, целых или рациональных числах. Некоторые простейшие виды таких уравнений были рассмотрены знаменитыми математиками древности Пифагором (VI в. до н. э.) и Диофантом (III в. н. э.). В память о последнем эти уравнения называются диофантовыми. Диофантовы уравнения во все времена привлекали внимание математиков. Ими занимались классики математики: П. Ферма (1601—1665), Л. Эйлер (1707—1783), Ж. Л. Лагранж (1736—1813). К. Ф. Гаусс (1777—1855), П. Л. Чебышев (1821—1894) и др. Им уделяют внимание и многие выдающиеся математики современности. Большой и важный вклад в теорию диофантовых уравнений внесли советские математики.

Систематическое изучение диофантовых уравнений („диофантов анализ") требует от читателя весьма серьезной подготовки в области теории чисел. Уравнения, рассматриваемые в данной книге, как правило, решаются элементарно, т. е. не предполагают у читателя специальных знаний по теории чисел. Такой *элементарный диофантов анализ*, выражаясь словами Л. Эйлера, „немало служит к изощрению разума начинающих и большое проворство в исчислении приносит". Воспитательное значение его бесспорно. Задачи из этой области обычно требуют от читателя большой изобретательности и способствуют приобретению навыков самостоятельной работы в математике.

Следует заметить, что вообще диофантов анализ имеет большое теоретическое значение, поскольку многие его задачи тесно связаны с важнейшими вопросами теории чисел, а в последнее время он получает и прикладное значение, поскольку некоторые проблемы физики и механики приводят к диофантовым уравнениям.

Книга В. Серпинского довольно широко охватывает вопрос о решении диофантовых уравнений. В ней подобраны такие уравнения и системы уравнений, решение которых удается получить, не прибегая к средствам теории чисел. Впрочем, чтобы обеспечить систематичность изложения, автор довольно часто дает информацию о результатах исследований, выполненных при помощи аппарата теории чисел. В таких случаях изложение, естественно, принимает реферативный характер. Наряду с классическими задачами в книгу вошли многие задачи, рассмотренные за последние 20—30 лет. Эта книга по существу является популярной монографией по диофантову анализу. С интересом и пользой ее будут читать учащиеся старших классов средней школы, имеющие склонность к математике, студенты и учителя. Последние найдут в этой книге большой материал для занятий математического кружка.

Книга В. Серпинского вышла в Варшаве в 1956 г. Некоторые из сообщаемых в ней сведений немного устарели, иные же можно было бы несколько дополнить. Автор проявил большую заботу о настоящем издании, прислав мне все необходимые изменения и дополнения к тексту книги. Все они в этой книге учтены.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность члену-корреспонденту Академии наук СССР Ю. В. Linнику, поддержавшему мое предложение о переводе книги В. Серпинского на русский язык. Я благодарен также редактору книги Г. П. Акилову, ценные указания которого были учтены мною при окончательной подготовке рукописи перевода к печати.

И. Мельников

§ 1. Уравнения любой степени с одним неизвестным

Решение уравнений в целых числах является одним из важнейших разделов теории чисел.

Начнем с уравнения с одним неизвестным. Пусть дано уравнение

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0, \qquad (1)$$

где m — натуральное число, $a_0, a_1, \ldots, a_m$ — целые числа, причем $a_m \neq 0$. Если целое число x удовлетворяет уравнению (1), то имеем:

$$(a_0x^{m-1} + a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1})\, x = -a_m,$$

откуда следует, что число x должно быть делителем числа a_m. Так как целое число $a_m \neq 0$ имеет конечное число делителей, то все решения уравнения (1) в целых числах x можно найти при помощи конечного числа проб, а именно, подставляя в уравнение (1) поочередно все делители числа a_m (как положительные, так и отрицательные) и выбирая среди них те, которые удовлетворяют нашему уравнению.

Если бы $a_m = 0$, то, очевидно, одним из решений нашего уравнения было бы $x = 0$, а для отыскания других его решений имели бы уравнение

$$a_0x^{m-1} + a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-2}x + a_{m-1} = 0,$$

с которым в случае $a_{m-1} \neq 0$ мы поступили бы так же, как прежде с уравнением (1), в случае же $a_{m-1} = 0$ получили бы уравнение степени $m - 2$ и т. д.

Примеры. Найдем в целых числах все решения уравнения

$$x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 15x^2 + 2x - 10 = 0.$$

Так как число —10 имеет делителями только числа 1, 2, 5, 10, а также —1, —2, —5, —10, то мы должны вместо x

подставлять в наше уравнение поочередно каждое из этих восьми чисел. Нетрудно убедиться, что из них только числа 1, 5, —1 удовлетворяют уравнению; следовательно, они дают все решения нашего уравнения в целых числах.

В качестве второго примера возьмем уравнение

$$x^8+x^7+x+1=0.$$

Здесь мы должны вместо x подставлять в уравнение только делители числа 1, т. е. числа 1 и —1. Таким образом, устанавливаем, что только число —1 является решением нашего уравнения в целых числах.

Итак, нахождение всех целых чисел, являющихся корнями данного многочлена с целыми коэффициентами, даже для многочленов высших степеней не представляет трудностей, за исключением разве технических; здесь дело обстоит значительно проще, чем в алгебре, где решается задача нахождения всех корней данного многочлена.

§ 2. Линейные уравнения с любым числом неизвестных

Перейдем теперь к уравнению с более чем одним неизвестным и начнем с так называемых *линейных уравнений*, т. е. уравнений вида

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m=b, \tag{2}$$

где m — натуральное число, бóльшее 1, a_1, a_2, ..., a_m и b — данные целые числа. Прежде всего заметим, что в уравнении (2) все коэффициенты a_1, a_2, ..., a_m можно предполагать натуральными, так как члены с коэффициентами, равными нулю, можно отбросить, а отрицательный коэффициент можно заменить равным ему по абсолютной величине положительным коэффициентом, изменив при этом знак у неизвестного. Если бы два из коэффициентов a_1, a_2, ..., a_m были равны, например $a_1=a_2$, то, положив $x_1+x_2=x$, мы вместо уравнения (2) получили бы уравнение

$$a_1x+a_3x_3+a_4x_4+\ldots+a_mx_m=b. \tag{3}$$

Если примем $x=x_1+x_2$, то из каждого решения уравнения (2) в целых числах x_1, x_2, ..., x_m получим решение уравнения (3) в целых числах x, x_3, x_4, ..., x_m, а из каждого решения уравнения (3) в целых числах

$x, x_3, x_4, \ldots, x_m$, приняв за x_1 любое целое число и положив $x_2 = x - x_1$, получим решение уравнения (2) в целых числах $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Итак, задача нахождения всех решений в целых числах уравнения (2) сводится к задаче нахождения всех решений в целых числах уравнения (3) с меньшим числом неизвестных. Если бы здесь еще было $a_1 = a_3$, или если бы какие-нибудь другие два коэффициента при неизвестных были равны, то уравнение (2) можно было бы свести к уравнению с менее чем $m - 1$ неизвестными.

Таким образом, далее можно предполагать, что коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_m$ уравнения (2) суть числа натуральные и все различные. Одно из них, например a_1, есть наибольшее, в частности $a_1 > a_2$. Предположим, что число a_1 при делении на a_2 дает в частном целое число k и в остатке a_2', так что $a_1 = a_2 k + a_2'$, где k есть натуральное число, a_2'—такое целое число, что $0 < a_2' < a_2$. Примем $x_1' = kx_1 + x_2$, $x_2' = x_1$, $a_1' = a_2$. Тогда $a_1x_1 + a_2x_2 = a_2(kx_1 + x_2) + a_2'x_1 = a_1'x_1' + a_2'x_2'$ и уравнение (2) перейдет в уравнение

$$a_1'x_1' + a_2'x_2' + a_3x_3 + \ldots + a_mx_m = b. \qquad (4)$$

Если примем $x_1' = kx_1 + x_2$, $x_2' = x_1$, то из каждого решения уравнения (2) в целых числах $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ получим решение в целых числах $x_1', x_2', x_3, \ldots, x_m$ уравнения (4). Обратно, если положим $x_1 = x_2'$, $x_2 = x_1' - kx_1$, то из каждого решения в целых числах $x_1', x_2', x_3, \ldots, x_m$ уравнения (4) получим решение в целых числах $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ уравнения (2).

Таким образом, решение уравнения (2) в целых числах сводится к решению в целых числах уравнения (4), в котором наибольший из коэффициентов при неизвестных (учитывая, что $a_1' = a_2 < a_1$) меньше, чем наибольший из коэффициентов при неизвестных в уравнении (2). Далее, аналогичным образом из уравнения (4) можно получить уравнение, в котором наибольший из коэффициентов будет меньше, чем наибольший из коэффициентов уравнения (4) и т. д.

Так как последовательность убывающих натуральных чисел не может быть бесконечной, то, пользуясь указанным приемом, придем либо к уравнению с одним неизвестным, решение которого не вызывает затруднений, либо к уравнению, в котором все коэффициенты при неизвестных равны, например к уравнению

$$cy_1+cy_2+\ldots+cy_k=b.$$

Из этого уравнения следует, что свободный член b будет делиться на c *). Если бы это условие не выполнялось, то тогда уравнение это, а, следовательно, и уравнение (2) не имело бы решений в целых числах. Если b при делении на c дает в частном целое d, то получаем уравнение $y_1+y_2+\ldots+y_k=d$, все решения которого в целых числах находим, полагая $y_2, y_3, \ldots, y_k$ равными любым целым числам и принимая $y_1=d-y_2-y_3-\ldots-y_k$ **).

Пример. Указанным выше способом найдем в целых числах x, y, z все решения уравнения

$$6x+10y-7z=11. \tag{5}$$

Принимая $z'=-z$, получаем уравнение $6x+10y+7z'=11$. Учитывая, что $10=7+3$, получаем $6x+7(y+z')+3y=11$ и, полагая $y+z'=t$, получаем уравнение $6x+7t+3y=11$. Теперь, учитывая, что $7=6+1$, получаем $6(x+t)+t+ +3y=11$ и, полагая $x+t=u$, получаем уравнение $6u+t+3y=11$. Все решения в целых числах u, t, y этого уравнения получаем, если для y и u будем назначать любые целые числа и примем $t=11-3y-6u$. А так как $x+t=u$, то имеем $x=u-t=3y+7u-11$ и далее, так как $z'=-z$ и $y+z'=t$, то находим $z=y-t=4y+6u-11$.

Все решения уравнения (5) в целых числах x, y, z содержатся в формулах

$$x=3y+7u-11, \quad z=4y+6u-11,$$

где y и u — любые целые числа. Действительно,

$$6(3y+7u-11)+10y-7(4y+6u-11)=11.$$

*) Здесь автор молчаливо предполагает, что уравнение (2), а, значит, и уравнение $cy_1+cy_2+\ldots+cy_k=b$ разрешимо в целых числах. (*Прим. перев.*)

**) Это рассуждение имеет в основном теоретическое значение. На практике, при отыскании целочисленных решений уравнения (2), указанный прием применяется до тех пор, пока не получится уравнение, в котором хотя бы при одном неизвестном будет коэффициент, равный единице. Предлагаемое автором ниже решение уравнения (5) может служить иллюстрацией к этому замечанию. (*Прим. перев.*)

Легко также доказать, что если уравнение (2) имеет решение в целых числах, то таких решений (в случае $m > 1$) оно имеет бесконечное множество. Действительно, если существуют целые числа $y_1, y_2, \ldots, y_m$ такие, что

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_my_m = b,$$

то, полагая $x_i = y_i + a_mt_i$ для $i = 1, 2, \ldots, m-1$, а $x_m = y_m - a_1t_1 - \ldots - a_{m-1}t_{m-1}$, где $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ — произвольные целые числа, получаем, как легко проверить, целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, удовлетворяющие уравнению (2).

Необходимое условие разрешимости уравнения (2) в целых числах состоит в том, чтобы свободный член b делился на наибольший общий делитель d коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ при неизвестных. Действительно, если некоторые целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ удовлетворяют уравнению (2), то d будет делителем каждого произведения $a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_mx_m$ и, следовательно, делителем их суммы b.

Докажем теперь, что это условие является также и достаточным, т. е. если b делится на наибольший общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то существуют целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, удовлетворяющие уравнению (2).

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — целые числа, среди которых по крайней мере одно, например a_1, отлично от нуля. Обозначим через D множество натуральных чисел, определяемое следующим образом. Натуральное число n относим к множеству D тогда и только тогда, когда существуют целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ такие, что

$$n = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m. \tag{6}$$

Множество D непустое (т. е. оно содержит по крайней мере одно число), так как $a_1 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_m \cdot 0$ и $-a_1 = a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_m \cdot 0$ и одно из этих чисел, именно то, которое является натуральным, принадлежит множеству D. Обозначим через d наименьшее натуральное число, принадлежащее множеству D. (Такое число существует, так как в каждом непустом множестве натуральных чисел существует наименьшее число.) Так как число d принадлежит множеству D, то из определения этого множества вытекает, что существуют целые числа $t_1, t_2, \ldots, t_m$ такие, что

$$d = a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_mt_m. \tag{7}$$

Но d есть наименьшее число множества D, поэтому для каждого натурального числа n вида (6) имеет место неравенство $n \geqslant d$. Покажем, что число $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m$ при всяких целых $x_1, x_2, \ldots, x_m$ делится на d.

Допустим противное, т. е. что при некоторых целых $y_1, y_2, \ldots, y_m$ число $a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_my_m$ при делении на d дает в частном целое k и положительный остаток r. Тогда имеем $a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_my_m=kd+r$, откуда в силу (7), $r=a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_my_m-k(a_1t_1+a_2t_2+\ldots$ $\ldots+a_mt_m)=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m$, где $x_i=y_i-kt_i$ для $i=1, 2, \ldots, m$ суть целые числа. Натуральное число r имеет форму (6) и поэтому мы заключаем, что оно принадлежит множеству D. Но r, как остаток от деления на d, меньше d; таким образом, возникает противоречие, так как d есть наименьшее число множества D.

Итак, доказано, что число $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m$ при любых целых $x_1, x_2, \ldots, x_m$ делится на d, а отсюда, в частности, для $k=1, 2, \ldots, m$, $x_k=1$, $x_i=0$ для $i \neq k$ следует, что число a_k делится на d. Таким образом, d есть общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Пусть теперь δ обозначает любой общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Тогда существуют целые числа $z_1, z_2, \ldots, z_m$ такие, что $a_i=\delta z_i$ для $i=1, 2, \ldots, m$. Отсюда, согласно (7), $d=a_1t_1+a_2t_2+\ldots+a_mt_m=(t_1z_1+t_2z_2+\ldots+t_mz_m)\delta$ и, значит, δ есть делитель числа d. Итак, общий делитель d чисел $a_1, a_2, \ldots a_m$ делится на каждый общий делитель этих чисел, следовательно, это их наибольший общий делитель.

Таким образом, мы доказали, что если d есть наибольший общий делитель целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$, из которых по крайней мере одно отлично от нуля, то существуют целые числа $t_1, t_2, \ldots, t_m$, удовлетворяющие соотношению (7).

Предположим теперь, что $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и b — целые числа, причем среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ по крайней мере одно отлично от нуля, предположим также, что число b делится на наибольший общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$, так что $b=kd$, где k есть целое число. Пусть $x_i=kt_i$ для $i=1, 2, \ldots, m$; так как $kd=b$, то на основании (7) получаем (2).

Итак, доказано, что если $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и b — целые числа, причем среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ по крайней мере одно отлично от нуля, то для разрешимости уравнения (2) в целых числах $x_1, x_2, \ldots, x_m$, необходимо и достаточно, чтобы свободный член b делился на наибольший общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Пусть теперь даны натуральные числа a, b, c и допустим, что уравнение

$$ax - by = c \tag{8}$$

разрешимо в целых числах x, y и, следовательно, что c делится на наибольший общий делитель d чисел a и b.

Если x_0, y_0 есть решение нашего уравнения в целых числах, то при любом целом k имеем

$$a(x_0 + kb) - b(y_0 + ka) = c.$$

Поскольку a и b натуральные числа, то для достаточно больших k

$$x = x_0 + kb \quad \text{и} \quad y = y_0 + ka$$

являются натуральными числами, причем $ax - by = c$.

Таким образом, доказано, что если уравнение (8), где a, b, c — натуральные числа, разрешимо в целых числах x, y, то оно имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y.

Иначе обстоит дело с уравнением

$$ax + by = c, \tag{9}$$

где a, b, c — натуральные числа. Допустим, что это уравнение разрешимо в целых числах x, y и, значит, c делится на наибольший общий делитель d чисел a и b.

Разделив числа a, b и c на d, получим из уравнения (9) новое уравнение, в котором коэффициенты при неизвестных будут взаимно простыми. Допустим теперь, что в уравнении (9) коэффициенты a и b взаимно простые.

Если $c = ab$, то уравнение (9) не имеет решений в натуральных числах x, y, так как в противном случае было бы $ax + by = ab$ и, значит, $ax = b(a - y)$, а так как числа a и b взаимно простые, то отсюда следовало бы, что x делится на b и, значит, $x \geqslant b$, откуда $ax + by > ax \geqslant ab$, вопреки тому, что $ax + by = ab$.

Докажем, что уравнение (9) разрешимо в натуральных числах x, y для каждого натурального $c > ab$.

Допустим, что a и b — натуральные взаимно простые числа и пусть c — натуральное число $> ab$. Как было уже доказано выше, существуют натуральные числа u и v такие, что $au - bv = c > ab$, откуда $\frac{u}{b} - \frac{v}{a} > 1$ и поэтому существует такое целое число t, что $\frac{v}{a} < t < \frac{u}{b}$ (таковым является наибольшее целое число t, меньшее чем $\frac{u}{b}$). Пусть $x = u - bt$, $y = at - v$; эти числа целые, причем $x > 0$, $y > 0$. Следовательно, x и y — натуральные числа и имеем

$$ax + by = a(u - bt) + b(at - v) = au - bv = c,$$

что и требовалось доказать.

Одновременно мы доказали, что если a и b — натуральные взаимно простые числа, то каждое натуральное число, бо́льшее ab, может быть представлено в форме $ax + by$, где x и y — натуральные числа.

Вообще можно доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и b — натуральные числа и число b делится на наибольший общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то для достаточно больших b уравнение (2) разрешимо в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (число решений этого уравнения в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_m$, очевидно, для каждого натурального b конечно ($\geqslant 0$), так как должно быть $x_i \leqslant b$ для $i = 1, 2, \ldots, m$).

Отсюда, в частности, следует, что если $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — натуральные числа, не имеющие общего делителя, большего единицы, то каждое достаточно большое натуральное число можно представить в форме $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m$, где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — натуральные числа.

§ 3. Китайская теорема об остатках

Если m — натуральное число $\geqslant 2$ и $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — натуральные числа, каждые два из которых взаимно просты, $r_1, r_2, \ldots, r_m$ — произвольные целые числа, то существуют целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, удовлетворяющие системе уравнений

$$a_1x_1 + r_1 = a_2x_2 + r_2 = \ldots = a_mx_m + r_m. \tag{10}$$

Доказательство. Для $m = 2$ теорема верна, так как уравнение $a_1x - a_2y = r_2 - r_1$, если числа a_1 и a_2 взаимно просты, разрешимо в целых числах x и y.

Предположим теперь, что теорема верна для некоторого натурального $m \geqslant 2$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}$ — натуральные числа, из которых каждые два взаимно просты, r_1, $r_2, \ldots, r_m, r_{m+1}$ — произвольные целые числа. Из предположения, что теорема верна для числа m, следует, что существуют целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ такие, что имеют место равенства (10). Так как каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ взаимно просто с a_{m+1}, то их произведение $a_1a_2 \ldots a_m$ взаимно просто с a_{m+1}, и поэтому существуют целые числа t и u, удовлетворяющие уравнению

$$a_1a_2 \ldots a_mt - a_{m+1}u = r_{m+1} - a_1x_1 - r_1.$$

Примем теперь

$$x'_i = \frac{a_1a_2 \ldots a_m}{a_i}t + x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad x'_{m+1} = u.$$

Числа $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{m+1}$ — целые, причем легко проверить, что

$$a_1x'_1 + r_1 = a_2x'_2 + r_2 = \ldots = a_{m+1}x'_{m+1} + r_{m+1}.$$

Итак, доказательство нашей теоремы получается посредством индукции.

Из доказанной теоремы следует, что если каждые два из $m \geqslant 2$ натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ взаимно просты, то существует целое число, которое при делении на эти числа дает любые заданные остатки $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Последним обстоятельством объясняется название теоремы *). Так как это целое число можно увеличить на любое кратное числа $a_1a_2 \ldots a_m$, то существует бесконечное множество натуральных чисел, дающих при делении на $a_1, a_2, \ldots, a_m$ соответственно остатки $r_1, r_2, \ldots, r_m$.

§ 4. Уравнения второй степени с двумя неизвестными

Перейдем теперь к уравнениям с двумя неизвестными. Можно легко указать примеры уравнений второй степени с двумя неизвестными и с целыми коэффициентами, которые не имеют никакого решения в целых числах, например

*) Заметим, что уже не позднее III в. китайцы, по существу, владели этой теоремой. См. А. П. Юшкевич, О достижениях китайских ученых в области математики. Историко-математические исследования, вып. 8, стр. 556, Гостехиздат, 1955. (*Прим. перев.*)

уравнение $x^2+y^2-3=0$. Легко также указать пример уравнения, имеющего конечное число решений в целых числах. Например, уравнение

$$x^2+y^2-65=0$$

имеет только шестнадцать решений в целых числах, именно:

$$\begin{array}{llll} (1,\ 8), & (-1,\ 8), & (1,\ -8), & (-1,\ -8), \\ (8,\ 1), & (8,\ -1), & (-8,\ 1), & (-8,\ -1), \\ (4,\ 7), & (-4,\ 7), & (4,\ -7), & (-4,\ -7), \\ (7,\ 4), & (7,\ -4), & (-7,\ 4), & (-7,\ -4). \end{array}$$

Легко исследовать, для каких целых чисел k уравнение

$$x^2-y^2=k$$

имеет решение в целых числах x, y. Оказывается, для того, чтобы это уравнение имело по крайней мере одно решение в целых числах x, y, необходимо и достаточно, чтобы число k при делении на 4 не давало в остатке 2.

В самом деле, если существуют целые числа x, y такие, что $x^2-y^2=k$ и если оба числа x и y — четные, то, очевидно, числа x^2 и y^2 делятся на 4 и, следовательно, их разность k делится на 4.

Если какое-нибудь одно из чисел x и y четное, а другое нечетное, то число x^2-y^2, а значит и число k нечетное.

Наконец, если оба числа x и y — нечетные, то, поскольку квадрат нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1, заключаем, что число x^2-y^2, а значит и число k делится на 4. Итак, ни в одном случае (когда наше уравнение разрешимо в целых числах x, y) число k при делении на 4 не дает в остатке 2. Таким образом, условие наше является необходимым.

Предположим теперь, что целое число k при делении на 4 не дает в остатке 2. Тогда, если k — четное число, то оно делится на 4 и число $\frac{k}{4}$ есть целое. Таким образом, числа $x=\frac{k}{4}+1$ и $y=\frac{k}{4}-1$ суть целые и, как легко проверить, удовлетворяют нашему уравнению.

Если же число k нечетное, то имеем $k=2l+1$, где l — целое число. Числа $x=l+1$, $y=l$, стало быть, целые и, как легко проверить, удовлетворяют нашему уравнению. Итак, условие наше является достаточным.

Легко доказать, что для каждого целого k уравнение $x^2 - y^2 = k$ имеет лишь конечное ($\geqslant 0$) число решений в целых числах x, y.

Очевидно, достаточно это доказать для натуральных k и для решений в натуральных числах x и y. Если натуральные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^2 - y^2 = k$, где k — натуральное число, то $x > y$, откуда $x - y \geqslant 1$ и имеем $(x - y)(x + y) = k$, что дает $x + y \leqslant k$ и, следовательно, $x < k$ и $y < k$; но число систем натуральных чисел x, y, удовлетворяющих двум последним неравенствам, равно, очевидно, $(k - 1)^2$ и, следовательно, является конечным.

Однако же для любого натурального числа m существуют такие натуральные числа k, для которых уравнение $x^2 - y^2 = k$ имеет не менее чем m различных решений в натуральных числах x, y.

Например, для $k = 2^{2m+2}$ числа

$$x_i = 2^{2m-i} + 2^i, \quad y_i = 2^{2m-i} - 2^i \quad (i = 0, 1, \ldots, m - 1)$$

суть натуральные и удовлетворяют уравнению $x^2 - y^2 = k$, причем числа x_i $(i = 0, 1, \ldots, m - 1)$ все различные.

Труднее исследовать вопрос, для каких натуральных k уравнение

$$x^2 + y^2 = k$$

имеет хотя бы одно решение в целых числах x, y. Отметим без доказательства, что уравнение $x^2 + y^2 = k$ имеет по меньшей мере одно решение в целых числах x, y тогда и только тогда, когда частное от деления натурального числа k на наибольший квадрат не имеет ни одного натурального делителя, который при делении на 4 давал бы в остатке 3.

Поэтому, например, уравнение $x^2 + y^2 = k$ разрешимо в целых числах x, y для $k = 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10$, но неразрешимо для $k = 3, 7$.

Разумеется, для каждого целого числа k уравнение $x^2 + y^2 = k$ имеет конечное ($\geqslant 0$) число решений в целых числах x, y.

Еще труднее установить необходимое и достаточное условие того, чтобы для данного натурального числа k уравнение $x^2 + y^2 = k$ имело бы по меньшей мере одно решение в натуральных числах x, y. Это условие состоит в том, чтобы уравнение $x^2 + y^2 = k$ было разрешимо в целых числах x, y (для чего должно выполняться условие, указанное выше) и чтобы либо число k имело хотя бы один простой делитель, дающий при делении на 4 в остатке 1, либо чтобы показатель наивысшей степени числа 2, делящей число k, был нечетный.

Например, это уравнение разрешимо в натуральных числах x, y для $k=2$, 5, 8, 10, но неразрешимо в этих числах для $k=1$, 3, 4, 6, 7, 9.

Отсюда легко следует, что для того чтобы уравнение $x^2+y^2=k^2$, где k — натуральное число, имело хотя бы одно решение в натуральных числах x, y, необходимо и достаточно, чтобы число k имело по меньшей мере один простой делитель вида $4t+1$, где t — целое число. В этом состоит необходимое и достаточное условие существования (хотя бы одного) пифагорова треугольника с гипотенузой k.

Можно доказать, что уравнение

$$(x+y-2)(x+y-1)+2y=2k$$

имеет для каждого натурального k одно и только одно решение в натуральных числах x и y.

Если уравнение $f(x, y)=0$, где $f(x, y)$ — многочлен с целыми коэффициентами, имеет решение в целых числах x, y, то, очевидно, для каждого натурального числа m существуют целые числа x, y, при которых число $f(x, y)$ делится на m. Отсюда следует, что если существует натуральное число m такое, что ни для одной системы чисел x, y, где $x=0, 1, 2, \ldots, m-1$, $y=0, 1, 2, \ldots, m-1$ число $f(x, y)$ не делится на m, то уравнение $f(x, y)=0$ не имеет решений в целых числах.

Например, доказательство того, что для натурального n уравнение

$$x^2+1-3y^n=0$$

не имеет решений в целых числах, можно провести посредством проверки, показав, что для $x=0$, 1, 2 и для любого целого y число x^2+1-3y^n или, что то же самое, число x^2+1 не делится на 3 (действительно: $0^2+1=1$, $1^2+1=2$, $2^2+1=5$).

Однако не для каждого многочлена с целыми коэффициентами, для которого уравнение $f(x, y)=0$ не разрешимо в целых числах x, y, существует натуральное число m такое, что ни для какой системы целых чисел x, y число $f(x, y)$ не делится на m.

В самом деле, уравнение

$$(2x-1)(3y-1)=0,$$

очевидно, не имеет решений в целых числах x, y. С другой стороны, если m есть натуральное число, то, как известно, m можно представить в форме $m=2^{k-1}(2x-1)$, где k и x — натуральные числа. Число $2^{2k+1}+1$ делится на $2+1=3$, поэтому существует такое натуральное число y, что $2^{2k+1}+1=3y$. Итак, имеем $(2x-1)(3y-1)=2^{k+2}m$, откуда видно, что число $(2x-1)(3y-1)$ делится на m.

А. Шинцель обнаружил, что для каждого натурального числа m существует целое число x из последовательности $0, 1, 2, \ldots, m-1$ такое, что число $(2x-1)(3x-1)$ делится на m, хотя уравнение $(2x-1)(3x-1)=0$ и не имеет ни одного целого корня.

§ 5. Уравнение $x^2+x-2y^2=0$

Докажем, что уравнение $x^2+x-2y^2=0$ имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y.

Для этой цели достаточно заметить, что $x=1$, $y=1$ есть решение этого уравнения и, что если (x, y) — его решение, то (u, v), где $u=3x+4y+1$, $v=2x+3y+1$, также есть решение этого уравнения. Потому что, как легко подсчитать, имеем

$$u^2+u-2v^2=(3x+4y+1)(3x+4y+2)-$$
$$-2(2x+3y+1)^2=x^2+x-2y^2.$$

Предположим, что (x, y) есть решение уравнения

$$x^2+x-2y^2=0 \tag{11}$$

в натуральных числах, причем $x>1$ и, следовательно, как это вытекает из (11), $y>1$.

Покажем, что тогда

$$3x-4y+1>0,\quad 3y-2x-1>0,\quad 2x-4y+1<0. \tag{12}$$

Если бы было $4y \geqslant 3x+1$, то мы имели бы $16y^2 \geqslant 9x^2+6x+1$, а так как, в силу (11), $16y^2=8x^2+8x$, то было бы $2x \geqslant x^2+1$, что дает $(x-1)^2 \leqslant 0$ и, следовательно, $x=1$, а это противоречит предположению. Итак, первое из неравенств (12) доказано.

Если бы было $3y \leqslant 2x+1$, то мы имели бы $9y^2 \leqslant 4x^2+4x+1$, а так как, в силу (11), $4x^2+4x=8y^2$, то было бы $y^2 \leqslant 1$, что исключено, так как $y>1$. Итак, доказано и второе из неравенств (12), из которого уже непосредственно вытекает третье.

Таким образом, неравенства (12) верны (при условии, что (x, y) есть решение уравнения (11) в натуральных числах и, что $x > 1$).

Положим теперь

$$\xi = 3x - 4y + 1, \qquad \eta = 3y - 2x - 1; \tag{13}$$

на основании (12) заключаем, что ξ и η суть натуральные числа, причем $\xi - x = 2x - 4y + 1 < 0$ и, следовательно, $\xi < x$. Принимая во внимание (13), получаем равенство

$$\xi^2 + \xi - 2\eta^2 = (3x - 4y + 1)(3x - 4y + 2) - \\ - 2(3y - 2x - 1)^2 = x^2 + x - 2y^2,$$

следовательно, учитывая (11), имеем $\xi^2 + \xi - 2\eta^2 = 0$, а это означает, что система (ξ, η) есть решение уравнения (11).

Положим далее

$$g(x, y) = (3x - 4y + 1, \ 3y - 2x - 1), \tag{14}$$

т. е. каждой точке плоскости с координатами x, y приведем в соответствие точку той же плоскости с координатами $3x - 4y + 1, \ 3y - 2x - 1$.

Итак, если (x, y) есть решение уравнения (11) в натуральных числах x, y, где $x > 1$, то $(\xi, \eta) = g(x, y)$ также есть решение уравнения (11) в натуральных числах ξ, η, где $\xi < x$. Если $\xi > 1$, то подобным же образом, исходя из решения (ξ, η), получим новое решение $(\xi_1, \eta_1) = g(\xi, \eta) = g(g(x, y)) = g_2(x, y)$ в натуральных числах ξ_1, η_1, где $\xi_1 < \xi$ и т. д. Введя обозначение $g_{k+1}(x, y) = g(g_k(x, y))$, мы получим таким образом последовательность решений $g(x, y), g_2(x, y), g_3(x, y), \ldots$ уравнения (11) во все меньших натуральных числах. А так как последовательность убывающих натуральных чисел > 1 не может быть бесконечной, то при некотором натуральном n получим решение $(u, v) = g_n(x, y)$, в котором $u = 1$, т. е. дойдем до решения $(u, v) = (1, 1)$.

Итак, если (x, y) есть произвольное решение уравнения (11) в натуральных числах, где $x > 1$, то существует натуральное число n такое, что

$$g_n(x, y) = (1, 1). \tag{15}$$

Примем

$$f(x, y)=(3x+4y+1,\ 2x+3y+1); \qquad (16)$$

легко проверить, что

$$f(g(x, y))=(3(3x-4y+1)+4(3y-2x-1)+1,$$
$$2(3x-4y+1)+3(3y-2x-1)+1)=(x, y),$$

откуда при помоши индукции легко находим, что

$$f_n g_n(x, y)=(x, y) \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Следовательно, на основании (15), получим

$$(x, y)=f_n(1, 1).$$

С другой стороны, если примем

$$u=3x+4y+1, \qquad v=2x+3y+1,$$

то, как мы уже видели, $u^2+u-2v^2=x^2+x-2y^2$, откуда следует, что если (x, y) — решение уравнения (11) в натуральных числах, то $(u, v)=f(x, y)$ также — решение уравнения (11) в натуральных числах (ввиду (16) соответственно бо́льших, чем x и y).

Учитывая полученные выше результаты, заключаем, что все решения (11) в натуральных числах x, y и только такие решения этого уравнения содержатся в бесконечной последовательности

$$(1, 1),\ f(1, 1),\ ff(1, 1),\ fff(1, 1), \ldots$$

Примем $x_1=y_1=1$, $(x_n, y_n)=f_{n-1}(1, 1)$ для $n=2$, $3, \ldots$; тогда $(x_{n+1}, y_{n+1})=f(x_n, y_n)$ для $n=1, 2, \ldots$ и, согласно (16), имеем формулы

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=3x_n+4y_n+1,\\ y_{n+1}&=2x_n+3y_n+1 \end{aligned} \qquad (n=1, 2, \ldots). \qquad (17)$$

Итак, доказано, что все решения уравнения (11) в натуральных числах содержатся в бесконечной последовательности $\{x_n, y_n\}$ для $n=1, 2, \ldots$, где $x_1=y_1=1$ и где для $n=1, 2, \ldots$ имеют место формулы (17). Эти формулы позволяют легко вычислять последовательно решения уравнения (11).

Например, для $n=1$ формулы (17) дают $x_2=3+4+1=8$, $y_2=2+3+1=6$; откуда далее для $n=2$: $x_3=3\cdot 8+4\cdot 6+1=49$, $y_3=2\cdot 8+3\cdot 6+1=35$, откуда для $n=3$: $x_4=3\cdot49+4\cdot35+1=288$, $y_4=$ $=2\cdot49+3\cdot35+1=204$ и т. д.

Число $\frac{n(n+1)}{2}$, где n — натуральное число, называется *n-м треугольным числом* и обозначается через t_n.

Уравнение (11) можно записать в форме:

$$t_x=y^2.$$

Следовательно, оно определяет все квадратные числа y^2, которые одновременно являются треугольными. Указанные выше формулы позволяют последовательно находить все такие числа. Исключая x_n и x_{n+1} из формул (17) и вытекающей из них формулы $y_{n+2}=2x_{n+1}+3y_{n+1}+1$, получим формулу

$$y_{n+2}=6y_{n+1}-y_n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

при помощи которой, зная $y_1=1$ и $y_2=6$, можно вычислять последовательно числа y_n для $n=3,\ 4,\ \ldots$

Таким образом, все квадратные числа, являющиеся одновременно треугольными, получаем как квадраты чисел последовательности $\{y_n\}$ для $n=1,\ 2,\ \ldots$, где $y_1=1$, $y_2=6$, $y_{n+2}=6y_{n+1}-y_n$ для $n=1,\ 2,\ \ldots$ Так что здесь имеем: $y_3=6\cdot6-1=35$, $y_4=6\cdot35-6=204$, $y_5=6\cdot204-$ $-35=1189$ и т. д. Итак, существует бесконечное множество квадратных чисел, являющихся одновременно треугольными. Однако же не существует ни одного треугольного числа >1, которое было бы биквадратом, т. е. уравнение $x^2+x-2y^4=0$ не имеет решений в натуральных числах >1. Но это уравнение имеет решения в рациональных положительных числах, например $x=\frac{32}{49}$, $y=\frac{6}{7}$. В § 15 мы докажем, что таких решений имеется бесконечное множество.

Исследуем теперь, какие натуральные числа x и y удовлетворяют уравнению

$$x^2+x-y^2=0.$$

Для натуральных x числа x и $x+1$, как известно, взаимно простые (т. е. не имеют общего делителя, большего единицы; если бы такой делитель оказался, то он был бы делителем их разности, т. е. числа 1, что невозможно). Если бы существовали натуральные числа x и y такие, что $x^2+x-y^2=0$, то мы имели бы $x(x+1)=y^2$ и квадратное число y^2 было бы произведением двух взаимно простых чисел x и $x+1$. Но, как известно из арифметики, если квадратное число есть произведение двух натуральных, взаимно простых чисел, то каждый из этих сомножителей должен быть квадратом натурального числа. Поэтому, если бы существовали натуральные числа k и l такие, что $x=k^2$, $x+1=l^2$, то отсюда $1=l^2-k^2=(l+k)(l-k)$, что для натуральных чисел k и l невозможно (так как первый сомножитель правой части $\geqslant 2$).

Итак, предположение, что уравнение $x^2+x-y^2=0$ имеет решения в натуральных числах x, y приводит к противоречию. Следовательно, это уравнение не имеет решений в натуральных числах; другими словами, произведение двух последовательных натуральных чисел никогда не является квадратом натурального числа.

Заметим, однако, что уравнение $x^2+x-y^2=0$ имеет решения в рациональных положительных числах, например $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$ или $x=\frac{1}{8}$, $y=\frac{3}{8}$.

Подобным же образом можно легко доказать, что для натуральных $m>1$ уравнение $x^2+x-y^m=0$ не имеет решений в натуральных числах x и y.

§ 6. Уравнение $x^2+x+1=3y^2$

Займемся теперь уравнением $x^2+x+1=3y^2$. Оно уже имеет свою историю. В 1950 г. Р. Облат высказал предположение, что, кроме решения $x=y=1$, оно не имеет иных решений в натуральных числах x, y, где x есть нечетное число. В том же году Т. Нагель указал решение $x=313$, $y=181$. Метод, аналогичный изложенному выше для уравнения $x^2+x-2y^2=0$, позволит нам определить все решения уравнения

$$x^2+x+1=3y^2 \tag{18}$$

в натуральных числах x, y.

Предположим, что (x, y) есть решение уравнения (18) в натуральных числах, причем $x>1$. Можно легко убедиться, что уравнение (18) не имеет решений в натуральных числах x, y, где $x=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; поэтому должно быть $x\geqslant 10$.

Покажем, что

$$12y<7x+3, \qquad 7y>4x+2, \qquad 4y>2x+1. \tag{19}$$

Если бы было $12y \geqslant 7x+3$, мы имели бы $144y^2 \geqslant 49x^2+42x+9$, а так как, ввиду (18), $144y^2 = 48x^2 + 48x+48$, то было бы $x^2 \leqslant 6x+39$, откуда $(x-3)^2 \leqslant 48$ и, значит, учитывая, что $x \geqslant 10$, $7^2 \leqslant 48$, что невозможно. Итак, первое из неравенств (19) доказано.

Если бы было $7y \leqslant 4x+2$, мы имели бы $49y^2 \leqslant 16x^2 + 16x+4$, а так как, ввиду (18), $16x^2+16x+16 = 48y^2$, то было бы $49y^2 \leqslant 48y^2 - 12$, что невозможно. Таким образом, доказано второе из неравенств (19), из которого уже непосредственно вытекает третье. Итак, неравенства (19) верны.

Положим теперь

$$\xi = 7x - 12y + 3, \qquad \eta = -4x + 7y - 2. \tag{20}$$

На основании (19), найдем, что $\xi > 0$, $\eta > 0$ и $x - \xi = 3 \times (4y - 2x - 1) > 0$ и, значит, $\xi < x$. Согласно (20), имеем

$$\xi^2 + \xi + 1 - 3\eta^2 = \\ = (7x-12y+3)(7x-12y+4) + 1 - 3(-4x+7y-2)^2 = \\ = x^2 + x + 1 - 3y^2,$$

откуда, ввиду (18),

$$\xi^2 + \xi + 1 = 3\eta^2.$$

Примем

$$g(x,\ y) = (7x - 12y + 3,\ -4x + 7y - 2).$$

Итак, можно сказать, что, исходя из любого решения $(x,\ y)$ уравнения (18) в натуральных числах, где $x > 1$, мы получаем новое решение $(\xi,\ \eta) = g(x,\ y)$ уравнения (18) в натуральных числах ξ, η, где $\xi < x$ (и значит, решение в меньших натуральных числах). Отсюда, действуя как выше, найдем, что для каждого решения уравнения (18) в натуральных числах x, y, где $x > 1$, существует натуральное число n такое, что $g_n(x,\ y) = (1,\ 1)$.

Приняв же

$$f(x,\ y) = (7x + 12y + 3,\ 4x + 7y + 2), \tag{21}$$

легко найдем, что $f(g(x,\ y)) = (x,\ y)$ и, следовательно, $(x,\ y) = f_n(1,\ 1)$.

С другой стороны, легко проверить, что если $(x,\ y)$ есть решение уравнения (18) в натуральных числах, то $f(x,\ y)$ также есть решение уравнения (18) в натуральных числах (соответственно бóльших, чем x и y).

Приняв $x_1 = y_1 = 1$, $(x_n, y_n) = f_{n-1}(1, 1)$ для $n = 2, 3, \ldots$, получим последовательность $\{x_n, y_n\}$ для $n = 1, 2, \ldots$, содержащую все решения уравнения (18) в натуральных числах и только такие решения.

Здесь мы имеем $(x_{n+1}, y_{n+1}) = f_n(1,1) = f(x_n, y_n)$, следовательно, в силу (21), получаем

$$x_{n+1} = 7x_n + 12y_n + 3, \quad y_{n+1} = 4x_n + 7y_n + 2 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

— формулы, позволяющие последовательно определять все решения (x, y) уравнения (18) в натуральных числах.

Таким путем легко получаем решения

$$(1,1), (22,13), (313,181), (4366,2521), (60817,35113), \ldots$$

Этих решений имеется, очевидно, бесконечное множество.

Из равенств $x_1 = y_1 = 1$ и (21) при помощи индукции легко находим, что числа x_n с нечетными индексами суть нечетные, с четными же — четные, а числа y_n суть нечетные для $n = 1, 2, \ldots$ Для получения всех решений уравнения (18) в целых числах x, y, как нетрудно доказать, следовало бы к уже полученным решениям (x_n, y_n) присоединить $(x_n, -y_n)$ и $(-x_n - 1, \pm y_n)$ для $n = 1, 2, \ldots$

Так что здесь мы имеем, например, еще такие решения:

$$(-2,1)\ (-23,13), (-314,181).$$

А. Роткевич заметил, что из всех решений уравнения (18) в натуральных числах $x > 1$ и y можно получить все решения уравнения

$$(z+1)^3 - z^3 = y^2 \tag{23}$$

в натуральных числах z, y.

В самом деле, допустим, что натуральные числа z, y удовлетворяют уравнению (23). Положив $x = 3z + 1$, получим, как легко проверить, натуральные числа $x > 1$ и y, удовлетворяющие уравнению (18).

С другой стороны, если натуральные числа $x > 1$ и y удовлетворяют уравнению (18), то имеем, как легко проверить, $(x - 1)^2 = 3(y^2 - x)$, откуда следует, что число (натуральное) $x - 1$ делится на 3, следовательно $x - 1 = 3z$, где z есть натуральное число, причем имеет место равенство $3z^2 = y^2 - x = y^2 - 3z - 1$, которое доказывает, что числа z и y удовлетворяют уравнению (23).

Таким образом, исходя из решений

$$(22,13),\ (313,181),\ (4366,2521)$$

уравнения (18), получаем решения

$$(7,13),\ (104,181),\ (1455,2521)$$

уравнения (23).

Заметим здесь еще, что если натуральные числа z, y удовлетворяют уравнению (23), то доказано, что y есть сумма двух последовательных квадратов, например $13=2^2+3^2$, $181=9^2+10^2$, $2521=35^2+36^2$.

Подобным образом, как прежде для уравнения (18), мы могли бы найти все решения уравнения

$$x^2+(x+1)^2=y^2 \tag{24}$$

в натуральных числах x, y, приняв для $x>3$

$$g(x,\ y)=(3x-2y+1,\ 3y-4x-2)$$

и для $x\geqslant 1$

$$f(x,\ y)=(3x+2y+1,\ 4x+3y+2),$$

что приводит к формуле $(x,\ y)=f_n(3,\ 5)$ и к выводу, что все решения уравнения (24) в натуральных числах x, y содержатся в последовательности $\{x_n,\ y_n\}$ для $n=1,\ 2,\ \ldots$, где $x_1=3$, $y_1=5$, а

$$x_{n+1}=3x_n+2y_n+1,\ y_{n+1}=4x_n+3y_n+2 \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Например, $x_2=3\cdot 3+2\cdot 5+1=20$, $y_2=4\cdot 3+3\times\times 5+2=29$; $x_3=119$, $y_3=169$; $x_4=696$, $y_4=985$; $x_5=4059$, $y_5=5741$.

Геометрический смысл рассмотренного уравнения состоит в том, что оно дает все пифагоровы треугольники (прямоугольные с натуральными сторонами), катеты которых выражаются последовательными натуральными числами. Таких треугольников имеется бесконечное множество*).

Уравнение же

$$x^2+(x+1)^2=y^3,$$

как доказано, не имеет решений в натуральных числах x, y, но $119^2+120^2=13^4$, причем можно доказать, что это единственное решение в натуральных числах уравнения

$$x^2+(x+1)^2=y^4.$$

---

*) Подробности относительно уравнения (24) см. в книге В. Серпинского, „Пифагоровы треугольники", стр. 15, Учпедгиз, 1959. (*Прим. перев.*)

§ 7. Уравнение $x^2 - Dy^2 = 1$

Найдем теперь все решения уравнения

$$x^2 - 2y^2 = 1 \qquad (25)$$

в натуральных числах x, y.

Здесь следует для $x > 3$ принять $g(x, y) = (3x - 4y, 3y - 2x)$, а (для натуральных x и y) $f(x, y) = (3x + 4y, 2x + 3y)$, что приводит к формуле $(x, y) = f_n(3, 2)$ и теореме, что все решения уравнения (25) в натуральных числах x, y содержатся в последовательности $\{x_n, y_n\}$ для $n = 1, 2, \ldots$, где $x_1 = 3$, $y_1 = 2$, а

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n, \quad y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Например, $x_2 = 17$, $y_2 = 12$; $x_3 = 99$, $y_3 = 70$; $x_4 = 577$, $y_4 = 408$.

Перейдем теперь к общему уравнению

$$x^2 - Dy^2 = 1, \qquad (26)$$

где D есть данное целое число. Если бы было $D = 0$, то все решения уравнения (26) в целых числах были бы: $x = \pm 1$, y — любое целое. Если бы было $D = -1$, мы имели бы четыре решения уравнения (26) в целых числах: $x = \pm 1$, $y = 0$ или $x = 0$, $y = \pm 1$. Если бы было $D < -1$, мы имели бы, как легко сообразить, только два решения: $x = \pm 1$, $y = 0$. Поэтому далее будем предполагать, что D есть натуральное число.

Если бы D было квадратом натурального числа, $D = n^2$, то уравнение (26) можно было бы написать в виде

$$(x - ny)(x + ny) = 1.$$

Таким образом, число $x + ny$ было бы делителем единицы, откуда следует, что числа x и y не могли бы быть натуральными. Отсюда легко заключаем, что в целых числах x, y уравнение (26) имело бы в рассматриваемом случае только два решения $x = \pm 1$, $y = 0$.

Итак, остается исследовать случай, в котором D — натуральное число, не являющееся квадратом натурального числа или, что то же самое, случай, в котором $\sqrt{D}$ есть иррациональное число.

Поставим здесь вопрос, имеет ли уравнение (26), кроме тривиальных решений $x = \pm 1$, $y = 0$, еще какие-нибудь решения в целых числах x, y или, что то же самое, имеет ли уравнение (26) решение в натуральных числах. Если бы существовало такое решение, то, очевидно, существовало бы также решение в наименьших натуральных числах x_1, y_1.

Легко доказать, что в случае, когда уравнение (26) имеет хотя бы одно решение в натуральных числах x, y, оно имеет таких решений бесконечное множество. Ибо если натуральные числа x, y удовлетворяют уравнению (26), то числа

$$u = x^2 + Dy^2 \quad \text{и} \quad v = 2xy$$

также натуральные и, в силу тождества

$$(x^2 + Dy^2)^2 - D(2xy)^2 = (x^2 - Dy^2)^2$$

и уравнения (2), также удовлетворяют этому уравнению.

Используя метод, который мы применили ранее в случае $D = 2$, можно доказать, что все решения уравнения (26) в натуральных числах x, y содержатся в бесконечной последовательности $\{x_n, y_n\}$ для $n = 1, 2, \ldots$, где x_1, y_1 есть решение в наименьших натуральных числах, а $x_{n+1} = x_1 x_n + Dy_1 y_n$, $y_{n+1} = y_1 x_n + x_1 y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Для доказательства следовало бы здесь для $x > x_1$ принять $g(x, y) = (x_1 x - Dy_1 y, -y_1 x + x_1 y)$, а для натуральных x, y принять $f(x, y) = (x_1 x + Dy_1 y, y_1 x + x_1 y)$.

Можно доказать, что если $\sqrt{D}$ есть иррациональное число, то существует решение уравнения (26) в натуральных числах. Но как можно найти такое решение? Дело это отнюдь не простое. Казалось бы, что для нахождения решения уравнения (26) в натуральных числах x, y и к тому же в наименьших натуральных числах, достаточно подставлять вместо y поочередно натуральные числа и испытывать, не будет ли число $Dy^2 + 1$ квадратом натурального числа. Если y будет наименьшим натуральным числом, для которого $Dy^2 + 1$ есть квадрат, скажем, натурального числа x, то (x, y) будет решением уравнения (26) в наименьших натуральных числах. Таким путем легко было бы найти, что, для $D = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12$ решениями уравнения (26) в наименьших натуральных числах являются соответственно (3,2), (2,1), (9,4), (5,2), (8,3), (3,1), (19,6), (10,3), (7,2).

Труднее было бы таким путем найти решение уравнения (26) в наименьших натуральных числах для $D = 13$, потому что таковым является система (649,180), или для $D = 29$, где такой системой является (4901,1820). И уж совершенно непригоден был бы этот путь для нахождения решения уравнения (20) в наименьших натуральных числах для $D=991$, где

$$x=379\,516\,400\,906\,811\,930\,638\,014\,896\,080,$$

$$y=12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767.$$

Каким же путем можно было найти решение, выраженное столь большими числами?

Укажем прием, который в случае, когда $\sqrt{D}$ есть иррациональное число, всегда приводит к нахождению решения уравнения (26) в наименьших натуральных числах *).

Пусть a_0 будет наибольшее целое число $<\sqrt{D}$; имеем здесь $a_0 \geqslant 1$, а ввиду определения числа a_0 и иррациональности числа $\sqrt{D}$, $a_0<\sqrt{D}<a_0+1$. Примем $\sqrt{D}=a_0+\frac{1}{x_1}$; тогда (ввиду иррациональности числа $\sqrt{D}$) число x_1 иррациональное, $0<\frac{1}{x_1}<1$ и, значит, $x_1>1$. Пусть a_1 будет наибольшее целое число $<x_1$ и примем $x_1=a_1+\frac{1}{x_2}$. Поступая как выше, найдем $x_2>1$. С числом x_2 можем поступить так же, как с числом x_1 и т. д. Таким путем мы получим последовательность равенств:

$$\sqrt{D}=a_0+\frac{1}{x_1}, \qquad x_1=a_1+\frac{1}{x_2}, \qquad x_2=a_2+\frac{1}{x_3}, \quad \ldots,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — натуральные числа, а $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — иррациональные >1.

Так вот, можно доказать, что (для каждого натурального числа D, для которого $\sqrt{D}$ есть иррациональное число), существует наименьшее натуральное число s, зависящее от D, такое, что $x_{s+1}=x_1$.

Если s есть четное число, то числитель x и знаменатель y несократимой дроби, представляющей значение числа

$$a_0+\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots+\frac{1|}{|a_{s-1}},$$

или числа

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_{s-2}+\cfrac{1}{a_{s-1}}}}},$$

---

*) Теорию вопроса см. в книге А. О. Гельфонда, „Решение уравнений в целых числах“, Гостехиздат, 1952. (*Прим. перев.*)

дает решение уравнения (26) в наименьших натуральных числах. Если же s есть нечетное число, то следует взять числитель и знаменатель несократимой дроби, представляющей значение числа

$$a_0+\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots+\frac{1|}{|a_{s-1}}+\frac{1|}{|a_s}+\ldots+\frac{1|}{|a_{2s-1}}\text{*)},$$

где, как легко доказать, имеем $a_{s+i}=a_i$ для $i=1, 2, \ldots$

Воспользуемся этим указанием для нахождения решения уравнения (26) в наименьших натуральных числах для $D=13$.

Наибольшее натуральное число $<\sqrt{13}$ есть 3; поэтому примем $\sqrt{13}=3+\frac{1}{x_1}$, а отсюда $x_1=\frac{1}{\sqrt{13}-3}=\frac{\sqrt{13}+3}{4}$. Наибольшее натуральное число $<x_1$ есть, как легко проверить, 1. Приняв поэтому

$$x_1=1+\frac{1}{x_2},\text{ откуда } x_2=\frac{4}{\sqrt{13}-1}=\frac{\sqrt{13}+1}{3},$$

далее имеем

$$x_2=1+\frac{1}{x_3},$$

$$x_3=\frac{3}{\sqrt{13}-2}=\frac{\sqrt{13}+2}{3}=1+\frac{1}{x_4},$$

$$x_4=\frac{3}{\sqrt{13}-1}=\frac{\sqrt{13}+1}{4}=1+\frac{1}{x_5},$$

$$x_5=3+\sqrt{13}=6+\frac{1}{x_6},$$

$$x_6=\frac{1}{\sqrt{13}-3}=x_1.$$

Таким образом, здесь имеем $s=5$, а так как здесь s нечетное, то, в силу сделанного выше указания, для получения решения уравнения $x^2-13y^2=1$ в наименьших натуральных числах нужно подсчитать числитель и знаменатель несократимой дроби для числа

$$3+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|6}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}.$$

---

*) Доказательства этих теорем можно найти, например, в книге А. З. Вальфиша, „Уравнение Пелля," Тбилиси, Изд. АН Грузинской ССР, 1952. (*Прим. перев.*).

Легко найдем, что это число равно несократимой дроби $\frac{649}{180}$. Следовательно, числа $x=649$ и $y=180$ дают решение уравнения $x^2-13y^2=1$ в наименьших натуральных числах.

Для числа $D=991$ было бы $s=60$ и (ввиду четности числа s) мы должны были бы найти несократимую дробь для числа

$$a_0+\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_1}+\ldots+\frac{1|}{|a_{59}},$$

где $a_0=31$, числа же $a_1, a_2, \ldots, a_{59}$ имеют соответственно значения: 2, 12, 10, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 6, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 8, 4, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 20, 6, 4, 31, 4, 6, 20, 1, 4, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 4, 8, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 6, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 10, 12, 2. Вычисления здесь были бы длинные, но, во всяком случае, выполнимые и таким путем мы дошли бы до указанного выше решения уравнения $x^2-991y^2=1$ в наименьших натуральных числах.

К уравнениям вида (26) приводятся некоторые другие уравнения второй степени с двумя неизвестными, например, уравнение

$$3u^2-2v^2=1.$$

Приняв $x=3u-2v$, $y=v-u$, получим $x^2-6y^2=3u^2-2v^2=1$. С другой стороны, если x и y суть целые числа, удовлетворяющие уравнению $x^2-6y^2=1$, то, приняв $u=x+2y$, $v=x+3y$, получим $3u^2-2v^2=x^2-6y^2=1$.

Таким образом, изучение решений в целых числах уравнения $3u^2-2v^2=1$ приводится к изучению таких решений уравнения (26) для $D=6$.

К уравнению же $3u^2-2v^2=1$ сводится изучение уравнения

$$(v-1)^2+v^2+(v+1)^2=z^2+(z+1)^2. \qquad (27)$$

Действительно, если целые числа v и z удовлетворяют уравнению (27), то имеем

$$6v^2+3=(2z+1)^2,$$

откуда следует что число $2z+1$ делится на 3, так что $2z+1=3u$, где u есть целое число и, значит, $3u^2-2v^2=1$.

С другой стороны, если целые числа u и v удовлетворяют последнему уравнению, то u, а равным образом $3u$, должно быть нечетным числом и можно положить $3u=2z+1$, где z

есть целое число, откуда $(2z+1)^2=9u^2=3(2v^2+1)=6v^2+3$ и, значит, числа v и z удовлетворяют уравнению (27).

Итак, мы умеем находить все решения уравнения (27) в целых числах. Наименьшее решение этого уравнения в натуральных числах есть $v=11$, $z=13$, что дает равенство $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$, следующее — есть $v=109$, $z=133$, что дает равенство $108^2+109^2+110^2=133^2+134^2$.

Легко доказать, что если числа v и z дают решение уравнения (27), то числа $5u+4v+2$ и $6u+5v+2$ также дают решение.

§ 8. Уравнения второй степени с более чем двумя неизвестными

Перейдем теперь к уравнениям второй степени с более чем двумя неизвестными.

Прежде всего здесь представляет интерес уравнение

$$x^2+y^2=z^2. \tag{28}$$

Натуральные числа x, y, z, удовлетворяющие этому уравнению, составляют так называемый *пифагоров треугольник*. Так как пифагоровым треугольникам посвящена специальная книга *), ограничимся здесь только указанием, что все решения уравнения (28) в натуральных числах x, y, z получаются из формул

$$x=(m^2-n^2)l, \qquad y=2mnl, \qquad z=(m^2+n^2)l,$$

где m, n, l — натуральные числа, $n<m$ и присоединением решений с переставленными числами x и y.

Можно найти также все решения уравнения

$$x^2+y^2=2z^2$$

в натуральных числах. Это уравнение легко приводится к уравнению вида (28).

В самом деле, если целые числа x и y удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=2z^2$, то числа x и y должны быть одновременно либо оба четные, либо оба нечетные. Поэтому числа $x+y$ и $x-y$ оба четные. Пусть $x+y=2u$, $x-y=2v$.

*) В. Серпинский, „Пифагоровы треугольники", Учпедгиз, 1959.

Тогда

$$4u^2+4v^2=(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)=4z^2$$

и, следовательно, $u^2+v^2=z^2$.

С другой стороны, если $u^2+v^2=z^2$, то, приняв $x=u+v$, $y=u-v$, получим $x^2+y^2=2z^2$.

Уравнение же $x^2+y^2=3z^2$ не имеет решений в целых числах, отличных от нуля; последнее можно очень легко проверить, исходя из замечания, что квадрат целого числа, не делящегося на 3, дает при делении на 3 в остатке 1.

Обобщением уравнения (28) является уравнение

$$ax^2+y^2=z^2,$$

где a — любое заданное натуральное число. Легко доказать, что оно имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z таких, что числа x и y взаимно просты.

В самом деле, если a — нечетное число, то примем

$$x=m, \quad y=\frac{am^2-1}{2}, \quad z=\frac{am^2+1}{2},$$

где m — любое натуральное нечетное число. Легко проверить, что $ax^2+y^2=z^2$. Числа x, y, z здесь натуральные, причем числа x и y взаимно просты, так как из уравнения $ax^2+y^2=z^2$ вытекает, что их общий делитель является делителем числа z, следовательно, является также делителем числа $z-y=1$.

Если же a есть четное число, то приняв

$$x=2m, \quad y=am^2-1, \quad z=am^2+1,$$

где m — произвольное натуральное число, получим натуральные числа x, y, z такие, что $ax^2+y^2=z^2$, причем числа y и z нечетные. А так как каждый общий делитель чисел y и z является делителем числа $z-y=2$, то, как число нечетное, он будет делителем числа 1. Отсюда следует, что числа y и z, а, значит, также и числа x и y взаимно просты.

Уравнение

$$x^2+y^2=z^2+1$$

имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z, что вытекает непосредственно из тождества

$$(n^2+n-1)^2+(2n+1)^2=(n^2+n+1)^2+1$$

для $n=1, 2, \ldots$ Например, $5^2+5^2=7^2+1$, $11^2+7^2=13^2+1$, $19^2+9^2=21^2+1$.

Имеем также тождество

$$[2n(4n+1)]^2+(16n^3-1)^2=(16n^3+2n)^2+1,$$

откуда, например, $10^2+15^2=18^2+1$, $36^2+127^2=132^2+1$.

Более трудным делом является задача решения систем двух или более уравнений второй степени в натуральных числах, например, доказательство теоремы, что система двух уравнений

$$x^2+y^2=z^2, \qquad x^2-y^2=t^2$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t.

Было известно, что система двух уравнений

$$x(x+1)+y(y+1)=z(z+1), \qquad x(x+1)-y(y+1)=t(t+1)$$

имеет решения в натуральных числах x, y, z, t, например, $x=6$, $y=5$, $z=8$, $t=3$ или $x=44$, $y=39$, $z=59$, $t=20$. Но лишь совсем недавно Ю. Бровкину удалось доказать, что таких решений существует бесконечное множество. Другими словами, существует бесконечное множество пар треугольных чисел, сумма и разность которых являются треугольными числами. Ю. Бровкин дал также способ нахождения всех таких пар*). Для $y<x\leqslant 100$ такие пары чисел $\frac{x(x+1)}{2}$ и $\frac{y(y+1)}{2}$ получаем только для $(x, y)=(6, 5)$, $(18, 14)$, $(37, 27)$, $(44, 39)$, $(86, 65)$, $(91, 54)$.

Доказано, что существует бесконечное множество решений системы трех уравнений

$$x^2+y^2=t^2, \qquad x^2+z^2=u^2, \qquad y^2+z^2=v^2$$

в натуральных числах x, y, z, t, u, v (например, $x=44$, $y=117$, $z=240$, $t=125$, $u=244$, $v=267$). Однако неизвестно, существует ли хотя бы одно решение системы четырех уравнений

$$x^2+y^2=t^2, \qquad x^2+z^2=u^2,$$
$$y^2+z^2=v^2, \qquad x^2+y^2+z^2=w^2$$

в натуральных числах x, y, z, t, u, v, w, иначе говоря, неизвестно, существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого ребра, диагонали граней и диагональ выражались бы натуральными числами.

---

*) J. Browkin, Wiadomości Matematyczne, т. 2, стр. 253—255, 1959. См. также W. Sierpiński, Teoria liczb, т. 2, стр. 134—135, Варшава, 1959. (*Прим. перев.*)

Мы не знаем, имеет ли хотя бы одно решение в целых числах x, y, z, t, u, v, w, где $t \neq 0$, система четырех уравнений

$$x^2 + y^2 = z^2, \qquad (x+t)^2 + y^2 = u^2,$$
$$x^2 + (y+t)^2 = v^2, \qquad (x+t)^2 + (y+t)^2 = w^2.$$

Эта задача имеет следующую геометрическую трактовку. На плоскости дан квадрат, сторона которого равна 1. Найдется ли на плоскости точка, отстоящая от каждой из вершин заданного квадрата на расстояния, выражаемые рациональными числами? Последняя проблема была недавно поставлена Г. Штейнгаузом.

Дадим еще два примера уравнений второй степени с более чем двумя неизвестными.

Определим все решения уравнения

$$xy = zt \tag{29}$$

в натуральных числах x, y, z, t.

Предположим, что натуральные числа x, y, z, t удовлетворяют уравнению (29). Обозначим через a наибольший общий делитель чисел x и z. Тогда будем иметь $x = ac$, $z = ad$, где c и d — натуральные взаимно простые числа. Отсюда $acy = adt$ и, значит, $cy = dt$. А так как числа c и d взаимно простые, то из последнего равенства, в силу так называемой основной теоремы арифметики, вытекает, что число y должно делиться на d, следовательно, $y = bd$, где b — натуральное число. Отсюда $cbd = dt$ и, значит, $t = bc$.

С другой стороны, если a, b, c, d — натуральные числа и $x = ac$, $y = bd$, $z = ad$, $t = bc$, то $xy = zt$.

Итак, мы доказали, что все решения уравнения (29) в натуральных числах x, y, z, t содержатся в формулах

$$x = ac, \quad y = bd, \quad z = ad, \quad t = bc,$$

где a, b, c, d — произвольные натуральные числа, причем можно предполагать, что числа c и d являются взаимно простыми.

Здесь мы имеем четыре так называемых произвольных параметра: a, b, c, d. Однако все решения уравнения (29) можно получить при помощи только трех произвольных параметров, именно, при помощи формул

$$y = \frac{uz}{d}, \quad t = \frac{ux}{d},$$

где x, z, u — произвольные натуральные числа, а d — наибольший общий делитель чисел x и y.

Все решения уравнения

$$xy = t^2$$

в натуральных числах x, y, t получаем из формул

$$x = a^2c, \quad y = b^2c, \quad t = abc,$$

где a, b, c — любые натуральные числа, причем можно предполагать, что числа a и b являются взаимно простыми.

Уравнение

$$x^2 - Dy^2 = z^2$$

имеет для каждого целого числа D бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z, что вытекает из тождества

$$(m^2 + Dn^2)^2 - D(2mn)^2 = (m^2 - Dn^2)^2.$$

Случается иногда, что легче найти все решения в целых числах уравнения третьей степени с тремя неизвестными, чем аналогичного уравнения второй степени. Так, например, легко найти все решения в целых числах x, y, z уравнения

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3.$$

В самом деле, на основании тождества

$$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

заключаем, что уравнение наше равносильно уравнению

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 0,$$

откуда следует, что все решения нашего уравнения в целых числах x, y, z мы получим, если из этих трех чисел два возьмем произвольно, а в качестве третьего возьмем одно из этих двух уже выбранных с противоположным знаком (например, x и y произвольные целые числа, $z = -x$).

Труднее найти все решения в целых числах уравнения

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

которое, как легко видеть, равносильно уравнению

$$xy + yz + zx = 0.$$

Можно доказать, что все решения нашего уравнения в целых числах x, y, z заключаются в формулах

$$x = k(m+n)m, \quad y = k(m+n)n, \quad z = -kmn,$$

где k, m и n — произвольные целые числа.

Легко найти все решения в целых числах x, y, z, t системы трех уравнений

$$x+y+z=t, \quad x^2+y^2+z^2=t^2, \quad x^3+y^3+z^3=t^3.$$

В самом деле, из этих уравнений легко вытекает, что

$$xy+yz+zx=0 \quad \text{и} \quad (x+y)(y+z)(z+x)=0.$$

Итак, по крайней мере одно из чисел $x+y$, $y+z$, $z+x$ должно равняться нулю. Если, например, $x+y=0$, то из $xy+yz+zx=0$ получаем $xy=0$ и, так как $y=-x$, находим $x=y=0$. Отсюда заключаем, что два из чисел x, y, z должны быть равны нулю, а третье должно равняться t, где t — произвольное целое число. Таким образом, наша система уравнений не имеет в целых числах других решений, кроме тривиальных.

Интересно отметить, что иногда простые системы уравнений имеют решение в целых положительных числах, но очень больших и трудно находимых. Так, например, система двух уравнений с пятью неизвестными x, y, z, t, u

$$xy+yz+zx=t^2, \quad xyz=u^3$$

имеет решения в целых положительных числах, но решение в наименьших таких числах получаем только для

$$x=1\,633\,780\,814\,400, \quad y=252\,782\,198\,228,$$
$$z=3\,474\,741\,085\,973\ ^{*)}.$$

§ 9. Система уравнений $x^2+ky^2=z^2$, $x^2-ky^2=t^2$

Пусть дана система двух уравнений

$$x^2+ky^2=z^2, \quad x^2-ky^2=t^2 \tag{30}$$

с неизвестными x, y, z, t, причем k — заданное натуральное число >1, не делящееся ни на один квадрат натурального

*) Ср. В. Литцман, „Великаны и карлики в мире чисел", стр. 52, Физматгиз, 1959.

числа >1. Докажем, что если система (30) имеет решение в натуральных числах x, y, z, t, то она имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z, t, где числа x и y взаимно простые.

Предположим, что натуральные числа x, y, z, t удовлетворяют уравнению (30). Если бы числа x, y имели наибольший общий делитель $d>1$, то, как известно, было бы $x=dx_1$, $y=dy_1$, где натуральные числа x_1 и y_1 взаимно просты и, в силу (30), мы имели бы

$$z^2=d^2(x_1^2+ky_1^2), \qquad t^2=d^2(x_1^2-ky_1^2),$$

откуда следует, что числа z^2 и t^2 делятся на d^2, и, следовательно, числа z и t делятся на d, т. е. $z=dz_1$, $t=dt_1$, где z_1 и t_1 — натуральные числа. Отсюда следовало бы, что

$$x_1^2+ky_1^2=z_1^2, \qquad x_1^2-ky_1^2=t_1^2,$$

а это означает, что система уравнений (30) имеет решение в натуральных числах x_1, y_1, z_1, t_1, где числа x_1 и y_1 взаимно простые.

Предположим, что оба числа x_1 и y_1 нечетные. Если бы k было нечетным числом, дающим при делении на 4 в остатке 1, то, учитывая, что квадрат нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1, мы заключили бы, что число $x_1^2+ky_1^2$ при делении на 4 давало бы в остатке 2 и, следовательно, не могло бы быть квадратом числа z_1. Если же k при делении на 4 давало бы в остатке 3, то, как легко видеть, число $x_1^2-ky_1^2$ при делении на 4 давало бы в остатке 2 и, значит, не могло бы быть квадратом числа t_1.

Если бы k было четным числом, то, на основании предположения, мы заключили бы, что число k не может делиться на $4=2^2$, следовательно, число k при делении на 4 дает в остатке 2 и, в случае нечетности чисел x_1 и y_1, число $x_1^2+ky_1^2$ при делении на 4 дает в остатке 3, что невозможно, так как оно является квадратом числа z_1.

Итак, мы доказали, что если система уравнений (30) имеет решение в натуральных числах x, y, z, t, то она имеет также решение в натуральных числах x_1, y_1, z_1, t_1, где числа x_1 и y_1 взаимно простые и одно из них четное.

Предположим теперь, что (x, y, z, t) есть решение системы уравнений (30) в натуральных числах, причем числа x

и y взаимно простые и одно из них четное. Примем

$$X=x^4+k^2y^4, \qquad Y=2xyzt,$$
$$Z=x^4+2kx^2y^2-k^2y^4, \qquad T=|x^4-2kx^2y^2-k^2y^4|. \tag{31}$$

Легко проверить тождество

$$(x^4+k^2y^4)^2 \pm 4kx^2y^2(x^4-k^2y^4)=(x^4 \pm 2kx^2y^2-k^2y^4)^2,$$

которое, ввиду (30) и (31), сразу дает

$$X^2+kY^2=Z^2 \quad \text{и} \quad X^2-kY^2=T^2, \tag{32}$$

а это доказывает, что числа X, Y, Z, T удовлетворяют системе уравнений (30).

Из формул (31) следует, что X и Y натуральные числа, а из формул (31) и (30) следует, что $Z=z^2t^2+2kx^2y^2$, следовательно, Z также есть натуральное число. Чтобы доказать, что и T — натуральное число, достаточно показать, что $T \neq 0$. Если бы было $T=0$, то, на основании (32), мы имели бы $X^2=kY^2$, откуда, учитывая, что число k не делится ни на один квадрат натурального числа >1, мы получили бы $k=1$, вопреки предположению, что $k>1$. Итак, X, Y, Z, T — числа натуральные.

Покажем, что числа X и Y взаимно простые.

Предположим, что числа X и Y имеют общим делителем простое число p. Покажем, что p не может быть делителем числа k, а также не есть число 2. Если бы число p было делителем числа k, то, являясь делителем числа $X=x^4+k^2y^4$, p должно было бы быть делителем числа x, следовательно, на основании (30), также делителем числа z и число $ky^2=z^2-x^2$ делилось бы на p^2, а так как число k не имеет квадратного делителя >1, то p должно было бы быть делителем числа y, что невозможно, поскольку числа x и y взаимно просты.

Итак, число p не является делителем числа k, следовательно, в случае, когда k четное число, оно не может быть числом 2. Если же k — нечетное число, то заметив, что из чисел x и y одно четное (а другое нечетное), на основании равенства $X=x^4+k^2y^4$, заключаем, что число X нечетное.

Если бы p было делителем числа x, то учитывая, что $k^2y^4=X-x^4$ и имея в виду, что p является делителем числа X, мы заключили бы, что p является делителем числа k^2y^4, и, следовательно, не будучи делителем числа k^2, есть делитель числа y, а последнее невозможно, так как числа x и y взаимно простые. Таким образом, p не является делителем числа x. Число p также не является делителем числа y, так как $x^4 = X - k^2y^4$, а p, будучи делителем числа X, не является делителем числа x. Но p — делитель числа $Y = 2xyzt$; так как $p \neq 2$ и так как p не является делителем ни числа x, ни числа y, то p должно быть делителем либо числа z, либо числа t. Поэтому при соответствующем знаке $+$ или $-$ число p является делителем числа $x^2 \pm ky^2$, следовательно, делителем числа $(x^2 \pm ky^2)^2 = x^4 + k^2y^4 \pm 2kx^2y^2$, и, будучи делителем числа $X = x^4 + k^2y^4$, должно быть делителем числа $2kx^2y^2$, что невозможно, так как p не является делителем ни одного из чисел 2, k, x, y. Итак, мы доказали, что числа X и Y взаимно просты. Имеем здесь очевидные неравенства: $X > x$, $Y > y$.

Таким образом, доказано, что если числа x и y взаимно просты и одно из них четное и если натуральные числа x, y, z, t удовлетворяют уравнению (30), то, определив числа X, Y, Z, T из формул (31), получим натуральные числа, удовлетворяющие уравнениям $X^2 + kY^2 = Z^2$, $X^2 - kY^2 = T^2$, где числа X и Y взаимно просты, Y четное и $X > x$, $Y > y$.

Тем самым доказано, что если система уравнений (30) разрешима в натуральных числах x, y, z, t, то она имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z, t, где x и y взаимно простые числа.

Вот решения системы уравнений (30) для некоторых k:

k	x	y	z	t
5	41	12	49	31
6	5	2	7	1
7	337	120	463	113
13	106 921	19 380	127 729	80 929
15	17	4	23	7
30	13	2	17	7

Положим теперь для каждого решения уравнения (30) в натуральных числах x, y, z, t, где x и y взаимно простые числа, $\frac{x}{y} = r$; это — рациональное число, выражаемое несократимой дробью $\frac{x}{y}$. Разным решениям системы (30) в натуральных числах x, y, z, t, где числа x и y взаимно просты, соответствуют, очевидно, разные числа r. Согласно (30), имеем $r^2+k=\left(\frac{z}{y}\right)^2$, $r^2-k=\left(\frac{t}{y}\right)^2$, следовательно, числа r^2+k и r^2-k являются квадратами рациональных чисел. Поэтому, если для данного натурального числа k уравнение (30) имеет решение в натуральных числах, то таких рациональных чисел r имеется бесконечное множество.

Докажем, что для натурального числа k существует рациональное число r такое, что числа r^2+k и r^2-k являются квадратами рациональных чисел, тогда и только тогда, когда существует прямоугольный треугольник с рациональными сторонами и с площадью k.

Действительно, с одной стороны, если $r^2+k=g^2$, $r^2-k=h^2$, где r, g, h — рациональные числа, то $(g+h)^2+(g-h)^2=2(g^2+h^2)=(2r)^2$, т. е. имеем прямоугольный треугольник с рациональными сторонами $g+h$, $g-h$, $2r$, площадь которого равна $\frac{g^2-h^2}{2}=k$.

С другой же стороны, если прямоугольный треугольник с рациональными сторонами a, b, c имеет площадь k, то $ab=2k$, $a^2+b^2=c^2$, откуда $\frac{c^2}{4}+k=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $\frac{c^2}{4}-k=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ и достаточно принять $r=\frac{c}{2}$.

Отсюда, так как уравнение (30) имеет для $k=5$ решение в натуральных числах $x=41$, $y=12$, $z=49$, $t=31$, следует, что существует бесконечное множество различных рациональных чисел r, для которых числа r^2+5 и r^2-5 являются квадратами рациональных чисел. Задача нахождения таких рациональных чисел была поставлена около 1220 г. и тогда же Леонардо Пизанским было найдено решение $r=\frac{41}{12}$.

Пусть

$$x_1=41, \quad y_1=12, \quad z_1=49, \quad t_1=31$$

и для $n=1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=x_n^4+25y_n^4, & z_{n+1}&=x_n^4+10x_n^2y_n^2-25y_n^4, \\ y_{n+1}&=2x_ny_nz_nt_n, & t_{n+1}&=|x_n^4-10x_n^2y_n^2-25y_n^4|. \end{aligned} \tag{33}$$

Легко проверить, что

$$x_1^2+5y_1^2=z_1^2, \qquad x_1^2-5y_1^2=t_1^2,$$

а, на основании формул (33) и доказанного выше, посредством индукции сразу же получаем:

$$x_n^2+5y_n^2=z_n^2, \qquad x_n^2-5y_n^2=t_n^2 \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда, приняв $r_n=\frac{x_n}{y_n}$ для $n=1,\ 2,\ \ldots,$ получим

$$r_n^2+5=\left(\frac{z_n}{y_n}\right)^2, \qquad r_n^2-5=\left(\frac{t_n}{y_n}\right)^2 \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Таким образом, числа r_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ рациональные, причем числа r_n^2+5 и r_n^2-5 являются квадратами рациональных чисел.

Для $n=1$ найдем указанное ранее число $\frac{41}{12}$.

Для $n=2$ найдем

$$x_2=41^4+25\cdot 12^4=3\,344\,161,$$
$$y_2=2\cdot 41\cdot 12\cdot 49\cdot 31=1\,494\,696,$$
$$z_2=41^4+10\cdot 41^2\cdot 12^2-25\cdot 12^4=4\,728\,001,$$
$$t_2=|41^4-10\cdot 41^2\cdot 12^2-25\cdot 12^4|=113\,279,$$

что дает число $r_2=\frac{3344161}{1494696}$, для которого

$$r_2^2+5=\left(\frac{4728001}{1494696}\right)^2, \qquad r_2^2-5=\left(\frac{113279}{1494696}\right)^2.$$

Это число нашел в 1931 г. Ю. Д. Хилл *).

Число x_3 имело бы уже двадцать семь цифр.

Можно доказать, что для $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$ не существуют рациональные положительные числа r, для которых числа r^2+k и r^2-k были бы квадратами рациональных чисел.

§ 10. Система уравнений $x^2+k=z^2$, $x^2-k=t^2$. Согласные числа

Исследуем также натуральные числа k, для которых система уравнений

$$x^2+k=z^2, \qquad x^2-k=t^2 \tag{34}$$

*) Ю. Д. Хилл, Amer. Math. Monthly, 38 299, 1931. *(Прим. перев)*.

имеет по меньшей мере одно решение в натуральных числах x, z, t. Такие числа k называются *согласными числами* *).

Дело здесь обстоит иначе, чем в случае уравнений (30), именно, для каждого заданного натурального k уравнения (34) имеют конечное ($\geqslant 0$) число решений в натуральных числах x, z, t. Действительно, если данные натуральные числа x, z, t удовлетворяют уравнениям (34), то имеем

$$k = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x) = x^2 - t^2 = (x+t)(x-t),$$

откуда видно, что числа $z+x$ и $x+t$ являются делителями числа k и, следовательно, $\leqslant k$; поэтому $x < k$, $z < k$ и $t < k$, а таких систем натуральных чисел x, z, t есть лишь конечное число.

Предположим, что натуральное число k является согласным. Тогда существуют натуральные числа x, z, t, для которых имеют место формулы (34). Следовательно, $z > t$ и $2x^2 = z^2 + t^2$, откуда заключаем, что числа z и t или оба четные, или оба нечетные. Поэтому числа $z+t$ и $z-t$ оба четные, так что $z+t = 2a$, $z-t = 2b$, где a и b — натуральные числа. Отсюда $z = a+b$, $t = a-b$, следовательно, учитывая (34),

$$2x^2 = z^2 + t^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2),$$

откуда $x^2 = a^2 + b^2$, причем, ввиду (34), имеем $2k = z^2 - t^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$, т. е. $k = 2ab$. Итак, если k — согласное число, то существует решение уравнения $a^2 + b^2 = c^2$ в натуральных числах a, b, c таких, что $2ab = k$.

Обратно, если натуральные числа a, b, c удовлетворяют уравнению $a^2 + b^2 = c^2$, то, как легко проверить, $c^2 \pm 2ab = (a \pm b)^2$ и значит, $2ab$ есть согласное число.

Итак, каждое решение в натуральных числах a, b, c уравнения $a^2 + b^2 = c^2$ определяет согласное число $k = 2ab$, причем таким путем могут быть получены все согласные числа.

Некоторые же согласные числа могут быть получены из двух или более различных решений уравнения $a^2 + b^2 = c^2$, например, согласное число 840 получаем из решений $20^2 + 21^2 = 29^2$ и $12^2 + 35^2 = 37^2$ (здесь имеем $29^2 + 840 = 41^2$, $29^2 - 840 = 1^2$, а также $37^2 + 840 = 47^2$, $37^2 - 840 = 23^2$), согласное число $3360 = 4 \cdot 840$ получаем из трех разных

*) Автор эти числа называет „liczby kongruentne". (*Прим. перев.*).

решений: $40^2+42^2=58^2$, $24^2+70^2=74^2$ и $15^2+112^2=$ $=113^2$.

Ясно, что если k есть согласное число, то число kd^2, где $d=1, 2, 3, \ldots$, также есть согласное число. Однако, если kd^2 является согласным числом, то число k может и не быть согласным. Так, например, число $6 \cdot 2^2$ согласное, между тем как 6 не является согласным числом. Теперь мы легко заключаем, что для того чтобы для числа k система уравнений (30) была разрешима в натуральных числах x, y, z, t, необходимо и достаточно, чтобы существовало натуральное число d такое, чтобы число kd^2 было согласным.

Исходя из указанной выше связи между согласными числами и решениями пифагорова уравнения и используя известные выражения для этих решений, можно легко установить, что число k является согласным тогда и только тогда, когда оно имеет вид

$$k=4mn(m^2-n^2)l^2, \tag{35}$$

где m, n, l — натуральные числа, причем по крайней мере одно из чисел m и n четное.

Для такого числа k, как легко проверить, имеем

$$[(m^2+n^2)l]^2 \pm k=[(m^2-n^2 \pm 2mn)l]^2. \tag{36}$$

При $m=4^2$, $n=3^2$, $l=1$ получаем согласное число $k=4 \cdot 4^2 \cdot 3^2(4^4-3^4)=7(3 \cdot 5 \cdot 8)^2$ и, в соответствии с формулой (36), имеем $(4^4+3^4)^2 \pm 7(3 \cdot 5 \cdot 8)^2=[4^4-3^4 \pm$ $\pm 2 \cdot 4^2 \cdot 3^2]^2$, что дает решение системы уравнений (30) для $k=7$, указанное прежде:

$$x=4^4+3^4=337,$$
$$y=3 \cdot 5 \cdot 8=120,$$
$$z=4^4-3^4+2 \cdot 4^2 \cdot 3^2=175+288=463,$$
$$t=|175-288|=113.$$

§ 11. Некоторые другие уравнения второй степени или системы уравнений

К системе шести уравнений второй степени с девятью неизвестными приводит задача нахождения трех натуральных чисел x, y, z, для которых каждое из шести чисел $x \pm y$, $x \pm z$, $y \pm z$ является квадратом натурального числа.

Эйлер, который занимался этой задачей, определял такие числа при помощи натуральных чисел t, f, k, g, h, удовлетворяющих уравнению

$$t^2=(f^4-k^4)(g^4-h^4). \tag{37}$$

Имея такие числа t, f, k, g, h, примем

$$2x=(f^4+k^4)(g^4+h^4), \qquad 2y=t^2+(2fghk)^2,$$
$$2z=t^2-(2fghk)^2.$$

Как легко проверить, имеем

$$\begin{aligned} x+y&=(f^2g^2+k^2h^2)^2, & x-y&=(f^2h^2-g^2k^2)^2,\\ x+z&=(f^2g^2-k^2h^2)^2, & x-z&=(f^2h^2+g^2k^2)^2,\\ y+z&=t^2, & y-z&=(2fghk)^2. \end{aligned}$$

Если бы числа x, y, z, полученные из выражений для $2x$, $2y$, $2z$, не были бы натуральными, то их следовало бы заменить числами $4x$, $4y$, $4z$.

Таким путем, исходя из равенства

$$520^2=(3^4-2^4)(9^4-7^4),$$

Эйлер получил числа

$$x=434657, \qquad y=420968, \qquad z=150568,$$

а на основании равенства

$$975^2=(3^4-2^4)(11^4-2^4)$$

получил числа

$$4x=2843458, \qquad 4y=2040642, \qquad 4z=1761858.$$

Другие решения указал А. Жерардин, исходя из следующих равенств:

$$\begin{aligned} 2040^2&=(2^4-1^4)(23^4-7^4),\\ 3567^2&=(5^4-4^4)(21^4-20^4),\\ 7800^2&=(9^4-7^4)(11^4-2^4),\\ 13920^2&=(7^4-3^4)(17^4-1^4),\\ 62985^2&=(14^4-5^4)(18^4-1^4),\\ 230880^2&=(17^4-9^4)(29^4-11^4). \end{aligned}$$

Существует бесконечное множество решений уравнения (37) в натуральных числах t, f, k, g, h, например, $t=520n^4$, $f=3n$, $k=2n$, $g=9n$, $h=7n$, где $n=1,2,\ldots$

Легко доказать, что для каждого натурального числа $k \neq 1$, $k \neq 3$ уравнение

$$x(x+1)+y(y+1)+z(z+1)=k(k+1)$$

имеет по крайней мере одно решение в натуральных числах x, y, z (что равносильно утверждению, что каждое треугольное положительное число, отличное от 1 и 6 равно сумме трех треугольных положительных чисел).

Для доказательства достаточно различить три случая: когда число k при делении на 3 дает остатки 0, 1 или 2, и сослаться на тождества:

$$3t(3t+1)=2t(2t+1)+2t(2t+2)+(t-1)t,$$

$$(3t+1)(3t+2)=2t(2t+1)+(2t+1)(2t+2)+t(t+1),$$

$$(3t+2)(3t+3)=(2t+1)(2t+2)+(2t+1)(2t+2)+ \\ +(t+1)(t+2).$$

Значительно труднее доказать, что для каждого целого числа $k \geqslant 0$ существуют целые неотрицательные числа x, y, z такие, что

$$x(x+1)+y(y+1)+z(z+1)=2k$$

(иными словами, что каждое натуральное число *) есть сумма трех треугольных чисел $\geqslant 0$).

Легко доказать, что для каждого натурального числа k уравнение

$$x^2+y^2-z^2=k$$

имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z; это вытекает непосредственно из тождества

$$2t-1=(2u)^2+(2u^2-t)^2-(2u^2-t+1)^2,$$

$$2t=(2u+1)^2+(2u^2+2u-t)^2-(2u^2+2u-t-1)^2.$$

Отсюда видно, что каждое натуральное число есть алгебраическая сумма трех квадратов.

Но существует бесконечное множество натуральных чисел k, для которых уравнение

$$x^3+y^3-z^3=k$$

*) По существу, каждое целое неотрицательное число. (*Прим. перев.*).

не имеет ни одного решения в целых числах x, y, z. Основываясь на замечании, что куб каждого целого числа при делении на 9 дает в остатке 0, 1 или 8, можно доказать, что это уравнение не имеет решений в целых числах x, y, z для каждого целого числа k; которое при делении на 9 дает в остатке 4 или 5.

Также существует бесконечное множество натуральных чисел k, для которых уравнение

$$x^4 + y^4 - z^4 = k$$

не имеет ни одного решения в целых числах x, y, z. Такими, например, являются все числа k, которые при делении на 5 дают в остатке 3 (что можно доказать, основываясь на том, что четвертая степень целого числа при делении на 5 дает в остатке 0 или 1).

Можно доказать (хотя это и трудное дело), что для натурального числа k уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = k$$

имеет по крайней мере одно решение в целых числах x, y, z тогда и только тогда, когда число k не будет вида $4^h(8t + 7)$, где h и t — целые числа $\geqslant 0$.

Легче доказывается теорема о том, что для каждого натурального числа k уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = k$$

имеет по меньшей мере одно решение в целых числах x, y, z, t.

Согласно теореме А. Гурвица (доказательство которой нелегкое), единственными натуральными числами k, для которых уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z, являются числа $k = 2^h$ и $k = 2^h 5$, где $h = 0, 1, 2, \ldots$

Можно также доказать, что для каждого натурального числа $k > 3$ уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = k^2$$

имеет по меньшей мере одно решение в натуральных числах x, y, z, t. Весьма сложным является необходимое и достаточное условие того, чтобы для натурального числа k уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = k$$

имело по крайней мере одно решение в натуральных числах x, y, z, t.

Как уже предполагал Декарт и доказал в 1933 г. Г. Полл, это условие состоит в том, чтобы k не было ни одним из чисел 1, 3, 5, 9, 11, 17, 29, 41, $4^h \cdot 2$, $4^h \cdot 6$, $4^h \cdot 14$, где $h = 0, 1, 2, \ldots$

Можно доказать, что единственными натуральными числами k, для которых уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 = k$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t, u, являются числа 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 18, 33.

Займемся теперь решениями системы уравнений

$$x = y^2 + z^2, \qquad x + 1 = t^2 + u^2, \qquad x + 2 = v^2 + w^2$$

в натуральных числах x, y, z, t, u, v, w. Таких решений существует бесконечное множество. Это вытекает из того, что числа

$$(n^2 + n)^2 + (n^2 + n)^2, \qquad [n(n+2)]^2 + (n^2 - 1)^2,$$
$$(n^2 + n + 1)^2 + (n^2 + n - 1)^2,$$

где $n = 2, 3, \ldots$, являются последовательными натуральными числами.

Существует также бесконечное множество решений системы уравнений

$$x^2 = y^2 + z^2, \qquad (x + 1)^2 = t^2 + u^2, \qquad (x + 2)^2 = v^2 + w^2$$

в натуральных числах x, y, z, t, u, v, w, что непосредственно вытекает из тождеств:

$$(2665k + 39)^2 = (1025k + 15)^2 + (2460k + 36)^2,$$
$$(2665k + 40)^2 = (1599k + 24)^2 + (2132k + 32)^2,$$
$$(2665k + 41)^2 = (585k + 9)^2 + (2600k + 40)^2$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots$

Можно доказать (хотя доказательство трудное), что система уравнений

$$x = y^2 + (y + 1)^2, \qquad x^2 = z^2 + (z + 1)^2$$

имеет в натуральных числах x, y, z только одно решение $x = 5$, $y = 1$, $z = 3$.

Также нелегко доказать теорему (известную уже Ферма) о том, что система уравнений

$$x = 2y^2 - 1, \qquad x^2 = 2z^2 - 1$$

имеет в натуральных числах x, y, z только два решения $x = y = z = 1$ и $x = 7$, $y = 2$, $z = 5$.

§ 12. Об уравнении $x^2 + y^2 + 1 = xyz$

Займемся теперь определением всех решений уравнения

$$x^2 + y^2 + 1 = xyz \tag{38}$$

в натуральных числах x, y, z. Докажем прежде всего, что если натуральные числа x, y, z удовлетворяют этому уравнению, то должно быть $z = 3$.

В самом деле, предположим, что при некотором натуральном $z \neq 3$ уравнение (38) имеет решение в натуральных числах x, y. Если бы здесь было $y = x$, то, согласно (38), мы имели бы $2x^2 + 1 = x^2 z$ и натуральное число x было бы делителем числа 1, следовательно, было бы $x = 1$, откуда также $y = 1$ и, ввиду (38), $z = 3$, вопреки предположению относительно числа z. Итак, числа x и y различные, значит можно предположить, например, что $x < y$. Среди всех систем натуральных чисел x, y, где $x < y$, удовлетворяющих (при определенном натуральном $z \neq 3$) уравнению (38), существует, очевидно, такая, в которой y есть наименьшее число*). Примем теперь

$$x_1 = xz - y, \qquad y_1 = x; \tag{39}$$

согласно (38) и неравенству $x < y$, имеем $xz - y = \dfrac{x^2 + 1}{y} <$ $< x + \dfrac{1}{y} < x + 1$, откуда на основании (39), заключаем, что x_1 есть натуральное число $\leqslant x = y_1$ и что $x^2 + 1 = x_1 y$, а $x_1 + y = y_1 z$. Отсюда имеем

$$x_1^2 + y_1^2 + 1 = x_1^2 + x^2 + 1 = x_1^2 + x_1 y = x_1(x_1 + y) = x_1 y_1 z,$$

а это означает, что система натуральных чисел x_1, y_1 удовлетворяет уравнению (38).

Мы видели, что (ввиду $z \neq 3$) равенство $x_1 = y_1$ невозможно, а так как $x_1 \leqslant y_1$, то имеем $x_1 < y_1 = x < y$, от-

*) Далее автор молчаливо предполагает, что (x, y) является именно такой системой. *(Прим. перев.)*.

куда $y_1 < y$, вопреки предположению относительно системы x, y.

Итак, предположение, что существуют натуральные числа x, y, z, удовлетворяющие уравнению (38), где $z \neq 3$, приводит к противоречию.

Следовательно, решение уравнения (38) в натуральных числах x, y, z сводится к решению уравнения

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy \tag{40}$$

в натуральных числах x, y.

Если бы здесь было $x = y$, то мы имели бы $x = y = 1$. Предположим, что x, y — решение уравнения (40) в натуральных числах x, y, причем $x \neq y$, например, $x < y$ и пусть

$$x_1 = 3x - y.$$

Как ранее для чисел (39), заключаем, что x_1 — натуральное число $\leqslant x$ и что имеем $x_1^2 + x^2 + 1 = 3x_1x$. Если $x_1 < x$, то подобным образом найдем натуральное число $x_2 = 3x_1 - x$ такое, что $x_2 \leqslant x_1$ и $x_2^2 + x_1^2 + 1 = 3x_2x_1$. Если бы было $x_2 < x_1$, мы нашли бы натуральное число $x_3 \leqslant x_2$ такое, что $x_3 = 3x_2 - x_1$ и $x_3^2 + x_2^2 + 1 = 3x_3x_2$.

Так как последовательность убывающих натуральных чисел не может быть бесконечной, то при некотором натуральном n мы дойдем до натурального числа $x_n = x_{n-1}$ такого, что

$$x_n^2 + x_{n-1}^2 + 1 = 3x_nx_{n-1},$$

откуда вытекает, что $x_n = x_{n-1} = 1$, следовательно, ввиду $x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2}$, $x_{n-2} = 3x_{n-1} - x_n = 2$, $x_{n-3} = 3x_{n-2} - x_{n-1} = 5$, ..., $x_1 = 3x_2 - x_3$, $x = 3x_1 - x_2$, $y = 3x - x_1$.

Итак, мы доказали, что если натуральные числа x и $y \geqslant x$ удовлетворяют уравнению (40), то они должны быть двумя последовательными членами бесконечной последовательности

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,$$

определенной условиями

$$u_1 = u_2 = 1, \qquad u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{41}$$

т. е. последовательности

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 34,\ 89,\ 233,\ 610,\ \ldots$$

С другой стороны, легко доказать посредством индукции, что каждые два последовательных члена этой последовательности дают решение уравнения (40) в натуральных числах. В самом деле, если при некотором натуральном n имеем

$$u_n^2 + u_{n+1}^2 + 1 - 3u_n u_{n+1} = 0$$

(что верно для $n = 1$, так как $u_1 = u_2 = 1$), то, так как согласно (41) $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$ и $u_{n+2} - 3u_{n+1} = -u_n$, найдем

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + 1 - 3u_{n+1}u_{n+2} &= \\ = u_{n+1}^2 + u_{n+2}(u_{n+2} - 3u_{n+1}) + 1 &= \\ = u_{n+1}^2 - (3u_{n+1} - u_n)\, u_n + 1 &= \\ = u_{n+1}^2 + u_n^2 + 1 - 3u_n u_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что всеми решениями в натуральных числах x, y уравнения (40), где $x \leqslant y$, являются системы (u_n, u_{n+1}) для $n = 1, 2, \ldots$, где числа u_n $(n = 1, 2, \ldots)$ определены условиями (41). Следовательно, таких решений имеется бесконечное множество. Отсюда также следует, что всеми решениями в натуральных числах x, y, z уравнения (38), где $x \leqslant y$, являются системы $(u_n, u_{n+1}, 3)$, где $n = 1, 2, \ldots$

Относительно бесконечной последовательности $u_1, u_2, \ldots$ заметим еще следующее. Обозначим через v_n n-й член последовательности Фибоначчи, т. е. бесконечной последовательности, определенной условиями

$$v_1 = v_2 = 1, \quad v_{n+1} = v_n + v_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Отсюда для $n = 2, 3, \ldots$ имеем

$$v_{2n+1} = v_{2n} + v_{2n-1}, \quad v_{2n} = v_{2n-1} + v_{2n-2},$$
$$v_{2n-1} = v_{2n-2} + v_{2n-3},$$

откуда

$$v_{2n+1} = 3v_{2n-1} - v_{2n-3} \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{42}$$

Имеем $u_2 = 1 = v_1$, $u_3 = 2 = v_3$. Допустим, что при некотором натуральном $n \geqslant 2$ имеют место соотношения $u_n = v_{2n-3}$ и $u_{n+1} = v_{2n-1}$ (что верно для $n = 2$). Согласно (41) и (42) получаем

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n = 3v_{2n-1} - v_{2n-3} = v_{2n+1}.$$

Таким образом, при помощи индукции мы доказали, что для натуральных $n \geqslant 2$ выполняется равенство

$$u_n = v_{2n-3}.$$

Отсюда следует, что числа $u_2, u_3, u_4, \ldots$ являются членами последовательности Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots,$$

находящимися на нечетных местах.

Легко найти все решения уравнения

$$x + y + 1 = xyz \tag{43}$$

в натуральных числах x, y, z, где $x \leqslant y$.

Если бы было $y = x$, то мы имели бы $2x + 1 = x^2z$ и x было бы делителем числа 1, откуда $x = 1$ и $y = 1$, $z = 3$. В случае же $x < y$ имеем, согласно (43), $xyz = x + y + 1 < 2y + 1$, следовательно, $xyz \leqslant 2y$, что дает $xz \leqslant 2$, откуда $x = 1$ или $x = 2$. Если $x = 1$, то, ввиду (43), $y + 2 = yz$ и y является делителем числа 2, а так как $yz > x = 1$, то заключаем, что $y \geqslant 2$, следовательно, $y = 2$, что дает $z = 2$. Если же $x = 2$, то, ввиду (43), $y + 3 = 2yz$, следовательно, y — делитель числа 3, а так как $y > x = 2$, то $y = 3$ и, значит, $z = 1$.

Таким образом, существуют только три системы натуральных чисел x, y, z, где $x \leqslant y$, удовлетворяющие уравнению (43), а именно:

$$(1, 1, 3), \quad (1, 2, 2), \quad (2, 3, 1).$$

Основываясь на том, что уравнение (38) не имеет решений в натуральных числах x, y, z, где $z \neq 3$, А. Шинцель установил, что уравнение

$$u^2 - (z^2 - 4)v^2 = -4 \tag{44}$$

не имеет решений в натуральных числах u, v, z, где $z \neq 3$.

В самом деле, предположим, что натуральные числа u, v, z удовлетворяют уравнению (44). Отсюда следует, что числа u и zv должны быть одновременно четными или нечетными и, значит, $x = \frac{u + zv}{2}$ есть натуральное число. Положим еще $v = y$. Тогда имеем $u = 2x - zy$, откуда, согласно (44),

$$(2x - zy)^2 - (z^2 - 4)y^2 = -4,$$

или

$$4x^2 - 4xyz + 4y^2 = -4,$$

что дает уравнение (38), которое, как известно, не имеет решений в натуральных числах x, y, z, где $z \neq 3$.

Отсюда следует, что и уравнение

$$x^2 - (z^2 - 4)\,y^2 = -1$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z, где $z \neq 3$, так как, если бы натуральные числа x, y, z удовлетворяли этому уравнению, то, приняв $u = 2x$, $v = 2y$, мы получили бы натуральные числа u, v, z, удовлетворяющие уравнению (44).

Следовательно, уравнение

$$x^2 - Dy^2 = -1$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, когда $D = n^2 - 4$, где n — натуральное число $\neq 3$, в частности, для следующих D: 12, 21, 32, 45, 60, 77, 96. (Но для $D = 5$ решение существует, например, $x = 38$, $y = 17$.)

Найдем теперь все решения системы двух уравнений

$$x^2 + 1 = yu, \qquad y^2 + 1 = xv \tag{45}$$

в натуральных числах x, y, u, v.

Предположим, что натуральные числа x, y, u, v удовлетворяют уравнениям (45). Из (45) вытекает, что $yu - x^2 = 1$; каждый общий делитель чисел x и y является делителем числа 1, следовательно, числа x и y взаимно простые. Согласно (45), имеем

$$x^2 + y^2 + 1 = x(x + v) = y(y + u). \tag{46}$$

Таким образом, число $x^2 + y^2 + 1$ делится на каждое из взаимно простых чисел x и y, следовательно, также на их произведение xy. Значит, существует натуральное число z, для которого имеет место равенство (38). А отсюда, как известно, следует, что $z = 3$. Поэтому налицо равенство (40), которое, согласно (46) дает $x + v = 3y$, $y + u = 3x$, откуда $v = 3y - x$, $u = 3x - y$.

Итак, доказано, что если натуральные числа x, y, u, v удовлетворяют системе уравнений (46), то числа x и y удовлетворяют уравнению (40) и $u = 3x - y$, $v = 3y - x$. Согласно найденным ранее формулам для решений уравнения (40), заключаем отсюда, что все решения в натуральных числах x, y, u, v системы уравнений (45), где $x \leqslant y$, содержатся в формулах

$$x = u_n, \quad y = u_{n+1}, \quad u = 3u_n - u_{n+1}, \quad v = 3u_{n+1} - u_n,$$

где $\{u_n\}$ для $n=1, 2, \ldots$ есть бесконечная последовательность, определенная условиями (41).

Отсюда непосредственно следует, что все системы натуральных чисел x и $y \geqslant x$ такие, что x^2+1 делится на y, а y^2+1 делится на x, определяются формулами $x=u_n$, $y=u_{n+1}$, где $n=1, 2, \ldots$ Этот результат другим путем был установлен В. Г. Миллсом в 1953 г.

§ 13. Уравнения высших степеней

13.1. Перейдем теперь к уравнениям третьей степени. Здесь уже в случае уравнений с двумя неизвестными мы наталкиваемся на большие препятствия.

Возьмем, например, одно из простейших таких уравнений

$$x^2-y^3=1. \tag{47}$$

Уже давно известно, что оно не имеет других решений в натуральных числах, кроме $x=3$, $y=2$, однако все доказательства этого факта были неэлементарные. Лишь недавно А. Вакулич нашел элементарное доказательство, впрочем, довольно длинное.

Можно доказать, что теорема о том, что уравнение (47) не имеет других решений в натуральных числах x, y, кроме $x=3$, $y=2$, равносильна теореме, по которой ни одно треугольное число >1 не является кубом натурального числа, а также равносильна теореме о том, что ни одно из уравнений

$$u^3-2v^3=1, \qquad u^3-2v^3=-1$$

не имеет решений в натуральных числах u и v, где $v>1$.

Из теоремы Эйлера о том, что ни одно треугольное число >1 не является кубом натурального числа, легко вытекает, что для $n>1$ число $1^3+2^3+\ldots+n^3$ не может быть кубом натурального числа. Действительно, так как

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=t_n^2,$$

то если бы число t_n^2 было кубом натурального числа, то и число t_n было бы кубом натурального числа (так как известно, что если квадрат натурального числа m является кубом натурального числа, то и число m есть куб натурального числа), а это противоречит теореме Эйлера.

13.2. Нелегко доказать, что уравнение

$$x^2+2=y^3$$

не имеет иных решений в натуральных числах x, y, кроме $x=5$, $y=3$, о чем знал уже П. Ферма (XVII в.). Но легко доказать, что уравнение $x^2+2=y^3$ имеет другие решения в рациональных числах. Так, на основании тождества

$$\left(\frac{27y^6-36x^2y^3+8x^4}{8x^3}\right)^2+y^3-x^2=\left(\frac{9y^4-8x^2y}{4x^2}\right)^3,$$

из каждого решения нашего уравнения в рациональных числах x, y мы можем получить другое.

Например, таким путем, исходя из решения $x=5$, $y=3$, мы получаем решение $x=\frac{383}{1000}$, $y=\frac{129}{100}$.

Трудным является доказательство того, что уравнение $x^2-2=y^3$ не имеет решений в натуральных числах x, y.

Но можно доказать и притом элементарным путем, что ни одно из уравнений $x^2+3=y^3$ и $x^2-7=y^3$ не имеет решений в целых числах x, y. Однако доказательство, если не основываться на известной из теории чисел теореме, что число вида x^2+1 не имеет ни одного делителя вида $4k+3$, не было бы коротким.

Уравнение же $x^2+7=y^3$ имеет решения в натуральных числах, например, $x=1$, $y=2$ или $x=181$, $y=32$.

Доказано также, что уравнение $x^2+44=y^3$ имеет в целых числах только решения $x=\pm 9$, $y=5$.

Для целых чисел k, где $-100\leqslant k<0$, известны все решения в целых числах x, y уравнения $x^2+k=y^3$. Уравнение $x^2-9=y^3$ имеет в целых числах x, y решения:

$$(\pm 1,\ -2),\ (\pm 3,\ 0),\ (\pm 6,\ 3),\ (\pm 15,\ 6),\ (\pm 253,\ 40).$$

Л. Ю. Морделл доказал, что для каждого целого числа k уравнение $x^2+k=y^3$ имеет конечное $\geqslant 0$ число решений в целых числах x, y.

В 1930 г. Т. Нагель доказал, что уравнение $x^2-17=y^3$ имеет решения в целых числах x, y только для $\pm x=3$, 4, 5, 9, 23, 282, 375, 378 661.

13.3. Доказано, что уравнение

$$x^3+y^3=z^3 \tag{48}$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z; однако доказательство является трудным и длинным. Значительно легче доказывается, что уравнение

$$x^4+y^4=z^4 \tag{49}$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z.

Однако существуют решения уравнения

$$(x^2-1)^2+(y^2-1)^2=(z^2-1)^2$$

в натуральных числах x, y, z, например,

$$x=10, \quad y=13, \quad z=14;$$
$$x=265, \quad y=287, \quad z=329.$$

Неизвестно, имеются ли здесь еще другие решения.

Существуют также решения уравнения

$$x^4+y^4=z^4+t^4$$

в различных натуральных числах x, y, z, t, например,

$$133^4+134^4=59^4+158^4, \qquad 103^4+542^4=359^4+514^4.$$

Доказано также, что уравнения

$$x^4 \pm y^4=z^2 \tag{50}$$

не имеют решений в натуральных числах x, y, z. Отсюда непосредственно следует, что уравнение

$$x^4+y^4=2z^2 \tag{51}$$

не имеет в натуральных числах x, y, z других решений, кроме $y=x$, $z=x^2$, где x — произвольное натуральное число. Действительно, если бы было $y \neq x$, мы имели бы $|x^2-y^2|>0$ и, согласно (51):

$$(x^2+y^2)^4-(x^2-y^2)^4=(4xyz)^2$$

вопреки тому, что уравнение (50) не имеет решений в натуральных числах x, y, z.

Легко доказать, что уравнение

$$x^4+y^4=3z^2,$$

и даже уравнение $x^2+y^2=3z^2$, не имеет решений в натуральных числах x, y, z.

Уравнение

$$x^4+y^4=4z^2,$$

или уравнение $x^4+y^4=(2z)^2$, также не имеет решений в натуральных числах x, y, z, что следует непосредственно из уравнения (50).

Легко доказать, что уравнение

$$x^4+y^4=5z^2$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z. Действительно, нетрудно заметить, что числа x и y здесь можно предполагать взаимно простыми, следовательно, они не могут одновременно делиться на 5, четвертая же степень натурального числа при делении на 5 дает в остатке 0 или 1.

Можно также доказать, что уравнение $x^4-y^4=5z^4$ имеет в натуральных числах x, y, z одно единственное решение $x=3$, $y=1$, $z=2$.

Уравнения (48) и (49) являются частными случаями уравнения

$$x^n+y^n=z^n, \tag{52}$$

о котором уже в XVII в. П. Ферма утверждал, что оно не имеет решений в натуральных числах x, y, z, когда n — натуральное число >2. Эту так называемую последнюю или *великую теорему Ферма* не удавалось на протяжении нескольких столетий и до сих пор доказать, несмотря на усилия многих выдающихся математиков. Она доказана только для некоторых, впрочем, достаточно многочисленных, показателей n. Согласно полученным в последнее время Д. Г. и Е. Лемерами и Г. С. Вандивером результатам, теорема Ферма доказана для всех натуральных показателей n таких, что $2<n<4002$ и, значит, также для всех натуральных чисел n, имеющих хотя бы один простой нечетный делитель, меньший, чем 4002. Она доказана также и для некоторых других натуральных показателей n.

Несколько десятков лет назад великой теоремой Ферма заинтересовалась широкая публика и то в связи с учрежденной в 1909 г. в Германии большой денежной премией, которая должна была быть выплачена тому, кто докажет великую теорему Ферма или хотя бы на одном примере обнаружит ее ложность. После первой мировой войны эта премия подверглась девальвации. Так как в условия награждения входило требование, чтобы доказательство было опубликовано, а научные издательства не желали принимать ложных доказательств, то авторы печатали свои доказательства на собственный счет. Так во многих странах, а также в Польше, появилось много печатных неправильных доказательств великой теоремы Ферма. Общим свойством этих доказательств является то, что они ошибочны уже для наименьшего показателя в теореме Ферма, а именно, для показателя $n=3$. Авторы этих доказательств, преимущественно нематематики, оперировали только элементарными средствами. Между тем, известное правильное доказательство уже для показателя 3 является неэлементарным.

Вопрос о том, верна ли великая теорема Ферма или нет, сам по себе не имеет большого значения для математики. Однако он сыграл важную роль в математике, потому что попытки его решения привели к открытию новых методов, оказавшихся полезными для других проблем. В частности, он способствовал развитию теории алгебраических чисел и теории идеалов.

13.4. Эйлер высказал предположение, что уравнение

$$x^4+y^4+z^4=t^4$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t. В 1945 г. М. Уорд доказал, что оно не имеет таких решений для $t<10^8$.

Весьма трудной задачей, как полагает Л. Ю. Морделл, является вопрос, имеет ли уравнение

$$x^3+y^3+z^3=3$$

другие решения в целых числах x, y, z, кроме решений

$$(1,\ 1,\ 1)\ (4,\ 4,\ -5),\ (4,\ -5,\ 4),\ (-5,\ 4,\ 4).$$

Легко доказать, что уравнение

$$x^3+y^3+z^3=1$$

имеет бесконечное множество решений в целых числах x, y, z; это следует, например, из тождества

$$(9n^4)^3+(1-9n^3)^3+(3n-9n^4)^3=1$$

для $n=1,\ 2,\ \ldots$

Также и уравнение $x^3+y^3+z^3=2$ имеет бесконечное множество решений в целых числах x, y, z, что вытекает из тождества

$$(1+6n^3)^3+(1-6n^3)^3+(-6n^2)^3=2.$$

Недавно были найдены все решения уравнения $x^3+y^3+z^3=k$ для целых k, с абсолютной величиной $\leqslant 100$, в целых числах x, y, z, с абсолютной величиной $\leqslant 3164$ *).

Мы не знаем, имеет ли уравнение

$$x^3+y^3+z^3=30$$

хотя бы одно решение в целых числах x, y, z.

Нетрудно доказать, что уравнение

$$x^3+y^3+z^3=t^2$$

имеет бесконечное множество решений в различных натуральных числах x, y, z, t. Доказательство вытекает из тождества

$$[u(u^3+2)]^3+(2u^3+1)^3+(3u^2)^3=(u^6+7u^3+1)^2.$$

Например, для $u=2$ получаем $20^3+17^3+12^3=121^2=11^4$. Таким образом, здесь имеем также решение уравнения $x^3+y^3+z^3=w^4$ в натуральных числах x, y, z, w.

Имеем также общее тождество

$$[u(u^3+2v^3)]^3+[v(2u^3+v^3)]^3+(3u^2v^2)^3=(u^6+7u^3v^3+v^6)^2,$$

которое получаем из предыдущего заменой u числом $\frac{u}{v}$ и умножением затем обеих частей на v^{12}. Отсюда для $u=5$, $v=2$ получаем $705^3+516^3+300^3=22689^2$.

Имеет место также *тождество Рамануджана*

$$(3u^2+5uv-5v^2)^3+(4u^2-4uv+6v^2)^3+\\+(5u^2-5uv-3v^2)^3=(6u^2-4uv+4v^2)^3.$$

Таким образом, например, для $u=1$, $v=0$ имеем $3^3+4^3+5^3=6^3$.

Имеем также тождество

$$(75v^5-u^5)^5+(u^5+25v^5)^5+(u^5-25v^5)^5+\\+(10u^3v^2)^5+(50uv^4)^5=(u^5+75v^5)^5.$$

---

*) Ю. Ц. П. Миллер и М. Ф. Ц. Вуллетт, Journal of London Math. Soc., 30, стр. 101—110, 1955.

Если $0 < 25v^5 < u^5 < 75v^5$, например, $u=2$, $v=1$, то все слагаемые здесь > 0. Имеем, например, $7^5+43^5+57^5+80^5+100^5=107^5$.

13.5. Опираясь на тождество

$$[u(u^2-3v^2)]^2+[v(3u^2-v^2)]^2=(u^2+v^2)^3,$$

легко доказать, что уравнение

$$x^2+y^2=z^3,$$

имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z, где числа x и y взаимно простые. Чтобы получить такое решение из указанного тождества, достаточно за u и v принять натуральные взаимно простые числа, из которых одно четное, а другое нечетное.

Уже Эйлер знал, что если n — натуральное число > 1, то все решения уравнения

$$x^2+y^2=z^n$$

в натуральных числах x, y, z, где числа x и y взаимно простые, можно получить из тождества

$$\left[\pm\frac{(r+is)^n+(r-is)^n}{2}\right]^2+\left[\pm\frac{(r+is)^n-(r-is)^n}{2i}\right]^2=$$
$$=(r^2+s^2)^n,$$

где r и s — натуральные взаимно простые числа, из которых одно четное, а i означает число $\sqrt{-1}$. Эту формулу, очевидно, можно написать не прибегая к числу i, так как

$$\frac{(r+is)^n+(r-is)^n}{2}=r^n-\binom{n}{2}r^{n-2}s^2+\binom{n}{4}r^{n-4}s^4-\ldots$$

$$\frac{(r+is)^n-(r-is)^n}{2i}=\binom{n}{1}r^{n-1}s-\binom{n}{3}r^{n-3}s^3+\binom{n}{5}r^{n-5}s^5-\ldots$$

Решения в натуральных числах x, y, z уравнения

$$x^2-y^2=z^3$$

можно получать из тождества

$$[u(u^2+3v^2)]^2-[v(3u^2+v^2)]^2=(u^2-v^2)^3.$$

А. Шинцель доказал элементарно, что все решения уравнения

$$x^2+2y^2=z^3$$

в натуральных числах x, y, z, где x и y взаимно простые числа, можно получить из тождества

$$[r(r^2-6s^2)]^2+2[s(3r^2-2s^2)]^2=(r^2+2s^2)^3,$$

в котором r и $2s$ взаимно просты.

13.6. Уравнение

$$z^2+x^3=y^4$$

имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z. Как было доказано ранее, уравнение (11) имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y. Если же натуральные числа x и y удовлетворяют уравнению (11), то, согласно тождеству

$$\left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2+x^3=\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2,$$

для $z=\frac{x(x-1)}{2}$, получаем $z^2+x^3=y^4$.

Таким путем, исходя из последовательных треугольных чисел, являющихся одновременно квадратами, получаем например, решения

$$28^2+8^3=6^4,\qquad 1176^2+49^3=35^4,\qquad 41328^2+288^3=204^4.$$

Однако здесь имеются и другие решения, например,

$$27^2+18^3=9^4,\qquad 63^2+36^3=15^4.$$

Заметим здесь еще, что уравнение

$$x^2+y^3+z^4=t^2,$$

как легко доказать, имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z, t. Это следует из тождества

$$(a^2-2ac^3-4a^2d^4)^2+(2ac)^3+(2ad)^4=(a^2+2ac^3+4a^2d^4)^2.$$

13.7. Исследуем также уравнение

$$x^3+y^3=kz^3, \tag{53}$$

где k данное натуральное число. При $k=1$ получаем уравнение (48), которое не имеет решений в целых числах, отличных от нуля. Для $k=2$ доказано, что уравнение (53) имеет в целых числах, отличных от нуля, только решение $x=y=z$, где z — произвольное целое число, отличное от нуля. Отсюда непосредственно следует, что для $k=2n^3$, где n — натуральное число, уравнение (53) имеет в целых числах, отличных от нуля, только решение $x=y=nz$, где z — произвольное целое число, отличное от нуля. Таким образом, далее мы можем предполагать, что k есть натуральное число, не имеющее вида $k=2n^3$, где n — натуральное число.

Для натуральных чисел k, где $2 < k \leqslant 10$, уравнение (53) имеет решения в целых числах x, y, z, отличных от нуля, только для $k=6$ (например, $x=17$, $y=37$, $z=21$), $k=7$ (например, $x=-17$, $y=73$, $z=38$) и $k=9$ (например, $x=2$, $y=z=1$).

Если уравнение (53) имеет решение в целых числах, отличных от нуля, то таких решений оно, очевидно, имеет бесконечное множество. Эти решения мы получаем из данного решения (x, y, z), умножая числа x, y, z на произвольное целое число, отличное от нуля. Можно, однако, доказать, что если k есть натуральное число, не имеющее вида $2n^3$, где n — натуральное число, то из каждого решения уравнения (53) в целых числах x, y, z, отличных от нуля, можно получить другие решения в целых числах x_1, y_1, z_1, отличных от нуля, причем такие, что числа x_1, y_1, z_1 не будут пропорциональны числам x, y, z. Это вытекает из тождества

$$[x(x^3+2y^3)]^3+[-y(2x^3+y^3)]^3=(x^3+y^3)(x^3-y^3)^3.$$

Если мы примем

$$x_1=x(x^3+2y^3), \quad y_1=-y(2x^3+y^3),$$
$$z_1=z(x^3-y^3), \tag{54}$$

то, согласно (53) и (54), будем иметь

$$x_1^3+y_1^3=kz_1^3,$$

причем числа (54) отличны от нуля. Действительно, если бы было $x_1=0$ то, учитывая, что $x \neq 0$, мы имели бы $x^3+2y^3=0$ или $x^3=-2y^3$, что, ввиду $y \neq 0$, невозможно. Подобным образом доказываем, что невозможно и равенство $y_1=0$. И, наконец, если бы было $z_1=0$, то, учитывая, что $z \neq 0$, мы имели бы $x^3-y^3=0$ или $x^3=y^3$ и, значит, ввиду (53), $2x^3=kz^3$, что, как легко доказать, дает $k=2n^3$, где n — натуральное число, а это противоречит предположению. Наконец, легко видеть, что числа (54) не пропорциональны числам x, y, z.

Так, например, из решения $x=2$, $y=1$, $z=1$ уравнения $x^3+y^3=9z^3$ получаем новое решение $x_1=20$, $y_1=-17$, $z_1=7$ этого уравнения.

Легко доказать, что для того чтобы уравнение (53) имело решение в целых числах x, y, z, отличных от нуля, необходимо и достаточно, чтобы число k было вида $\frac{ab(a+b)}{c^3}$, где a, b, c — целые числа, отличные от нуля.

В самом деле, это условие необходимое, так как если целые числа x, y, z, отличные от нуля, удовлетворяют уравнению (53), то приняв $a=x^3$, $b=y^3$, $c=xyz$, мы получим целые числа, отличные от нуля, причем, согласно (53), имеем $ab(a+b)=kc^3$.

Из тождества же

$$(a^3-b^3+6a^2b+3ab^2)^3+(b^3-a^3+6ab^2+3a^2b)^3=$$
$$=ab(a+b)\,3^3(a^2+ab+b^2)^3$$

получаем доказательство того, что это условие достаточное. Если бы было $a^3-b^3+6a^2b+3a\,b^2=0$, то, обозначив через d наибольший общий делитель чисел a и b, мы имели бы $a=da_1$, $b=db_1$, где a_1 и b_1 — целые числа, отличные от нуля, и притом взаимно простые. Тогда мы получили бы $a_1^3-b_1^3+6a_1^2b_1+3a_1b_1^2=0$, откуда вытекает, что a_1^3 делится на b_1 и b_1^3 на a_1, учитывая же, что числа a_1 и b_1 взаимно простые, мы заключили бы, что $a_1=\pm 1$ и $b_1=\pm 1$ и, следовательно, $a=\pm b$. В случае $a=-b$ мы имели бы $k=\frac{ab(a+b)}{c^3}=0$, вопреки предположению, что k есть натуральное число. В случае же $a=b$ имели бы $k=2b^3/c^3$, откуда легко следует, что было бы $k=2n^3$, где n — натуральное число, а тогда существует решение уравнения (53) в натуральных числах $x=y=n$, $z=1$. Подобным образом дело обстоит в случае $b^3-a^3+6ab^2+3a^2b=0$.

Наконец, невозможно, чтобы $a^2+ab+b^2=0$, так как $4(a^2+ab+b^2)=(2a+b)^2+3b^2 \geqslant 3b^2>0$, где $b\neq 0$.

Итак, числа

$$x=\frac{a^3-b^3+6a^2b+3ab^2}{c},\qquad y=\frac{b^3-a^3+6ab^2+3a^2b}{c},$$
$$z=3(a^2+ab+b^2)$$

отличны от нуля и, согласно нашему тождеству и тому, что $k=\frac{ab(a+b)}{c^3}$, удовлетворяют уравнению (53). Таким образом, достаточность условия доказана.

13.8. Доказано, что уравнение

$$x^3+(x+1)^3=y^2$$

имеет в целых числах x, y только два решения: $x=0$, $y=1$ и $x=1$, $y=3$.

Уравнение

$$x^3+y^3=z^2$$

имеет бесконечное множество решений в целых числах x, y, z, ибо $1^3+2^3=3^2$, а если же числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x^3+y^3=z^2$, то имеем также

$$(xd^2)^3+(yd^2)^3=(zd^3)^2$$

для целых d.

Однако из данного решения здесь могут быть получены также и другие при помощи тождества

$$(x^3+4y^3)^3-(3x^2y)^3=(x^3+y^3)(x^3-8y^3)^2.$$

Если мы примем

$$x_1=x^3+4y^3, \quad y_1=-3x^2y, \quad z_1=(x^3-8y^3)z,$$

то будем иметь $x_1^3+y_1^3=z_1^2$.

Так, например, из решения $x=1$, $y=2$, $z=3$ мы получаем решение $33^3+(-6)^3=(-3^3\cdot 7)^2$.

13.9. П. Эрдеш высказал предположение, что для каждого натурального числа $k>1$ существуют натуральные числа x, y, z, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{4}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Р. Облат заметил, что это предположение было бы доказано, если бы удалось доказать его для всех простых k, и доказал, что предположение Эрдеша верно для $k<106129$, Л. А. Розати же доказал, что оно верно для $106129\leqslant k<141649$.

13.10. Предположим, что натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению

$$x^4+ky^4=z^2, \tag{55}$$

где k — данное натуральное число. Имеем, как легко проверить, тождество

$$k(2xyz)^4=[(x^4+ky^4)^2+4kx^4y^4-(x^4-ky^4)^2]\,2z^4,$$

а так как, согласно (55),

$$z^4=x^8+2kx^4y^4+k^2y^8=4kx^4y^4+(x^4-ky^4)^2,$$

то

$$k(2xyz)^4=$$
$$=[z^4+4kx^4y^4-(x^4-ky^4)^2]\,[z^4+4kx^4y^4+(x^4-ky^4)^2],$$

или

$$k(2xyz)^4=(z^4+4kx^4y^4)^2-(x^4-ky^4)^4,$$

что дает

$$(x^4-ky^4)^4+k(2xyz)^4=(z^4+4kx^4y^4)^2. \tag{56}$$

Примем

$$x_1=|x^4-ky^4|, \qquad y_1=2xyz, \qquad z_1=|z^4+4kx^4y^4|. \tag{57}$$

Если бы было $k=\pm a^4$, где a — натуральное число, то уравнение (55) дало бы $x^4\pm(ay)^4=z^2$, что, как известно, для натуральных x, y, z невозможно (ср. стр. 58). Следовательно, ни число k, ни число $-k$ не является четвертой степенью натурального числа. Поэтому, на основании формул (57), заключаем, что x_1 и y_1 — натуральные числа.

Согласно (56), числа (57) удовлетворяют уравнению $x_1^4+ky_1^4=z_1^2$, а так как x_1 и y_1 натуральные числа, число же $-k$ не является четвертой степенью натурального числа, то число z_1 не может быть нулем и поэтому есть натуральное число.

Предположим далее, что число k четное. Докажем, следуя А. Шинцелю, что если уравнение (55) имеет решение в натуральных числах x, y, z, где x и ky — взаимно простые числа, то таких решений оно имеет бесконечное множество.

Итак, положим, что x, y, z — натуральные числа, удовлетворяющие уравнению (55) и, что числа x и ky взаимно простые. Как известно, числа x_1, y_1, z_1, определяемые по формулам (57), натуральные и удовлетворяют уравнению (55).

Если числа x_1 и ky_1 не были бы взаимно простыми, имели бы общим делителем простое число p, то, вследствии формул (57), p было бы делителем числа x^4-ky^4 и $ky_1=2kxyz$. Таким образом, p должно было бы быть делителем по крайней мере одного из чисел x, $2ky$, z. Если бы p было делителем числа x, то, будучи делителем числа x^4-ky^4, оно было бы делителем числа ky^4 и, следовательно, числа ky, вопреки предположению, что числа x и ky взаимно простые. Если p было бы делителем числа $2ky$, то, ввиду четности числа k, оно было бы делителем числа ky и, следовательно, также и числа ky^4. Будучи же делителем числа x^4-ky^4, p было бы делителем числа x^4, а, значит, также и числа x, что противоречит предположению о том, что x и ky взаимно простые числа. Если, наконец, p было бы делителем числа z, то, ввиду (55), оно было бы делителем числа x^4+ky^4. Следовательно, будучи делителем числа x^4-ky^4, p было бы делителем чисел $2x^4$ и $2ky^4$. Учитывая же, что x, будучи взаимно просто с ky, должно быть нечетным, заключаем, что число x^4-ky^4 также было бы нечетным и поэтому p было бы делителем чисел x и ky, вопреки предположению.

Итак, числа x_1 и ky_1 взаимно простые.

Таким образом, из каждого решения уравнения (55) в натуральных числах x, y, z, где x и ky взаимно простые, получаем, согласно формулам (56) и (57), новое решение в натуральных числах x_1, y_1, z_1, где числа x_1 и ky_1 взаимно просты и где $y_1>y$. Отсюда вытекает, что таких решений имеется бесконечное множество, что и требовалось доказать.

Примем, в частности, $k=8$. Уравнение

$$x^4+8y^4=z^2$$

имеет очевидное решение $x=y=1$, $z=3$, где числа x и $ky=8y$ взаимно простые. Следовательно, оно имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z, где числа x и $8y$ взаимно простые.

Из решения $x=y=1$, $z=3$, на основании формул (57), получаем новое решение $x_1=7$, $y_1=6$, $z_1=113$, откуда далее получаем: $x_2=7967$, $y_2=9492$, $z_2=262\,621\,633$. Но имеются и иные решения уравнения $x^4+8y^4=z^2$, например, $x=239$, $y=13$, $z=57123=239^2+2$, из которого указанным выше способом можно также получить бесконечное множество других.

Решения уравнения $x^4+8y^4=z^2$ будут использованы в § 15.

Примем теперь $k=-2$. Уравнение

$$x^4-2y^4=z^2$$

имеет решение $x=3$, $y=2$, $z=7$, где числа x и $ky=-2y$ взаимно простые. Следовательно, оно имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z, где числа x и $2y$ взаимно простые. Из решения $x=3$, $y=2$, $z=7$, на основании формул (57), получаем решение $x_1=113$, $y_1=84$, $z_1=7967$ и т. д.

Заметим здесь еще, что если

$$x^4-2y^4=\pm z^2,$$

то

$$z^4+8(xy)^4=(x^4-2y^4)^2+8x^4y^4=(x^4+2y^4)^2.$$

Таким образом, из каждого решения уравнения $x^4-2y^4=\pm z^2$ мы получаем решение уравнения $x^4+8y^4=z^2$. Например, из решения $x=3$, $y=2$, $z=7$ уравнения $x^4-2y^4=z^2$ получаем решение (7, 6, 113) уравнения $x^4+8y^4=z^2$.

С другой стороны, легко доказать, что из каждого решения уравнения $x^4+8y^4=z^2$ мы получаем решение уравнения $x^4-2y^4=z^2$, что вытекает непосредственно из тождества

$$(x^4+8y^4)^2-2(2xy)^4=(x^4-8y^4)^2.$$

Таким образом, если $x^4+8y^4=z^2$, то, приняв $u=z$, $v=2xy$, $w=|x^4-8y^4|$, мы имели бы $u^4-2v^4=w^2$. Например, из решения $x=7$, $y=6$, $z=113$ уравнения $x^4+8y^4=z^2$ мы получаем решение $u=113$, $v=84$, $w=7967$ уравнения $u^4-2v^4=w^2$.

Труднее было бы доказать, что из решения уравнения $x^4+8y^4=z^2$ мы получим решение уравнения $2u^4-v^4=w^2$, полагая $u=|zx\mp 2x^2y\mp 8y^3|$, $v=|zx\mp 4x^2y\pm 8y^3|$, $w=|48zxy^3\pm x^6\mp 24x^4y^2\mp 8x^2y^4\mp 64y^6|$. Так что, например, из решения $x=7$, $y=6$, $z=113$ уравнения $x^4+8y^4=z^2$ получаем при верхних знаках решение $u=1525$, $v=1343$, $w=2\,750\,257$ уравнения $2u^4-v^4=w^2$.

13.11. Легко дать пример уравнения третьей степени с двумя неизвестными, имеющего бесконечное множество решений в натуральных числах. Например, таковым является уравнение

$$x^2 - y^3 = 0,$$

всеми решениями которого в натуральных числах x, y являются $x = t^3$, $y = t^2$, где t — произвольное натуральное число.

Однако вообще трудно ответить на вопрос, имеет ли данное уравнение (хотя бы даже третьей степени с двумя неизвестными) конечное или же бесконечное число решений в натуральных числах.

Легко доказать, что уравнение

$$x^2 + y^4 = 2z^3$$

имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z, другими словами, что существует бесконечное множество систем натуральных чисел x, y, z, для которых числа x^2, z^3, y^4 образуют арифметическую прогрессию. Так как имеем $13^2 + 3^4 = 2 \cdot 5^3$, то отсюда следует, что при всяком натуральном n числа $x = 13n^6$, $y = 3n^3$, $z = 5n^4$ удовлетворяют нашему уравнению. Имеются также и другие решения, например $x = 352$, $y = 8$, $z = 40$ или $x = 46\,211\,481$, $y = 5681$, $z = 116\,681$.

А. Шинцель заметил, что определяя числа x, y, z из формул

$$x = a\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^4 b^3, \qquad y = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 b^2,$$

$$z = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^3 b^2,$$

где a и b — натуральные нечетные числа, мы получаем натуральные числа, удовлетворяющие уравнению $x^2 + y^4 = 2z^3$, причем, если $a < b$, то имеем $x^2 < z^3 < y^4$, если же $a > b$, то $x^2 > z^3 > y^4$. Например, для $a = 1$, $b = 3$ получим $x = 5^4 \cdot 3^3$, $y = 5^2 \cdot 3^2$, $z = 5^3 \cdot 3^2$, для $a = 3$, $b = 1$ найдем $x = 3 \cdot 5^4$, $y = 5^2$, $z = 5^3$.

Решением уравнения $x^2 + y^4 = 2z^3$ в рациональных числах мы займемся в § 15.

Доказано, что уравнение $2x^4 - 1 = z^2$ имеет только два решения в натуральных числах x, z, именно $x = z = 1$ и $x = 13$, $z = 239$.

Но уравнение

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z, где числа x и y взаимно простые. Следующим (по величине числа x) после решений $x=y=z=1$ и $x=13$, $y=1$, $z=239$ является здесь решение $x=1525$, $y=1343$, $z=2\,750\,257$, а следующим после него — решение $x=2165017$, $y=2\,372\,159$, $z=3\,503\,833\,734\,241$. Способ нахождения последовательных решений этого уравнения является весьма сложным *).

Поиски треугольных чисел, квадраты которых также являются треугольными числами, приводят к следующему уравнению:

$$(x^2+x)^2=2(y^2+y).$$

Доказано, что это уравнение не имеет в натуральных числах других решений, кроме $x=y=1$ и $x=3$, $y=8$.

13.12. Система двух уравнений с четырьмя неизвестными x, y, u, v

$$x^2+y^2=u^4, \qquad x+y=v^2$$

имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, u, v, из которых решением в наименьших натуральных числах является решение, найденное Ферма **).

$$x=4\,565\,486\,027\,761, \qquad y=1\,061\,652\,293\,520,$$
$$u=2\,165\,017, \qquad v=2\,372\,159.$$

13.13. Рассмотрим уравнение

$$x^m=y^n.$$

Пусть m и n — данные натуральные числа. Постараемся найти все решения уравнения $x^m=y^n$ в натуральных числах x, y. Пусть d означает наибольший общий делитель чисел m и n; тогда $m=m_1d$, $n=n_1d$, где m_1 и n_1 — натуральные взаимно простые числа. Уравнение $x^m=y^n$ или $(x^{m_1})^d=(y^{n_1})^d$ для натуральных x и y равносильно уравнению $x^{m_1}=y^{n_1}$, где показатели степени взаимно простые.

Поэтому можно предполагать, что числа m и n являются взаимно простыми. Но тогда, как было доказано в § 2,

---

*) Подробное изложение этого способа имеется в книге В. Серпинского „Пифагоровы треугольники" § 12, Учпедгиз, 1959. (*Прим. перев.*)

**) См. там же. (*Прим. перев.*)

существуют натуральные числа u и v такие, что $mu-nv=1$. Предположим, что x и y такие натуральные числа, что $x^m=y^n$. Тогда имеем

$$x=x^{mu-nv}=\frac{x^{mu}}{x^{nv}}=\left(\frac{y^u}{x^v}\right)^n.$$

Пусть $\frac{r}{s}$ означает несократимую дробь, равную числу $\frac{y^u}{x^v}$; итак, числа r и s взаимно простые и $xs^n=r^n$, что возможно только, когда $s=1$. Таким образом, число $\frac{y^u}{x^v}$ является натуральным; положим $\frac{y^u}{x^v}=k$, тогда $x=k^n$, $y^n=x^m=k^{mn}$ и, значит, $y=k^m$.

Отсюда легко следует, что все решения уравнения $x^m=y^n$ (где m и n — взаимно простые числа) в натуральных числах x, y содержатся в формулах

$$x=k^n, \quad y=k^m,$$

где k — произвольное натуральное число.

13.14. Е. Т. Белл занимался (1947) решением уравнения

$$xyzw=t^2 \tag{58}$$

в натуральных числах x, y, z, w, t.

Предположим, что натуральные числа x, y, z, w, t удовлетворяют уравнению (58). Пусть a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2 будут соответственно наибольшими квадратами, делящими числа x, y, z, w; положим $x=a_1^2x_1$, $y=a_2^2y_1$, $z=a_3^2z_1$, $w=a_4^2w_1$. Числа x_1, y_1, z_1, w_1 будут натуральными и, как легко видеть, не будут делиться ни на один квадрат натурального числа >1, произведение же их $x_1y_1z_1w_1$ будет квадратом натурального числа (так как $(a_1a_2a_3a_4)^2x_1y_1z_1w_1=t^2$). Простые множители произведения $x_1y_1z_1w_1$ могут, таким образом, быть делителями либо двух, либо всех четырех из чисел x_1, y_1, z_1, w_1.

Обозначим соответственно через a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11} произведения всех тех простых чисел, которые являются делителями только чисел x_1, y_1; x_1, z_1; x_1, w_1; y_1, z_1; y_1, w_1; z_1, w_1 и, наконец, x_1, y_1, z_1, w_1. Тогда

$$x_1=a_5a_6a_7a_{11}, \quad y_1=a_5a_8a_9a_{11},$$
$$z_1=a_6a_8a_{10}a_{11}, \quad w_1=a_7a_9a_{10}a_{11}.$$

следовательно,

$$x = a_1^2 a_5 a_6 a_7 a_{11}, \qquad y = a_2^2 a_5 a_8 a_9 a_{11},$$

$$z = a_3^2 a_6 a_8 a_{10} a_{11}, \qquad w = a_4^2 a_7 a_9 a_{10} a_{11}.$$

откуда

$$t = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11}^2.$$

Обратно, легко проверить, что, определяя числа x, y, z, w, t из этих формул при любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$, мы получаем решение уравнения (58) в натуральных x, y, z, t, w. Таким образом, эти формулы, содержащие одиннадцать произвольных натуральных параметров, дают все решения уравнения (58).

Число произвольных параметров может быть здесь уменьшено на единицу, если принять $a_5 a_{11} = a_5'$ и $a_{10} a_{11} = a_{10}'$. Тогда формулы для x, y, z, w, t будут содержать десять произвольных натуральных параметров a_1, a_2, a_3, a_4, a_5', a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}' и будут совпадать с формулами, которые сообщил (без доказательства) Е. Т. Белл.

Ю. Бровкин поставил задачу нахождения всех решений уравнения

$$xy = t^3$$

в натуральных числах x, y, t. Можно доказать, что все решения этого уравнения содержатся в формулах

$$x = uv^2z^3, \qquad y = u^2vw^3, \qquad t = uvzw,$$

где u, v, z, w — произвольные натуральные числа.

А. Шинцель указал формулы, дающие все решения уравнения

$$x_1 x_2 \ldots x_n = t^k$$

в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, где $n \geqslant 2$ и k — данные натуральные числа. Эти формулы содержат

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$$

произвольных натуральных параметров.

Например, для $n = 2$, $k = 3$ имеем четыре параметра, как в формулах, найденных ранее для уравнения $xy = t^3$, а для $n = 4$, $k = 2$ десять параметров, как в формулах Белла. Для $n = 5$, $k = 2$ пятнадцать параметров, для $n = k = 3$ имеем десять параметров.

§ 14. Показательные уравнения

К простым показательным уравнениям с двумя неизвестными приводит вопрос о рациональности или иррациональности логарифмов натуральных чисел, например, при основании 10. Предположим, что стоит вопрос о логарифме числа 2 при основании 10. Если бы этот логарифм, который, как известно, положителен, был бы рациональным числом, т. е. имел бы вид $\frac{x}{y}$, где x и y натуральные числа, то, на основании определения логарифмов, мы имели бы

$$10^{\frac{x}{y}} = 2, \text{ откуда } 10^x = 2^y.$$

Это уравнение, как легко видеть, не имеет решений в натуральных числах. Действительно, левая часть его для каждого натурального числа x делится на 5, правая же часть, как степень числа 2 с натуральным показателем, делиться на 5 не может. Отсюда заключаем, что логарифм числа 2 при основании 10 является числом иррациональным.

Вообще можно было бы доказать, что только числа 10^k, где k — целое число, суть те рациональные положительные числа, логарифмы которых при основании 10 являются рациональными.

В связи с известным равенством $3^2 + 4^2 = 5^2$ поставим вопрос, каковы решения уравнения

$$3^x + 4^y = 5^z.$$

в натуральных числах x, y, z. Можно доказать элементарно, что единственным решением этого уравнения в натуральных числах x, y, z является $x = y = z = 2$. Л. Юшманович доказал, что аналогичным свойством обладают уравнения

$$5^x + 12^y = 13^z, \quad 7^x + 24^y = 25^z,$$
$$9^x + 40^y = 41^z, \quad 11^x + 60^y = 61^z,$$

и поставил вопрос, до сих пор не решенный, существуют ли натуральные числа a, b, c такие, что $a^2 + b^2 = c^2$ и для которых уравнение $a^x + b^y = c^z$ имело бы решение в натуральных числах x, y, z, отличное от $x = y = z = 2$.

Доказано, что уравнение

$$a^x + b^y = c^z,$$

где a, b, c — данные целые числа, отличные от нуля и степени двойки, имеет всегда конечное (в частности, равное нулю) число решений в целых числах x, y, z.

А. Шинцель доказал, что уравнение

$$2^x + 3^y = 5^z$$

имеет в натуральных числах x, y, z только два решения: $x = 4$, $y = z = 2$ и $x = y = z = 1$.

А. Вакулич доказал, что уравнение

$$5^x + 3 = 2^y$$

имеет в натуральных числах x, y только два решения: $x = 1$, $y = 3$ и $x = 3$, $y = 7$. Отсюда следует, что дробь $\frac{1}{n(n+3)}$ не является конечной десятичной для натуральных n, отличных от 1, 2, 5, 125.

Нахождение чисел Мерсенна (вида $2^n - 1$), являющихся одновременно треугольными, приводит к уравнению

$$2^x = 7 + y^2,$$

для которого мы знаем пять решений в натуральных числах x, y

$$(3,\ 1),\ (4,\ 3),\ (5,\ 5),\ (7,\ 11),\ (15,\ 181).$$

Ю. Бровкин и А. Шинцель доказали, что других решений это уравнение не имеет.

До 1950 г. не было известно, имеет ли уравнение

$$2^{2x-1} - 1 = xy \tag{59}$$

в натуральных числах x, y другие решения, кроме $x = y = 1$. Впервые такое решение нашел Д. Г. Лемер, именно $x = 80519$ (и соответствующее натуральное y из формулы (59)). С. Мациаг заметил, что другим решением является $x = 80519 \cdot 2089$, а Н. Г. Беегер нашел решение $x = 107\,663$ и доказал, что уравнение (59) имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y. Арифметический смысл этого состоит в том, что существует бесконечное множество четных чисел n, для которых число $2^n - 2$ делится на n.

Можно доказать, что уравнение

$$x^y = y^x$$

имеет только одно решение в натуральных числах x, y, где $x \neq y$, именно $x = 2$, $y = 4$ (см. § 15).

Уравнение

$$x^x y^y = z^z$$

имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z, отличных от единицы. В 1940 г. китайский математик Хао Ко нашел для натуральных n числа

$$x = 2^{2^{n+1}(2^n-n-1)+2n}(2^n-1)^{2(2^n-1)},$$

$$y = 2^{2^{n+1}(2^n-n-1)}(2^n-1)^{2(2^n-1)+1},$$

$$z = 2^{2^{n+1}(2^n-n-1)+n+1}(2^n-1)^{2(2^n-1)+1}$$

удовлетворяют этому уравнению. Например, для $n=2$ получаем числа $x = 2^{12}\cdot 3^6 = 2\,985\,984$, $y = 2^8\cdot 3^7 = 559\,872$, $z = 2^{11}\cdot 3^7 = 4\,478\,976$. Хао Ко доказал, что уравнение $x^x y^y = z^z$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z, больших единицы, когда числа x и y взаимно простые. Мы не знаем, существуют ли нечетные числа $x>1$, $y>1$ и z, для которых $x^x y^y = z^z$.

Все еще не решена задача столетней давности, имеет ли уравнение

$$x^z - y^t = 1 \tag{60}$$

решение в целых числах x, y, z, t, больших единицы, отличное от $x=3$, $y=2$, $z=2$, $t=3$. Предположение, что таких решений нет, известно под названием *теоремы Каталана*. Недавно Р. Гампель доказал, что, кроме указанного решения, других решений в целых числах x, y, z, t, больших единицы, где $x-y=\pm 1$, не существует.

Но легко доказать, что если целые числа x, y, z, t, большие 1, удовлетворяют уравнению (60) и не составляют систему: $x=3$, $y=2$, $z=2$, $t=3$, то числа x и y не могут быть степенями числа 2 с натуральными показателями.

В самом деле, предположим, что $x=2^r$. Тогда имеем $2^{rz}=y^t+1$. Так как $z>1$, то число y нечетное и поэтому его степень с четным показателем при делении на 8 дает в остатке 1. Следовательно, если t — четное число, то число y^t+1 при делении на 8 дает в остатке 2 и стало быть не может быть числом 2^{rz}, где $z>1$, что находится в противоречии с равенством $2^{rz}=y^t+1$. Если же t число нечетное, то

$$y^t+1=(y+1)(y^{t-1}-y^{t-2}+\ldots-y+1),$$

причем второй сомножитель правой части последнего равенства является алгебраической суммой нечетного числа нечетных слагаемых и, следовательно, является нечетным числом. На основании равенства $y^t+1=2^{rz}$ второй сомножитель должен быть равен 1, так что $y^t+1=y+1$, откуда $t=1$, что противоречит предположению. Итак, предположение, что $x=2^r$ приводит в каждом случае к противоречию.

Предположим теперь, что $y=2^s$. Тогда имеем $2^{st}=x^z-1$. Если бы было $st=2$, мы имели бы $x^z=5$, что для $z>1$ невозможно, если же было бы $st=3$, мы имели бы $x^z=9$, что, ввиду $z>1$, дает $x=3$, $z=2$, вопреки предположению, что система x, y, z, t не является системой (3, 2, 2, 3). Итак, $st>3$. Число x, таким образом, нечетное >1. Если число z четное, $z=2l$, то, так как число x нечетное >1, имеем $x^l=2k+1$, где k — натуральное число, следовательно,

$$2^{st}=x^{2l}-1=(2k+1)^2-1=4k(k+1).$$

Среди чисел k и $k+1$ одно является нечетным и, как делитель числа 2^{st}, должно быть равно единице. Равенство $k+1=1$ исключается, так как k — натуральное число. Итак, $k=1$, откуда $2^{st}=8$, следовательно, $st=3$, вопреки тому, что $st>3$. Таким образом, предположение, что $y=2^s$, приводит к противоречию.

Итак, мы доказали, что уравнение

$$2^z-y^t=1$$

не имеет ни одного решения в натуральных числах z, y, t, больших единицы, уравнение же

$$x^z-2^t=1$$

в натуральных числах x, z, t, больших единицы, имеет только одно решение $x=3$, $z=2$, $t=3$.

§ 15. Решение уравнений в рациональных числах

Нахождение всех решений в рациональных числах уравнения любой степени с одним неизвестным с рациональными коэффициентами не представляет трудности.

В самом деле, предположим, что рациональное число w удовлетворяет уравнению

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0$$

с целыми коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Мы можем здесь предположить, что $a_0\neq 0$, и сверх того, $a_m\neq 0$, исключив тем самым возможный здесь корень $x=0$. Рациональное число w представим в виде несократимой дроби $\frac{r}{s}$ с натуральным знаменателем s и с целым числителем r.

Из нашего уравнения получаем

$$a_0r^m = -(a_1r^{m-1} + a_2r^{m-2}s + \ldots + a_{m-1}rs^{m-2} + a_ms^{m-1})s,$$
$$a_ms^m = -(a_0r^{m-1} + a_1r^{m-2}s + \ldots + a_{m-1}s^{m-1})r.$$

Первое из этих равенств доказывает, что число a_0r^m делится на s. А так как числа r и s, а, значит, также и числа r^m и s взаимно простые, то отсюда следует, что число s является делителем числа a_0. Второе же из полученных равенств доказывает, что число a_ms^m делится на r, откуда, учитывая, что числа s^m и r взаимно простые, заключаем, что r является делителем числа a_m.

Все рациональные корни нашего уравнения мы можем, таким образом, найти при помощи конечного числа проб, подставляя вместо x несократимые дроби $\frac{r}{s}$, где r есть какой-либо целый делитель числа a_m, а s — какой-либо натуральный делитель числа a_0.

Также не представляет трудности нахождение всех решений в рациональных числах уравнения первой степени с m неизвестными с целыми коэффициентами.

Если рациональные числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ удовлетворяют уравнению

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m = b,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_m, b$ — целые числа, то приведя числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ к общему натуральному знаменателю y_{m+1}, представим их в виде $x_k = \frac{y_k}{y_{m+1}}$, где y_k — целые числа для $k=1, 2, \ldots, m$, и получим уравнение первой степени с $m+1$ неизвестными

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_my_m - by_{m+1} = 0,$$

которое мы сумеем решить в целых числах $y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}$.

С другой стороны, если $y_1, y_2, \ldots, y_m, y_{m+1}$ — произвольное решение последнего уравнения в целых числах $y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}$, где y_{m+1} — натуральное число, то числа $x_k = \frac{y_k}{y_{m+1}}$, где $k=1, 2, \ldots, m$, дают решение в рациональных числах уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m = b$.

Что же касается уравнений высших степеней с более чем одним неизвестным, то иногда нахождение решений в рациональных числах здесь оказывается делом более легким, чем нахождение решений в целых числах.

Например, нахождение решений в целых числах, отличных от нуля, уравнения

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

где D — данное натуральное число, не являющееся квадратом натурального числа (а, следовательно, и рационального числа) иногда бывает затруднительно (например, для $D = 991$), однако все решения этого уравнения в рациональных числах, отличных от нуля, определяются легко.

В самом деле, предположим, что рациональные числа x и y, отличные от нуля, удовлетворяют нашему уравнению. Тогда здесь имеем $x \neq 1$, так как в случае $x = 1$ мы имели бы $Dy^2 = 0$ и, следовательно, вопреки предположению, $y = 0$. Пусть $r = \frac{1-x}{y}$; это рациональное число, отличное от нуля. Так как отсюда $x = 1 - ry$, то на основании нашего уравнения получаем $(1 - ry)^2 - Dy^2 = 1$, откуда $-2ry + r^2y^2 - Dy^2 = 0$, что ввиду $y \neq 0$, дает $-2r + (r^2 - D)y = 0$, а так как $r^2 - D \neq 0$ (потому что D не является квадратом рационального числа), то $y = \frac{2r}{r^2 - D}$, откуда

$$x = 1 - ry = -\frac{r^2 + D}{r^2 - D}.$$

С другой стороны, если для произвольного рационального числа r, отличного от нуля, примем

$$x = -\frac{r^2 + D}{r^2 - D}, \quad y = \frac{2r}{r^2 - D},$$

то получим рациональные числа x и y, отличные от нуля, удовлетворяющие уравнению $x^2 - Dy^2 = 1$. Это следует непосредственно из тождества

$$(r^2 + D)^2 - D(2r)^2 = (r^2 - D)^2.$$

Итак, все решения уравнения $x^2 - Dy^2 = 1$ (где D — натуральное число, не являющееся квадратом) в рациональных числах, отличных от нуля, мы получаем из формул

$$x = \frac{r^2 + D}{D - r^2}, \quad y = \frac{2r}{r^2 - D},$$

где r — рациональное число $\neq 0$. Одним из этих решений является

$$x=\frac{1+D}{D-1}, \qquad y=\frac{2}{1-D}.$$

Докажем, что уравнение

$$x(x+1)=2y^4 \tag{61}$$

имеет бесконечное множество решений в рациональных положительных числах x, y.

В § 13 мы доказали, что уравнение

$$u^4+8v^4=t^2 \tag{62}$$

имеет бесконечное множество решений в натуральных числах u, v, t, где u и v взаимно простые. Примем для такого решения

$$x=\frac{t-u^2}{2u^2}, \qquad y=\frac{v}{u}; \tag{63}$$

замечаем, что x и y — рациональные положительные числа (так как, ввиду (62), $t^2>u^4$), что y выражено несократимой дробью и, наконец, что числа x и y, согласно (63) и (62), удовлетворяют уравнению (61).

Следовательно, так как уравнение (62), как доказано в § 13, имеет бесконечное множество решений в натуральных числах u, v, t, где числа u и v взаимно простые, то уравнение (61) имеет бесконечное множество решений в рациональных числах.

Например, из решений в натуральных числах u, v, t (7, 6, 113), (239, 13, 57123), (7967, 9492, 262621633) уравнения (62), найденных в § 13, мы получаем следующие решения в рациональных числах x, y:

$$\left(\frac{32}{7^2}, \frac{6}{7}\right), \quad \left(\frac{1}{239^2}, \frac{13}{239}\right), \quad \left(\frac{99574272}{7967^2}, \frac{9492}{7967}\right).$$

Доказано, что все решения уравнения

$$2u^4-1=v^2$$

в рациональных числах u, v можно получить при помощи рекуррентной формулы

$$\pm u=\frac{u_1^2(2u_1^2+1)^2+(u_1\pm v_1)^2}{(2u_1^2+1)^2-2u_1^2(u_1\pm v_1)^2},$$

исходя из решения $u_1 = v_1 = 1$. Таким путем получаем решения

$$u = 13, \quad v = 239; \quad u = \frac{1525}{1343}, \quad v = \frac{2750257}{(1343)^2}; \quad \ldots$$

Легко доказать, что система уравнений

$$x^2 + y = z^2, \quad x + y^2 = t^2 \tag{64}$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t. Действительно, если $x^2 + y = z^2$, где x, y, z — натуральные числа, то $z > x$, следовательно, $z \geqslant x + 1$, откуда $z^2 \geqslant x^2 + 2x + 1$, так что $y = z^2 - x^2 \geqslant 2x + 1 > 2x > x$ и аналогичным образом, найдем, что $x > y$, т. е. придем к противоречию.

Однако система уравнений (64) имеет бесконечное множество решений в рациональных положительных числах. Действительно, если для натурального $n > 8$ примем

$$x = \frac{n^2 - 8n}{16(n+1)}, \quad y = \frac{n^2 + 8}{8(n+1)},$$

$$z = \frac{(n+4)^2}{16(n+1)}, \quad t = \frac{n^2 + 2n - 8}{8(n+1)},$$

то x, y, z, t будут рациональными положительными числами, удовлетворяющими уравнению (64).

Уравнение

$$x^3 + y^3 = x^2 + y^2$$

имеет, как легко видеть, только одно решение в натуральных числах: $x = y = 1$. Так как в случае $x > 1$ имеем $x^3 > x^2$, следовательно, $x^3 + y^3 > x^2 + y^2$ и подобным же образом дело обстоит в случае $y > 1$. Однако в рациональных положительных числах x, y это уравнение имеет бесконечное множество решений, которые легко могут быть все найдены.

В самом деле, предположим, что рациональные положительные числа x, y удовлетворяют нашему уравнению. Пусть $\frac{y}{x} = w$; это число рациональное положительное. На основании нашего уравнения имеем $x^3(1 + w^3) = x^2(1 + w^2)$, откуда

$$x = \frac{1 + w^2}{1 + w^3}, \quad \text{следовательно,} \quad y = \frac{1 + w^2}{1 + w^3} w.$$

С другой стороны, легко проверить, что, определяя при произвольном рациональном положительном w числа x и y

из последних формул, мы получаем решение нашего уравнения в рациональных положительных числах x и y. Легко также видеть, что различным рациональным числам w соответствуют различные решения нашего уравнения, так как различными будут отношения $\frac{y}{x}$.

Для $w=1$ получаем решение в натуральных числах $x=y=1$; для $w=2$ — решение $x=\frac{5}{9}$, $y=\frac{10}{9}$; для $w=\frac{1}{2}$ — решение $x=\frac{10}{9}$, $y=\frac{5}{9}$; для $w=3$ — решение $x=\frac{5}{14}$, $y=\frac{15}{14}$; для $w=\frac{2}{3}$ — решение $x=\frac{39}{35}$, $y=\frac{26}{35}$.

Можно доказать (хотя это и нелегкое дело), что уравнение $x^3+y^3=z^3$ не имеет решений в рациональных числах, отличных от нуля. Напротив, нетрудным делом является нахождение всех решений уравнения

$$x^3+y^3=z^3+w^3 \tag{65}$$

в рациональных числах x, y, z, w.

Пусть

$$x+y=s, \qquad x-y=t, \qquad z+w=u, \qquad z-w=v. \tag{66}$$

Согласно (65), имеем

$$s(s^2+3t^2)=u(u^2+3v^2). \tag{67}$$

Таким образом, если рациональные числа x, y, z, w удовлетворяют уравнению (65), то числа s, t, u, v, определяемые из формул (66), являются рациональными и удовлетворяют уравнению (67). Обратно, как легко проверить, если числа s, t, u, v — рациональные и удовлетворяют уравнению (67), то числа x, y, z, w, определяемые из формул (66) $\left(\text{т. е. числа } x=\frac{1}{2}(s+t),\ y=\frac{1}{2}(s-t),\ z=\frac{1}{2}(u+v),\ w=\frac{1}{2}(u-v)\right)$, являются рациональными и удовлетворяют уравнению (65).

Следовательно, решение уравнения (65) в рациональных числах x, y, z, w равносильно решению уравнения (67) в рациональных числах s, t, u, v. Займемся теперь решением уравнения (67) в рациональных числах.

Легко проверить тождество

$$(a^2+3b^2)(c^2+3d^2)=(ac+3bd)^2+3(bc-ad)^2. \tag{68}$$

Предположим, что рациональные числа s, t, u, v удовлетворяют уравнению (67). Если бы было $u=0$ (или $s=0$), то, согласно (67), мы имели бы $s=0$ (или $u=0$), с другой же стороны, для $u=s=0$ и произвольных t и v уравнение (67) удовлетворяется. Таким образом, далее мы можем полагать, что $u \neq 0$ и $s \neq 0$.

Пусть

$$\frac{s}{u}=X, \quad \frac{t}{u}=Y, \quad \frac{v}{u}=Z;$$

это рациональные числа, $X \neq 0$ и, согласно (67), имеем

$$X(X^2+3Y^2)=1+3Z^2. \tag{69}$$

Но на основании тождества (68):

$$(X^2+3Y^2)(1+3Z^2)=(X+3YZ)^2+3(Y-XZ)^2,$$

откуда, учитывая, что $X^2+3Y^2 \geqslant X^2>0$, согласно (69), получаем

$$X=\left(\frac{X+3YZ}{X^2+3Y^2}\right)^2+3\left(\frac{Y-XZ}{X^2+3Y^2}\right)^2. \tag{70}$$

Пусть

$$M=\frac{X+3YZ}{X^2+3Y^2}, \quad N=\frac{Y-XZ}{X^2+3Y^2}; \tag{71}$$

это рациональные числа и, как легко проверить, имеем

$$MX+3NY=1, \quad MY-NX=Z. \tag{72}$$

На основании (70) и (71) получаем

$$X=M^2+3N^2. \tag{73}$$

Так как $X \neq 0$, то по крайней мере одно из чисел M и N отлично от нуля. Если бы было $N=0$, то, согласно (72), мы имели бы $MX=1$ и $MY=Z$, согласно же (73): $X=M^2$, следовательно $M^3=1$, откуда $M=1$ и $X=1$, $Y=Z$. С другой стороны, легко проверить, что при произвольном Z числа $X=1$, $Y=Z$ и Z удовлетворяют уравнению (69).

Итак, далее мы можем допустить, что $N \neq 0$. Тогда формулы (72) и (73) дают

$$X=M^2+3N^2, \quad Y=\frac{1-MX}{3N}=\frac{1-M(M^2+3N^2)}{3N},$$

$$Z=MY-NX=\frac{M-(M^2+3N^2)^2}{3N}.$$

С другой стороны, легко проверить, что из этих формул при произвольных рациональных $M \neq 0$ и $N \neq 0$ мы получаем рациональные числа X, Y, Z, удовлетворяющие уравнению (69).

Таким путем мы сумеем определить все решения уравнения (69) в рациональных числах X, Y, Z при помощи двух произвольных параметров, рациональных M и N. Из каждого же решения в рациональных числах X, Y, Z уравнения (69) мы получим решение уравнения (67) в рациональных числах $s = uX$, $t = uY$, $v = uZ$ при произвольном рациональном u. Таким образом мы сумеем определить и все решения в рациональных числах уравнения (65). Отсюда можно также получить формулы, выражающие все решения уравнения (65) при помощи трех произвольных параметров, рациональных α, β, γ, именно, формулы:

$$\begin{aligned} x &= [1 - (\alpha - 3\beta)(\alpha^2 + 3\beta^2)]\gamma, \\ y &= [-1 + (\alpha + 3\beta)(\alpha^2 + 3\beta^2)]\gamma, \\ z &= [\alpha + 3\beta - (\alpha^2 + 3\beta^2)^2]\gamma, \\ w &= [-(\alpha - 3\beta) + (\alpha^2 + 3\beta^2)^2]\gamma, \end{aligned}$$

предложенные Л. Эйлером и Бине.

Заметим здесь еще, что в 1923 г. В. Ричмонд доказал элементарным путем, что каждое рациональное положительное число является суммой трех кубов рациональных положительных чисел. Однако доказательство того, что число 1 не есть сумма двух кубов рациональных положительных чисел, было бы нелегким делом (так как эта теорема равносильна великой теореме Ферма для показателя 3).

Зато легко доказать, что каждое рациональное число равно сумме трех кубов рациональных чисел. Подставив в тождество

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + c^3 = 3b^2(a-c) + [a^3 - 3b(a^2 - c^2)]$$

значения

$$a = 12t(t+1), \qquad b = (t+1)^3, \qquad c = 12t(t-1),$$

получим

$$72t(t+1)^6 = (a-b)^3 + (b-c)^3 + c^3. \tag{74}$$

Если рациональное число $w \neq -72$, то для $t = \frac{w}{72}$ имеем $t \neq -1$ и из формулы (74) следует, что w есть сумма трех кубов рациональных чисел. Если же $w=-72$, то $w=-72=(-4)^3+(-2)^3+0^3$.

Докажем теперь, что все решения уравнения

$$x^2+y^4=2z^3 \tag{75}$$

в рациональных положительных числах x, y, z и только такие решения содержатся в формулах

$$x=\frac{a}{b^3}\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^4, \qquad y=\frac{1}{b}\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2, \tag{76}$$

$$z=\frac{1}{b^2}\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^3,$$

где a и b — произвольные рациональные положительные числа.

В самом деле, допустим, что рациональные положительные числа x, y, z удовлетворяют уравнению (75). Примем $a=\frac{yx}{z^2}$, $b=\frac{y^3}{z^2}$: это рациональные положительные числа. Отсюда, согласно (75):

$$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{y^2x^2+y^6}{2z^4}=\frac{y^2(x^2+y^4)}{2z^4}=\frac{y^2\cdot 2z^3}{2z^4}=\frac{y^2}{z}$$

и, учитывая формулы для a и b, легко проверяем, что имеют место формулы (76). Итак, для каждой системы рациональных положительных чисел, удовлетворяющих уравнению (75), существуют рациональные положительные числа a и b, при которых имеют место формулы (76).

С другой стороны, легко проверить, что если a и b — произвольные рациональные положительные числа, то, определяя x, y и z из формул (76), мы получим рациональные положительные числа, удовлетворяющие уравнению (75).

Таким образом, теорема доказана. Эта теорема является частным случаем следующей общей теоремы:

Уравнение

$$a_1x_1^{n_1}+a_2x_2^{n_2}+\ldots+a_kx_k^{n_k}=0, \tag{77}$$

где k — натуральное число $\geqslant 2$, а $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — целые числа, $a_1\neq 0$, $a_2+a_3+\ldots+a_k\neq 0$, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — такие натуральные числа, что n_1 и $n_2n_3\ldots n_k$ взаимно простые, имеет бесконечное множество решений в целых числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а в случае, когда $a_1>0$, a_2+a_3+ $+\ldots+a_k<0$, имеет бесконечное множество решений в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполнены. Ввиду того, что натуральные числа n_1 и $n_2\ldots n_k$ являются взаимно простыми, существует, как известно, бесконечное множество систем натуральных чисел r, s таких, что

$$n_1 r - (n_2 n_3 \ldots n_k) s = 1. \tag{78}$$

Пусть

$$t = -(a_2 + a_3 + \ldots + a_k) a_1^{n_1 - 1}, \tag{79}$$

$$x_1 = a_1^{n_2 n_3 \cdots n_k - 1} t^r, \tag{80}$$

$$x_i = a_1^{n_1 n_2 \cdots n_k / n_i} t^{s n_2 n_3 \cdots n_k / n_i} \quad (i = 2, 3, \ldots, k).$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ будут целыми; в случае же когда $a_1 > 0$, $a_2 + a_3 + \ldots + a_k < 0$, будут натуральными, притом, различным системам чисел r, s будут соответствовать различные системы чисел (80).

Наконец, легко проверить, что числа (80) будут удовлетворять уравнению (77). Действительно, согласно (80) и учитывая, что ввиду (78) $rn_1 = sn_2 n_3 \ldots n_k + 1$, а также принимая во внимание (79), имеем:

$$a_1 x_1^{n_1} = a_1 a_1^{n_1 n_2 \cdots n_k - n_1} t^{r n_1} = a_1 a_1^{n_1 n_2 \cdots n_k - n_1} t t^{s n_2 n_3 \cdots n_k} =$$

$$= -(a_2 + a_3 + \ldots + a_k) a_1^{n_1 n_2 \cdots n_k} t^{s n_2 n_3 \cdots n_k},$$

а согласно (80):

$$a_i x_i^{n_i} = a_i a_1^{n_1 n_2 \cdots n_k} t^{s n_2 n_3 \cdots n_k}.$$

Таким образом, наша теорема доказана.

Начиная с Л. Эйлера многие математики занимались нахождением всех решений уравнения

$$x^y = y^x \tag{81}$$

в рациональных положительных числах x и y. Имеем здесь очевидное решение, если x — произвольное рациональное положительное число, а $y = x$. В других решениях $x \neq y$, например, $y > x$.

Итак, предположим, что рациональные положительные x, y, где $y > x$, удовлетворяют уравнению (81). Тогда число $w = \frac{x}{y - x}$ — рациональное > 0.

Вместе с этим $y = \left(1 + \frac{1}{w}\right) x$ и поэтому $x^y = x^{\left(1 + \frac{1}{w}\right) x}$, а так как $x^y = y^x$, то $x^{\left(1 + \frac{1}{w}\right) x} = y^x$, что дает

$x^{1+\frac{1}{w}} = y = \left(1 + \frac{1}{w}\right) x$, откуда $x^{\frac{1}{w}} = 1 + \frac{1}{w}$, следовательно,

$$x = \left(1 + \frac{1}{w}\right)^{w}, \qquad y = \left(1 + \frac{1}{w}\right)^{w+1}. \tag{82}$$

Пусть $\frac{n}{m}$ и $\frac{r}{s}$ — несократимые дроби, равные соответственно числам w и x. На основании (82), имеем $\left(\frac{m+n}{n}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{r}{s}$, откуда $\frac{(m+n)^n}{n^n} = \frac{r^m}{s^m}$. Числа m и n взаимно простые, следовательно, и числа $m+n$ и n, а также $(m+n)^n$ и n^n взаимно простые. Равным образом, числа r и s, а значит, также и числа r^m и s^m являются взаимно простыми. Таким образом, обе части последнего равенства представляют собой несократимые дроби, следовательно, $(m+n)^n = r^m$ и $n^n = s^m$. На основании этих равенств заключаем (см. § 13.13), что существуют натуральные числа k и l такие, что $m+n = k^m$, $r = k^n$ и $n = l^m$, $s = l^n$. Следовательно, $m + l^m = k^m$, откуда $k \geqslant l+1$. Если бы было $m > 1$, мы имели бы $k^m \geqslant (l+1)^m \geqslant l^m + ml^{m-1} + 1 > l^m + m$, следовательно, $k^m > l^m + m$, что невозможно. Итак, $m = 1$, откуда $w = \frac{n}{m} = n$.

Таким образом, формулы (82) дают

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}, \qquad y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{83}$$

где n — натуральное число.

Обратно, легко проверить, что определенные таким образом числа x и y удовлетворяют уравнению (81). Следовательно, все решения уравнения (81) в рациональных числах x, y, где $y > x > 0$, содержатся в формулах (83), где n — произвольное натуральное число.

Из этих формул непосредственно вытекает, что только для $n = 1$ мы получаем решение в натуральных числах, именно $x = 2$, $y = 4$. Итак, уравнение (81) имеет лишь одно решение в натуральных числах x, y, где $y > x$. Но в рациональных числах x и y, где $y > x > 0$, уравнение (81) имеет бесконечное множество решений, именно

$$(2,4), \quad \left(\frac{3^2}{2^2}, \frac{3^3}{2^3}\right), \quad \left(\frac{4^3}{3^3}, \frac{4^4}{3^4}\right), \quad \left(\frac{5^4}{4^4}, \frac{5^5}{4^5}\right), \ldots$$

Так, например,

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}}.$$

Заметим еще, что уравнение (81) имеет лишь одно решение в целых отрицательных числах, где $y > x$, именно, $x = -4$, $y = -2$.

В заключение сформулируем, по всей вероятности, трудную задачу, поставленную В. Мнихом: существуют ли три рациональных числа, сумма и произведение которых равны единице? *)

Подробные доказательства теорем, приведенных в этой книге, а также библиографические указания к ним читатель найдет в книге автора „*Teoria liczb*", т. 2, Варшава, 1959.

---

*) Отрицательный ответ на этот вопрос дал в 1960 г. Дж. В. С. Касселс. См. Acta Arithmetica, 6, стр. 41—52, 1960. Легко доказать, что не существует двух рациональных чисел, сумма и произведение которых равны единице Однако, как доказал А. Шинцель, для всякого натурального числа $k > 3$ существует бесконечное множество систем из k рациональных чисел, сумма и произведение которых равны единице. (*Прим. перев.*)