БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

Ж.-П. СЕРР

Алгебры Ли и группы Ли

Перевод с английского и французского

А. Б. ВОЛЫНСКОГО

Под редакцией

А. Л. ОНИЩИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1969

ИЗДАТЕЛЬСТВО

«МИР»

JEAN-PIERRE SERRE

LIE ALGEBRAS
AND
LIE GROUPS

LECTURES GIVEN AT HARVARD UNIVERSITY
NEW YORK – AMSTERDAM BENJAMIN, 1965

JEAN-PIERRE SERRE

ALGÈBRES DE LIE
SEMI-SIMPLES COMPLEXES

NEW YORK – AMSTERDAM, BENJAMIN, 1966

УДК 512; 519.46

Книга известного французского математика, уже знакомого нашему читателю по переводам его книг „Алгебраические группы и поля классов“ и „Когомологии Галуа“ (изд-во „Мир“, 1968), содержит изложение основ теории алгебр Ли и групп Ли, а также теорию комплексных полупростых алгебр Ли. Наряду с классическим случаем вещественных и комплексных групп Ли она охватывает случай p-адических групп Ли и является единственной в мировой литературе книгой, содержащей подробное изложение теории p-групп с точки зрения классических методов теории групп Ли.

Книга рассчитана на студентов старших курсов и аспирантов. Может быть полезна математикам различных специальностей.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
28-69

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Здесь объединены переводы двух книг Ж.-П. Серра. Части I и II — это перевод (с английского) книги „Алгебры Ли и группы Ли“ (1965), которая представляет собой запись курса лекций, прочитанного Серром в Харвардском университете в 1964 г. Часть III — перевод (с французского) книги „Полупростые комплексные алгебры Ли“ (1966), представляющей собой запись курса лекций, прочитанного им в Алжире в 1965 г.

В связи с объединением двух книг в одну было сочтено целесообразным ввести единую систему ссылок на предыдущие теоремы и определения (например, „теорема 3.1.2.1“ — это теорема 1 из § 2, гл. I, ч. III). При ссылках на теорему той же части (главы, параграфа) номер части (главы, параграфа) опускается.

Часть I

Алгебры Ли

Здесь излагаются основные общие теоремы об алгебрах Ли в объеме примерно первой главы книги Бурбаки.

К этому я присовокупил некоторые результаты о свободных алгебрах Ли, полезные как в самой теории Ли (формула Кэмпбелла — Хаусдорфа), так и в приложениях к про-p-группам.

Недостаток времени не позволил включить сюда более развитую теорию полупростых алгебр Ли (корни, веса и т. д.); все-таки в последней главе разобран типичный случай алгебры $sl(n)$.

В работе над этой частью мне оказали помощь Ф. Рэгги и Дж. Тейт. Я хотел бы поблагодарить их, а также Сью Голэн, отпечатавшую обе части рукописи.

Ж.-П. С.

Харвард
осень 1964

Глава I

АЛГЕБРЫ ЛИ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Пусть k — коммутативное кольцо с единицей и A — некоторый k-модуль. Мы будем называть этот модуль *k-алгеброй*, если задано k-билинейное отображение $A \times A \to A$ (т. е. k-гомоморфизм $A \otimes_k A \to A$).

Как обычно, определяются левые, правые, двусторонние идеалы и факторалгебры.

Определение 1. *Алгеброй Ли* над k называется k-алгебра A, обладающая следующими свойствами:

1) гомоморфизм $A \otimes_k A \to A$ допускает разложение

$$A \otimes_k A \to \overset{2}{\wedge} A \to A.$$

Иными словами, если обозначить образ пары (x, y) при этом гомоморфизме через $[x, y]$, то

$$[x, x] = 0 \text{ для всех } x \in A;$$

2) (тождество Якоби)

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$$

Заметим, что из условия 1) вытекает равенство $[x, y] = -[y, x]$.

Примеры. (i) Пусть k — поле, полное относительно некоторого нормирования, G — аналитическая группа над k и $\mathfrak{g}$ — множество касательных векторов к G в единице. Как будет показано ниже, на $\mathfrak{g}$ существует естественная структура алгебры Ли.

(Относительно алгебраического аналога этой ситуации см. пример (vi) ниже.)

(ii) Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольный k-модуль, и пусть $[x, y] = 0$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$. В этом случае $\mathfrak{g}$ называется *коммутативной* алгеброй Ли.

(iii) Пусть $\mathfrak{g}$ то же, что и в предыдущем примере. Рассмотрим модуль $\mathfrak{g} \oplus \overset{2}{\wedge} \mathfrak{g}$ и положим

$$\begin{gathered}[x, y] = x \wedge y,\\ [x, y \wedge z] = 0,\\ [x \wedge y, z] = 0,\\ [x \wedge y, z \wedge t] = 0\end{gathered}$$

для любых $x, y, z, t \in \mathfrak{g}$. Модуль $\mathfrak{g} \oplus \overset{2}{\wedge} \mathfrak{g}$ с такой операцией есть алгебра Ли.

(iv) Пусть A — ассоциативная алгебра над k. Положим $[x, y] = xy - yx$. Очевидно, что алгебра A с таким умножением удовлетворяет аксиомам 1) и 2).

Определение 2. Пусть A — алгебра над k. *Дифференцированием* D: $A \to A$ называется k-линейное отображение, для которого

$$D(x \cdot y) = Dx \cdot y + x \cdot Dy.$$

(v) Множество $\operatorname{Der}(A)$ всех дифференцирований алгебры A является алгеброй Ли с операцией $[D, D'] = DD' - D'D$.

Тот факт, что $[D,D']$ есть дифференцирование, доказывается прямым вычислением:

$$\begin{aligned} &[D,D'](x \cdot y) = DD'(x \cdot y) - D'D(x \cdot y) =\\ &= D(D'x \cdot y + x \cdot D'y) - D'(Dx \cdot y + x \cdot Dy) =\\ &= DD'x \cdot y + D'x \cdot Dy + Dx \cdot D'y + x \cdot DD'y -\\ &- D'Dx \cdot y - Dx \cdot D'y - D'x \cdot Dy - x \cdot D'Dy =\\ &= DD'x \cdot y + x \cdot DD'y - DD'x \cdot y - x \cdot D'Dy =\\ &= [D, D']x \cdot y + x \cdot [D, D']y.\end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли. Для каждого* $x \in \mathfrak{g}$ *определим отображение* $\operatorname{ad} x$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *формулой* $\operatorname{ad} x(y) = [x, y]$. *Тогда*

(1) *отображение* $\operatorname{ad} x$ *есть дифференцирование алгебры* $\mathfrak{g}$;

(2) *отображение* $x \mapsto \operatorname{ad} x$ *есть гомоморфизм алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *в алгебру Ли* $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$.

Доказательство.

$$\operatorname{ad} x([y, z]) = [x, [y, z]] = -[y,[z, x]] - [z, [x, y]] = \\ = [[x, y], z] + [y, [x, z]] = [\operatorname{ad} x (y), z] + [y, \operatorname{ad} x (z)].$$

Таким образом, утверждение (1) эквивалентно тождеству Якоби.

Далее,

$$\operatorname{ad}[x,y](z) = [[x, y], z] = -[[y, z], x] - [[z, x], y] = \\ = [x,[y, z]] - [y, [x, z]] = \operatorname{ad} x \operatorname{ad} y(z) - \operatorname{ad} y \operatorname{ad} x(z) = \\ = [\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y](z).$$

Следовательно, утверждение (2) также эквивалентно тождеству Якоби.

(vi) *Алгебра Ли алгебраической матричной группы.* Пусть k — коммутативное кольцо с единицей и $A = M(n,k)$ — алгебра квадратных матриц порядка n над k. *Нулем* системы многочленов $\{P_\alpha(X_{ij})\}$ (с коэффициентами в k) называется матрица $X = (x_{ij})$, такая, что $x_{ij} \in k$ и $P_\alpha(x_{ij}) = 0$ для всех α. Обозначим через $G(k)$ множество всех нулей данной системы $\{P_\alpha\}$. Аналогичным образом для любой ассоциативной коммутативной k-алгебры k' с единицей рассмотрим множество $G(k') \subset M(n, k')$.

Определение 4. Мы скажем, что система $\{P_\alpha\}$ определяет *алгебраическую группу* над k, если для любой ассоциативной коммутативной k-алгебры k' с единицей $G(k')$ есть подгруппа в $GL(n, k')$[1]).

Примером алгебраической группы может служить *ортонормальная группа* (определяющее уравнение: ${}^tX \cdot X = 1$, где ${}^tX$ — матрица, транспонированная к X).

---

[1]) Через $GL(n, k')$, как обычно, обозначается множество всех матриц из $M(n, k')$, определитель которых есть *обратимый* элемент в k'. — *Прим. перев.*

Пусть, далее, k' — свободная (как k-модуль) алгебра над k с базисом $\{1, \varepsilon\}$, где $\varepsilon^2 = 0$, т. е. $k' = k[\varepsilon]$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *совокупность всех матриц* $X \in M(n, k)$, *таких, что* $1 + \varepsilon X \in G(k[\varepsilon])$. *Тогда* $\mathfrak{g}$ *является подалгеброй Ли алгебры* $M(n, k)$.

Доказательство. Мы должны установить, что включение $X, Y \in \mathfrak{g}$ влечет включение $\lambda X + \mu Y \in \mathfrak{g}$, где $\lambda, \mu \in k$ и $XY - YX \in \mathfrak{g}$. Заметим сначала, что по определению условие $P_\alpha(1 + \varepsilon X) = 0$ для всех α означает, что $X \in \mathfrak{g}$. Так как $\varepsilon^2 = 0$, мы имеем $P_\alpha(1 + \varepsilon X) = P_\alpha(1) + dP_\alpha(1)\varepsilon X$[1]. Но $1 \in G(k)$, так что $P_\alpha(1) = 0$. Следовательно,

$$P_\alpha(1 + \varepsilon X) = dP_\alpha(1)\varepsilon X,$$

что доказывает первое утверждение.

Введем теперь вспомогательную алгебру $k'' = k[\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon \cdot \varepsilon']$, где $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 0$ и $\varepsilon\varepsilon' = \varepsilon'\varepsilon$; другими словами, $k'' = k[\varepsilon] \otimes_k k[\varepsilon']$. Пусть $X, Y \in \mathfrak{g}$. Тогда

$$\begin{aligned}
g &= 1 + \varepsilon X \in G(k[\varepsilon]) \subset G(k''),\\
g' &= 1 + \varepsilon' Y \in G(k[\varepsilon']) \subset G(k''),\\
gg' &= (1 + \varepsilon X)(1 + \varepsilon' Y) = 1 + \varepsilon X + \varepsilon' Y + \varepsilon\varepsilon' XY,\\
g'g &= 1 + \varepsilon X + \varepsilon' Y + \varepsilon\varepsilon' YX.
\end{aligned}$$

Если положить $Z = [X, Y]$, то в силу написанных выше формул будет иметь место равенство $gg' = g'g(1 + \varepsilon\varepsilon' Z)$.

Поскольку $gg', g'g \in G(k'')$, отсюда вытекает, что

$$1 + \varepsilon\varepsilon' Z \in G(k'').$$

Но подалгебра $k[\varepsilon\varepsilon']$ алгебры k'' изоморфна $k[\varepsilon]$ [над k], поэтому $1 + \varepsilon Z \in G(k[\varepsilon])$ и, следовательно, $Z \in \mathfrak{g}$, что и требовалось доказать.

---

[1]) Символ $dP_\alpha(1)X$ есть сокращенное обозначение выражения $\sum_{i,j} \frac{\partial P_\alpha}{\partial X_{ij}}(1)\, x_{ij}$. — *Прим. перев.*

Пример. Алгебра Ли ортонормальной группы есть множество всех матриц X, для которых $(1+\varepsilon X)\times\times(1+\varepsilon{}^tX)=1$, т. е. $X+{}^tX=0$.

(vii) *Построение новых алгебр Ли, исходя из заданных алгебр.*

а) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{a}$ — ее идеал. Фактор-алгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ является алгеброй Ли.

б) Пусть $\{\mathfrak{g}_i\}_{i\in I}$ — семейство алгебр Ли. Прямое произведение $\prod\limits_{i\in I}\mathfrak{g}_i$ есть также алгебра Ли.

в) Предположим, что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — ее идеал и $\mathfrak{b}$ — ее подалгебра. Мы будем говорить, что $\mathfrak{g}$ — *полупрямое произведение* $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}$, если каноническое отображение $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ индуцирует изоморфизм $\mathfrak{b}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ [1]). Пусть $\mathfrak{g}$ — полупрямое произведение $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}$. Поскольку $\mathfrak{a}$ — идеал, постольку для любого $x\in\mathfrak{b}$ отображение $\operatorname{ad}x$ переводит $\mathfrak{a}$ в себя, т. е. ограничение $\operatorname{ad}x$ на $\mathfrak{a}$ является дифференцированием $\mathfrak{a}$. Таким образом, имеется гомоморфизм алгебр Ли $\theta\colon\mathfrak{b}\to\operatorname{Der}(\mathfrak{a})$.

Теорема 6. *Структура алгебры Ли $\mathfrak{g}$ однозначно определяется заданием $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и θ, причем их можно задавать произвольно.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ (как k-модулей) и поскольку умножение в $\mathfrak{g}$ билинейно и антикоммутативно, достаточно рассмотреть произведение $[x, y]$ для следующих трех случаев:

$$x,\ y\in\mathfrak{a},$$
$$x,\ y\in\mathfrak{b},$$
$$x\in\mathfrak{b},\quad y\in\mathfrak{a}.$$

В первом случае произведение $[x, y]$ есть произведение в $\mathfrak{a}$, во втором — в $\mathfrak{b}$, а в последнем случае

$$[x, y]=\operatorname{ad}x(y)=\theta(x)(y).$$

Обратно, пусть даны алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и гомоморфизм Ли $\theta\colon\mathfrak{b}\to\operatorname{Der}(\mathfrak{a})$. С помощью приведенной

[1]) Иными словами, $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ как k-модулей. — *Прим. перев.*

выше формулы мы можем построить алгебру $\mathfrak{g}$ на прямой сумме модулей $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ так, чтобы $\theta(x) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x$, где $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x$ — ограничение $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ на $\mathfrak{a}$, для $x \in \mathfrak{b}$. Нам остается только проверить, что относительно введенной операции в $\mathfrak{g}$ имеет место тождество Якоби:

$$J(x, y, z) = [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Это достаточно сделать в следующих четырех случаях:

а) $x, y, z \in \mathfrak{a}$; тогда $J(x, y, z) = 0$, поскольку $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли;

б) $x, y \in \mathfrak{a}$ и $z \in \mathfrak{b}$; в этом случае $J(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \theta(z)$ — дифференцирование в $\mathfrak{a}$;

в) $x \in \mathfrak{a}$, $y, z \in \mathfrak{b}$; в данном случае

$$J(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \theta([y, z]) = \theta(y)\,\theta(z) - \theta(z)\,\theta(y);$$

г) $x, y, z \in \mathfrak{b}$; тогда $J(x, y, z) = 0$, поскольку $\mathfrak{b}$ — алгебра Ли.

Глава II

ФИЛЬТРОВАННЫЕ ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

§ 1. Тождества с коммутаторами

Пусть G — группа и $x,\ y,\ z \in G$. Мы примем следующие обозначения:

(i) $x^y = y^{-1}xy$; тогда отображение $G \to G$, задаваемое правилом $x \longmapsto x^y$, есть автоморфизм группы G, и выполняется соотношение $(x^y)^z = x^{yz}$;

(ii) $(x,\ y) = x^{-1}y^{-1}xy$; мы будем называть $(x,\ y)$ *коммутатором* элементов x и y.

Предложение 1. *Имеют место следующие тождества*:

1) $xy = yx^y = yx\,(x,\ y)$, $x^y = x\,(x,\ y)$, $(x,\ x) = 1\ (y,\ x) = {} = (x \cdot y)^{-1}$;

2) $(x,\ yz) = (x,\ z)\,(x,\ y)^z$;

2′) $(xy,\ z) = (x,\ z)^y\,(y,\ z)$;

3) $(x^y,\ (y,\ z))\,(y^z,\ (z,\ x))\,(z^x,\ (x,\ y)) = 1$.

Доказательство. 1) Очевидно.

2) В силу (i) и 1) имеем

$$x\,(x,\ yz) = x^{yz} = (x^y)^z = [x,\ (x,\ y)]^z = {} \\ = x^z\,(x,\ y)^z = x\,(x,\ z)\,(x,\ y)^z,$$

откуда

$$(x,\ yz) = (x,\ z)\,(x,\ y)^z.$$

2′) $$xy\,(xy,\ z) = (xy)^z = x^z y^z = x\,(x,\ z)\,y\,(y,\ z) = {} \\ = xy\,(x,\ z)^y\,(y,\ z),$$

откуда

$$(xy,\ z) = (x,\ z)^y\,(y,\ z).$$

3) $$(x^y,\ (y,\ z)) = (y^{-1}x^{-1}yz^{-1}y^{-1}zyy^{-1}xyy^{-1}z^{-1}yz = {} \\ = y^{-1}x^{-1}yz^{-1}y^{-1}zxz^{-1}yz.$$

Положим $u = zxz^{-1}yz$, $v = xyx^{-1}zx$, $w = yzy^{-1}xy$. Тогда $(x^y, (y, z)) = w^{-1}u$.

Аналогично (циклическая перестановка)

$$(y^z, (z, x)) = u^{-1}v,$$
$$(z^x, (x, y)) = v^{-1}w,$$

и, следовательно,

$$(x^y, (y, z))(y^z, (z, x))(z^x, (x, y)) = 1, \text{ ч. т. д.}$$

В качестве приложения доказанных тождеств получаем следующее утверждение.

Пусть A и B — подгруппы группы G. Обозначим через (A, B) подгруппу в G, порожденную элементами вида (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$. Если A, B, C — нормальные подгруппы в G, то (A, B) также является нормальной подгруппой, и имеет место включение

$$(A, (B, C)) \subset (B, (C, A))(C, (A, B)).$$

Это вытекает из тождества 3).

§ 2. Фильтрация на группе

Определение 1. *Фильтрацией* на группе G называется отображение w: $G \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(1) $w(1) = +\infty$;
(2) $w(x) > 0$ для всех $x \in G$;
(3) $w(xy^{-1}) \geqslant \inf(w(x), w(y))$;
(4) $w((x, y)) \geqslant w(x) + w(y)$.

Из аксиомы (3) вытекает, что $w(y^{-1}) = w(y)$. Для $\lambda \in \mathbf{R}_+$ положим

$$G_\lambda = \{x \in G \mid w(x) \geqslant \lambda\},$$
$$G_\lambda^+ = \{x \in G \mid w(x) > \lambda\}.$$

Очевидно, G_λ и G_λ^+ являются подгруппами группы G. Более того, если $x \in G_\lambda$ и $y \in G$, то $x^y \equiv x \pmod{G_\lambda^+}$. Действительно,

$$w((x, y)) \geqslant \lambda + w(y) > \lambda.$$

Сказанное выше означает, что G_λ — нормальная подгруппа G, а поскольку $G_\lambda^+ = \bigcup_{\mu > \lambda} G_\mu$, группа G_λ^+ — тоже нормальная подгруппа в G.

Семейство $\{G_\lambda\}$ (соответственно $\{G_\lambda^+\}$) является убывающим, т. е. $G_\lambda \supset G_\mu$ (соответственно $G_\lambda^+ \supset G_\mu^+$) при $\lambda < \mu$.

Определение 2. Для каждого $\alpha \geqslant 0$ положим $\mathrm{gr}_\alpha G = G_\alpha / G_\alpha^+$ и $\mathrm{gr}\, G = \sum_\alpha \mathrm{gr}_\alpha G$. Будем называть $\mathrm{gr}\, G$ *присоединенной группой* группы G.

Предложение 3. 1) *Группа* $\mathrm{gr}_\alpha G$ *абелева.*

2) *Если для каждого* $x \in G_\alpha$ *обозначить через* $\bar{x}$ *соответствующий элемент в* $\mathrm{gr}_\alpha G$, *то* $\overline{(x^y)} = \bar{x}$ *для всех* $y \in G$.

3) *Отображение* $c_{\alpha\beta}$: $G_\alpha \times G_\beta \to G_{\alpha+\beta}$, *определенное правилом* $x, y \mapsto (x, y)$, *индуцирует билинейное отображение* $c_{\alpha\beta}'$: $\mathrm{gr}_\alpha G \times \mathrm{gr}_\beta G \to \mathrm{gr}\, G_{\alpha+\beta}$.

4) *Отображения* $c_{\alpha\beta}$ *могут быть продолжены по линейности до отображения* c: $\mathrm{gr}\, G \times \mathrm{gr}\, G \to \mathrm{gr}\, G$, *и это отображение задает структуру алгебры Ли на* $\mathrm{gr}\, G$.

Доказательство. 1) Это утверждение вытекает из определения 1, (4).

2) Это было доказано выше.

3) Пусть $x \in G_\alpha$ и $y \in G_\beta$. Тогда $(x, y) \in G_{\alpha+\beta}$, и мы должны показать, что $(xu, y) \equiv (x, y) \pmod{G_{\alpha+\beta}^+}$ и $(x, yv) \equiv (x, y) \pmod{G_{\alpha+\beta}^+}$ для любых $u \in G_\alpha^+$ и $v \in G_\beta^+$. В силу 1.1, 2′) и в силу (3) имеем

$$\overline{(xu, y)} = \overline{(x, y)^u} + \overline{(u, y)} = \overline{(x, y)},$$
$$\overline{(x, yv)} = \overline{(x, v)} + \overline{(x, y)^v} = \overline{(x, y)}.$$

Пусть $x, x' \in G_\alpha$ и $y, y' \in G_\beta$. Тогда

$$\overline{(xx', y)} = \overline{(x, y)^{x'}} + \overline{(x', y)} = \overline{(x, y)} + \overline{(x', y)},$$
$$\overline{(x, y'y)} = \overline{(x, y)} + \overline{(x, y')^y} = \overline{(x, y)} + \overline{(x, y')}.$$

4) Пусть $\xi \in \mathrm{gr}_\alpha G$ и $\eta \in \mathrm{gr}_\beta G$. Выберем элементы $x \in G_\alpha$ и $y \in G_\beta$, такие, что $\bar{x} = \xi$ и $\bar{y} = \eta$. Тогда по определению $\overline{(x, y)} = \bar{c}_{\alpha, \beta}(\xi, \eta)$; мы будем записывать это выражение также в виде $[\xi, \eta]$. Далее, если $\xi \in \mathrm{gr}\, G$, то $\xi = \sum \xi_\alpha$, где $\xi_\alpha \in \mathrm{gr}_\alpha G$. Доказать равенство $[\xi, \xi] = 0$ — это значит установить, что $[\xi_\alpha, \xi_\alpha] = 0$ и $[\xi_\alpha, \xi_\beta] = -[\xi_\beta, \xi_\alpha]$. Для каждого α выберем $x_\alpha \in G_\alpha$, такое, что $\bar{x}_\alpha = \xi_\alpha$. Имеем

$$[\xi_\alpha, \xi_\alpha] = \overline{(x_\alpha, x_\alpha)} = \bar{1} = 0$$

и

$$[\xi_\alpha, \xi_\beta] = \overline{(x_\alpha, x_\beta)} = \overline{(x_\beta, x_\alpha)^{-1}} = -[\xi_\beta, \xi_\alpha].$$

При доказательстве тождества Якоби $J(x, y, z) = 0$ можно (ввиду линейности J по каждому аргументу) ограничиться случаем $\xi \in \mathrm{gr}_\alpha G$, $\eta \in \mathrm{gr}_\beta G$ и $\zeta \in \mathrm{gr}_\gamma G$. Выберем $x \in G_\alpha$, $y \in G_\beta$ и $z \in G_\gamma$, такие, что $\bar{x} = \xi$, $\bar{y} = \eta$ и $\bar{z} = \xi$. Тогда в силу предложения 1.1, 3),

$$J(\xi, \eta, \zeta) = \overline{(x^y, (y, z))(y^z, (z, x))(z^x, (x, y))} = \bar{1} = 0,$$

поскольку $\overline{x^y} = \xi$, $\overline{y^x} = \eta$ и $\overline{z^x} = \zeta$.

§ 3. Дискретные фильтрации группы

Предложение 1. *Для всякой группы G существует взаимно однозначное соответствие между*

1) *фильтрациями группы w: $G \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, такими, что $w(G) \subset \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$,*

2) *убывающими последовательностями $\{G_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ подгрупп группы G, такими, что*

(i) $G_1 = G$,

(ii) $(G_n, G_m) \subset G_{n+m}$.

Доказательство. По каждой дискретной фильтрации очевидным образом восстанавливается семейство подгрупп $\{G_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ со свойствами (i) и (ii).

Обратно, пусть задано такое семейство. Определим фильтрацию w: $G \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, полагая для каждого $x \in G$

$$w(x) = \sup_{x \in G_n} \{n\}.$$

Ясно, что $w(1) = +\infty$ и $w(x) > 0$ для всех $x \in G$, а также что $w(x) = w(x^{-1})$. Пусть теперь $w(x) = n$, $w(y) = m$, т. е. $x \in G_n$, $y \in G_m$, но $x \notin G_{n+1}$ и $y \notin G_{m+1}$. Допустим, что $n \leqslant m$. Тогда $G_m \subset G_n$, и, следовательно, $xy^{-1} \in G_n$, т. е.

$$w(xy^{-1}) \geqslant \inf\{w(x), w(y)\}.$$

В случае $n = +\infty$ или $m = +\infty$ это неравенство очевидно.

Наконец, неравенство $w((x, y)) \geqslant w(x) + w(y)$ непосредственно вытекает из (ii), ч. т. д.

Пример. *Убывающий центральный ряд группы G.* Положим $G_1 = G$ и определим по индукции G_{n+1} формулой

$$G_{n+1} = (G, G_n).$$

Полученная последовательность подгрупп $\{G_n\}$ удовлетворяет условиям (i) и (ii) предложения 1. Действительно, (i) имеет место по условию. Чтобы доказать (ii), применим индукцию по n.

При $n = 1$ имеем $(G, G_m) \subset G_{m+1}$ по определению. При $n > 1$

$$\begin{aligned}(G_n, G_m) &= ((G, G_{n-1}), G_m) \subset \\ &\subset (G, (G_{n-1}, G_m))(G_{n-1}, (G, G_m)) \subset \\ &\subset (G, G_{n+m-1})(G_{n-1}, G_{m+1}) \subset G_{n+m}G_{n+m} \subset G_{n+m}.\end{aligned}$$

Обратно, если $\{H_n\}$ — убывающая последовательность подгрупп группы G, удовлетворяющая условиям (i) и (ii), то $H_n \supset G_n$ для каждого n. Доказывается это также по индукции. При $n = 1$ по определению $H_1 \supset G_1$, а при $n > 1$ имеют место включения

$$H_{n+1} \supset (H, H_n) \supset (G, G_n) = G_{n+1}.$$

§ 4. Фильтрации группы $GL(n)$

Пусть k — некоторое поле с неархимедовым абсолютным значением $|x| = \rho^{v(x)}$ [1]. Пусть A_v — кольцо нормирования v, $\mathfrak{m}_v$ — его идеал и $k_v = A_v/\mathfrak{m}_v$.

Для всякого натурального числа n обозначим через G множество всех квадратных матриц g порядка n с коэффициентами в A_v, таких, что $g \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_v}$ (т. е. $g_{ij} \equiv \delta_{ij} \pmod{\mathfrak{m}_v}$, где $g = (g_{ij})$). Таким образом, если $g \in G$, то $g = 1 + x$, где x — матрица с коэффициентами в $\mathfrak{m}_v$. Ясно, что множество G является группой, поскольку G есть ядро гомоморфизма

$$GL(n, A_v) \to GL(n, k_v).$$

Для каждой матрицы $X \in M(n, k)$, $X = (x_{ij})$, положим $v(X) = \inf\{v(x_{ij})\}$ и определим отображение $w \colon G \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ равенством $w(g) = v(x)$, где $g = 1 + x$.

Теорема 1. *Отображение w является фильтрацией группы G.*

Доказательство. Соотношения $w(1) = +\infty$ и $w(g) > 0$ для всех $g \in G$ очевидны.

Пусть $G_\lambda = \{g \in G \mid w(g) \geqslant \lambda\}$. Рассмотрим для каждого $\lambda > 0$ идеал $\mathfrak{a}_\lambda$ в кольце A_v:

$$\mathfrak{a}_\lambda = \{x \in k \mid v(x) \geqslant \lambda\}.$$

Понятно, что G_λ есть ядро канонического гомоморфизма

$$GL(n, A_v) \to GL(n, A_v/\mathfrak{a}_\lambda).$$

Следовательно, G_λ — подгруппа в G, и, значит, условие (3) выполнено.

Для проверки условия (4), т. е. включения $(G_\lambda, G_\mu) \subset G_{\lambda+\mu}$, запишем элементы $g \in G_\lambda$ и $h \in G_\mu$ в следующем виде:

$$g = 1 + x \quad \text{и} \quad h = 1 + y.$$

---

[1] См. ч. II, гл. I. — *Прим. перев.*

Мы должны показать, что $hg \equiv gh \pmod{G_{\lambda+\mu}}$. Но

$$hg = 1 + x + y + yx,$$
$$gh = 1 + x + y + xy,$$

причем коэффициенты матриц xy и yx лежат в $\mathfrak{a}_{\lambda+\mu}$. Элементы hg и gh имеют поэтому один и тот же образ в группе $GL(n, A_v/\mathfrak{a}_{\lambda+\mu})$, что и означает их сравнимость по модулю $G_{\lambda+\mu}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Описать алгебру Ли группы $\operatorname{gr} G$.

2. Доказать, что $G = \varprojlim G/G_\lambda$, если k — полное поле[1]).

---

[1]) То есть k является полным метрическим пространством относительно своей метрики $|x| = \rho^{v(x)}$. — *Прим. перев.*

Глава III

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Определение и построение универсальной обертывающей алгебры

Пусть k — коммутативное кольцо с единицей и $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над кольцом k.

Определение 1. Назовем *универсальной обертывающей алгеброй* алгебры $\mathfrak{g}$ отображение $\varepsilon\colon \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$, где $U\mathfrak{g}$ — ассоциативная k-алгебра с единицей, обладающее следующими свойствами:

1) ε есть гомоморфизм алгебр Ли (т. е. ε k-линейно и $\varepsilon([x, y]) = \varepsilon x \cdot \varepsilon y - \varepsilon y \cdot \varepsilon x$);

2) для всякой ассоциативной алгебры A с единицей и для всякого гомоморфизма алгебр Ли $\alpha\colon \mathfrak{g} \to A$ существует единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр $\varphi\colon U\mathfrak{g} \to A$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha"'] & U\mathfrak{g} \arrow[dl, "\varphi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

коммутативна. (Иными словами, имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, LA) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}}(U\mathfrak{g}, A),$$

где LA обозначает алгебру Ли, ассоциированную с A, см. гл. I, пример (iv).)

То, что алгебра $U\mathfrak{g}$, если она существует, определяется единственным образом с точностью до изоморфизма, очевидно. Для доказательства ее существования рассмотрим *тензорную алгебру* $T\mathfrak{g}$ над $\mathfrak{g}$. Напомним, что $T\mathfrak{g} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n\mathfrak{g}$, где $T^0\mathfrak{g} = k$ и $T^n\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{g} = \overset{n}{\otimes}\mathfrak{g}$ при

$n>0$. Для любой ассоциативной алгебры A с единицей имеет место канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}}(\mathfrak{g}, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}}(T\mathfrak{g}, A).$$

Обозначим через I двусторонний идеал в $T\mathfrak{g}$, порожденный элементами вида $[x, y]-x\otimes y+y\otimes x$, $x, y\in\mathfrak{g}$, и положим $U\mathfrak{g}=T\mathfrak{g}/I$.

Теорема 2. *Пусть* ε: $\mathfrak{g}\to U\mathfrak{g}$ — *композиция отображений* $\mathfrak{g}\to T^1\mathfrak{g}\to T\mathfrak{g}\to U\mathfrak{g}$. *Тогда пара* $(U\mathfrak{g}, \varepsilon)$ *является универсальной обертывающей алгеброй для* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. В самом деле, пусть задан некоторый гомоморфизм α алгебры $\mathfrak{g}$ в ассоциативную алгебру A. Так как α линейно над k, это отображение продолжается до гомоморфизма ψ: $T\mathfrak{g}\to A$. При этом ясно, что $\psi(I)=0$, а потому ψ определяет отображение φ: $U\mathfrak{g}\to A$. Тем самым свойство универсальности алгебры $U\mathfrak{g}$ доказано, поскольку φ восстанавливается по α единственным образом.

Замечание. Пусть E — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль (т. е. k-модуль, снабженный билинейным отображением $\mathfrak{g}\times E\to E$, таким, что $[x, y]e=x(ye)-y(xe)$, где $x, y\in\mathfrak{g}$ и $e\in E$). Отображение $\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(E, E)$, определяющее на E структуру $\mathfrak{g}$-модуля, является гомоморфизмом алгебр Ли, поэтому оно продолжается до гомоморфизма ассоциативных алгебр $U\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(E, E)$, так что E становится *левым* $U\mathfrak{g}$-*модулем*. Легко понять, что таким образом мы получаем *изоморфизм* категории $\mathfrak{g}$-модулей на категорию левых $U\mathfrak{g}$-модулей.

Упражнение (Бергман). Доказать, что $U\mathfrak{g}=k$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}=0$. [*Указание*: использовать присоединенное представление.]

§ 2. Функториальные свойства

1) *Если* $\mathfrak{g}=\varinjlim\mathfrak{g}_a$, *то* $U\mathfrak{g}=\varinjlim U\mathfrak{g}_a$.

2) *Пусть* $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_2$ — *прямое произведение алгебр Ли (т. е.* $\mathfrak{g}_1$ *и* $\mathfrak{g}_2$ *коммутируют в* $\mathfrak{g}$). *Тогда* $U\mathfrak{g}=U\mathfrak{g}_1\otimes_k U\mathfrak{g}_2$.

3) *Пусть k' — расширение поля k (т. е. k' — коммутативная ассоциативная k-алгебра с единицей), и пусть $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k k'$. Тогда $U\mathfrak{g}' = U\mathfrak{g} \otimes_k k'$.*

Доказательство свойства 2). Нам заданы гомоморфизмы $\varepsilon_i\colon \mathfrak{g}_i \to U\mathfrak{g}_i$, $i = 1, 2$. Рассмотрим отображение $f\colon \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}_1 \otimes_k U\mathfrak{g}_2$, задаваемое формулой

$$f(x) = \varepsilon_1(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes \varepsilon_2(x_2),$$

где $x = x_1 + x_2$ и $x_1 \in \mathfrak{g}_1$, $x_2 \in \mathfrak{g}_2$. Отображение f есть гомоморфизм алгебр Ли, поскольку $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ коммутируют в $\mathfrak{g}$. Следовательно, f индуцирует гомоморфизм ассоциативных алгебр $\psi\colon U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}_1 \otimes_k U\mathfrak{g}_2$.

С другой стороны, имеют место гомоморфизмы

$$\mathfrak{g}_i \to \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}, \quad i = 1, 2,$$

индуцирующие гомоморфизмы $\varphi_i\colon U\mathfrak{g}_i \to U\mathfrak{g}$. Поскольку $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ коммутируют, $\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) = \varphi_2(x_2)\varphi_1(x_1)$ для всех $x_1 \in \mathfrak{g}_1$, $x_2 \in \mathfrak{g}_2$[1]).

Определим, наконец, отображение $\varphi\colon U\mathfrak{g}_1 \otimes U\mathfrak{g}_2 \to U\mathfrak{g}$, полагая $\varphi(x_1 \otimes x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$. В силу сказанного выше φ есть гомоморфизм ассоциативных алгебр, причем по построению $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ и $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$.

Аналогично, исходя из категорного определения универсальной обертывающей алгебры, доказываются свойства 1) и 3).

§ 3. Симметрическая алгебра модуля

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольный k-модуль. Положим $[x, y] = 0$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$. В этом случае универсальная обертывающая алгебра $U\mathfrak{g}$ называется *симметрической алгеброй* k-модуля $\mathfrak{g}$ и обозначается $S\mathfrak{g}$.

[1]) А следовательно, и для всех $x_1 \in U\mathfrak{g}_1$, $x_2 \in U\mathfrak{g}_2$, так как $\mathfrak{g}_i$ порождает $U\mathfrak{g}_i$. — *Прим. перев.*

Алгебру $S\mathfrak{g}$ можно определить также как наибольшую коммутативную факторалгебру алгебры $T\mathfrak{g}$. Иными словами,

$$S\mathfrak{g} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n\mathfrak{g},$$

где $S^n\mathfrak{g} = \left(\overset{n}{\otimes}\,\mathfrak{g}\right)\Big/I$. (Здесь I обозначает идеал, порожденный элементами вида $a - \sigma a$, где σ — подстановка порядка n и $a \in \overset{n}{\otimes}\,\mathfrak{g}$.)

Рассмотрим пример свободного k-модуля $\mathfrak{g}$ с базисом $(e_i)_{i \in I}$.

Обозначим через S кольцо многочленов над k от переменных $(X_i)_{i \in I}$. Пусть ε: $\mathfrak{g} \to S$ — гомоморфизм k-модулей, однозначно определяемый равенствами $\varepsilon(e_i) = X_i$, $i \in I$. Легко проверяется, что пара (ε, S) обладает свойством универсальности (определение 1.1), а именно, ε есть k-линейное отображение и $\varepsilon(x)\varepsilon(y) = \varepsilon(y)\varepsilon(x)$. Далее, всякому k-линейному отображению f: $\mathfrak{g} \to A$, для которого $f(x)f(y) = f(y)f(x)$ (здесь A — коммутативная ассоциативная k-алгебра с единицей), отвечает единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр f^*: $S \to A$, такой, что $f^* \circ \varepsilon = f$. В самом деле, если $P(X_i) \in S$, то $f^*(P) = P(f(e_i))$. Приведенное рассуждение показывает, что $S\mathfrak{g}$ канонически отождествляется с алгеброй многочленов $S = k\left[(X_i)_{i \in I}\right]$.

Если множество I линейно упорядочено, то в $S\mathfrak{g}$ можно выделить базис, состоящий из одночленов $e_{i_1} \ldots e_{i_n}$, $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_n$, $n \geqslant 0$.

§ 4. Фильтрация алгебры $U\mathfrak{g}$

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над k и $U\mathfrak{g}$ — ее универсальная обертывающая алгебра.

Обозначим через $U_n\mathfrak{g}$ подмодуль в $U\mathfrak{g}$, порожденный произведениями $\varepsilon(x_1) \ldots \varepsilon(x_m)$, где $m \leqslant n$ и

$x_i \in \mathfrak{g}$. Имеем

$$U_0\mathfrak{g} = k,$$
$$U_1\mathfrak{g} = k + \varepsilon(\mathfrak{g})$$

и

$$U_0\mathfrak{g} \subset U_1\mathfrak{g} \subset \ldots \subset U_n\mathfrak{g} \subset U_{n+1}\mathfrak{g} \subset \ldots .$$

Положим

$$\operatorname{gr} U\mathfrak{g} = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{gr}_n U\mathfrak{g},$$

где

$$\operatorname{gr}_n U\mathfrak{g} = U_n\mathfrak{g}/U_{n-1}\mathfrak{g}.$$

Отображение $U_p\mathfrak{g} \times U_q\mathfrak{g} \to U_{p+q}\mathfrak{g}$, задаваемое правилом $(a, b) \mapsto ab$, дает при факторизации билинейное отображение

$$\operatorname{gr}_p U\mathfrak{g} \times \operatorname{gr}_q U\mathfrak{g} \to \operatorname{gr}_{p+q} U\mathfrak{g}.$$

Алгебра $\operatorname{gr} U\mathfrak{g}$ с таким законом композиции называется *градуированной алгеброй*, ассоциированной с $U\mathfrak{g}$. Эта алгебра, очевидно, ассоциативна и обладает единицей.

Предложение 1. *Алгебра* $\operatorname{gr} U\mathfrak{g}$ *порождается образом алгебры* $\mathfrak{g}$ *при отображении, индуцированном отображением* ε: $\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ [1]).

Доказательство. Пусть $\alpha \in \operatorname{gr}_n U\mathfrak{g}$ и $a \in U_n\mathfrak{g}$ — любой представитель элемента α, т. е. $\bar{a} = \alpha$. Как мы знаем,

$$a = \sum_{m_\mu \leqslant n} \lambda_\mu \varepsilon\left(x_1^{(\mu)}\right) \ldots \varepsilon\left(x_{m_\mu}^{(\mu)}\right).$$

Поэтому $\alpha = \sum_{m_\mu = n} \lambda_\mu \overline{\varepsilon\left(x_1^{(\mu)}\right)} \ldots \overline{\varepsilon\left(x_{m_\mu}^{(\mu)}\right)}$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Алгебра* $\operatorname{gr} U\mathfrak{g}$ *коммутативна.*

Доказательство. Ввиду предложения 1 достаточно показать, что $\overline{\varepsilon(x)}$ и $\overline{\varepsilon(y)}$ перестановочны

---

[1]) Иными словами алгебра $\operatorname{gr} U\mathfrak{g}$ порождается $\operatorname{gr}_1 U\mathfrak{g}$ и единицей. — *Прим. перев.*

в $\mathrm{gr}_2 U\mathfrak{g}$ при любых x, $y \in \mathfrak{g}$. Поскольку ε — гомоморфизм алгебр Ли, имеем

$$\varepsilon(x)\varepsilon(y) - \varepsilon(y)\varepsilon(x) = \varepsilon([x, y]).$$

Однако $\varepsilon([x, y]) \in U_1\mathfrak{g}$, так что

$$\varepsilon(x)\varepsilon(y) \equiv \varepsilon(y)\varepsilon(x) \pmod{U_1\mathfrak{g}}$$

и

$$\overline{\varepsilon(x)} \cdot \overline{\varepsilon(y)} = \overline{\varepsilon(y)} \cdot \overline{\varepsilon(x)}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2 немедленно вытекает, что каноническое отображение $\mathfrak{g} \to \mathrm{gr}\, U\mathfrak{g}$ продолжается до гомоморфизма

$$\tau\colon\ S\mathfrak{g} \to \mathrm{gr}\, U\mathfrak{g},$$

где $S\mathfrak{g}$ — симметрическая алгебра модуля $\mathfrak{g}$ (см. § 3).

Так как $\mathrm{gr}\, U\mathfrak{g}$ порождается образом $\mathfrak{g}$, гомоморфизм τ сюръективен.

Т е о р е м а 3 (П у а н к а р е — Б и р к г о ф — В и т т). *Если $\mathfrak{g}$ — свободный k-модуль, то τ — изоморфизм*[1]).

Прежде чем доказывать теорему, установим предварительно две леммы.

Пусть $(x_i)_{i \in I}$ — базис модуля $\mathfrak{g}$, причем множество индексов I произвольным образом линейно упорядочено.

Л е м м а 4. *Семейство одночленов $\varepsilon(x_{i_1}) \ldots \varepsilon(x_{i_m})$, $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_m$, $m \leqslant n$, порождает k-модуль $U_n\mathfrak{g}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся индукцией по n. При $n = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что $n > 0$, и рассмотрим элемент $a \in U_n\mathfrak{g}$. Его образ $\bar{a} \in \mathrm{gr}_n U\mathfrak{g}$ есть многочлен степени n от элементов $\overline{\varepsilon(x_i)}$. Отсюда вытекает, что элемент a представляет собой с точностью до элемента $a_1 \in U_{n-1}\mathfrak{g}$ линейную комбинацию произведений $\varepsilon(x_{i_1}) \ldots \varepsilon(x_{i_m})$, $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_m$. Однако, согласно предположению индукции, a_1 есть

---

[1]) *Градуированных* алгебр. — *Прим. перев.*

линейная комбинация произведений вида $\varepsilon(x_1)\ldots$ $\ldots\varepsilon(x_{i_m})$, $i_1\leqslant\ldots\leqslant i_m$, $m<n$, что и завершает доказательство.

Лемма 5. *Следующее утверждение эквивалентно теореме* 3: *семейство одночленов* $\varepsilon(x_1)\ldots\varepsilon(x_{i_n})$, $i_1\leqslant\ldots\leqslant i_n$, $n\geqslant 0$, *образует базис модуля* $U\mathfrak{g}$.

Доказательство. Условимся вначале о некоторых обозначениях. Пусть задан набор $M=(i_1, \ldots, i_m)$, $i_1\leqslant\ldots\leqslant i_m$. Назовем число m *длиной* $l(M)$ этого набора и будем для краткости вместо $\varepsilon(x_1)\ldots\varepsilon(x_{i_m})$ писать x_M.

Для каждого $n\geqslant 0$ элементы x_M длины n лежат в $U_n\mathfrak{g}$, а их образы $\bar{x}_M$ в $\operatorname{gr}_n U\mathfrak{g}=U_n\mathfrak{g}/U_{n-1}\mathfrak{g}$ совпадают с образами (при отображении $\tau\colon S^n\mathfrak{g}\to\operatorname{gr}_n U\mathfrak{g}$) базисных одночленов из $S^n\mathfrak{g}$. Таким образом, инъективность отображения τ равносильна отсутствию нетривиальных сравнений вида

$$\sum_{l(M)=n} c_M x_M = 0 \pmod{U_{n-1}\mathfrak{g}}.$$

По лемме 4 это сравнение эквивалентно равенству

$$\sum_{l(M)=n} c_M x_M = \sum_{l(M)<n} c_M x_M,$$

где по крайней мере один коэффициент c_M отличен от нуля. Но любая нетривиальная линейная зависимость элементов x_M над k может быть приведена к такому виду. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказывать теорему 4.3 в ее новой формулировке. В дальнейшем мы можем (и будем) предполагать множество I *вполне упорядоченным*.

Пусть V — свободный k-модуль с базисом $\{Z_M\}$, где M, как и выше, пробегает множество наборов $(i_1, \ldots, i_n)$, таких, что $n\geqslant 0$ и $i_1\leqslant\ldots\leqslant i_n$. Пусть $i\in I$ и $M=(i_1, \ldots, i_n)$. По определению $i\leqslant M\Leftrightarrow i\leqslant i_1$. В случае $i\leqslant M$ введем обозначение $iM=(i, i_1, \ldots, i_n)$.

Основная лемма. *Модуль* V *можно наделить структурой* $\mathfrak{g}$-*модуля так, чтобы* $x_i Z_M = Z_{iM}$ *при* $i\leqslant M$.

Доказательство. Прежде всего мы должны определить k-линейное отображение $\mathfrak{g} \times V \to V$ и доказать, что V является $\mathfrak{g}$-модулем, т. е.

$$xyv - yxv = [x, y]\, v \quad (x, y \in \mathfrak{g},\ v \in V). \tag{1}$$

Чтобы определить xv, достаточно задать $x_i Z_M$ для всех i и M. Мы определим $x_i Z_M$ по индукции. Будем считать (предположение индукции) элемент $x_j Z_N$ определенным для *всех* $j \in I$, если $l(N) < l(M)$, и для $j < i$, если $l(M) = l(N)$; кроме того, мы будем предполагать, что каждый элемент $x_j Z_N$ является линейной комбинацией над k элементов Z_l, где

$$l(L) \leqslant l(N) + 1. \tag{*}$$

Положим

$$x_i Z_M = \begin{cases} Z_{iM}, & \text{если} \quad i \leqslant M, \\ x_j(x_i Z_N) + [x_i, x_j]\, Z_N, & \text{если} \quad M = jN,\ i > j. \end{cases} \tag{2}$$

Выражение $x_j(x_i Z_N)$ имеет здесь смысл, так как $j < i$; по предположению индукции $x_i Z_N$ есть линейная комбинация элементов Z_L, где $l(L) \leqslant l(N) + 1 = l(M)$. Выражение $[x_i, x_j]\, Z_N$ также определено, поскольку $[x_i, x_j]$ линейно выражается через x_k. Из равенства (2), между прочим, видно, что условие (*) остается справедливым при замене j и N соответственно на i и M.

Для доказательства равенства (1) достаточно в силу линейности установить справедливость формулы

$$x_i x_j Z_N - x_j x_i Z_N = [x_i, x_j]\, Z_N \tag{1'}$$

для всех i, j и N. Так как обе стороны этого равенства совершенно симметричны и обращаются в нуль при $i = j$, мы предположим, что $i > j$. Если $j \leqslant N$, то $x_j Z_N = Z_{jN}$ и равенство (1′) следует из индуктивного определения (2). Остается разобрать случай $N = kL$, где $i > j > k$. Соотношение (1′) переписывается в этом случае так:

$$x_i x_j x_k Z_L - x_j x_i x_k Z_L = [x_i, x_j]\, x_k Z_L. \tag{ijk}$$

В силу сказанного выше нетрудно установить справедливость равенств (jki) и (kij), получаемых из (ijk) циклической перестановкой. Действительно, учитывая, что $i>j>k\geqslant L$, мы получаем, например, для (jki)

$$x_jx_kx_iZ_L-x_kx_jx_iZ_L=x_jx_kZ_{iL}-x_kx_jZ_{iL}.$$

Но

$$x_jx_kZ_{iL}-x_kx_jZ_{iL}=[x_j,\ x_k]\,Z_{iL}=[x_j,\ x_k]\,x_iZ_L,$$

так как $k<iL$, а в этом случае соотношение (1′) уже установлено. Аналогично доказывается (kij).

Далее, применяя индукцию по $l(N)$, мы можем считать, что

$$xyZ_L=yxZ_L+[x,\ y]\,Z_L$$

для *всех* $x,\ y\in\mathfrak{g}$. Таким образом, мы можем переписать правую часть равенства (ijk) следующим образом:

$$\begin{aligned}[][x_i,\ x_j]\,x_kZ_L=x_k[x_i,\ x_j]\,Z_L+[\,[x_i,\ x_j],\ x_k]\,Z_L=\\ =x_kx_ix_jZ_L-x_kx_jx_iZ_L+[\,[x_i,\ x_j],\ x_k]\,Z_L.\end{aligned}$$

Подставим это выражение в правую часть (ijk) и сложим полученное равенство с (уже доказанными) равенствами (jki) и (kij), записанными в такой же форме. В результате мы придем к соотношению вида

$$\sum=\sum+J(x_i,\ x_j,\ x_k)\,Z_L,$$

справедливость которого доказывает (ijk) и тем самым нашу лемму.

Поскольку V является $\mathfrak{g}$-модулем, на нем определена структура левого $U\mathfrak{g}$-модуля (см. замечание в конце § 1).

В частности, в модуле V имеется элемент $Z_\varnothing$[1]), где $\varnothing$ — пустое множество. Для всех M имеем

$$x_MZ_\varnothing=Z_M.$$

[1]) То есть элемент Z_M, где $l(M)=0$. — *Прим. перев.*

Докажем это равенство индукцией по $l(M)$. Если $l(M)=0$, то по определению $x_M=1$. Если $l(M)>0$, то $M=iN$, где $i\leqslant N$. Тогда $x_M=\varepsilon(x_i)x_N$ и

$$x_M Z_{\mathfrak{Z}}=x_i(x_N Z_{\mathfrak{Z}})=x_i Z_N=Z_{iN}=Z_M.$$

Доказательство теоремы 4.3 в новой формулировке. Предположим, что $\sum c_M x_M=0$. Тогда

$$0=\sum c_M x_M Z_{\mathfrak{Z}}=\sum c_M Z_M,$$

откуда вытекает, что $c_M=0$ для всех M, ч. т. д.

Следствие 1. *Если $\mathfrak{g}$ — свободный k-модуль, то отображение ε: $\mathfrak{g}\to U\mathfrak{g}$ инъективно.*

Доказательство. Утверждение очевидно, если заметить, что ε индуцирует изоморфизм $\mathfrak{g}\simeq \mathrm{gr}_1 U\mathfrak{g}$ (т. е. $S^1\mathfrak{g}\simeq \mathrm{gr}_1 U\mathfrak{g}$).

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$, где $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — подалгебры в $\mathfrak{g}$, свободные как модули над k. Отображение $U\mathfrak{g}_1\otimes U\mathfrak{g}_2\to U\mathfrak{g}$, индуцированное гомоморфизмами $U\mathfrak{g}_i\to U\mathfrak{g}$ и задаваемое правилом $u_1\otimes u_2\mapsto$ $\mapsto u_1u_2$, есть изоморфизм k-модулей.*

Доказательство. Пусть $(x_i)_{i\in I}$, $(y_j)_{j\in J}$ — свободные образующие алгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ соответственно. Элементы $\{(x_i), (y_j)\}$ образуют базис алгебры $\mathfrak{g}$. Упорядочим линейно множество $I\cup J$ так, чтобы каждый элемент из I был строго меньше любого элемента из J. Мы знаем (лемма 4.5), что наборы одночленов $\{\varepsilon(x_{i_1})\ldots\varepsilon(x_{i_m})\}$, $\{\varepsilon(y_{j_1})\ldots\varepsilon(y_{j_m})\}$ и $\{\varepsilon(x_{i_1})\ldots$ $\ldots\varepsilon(x_{i_n})\varepsilon(y_{j_1})\ldots\varepsilon(y_{j_m})\}$, $i_1\leqslant\ldots\leqslant i_n$, $j_1\leqslant\ldots\leqslant j_m$, являются свободными образующими модулей $U\mathfrak{g}_1$, $U\mathfrak{g}_2$ и $U\mathfrak{g}$ соответственно. Остается заметить, что отображение $U\mathfrak{g}_1\otimes_k U\mathfrak{g}_2\to U\mathfrak{g}\,(u_1\otimes u_2\mapsto u_1u_2)$ взаимно однозначно переводит базис модуля $U\mathfrak{g}_1\otimes_k U\mathfrak{g}_2$ (построенный из базисов $U\mathfrak{g}_1$ и $U\mathfrak{g}_2$) в базис алгебры $U\mathfrak{g}$, ч. т. д.

Отметим, что в данном случае наше отображение $U\mathfrak{g}_1 \otimes_k U\mathfrak{g}_2 \to U\mathfrak{g}$ индуцирует изоморфизм

$$\operatorname{gr} U\mathfrak{g}_1 \otimes_k \operatorname{gr} U\mathfrak{g}_2 \simeq \operatorname{gr} U\mathfrak{g},$$

поскольку $\operatorname{gr} U\mathfrak{g}_i \simeq S\mathfrak{g}_i$ и $\operatorname{gr} U\mathfrak{g} \simeq S\mathfrak{g} \simeq S\mathfrak{g}_1 \otimes S\mathfrak{g}_2$.

§ 5. Диагональное отображение

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над k. Предположим, что $\mathfrak{g}$ свободна как k-модуль.

Определение 1. Гомоморфизм алгебр Ли

$$\Delta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g},$$

задаваемый правилом $x \to (x, x)$, индуцирует гомоморфизм ассоциативных алгебр

$$\Delta\colon U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} \otimes_k U\mathfrak{g},$$

который мы будем называть *диагональным* отображением.

Предложение 2. *Диагональное отображение Δ однозначно определяется следующими двумя свойствами:*

1) *Δ — гомоморфизм алгебр;*
2) *$\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ для всех $x \in \mathfrak{g}$*[1]).

(Здесь мы отождествляем элемент $x \in \mathfrak{g}$ с его образом $\varepsilon(x) \in \mathfrak{g}$.)

Определение 3. Элемент $\alpha \in U\mathfrak{g}$ называется *примитивным*, если $\Delta\alpha = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$.

В частности, каждый элемент из $\mathfrak{g}$ примитивен.

Теорема 4. *Предположим, что k (как $\mathbf{Z}$-модуль) не имеет кручения и что $\mathfrak{g}$ — свободный модуль над k. Тогда множество примитивных элементов алгебры $U\mathfrak{g}$ совпадает с $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. 1°. *Случай, когда алгебра $\mathfrak{g}$ абелева.* Универсальная обертывающая алгебра $U\mathfrak{g}$ есть не что иное, как кольцо многочленов $k[(X_i)]$

---

[1]) Предложение очевидно, так как $U\mathfrak{g}$ порождается элементами из $\mathfrak{g}$. — *Прим. перев.*

(см. § 3) от переменных X_i, соответствующих свободным образующим x_i модуля $\mathfrak{g}$. Диагональное отображение может быть интерпретировано как гомоморфизм

$$\Delta\colon k[(X_i)] \to k[(X'_i), (X''_i)]$$

(X'_i соответствует элементу $X_i \otimes 1$, а X''_i — элементу $1 \otimes X_i$), где $\Delta f(X_i) = f(X'_i + X''_i)$, поскольку $\Delta(X_i) = X'_i + X''_i$ для каждого i. Таким образом, примитивные элементы $f(X_i) \in k[(X_i)]$ удовлетворяют уравнению

$$f(X'_i + X''_i) = f(X'_i) + f(X''_i).$$

Если многочлен f обладает свойством аддитивности, то этим же свойством обладают и его однородные компоненты f_n. Пусть f — однородный многочлен степени n с таким свойством. Тогда

$$2^n f(X_i) = f(2X_i) = f(X_i + X_i) = 2f(X_i),$$

и $(2^n - 2) f = 0$. Поскольку k как $\mathbf{Z}$-модуль не имеет кручения, $f = 0$ при $n \neq 1$. Итак, линейные однородные многочлены и только они обладают свойством аддитивности.

2°. *Общий случай*. Гомоморфизм $\Delta\colon U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} \otimes_k U\mathfrak{g}$ индуцирует отображения

$$\operatorname{gr}\Delta\colon \operatorname{gr} U\mathfrak{g} \to \operatorname{gr}(U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}) \simeq \operatorname{gr} U\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \simeq \operatorname{gr} U\mathfrak{g} \otimes \operatorname{gr} U\mathfrak{g}$$

(см. конец § 4). С другой стороны, как мы знаем, $\operatorname{gr} U\mathfrak{g} \simeq S\mathfrak{g}$, причем соответствующее отображение $S\mathfrak{g} \to S\mathfrak{g} \otimes S\mathfrak{g}$ то самое, какое мы рассматривали в первом случае. Последнее можно усмотреть, прослеживая в цепочке отождествлений путь элементов вида $\bar{x} \in \operatorname{gr}_1 U\mathfrak{g}$, где $x \in \mathfrak{g}$.

Пусть $x \in U_n\mathfrak{g}$ и $\bar{x}$ — его образ в $\operatorname{gr}_n U\mathfrak{g}$. Если x примитивен, то таков же и $\bar{x}$ относительно отображения $\operatorname{gr}\Delta$. Следовательно, как было показано выше, $\bar{x} = 0$, если $n > 1$. Повторяя этот прием нужное число раз, заключаем, что $x \in U_1\mathfrak{g}$, т. е. $x = \lambda + y$, где $\lambda \in k$ и $y \in \mathfrak{g}$. Но тогда

$$\Delta x = \lambda + y \otimes 1 + 1 \otimes y,$$
$$x \otimes 1 + 1 \otimes x = \lambda + y \otimes 1 + \lambda + 1 \otimes y.$$

Таким образом, если x — примитивный элемент, то $2\lambda = \lambda$, т. е. $\lambda = 0$ и $x \in \mathfrak{g}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $PU\mathfrak{g}$ — множество примитивных элементов алгебры $U\mathfrak{g}$. Показать, что $PU\mathfrak{g}$ устойчиво относительно коммутирования, т. е. $xy - yx \in PU\mathfrak{g}$, если $x, y \in PU\mathfrak{g}$.

2. Предположим, что $pk = 0$ для некоторого простого числа p и что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является свободным k-модулем с базисом $(x_i)_{i \in I}$. Доказать, что

а) множество $PU\mathfrak{g}$ устойчиво относительно отображения $y \mapsto y^p$;

б) элементы $\left(x_i^{p^\nu}\right)$, $i \in I$, $\nu \geqslant 0$, образуют базис над k для $PU\mathfrak{g}$;

в) $(x+y)^p - x^p - y^p \in \mathfrak{g}$, если x и y лежат в $\mathfrak{g}$.

Глава IV

СВОБОДНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Как и прежде, k — коммутативное (и ассоциативное) кольцо с единицей. Все рассматриваемые алгебры и модули определены над k.

§ 1. Свободные моноиды

Определение 1. *Моноидом*[1]) называется множество M с отображением $M \times M \to M$, которое записывается в виде $(x, y) \mapsto xy$.

Для заданного множества X определим по индукции семейство множеств $X_n (n \geqslant 1)$:

1) $X_1 = X$;

2) $X_n = \coprod_{p+q=n} X_p \times X_q$ $(n \geqslant 2)$ (объединение непересекающихся множеств).

Положим $M_X = \coprod_n X_n$ и определим отображение

$$M_X \times M_X \to M_X$$

посредством отображений $X_p \times X_q \to X_{p+q} \subset M_X$, где стрелка обозначает каноническое включение, вытекающее из 2.

Построенный моноид M_X называется *свободным моноидом* на X. Элемент $w \in M_X$ иногда называют *неассоциативным словом* на X. Длина $l(w)$ этого слова есть по определению (единственное) число n, такое, что $w \in X_n$.

---

[1]) В оригинале „magma“. — *Прим. перев.*

Теорема 2. *Пусть N — некоторый моноид и f: $X \to N$ — произвольное отображение. Существует единственный гомоморфизм моноидов F: $M_X \to N$,* продолжающий f.

Доказательство. Гомоморфизм F определяется индуктивно: $F(u, v) = F(u) \cdot F(v)$, где $(u, v) \in X_p \times X_q$.

В заключение этого параграфа отметим следующие очевидные свойства моноида M_X:

1) M_X порождается множеством X;

2) $m \in M_X \backslash X \Leftrightarrow m = uv$ с u, $v \in M_X$; при этом u, v однозначно определяются по m.

§ 2. Свободная алгебра над X

Обозначим через A_X k-алгебру свободного моноида M_X. Каждый элемент $\alpha \in A_X$ есть конечная сумма вида $\alpha = \sum\limits_{m \in M_X} c_m m$, где $c_m \in k$. Умножение в A_X является продолжением по линейности умножения в M_X.

Определение 1. Алгебра A_X называется *свободной алгеброй* над X.

Введение такого определения оправдывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть B — некоторая k-алгебра и f: $X \to B$ — произвольное отображение. Существует единственный гомоморфизм k-алгебр F: $A_X \to B$, продолжающий f.*

Доказательство. Согласно теореме 1.2, f продолжается до гомоморфизма моноидов f': $M_X \to B$, где B рассматривается как моноид относительно умножения. Отображение f' по линейности продолжается до k-линейного отбражения F: $A_X \to B$. Легко видеть, что F—гомоморфизм алгебр. Единственность F очевидна, так как X порождает A_X.

Замечание. В A_X имеется структура *градуированной алгебры*, причем однородные элементы степени n суть линейные комбинации слов длины n.

§ 3. Свободная алгебра Ли над X

Пусть I — двусторонний идеал в A_X, порожденный элементами вида $a \cdot a$ и $J(a, b, c)$, где $a, b, c \in A_X$ и

$$J(a, b, c) = (ab)c + (bc)a + (ca)b.$$

Определение 1. Факторалгебра A_X/I называется *свободной алгеброй Ли над X*.

Эту алгебру мы будем обозначать $L_X(k)$ или просто L_X.

Функториальные свойства. 1) *Пусть f: $X \to X'$ — произвольное отображение множеств. Тогда существует единственный гомоморфизм F: $L_X \to L_{X'}$, такой, что $F \mid X = f$.*

1′) *Пусть $\{X_\alpha, i_\alpha^\beta\}$ — индуктивная система множеств и $X = \varinjlim X_\alpha$. Тогда*

$$\varinjlim L_{X_\alpha} = L_X.$$

2) *Если k' — расширение кольца k (т. е. ассоциативная коммутативная k-алгебра с единицей), то*

$$L_X(k') = L_X(k) \otimes_k k'.$$

3) *Идеал I является однородным идеалом в градуированной алгебре A_X, что позволяет определить на L_X естественную структуру градуированной алгебры.*

4) *Однородные компоненты L_X^1 и L_X^2 имеют в качестве базисов над k множества X и $[X, X] = \{[x, y]$: $x < y$; $x, y \in X\}$ соответственно. (Множество X предполагается линейно упорядоченным.)*

Доказательство свойства 3). Обозначим через $I^\#$ множество всех $a \in A_X$, таких, что каждая однородная компонента элемента a принадлежит I. Ясно, что $I^\#$ — двусторонний идеал и $I^\# \subset I$.

Пусть $x \in A_X$, $x = \sum x_n$, где элементы x_n однородны. Тогда $x \cdot x = \sum x_n^2 + \sum\limits_{n<m} (x_n x_m + x_m x_n)$. Но $x_n^2 \in I$, $x_n x_m + x_m x_n = (x_n + x_m)^2 - x_n^2 - x_m^2 \in I$, поэтому

$x \cdot x \in I^{\#}$. Аналогично для трех элементов $x = \sum x_n$, $y = \sum y_n$, $z = \sum z_n$ имеем $J(x, y, z) = \sum\limits_{l, m, n} J(x_l, y_m, z_n) \in I^{\#}$. Таким образом, $I^{\#} = I$, ч. т. д.

Доказательство свойства 4). Очевидно, X порождает $\overset{1}{L_X}$, а $[X, X]$ порождает $\overset{2}{L_X}$. Рассмотрим модуль $E = k^{(X)}$[1] и алгебру Ли $E \oplus \bigwedge\limits^{2} E = \mathfrak{g}$ (пример (iii) из гл. I). Каноническое отображение $L \to \mathfrak{g}$ индуцирует гомоморфизм алгебр Ли $L_X \to \mathfrak{g}$, и композиция $\overset{1}{L_X} \oplus \overset{2}{L_X} \to L_X \to \mathfrak{g}$ является изоморфизмом, ч. т. д.

§ 4. Связь со свободной ассоциативной алгеброй над X

Определение 1. Пусть $E = k^{(X)}$ — свободный k-модуль с базисом X. Будем называть *свободной ассоциативной алгеброй над X* и обозначать через Ass_X тензорную алгебру TE модуля E.

(Элементы алгебры Ass_X можно было бы назвать „ассоциативными, но не коммутативными“ многочленами от элементов множества X.)

Теорема 2. *Пусть* φ: $L_X \to \mathrm{Ass}_X$ *и* Φ: $UL_X \to \mathrm{Ass}_X$ *— два отображения, индуцированных вложением* $X \to \mathrm{Ass}_X$. *Тогда*

(1) *отображение Φ есть изоморфизм;*

(2) *гомоморфизм φ изоморфно отображает L_X на подалгебру Ли алгебры Ass_X, порожденную множеством X;*

(3) *алгебра L_X и ее однородные компоненты L_X^n являются свободными k-модулями;*

(4) *если множество X конечно и* $\mathrm{Card}\, X = d$[2], *то L_X^n — свободный k-модуль конечного ранга $l_d(n)$, причем*

$$\sum_{m \mid n} m l_d(m) = d^n. \qquad (*)$$

[1] То есть свободный k-модуль с базисом X. — *Прим. перев.*
[2] Card X обозначает мощность множества X. — *Прим. перев.*

Замечание. Формула (*) определяет число $l_d(n)$ по индукции. Фактически

$$nl_d(n) = d^n - \sum_{\substack{m \mid n \\ m < n}} ml_d(m).$$

(Точнее, пусть μ — *функция Мёбиуса*, определенная соотношением

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = 1/\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s}).$$

Тогда

$$nl_d(n) = \sum_{m \mid n} \mu(m) d^{n/m}.\ )$$

Доказательство. Утверждение (1) очевидно, так как отображение $X \to UL_X$ определяет гомоморфизм Ψ: $\mathrm{Ass}_X \to UL_X$, причем $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ и $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$.

Отметим также, что φ отображает L_X *на* подалгебру Ли алгебры Ass_X, порожденную множеством X. Поэтому свойство (2) эквивалентно инъективности φ. Наконец, заметим, что (3) $\Rightarrow$ (2). В самом деле, если L_X — свободный k-модуль, то (по следствию из теоремы Биркгофа — Витта) отображение $L_X \to UL_X$ инъективно. Но мы можем отождествить алгебры UL_X и Ass_X.

Доказательство остальных утверждений проводится в четыре шага.

Шаг 1. *Предположим, что k — поле и множество X конечно.* Выберем *однородный* базис $(\gamma_i)_{i \in I}$ алгебры L_X и линейно упорядочим множество I. Положим $d_i = \deg(\gamma_i)$. При доказательстве теоремы Биркгофа — Витта было установлено, что семейство элементов вида $\gamma^e = \gamma_{i_1}^{e_{i_1}} \ldots \gamma_{i_s}^{e_{i_s}}$, где $i_1 < \ldots < i_s$, образует базис алгебры $UL_X = \mathrm{Ass}_X$, причем $\deg(\gamma^e) = \sum e_{i_j} d_{i_j}$. Поскольку элементы γ^e, где $\deg(\gamma^e) = n$, составляют базис модуля Ass_X^n, ранг $a(n)$ этого модуля равен числу (конечных) наборов (e_i), таких, что $\sum e_i d_i = n$, $e_i > 0$.

Последнее высказывание можно переформулировать следующим образом: формальный степенной ряд $A(t)=\sum a(n)t^n$ представим в виде

$$A(t)=\prod_{i\in I}\frac{1}{1-t^{d_i}}.$$

Действительно,

$$\prod_{i\in I}\frac{1}{1-t^{d_i}}=\prod_{i\in I}(1+t^{d_i}+t^{2d_i}+\ \ldots),$$

и коэффициент при t^n есть в точности число (конечных) наборов (e_i), таких, что $\sum e_i d_i = n$.

По определению для каждого натурального m число элементов γ_i степени m равно $l_d(m)$. Поэтому

$$A(t)=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1-t^m)^{l_d(m)}}.$$

С другой стороны, по построению алгебры Ass_X семейство одночленов $x_{i_1}\ldots x_{i_n}$, $x_{i_\nu}\in X$, образует базис модуля Ass_X^n. Значит, $a(n)=d^n$ и

$$A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}d^nt^n=\frac{1}{1-dt},$$

откуда

$$\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1-t^m)^{l_d(m)}}=\frac{1}{1-dt}.$$

Используя равенство $\mathrm{Log}\,\frac{1}{1-t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n$, получаем

$$\sum_{m,\nu}\frac{1}{\nu}l_d(m)\,t^{m\nu}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}d^nt^n.$$

Поэтому для каждого n

$$\frac{1}{n} d^n = \sum_{m\nu=n} \frac{1}{\nu} l_d(m),$$

т. е.

$$d^n = \sum_{m \mid n} m l_d(m),$$

что и доказывает утверждение (4) в этом случае.

Шаг 2. *Предположим, что $k = \mathbf{Z}$ и X — конечное множество.* Нам понадобится следующая

Лемма 3. *Пусть E — конечно порожденный $\mathbf{Z}$-модуль. Если размерность пространства $E \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p$ над $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ для всех простых p одинакова, то E — свободный $\mathbf{Z}$-модуль, и его ранг равен этой размерности.*

Указанная лемма есть простое следствие основной теоремы о строении абелевых групп с конечным числом образующих.

Остается заметить, что $L_X^n(\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} F_p = L_X^n(F_p)$ и размерность $\dim\left(L_X^n(F_p)\right) = l_d(n)$ не зависит от p, так что L_X^n — свободный $\mathbf{Z}$-модуль ранга $l_d(n)$.

Шаг 3. *Предположим, что $k = \mathbf{Z}$, а множество X произвольно.* Пусть $\{Y_\alpha\}$ — семейство всех *конечных* подмножеств в X. Тогда $X = \varinjlim Y_\alpha$.

Докажем вначале свойство (2).

Используя второй шаг, мы видим, что отображение

$$\varphi_\alpha\colon L_{Y_\alpha} \to \mathrm{Ass}_{Y_\alpha}$$

инъективно для всех α. Однако отображение

$$\varphi\colon L_Y \to \mathrm{Ass}_Y$$

есть $\varinjlim \varphi_\alpha$, а индуктивный предел семейства инъективных отображений инъективен. Таким образом, свойство (2) доказано.

Из (2), в частности, вытекает, что L_X и L_X^n — подмодули $\mathbf{Z}$-модуля Ass_X; последний свободен, а потому L_X и L_X^n (для всех n) также являются свободными

$\mathbf{Z}$-модулями. Тем самым теорема в рассматриваемом случае доказана.

Шаг 4. *Общий случай.* Учитывая тот факт, что модуль $L_X^n(\mathbf{Z})$ свободен, а также равенство $L_X^n(k) = L_X^n(\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} k$, заключаем, что $L_X^n(k)$ — свободный модуль над k. Значит, справедливо (3) и, следовательно, (2).

С другой стороны, $\mathrm{rk}_k L_X^n(k) = \mathrm{rk}_{\mathbf{Z}} L_X^n(\mathbf{Z})$. Поэтому, если X конечно, то $\mathrm{rk}_k L_X^n(k) = l_d(n)$.

§ 5. Семейства Холла

Определение 1. Пусть задано некоторое множество X. *Семейством Холла* в свободном моноиде M_X называется линейно упорядоченное подмножество $H \subset M_X$ со следующими свойствами:

(1) $X \subset H$;

(2) если u, $v \in H$ и $l(u) < l(v)$, то $u < v$;

(3) пусть $v \in M_X \setminus X$ и $v = uw$ — (единственное) разложение элемента v (с u, $w \in M_X$); тогда элемент v принадлежит H в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:

(a) $u \in H$, $w \in H$ и $u < w$;

(b) либо $w \in X$, либо $w = w' \cdot w''$, где w', $w'' \in H$ и $w' \leqslant v$.

Лемма 2. *Семейство Холла существует для любого множества X.*

Доказательство. Определим по индукции множества $H^n = H \cap X_n$. Положим $H^1 = X$ и линейно упорядочим X. Допустим, что $H^1, \ldots, H^{n-1}$ уже определены и линейно упорядочены таким образом, что условия (1), (2) и (3) выполняются для всех элементов длины $\leqslant n-1$. Тогда множество H^n однозначно определяется условием (3). Выберем в H^n некоторое линейное упорядочение и положим $u < v$, если $u \in H^i$ $(i \leqslant n-1)$, а $v \in H^n$. Очевидно, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H^n$ есть семейство Холла.

Пример. Пусть $X = \{x, y\}$, где $x \neq y$. Тогда

$$H^1 = \{x, y\}, \quad x < y,$$

$$H^2 = \{x \cdot y\},$$

$$H^3 = \{x \cdot (x \cdot y),\ y \cdot (x \cdot y)\},\ x \cdot (x \cdot y) < y \cdot (x \cdot y),$$

$$H^4 = \{x(x(xy)),\ y(x(xy)),\ y(y(xy))\},$$

$$H^5 = \{x(x(x(xy))),\ y(x(x(xy))),\ y(y(x(xy))),\ y(y(y(xy))),\ (xy)(x(xy)),\ (xy)(y(xy))\}.$$

Теорема 3. *Если H — семейство Холла в M_X, то канонические образы элементов $h \in H$ образуют базис в L_X.*

Обозначим через $\bar{h}$ образ элемента $h \in H$ в L_X. Наша теорема эквивалентна следующим двум утверждениям:

(1) семейство $\{\bar{h}\}$, $h \in H$, порождает L_X;

(2) элементы $\{\bar{h}\}$, $h \in H$, линейно независимы.

Мы докажем здесь лишь первую (более легкую) часть теоремы. Вторую часть доказательства читатель сможет найти в книге Холла [1], гл. 11, или в работе Витта [1]. Доказательство Холла носит чисто вычислительный характер; доказательство Витта лучше, но длиннее.

Доказательство утверждения (1). Символом L'_X обозначим k-подмодуль, порожденный элементами $\bar{h}$. Поскольку L'_X содержит X, нам достаточно показать, что L'_X — алгебра Ли, т. е. $[\bar{h}_1, \bar{h}_2] \in L'_X$, если $h_1, h_2 \in H$.

Доказательство мы проведем при помощи двойной индукции: сначала по числу $l(h_1) + l(h_2)$ (т. е. по длине n элемента $h_1 h_2$), а затем для заданного n, спуском по числу $\inf(h_1, h_2)$. Для того чтобы такой индуктивный процесс можно было осуществить, мы предположим, что X *конечно*. Общий случай получится переходом к индуктивному пределу.

Мы можем считать, что $h_1 < h_2$ (в противном случае воспользуемся соотношениями $[\bar{h}_1, \bar{h}_2] = -[\bar{h}_2, \bar{h}_1]$ и $[\bar{h}, \bar{h}] = 0$).

Первый случай. Пусть $h_2 \in X$. Тогда $h_1 \in X$ (поскольку $h_1 < h_2$), откуда (по определению семейства Холла) $h_1 h_2 \in H$, так что $\overline{h_1 h_2} = [\bar{h}_1, \bar{h}_2]$.

Второй случай. Пусть $h_2 \notin X$. Положим $h_2 = h_3 h_4$, где $h_3 h_4 \in H$ и $h_3 < h_4$. Имеют место два подслучая:

a) $h_3 \leqslant h_1$; тогда $h_1 (h_3 h_4) \in H$ и

$$[\bar{h}_1, \bar{h}_2] = [\bar{h}_1, [\bar{h}_3, \bar{h}_4]] = \overline{h_1 (h_3 h_4)};$$

b) $h_1 < h_3 < h_4$; в этом случае имеем, согласно тождеству Якоби,

$$[\bar{h}_1, [\bar{h}_3, \bar{h}_4]] = [\bar{h}_3, [\bar{h}_1, \bar{h}_4]] - [\bar{h}_4, [\bar{h}_1, \bar{h}_3]].$$

Поскольку $l(h_1 h_4) < l(h_1 h_2)$, получаем (по предположению индукции) соотношение $[\bar{h}_1, \bar{h}_4] = \sum c_\alpha \bar{h}_\alpha$, где $h_\alpha \in H$. Отсюда вытекает, что $l(h_\alpha) = l(h_1) + l(h_4)$ и, в частности, $l(h_\alpha) > l(h_1)$, так что $h_\alpha > h_1$. Вспоминая, что $h_1 < h_3$, заключаем, что $\inf(h_3, h_\alpha) > h_1 = \inf(h_1, h_2)$. Следовательно, согласно второму предположению индукции, имеет место включение $[\bar{h}_3, \bar{h}_\alpha] \in L'_X$.

Аналогичное рассуждение (с заменой h_3 на h_4) показывает, что элемент $[\bar{h}_4, [\bar{h}_1, \bar{h}_3]]$ также есть линейная комбинация элементов вида $\bar{h}$, где $h \in H$. Доказательство закончено.

§ 6. Свободные группы

В этом параграфе мы предполагаем, что $k = \mathbf{Z}$. Пусть X — некоторое множество и F_X — свободная группа над X, и пусть $\{F_X^n\}$ — *убывающий центральный ряд* этой группы, т. е. (по определению) $F_X^1 = F_X$ и $F_X^n = (F_X, F_X^{n-1})$ при $n > 1$.

Присоединенная градуированная группа

$$\operatorname{gr} F_X = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{gr}^n F_X, \quad \operatorname{gr}^n F_X = F_X^n / F_X^{n+1}$$

является, как мы знаем, алгеброй Ли. Заметим, кстати, что $\operatorname{gr}^1 F_X = F_X / (F_X, F_X)$, т. е. $\operatorname{gr}^1 F_X$ есть *свободная абелева* группа над X.

Теорема 1. *Каноническое отображение* $X \to \mathrm{gr}^1 F_X$ *индуцирует изоморфизм алгебр Ли*

$$\varphi_1\colon L_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\, F_X.$$

Следствие 2. *Группы* F_X^n / F_X^{n+1} — *свободные* $\mathbf{Z}$-*модули; если* $\mathrm{Card}(X) = d$ *конечно, то* $\mathrm{rk}\left(F_X^n / F_X^{n+1}\right) = l_d(n)$.

Прежде чем доказывать теорему, введем некоторые понятия и обозначения.

Рассмотрим свободную ассоциативную алгебру Ass_X над X и обозначим через Ass_X^n ее однородную компоненту степени n. *Пополнением* $\widehat{\mathrm{Ass}}_X$ алгебры Ass_X назовем бесконечное произведение $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ass}_X^n$. Элемент $f \in \widehat{\mathrm{Ass}}_X$ можно представить в виде формального ряда $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, где $f_n \in \mathrm{Ass}_X^n$.

Пусть $\widehat{\mathrm{Ass}}_X^*$ — мультипликативная группа обратимых элементов алгебры $\widehat{\mathrm{Ass}}_X$. Определим гомоморфизм $\theta\colon F_X \to \widehat{\mathrm{Ass}}_X^*$, полагая $\theta(x) = 1 + x$[1]) (ясно, что элемент $1 + x$ обратим в $\widehat{\mathrm{Ass}}_X$).

Для каждого целого положительного числа n положим

$$\widehat{\mathfrak{m}}^n = \left\{ f \in \widehat{\mathrm{Ass}}_X \mid f = \sum_{m=0}^{\infty} f_m,\ f_0 = f_1 = \ldots = f_{n-1} = 0 \right\}$$

и рассмотрим группу $'F_X^n = \theta^{-1}\left(1 + \widehat{\mathfrak{m}}^n\right)$. Легко видеть, что $'F_X^1 = F_X$ и $'F_X^n \subset {}'F_X^{n-1}$.

Теорема 3. $'F_X^n = F_X^n$.

Доказательства теорем 1 и 3.

1°. Очевидно, что отображение $\varphi_1\colon L_X \to \mathrm{gr}\, F_X$ *сюръективно.*

---

[1]) На элементах $x \in X$. — *Прим. перев.*

2°. Докажем, что $\{'F_X^n\}$ — фильтрация группы F_X. Фактически для этого нужно лишь проверить, что

$$('F_X^m,\ 'F_X^p) \subset 'F_X^{m+p}.$$

Возьмем $g \in 'F_X^m$ и $h \in 'F_X^p$. Тогда $\theta(g) = 1 + G$ и $\theta(h) = 1 + H$, где $G \in \widehat{\mathfrak{m}}^m$ и $H \in \widehat{\mathfrak{m}}^p$. Отсюда

$$\theta(gh) = 1 + G + H + GH,$$
$$\theta(hg) = 1 + G + H + HG.$$

Но $gh = hg(g, h)$ и θ — гомоморфизм, поэтому $\theta(gh) = \theta(hg)\,\theta((g, h))$; следовательно,

$$\theta((g, h)) = 1 + (GH - HG) + \text{члены высших порядков.} \quad (*)$$

Таким образом, $(g, h) \in 'F_X^{m+p}$.

Далее, имеется естественное отображение η: $\mathrm{gr}\, F_X \to \mathrm{Ass}_X$, определяемое следующим образом. Пусть $\xi \in '\mathrm{gr}\, F_X$, и пусть $g \in 'F_X^n$ — представитель класса ξ. Допустим, что

$$\theta(g) = 1 + G_n + G_{n+1} + \ldots, \quad \text{где} \quad G_p \in \mathrm{Ass}_X^p.$$

Положим

$$\eta(\xi) = G_n.$$

Легко видеть, что это определение не зависит от выбора представителя g. Формула $(*)$ показывает, что η: $'\mathrm{gr}\, F_X \to \mathrm{Ass}_X$ есть *гомоморфизм алгебр Ли.*

Поскольку $\{'F_X^n\}$ — фильтрация, для всех n имеют место включения $F_X^n \subset 'F_X^n$, индуцирующие гомоморфизм

$$\psi\colon \mathrm{gr}\, F_X \to '\mathrm{gr}\, F_X.$$

Рассмотрим теперь композицию отображений

$$L_X \xrightarrow{\varphi_1} \mathrm{gr}\, F_X \xrightarrow{\psi} '\mathrm{gr}\, F_X \xrightarrow{r} \mathrm{Ass}_X,$$

где φ_1 сюръективно, а η инъективно. Композиция эта есть, очевидно, отображение φ: $L_X \to \mathrm{Ass}_X$, фигурирующее в теореме 4.2, которое, как мы знаем, инъективно. Значит, гомоморфизм φ_1 инъективен и, следовательно, является изоморфизмом. Этим доказана теорема 6.1.

Из сказанного выше вытекает также инъективность отображения ψ. Докажем теперь по индукции равенство $F_X^n = {}'F_X^n$.

При $n=1$ имеем $F_X^1 = {}'F_X^1$ по определению.

При $n>1$ имеем

$$F_X^n \subset {}'F_X^n \subset {}'F_X^{n-1} = F_X^{n-1},$$

причем инъекция $\mathrm{gr}^{n-1} F_X \to \mathrm{gr}^{n-1\prime} F_X$ есть каноническое отображение

$$F_X^{n-1}/F_X^n \to F_X^{n-1}/{}'F_X^n,$$

откуда $F_X^n = {}'F_X^n$, ч. т. д.

§ 7. Формула Кэмпбелла—Хаусдорфа

В §§ 7 и 8 предполагается, что основное кольцо k — алгебра над $\mathbf{Q}$ (например, поле нулевой характеристики).

Теорема 1. *Пусть X — некоторое множество. Тогда свободная алгебра L_X совпадает с множеством примитивных элементов алгебры* Ass_X *(т. е.*

$$L_X = \{w \in \mathrm{Ass}_X \mid \Delta w = w \otimes 1 + 1 \otimes w\},$$

где Δ: $\mathrm{Ass}_X \to \mathrm{Ass}_X \otimes \mathrm{Ass}_X$ *— диагональное отображение).*

Это следует из теоремы 5.4, доказанной в гл. III, поскольку алгебра Ass_X может быть отождествлена с UL_X.

Так же как в § 6, мы определим *пополнение* $\hat{L}_X$ алгебры Ли L_X равенством

$$\hat{L}_X = \prod_{n=0}^{\infty} L_X^n.$$

Определим аналогично *полное тензорное произведение* $\widehat{\mathrm{Ass}}_X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathrm{Ass}}_X$ формулой

$$\widehat{\mathrm{Ass}}_X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathrm{Ass}}_X = \prod_{p,\,q} \mathrm{Ass}_X^p \otimes \mathrm{Ass}_X^q.$$

Диагональное отображение Δ продолжается до гомоморфизма $\Delta\colon \widehat{\mathrm{Ass}}_X \to \widehat{\mathrm{Ass}}_X \mathbin{\widehat{\otimes}} \widehat{\mathrm{Ass}}_X$, причем ясно, что теорема 7.1 остается справедливой при замене Ass_X, $\mathrm{Ass}_X \otimes \mathrm{Ass}_X$ и L_X их пополнениями.

Теорема 2. *Пусть* $\hat{\mathfrak{m}}$ — *идеал в алгебре* $\widehat{\mathrm{Ass}}_X$, *порожденный множеством* X. *Определим отображения*

$$\exp\colon \hat{\mathfrak{m}} \to 1 + \hat{\mathfrak{m}} \quad \text{и} \quad \log\colon 1 + \hat{\mathfrak{m}} \to \hat{\mathfrak{m}}$$

следующими формулами:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!, \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n/n.$$

Тогда $\exp \circ \log = 1$ *и* $\log \circ \exp = 1$ [1]).

Доказательство. Установим, например, равенство $\exp(\log(1+y)) = 1 + y$, $y \in \hat{\mathfrak{m}}$. Хорошо известно, что в кольце $\mathbf{Q}[[T]]$ формальных степенных рядов от переменной T имеет место формула

$$\exp(\log(1+T)) = T.$$

Но поскольку y лежит в $\hat{\mathfrak{m}}$, имеется (корректно определенный) *непрерывный* гомоморфизм $\rho\colon \mathbf{Q}[[T]] \to \widehat{\mathrm{Ass}}_X$, переводящий T в y. Применяя ρ к равенству $\exp(\log(1+T)) = T$, получаем $\exp(\log(1+y)) = 1 + y$, ч. т. д.

Следствие 3. *Отображение* exp *определяет биекцию множества* $\{\alpha \in \hat{\mathfrak{m}} \mid \Delta\alpha = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha\}$ *на множество* $\{\beta \in 1 + \hat{\mathfrak{m}} \mid \Delta\beta = \beta \otimes \beta\}$.

---

[1]) В дальнейшем потребуется еще одно очевидное свойство отображения exp, доказываемое прямым вычислением. А именно, $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$, $x, y \in \hat{\mathfrak{m}}$, если элементы x и y коммутируют. — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \widehat{\mathfrak{m}}$, $\beta = e^{\alpha}$ и $\Delta\alpha = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$. Поскольку Δ коммутирует с экспоненциальным отображением, а элементы $\alpha \otimes 1$ и $1 \otimes \alpha$ перестановочны, получаем цепочку равенств

$$\Delta\beta = \Delta e^{\alpha} = e^{\Delta\alpha} = e^{\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha} = e^{\alpha \otimes 1} \cdot e^{1 \otimes \alpha} = (\beta \otimes 1)(1 \otimes \beta) = \beta \otimes \beta$$ [1].

Теорема 4 (Кэмпбелл — Хаусдорф). *Пусть $X = \{x, y\}$, $x \neq y$. Тогда $e^x \cdot e^y = e^z$, где $z \in \widehat{L}_X$.*

Доказательство. Поскольку e^x, $e^y \in 1 + \widehat{\mathfrak{m}}$, постольку $e^x \cdot e^y \in 1 + \widehat{\mathfrak{m}}$. Поскольку экспоненциальное отображение биективно, существует один и только один элемент $z \in \widehat{\mathfrak{m}}$, такой, что $e^x \cdot e^y = e^z$.

Далее,

$$\Delta(e^z) = \Delta(e^x \cdot e^y) = \Delta(e^x) \cdot \Delta(e^y) = (e^x \otimes e^x)(e^y \otimes e^y) = e^x \cdot e^y \otimes e^x \cdot e^y = e^z \otimes e^z.$$

В силу следствия 3 z — есть примитивный элемент, и по теореме 1 (для пополнений) $z \in \widehat{L}_X$, ч. т. д.

Рассмотрим теперь произвольное множество X. Для любых элементов $x, y \in X$ обозначим через $z(x, y)$ элемент множества $\widehat{L}_{\{x, y\}} \subset \widehat{L}_X$, такой, что $e^x \cdot e^y = e^{z(x, y)}$.

Мы имеем $z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x, y)$, где $z_n(x, y) \subset L_X^n$. Явные выражения для первых трех однородных компонент элемента $z(x, y)$ таковы:

$$z_1(x, y) = x + y,$$

$$z_2(x, y) = \frac{1}{2}[x, y],$$

$$z_3(x, y) = \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \frac{1}{12}[y, [y, x]].$$

[1]) Обратно, пусть $\beta \in 1 + \widehat{\mathfrak{m}}$, $\Delta\beta = \beta \otimes \beta$ и $\beta = e^{\alpha}$, где $\alpha = \log \beta \in \widehat{\mathfrak{m}}$. Очевидно, $\beta \otimes \beta = (\beta \otimes 1)(1 \otimes \beta) = (e^{\alpha} \otimes 1)(1 \otimes e^{\alpha}) = e^{\alpha \otimes 1} \cdot e^{1 \otimes \alpha} = e^{\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha}$. Однако $\Delta\beta = e^{\Delta\alpha}$, откуда $\Delta\alpha = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$. — *Прим. перев.*

Ясно также, что $z(0, y) = y$, $z(x, 0) = x$ и $z(z(w, x), y) = z(w, z(x, y))$.

§ 8. Явная формула

Введем линейные отображения Φ: $\mathfrak{m} \to L_X$ и φ: $\mathfrak{m} \to L_X$ ($\mathfrak{m} \subset \mathrm{Ass}_X$), полагая

$$\Phi(x_1 \ldots x_n) = [x_1, [x_2, \ldots [x_{n-1}, x_n] \ldots]] = \\ = \operatorname{ad} x_1 \ldots \operatorname{ad} x_{n-1}(x_n),$$

$$\varphi(x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{n} \Phi(x_1 \ldots x_n),$$

$x_i \in X$.

Теорема 1. *Отображение φ является ретракцией идеала $\mathfrak{m}$ на L_X, т. е. $\varphi \mid L_X = \mathrm{id}_{L_X}$.*

Доказательство. Наша задача — доказать, что $\Phi(u) = nu$, если $u \in L_X^n$. Рассмотрим гомоморфизм ассоциативных алгебр θ: $\mathrm{Ass}_X \to \mathrm{End}(L_X)$, продолжающий гомоморфизм алгебр Ли ad: $L_X \to \mathrm{End}(L_X)$.

Лемма 2. *Для любых $u \in \mathrm{Ass}_X$ и $v \in m$ справедливо равенство $\Phi(uv) = \theta(u) \cdot \Phi(v)$.*

Доказательство леммы. Так как Φ и θ линейны, достаточно рассмотреть случай $u = x_1 \ldots x_n$, $x_i \in X$; проведем индукцию по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$. Тогда

$$\Phi(x_1 \ldots x_n \cdot v) = \theta(x_1) \Phi(x_2 \ldots x_n \cdot v) = \\ = \theta(x_1) \theta(x_2 \ldots x_n) \Phi(v) = \theta(x_1 \ldots x_n) \Phi(v).$$

Тем самым лемма доказана.

Вернемся к нашей теореме. Доказательство формулы $\Phi(u) = nu$, $u \in L_X^n$, проведем опять по индукции.

При $n = 1$ формула очевидна.

Пусть $n > 1$. Тогда $u = \sum [v_i, w_i]$. Мы можем поэтому считать, что $u = [v, w]$, где $v \in L_X^p$, $w \in L_X^q$, $p + q = n$, $p, q > 0$.

Учитывая тот факт, что $\theta(v) = \operatorname{ad} v$ и $\theta(w) = \operatorname{ad} w$, получаем

$$\begin{aligned}\Phi([v, w]) = \Phi(vw - wu) = \theta(v)\Phi(w) - \theta(w)\Phi(v) = \\ = q\theta(v)w - p\theta(w)v = q[v, w] - p[w, v] = \\ = (q+p)[v, w] = nu.\end{aligned}$$

Теперь мы в состоянии дать явную формулу для $z(x, y) = \log(e^x \cdot e^y)$ $(x, y \in X)$.

Как и раньше, запишем

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n,$$

где $z_n \in L_X^n$.

Имеем

$$e^x \cdot e^y = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!}\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{y^q}{q!}\right) = 1 + \sum_{p+q \geqslant 1} \frac{x^p x^q}{p!\, q!},$$

откуда

$$z = \log(e^x \cdot e^y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}\left(\sum_{p+q \geqslant 1} \frac{x^p x^q}{p!\, q!}\right)^m =$$

$$= \sum_{p_i + q_i \geqslant 1} \frac{(-1)^m}{m} \frac{x^{p_1} y^{q_1} x^{p_2} y^{q_2} \ldots x^{p_m} y^{q_m}}{p_1!\, q_1! \ldots p_m!\, q_m!}.$$

Применим отображение Φ к фигурирующим здесь одночленам:

$$\Phi\left(x^{p_1} y^{q_1} \ldots x^{p_m} y^{q_m}\right) = \operatorname{ad}(x)^{p_1} \operatorname{ad}(y)^{q_1} \ldots$$
$$\ldots \operatorname{ad}(x)^{p_m} \operatorname{ad}(y)^{q_m - 1}(y), \text{ если } q_m \geqslant 1,$$

и

$$\Phi\left(x^{p_1} y^{q_1} \ldots x^{p_m}\right) = \operatorname{ad}(x)^{p_1} \operatorname{ad}(y)^{q_1} \ldots \operatorname{ad}(x)^{p_m - 1}(x),$$
$$\text{если } q_m = 0.$$

Заметим, что первое выражение равно нулю при $q_m \geqslant 2$, а второе равно нулю при $p_m \geqslant 2$. Таким образом, ненулевые члены возможны только в двух случаях: при $q_m = 1$ или при $p_m = 1$, $q_m = 0$. Применяя тождество $z_n = \varphi(z_n)$, получаем *явную формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа* (в форме Дынкина):

$$z_n = \frac{1}{n} \sum_{p+q=n} (z'_{p,q} + z''_{p,q}),$$

где

$$z'_{p,q} = \sum_{\substack{p_1+\ldots+p_m=p \\ q_1+\ldots+q_{m-1}=q-1 \\ p_i+q_i \geqslant 1 \\ p_m \geqslant 1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{\operatorname{ad}(x)^{p_1} \operatorname{ad}(y)^{q_1} \ldots \operatorname{ad}(x)^{p_m}(y)}{p_1!\, q_1! \ldots q_{m-1}!}$$

и

$$z''_{p,q} = \sum_{\substack{p_1+\ldots+p_{m-1}=p-1 \\ q_1+\ldots+q_{m-1}=q \\ p_i+q_i \geqslant 1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{\operatorname{ad}(x)^{p_1} \operatorname{ad}(y)^{q_1} \ldots \operatorname{ad}(y)^{q_{m-1}}(x)}{p_1!\, q_1! \ldots q_{m-1}!}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть X — конечное множество и $\operatorname{Card}(X) = d$. Показать, что число элементов длины n в моноиде M_X равно $2^{n-1} d^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{n!}$.

2. Доказать, что $L_X^n = [X, L_X^{n-1}]$ для $n \geqslant 2$.

3. Показать, что центр алгебры L_X сводится к 0, если $\operatorname{Card}(X) \neq 1$, а центр алгебры $L_X / \sum_{n>p} L_X^n$ равен L_X^p.

4. Пусть X — некоторое множество, $\operatorname{Card}(X) \geqslant 2$ и $\mathscr{H}$ — совокупность всех семейств Холла в M_X. Доказать, что $\operatorname{Card}(\mathscr{H}) = 2^{\operatorname{Card}(X)}$.

5. Показать, что гомоморфизм $\Theta: F_X \to \widehat{\operatorname{Ass}}_X^*$, определенный в § 6, инъективен.

Глава V

НИЛЬПОТЕНТНЫЕ И РАЗРЕШИМЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

В этой главе k предполагается полем, а в § 5, где рассматриваются основные теоремы о разрешимых алгебрах Ли, — полем характеристики нуль. Все встречающиеся алгебры и модули имеют конечную размерность над k.

§ 1. Дополнительные сведения о $\mathfrak{g}$-модулях

Пусть задана некоторая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над k. По определению $\mathfrak{g}$-модулем называется векторное пространство V над k вместе с k-билинейным отображением $\mathfrak{g} \times V \to V$ (которое обозначается $(x, v) \mapsto xv$), таким, что $[x, y]v = xyv - yxv$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$ и $v \in V$. Соответствующий гомоморфизм алгебр Ли ρ: $\mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ называется *линейным представлением* алгебры $\mathfrak{g}$, а V — *пространством представления*.

Произвольное векторное пространство V можно превратить в $\mathfrak{g}$-модуль, полагая $xv = 0$ для любых $v \in V$ и $x \in \mathfrak{g}$; в этом случае говорят, что $\mathfrak{g}$ *действует тривиально* на V. В частности, всякий раз, когда k рассматривается как $\mathfrak{g}$-модуль, мы будем молчаливо предполагать (если не оговорено противное), что k — тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль.

Пусть V_1 и V_2 — два $\mathfrak{g}$-модуля. На их тензорном произведении $V_1 \otimes_k V_2$ можно единственным способом определить структуру $\mathfrak{g}$-модуля, такую, что выполняется соотношение

$$x(v_1 \otimes v_2) = (xv_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (xv_2). \qquad (1)$$

Это можно проверить непосредственно или усмотреть из диаграммы

$$U\mathfrak{g} \xrightarrow{\Delta} U\mathfrak{g} \otimes_k U\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho_1 \otimes \rho_2} \operatorname{End} V_1 \otimes_k \operatorname{End} V_2 \to$$
$$\to \operatorname{End}(V_1 \otimes V_2),$$

где Δ — диагональное отображение. Действие (1) алгебры $\mathfrak{g}$ на $V_1 \otimes V_2$ иногда называется *диагональным действием.*

Аналогично пространство k-линейных отображений $\operatorname{Hom}_k(V_1, V_2)$ становится $\mathfrak{g}$-модулем, если положить

$$(xf)(v_1) = x(f(v_1)) - f(xv_1), \text{ где } x \in \mathfrak{g}, \ v_1 \in V_1. \quad (2)$$

Более общим образом пусть дано конечное семейство $\mathfrak{g}$-модулей $V, V_1, \ldots, V_r$. Тогда легко построить структуру $\mathfrak{g}$-модуля на пространстве k-полилинейных отображений из $\prod_{i=1}^{r} V_i$ в V.

Элемент v $\mathfrak{g}$-модуля V называется $\mathfrak{g}$-*инвариантным*, если $xv = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Эта на первый взгляд странная терминология возникла из соответствующей групповой ситуации; равенство $xv = 0$ равносильно равенству $v = (1 + \varepsilon x) v$. Множество всех $\mathfrak{g}$-инвариантных элементов образует, очевидно, $\mathfrak{g}$-подмодуль в V, являющийся наибольшим подмодулем, на котором $\mathfrak{g}$ действует тривиально.

Пример 1. Линейное отображение $f: V_1 \to V_2$ инвариантно относительно действия $\mathfrak{g}$ в пространстве $\operatorname{Hom}_k(V_1, V_2)$ в том и только в том случае, если $f(xv_1) = xf(v_1)$, т. е. если f — *гомоморфизм* $\mathfrak{g}$-*модулей.*

Пример 2 (*инвариантные билинейные формы*). По определению инвариантная билинейная форма $B: V_1 \times V_2 \to k$ есть форма, удовлетворяющая тождеству

$$B(xv_1, v_2) + B(v_1, xv_2) = 0.$$

(Для групп это означает, что $B(gv_1, gv_2) = B(v_1, v_2)$, где $g = 1 + \varepsilon x$.) Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль и $\rho: \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ — соответствующее линейное представление. Положим $B_\rho(x, y) = \operatorname{Tr}_V(\rho(x)\rho(y))$, где $\operatorname{Tr}_V \alpha$ означает след k-линейного преобразования $\alpha: V \to V$.

Предложение 1. *Билинейная форма B_ρ симметрична и $\mathfrak{g}$-инвариантна относительно присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Из тождества $\mathrm{Tr}_V(\alpha\beta) = \mathrm{Tr}_V(\beta\alpha)$ легко следует симметричность B_β. Для доказательства инвариантности мы должны показать, что выражение

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_V(\rho[x_1,\ x_2])\rho(x_2) + \mathrm{Tr}_V(\rho(x_1)\rho([x_1,\ x_2])) = \\ = \mathrm{Tr}_V(\rho(x)\rho(x_1)\rho(x_2) - \rho(x_1)\rho(x)\rho(x_2) + \\ + \rho(x_1)\rho(x)\rho(x_2) - \rho(x_1)\rho(x_2)\rho(x))\end{aligned}$$

равно нулю при любых $x_1,\ x_2 \in \mathfrak{g}$. Но два средних члена взаимно уничтожаются. Остается воспользоваться уже доказанной симметричностью, положив $\alpha = \rho(x)$ и $\beta = \rho(x_1)\rho(x_2)$.

Определение 2. *Формой Киллинга* называется инвариантная симметрическая билинейная форма $B(x,\ y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y)$ на алгебре $\mathfrak{g}$, соответствующая присоединенному представлению.

§ 2. Нильпотентные алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над k. Для любых двух подмножеств $V,\ W \subset \mathfrak{g}$ через $[V,\ W]$ обозначим подмодуль в $\mathfrak{g}$, порожденный элементами вида $[x,\ y]$ с $x \in V,\ y \in W$. В случае когда V и W — подмодули в $\mathfrak{g}$, множество $[V,\ W]$ есть образ тензорного произведения $V \otimes_k W$ при отображении $x \otimes y \longmapsto [x, y]$. Если V и W — идеалы алгебры $\mathfrak{g}$, то $[V,\ W]$ также является идеалом, что легко следует из тождества Якоби. Рассмотрим, в частности, *убывающий центральный ряд* идеалов: $C^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ и $C^n\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\ C^{n-1}\mathfrak{g}]$, $n \geqslant 2$. Мы предоставляем читателю проверку включения

$$[C^r\mathfrak{g},\ C^s\mathfrak{g}] \subset C^{r+s}\mathfrak{g}.$$

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*
(i) *существует целое число n, такое, что $C^n\mathfrak{g} = (0)$;*

(ii) *существует такое целое число n, что*

$$[x_1, [x_2, [x_3, \ldots, x_n] \ldots]] = (\operatorname{ad} x_1)(\operatorname{ad} x_2) \ldots \ldots (\operatorname{ad} x_{n-1}) x_n = 0$$

для любого набора $(x_1, \ldots, x_n)$ элементов из $\mathfrak{g}$;

(iii) *алгебра $\mathfrak{g}$ может быть получена при помощи центральных расширений абелевых групп Ли; иными словами, существует цепочка идеалов*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_n = (0),$$

такая, что $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ лежит в центре алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_{i+1}$ (т. е. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$ для каждого i).

Доказательство. Импликации (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) совершенно очевидны. Заметим, что цепочка идеалов $C^n\mathfrak{g}$ является минимальной из всех возможных цепочек, удовлетворяющих свойству (iii). Другими словами, для любой цепочки идеалов $\{\mathfrak{a}_i\}$, обладающей свойством (iii), $C^n\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}_n$ для всех n.

Определение 2. Алгебра Ли, удовлетворяющая одному из эквивалентных условий теоремы 1, называется *нильпотентной*.

Пример. Пусть V — векторное пространство и $\mathcal{F} = \{V_i\}$ — *флаг* этого пространства, т. е. последовательность подпространств $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$, таких, что $\dim V_i = i$. Положим

$$\mathfrak{n}(\mathcal{F}) = \{u \in \operatorname{End} V \mid uV_i \subset V_{i-1} \text{ для всех } i \geqslant 1\}.$$

Понятно, что элементы из $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ — это те и только те эндоморфизмы V, которые переводят V_i в себя и индуцируют нулевое отображение на V_i/V_{i-1} для всех $i \geqslant 1$. Очевидно, что $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ — ассоциативная подалгебра алгебры $\operatorname{End} V$ и, a fortiori, подалгебра Ли относительно коммутирования $[x, y] = xy - yx$. Выберем в пространстве V базис $\{v_i\}$, согласованный с флагом $\mathcal{F}$ (в том смысле, что $V_i = kv_1 + \ldots + kv_i$). Элементами $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ в этом базисе отвечают *строго верхние* треугольные матрицы, т. е. треугольные матрицы с нулями по главной диагонали и ниже ее. Покажем, что алгебра Ли $\mathfrak{n}(\mathscr{F})$ нильпотентна. Рассмотрим идеалы

$$\mathfrak{n}_j(\mathscr{F}) = \{u \in \operatorname{End} V \mid u V_i \subset V_{i-j} \text{ для всех } i \geqslant j\}.$$

Замечая, что $\mathfrak{n}(\mathscr{F})\mathfrak{n}_j(\mathscr{F}) \subset \mathfrak{n}_{j+1}(\mathscr{F})$ и $\mathfrak{n}_j(\mathscr{F})\mathfrak{n}(\mathscr{F}) \subset \subset \mathfrak{n}_{j+1}(\mathscr{F})$, получаем

$$[\mathfrak{n}(\mathscr{F}),\ \mathfrak{n}_j(\mathscr{F})] \subset \mathfrak{n}_{j+1}(\mathscr{F}).$$

Следовательно, наша алгебра нильпотентна, поскольку $\mathfrak{n}_j(\mathscr{F}) = 0$ для достаточно больших j.

§ 3. Основные теоремы

Следующая теорема дает некоторое оправдание термина „нильпотентность".

Теорема 1. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна в том и только в том случае, когда эндоморфизм* $\operatorname{ad} x$ *для каждого $x \in \mathfrak{g}$ нильпотентен.*

С этой теоремой тесно связана следующая

Теорема 2 (Энгель). *Пусть ρ: $\mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ — линейное представление $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве V, причем $\rho(x)$ нильпотентно для каждого $x \in \mathfrak{g}$. В этом случае существует флаг $\mathscr{F} = \{V_i\}$, такой, что $\rho(\mathfrak{g}) \subset \subset \mathfrak{n}(\mathscr{F})$.*

Обращение теоремы 2 тривиально, так как строго треугольные матрицы нильпотентны. Суть теоремы состоит в следующем. Если для каждого данного элемента $x \in \mathfrak{g}$ существует флаг $\mathscr{F}_x = \{V_{x,i}\}$, такой, что $\rho(x) V_{x,i} \subset V_{x,i-1}$, то тогда существует единый флаг $\mathscr{F}$, годный для всех x одновременно.

Утверждением, равносильным теореме 2, является

Теорема 2′. *В условиях теоремы* 3.2 (*при $V \neq (0)$*) *существует ненулевой элемент $v \in V$, такой, что $\rho(x) v = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$.*

В самом деле, из теоремы 2 очевидным образом следует теорема 2′, так как в качестве искомого $v \in V$ можно взять любой элемент пространства V_1

флага $\mathscr{F}$. Обратно, если справедлива теорема 2′, то теорема 2 легко доказывается индукцией по размерности V. Именно: натянем на элемент v, существование которого утверждается теоремой 2, одномерное подпространство kv и рассмотрим факторпространство $\overline{V} = V/kv$. По предположению индукции в $\overline{V}$ имеется флаг $\overline{\mathscr{F}} = \{\overline{V}_i\}$, такой, что $\rho(\mathfrak{g})\overline{V}_i \subset \overline{V}_{i-1}$. Отсюда легко усмотреть, что соответствующие подпространствам $\overline{V}_i$ подпространства $V_i \subset V$ и прямая kv образуют в совокупности искомый флаг на V.

Доказательство теоремы 2′ проведем в семь шагов.

Шаг 1. Поскольку условия и заключение относятся не к самой алгебре $\mathfrak{g}$, а к $\rho(\mathfrak{g})$, мы можем заменить алгебру ее образом, т. е. можем считать, что $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End} V$.

Шаг 2. Отображение $\operatorname{ad} x$ нильпотентно для каждого $x \in \mathfrak{g}$. Действительно, $\operatorname{ad} x\,(y) = L_x y - R_x y$, где L_x и R_x — линейные эндоморфизмы пространства $\operatorname{End} V$, определенные соответственно правилами $\alpha \to x\alpha$ и $\alpha \to \alpha x$. Но так как по условию L_x и R_x нильпотентны, нильпотентна и их разность $L_x - R_x$. (Доказать, что в любом кольце $(\alpha - \beta)^{m+n-1} = 0$, если $\alpha^m = \beta^n = 0$ и $\alpha\beta = \beta\alpha$.)

Шаг 3. Применяя индукцию по размерности $\mathfrak{g}$, мы можем предполагать теорему 2′ установленной для всех алгебр Ли $\mathfrak{h}$, таких, что $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$.

Шаг 4. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$). Обозначим через $\mathfrak{n} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad} x\,(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}\}$ *нормализатор* $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, т. е. максимальную подалгебру в $\mathfrak{g}$, для которой $\mathfrak{h}$ является идеалом. Покажем, что $\mathfrak{n}$ *строго больше* $\mathfrak{h}$. (Читатель, знакомый с теорией p-групп, несомненно, заметит здесь некоторую аналогию.) Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ действует на пространстве $\mathfrak{h}$ и на $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ при помощи нильпотентных преобразований (присоединенное представление). Поскольку $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$, существует (в силу индуктивного предположения) ненулевой инвариантный (т. е. аннулируемый алгеброй $\mathfrak{h}$) вектор $\bar{x} = x + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Тогда для любого $y \in \mathfrak{h}$ имеем

$$\operatorname{ad} x(y) = -\operatorname{ad} y(x) \in \mathfrak{h}$$

(так как $\operatorname{ad} y(\bar{x}) = 0$). Итак, $\bar{x} \in \mathfrak{n}/\mathfrak{h}$, и наше утверждение доказано.

Шаг 5. Если $\mathfrak{g} \neq (0)$, существует *идеал* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ коразмерности 1. В самом деле, пусть $\mathfrak{h}$ — максимальная подалгебра в $\mathfrak{g}$, отличная от $\mathfrak{g}$. Тогда (см. четвертый шаг) нормализатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ совпадает со всей алгеброй $\mathfrak{g}$, т. е. $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Рассмотрим в алгебре $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ какое-нибудь одномерное подпространство и возьмем его полный подобраз в $\mathfrak{g}$. Мы получим подалгебру в $\mathfrak{g}$, строго большую, чем $\mathfrak{h}$, и потому совпадающую с $\mathfrak{g}$, откуда следует, что $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$. Выберем такой идеал $\mathfrak{h}$.

Шаг 6. Положим $W = \{v \in V \mid \mathfrak{h}v = 0\}$. Пространство W инвариантно относительно $\mathfrak{g}$. В самом деле, пусть $x \in \mathfrak{g}$ и $y \in \mathfrak{h}$, тогда

$$yxv = xyv - [x, y]v = 0 \qquad (v \in V),$$

поскольку $\mathfrak{h}$ — идеал.

Шаг 7. По предположению индукции ($\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$) $W \neq (0)$. Выберем элемент $y \in \mathfrak{g}$, не принадлежащий $\mathfrak{h}$. Так как y — нильпотентное преобразование, оно аннулирует некоторый ненулевой вектор из W, который тем самым аннулируется всей алгеброй $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + ky$. Теорема 2′ доказана.

Доказательство теоремы 1. Если алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то по теореме 2.1 (свойство (ii)) преобразование $\operatorname{ad} x$ нильпотентно для каждого $x \in \mathfrak{g}$. Обратно, пусть $\operatorname{ad} x$ нильпотентно для каждого $x \in \mathfrak{g}$. Применив теорему Энгеля, получим флаг

$$(0) \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g},$$

состоящий из подпространств $\mathfrak{a}_i$ алгебры $\mathfrak{g}$, таких, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i-1}$ для всех i. Отсюда вытекает, согласно критерию (iii) (теорема 2.1), что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна.

§ 3*. Теоретико-групповой аналог теоремы Энгеля

Пусть V — конечномерное векторное пространство над k. Элемент $g \in GL(V)$ назовем *унипотентным*, если g удовлетворяет одному из трех эквивалентных условий (доказательство их эквивалентности мы предоставляем читателю в качестве упражнения):

(i) $g = 1 + n$, где элемент n нильпотентен:

(ii) в подходящей системе координат преобразованию g отвечает треугольная матрица с единицами на главной диагонали:

(iii) все собственные значения преобразования g равны единице.

Теорема (Колчин). *Пусть G — подгруппа группы $GL(V)$, причем каждый элемент $g \in G$ унипотентен. Существует флаг $\mathcal{F} = \{V_i\}$ в пространстве V, такой, что все подпространства V_i инвариантны относительно G.*

Другими словами, найдется система координат, в которой все элементы группы G одновременно представляются треугольными матрицами, на диагонали которых ввиду свойства (iii) обязательно будут стоять единицы.

Доказательство. Теорема будет доказана (индукцией по размерности V), если при наших предположениях мы сможем установить существование ненулевого вектора $v \in V$, инвариантного относительно G.

Система линейных уравнений

$$(g - 1)v = 0 \qquad (g \in G)$$

имеет нетривиальное решение v над k тогда и только тогда, когда она имеет его над алгебраическим замыканием $\bar{k}$ поля k, т. е. в пространстве $V \otimes_k \bar{k}$. Поэтому мы можем предполагать, что поле k алгебраически замкнуто. Далее, рассматривая вместо пространства V его подпространство, можно считать, что V — простой G-модуль. Из теоремы плотности, или теоремы Бернсайда (Бурбаки [3], гл. VIII, § 4, п. 2 и 3) вытекает, что элементы группы G линейно порождают все пространство $\operatorname{End} V$, ибо $\sum_{g \in G} kg$ является k-подалгеброй в $\operatorname{End} V$.

С другой стороны, для каждого $g = 1 + n \in G$ имеем

$$\operatorname{Tr}_V(g) = \operatorname{Tr}_V(1) + \operatorname{Tr}_V(n) = \operatorname{Tr}_V(1),$$

так как след нильпотентного преобразования равен нулю. Итак, след $\operatorname{Tr}_V(g)$ не зависит от $g \in G$, так что для любых двух элементов g, $g' \in G$

$$\operatorname{Tr}_V(ng') = \operatorname{Tr}_V((g-1)g') = \operatorname{Tr}_V(gg' - g') = \\ = \operatorname{Tr}_V(gg') - \operatorname{Tr}_V(g') = 0.$$

Но элементы g' порождают $\operatorname{End} V$, так что $\operatorname{Tr}_V(n\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \operatorname{End} V$. Следовательно, $n = 0$, т. е. $g = 1$. Теорема доказана.

§ 4. Разрешимые алгебры

Производным рядом $\{D^n\mathfrak{g}\}$ идеалов в $\mathfrak{g}$ называется цепочка идеалов

$$\mathfrak{g} = D^1\mathfrak{g} \supset D^2\mathfrak{g} \supset \ldots \supset D^n\mathfrak{g} \supset \ldots,$$

определенных индуктивно по формулам $D^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, D^n\mathfrak{g} = [D^{n-1}\mathfrak{g}, D^{n-1}\mathfrak{g}]$, $n > 1$.

Теорема 1. *Следующие три условия эквивалентны:*

(i) *существует целое n, такое, что $D^n\mathfrak{g} = (0)$;*

(ii) *существует целое n, такое, что для любого семейства из 2^n элементов $x_\nu \in \mathfrak{g}$*

$$[[[\cdots], [\quad]], [[\quad], [\quad]]] = 0;$$

(iii) *алгебра $\mathfrak{g}$ получается последовательными расширениями абелевых алгебр Ли; иными словами, существует последовательность идеалов*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_n = (0),$$

такая, что факторы $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ абелевы, т. е. $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$ для всех i.

Действительно, импликации (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидны.

Определение 2. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая трем эквивалентным условиям предыдущей теоремы, называется *разрешимой алгеброй Ли.*

Пример. Пусть $\mathscr{F}=\{V_i\}$ — флаг в конечномерном векторном пространстве V. Положим

$$\mathfrak{b}(\mathscr{F})=\{x\in\operatorname{End}V \mid xV_i\subset V_i \text{ для всех } i\}.$$

В координатной системе, связанной с этим флагом, элементы из $\mathfrak{b}(\mathscr{F})$ представляются треугольными матрицами. Легко убедиться в том, что факторалгебра $\mathfrak{b}(\mathscr{F})/\mathfrak{n}(\mathscr{F})$ абелева, так что алгебра $\mathfrak{b}(\mathscr{F})$ разрешима.

§ 5. Основная теорема

На протяжении этого параграфа основное поле k есть поле характеристики нуль.

Основная теорема о разрешимых алгебрах Ли гласит:

Теорема 1 (Ли). *Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики, и пусть ρ — произвольное линейное представление алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве V. Тогда в пространстве V существует флаг $\mathscr{F}=\{V_i\}$, такой, что $\rho(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{b}(\mathscr{F})$.*

Индукцией по размерности V эта теорема сводится к следующей.

Теорема 1′. *В условиях теоремы* 5.1 (*при* $V\neq(0)$) *существует ненулевой вектор $v\in V$, собственный для всех преобразований $\rho(x)$, где $x\in\mathfrak{g}$.*

Заметим, что вектор v с такими свойствами определяет отображение $\chi\colon \mathfrak{g}\to k$, такое, что $\rho(x)v=\chi(x)v$.

Основная лемма. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем k нулевой характеристики, $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль, $v\in V$ $(\neq 0)$ и $\chi\colon \mathfrak{h}\to k$ — такое отображение, что $hv=\chi(h)v$ для всех $h\in\mathfrak{h}$. Тогда $\chi([x, h])=0$ при $x\in\mathfrak{g}$ и $h\in\mathfrak{h}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathfrak{g}\,(x \neq 0)$. Обозначим через V_i подпространство пространства V, порожденное векторами $v, xv, \ldots$

$\ldots, x^{i-1}v$. Имеем, очевидно,

$$(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_i \subset V_{i+1} \subset \ldots .$$

Пусть n — минимальное целое число, для которого $V_n = V_{n+1}$ $(n > 0)$. Очевидно, $\dim V_n = n$, $xV_n \subset V_{n+1}$ и $V_n = V_{n+k}$ для всех $k \geqslant 0$. Мы утверждаем, что для каждого элемента $h \in \mathfrak{h}$ имеет место сравнение $hx^i v \equiv \chi(h)\, x^i v \pmod{V_i}$, $i \geqslant 0$. Докажем это индукцией по i.

При $i = 0$ наше утверждение верно в силу определения отображения χ.

При $i > 0$ имеем

$$hx^i v = hxx^{i-1}v = xhx^{i-1}v - [x, h]\, x^{i-1}v.$$

Но по предположению индукции

$$hx^{i-1}v = \chi(h)\, x^{i-1}v + v'$$

и

$$[x, h]\, x^{i-1}v = \chi([x, h])\, x^{i-1}v + v'',$$

где $v', v'' \in V$. Учитывая, что $xV_{i-1} \subset V_i$, получаем искомое сравнение.

Из доказанного следует, что каждый эндоморфизм пространства V_n, определенный элементом $h \in \mathfrak{h}$, представляется в базисе этого пространства $\{v, xv, \ldots, x^{n-1}v\}$ треугольной матрицей с числами $\chi(h)$ по главной диагонали. Таким образом, $\mathrm{Tr}_{V_n}(h) = n\chi(h)$. Заменяя h на $[x, h]$, получаем

$$n\chi([x, h]) = \mathrm{Tr}_{V_n}([x, h]) = \mathrm{Tr}_{V_n}(xh - hx) = 0$$

(заметим, что $xV_n \subset V_n$).

Доказательство теоремы 1′. Снова применим индукцию по $\dim V$. Если $\dim \mathfrak{g} = 0$, наше утверждение тривиально. Пусть $\dim \mathfrak{g} > 0$. Поскольку алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима, $D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ (в противном случае $\mathfrak{g} = D^n\mathfrak{g}$ для всех $n \geqslant 0$). Рассмотрим подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ коразмерности 1, содержащее $D\mathfrak{g}$. По определению алгебры $D\mathfrak{g}$ имеем

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h},$$

так что $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. По предположению индукции найдутся ненулевой вектор $v \in V$ и отображение χ: $\mathfrak{h} \to k$, такие, что $hv = \chi(h)_v$ для всех $h \in \mathfrak{h}$. Положим

$$W = \{w \in V \mid hw = \chi(h)\, w \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}\}.$$

По построению W — нетривиальное линейное подпространство в V. Покажем, пользуясь основной леммой, что W инвариантно относительно $\mathfrak{g}$. Если $w \in W$ и $x \in \mathfrak{g}$, то для любого $h \in \mathfrak{h}$ имеем

$$hxw = xhw - [x, h]\, w = \chi(h)\, xw - \chi([x, h])\, w.$$

Поскольку последний член в этом равенстве равен 0, получаем $xw \in W$.

Выберем теперь элемент $x \in \mathfrak{g}$, не лежащий в $\mathfrak{h}$. Так как поле k алгебраически замкнуто, то для эндоморфизма $x : W \to W$ существует собственный вектор $v_0 \in W$. Полученный вектор является искомым, поскольку v_0 будет собственным для всех элементов алгебры $kx + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Теорема доказана.

Заметим, что теорема Ли неверна в случае поля характеристики, отличной от нуля. В качестве примера рассмотрим алгебру Ли $sl(2)$ квадратных матриц второго порядка с нулевым следом над полем характеристики 2. Легко показать, что эта трехмерная алгебра нильпотентна, однако ее стандартное представление в пространстве векторов-столбцов длины 2 не имеет собственных векторов.

Мы закончим этот параграф двумя следствиями из теоремы Ли.

Следствие 2. *В разрешимой алгебре Ли существует флаг из идеалов этой алгебры.*

Для доказательства достаточно применить теорему Ли к присоединенному представлению.

Следствие 3. *Если поле k имеет характеристику нуль и $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли, то алгебра $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ нильпотентна.*

Доказательство. Заметим, что наше утверждение *линейно*. Если k' — расширение поля k и $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k k'$, то ясно, что разрешимость (соответственно нильпотентности) алгебры $\mathfrak{g}'$ равносильна разрешимости (соответственно нильпотентности) алгебры $\mathfrak{g}$, так как $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]' = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ и т. д. Поэтому можно предполагать, что поле k алгебраически замкнуто. Согласно предыдущему следствию, существует флаг идеалов алгебры $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_n = (0).$$

Пусть $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Легко видеть, что $\operatorname{ad} x\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}_{i+1}$, поскольку алгебра Ли $\operatorname{End}(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}) \simeq k$ коммутативна. Следовательно, $\operatorname{ad} x$ нильпотентен на $\mathfrak{g}$, а тем более на $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Нильпотентность алгебры $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ следует теперь из теоремы 3.1.

Замечание. Обратно, если алгебра $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ нильпотентна, то алгебра $\mathfrak{g}$, очевидно, разрешима.

§ 5*. Теоретико-групповой аналог теоремы Ли

Группа G называется *разрешимой*, если она может быть получена посредством конечного числа расширений абелевых групп.

Рассмотрим ряд подгрупп

$$G = G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \ldots \supset G^{(n)},$$

где $G^{(1)} = G$ и $G^{(n)} = (G^{(n-1)}, G^{(n-1)})$ при $n > 1$. Тогда разрешимость группы G эквивалентна равенству $G^{(n)} = 1$ для некоторого n.

Пусть G — топологическая группа и $\rho: G \to GL(V)$ — непрерывный гомоморфизм группы G в группу автоморфизмов конечномерного векторного пространства V над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$.

Теорема 1*. *Если группа G разрешима и связна, то в пространстве V существует флаг $\mathcal{F}$, инвариантный относительно $\rho(x)$ для всех $x \in G$.*

Представление ρ называется *неприводимым*, если в пространстве $V\,(\neq(0))$ нет иных подпространств, инвариантных относительно всех $\rho(x)$, кроме V и (0). Из теоремы 1* непосредственно вытекает

Следствие 2*. *Если группа G разрешима и связна, а представление ρ неприводимо, то* $\dim V=1$.

Обратно, с помощью индукции по $\dim V$ наша теорема легко получается из этого следствия.

Следствие 3*. *Всякая компактная разрешимая топологическая группа абелева.*

Доказательство. По теореме Петера — Вейля для любой компактной группы G существует семейство неприводимых представлений ρ_α: $G\to \mathrm{GL}(V_\alpha)$, такое, что отображение $G\to\prod_\alpha GL(V_\alpha)$ инъективно. Но $\dim V_\alpha=1$, так что G — абелева группа.

Прежде чем доказывать теорему, условимся о следующей терминологии.

Элемент $v\in V$ назовем *собственным* для подгруппы $H\subset G$, если $v\neq 0$ и $hv\in\mathbf{C}v$ для всех $h\in H$. Собственный вектор v определяет *характер* χ_v: $H\to\mathbf{C}^*$, для которого $\rho(h)v=\chi v(h)v$, где $h\in H$. Разумеется, функция χ_v непрерывна, поскольку непрерывно отображение ρ. Число *различных* характеров χ_v, отвечающих собственным векторам $v\in V$, не превышает размерности V (и следовательно, конечно). В самом деле, допустим, что $\{v_1, \ldots, v_r\}$ — максимальная линейно независимая система собственных векторов для группы H и $\{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ — соответствующая система характеров. Пусть v — произвольный собственный вектор с характером χ. Тогда $v=\sum a_i v_i$, где $a_i\in\mathbf{C}$, и, применяя $\rho(h)$ к этому равенству, мы получаем $a_i\chi(h)=a_i\chi_i(h)$ при любом i.

Следовательно, $\chi=\chi_i$ для некоторого i, поскольку не все a_i равны нулю.

Основная лемма*. *Пусть G — связная топологическая группа и v — собственный вектор для ее* *нормального делителя H. Тогда $\chi_v(x^{-1}hx) = \chi_v(h)$ для всех $x \in G$ и $h \in H$.*

(Читатель, конечно, заметит аналогию с основной леммой предыдущего параграфа.)

Доказательство. Несложное вычисление показывает, что $\chi_v(x^{-1}hx) = \chi_{xv}(h)$. Как уже было выяснено раньше, существует лишь конечное число характеров группы H вида χ_{xv}. Поэтому подгруппа $S = \{x \in G \mid \chi_{xv} = \chi_v\}$ имеет в группе конечный индекс. Однако S, будучи множеством общих нулей функций $\chi_v(x^{-1}hx) - \chi_v(h)$ на группе G (h пробегает H), является замкнутым множеством. Таким образом, G есть объединение конечного числа попарно непересекающихся замкнутых множеств (смежных классов по S). Ввиду связности G это означает совпадение S и G, ч. т. д.

Доказательство теоремы 1*. Воспользуемся индукцией по наименьшему числу n, для которого $G^{(n)} = (1)$. Если $n = 1$, то $G = (1)$ и теорема очевидна. Пусть $n > 1$, тогда $G^{(2)} \neq G^{(1)} = G$ (в противном случае $G^{(n)} = G$ для всех n). Докажем сначала связность $G^{(2)}$, а затем применим к этой группе предположение индукции. Обозначим через C множество всех коммутаторов группы G; это множество, очевидно, связно как образ связного топологического пространства $G \times G$ при отображении $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$. Положим

$$C^m = \{x \in G \mid x = y_1 \ldots y_m, \text{ где } y_1, \ldots, y_m \in C\}.$$

Множество C^m есть образ произведения $C \times \ldots \times C$ (m раз) и потому тоже связно. Поскольку включения $u \in C$ и $u^{-1} \in C$ выполняются одновременно, группа $G^{(2)}$, порожденная C, есть объединение множеств C^m. Таким образом, $G^{(2)}$ — связная группа, ибо все C^m связны и имеют общую точку 1.

По предположению индукции существует собственный вектор $v_0 \in V$ для группы $G^{(2)}$. Обозначим через χ_0: $G^{(2)} \to \mathbf{C}^*$ соответствующий характер. В силу основной леммы множество

$$\{v \in V \mid \rho(h)\, v = \chi_0(h)\, v, \quad \text{где} \quad h \in G^{(2)}\}$$

инвариантно относительно $\rho(G)$. Однако по предположению ρ неприводимо, поэтому $\rho(h)\, v = \chi_0(h)\, v$ для всех $v \in V$ и $h \in G^{(2)}$.

Пусть $x \in G$. Рассмотрим подгруппу $H \subset G$, порожденную G^2 и элементом x. Легко видеть, что H — нормальный делитель ($H \supset G^{(2)}$). Так как поле $\mathbf{C}$ алгебраически замкнуто, оператор $\rho(x)$ имеет собственный вектор $v_1 \in V$. По приведенным выше соображениям v_1 — собственный вектор для $G^{(2)}$ и, следовательно, для H. Пусть χ_1: $H \to \mathbf{C}^*$ — соответствующий характер. Применяя опять основную лемму, находим, что множество

$$\{v \in V \mid \rho(h)\, v = \chi_1(h)\, v, \quad h \in H\}$$

инвариантно относительно $\rho(G)$ и, следовательно, совпадает со всем пространством V. В частности, $\rho(x)\, v \in \mathbf{C}v$ для любого $v \in V$. Поскольку элемент x выбирался в группе G произвольно, мы заключаем, что $\dim V = 1$. Тем самым следствие 2* и теорема 1 доказаны.

Замечание. Фактически теорема Ли и ее теоретико-групповой аналог эквивалентны друг другу. Если исходить, например, из групповой теоремы, то соответствующее утверждение для алгебр Ли сразу получается (при $k = \mathbf{C}$) рассмотрением связной[1]) группы Ли, соответствующей данной алгебре Ли. Случай произвольного алгебраически замкнутого поля k нулевой характеристики сводится к случаю $k = \mathbf{C}$ с помощью принципа Лефшеца. Именно: возьмем подполе $k' \subset k$, конечно, порожденное (над $\mathbf{Q}$) структурными константами алгебры $\mathfrak{g}$ и отображения $\mathfrak{g} \times V \to V$. Вложим затем поле k' в $\mathbf{C}$ и осуществим спуск от $\mathbf{C}$ к $\bar{k}'$.

---

[1]) И односвязной. — *Прим. перев.*

Обратно, пусть мы исходим из теоремы Ли. Теорема 1* получится, если рассмотреть замыкание группы $\rho(G)$ в $\mathrm{GL}(V)$ как вещественную группу Ли и применить к ее алгебре Ли теорему Ли.

§ 6. Леммы об эндоморфизмах

Пусть k — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и V — конечномерное векторное пространство над k. Элемент $u \in \operatorname{End} V$ называется *полупростым*, если пространство V имеет базис, состоящий из его собственных векторов, или, что то же самое, если в некоторой системе координат u представляется диагональной матрицей.

Лемма 1. *Для каждого $u \in \operatorname{End} V$ существуют полупростой элемент s и нильпотентный элемент n из алгебры $\operatorname{End} V$, такие, что $sn = ns$ и $u = s + n$, причем s и n однозначно определяются этими двумя условиями. Кроме того, существуют многочлены $S(T)$ и $N(T)$ (зависящие от u), такие, что $S(0) = N(0) = 0$, $s = S(u)$ и $n = N(u)$.*

Доказательство. Пусть $\prod_i (T - \lambda_i)^{m_i}$ — разложение характеристического многочлена оператора u в произведение степеней различных линейных множителей $T - \lambda_i$. Для каждого i обозначим через V_i ядро эндоморфизма $(u - \lambda_i)^{m_i}$: $V \to V$. Тогда $V = \bigoplus V_i$ (прямая сумма), $\dim V_i = m_i$ и $uV_i \subset V_i$. Пусть искомые s и n уже найдены. Перестановочность s и n влечет за собой перестановочность s и u, а тем самым s и $(u - \lambda_i)^{m_i}$; поэтому $sV_i \subset V_i$ для каждого i. Из нильпотентности эндоморфизма $u - s$[1]) вытекает, что u и s имеют на V_i одинаковые собственные значения. Но по построению оператор u имеет в пространстве V_i единственное собственное значение λ_i. Поэтому полупростота s означает, что ограничение этого оператора

[1]) А также из перестановочности u и s. — *Прим. перев.*

на V_i есть просто оператор умножения на скаляр λ_i. Таким образом, единственность эндоморфизмов n и s доказана. С другой стороны, определяя s указанным способом и полагая $n = u - s$, мы получаем решение нашей задачи (так как ограничение оператора n на V_i имеет вид $u - \lambda_i$ и является, следовательно, нильпотентным по определению V_i).

Рассмотрим, наконец, многочлен $S(T)$, удовлетворяющий следующей системе сравнений:

$$S(T) \equiv \lambda_i (\operatorname{mod} (T - \lambda_i)^{m_i}), \quad S(T) \equiv 0 (\operatorname{mod} T).$$

(Заметим, что эти условия согласованы, если $\lambda_i = 0$ для некоторого i.)

Очевидно, что $S(0) = 0$ и $S(u) = s$. Полагая $N(T) = T - S(T)$, мы получим $N(0) = 0$ и $N(u) = u - s = n$, ч. т. д.

С л е д с т в и е 2. *Пусть $u = s + n$ — разложение из предыдущей леммы, и пусть A и B — два подпространства в V, такие, что $A \subset B$ и $B \subset A$. Тогда $sB \subset A$ и $nB \subset A$.*

Действительно, в силу предыдущей леммы достаточно заметить, что для любого многочлена $P(T)$ без свободного члена имеем $P(u) B \subset A$.

Обозначим через V^* двойственное к V пространство $\operatorname{Hom}_k(V, k)$ и положим для любых целых $p, q \geqslant 0$

$$V_{p,q} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p \text{ раз}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q \text{ раз}}.$$

Пространство $V_{p,q}$ можно рассматривать как модуль над алгеброй Ли $\operatorname{End} V$ относительно *диагонального действия* (см. § 1). Для каждого $u \in \operatorname{End} V$ обозначим через $u_{p,q}$ соответствующий эндоморфизм пространства $V_{p,q}$.

Например,

$$u_{1,2} = u \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes u^* \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes u^*,$$

где $u^* \in \operatorname{End} V^*$ — сопряженный к u эндоморфизм, определяемый формулой $\langle u^* y, x \rangle = \langle y, u x \rangle$ (мы пишем здесь $\langle y, x \rangle$ вместо $y(x)$ для $y \in V^*$, $x \in V$).

В частном случае $p=q=1$ имеется канонический изоморфизм $V_{1,1} \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} V$, который сопоставляет паре $x \otimes y$ эндоморфизм $x' \longmapsto x\langle y, x'\rangle$. Несложное вычисление показывает, что при этом изоморфизме элементу $u_{1,1} \in \operatorname{End} V_{1,1}$ соответствует элемент $\operatorname{ad} u \in \in \operatorname{End}(\operatorname{End} V)$.

Лемма 3. *Пусть $u=s+n$ — каноническое разложение эндоморфизма u, указанное в лемме 1. Тогда $u_{p,q}=s_{p,q}+n_{p,q}$ есть каноническое разложение эндоморфизма $u_{p,q}$ для любых p и q.*

Доказательство. Прежде всего $[s_{p,q}, n_{p,q}] = [s, n]_{p,q} = 0_{p,q} = 0$, так что $s_{p,q}$ и $n_{p,q}$ коммутируют. Если $\{x_i\}$ — базис V, состоящий из собственных векторов оператора s, то двойственный базис $\{x_i^*\}$ пространства V^* и базис $\{x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_p} \otimes x_{j_1}^* \otimes \ldots \otimes x_{j_p}^*\}$ пространства $V_{p,q}$ состоят соответственно из собственных векторов операторов s^* и $s_{p,q}$. Таким образом, эндоморфизм $s_{p,q}$ полупрост. Оператор $n_{p,q}$ нильпотентен, будучи равен сумме операторов вида $1 \otimes \ldots \otimes n \otimes \ldots \otimes 1$ и $1 \otimes \ldots \otimes n^* \otimes \ldots \otimes 1$, которые нильпотентны и попарно перестановочны. Равенство $u_{p,q}=s_{p,q}+n_{p,q}$ тоже имеет место, поскольку отображение $u \longmapsto u_{p,q}$ линейно. Остается учесть единственность канонического разложения.

Пусть $s \in \operatorname{End} V$ — полупростой элемент, $V = \bigoplus V_i$ — соответствующее разложение в прямую сумму, такое, что $s|V_i = \lambda_i$, и пусть $\varphi\colon k \to k$ — некоторое $\mathbf{Q}$-линейное отображение.

Определение 4. Символом $\varphi(s)$ будем обозначать полупростой эндоморфизм пространства V, для которого $\varphi(s)|V_i = \varphi(\lambda_i)$. (Другими словами, если эндоморфизм s представлен диагональной матрицей, то матрица, соответствующая $\varphi(s)$, получится, если применить φ к ее элементам.)

Существует многочлен $P(T)$ (зависящий от φ и s), для которого $\varphi(s)=P(s)$ и $P(0)=0$. (Нахождение такого многочлена сводится к решению интерполяционной задачи $P(\lambda_i)=\varphi(\lambda_i)$ для всех i и $P(0)=0$.) До сих пор мы использовали лишь тот факт, что φ отображает k в k и $\varphi(0)=0$. Для того чтобы доказать следующую лемму, нам понадобится линейность φ.

Лемма 5. *Для любых p и q имеет место формула*

$$(\varphi(s))_{p,q}=\varphi(s_{p,q}).$$

Доказательство. Пространство $V_{p,q}$ разлагается в прямую сумму подпространств вида $V_{i_1}\otimes\ldots\otimes V_{i_p}\otimes \overset{*}{V}_{j_1}\otimes\ldots\otimes \overset{*}{V}_{j_q}$. На каждом таком подпространстве

$s_{p,q}$ есть оператор умножения на скаляр $\lambda_{i_1}+\ldots$ $\ldots+\lambda_{i_p}-\lambda_{j_1}-\ldots-\lambda_{j_q}$,

$\varphi(s_{p,q})$ есть оператор умножения на скаляр $\varphi(\lambda_{i_1}+\ldots+\lambda_{i_p}-\lambda_{j_1}-\ldots-\lambda_{j_p})$,

$\varphi(s)_{p,q}$ есть оператор умножения на скаляр $\varphi(\lambda_{i_1})+\ldots+\varphi(\lambda_{i_p})-\varphi(\lambda_{j_1})-\ldots-\varphi(\lambda_{j_p})$.

Следствие 6. *Пусть $u=s+n$ — каноническое разложение эндоморфизма $u\in\operatorname{End}V$, и пусть A и B — подпространства в $V_{p,q}$, такие, что $A\subset B$ и $u_{p,q}B\subset A$. Тогда для любого $\mathbf{Q}$-линейного отображения φ: $k\to k$ имеет место включение $\varphi(s)_{p,q}B\subset A$.*

Доказательство. Ввиду леммы 3 и следствия 2 $s_{p,q}B\subset A$. Лемма становится теперь очевидной, если учесть замечание (перед леммой 5) о том, что эндоморфизм $\varphi(s)_{p,q}=\varphi(s_{p,q})$ представляется многочленом от $s_{p,q}$ без свободного члена.

Лемма 7. *Пусть $u=s+n$ — каноническое разложение из леммы 1. Если $\operatorname{Tr}_V(u\varphi(s))=0$ для всех $\varphi\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Q}}(k,k)$, то оператор u нильпотентен.*

Доказательство. Используя те же обозначения, что и при доказательстве леммы 1, получаем

$$\mathrm{Tr}_V(u\varphi(s)) = \sum m_i\lambda_i\varphi(\lambda_i) = 0$$

для всех $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(k, k)$. Пусть φ таково, что $\varphi(k) \subset \mathbf{Q}$. Тогда, применяя повторно φ, мы придем к тождеству $\sum m_i\varphi(\lambda_i)^2 = 0$, из которого следует, что $\varphi(\lambda_i) = 0$ для каждого i. Но включение $\varphi(k) \subset \mathbf{Q}$ выполняется, например, для любых $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(k, \mathbf{Q})$, так что $\lambda_i = 0$ для всех i, т. е. $s = 0$ и $n = u$, как и утверждалось.

Замечание (Бергман). Если $k = \mathbf{C}$, достаточно предполагать, что равенство $\mathrm{Tr}_V(u\varphi(s)) = 0$ выполняется лишь для одного-единственного φ, а именно для отображения комплексного сопряжения.

Эндоморфизмы вида $\varphi(s)$ называются (по терминологии Шевалле) *репликами* эндоморфизма s.

Мы предоставляем читателю в качестве упражнения следующую характеризацию реплик.

Теорема 7. *Пусть s и s' — полупростые элементы пространства* $\mathrm{End}\,V$. *Тогда s' является репликой s (т. е. существует преобразование φ, такое, что $\varphi(s) = s'$) в том и только в том случае, если для любых p и q каждый элемент пространства $V_{p,q}$, аннулируемый $s_{p,q}$, аннулируется и $s'_{p,q}$.*

Имеется еще одно, более красивое описание реплик в терминах алгебраических групп. Пусть $\mathfrak{g}$ — множество всех реплик эндоморфизма s. Можно показать, что $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли наименьшей *алгебраической* подгруппы $G \subset \mathrm{GL}(V)$, алгебра Ли которой содержит s. В самом деле, группа G (или, точнее, группа $G(k)$ точек группы с координатами из поля k) состоит из всех автоморфизмов x пространства V, таких, что для каждого i ограничение $x \mid V_i$ есть оператор умножения на скаляр $x_i \in k^*$, причем эти скаляры удовлетворяют соотношению $\prod x_i^{n_i} = 1$ для всякого целочисленного вектора $(\ldots, n_i, \ldots)$, такого, что $\sum n_i\lambda_i = 0$ (см. Шевалле [2], гл. II, §§ 13—14, или Шевалле [6]).

§ 7. Критерий Картана

Часто бывает полезным следующий критерий разрешимости.

Теорема 1. *Пусть k — поле нулевой характеристики, V — конечномерное векторное пространство над k и $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли алгебры* $\operatorname{End} V$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) *алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима*;

(ii) $\operatorname{Tr}_V(xy)=0$ *для всех* $x\in\mathfrak{g}$ *и* $y\in D\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

Доказательство. Заметим сначала, что утверждение теоремы линейно, т. е. k можно предполагать алгебраически замкнутым (объяснение этому было дано выше при доказательстве следствия 5.3). Далее, применяя „принцип Лефшеца" (т. е. выбирая конечно порожденное подполе $k'\subset k$, над которым определены V и $\mathfrak{g}$, и вкладывая k' в $\mathbf{C}$), мы можем свести случай произвольного поля k к случаю $k=\mathbf{C}$.

(i)$\Rightarrow$(ii). По теореме Ли в пространстве V существует флаг $\{V_i\}$, инвариантный относительно $\mathfrak{g}$. Но

$$\operatorname{Tr}_V(xy)=\sum_i \operatorname{Tr}_{V_i/V_{i+1}}(xy)=0,$$

потому что элемент $y\in D\mathfrak{g}$ должен аннулировать одномерный $\mathfrak{g}$-модуль V_i/V_{i+1}.

(ii)$\Rightarrow$(i). Пусть $u\in D\mathfrak{g}$. По теореме Энгеля (см. замечание к следствию 5.3) достаточно показать, что u нильпотентен. Напишем каноническое разложение $u=s+n$. Принимая во внимание лемму 6.7, нам надо лишь показать, что $\operatorname{Tr}_V(u\varphi(s))=0$ для всех $\varphi\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Q}}(k,k)$. Дело осложняется тем, что $\varphi(s)$ не обязательно лежит в $\mathfrak{g}$. Пусть $u=\sum c_\alpha[x_\alpha,y_\alpha]$, где $c_\alpha\in k$ и x_α, $y_\alpha\in\mathfrak{g}$. Воспользовавшись тождеством $\operatorname{Tr}_V([a,b]c)=\operatorname{Tr}_V(b[c,a])$, получаем

$$\operatorname{Tr}_V(u\varphi(s))=\sum c_\alpha \operatorname{Tr}_V([x_\alpha,y_\alpha]\varphi(s))=$$
$$=\sum c_\alpha \operatorname{Tr}_V(y_\alpha[\varphi(s),x_\alpha]).$$

Таким образом, нам достаточно установить, что $[\varphi(s),x_\alpha]\in D\mathfrak{g}$. Используем для этого канонический изоморфизм $\operatorname{End} V \simeq V \otimes V^* = V_{1,1}$ и применим следствие 6.6 (с $p = q = 1$), положив $A = D\mathfrak{g}$ и $B = \mathfrak{g}$. Имея в виду отождествление $\operatorname{End} V = V_{1,1}$, можно написать $u_{1,1}(x) = ux - xu = [u, x]$ (см. замечание перед леммой 6.3). Следовательно, $u_{1,1}(\mathfrak{g}) \subset D\mathfrak{g}$. Отсюда, по лемме 6.6, $\varphi(s)_{1,1}, (\mathfrak{g}) \subset D\mathfrak{g}$, т. е. $[\varphi(s), x] \in D\mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, ч. т. д.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Класс нильпотентных (соответственно разрешимых) алгебр Ли замкнут относительно перехода к подалгебрам, факторалгебрам и конечным произведениям. Что можно сказать о расширениях?

2. Нильпотентная алгебра размерности 2 абелева. В неабелевой двумерной алгебре Ли существует базис $\{x, y\}$, такой, что $[x, y] = x$.

3. Неабелева нильпотентная алгебра Ли размерности 3 имеет базис $\{x, y, z\}$, такой, что $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$.

Глава VI

ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

На протяжении этой главы k — поле нулевой характеристики и все алгебры и модули имеют над k конечную размерность.

§ 1. Радикал

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — ее разрешимые идеалы. Идеал $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ тоже разрешим, поскольку он является расширением алгебры $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ с помощью идеала $\mathfrak{a}$. В алгебре $\mathfrak{g}$ имеется, следовательно, разрешимый идеал, содержащий все другие разрешимые идеалы. Этот наибольший разрешимый идеал $\mathfrak{r}$ называют *радикалом* алгебры $\mathfrak{g}$.

§ 2. Полупростые алгебры Ли

Мы будем говорить, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *полупроста*, если ее радикал $\mathfrak{r}$ равен нулю. Эквивалентное определение: алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, если она *не содержит ненулевых абелевых идеалов*. Действительно, если $\mathfrak{r} \neq (0)$, то последний нетривиальный член производного ряда радикала $\mathfrak{r}$ будет абелевым идеалом алгебры $\mathfrak{g}$.

Другой критерий полупростоты дает следующая

Теорема 1. *Алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста в том и только в том случае, когда ее форма Киллинга невырождена.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{u}$ пространство всех $x \in \mathfrak{g}$, для которых $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)=0$

при любом $y \in \mathfrak{g}$. Несложное вычисление, использующее инвариантность формы Киллинга (см. гл. V, § 1, пример 2), показывает, что множество $\mathfrak{n}$ является идеалом в алгебре $\mathfrak{g}$. Если $x \in \mathfrak{n}$, то $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$ для всех $y \in \mathfrak{g}$ и, в частности, для $y \in D\mathfrak{n}$. Отсюда, согласно критерию Картана, вытекает, что $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{n}$ — разрешимая подалгебра алгебры $\operatorname{End}\mathfrak{g}$. Но $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{n}$ есть факторалгебра алгебры $\mathfrak{n}$ по центру алгебры $\mathfrak{g}$, так что и сам идеал $\mathfrak{n}$ тоже разрешим. Таким образом, если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра, то идеал $\mathfrak{n}$ равен нулю.

Обратно, допустим, что $\mathfrak{a}$ — абелев идеал в $\mathfrak{g}$, и покажем, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}$. В самом деле, пусть $\sigma = \operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y$, где $x \in \mathfrak{a}$ и $y \in \mathfrak{g}$, тогда $\sigma\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$ и $\sigma\mathfrak{a} = (0)$. Поэтому $\sigma^2 = 0$ и $\operatorname{Tr} \sigma = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — ее идеал и $\mathfrak{a}^{\perp}$ — ортогональное дополнение к идеалу $\mathfrak{a}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга. Тогда $\mathfrak{a}^{\perp}$ — идеал алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ (прямая сумма).*

Доказательство. Стандартное рассуждение, использующее инвариантность формы Киллинга, показывает, что $\mathfrak{a}^{\perp}$ — идеал в алгебре $\mathfrak{g}$. Аналогично тому, как это делалось в предыдущей теореме, доказывается, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ — разрешимый идеал. Последнее означает ввиду полупростоты алгебры $\mathfrak{g}$, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = 0$. Теорема доказана.

Определение 1. Алгебра Ли $\mathfrak{s}$ называется *простой*, если она

(i) неабелева;

(ii) не содержит собственных идеалов.

Заметим, что в предыдущей теореме $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\perp}] = (0)$, так как $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}^{\perp}$ — идеалы в $\mathfrak{g}$. Поэтому из разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ следует изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^{\perp}$. Таким образом, любой идеал в $\mathfrak{a}$ будет идеалом и в $\mathfrak{g}$, и потому идеал $\mathfrak{a}$ полупрост. Алгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{a}^{\perp}$ также полупроста. Применяя индукцию по $\dim \mathfrak{g}$, получаем

Следствие 1. *Полупростая алгебра Ли изоморфна прямому произведению простых алгебр Ли.*

Для простых алгебр $\mathfrak{s}$ имеет место очевидное равенство $D\mathfrak{s}=\mathfrak{s}$. Из него вытекает

Следствие 2. *Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то $D\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$.*

Заметим, что разложение $\mathfrak{g}$ в произведение простых алгебр определено *однозначно* в буквальном смысле (а не только с точностью до изоморфизма). Иными словами, пусть $\mathfrak{g}=\bigoplus \mathfrak{a}_\alpha$ — разложение в прямую сумму простых идеалов и $\varphi\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{s}$ — некоторый сюръективный гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на простую алгебру Ли $\mathfrak{s}$. Тогда для некоторого индекса β ограничение $\varphi|\mathfrak{a}_\beta\colon \mathfrak{a}_\beta\to\mathfrak{s}$ есть изоморфизм, причем для $\alpha\neq\beta$ ограничение $\varphi|\mathfrak{a}_\alpha=0$. В самом деле, образ $\varphi(\mathfrak{a}_\alpha)$ — идеал в $\mathfrak{s}$, так как $\mathfrak{a}_\alpha$ — идеал в $\mathfrak{g}$ и гомоморфизм φ сюръективен. В силу простоты алгебры $\mathfrak{s}$ гомоморфизм $\varphi|\mathfrak{a}_\alpha$ либо нулевой, либо сюръективный. В последнем случае $\varphi|\mathfrak{a}_\alpha$ будет изоморфизмом, так как идеал $\mathfrak{a}_\alpha$ прост. Множество тех α, для которых $\varphi|\mathfrak{a}_\alpha$ — изоморфизм, непусто, поскольку φ — ненулевой гомоморфизм. С другой стороны, ограничения $\varphi|\mathfrak{a}_\alpha$ и $\varphi|\mathfrak{a}_\beta$ не могут быть изоморфизмами для двух различных индексов α и β ввиду равенств

$$[\mathfrak{a}_\alpha,\ \mathfrak{a}_\beta]=0,$$

$$\varphi[\mathfrak{a}_\alpha,\ \mathfrak{a}_\beta]=[\varphi(\mathfrak{a}_\alpha),\ \varphi(\mathfrak{a}_\beta)]=[\mathfrak{s},\ \mathfrak{s}]=\mathfrak{s}.$$

Следствие 3. *Если $\mathfrak{g}=\bigoplus \mathfrak{a}_\alpha$ — представление алгебры в виде прямой суммы простых идеалов, то любой идеал алгебры есть прямая сумма некоторых из идеалов $\mathfrak{a}_\alpha$.*

Примеры полупростых алгебр Ли. 1. Алгебра $\mathfrak{sl}(V)$ эндоморфизмов пространства V с нулевым следом проста, если $\dim V\geqslant 2$.

2. Алгебра $\mathfrak{sp}(V)$ эндоморфизмов пространства V, оставляющих инвариантной невырожденную кососимметричную форму, проста, если $\dim V=2n\ (n\geqslant 1)$.

3. Алгебра $\mathfrak{o}(V)$ эндоморфизмов пространства V, оставляющих инвариантной невырожденную симметрическую форму, полупроста, если $\dim V\geqslant 3$, и даже

проста, за исключением того случая, когда $\dim V = 4$ и дискриминант этой формы является квадратом.

§ 3. Полная приводимость

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль и $\rho\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ — соответствующее представление.

Определение. Модуль V (или представление ρ) называется *простым* (или *неприводимым*), если $V \neq (0)$ и если в модуле V нет подмодулей, отличных от (0) и V.

Модуль V (или представление ρ) называется *полупростым* (или *вполне приводимым*), если V разлагается в прямую сумму простых подмодулей, или, что то же самое, если каждый подмодуль обладает дополнительным подмодулем.

Предостережение! Алгебра $\mathfrak{g}$ может быть полупростым $\mathfrak{g}$-модулем, не будучи полупростой алгеброй Ли, как показывает пример $\mathfrak{g} = k$.

Теорема (Г. Вейль). *Если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста, то все $\mathfrak{g}$-модули (конечной размерности) полупросты.*

Замечание. В своем доказательстве Вейль использовал так называемый *унитарный прием*, который состоит в следующем. Пусть $k = \mathbf{C}$, G — связная и односвязная комплексная группа Ли, соответствующая алгебре $\mathfrak{g}$, и пусть K — максимальная компактная подгруппа в G. Можно показать, что любая комплексная (замкнутая) подгруппа Ли группы G, содержащая K, совпадает с G. Отсюда выводится, что любой K-подмодуль модуля V является в то же время и G-подмодулем. Поскольку K компактно, на V существует K-инвариантная эрмитова форма, с помощью которой строится дополнительный подмодуль (ортогональное дополнение). В случае $G = SL(n)$ в качестве K можно взять $SU(n)$ — специальную унитарную группу; отсюда и название „унитарный прием“. Чисто алгебраическое доказательство теоремы Вейля было найдено лишь несколько лет спустя.

Доказательство теоремы мы осуществим в несколько шагов.

Шаг 1. Если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста и отображение $\rho: \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ инъективно, то форма $B_\rho(x, y) = \operatorname{Tr}_V(\rho(x)\rho(y))$ невырождена. В самом деле, согласно критерию Картана, идеал

$$\mathfrak{n} = \{x \in \mathfrak{g} \mid B_\rho(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in \mathfrak{g}\}$$

разрешим и, следовательно, равен нулю.

Шаг 2. Допустим, что на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задана невырожденная, инвариантная, симметрическая, билинейная форма $B(x, y)$. Пусть $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$ — два базиса этой алгебры, сопряженных относительно B, т. е. $B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера). Рассмотрим в универсальной обертывающей алгебре $U\mathfrak{g}$ элемент $b = \sum e_i f_i$. Утверждается, что элемент b лежит в центре алгебры $U\mathfrak{g}$ и не зависит от выбора базисов $\{e_i\}$, $\{f_j\}$. Действительно, возьмем отображение $\mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g} \xrightarrow{\Phi} \operatorname{Hom}_k(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, при котором $\Phi(x \otimes y) = \varphi$, где $\varphi(z) = B(y, z)x$. Используя невырожденность формы $B(x, y)$, легко показать, что отображение Φ — изоморфизм и даже изоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей (последнее проверяется прямым вычислением). Нетрудно усмотреть, что при этом отображении элемент $\sum e_i \otimes f_i$ переходит в тождественный гомоморфизм $\mathrm{id}_\mathfrak{g}$. Таким образом, b есть образ элемента $\mathrm{id}_\mathfrak{g}$ при композиции $\mathfrak{g}$-гомоморфизмов

$$\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \xrightarrow{\Phi^{-1}} \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g}^* \xrightarrow{B} \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}.$$

Поскольку элемент $\mathrm{id}_\mathfrak{g}$ аннулируется алгеброй $\mathfrak{g}$, элемент b обладает тем же свойством, т. е. лежит в центре $U\mathfrak{g}$ (так как $\mathfrak{g}$ порождает алгебру $U\mathfrak{g}$). Элемент b мы будем называть *элементом Казимира*, соответствующим форме B.

Шаг 3. Предположим, что мы находимся в условиях первого шага и что b — элемент Казимира, соответствующий форме B_ρ. Тогда элемент b определяет эндоморфизм $\mathfrak{g}$-модуля V и $\operatorname{Tr}_V(b) = \dim \mathfrak{g}$. Действительно, b коммутирует с действием алгебры $\mathfrak{g}$ на V, поскольку b лежит в центре алгебры $U_{\mathfrak{g}}$.

Далее, имеем

$$\mathrm{Tr}_V(b) = \sum \mathrm{Tr}_V(\rho(e_i)\rho(f_i)) = \sum B_\rho(e_i, f_i) = \dim \mathfrak{g}.$$

Шаг 4. Пусть на предыдущем шаге $\mathfrak{g}$-модуль V прост. Тогда $\rho(b)$ — автоморфизм модуля V, если только алгебра $\mathfrak{g}$ ненулевая (в случае $\mathfrak{g} = 0$ пространство V одномерно). В самом деле, по лемме Шура эндоморфизм простого модуля либо нулевой, либо является автоморфизмом, но $\rho(b)$ — ненулевой оператор (при $\mathfrak{g} \neq (0)$), так как $\mathrm{Tr}_V(\rho(b)) = \dim \mathfrak{g}$, а поле k имеет характеристику нуль.

Шаг 5. Пусть $0 \to V \to W \to k \to 0$ — точная последовательность $\mathfrak{g}$-модулей, причем на модуле k алгебра $\mathfrak{g}$ действует тривиально (ничего другого, впрочем, и быть не может, так как в силу полупростоты $\mathfrak{g} = D\mathfrak{g}$). Мы хотим доказать, что эта последовательность расщепляется, иными словами, что в пространстве W существует одномерное подпространство, инвариантное относительно $\mathfrak{g}$ и дополнительное к пространству V, т. е. отображающееся на k. Этот частный случай нашей теоремы, так называемый *принцип подъема инвариантов*, является центральным, поскольку общий случай сводится к нему использованием модулей гомоморфизмов (см. ниже). Мы расчленим пятый шаг на три подшага.

Шаг 5а. Редукция к случаю, когда V — простой $\mathfrak{g}$-модуль. Эта редукция проводится индукцией по размерности V. Пусть $V_1 \subset V$, но $V_1 \neq (0)$ и $V_1 \neq V$. Рассмотрим точную последовательность $0 \to V/V_1 \to W/V_1 \to k \to 0$; по предположению индукции она расщепляется, т. е. в пространстве W/V_1 найдется прямая V'/V_1, дополнительная к V/V_1. Снова используя предположение индукции и вторую точную последовательность $0 \to V_1 \to V' \to k \to 0$, получаем существование дополнительной прямой к V_1 в пространстве V', которая по построению будет также дополнять и V в пространстве W.

Шаг 5б. Редукция к случаю точного представления ($\operatorname{Ker}\rho=(0)$). Пусть $\mathfrak{a}=\operatorname{Ker}(\mathfrak{g}\to\operatorname{End}V)$. Для $x\in\mathfrak{a}$, очевидно, имеем $xW\subset V$ и $xV=(0)$, так что $D\mathfrak{a}$ аннулирует W. Но $D\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$, потому что идеал полупростой алгебры тоже полупрост. Следовательно, в пространстве W можно определить представление факторалгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, которое является по построению точным в пространстве V. При этом полупростота сохраняется, поскольку факторалгебра полупростой алгебры полупроста.

Шаг 5в. Пусть теперь V — простой $\mathfrak{g}$-модуль и отображение ρ: $\mathfrak{g}\to\operatorname{End}V$ инъективно. Ассоциированная билинейная форма B_ρ невырождена (шаг 1). Пусть $b\in U\mathfrak{g}$ — соответствующий ей элемент Казимира, который дает нам некоторый $\mathfrak{g}$-эндоморфизм пространства W. Заметим, что $bW\subset V$, так как b действует тривиально на $W/V\simeq k$. Если $\mathfrak{g}=0$, то наша теорема очевидна. В противном случае (см. шаг 4) $bV=V$, откуда следует, что $\operatorname{Ker}(b\colon W\to W)$ и есть искомая прямая в пространстве W, дополнительная к V и инвариантная относительно $\mathfrak{g}$.

Шаг 6. Общий случай. Пусть $0\to E_1\to E\to E_2\to 0$ — точная последовательность $\mathfrak{g}$-модулей. Мы должны показать, что она расщепляется. Обозначим через W подмодуль модуля $\operatorname{Hom}_k(E, E_1)$, состоящий из гомоморфизмов, ограничение которых на E_1 является гомотетией (т. е. умножением на элемент поля); соответственно через V обозначим множество гомоморфизмов, ограничение которых на E_1 равно нулю. В результате мы получаем точную последовательность

$$0\to V\to W\to k\to 0$$

(если только модуль E_1 ненулевой, но этот случай тривиален). Применяя утверждение, доказанное на шаге 5, мы находим элемент $\varphi\in W$, инвариантный относительно $\mathfrak{g}$ и отображающийся в единицу поля k. Иными словами, существует $\mathfrak{g}$-гомоморфизм φ: $E\to E_1$, такой, что $\varphi\,|\,E_1=\mathrm{id}_{E_1}$. Теорема доказана.

С точки зрения гомологической алгебры шаг 5 является доказательством того, что $\mathrm{Ext}^1_U(k, U) = 0$, где $U = U\mathfrak{g}$. Мы сделали это на шаге 5в, вычислив действие центрального элемента b на Ext^1_U двумя способами. Поскольку b аннулирует k, он аннулирует Ext^1_U, и поскольку b — автоморфизм модуля V, он дает автоморфизм пространства Ext^1_U. Следовательно, $\mathrm{Ext}^1_U = (0)$. Вообще, можно определить группы $H^r(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Ext}^r_V(k, V)$; они называются *группами когомологий* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. На шаге 6 мы фактически доказали, что $\mathrm{Ext}^1_U(E_2, E_1) = H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(E_2, E_1)) = (0)$.

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *полупростой идеал в некоторой объемлющей алгебре Ли* $\mathfrak{h}$. *Существует единственный идеал* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$, *такой, что* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ (*прямая сумма*).

Доказательство. Поскольку алгебра $\mathfrak{h}$ (как $\mathfrak{g}$-модуль) вполне приводима, существует k-подпространство $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$, дополнительное к $\mathfrak{g}$ и устойчивое относительно $\mathrm{ad}\, x$ ($x \in \mathfrak{g}$). Утверждается, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = (0)$. Действительно, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{g}$ и $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$, потому что $\mathfrak{g}$ — идеал и $\mathfrak{a}$ устойчив относительно $\mathfrak{g}$, следовательно, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{g} \cap \mathfrak{a} = (0)$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{a}$ состоит *в точности* из тех элементов $y \in \mathfrak{h}$, для которых $[\mathfrak{g}, y] = 0$. В самом деле, $y = x + a$, где $x \in \mathfrak{g}$ и $a \in \mathfrak{a}$, и, значит, $[\mathfrak{g}, y] = [\mathfrak{g}, x]$, но равенство $[\mathfrak{g}, x] = (0)$ влечет равенство $x = 0$, так как центр алгебры $\mathfrak{g}$ нулевой. Из сказанного ясно, что $\mathfrak{a}$ определено единственным образом (даже как $\mathfrak{g}$-подмодуль) и, кроме того, является идеалом в $\mathfrak{h}$, будучи аннулятором $\mathfrak{h}$-модуля $\mathfrak{g}$.

Следствие 2. *Если* $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебра Ли, то каждое ее дифференцирование имеет вид* $\mathrm{ad}\, x$, *где* $x \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{h} = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ и применим предыдущее следствие. Заметим при этом, что $\mathfrak{g}$ является идеалом в алгебре $\mathfrak{h}$, поскольку

$[D, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(Dx)$ для любых $D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ и $x \in \mathfrak{g}$. Итак, $\operatorname{Der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$, где идеал $\mathfrak{a}$ состоит из всех дифференцирований, коммутирующих с $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$. Покажем, что $\mathfrak{a} = (0)$. Пусть $D \in \mathfrak{a}$, тогда $\operatorname{ad}(Dx) = [D, \operatorname{ad} x] = 0$ и, следовательно, $Dx = 0$ (так как $\mathfrak{g}$ — алгебра с нулевым центром). Значит, $\mathfrak{a} = (0)$.

§ 4. Теорема Леви

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли.

Теорема 1 (Леви). *Пусть φ — сюръективный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ на полупростую алгебру Ли $\mathfrak{s}$. Тогда существует гомоморфизм ε: $\mathfrak{s} \to \mathfrak{g}$, такой, что* $\varphi \circ \varepsilon = \mathrm{id}_{\mathfrak{s}}$.

Доказательство. Будем считать, что $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker} \varphi$.

Основной частный случай нашей теоремы — это случай, когда идеал $\mathfrak{a}$ абелев и является простым $\mathfrak{g}$- (или $\mathfrak{s}$-) модулем с нетривиальным действием.

Первый шаг доказательства будет состоять в сведении теоремы к этому основному случаю. Допустим, что в $\mathfrak{g}$ найдется ненулевой идеал $\mathfrak{a}_1$, содержащийся в $\mathfrak{a}$. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1 \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \mathfrak{s}$ с ядром $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_1$. Предположим, что для такого гомоморфизма наша теорема верна, т. е. существует подалгебра $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{a}_1 \simeq \mathfrak{s}$, дополнительная к $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_1$ в фактор-алгебре $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1$. Мы получаем еще один сюръективный гомоморфизм $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{s}$ с ядром $\mathfrak{a}_1$. Предположим, что и для него теорема справедлива, т. е. в алгебре $\mathfrak{g}_1$ существует подалгебра $\mathfrak{s}' \simeq \mathfrak{s}$, дополнительная к $\mathfrak{a}_1$. Несложная проверка показывает, что алгебра $\mathfrak{s}'$ будет искомым дополнением к идеалу $\mathfrak{a}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Поэтому (учитывая, что $\dim \mathfrak{a}_1 < \dim \mathfrak{a}$ и $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_1 < \dim \mathfrak{a}$) мы можем, проводя индукцию по $\dim \mathfrak{a}$, считать идеал $\mathfrak{a}$ простым $\mathfrak{g}$-модулем.

Далее, радикал $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ лежит в идеале $\mathfrak{a}$, так как $\varphi(\mathfrak{r})$ — разрешимый идеал в $\mathfrak{s}$ и, следовательно, $\varphi(\mathfrak{r}) = 0$. Но идеал $\mathfrak{a}$ прост, поэтому могут представиться два случая: $\mathfrak{r} = 0$ или $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}$. Если $\mathfrak{r} = 0$, то $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра, и утверждение нашей теоремы вытекает из теоремы 2.2. Если $\mathfrak{r}=\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{a}$ — разрешимый идеал, и потому $\mathfrak{a} \neq [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$. В этом случае из простоты идеала $\mathfrak{a}$ следует, что $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]=0$, т. е. $\mathfrak{a}$ — абелев идеал. Если $\mathfrak{g}$ действует тривиально на $\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{a}$ лежит в центре алгебры $\mathfrak{g}$. Поэтому присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ можно заменить действием факторалгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{s}$ на алгебре $\mathfrak{g}$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{g}$ оказывается вполне приводимым $\mathfrak{s}$-модулем (теорема Вейля); в частности, в этой алгебре найдется идеал, дополнительный к $\mathfrak{a}$.

Осталось разобрать *основной случай*. Итак, пусть $\mathfrak{a}$ — абелев идеал и простой нетривиальный $\mathfrak{s}$-модуль.

Если бы в нашем распоряжении была теория когомологий и если бы мы знали, что расширения алгебры $\mathfrak{s}$ с помощью идеала $\mathfrak{a}$ классифицируются элементами группы $H^2(\mathfrak{s}, \mathfrak{a}) = \mathrm{Ext}_{U_\mathfrak{s}}(k, \mathfrak{a})$, то нам оставалось бы только провести обычное рассуждение с использованием элемента Казимира, доказывающее тривиальность группы Ext_{U_S}. Однако такой теории у нас нет, и мы прибегнем к следующему способу, предложенному Бурбаки.

Лемма. *Пусть дан некоторый $\mathfrak{g}$-модуль W и в нем элемент $w \in W$, удовлетворяющий двум условиям:*

а) *отображение $a \mapsto aw$ есть биекция $\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}w$;*

б) $\mathfrak{g}w = \mathfrak{a}w$.

Обозначим через $\mathfrak{i}_w$ множество $\{x \in \mathfrak{g} \mid xw = 0\}$. Тогда $\mathfrak{i}_w$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{i}_w$ (прямая сумма векторных пространств).

Эта лемма совершенно тривиальна. Наша задача состоит в том, чтобы построить подходящий элемент w.

Положим $W = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ и обычным образом определим на этом пространстве структуру $\mathfrak{g}$-модуля посредством представления

$$\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\, W = \mathrm{End}\, \mathrm{End}\, \mathfrak{g},$$

где

$$\sigma(x)\varphi = \mathrm{ad}\, x \circ \varphi - \varphi \circ \mathrm{ad}\, x = [\mathrm{ad}\, x, \varphi].$$

Рассмотрим следующие подпространства $P \subset Q \subset \subset R \subset W$:

$$P = \{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} a \mid a \in \mathfrak{a}\},$$
$$Q = \{\varphi \in W \mid \varphi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a} \text{ и } \varphi(\mathfrak{a}) = (0)\},$$
$$R = \{\varphi \in W \mid \varphi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a} \text{ и } \varphi \mid \mathfrak{a} - \text{гомотетия}\}.$$

Читатель без труда проверит, что P, Q и R являются на самом деле $\mathfrak{g}$-подмодулями. Таким образом, мы приходим к точной последовательности $\mathfrak{g}$-модулей

$$0 \to Q \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\tau} k \to 0,$$

где i — вложение, а τ сопоставляет каждому элементу $r \in R$ скаляр, оператором умножения на который является r. Если $x \in \mathfrak{a}$ и $\varphi \in R$, то

$$\sigma(x)\varphi = \operatorname{ad} x \circ \varphi - \varphi \circ \operatorname{ad} x = -\lambda \operatorname{ad} x,$$

где $\lambda = \tau(\varphi) \in k$. Поэтому $\sigma(x) R \subset P$ (при $x \in \mathfrak{a}$), и точную последовательность

$$0 \to Q/P \xrightarrow{i} R/P \xrightarrow{\bar{\tau}} k \to 0$$

можно рассматривать как точную последовательность $\mathfrak{s}$-модулей, где $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Согласно „принципу подъема инвариантов“, найдется элемент $\bar{w} \in R/P$, инвариантный относительно $\mathfrak{s}$ и такой, что $\bar{\tau}(\bar{w}) = 1$. Пусть w — какой-нибудь прообраз $\bar{w}$ в R. Мы утверждаем, что w удовлетворяет условиям нашей леммы.

а) Пусть $a \in \mathfrak{a}$. Тогда $\sigma(a) w = -\operatorname{ad} a$. Если $\sigma(a) w = 0$, то $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} a = 0$, т. е. $[a, x] = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Отсюда уже следует, что $a = 0$, поскольку $\mathfrak{a}$ — простой идеал и алгебра $\mathfrak{g}$ действует на нем нетривиально.

б) Пусть $x \in \mathfrak{g}$. Мы должны показать, что $\sigma(x) w$ можно представить в виде $\sigma(a) w$ с $a \in \mathfrak{a}$. Так как $\sigma(a) w = -\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} a$, нам надо лишь установить, что $\sigma(x) w \in P$. Но последнее включение эквивалентно инвариантности элемента $\bar{w}$.

Следствие 1. *Каждая алгебра Ли есть полупрямое произведение радикала $\mathfrak{r}$ и полупростой алгебры.*

Достаточно применить теорему 1 к гомоморфизму $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$.

Замечание. К этому следствию примыкает следующий результат, принадлежащий Мальцеву. Если $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — две подалгебры в $\mathfrak{g}$, такие, что $\mathfrak{r} \oplus \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}$ $(i = 1, 2)$, то существует автоморфизм σ алгебры $\mathfrak{g}$, переводящий $\mathfrak{g}_1$ в $\mathfrak{g}_2$ (причем σ можно выбрать в форме $e^{\operatorname{ad} a}$, где $a \in \mathfrak{r}$ и преобразование $\operatorname{ad} a$ нильпотентно). В случае когда радикал $\mathfrak{r}$ абелев, доказательство этого факта сводится к доказательству тривиальности группы $H^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}, \mathfrak{r})$; общий случай получается „отвинчиванием" (подробности см. Бурбаки [1]).

Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает тем свойством, что $\mathfrak{g} \neq D\mathfrak{g}$. Если подпространство $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ коразмерности 1 содержит $D\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{a}$ является идеалом в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus kx$ для любого $x \in \mathfrak{a}$. Поскольку прямая kx автоматически является подалгеброй Ли, мы получаем

Следствие 2. *Всякая ненулевая алгебра Ли (если только она не проста и не одномерна) разлагается в полупрямое произведение двух алгебр Ли строго меньшей размерности.*

§ 5. Полная приводимость (продолжение)

Следующая теорема дает критерий полной приводимости представления алгебры Ли.

Теорема 1. *Пусть поле k алгебраически замкнуто, V — векторное пространство над k и $\mathfrak{g}$ — некоторая подалгебра Ли в алгебре* $\operatorname{End} V$. *Пространство V вполне приводимо как $\mathfrak{g}$-модуль тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(а) *алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в прямое произведение $\mathfrak{a} \times \mathfrak{s}$, где идеал $\mathfrak{a}$ абелев, а подалгебра $\mathfrak{s}$ полупроста;*

(б) *в надлежащем базисе элементы идеала $\mathfrak{a}$ представляются диагональными матрицами.*

Замечания. 1. Пусть поле k не является алгебраически замкнутым. Утверждение останется справедливым, если предположить, что элементы идеала $\mathfrak{a}$ полупросты (т. е. диагонализуемы над алгебраическим замыканием $\bar{k}$).

2. Неопределенность, содержащаяся в условии (б), только кажущаяся. Если каждый элемент из идеала $\mathfrak{a}$ в отдельности представляется диагональной матрицей в некотором базисе, то существует единый базис, в котором все элементы из $\mathfrak{a}$ диагональны, поскольку $\mathfrak{a}$ — коммутативный идеал.

Доказательство. Пусть V — вполне приводимый $\mathfrak{g}$-модуль, $\mathfrak{r}$ — радикал алгебры $\mathfrak{g}$. Согласно теореме Ли (гл. V, § 5), в пространстве V существует одномерное подпространство, инвариантное относительно $\mathfrak{r}$ (мы исключаем тривиальный случай $V=(0)$), или, что то же самое, существует линейная форма $\chi\colon \mathfrak{r}\to k$, такая, что собственное подпространство

$$V_\chi=\{v\in V\mid xv=\chi(x)v \text{ для всех } x\in\mathfrak{r}\}$$

отлично от нуля. По основной лемме, использованной при доказательстве теоремы Ли (см. выше), пространство V_χ инвариантно относительно $\mathfrak{g}$. Ввиду полной приводимости имеем $V=V_\chi\oplus V'$, где V' также является $\mathfrak{g}$-модулем. Применяя аналогичное рассуждение к V' и т. д., мы получаем

$$V=V_{\chi_1}\oplus V_{\chi_2}\oplus\ldots\oplus V_{\chi_m} \text{ (прямая сумма)} \qquad (*)$$

для некоторого набора характеров χ_i радикала $\mathfrak{r}$. Из этого разложения видно, что $\mathfrak{r}$ действует диагонально, коммутируя с действием алгебры $\mathfrak{g}$. Таким образом, $\mathfrak{r}$ содержится в центре и, следовательно, совпадает с ним, т. е. $\mathfrak{a}=\mathfrak{r}$. Для того чтобы получить окончательное представление $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{s}$, можно сослаться на теорему Леви, а можно и непосредственно использовать присоединенное представление.

Обратно, пусть условия (а) и (б) выполнены. Согласно последнему условию, векторное пространство V имеет разложение вида (*), где χ_i — характеры идеала $\mathfrak{a}$. Но поскольку $\mathfrak{a}$ — центр алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{s}$, собственные подпространства V_{χ_i} инвариантны относительно $\mathfrak{g}$, а в каждом пространстве такого вида любой $\mathfrak{s}$-подмодуль будет также и $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{s})$-подмодулем. Остается применить теорему Вейля.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{s}$, где идеал $\mathfrak{a}$ абелев и подалгебра $\mathfrak{s}$ полупроста. $\mathfrak{g}$-модуль W полупрост тогда и только тогда, когда действие идеала $\mathfrak{a}$ на W представляется диагональными матрицами.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли и V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль. Если модуль V вполне приводим, то вполне приводимы и все тензорные модули*

$$V_{p,q} = \otimes^p V \otimes^q V^*.$$

Действительно, образ $\bar{\mathfrak{g}}$ алгебры $\mathfrak{g}$ в $\operatorname{End} V$ имеет вид $\mathfrak{a} \times \mathfrak{s}$, где идеал $\mathfrak{a}$ действует диагонально на V, а следовательно, и на каждом модуле $V_{p,q}$.

Аналогичным рассуждением доказывается

Следствие 3. *Тензорное произведение вполне приводимых $\mathfrak{g}$-модулей вполне приводимо.*

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над k и $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End} V$ — некоторая алгебра эндоморфизмов. Если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста, то она однозначно определяется своими тензорными инвариантами (другими словами, существует набор элементов $v_\alpha \in V_{p_\alpha, q_\alpha}$, такой, что*

$$\mathfrak{g} = \{x \in \operatorname{End} V \mid x v_\alpha = 0 \text{ для всех } \alpha\}).$$

Доказательство. Стандартные соображения, использующие линейность, позволяют считать поле k алгебраически замкнутым. Положим

$$V'_{p,q} = \{v \in V_{p,q} \mid \mathfrak{g} v = 0\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{h}$ множество всех $x \in \operatorname{End} V$, аннулирующих каждое пространство $V'_{p,q}$. Ясно, что

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h} \subset \operatorname{End} V$. Мы должны доказать, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Доказательство проведем в четыре шага.

Шаг 1. Всякий линейный $\mathfrak{g}$-гомоморфизм u: $V_{p,p} \to V_{r,s}$ является в то же время $\mathfrak{h}$-гомоморфизмом. Действительно, $\operatorname{Hom}_k(V_{p,q}, V_{r,s})$ канонически отождествляется с $V_{q+r,\,p+s}$ (как $\operatorname{End} V$-модуль). Но свойство линейного отображения u быть $\mathfrak{h}$-гомоморфизмом равносильно тому факту, что u аннулируется алгеброй $\mathfrak{h}$, или, что то же самое, алгеброй $\mathfrak{g}$, так как $\operatorname{Hom}_k(V_{p,q}, V_{r,s}) \simeq V_{q+r,\,p+s}$.

Шаг 2. Подпространство $W \subset V_{p,q}$, инвариантное относительно $\mathfrak{g}$, инвариантно также относительно $\mathfrak{h}$. В самом деле, ввиду полной приводимости $V_{p,q}$ над $\mathfrak{g}$ имеется эндоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей u: $V_{p,q} \to V_{p,q}$, проектирующий $V_{p,q}$ на W. Как мы уже знаем, u является $\mathfrak{h}$-гомоморфизмом, поэтому образ W эндоморфизма u инвариантен относительно $\mathfrak{h}$.

Шаг 3. Имеем $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ — центр алгебры $\mathfrak{h}$. Действительно, полагая в предыдущем шаге $\mathfrak{g} = W$ и $p = q = 1$ и используя отождествление $V_{1,1} = \operatorname{End} V$, заключаем, что $\mathfrak{g}$ есть идеал в $\mathfrak{h}$. По следствию 1 и теореме Вейля (§ 3), имеет место разложение $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ — идеал алгебры $\mathfrak{h}$, перестановочный с $\mathfrak{g}$. Отсюда (см. шаг 1) вытекает, что $\mathfrak{c}$ коммутирует с $\mathfrak{h}$, т. е. $\mathfrak{c}$ лежит в центре $\mathfrak{h}$ (и тем самым с ним совпадает).

Шаг 4. Пусть W — неприводимый $\mathfrak{g}$-подмодуль пространства V. Ясно, что W инвариантно относительно $\mathfrak{c}$ (шаг 2), и, кроме того (лемма Шура), элементы центра $\mathfrak{c}$, ограниченные на W, являются гомотетиями. Мы покажем, что это нулевые гомотетии, а так как V есть прямая сумма неприводимых пространств, тем самым мы докажем искомое равенство $\mathfrak{c} = (0)$. Поскольку характеристика основного поля равна нулю, достаточно показать, что след нашей гомотетии нулевой.

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли и* W — *некоторый* $\mathfrak{g}$-*модуль размерности* m. *Тогда* m-*я внешняя степень* $\bigwedge^m W$, *рассматриваемая как факторпространство пространства* $\bigotimes^m W$ (*или как его подпространство, если характеристика поля равна* 0), *является* $\mathfrak{g}$-*модулем, причем для каждого* $x \in \mathfrak{g}_m$ *соответствующее преобразование одномерного пространства* $\bigwedge^m W$ *есть умножение на скаляр* $\mathrm{Tr}_W(x)$.

Доказательство леммы мы предоставляем читателю в качестве упражнения. Считая лемму доказанной, рассуждаем следующим образом. Раз алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста, мы можем считать, что пространство $\bigwedge^m W$ вложено как $\mathfrak{g}$-подмодуль в $\bigotimes^m W$, т. е. $\bigwedge^m W \subset \bigotimes^m W \subset \bigotimes^m V = V_{m,0}$. Далее (снова в силу полупростоты), алгебра $\mathfrak{g}$ действует тривиально на любом одномерном модуле ($D\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$!), так что алгебра $\mathfrak{g}$ аннулирует $\bigwedge^m W$. Следовательно, по определению алгебры $\mathfrak{h}$ все элементы алгебры $\mathfrak{c}$ аннулируют $\bigwedge^m W$, и, следовательно, $\mathrm{Tr}_W(x) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{c}$. Теорема доказана.

Следствие 4. *Рассмотрим полупростую алгебру* $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}\, V$. *Пусть* $x \in \mathfrak{g}$ *и* $x = n + s$ — *каноническое разложение оператора* x *на полупростую и нильпотентную составляющие, причем* $[n, s] = 0$ (*см. гл.* V). *Тогда*

а) n *и* s *принадлежат* $\mathfrak{g}$;

б) $\varphi(s)$ *принадлежит* $\mathfrak{g}$ *для любого* $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(k, k)$.

Следует лишь заметить, что любой элемент из $V_{p,q}$, аннулируемый эндоморфизмом $x \in \mathfrak{g}$, аннулируется также n, s и $\varphi(s)$.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Элемент $x \in \mathfrak{g}$ называется *полупростым* (соответственно *нильпотентным*), если преобразование $\operatorname{ad} x$ полупросто (соответственно нильпотентно).

Теорема 6. *Если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста, то любой элемент $x \in \mathfrak{g}$ однозначно представляется в виде $x = n + s$, где s, $n \in \mathfrak{g}$, причем элемент n нильпотентен, s полупрост и $[n, s] = 0$.*

Для доказательства достаточно применить следствие 4 к присоединенному представлению ($V = \mathfrak{g}$).

Теорема 7. *Если φ: $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ — гомоморфизм полупростых алгебр Ли, то образ полупростого (соответственно нильпотентного) элемента также полупрост (соответственно нильпотентен).*

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\mathfrak{g}_2$ можно с помощью φ наделить структурой $\mathfrak{g}_1$-модуля. Пусть V — прямая сумма $\mathfrak{g}_1$-модулей $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. Применяя к V следствие 4, мы видим, что любой элемент $x \in \mathfrak{g}$ записывается в виде $x = n + s$, причем $n \in \mathfrak{g}_1$, $s \in \mathfrak{g}_1$, $[n, s] = 0$, $\operatorname{ad} n$ и $\operatorname{ad}(\varphi(n))$ нильпотентны, $\operatorname{ad}(s)$ и $\operatorname{ad}(\varphi(s))$ полупросты. Если элемент x полупрост (соответственно нильпотентен), то $n = 0$ (соответственно $s = 0$), и, следовательно, $\varphi(x)$ нильпотентен (соответственно полупрост).

§ 6. Связь с компактными группами Ли над полями R и C

Теорема 1. *Связная компактная комплексная группа Ли G является комплексным тором, т. е. изоморфна группе вида $\mathbf{C}^n/\Gamma$, где Γ — дискретная подгруппа в $\mathbf{C}^n$ ранга $2n$.*

Доказательство. По принципу максимума на группе G не существует аналитических функций, отличных от констант. Поэтому любое аналитическое отображение G в $\operatorname{End}_{\mathbf{C}} \mathfrak{g} \simeq \mathbf{C}^{n^2}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G и $n = \dim \mathfrak{g}$, постоянно. Внутренний автоморфизм $x \mapsto gxg^{-1}$, задаваемый элементом $g \in G$, индуцирует некоторый автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, обозначаемый $\operatorname{Ad} g$. Отображение

$$g \mapsto \operatorname{Ad} g \in \mathbf{C}^{n^2}$$

аналитично и, следовательно, постоянно, т. е. $\operatorname{Ad} g = \operatorname{Ad} 1 = 1$ для всех $g \in G$. Если элемент $x \in \mathfrak{g}$ находится в достаточно малой окрестности нуля, то имеет место равенство

$$g(\exp x)g^{-1} = \exp(\operatorname{Ad} g(x)).$$

Поскольку экспоненциальное отображение является гомеоморфизмом окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ на окрестность единицы в G, заключаем, что группа G локально абелева, а потому и просто абелева, поскольку она связна. Таким образом, $\mathbf{C}^n$ есть универсальное накрытие группы G, и $G \simeq \mathbf{C}^n/\Gamma$, где Γ — дискретная подгруппа и притом подгруппа максимального ранга $2n$ ввиду компактности G. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть G — вещественная компактная группа Ли и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, где $\mathfrak{c}$ — абелева, а $\mathfrak{s}$ — полупростая алгебра с отрицательно определенной формой Киллинга.*

Справедливо также и обратное утверждение:

Теорема 3. *Если вещественная алгебра Ли допускает представление в виде $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, где $\mathfrak{c}$ — абелева, а $\mathfrak{s}$ — полупростая алгебра с отрицательно определенной формой Киллинга, то существует вещественная компактная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. При этом если $\mathfrak{c} = 0$, то любая связная группа G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ компактна.*

Доказательство теоремы 2. Как мы уже видели при доказательстве теоремы 1, группа G действует (посредством Ad) на алгебре $\mathfrak{g}$. В силу компактности G в пространстве $\mathfrak{g}$ можно ввести евклидову метрику (положительно определенную квадратичную форму), инвариантную относительно G (и тем самым относительно $\mathfrak{g}$). Таким образом, алгебра $\mathfrak{g}$ вполне приводима как $\mathfrak{g}$-модуль. Поэтому она разлагается в прямую сумму минимальных ненулевых идеалов $\mathfrak{a}_i$ и, значит, изоморфна прямому произведению алгебр $\mathfrak{a}_i$. Каждый из идеалов $\mathfrak{a}_i$ либо одномерен (абелев), либо прост, так что $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, где алгебра $\mathfrak{c}$ абелева, а алгебра $\mathfrak{s}$ полупроста. Остается показать, что форма Киллинга алгебры $\mathfrak{s}$ отрицательно определена. Обозначим через (x, y) скалярное произведение на $\mathfrak{g}$ и положим $u = \mathrm{ad}_{\mathfrak{s}} x$, где $x \in \mathfrak{s}$. Ввиду инвариантности нашей евклидовой структуры имеем $(uy, z) + (y, uz) = 0$ для любых $y, z \in \mathfrak{s}$. При $z = uy$ получаем $(y, u^2 y) = -(uy, uy)$. Выберем в пространстве $\mathfrak{s}$ ортонормальный базис y_i. Тогда

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{s}}(u^2) = \sum_i (y_i, u^2 y_i) = -\sum_i | uy_i |^2.$$

Если $x \neq 0$, то $u = \mathrm{ad}\, x \neq 0$ (так как центр алгебры $\mathfrak{s}$ нулевой) и $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{s}}(u^2) < 0$, что и доказывает отрицательную определенность формы Киллинга алгебры $\mathfrak{s}$.

Доказательство теоремы 3. В качестве компактной вещественной группы Ли для алгебры $\mathfrak{c}$ можно взять вещественный тор $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^n$. Для того чтобы найти соответствующую группу для алгебры $\mathfrak{s}$, рассмотрим группу $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{s}$ автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{s}$. Ясно, что $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{s}$ — замкнутая подгруппа ортогональной группы линейных преобразований пространства $\mathfrak{s}$, оставляющих инвариантной форму Киллинга. Поскольку эта форма строго определена, последняя группа (а вместе с ней и группа $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{s}$) компактна. Алгеброй Ли группы $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{s}$, как легко усмотреть, является алгебра дифференцирований $\mathrm{Der}(\mathfrak{s})$, которая изоморфна алгебре $\mathfrak{s}$ по следствию 2 теоремы Вейля (§ 3). Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{c} = 0$ (т. е. $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра) и G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Имеет место канонический гомоморфизм

$$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}.$$

Как мы уже видели, $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$ — компактная группа Ли с той же алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, поэтому отображение Ad является накрытием. Очевидно, $H = \mathrm{Im}(\mathrm{Ad})$ — связная компонента группы $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$, причем $H = G/Z$, где $Z = \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$ — дискретная группа. Заметим теперь, что группа H компактна и коммутант (H, H) всюду плотен в H — это вытекает (по теории Ли) из равенства $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Следовательно, группа G компактна (см. Бурбаки [1], Ch. VII, § 3, Pr. 5)[1]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал и $\mathfrak{i}$ — пересечение ядер всех неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{g}$.

а) Доказать, что $\mathfrak{i}=[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]=D\mathfrak{g}\cap\mathfrak{r}$. [*Указание*: пользуясь теоремой Леви, показать, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]=D\mathfrak{g}\cap\mathfrak{r}$.]

б) Доказать, что элемент $x\in\mathfrak{r}$ принадлежит $\mathfrak{i}$ тогда и только тогда, когда эндоморфизм $\rho(x)$ нильпотентен для каждого представления ρ алгебры $\mathfrak{g}$.

2. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $B(x, y)$ — невырожденная инвариантная симметричная билинейная форма на $\mathfrak{g}$.

а) Пусть $x, y\in\mathfrak{g}$. Доказать равносильность следующих условий:

(i) $y\in \operatorname{Im}\operatorname{ad}(x)$;

(ii) $B(y, z)=0$ для всех z, коммутирующих с x.

б) Предположим, что $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра. Пусть $x\in\mathfrak{g}$, и пусть $\operatorname{ad} x$ — нильпотентный эндоморфизм. Показать, что найдется элемент $h\in\mathfrak{g}$, такой, что $[h, x]=x$. Используя этот факт, доказать, что для любого представления алгебры $\mathfrak{g}$ оператор $\rho(x)$ нильпотентен.

3. Привести пример алгебры Ли с ненулевым радикалом, на которой задана невырожденная инвариантная симметричная билинейная форма.

4. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль и K — кольцо всех $\mathfrak{g}$-эндоморфизмов пространства V. Доказать, что K — алгебра с делением. Привести пример алгебры $\mathfrak{g}$ с некоммутативным кольцом K.

---

[1]) См. также Семинар „Софус Ли“, гл. 17, п. 1, теорема 2. — *Прим. перев.*

5. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, и K — кольцо всех $\mathfrak{g}$-эндоморфизмов алгебры (относительно присоединенного представления). Обозначим через $\bar{k}$ алгебраическое замыкание поля k.

а) Пусть $k = \bar{k}$ и $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{h} \mathfrak{s}_i$, где все идеалы $\mathfrak{s}_i$ просты. Показать, что кольцо K изоморфно прямому произведению h экземпляров поля k.

б) Пусть k — произвольное поле нулевой характеристики. Показать, что $[K : k] = h$, где h — число простых компонент алгебры $\mathfrak{g} \otimes_k \bar{k}$ (над $\bar{k}$), а K изоморфно прямому произведению m полей, где m — число простых компонент алгебры $\mathfrak{g}$.

в) Мы будем говорить, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *абсолютно проста*, если проста алгебра $\mathfrak{g} \otimes_k \bar{k}$ (над $\bar{k}$). Показать, что это эквивалентно равенству $K = k$. Показать, далее, что из простоты алгебры $\mathfrak{g}$ вытекает коммутативность кольца K, а также абсолютная простота алгебры $\mathfrak{g}$ относительно заданной на ней естественной структуры алгебры Ли над K.

г) Обратно, пусть K — конечное расширение поля k и $\mathfrak{g}$ — абсолютно простая алгебра Ли над K. Доказать, что $\mathfrak{g}$ проста как алгебра Ли над k.

д) Рассмотрим алгебру Ли ортогональной группы, соответствующей квадратичной форме от четырех переменных, дискриминант d которой не является квадратом. Показать, что K есть квадратичное расширение $k(\sqrt{d})$.

6. Пусть G — связная комплексная группа Ли, и H — ее вещественная замкнутая подгруппа Ли. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ алгебры Ли групп G и H соответственно (алгебра $\mathfrak{g}$ определена над $\mathbf{C}$, а алгебра $\mathfrak{h}$ — над $\boldsymbol{R}$).

а) Допустим, что $\mathfrak{h} + i\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Показать, что любая комплексная замкнутая подгруппа Ли, содержащая H, совпадает со всей группой G.

б) Проверить, что условие пункта а) выполняется в следующих случаях:

(i) $G = SL(n, \mathbf{C})$ и $H = SU(n)$ — специальная унитарная группа;

(ii) $G = SO(n, \mathbf{C})$ и $H = SO(n)$ — специальная вещественная ортогональная группа;

(iii) $G = Sp(2n, \mathbf{C})$ и $H = SU(2n) \cap G$ — кватернионная унитарная группа.

7. Пусть основное поле k алгебраически замкнуто, и пусть заданы две алгебры Ли (над k) $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. Положим $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$.

а) Допустим, что V_i — неприводимый $\mathfrak{g}_i$-модуль ($i = 1, 2$). Показать, что тензорное произведение $V_1 \otimes_k V_2$ является неприводимым $\mathfrak{g}$-модулем.

б) Показать, что любой неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль изоморфен модулю вида $V_1 \otimes_k V_2$, рассмотренному выше.

в) Что будет, если k не является алгебраически замкнутым?

8. Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли с положительно определенной формой Киллинга. Доказать, что $\mathfrak{g} = (0)$.

Глава VII

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ $sl(n)$

В этой главе k — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Все алгебры Ли и все модули над k имеют конечную размерность.

§ 1. Обозначения

Пусть n — целое число $\geqslant 2$. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру $sl(n)$ квадратных матриц порядка n с нулевым следом. Эта алгебра полупроста, так как центр ее равен нулю, а пространство k^n неприводимо как $\mathfrak{g}$-модуль (теорема 6.5.1). Этот результат можно получить и непосредственным вычислением формы Киллинга. Фактически алгебра $\mathfrak{g}$ даже проста (см. упражнение 1), однако этот факт нам в дальнейшем не понадобится.

Введем следующие обозначения:

$\mathfrak{h}$ — алгебра Ли диагональных матриц H вида $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ [для удобства мы будем писать $H = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$] с $\sum\limits_i \lambda_i = 0$;

$\mathfrak{n}_+$ — алгебра Ли строго верхних треугольных матриц (т. е. матриц (x_{ij}), для которых $x_{ij} = 0$ при $i \geqslant j$);

$\mathfrak{n}_-$ — алгебра Ли строго нижних треугольных матриц (т. е. матриц (x_{ij}), для которых $x_{ij} = 0$ при $i \leqslant j$). Алгебра $\mathfrak{g}$ очевидным образом разлагается в прямую сумму

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

Заметим, что алгебра $\mathfrak{h}$ абелева, а алгебры $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ нильпотентны (см. гл. V, § 4). При $n=2$ эти алгебры имеют вид

$$\mathfrak{h}=\left\{\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & -* \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{n}_+=\left\{\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{n}_-=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Обозначим еще через $\mathfrak{b}$ алгебру $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ треугольных матриц с нулевым следом; $\mathfrak{b}$ — разрешимая алгебра (каноническая „подалгебра Бореля") и ее производная алгебра $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ совпадает с $\mathfrak{n}_+$.

Пусть $\mathfrak{h}^*$ — двойственное к $\mathfrak{h}$ пространство. Всякий элемент $\chi\in\mathfrak{h}^*$ можно записать в виде

$$\chi(H)=u_1\lambda_1+\ \dots\ +u_n\lambda_n, \text{ где } (\lambda_1, \dots, \lambda_n)=H \text{ и } u_i\in k.$$

Поскольку $\sum\lambda_i=0$, набор $(u_1, \dots, u_n)$ определен с точностью до аддитивной константы.

Обозначим через R_+ подмножество в $\mathfrak{h}^*$, состоящее из линейных форм $\lambda_i-\lambda_j$ $(i<j)$, и через R — объединение $R_+\cup(-R_+)$. Элементы α множества R (соответственно R_+) мы будем называть *корнями* (соответственно *положительными корнями*). Положительные корни

$$\alpha_1=\lambda_1-\lambda_2,\ \alpha_2=\lambda_2-\lambda_3,\ \dots,\ \alpha_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n$$

называются *простыми* корнями. Всякий положительный корень $\alpha=\lambda_i-\lambda_j$ $(i<j)$ может быть представлен в виде суммы простых корней:

$$\alpha=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\ \dots\ +\alpha_{j-1}.$$

Пусть $\alpha=\lambda_i-\lambda_j$ $(i\neq j)$ — некоторый корень. Рассмотрим следующие два элемента H_α и X_α алгебры $\mathfrak{g}$:

X_α — матрица, у которой на (i, j)-м месте стоит 1, а на остальных — нули;

H_α — диагональная матрица (из $\mathfrak{h}$), у которой i-й диагональный элемент равен 1, j-й диагональный элемент равен -1, а остальные элементы равны нулю.

Заметим, что $\alpha(H_\alpha)=2$.

Предложение 1.

(a) *Элементы* $X_\alpha(\alpha\in R_+)$ *образуют базис в* $\mathfrak{n}_+$, *а элементы* $X_{-\alpha}(\alpha\in R_+)$ — *базис в* $\mathfrak{n}_-$.

(б) *Если* $H \in \mathfrak{h}$ *и* $\alpha \in R$, *то* $[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$.
(в) $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$.

Доказательство. Утверждение (а) очевидно. Докажем (б). Пусть $H = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — диагональная матрица и α — линейная форма вида $\lambda_i - \lambda_j$. Перемножая матрицы H и X_α, получаем $H \cdot X_\alpha = \lambda_i X_\alpha$ и $X_\alpha \cdot H = \lambda_j X_\alpha$, откуда $[H, X_\alpha] = (\lambda_i - \lambda_j) X_\alpha = \alpha(H) X_\alpha$. Аналогичным вычислением доказывается (в).

Пример. При $n = 2$ имеется в точности один положительный корень $\alpha = \lambda_1 - \lambda_2$. Элементы

$$H_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

образуют базис алгебры $sl(2)$.

§ 2. Веса и примитивные элементы

Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль. Для каждой формы $\chi \in \mathfrak{h}^*$ положим

$$V_\chi = \{v \in V \mid H(v) = \chi(H) v \text{ для всех } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Элементы пространства V_χ мы будем называть *собственными векторами алгебры* $\mathfrak{h}$ (*веса* χ).

Предложение 1. Если $\alpha \in R$ и $v \in V_\chi$, то $X_\alpha v \in V_{\chi+\alpha}$.

Доказательство. Для любого $H \in \mathfrak{h}$ имеем

$$HX_\alpha v = [H, X_\alpha] v + X_\alpha H v = \\ = \alpha(H) X_\alpha v + \chi(H) X_\alpha v = (\chi + \alpha)(H) X_\alpha v.$$

Предложение 2. Пространство V есть прямая сумма собственных подпространств V_χ $(\chi \in \mathfrak{h}^*)$.

Доказательство. Как хорошо известно, ненулевые собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы. Таким образом, сумма $W = \sum_{\chi \in \mathfrak{h}^*} V_\chi$ является прямой суммой. Предложение 1 показывает, что пространство W инвариантно относительно операторов X_α. Более того, это пространство инвариантно относительно всей алгебры $\mathfrak{g}$, так как оно инвариантно относительно $\mathfrak{h}$. Следовательно (полная приводимость!), V разлагается в прямую сумму подпространства W и некоторого $\mathfrak{g}$-подмодуля V'. Допустим, что $V' \neq (0)$. Поскольку k алгебраически замкнуто и $\mathfrak{h}$ — абелева алгебра, в пространстве V' существует хотя бы один ненулевой собственный вектор v алгебры $\mathfrak{h}$. Но тогда v содержится в некотором подпространстве V_χ, а это противоречит тому, что $V' \cap W = (0)$. Итак, $V' = (0)$ и $V = W$. Предложение доказано.

Определение 3. Линейная форма $\chi \in \mathfrak{h}^*$, для которой $V_\chi \neq (0)$, называется *весом* $\mathfrak{g}$-модуля V, а размерность пространства V_χ — *кратностью* веса χ.

Пример 4. Весами $\mathfrak{g}$-модуля $\mathfrak{g}$ (относительно присоединенного представления) являются корни $\alpha \in R$ (кратность их равна единице) и нулевая форма (ее кратность равна $n-1$).

Предложение 5. *Пусть v — некоторый элемент $\mathfrak{g}$-модуля V. Следующие условия равносильны:*

(i) *вектор v является собственным для алгебры Бореля $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$;*

(ii) *вектор v является собственным для алгебры $\mathfrak{h}$, и $X_\alpha v = 0$ для всякого $\alpha \in R_+$.*

Это следует из равенства $\mathfrak{n}_+ = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ и того факта, что элементы $X_\alpha (\alpha \in R_+)$ образуют базис алгебры $\mathfrak{n}_+$.

Определение 6. Ненулевой элемент $v \in V$, удовлетворяющий эквивалентным условиям предложения 5, называется *примитивным*.

Заметим, что каждый примитивный элемент определяет некоторый вес $\chi \in \mathfrak{h}^*$.

Предложение 7. *Каждый ненулевой $\mathfrak{g}$-модуль содержит примитивный элемент.*

Для доказательства достаточно применить теорему Ли (см. гл. V) к $\mathfrak{b}$-модулю V.

[Другое доказательство. Обозначим через S множество всех весов $\mathfrak{g}$-модуля V. Используя то обстоятельство, что S конечно и непусто (см. предложение 2), нетрудно усмотреть, что в S содержится элемент χ, такой, что $\chi+\alpha \notin S$, каково бы ни было $\alpha \in R_+$. Ввиду предложения 1 любой ненулевой элемент соответствующего пространства V_χ примитивен.]

§ 3. Неприводимые $\mathfrak{g}$-модули

Теорема 1. *Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль и v — примитивный элемент веса χ. Обозначим через V_1 подмодуль $(U\mathfrak{g})\,v$ в V, порожденный вектором v. Тогда*

(а) *модуль V_1 неприводим;*

(б) *веса модуля V_1 имеют вид $\chi - \sum\limits_{i=1}^{n-1} m_i\alpha_i$, где α_i — простые корни и m_i — целые неотрицательные числа;*

(в) *любой вектор из V_1 с весом χ коллинеарен вектору v.*

Доказательство. Универсальную обертывающую алгебру $U=U\mathfrak{g}$ можно представить в виде $U\mathfrak{n}_-\otimes U\mathfrak{b}$ (см. следствие 3.4.2). Имеем $(U\mathfrak{b})\,v=kv$, поскольку v — собственный вектор алгебры $\mathfrak{b}$; следовательно, $V_1=(U\mathfrak{g})\,v$ совпадает с $(U\mathfrak{n}_-)\,v$. По теореме Биркгофа — Витта (примененной к алгебре $U\mathfrak{n}_-$) V_1 порождается элементами вида Mv, где M — одночлен от матриц $X_{-\alpha}$ $(\alpha \in R_+)$. Предложение 2.1 показывает, что Mv — собственный вектор алгебры $\mathfrak{h}$ веса $\chi - \sum\limits_{\alpha>0} q_\alpha\alpha$, где q_α — целые неотрицательные числа. Утверждение (б), таким образом, доказано. Что касается утверждения (в), то оно следует из того факта, что равенство всех коэффициентов q_α нулю возможно лишь в том случае, когда степень M равна нулю (т. е. $M=1$), а тогда $Mv=v$.

Осталось доказать (а). Допустим, что V_1 разлагается в прямую сумму двух $\mathfrak{g}$-модулей V' и V''. Пусть $v=v'+v''$ — соответствующее разложение вектора v. Поскольку $(V_1)_\chi = V'_\chi \oplus V''_\chi$, оба вектора v' и v'' имеют вес χ, и потому (утверждение (в)) оба они коллинеарны v. Но тогда один из них, скажем v'', равен нулю, т. е. $v' = v$. Учитывая, что v порождает V_1 (как $\mathfrak{g}$-модуль), получаем $V' = V_1$ и $V'' = (0)$. Теорема доказана.

Теорема 2. (1) *Любой неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль V содержит единственный (с точностью до умножения на элемент из k) примитивный элемент; вес этого элемента называется старшим весом модуля V.*

(2) *Неприводимые $\mathfrak{g}$-модули с одним и тем же старшим весом изоморфны.*

Доказательство. (1) Каждый $\mathfrak{g}$-модуль V содержит хотя бы один примитивный элемент (см. предложение 2.7); обозначим через χ вес этого элемента. Пусть v' — другой примитивный элемент и χ' — его вес. Так как V — неприводимый модуль, вектор v порождает модуль V. По теореме 1

$$\chi - \chi' = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \alpha_i,$$

где $m_i \geqslant 0$ для всех i.

Применяя те же рассуждения к v', имеем

$$\chi' - \chi = \sum_{i=1}^{n-1} m'_i \alpha_i,$$

где $m'_i \geqslant 0$. Складывая эти равенства, получаем $m_i = m'_i = 0$, т. е. $\chi = \chi'$. Ввиду утверждения (в) теоремы 3.1 векторы v и v' коллинеарны.

(2) Пусть заданы два неприводимых $\mathfrak{g}$-модуля V_1 и V_2, и пусть v_1 и v_2 — их примитивные элементы, имеющие одинаковый вес χ. Элемент $v = (v_1, v_2)$ пространства $V_1 \times V_2$ тоже примитивен и тоже имеет вес χ. По теореме 1 $\mathfrak{g}$-подмодуль $W \subset V_1 \times V_2$, порожденный вектором v, неприводим. Проекция $\pi_i\colon W \to V_i$ является сюръективным отображением (так как $\pi_i(v) = v_i$), а потому в силу неприводимости W — изоморфизмом. Таким образом, модули V_1 и V_2

изоморфны, поскольку каждый из них изоморфен модулю W. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 сводит классификацию неприводимых $\mathfrak{g}$-модулей к нахождению линейных форм $\chi \in \mathfrak{h}^*$, являющихся „старшими весами“, т. е. весами примитивных элементов, лежащих в некотором $\mathfrak{g}$-модуле. Эти формы будут найдены в § 4.

§ 4. Нахождение старших весов

Теорема 1. *Пусть χ — некоторый элемент из $\mathfrak{h}^*$; запишем его в виде*

$$\chi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = u_1\lambda_1 + \ldots + u_n\lambda_n.$$

Неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом χ существует в том и только том случае, если $u_i - u_j$ — целое неотрицательное число для всех $i < j$.

Доказательство. 1°. Необходимость. Заметим сначала, что $u_i - u_j = \chi(H_\alpha)$ $(i < j)$, где α — положительный корень $\lambda_i - \lambda_j$. Мы должны показать, что $\chi(H_\alpha)$ — целое неотрицательное число (для $\alpha \in R_+$), если χ — вес примитивного элемента v.

Предложение 2. *Пусть v — примитивный элемент веса χ. Положим $v^\alpha_m = (X_{-\alpha})^m v/m!$ для $m \geqslant 0$ (здесь символ $(X_{-\alpha})^m$ означает m-кратное применение оператора X_α). Тогда имеют место следующие формулы:*

(i) $X_{-\alpha}v^\alpha_m = (m+1)\, v^\alpha_{m+1}$;

(ii) $Hv^\alpha_m = (\chi - m\alpha)(H)\, v^\alpha_m$, где $H \in \mathfrak{h}$;

(iii) $X_\alpha v^\alpha_m = (\chi(H_\alpha) - m + 1)\, v^\alpha_{m-1}$.

Доказательство предложения. Формула (i) очевидна, а формула (ii) означает, что v^α_m имеет вес $\chi - m\alpha$ (предложение 2.1). Равенство (iii) докажем индукцией по m. Случай $m = 0$ тривиален (мы можем считать, что $v^{\alpha}_{-1}=0$, и это согласуется с (i) при $m=-1$). Если $m \geqslant 1$, то

$$mX_{\alpha}v^{\alpha}_{m} = X_{\alpha} \cdot X_{-\alpha}v^{\alpha}_{m-1} = H_{\alpha}v^{\alpha}_{m-1} + X_{-\alpha}X_{\alpha}v^{\alpha}_{m-1} = \lambda v^{\alpha}_{m-1},$$

где

$$\lambda = \chi(H_{\alpha}) - (m-1)\alpha(H_{\alpha}) + (m-1)(\chi(H_{\alpha}) - m + 2).$$

Окончательно получаем $\lambda = m(\chi(H_{\alpha}) - m + 1)$ (так как $\alpha(H_{\alpha}) = 2$), чем равенство (iii) и доказано.

Следствие 3. *Существует такое целое $m \geqslant 0$, что $v^{\alpha}_{m} \neq 0$, а $v^{\alpha}_{m+1}=0$; при этом $\chi(H_{\alpha}) = m$.*

Действительно, вектор v^{α}_{m} имеет вес $\chi - m\alpha$, а число всех возможных весов (ненулевой кратности) данного $\mathfrak{g}$-модуля конечно, поэтому $v^{\alpha}_{m}=0$ для достаточно больших m. Значит, существует такое m, что $v^{\alpha}_{m} \neq 0$ и $v^{\alpha}_{m+1}=0$. Применяя формулу (iii) (для $m+1$), приходим к равенству

$$0 = X_{\alpha}v^{\alpha}_{m+1} = (\chi(H_{\alpha}) - m)\, v^{\alpha}_{m}.$$

Следовательно, $\chi(H_{\alpha}) = m$, поскольку $v^{\alpha}_{m} \neq 0$.

Тем самым доказательство необходимости закончено.

2°. Достаточность. Обозначим через $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$ линейные формы $\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2, \ldots, \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1}$. Условие теоремы 4.1 эквивалентно представимости формы χ в виде суммы

$$\chi = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \pi_i,$$

где m_i — целые неотрицательные числа.

Предложение 4. *Если χ и χ' — два старших веса неприводимых модулей V и V', то $\chi + \chi'$ — старший вес неприводимого подмодуля $\mathfrak{g}$-модуля $V \otimes V'$.*

Доказательство предложения. Пусть v и v' — примитивные элементы модулей V и V'. Из определения $\mathfrak{g}$-модуля $V \otimes V'$ легко усмотреть, что

$v \otimes v'$ — примитивный элемент модуля $V \otimes V'$ с весом $\chi + \chi'$. Остается заметить, что $\mathfrak{g}$-подмодуль W, порожденный $v \otimes v'$, неприводим (теорема 3.1) и его старший вес равен $\chi + \chi'$.

Следствие 5. *Множество старших весов замкнуто относительно сложения.*

Таким образом, для того чтобы установить, что χ — старший вес, достаточно доказать это для форм π_i. Для этих форм мы можем дать явную конструкцию соответствующего неприводимого $\mathfrak{g}$-модуля.

Предложение 6. *Пусть V — пространство k^n с естественной структурой $\mathfrak{g}$-модуля. Обозначим через V_i i-ю внешнюю степень пространства V. Тогда для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ модуль V_i неприводим и его старший вес равен π_i.*

Доказательство предложения. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис пространства V. Рассмотрим элемент $v_i = e_1 \wedge \ldots \wedge e_i$. Несложное вычисление показывает, что этот элемент примитивен и весом его является форма π_i. Далее, легко проверяется, что, действуя на вектор v_i одночленами от матриц $X_{-\alpha}$, можно получить любой член вида $e_{m_1} \wedge \ldots \wedge e_{m_i}$, $m_1 < \ldots < m_i$. Следовательно, по теореме 3.1 модуль V_i неприводим.

Итак, предложение 6, а с ним и наша теорема 1 доказаны.

Замечания. 1. Аналогичные результаты справедливы для любой полупростой алгебры Ли. Действительно, все изложенные доказательства (за исключением последнего, использующего явную конструкцию неприводимых модулей) применимы и в общем случае, если считать известными основные свойства „корней" и „подалгебр Картана".

2. Теорема 1 показывает, что классы неприводимых $\mathfrak{g}$-модулей находятся во взаимно однозначном соответствии с наборами $(m_1, \ldots, m_{n-1})$ из $n-1$ целых неотрицательных чисел. Явное описание модуля, соот-

ветствующего набору $(m_1, \ldots, m_{n-1})$, читатель может найти, например, в книге Вейля [2*], гл. IV.

3. При $n=2$ каждый такой набор есть просто целое неотрицательное число m. Соответствующим неприводимым модулем является m-я симметрическая степень модуля $V=k^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть алгебра $\mathfrak{g}=sl(n)$ разлагается в прямое произведение полупростых алгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. Доказать, что $\mathfrak{g}$-модуль $V=k^n$ есть тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$, где V_i — точный неприводимый $\mathfrak{g}_i$-модуль, $i=1, 2$ (см. гл. VI). Далее, если $n_i=\dim V_i$, то $n= n_1 \cdot n_2$ и $\dim \mathfrak{g}_i \leqslant n_i^2-1$. Показать, что из этих соотношений вытекает равенство $n_i=1$ для одного из двух i. Это означает, что $\mathfrak{g}_i=0$, т. е. что алгебра $\mathfrak{g}$ проста.

2. Показать, что все результаты этой главы справедливы над произвольным полем k нулевой характеристики. [*Указание*: использовать тот факт, что над алгебраическим замыканием k все веса принимают рациональные значения на элементах H_α; этого уже достаточно для того, чтобы установить (над k) предложения 2.2 и 2.7. Дальнейшее не представляет никаких трудностей.]

3. Пусть $k=\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел. Группа $G=SL(n, \mathbf{C})$ содержит подгруппу $SU(n)$ унитарных матриц с определителем, равным единице. Показать, что многообразие $G/SU(n)$ гомеоморфно евклидову пространству $\mathbf{R}^N$. [*Указание*: отождествить однородное пространство $G/SU(n)$ с пространством всех положительно определенных эрмитовых форм на $\mathbf{C}^n$.] Показать, что многообразие $SU(n)/SU(n-1)$ гомеоморфно сфере S_{2n-1}. Используя этот факт, доказать (индукцией по $n \geqslant 2$), что группы $SU(n)$ и G связны и односвязны. Таким образом, любое линейное представление алгебры Ли $sl(n) = L(G)$ соответствует аналитическому представлению группы G, и наоборот.

4. В обозначениях упражнения 3 показать, что подалгебра $\mathfrak{h} \subset sl(n)$ соответствует (замкнутой) подгруппе Ли, изоморфной прямому произведению $n-1$ экземпляров группы $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$. Использовать этот факт для прямого доказательства того факта, что любой вес алгебры $sl(n)$ есть линейная комбинация с целыми коэффициентами форм π_i.

5. (а) Пусть P (соответственно Q) — подгруппа в $\mathfrak{h}^*$, порожденная элементами π_i (соответственно корнями). Определить точную последовательность

$$0 \to Q \xrightarrow{i} P \xrightarrow{e} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to 0,$$

где i — вложение, а $e(\pi_i) = i$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

(б) Пусть $\mathfrak{g} = sl(n)$ и V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль. Показать, что все веса пространства V лежат в группе P и имеют (при отображении e) один и тот же образ; обозначим этот образ символом $e(V)$.

(в) Пусть $k = \mathbf{C}$ (см. упражнение 3). Доказать, что центр C группы $G = SL(n, \mathbf{C})$ есть циклическая группа порядка n, состоящая из скалярных матриц w, таких, что $w^n = 1$. Пусть V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль; показать, что образ элемента $w \in G$ при соответствующем представлении $G \to GL(V)$ есть умножение на скаляр $w^{e(V)}$.

(г) Используя (в), показать, что неприводимые представления проективной группы $PGL(n, \mathbf{C}) = G/\mathbf{C}$ соответствуют неприводимым $\mathfrak{g}$-модулям V, для которых $e(V) = 0$.

6. Пусть χ — любой элемент из $\mathfrak{h}^*$ и L_χ — одномерный $\mathfrak{b}$-модуль веса χ. Введем соответствующий „индуцированный $\mathfrak{g}$-модуль"

$$E_\chi = L_\chi \otimes_{U\mathfrak{b}} U\mathfrak{g},$$

который, очевидно, имеет бесконечную размерность. Показать, что E_χ содержит примитивный элемент v веса χ. Что можно сказать о других весах модуля E_χ?

Установить существование наибольшего подмодуля H модуля E_χ, не содержащего v. Фактормодуль $V_\chi = E_\chi/H$ неприводим; показать, что V_χ конечномерно тогда и только тогда, когда χ удовлетворяет условию теоремы 4.1. Дать явное описание модуля V_χ при $n=2$.

7. Пусть $n=4$ и V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом π_2 (см. предложение 4.6). Показать, что $\dim V = 6$ и что на V существует невырожденная инвариантная симметричная билинейная форма. Воспользовавшись этим фактом, построить изоморфизм алгебры $sl(4)$ на алгебру Ли ортогональной группы $o(6)$.

Часть II

Группы Ли

Эту часть книги можно рассматривать как введение в теорию формальных групп и аналитических групп, а также в теорию связи между этими группами и алгебрами Ли (теория Ли). При этом аналитические группы определяются над любым полным полем (вещественным, комплексным или неархимедовым). Теория Ли применима в обоих случаях при условии, что основное поле имеет характеристику нуль.

В процессе работы я существенно использовал неопубликованные рукописи Н. Бурбаки по аналитическим многообразиям и по группам Ли.

Вторую часть моих лекций записал Р. Расала, которому я приношу свою благодарность за отлично проделанную работу; он внес много усовершенствований по сравнению с устным изложением.

Ж.-П. С.

Харвард
осень 1964

Глава I

ПОЛНЫЕ ПОЛЯ

Определение. Пусть k — поле. *Абсолютным значением* на k называется функция $k \to \mathbf{R}$, обозначаемая $x \mapsto |x|$, которая удовлетворяет следующим четырем условиям:

(1) $|x| \geqslant 0$, причем $|x| = 0$ в том и только в том случае, когда $x = 0$;

(2) $|x \cdot y| = |x||y|$;

(3) $|1| = 1$;

(4) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Примеры. (i) Положим

$$\begin{cases} |x| = 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ |x| = 1 & \text{при} \quad x \neq 1. \end{cases}$$

Топология поля k, определяемая этим абсолютным значением, дискретна.

Впредь мы будем иметь дело лишь с *нетривиальными* абсолютными значениями, т. е. такими, что $0 < |x| < 1$ для некоторого $x \in k$.

(ii) обычные абсолютные значения полей $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$;

(iii) если условие (4) заменить условием

$$(4')\, |x - y| \leqslant \sup\{|x|, |y|\},$$

то мы придем к так называемым *ультраметрическим* или *неархимедовым* абсолютным значениям.

Замечание. Условие (4′) равносильно следующему условию: для любого $\varepsilon \geqslant 0$ отношение $|x - y| \leqslant \varepsilon$ есть отношение эквивалентности.

Предположим теперь, что поле k снабжено неархимедовым абсолютным значением и относительно него является полным.

Теорема 1. *Рассмотрим последовательность* $\{x_n\}$ *с* $x_n \in k$. *Ряд* $\sum x_n$ *сходится тогда и только тогда, когда* $x_n \to 0$.

Доказательство непосредственно вытекает из условия (4′) и определения полноты.

Теорема 2 (Островский). *Пусть k — поле, полное относительно некоторого абсолютного значения. Тогда либо k совпадает с* $\mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C}$ *(и соответствующее абсолютное значение имеет вид* $|x|^{\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$), *либо данное абсолютное значение неархимедово.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге Бурбаки [2*], Ch. VI, § 6.

Пусть по-прежнему k — поле, полное относительно неархимедова абсолютного значения $|x|$, и пусть ρ — вещественное число, $0 < \rho < 1$. Определим $v(x)$ формулой $|x| = \rho^{v(x)}$. Имеем, очевидно,

1) $v(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$;
2) $v(xy) = v(x) + v(y)$;
3) $v(1) = 0$;
4) $v(x+y) \geqslant \inf(v(x), v(y))$.

Функция $x \longmapsto v(x)$, удовлетворяющая указанным четырем условиям, называется *нормированием* поля k.

Примеры. 1. Пусть $k = \mathbf{C}((T))$ — поле формальных степенных рядов от одной переменной T, и пусть $a = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n T^n$, где $a_n \in \mathbf{C}$, $a_n = 0$ при всех достаточно больших $-n$. Положим $v(a)$ равным наименьшему целому n, для которого $a_n \neq 0$. Тогда $a = T^{v(a)}(\alpha_0 + \alpha_1 T + \ldots)$, где $\alpha_0 \neq 0$. Иными словами, соотношение $v(a) \geqslant n$ равносильно равенству $a = T^n b$, где $b \in \mathbf{C}[[T]]$.

Отметим, что $\mathbf{C}((T))$ — полное поле.

2. Пусть $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел. Зафиксируем простое число p. Любое число $a \in \mathbf{Q}$ можно представить в виде $a = p^n r/s$, где r и s — целые числа, не делящиеся на p. Полагая по определению $v(a) = n$, мы получим так называемое *p-адическое нормирование* поля рациональных чисел.

Пополнение поля $\mathbf{Q}$ по p-адической метрике обозначается через $\mathbf{Q}_p$ и называется полем *p-адических чисел*.

Очевидно, что $a_n \to 0$ (в p-адической топологии) тогда и только тогда, когда $a_n = p^{h_n} b_n$, где $b_n \in \mathbf{Z}$ и $h_n \to \infty$.

Определение. Пусть k — поле и v — его нормирование. Множество

$$A_v = \{x \in k \mid v(x) \geqslant 0\}$$

является кольцом и называется *кольцом нормирования* v.

Пример. Пусть $k = \mathbf{Q}_p$. Кольцо его p-адического нормирования есть не что иное, как кольцо $\mathbf{Z}_p$ *целых p-адических чисел*.

Для каждого действительного числа $\alpha \geqslant 0$ рассмотрим множества

$$I_\alpha = \{x \in A_v \mid v(x) \geqslant \alpha\},$$
$$I'_\alpha = \{x \in A_v \mid v(x) > \alpha\},$$

которые, как легко видеть, являются идеалами кольца A_v. В частности, при $\alpha = 0$ идеал

$$I'_0 = \mathfrak{m}_v = \{x \in A_v \mid v(x) > 0\}$$

максимален; поле $k_v = A_v/\mathfrak{m}_v$ называется *полем вычетов* нормирования v.

Примеры. 1. Пусть $k = \mathbf{C}((T))$. Тогда

$$A_v = \mathbf{C}[[T]],$$
$$\mathfrak{m}_v = (T)\,\mathbf{C}[[T]]$$
$$k_v = A_v/m_v = \mathbf{C}.$$

2. Пусть $k = \mathbf{Q}_p$. Тогда

$$A_v = \mathbf{Z}_p,$$
$$\mathfrak{m}_v = p\mathbf{Z}_p$$

и

$$k_v = \mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}.$$

Теорема 3. *Каждое неархимедово абсолютное значение $x \mapsto |x|$ поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$ либо тривиально (т. е. $|x| = 1$ для всех $x \neq 0$), либо совпадает с одним из p-адических нормирований.*

Доказательство. Предположим, что наше абсолютное значение нетривиально. Тогда найдется такое рациональное число $r \in \mathbf{Q}$, что

$$0 < |r| < 1.$$

Из этого обстоятельства сразу вытекает существование простого числа p с $|p| \neq 1$, откуда $0 < |p| < 1$ (заметим, что $|n| \leqslant 1$ для всех целых $n \in \mathbf{Z}$).

Пусть $n \in \mathbf{Z}$, и пусть числа n и p взаимно просты. Как известно, в этом случае можно найти целые числа q, $s \in \mathbf{Z}$, для которых

$$qn + sp = 1.$$

Если предположить, что $|n| < 1$, то, учитывая неравенства $|q| \leqslant 1$, $|s| \leqslant 1$ и $|p| < 1$, мы получим $|1| < 1$, что противоречит определению абсолютного значения. Итак, для любых целых чисел n, взаимно простых с p,

$$|n| = 1.$$

Всякое рациональное число $r \in \mathbf{Q}$ можно представить в виде

$$r = p^{v_p(r)} n/n',$$

где n и n' — целые числа, взаимно простые с p. Отсюда $|r| = \rho^{v_p(r)}$, где $\rho = |p|$, ч. т. д.

Следствие. *Если k — поле, полное относительно неархимедова абсолютного значения, причем характеристика его равна нулю, то k содержит в качестве топологического подпространства либо поле $\mathbf{Q}$ с дискретной топологией, либо поле $\mathbf{Q}_p$.*

Глава II

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Сначала о символике.

1. k будет обозначать поле, полное относительно некоторого нетривиального абсолютного значения, а $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ — кольцо формальных степенных рядов от n переменных $X_1, \ldots, X_n$ над k.

2. Мы будем обозначать

а) греческими буквами α, β наборы целых чисел:

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \alpha_i \in \mathbf{Z};$$

б) латинскими буквами r, s наборы вещественных чисел:

$$r = (r_1, \ldots, r_n), \quad r_i > 0, \quad r_i \in \mathbf{R};$$

в) латинскими буквами x, y наборы элементов поля k:

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \in k.$$

3. Положим

$$r^\alpha = r_1^{\alpha_1} \ldots r_n^{\alpha_n},$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$
$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n},$$
$$|\alpha| = \sum \alpha_i,$$
$$\alpha! = \prod \alpha_i!,$$
$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}.$$

4. По определению

$|x| \leqslant r$ (соответственно $|x| < r$) $\Leftrightarrow |x_i| \leqslant r_i$ (соответственно $|x_i| \leqslant r_i$), $1 \leqslant i \leqslant n$.

Аналогичный смысл будет вкладываться в соотношения

$$r' \leqslant r, \quad r' < r, \quad \alpha' \leqslant \alpha, \quad \alpha' < \alpha.$$

5. Назовем

множество $P(r)(x) = \{y \in k^n \mid |y - x| \leqslant r\}$ *(замкнутым) полицилиндром* радиуса r с центром в точке x;

множество $P_0(r)(x) = \{y \in k^n \mid |y - x| < r\}$ *открытым полицилиндром* радиуса r с центром в точке x.

Полицилиндры $P(r)(0)$ и $P_0(r)(0)$ будем для краткости обозначать $P(r)$ и $P_0(r)$ соответственно.

Определение. Пусть

$$f = \sum a_\alpha X^\alpha \quad (f \in k[[X_1, \ldots, X_n]]).$$

1) Мы скажем, что ряд f *сходится в полицилиндре* $P(r)$, если

$$\sum |a_\alpha| r^\alpha < +\infty. \tag{1}$$

2) Мы скажем, что ряд f *сходится в открытом полицилиндре* $P_0(r)$, если он сходится в каждом полицилиндре $P(r')$ с $r' < r$.

Лемма. (а) *Если ряд $f = \sum a_\alpha X^\alpha$ сходится в полицилиндре $P(r)$, то существует такая константа M, что*

$$|a_\alpha| r^\alpha \leqslant M \quad \text{для всех} \quad \alpha. \tag{2}$$

(б) *Обратно, пусть существует такая константа M, что неравенство (2) справедливо для всех α. Тогда ряд f сходится в открытом полицилиндре $P_0(r)$ и притом равномерно во всяком полицилиндре $P(r')$ с $r' < r$.*

Доказательство. (а) В качестве константы M можно взять сумму $\sum |a_\alpha| r^\alpha$, которая по условию конечна.

(б) Пусть $r' < r$. Тогда

$$\sum |a_\alpha| r'^\alpha = \sum (|a_\alpha| r^\alpha) \frac{r'^\alpha}{r^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant M \sum \frac{r'^\alpha}{r^\alpha} = M \prod \left(1 - \frac{r'_i}{r_i}\right)^{-1}.$$

Таким образом, ряд f сходится равномерно в $P(r')$, и, следовательно, сходится в $P_0(r)$. Лемма доказана.

Эта лемма часто фигурирует в литературе под названием *леммы Абеля.*

Определение. Ряд $f = \sum a_\alpha X^\alpha$ называется *сходящимся*, если он сходится в некотором открытом полицилиндре $P_0(r)$, $r > 0$.

Пусть ряд $f = \sum a_\alpha X^\alpha$ сходится в $P_0(r)$. Для всякого $x \in P_0(r)$ ряд $\sum a_\alpha X^\alpha$ сходится абсолютно (и равномерно в $P(r')$, $r' < r$); его сумма $\tilde{f}(x)$ есть непрерывная функция от x.

Лемма. $\tilde{f} = 0 \Rightarrow f = 0$.

Доказательство. Пусть $n = 1$. Предположим, что $f \neq 0$. Тогда

$$f(X) = X^m (c_0 + c_1 X + \ldots),$$

где $c_i \neq 0$ и $m \geqslant 0$. Ряд $\sum c_i X^i$ сходится. Функция, определяемая этим рядом, отлична от нуля в точке $x = 0$, а потому (по непрерывности) и в некоторой окрестности U этой точки. Далее, функция X^m отлична от нуля на множестве $U \setminus \{0\}$. Таким образом, функция $\tilde{f}$ в окрестности U не равна тождественно нулю. Фактически при $m > 0$ точка $x = 0$ есть изолированный нуль функции $\tilde{f}(x)$.

Пусть $n > 1$. Предположим, что для $n - 1$ наша лемма доказана. Пусть $\tilde{f} = 0$, где $f \in k[[X_1, \ldots, X_n]]$. Запишем

$$f = \sum_i c_i (X_1, \ldots, X_{n-1}) X_n^i, \quad c_i \in k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]].$$

Так как ряд f сходится в $P_0(r)$, ряды c_i сходятся в $(n-1)$-мерном полицилиндре $P_0(s)$, где $s = (r_1, \ldots, r_{n-1})$. По предположению для любой фиксированной точки $y = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in P_0(s)$ функция g, определенная формулой

$$g(x_n) = \sum_i \tilde{c}_i (y_1, \ldots, y_{n-1}) x_n^i,$$

тождественно равна нулю. Следовательно (см. случай $n = 1$), все выражения $\tilde{c}_i (y_1, \ldots, y_{n-1})$ равна нулю.

Отсюда, согласно предположению индукции, $c_i = 0$ для всех i и, следовательно, $f = 0$. Лемма доказана.

С помощью этой леммы мы можем отождествлять ряд f с соответствующей функцией $\tilde{f}$.

Приступим теперь к изучению аналитических функций.

Определение. Пусть задано открытое множество $U \subset k^n$ и функция φ: $U \to k$. Мы скажем, что функция φ *аналитична* в U, если для каждой точки $x \in U$ найдется формальный ряд f и радиус $r > 0$, такие, что

1) $P_0(r)(x) \subset U$;

(2) f сходится в $P_0(r)$, и $\varphi(x+h) = f(h)$ для $h \in P_0(r)$.

Замечание. Формальный ряд f, соответствующий аналитической функции φ в точке $x \in U$, определяется единственным образом и называется *рядом Тейлора*[1]) этой функции в точке x.

Теорема 1. *Если ряд $f = \sum a_\alpha X^\alpha$ сходится в полицилиндре $P_0(r)$, $r > 0$, то функция f аналитична в этом полицилиндре.*

Доказательство. Пусть $x \in P_0(r)$. Выберем такой радиус r', что $|x| \leqslant r' < r$, и положим $s = r - r'$.

$$(x+h)^\alpha = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} h^\beta .$$

Следовательно,

$$f(x+h) = \sum_\alpha a_\alpha \left(\sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} h^\beta \right), \quad h \in P_0(s).$$

Покажем, что можно изменить порядок суммирования. Для этого достаточно показать, что

$$\sum_\alpha \sum_{\beta \leqslant \alpha} \left| a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} h^\beta \right| < \infty, \quad h \in P_0(s). \qquad (*)$$

[1]) В оригинале „local expansion“. — *Прим. перев.*

Но, в самом деле, пусть $|h| \leqslant s' < s$. Тогда

$$\left| a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} h^\beta \right| \leqslant |a_\alpha| \cdot \left| \binom{\alpha}{\beta} \right| |x|^{\alpha-\beta} |h|^\beta.$$

Заметим теперь, что $\left|\binom{\alpha}{\beta}\right| \leqslant \binom{\alpha}{\beta}$ (под символом $\binom{\alpha}{\beta}$ в левой части неравенства понимается элемент поля k, а в правой — целое положительное число).
Отсюда

$$\sum_{\beta \leqslant \alpha} \left| a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} h^\beta \right| \leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha} |a_\alpha| \binom{\alpha}{\beta} r'^{\alpha-\beta} s'^{\beta} = |a_\alpha| (r' + s')^\alpha.$$

Таким образом, сумма (*) мажорируется рядом

$$\sum_\alpha |a_\alpha| (r' + s')^\alpha,$$

сумма которого конечна, поскольку f сходится в $P_0(r)$ и $r' + s' < r$.

То, что нам осталость доказать, можно сформулировать в виде отдельной леммы.

Лемма. *Пусть дан формальный ряд $f = \sum a_\alpha X^\alpha$, сходящийся в $P_0(r)$. Для каждого $\beta \leqslant \alpha$ положим*

$$\Delta^\beta f = \sum_{\alpha \geqslant \beta} a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} X^{\alpha-\beta}.$$

Тогда

(1) *ряд $\Delta^\beta f$ сходится в $P_0(r)$;*

(2) *ряд $\sum_\beta \Delta^\beta f(x) X^\beta$ сходится в $P_0(r - |x|)$, где $x \in P_0(r)$;*

(3) *при $x \in P_0(r)$ и $h \in P_0(r - |x|)$ имеем*

$$f(x+h) = \sum_\beta \Delta^\beta f(x) h^\beta.$$

Доказательство леммы. Утверждения (1) и (2) непосредственно вытекают из сходимости ряда (*).

Утверждение (3) также следует из этого факта, поскольку

$$\sum_{\alpha} a_\alpha \Big(\sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} h^{\beta} \Big) = \\ = \sum_{\beta} \Big(\sum_{\alpha \geqslant \beta} a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} \Big) h^{\beta} = \sum_{\beta} \Delta^{\beta} f(x)\, h^{\beta}.$$

Тем самым лемма, а вместе с ней наша теорема полностью доказаны.

Понятие аналитической функции можно распространить также на вектор-функции.

Определение. Пусть U — открытое множество в k^m, и пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$: $U \to k^n$. Мы скажем, что отображение φ *аналитично*, если все его компоненты φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, суть аналитические функции.

Предыдущая лемма есть частный случай следующей теоремы.

Теорема 2. *Если отображения* $U \longrightarrow V$ *и* $V \xrightarrow{g} W$ *аналитичны, то и композиция* $g \circ f$ *этих отображений тоже аналитична* (*здесь* U, V *и* W — *открытые множества в* k^m, k^n *и* k^p *соответственно*).

Доказательство. Мы должны показать, что компоненты отображения $g \circ f$ в каждой точке $x \in U$ разлагаются в ряд Тейлора. Применяя предыдущую лемму, легко усмотреть, что аналитичность любой функции $\varphi(x)$ (а также любой вектор-функции) в окрестности точки x равносильна аналитичности функции $\varphi'(h) = \varphi(x + h)$ в некоторой окрестности нуля. Мы можем поэтому, не теряя общности, считать, что $x = 0$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. Кроме того, в силу определения аналитичности вектор-функции достаточно доказать нашу теорему для $p = 1$.

Пусть $\sum\limits_{\beta > 0} b_\beta Y^\beta$ — ряд Тейлора функции g в точке $x = 0$, сходящийся в $P_0(s)$, где $s = (s_1, \ldots, s_n)$. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$, и пусть $\sum\limits_{\alpha > 0} a_{i,\alpha} X^\alpha$ — ряд Тейлора функции f_i. Выберем такой радиус $r=(r_1, \ldots, r_m)$, что

$$\sum_{\alpha>0} |a_{i,\alpha}| r^\alpha < \frac{s_i}{2}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Тогда при $h \in P_o(r)$

$$g \circ f(h) = \sum_{\beta>0} b_\beta \Big(\ldots, \sum_{\alpha>0} a_{i,\alpha} h^\alpha, \ldots\Big)^\beta.$$

Для завершения доказательства нам надо установить, что правая часть этого равенства есть сумма некоторого ряда от h, сходящегося в $P_o(r)$. Однако если в правой части формально раскрыть скобки и привести подобные члены, то окажется, что коэффициентом при h^α будет служить выражение, в которое входит лишь конечное число коэффициентов b_β и $a_{i,\alpha}$. В самом деле, после раскрытия скобок члены с $|\beta|>|\alpha|$ вообще не будут содержать h^α (так как все $a_{i,0}=0$), поэтому при вычислении коэффициента при h^α нам придется просуммировать лишь конечное число выражений. Итак, функции $f \circ g(h)$ можно сопоставить некоторый ряд от h. Нам остается показать, что ряд

$$\sum_{\beta>0} b_\beta \Big(\ldots, \sum_{\alpha>0} a_{i,\alpha} h^\alpha, \ldots\Big)^\beta$$

сходится абсолютно. Но, действительно,

$$\sum_{\beta>0} |b_\beta| \Big(\ldots, \sum_{\alpha>0} |a_{i,\alpha}| |h|^\alpha, \ldots\Big)^\beta \leqslant \sum_{\beta>0} |b_\beta| \Big(\frac{s}{2}\Big)^\beta < +\infty.$$

Теорема доказана.

Замечания. 1. Более подробное доказательство существования искомого степенного ряда читатель может найти в книге Бурбаки [3*], гл. IV, § 5, п. 5.

2. Имеется общий метод, основанный на теореме Островского, с помощью которого часто доказываются такого рода теоремы. Он заключается попросту в том наблюдении, что достаточно рассматривать два случая:

1° $k=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$;

2° поле k неархимедово.

Проиллюстрируем этот метод, дав другое доказательство теоремы 2.

Случай 1°. $k = \mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C}$.

а) $k = \mathbf{C}$. Известно, что отображение φ аналитично тогда и только тогда, когда оно есть отображение класса C^1 и его производная $D\varphi$ — *комплексное* линейное отображение. Так как композиция отображений класса C^1 тоже класса C^1, так как композиция производных есть производная композиции и так как композиция комплексных линейных отображений есть снова комплексное линейное отображение, нашу теорему в этом частном случае можно считать доказанной.

б) $k = \mathbf{R}$. Каждую вещественную аналитическую функцию можно локально продолжить до комплексной аналитической функции с помощью ряда Тейлора. Поэтому этот случай сводится к предыдущему.

Случай 2°. *Поле k неархимедово.*

Как и в первоначальном доказательстве теоремы, мы ищем разложение композиции $g \circ f$ в степенной ряд в точке $x = 0$, причем $f(0) = 0$ и $g(0) = 0$. Несложная проверка показывает, что нашу теорему достаточно доказать для композиции отображений $g\left(\frac{y}{\mu}\right)$ и $\mu f\left(\frac{x}{\nu}\right)$, где μ и ν — произвольные фиксированные, отличные от нуля элементы поля k.

Покажем, что μ и ν можно выбрать таким образом, что утверждение теоремы станет тривиальным.

Пусть $g = (g_1, \ldots, g_p)$, и пусть $g_j = \sum\limits_{\beta > 0} b_{j,\beta} Y^\beta$ — ряд Тейлора для функции g_j в точке $y = 0$. Выберем такой радиус s, что каждый ряд g_j сходится в полицилиндре $P_0(s)$. По лемме Абеля найдется константа M, такая, что $|b_{j,\beta}| s^\beta \leqslant N$ для всех j и β. Выберем такой элемент μ поля k, что $|\mu| > \max\limits_j \left(\frac{1}{s_j}(1+N)\right)$. Тогда для всех j и β имеем

$$\left| b_{j,\beta} \frac{1}{\mu^{|\beta|}} \right| < |b_{j,\beta}| \cdot \min_j (s_j)^{|\beta|} \frac{1}{1+N} \leqslant |b_{j,\beta}| s^\beta \frac{1}{1+N} < 1.$$

Следовательно, коэффициенты ряда $g(Y/\mu)$ лежат в кольце нормирования A_v поля k и, в частности, ряд $g(Y/\mu)$ сходится в $P_0(1)$.

Применяя аналогичные соображения к μf, мы сможем найти такой элемент $\nu \in k$, что у всех координатных функций $\mu f_i(x/\nu)$ отображения $\mu f(x/\nu)$ коэффициенты рядов Тейлора лежат в кольце A_v.

Итак, все свелось к случаю, когда ряды Тейлора координатных функций отображений f и g лежат в кольце нормирования. Но тогда формальный ряд композиции этих отображений снова имеет коэффициенты в кольце A_v и потому сходится в $P_0(1)$. Доказательство закончено.

Сформулируем теперь явно некоторые утверждения о рядах Тейлора и производных, которые неявно фигурировали в предыдущих рассуждениях.

Определение. Пусть задана вектор-функция $\varphi\colon U \to V$, где $U\,(\subset k^m)$ и $V\,(\subset k^n)$ — открытые множества. Линейное отображение $L\colon k^m \to k^n$ называется *производной* функции φ в точке $x \in U$, если

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) - Lh| = o(|h|),$$

т. е.

$$\lim_{\substack{|h| \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|\varphi(x+h) - \varphi(x) - Lh|}{|h|} = 0.$$

Замечания. 1. Если функция φ имеет в точке x производную L, то последняя определена однозначно и обозначается $D\varphi(x)$.

2. Образ вектора $\delta_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (на i-м месте 1, а на остальных нули) при отображении $D\varphi(x)$ называется i-*й частной производной* функции φ в точке x и обозначается $D_i\varphi(x)$.

При изучении дифференцируемости аналитических функций достаточно для начала ограничиться аналитическими функциями со значениями в поле k. Далее, поскольку дифференцируемость — свойство локальное, мы можем рассматривать лишь функции, которые представлены некоторым сходящимся рядом.

Теорема 3. *Пусть* $f=\sum a_\alpha X^\alpha$ — *степенной ряд, сходящийся в* $P_0(r)$, $r>0$. *Тогда соответствующая функция* $\tilde{f}$ *дифференцируема в каждой точке* $x \in P_0(r)$ *и*

$$Df(x)=\begin{Bmatrix} \Delta^{\delta_1}f(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta^{\delta_n}f(x) \end{Bmatrix}.$$

Таким образом, производная аналитической функции существует и аналитична, и, следовательно, всякая аналитическая функция бесконечно дифференцируема.

Доказательство. Если внимательно просмотреть вычисления, выполненные при доказательстве леммы к теореме 1, то мы увидим, что выражение $f(x+h)-f(x)-Df(x)h$ является таким степенным рядом, сходящимся в $P_0(r)$, у которого члены нулевой и первой степеней отсутствуют. Отсюда немедленно следует, что

$$\frac{|f(x+h)-f(x)-Df(x)|}{|h|} \to 0 \quad \text{при} \quad |h| \to 0.$$

Замечание. Положим $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$. Тогда

1) $\alpha!\,\Delta^\alpha = D^\alpha$;

2) ряд $f(x+h)=\sum\limits_\beta \Delta^\beta f(x)\,h^\beta$ есть обычный ряд Тейлора для случая нулевой характеристики;

3) $\binom{\alpha+\beta}{\alpha}\Delta^{\alpha+\beta}=\Delta^\alpha\Delta^\beta$.

Приступим теперь к доказательству следующего основного результата.

Теорема об обратной функции. *Пусть* $f\colon U \to k^n$ — *аналитическое отображение, где* U — *открытое множество в* k^n. *Допустим, что* $0 \in U$ и $f(0)=0$. *Тогда если производная в нуле* $Df(0)\colon k^n \to k^n$ — *линейный изоморфизм, то отображение* $\tilde{f}$ — *локальный аналитический изоморфизм.*

Доказательство. В случае $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ теорема общеизвестна. Мы можем поэтому в силу теоремы Островского предполагать, что абсолютное значение поля k неархимедово. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Умножая, если нужно, отображение f на автоморфизм $Df(0)^{-1}$, мы можем считать, что

$$f_i(X) = X_i - \sum_{|\alpha| > 1} a_{i,\alpha} X^\alpha = X_i - \varphi_i(X).$$

Заменяя $f(X)$ выражением $\mu f(X/\mu)$, где $\mu \in k$ и $|\mu|$ достаточно мало, мы можем предполагать, что все коэффициенты $a_{i,\alpha}$ лежат в кольце нормирования A_v.

Найти обратное к f аналитическое отображение — это значит найти такие ряды $\psi_i(T)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $X_i = \psi_i(T)$ есть решение уравнения

$$T_i = X_i - \varphi_i(X), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{$*$}$$

Мы решим эту задачу в два приема.

1. Покажем, что уравнение ($*$) имеет единственное формальное решение $\{\psi_i(T)\}$, и найдем соотношения между коэффициентами рядов ψ_i и φ_i.

2. Двумя существенно различными методами мы докажем сходимость полученного формального решения.

Положим $\psi_i = \sum_{\beta > 0} b_{i,\beta} T^\beta$ и рассмотрим уравнения

$$\psi_i(T) = T_i + \varphi_i(\psi(T)), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{$**$}$$

Нетрудно видеть, что $b_{i,\delta_j} = \delta_{ij}$ (символ Кронекера); вообще для произвольного β коэффициент $b_{i,\beta}$ есть линейная комбинация тех коэффициентов рядов ψ и φ, которые стоят при одночленах степени, *строго меньшей*, чем β. В этих линейных комбинациях участвуют также целые числа (различные биномиальные коэффициенты), не зависящие от φ и ψ. Таким образом, по индукции

$$b_{i,\beta} = p^i_\beta(a_{i,\alpha}),$$

где

p^i_β — многочлен с целыми положительными коэффициентами, которые не зависят ни от $\{\varphi_i\}$, ни от $\{\psi_i\}$;

в качестве переменных в p^i_β участвуют только $a_{i,\alpha}$ с $|\alpha|<|\beta|$.

Единственность формального решения установлена; остается доказать его (абсолютную) сходимость.

Первый способ доказательства основан на том, что, как мы уже говорили, поле k можно считать неархимедовым. Мы можем также предполагать, что $a_{i,\alpha}\in A_v$ для всех i и α. Поскольку $b_{i,\beta}=p^i_\beta(a_{i,\alpha})$, ясно, что $b_{i,\beta}\in A_v$ для всех i и β. Следовательно, ряды $\{\psi_i\}$ сходятся в полицилиндре $P_o(1)$.

Второй способ доказательства, так называемый *метод мажорант Коши*, пригоден также и для полей $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$. Допустим, что нам удалось найти такие положительные ряды $\{\bar{\varphi}_i\}$, $\bar{\varphi}_i=\sum\limits_{\alpha>1}\bar{a}_{i,\alpha}X^\alpha$, $1\leqslant i\leqslant n$, что

(1) ряды $\bar{\psi}_i=\sum\limits_{\beta>0}\bar{b}_{i,\beta}T^\beta$, $1\leqslant i\leqslant n$, сходятся, где $\{\bar{\psi}_i\}$ — формальное решение задачи обращения для $\{\bar{\varphi}_i\}$;

(2) $|a_{i,\alpha}|\leqslant\bar{a}_{i,\alpha}$ для всех i и α.

Тогда легко показать, что

(3) $|b_{i,\beta}|\leqslant\bar{b}_{i,\beta}$ для всех i и β.

Действительно, поскольку многочлен p^i_β имеет целые положительные коэффициенты,

$$|b_{i,\beta}|=|p^i_\beta(a_{i,\alpha})|\leqslant p^i_\beta(|a_{i,\alpha}|)\leqslant p^i_\beta(\bar{a}_{i,\alpha})=\bar{b}_{i,\beta}.$$

Очевидно, из свойств (2) и (3) в совокупности следует сходимость всех рядов ψ_i, $1\leqslant i\leqslant n$. Нам остается поэтому подыскать требуемые формальные вещественные ряды $\bar{\varphi}_i$.

Пусть сначала $n=1$. В силу сходимости ряда φ_1 можно подобрать такое достаточно большое натуральное m, что ряд

$$\bar{\varphi}^m=\sum_{i>1}(mX)^i\quad(m>0)$$

удовлетворяет свойству (1) (лемма Абеля). Вычислим в явном виде соответствующий обратный ряд $\bar{\psi}^m$. Для этого нам надо решить уравнение

$$T=X-\frac{(mX)^2}{1-mX}.$$

Решение этого уравнения дается формулой

$$\bar{\psi}^m(T)=\frac{(1+mT)-\sqrt{(1+mT)^2-4(m^2+m)T}}{2(m^2+m)},$$

из которой легко усмотреть, что $\bar{\psi}^m(T)$ представляется степенным рядом, сходящимся в окрестности нуля.

Перейдем теперь к общему случаю; пусть n — произвольное натуральное число. Заменяя, если нужно, ряды $\{\varphi_i(X)\}$ на $\{\varphi_i(X/\mu)\}$ (где μ — специально подобранный с помощью леммы Абеля элемент поля k), мы можем считать, что $|a_{i,\alpha}|\leqslant 1$ для всех i и α. Рассмотрим положительные ряды $\bar{\varphi}_i=\sum\limits_{j>1}(X_1+\ldots+X_n)^j$ и докажем, что они обладают требуемыми свойствами. В силу нашего соглашения свойство (1) выполняется очевидным образом. Соответствующие обратные ряды $\bar{\psi}$ имеют вид

$$\bar{\psi}_i=\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}(T_i-T_j)+\bar{\psi}^n\left(\frac{\sum T_j}{n}\right).$$

В самом деле,

$$\sum\bar{\psi}_i=n\bar{\psi}^n\left(\frac{\sum T_j}{n}\right),$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_i-\bar{\varphi}_i(\bar{\psi})=\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}(T_i-T_j)&+\\ +\bar{\psi}^n\left(\frac{\sum T_j}{n}\right)-\bar{\varphi}^n\left(\bar{\psi}^n\left(\frac{\sum T_j}{n}\right)\right)&=\\ =\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}(T_i-T_j)+\frac{1}{n}\left(\sum T_j\right)&=T_i.\end{aligned}$$

Поскольку ряды $\bar{\psi}_i$ сходятся в некоторой окрестности нуля, теорема доказана.

„Опасные повороты". 1. Пусть k — неархимедово поле. Функция φ, равная единице на элементах кольца A_v и нулю на дополнении $k\setminus A_v$, всюду аналитична. Это вытекает из того факта, что множество A_v одновременно открыто и замкнуто в k.

2. Если поле k имеет характеристику $p > 0$, то для любой аналитической функции φ, определенной в области $U \subset k^n$, имеем

$$D^\alpha \varphi = 0 \quad \text{при} \quad |\alpha| \geqslant (p-1)n + 1.$$

В частности, радиус сходимости производной формального ряда может быть *строго больше* радиуса сходимости самого этого ряда.

3. Если функция φ аналитична в области $U \subset k^n$, причем $P_0(r)(x) \subset U$, где $x \in U$, то ряд Тейлора функции φ в точке x вовсе не обязан сходиться во всем полицилиндре $P_0(r)$. Последнее имеет место, вообще говоря, лишь для $k = \mathbf{C}$.

Глава III

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

В этой главе k — поле, полное относительно нетривиального абсолютного значения.

§ 1. Карты и атласы

Пусть X — топологическое пространство.

Картой c пространства X называется тройка $c=(U, \varphi, n)$, где

(1) U — открытое подмножество в X,

(2) n — целое неотрицательное число,

(3) φ — отображение U в k^n, причем множество $\varphi(U)$ открыто в k^n и отображение $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ — гомеоморфизм.

Обозначения:

$U = O(c)$ — открытое множество карты c;

$\varphi = M(c)$ — отображение карты c;

$n = \dim_k(c)$ — размерность карты c.

Пусть заданы две карты $c=(U, \varphi, n)$ и $c'=(U', \varphi', n')$ пространства X. Мы скажем, что c и c' *согласованы*, если отображения $\varphi' \circ \varphi^{-1} \mid \varphi(V)$ и $\varphi \circ \varphi'^{-1} \mid \varphi'(V)$ аналитичны, где $V = U \cap U'$ (см. диаграмму).

$$\begin{tikzcd}
& \varphi(V)\subset k^{n} \arrow[dd, shift right=2, "\varphi'\circ\varphi^{-1}"'] \\
V \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & \\
& \varphi'(V)\subset k^{n'} \arrow[uu, shift right=2, "\varphi\circ\varphi'^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Если c и c' согласованы и $V \neq \varnothing$, то $n=n'$.

Семейство карт $\{c_i\}_{i \in I}$ называется *покрытием* пространства X, если $\bigcup_{i \in I} O(c_i) = X$.

Атласом A пространства X называется такое семейство карт, образующее покрытие пространства X, в котором любые две карты согласованы.

Мы будем говорить, что два атласа A и A' *согласованы*, если выполнено одно из следующих двух эквивалентных условий:

(1) $A \cup A'$ — атлас;

(2) если $c \in A$ и $c' \in A$, то карты c и c' согласованы.

Замечание. Согласованность двух атласов есть отношение эквивалентности. Действительно, рефлексивность и симметричность очевидны; докажем транзитивность. Пусть даны три атласа A_1, A_2 и A_3, причем атлас A_1 согласован с A_2 и атлас A_2 согласован с A_3. Пусть $c_1 \in A_1$ и $c_3 \in A_3$. Мы должны показать, что c_1 и c_3 согласованы. Обозначим через V пересечение $O(c_1) \cap O(c_3)$. Случай $V = \varnothing$, тривиален. Пусть $V \neq \varnothing$, и пусть $\varphi_1 = M(c_1)$ и $\varphi_3 = M(c_3)$. В силу симметрии достаточно установить, что отображение $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ аналитично на $\varphi_1(V)$. Для этого мы покажем, что это отображение аналитично в каждой точке вида $\varphi_1(x)$ $(x \in V)$. Выберем карту $c_2 = (U, \varphi, n) \in A_2$, такую, что $x \in U$. Отображение $\varphi \circ \varphi_1^{-1}$: $\varphi_1(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ аналитично в точке $\varphi_1(x)$, отображение $\varphi_3 \circ \varphi^{-1}$: $\varphi(U \cap V) \to \varphi_3(U \cap V)$ аналитично в точке $\varphi(x)$. Следовательно, отображение $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} = (\varphi_3 \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1})$ аналитично в точке $\varphi_1(x)$, что и требовалось доказать.

§ 2. Определение аналитического многообразия

Пусть X — топологическое пространство.

Структурой *аналитического многообразия* в пространстве X называется класс эквивалентности согласованных атласов этого пространства.

Можно дать и другое определение. Будем говорить, что атлас A *полон*, если любая карта c пространства X, согласованная со всеми картами этого атласа, тоже принадлежит этому атласу. Понятно, что класс эквивалентности всех согласованных атласов данного пространства содержит только один полный атлас. Таким образом, мы приходим ко второму определению: структурой *аналитического многообразия* называется полный атлас пространства X.

Всюду в дальнейшем символ X обозначает топологическое пространство, снабженное фиксированной структурой аналитического многообразия; его полный атлас мы будем обозначать через $A(X)$. Говоря о картах этого пространства, мы будем иметь в виду только карты атласа $A(X)$.

Пусть $x \in X$. *Размерностью* $\dim_x X$ *многообразия* X *в точке* x называется размерность любой карты c, такой, что $x \in O(c)$. Функция $x \mapsto \dim_x X$ локально постоянна на X. Если эта функция — глобальная константа, равная n, то мы говорим, что многообразие X имеет всюду одинаковую размерность, и называем его *n-мерным многообразием.*

В частных случаях, представляющих наибольший интерес, принята следующая терминология:

если $k = \mathbf{R}$, говорят, что X — *вещественное аналитическое* многообразие;

если $k = \mathbf{C}$, говорят, что X — *комплексное аналитическое* многообразие;

если $k = \mathbf{Q}_p$, где p — некоторое простое число, говорят, что X есть *p-адическое аналитическое* многообразие.

§ 3. Топологические свойства многообразий

Пусть $x \in k^n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 0$, и пусть $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$. Обозначим через $B(r)(x)$ шар радиуса r с центром в точке x, т. е. полицилиндр $P(s)(x)$, где $s = (r, \ldots, r)$.

Подмножество $B \subset X$ мы будем называть *шаром* в том случае, когда имеется карта $c = (U, \varphi, n)$, такая, что $B \subset U$ и $\varphi(B)$ — обычный шар в пространстве k^n. Следующие свойства почти очевидны.

(1) Каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью, которая является шаром. В частности, X — локально

полное метрическое пространство (и следовательно, пространство Бэра).

(2) Если k — локально компактное поле, то шар пространства X компактен. В частности, если X — хаусдорфово пространство, то оно локально компактно.

(3) Предположим, что X — регулярное пространство, а k — неархимедово поле. Тогда каждая точка $x \in X$ обладает базисом окрестностей, одновременно открытых и замкнутых.

Из всех перечисленных свойств только последнее, пожалуй, не совсем очевидно; докажем его. Пусть B — шар многообразия X, содержащий точку x, и пусть $c = (U, \varphi, n)$ — карта этого многообразия, такая, что $B \subset U$ и $\varphi(B)$ — шар в k^n. В силу известных свойств неархимедовых полей шар $\varphi(B)$ является открытым множеством пространства k^n. Таким образом, само множество B тоже открыто в X. Поскольку пространство X регулярно, найдется окрестность V точки x, такая, что $V \subset B$ и V замкнута в X. Рассмотрим совокупность всех шаров с центром в точке $\varphi(x)$, содержащихся в множестве $\varphi(V)$, и возьмем их прообразы (при отображении φ). Нетрудно видеть, что множество этих прообразов образует фундаментальную систему окрестностей точки x, каждая из которых одновременно открыта и замкнута.

Замечание. В добавлении 1 к этой главе приведен пример Г. Бергмана, показывающий, что свойство 3, вообще говоря, не имеет места, если предполагать пространство X лишь хаусдорфовым.

§ 4. Простейшие примеры многообразий

1. X — дискретное пространство ($n = 0$).

2. $X = V$, где V — конечномерное векторное пространство над k, $\dim_k V = n$. Обозначим через A набор карт вида $c = (V, \varphi, n)$, где $\varphi \colon V \to k^n$ — линейный изоморфизм. Легко проверяется, что все эти карты согласованы, т. е. множество A образует атлас пространства V, которое таким образом наделяется структурой аналитического многообразия.

3. Пусть X — многообразие и U — его открытое подмножество. Возьмем полный атлас $A(X)$ нашего многообразия и рассмотрим множество

$$A_U = \{c \in A(X) \mid O(c) \subset U\}.$$

Очевидно, A_U является полным атласом множества U. Подпространство U вместе с этим атласом называется *открытым подмногообразием* многообразия X.

4. Пусть X — топологическое пространство, и пусть $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Предположим, что

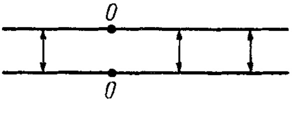
а) все множества U_i открыты в X;

б) каждое подпространство U_i наделено структурой аналитического многообразия;

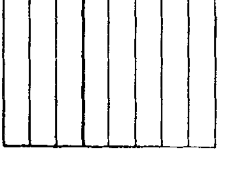
в) для любых i и j структуры аналитического многообразия, индуцированные на $U_i \cap U_j$ многообразиями U_i и U_j, совпадают.

Тогда в пространстве X существует единственная структура аналитического многообразия, индуцирующая на множествах U_i заданную структуру.

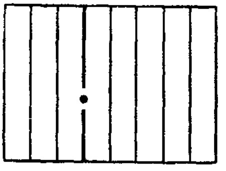
5. Прямая с „двойной точкой". Пусть $k = \mathbf{R}$. Возьмем два экземпляра поля $\mathbf{R}$ и отождествим их во всех точках, кроме нуля:



Полученное многообразие X можно интерпретировать как факторпространство. Для этого рассмотрим плоскость $\mathbf{R}^2$, расслоенную на прямые:



Если отождествить между собой все точки каждого слоя, то факторпространством будет обыкновенная прямая $\mathbf{R}$. Выколем теперь из $\mathbf{R}^2$ начало координат и отождествим только те точки, которые лежат в связной компоненте каждого слоя:



Факторпространством будет в точности прямая с двойным нулем.

Заметим, что построенное многообразие не является хаусдорфовым.

§ 5. Морфизмы

Пусть X и Y — два аналитических многообразия. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *аналитическим* отображением, или *морфизмом*, если

(1) отображение f непрерывно;

(2) отображение f „локально аналитично", т. е. существуют атлас A пространства X и атлас B пространства Y, такие, что для любых двух карт $c = (U, \varphi, m) \in A$ и $d = (V, \psi, n) \in B$ композиция

$$\varphi(W) \xrightarrow{\varphi^{-1}} W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$

аналитична (здесь $W = U \cap f^{-1}(V)$).

Замечания. 1. Условие 2 мы назвали „локальной аналитичностью", поскольку в координатной записи композиция $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ задается набором n аналитических функций от m переменных.

2. Свойство непрерывного отображения f быть морфизмом не зависит от выбора атласов A и B. Это можно показать примерно теми же рассуждениями, которые использовались при доказательстве

того факта, что согласованность атласов есть отношение эквивалентности.

Следующие формальные свойства морфизмов почти непосредственно следуют из определения.

1) Композиция морфизмов тоже является морфизмом.

2) Тождественное отображение 1_X: $X \to X$ является морфизмом.

3) Пусть заданы отображения f: $X \to Y$ и g: $Y \to X$, такие, что $g \circ f = 1_X$ и $f \circ g = 1_Y$. Отображение f является *аналитическим изоморфизмом* в том и только в том случае, когда отображения f и g — морфизмы.

Сформулируем без доказательства следующий гораздо более глубокий результат.

Теорема. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и f: $X \to Y$ — морфизм аналитических многообразий. Для того чтобы отображение f было аналитическим изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфизмом.*

Замечание. Утверждение теоремы неверно для $k = \mathbf{R}$. Действительно, противоречащим примером может служить отображение f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, задаваемое формулой $f(x) = x^3$.

§ 6. Произведения и суммы

1. Произведения. Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ — конечное семейство аналитических многообразий. Обозначим через A_i атлас пространства X_i $(i \in I)$. Пусть $c_i = (u_i, \varphi_i, n_i) \in A_i$. Положим

$$\coprod_{i \in I} c_i = \left(\prod_{i \in I} U_i, \prod_{i \in I} \varphi_i, \sum_{i \in I} n_i\right),$$

$$X = \prod_{i \in I} X_i,$$

$$A = \left\{ \prod_{i \in I} c_i \mid c_i \in A_i, i \in I \right\}.$$

Очевидно, X — топологическое пространство и A — его атлас. Пространство X со структурой аналитического многообразия, определенной атласом A, называется *произведением многообразий* $\{X_i\}_{i\in I}$.

Легко проверяется, что справедливо обычное свойство универсальности произведения: для всякого многообразия Y

$$\mathrm{Mor}\left(Y, \prod_{i\in I} X_i\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{Mor}(Y, X_i).$$

2. Сумма, или несвязное объединение. Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ — произвольная совокупность многообразий. Обозначим через $\sum_{i\in I} X_i$, или $\coprod_{i\in I} X_i$, несвязное объединение топологических пространств $\{X_i\}_{i\in I}$. В пространстве $X = \coprod X_i$ существует (см. пример 4, § 4) единственная структура аналитического многообразия, согласованная с заданной структурой каждого многообразия X_i; такое аналитическое многообразие X называется *суммой*, или *несвязным объединением* многообразий.

Легко проверяется, что справедливо обычное свойство универсальности суммы: для всякого многообразия Y

$$\mathrm{Mor}\left(\coprod_{i\in I} X_i, Y\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{Mor}(X_i, Y_i).$$

В добавлении 2 к этой главе с помощью несвязных объединений будет описано строение компактных аналитических многообразий, определенных над локально компактным неархимедовым полем.

§ 7. Ростки аналитических функций

Пусть $x \in X$, и пусть $\mathscr{F}$ — множество пар вида (U, φ), где U — открытая окрестность точки x и φ — аналитическая функция на U. Множество $\mathscr{F}_x$ иногда называют множеством *локальных функций* в точке x. Мы введем в этом множестве отношение эквивалентности.

Будем говорить, что два элемента $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathscr{F}_x$ *эквивалентны*, если найдется такая открытая окрестность W точки x, что $W \subset U \cap V$ и $\varphi | W = \varphi | V$. Соответствующее множество классов эквивалентности обозначается через $\mathscr{H}_x$ и называется множеством *ростков аналитических функций в точке* x, или *локальным кольцом точки* x.

В множестве $\mathscr{H}_x$ естественным образом вводится структура кольца. Пусть f и g — ростки функций в точке x, выберем их представителей $(U, \varphi) \in f$ и $(V, \psi) \in g$. Положим $W = U \cap V$. Сумма ростков $f + g$ определяется как класс, содержащий пару $(W, f | W + g | W)$, а произведение $f \cdot g$ — как класс, содержащий пару $(W, (f | W) \cdot (g | W))$. Легко проверяется, что эти определения корректны, т. е. не зависят от выбора представителей.

Имеем каноническое отображение $k \to \mathscr{F}_x$, сопоставляющее элементу $\alpha \in k$ пару (X, c_α), где c_α — аналитическая функция, принимающая всюду на X постоянное значение α. Это отображение индуцирует каноническое вложение i: $k \to \mathscr{H}_x$, которое превращает кольцо $\mathscr{H}_x$ в k-алгебру.

Имеем также другое каноническое отображение $\mathscr{F}_x \to k$, относящее каждой паре $(U, \varphi) \in \mathscr{F}_x$ элемент $\varphi(x)$. Это отображение индуцирует канонический сюръективный гомоморфизм θ: $\mathscr{H}_x \to k$. Образ $\theta(f)$ элемента $f \in \mathscr{H}_x$ обозначим через $f(x)$ и назовем его *значением ростка* f *в точке* x. Ядро $\mathfrak{m}_x$ эпиморфизма θ является, разумеется, максимальным идеалом.

Поскольку $\theta \circ i = \mathrm{id}_k$, постольку k-модуль $\mathscr{H}_x$ разлагается каноническим образом в прямую сумму:

$$\mathscr{H}_x = i(k) \oplus \mathfrak{m}_x.$$

Как правило, мы будем отождествлять $i(k)$ и k.

Нетрудно показать, что $\mathscr{H}_x$ — локальное кольцо. Мы докажем более сильное утверждение.

Лемма. *Пусть* (u, φ, n) — *некоторая карта многообразия в точке* x. *Беря всевозможные композиции отображения* φ *с локальными аналитическими функциями в окрестности точки* $0 \in k^n$, *мы получаем изоморфизм* $\bar{\varphi}$: $\mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_x$, *такой, что* $\bar{\varphi}(\mathfrak{m}_0) = \mathfrak{m}_x$. (*Здесь*

$\mathcal{H}_0$ обозначает кольцо ростков аналитических функций в точке $0 \in k^n$, а $\mathfrak{m}_0$ — его максимальный идеал.) Кольцо $\mathcal{H}_0$ изоморфно локальному кольцу сходящихся степенных рядов от n переменных.

Доказательство. Все утверждения леммы очевидны, за исключением, возможно, последнего, касающегося локальности кольца сходящихся степенных рядов от n переменных. Для того чтобы его доказать, нам надо установить, что любой сходящийся степенной ряд f, для которого $f(0) \neq 0$, обратим в нашем кольце. Поскольку $f(x) = a + \psi(x)$, (где $a \in k$, $a \neq 0$ и $\psi(0) = 0$) и поскольку функция $g(y) = 1/y$ аналитична в точке a, композиция $g \circ f = 1/f$ аналитична в точке $0 \in k^n$. Лемма доказана.

Пусть $f \in \mathcal{H}_x$ $(f \neq 0)$. Наименьшее целое неотрицательное число μ, такое, что $f \notin \mathfrak{m}_x^{\mu+1}$, обозначим $\operatorname{ord}_x f$. Выбрав некоторую карту (u, φ, n) точки x, мы можем с помощью предыдущей леммы интерпретировать число $\mu + 1$ как степень первой ненулевой однородной компоненты ряда $\bar{\varphi}(f)$.

§ 8. Касательное и кокасательное пространства

Пусть $x \in X$. По определению

$T_x^*X = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ — *кокасательное пространство в точке x*,

$T_xX = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ — *касательное пространство в точке x*.

Касательное пространство допускает еще два эквивалентных описания.

1) *Пространство T_xX канонически изоморфно пространству дифференцирований v: $\mathcal{H}_x \to k$*[1]).

Действительно, пусть $v \in T_xX$. Тогда v представляет собой некоторую линейную форму на $\mathfrak{m}_x$, аннулирующуюся на $\mathfrak{m}_x^2$. Продолжим эту форму на все пространство $\mathcal{H}_x = k \oplus \mathfrak{m}_x$, полагая $v = 0$ на k. По-

[1]) То есть линейных отображений v: $\mathcal{H}_x \to k$, таких, что $v(f \cdot g) = (vf)\, g(x) + f(x)\,(vg)$, где $f, g \in \mathcal{H}_x$. — *Прим. перев.*

кажем, что такая форма $v\colon \mathscr{H}_x \to k$ является дифференцированием. Поскольку v — линейное отображение (над k), нам надо показать, что

$$v(f \cdot g) = (vf)\, g(x) + f(x)(vg)$$

для любых $f, g \in \mathscr{H}_x$. Заметим, однако, что левая и правая части этого соотношения билинейны по f и g, а потому нам достаточно установить его для трех частных случаев:

(а) $f, g \in k$;

(б) $f \in k$ и $g \in \mathfrak{m}_x$ или $f \in \mathfrak{m}_x$ и $g \in k$;

(в) $f, g \in \mathfrak{m}_x$.

Если имеют место случаи (а) или (в), то обе части нашего соотношения равны нулю; в случае (б) наше соотношение вытекает непосредственно из того факта, что отображение v линейно и обращается в нуль на k.

Обратно, пусть задано дифференцирование $\theta\colon \mathscr{H}_x \to k$. Из свойств дифференцирования легко следует, что θ аннулируется на k и на $\mathfrak{m}_x^2$ и потому однозначно определяет некоторую форму v на пространстве $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, т. е. некоторый касательный вектор $v \in T_xX$. Описанное соответствие, как легко проверить, является изоморфизмом.

2) *Пространство T_xX канонически изоморфно пространству C_x «классов кривых, касающихся друг друга в точке x».*

Сначала точно определим пространство C_x. Пусть $\mathscr{F}'_x$ — множество пар (N, ψ), где N — открытая окрестность точки $0 \in k$ и $\psi\colon N \to X$ — морфизм, такой, что $\psi(0) = x$. Введем в множестве $\mathscr{F}'_x$ следующее отношение эквивалентности. Пусть $(N_i, \varphi_i) \in \mathscr{F}'_x$, $i = 1, 2$. Выберем в точке x какую-нибудь карту (u, φ, n). Отображение $\varphi \circ \psi_i$ $(i = 1, 2)$ определено в окрестности нуля $N \cap \psi_i^{-1}(u)$. Мы скажем, что две «кривые» (N_1, ψ_1) и (N_2, ψ_2) *эквивалентны* (или *касаются в точке* x), если $D(\varphi \circ \psi_1)(0) = D(\varphi \circ \psi_2)(0)$. Через C_x обозначим множество соответствующих классов эквивалентности элементов множества $\mathscr{F}'_x$.

Заметим кстати, что отображение, сопоставляющее каждой паре $(N, \psi) \in \mathcal{F}'_x$ производную $D(\varphi \circ \psi)(0)$, определяет биекцию $\bar{\varphi}$: $C_x \to \mathrm{Hom}_k(k, k^n) = k^n$. Наличие таковой позволяет ввести в C_x структуру векторного пространства над полем k.

Нетрудно проверить, что эта структура и само определение множества C_x не зависят от выбора карты (u, φ, n). В самом деле, пусть (u', φ', n) — другая карта в точке x, и пусть $(N, \psi) \in \mathcal{F}'_x$. Легко видеть, что

$$D(\varphi' \circ \varphi)(0) = D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(0) \circ D(\varphi \circ \psi)(0).$$

Полученная формула показывает, что эквивалентность двух кривых не зависит от выбора карты. Кроме того, отсюда следует, что $\bar{\varphi}' = D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(0) \circ \bar{\varphi}$, а это означает, что структура векторного пространства на множестве C_x тоже определена корректно.

Для того чтобы установить наличие канонического изоморфизма между C_x и T_xX, построим спаривание[1]) $C_x \times T_x^*X \xrightarrow{\omega} k$. Для этого рассмотрим вначале естественное спаривание $\mathcal{F}'_x \times \mathcal{F}_x \to k$, сопоставляющее паре элементов $(N, \psi) \in F'_x$, $(V, f) \in \mathcal{F}_x$ элемент $D(f \circ \psi)(0) \in k$. Стандартные выкладки, использующие координатную запись, показывают, что такое спаривание индуцирует *невырожденное* спаривание $C_x \times T_x^*X \xrightarrow{\omega} k$, которое и позволяет отождествить C_x с пространством, двойственным к пространству T_x^*X.

Замечания. 1. Спаривание ω можно интуитивно представлять себе просто как дифференцирование данной функции по направлению, касательному к данной кривой.

2. Если бы мы захотели ввести структуру векторного пространства на множестве производных более

---

[1]) *Спариванием* двух векторных пространств V и V' называется билинейное отображение $V \times V' \to k$; спаривание называется *невырожденным*, если индуцированные им отображения $V \to V'^*$ и $V' \to V^*$ суть изоморфизмы. — *Прим. перев.*

высокого порядка так, как мы это делали для множества C_x, то нас постигла бы неудача. Причина кроется в том, что производные более высокого порядка от композиции двух функций уже не зависят билинейным образом от производных этих функций.

Пример. Пусть X — конечномерное векторное пространство V, тогда

$$T_xV = \mathrm{Hom}_k(k,\ V) = V,$$

$$T_x^*V = \mathrm{Hom}_k(V,\ k) = V^*.$$

Введем теперь два связанных между собой основных понятия: дифференциал функции и касательное к морфизму отображение.

Пусть $f \in \mathscr{H}_x$; очевидно, $f - f(x) \in \mathfrak{m}_x$. Образ элемента $f - f(x)$ в факторпространстве $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = T_x^*X$ называется *дифференциалом* локальной функции f в точке x и обозначается df_x.

Пусть $v \in T_xX$. Значение v на элементе df_x называется *производной* локальной функции f *по направлению* v и обозначается $< v,\ df_x >$ или $v \cdot f_x$. Элемент df_x можно мыслить себе как линейную форму на пространстве T_xX.

Каждая аналитическая функция, заданная в окрестности точки x, определяет элемент кольца $\mathscr{H}_x$, а вместе с ним линейную форму $df_x \in (T_xX)^*$.

Пусть даны два аналитических многообразия X и Y, морфизм φ: $X \to Y$ и две точки $x \in X$, $y \in Y$, такие, что $\varphi(x) = y$. Определим отображение

$$T_x\varphi\colon\ T_xX \to T_yY$$

формулой

$$\langle T_x\varphi(v),\ df_y\rangle = \langle v,\ d(f \circ \varphi)_x\rangle$$

для всех $v \in T_xX$ и всех $f \in \mathscr{H}_x$. Можно определить отображение $T_x\varphi$ и через его транспозицию

$$T_x^*\varphi\colon\ T_y^*Y \to T_x^*X;$$

именно для любого $f \in \mathscr{H}_x$ полагаем

$$T_x^*\varphi(df_y) = d(f \circ \varphi)_x.$$

Линейное отображение $T_x\varphi$ называют обычно *касательным отображением* морфизма φ.

В частном случае, когда $Y=k$, а φ — есть аналитическая функция f, имеем $T_xf=Df_x$.

В заключение этого параграфа мы рассмотрим несколько простых свойств касательных пространств произведений многообразий. Пусть X, Y — два аналитических многообразия, и пусть $x\in X$, $y\in Y$. Имеют место следующие две формулы:

$$T_{(x,y)}X\times Y=T_xX\times T_yY,$$
$$\overset{*}{T}_{(x,y)}X\times Y=\overset{*}{T}_xX\times\overset{*}{T}_yY.$$

Пусть, далее, $\varphi\colon X\times Y\to Z$ — морфизм, для которого $\varphi(x, y)=z$. Отображение $T_{(x,y)}\varphi$ определяет два других отображения

$$T^X_{(x,y)}\varphi\colon T_xX\to T_zZ$$

и

$$T^Y_{(x,y)}\varphi\colon T_yY\to T_zZ,$$

удовлетворяющие соотношению

$$T_{(x,y)}\varphi(v, w)=T^X_{(x,y)}\varphi(v)+T^Y_{(x,y)}\varphi(w).$$

Отображения $T^X\varphi$ и $T^Y\varphi$ называются *частными производными* морфизма φ по X и по Y соответственно.

§ 9. Теорема об обратной функции

Пусть $x\in X$ и $f_1, \ldots, f_m$ — аналитические функции, определенные в некоторой окрестности U точки x. Положим $F(y)=(f_1(y), \ldots, f_m(y))$, где $y\in U$. Будем говорить, что набор $\{f_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ определяет в точке x *систему координат*, если существует такая открытая окрестность $U'\subset U$, что $(U', F|U', m)$ — карта многообразия X в точке x.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *набор* $\{f_i\}$ *определяет систему координат в точке* x;

(2) *дифференциалы* df_{ix} *образуют базис пространства* $\overset{*}{T}_xX$.

Эта теорема является следствием другой, более общей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi\colon X \to Y$ — *морфизм двух многообразий, и пусть* $\varphi(x) = y$ ($x \in X$, $y \in Y$). *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) φ — *локальный изоморфизм;*

(2) $T_x\varphi$ — *изоморфизм;*

(2′) $T_x^*\varphi$ — *изоморфизм.*

Доказательство. Импликации $(1) \Rightarrow (2)$ и $(2) \Leftrightarrow (2)'$ очевидны. Импликация $(2) \Rightarrow (1)$ следует из теоремы 4 гл. II, поскольку рассматриваемый вопрос носит локальный характер.

Определение. Морфизм $\varphi\colon X \to Y$, удовлетворяющий эквивалентным условиям теоремы 2, называется *наложением*[1]) в точке x. Отображение φ, которое является *наложением* в каждой точке $x \in X$, называется просто *наложением.*

§ 10. Регулярные, корегулярные и локально линейные отображения[2])

Определение. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ и $\bar\varphi\colon \bar X \to Y$ — два морфизма.

Будем говорить, что они *локально подобны в точках* $x \in X$ и $\bar x \in \bar X$, если существуют такие открытые окрестности U, V, $\bar U$, $\bar V$ точек x, $\varphi(x)$, $\bar x$, $\bar\varphi(\bar x)$ соответственно и такие изоморфизмы $g\colon U \to \bar U$ и $h\colon V \to \bar V$, что

(1) $\varphi(U) \subset V$ и $\bar\varphi(\bar U) \subset \bar V$;

(2) $g(x) = \bar x$ и $h(\varphi(x)) = \bar\varphi(\bar x)$;

(3) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \bar U & \xrightarrow{\bar\varphi} & \bar V \end{array}$$

коммутативна.

[1]) В оригинале „étale“. — *Прим. перев.*

[2]) В оригинале соответственно „immersions“, „submersions“, „subimmersions“. — *Прим. перев.*

Замечание. Мы будем пользоваться этим определением, как правило, в том случае, когда $\bar{X}$, $\bar{Y}$ — линейные пространства и $\bar{\varphi}$ — линейное отображение; при этом без лишних оговорок будет предполагаться, что $\bar{x}=0$ и $\bar{y}=0$.

Пусть X и Y — два многообразия, $x \in X$, $y \in Y$, $\varphi\colon X \to Y$ — морфизм, для которого $\varphi(x)=y$, и пусть $m=\dim_x X$ и $n=\dim_y Y$.

1. Регулярные отображения. Теорема 1. *Следующие свойства эквивалентны:*

(1) *отображение $T_x\varphi$ инъективно;*

(2) *существуют такие открытые окрестности U точки x, V — точки y, W — точки $0 \in k^{n-m}$ и такой изоморфизм $\psi\colon V \to U \times W$, что*

(а) $\varphi(U) \subset V$;

(б) *коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ & U \times W, \end{tikzcd}$$

где i — естественное отображение $U \to U \times \{0\} \subset U \times W$;

(3) *отображение φ локально подобно в точке x линейной инъекции $\bar{\varphi}\colon E \to F$, где E и F — векторные пространства размерностей m и n соответственно;*

(4) *существуют такие функции $\{f_i\}$ и $\{g_j\}$, определяющие системы координат в точках x и y соответственно, что $f_i = g_i \circ \varphi$ при $1 \leqslant i \leqslant m$ и $0 = g_j \circ \varphi$ при $m+1 \leqslant j \leqslant n$;*

(5) *существуют такие открытые окрестности U точки x и V — точки y и такой морфизм $\sigma\colon V \to U$, что $\varphi(U) \subset V$ и $\sigma \circ \varphi = \mathrm{id}_U$.*

Доказательство. Импликации $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$ очевидны. Докажем, что $(1) \Rightarrow (2)$. Поскольку все рассматривается локально, мы можем предполагать, что а) Y — открытое подмножество в k^n;

б) $\varphi(x) = 0$ и $\operatorname{Im}(T_x\varphi) = k^m \times \{0\} \subset k^m \times k^{n-m} = k^n$.

Обозначим множество $\{0\} \times k^{n-m} (\subset k^n)$ через W. Определим отображение $\varphi'\colon X \times W \to Y$ формулой $\varphi'(x, w) = \varphi(x) + w$. По теореме об обратной функции φ' является локальным изоморфизмом в точке x. Урезая, если нужно, пространства X, Y и W, мы можем считать φ' изоморфизмом. Искомый изоморфизм ψ есть просто отображение φ'^{-1}. Теорема доказана.

Определение. Морфизм φ, удовлетворяющий эквивалентным условиям предыдущей теоремы, называется *регулярным* в точке x. Морфизм, регулярный во всех точках $x \in X$, называется просто *регулярным*.

2. Корегулярные отображения. Теорема 2. *Следующие свойства эквивалентны*:

(1) *отображение* $T_x\varphi$ *сюръективно*;

(2) *существуют такие открытые окрестности* U *точки* x, V — *точки* y, W — *точки* $0 \in k^{m-n}$ *и такой изоморфизм* $\psi\colon U \to V \times W$, *что*

(а) $\varphi(U) = V$;

(б) *коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & V \\ V \times W \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

где p *обозначает проекцию* $V \times W \to V$;

(3) *отображение* φ *локально подобно в точке* x *линейной сюръекции* $\bar{\varphi}\colon E \to F$, *где* E *и* F — *векторные пространства размерностей* m *и* n *соответственно*;

(4) *существуют такие наборы функций* $\{f_i\}$ *и* $\{g_j\}$, *определяющие системы координат в точках* x *и* y *соответственно, что* $f_i = g_i \circ \varphi$ *для* $1 \leqslant i \leqslant n$;

(5) *существуют такие открытые окрестности* U *точки* x *и* V — *точки* y *и такой морфизм* $\sigma\colon V \to U$, *что* $\varphi(U) \subset V$ *и* $\varphi \circ \sigma = \mathrm{id}_V$.

Доказательство проводится точно так же, как в предыдущей теореме, и предоставляется читателю в качестве упражнения.

Определение. Морфизм φ, удовлетворяющий эквивалентным условиям предыдущей теоремы, называется *корегулярным* в точке x. Морфизм, корегулярный во всех точках $x \in X$, называется просто *корегулярным.*

Замечания. 1. Наложениями являются в точности те морфизмы, которые одновременно регулярны и корегулярны.

2. Иногда мы будем употреблять выражение „морфизм φ имеет максимальный ранг". Это означает, что отображение $T_x\varphi$ инъективно, если $m \leqslant n$, или сюръективно, если $m \geqslant n$.

3. Вложения. Определение. Морфизм φ называется *вложением*, если

(а) φ — регулярный морфизм;

(б) φ: $X \to \varphi(X)$ — гомеоморфизм.

4. Локально линейные отображения. Определение. Морфизм φ: $X \to Y$ называется *локально линейным в точке x*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

(1) морфизм φ в точке x локально подобен композиции морфизмов $\overline{X} \xrightarrow{s} \overline{Z} \xrightarrow{i} Y$, где s — корегулярное, а i — регулярное отображения;

(2) морфизм φ в точке x локально подобен линейному отображению $\bar{\varphi}$: $E \to F$, где E и F — векторные пространства размерностей m и n соответственно.

Если морфизм φ является локально линейным во всех точках $x \in X$, мы будем называть его просто *локально линейным.*

Замечания. 1. Множество точек $x \in X$, в которых морфизм φ: $X \to Y$ регулярен (соответственно корегулярен, локально линеен), есть открытое подмножество многообразия X.

2. Композиция двух регулярных (соответственно корегулярных) морфизмов является регулярным (соответственно корегулярным) морфизмом. Аналогичное утверждение для локально линейных морфизмов неверно.

Теорема 3. *Предположим, что основное поле k имеет нулевую характеристику. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *морфизм φ локально линеен в точке x;*

(2) *ранг отображения $T_{x'}\varphi$ постоянен для всех точек x' из некоторой окрестности U точки x.*

Доказательство. Импликация $(1)\Rightarrow(2)$ очевидна. Докажем, что $(2)\Rightarrow(1)$.

Обозначим через p размерность образа $\operatorname{Im}(T_x\varphi)$. Поскольку все рассматривается локально, мы можем считать, что

(а) $Y = V_1 \times V_2$ — открытое множество в $k^n = k^p \times k^{n-p}$;

(б) $\varphi(x) = 0$ и $\operatorname{Im}(T_x\varphi) = k^p \times \{0\}$.

Пусть $\pi\colon k^p \times k^{n-p} \to k^p$ — проекция на первый сомножитель. Очевидно, композиция $\pi \circ \varphi$ корегулярна. Следовательно, мы можем считать, что

(в) $X = V_1 \times U_2$ — открытое множество в $k^p \times k^{m-p} = k^m$, причем $x = 0$;

(г) композиция $\pi \circ \varphi\colon V_1 \times V_2 \to V_1$ есть проекция на первый сомножитель.

Таким образом, морфизм φ имеет следующий вид:

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1, \psi(x_1, x_2)), \quad x_1 \in V_1, \quad x_2 \in U_2.$$

Наконец, мы можем считать, что ранг $T_{x'}\varphi$ постоянен (именно равен p) на всем $V_1 \times U_2$. Докажем, что отображение ψ не зависит от x_2 в некоторой окрестности нуля. Для этого заметим прежде всего, что $D_2\psi(x_1, x_2) = 0$. В противном случае морфизм ψ имел бы в точке (x_1, x_2) ранг, строго больший p. Наше утверждение вытекает теперь из следующей леммы.

Лемма. *Пусть $f\colon V \times U \to k$ — аналитическая функция, такая, что $D_2 f \equiv 0$. Если поле k имеет* *нулевую характеристику, то функция f локально не зависит от аргумента, пробегающего сомножитель U.*

Доказательство леммы. В окрестности нуля функция f представляется степенным рядом $\sum f_\alpha(y)\, x^\alpha\, (x \in V,\, y \in U)$. Равенство $D_2 f \equiv 0$ означает, что $D_2 f_2 \equiv 0$ для всех α. Нам надо показать, что $f_\alpha \equiv c_\alpha$, где $c_\alpha \in k$. Задача, таким образом, свелась к случаю $f = f_\alpha$. Мы можем считать теперь, что $f = \sum b_\beta y^\beta\, (b_\beta \in k)$. Из свойств степенных рядов и равенства $D_2 f \equiv 0$ вытекает, что $\beta_i b_\beta = 0$, где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Но так как характеристика поля k равна нулю, $b_\beta = 0$, если $\beta \neq 0$, т. е. функция f постоянна, и т. д.

Для того чтобы закончить доказательство теоремы, представим морфизм φ как композицию морфизмов

$$V_1 \times U_2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} V_1 \xrightarrow{\mathrm{id}_{V_1} \times \psi} V_1 \times V_2.$$

Очевидно, первый морфизм корегулярен, а второй регулярен. Теорема доказана.

Следствие 1. *Предположим, что поле k имеет нулевую характеристику. Тогда множество точек $x \in X$, в которых морфизм локально линеен, всюду плотно в X.*

Доказательство. Обозначим указанное множество через X' и положим $f(x) = \mathrm{rk}\, T_x\varphi$. Согласно предыдущей теореме, функция f локально постоянна на X'. Наше следствие вытекает теперь непосредственно из двух очевидных свойств функции f:

а) она принимает целочисленные значения и локально ограничена;

б) она полунепрерывна снизу.

Следствие 2. *Предположим, что поле k имеет нулевую характеристику и отображение φ инъективно. Тогда множество точек $x \in X$, в которых морфизм φ регулярен, всюду плотно в X.*

Это вытекает из следствия 1 и того факта, что инъективное локально линейное отображение регулярно.

§ 11. Конструирование многообразий. Прообразы

1. Принцип единственности. Теорема 1. *Пусть X — топологическое пространство, A и B — два его полных атласа. Обозначим через X_A (соответственно X_B) аналитическое многообразие, определенное в пространстве X атласом A (соответственно атласом B). Следующие условия эквивалентны:*

(1) $X_A = X_B$, *т. е.* $A = B$;

(2) *для любого многообразия* Y

$$\mathrm{Mor}(Y,\ X_A) = \mathrm{Mor}(Y,\ X_B);$$

(3) *для любого многообразия* Y

$$\mathrm{Mor}(Y,\ X_A) = \mathrm{Mor}(Y,\ X_B).$$

Доказательство. Настоящая теорема есть частный случай общей теоремы, согласно которой функтор определяет объект однозначно с точностью до изоморфизма. Тем не менее мы приведем доказательство ввиду его большой простоты.

Импликация (1)$\Rightarrow$(2) очевидна.

Покажем, что (2)$\Rightarrow$(1). Положим $Y = X_A$. Очевидно, тождественное отображение $\mathrm{id}_X\colon X_B \to X_A$ является морфизмом; аналогично морфизмом является также отображение $\mathrm{id}_X\colon X_A \to X_B$. Значит, атласы A и B согласованы и, следовательно, совпадают, поскольку они полны.

Доказательство эквивалентности (1)$\Leftrightarrow$(3) также просто.

Сформулируем теперь две леммы, которые понадобятся, когда мы будем применять предыдущую теорему.

Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм двух многообразий, Z — произвольное третье многообразие.

Лемма 1. *Пусть f — регулярный морфизм. Отображение g: $Z \to X$ является морфизмом тогда и только тогда, когда*

(1) *отображение g непрерывно*;

(2) $f \circ g \in \mathrm{Mor}(Z, Y)$.

Лемма 2. *Пусть f — корегулярный морфизм. Тогда*

(1) *отображение f открыто*; *в частности, множество $f(X)$ открыто в Y*;

(2) *если $f(X) = Y$, то*

$$g \in \mathrm{Mor}(Y, Z) \Leftrightarrow g \circ f \in \mathrm{Mor}(X, Z).$$

Леммы 1 и 2 непосредственно следуют из локального описания регулярных и корегулярных морфизмов, данного в § 10.

2. Прообразы. Пусть X — топологическое пространство, Y — многообразие и f: $X \to Y$ — *непрерывное* отображение.

Теорема 2. *Пусть пространство X можно снабдить структурой аналитического многообразия, так чтобы отображение f было регулярным морфизмом. Тогда эта структура единственна.*

Доказательство. По лемме 1 для всякого многообразия Z множество $\mathrm{Mor}(Z, X)$ определяется лишь топологической структурой пространства X и аналитической структурой многообразия Y. Следовательно, согласно теореме 1, структура многообразия в пространстве X определена однозначно, ч. т. д.

Пусть $x \in X$. Мы скажем, что пара (X, f) *удовлетворяет условию* (Im) *в точке* x, если

(Im) существуют открытая окрестность U точки x в пространстве X, карта (V, φ, n) многообразия Y и линейное подпространство $E \subset k^n$, такие, что

(а) $f(U) \subset V$ и f: $U \to f(U)$ — гомеоморфизм;

(б) $\varphi(f(U)) = E \cap \varphi(V)$.

Если это условие выполняется для всех точек $x \in X$, то мы скажем, что пара (X, f) *удовлетворяет условию* (Im).

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *в пространстве X существует структура аналитического многообразия, относительно которой отображение f является регулярным морфизмом;*

(2) *пара (X, f) удовлетворяет условию* (Im).

Доказательство. Импликация $(1) \Rightarrow (2)$ следует из теоремы 1 § 10.

Покажем, что, обратно, $(2) \Rightarrow (1)$. Выберем открытое покрытие $\{U_i\}_{i \in I}$ пространства X, такое, что для каждого индекса $i \in I$ найдутся карта $c_i = (V_i, \varphi_i, n_i)$ и линейное подпространство $E_i \subset k^{n_i}$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

(а) $f(U_i) \subset V_i$ и $f\colon U_i \to f(U_i)$ — гомеоморфизм;

(б) $\varphi_i(f(U_i)) = E \cap \varphi_i(V_i)$.

Каждое множество U_i естественным образом наделяется структурой аналитического многообразия, относительно которой отображение $f \mid U_i$ регулярно. Далее, по теореме 2 структуры, индуцированные множествами U_i и U_j на пересечении $U_i \cap U_j$, совпадают. Но, как мы знаем (§ 4, пример 4), пространство X можно снабдить структурой аналитического многообразия, согласованной с первоначальными структурами на множествах U_i. Остается заметить, что отображение f является регулярным морфизмом относительно введенной структуры. Теорема доказана.

Пусть пара (X, f) удовлетворяет условию (Im). Из теоремы 1 и 2 в совокупности вытекает, что пространство X обладает единственной структурой аналитического многообразия, при которой отображение f становится регулярным морфизмом. Эту аналитическую структуру в пространстве X мы будем называть *структурой прообраза* (относительно f) или просто *индуцированной структурой*. Соответствующее аналитическое многообразие будем обозначать через X_f в тех случаях, когда мы захотим подчеркнуть зависимость этой структуры от f.

Рассмотрим несколько приложений предыдущих результатов.

А. Подмногообразия. Пусть Y — некоторое многообразие, X — его подпространство (наделенное индуцированной топологией), и пусть $i\colon X \to Y$ — отображение вложения. Мы будем говорить, что X — *подмногообразие* в Y, если пара (X, f) удовлетворяет условию (Im). Заметим, что из этого условия, в частности, вытекает, что пространство X локально замкнуто в Y.

Пусть $x \in X$. Мы будем говорить, что X является *локальным подмногообразием* в точке x, если выполнено одно из трех эквивалентных условий:

(1) пара (X, i) удовлетворяет условию (Im) в точке x;

(2) существует открытая окрестность $U \subset Y$ точки x, такая, что $U \cap X$ — подмногообразие в U;

(3) в некоторой подходящей локальной системе координат $(x_1, \ldots, x_n)$ в точке x множество X в некоторой окрестности этой точки задается уравнениями $x_1 = \ldots = x_p = 0$ $(p \leqslant n)$.

Б. Локальный гомеоморфизм. Если отображение $f\colon X \to Y$ — локальный гомеоморфизм, то пара (X, f) удовлетворяет условию (Im). Морфизм $f\colon X_f \to Y$ в этом случае является наложением.

В. Прообразы точек. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм многообразий, и пусть $b \in Y$. Обозначим через X_b прообраз $f^{-1}(b)$. Изучим вложение $X_b \subset X$ в окрестности некоторой точки $a \in X_b$.

Теорема 4. *Для того чтобы множество X_b в точке a было локальным подмногообразием в X, достаточно выполнения любого из следующих трех условий:*

(1) *морфизм f корегулярен в окрестности точки a;*

(2) *существует подмногообразие $W \subset X$, такое, что*
(a) $W \subset X_b (a \in W)$,
(б) $T_a W = \operatorname{Ker}\left(T_a X \xrightarrow{T_a f} T_b Y\right)$;

(3) (А. Вейль) *существуют многообразие Z, точка $c \in Z$ и морфизм $g\colon Z \to X$, такие, что*
(а) $f \circ g(z) = b$ *для всех* $z \in Z$,
(б) $g(c) = a$,

(в) *последовательность линейных отображений*

$$T_cZ \xrightarrow{T_cg} T_aX \xrightarrow{T_af} T_bY$$

точна.

В каждом из этих трех случаев имеем

$$T_a(X_b) = \operatorname{Ker}\left(T_aX \xrightarrow{T_af} T_bY\right).$$

Доказательство. (1) Наше утверждение немедленно вытекает из локального описания корегулярного морфизма.

(2) Докажем более сильное утверждение: существует открытая окрестность $U \subset X$ точки a, такая, что $U \cap X_b = U \cap W$.

Ввиду локального характера нашей задачи мы можем считать, что X — открытая окрестность точки $0 \in k^m$ и что $X = W \times V$. Определим отображение

$$F\colon X \to W \times Y$$

формулой

$$F(w, v) = (w, f(w, v)),$$

Поскольку морфизм F регулярен в точке 0, мы можем считать, урезая, если нужно, X, что F инъективно. Тогда

$$X_b \subset F^{-1}(W \times \{b\}) = W \times \{0\} = W.$$

т. е. $X_b = W$ в окрестности точки a.

(3) Докажем более сильное утверждение: существуют открытая окрестность $W \subset Z$ точки c, открытая окрестность $U \subset X$ точки a, разложение $W = W_1 \times W_2$ и морфизм $\varphi\colon W_1 \to X$, такие, что

(а′) φ — изоморфизм W_1 на подмногообразие $\varphi(W_1) \subset X$;

(б′) морфизм g представим в виде композиции

$$W_1 \times W_2 \xrightarrow{pr_1} W_1 \xrightarrow{\varphi} X;$$

(в′) $U \cap X_b = g(W)$.

Тем самым, в частности, будет доказана корегулярность морфизма g в точке c.

В силу локального характера задачи мы можем предполагать, что Z — открытая окрестность точки $c=0$ в пространстве k^p. Можно считать, что эта окрестность имеет вид $Z = W_1 \times W_3$, причем $T_0^{W_1}(g)$ — изоморфизм, а $T_0^{W_3}(g)$ — нулевое отображение. Положим $\varphi = g \mid W_1$. Поскольку морфизм φ регулярен в нуле, можно предполагать, урезая, если нужно, множество W_1, что φ есть изоморфизм W_1 на подмногообразие в X. Ввиду свойств (а) и (в) образ $\varphi(W_1)$ удовлетворяет условию (2). В силу доказанного выше найдется открытая окрестность $U \subset X$ точки a, такая, что $U \cap X_b = U \cap \varphi(W_1)$. Открытое множество $g^{-1}(U) = W$ является окрестностью нуля в $W_1 \times W_3$, причем $g(W) \subset U \cap X_b$.

Ясно, что морфизм g отображает W в $\varphi(W_1)$. Нетрудно видеть также, что отображение $g\colon W \to \varphi(W_1)$ корегулярно в точке 0. Урезав подходящим образом W_1 и W_2, мы получим разложение $W = W_1 \times W_2$, удовлетворяющее условиям (а) и (б). Для того чтобы выполнялось свойство (в), достаточно сузить окрестность U.

Теорема доказана.

Г. Трансверсальные подмногообразия. Пусть X — многообразие, Y_1 и Y_2 — его подмногообразия и $x \in Y_1 \cap Y_2$.

Теорема 5. *Следующие три свойства равносильны:*

(1) $T_xX = T_xY_1 + T_xY_2$;

(2) *точка x обладает картой $c = (U, \varphi, n)$, такой, что*

$$\varphi(U) = V_1 \times V_2 \times W,$$

$$\varphi(U \cap Y_1) = V_1 \times \{0\} \times W,$$

$$\varphi(U \cap Y_2) = \{0\} \times V_2 \times W;$$

(3) *в точке x существуют локальные координаты $(x_1, \ldots, x_n)$, такие, что в окрестности этой точки Y задается уравнениями $x_1 = \ldots = x_p = 0$, а Y_2 — уравнениями $x_{p+1} = \ldots = x_{p+q} = 0$, где p, q — целые неотрицательные числа, $p + q \leqslant n$.*

Доказательство. Импликации $(2) \Leftrightarrow (3)$ и $(2) \Rightarrow (1)$ очевидны. Докажем, что $(1) \Leftrightarrow (3)$.

Поскольку Y_1 и Y_2 — подмногообразия в X, можно (урезав, если надо, пространство X) найти такие корегулярные морфизмы

$$f_1: X \to k^p, \quad f_2: X \to k^q,$$

что $Y_i = f_i^{-1}(0)$, $i = 1, 2$. Условие (1) показывает, что отображение $(f_1, f_2): X \to k^p \times k^q$ корегулярно в точке x. Это позволяет отождествить координаты $(x_1, \ldots, x_{p+q})$ произведения $k^p \times k^q$ с частью локальных координат $(x_1, \ldots, x_n)$ в точке x. Следовательно, $(1) \Rightarrow (3)$. Теорема доказана.

Если Y_1 и Y_2 удовлетворяют одному из эквивалентных условий предыдущей теоремы, то говорят, что подмногообразия Y_1 и Y_2 *трансверсальны в точке* x.

Следствие. *Пусть подмногообразия Y_1 и Y_2 трансверсальны в точке x. Тогда*

(1) *Y_1 и Y_2 трансверсальны в некоторой окрестности этой точки;*

(2) *пересечение $Y_1 \cap Y_2$ является локальным подмногообразием многообразия X в точке x;*

(3) $T_x(Y_1 \cap Y_2) = T_x Y_1 \cap T_x Y_2$.

Д. Трансверсальные морфизмы. Рассмотрим пару морфизмов $f_i: Y_i \to X$, $i = 1, 2$. Положим

$$Y_1 \times {}_X Y_2 = \{(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2 \mid f_1(y) = f_2(y)\}.$$

Это множество называется *расслоенным произведением* Y_1 и Y_2 над X. Положим

$$f = f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2,$$

где

$$p_i: Y_1 \times {}_X Y_2 \to Y_i$$

ограничение отображения

$$\mathrm{pr}_i: Y_1 \times Y_2 \to Y_i$$

(см. диаграмму).

$$\begin{tikzcd} Y_1 \times_X Y_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, dashed, "f"] & Y_2 \arrow[d, "f_2"] \\ Y_1 \arrow[r, "f_1"'] & X \end{tikzcd}$$

Пусть $(y_1, y_2) \in Y_1 \times_X Y_2$, и пусть $x = f(y_1, y_2)$. Будем говорить, что морфизмы f_1 и f_2 *трансверсальны в точке* $y = (y_1, y_2)$, если $T_X X = \operatorname{Im}(T_{y_1} f_1) + \operatorname{Im}(T_{y_2} f_2)$,

Теорема 6. *Пусть морфизмы f_1 и f_2 трансверсальны в точке y. Тогда*

(1) *морфизмы f_1 и f_2 трансверсальны в некоторой окрестности точки y в $Y_1 \times_X Y_2$;*

(2) *множество $Y_1 \times_X Y_2$ в точке y является локальным подмногообразием в $Y_1 \times Y_2$;*

(3) $T_y(Y_1 \times_X Y_2) = T_{y_1}(Y_1) \times_{T_x(X)} T_{y_2}(Y_2)$.

Набросок доказательства. Положим $Y = Y_1 \times Y_2$ и $Z = Y_1 \times_X Y_2$. Обозначим через δ_i: $Y \to Y \times X$ отображение $(\mathrm{id}_Y, f_i \circ \mathrm{pr}_i)$ и положим $\delta = \delta_i | Z$. Теорема вытекает из следующих трех утверждений:

а) морфизмы δ_1 и δ_2 являются изоморфизмами многообразия Y на подмногообразия в $Y \times X$;

б) подмногообразия $\delta_1(Y)$ и $\delta_2(Y)$ трансверсальны в точке $\delta(y)$;

в) $\delta(Z) = \delta_1(Y) \cap \delta_2(Y)$.

Подробности предоставляем читателю.

Замечания. 1. Если хотя бы одно из отображений f_i корегулярно, то морфизмы f_1 и f_2 всюду трансверсальны.

2. Если в описанной выше ситуации f_1 есть вложение *подмногообразия* Y_1 в многообразие X и если f_1 и f_2 трансверсальны в точке y, то мы будем говорить, что морфизм f_2 *трансверсален над* Y_1 в точке y.

§ 12. Конструирование многообразий. Фактормногообразия

Пусть X — многообразие и $R \subset X \times X$ — некоторое отношение эквивалентности. Обозначим через X/R множество классов эквивалентности относительно R

и через p: $X \to X/R$ — каноническую проекцию. Снабдим множество X/R обычной фактортопологией. Именно: множество $\overline{U} \subset X/R$ открыто в том и только в том случае, если множество $p^{-1}(\overline{U}) \subset X$ открыто.

Теорема 1. *Если в пространстве X/R существует структура аналитического многообразия, относительно которой отображение p является корегулярным морфизмом, то такая структура единственна.*

Доказательство. По лемме 2 из § 11 множество $\mathrm{Mor}(X/R, Z)$ для любого многообразия Z зависит лишь от аналитической структуры пространства X. Следовательно, по теореме 1 из § 11 структура многообразия на факторпространстве X/R определена однозначно, ч. т. д.

Если ситуация, описанная в предыдущей теореме, имеет место, то мы называем пространство X/R *фактормногообразием* (или просто многообразием), а отношение R — регулярным отношением эквивалентности.

Теорема 2 (Годеман). *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *отношение R регулярно (т. е. X/R) — многообразие;*

(2) (а) *R — подмногообразие в $X \times X$;*

(б) pr_2: *$R \to X$ — корегулярный морфизм.*

Доказательство (1)$\Rightarrow$(2). Пусть выполнено условие (1). Покажем, что тогда выполнено условие (2). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "p"'] & X/R \end{tikzcd}$$

Очевидно, множество R совпадает с $X \times_{X/R} X$. Поскольку отображение p корегулярно, множество R является подмногообразием в $X \times X$ (см. теорему 6 из § 11 и замечание 1). Далее, если $(x, y) \in R$ и $z = p(x) = p(y)$, то

$$T_{x,\ y}(R) = T_x(X) \times_{T_z(X/R)} T_y(X).$$

Последнее равенство, в частности, показывает, что отображение $T_{(x,\ y)}(R) \to T_y(X)$ сюръективно, и, следовательно, ограничение проекции pr_2 на R — корегулярный морфизм (ср. с упражнением 5 ниже).

(2) $\Rightarrow$ (1). Для удобства доказательство этой импликации будет представлено в виде последовательности лемм.

Пусть U — подмножество в X. Положим $R_U = R \cap (U \times U)$. Напомним, что подмножество $U \subset X$ называется *насыщенным* относительно отношения эквивалентности R, если $U = p^{-1}p(U)$.

Лемма 1. *Пусть* $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, *где каждое подмножество* U_i *открыто и насыщено в* X, *причем факторпространство* U_i/R_{U_i} — *многообразие. Тогда* X/R *также является многообразием.*

Доказательство. По условию все отображения $U_i \to U_i/R_{U_i}$ корегулярны. Поэтому для любых двух индексов $i, j \in I$ структуры аналитических многообразий, индуцированные многообразиями U_i/R_i и U_j/R_j на $U_i \cap U_j/R_{U_i \cap U_j}$, совпадают (теорема 1). На множестве X/R имеется, следовательно, единственная структура многообразия, согласованная с заданными структурами на множествах U_i/R_{U_i}. Наконец, отображение p корегулярно, так как для всех i ограничение $p \mid U_i$ является корегулярным морфизмом.

Лемма 2 *Отображение* p *открыто* (*т. е. если подмножество* $U \subset X$ *открыто, то открытым будет и подмножество* $p^{-1}p(U)$).

Доказательство. $p^{-1}p(U) = \mathrm{pr}_2((U \times X) \cap R)$. Но множество $\mathrm{pr}_2((U \times X) \cap R)$ открыто в X, поскольку проекция pr_2 корегулярна (лемма 2 из § 11).

Лемма 3. *Если существует такое открытое подмножество $U \subset X$, что $p^{-1}p(U) = X$ и U/R_U — многообразие, то факторпространство X/R также является многообразием.*

Доказательство. Каноническое отображение $\alpha: U/R_U \to X/R$ — гомеоморфизм. Если мы докажем теперь, что $\beta: X \to U/R_U$ — корегулярный морфизм, то, перенеся структуру аналитического многообразия с U/R_U на X/R, мы превратим факторпространство X/R в аналитическое многообразие, причем отображение p будет корегулярно. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & (U \times X) \cap R \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\
U \arrow[dr, "\beta|U"'] & & X \arrow[dl, "\beta"] \\
 & U|R_U &
\end{tikzcd}$$

Отображение $(\beta|U) \circ \mathrm{pr}_1 = \beta \circ \mathrm{pr}_2$, как легко видеть, корегулярно. Значит, поскольку проекция pr_2 корегулярна, отображение β является морфизмом, и даже корегулярным (лемма 11.2).

Комбинируя леммы 1, 2 и 3, мы получаем следующее утверждение.

Лемма 4. *Если существует такое открытое покрытие $\{U_i\}_{i \in I}$ многообразия X, что все U_i/R_i — многообразия, то факторпространство X/R также является многообразием.*

Суть леммы 4 заключается в том, что наша задача о построении структуры многообразия на факторпространстве X/R (при условии корегулярности отображения p) приобрела теперь локальный характер. Остальные две леммы будут посвящены решению этой локальной задачи. Именно: мы покажем, что для каждой точки $x_0 \in X$ найдется такая ее открытая окрестность $U \subset X$, что фактормножество U/R_U обладает структурой многообразия, относительно которой проекция $U \to U/R_U$ корегулярна.

Лемма 5. *Пусть* $x_0 \in X$. *Тогда существуют открытая окрестность* U *точки* x_0, *подмногообразие* $W \subset U$ *и морфизм* $r: U \to W$, *такие, что для любой точки* $u \in U$ *имеет место сравнение* $r(u) \equiv u \pmod{R}$, *причем* $r(u)$ — *единственный элемент из* W, *удовлетворяющий этому сравнению.*

Доказательство. Обозначим через N множество всех касательных векторов $\xi \in T_{x_0}(X)$, таких, что $(\xi, 0) \in T_{(x_0, x_0)}(R)$. Выберем подмногообразие $W' \subset X$, проходящее через точку x_0, касательное пространство $T_{x_0}W' = K$ к которому является дополнительным к подпространству $N \subset T_{x_0}X$. Положим $\Sigma = (W' \times X) \cap R$.

Мы утверждаем, что

1°. Σ — подмногообразие в R;

2°. pr_2: $\Sigma \to X$ — наложение в точке (x_0, x_0).

Сразу заметим, что pr_1: $R \to X$ — корегулярный морфизм, поскольку морфизм pr_2 корегулярен и R — симметричное отношение. Утверждение 1° получается применением теоремы 6 из § 11 к проекции pr_1: $R \to X$ и вложению i: $W' \to X$.

Далее, из определения N ясно, что

$$\mathrm{Ker}(T_{(x_0, x_0)}(\mathrm{pr}_2)) \simeq N \cap K.$$

Поскольку $N \cap K = (0)$, заключаем, что $T_{(x_0, x_0)}(\mathrm{pr}_2)$ — инъекция. С другой стороны, отображение $T_{(x_0, x_0)}(\mathrm{pr}_2)$ сюръективно. Действительно, пусть $\eta \in T_{x_0}X$. Возьмем любой вектор $\xi \in T_{x_0}X$ (например, $\xi = \eta$), такой, что $(\xi, \eta) \in T_{(x_0, x_0)}R$. Представим ξ в виде $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где $\xi_1 \in N$ и $\xi_2 \in K$. Тогда $(\xi_2, \eta) \in T_{(x_0, x_0)}R$, поскольку $N \times \{0\} \subset T_{(x_0, x_0)}R$. Следовательно, элемент (ξ_2, η) лежит в пересечении $T_{x_0}W' \cap T_{(x_0, x_0)}R$. Остается заметить, что $T_{x_0}W' \cap T_{(x_0, x_0)}R = T_{(x_0, x_0)}\Sigma$ (теорема 5 из § 11) и $T_{(x_0, x_0)}(\mathrm{pr}_2)(\xi_2, \eta) = \eta$.

Итак, доказано, что наше отображение есть локальный изоморфизм в точке (x_0, x_0). Поэтому найдутся такие окрестности U_1 и U_2 точки x_0, что

pr_2: $\Sigma \cap (U_1 \times U_1) \to U_2$ — изоморфизм. Обозначим через f обратное отображение. A priori морфизм f имеет вид: $f(x) = (r(x), x)$. Заметим, что $U_2 \subset U_1$ и $r(x) = x$, если $x \in U_2 \cap W'$. Первое очевидно, а второе вытекает из того обстоятельства, что точки (x, x), $(r(x), x)$ лежат в $\Sigma \cap (U_1 \times U_1)$ и их образы в U_2 совпадают.

Положим, наконец,

$$U = \{x \in U_2 \mid r(x) \in U_2 \cap W'\}$$

и

$$W = U \cap W'.$$

Множество U, очевидно, является открытым.

Мы должны установить, что

(а) $r(U) \subset W$,

(б) $r(x)$ — единственный элемент в W, эквивалентный элементу x $(x \in U)$.

Установим это.

(а) Пусть $x \in U$. Нужно показать, что $r(x) \in U$, т. е. $r(x) \in U_2$ и $r(r(x)) \in U_2 \cap W'$. Первое очевидно; что же касается второго, то достаточно заметить, что $r(x) \in U_2 \cap W'$ и $r(r(x)) = r(x)$.

(б) Если $y \equiv r(x)$ и $y \in W$, то $(y, x) \in R \cap (W \times U)$. Но поскольку $(r(x), x) \in R \cap (W \times U)$ и проекция pr_2: $R \cap (W \times U) \to U$ инъективна, точки $r(x)$ и y совпадают.

Лемма 6. *Если тройка (U, W, r) удовлетворяет условиям предыдущей леммы, то пространство U/R_U является фактормногообразием.*

Доказательство. Морфизм r: $U \to W$ обладает обратным справа (вложение W в U), поэтому отображение r корегулярно. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "r"] \arrow[dr] & & W \arrow[dl, "\alpha"] \\ & U/R_U & \end{tikzcd}$$

Очевидно, отображение α — гомеоморфизм. Остается перенести структуру многообразия с W на U/R_U.

Теорема доказана.

Замечание. Если отношение R регулярно, то фактормногообразие X/R является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда множество R замкнуто в $X \times X$ (это непосредственно следует из леммы 2).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть задана конечная группа G автоморфизмов многообразия X; обозначим через X^G множество неподвижных точек (относительно действия этой группы). Предположим, что порядок группы G взаимно прост с характеристикой p поля k. Показать, что

а) любая точка $x \in X^G$ обладает локальной системой координат, относительно которой действие группы G записывается линейно;

б) X^G — подмногообразие в X и

$$T_x(X^G) = T_x(X)^G \ (x \in X^G).$$

2. Пусть k — совершенное поле характеристики $p \neq 0$, и X — произвольное многообразие над полем k. Доказать, что на топологическом пространстве X существует единственная структура многообразия (обозначим ее X^p) со следующими свойствами:

(i) для всякого многообразия Y множество $\operatorname{Mor}(X^p, Y)$ состоит из всех морфизмов $f\colon X \to Y$, таких, что $T_x(f) = 0$ для всех $x \in X$;

(ii) отображение $f\colon X \to k$ есть X^p-морфизм в том и только в том случае, когда отображение $f^{\frac{1}{p}}\colon X \to k$ $\left(\text{где } f^{\frac{1}{p}}(x) = f(x)^{\frac{1}{p}}\right)$ является X-морфизмом.

Показать затем существование многообразия $X^{p^{-1}}$, такого, что $\left(X^{p^{-1}}\right)^p = X$.

Доказав эти утверждения, определить по индукции многообразия X^q, где $q = p^n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Показать, что $\operatorname{Mor}(X^q, Y^q) = \operatorname{Mor}(X, Y)$. Равенство $X^q = X$ имеет место тогда и только тогда, когда $q = 1$ или X дискретно (т. е. $\dim X = 0$).

3. Пусть k — локально компактное неархимедово поле, A_v — его кольцо нормирования, $\mathfrak{m}_v = \pi A_v$ — максимальный идеал этого кольца, $k_v = A_v/\mathfrak{m}_v$ и $q = \operatorname{Card} k_v$. Обозначим через B единичный шар $(A_v)^N$ размерности N и положим $B_n = (A_v/\pi^n A_v)^N$, так что $B = \varprojlim B_n$. Пусть X — некоторое подмногообразие в B. Предположим также, что X во всех точках имеет одинаковую размерность d. Пусть X_n — образ многообразия X в B_n и $c_n = \operatorname{Card} X_n$.

а) Доказать существование таких целых чисел $n_0 \geqslant 0$ и $A > 0$, что

$$c_n = A \cdot q^{nd}, \quad n \geqslant n_0.$$

б) Показать, что $A \equiv a (\operatorname{mod}(q-1))$, где $a \in \mathbf{Z}/(q-1)\mathbf{Z}$ — инвариант многообразия X, определенный ниже в добавлении 2 (при этом предполагается также, что $d \geqslant 1$).

4. Пусть X — многообразие и $\{X_i\}_{i \in I}$ — некоторый конечный набор его подмногообразий. Пусть $\bigcap\limits_{i \in I} X_i \neq \varnothing$, и пусть $x \in \bigcap\limits_{i \in I} X_i$. Предположим, что подпространства $T_x(X_i) \subset T_x(X)$ линейно независимы (иными словами, сумма их является прямой). Показать, что найдется карта $c = (U, \varphi, n)$ многообразия $X (x \in U)$, такая, что $\varphi(U \cap X_i)$ есть пересечение $\varphi(U)$ с линейным подпространством пространства k^n.

5. Пусть f_i: $X_i \to X$ $(i = 1, 2)$ — трансверсальные морфизмы и p_i: $X_1 \times_X X_2 \to X_i$ — проекции. Показать, что морфизм p_2 регулярен (соответственно корегулярен или локально линеен), если таковым является морфизм f_1.

6. Пусть f: $X \to Y$ — морфизм многообразий. Предположим, что отображение f открыто и характеристика поля k равна нулю. Доказать, что множество точек пространства X, в которых морфизм f корегулярен, всюду плотно в X.

Добавление 1

ПРИМЕР ХАУСДОРФОВА МНОГООБРАЗИЯ НАД НЕАРХИМЕДОВЫМ ПОЛЕМ k, ОБЛАДАЮЩЕГО ТОЧКОЙ, НЕ ИМЕЮЩЕЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОКРЕСТНОСТЕЙ, ОТКРЫТЫХ И ЗАМКНУТЫХ ОДНОВРЕМЕННО

Настоящий пример принадлежит Бергману.

Пусть k — полное неархимедово поле и A — его кольцо нормирования.

Допустим, что в кольце A имеется такой ненулевой элемент $x \in A$, что факторкольцо A/xA бесконечно.

Мы утверждаем, что A как многообразие аналитически изоморфно многообразию $A\setminus\{0\}$. Для того чтобы это установить, мы покажем, что пространства A и $A\setminus\{0\}$ могут быть представлены в виде несвязного объединения одного и того же числа многообразий, изоморфных A.

Заметим прежде всего, что любой класс смежности по подгруппе $x^\mu A\,(\mu \in \mathbf{Z})$ аналитически изоморфен A. Очевидно, A есть несвязное объединение всех смежных классов по подгруппе xA. В то же время $A\setminus\{0\}$ есть несвязное объединение следующего набора смежных классов (по подгруппам $x^\mu A$, где μ пробегает все целые числа):

1° смежные классы по подгруппе xA, за исключением самой подгруппы xA;

2° смежные классы группы xA по подгруппе x^2A, за исключением самой подгруппы x^2A;

. . .

μ^0 смежные классы группы $x^{\mu-1}A$ по подгруппе $x^\mu A$, за исключением самой подгруппы $x^\mu A$;

. . .

Поскольку факторкольцо A/xA бесконечно, оба описанные семейства смежных классов имеют одну и ту же мощность.

Приведенную выше конструкцию можно рассматривать также как некую операцию присоединения точки P к шару A:

$$A \subset A \cup \{P\} \simeq A$$

(точке P соответствует во втором экземпляре шара A точка 0). Подобная операция присоединения обладает тремя важными свойствами:

1) $A \cup \{P\}$ — хаусдорфово аналитическое многообразие;

2) точка P принадлежит замыканию множества A;

3) точка P не лежит в замыкании ни одного смежного класса по идеалу $\mathfrak{m}$.

Последнее свойство есть следствие того факта, что точка 0 находится „достаточно далеко" от любого из смежных классов, которые были введены выше при разбиении пространства $A \setminus \{0\}$.

Повторим указанную операцию счетное число раз. Именно: сначала к пространству A присоединим точку P_0, затем (воспользовавшись аналитическим изоморфизмом $xA \simeq A$) аналогичным образом присоединим точку P_1 к пространству xA и склеим пространства $A \cup \{P_0\}$ и $xA \cup \{P_1\}$ по их общему открытому подмножеству xA. Полученное пространство $A \cup \{P_0\} \cup \{P_1\}$ является хаусдорфовым, так как по свойству 3) точки P_0 и P_1 „достаточно далеко" отстоят друг от друга. Пусть пространство $A \cup \{P_0\} \cup \{P_1\} \cup \ldots \cup \{P_\mu\}$ уже построено. Пространство $A \cup \{P_0\} \cup \ldots \cup \{P_\mu\} \cup \{P_{\mu+1}\}$ мы определим как результат склеивания пространств $A \cup \{P_0\} \cup \ldots \cup \{P_\mu\}$ и $x^{\mu+1}A \cup \{P_{\mu+1}\}$ по их общему открытому подмножеству $x^{\mu+1}A$. В результате мы приходим к счетной возрастающей последовательности хаусдорфовых многообразий, таких, что каждое последующее содержит предыдущее в качестве своего открытого подмножества. Объединение этих многообразий — множество X — наделяется естественной топологией, относительно которой все его подмножества $A \cup \{P_0\} \cup \ldots \cup \{P_\mu\}$ открыты и обладают исходной топологией.

Так как по нашему построению точки P_0, $P_1, \ldots, P_\mu, \ldots$ находятся „достаточно далеко“ друг от друга, пространство X, получаемое в пределе, является хаусдорфовым. Покажем, что точка $0 \in X$ не имеет фундаментальной системы окрестностей, состоящей из множеств, открытых и замкнутых одновременно. Если бы такая система существовала, то одна из ее окрестностей U содержалась бы в пространстве A. Поскольку совокупность $\{x^\mu A\}$ образует фундаментальную систему окрестностей точки 0, найдется такое целое число μ, что $x^\mu A \subset U$. Обозначив через $\overline{x^\mu A}$ замыкание подмножества $x^\mu A \subset X$, мы видим, что, с одной стороны, $\overline{x^\mu A} \subset U \subset A$, а с другой, $P_\mu \in \overline{x^\mu A}$. Тем самым мы получаем противоречие, поскольку по построению $P_\mu \notin A$.

Замечание. Мы предполагали существование такого полного неархимедова поля k и такого ненулевого элемента $x \in A$, что факторкольцо A/xA бесконечно. Читатель без труда проверит, что поле k обладает этим свойством в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

1) поле вычетов k_v бесконечно;

2) нормирование поля k имеет недискретную область значений.

Заметим, что неархимедовы поля, не удовлетворяющие ни одному из этих условий, исчерпываются конечными расширениями поля p-адических чисел и полей вида $\mathbf{F}((X))$, где $\mathbf{F}$ — конечное поле.

Добавление 2

СТРОЕНИЕ p-АДИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

При изучении многообразий над *локально компактным неархимедовым* полем k основную роль играет понятие несвязного объединения.

Пусть X — некоторое аналитическое многообразие; допустим, что его размерность всюду одинакова и равна $n\,(n \geqslant 0)$. Предположим также, что пространство X хаусдорфово и непусто.

Символ $B(r)(x)$ будет, как и прежде, обозначать шар в линейном пространстве k^n радиуса r $(r \in R)$ с центром в точке $x \in k^n$.

Лемма 1. *Шар $B(r)(x)$ $(r > 0)$ является открытым и компактным подмножеством пространства k^n. Этим свойством обладает, следовательно, любой шар многообразия X.*

Доказательство. 1°. Компактность. Так как поле k локально компактно, точка x обладает компактной окрестностью U. Мы можем считать поэтому, что для достаточно малого $\varepsilon \in \mathbf{R}$ $(\varepsilon > 0)$ все шары вида $B(s)(x)$, где $s < \varepsilon r$, содержатся в U. Такие шары компактны ввиду их замкнутости. Поскольку абсолютное значение поля k нетривиально, найдется такой ненулевой элемент $\alpha \in k$, что $|\alpha| < \varepsilon$. Преобразование $f(y) = x + \alpha(y - x)$ есть гомеоморфизм шара $B(r)(x)$ на шар $B(|\alpha| r)(x)$, что и доказывает компактность первого шара.

2°. Открытость. Для того чтобы показать, что множество $B(r)(x)$ открыто, приходится существенно пользоваться неархимедовостью поля k. Пусть $y \in B(r)(x)$. Мы утверждаем, что $B(r)(y) = B(r)(x)$. (Это, в частности, означает, что шар $B(r)(x)$ — окрестность точки y.) Поскольку $x \in B(r)(y)$, нам достаточно в силу симметрии доказать включение $B(r)(y) \subset B(r)(x)$. Пусть $x \in B(r)(y)$, тогда

$$|z - x| \leqslant \max(|z - y|, |y - x|) \leqslant r,$$

так что $z \in B(r)(x)$, как и утверждалось.

Замечание. Подобными рассуждениями можно установить следующий факт. Пусть B_1 и B_2 — шары радиусов r_1 и r_2 соответственно, причем $r_1 \leqslant r_2$. Тогда возможны лишь два случая: либо шар B_1 содержится в шаре B_2, либо не пересекается с ним.

Лемма 2. *Пусть B — некоторый шар в пространстве k^n, и пусть U — открытое и замкнутое подмно-*

жество этого шара. Существует такое положительное число r, не превышающее радиуса шара B, что множество U представляется в виде несвязного объединения конечной совокупности шаров радиуса r.

Доказательство. Поскольку множество U открыто, оно может быть представлено в виде объединения некоторой совокупности шаров. Но так как множество U замкнуто и лежит в B, оно является компактным. Следовательно, упомянутую выше совокупность можно считать конечной, а ввиду предыдущего замечания — даже несвязной. Тот факт, что все шары могут быть выбраны одного радиуса, почти очевиден, так как каждый шар радиуса s может быть (в силу замечания и леммы 1) представлен в виде конечного несвязного объединения шаров любого радиуса $s' \leqslant s$.

Замечание. Пусть B — некоторый шар многообразия X, и пусть U — открытое и замкнутое подмножество этого шара. Из доказанной леммы 2 непосредственно вытекает, что U есть несвязное объединение конечного числа шаров.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *многообразие X паракомпактно;*

(2) *многообразие X представляется в виде несвязного объединения шаров.*

Доказательство.

Импликация (2)$\Rightarrow$(1) очевидна, так как несвязное объединение компактных пространств паракомпактно.

Докажем, что (1)$\Rightarrow$(2). Покажем вначале, что пространство X обладает локально конечным покрытием, состоящим из шаров. Так как X — многообразие, оно покрывается некоторой совокупностью шаров $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$. По условию в это покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие $\{V_\mu\}_{\mu \in M}$. Пользуясь известными теоремами общей топологии, впишем в это покрытие локально конечное замкнутое покрытие $\{W_\nu\}_{\nu \in N}$. Пусть φ: $M \to L$ и ψ: $N \to M$ — такие отображения, что $V_\mu \subset U_{\varphi(\mu)}$ и $W_\nu \subset V_{\psi(\nu)}$. Для каждого индекса $\nu \in N$ имеем

$$W_\nu \subset V_{\psi(\nu)} \subset U_{\varphi\psi(\nu)}.$$

Множество W_ν замкнуто и лежит в компактном шаре $U_{\varphi\psi(\nu)}$, следовательно, оно само компактно. Поскольку множество $V_{\varphi(\nu)}$ открыто, найдется конечный набор шаров $B_{\nu, i}$, $i \in I_\nu$, лежащих в $V_{\varphi(\nu)}$ и покрывающих W_ν. Воспользовавшись локальной конечностью покрытия $\{V_\mu\}_{\mu \in M}$, мы можем выбрать указанные шары таким образом, что каждый шар $B_{\nu, i}$ будет пересекаться лишь с конечным числом множеств V_μ. Таким образом, совокупность шаров $\{B_{\nu, i}\}_{\nu \in N, i \in I_\nu}$ образует локально конечное покрытие многообразия X, такое, что любой шар $B_{\nu, i}$ пересекается лишь с конечным числом шаров из этой совокупности.

Построенное покрытие обозначим просто $\{U_i\}_{i \in I}$. Обозначим, далее, через $F(I)$ множество всех конечных подмножеств множества I. Для каждого элемента $J \in F(I)$ положим

$$U_J = \bigcap_{i \in J} U_i \cap \Big(X \setminus \bigcup_{j \notin J} U_j\Big).$$

Очевидно, что

$$U_i \cap \Big(X \setminus \bigcup_{j \notin J} U_j\Big) = \bigcap_{j \notin J} (U_i \setminus U_j), \quad i \in J \ (J \neq \varnothing).$$

В правой части лишь для конечного числа членов $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. Каждое множество вида $U_i \setminus U_j$ открыто и компактно; следовательно, и множество $U_i \cap \cap \Big(X \setminus \bigcup_{j \in J} U_j\Big)$, будучи пересечением конечного числа множеств $U_i \setminus U_j$, также открыто и компактно. Из всего сказанного следует, что каждое множество U_J (если оно непусто) является открытым компактным подмножеством шара и потому представимо в виде несвязного объединения шаров. Остается заметить, что множества U_J, $J \in F(I)$, по построению попарно не пересекаются. Теорема доказана.

Теорема 2. *Обозначим через q число элементов поля вычетов k_v. Предположим, что многообразие X компактно, непусто и имеет во всех точках одинаковую размерность $n \geqslant 1$. Тогда*

(1) *X есть несвязное объединение конечного числа шаров;*

(2) *число шаров, участвующих в представлении пространства X в виде несвязного объединения, имеет вычет по модулю $(q-1)$, не зависящий от выбора этого представления.*

(Следовательно, такое многообразие X определяется, с точностью до изоморфизма, элементом кольца $\mathbf{Z}/(q-1)\mathbf{Z}$.)

Набросок доказательства. Утверждение (1) есть очевидное следствие компактности многообразия X и теоремы 1.

Что касается утверждения (2), то сначала мы осуществим ряд несложных редукций, которые сведут нашу теорему к некоторому частному случаю. Все проводимые редукции основываются на следующем замечании: любой шар можно разбить на q^i шаров, где i — целое положительное число, не изменив вычета числа шаров по модулю $q-1$.

Итак, пусть X представлено двумя способами в виде конечных несвязных объединений шаров $\{U_i\}_{i \in I}$ и $\{V_j\}_{j \in J}$. Мы должны показать, что $\mathrm{Card}(I) \equiv \mathrm{Card}(J) \pmod{(q-1)}$.

Шаг 1. Редукция к случаю, когда покрытие $\{U_i\}_{i \in I}$ вписано в покрытие $\{V_j\}_{j \in J}$.

Шаг 2. Редукция к случаю $X = V_j$ и $J = \{j\}$. После этого шага ситуация такова:

а) X — шар в пространстве k^n;

б) U_i — шар в пространстве k^n, $i \in I$;

в) существует набор аналитических изоморфизмов φ_i: $U_i \to X$, $j \in I$, таких, что X есть несвязное объединение множеств $\{\varphi_i U_i\}$.

Шаг 3. Редукция к случаю, когда все отображения φ_i задаются сходящимися степенными рядами.

Шаг 4. Редукция к случаю $\varphi_i = L_i \circ \psi_i$, где L_i — линейный изоморфизм, а ψ_i — аналитический изоморфизм шара на шар. После этого шага мы можем считать, что $\varphi_i = L_i$.

Шаг 5. Чуть ниже мы докажем следующее утверждение. Пусть U — шар в пространстве k^n и L — линейный изоморфизм. Тогда существует такое число r $(r > 0)$, что

1) LU есть несвязное объединение шаров радиуса s, где s — любое положительное число, не превышающее r;

2) число шаров, участвующих в любом таком разложении, равно степени q.

Посмотрим, как из этого утверждения вытекает наша теорема. Пользуясь конечностью множества I и приведенным выше утверждением, мы можем выбрать такое положительное число r, что все множества $L_i U_i$ представляются как несвязные объединения шаров радиуса r. Число шаров, участвующих в разбиении каждого множества $L_i U_i$, равно q^{m_i}, а число шаров в разбиении всего пространства X (т. е. общее число шаров) равно q^m. Итак,

$$1 \equiv q^m = \sum_{i \in I} q^{m_i} \equiv \sum_{i \in I} 1 = \operatorname{Card}(I) \ (\operatorname{mod}(q-1)),$$

что и доказывает теорему в этом частном случае.

Нам осталось установить справедливость сформулированного выше утверждения. Отметим прежде всего, что число смежных классов по идеалу $\mathfrak{m}_v^\mu$, $\mu \in \mathbf{Z}$, $\mu > 0$ (т. е. число всевозможных сдвигов этого идеала) конечно и равно $\operatorname{Card}(A_v/\mathfrak{m}_v^\mu) = q^\mu$.

Производя подходящие сдвиги и гомотетии, мы можем считать, что центром шара U служит точка 0, $U \subset A_v^n$ и $L \in GL(n, A_v)$, при этом, очевидно, $LU \subset A_v^n$. Используя неархимедовость поля k, легко усмотреть, что шар U, а вместе с ним и множество LU являются

A_v-подмодулями модуля A_v^n. Обозначим через h' число $\operatorname{Card}(A_v^n/LU)$. Это число конечно, так как $h' = \operatorname{Card}(A_v^n/U)$, а пространство A_v^n компактно. Мы видим, таким образом, что множество A_v^n есть несвязное объединение сдвигов подмножества LU.

В силу леммы 2 существует положительное число r, удовлетворяющее требованию 1) нашего утверждения. Докажем, что выполняется и требование 2).

Возьмем любое положительное число $s \leqslant r$ и представим LU в виде несвязного объединения шаров радиуса s; число их обозначим через h. Используя представления A_v^n в виде несвязного объединения сдвигов множества LU, разобьем A_v^n на hh' непересекающихся шаров радиуса s. Мы должны показать, что целое число h имеет вид q^m, где $m \in \mathbf{Z}$ и $m \geqslant 0$. Для этого достаточно установить, что таким свойством обладают числа h' и hh'.

Относительно h' это очевидно. Действительно, $h' = \operatorname{Card}(A_v^n/LU)$, но A_v^n/LU — периодический модуль над кольцом главных идеалов A_v и, следовательно, разлагается в прямое произведение модулей вида $A_v/\mathfrak{m}_v^\mu$. Из числа построенных выше шаров радиуса s выберем тот шар, который содержит точку 0; он, очевидно, имеет вид $(\mathfrak{m}_v^\mu)^n$. Следовательно, $hh' = \operatorname{Card}(A_v^n/(\mathfrak{m}_v^\mu)^n) = (q^\mu)^n$, что и требовалось доказать.

Замечание. Другое доказательство теоремы 2 (использующее аппарат интегрирования дифференциальных форм) читатель сможет прочесть в новом выпуске журнала „Topology“[1]).

Добавление 3

ТРАНСФИНИТНАЯ p-АДИЧЕСКАЯ ПРЯМАЯ

В связи с теоремой 1 стоит заметить, что существуют непаракомпактные хаусдорфовы многообразия над локально компактным неархимедовым полем k.

---

[1]) См. Серр [1]. — *Прим. перев.*

Мы приведем здесь пример такого многообразия, принадлежащий Бергману.

Мы построим индуктивную систему пространств $\{X_\gamma\}$, индексы которой пробегают первое несчетное (вполне упорядоченное) множество. Индуктивный предел $\varinjlim X_\gamma$ даст нам искомое непаракомпактное многообразие.

В качестве многообразия X_γ мы возьмем экземпляр кольца нормирования A_v поля k. Отображения $X_\delta \to X_\gamma$ для $\delta < \gamma$ мы определим трансфинитной индукцией по γ.

Выберем фиксированный простой элемент π кольца A_v.

1°. $\gamma = 0$. Условие $\delta < \gamma$ в этом случае бессодержательно.

2°. $\gamma = \gamma' + 1$, где γ' — некоторое порядковое число. Отображение $X_{\gamma'} \to X_\gamma$ есть по определению умножение на элемент π. Для производных индексов $\delta < \gamma$ определим отображение $X_\delta \to X_\gamma$ как композицию $X_\delta \to X_{\gamma'} \to X_\gamma$.

3°. γ — предельное порядковое число.

Пусть $Y_\gamma = \varinjlim_{\delta < \gamma} X_\delta$. Пространство Y_γ есть объединение счетного семейства открытых, компактных подпространств X_δ $(\delta < \gamma)$; в частности, пространство Y_γ паракомпактно. По теореме 1 оно есть несвязное объединение шаров. Число этих шаров обязательно должно быть счетным, так как несвязное объединение всегда локально конечно, а в любом локально конечном покрытии лишь конечное число элементов этого покрытия может пересекаться с заданным множеством X_γ. Поскольку пространство $A \setminus \{0\}$ также может быть представлено в виде объединения счетного числа шаров, существует аналитический изоморфизм φ_γ: $Y_\gamma \to A \setminus \{0\}$. Определим для $\delta < \gamma$ отображение $X_\delta \to X_\gamma$ как композицию отображений

$$X_\delta \to Y_\gamma \xrightarrow{\varphi_\gamma} A \setminus \{0\} \subset A = X_\gamma.$$

Таким образом, дано полное индуктивное определение отображений $X_\delta \to X_\gamma$ $(\delta < \gamma)$.

Многообразие $X = \varinjlim X_\gamma$ обладает следующими основными свойствами.

1) *Любое счетное семейство* $\{K_n\}$ *компактных подмножест пространства* X *содержится в некотором компактном множестве.*

2) *Пространство* X *некомпактно.*

Доказательство.

1) Поскольку $K_n = \bigcup_\gamma (K_n \cap X_\gamma)$ и поскольку множество X_γ открыто в X, существует номер γ_n, такой, что $K_n \subset X_{\gamma_n}$. Выбрав индекс γ таким образом, чтобы $\gamma_n \leqslant \gamma$ для всех n, мы видим, что $K_n \subset X_\gamma$, а множество X_γ компактно.

2) Некомпактность пространства X очевидна, так как $X_\gamma \neq X$ для любого индекса γ.

Мы предоставляем читателю доказать, что локальное компактное пространство X, обладающее свойствами 1) и 2), не является паракомпактным.

Глава IV

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Как и прежде, k — поле, полное относительно некоторого нетривиального абсолютного значения.

§ 1. Определение аналитической группы

Пусть множество G наделено одновременно структурой топологической группы и структурой аналитического многообразия (над полем k). Мы будем называть G *аналитической группой* или *группой Ли* (над полем k), если

(1) отображение $G \times G \to G$, задаваемое правилом $(x, y) \mapsto xy$, является морфизмом;

(2) отображение $G \to G$, задаваемое правилом $x \mapsto x^{-1}$, является морфизмом

Замечание 1. *Предположим, что G — аналитическая группа. Тогда*

(а) *пространство G хаусдорфово*;

(б) *пространство G метризуемо*;

(в) *пространство G является полным относительно левой и правой равномерных структур.*

Доказательство.

(а) Известно (см., например, Бурбаки [4*], гл. 3, § 1, п. 2), что пространство топологической группы хаусдорфово тогда и только тогда, когда пересечение всех окрестностей единицы e равно $\{e\}$. В нашем случае это условие выполняется, поскольку пространство G локально изоморфно открытой области в пространстве k^n.

(б) Очевидно, что e обладает счетной фундаментальной системой окрестностей. Метризуемость группы

Ли G есть следствие этого факта и хаусдорфовости пространства G (см. Бурбаки [4*], гл. 9, § 3, п. 1).

(в) Достаточно доказать утверждение только для правой равномерной структуры. Для этого достаточно показать, что единица группы G обладает окрестностью V, полной относительно индуцированной равномерной структуры (см. Бурбаки [4*], гл. 3, § 3, п. 3). Пусть (U, φ, n) — некоторая карта в точке e, причем $\varphi(e)=0$. Выберем такую окрестность V_1 элемента e, что $V_1 \cdot V_1 \subset U$. Закон композиции индуцирует (посредством φ) аналитическое отображение

$$F\colon \varphi(V_1)\times\varphi(V_1)\to\varphi(U).$$

Ясно, что $F(\bar{y}, 0)-F(0, 0)=\bar{y}-0=\bar{y}$, где $\bar{y}\in\varphi(V_1)$. Поскольку отображение F аналитично, мы можем найти такую замкнутую окрестность $V\subset V_1$ точки e, что

$$\frac{1}{2}|\bar{y}|\leqslant|F(\bar{y}, \bar{x})-F(0, \bar{x})|\leqslant 2|y|$$

для всех пар $(\bar{y}, \bar{x})\in\varphi(V)\times\varphi(V)$. На множестве V возникает кроме первоначальной еще одна равномерная структура, индуцированная (посредством φ) аддитивной структурой линейного пространства k^n. Мы докажем полноту нашей окрестности V, установив согласованность обеих структур. По определению фундаментальную систему окружений правой равномерной структуры пространства V образуют множества $V_W\subset V\times V$, где

1°. W — окрестность точки e, причем $W\subset V$ и $\varphi(W)$ — шар радиуса ε с центром в точке 0;

2°. $V_W=\{(w\cdot x, x)\in V\times V \mid x\in V,\ w\in W,\ wx\in V\}$.

С другой стороны, множества

$$N_\delta=\{(\bar{y}, \bar{x})\in\varphi(V)\times\varphi(V) \mid |\bar{y}-\bar{x}|<\delta\}\quad(\delta>0)$$

образуют фундаментальную систему окружений пространства $\varphi(V)$ относительно равномерной структуры, индуцированной аддитивной структурой линейного пространства k^n. Приведенное выше неравенство означает, что

$$N_{\frac{\varepsilon}{2}}\subset(\varphi\times\psi)V_W\subset N_{2\varepsilon}.$$

Таким образом, мы показали, что две рассматриваемые равномерные структуры пространства V согласованы. Тем самым наше утверждение полностью доказано, поскольку равномерная структура, индуцированная линейным пространством k^n, является полной, а множество V замкнуто.

Примечание. Таким образом, установлено, что левые и правые равномерные структуры локально согласованы с равномерными структурами, индуцированными картами многообразия G.

Замечание 2. Об аксиомах аналитической группы.

(а) *Из аксиомы* (1) *следует, что отображение* $y \longmapsto xy$ *при фиксированном* $x \in G$ *есть изоморфизм относительно аналитической структуры многообразия* G.

(б) *Аксиома* (2) *есть следствие аксиомы* (1).

(в) *Из аксиомы* (2) *вытекает, что отображение* $x \longmapsto x^{-1}$ *есть изоморфизм*.

Доказательство. Обозначим через $\varphi: G \times G \to G$ закон композиции группы G, через $\varphi_x: G \to G$ — отображение, задаваемое формулой $\varphi_x(y) = \varphi(x, y)$, и через $\psi: G \to G$ — отображение $x \longmapsto x^{-1}$. Пусть $T^1\varphi$ и $T^2\varphi$ — первая и вторая частные производные морфизма φ (см. гл. 3, § 8).

Утверждение (а) почти очевидно. Действительно, отображение φ_x является морфизмом, поскольку оно является композицией морфизма $y \longmapsto (x, y)$ и морфизма φ. Далее, обратным к этому отображению является морфизм $\varphi_{x^{-1}}$. Заметим, кстати, что линейное отображение $T_y\varphi_x: T_yG \to T_{xy}G$ естественным образом отождествляется с отображением $T^2_{(x, y)}: T_yG \to T_{xy}G$. Отсюда, в частности, вытекает, что вторая производная $T^2\varphi$ является изоморфизмом.

Утверждение (б) доказывается следующим образом. Рассмотрим морфизм $\theta: G \times G \to G \times G$, задаваемый формулой $\theta(x, y) = (x, xy) = (x, \varphi(x, y))$. Отображение θ, как нетрудно видеть, является наложением [1]).

[1]) В категории групп Ли *наложение* совпадает с *накрытием*. — *Прим. перев.*

Действительно, в любой точке (x, y) касательное отображение $T(\theta)$ — изоморфизм, поскольку

$$T(\theta)=\begin{pmatrix} T\mathrm{id}_G & 0 \\ T^1\varphi & T^2\varphi \end{pmatrix}.$$

Пусть $\sigma=\theta^{-1}$. Тогда $\sigma(x, e)=(x, x^{-1})=(x, \psi(x))$ для всех $x\in G$, и, следовательно, отображение ψ является морфизмом.

Утверждение (в) вытекает из соотношения $\psi^2=\mathrm{id}_G$, которое означает, что $\psi^{-1}=\psi$.

§ 2. Простейшие примеры аналитических групп

1. Полные линейные группы. Пусть R — некоторая ассоциативная k-алгебра с единицей, имеющая над k конечную размерность. *Полной линейной* [1]) группой над R называется группа $G_m(R)$ обратимых элементов алгебры R. Мы утверждаем, что $G_m(R)$ — во-первых, аналитическая группа, а во-вторых, открытое подмножество в R. Для доказательства последнего нам достаточно установить, что множество $G_m(R)$ содержит некоторую окрестность единицы в пространстве R. Но в этом пространстве существует такая окрестность U точки 0, что ряд $\sum x^n$ сходится для всех точек $x\in U$. Очевидно, множество $V=\{1-x \mid x\in U\}$ является окрестностью единицы и лежит в $G_m(R)$.

Осталось установить, что группа $G_m(R)$ относительно индуцированной топологии аналитична. Для этого нужно показать, что закон композиции $G_m(R)\times G_m(R)\to \to G_m(R)$ есть аналитическое отображение. Но это очевидно, так как в алгебре R умножение билинейно.

В том частном случае, когда R — кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}\, V$ конечномерного векторного пространства V над полем k, группа $G_m(R)$ называется *полной линейной группой пространства* V и обозначается

---

[1]) В оригинале „general linear group“. — *Прим. перев.*

$GL(V)$. Если $V = k^n$, мы будем писать $GL(n, k)$ вместо $GL(V)$. Каждому элементу $\alpha \in GL(n, k)$ соответствует квадратная обратимая матрица n-го порядка. Поэтому группу $GL(n, k)$ называют также *полной линейной группой матриц n-го порядка над k.*

Предположим, что поле k неархимедово; обозначим через A его кольцо нормирования. Пусть $\alpha = (\alpha_{ij}) \in GL(n, k)$. Следующие условия эквивалентны:

1) матрица α определяет автоморфизм пространства A^n;

2) (а) коэффициенты α_{ij} лежат в кольце A;

(б) определитель матрицы α — обратимый элемент кольца A.

Множество всех матриц $\alpha \in GL(n, k)$, удовлетворяющих этим условиям, обозначим $GL(n, A)$. В силу условия 2) множество $GL(n, A)$ открыто и замкнуто в множестве всех матриц с коэффициентами в A. Следовательно, это множество является также открытым и замкнутым в пространстве $\mathrm{End}(k^n)$. Согласно условию 1), множество $GL(n, A)$ образует группу. Ввиду сказанного выше эта группа аналитична. Мы будем называть ее *полной линейной группой матриц порядка n над A.*

Предположим теперь дополнительно, что поле k локально компактно. В этом случае $GL(n, A)$ — открытая компактная подгруппа группы $GL(n, k)$. В добавлении 1 нами будет доказана следующая

Теорема. *Группа $GL(n, A)$ — максимальная компактная подгруппа группы $GL(n, k)$. Всякая другая максимальная компактная подгруппа этой группы сопряжена с $GL(n, A)$.*

2. Индуцированные аналитические группы. Пусть G — аналитическая группа, H — топологическая группа и $i: H \to G$ — непрерывный гомоморфизм. Предположим, что пара (H, i) удовлетворяет условию (Im) (см. гл. 3, § 11). Группа H является многообразием с индуцированной структурой. Мы утверждаем, что H — аналитическая группа (относительно этой структуры). В самом деле, пусть φ_G и φ_H — законы композиции в группах G и H соответственно. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H \times H & \xrightarrow{\varphi_H} & H \\ {\scriptstyle i\times i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ G \times G & \xrightarrow{\varphi_G} & G \end{array}$$

очевидно, коммутативна. Композиция $\varphi_G \circ (i \times i)$ — морфизм, а следовательно, и отображение φ_H — тоже морфизм, поскольку морфизм i регулярен. Аналитичность отображения φ_H, как отмечалось выше, выражает в точности тот факт, что H — аналитическая группа.

Замечания. 1. Проверку того, что пара (H, i) удовлетворяет условию (Im), достаточно проделать только в одной точке e_H (единице группы H). В самом деле, пусть условие (Im) выполнено в e_H. Рассмотрим произвольный элемент $h \in H$ и его образ $g = i(h)$. Введем два отображения φ: $H \to H$ и ψ: $G \to G$, положив $\varphi(x) = h^{-1} \cdot x$ и $\psi(y) = g \cdot y$. Очевидно, $\varphi(h) = e_H$, $\varphi(e_G) = g$ и $i = \psi \circ i \circ \varphi$. Далее, композиция $\psi \circ i$ удовлетворяет условию (Im) в точке e_H, так как ψ — аналитический изоморфизм, а отображение i удовлетворяет условию (Im) в точке e_H. Но поскольку φ — гомеоморфизм, отображение i удовлетворяет условию (Im) также в точке h.

2. Как мы знаем, пара (H, i) удовлетворяет условию (Im), если i — локальный гомеоморфизм (см. гл. 3, § 11). Если, кроме того, i — эпиморфизм, причем $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то мы говорим, что группа H *накрывает* группу G.

3. Подгруппы Ли [1]. Пусть заданы аналитическая группа G и ее подгруппа H, которая в то же время является подмногообразием группы G. Вложение

---

[1]) В оригинале „group submanifolds". Заметим, что в отечественной литературе по теории групп Ли подгруппами Ли часто называют аналитические группы, индуцированные мономорфизмами, в смысле автора (см. выше). — *Прим. ред.*

i: $H \to G$ есть регулярный гомоморфизм. В силу п. 2 H — аналитическая группа. В такой ситуации мы будем говорить, что *H — подгруппа Ли* группы G.

Замечание. Подгруппа Ли является замкнутым подмножеством объемлющей аналитической группы. Для доказательства этого факта достаточно учесть два хорошо известных факта:

а) любое подмногообразие локально замкнуто в объемлющем многообразии;

б) локально замкнутая подгруппа топологической группы всегда замкнута (см., например, Бурбаки [4], гл. 3, § 2, п. 1, предложение 4).

§ 3. Локальные группы[1])

Топологической локальной группой называется топологическое пространство X, снабженное отмеченным элементом $e \in X$, открытой окрестностью $U \subset X$ этого элемента и парой отображений φ: $U \times U \to X$ и ψ: $U \to U$, таких, что

(1) в некоторой окрестности $V_1 \subset U$ точки e выполняется тождество $x = \varphi(x, e) = \varphi(e, x)$;

(2) в некоторой окрестности $V_2 \subset U$ точки e выполняется тождество $e = \varphi(x, \psi(x)) = \varphi(\psi(x), x)$;

(3) для некоторой окрестности $V_3 \subset U$ точки e выполняется включение $\varphi(V_3 \times V_3) \subset U$, причем $\varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(\varphi(x, y), z)$, где x, y, z — любые элементы окрестности V_3.

Мы будем говорить о *строгой локальной группе*, если равенства (1), (2), (3) имеют место всякий раз, когда определены обе их части.

Сузив окрестность U, мы всегда можем локальную группу превратить в строгую локальную группу.

В дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, мы часто будем писать xy и x^{-1} вместо $\varphi(x, y)$ и $\psi(x)$ соответственно.

Пусть X и Y — две локальные группы. *Локальным гомоморфизмом* f: $X \dashrightarrow Y$ называется непрерывное

---

[1]) В оригинале „group chanks". — *Прим. ред.*

отображение f: $U \to Y$, где U — окрестность точки e_X, такое, что $f(e_X) = e_Y$ и $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ в некоторой окрестности единицы e_X.

Два локальных гомоморфизма f, f': $X \dashrightarrow Y$ назовем *эквивалентными*, если они совпадают в некоторой окрестности точки e_X.

Две локальные группы X и Y называются *эквивалентными*, если существуют такие локальные гомоморфизмы f: $X \dashrightarrow Y$ и g: $X \dashrightarrow X$, что произведения $f \circ g$ и $g \circ f$ эквивалентны тождественным отображениям id_Y и id_X соответственно.

Аналогичные определения можно дать в аналитическом случае. Для этого надо все пространства считать многообразиями, а все отображения — морфизмами.

Пример. Пусть G — топологическая группа и X — открытая окрестность единицы e с очевидной структурой локальной группы. Локальная группа X эквивалентна топологической группе G.

Может возникнуть вопрос: всякая ли локальная группа эквивалентна топологической группе? Положительный ответ можно дать для двух типов локальных групп: для конечномерных аналитических и для метризуемых локально компактных (см. Якоби [1]). Однако ответ отрицателен в случае банаховых локальных аналитических групп (см. Эст и Кортхаген [1]).

§ 4. Продолжение локальных подгрупп

Пусть G — топологическая группа и X — некоторое ее подмножество, содержащее единицу e. Мы скажем, что X — *локальная подгруппа* группы G, если у точки e найдется такая окрестность U в X, что $xy \in X$ и $x^{-1} \in X$ для любых элементов x, $y \in U$.

Пусть X — локальная подгруппа группы G. Рассмотрим множество N всех элементов $g \in G$, для каждого из которых существует такая окрестность U точки e, что $U \cap X = U \cap g^{-1}Xg$. Ясно, что N — подгруппа группы G, содержащая некоторую окрестность единицы (пространства X).

Обозначим через $i\colon N \to G$ гомоморфизм вложения.

Теорема 4.1. *Пусть* $F = \{U \cap N \mid U$ — *окрестность точки* e *в* $X\}$. *Тогда*

(1) $\mathcal{F}$ *удовлетворяет аксиомам базы фильтра окрестностей единицы, согласованной с групповой структурой в множестве* N;

(2) *относительно топологии, которую* $\mathcal{F}$ *определяет в* N, *отображение* i *непрерывно; оно устанавливает эквивалентность локальных групп* N *и* X.

Доказательство.

(1) Проверим аксиомы (GV'_I), (GV'_{II}), (GV'_{III}) (см. Бурбаки [4*], гл. 3, § 1, п. 2).

Выше было замечено, что некоторая окрестность пространства X содержится в N. Мы можем поэтому считать, что все рассматриваемые окрестности единицы пространства X лежат в N. Возьмем произвольную окрестность $U \in \mathcal{F}$. Мы должны доказать следующие три свойства:

а) существует окрестность $V \in \mathcal{F}$, такая, что $V \cdot V \subset U$;

б) существует окрестность $V \in \mathcal{F}$, такая, что $V^{-1} \subset U$;

в) для любого элемента $g \in N$ найдется окрестность $V \in \mathcal{F}$, такая, что $V \subset gUg^{-1}$.

Первые два утверждения суть очевидные следствия того факта, что отображения $(x, y) \mapsto x \cdot y$ и $x \mapsto x^{-1}$ непрерывны в G, а следовательно, и в X. Утверждение в) вытекает из определения множества N.

(2) По определению топологии в группе N отображение i является локальным гомеоморфизмом пространств N и X в окрестности точки e. В частности, отображение $i\colon N \to G$ непрерывно в единице, а значит, и всюду (см. Бурбаки [4'], гл. 3, § 2, п. 8).

Теорема доказана.

В качестве следствия доказанной теоремы получаем, что любая локальная подгруппа эквивалентна топологической группе.

Замечание. Отображение $i: N \to i(N)$, вообще говоря, не является гомеоморфизмом. Например, если $X = \{e\}$, то N есть G с дискретной топологией.

Предположим теперь, что G — аналитическая группа и X — ее локальная аналитическая подгруппа. Поскольку X — подмногообразие в G, а N и X локально гомеоморфны в единице e_N, пара (N, i) удовлетворяет условию (Im) в точке e_N, а значит, и всюду (см. § 2, п. 2).

Замечание. Таким образом, группа N однозначно наделяется структурой аналитической группы, относительно которой вложение i становится регулярным морфизмом. В частности, локальные аналитические группы N и X эквивалентны.

Рассмотрим более подробно случай архимедовых полей: $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

В этом случае N локально связна, так что связная компонента H единицы в N является открытой и замкнутой подгруппой Ли группы N. Мы будем говорить, что H — *аналитическая группа, порожденная локальной подгруппой* X. Предположим, что образ $i(H)$ замкнут в G. Мы утверждаем, что отображение i в этом случае является гомеоморфизмом, т. е. на самом деле H — это подгруппа Ли группы G. Действительно, множество $i(H)$ замкнуто в G и потому является пространством Бэра. Далее, группа H локально компактна и связна и, следовательно, представима в виде объединения счетного числа компактов. Наше утверждение свелось, таким образом, к следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть A и B — две топологические группы. Предположим, что*

(1) *группа A локально компактна и представима в виде объединения счетного числа компактов;*

(2) *группа B — пространство Бэра;*

(3) *$i: A \to B$ — непрерывный изоморфизм.*

Тогда i является гомеоморфизмом.

Лемма 1 вытекает в свою очередь из следующей леммы.

Лемма 2. *Предположим, что*

(1) *A — локально компактная топологическая группа, представимая в виде объединения счетного числа компактов;*

(2) *B — пространство Бэра;*

(3) *группа A транзитивно и непрерывно действует на B (обозначим это действие через φ: $A \times B \to B$).*

Тогда для каждого элемента $b \in B$ отображение φ индуцирует гомеоморфизм факторпространства A/N_b на B, где N_b — стационарная подгруппа точки b (т. е.

$$N_b = \{x \in A \mid \varphi(x, b) = b\}).$$

Доказательство. См. Бурбаки [5], Ch. 7, app. 1).

§ 5. Однородные пространства и орбиты

Пусть G — группа Ли и H — ее подгруппа Ли. Рассмотрим пространство левых смежных классов G/H. Оно определяется как факторпространство группы G по отношению эквивалентности

$$R = \{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1}y \in H\}.$$

Теорема 1. *Отношение эквивалентности R регулярно. Таким образом, пространство G/H однозначно наделяется структурой аналитического многообразия, относительно которой каноническое отображение π: $G \to G/H$ является корегулярным морфизмом.*

Доказательство. Согласно теореме 3.12.2, мы должны проверить, что

1) R — подмногообразие в $G \times G$;

2) проекция pr_2: $R \to G$ — корегулярный морфизм.

Для доказательства первого утверждения рассмотрим отображение p: $G \times G \to G$, определенное формулой $p(x, y) = x^{-1}y$. Очевидно, $R = p^{-1}H$. Ввиду теоремы 3.11.4 нам достаточно показать, что морфизм p корегулярен во всех точках. Пусть $(x, y) \in G \times G$. Введем морфизм φ: $G \to G \times G$, определяемый формулой $\varphi(z)=(x, xz)$. Как видно из определения, $\varphi(x^{-1}y)=(x, y)$ и $p\circ\varphi=\mathrm{id}_G$. Следовательно, морфизм p корегулярен в точке (x, y) (см. гл. III, § 10).

Для доказательства второго утверждения рассмотрим композицию морфизмов

$$G\times H\xrightarrow{\psi}R\xrightarrow{\mathrm{pr}_2}G,$$

где $\psi(x, h)=(xh, x)$. Очевидно, $\mathrm{pr}_2\circ\psi$ есть просто проекция $G\times H\to G$, которая, конечно, является корегулярным морфизмом. Но тогда морфизм pr_2 тоже корегулярен, поскольку ψ отображает $G\times H$ на все R.

Теорема доказана.

Замечания. 1. Каноническое действие группы G на пространстве G/H аналитично. В самом деле, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_G\times\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ G\times G/H & \to & G/H \end{array}$$

Оба вертикальных отображения этой диаграммы корегулярны, а верхнее отображение аналитично. Отсюда следует аналитичность нижнего отображения.

2. Предположим дополнительно, что H — нормальный делитель группы G. В этом случае G/H — аналитическая группа. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ {\scriptstyle \pi\times\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ G/H\times G/H & \to & G/H \end{array}$$

из которой следует аналитичность отображения $G/H\times G/H\to G/H$.

Пусть G — группа Ли, X — аналитическое многообразие и φ: $G\times X\to X$ — некоторый морфизм. Мы скажем, что группа G *действует на* X *посредством* φ, если

(1) $\varphi(e, x) = x$ для всех $x \in X$;

(2) $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x)$ для всех $x \in X$ и всех $g, h \in G$.

(В подобной ситуации мы часто будем писать $g(x)$ вместо $\varphi(g, x)$.)

Введем для удобства следующие морфизмы:

$$L_g\colon G \to G, \quad h \longmapsto gh \qquad (g \in G);$$
$$M_g\colon G \to G, \quad x \longmapsto gx \qquad (g \in G);$$
$$\varphi_x\colon G \to X, \quad g \longmapsto gx \qquad (x \in X).$$

Очевидно, L_g и M_g — аналитические изоморфизмы, причем $\varphi_x = M_g \circ \varphi_x \circ L_{g^{-1}}$.

Воспользовавшись последним соотношением, можно сформулировать следующий принцип однородности.

(ПО) *Пусть P — некоторое локальное свойство. Тогда φ_x обладает свойством P в том и только в том случае, если φ_x обладает этим свойством (хотя бы) в одной точке группы G.*

Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и обозначим через H стационарную подгруппу этой точки:

$$H = \{h \in G \mid hx_0 = x_0\}.$$

Далее, условимся вместо φ_{x_0} писать просто φ_0.

Теорема 2. *Предположим, что φ_0 — локально линейный морфизм. Тогда*

(1) *H — подгруппа Ли группы G;*

(2) *индуцированное отображение $\bar{\varphi}_0\colon G/H \to X$ — регулярный морфизм.*

Доказательство. Первое свойство вытекает из определения локально линейного морфизма и теоремы 3.11.4. В силу той же теоремы $\operatorname{Ker} T_g\varphi_0 = T_g(gH)$.

Отсюда ясно, что отображение $T_{\pi g}\bar{\varphi}_0$ инъективно и, следовательно, $\bar{\varphi}_0$ — регулярный морфизм.

Следствие. *Пусть $\psi\colon G_1 \to G_2$ — гомоморфизм аналитических групп, и пусть $K = \operatorname{Ker}\psi$. Тогда если отображение ψ локально линейно, то*

(1) *K — подгруппа Ли группы G;*

(2) *индуцированный гомоморфизм аналитических групп* ψ: $G_1/K \to G_2$ *регулярен.*

Теорема 3. *Если поле k имеет нулевую характеристику, то морфизм* φ_0 *локально линеен.*

Доказательство. Выберем точку $g_0 \in G$, в которой ранг n касательного отображения $T\varphi_0$ максимален. Очевидно, ранг отображения $T\varphi_0$ равен n и в некоторой окрестности точки g_0. Сформулируем теперь следующее свойство (P_g) точки $g \in G$:

(P_g) существует окрестность U точки g, такая, что во всех ее точках ранг отображения $T\varphi_0$ равен n.

Свойство (P_g) локально и выполняется в точке $g = g_0$. Согласно принципу однородности, свойство (P_g) справедливо для всех точек $g \in G$. Иными словами, ранг морфизма есть величина постоянная, и по теореме 3.10.3 морфизм локально линеен, поскольку характеристика поля k равна нулю.

Теорема 4. *Предположим, что группа Ли G локально компактна и представима в виде объединения счетного числа компактов, а также что множество* $\varphi_0(G) = Gx_0$ *локально замкнуто в* X. *Тогда*

(1) *индуцированное отображение* $\bar{\varphi}_0$: $G/H \to Gx_0$ — *гомеоморфизм;*

(2) *если морфизм* φ_0 *локально линеен, то* Gx_0 — *подмногообразие в* X *и* $\bar{\varphi}_0$ — *аналитический изоморфизм.*

Для доказательства достаточно применить лемму 4.2.

Следствие. *Пусть характеристика поля k равна нулю. Множество Gx_0 является подмногообразием в X тогда и только тогда, когда Gx_0 локально замкнуто в X.*

Приступим теперь к изучению главных расслоений со структурной группой G. Мы будем предполагать, что

1° отображения φ_x взаимно однозначны и регулярны для всех $x \in X$;

2° заданы аналитическое многообразие B и морфизм ψ многообразия X на B, такие, что $\psi(X) = B$ и $Gx = \psi^{-1}\psi(x)$ для всех $x \in X$.

Введем в множестве X отношение эквивалентности $R \subset X \times X$, полагая $(y, x) \in R$ в том и только в том случае, когда $y = gx$ для некоторого элемента $g \in G$. Отображение ψ индуцирует непрерывное взаимно однозначное отображение $\tilde{\psi}$ факторпространства X/R на многообразие B.

Систему (X, φ, G, ψ, B) будем называть *расслоением*, многообразие X — *расслоенным пространством* (или *пространством расслоения*), группу Ли G — *слоем*, а многообразие B — *базой*. Иногда для краткости мы будем писать вместо (X, φ, G, ψ, B) просто X.

Теорема 5. *Следующие свойства системы* (X, φ, G, ψ, B) *эквивалентны*:

(1) ψ — *корегулярный морфизм*;

(2) R — *регулярное отношение эквивалентности и* $\tilde{\psi}$ — *аналитический изоморфизм*;

(3) *для каждой точки* $b \in B$ *существуют такая ее окрестность* U_b *и такое аналитическое отображение* σ_b: $U_b \to \psi^{-1}(U_b)$, *что* $\psi \circ \sigma_b = \mathrm{id}_{U_b}$;

(4) *для каждой точки* $b \in B$ *существуют такая ее окрестность* U_b *и такой аналитический изоморфизм* θ_b: $G \times U_b \to \psi^{-1} U_b$, *что*

(4а) *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} G \times U_b & \xrightarrow{\theta_b} & \psi^{-1}(U_b) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ U_b & \xrightarrow{\mathrm{id}} & U_b \end{array}$$

коммутативна;

(4б) $\theta_b(gh, a) = g\theta_b(h, a)$ *для любых элементов* g, $h \in G$ *и* $a \in U_b$.

Доказательство. Равносильность первых двух свойств непосредственно вытекает из определений.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) также есть следствие определения корегулярного морфизма (см. гл. III, § 10, п. 5 теорема 3.10.2).

Докажем импликацию (3)$\Rightarrow$(4). Определим отображение θ_b: $G \times U_b \to \psi^{-1}(U_b)$ формулой $\theta_b(g, a) = g \circ \sigma_b(a)$. Отображение θ_b аналитично и отображает $G \times U_b$ взаимно однозначно на $\psi^{-1}(U_b)$. Легко видеть, что это отображение удовлетворяет условиям (4а) и (4б). Нам остается показать, что θ_b — аналитический изоморфизм. Для этого достаточно проверить, что θ_b является наложением в любой точке $(g, a) \in G \times U_b$. Пусть $x = \theta_b(g, a) = g \cdot \sigma_b(a)$ и $\sigma = M_g \circ \sigma_b = g \cdot \sigma_b$. Морфизм ψ корегулярен в точке x ввиду равенства $\psi \circ \sigma = \mathrm{id}_{U_b}$. Последнее равенство позволяет также усмотреть, что $T_a\sigma$ — мономорфизм и T_xX — прямая сумма пространств $\mathrm{Im}(T_a\varphi)$ и $\mathrm{Ker}(T_x\psi)$. Но так как $\psi^{-1}(a) = Gx$ и так как φ_x — регулярный морфизм, то $\mathrm{Ker}\, T_x\psi = T_x(Gx) = \mathrm{Im}(T_e\varphi_x)$. Заметим, наконец, что

$$T_{(g,\, a)}\theta_b = T_e\varphi_x \times T_a\sigma.$$

Суммируя все сказанное, заключаем, что $T_{(g,\, a)}\theta_b$ — изоморфизм.

Импликация (4)$\Rightarrow$(1) очевидна.

Определение. Предположим, что система (X, φ, G, ψ, B) удовлетворяет эквивалентным условиям предыдущей теоремы. В этом случае многообразие X будет называться *главным расслоенным пространством со структурной группой G и базой B*.

Замечание. Действие группы G на множестве X записывалось нами слева. Таким образом, определенный нами объект является *левым* главным расслоением. Аналогичные определения можно сформулировать для правого действия группы G.

Теорема 6. *Пусть G — группа Ли и H — ее подгруппа Ли. Рассмотрим канонический морфизм π: $G \to G/H$ и морфизм умножения φ: $G \times H \to G$. Относительно этих морфизмов группа G есть правое главное расслоенное пространство со структурной группой H и базой G/H.*

Это частный случай теоремы 5.

§ 6. Формальные группы. Определения и простейшие примеры

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей и $R[[X_1, \ldots, X_n]] = R[[X]]$ — кольцо формальных степенных рядов от n переменных. Пусть $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — еще один набор n переменных.

Определение. *Формальным групповым законом* (для n переменных) называется система $F = (F_i)$ из n формальных степенных рядов $F_i \in R[[X, Y]]$, таких, что

(1) $$F(X, 0) = X \quad \text{и} \quad F(0, Y) = Y;$$

(2) $$F(U, F(V, W)) = F(F(U, V), W).$$

Приведем некоторые примеры.

1. Аддитивная группа: $F_i(X, Y) = X_i + Y_i$.

2. Мультипликативная группа ($n = 1$): $F(X, Y) = X + Y + XY$. Отметим, что этот групповой закон получается из обычного закона умножения, если перенести 1 в 0:

$$(1 + X)(1 + Y) = 1 + X + Y + XY.$$

3. Частный случай группы Витта для простого числа p ($n = 2$):

$$F_1(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = X_1 + X_2,$$

$$F_2(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = X_2 + Y_2 + \frac{1}{p}(X_1^p + Y_1^p - (X_1 + Y_1)^p).$$

Укажем теперь некоторые элементарные свойства формальных групп.

(i) Каждый ряд F_i имеет вид

$$F_i(X, Y) = X_i + Y_i + \sum_{\substack{|\alpha| \geqslant 1 \\ |\beta| \geqslant 1}} c_{\alpha, \beta} X^\alpha Y^\beta.$$

Это легко вытекает из аксиомы 1 формальной группы.

(ii) Существует единственный набор $\varphi(X) = (\varphi_1(X), \ldots, \varphi_n(X))$, где $\varphi_i(X) \in R[[X]]$, такой, что $\varphi(0) = 0$ и

$$F(X, \varphi(X)) = 0 = F(\varphi(X), X).$$

Действительно, из того факта, что $D^2F(0) = \mathrm{id}_{R^n}$, следует существование единственного набора рядов $\varphi(X)$, для которого $\varphi(0) = 0$ и $F(X, \varphi(X)) = 0$ (см. Бурбаки [3*], гл. IV, § 5, п. 9). Аналогично существует единственный набор рядов $\psi(X)$, удовлетворяющий соотношению $F(\psi(X), X) = 0$. Но тогда

$$\psi(X) = F(\psi(X), 0) = F(\psi(X), F(X, \varphi(X))) = \\ = F(F(\psi(X), X), \varphi(X)) = F(0, \varphi(X)) = \varphi(X).$$

Замечание. Укажем теперь, где формальные группы могут представить интерес для нас. Имеются два важных случая:

1) $R = k$, где k — полное поле;

2) $R = A$, где A — кольцо нормирования полного неархимедова поля.

В первом случае мы определим естественный функтор

$$\text{Аналитические группы} \xrightarrow{T} \text{Алгебры Ли}$$

из категории аналитических групп в категорию алгебр Ли. Мы хотим далее определить функтор S из категории алгебр Ли в категорию аналитических групп, такой, что $T \circ S = \mathrm{id}$. Задача построения функтора S — это в точности задача построения аналитической группы с заданной алгеброй Ли. Нам будет полезно знать, что над полем нулевой характеристики категория формальных групп и категория алгебр Ли эквивалентны:

$$\text{Алгебры Ли} \longleftrightarrow \text{Формальные группы}$$

Изучение случая 2) окажется полезным при исследовании аналитических групп над полным неархимедовым полем k. При этом мы получим следующую коммутативную диаграмму функторов:

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix}\text{Аналитические}\\ \text{Группы над } k\end{matrix} \arrow[rr] & & \begin{matrix}\text{Формальные}\\ \text{Группы над } k\end{matrix} \arrow[dl, shift left] \\
& \begin{matrix}\text{Формальные}\\ \text{Группы над } A\end{matrix} \arrow[ul] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

Оказывается, что всякая аналитическая группа, рассматриваемая локально, есть в точности формальная группа над кольцом A.

§ 7. Формальные группы. Формулы

Мы будем использовать символ $o(d^0 \geqslant n)$ для обозначения формальных степенных рядов с нулевыми однородными компонентами степеней, строго меньших n. Символом $F(X, Y)$ мы, если не оговорено противное, будем обозначать формальный групповой закон над кольцом R.

1°. $F(X, Y) = X + Y + B(X, Y) + o(d^0 \geqslant 3)$, где B — билинейная форма. Это непосредственно следует из основного выражения для закона формальной группы (§ 6), поскольку коэффициенты $c_{\alpha, \beta}$ отличны от нуля только при $|\alpha|, |\beta| \geqslant 1$.

Положим

$$[X, Y] = B(X, Y) - B(Y, X).$$

2°. Пусть $\varphi(X)$ — обратная операция, соответствующая закону F. Тогда

$$\varphi(X) = -X + B(X, X) + o(d^0 \geqslant 2).$$

Действительно, запишем $\varphi(X)$ в виде

$$\varphi(X) = \varphi^1(X) + \varphi^2(X) + \ldots,$$

где $\varphi^i(X)$ — однородная компонента степени i. Имеем

$$0 = F(X, \varphi(X)) = X + \varphi^1(X) + o(d^0 \geqslant 2).$$

Следовательно, $\varphi^1(X) = -X$. Используя этот факт, получаем

$$0 = F(X, \varphi(X)) = X + (-X + \varphi^2(X) + \ldots) +$$
$$+ B(X, -X + \ldots) + \ldots = \varphi_2(X) - B(X, X) + o(d^0 \geqslant 3),$$

Следовательно, $\varphi^2(X) = B(X, X)$.

3°. $XYX^{-1} = Y + [X, Y] + o(d^0 \geqslant 3)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} XYX^{-1} &= (X + Y + B(X, Y) + \ldots) + \\ &+ (-X + B(X, X) + \ldots) + \\ &+ B(X + Y + \ldots, -X + \ldots) + \ldots \\ &= Y + [X, Y] + o(d^0 \geqslant 3). \end{aligned}$$

Введем (это пригодится впоследствии) обозначения[1]) для членов высшего порядка ряда XYX^{-1}. Именно: положим

$$XYX^{-1} = Y + [X, Y] + \sum d_{\alpha, \beta} X^\alpha Y^\beta,$$

где $|\alpha| \geqslant 1$, $|\beta| \geqslant 1$, $|\alpha| + |\beta| \geqslant 3$.

4°. $Y^{-1}XY = X + [X, Y] + o(d^0 \geqslant 3)$. Доказательство аналогично предыдущему.

5°. $X^{-1}Y^{-1}XY = [X, Y] + o(d^0 \geqslant 3)$.

Доказательство проводится так же, как и для формулы 3°, с использованием формулы 4°.

6°. *Тождество Якоби*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Для доказательства применим тождество Холла (см. часть I, гл. II, § 1):

$$(X^Y, (Y, Z))(Y^Z, (Z, X))(Z^X, (X, Y)) = 0.$$

Мы утверждаем, что

$$\begin{aligned} (X^Y, (Y, Z)) &= [X, [Y, Z]] + o(d^0 \geqslant 4), \\ (Y^Z, (Z, X)) &= [Y, [Z, X]] + o(d^0 \geqslant 4), \\ (Z^X, (X, Y)) &= [Z, [X, Y]] + o(d^0 \geqslant 4). \end{aligned}$$

В силу симметрии достаточно доказать, например, первую формулу. Для этого заметим, что

$$X^Y = X + o(d^0 \geqslant 2) \quad \text{(формула 4°)},$$

$$(Y, Z) = [Y, Z] + o(d^0 \geqslant 3) \quad \text{(формула 5°)}.$$

---

[1]) Далее автор часто будет употреблять выражение XY вместо $F(X, Y)$. В частности, $XYX^{-1} = F(F(X, Y), \varphi(X))$. — *Прим. перев.*

Следовательно, повторно применяя формулу 5°, получаем

$$(X^Y, (Y, Z)) = [X, [Y, Z]] + o(d^0 \geqslant 4).$$

Наконец, рассматривая тождество Холла с точностью до элементов третьего порядка, мы получаем тождество Якоби.

7°. *Возведение в m-ю степень.* Определим по индукции последовательность $\{f_m(X)\}$, полагая $f_0(X) = 0$ и $f_{m+1}(X) = F(X, f_m(X))$. Эти определения можно распространить на отрицательные m, полагая $f_m = \varphi \circ f_{-m}$ для $m < 0$. При этом первоначальное рекуррентное соотношение останется справедливым. Из индуктивных соображений вытекает, что

$$f_m(X) = mX + o(d^0 \geqslant 2).$$

Имеет место более общая

Теорема 1 (Лазар). *Существует и единственно семейство степенных рядов*

$$\psi_1(X) = (\psi_1^{(1)}(X), \ldots, \psi_1^{(m)}(X)),$$
$$\vdots$$
$$\psi_i(X) = (\psi_i^{(1)}(X), \ldots, \psi_i^{(n)}(X)),$$
$$\vdots$$

такое, что

(1) $\psi_1(X) = X$;

(2) *порядок* $\psi_i(X)$ *больше или равен* i;

(3) *для всех* $m \in \mathbf{Z}$

$$f_m(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{m}{i} \psi_i(X).$$

Доказательство. Единственность решения этой задачи легко вытекает из свойства (3), если применить его к натуральным числам $m = 1, 2, \ldots$ (заметим, что $\binom{m}{i} = 0$ для $m > i > 0$).

Для доказательства существования несколько видоизменим нашу задачу.

Пусть с самого начала нам задана система $F(X, Y)$ из n формальных степенных рядов, причем

(а) $F(X, Y) = X + Y + o(d \geqslant 2)$,

(б) $F(0, Y) = Y$.

Соотношения $f_0(X) = 0$ и $f_{m+1}(X) = F(X, f_m(X))$ определяют элементы $f_m(X)$ для всех $m \in \mathbf{Z}$.

Запишем

$$f_m(X) = \sum a_\alpha(m) X^\alpha,$$

где a_α — отображение $\mathbf{Z}$ в произведение $R \times \ldots \times R = R^n$. Покажем, что все отображения a_α являются биномиальными полиномиальными функциями степени, не превосходящей $|\alpha|$, иными словами, что существуют такие элементы $a_\alpha^i \in R \times \ldots \times R$, что

$$a_\alpha(m) = \sum_{i \leqslant |\alpha|} a_\alpha^i \binom{m}{i}, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Доказав это утверждение, мы тем самым докажем нашу теорему, так как элементы $\psi_i(X) = \sum\limits_{|\alpha| \geqslant i} a_\alpha^i X^\alpha$ будут удовлетворять требуемому условию. Доказательство будем вести индукцией по числу $|\alpha|$. Пусть $|\alpha| = 0$. В этом случае $a_\alpha = 0$, поскольку свободные члены рядов f_m равны нулю.

Пусть $|\alpha| \geqslant 1$. Допустим, что для индексов β с $|\beta| < |\alpha|$ утверждение справедливо. Покажем, что $a_\alpha(m)$ — биномиальный полином (от целого аргумента m) степени, не превосходящей $|\alpha|$. Для этого, как известно, достаточно показать, что $(\Delta a_\alpha)(m) = a_\alpha(m+1) - a_\alpha(m)$ есть биномиальный полином, степень которого не больше $|\alpha| - 1$. Пусть

$$F(X, Y) = X + Y + \sum c_{\gamma\delta} X^\gamma Y^\delta.$$

По предположению $|\gamma| \geqslant 1$ и $|\gamma| + |\delta| \geqslant 2$. Далее,

$$f_{m+1}(X) + X + f_m(X) + \sum c_{\gamma\delta} X^\gamma (f_m(X))^\delta.$$

Если $|\alpha| = 1$, то $a_\alpha(m+1) = a_\alpha(m) + 1$, что и утверждалось. Если $|\alpha| > 1$, то из предыдущего равенства мы видим, что $a_\alpha(m+1) = a_\alpha(m) + S_\alpha(m)$, где $S_\alpha(m)$ — сумма коэффициентов при X^α в выражениях $c_{\gamma\delta}X^\gamma(f_m(X))^\delta$. Так как $|\gamma| \geqslant 1$, нам надо брать только те выражения, у которых $|\delta| < |\alpha|$. Рассмотрим степень $(f_m(X))^\delta$ с $|\delta| < |\alpha|$. Коэффициент при $X^{\alpha-\gamma}$ в этом произведении имеет координаты вида $\sum \prod\limits_\nu b_{i_\nu}(m)$, где $b_{i_\nu}(m)$ — координаты коэффициента при X^{i_ν} в $f_m(X)$. Согласно предположению индукции, $b_{i_\nu}(m)$ — биномиальные полиномы степени, не превосходящей i_ν. Однако, как легко проверить (см., например, упражнение 2), произведение биномиальных полиномов является снова биномиальным полиномом. Более того, неравенство $\sum i_\nu = |\alpha| - |\gamma| < |\alpha|$ показывает, что степень функции $\prod\limits_\nu b_{i_\nu}$ строго меньше $|\alpha|$.

Таким образом, $S_\alpha = \Delta a_\alpha$ есть биномиальный полином, причем степень его строго меньше $|\alpha|$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть p — простое число. Имеет место сравнение $f_p \equiv \psi_p \pmod p$. В частности, порядок f_p (по модулю p) не меньше p.*

§ 8. Формальные группы над кольцом полного нормирования

Пусть k — полное неархимедово поле, A — кольцо нормирования и $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал этого кольца.

Пусть $F(X, Y)$ — формальный групповой закон над кольцом A. Обозначим через G полицилиндр

$$P_0(1, \ldots, 1) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathfrak{m}\}.$$

Определим в множестве G умножение, полагая $x \cdot y = F(x, y)$. Мы утверждаем, что G — аналитическая группа. Для этого нам нужно установить

1) ассоциативный закон;

2) наличие нейтрального элемента: им будет 0;

3) существование обратной операции: $\varphi(x)=x^{-1}$, где $\varphi(X)$ — формальный ряд и

$$F(x, \varphi(x))=0=F(\varphi(x), x).$$

Все три утверждения вытекают из соответствующих аксиом формальных групп и следующей леммы.

Лемма. *Допустим, что $f\in A[[X_1, \ldots, X_p]]$ и $g_i\in A[[Y_1, \ldots, Y_q]]$, $1\leqslant i\leqslant p$, причем $g_i(0)=0$ для всех i. Рассмотрим композицию рядов $h=f(g_1, \ldots, g_p)\in A[[Y_1, \ldots, Y_q]]$. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_q\in\mathfrak{m}$ имеем*

$$h(x)=f(g_1(x), \ldots, g_p(x)).$$

Доказательство. См. Бурбаки [2*], Ch. 3, § 4, п. 5.

Определение. Аналитическая группа G, построенная указанным выше способом, называется *стандартной*.

Теорема 1. *Всякая локальная аналитическая группа содержит открытую подгруппу, изоморфную стандартной.*

Доказательство. Пусть G — локальная аналитическая группа. Выбрав в окрестности единицы локальные координаты, мы можем считать, что G — открытая окрестность точки 0 в пространстве k^n. Умножение в локальной группе G задается набором степенных рядов $F(X, Y)$, сходящихся в шаре радиуса ε. Как и раньше,

$$F(X, Y)=X+Y+\sum c_{\alpha, \beta}X^{\alpha}Y^{\beta},$$

где $|\alpha|\geqslant 1$, $|\beta|\geqslant 1$, а коэффициенты $c_{\alpha, \beta}$ — векторы в пространстве k^n. Посмотрим, как меняется групповой закон при умножении всех координат на множитель $\mu\in k$. Именно, пусть $x, y\in G$, причем произведение $z = x \cdot y$ определено. Положим $x' = \mu x$, $y' = \mu y$ и $z' = \mu z$. Тогда

$$z' = x' + y' + \sum \frac{c_{\alpha,\beta}}{\mu^{|\alpha|+|\beta|-1}} x'^{\alpha} y'^{\beta}.$$

Следовательно, новый групповой закон F_μ имеет коэффициенты $\frac{c_{\alpha \cdot \beta}}{\mu^{|\alpha|+|\beta|-1}}$. Выбирая элемент μ с достаточно большим значением $|\mu|$, мы можем считать, что все коэффициенты группового закона F_μ лежат в A^n и $|\mu|\varepsilon \geqslant 1$, так что все новые ряды сходятся в шаре радиуса 1. Таким образом, в новой координатной системе шар $P_0(1, \ldots, 1)$ является стандартной подгруппой группы G.

Следствие 1. *Всякая локальная аналитическая группа эквивалентна аналитической группе.*

Следствие 2. *Во всякой локальной аналитической группе единица группы обладает фундаментальной системой окрестностей, состоящей из открытых подгрупп.*

§ 9. Фильтрация в стандартных группах

Сохраним обозначения предыдущего параграфа.

Обозначим через $w: k \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ нормирование поля k, т. е. такую функцию w, что

$$|x| = \rho^{w(x)},$$

где ρ — фиксированное вещественное число, $0 < \rho < 1$.

На элементах $x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n$ мы определим функцию $w(x) = \inf(w(x_i))$. Для каждого действительного числа $\lambda \geqslant 0$ положим

$$G_\lambda = \{x \in G \mid w(x) \geqslant \lambda\},$$

$$G_\lambda^+ = \{x \in G \mid w(x) > \lambda\}.$$

Более общим образом, пусть $\mathfrak{a}$ — идеал кольца A. Положим

$$G_{\mathfrak{a}} = \{x \in G \mid x_i \in \mathfrak{a},\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$
$$G_{\mathfrak{a}}^+ = \{x \in G \mid x_i \in \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Таким образом, если $\mathfrak{a}_\lambda = \{x \in A \mid w(x) \geqslant \lambda\}$, то $G_\lambda = G_{\mathfrak{a}_\lambda}$ и $G_\lambda^+ = G_{\mathfrak{a}_\lambda}^+ = G_{\mathfrak{a}_\lambda \cdot \mathfrak{m}}$.

Теорема 1. *Для любого идеала*[1] $\mathfrak{a} \subset A$ *множества вида* $G_\mathfrak{a}$ *и* $G_\mathfrak{a}^+$ *являются нормальными подгруппами группы* G. *Сравнение* $x \equiv y \pmod{G_\mathfrak{a}}$ $(x, y \in G)$ *равносильно системе сравнений* $x_i \equiv y_i \pmod{\mathfrak{a}}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Доказательство. Рассмотрим группу $G(A/\mathfrak{a})$, индуцированную групповым законом F на множестве $(\mathfrak{m}/\mathfrak{a})^n$. Сопоставляя каждому элементу $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{m}^n$ элемент $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in (\mathfrak{m}/\mathfrak{a})^n$, мы получаем сюръективный гомоморфизм $\varphi_\mathfrak{a}$: $G \to G(A/\mathfrak{a})$. Его ядром является, очевидно, множество $G_\mathfrak{a}$, что доказывает наше утверждение относительно $G_\mathfrak{a}$. Что касается множества $G_\mathfrak{a}^+$, то оно также является нормальной подгруппой, поскольку $G_\mathfrak{a}^+ = G_{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{m}}$.

(Другое доказательство можно получить, используя формулу (1) из § 6 и формулы (2) и (3) из § 7.)

Следствие. *Подмножества* $\{G_\lambda\}$ *определяют фильтрацию группы* G.

Доказательство. Проверим все аксиомы фильтрации (см. часть I, гл. II, § 2):

(1) $w(0) = \infty$;

(2) $w(x) > 0$ для всех $x \in G$;

(3) $w(xy^{-1}) \geqslant \inf\{w(x), w(y)\}$;

(4) $w((x, y)) \geqslant w(x) + w(y)$.

Аксиомы (1) и (2) очевидны в силу определения группы G. Аксиома (3) эквивалентна утверждению, что G_λ — подгруппа группы G для любого числа λ. Аксиома (4) эквивалентна включению $(G_\lambda, G_\mu) \subset G_{\lambda+\mu}$. Действительно, пусть $x \in G_\lambda$ и $y \in G_\mu$. Тогда

---

[1] Здесь, по-видимому, имеются в виду *замкнутые* идеалы $\mathfrak{a}$. Если кольцо A нётерово (что верно, например, для локально компактного поля k), то любой идеал кольца A замкнут (см. Самюэль и Зарисский, Коммутативная алгебра, т. II, гл. VIII, § 4). — *Прим. перев.*

(а) $[x, y] \in G_{\lambda+\mu}$,

(б) $(x, y) \equiv [x, y] \pmod{G^+_{\lambda+\mu}}$.

Свойство (а) очевидно, а свойство (б) является следствием теоремы 1 и формулы (5) из § 7.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ — *идеалы кольца* A, *такие, что* $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}^2$. *Отображение редукции* $\varphi_{\mathfrak{b}}$: $G \to G(A/\mathfrak{b})$ *индуцирует изоморфизм группы* $G_{\mathfrak{a}}/G_{\mathfrak{b}}$ *на аддитивную группу* $(\mathfrak{a}/\mathfrak{b})^n$.

Доказательство. Как видно из формулы (1) § 6, для любой пары $x, y \in G_{\mathfrak{a}}$ имеем

$$F(x, y) \equiv x + y \pmod{\mathfrak{a}^2}.$$

Наша теорема очевидным образом вытекает теперь из теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть* $\lambda \in w(\mathfrak{m})$ $(\lambda \neq \infty)$. *Тогда факторгруппа* G_λ/G^+_λ *изоморфна аддитивной группе* $(A/\mathfrak{m})^n$.

Доказательство. Выберем такой элемент $a \in \mathfrak{m}$, что $w(a) = \lambda$, и положим $\mathfrak{a} = (a)$. По теореме 2 § 9 группа $G_{\mathfrak{a}}/G^+_{\mathfrak{a}}$ изоморфна группе $(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{m})^n$. Но отображение $\alpha \mapsto \alpha \cdot a$ устанавливает изоморфизм групп $A/\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{m}$.

Следствие 2. *Пусть поле* k *локально компактно, и пусть* p — *характеристика поля* $A/\mathfrak{m}$. *Тогда*

(1) G_λ/G^+_λ — *коммутативная конечная* p*-группа, если* $\lambda \in w(\mathfrak{m})$ *и* $\lambda \neq \infty$;

(2) G/G^+_λ — (*не обязательно конечная*) p*-группа для всех* $\lambda \in w(\mathfrak{m})$, $\lambda \neq \infty$;

(3) G — *проективный предел* p*-групп* („*про-*p*-группа*“).

Доказательство. Ввиду локальной компактности поля k имеем:

(а) поле $A/\mathfrak{m}$ компактно и дискретно, а потому конечно;

(б) множество $\mathfrak{m}$ компактно, так что функция $w(x)$ достигает на нем минимума в некоторой точке $a \in \mathfrak{m}$.

Теперь ясно, что $\mathfrak{m} = (a)$ и, следовательно, A является кольцом дискретного нормирования.

Первое утверждение вытекает из следствия 1 и свойства (a). Второе утверждение есть следствие первого и дискретности нашего нормирования. Третье утверждение вытекает из второго.

Применим построенную фильтрацию $\{G_\lambda\}$ к изучению отображения возведения в r-ю степень f_r (см. § 7). Пусть $\bar{k} = A/\mathfrak{m}$ и p — характеристика поля $\bar{k}$.

Теорема 3. *Предположим, что числа r и p взаимно просты. Тогда для каждого числа $\lambda \in w(\mathfrak{m})$ $(\lambda \neq \infty)$ отображение f_r определяет изоморфизм аналитического многообразия G_λ на себя.*

Доказательство. Вычет числа r в $\bar{k}$ отличен от 0, поэтому r — обратимый элемент в кольце A. Отсюда видно, что ряды f_r обратимы в кольце $A[[X]]$. Положим $\theta = f_r^{-1}$. Ряды, входящее в θ, абсолютно сходятся на множестве G, а лемма из § 8 показывает, что $f_r \circ \theta = \theta \circ f_r = \mathrm{id}$. Поскольку f_r и θ отображают группу G_λ в себя, f_r — биекция на G_λ. Наконец, производная отображения f_r в любой точке $x \in G$ сравнима по модулю $\mathfrak{m}$ с отображением $r \cdot \mathrm{id}$ и, следовательно, обратима. Следовательно, f_r — наложение и, значит, является аналитическим изоморфизмом на G_λ.

Теорема 4. *Пусть поле k имеет нулевую характеристику и $p \neq 0$. Тогда для всех $\lambda \in w(\mathfrak{m})$, таких, что $\frac{\mu}{p-1} < \lambda < \infty$, отображение f_p является изоморфизмом аналитического многообразия G_λ на $G_{\lambda+\mu}$.*

Доказательство. В силу следствия теоремы Лазара

$$f_p(X) = p(X + \psi(X)) + \psi'(X),$$

причем порядок $\psi(X)$ не меньше двух, а порядок $\psi'(X)$ не меньше p.

Очевидно, $w(x^\alpha) \geqslant \lambda \cdot |\alpha|$, если $x \in G_\lambda$ и $|\alpha| \geqslant 1$. В частности, (а) $w(\psi(x)) > \lambda$;

(б) $w(\psi'(x)) \geqslant p\lambda = \lambda + (p-1)\lambda > \lambda + \mu$.

Поэтому $f_p(G_\lambda) \subset G_{\lambda+\mu}$. Для доказательства того, что $f_p\colon G_\lambda \to G_{\lambda+\mu}$ — аналитический изоморфизм, выберем элемент $a \in G$, такой, что $w(a) = \lambda$, и определим отображение $F\colon A^n \to A^n$ формулой $F(x) = \frac{1}{ap} f_p(ax)$. Тогда

$$F(X) = X + \frac{1}{a}\psi(aX) + \frac{1}{ap}\psi'(aX).$$

Возьмем такое число $r \in \mathbf{R}$, $0 < r < 1$, что $\frac{|a|^{p-1}}{|p|}$, $|a| < r^{p-1}$. Пусть

$$\frac{1}{a}\psi(aX) = \sum_{|\alpha| \geqslant 2} a_\alpha X^\alpha \quad \text{и} \quad \frac{1}{ap}\psi'(aX) = \sum_{|\alpha| \geqslant p} a'_\alpha X^\alpha.$$

Легко видеть, что $|a_\alpha| \leqslant |a|^{|\alpha|-1} \leqslant r^{|\alpha|-1}$ и

$$|a'_\alpha| \leqslant |a|^{|\alpha|-p} \frac{|a|^{p-1}}{|p|} \leqslant r^{|\alpha|-1}.$$

Теорема доказана.

Ниже (см. добавление 2) будет доказано, что следствием этих условий является абсолютная сходимость F и его формального обращения θ на множестве A^n. Таким образом, $F\colon A^n \to A^n$ — аналитический изоморфизм, откуда непосредственно следует соответствующее утверждение для отображения $f_p\colon G_\lambda \to G_{\lambda+\mu}$.

Теорема 5. *Пусть G — аналитическая группа над полем k. Существует открытая подгруппа U, не содержащая конечных подгрупп, порядок которых взаимно прост с характеристикой поля.*

Доказательство. Поскольку группа G содержит открытую подгруппу, изоморфную стандартной, наше утверждение сводится к теоремам 3 и 4.

Замечание. Теорема 5 утверждает, в частности, что если характеристика поля k равна нулю, то группа G не содержит „малых“ конечных подгрупп.

В добавлении 3 будут даны некоторые приложения теоремы 5.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть k — локально компактное поле, и пусть A — компактная аналитическая группа над k.

а) Пусть G — конечная группа, порядок которой взаимно прост с характеристикой поля k. Допустим, что группа G действует аналитически [1]) на группе A. Определим обычным образом множество одномерных когомологий $H^1(G, A)$. (Если группа A коммутативна, то определены все группы когомологий [2]) $H^q(G, A)$.) Доказать, что множество $H^1(G, A)$ конечно. [*Указание*: использовать структуру многообразия на коциклах.] Доказать аналогичный результат для групп $H^q(G, A)$, $q \geqslant 1$, в случае абелевой группы A.

б) Доказать (используя пункт а)), что имеется лишь конечное число классов сопряженных конечных подгрупп группы A заданного порядка (взаимно простого с характеристикой поля k).

2. Пусть i и j — два положительных целых числа.

а) Доказать, что произведение $\binom{m}{i}\binom{m}{j}$ (как функция от m) является линейной комбинацией биномиальных коэффициентов $\binom{m}{k}$, где $i,\ j \leqslant k \leqslant i+j$.

б) Доказать тождество

$$\binom{m}{i}\binom{m}{j} = \sum_{i,\ j \leqslant k \leqslant i+j} \frac{k!}{(k-i)!\,(k-j)!\,(i+j-k)}\binom{m}{k}.$$

[*Указание*: двумя способами представить произведение биномов $(1+X)^m(1+Y)^m$, где X и Y — две независимые переменные.]

---

[1]) Группа G *аналитически действует* на A, если задан гомоморфизм группы G в группу всех аналитических автоморфизмов группы A. — *Прим. ред.*

[2]) Определение когомологий см., например, в книге Серра [2*]. — *Прим. ред.*

3. Пусть обозначения те же, что в § 7 (теорема Лазара). Рассмотрим случай, когда $F(X, Y)$ обладает свойством

(а) $F(X, Y) \equiv X + Y + 0\ (d^0 \geqslant 2)$,

но не обладает свойством

(б) $F(0, Y) = 0$.

Показать, что и в этом случае f_m могут быть представлены в виде $\sum \binom{m}{i} \psi_i$, но уже неверно, что $\operatorname{ord}(\psi_i) \geqslant 1$.

4. Показать, что лемма 4.2 останется справедливой, если условие (1) заменить следующим условием:

(1′) A — отделимая топологическая группа, полная относительно обеих равномерных структур, причем ее топология может быть задана счетным семейством открытых подмножеств. [*Указание*: имитировать доказательство теоремы Банаха о замкнутом графике.]

5. Пусть k — локально компактное неархимедово поле и G — стандартная группа размерности n над k. Обозначим через dx меру Хаара на аддитивной группе k^n. Показать, что ограничение меры dx на G определяет левую и правую меры Хаара на G. [*Указание*: использовать тот факт, что $G = \varprojlim G/G_\lambda$ и что мера Хаара на группе G есть проективный предел мер Хаара на конечных группах G/G_λ.]

6. а) Пусть $F(X, Y) = X + Y + XY$ — „мультипликативный“ формальный групповой закон от одной переменной. Показать, что ряды ψ_i, определенные в теореме Лазара, суть просто одночлены X^i.

б) Предположим дополнительно, что поле k неархимедово и имеет нулевую характеристику; пусть p — характеристика поля вычетов. Показать равносильность следующих условий:

(1) $f_p(x) = 0$;

(2) $1 + x$ — корень p-й степени из единицы (в поле k).

Используя теорему 9.4, доказать, что для таких элементов x имеет место неравенство

$$w(x) \geqslant w(p)/p - 1,$$

Показать далее, что если $x \neq 0$ (т. е. если $1+x$ — примитивный корень p-й степени), то имеет место равенство.

7. Пусть F и F' — два формальных групповых закона над полем k характеристики p, и пусть $\varphi(X)$ — формальный гомоморфизм одного закона в другой (т. е. $\varphi(F(X, Y)) = F'(\varphi(X), \varphi(Y))$). Предположим, что все члены первой степени в $\varphi(X)$ равны нулю. Показать, что $\varphi(X)$ имеет вид $\psi(X^p)$. [*Указание*: рассмотреть дифференциальное уравнение

$$\varphi'(X) \cdot D_2F(X, 0) = D_2F'(\varphi(X), 0) \cdot \varphi'(0)$$

для доказательства равенства $\varphi'(X) = 0$.] Интерпретировать этот результат как разложение гомоморфизма φ при помощи *отображения Фробениуса* $F \to F^{(p)}$ в случае, когда поле k совершенно.

Добавление 1

МАКСИМАЛЬНЫЕ КОМПАКТНЫЕ ПОДГРУППЫ В $GL(n, k)$

Основная цель этого добавления — доказать теорему, сформулированную в § 2, п. 1.

Пусть k — локально компактное неархимедово поле, A — кольцо его нормирования, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца A и G — группа матриц $GL(n, A)$ ($n \in \mathbf{Z}$, $n > 0$).

Лемма 1. *Пусть L — некоторый A-подмодуль модуля k^n. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *модуль L конечно порожден над A и множество L порождает пространство k^n над k;*

(2) *L — свободный модуль ранга n над A.*

Доказательство. Поскольку A — кольцо главных идеалов, модуль L свободен. Далее, $rk_A L = n$, так как L порождает k^n над k.

Обратное очевидно.

A-модуль L, удовлетворяющий эквивалентным условиям леммы 1, называется *решеткой* в k^n.

Лемма 2. *Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_r$ — решетки в k^n. Подмодуль L (модуля k^n), порожденный модулями $L_1, \ldots, L_r$, является решеткой.*

Доказательство. Покажем, что выполняется условие (1) предыдущей леммы. Ясно, что множество L порождает пространство k^n над k, поскольку этим свойством обладает любая решетка L_i. Далее, так как все модули L_i конечно порождены над A, модуль L также конечно порожден.

Лемма 3. *Пусть L — решетка в пространстве k^n. Обозначим через K_L подгруппу группы $GL(n, k)$, которая переводит в себя решетку L. Существует такой элемент $d \in GL(n, k)$, что $K_L = \alpha G \alpha^{-1}$; в частности, группа K_L компактна и открыта.*

Доказательство. В силу условия (2) леммы 1 найдется такой элемент $\alpha \in GL(n, k)$, что $\alpha(A^n) = L$. Из определения группы $GL(n, A)$ ясно, что $K_L = \alpha G \alpha^{-1}$. Как было отмечено выше, группа G компактна и открыта (в $GL(n, k)$), следовательно, такими же свойствами обладает и группа K_L.

Лемма 4. *Пусть L и L' — две решетки в k^n, причем $K_L \subset K_{L'}$. Тогда $K_L = K_{L'}$ и $L' = \lambda L$ для некоторого $\lambda \in k^*$.*

Доказательство. Очевидно, что у решеток вида L и λL ($\lambda \in k^*$) группа K_L одна и та же. Поэтому мы можем считать, что $L' \subset L$ и $L' \not\subset \mathfrak{m} \cdot L$ (идеал $\mathfrak{m}$ главный!). Пусть $V = L/\mathfrak{m}L$ и $V' = (L' + \mathfrak{m}L)/\mathfrak{m}L$. По предположению V' — ненулевое линейное подпространство пространства V (над полем вычетов $A/\mathfrak{m}$). Далее, поскольку $K_L \subset K_{L'}$, решетка L' инвариантна относительно групп K_L, а следовательно, и ее образ V' в пространстве V инвариантен относительно K_L, т. е. относительно $GL(V)$. Учитывая, что $V' \neq (0)$, мы получаем $V' = V$, т. е. $L' + \mathfrak{m}L = L$. Отсюда, согласно известной лемме Накаямы, вытекает равенство $L = L'$.

Теорема 1. *Пусть H — компактная подгруппа группы $GL(n, k)$. Тогда*

(1) *существует решетка $M \subset k^n$, инвариантная относительно всех элементов группы H;*

(2) *существует матрица* $\alpha \in GL(n, k)$, *такая, что* $H \subset \alpha \cdot G\alpha^{-1}$.

Доказательство. Возьмем для начала любую n-мерную решетку L, например $L = A^n$. Группа $H_L = H \cap K_L$ состоит в точности из тех элементов группы H, которые переводят в себя решетку L. Множество K_L (соответственно H_L) открыто в $GL(n, k)$ (соответственно в H), а значит, факторгруппа H/H_L компактна и дискретна (т. е. конечна). Итак, имеется лишь конечное число множеств вида σL ($\sigma \in H$). Пусть M — подмодуль A-модуля k^n, порожденный семейством $\{\sigma L\}_{\sigma \in H}$. В силу леммы 2 модуль M является решеткой, которая, разумеется, инвариантна относительно группы H.

Второе утверждение нашей теоремы немедленно вытекает из первого и леммы 3.

Теорема 2. (1) $G = GL(n, A)$ — *максимальная компактная подгруппа группы* $GL(n, k)$.

(2) *Все максимальные компактные подгруппы группы* $GL(n, k)$ *сопряжены группе* G.

(3) *Всякая компактная подгруппа группы* $GL(n, k)$ *содержится в некоторой максимальной компактной подгруппе.*

Доказательство. Допустим, что группа G содержится в компактной подгруппе $H \subset GL(n, k)$. На основании теоремы 1 найдется решетка M, такая, что $H \subset K_M$. Но тогда $G \subset K_M$; более того, $G = K_M$ ввиду леммы 4. Итак, G — максимальная компактная подгруппа.

Утверждения (2) и (3) нашей теоремы являются следствиями этого факта и теоремы 1.

Добавление 2

НЕКОТОРЫЕ ЛЕММЫ О СХОДИМОСТИ

Рассмотрим систему $F(X) = (F_i(X))$ из n формальных степенных рядов от n переменных, такую, что каждый ряд $F_i(X)$ имеет вид

$$F_i(X) = X_i - \sum_{|\alpha| \geqslant 2} a_\alpha^i X^\alpha = X_i - \varphi_i(X).$$

Как мы уже видели при доказательстве теоремы об обратной функции, система F формально обратима, причем обратная формальная система $\theta(X) = (\theta_i(X))$ имеет вид

$$\theta_i(X) = X_i + \sum_{|\beta| \geqslant 2} b^i_\beta X^\beta = X_i + \psi_i(X).$$

Пусть $r \in \mathbf{R}$, $0 < r < 1$. Рассмотрим два условия

$$(\mathrm{A}_r)\, |a^i_\alpha| \leqslant r^{|\alpha|-1} \text{ для всех } \alpha;$$

$$(\mathrm{B}_r)\, |b^i_\beta| \leqslant r^{|\beta|-1} \text{ для всех } \beta.$$

Лемма 1. $(\mathrm{A}_r) \Rightarrow F$ *абсолютно сходится в шаре* A^n.
$(\mathrm{B}_r) \Rightarrow \theta$ *абсолютно сходится в шаре* A^n.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\sum_{|\gamma| \geqslant 0} r^{|\gamma|} = \frac{1}{(1-r)^n} < \infty.$$

Лемма 2. $(\mathrm{A}_r) \Leftrightarrow (\mathrm{B}_r)$.

Доказательство. Поскольку условия симметричны, покажем, например, что $(\mathrm{A}_r) \Rightarrow (\mathrm{B}_r)$. Применим индукцию по $|\beta|$. Предположим, что для всех индексов β' с $|\beta'| < |\beta|$ наше утверждение справедливо. Имеем

$$X_i = F_i(\theta(X)) = \theta_i(X) - \varphi_i(\theta(X)).$$

Сравнивая коэффициенты при X^β, мы видим, что b^i_β есть суммарный коэффициент при X^β в $\varphi_i(\theta(X))$. В силу неархимедовости основного поля достаточно проверить, что для всех одночленов вида bX^β, встречающихся в $\varphi_i(\theta(X))$, выполняется неравенство $|b| \leqslant r^{|\beta|-1}$. Но

$$\varphi_i(\theta(X)) = \sum_{|\alpha| \geqslant 2} a^i_\alpha (\theta(X))^\alpha,$$

где $\theta(X)^\alpha = \theta_1(X)^{\alpha_1} \ldots \theta_n(X)^{\alpha_n}$. Все одночлены, входящие в $\theta(X)^\alpha$, имеют вид

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{\alpha_i} \left(b^i_{\gamma_{i,j}} X^{\gamma_{i,j}}\right).$$

Нас интересуют члены с $\sum \gamma_{i,j} = \beta$. По предположению индукции

$$\left| \prod_{i,j} b^i_{\gamma_{i,j}} \right| \leqslant \prod_{i,j} r^{|\gamma_{i,j}|-1} = r^{|\beta|-|\alpha|}.$$

Требуемая оценка коэффициентов при X^β в $\varphi_i(\theta(X))$ непосредственно вытекает теперь из неравенства $|a^i_\alpha| \leqslant r^{|\alpha|-1}$.

Следствие. $(\mathrm{A}_r) \Rightarrow (F$ — *аналитический изоморфизм* A^n *на* $A^n)$.

Доказательство. Ввиду леммы 2 имеют место оба условия (A_r) и $\mathrm{B}_r)$. По лемме 1 для всех $x \in A^n$ имеем

$$x = (f \circ \theta)(x) = f(\theta(x)) = (\theta \circ f)(x) = \theta(f(x)).$$

Добавление 3

ПРИМЕНЕНИЯ § 9. ФИЛЬТРАЦИЯ В СТАНДАРТНЫХ ГРУППАХ

Теорема 1. *Для каждого* $n > 0$, $n \in \mathbf{Z}$, *существует такое* $N > 0$, $N \in \mathbf{Z}$, *что порядок любой конечной подгруппы в* $GL(n, \mathbf{Q})$ *не превосходит* N.

Доказательство. 1°. Докажем вначале соответствующее утверждение для группы $GL(n, \mathbf{Z}_p)$, где $\mathbf{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, p — любое простое число. По теореме 9.8 § 9 в группе $GL(n, \mathbf{Z}_p)$ имеется открытая подгруппа U, не содержащая конечных подгрупп. Многообразие $GL(n, \mathbf{Z}_p)/U$ компактно и дискретно, т. е. конечно. Обозначим через N его порядок. Для всякой конечной подгруппы $H \subset GL(n, \mathbf{Z}_p)$ имеем $H \subset GL(n, \mathbf{Z}_p)/U$, поэтому ее порядок не превышает N.

2°. Сведем нашу теорему к доказанному выше утверждению. Имеются два существенно различных способа.

Способ 1. Пусть H — конечная подгруппа группы $GL(n, \mathbf{Q})$. Вложим группу $GL(n, \mathbf{Q})$ в группу $GL(n, \mathbf{Q}_p)$, так что $H \subset GL(n, \mathbf{Q}_p)$. Поскольку группа H компактна, мы можем утверждать (см. теорему 1, добавление 1), что некоторая подгруппа, сопряженная H, лежит в $GL(n, \mathbf{Z}_p)$. Следовательно, в силу доказанного выше в пункте 1° порядок группы H ограничен некоторым числом N.

Способ 2. Читатель без труда проверит, что леммы 1 и 2 из добавления 1 справедливы для $k = \mathbf{Q}$ и $A = \mathbf{Z}$. Нам потребуются также следующие утверждения.

(а) Пусть L — решетка в $\mathbf{Q}^n$. Подгруппа

$$\{\alpha \in GL(n, \mathbf{Q}) \mid \alpha(L) = L\} \subset GL(n, \mathbf{Q})$$

сопряжена подгруппе $GL(n, \mathbf{Z})$.

(б) Для каждой конечной подгруппы $H \subset GL(n, \mathbf{Q})$ существует решетка M, инвариантная относительно группы H (т. е. $h(M) \subset M$, $h \in H$).

Утверждение (а) доказывается в точности тем же способом, что и лемма 3 из добавления 1. Докажем утверждение (б). Возьмем для этого произвольную решетку L и построим с ее помощью решетку $M = \{\sigma L\}_{\sigma \in H}$, порожденную решетками вида σL. Из построения ясно, что каждый элемент группы H отображает решетку M на себя.

Комбинируя доказанные утверждения, нетрудно усмотреть, что любая конечная подгруппа $H \subset GL(n, \mathbf{Q})$ сопряжена некоторой подгруппе, лежащей в $GL(n, \mathbf{Z})$.

Таким образом, мы можем считать, что $H \subset GL(n, \mathbf{Z})$. Замечая, что $GL(n, \mathbf{Z}) \subset GL(n, \mathbf{Z}_p)$, мы сводим нашу теорему к разобранному выше случаю.

Из доказательства теоремы 1 мы можем извлечь явную оценку числа N, оценивая порядок группы $GL(n, \mathbf{Z}_p)/U$ для каждого простого p. Рассмотрим два случая.

1) p нечетно. В этом случае $1 > \frac{1}{p-1}$, и в качестве группы U можно взять группу

$$G_1 = \{y \in GL(n, \mathbf{Z}_p) \mid y = 1 + x, \quad x = (x_{ij}), \quad x_{ij} \in m\}.$$

Тогда $GL(n, \mathbf{Z}_p)/U = GL(n, \mathbf{F}_p)$, где $\mathbf{F}_p$ — поле из p элементов. Мы можем явно вычислить порядок группы $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F}_p)$. Он равен числу различных *упорядоченных* базисов в $\mathbf{F}_p^n$, т. е.

$$(p^n - 1)(p^n - p) \ldots (p^n - p^{n-1}).$$

2) $p = 2$. Имеем $2 > \frac{1}{p-1}$, так что можно положить $U = G_2$. Тогда $GL(n, \mathbf{Z}_p)/U = \mathrm{GL}(n, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$. Имеет место точная последовательность

$$0 \to (2\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^{n^2} \to GL(n, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \to GL(n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to 1,$$

позволяющая вычислить порядок группы $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$; он равен

$$2^{n^2}(2^{n-1})(2^n - 2) \ldots (2^n - 2^{n-1}).$$

Рассмотрим подробнее случай $n = 2$.

1) p нечетно. Имеем $(p^2 - 1)(p^2 - p) = (p-1)^2 p \times \times (p+1)$. В силу нечетности p имеют место сравнения

а) $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$, $(p^2 - 1)(p^2 - p) \equiv \pmod{16}$;

б) $(p-1)p(p+1) \equiv 0 \pmod 3$.

Следовательно, $(p-1)^2 p(p+1) \equiv 0 \pmod{48}$. При $p = 3$ имеем $(p-1)^2 p(p+1) = 48$.

2) $p = 2$. В этом случае $2^{2^2}(2^2 - 1)(2^2 - 1) = 96$. Таким образом, наилучшей оценкой порядка конечных подгрупп группы $GL(2, \mathbf{Z})$, которую дает приведенный выше метод, является число 48. Фактически эту оценку можно несколько улучшить. Заметим прежде всего, что любая конечная подгруппа группы $GL(n, \mathbf{Q})$ содержится в группе G_0 всех матриц с определителем ± 1. Имеет место точная последовательность

$$1 \to SL(2, \mathbf{Q}) \to G_0 \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0.$$

Отсюда видно, что оценки для группы G_0 можно получить из соответствующих оценок для группы $SL(n, \mathbf{Q})$, умножая их на 2.

Докажем следующее

Предложение. (1) *Всякая конечная подгруппа группы $SL(2, \mathbf{Q})$ содержится в группе вращений плоскости и потому является циклической.*

(2) *Порядок конечных циклических подгрупп группы* $SL(2, \mathbf{Z})$ *может равняться лишь одному из чисел* 1, 2, 3, 4, 6.

Доказательство. (1) Пусть задана конечная подгруппа $H \subset SL(2, \mathbf{Q})$. Возьмем любую положительно определенную билинейную форму $B(x, y)$ в пространстве $\mathbf{Q}^2$. Положим $\bar{B}(x, y) = \sum_{\sigma \in H} B(\sigma x, \sigma y)$. Очевидно, новая форма $\bar{B}$ положительно определена и инвариантна относительно группы H. Поскольку определитель любого элемента из H равен единице, группа H является подгруппой группы вращений плоскости $\mathbf{R}^2$ относительно скалярного произведения, определенного формой $\bar{B}$.

(2) Пусть $\alpha \in SL(n, \mathbf{Q})$ — некоторый элемент конечного порядка. Расширим основное поле $\mathbf{Q}$ до поля комплексных чисел $\mathbf{C}$ и приведем матрицу α к жордановой форме. Имеются две возможности.

(i) Жорданова форма имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Простая проверка показывает, что в этом случае элемент α не может иметь конечного порядка.

(ii) Жорданова форма имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Обозначим через N порядок элемента α. Очевидно, $\mu^N = \nu^N = 1$. Далее, числа μ и ν являются корнями характеристического многочлена матрицы α и, следовательно, лежат в квадратичном расширении поля $\mathbf{Q}$. При этом числа μ и ν либо оба содержатся в поле $\mathbf{Q}$, либо являются комплексно сопряженными. Учитывая, что μ и ν — корни из единицы, мы получаем следующие возможности:

а) $\mu = \nu = 1$ или $\mu = \nu = -1$;

б) λ — примитивный корень N-й степени из единицы, $N > 2$ и $\nu = \bar{\mu}$.

В последнем случае поле $\mathbf{Q}(\mu)$ есть круговое расширение поля $\mathbf{Q}$ степени $\varphi(N)$, где φ — функция Эйлера. Из равенства $\varphi(N)=2$ легко извлечь, что число N может равняться 3, 4 или 6. Это завершает доказательство второго утверждения.

Укажем явно элементы четвертого и шестого порядка в группе $SL(2, \mathbf{Z})$. Для этого мы возьмем соответствующее квадратичное расширение $K=\mathbf{Q}(x)$ поля $\mathbf{Q}$ и посмотрим, какой матрицей в базисе $\{1, x\}$ записывается умножение на элемент x.

1. *Построение элемента четвертого порядка.* Пусть x — примитивный корень четвертой степени из единицы. Умножение на x как линейное преобразование имеет порядок 4 и записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Построение элемента шестого порядка.* Пусть x — примитивный корень шестой степени из единицы. Умножение на x имеет порядок 6 и записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть k — локально компактное неархимедово поле, A — кольцо его нормирования, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца A, p — характеристика поля k и $q=\operatorname{Card}(A/\mathfrak{m})$. Обозначим через w каноническое нормирование поля k (w: $k \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ и $w(k^*)=\mathbf{Z}$). Каноническое абсолютное значение в поле k можно определить тремя эквивалентными способами:

1) $\|x\|=\operatorname{Card}(A/xA)^{-1}$;

2) $\|x\|=q^{-w(x)}$;

3) умножение на x изменяет меру Хаара в $\|x\|$ раз.

Допустим, что $r \in \mathbf{Z}$ взаимно просто с p. Рассмотрим возведение в r-ю степень f_r: $A^* \to A^*$. Пусть $s=\operatorname{Card}(\operatorname{Ker} f_r)$ — число корней r-й степени из единицы в поле k.

Теорема 2. $\operatorname{Card}(A^*/A^{*r})=\|r\|^{-1} \cdot s$.

Эту теорему мы получим как следствие более общей теоремы об аналитических группах над k.

Пусть G — *коммутативная компактная аналитическая группа* над полем k. Положим

$$h_r(G) = \mathrm{Card}(\mathrm{Coker}\, f_r)/\mathrm{Card}(\mathrm{Ker}\, f_r).$$

Как мы увидим ниже, число $h_r(G)$ определено (т. е. числитель и знаменатель написанной дроби конечны).

Теорема 3. *Число $h_r(G)$ существует и равно $\| r \|^{-n}$, где $n = \dim_k G$.*

Доказательство. Предварительно мы установим три вспомогательных утверждения.

(1) Теорема справедлива, если $G = G'_\lambda$, где G' — стандартная группа и $\lambda \gg 0$.

(2) Теорема справедлива, если G — конечная группа.

(3) Теорема справедлива, если в G существует группа Ли H, такая, что теорема верна для H и для факторгруппы G/H.

Доказательство этих утверждений проведем в обратном порядке.

(3) Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & G/H \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & H \arrow[r] & G \arrow[r] & G/H \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

где $\varphi_1 = f_r$ (на группе H), $\varphi_2 = f_r$ (на группе G), $\varphi_3 = f_r$ (на группе G/H). Следствием этой диаграммы является точность последовательности

$$1 \to \mathrm{Ker}\,\varphi_1 \to \mathrm{Ker}\,\varphi_2 \to \mathrm{Ker}\,\varphi_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\,\varphi_1 \to$$
$$\to \mathrm{Coker}\,\varphi_2 \to \mathrm{Coker}\,\varphi_3 \to 1 \qquad (*)$$

(см., например, Бурбаки [2*], гл. I, § 1, п. 4). Все отображения в этой последовательности определены очевидным образом, за исключением разве что δ. Последнее определяется так. Пусть $x'' \in \mathrm{Ker}\,\varphi_3$; выберем представителя $x \in G$ элемента x'' (т. е. $x'' = xH$). Ввиду точности нижней строки $x' \in H$. Определим

$\delta(x'')$ как образ элемента x' в $\operatorname{Coker}\varphi_1$. Читателю предоставляется проверка корректности этого определения и точности последовательности (∗).

Мы предположили, что для групп H и G/H теорема 3 справедлива. Поэтому все группы $\operatorname{Ker}\varphi_1$, $\operatorname{Ker}\varphi_3$, $\operatorname{Coker}\varphi_1$, $\operatorname{Coker}\varphi_3$ конечны. В силу точности последовательности (∗) отсюда следует, что, во-первых, группы $\operatorname{Ker}\varphi_2$ и $\operatorname{Coker}\varphi_2$ конечны, а во-вторых, справедливо равенство ($\mathrm{c} \equiv \mathrm{Card}$)

$$\mathrm{c}(\operatorname{Ker}\varphi_1)\,\mathrm{c}(\operatorname{Ker}\varphi_2)^{-1}\,\mathrm{c}(\operatorname{Ker}\varphi_3)\,\mathrm{c}(\operatorname{Coker}\varphi_1)^{-1}\times$$
$$\times\,\mathrm{c}(\operatorname{Coker}\varphi_2)\,\mathrm{c}(\operatorname{Coker}\varphi_3)^{-1}=1.$$

Другими словами,

$$h_r(G)=h_r(H)\cdot h_r(G/H).$$

Пусть $m=\dim_k H$, тогда $n-m=\dim_k G/H$ и

$$\|r\|^{-n}=\|r\|^{-m}\cdot\|r\|^{-(n-m)}.$$

Но по предположению

$$h_r(H)=\|r\|^{-m}\quad\text{и}\quad h_r(G/H)=\|r\|^{-(n-m)},$$

откуда $h_r(G)=\|r\|^{-n}$, как и утверждалось.

(2) Имеет место точная последовательность

$$1\to\operatorname{Ker}f_r\to G\xrightarrow{f_r}G\to\operatorname{Coker}f_r\to 1.$$

Поскольку группа G конечна, конечны также ядро $\operatorname{Ker}f_3$ и коядро $\operatorname{Coker}f_r$; далее,

$$1=\mathrm{c}(\operatorname{Coker}f_r)\,\mathrm{c}(G)^{-1}\,\mathrm{c}(G)\,\mathrm{c}(\operatorname{Ker}f_r)^{-1}=h_r(G)$$

и

$$1=\|r\|^{n},$$

так как $n=0$.

(1) Поскольку доказательство достаточно провести для достаточно большого числа $\lambda\in\mathbf{Z}$, мы можем

предполагать (см. теоремы 3 и 4 из § 9), что f_r: $G_\lambda \to G_{\lambda+w(r)}$ — изоморфизм. Но тогда

$$c(\operatorname{Ker} f_r) = 1$$

и

$$c(\operatorname{Coker} f_r) = (q^{w(r)})^n = \| r \|^{-n}.$$

Итак, все три утверждения доказаны, остается применить теорему 8.1.

Упражнение. Пусть φ: $G \to G$ — аналитический эндоморфизм группы Ли G, являющийся наложением. Используя, например, меру Хаара, показать, что

1) группы $\operatorname{Ker} \varphi$ и $\operatorname{Coker} \varphi$ конечны;

2) $h_\varphi = c(\operatorname{Coker} \varphi)/c(\operatorname{Ker} \varphi) = \| \det T_e\varphi \|^{-1}$.

Глава V

ТЕОРИЯ ЛИ

Если не оговорено противное, k обозначает поле, полное относительно нетривиального абсолютного значения.

§ 1. Алгебра Ли локальной аналитической группы

Пусть $F(X, Y)$ — формальный групповой закон (над полем k). Как мы видели (см. гл. IV, § 7, п. 1),

$$F(X, Y) = X + Y + B(X, Y) + o(d^0 \geqslant 3),$$

где $B(X, Y)$ — билинейная форма.

Положим

$$[X, Y]_F = B(X, Y) - B(Y, X).$$

Операция $[X, Y]_F$ определяет на пространстве k^n структуру алгебры Ли (см. гл. IV, § 7, п. 6). Эту алгебру мы назовем *алгеброй Ли, ассоциированной с формальной группой F.*

Пусть G — локальная аналитическая группа над полем k. Положим $L(G) = \mathfrak{g} = T_eG$. Введем в пространстве $\mathfrak{g}$ структуру алгебры Ли. Для этого выберем на группе G некоторую карту $c = (U, \varphi, n)$ в точке e. Закон композиции в локальной группе G определяется (посредством карты φ) некоторым формальным групповым законом F. Пусть $T_e\varphi = \bar{\varphi}$: $\mathfrak{g} \to k^n$ — соответствующий изоморфизм касательных пространств. Для любой пары элементов x, $y \in \mathfrak{g}$ положим

$$[x, y]_c = \bar{\varphi}^{-1}([\bar{\varphi}x, \bar{\varphi}y]_F).$$

Мы утверждаем, что в действительности $[x, y]_c$ не зависит от выбора карты c. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть G и G' — две локальные аналитические группы, c и c' — их карты в точках e и e' соответственно и $f\colon G \to G'$ — локальный гомоморфизм. Тогда касательное отображение $T_e f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ является гомоморфизмом алгебр Ли относительно операций $[\ ,\ ]_c$ и $[\ ,\ ]_{c'}$.*

Доказательство немедленно сводится к следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть $F(X, Y)$ и $F'(X', Y')$ — два формальных групповых закона и f — формальный гомоморфизм первого закона во второй. Обозначим через f_1 линейную часть отображения f. Тогда*

$$[f_1(X), f_1(Y)]_{F'} = f_1([X, Y]_F).$$

Доказательство. Согласно формуле 5° (гл. IV, § 7), имеем

$$f(X)^{-1} f(Y)^{-1} f(X) f(Y) = [f_1(X), f_1(Y)]_{F'} + o(d^0 \geqslant 3),$$
$$f(X^{-1}Y^{-1}XY) = f_1([X, Y]_F) + o(d^0 \geqslant 3).$$

Сравнивая члены второго порядка, получаем искомую формулу.

Определение. В описанной выше ситуации линейное пространство $\mathfrak{g}$, наделенное канонической структурой алгебры Ли, называется *алгеброй Ли группы G*.

Замечание. Лемма 1 показывает, что указанное соотношение алгебр Ли локальным группам функториально.

§ 2. Простейшие примеры и свойства

1. Алгебра Ли полной линейной группы. Пусть R — конечномерная ассоциативная k-алгебра с единицей. Выше доказывалось (см. гл. IV, § 2, п. 1), что

$G_m(R)$ — аналитическая группа и открытое подмножество в R. Следовательно, $T_1G_m(R)=R$. Умножение в $G_m(R)$ имеет вид

$$(1+x)(1+y)=1+x+y+xy.$$

Ему соответствует следующий формальный групповой закон:

$$F(X, Y)=X+Y+XY.$$

Таким образом, структура алгебры Ли в пространстве $T_1G_m(R)$ задается формулой

$$[x, y]=xy-yx.$$

В частности, если R есть кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} V$ конечномерного векторного пространства V, получаем хорошо известную структуру алгебры Ли.

2. Алгебра Ли прямого произведения групп. Пусть G_1 и G_2 — аналитические группы. Естественный изоморфизм линейных пространств $T_e(G_1\times G_2)$ и $T_eG_1\times T_eG_2$ есть изоморфизм соответствующих алгебр Ли, т. е.

$$L(G_1\times G_2)=L(G_1)\times L(G_2).$$

В самом деле, пусть c_1 и c_2 — карты групп G_1 и G_2 в точках e_1 и e_2 соответственно. Тогда $c=c_1\times c_2$ — карта произведения $G_1\times G_2$. Требуемое утверждение легко вытекает из сравнения операций $[\ ,\ ]_{c_i}$ $(i=1, 2)$ и $[\ ,\ ]_c$.

3. Алгебра Ли подгруппы Ли. Пусть заданы две аналитические группы G и H и аналитический *регулярный гомоморфизм* $f\colon H\to G$. Отображение $L(f)\colon L(H)\to L(G)$, очевидно, инъективно, так что $L(H)$ можно отождествить с подалгеброй алгебры $L(G)$. Это замечание применимо, в частности, тогда, когда H — подгруппа Ли группы G и f — соответствующее вложение.

Рассмотрим подробнее случай, когда характеристика поля k равна нулю.

Теорема 1. *Пусть H_1 и H_2 — подгруппы Ли группы Ли G, и пусть характеристика поля k равна нулю. Тогда пересечение $H_1 \cap H_2$ — тоже подгруппа Ли и $L(H_1 \cap H_2) = L(H_1) \cap L(H_2)$.*

Доказательство. Согласно теореме 4.5.1, множество (левых) смежных классов G/H_1 является многообразием. Обозначим через $\bar{e}$ смежный класс H_1 в G/H_1. Группа H_2 действует (слева) в пространстве G/H_1, причем $H_1 \subset H_2$ — стационарная подгруппа точки $\bar{e}$. Но тогда $H_1 \cap H_2$ — подгруппа Ли группы G (см. гл. IV, § 5, теоремы 2 и 3). Наконец, $L(H_1 \cap H_2)$ отождествляется со своим образом в $L(G)$, который, очевидно, равен ядру отображения $T_eH_2 \to T_eG/T_eH_1$ (см. теорему 4.5.2, (2)), т. е. пересечению $L(H_1) \cap L(H_2)$.

Следствие 1. *Допустим, что $L(H_1) \subset L(H_2)$. Тогда в некоторой окрестности единицы $H_1 \subset H_2$.*

Доказательство. Имеем

$$T_e(H_1 \cap H_2) = L(H_1) \cap L(H_2) = L(H_1) = T_eH_1$$

и

$$H_1 \cap H_2 \subset H_1,$$

откуда ясно, что вложение $H_1 \cap H_2 \to H_2$ есть локальный изоморфизм. Поэтому в некоторой окрестности точки e группы H_1 и $H_1 \cap H_2$ совпадают, т. е. локально $H_1 \subset H_2$.

Следствие 2. *Допустим, что $L(H_1) = L(H_2)$. Тогда в некоторой окрестности единицы $H_1 = H_2$.*

Следствие 3. *Пусть G_1 и G_2 — две группы Ли и φ, ψ: $G_1 \to G_2$ — пара аналитических гомоморфизмов. Условие $L(\varphi) = L(\psi)$ равносильно совпадению отображений φ и ψ в некоторой окрестности точки e_1.*

Доказательство. Пусть графики G_φ и G_ψ гомоморфизмов φ и ψ в $G_1 \times G_2$ являются подгруппами

Ли. Имея в виду указанные выше отождествления, мы можем написать

$$L(G_\varphi)=\{(x,\ y)\in L(G_1\times G_2)\,|\,y=L(\varphi)(x)\},$$
$$L(G_\psi)=\{(x,\ y)\in L(G_1\times G_2)\,|\,y=L(\psi))x)\}.$$

Далее, на основании следствия 2 условия:

а) отображения φ и ψ совпадают в окрестности точки e_1;

б) графики G_φ и G_ψ совпадают в окрестности точки $(e_1,\ e_2)\in G_1\times G_2$;

в) $L(\varphi)=L(\psi)$

эквивалентны. Это завершает доказательство.

4. Алгебра Ли ядра гомоморфизма. Пусть заданы две аналитические группы G и H и аналитический локально линейный гомоморфизм $f\colon G\to H$. Обозначим через K ядро этого гомоморфизма. В силу следствия теоремы 2 §5 гл. IV K — подгруппа Ли группы G; кроме того,

$$L(K)=\operatorname{Ker}T_e(\varphi)=\{x\in L(G)\,|\,L(\varphi)(x)=0\}.$$

§ 3. Линейные представления

Пусть G — аналитическая группа и V — векторное пространство[1]). *Линейным представлением* группы G в пространстве V называется аналитический гомоморфизм $\sigma\colon G\to GL(V)$. Линейное представление определяет *действие* группы G в пространстве V:

$$gv=\sigma(g)(v).$$

Представление σ индуцирует также представление алгебры $L(G)$, т. е. гомоморфизм алгебр Ли $\bar\sigma\colon L(G)\to\operatorname{End}V$.

1. Основные примеры. (i) Тождественное представление:

$$GL(V)\to GL(V).$$

[1]) Все рассматриваемые здесь линейные пространства предполагаются конечномерными. — *Прим. перев.*

(ii) Обозначим через V^* пространство, двойственное к V. Введем отображение *: $GL(V) \to GL(V^*)$, $u \mapsto {}^t u^{-1}$ Легко проверяется, что * — аналитический групповой изоморфизм. Пусть $1 = \mathrm{id}_V$ и $1^* = \mathrm{id}_{V^*}$. В некоторой окрестности элемента 1 имеем

$$^*(1+x) = (1^* + {}^t x)^{-1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} ({}^t x)^{\mu} = 1^* - {}^t x + o(d^0 \geqslant 2).$$

В частности, $L(^*)(x) = -{}^t x$.

(iii) Пусть $V_1, \ldots, V_n$ — векторные пространства и $V = V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Определим отображение

$$\theta\colon \operatorname{End} V_1 \times \ldots \times \operatorname{End} V_n \to \operatorname{End} V,$$

положив

$$\theta(y_1, \ldots, y_n) = y_1 \otimes \ldots \otimes y_n, \quad y_i \in \operatorname{End} V_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Это отображение, очевидно, индуцирует аналитический гомоморфизм $\prod_{i=1}^{n} GL(V_i) \to GL(V)$, причем в некоторой окрестности единицы

$$\theta(1 + x_1, \ldots, 1 + x_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes \ldots \otimes x_i \otimes \ldots \\ \ldots \otimes 1 + o(d^0 \geqslant 2).$$

В частности,

$$L(\theta)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes \ldots \otimes x_i \otimes \ldots \otimes 1.$$

(iv) Пусть $V_1, \ldots, V_n, W$ — векторные пространства, $V = \mathrm{Hom}_k(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n, W)$ — пространство полилинейных отображений и $G = \left(\prod_{i=1}^{n} GL(V_i)\right) \times GL(W)$. Пространство V канонически изоморфно тензорному произведению $V_1^* \otimes \ldots \otimes V_n^* \otimes W$. Используя отображения из примеров (ii) и (iii), получаем гомоморфизм $\theta\colon G \to GL(V)$. Он задается следующей формулой:

$$\theta(y_1, \ldots, y_n, w)(v) = w \circ v \circ (y_1 \otimes \ldots \otimes y_n)^{-1}.$$

Применяя предыдущие результаты, находим

$$L(\theta)(x_1, \ldots, x_n, z)(y) = \\ = z \circ y - \sum_{i=1}^{n} y \circ (1 \otimes \ldots \otimes x_i \otimes \ldots \otimes 1).$$

(v) Возьмем группу $G = GL(V)$ и рассмотрим аналитический гомоморфизм $\det: G \to G_m(k)$. Здесь $\det(y)$ означает определитель отображения y, а $G_m(k)$ есть просто группа ненулевых элементов k^*. В некоторой окрестности единицы группы G имеем

$$\det(1 + x) = 1 + \operatorname{Tr}(x) + \ldots + \det(x) = \\ = 1 + \operatorname{Tr}(x) + o(d^0 \geqslant 2),$$

где $\operatorname{Tr}(x)$ — след отображения x. В частности,

$$L(\det)(x) = \operatorname{Tr}(x).$$

2. Ядра представлений. Если линейное представление локально линейно, то можно применить результат п. 4 § 2. Применим его, в частности, к примеру (v) предыдущего пункта. Действительно, отображение $\det$ корегулярно (при $V \neq (0)$). Рассмотрим группу

$$SL(V) = \ker(\det).$$

Она является группой Ли. Ее называют *специальной линейной группой*. В частности, с учетом результатов § 1 получаем

$$L(SL(V)) = \{x \in \operatorname{End} V \mid \operatorname{Tr}(x) = 0\}.$$

3. Стационарные подгруппы. Пусть, как и раньше, $\operatorname{char} k = 0$. В предыдущей главе (см. § 5, теоремы 2 и 3) было доказано, что стационарная подгруппа $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ точки x многообразия X, на котором действует группа Ли G, является подгруппой Ли. Применим этот результат к теории представлений

(i) Пусть $\sigma: G \to GL(V)$ — линейное представление аналитической группы G в векторном пространстве V. Рассмотрим стационарную подгруппу точки $v \in V$

$$G_v = \{g \in G \mid g \cdot v = v\}.$$

Тогда G_v есть подгруппа Ли в G и

$$L(G_v) = \{x \in L(G) \mid \bar{\sigma}(x)(v) = 0\}.$$

Действительно, пусть φ: $GL(V) \to V$ — отображение, задаваемое правилом $u \to u(v)$. Ясно, что касательное отображение $T_e(\varphi)$: $\operatorname{End} V \to V$ задается формулой $T_e(\varphi)(z) = z(v)$. При этом

$$T_e G_v = \ker(T_e(\varphi \circ \sigma)) = \ker(T_e(\varphi) \circ \bar{\sigma}),$$

что и утверждалось.

(ii) В тех же обозначениях рассмотрим представление $* \circ \sigma$: $G \to GL(V^*)$. Пусть G_f — стационарная подгруппа элемента $f \in V^*$. Тогда

$$G_f = \{g \in G \mid f \circ \sigma(g) = f\},$$
$$L(G_f) = \{x \in L(G) \mid f \circ \bar{\sigma}(x) = 0\}.$$

Для того чтобы установить первое соотношение, достаточно (поскольку G_f — группа) доказать, что включение $g^{-1} \in G_f$ равносильно равенству $f \circ \sigma(g) = f$. Имеем

$$* \circ \sigma(g^{-1})(f) = {}^t\sigma(g^{-1})^{-1}(f) = f \circ \sigma(g),$$

и наш результат вытекает из определения группы G_f. Что касается второго соотношения, то в силу первого достаточно доказать равносильность равенств $L(* \circ \sigma) \cdot (x)(f) = 0 \; (x \in L(G))$ и $f \circ \bar{\sigma}(x) = 0$. Но, согласно п. 1,

$$L(* \circ \sigma)(x)(f) = -{}^t\bar{\sigma}(x)(f) = -f \circ \bar{\sigma}(x),$$

что и доказывает требуемую равносильность.

Важным примером группы типа G_f является группа $A(V)$ аффинных преобразований векторного пространства V. Отождествляя аддитивную группу пространства V с группой сдвигов этого пространства, группу $A(V)$ можно определить как полупрямое произведение групп V и $GL(V)$.

Умножение в этой группе определяется формулой

$$(v_1, g_1)(v_2, g_2) = (v_1 + g_1 v_2, g_1 g_2)$$
$$(v_1, v_2 \in V, \; g_1, g_2 \in GL(V)).$$

Оказывается, что группу $A(V)$ можно отождествить с подгруппой $G \subset GL(V \times k)$, оставляющей инвариантными гиперплоскости вида $V \times \alpha$ $(\alpha \in k)$. Для доказательства этого факта нужно рассмотреть отображение $\sigma\colon A(V) \to G$, определенное формулой

$$\sigma(v, g)(w, \alpha) = (\alpha v + gw, \alpha),$$

где $(v, g) \in A(V)$ и $(w, \alpha) \in V \times k$. Группа G имеет вид $GL(V \times k)_f$, где $f\colon V \times k \to k$ — линейная форма, задаваемая формулой $f(w, \alpha) = \alpha$.

(iii) Пусть $\sigma\colon G \to GL(V)$ — линейное представление группы Ли G в векторном пространстве V, и пусть

$$\theta\colon GL(V) \times GL(V) \to GL(V \otimes V)$$

— аналитический гомоморфизм, определенный в п. 1 (здесь $V = V_1 = V_2$). Рассмотрим композицию

$$\tau = \theta \circ (\sigma \times \sigma)\colon G \to GL(V \otimes V).$$

Для всякого элемента $\beta \in (V \otimes V)^*$ определена группа G_β, причем (см. (ii))

$$G_\beta = \{g \in G \mid \beta \circ (\sigma(g) \otimes \sigma(g)) = \beta\}$$

и

$$L(G_\beta) = \{x \in L(G) \mid \beta \circ (\bar\sigma(x) \otimes 1 + 1 \otimes \bar\sigma(x)) = 0\}.$$

Условие, определяющее алгебру $L(G_\beta)$, означает, что

$$\beta(\bar\sigma(x) v \otimes w) + \beta(v \otimes \bar\sigma(x) w) = 0$$

для всех $v, w \in V$.

Укажем два применения предыдущих рассмотрений. Пусть $G = GL(V)$ и σ — тождественное представление, причем $V = k^n$, что является наиболее интересным случаем.

А. Ортогональная группа. Определим билинейную форму β в пространстве k^n равенством

$$\beta(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Соответствующая группа G_β называется *ортогональной группой* пространства k^n. Определим явным образом элементы группы G_β и алгебры Ли $L(G_\beta)$. Пусть $u \in \mathrm{End}(k^n)$. Обозначим через ${}^t u$ сопряженное преобразование (оно задается транспонированной матрицей); легко проверить, что

$$\beta(ux, y) = \beta(x, {}^t u y)$$

для любых $x, y \in k^n$.

Пусть $g \in GL(k^n)$ и $u \in \mathrm{End}(k^n)$. Тогда

а) $\beta(gx, gy) = \beta(x, y) \Leftrightarrow \beta(x, {}^t g \cdot gy) = \beta(x, y)$;

б) $\beta(ux, y) + \beta(x, uy) = 0 \Leftrightarrow \beta(x, ({}^t u + u)y) = 0$.

Ввиду невырожденности формы β это означает, что

$$G_\beta = \{g \in GL(k^n) \mid {}^t g \cdot g = 1\},$$
$$L(G_\beta) = \{u \in \mathrm{End}(k^n) \mid {}^t u + u = 0\}.$$

Б. Симплектическая группа. Пусть $n = 2m$, а билинейная форма β определена равенством

$$\beta(x_1, \ldots, x_{2m}; y_1, \ldots, y_{2m}) = \sum_{i=1}^{m} (x_i y_{m+i} - x_{m+i} y_i).$$

Соответствующая группа G_β называется *симплектической группой* пространства k^{2m}. Покажем, как явно определить группу G_β и алгебру Ли $L(G_\beta)$. Мы можем отождествить пространства $\mathrm{End}(k^m \times k^m)$ и $\mathrm{End}(k^n)$. Иными словами, любое линейное отображение $u\colon k^n \to k^n$ можно представить в виде

$$u = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где $A, B, C, D \in \mathrm{End}(k^m)$. Отображению u сопоставим отображение

$$u' = \begin{pmatrix} {}^t D & -{}^t B \\ -{}^t C & {}^t A \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что

$$\beta(ux, y) = \beta(x, u'y),$$

где x, $y \in k^n$. Используя это тождество, а также невырожденность формы β, нетрудно усмотреть, что

$$G_\beta = \{g \in GL(k^n) \mid g' \cdot g = 1\},$$
$$L(G_\beta) = \{u \in \operatorname{End}(k^n) \mid u' + u = 0\}.$$

Условие, определяющее алгебру $L(G_\beta)$, эквивалентно совокупности трех равенств:

$${}^tA + D = 0, \ {}^tB = B, \ {}^tC = C.$$

(iv) „Метод стационарных подгрупп" можно применять всякий раз, как мы имеем дело с комбинациями стандартных представлений, указанных в п. 1. Формулировку общего утверждения мы предоставляем читателю; приведем здесь еще один пример.

Пусть A — конечномерная k-алгебра, и пусть β: $A \times A \to A$ (или β: $A \otimes_k A \to A$) — закон умножения в алгебре A. Следующие условия эквивалентны ($\beta(x, y) \equiv x \cdot y$):

(а) $g \in GL(A)_\beta$;

(б) $g \in GL(A)$ и $g\beta(g^{-1}x, g^{-1}y) = \beta(x, y)$ для любых x, $y \in A$;

(в) $g \in GL(A)$ и $g(x \cdot y) = (gx) \cdot (gy)$ для любых x, $y \in A$.

Условия (а) и (б) эквивалентны по определению. Эквивалентность условий (б) и (в) доказывается заменой элементов x и y элементами gx и gy соответственно. Таким образом, G_β есть просто группа автоморфизмов алгебры A. Покажем, что $L(G_\beta)$ есть не что иное, как пространство дифференцирований $\operatorname{Der}(A)$ алгебры A в A. В самом деле, включение $d \in L(G_\beta)$ означает, что

$$d\beta(x, y) - \beta(dx, y) - \beta(x, dy) = 0 \text{ для всех } x, \ y \in A.$$

Но эту формулу можно переписать и так:

$$d(x \cdot y) = (dx) \cdot y + x \cdot (dy),$$

что и требовалось доказать.

4. Присоединенное представление. Пусть G — аналитическая группа. Для каждого элемента $g \in G$ определен внутренний автоморфизм $\varphi_g\colon G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$. Пусть $\mathfrak{g} = L(G)$; обозначим через $\mathrm{Ad}\colon G \to GL(\mathfrak{g})$ отображение $g \mapsto T_e\varphi_g$. Очевидно, что отображение Ad является гомоморфизмом. Более того, как мы сейчас увидим, это отображение аналитично, а потому определено отображение $L(\mathrm{Ad})\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Будет показано, что $L(\mathrm{Ad})$ совпадает с ad — присоединенным представлением, которое определяется для любых алгебр Ли.

Поскольку Ad — гомоморфизм, достаточно проверить аналитичность этого отображения какой-нибудь окрестности единицы. Вычислим Ad в локальных координатах; для этого воспользуемся формулой 3° гл. IV, § 7. Имеем (в окрестности точки e)

$$\varphi_g(x) = x + [g,\ x] + \sum d_{\alpha,\beta} g^\alpha x^\beta,$$

где $|\alpha| \geqslant 1$, $|\beta| \geqslant 1$, $|\alpha| + |\beta| \geqslant 3$. Следовательно,

$$\mathrm{Ad}(g) = T_e\varphi_g\colon\ x \mapsto x + [g,\ x] + \sum d_{\alpha,\beta}\, g^\alpha x^\beta.$$

Мы видим, что отображение Ad аналитично в единице. Далее, в последней сумме $|\alpha| \geqslant 2$, так как $|\beta| = 1$. Поэтому касательное отображение $T_e\mathrm{Ad}(y)$ совпадает с отображением $x \mapsto [y,\ x]$. Таким образом, $L(\mathrm{Ad})(y) = T_e(\mathrm{Ad})(y) = \mathrm{ad}(y)$, как и утверждалось.

§ 4. Сходимость формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа

Теорема 1. *Всякая конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем k нулевой характеристики является алгеброй Ли некоторой локальной аналитической группы.*

Доказательство. Пусть $n = \dim_k \mathfrak{g}$. С помощью формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа (см. часть I, § 7, 8) определим формальный групповой закон $F = (F_i)$ от n переменных, такой, что ряды F_i сходятся и алгебра $\mathfrak{g}$ изоморфна алгебре Ли, определенной в пространстве k^n посредством операции $[\ ,\ ]_F$. Доказательство мы проведем в три приема.

1°. С каждым базисом $x_1, \ldots, x_n$ алгебры $\mathfrak{g}$ связана однозначно определенная система *структурных констант*

$$\gamma_{ij}^h = \gamma_{ij}^h (x_1, \cdot \cdot \cdot x_n),$$

таких, что

$$[x_i, x_j] = \sum_{h=1}^{n} \gamma_{ij}^h x_h, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Положим

$$\gamma = \gamma(x_1, \ldots, x_n) = \max |\gamma_{ij}^h|.$$

Система $\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n (\lambda \in k, \lambda \neq 0)$ также является базисом, причем

$$\gamma_{ij}^h (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda \gamma_{ij}^h (x_1, \ldots, x_n),$$
$$\gamma(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = |\lambda| \gamma(x_1, \ldots, x_n).$$

2°. Пусть $R = k[[X, Y]] = k[[X_1, \ldots, X_n; Y_1, \ldots \ldots, Y_n]]$, и пусть $E = R^n$. При фиксированном базисе $x_1, \ldots, x_n$ определим на множестве E структуру алгебры Ли формулой

$$[(f_i), (g_j)] = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}^h f_i g_j \right), \quad 1 \leqslant h \leqslant n.$$

В частности, рассмотрим отображения $\operatorname{ad}(X)$ и $\operatorname{ad}(Y)$, где $X = (X_1, \ldots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$.

Будем называть набор $P = (P_1, \ldots, P_n) \in E$ *однородным многочленом* степени r, если каждый ряд P_i является однородным многочленом степени r. Символом $\|P\|$ в этом случае обозначим $\max\limits_{i\alpha} |a_\alpha^i|$, где a_α^i — коэффициенты многочлена P_i.

Лемма 1. *Пусть $P \in E$ — однородный многочлен степени r. Тогда* $\operatorname{ad}(X)(P)$ *и* $\operatorname{ad}(Y)(P)$ — *однородные многочлены степени $r+1$, причем* $\|\operatorname{ad}(X)(P)\| \leqslant n^2 \gamma \|P\|$ *и* $\|\operatorname{ad}(Y)(P)\| \leqslant n^2 \gamma \|P\|$.

Доказательство леммы. Пусть $\operatorname{ad}(X)(P) = (Q_1, \ldots, Q_n)$, и пусть $P_j = \sum Q_{\alpha,\beta}^j X^\alpha Y^\beta$, $Q_h = \sum b_{\alpha,\beta}^h X^\alpha Y^\beta$. По определению

$$Q_h = \sum_{i,j} \gamma_{ij}^h X_i P_j,$$

а следовательно, Q_h — однородный многочлен степени $r+1$ и

$$b^h_{\alpha,\beta}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma^h_{ij}a^j_{\alpha-\delta i,\beta}(\delta_i=(0,\ \ldots,\ 1,\ \ldots,\ 0)).$$

Отсюда $|b^h_{\alpha,\beta}|\leqslant n^2\gamma\|P\|$. Аналогично доказывается утверждение для многочлена $\mathrm{ad}(Y)(P)$.

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{m}$ — *максимальный идеал* $(X,\ Y)$ *в кольце* R. *Тогда*

$$\mathrm{ad}(X)(\mathfrak{m}^r E)\subset\mathfrak{m}^{r+1}E$$

и

$$\mathrm{ad}(Y)(\mathfrak{m}^r E)\subset\mathfrak{m}^{r+1}E\ (r>0).$$

3° Пусть $S=\{\bar{x},\ \bar{y}\}$ — множество из двух элементов. Рассмотрим свободную алгебру Ли L_S над S, ее пополнение $\hat{L}_S=\prod_{r=0}^{\infty}L^r_S$ (см. часть I, гл. IV, § 3, 7) и канонический гомоморфизм алгебр Ли θ: $L_S\to E$, такой, что $\theta(\bar{x})=X$ и $\theta(\bar{y})=Y$.

Лемма 2. $\theta(L^r_S)\subset\mathfrak{m}^r E\ (r>0)$.

Доказательство непосредственно вытекает из следствия леммы 1.

В частности, θ единственным образом продолжается до гомоморфизма $\hat{L}_S\to E$.

В алгебре $\hat{L}_S$ существует однозначно определенный элемент $\bar{z}$, для которого $e^{\bar{x}}\cdot e^{\bar{y}}=e^{\bar{z}}$ (теорема 1.4.7.4). Пусть $F=\theta(\bar{z})$. Используя замечание в конце § 7 гл. IV ч. I, получаем следующие утверждения:

1) F — формальный групповой закон от переменных X и Y;

2) $F=X+Y+B(X,\ Y)+o(d^0\geqslant 3)$, причем $B(X,Y)=\frac{1}{2}[X,\ Y]$.

В частности, $[X,\ Y]_F=\frac{1}{2}[X,\ Y]-\frac{1}{2}[Y,\ X]=[X,\ Y]$.

Прежде чем завершить доказательство теоремы 1, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Ряды* $F=(F_i)$ *сходятся.*

Доказательство. Нам понадобятся две элементарные леммы.

Лемма 3. *При достаточно малых t ряд*

$$\sum_{\substack{p_1, \ldots, p_m \in \mathbf{N} \\ q_1, \ldots, q_m \in \mathbf{N} \\ p_i + q_i \geqslant 1 \\ m \geqslant 1}} t^{\Sigma p_i + \Sigma q_i}$$

сходится.

Доказательство леммы 3. Указанный ряд можно переписать так:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{p+q \geqslant 1} t^{p+q} \right)^m.$$

При $|t| < 1$ член в скобках сходится к α, где

$$\alpha = \frac{1}{(1-t)^2} - 1.$$

Но при достаточно малых $|t|$ имеем $0 < \alpha < 1$, что гарантирует сходимость всего ряда.

Лемма 4. *Существует константа a, $0 < a \leqslant 1$, такая, что*

$$|n!| \geqslant a^n \text{ и } |n| \geqslant a^n \, (n \in \mathbf{Z}, \; n > 0).$$

Доказательство леммы 4. Рассмотрим три случая.

А) Поле k архимедово. Берем $a = 1$.

Б) Поле k неархимедово и ограничение его абсолютного значения на подполе $\mathbf{Q}$ тривиально. Берем $a = 1$.

В) Поле k неархимедово и ограничение его абсолютного значения на подполе $\mathbf{Q}$ совпадает с одним из p-адических абсолютных значений.

Заметим сначала, что неравенство $|n| \geqslant a^n$ следует из неравенства $|n!| \geqslant a^n$, так как $|(n-1)!| \leqslant 1$ для всех $n \geqslant 1$. Возьмем в качестве a число $|p|^{1/p-1}$. Неравенство $|n!| \geqslant a^n$ означает, что $v_p(n!) \leqslant n/p-1$. Однако

$$v_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots < \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \ldots = \frac{n}{p-1}.$$

Приступим теперь к доказательству теоремы 2. Заметим прежде всего, что если умножить все координаты на некоторый элемент $\lambda \in k^*$, это не повлияет на сходимость. Поэтому можно заменить базис $x_1, \ldots, x_n$ алгебры $\mathfrak{g}$ на базис $\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n$ $(\lambda \neq 0)$, где

$$|\lambda| \gamma \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Используя для нового базиса старые обозначения, получаем (в силу леммы 1) следующую лемму.

Лемма 1′. *Пусть $P \in E$ — однородный многочлен степени r. Тогда $\mathrm{ad}(X)(P)$ и $\mathrm{ad}(Y)(P)$ — однородные многочлены степени $(r+1)$, причем $\|\mathrm{ad}(X)(P)\| \leqslant \|P\|$ и $\|\mathrm{ad}(Y)(P)\| \leqslant \|P\|$.*

Воспользуемся теперь формулой Дынкина (см. ч. I, гл. IV, § 8):

$$\theta(\bar{z}) = F(X, Y) = \sum_{\nu} f_\nu(X, Y),$$

где

$$f_\nu(X, Y) = \frac{1}{\nu} \sum_{p+q=\nu} (f'_{p,q}(X, Y) + f''_{p,q}(X, Y)).$$

Здесь

$$f'_{p,q} = \sum_{\substack{p_1+\ldots+p_m=p \\ q_1+\ldots+q_{m-1}=q-1 \\ p_i+q_i \geqslant 1 \\ p_m \geqslant 1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{\mathrm{ad}(X)^{p_1}\mathrm{ad}(Y)^{q_1}\ldots\mathrm{ad}(X)^{p_m}(Y)}{p_1!\,q_1!\ldots p_m!},$$

$$f''_{p,q} = \sum_{\substack{p_1+\ldots+p_{m-1}=p-1 \\ q_1+\ldots+q_{m-1}=q \\ p_i+q_i \geqslant 1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{\mathrm{ad}(X)^{p_1}\mathrm{ad}(Y)^{q_1}\ldots\mathrm{ad}(Y)^{q_{m-1}}(X)}{p_1!\,q_1!\ldots q_{m-1}!}.$$

Все числители в последних двух суммах представляют собой однородные многочлены степени $\nu = p + q$, причем, согласно лемме 1, значение нашего абсолютного значения на коэффициентах этих многочленов не превосходит единицы. Далее, используя явный вид операции [,], легко подсчитать по индукции, что количество одночленов, входящих в эти многочлены, не превышает $n^{2\nu}$. Итак, каждый числитель мажорируется вещественным однородным многочленом от переменных X и Y степени ν, все коэффициенты которого равны единице, а число одночленов не превышает $n^{2\nu}$. Значение такого многочлена на векторе $(s, \ldots, s) \in R^{2n}$ $(s > 0)$ оценивается сверху числом

$$n^{2\nu}s^{\nu} = (n^2 s)^{p+q}.$$

С другой стороны, для чисел, входящих в знаменатель, имеют место следующие оценки:

$$|\nu| \geqslant a^{\nu} = a^{p+q},$$

$$|m| \geqslant a^{m} \geqslant a^{p+q},$$

$$\left.\begin{array}{l} |p_1!\,q_1!\,\ldots\,p_m!| \\ |p_1!\,q_1!\,\ldots\,q_{m-1}!| \end{array}\right\} \geqslant a^{\sum p_i + \sum q_i} = a^{p+q}.$$

Полагая $t = (n^2 s/a^3)$, мы видим, что ряд $F(X, Y) = \sum\limits_{\nu} f_{\nu}(X, Y)$ мажорируется вещественным рядом из леммы 3. При достаточно малых значениях t последний ряд сходится, что обеспечивает сходимость ряда $F(x, y)$ при достаточно малых s.

Таким образом, все теоремы полностью доказаны.

Замечания. 1. Если $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли (см. ч. I, гл. V, § 2), то ряд F вырождается в многочлен, так что его сходимость тривиальна.

2. Для того чтобы в общем случае оценить радиус сходимости ряда F, надо оценить две константы, фигурирующие в доказательстве, а именно:

1) константу a из леммы 4;

2) радиус сходимости ряда из леммы 3.

Что касается последнего ряда, то, как легко видеть, он сходится, если

$$|t| < \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, ряд F сходится в шаре $B(r)$, где

$$r < \frac{a^3}{n^2}\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

Это не слишком хорошая оценка, но для $k=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ ничего лучшего неизвестно.

Пусть k — неархимедово поле и ограничение его абсолютного значения на подполе $\mathbf{Q}$ индуцирует p-адическое абсолютное значение. Предположим, что $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $L(G_m(R))$, где R — конечномерная ассоциативная k-алгебра с единицей. Другими словами, $\mathfrak{g}\subset R$ и $[x, y]=xy-yx\in\mathfrak{g}$ для любых x, $y\in\mathfrak{g}$. Допустим для простоты, что умножение в алгебре R удовлетворяет неравенству $|x\cdot y|\leqslant|x|\cdot|y|$. При этих условиях можно определить экспоненциальный ряд

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots .$$

Экспонента определяет изоморфизм открытой аддитивной подгруппы M на себя, где

$$M=\left\{x\in R\,|\,v(x)<\frac{v(p)}{p-1}\right\}.$$

На множестве M можно определить групповой закон, полагая $G(x, y)=z$, где элемент $z\in M$ однозначно определяется соотношением $e^x\cdot e^y=e^z$. Из конструкции формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа (см. теорему 1.4.7.4) видно, что наш закон согласуется с формулой Кэмпбелла — Хаусдорфа там, где последняя сходится. Как показал Лазар[1]), фактически она сходится на всем множестве M. В частности, мы получаем, что формула Кэмпбелла — Хаусдорфа сходится на $M\cap\mathfrak{g}$.

3. Если поле k неархимедово, то, как известно (см. гл. IV, § 8), каждая локальная аналитическая группа соответствует некоторой аналитической группе. Поэтому справедливо

Следствие. *Если поле k неархимедово и имеет нулевую характеристику, то каждая конечномерная алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой аналитической группы над k.*

---

[1]) См. Лазар [3*]. — *Прим. перев.*

§ 5. Точечные распределения

В этом параграфе мы введем понятие *распределения*[1]), *носитель которого сосредоточен в одной точке*. Это понятие понадобится нам в качестве технического средства в следующем параграфе, где будет доказана эквивалентность категории формальных групп и категории алгебр Ли.

При изучении „формальных вопросов" k будет предполагаться просто коммутативным кольцом с единицей (иногда $\mathbf{Q}$-алгеброй); однако, рассматривая „вопросы сходимости", мы будем, как правило, считать, что k — поле, полное относительно нетривиального абсолютного значения.

1. Пусть X — аналитическое многообразие, и пусть $P \in X$. В гл. III, § 7 было определено локальное кольцо $\mathcal{H}_P$ многообразия X в точке P и его максимальный идеал $\mathfrak{m}_P$. Было показано, что кольцо $\mathcal{H}_P$ изоморфно кольцу сходящихся степенных рядов от n переменных, где $n = \dim_P X$. Наделим это кольцо обычной топологией, принимая степени идеала $\mathfrak{m}_P$ за фундаментальную систему окрестностей нуля. Поле $k \subset \mathcal{H}_P$ при этом автоматически наделяется дискретной топологией.

Точечным распределением на $\mathcal{H}_P$ мы назовем линейную форму $u: \mathcal{H}_P \to k$, удовлетворяющую одному из следующих двух эквивалентных условий:

(1) форма u обращается в нуль на некоторой степени идеала $\mathfrak{m}_P$;

(2) отображение u: $\mathcal{H}_P \to k$ непрерывно (относительно дискретной топологии в k).

Форму u можно продолжить по непрерывности на пополнение $\widehat{\mathcal{H}}_P$ кольца $\mathcal{H}_P$ в этой топологии. Заметим, что $\widehat{\mathcal{H}}_P$ изоморфно кольцу формальных степенных рядов от n переменных над полем k.

2. Пусть k — коммутативное кольцо с единицей и $H = k[[X_1, \ldots, X_n]]$ — кольцо формальных степен-

---

[1]) У нас больше принят термин „обобщенная функция". — *Прим. ред.*

ных рядов от n переменных над кольцом k. Обозначим через $\mathfrak{m}$ идеал, порожденный элементами $X_1, \ldots$ $\ldots, X_n$, а через H_r — факторкольцо $H/\mathfrak{m}^{r+1}$ ($r \in \mathbf{Z}$, $r > 0$). Положим, далее, $U_r = H_r^* = L(H_r, k)$. Как и выше, линейную форму u: $H \to k$ мы назовем *точечным распределением*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

(1) форма u обращается в нуль на некоторой степени $\mathfrak{m}^{r+1}$ (иными словами, отображение u „пропускается" через проекцию $H \to H_r$);

(2) отображение u непрерывно на H.

Пусть $U \subset H^*$ — подмножество всех точечных распределений. Рассмотрим проекцию $H \to H_r$. Сопряженным к ней отображением будет инъекция $U_r \to H^*$. Мы видим, что U можно отображать с объединением образов множеств $\{U_r\}$.

Рассмотрим подробнее строение k-модулей H и U. По определению H (как k-модуль) есть произведение $\prod kX^\alpha$. Для каждого α определим элемент $\Delta^\alpha \in U$ формулой

$$\Delta^\alpha(X^\beta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Элементы Δ^α линейно независимы над k. Кроме того, любой элемент $u \in U$ представляется в виде конечной линейной комбинации (над k) этих элементов, поскольку u аннулируется на некоторой степени идеала $\mathfrak{m}$. Итак, справедлива

Лемма 1. $U = \bigoplus\limits_\alpha k \cdot \Delta^\alpha$.

Имеет также место

Лемма 2. $U^* = H$.

Доказательство. Поскольку $U \subset H^*$, имеется отображение $H \to H^{**} \to U^*$. При этом отображении элемент X^α отождествляется с такой линейной формой на U, которая равна 1 на Δ^α и нулю на Δ^β ($\beta \neq \alpha$). Поэтому

$$U^* = L\left(\bigoplus_\alpha k \cdot \Delta^\alpha,\ k\right) = \prod_\alpha L(k \cdot \Delta^\alpha,\ k) = \prod_\alpha k \cdot X^\alpha = H.$$

Замечание. Распределение $\varepsilon = \Delta^0$ называется *распределением Дирака*[1]).

Посмотрим теперь, какую структуру индуцирует на U закон умножения μ: $H \otimes H \to H$. Пусть $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \otimes H + H \otimes \mathfrak{m}$ — идеал кольца $H \otimes H$. Введем в этом кольце топологию, определенную степенями идеала $\mathfrak{m}$. В такой топологии отображение μ непрерывно и потому продолжается на пополнение $H \widehat{\otimes} H$ кольца $H \otimes H$. Пусть $\bar{U}$ — множество точечных распределений кольца $H \otimes H$ (или, что то же самое, кольца $H \widehat{\otimes} H$). Сопряженное отображение μ^*: $H^* \to (H \widehat{\otimes} H)^*$ индуцирует при ограничении так называемое *диагональное отображение* δ: $U \to \bar{U}$. Смысл названия поясняет следующая

Лемма 3. (а) *Каноническое отображение $U \otimes U \to \bar{U}$ есть изоморфизм.*

(б) $\delta(\Delta^\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \Delta^\beta \otimes \Delta^\gamma$ (*формула Лейбница*).

Доказательство. Положим $X_i \otimes 1 = Y_i$ и $1 \otimes X_i = Z_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Каноническое вложение

$$H \otimes H \to k[[Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_n]] = \bar{H}$$

продолжается до изоморфизма колец $H \widehat{\otimes} H$ и $\bar{H}$. При этом отождествлении в $\bar{U}$ выделяется канонический базис $\Delta^{\alpha, \beta}$:

$$\Delta^{\alpha, \beta}(Y^{\alpha'} Z^{\beta'}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \alpha' \text{ и } \beta = \beta', \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отображение $U \otimes U \to \bar{U}$ переводит базисный элемент $\Delta^\alpha \otimes \Delta^\beta$ модуля $U \otimes U$ в базисный элемент $\Delta^{\alpha, \beta}$ модуля $\bar{U}$. Тем самым первое утверждение доказано.

---

[1]) Или дельта-функцией Дирака. — *Прим. ред.*

Для доказательства второго утверждения достаточно посмотреть, какое значение принимает форма $\delta(\Delta^\alpha)$ на произвольном одночлене $Y^\beta Z^\gamma$. Имеем

$$\delta(\Delta^\alpha)(Y^\beta Z^\gamma) = \Delta^\alpha(\mu(Y^\beta Z^\gamma)) = \Delta^\alpha(X^{\beta+\gamma}).$$

Отсюда

$$\delta(\Delta^\alpha)(Y^\beta Z^\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta+\gamma=\alpha, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

что и доказывает формулу Лейбница, а с ней и лемму.

Равенство $H = k \oplus \mathfrak{m}$ позволяет обобщить понятие касательного вектора на алгебраическую ситуацию, которую мы изучаем. Именно: мы скажем, что $u \in U$ — *касательный вектор*, если выполняются следующие три эквивалентных условия:

(1) отображение u: $H \to k$ — дифференцирование;

(2) форма u обращается в нуль на k и на $\mathfrak{m}^2$;

(3) элемент u примитивен относительно δ, т. е. $\delta(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$.

Эквивалентность первых двух условий доказывается так же, как в гл. III, § 8, п. 1. Эквивалентность условий (1) и (3) вытекает из формулы Лейбница.

§ 6. Биалгебра, ассоциированная с формальной группой

Для того чтобы мотивировать изучение „формального случая“, мы рассмотрим сначала вкратце „случай сходимости“.

1. Пусть G — аналитическая группа, $\mathcal{H}$ — локальное кольцо этой группы в точке e, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал этого кольца, $\hat{\mathcal{H}}$ — его пополнение (относительно топологии, определенной степенями идеала $\mathfrak{m}$) и U — множество точечных распределений на $\mathcal{H}$ (или на $\hat{\mathcal{H}}$). В формальной теории (§ 5, п. 2) было определено диагональное отображение δ: $U \to U \otimes U$. Используя групповой закон $\varphi : G \times G \to G$, можно определить умножение θ: $U \otimes U \to U$. Именно: введем отображение σ: $\mathcal{H}_e \to \mathcal{H}_{(e,e)}\, f \mapsto f \circ \varphi$ (здесь $\mathcal{H}_e = \mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_{(e,e)}$ — локальное кольцо группы $G \times G$ в точке

(e, e)). Полученное отображение продолжим до отображения $\hat{\sigma}\colon \mathscr{H} \to \hat{\mathscr{H}}_{(e, e)} = \mathscr{H} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{H}$. Сопряженное к $\hat{\sigma}$ отображение u есть искомое отображение $\theta = (\hat{\sigma})^*\colon U \otimes \otimes U \to U$.

В „формальной ситуации", как мы увидим, U является (относительно θ) ассоциативной $\mathbf{Q}$-алгеброй с единицей (каковою является распределение Дирака).

2. Сохраним все обозначения и предположения § 5, п. 2. Пусть $\overline{H} = k[[Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_n]]$, и пусть $F \in \overline{H}^n$ — формальный групповой закон над k от n переменных. Положим $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \mathbin{\widehat{\otimes}} H + H \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathfrak{m}$ (напомним, что при доказательстве леммы 5.3 кольца $\overline{H}$ и $H \mathbin{\widehat{\otimes}} H$ были отождествлены).

Поскольку ряды $F = (F_i)$ не имеют свободных членов, для любого элемента $f \in H$ можно образовать композицию $f \circ F \in \overline{H}$ (см. Бурбаки [3*], гл. IV, § 5, п. 5). Обозначим через $\sigma\colon H \to \overline{H}$ отображение $f \mapsto f \circ F$. Тогда $\sigma(\mathfrak{m}^r) \subset \overline{\mathfrak{m}}^r$, так что σ — непрерывное отображение (относительно топологий, определенных идеалами $\mathfrak{m}$ и $\overline{\mathfrak{m}}$). Пусть $\theta\colon U \otimes U \to U$ — сопряженное к σ отображение.

Лемма 1. *Отображение θ наделяет U структурой ассоциативной алгебры с единицей (каковой является распределение Дирака).*

Доказательство. Нам придется иметь дело с двумя кольцами степенных рядов $\overline{H} = k[[Y, Z]]$ и $\overline{\overline{H}} = k[[Y, Z, W]]$, где $W = (W_1, \ldots, W_n)$. Через Δ_Y^α, Δ_Z^β, Δ_W^γ обозначим элементы, двойственные к одночленам Y^α, Z^β, W^γ соответственно. Тогда, например, произведение $\Delta_Y^\alpha \Delta_Z^\beta \Delta_W^\gamma$ двойственно к одночлену $Y^\alpha Z^\beta W^\gamma$.

Покажем вначале ассоциативность операции θ. Пусть $\Delta^\alpha \otimes \Delta^\beta \otimes \Delta^\gamma$ — произвольный базисный элемент модуля $U \otimes U \otimes U$. Тогда для $f \in H$ имеем

$$\theta(\Delta^\alpha, \theta(\Delta^\beta, \Delta^\gamma)) f = \Delta_Y^\alpha \Delta_Z^\beta \Delta_W^\gamma (f \circ F(Y, F(Z, W))),$$

$$\theta(\theta(\Delta^\alpha, \Delta^\beta), \Delta^\gamma) f = \Delta_Y^\alpha \Delta_Z^\beta \Delta_W^\gamma (f \circ (F(Y, Z), W)).$$

Требуемая ассоциативность легко вытекает из ассоциативности закона F.

Осталось показать, что распределение Дирака ε является единицей относительно нашего умножения. Пусть $\Delta^\alpha \in U$ и $f \in H$. Тогда

$$\theta(\varepsilon, \Delta^\alpha) f = \varepsilon_Y \Delta_Z^\alpha (f \circ F(Y, Z)) = \Delta_Z^\alpha (f \circ F(0, Z)) = \Delta_Z^\alpha (f(Z)).$$

Это означает, что $\theta(\varepsilon, \Delta^\alpha) = \Delta^\alpha$. Тем самым доказано, что ε — левая единица. Аналогично доказывается, что ε — правая единица.

Лемма 2. *Диагональное отображение* δ: $U \to U \otimes U$ *является гомоморфизмом алгебр.*

Доказательство. Мы должны доказать коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} U \otimes U & \xrightarrow{\delta \otimes \delta} & (U \otimes U) \otimes (U \otimes U) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \otimes \theta \\ U & \longrightarrow & U \otimes U \end{array}$$

Поскольку все модули в этой диаграмме свободны, нам достаточно доказать коммутативность двойственной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} H \mathbin{\widehat{\otimes}} H & \xleftarrow{\mu \mathbin{\widehat{\otimes}} \mu} & (H \mathbin{\widehat{\otimes}} H) \mathbin{\widehat{\otimes}} (H \mathbin{\widehat{\otimes}} H) \\ \sigma \uparrow & & \uparrow \sigma \mathbin{\widehat{\otimes}} \sigma \\ H & \xleftarrow{\mu} & H \mathbin{\widehat{\otimes}} H \end{array}$$

Поскольку все отображения этой диаграммы непрерывны относительно соответствующих топологий, достаточно проверить коммутативность на элементах вида $f \otimes g \in H \mathbin{\widehat{\otimes}} H$, где $f, g \in H$. Но

$$\sigma(\mu(f \otimes g)) = \sigma(fg) = fg \circ F = (f \circ F)(g \circ F) =$$
$$= \mu \mathbin{\widehat{\otimes}} \mu (\sigma \mathbin{\widehat{\otimes}} \sigma (f \otimes g)),$$

что и требовалось доказать.

Множество U, наделенное законом умножения θ: $U \otimes U \to U$ и диагональным отображением δ: $U \to$

$\to U \otimes U$, называется *биалгеброй, ассоциированной с формальной группой* F.

Примем следующие обозначения:

$$\theta(u, v) = u * v$$

и

$$[u, v]_* = u * v - v * u.$$

Лемма 3. *Для любых* α *и* β *имеем*

$$\Delta^\alpha * \Delta^\beta = \binom{\alpha+\beta}{\alpha} \Delta^{\alpha+\beta} + E_{\alpha, \beta},$$

где остаточный член $E_{\alpha, \beta}$ *есть линейная комбинация элементов* Δ^γ, $0 < |\gamma| < |\alpha + \beta|$.

Доказательство. Требуется показать, что формы $\Delta^\alpha * \Delta^\beta$ и $\binom{\alpha+\beta}{\alpha}\Delta^{\alpha+\beta}$ принимают на элементах X^γ, $|\gamma| \geqslant |\alpha+\beta|$, одинаковые значения и что $E_{\alpha, \beta}$ обращается в нуль на k. Но

$$X^\gamma \circ F(Y, Z) = F(Y, Z)^\gamma = (Y + Z)^\gamma + o(d^0 \geqslant |\gamma|)$$

и

$$(Y + Z)^\gamma = \sum_{\lambda+\mu=\gamma} \binom{\gamma}{\lambda} Y^\lambda Z^\mu.$$

Так как

$$\Delta^\alpha * \Delta^\beta(X^\gamma) = \Delta_Y^\alpha \Delta_Z^\beta (X^\gamma \circ F(Y, Z)),$$

мы получаем

$$\Delta^\alpha * \Delta^\beta(X^\gamma) = \left\{ \begin{matrix} \binom{\alpha+\beta}{\alpha} & \text{при} \quad \alpha+\beta=\gamma \\ 0 & \text{в противном случае} \end{matrix} \right\} = \binom{\alpha+\beta}{\alpha} \Delta^{\alpha+\beta}(X^\gamma).$$

Итак, мы проверили совпадение элементов $\Delta^\alpha * \Delta^\beta$ и $\binom{\alpha+\beta}{\alpha}\Delta^{\alpha+\beta}$ на одночленах X^γ, где $|\gamma| \geqslant |\alpha+\beta|$. Заметим теперь, что оба эти элемента на X^0 равны 1, если $\alpha+\beta=0$, и равны нулю в противном случае, т. е. $E_{\alpha, \beta}$ обращается в нуль на k. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, ассоциированная с формальной группой F (см. § 1). Как векторное пространство алгебра $\mathfrak{g}$ совпадает с k^n. Обозначим через $\{D_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, стандартный базис пространства k^n. Определим отображение $\psi\colon \mathfrak{g} \to U$ формулой $\psi(D_i) = \Delta^{\delta_i}$. Из определения ясно, что ψ — линейный изоморфизм пространства $\mathfrak{g}$ на множество тех элементов $u \in U$, которые обращаются в нуль на k^n и $\mathfrak{m}^2$.

Лемма 4. *Пусть* x, $y \in \mathfrak{g}$ *и* $f \in H$ — *линейная функция. Тогда*

$$\psi([x, y])f = f(B(x, y) - B(y, x)).$$

Доказательство. Так как по определению $[x, y] = B(x, y) - B(y, x)$, нам нужно показать, что

$$\psi([x, y])f = f([x, y]).$$

Учитывая, что обе части этого равенства трилинейны по x, y и f, достаточно рассмотреть случай $x = D_i$, $y = D_j$, $f = X_k$. Но тогда как правая, так и левая части равны просто структурной константе $\gamma_{ij}^k(D_1, \ldots, D_n)$, что и завершает доказательство леммы.

Теорема 1. *Отображение* $\psi\colon \mathfrak{g} \to U$ *является гомоморфизмом алгебр Ли, т. е.* $\psi([x, y]) = [\psi(x), \psi(y)]_*$.

Доказательство. Нам известно, что $\psi([x, y])$ обращается в нуль на k и $\mathfrak{m}^2$. То же самое справедливо и для $[\psi(x), \psi(y)]_*$ (см. лемму 3). Остается, следовательно, показать, что $\psi([x, y])$ и $[\psi(x), \psi(y)]_*$ совпадают на множестве представителей смежных классов фактормодуля $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, например на линейных функциях. Но для $f \in H$ имеем

$$\begin{aligned}[\psi(x), \psi(y)]_* f &= (\psi(x) \otimes \psi(y) - \psi(y) \otimes \psi(x))(f \circ F(X, Y)) = \\ &= (\psi(x) \otimes \psi(y) - \psi(y) \otimes \psi(x))(f \circ X + f \circ Y + \\ &\qquad + f \circ B(X, Y) + \ldots) = \\ &= (\psi(x) \otimes \psi(y) - \psi(y) \otimes \psi(x))(f \circ B(X, Y)) = \\ &= f(B(x, y) - B(y, x)).\end{aligned}$$

и теорема 6.1 вытекает из леммы 4.

Начиная с этого момента мы будем предполагать, что кольцо k является $\mathbf{Q}$-алгеброй.

Отображение ψ: $\mathfrak{g} \to U$ продолжается до гомоморфизма $U\mathfrak{g} \to U$ универсальной обертывающей алгебры (см. ч. I, гл. III, § 1); этот гомоморфизм мы для краткости обозначим той же буквой ψ.

Теорема 2. *Отображение* ψ: $U\mathfrak{g} \to U$ — *изоморфизм биалгебр.*

Доказательство. В алгебрах $U\mathfrak{g}$ (см. ч. I, гл. III, § 4) и U (§ 5, п. 2) определены фильтрации. Непосредственно проверяется, что гомоморфизм ψ согласован с этими фильтрациями и что относительно них алгебры $U\mathfrak{g}$ и U отделимы и полны. Следовательно (см. Бурбаки [2*], Ch. 3. § 2, п. 8), достаточно установить, что отображение $\mathrm{gr}(\psi)$ — изоморфизм.

По теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта (теорема 13.4.3) алгебра $U\mathfrak{g}$ — свободный k-модуль с базой $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$. Замечая, что k — алгебра над $\mathbf{Q}$, мы видим, что в качестве базиса алгебры U можно взять элементы $\bar{D}^\alpha = \frac{1}{\alpha!}\Delta^\alpha$. По лемме 2 $\psi(D^\alpha)$ и $\bar{D}^\alpha$ совпадают в $\mathrm{gr}(U)$, а потому $\mathrm{gr}(\psi)$ — изоморфизм.

Итак, установлено, что ψ — изоморфизм алгебр. Для того чтобы распространить это утверждение на биалгебры, нам надо проверить коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} U\mathfrak{g} & \xrightarrow{\Delta} & U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \\ \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi\otimes\psi} \\ U & \xrightarrow{\delta} & U \otimes U \end{array}$$

На основании предложения 1.3.5.2 леммы 5.3 и леммы 2 имеем

а) Δ и δ — гомоморфизмы алгебр;

б) для любого $u \in \mathfrak{g} \subset U\mathfrak{g}$

$$(\psi \otimes \psi)\Delta(u) = \psi(u) \otimes 1 + 1 \otimes \psi(u) = \delta \circ \psi(u).$$

Поскольку элементы из $\mathfrak{g}$ порождают $U\mathfrak{g}$ (предложение 1.3.4.1) равенство $\psi \circ \Delta = \delta \circ \psi$ выполняется для любых элементов алгебры $U\mathfrak{g}$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Функтор T: $(FG) \to (LA)$ из категории формальных групп над k в категорию конечномерных k-алгебр Ли, определенный в § 1, задает эквивалентность этих категорий, т. е.*

(1) *отображение* $\mathrm{Hom}(F_1, F_2) \to \mathrm{Hom}(TF_1, TF_2)$ *биективно* $(F_1, F_2 \in (FG))$;

(2) *для любой алгебры Ли* $\mathfrak{g} \in (LA)$ *существует формальная группа* $F \in (FG)$, *такая, что алгебры* TF *и* $\mathfrak{g}$ *изоморфны.* (*Напомним, что* k *здесь* — $\mathbf{Q}$-*алгебра.*)

Доказательство. (1) Пусть F_1 и F_2 — формальные групповые законы от n_1 и n_2 переменных (над k) соответственно. Обозначим через H_i $(i = 1, 2)$ кольцо формальных степенных рядов $k[[X_1, \ldots, X_{n_i}]]$, через U_i — биалгебру точечных распределений кольца H_i, через $\mathfrak{g}_i$ — алгебру Ли, ассоциированную с F_i, и через $\bar{U}_i$ — универсальную обертывающую алгебру алгебры $\mathfrak{g}_i$. Введем далее следующие обозначения для отображений:

а) μ_i: $H_i \mathbin{\widehat{\otimes}} H_i \to H_i$
θ_i: $U_i \otimes U_i \to U_i$ законы умножения;
$\bar{\theta}_i$: $\bar{U}_i \otimes \bar{U}_i \to \bar{U}_i$

б) σ_i: $H_i \to H_i \mathbin{\widehat{\otimes}} H_i$
δ_i: $U_i \to U_i \otimes U_i$ диагональные отображения;
$\bar{\delta}_i$: $\bar{U}_i \to \bar{U}_i \otimes \bar{U}_i$

в) ψ_i: $\bar{U}_i \to U_i$ — изоморфизм из теоремы 2.

Итак, для заданного гомоморфизма t: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ мы должны найти соответствующий гомоморфизм формальных групп τ: $F_1 \to F_2$, такой, что $T(\tau) = t$, и доказать его единственность.

Покажем, что отображение

$$\mathrm{Hom}(F_1, F_2) \to \mathrm{Hom}(TF_1, TF_2)$$

разлагается в цепочку отображений, каждое из которых биективно. Мы сделаем это за шесть шагов.

Шаг 0. Начнем с предварительного шага. Пусть $\mathrm{Hom}_{AL}(H_2, H_1)$ — множество всех гомоморфизмов алгебр, переводящих $\mathfrak{m}_2$ в $\mathfrak{m}_1$ (такие гомоморфизмы мы будем называть *допустимыми*; они непрерывны относительно естественных топологий колец H_2 и H_1). Обозначим через S множество всех элементов $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{n_2}) \in H_1^{n_2}$, у которых $\tau_i(0) = 0$ для всех i.

Каждый элемент $\tau \in S$ определяет отображение $\varphi_\tau : H_2 \to H_1$, $g \mapsto g \circ \tau$ ($g \in H_2$). Нетрудно проверить (см. Бурбаки [3*], гл. IV, § 5, п. 5), что φ_τ — допустимый гомоморфизм алгебр.

Лемма 5. *Отображение $\tau \mapsto \varphi_\tau$ есть биекция множества S на* $\mathrm{Hom}_{AL}(H_2, H_1)$.

Доказательство. Указанное отображение, очевидно, инъективно, так как $\varphi_\tau(X_i) = \tau_i$. Докажем, что оно сюръективно. Рассмотрим элемент $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in S$, где $\tau_i = \varphi(X_i)$. Поскольку φ и φ_τ — гомоморфизмы алгебр, они совпадают на кольце $k[X_1, \ldots, X_{n_2}]$. Но тогда они совпадают и всюду, так как это кольцо плотно в H_2, а φ и φ_τ непрерывны.

Шаг 1. Пусть $\mathrm{Hom}_{BA}(H_2, H_1)$ — множество допустимых гомоморфизмов биалгебр.

Лемма 6. *Пусть $\tau \in S$. Тогда*

$$\tau \in \mathrm{Hom}_{FG}(F_1, F_2) \Leftrightarrow \varphi_\tau \in \mathrm{Hom}_{BA}(H_2, H_1) \quad (\tau \in S).$$

Доказательство. Ввиду леммы 5 включение $\varphi_\tau \in \mathrm{Hom}_{BA}(H_2, H_1)$ означает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} H_2 & \xrightarrow{\delta_2} & H_2 \otimes H_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_\tau} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_\tau \otimes \varphi_\tau} \\ H_1 & \xrightarrow{\delta_1} & H_1 \otimes H_1 \end{array}$$

Последняя имеет место тогда и только тогда, когда

$$g \circ \tau \circ F_1(X, Y) = \delta_1 \circ \varphi_\tau(g) = (\varphi_\tau \otimes \varphi_\tau) \circ \delta_2(g) = \\ = g \circ F_2(\tau X, \tau Y)$$

для всех $g \in H_2$. Это равенство в свою очередь равносильно соотношению

$$\tau \circ F_1(X, Y) = F_2(\tau X, \tau Y),$$

которое и выражает тот факт, что τ — гомоморфизм формальных групп.

Шаг 2. Пусть $\mathrm{Hom}_{BA}(U_1, U_2)$ и $\mathrm{Hom}_{BA}(\bar{U}_1, \bar{U}_2)$ — множества гомоморфизмов биалгебр.

Лемма 7. *Двойственность определяет изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_{BA}(H_2, H_1) \simeq \mathrm{Hom}_{BA}(U_1, U_2).$$

Доказательство. Пусть $\varphi: H_2 \to H_1$ — допустимый гомоморфизм биалгебр, и пусть $u \in U_1$. Отображение $u_1 \circ \varphi: H_2 \to k$ непрерывно, и, следовательно, $u_1 \circ \varphi \in U_2$. Итак, определено отображение $\mathrm{Hom}_{BA}(H_2, H_1) \to \mathrm{Hom}_{BA}(U_1, U_2)$.

Обратно, пусть $\psi: U_1 \to U_2$ — гомоморфизм биалгебр, и пусть $g \in H_2$. На основании леммы 5 (§ 5) $g \circ \psi \in H_1$. В силу двойственности отображение $g \mapsto g \circ \circ \psi$ есть гомоморфизм биалгебр, поскольку таков гомоморфизм ψ. Далее, поскольку $\varphi(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$, $g \in \mathfrak{m}_2 \Rightarrow \Rightarrow g \circ \psi \in \mathfrak{m}_1$. Итак, $g \mapsto g \circ \psi$ — допустимый гомоморфизм биалгебр; тем самым определено отображение

$$\mathrm{Hom}_{BA}(U_1, U_2) \to \mathrm{Hom}_{BA}(H_2, H_1).$$

Построенные отображения, как легко проверить, взаимно обратны. Лемма доказана.

Шаг 3. Из теоремы 6.2 вытекает

Лемма 8. *Отображения* ψ_i $(i = 1, 2)$ *определяют изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_{BA}(U_1, U_2) \simeq \mathrm{Hom}(\bar{U}_1, \bar{U}_2).$$

Шаг 4. Из определения универсальной алгебры и теоремы 1.3.5.4 вытекает

Лемма 9. $\mathrm{Hom}_{BA}(\bar{U}_1, \bar{U}_2) = \mathrm{Hom}_{LA}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$.

Шаг 5. Нам осталось рассмотреть композицию биекций, фигурирующих в леммах 6, 7, 8, 9, и убедиться, что она совпадает с функтором T.

Пусть $\tau \in \mathrm{Hom}_{FG}(F_1, F_2)$. Запишем

$$\tau(X) = \sum_i t_i(X),$$

где $t_i(X)$ — однородная компонента степени i. Ясно, что $T(\tau) = t_1$. Пусть $t \in \mathrm{Hom}_{LA}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ — элемент, соответствующий гомоморфизму τ при наших биекциях. Мы должны показать, что $t = t_1$.

Пусть $u \in \mathfrak{g}_1$. Для того чтобы проверить равенство $t(u) = t_1(u)$, достаточно показать, что $g(t(u)) = g(t_1(u))$, где $g \in H_2$ — линейная функция. Но

$$g(t(u)) = u(\varphi_\tau(g)) = u(g \circ \tau) = u\left(\sum_i g t_i\right) = u(g t_1),$$

$$g(t_1(u)) = u(g t_1).$$

Первая строка есть просто расшифровка изоморфизмов, определенных в леммах 6, 7, 8, 9; во второй строке мы воспользовались отождествлением алгебры $\mathfrak{g}_i$ с подмножеством в U_i (указанное отождествление задается отображением ψ_i). Сравнивая оба результата, получаем искомое равенство.

(2) Сопоставим алгебре Ли $\mathfrak{g} \in (LA)$ формальную группу с помощью формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа. Все основные детали этого построения по существу приведены в первой части доказательства теоремы 4.1; там же было установлено, что алгебра Ли этой формальной группы совпадает с $\mathfrak{g}$. Хотя в той теореме кольцо k предполагалось полем нулевой характеристики, доказательство было полностью „формальным“ и использовало лишь тот факт, что k есть $\mathbf{Q}$-алгебра.

Теорема полностью доказана.

Замечание. Доказательство части (2) теоремы 3 можно было бы провести иначе, доказав вначале, что k-алгебра, двойственная к $U\mathfrak{g}$, изоморфна кольцу формальных степенных рядов $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ ($n = \dim \mathfrak{g}$), а затем заметив, что диагональная структура алгебры $U\mathfrak{g}$ определяет в этом кольце искомый формальный групповой закон $F(X, Y)$.

§ 7. Сходимость формальных гомоморфизмов

Пусть снова k — поле, полное относительно нетривиального абсолютного значения, и $\operatorname{char} k = 0$.

Теорема 1. *Пусть G_1 и G_2 — локальные аналитические группы, F_1 и F_2 — формальные групповые* *законы, индуцированные картами* c_1 *и* c_2 *этих групп в точках* e_1 *и* e_2 *соответственно. Тогда любой формальный гомоморфизм этих групп* $\tau\colon F_1 \to F_2$ *сходится, т. е. определяет локальный гомоморфизм* $\tau\colon G_1 \dashrightarrow G_2$.

Доказательство. Формальные законы F_1 и F_2 сходятся, так как они лишь запись соответствующих сходящихся законов умножения в G_1 в локальных координатах. Поскольку заключение теоремы является локальным, мы можем предполагать, что G_i — открытая окрестность точки $0 \in k^{n_i}$ $(n_i = \dim_{e_i} G_i,\ i = 1, 2)$ и что умножение определяется функциями $F_i\ (X, Y)$. Мы рассмотрим сначала частный, а потом общий случай.

Частный случай. $G_1 = k$, $F_1 =$ „+“, $G_2 = G$, $F_2 = F$. Утверждение о том, что τ — формальный гомоморфизм, сводится к следующим формальным равенствам:

$$\tau(s+t) = F(\tau(s), \tau(t)),$$
$$\tau(0) = 0.$$

Дифференцируя это равенство формально по t и полагая $t = 0$, мы видим, что τ удовлетворяет следующему формальному дифференциальному уравнению:

$$\tau'(s) = D_2F(\tau(s), 0)\cdot\tau'(0).$$

Так как $D_2F(\tau(0), 0) = D_2F(0, 0) = \mathrm{id}_{k^n}$, написанное выше уравнение формально непротиворечиво при $s = 0$. Положим $\varphi(X) = D_2F(X, 0)\,\tau'(0)$, где $\tau'(0)$ — любой фиксированный вектор из k^n. Сходимость гомоморфизма τ есть частный случай следующей теоремы, которая будет доказана в добавлении к этой главе.

Теорема 7.2. *Пусть* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — *набор из* n *формальных сходящихся степенных рядов от* n *переменных. Тогда формальное дифференциальное уравнение* $\tau'(s) = \varphi(\tau(s))$ $(\tau(0) = 0)$ *обладает единственным формальным решением, и решение это сходится.*

Общий случай. Пусть F — сходящийся формальный групповой закон, соответствующий локальной группе G, и X — элемент алгебры $\mathfrak{g} = L(G)$. Этот элемент однозначно определяет гомоморфизм алгебр Ли L_X: $k \to \mathfrak{g}$, такой, что $L_X(1) = X$. Согласно теореме 6.3 существует единственный формальный гомоморфизм φ_X: $k^+ \to F$, такой, что $\varphi'_X(0) = X$. В частном случае мы видели, что гомоморфизм φ_X сходится.

Пусть $\mathfrak{g}_i = L(G_i)$ $(i = 1, 2)$ и $t = L(\tau)$: $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$. Конструкция гомоморфизма φ_X обладает следующим функториальным свойством: для $X \in \mathfrak{g}_1$

$$\varphi_{t\,(X)} = \tau \circ \varphi_X \left(X \in \mathfrak{g}_1\right) \text{ (формально).}$$

Выберем базис $\{X_\mu\}$ алгебры $\mathfrak{g}_1$ и положим $Y_\mu = t(X_\mu)$. Определим два локальных морфизма

$$\begin{tikzcd} & G_1 \\ k^{n_1} \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \\ & G_2 \end{tikzcd}$$

формулами

$$\varphi_1(t_1, \ldots, t_{n_1}) = \varphi_{X_1}(t_1) \ldots \varphi_{X_{n_1}}(t_{n_1}),$$

$$\varphi_2(t_1, \ldots, t_{n_1}) = \varphi_{Y_1}(t_1) \ldots \varphi_{Y_{n_1}}(t_{n_1}).$$

Касательное отображение $L(\varphi_1)$: $k^{n_1} \to \mathfrak{g}_1$ есть изоморфизм, поскольку оно переводит μ-й (стандартный) базисный вектор $D_\mu \in k^{n_1}$ в вектор X_μ. Следовательно, φ_1 — наложение и потому локальный изоморфизм (в окрестности точки $0 \in k^{n_1}$).

Формальное равенство $\tau \circ \varphi_1 = \varphi_2$ можно переписать теперь так: $\tau = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$. Однако правая часть этого равенства, как мы только что видели, сходится, значит, сходится и τ.

Теорема полностью доказана.

Следствие 1. *Пусть G_1 и G_2 — локальные аналитические группы, алгебры Ли которых $L(G_1)$ и $L(G_2)$ изоморфны. Тогда*

1) *любой изоморфизм* $L(G_1) \to L(G_2)$ *индуцирует локальный изоморфизм* $G_1 \to G_2$;

2) *в неархимедовом случае локальные группы* G_1 *и* G_2 *содержат изоморфные открытые подгруппы.*

Доказательство. Первое утверждение является следствием доказанной теоремы и теоремы 3 § 6. Второе утверждение непосредственно вытекает из первого и из теоремы 4.8.1.

Следствие 2. *Пусть* G — *локальная аналитическая группа,* $\mathfrak{g} = L(G)$ *и* $CH(\mathfrak{g})$ — *локальная аналитическая группа, построенная по алгебре* $\mathfrak{g}$ *при помощи формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа* (см. § 4). *Тогда существует единственный локальный изоморфизм* $CH(\mathfrak{g}) \to G$, *такой, что* $L(\exp) = \mathrm{id}$.

Замечание. Пусть $G = GL(V)$, где V — конечномерное векторное пространство над полем k. Положим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots .$$

Мы утверждаем, что $\exp(x) = e^x$ в окрестности точки $0 \in \mathfrak{g} = \mathrm{End}\, V$. В самом деле, в силу конструкции формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа ряд e^X определяет формальный гомоморфизм $CH(\mathfrak{g}) \to G$, причем $L(e^X) = \mathrm{id}$. Следовательно, в силу единственности $\exp(X) = e^X$, как и утверждалось.

Изучим отображение exp в случае, когда $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ и G — аналитическая группа. Пользуясь тем, что в (формальной) группе $CH(\mathfrak{g})$ операция возведения в n-ю степень выглядит особенно просто: $f_n(X) = nX$, мы можем продолжить отображение exp на все пространство $\mathfrak{g}$. Пусть U — область определения отображения exp, и пусть $x \in \mathfrak{g}$. Поскольку k — числовое поле, существует такое целое $n > 0$, что $\frac{1}{n} x \in U$. Положим

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{1}{n} x\right)^n . \qquad (*)$$

Мы имеем

$$\exp\left(\frac{1}{n} x\right)^n = \exp\left(\frac{1}{nm} x\right)^{nm} .$$

Следовательно, приведенное выше определение не зависит от выбора числа n:

$$\exp\left(\frac{1}{n}x\right)^n = \exp\left(\frac{1}{nm}x\right)^{nm} = \exp\left(\frac{1}{m}x\right)^m.$$

Для каждого $x_0 \in \mathfrak{g}$ можно в некоторой его окрестности ограничиться единым числом n в формуле (*). Отсюда видно, что отображение exp аналитично. Как известно, оно является наложением в точке $0 \in \mathfrak{g}$, однако это верно не во всех точках, и, вообще говоря, отображение exp не биективно.

Следствие 3. *Пусть $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, и G — аналитическая группа над k с абелевой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда*

(1) *если группа G связна, то она абелева;*

(2) *в общем случае группа G содержит открытую абелеву подгруппу Ли.*

Доказательство. Очевидно, (1) $\Rightarrow$ (2). Докажем (1). Поскольку $\mathfrak{g}$ — абелева алгебра, группа $CH(\mathfrak{g})$ совпадает с ее аддитивной группой $\mathfrak{g}^+$. Мы утверждаем, что (глобальное) отображение exp определяет гомоморфизм групп. Действительно, пусть $x, y \in \mathfrak{g}$. Выберем такое целое $n > 0$, что $\frac{1}{n}x$, $\frac{1}{n}y$, $\frac{1}{n}(x+y)$ лежат в той области, где exp является локальным изоморфизмом. Тогда

$$\exp\left(\frac{1}{n}x\right)\exp\left(\frac{1}{n}y\right) = \exp\left(\frac{1}{n}(x+y)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}y\right)\exp\left(\frac{1}{n}x\right).$$

Но поскольку элементы $\exp\left(\frac{1}{n}x\right)$ и $\exp\left(\frac{1}{n}y\right)$ перестановочны, мы получаем, возводя в n-ю степень,

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y).$$

Итак, exp — гомоморфизм; следовательно, это отображение является наложением во всех точках, так что $\exp(\mathfrak{g})$ — открытая абелева подгруппа в G. Если группа G связна, то $\exp(\mathfrak{g}) = G$, так как всякая открытая подгруппа замкнута.

Следствие 4. *Пусть k — неархимедово поле. Тогда всякая аналитическая группа G с абелевой алгеброй Ли $\mathfrak{g} = L(G)$ содержит открытую подгруппу, изоморфную группе A^n, где A — кольцо нормирования поля k и $n = \dim G$.*

Доказательство. Наш результат вытекает из следующих двух фактов: во-первых, группа $CH(\mathfrak{g})$ совпадает с аддитивной группой $\mathfrak{g}^+$; во-вторых, $CH(\mathfrak{g})$ содержит открытую подгруппу, изоморфную открытой подгруппе в G.

Пример (к следствию 4). G — группа точек абелевого многообразия, определенного над полем $\mathbf{Q}_p$.

§ 8. Третья теорема Ли

В этом параграфе $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

Теорема 1. *Пусть G — связная и односвязная аналитическая группа (над k), G' — любая другая аналитическая группа над k, и пусть $\mathfrak{g} = L(G)$ и $\mathfrak{g}' = L(G')$ — соответствующие алгебры Ли. Тогда отображение $\mathrm{Hom}_{AG}(G, G') \to \mathrm{Hom}_{LA}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ биективно.*

Доказательство. Пусть t: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ — гомоморфизм алгебр Ли. Мы должны показать, что $t = L(\varphi)$, где φ: $G \to G'$ — однозначно определенный аналитический гомоморфизм. Мы знаем, что гомоморфизм t единственным образом продолжается до локального гомоморфизма f: $G \dashrightarrow G'$ (теорема 3.6 и теорема 1.7). График этого отображения $\Gamma_f \subset G \times G'$ является локальной аналитической подгруппой. Пусть (H, i) — аналитическая группа, индуцированная локальной группой Γ_f (см. гл. IV, § 4). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\psi"'] & G \times G' \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & G \end{tikzcd}$$

где $\psi = \mathrm{pr}_1 \circ i$. Очевидно, ψ — локальный изоморфизм. Далее, поскольку группа H связна, а группа G односвязна, ψ является изоморфизмом на открытую подгруппу группы G. В силу связности последней отображение ψ сюръективно. Положим $\varphi = \mathrm{pr}_2 \circ i \circ \psi^{-1}$. Легко видеть, что отображения φ и f локально совпадают; тем самым существование требуемого гомоморфизма доказано. Осталось заметить, что два гомоморфиза φ_1 и φ_2: $G \to G'$, для которых $L(\varphi_1) = L(\varphi_2)$, совпадают в некоторой окрестности единицы, а следовательно, совпадают и всюду на G, так как множество $\{x \in G / \varphi_1(x) = \varphi_2(x)\}$ открыто и замкнуто в G.

Теорема 2. *Категория связных односвязных аналитических групп (вещественных или комплексных) эквивалентна категории конечномерных алгебр Ли.*

Доказательство. Теорема вытекает из теоремы 1 и следующей теоремы 3.

Теорема 3 (третья теорема Ли). *Для всякой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует связная односвязная аналитическая группа G, такая, что $L(G) = \mathfrak{g}$.*

Доказательство. Эта теорема была впервые полностью доказана Картаном. Мы дадим набросок его доказательства, но сначала приведем более простое доказательство, основанное на мощной теореме Адо. Заметим прежде всего, что нам достаточно найти какую-нибудь группу Ли G, такую, что $L(G) = \mathfrak{g}$, поскольку универсальная накрывающая группа связной компоненты точки $e \in G$ будет удовлетворять всем требуемым условиям.

Доказательство 1. Воспользуемся теоремой Адо (см. Бурбаки [1], гл. I, § 8, п. 3, или Джекобсон [1], гл. 6, § 2).

Теорема (Адо). *Всякая конечномерная алгебра Ли обладает точным конечномерным линейным представлением.*

Рассмотрим теперь локальную группу H, построенную с помощью формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа по алгебре $\mathfrak{g}$. Указанное в теореме Адо точное представление t: $\mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ индуцирует некоторый локальный гомоморфизм f: $H - - \to GL(V)$. Но поскольку t — точное представление, гомоморфизм f регулярен в точке e, и, следовательно, H соответствует локальной подгруппе группы $GL(V)$. Но в этом случае локальная группа H эквивалентна аналитической группе (см. гл. IV, § 4).

Доказательство 2. Частные случаи. Теорема верна в следующих частных случаях:

1° алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста;

2° алгебра $\mathfrak{g}$ абелева.

Действительно, в случае 1° отображение $\operatorname{ad}: \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ инъективно, и мы можем повторить предыдущее рассуждение, не прибегая к теореме Адо. Проще, однако, заметить, что $\operatorname{Im}(\operatorname{ad}) = \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ и, следовательно, $\mathfrak{g} = L(\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}))$ (см. § 3, п. 4, (iv)).

Случай 2° тривиален, так как в качестве группы G можно взять аддитивную группу самой алгебры $\mathfrak{g}$.

Общий случай. Доказательство будем вести индукцией по $\dim \mathfrak{g}$. Если имеет место случай 1° или 2°, то все доказано. В противном случае, как мы знаем (см. ч I, гл. VI, § 4), алгебра $\mathfrak{g}$ есть полупрямое произведение своих подалгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, причем $\mathfrak{g}_1$ — идеал алгебры $\mathfrak{g}$. Очевидно, $\dim \mathfrak{g}_i < \dim \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$.

Пусть φ: $\mathfrak{g}_2 \to \operatorname{Der}(\mathfrak{g}_1)$ — гомоморфизм, определяющий структуру полупрямого произведения. По индукции существуют связные односвязные группы Ли G_1 и G_2, такие, что $L(G_1) = \mathfrak{g}_1$, $L(G_2) = \mathfrak{g}_2$. Покажем, что $\mathfrak{g} = L(G)$, где G — полупрямое произведение групп G_1 и G_2.

Основные этапы доказательства:

а) $\operatorname{Der}(\mathfrak{g}_1) = L(A_1)$, где $A_1 = \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}_1)$;

б) $A_1 = \operatorname{Aut}(G_1)$ по теореме 1;

в) группа Ли A_1 аналитически действует на группе G_1.

В самом деле, пусть $a \in A_1$ и $g \in G$. Найдем окрестность $N \subset A_1$ точки a и окрестность U точки g, такие, что соответствующее отображение $N \times U \to G$ аналитично. Пусть $W_1 \subset \mathfrak{g}_1$ — окрестность нуля, в которой сходится формула Кэмпбелла — Хаусдорфа. Выберем окрестность $N \subset A_1 (a \in N)$ и окрестность $W_2 \subset W_1$ $(0 \in W_2)$, для которых $N(W_2) \subset W_1$. Положим

$V=\exp(W_2)$. Действие $N\times V\to G$ индуцировано действием $N\times W_2\to W_1$. Последнее отображение, очевидно, аналитично, значит, аналитично и первое.

Поскольку группа G_1 связна, существует такое целое $n>0$, что $g\in V^{(n)}$, где $V^{(n)}$ — множество всевозможных произведений n элементов из V. Мы можем считать множество V открытым. Множество $V^{(n)}$, будучи объединением сдвигов окрестности V, тоже будет открытым. Пусть $U=V^{(n)}$, и пусть θ: $A_1\times G_1\to G_1$ — действие группы A_1 на G_1. Покажем, что отображение θ аналитично на $N\times U$. Рассмотрим декартово n-кратное произведение V^n и n-кратное умножение μ: $V^n\to U$. Определим отображение $\bar\theta$: $N\times V^n\to G$, положив

$$\theta_1(b,\ g_1,\ \ldots,\ g_n)=\theta(bg_1)\ \ldots\ \theta(bg_n).$$

При таком определении диаграмма

$$\begin{tikzcd} N\times V^n \arrow[d, "1\times\mu"'] \arrow[dr, "\bar\theta"] & \\ N\times U \arrow[r, "\theta"'] & G \end{tikzcd}$$

коммутативна. Далее, отображение $\bar\theta$ аналитично, и отображение μ: $V^n\to U$ есть корегулярный морфизм, причем $\mu(V^n)=U$. Отсюда следует, что θ аналитично.

г) Ввиду связности и односвязности группы G_2 отображение φ определяет аналитический гомоморфизм ψ: $G_2\to A_1$. Введем на многообразии $G_1\times G_2$ структуру полупрямого произведения по формуле

$$(e_1,\ h)(g_2,\ e_2)(e_1,\ h)^{-1}=(\psi(h)\,g,\ e_2).$$

Определенная таким образом группа G является группой Ли, поскольку действие $A_1\times G_1\to G_1$ и гомоморфизм ψ аналитичны. Наконец, несложная проверка показывает, что $L(G)=\mathfrak{g}$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть G — связная и односвязная группа Ли. Для любого идеала $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}=L(G)$ существует замкнутая связная и односвязная подгруппа Ли $H\subset G$, такая, что $L(H)=\mathfrak{h}$.*

Доказательство. Пусть K — произвольная аналитическая группа с алгеброй Ли $L(K)=\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Проекция $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ индуцирует аналитический гомоморфизм $\varphi\colon G\to K$, так как группа G связна и односвязна. Связная компонента единицы H ядра $\operatorname{Ker}\varphi$ является связной замкнутой подгруппой Ли, причем $L(H)=\mathfrak{h}$. Для доказательства односвязности полученной группы надо воспользоваться тем фактом, что $\pi_2(G/H)=0$ (поскольку G/H — аналитическая группа)[1]. Из точной гомотопической последовательности

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots \to & \pi_2(G/H) & \to & \pi_1(H) & \to & \pi_1(G) \\ & \| & & & & \| \\ & 0 & & & & 0 \end{array}$$

получаем $\pi_1(H)=0$.

Замечание. Вероятно, не существует „простого“ доказательства третьей теоремы Ли. Если бы такое „простое“ доказательство не использовало существенно локальной компактности полей $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$, то оно распространялось бы на банаховы аналитические группы. Однако в случае банаховых пространств третья теорема Ли *неверна* (как недавно было замечено ван Эстом и другими). Действительно, теорема 4, которая является формальным следствием теоремы 3, неверна. Противоречащий пример таков.

Пусть $G=GL(H)\times GL(H)$, где H — бесконечномерное банахово пространство над полем $\mathbf{C}$. Известно, что группа $GL(H)$ связна и односвязна. Центр группы G содержит $\mathbf{C}^*\times\mathbf{C}^*$ и, следовательно, $S^1\times S^1$. Положим $Z=S^1\times S^1$. Алгебра Ли $\mathfrak{z}=L(Z)$ содержится в центре алгебры Ли $L(G)$, а потому любое одномерное подпространство $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{z}$ является идеалом в $L(G)$. В качестве $\mathfrak{h}$ возьмем алгебру Ли одномерной подгруппы

$$\{(\mu, \nu)\in S^1\times S^1 \mid \nu=\alpha\mu\}\subset S^1\times S^1,$$

где α — иррациональное число. Указанная подгруппа связна и односвязна, однако не замкнута в G.

[1] См. Милнор [1*], гл. 4, § 21, теорема Ботта. — *Прим. перев.*

§ 9. Теоремы Картана

Предположим, что поле k имеет нулевую характеристику и подполе $\mathbf{Q} \subset k$ плотно в k.

Теорема 1. *Всякая замкнутая*[1] *(в топологическом смысле) локальная подгруппа H аналитической группы G аналитична.*

Следствие. *Замкнутая подгруппа аналитической вещественной или p-адической группы аналитична.*

Теорема 2. *Всякий непрерывный гомоморфизм $\varphi\colon G_1 \to G_2$ групп Ли над k является аналитическим.*

Доказательство. 1°. Теорема 1 $\Leftrightarrow$ Теорема 2. Действительно, так как отображение φ непрерывно, его график $\Gamma_\varphi \subset G_1 \times G_2$ является замкнутой подгруппой, которая по теореме 1 аналитична. Проекция $p = \mathrm{pr}_1 | \Gamma_\varphi$ есть аналитический гомоморфизм с тривиальным ядром, так что отображение $L(p)$ инъективно и морфизм p регулярен. Но p — гомеоморфизм и, следовательно, аналитический изоморфизм. Поскольку $\varphi = \mathrm{pr}_2 \circ p^{-1}$, аналитичность φ доказана.

2°. Доказательство теоремы 1 для случая $k = \mathbf{Q}_p$. На основании следствия 2 теоремы 4.3.1 и следствия теоремы 5.7.1 мы можем (взяв достаточно малую окрестность единицы) предполагать, что группа G изоморфна группе U $(\subset \mathfrak{g} = L(G))$, построенной с помощью формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа, и что H — замкнутая подгруппа в G. Отождествим группы G и U. Операция „возведения в n-ю степень" имеет вид $f_n(x) = nx$ $(n \in \mathbf{Z},\ n > 0)$. Поэтому элементы вида nx (где $x \in H$) лежат в группе H, причем ввиду замкнутости последней это верно для всех $n \in \mathbf{Z}_p$.

Выберем максимальную линейно независимую систему $x_1, \ldots, x_m \in H$ над полем $\mathbf{Q}_p$. Обозначим через V подпространство, порожденное этой системой. Очевидно, $H \subset V$, так как иначе система $\{x_i\}$ не

[1] Точнее, *локально* замкнутая. — *Прим. перев.*

была бы максимальной. Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что H содержит окрестность нуля в пространстве V. Рассмотрим отображение

$$f\colon \mathbf{Z}_p^m \to V,$$

задаваемое формулой

$$f(t_1, \ldots, t_m) = (t_1x_1) \ldots (t_mx_m).$$

Отображение f аналитично; касательное отображение $Df(0)$ — изоморфизм по построению. Следовательно, f — наложение в точке 0. Но так как $\operatorname{Im}(f) \subset H$, это означает, что H содержит окрестность нуля в пространстве V.

3°. Доказательство теоремы 1 в случае $k = \mathbf{R}$.

Пусть $L(G) = \mathfrak{g}$. Мы можем считать, что H — замкнутая локальная подгруппа локальной группы $U \subset \mathfrak{g}$, построенной посредством формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа. Можно также предполагать, что H — строгая подгруппа, т. е.

а) $x,\ y \in H$ и $xy \in U \Rightarrow xy \in H$;

б) $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.

Положим

$$V = \{x \in \mathfrak{g} \mid tx \in H \text{ для достаточно малых } t\}.$$

Иными словами, V содержит такие точки $x \in \mathfrak{g}$, для которых некоторая окрестность нуля прямой, проходящей через точку x, лежит в H. Имеет место

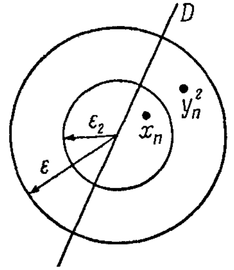
Лемма. (1) *Пространство V является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

(2) *Допустим, что $x_n \in H$, $x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим через D_n прямую (в пространстве $\mathfrak{g}$), проходящую через точку x_n (и точку 0). Предположим, что $x_n \to 0$ и $D_n \to D$ при $n \to \infty$. Тогда $D \subset V$.*

Доказательство. Начнем с конца (2). Зафиксируем некоторый шар радиуса ε с центром в точке 0, содержащийся в U. Пусть m — целое положительное число и $\varepsilon_m = \frac{\varepsilon}{m}$. Положим

$$S_i = \{x \in \mathfrak{g} \mid (i-1)\,\varepsilon_m \leqslant |x| \leqslant i\varepsilon_m\}.$$

В частности, S_1 — шар радиуса ε_m. Существует такая константа K_m, что $x_n \in S_1$ для всех $n \geqslant K_m$. Возьмем любое целое положительное число i, такое, что $1 < i \leqslant m$. Для каждого целого $n \geqslant K_m$ найдется элемент $y_n^{(i)}$ вида μx_n ($\mu \in \mathbf{Z}$, $\mu > 0$), лежащий в S_i.



Случай $m = 2$

Так как $D_n \to D$ при $n \to \infty$, некоторая подпоследовательность $\{y_{n_k}^{(i)}\}$ сходится к точке $x \in S_i \cap D$. В силу а) $x \in H$, поскольку H замкнуто, а $y_n^{(i)} \in H$. Итак, мы доказали следующее утверждение:

(*) для любых целых положительных чисел m и i, таких, что $1 < i \leqslant m$, существует элемент $x \in H \cap D$, для которого $(i-1)\varepsilon_m \leqslant |x| \leqslant i\varepsilon_m$.

На основании б) множество $H \cap D$ располагается на прямой D симметрично относительно нуля. Из этого замечания и из утверждения (*) вытекает, что множество H всюду плотно в интервале прямой D длины 2ε с центром в точке 0. Но поскольку H замкнуто, пересечение $H \cap D$ содержит указанный интервал, откуда и следует, что $D \subset V$.

(1) Покажем, что множество V замкнуто относительно сложения и коммутирования. Пусть $x, y \in V$. Как показывает формула Кэмпбелла — Хаусдорфа,

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{1}{n}x\right)\left(\frac{1}{n}y\right)\right\} = x + y,$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left\{\left[\frac{1}{n}x,\ \frac{1}{n}y\right]\right\} = [x,\ y]$$

(см. также гл. IV, § 7, п. 5). Далее, $x+y \in V$ и $[x, y] \in V$, так как прямые, проходящие через $x+y$ и $[x, y]$, удовлетворяют условиям (2) леммы.

Итак, V — подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}$. Следовательно, пересечение $V \cap U$ является локальной подгруппой, которая строится по алгебре V с помощью формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа. Используя условия а) и б), легко усмотреть, что $H \supset V \cap U$. Наше доказательство будет закончено, если мы покажем, что H содержится в некоторой окрестности нуля пространства V. Предположим противное. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$, такая, что $x_n \in H \backslash V$ и $x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем в $\mathfrak{g}$ прямое дополнение W к V. Поскольку (локальное) отображение $(W \cap U) \times (V \cap U) \to U((w, v) \mapsto w \cdot v)$ является по построению наложением в точке 0 (т. е. локальным изоморфизмом), при достаточно большом n имеется однозначное разложение $x_n = w_n \cdot v_n$, где $w_n \in W$ и $v_n \in V$. При этом w_n и $v_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому для достаточно больших n имеем

$$v_n \in H$$

(так как $H \supset V \cap U$) и $w_n \in H$ (ввиду условий а) и б)). Мы можем, таким образом, с самого начала считать, что последовательность $\{x_n\}$ лежит в W. Пусть D_n — прямая, проходящая через точку x_n. В силу компактности проективного пространства $\mathbf{P}(W)$ подпоследовательность этих прямых сходится к некоторой прямой D. Но, согласно утверждению (2) нашей леммы, прямая D содержится в V, — противоречие. Теорема доказана.

Замечание. Теорему 2 можно сформулировать так: категория аналитических групп (над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{Q}_p$) является полной подкатегорией в категории всех локально компактных топологических групп.

В связи с этим уместен вопрос: при каких условиях локально компактная топологическая группа является вещественной или p-адической группой Ли? Вопрос этот имеет смысл, так как ввиду теоремы 2 структура аналитической группы на локальной компактной топологической группе определена однозначно.

Ответ на этот вопрос таков.

1) *Вещественный случай* (Глисон — Монтгомери — Зиппин — Ямабе). Группа G не должна содержать „малых" подгрупп (т. в группе G должна существовать окрестность единицы, которая не содержит никаких подгрупп, кроме тривиальной);

2) *p-адический случай* (Лазар[1]). Группа G должна содержать открытую подгруппу U со следующими свойствами:

а) U — конечно порожденная про-p-группа;

б) коммутант (U, U) лежит в U^{p^2} (множестве p^2-х степеней).

Необходимость в обоих случаях доказывается несложно (см. упражнение 4).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть k — поле характеристики $p \neq 0$, F — формальный групповой закон (над k), U — соответствующая биалгебра точечных распределений и $\mathfrak{g}$ — соответствующая алгебра Ли (очевидно, $\mathfrak{g} \subset U$).

а) Показать, что $\mathfrak{g}$ порождает в U подалгебру размерности p^n, где $n = \dim \mathfrak{g}$.

б) Показать, что $x^p \in \mathfrak{g}$, если $x \in \mathfrak{g}$ (здесь x^p обозначает p-ю степень x в алгебре U). Показать затем, что $\operatorname{ad}(x^p) = \operatorname{ad}(x)^p$.

в) Пусть a — элемент поля k, не лежащий в простом подполе $\mathbf{F}_p$. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{h}$ с базисом $\{X, Y, Z\}$ и соотношениями $[X, Y] = Y$, $[X, Z] = aZ$, $[Y, Z] = 0$. Показать, что не существует элемента $y \in \mathfrak{h}$, для которого $\operatorname{ad}(y) = \operatorname{ad}(X)^p$. Доказать, что $\mathfrak{h}$ не может быть алгеброй Ли никакой формальной группы.

2. Пусть $H_1 = k[[X]]$ и $H_2 = k[[Y]]$.

а) Предположим, что k — поле. Показать, что любой гомоморфизм алгебр φ: $H_2 \to H_1$ допустим (см. § 6).

[1] См. Лазар [3*]. — *Прим. перев.*

б) Предположим, что кольцо k не содержит нильпотентных элементов (отличных от нуля). Показать, что любой гомоморфизм алгебр φ: $H_2 \to H_1$ допустим.

3. Пусть k — числовое поле (т. е. $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$), и пусть $\mathfrak{h}$ — полупростая подалгебра алгебры Ли группы $GL(n, k)$. Показать, что $\mathfrak{h}$ соответствует подгруппе Ли $H \subset GL(n, k)$. [*Указание*: использовать теорему 1.6.5.2.]

4. Пусть G — стандартная p-адическая группа Ли (см. гл. IV), и пусть $\{G_n\}$ — каноническая фильтрация. Показать, что

$$(G_n, G_n) \subset G_n^{p^n}, \qquad n \geqslant 2.$$

5. Пусть G — вещественная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ и H — аналитическая подгруппа в G, соответствующая подалгебре $\mathfrak{h}$[1]). Предположим, что H плотна в G.

а) Показать, что $\mathrm{Ad}(g)\,\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ для всех $g \in G$ и что $\mathfrak{h}$ идеал в $\mathfrak{g}$.

б) Пусть $\widehat{G}$ — универсальное накрытие группы G, Z — ядро эпиморфизма $\widehat{G} \to G$ и $\widehat{H}$ — аналитическая подгруппа группы $\widehat{G}$, соответствующая подалгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Известно (теорема 8.4), что $\widehat{H}$ — замкнутая подгруппа. Показать, что $\widehat{H} \cdot Z$ плотно в $\widehat{G}$ и что $\widehat{G}/\widehat{H}$ — абелева группа (и, значит, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — абелева алгебра Ли).

в) Допустим, что алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста. Доказать, что $\widehat{G}$ (как аналитическое многообразие) изоморфно $\widehat{H} \times \mathbf{R}^n$, где n — некоторое целое число. До-

---

[1]) Если H_1 — локальная группа, соответствующая алгебре $\mathfrak{h}$, то вложение $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ индуцирует локальный аналитический гомоморфизм f: $H_1 \to G$, который определяет локальную аналитическую подгруппу $f(H_1)$. Согласно § 4 гл. IV, эту локальную подгруппу можно продолжить до аналитической группы $H \subset G$, которую и имеет в виду автор. Она, вообще говоря, не является подгруппой Ли, но является индуцированной аналитической группой в смысле § 2 гл. IV. — *Прим. ред.*

казать затем, что $n=0$ (т. е. $G=H$), если центр группы H конечен.

г) Пусть $H_0=SL(2, \mathbf{R})$. Показать, что $\pi_1(H_0)=\mathbf{Z}$. Доказать, что универсальное накрытие H группы H_0 может быть вложено в качестве всюду плотной аналитической подгруппы в группу Ли произвольной размерности $\geqslant 3$.

6. Пусть G — вещественная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — произвольная подалгебра. Возьмем соответствующую аналитическую подгруппу H и рассмотрим ее замыкание $\overline{H}$, которое по теореме Картана является подгруппой Ли. Обозначим через $\overline{\mathfrak{h}}$ алгебру Ли $L(\overline{H})$.

а) Показать, что $\mathfrak{h} \subset \overline{\mathfrak{h}}$, $\overline{\mathfrak{h}}=\overline{\overline{\mathfrak{h}}}$, $\overline{\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} \subset \overline{\mathfrak{h}}_1 \cap \overline{\mathfrak{h}}_2$.

б) Показать, что $\mathfrak{h}$ — идеал в $\overline{\mathfrak{h}}$ и что алгебра $\overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{h}$ абелева. [*Указание*: использовать упражнение 5.]

Добавление

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предположим, что k — поле нулевой характеристики.

Теорема. *Пусть $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — система n сходящихся формальных степенных рядов от n переменных. Тогда формальное дифференциальное уравнение*

$$\tau'(s)=\varphi(\tau(s)), \quad \tau(0)=0_r,$$

имеет единственное (формальное) решение, и это решение сходится.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $k=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Запишем

$$\tau(s)=\sum_{n\geqslant 1} a_n s^n,$$

$$\varphi(X)=\sum c_\alpha X^\alpha.$$

В этих обозначениях наше дифференциальное уравнение принимает вид

$$\sum_{n\geqslant 1} na_n s^{n-1} = \sum c_\alpha \Big(\sum_{m\geqslant 1} a_m s^m\Big)^\alpha.$$

Приравнивая коэффициенты, мы видим, что существуют однозначно определенные многочлены $Q_n(c_\alpha, a_m)$, где $|\alpha| < n$ и $m < n$, с целыми положительными коэффициентами, такие, что

$$a_n = \frac{1}{n} Q_n(c_\alpha, a_m).$$

Таким образом, индукцией по n устанавливается существование и единственность формального решения.

Для доказательства сходимости используем метод мажорант. Предположим, что $|c_\alpha| \leqslant d_\alpha$, где d_α — неотрицательное вещественное число. Пусть $\bar{\tau} = \sum b_n t^n$ — формальное решение для $\bar{\varphi}(X) = \sum d_\alpha X^\alpha$. Справедлива

Лемма. *Сходимость ряда $\bar{\tau}$ влечет за собой сходимость ряда τ. Точнее, $\bar{\tau}$ — мажоранта для τ.*

Доказательство леммы. Докажем по индукции, что $|a_n| \leqslant b_n$. При $n = 0$ имеем

$$a_0 = b_0 = 0.$$

Пусть для всех $k < n$ лемма доказана. Тогда

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| \cdot |Q_n(c_\alpha, a_m)| \leqslant \frac{1}{n} Q_n(|c_\alpha|, |a_m|) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n} Q_n(d_\alpha, b_m) = b_n.$$

Лемма доказана.

Заметим, что мы пользовались равенством $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, верным только для числовых полей.

Для того чтобы применить лемму, нам надо построить подходящее семейство рядов $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_i)$ и явно вычислить соответствующее решение $\bar{\tau}$. Поскольку ряды $\varphi(X)=(\varphi_i(X))$ сходятся, существуют положительные константы M и R, такие, что

$$\sum |c_\alpha| R^{|\alpha|} < M.$$

Пусть $d_\alpha = \frac{M}{R^{|\alpha|}}$. Ясно, что $|c_\alpha| \leqslant d_\alpha$. Далее,

$$\bar{\varphi}(X) = \sum M\left(\frac{X}{R}\right)^\alpha = \frac{M}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{X_i}{R}\right)}. \qquad (*)$$

В силу единственности решение $\bar{\tau}(s)$ можно искать в виде $\bar{\tau}(s)=(\sigma(s), \ldots, \sigma(s))$, где $\sigma(s)$ — формальное решение одного дифференциального уравнения

$$\sigma'(s) = \frac{M}{\left(1-\frac{\sigma(s)}{R}\right)^n}.$$

Для $\sigma(s)$ можно указать явную формулу, из которой и будет вытекать сходимость. Именно:

$$\sigma(s) = R\left(1 - \left\{1-(n+1)M\frac{s}{R}\right\}^{\frac{1}{n+1}}\right).$$

Действительно, дифференцируя равенство

$$1-\frac{\sigma(s)}{R} = \left\{1-(n+1)M\frac{s}{R}\right\}^{\frac{1}{n+1}}$$

и используя формулу (*), мы видим, что $\sigma(s)$ удовлетворяет требуемому дифференциальному уравнению.

Случай 2. Поле k неархимедово.

Так как ряды $\varphi(X)=(\varphi_i(X))$ сходятся, мы можем (применяя, если надо, преобразование подобия) считать, что все коэффициенты лежат в кольце нормирования A.

Запишем

$$\tau(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{s^n}{n!},$$

$$\varphi(X) = \sum c_\alpha X^\alpha.$$

Наше дифференциальное уравнение принимает вид

$$\sum_{n \geqslant 0} a_{n+1} \frac{s^n}{n!} = \sum c_\alpha \left(\sum_{m \geqslant 1} a_m \frac{s^m}{m!} \right)^\alpha.$$

Используя тот факт, что биномиальные коэффициенты лежат в $\mathbf{Z}$, находим, что

$$a_n = Q_n(c_\alpha, a_m), \quad |\alpha| < n, \quad m < n,$$

где Q_n — однозначно определенные многочлены с целыми коэффициентами. Это доказывает единственность и существование формального решения. По индукции все коэффициенты a_n лежат в A, так как $c_\alpha \in A$. Следовательно, по лемме 4 § 4 $\tau(s)$ мажорируется вещественным рядом

$$\sum \frac{r^n}{a^n},$$

где $0 < a \leqslant 1$. Этот ряд как геометрическая прогрессия сходится при достаточно малых r, что и завершает доказательство.

Часть III

Комплексные полупростые алгебры Ли

Посвящаю
Клодин и Лиз

Эти заметки — запись курса лекций, прочитанного мной в Алжире с 10 по 21 мая 1965 г. Содержание их следующее.

Первые две главы представляют собой сводку результатов (без доказательств), относящихся к общим свойствам нильпотентных, разрешимых и полупростых алгебр Ли[1]). Результаты эти хорошо известны, и читатель может их найти, например, в первой главе книги Бурбаки или в моем харвардском курсе. Доказательства основных теорем довольно подробны. В нескольких местах мне показалось целесообразным привести без доказательства некоторые дополнительные факты; они отмечены звездочкой.

В последней главе указывается, без доказательств, как переходить от алгебр Ли к группам Ли (комплексным, а также компактным). Эта глава — лишь простое введение, призванное подвести читателя к теории алгебраических групп и топологии групп Ли.

Я счастлив выразить здесь признательность Пьеру Жигору и Даниэлю Леману, отредактировавшим первоначальный вариант заметок, а также мадемуазель Франсуаз Пеша, отпечатавшей рукопись.

Ж.-П. С.

---

[1]) При переводе эти две главы опущены. — *Прим. перев.*

Глава III[1])

ПОДАЛГЕБРЫ КАРТАНА

В этой главе (за исключением § 6) основным полем является поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел. Все рассматриваемые алгебры Ли имеют над полем $\mathbf{C}$ конечную размерность.

§ 1. Определение подалгебр Картана

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{a}$ — ее подалгебра. Напомним, что *нормализатором* подалгебры $\mathfrak{a}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ называется множество

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad} x(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}\}.$$

Нормализатор является наибольшей подалгеброй в $\mathfrak{g}$, содержащей алгебру $\mathfrak{a}$ в качестве идеала.

Определение 1. Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Картана* (алгебры $\mathfrak{g}$), если она удовлетворяет следующим условиям:

(а) $\mathfrak{h}$ — нильпотентная алгебра;

(б) $\mathfrak{h}$ совпадает со своим нормализатором (т. е. $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$).

Немного позже (§ 3) мы увидим, что любая алгебра обладает подалгеброй Картана.

§ 2. Регулярные элементы. Ранг

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Для каждого элемента $x \in \mathfrak{g}$ обозначим через $P_x(T)$ характеристический многочлен эндоморфизма $\operatorname{ad} x$ алгебры $\mathfrak{g}$:

$$P_x(T) = \det(T - \operatorname{ad} x).$$

---

[1]) Напомним, что главы I и II при переводе опущены. — *Прим. ред.*

Многочлен $P_x(T)$ можно расписать по степеням T:

$$P_x(T) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i(x) T^i,$$

где $n = \dim \mathfrak{g}$. Если в алгебре $\mathfrak{g}$ зафиксировать некоторый базис, то любому элементу $x \in \mathfrak{g}$ будет отвечать набор комплексных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, так что коэффициенты $a_i(x)$ мы можем рассматривать как функции от n комплексных переменных $x_1, \ldots, x_n$. Непосредственно проверяется, что эти функции являются однородными многочленами от $x_1, \ldots, x_n$ степени $n - i$.

Определение 2. Назовем *рангом* алгебры $\mathfrak{g}$ минимальное целое число l, для которого функция $a_l(x)$, определенная выше, не равна тождественно нулю. При этом элемент $x \in \mathfrak{g}$ мы будем называть *регулярным*, если $u_l(x) \neq 0$.

Замечание. Поскольку $a_n = 1$, то заведомо $l \leqslant n$; равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ нильпотентна. С другой стороны, для любого ненулевого элемента алгебры $\mathfrak{g}$ имеем $\operatorname{ad} x(x) = 0$. Это показывает, что число 0 является собственным значением эндоморфизма $\operatorname{ad} x$. Поэтому $a_0 = 0$ и $l \geqslant 1$ (при условии, что $\mathfrak{g} \neq 0$).

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Множество $\mathfrak{g}_r$ ее регулярных элементов открыто, всюду плотно в $\mathfrak{g}$ и связно (относительно обычной топологии, которой наделяется любое конечномерное комплексное векторное пространство).*

Доказательство. По определению $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{g} \setminus V$, где V — множество нулей полиномиальной функции a_l. Очевидно, V — замкнутое множество, а $\mathfrak{g}_r$ — открытое. Если бы множество V имело внутреннюю точку, то в ее окрестности многочлен a_l обращался бы в нуль и потому равнялся бы нулю тождественно, что невозможно по определению ранга. Пусть, наконец, x, y — любые два элемента из множества $\mathfrak{g}_r$. Комплексная прямая D, проходящая через x и y, пересекает V в конечном числе точек. Отсюда следует, что пересечение $D \cap \mathfrak{g}_r$ связно, так что точки x и y лежат в одной связной компоненте множества $\mathfrak{g}_r$. Таким образом, множество $\mathfrak{g}_r$ связно, поскольку точки x и у выбирались произвольно.

§ 3. Подалгебра Картана, ассоциированная с регулярным элементом

Пусть x — элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и λ — любое комплексное число. Обозначим через $\mathfrak{g}_x^\lambda$ *ниль-пространство* оператора $\operatorname{ad}(x)-\lambda$, т. е. множество таких элементов $y \in \mathfrak{g}$, которые аннулируются достаточно большой степенью оператора $\operatorname{ad}(x)-\lambda$.

В частности, $\mathfrak{g}_x^0$ является ниль-пространством эндоморфизма $\operatorname{ad} x$. Размерность этого пространства равняется кратности нулевого корня многочлена $P_x(T)$[1], т. е. наименьшему целому числу i, для которого $a_i(x) \neq 0$.

Предложение 2. *Пусть $x \in \mathfrak{g}$. Тогда*

(а) *алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму пространств $\mathfrak{g}_x^\lambda$;*

(б) $[\mathfrak{g}_x^\lambda, \mathfrak{g}_x^\mu] \subset \mathfrak{g}_x^{\lambda+\mu}$, *где $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$;*

(в) $\mathfrak{g}_x^0$ — *подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Утверждение (*а*) получается применением к $\operatorname{ad} x$ стандартных свойств эндоморфизмов векторных пространств. Для доказательства свойства (б) нам нужно установить, что $[y, z] \in \mathfrak{g}_x^{\lambda+\mu}$, если $y \in \mathfrak{g}_x^\lambda$ и $z \in \mathfrak{g}_z^\mu$. Имеет место рекуррентная формула

$$(\operatorname{ad} x-\lambda-\mu)^n [y, z] = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \left[(\operatorname{ad} x-\lambda)^p y, (\operatorname{ad} x-\mu)^{n-p} z\right]$$

(справедливость ее легко доказывается индукцией по n). При достаточно большом n все члены справа обращаются в нуль, и мы получаем, что $[y, z] \in \mathfrak{g}_x^{\lambda+\mu}$.

[1] См. часть I, гл. V, § 6. — *Прим. перев.*

Свойство (в) есть частный случай свойства (б) при $\lambda=\mu=0$.

Теорема 1. *Если x — регулярный элемент, то алгебра $\mathfrak{g}_x^0$ является подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}$; размерность этой подалгебры равна l (рангу алгебры $\mathfrak{g}$).*

Доказательство. Покажем вначале, что алгебра $\mathfrak{g}_x^0$ *нильпотентна.* Для этого, согласно теореме Энгеля, нужно показать, что ограничение любого эндоморфизма $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} y$ на $\mathfrak{g}_x^0$ $(y\in\mathfrak{g}_x^0)$ нильпотентно. Обозначим через $\operatorname{ad}^1 y$ это ограничение, а через $\operatorname{ad}^2 y$ — соответствующий эндоморфизм факторпространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x^0$. Положим

$$U=\{y\in\mathfrak{g}_x^0 \mid \text{оператор } \operatorname{ad}^1 y \text{ не нильпотентен}\},$$
$$V=\{y\in\mathfrak{g}_x^0 \mid \text{оператор } \operatorname{ad}^2 y \text{ обратим}\}.$$

Множества U и V открыты в $\mathfrak{g}_x^0$, причем множество V непусто, так как оно содержит элемент x. Поскольку V является дополнением к алгебраическому подмногообразию (над $\mathbf{C}$) в пространстве $\mathfrak{g}_x^0$, то это множество всюду плотно в $\mathfrak{g}_x^0$. По аналогичным соображениям множество U тоже всюду плотно (если оно непусто!), и, следовательно, $U\cap V\neq\varnothing$. Пусть $y\in U\cap V$. Эндоморфизм $\operatorname{ad}^1 y$ имеет 0 своим собственным значением, однако кратность его строго меньше $\dim\mathfrak{g}_x^0$, так как $y\in U$. Как уже отмечалось, $\dim\mathfrak{g}_x^0=l$. С другой стороны, $y\in V$, и поэтому число 0 не является собственным значением эндоморфизма $\operatorname{ad}^2 y$. Отсюда легко вытекает, что кратность нуля как собственного значения оператора $\operatorname{ad} y$ та же, что и для $\operatorname{ad}^1 y$, и, следовательно, строго меньше l. Последнее противоречит определению числа l, и мы заключаем, что множество U пусто, т. е. алгебра $\mathfrak{g}_x^0$ нильпотентна.

Покажем теперь, что алгебра $\mathfrak{g}_x^0$ совпадает со своим нормализатором $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}_x^0)$. Пусть $z\in\mathfrak{n}(\mathfrak{g}_x^0)$. Тогда $\operatorname{ad} z(\mathfrak{g}_x^0)\subset\mathfrak{g}_x^0$ и, в частности, $[z, x]\in\mathfrak{g}_x^0$. По определению алгебры $\mathfrak{g}_x^0$ существует такое целое p, что

$(\operatorname{ad} x)^p([z, x]) = 0$. Последнее равенство равносильно тому, что $(\operatorname{ad} x)^{p+1}z = 0$, а это и означает, что $z \in \mathfrak{g}_x^0$.

Замечание. Приведенная выше теорема позволяет строить подалгебры Картана вида $\mathfrak{g}_x^0$; как мы увидим дальше, такими подалгебрами исчерпываются *все* подалгебры Картана.

§ 4. Сопряженность подалгебр Картана

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Обозначим через G группу *внутренних автоморфизмов* этой алгебры, т. е. подгруппу группы $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$, порожденную элементами вида $e^{\operatorname{ad} y}$, где $y \in \mathfrak{g}$.

Теорема 2. *Группа G действует транзитивно на множестве всех подалгебр Картана алгебры $\mathfrak{g}$.*

Из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие 1. *Размерность любой подалгебры Картана равна рангу алгебры $\mathfrak{g}$.*

Следствие 2. *Все подалгебры Картана имеют вид $\mathfrak{g}_x^0$, где x — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$.*

Доказательство теоремы разобьем на две части.

Первая часть доказательства. Пусть $\mathfrak{h}$ — некоторая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Символом $\operatorname{ad}^1 x$ (соответственно $\operatorname{ad}^2 x$), где x — элемент алгебры $\mathfrak{h}$, обозначим эндоморфизм пространства $\mathfrak{h}$ (соответственно $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$), индуцированный эндоморфизмом $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$.

Лемма 1. *Множество*

$$V = \{x \in \mathfrak{h} \mid \operatorname{ad}_x^2 \text{ — обратимый оператор}\}$$

непусто.

Доказательство. Применяя теорему Ли к $\mathfrak{h}$-модулю $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, получаем флаг подпространств

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = \mathfrak{g}/\mathfrak{h},$$

инвариантных относительно $\mathfrak{h}$. Действие алгебры $\mathfrak{h}$ на одномерном пространстве V_i/V_{i-1} задается линейной формой α_i, такой, что

$$xv \equiv \alpha_i(x)\, v \,(\operatorname{mod} V_{i-1}), \text{ где } x \in \mathfrak{h} \text{ и } v \in V_i.$$

(Для простоты мы пишем здесь xv вместо $\operatorname{ad}^2 x(v)$.) Числа $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_m(x)$ являются, таким образом, собственными значениями оператора $\operatorname{ad}^2 x$. Нам остается, следовательно, показать, что *ни одна из форм α_i не равна тождественно нулю.* Пусть, напротив, $\alpha_1 \neq 0, \ldots, \alpha_{k-1} \neq 0$, но $\alpha_k = 0$. Выберем такой элемент $x_0 \in \mathfrak{h}$, что $\alpha_1(x_0) \neq 0, \ldots, \alpha_{k-1}(x_0) \neq 0$. Ограничение эндоморфизма $\operatorname{ad}^2 x_0$ на V_{k-1} является обратимым эндоморфизмом; ограничение эндоморфизма $\operatorname{ad}^2 x_0$ на V_k уже необратимо и имеет число 0 своим собственным значением (кратности 1). Ниль-пространство V' оператора $\operatorname{ad}^2 x_0$ (в пространстве V_k) имеет поэтому размерность 1 и является прямым дополнением к пространству V_{k-1}:

$$V_k = V_{k-1} \oplus V'.$$

Покажем, что любой элемент $v' \in V'$ аннулируется произвольным эндоморфизмом вида $\operatorname{ad}^2 x$, где $x \in \mathfrak{h}$. В случае когда $x = x_0$, это очевидно. С другой стороны, для любого n имеет место формула

$$x_0^n (xv') = ((\operatorname{ad} x_0)^n x)\, v' \; (x \in \mathfrak{h},\ v' \in V')$$

(она легко доказывается по индукции). Так как алгебра $\mathfrak{h}$ нильпотентна, то при достаточно большом n имеем $(\operatorname{ad} x_0)^n x = 0$. Отсюда видно, что элемент xv' лежит в ниль-пространстве оператора $\operatorname{ad}^2 x_0$, т. е. $xv' \in V'$. Вспомним теперь, что $\operatorname{ad}^2 x$ отображает V_k в V_{k-1}. Но если так, то $xv' \in V_{k-1} \cap V'$, т. е. $xv' = 0$. Итак, мы доказали, что алгебра $\mathfrak{h}$ аннулирует V'. Возьмем в V' произвольный *ненулевой* элемент v' и выберем любого его представителя z в алгебре $\mathfrak{g}$. Равенство $xv' = 0$ (для всех $x \in \mathfrak{h}$) означает, что $[x, z] \in \mathfrak{h}$ (для всех $x \in \mathfrak{h}$).

Таким образом, z лежит в нормализаторе $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$. Однако по условию $z \notin \mathfrak{h}$ (так как $v' \neq 0$), что немедленно приводит к противоречию, поскольку $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ по определению подалгебры Картана.

Лемма 2. *Множество* $W = G(V) = \bigcup_{g \in G} gV$ *всех элементов, получаемых из элементов множества* V *автоморфизмами из группы* G, *открыто в* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть $x \in V$. Нам нужно показать, что W содержит некоторую окрестность элемента x. Рассмотрим отображение $(g, v) \mapsto gv$ произведения $G \times V$ в алгебру $\mathfrak{g}$. Обозначим через θ дифференциал этого отображения в точке $(1, x)$ (т. е. соответствующее отображение касательных пространств). Нам надо установить, что образ θ заполняет все пространство $\mathfrak{g}$. Этот образ содержит во всяком случае касательное пространство к V, т. е. пространство $\mathfrak{h}$. С другой стороны, касательным вектором кривой

$$t \longmapsto e^{t\,\mathrm{ad}\,(y)}(x) = 1 + t[y, x] + \ldots \qquad (y \in G)$$

в точке 0 является элемент $[y, x]$. Отсюда вытекает, что $\mathrm{ad}\,x(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Im}(\theta)$. Но так как $\mathrm{ad}\,x$ определяет автоморфизм пространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ($x \in V$!), мы получаем

$$\mathrm{ad}\,x(\mathfrak{g}) + \mathfrak{h} = \mathfrak{g},$$

что ввиду сказанного выше дает равенство $\mathrm{Im}(\theta) = \mathfrak{g}$. По известной теореме о неявных функциях заключаем, что отображение $G \times V \to \mathfrak{g}$ является открытым в точке $(1, x)$, а это по существу и есть утверждение нашей леммы.

Лемма 3. *Существует регулярный элемент* $x \in \mathfrak{g}$, *такой, что* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$.

Доказательство. Сохраним все предыдущие обозначения. Леммы 1 и 2 показывают, что множество W открыто и непусто. Таким образом, множество $\mathfrak{g}_r$ регулярных элементов алгебры $\mathfrak{g}$ (см. предложение 1) имеет с множеством W непустое пересечение. Ясно, что элемент x регулярен $(x \in V)$, если регулярен элемент gx $(g \in G)$. Мы можем считать поэтому, что V содержит по крайней мере один регулярный элемент x. Замечая, что $\mathrm{ad}^1 x$ — нильпотентный эндоморфизм, а $\mathrm{ad}^2 x$ — обратимый, мы получаем, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$.

Вторая часть доказательства. В силу леммы 3 все подалгебры Картана в алгебре $\mathfrak{g}$ имеют вид $\mathfrak{g}_x^0 (x \in \mathfrak{g}_r)$. Введем в множестве $\mathfrak{g}_r$ следующее отношение эквивалентности R:

$R(x, y) \Leftrightarrow$ алгебры $\mathfrak{g}_x^0$ и $\mathfrak{g}_y^0$ сопряжены относительно G.

Лемма 4. *Классы эквивалентности отношения R являются открытыми множествами.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{g}_r$. Мы должны найти такую окрестность U этого элемента в $\mathfrak{g}_r$, что любой элемент $y \in U$ эквивалентен x. Применим результаты, полученные в первой части, к подалгебре Картана $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$. Соответствующее множество V содержит, конечно, элемент x (см. предложение 2). По лемме 2 множество $G(V)$ открыто в $\mathfrak{g}$ и имеет с открытым всюду плотным множеством $\mathfrak{g}_r$ непустое пересечение. Положим $U = G(V) \cap \mathfrak{g}_r$. Если $y \in U$, то y есть регулярный элемент и имеет вид gx', где $g \in G$ и $x' \in V$ (следовательно, x' тоже регулярный элемент). Имеем

$$\mathfrak{g}_x^0 = g(\mathfrak{g}_{x'}^0) = g(\mathfrak{h}) = g(\mathfrak{g}_x^0),$$

а это и означает эквивалентность элементов x и y.

Итак, *связное* (предложение 1) множество $\mathfrak{g}_r$ распадается в сумму *непересекающихся* открытых множеств (классов эквивалентности). Из сказанного ясно, что класс эквивалентности может быть только один. Теорема 2, таким образом, полностью доказана.

Замечание. Теорема 2 остается справедливой, если группу G заменить подгруппой, порожденной элементами $e^{\mathrm{ad}\, y}$, где $\mathrm{ad}\, y$ — нильпотентный эндоморфизм. В такой форме эта теорема была распространена Шевалле на случай произвольного основного поля (алгебраически замкнутого нулевой характеристики). Доказательство читатель сможет найти, например, в главе 12 семинара „Софус Ли“.

§ 5. Случай полупростой алгебры

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда*

(а) *$\mathfrak{h}$ — абелева алгебра;*

(б) *все элементы подалгебры $\mathfrak{h}$ полупросты;*

(в) *централизатор подалгебры $\mathfrak{h}$ (т. е. множество*

$$\{x \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad} x(\mathfrak{h}) = (0)\}$$

совпадает с $\mathfrak{h}$;

(г) *ограничение формы Киллинга на $\mathfrak{h}$ невырождено.*

Доказательство. (г) По следствию 2 теоремы 2 найдется регулярный элемент x, такой, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$. Пусть

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x^0 \oplus \sum_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}_x^\lambda$$

— разложение, соответствующее эндоморфизму $\operatorname{ad} x$ (см. предложение 2). Несложное вычисление показывает, что пространства $\mathfrak{g}_x^\lambda$ и $\mathfrak{g}_x^\mu$ ортогональны друг другу (относительно формы Киллинга B) в том и только в том случае, когда $\lambda + \mu \neq 0$. Отсюда видно, что алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму попарно ортогональных подпространств:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x^0 \oplus \sum_{\lambda \neq 0} (\mathfrak{g}_x^\lambda \oplus \mathfrak{g}_x^{-\lambda}).$$

Так как форма B невырождена, ее ограничение на каждое из этих подпространств, и в частности на $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$, тоже невырождено.

(а) Применяя критерий Картана (см. часть I, гл. V, § 7) к представлению $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{h} \to \operatorname{End} \mathfrak{g}$, получаем $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y) = 0$, если $x \in \mathfrak{h}$ и $y \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Иными словами, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ ортогонально к $\mathfrak{h}$ относительно формы Киллинга. Поскольку свойство (г) уже доказано, это влечет за собой равенство $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$.

(в) Так как подалгебра $\mathfrak{h}$ абелева, она содержится в своем централизаторе $\mathfrak{c}(\mathfrak{h})$. С другой стороны, ясно, что $\mathfrak{c}(\mathfrak{h})$ лежит в нормализаторе $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$. Но известно, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$, поэтому $\mathfrak{c}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

(б) Пусть $x \in \mathfrak{h}$, и пусть $x = s + n$ — каноническое разложение на полупростую и нильпотентную компоненты соответственно (см. часть I, гл. VI, § 5). Любой элемент $y \in \mathfrak{h}$ коммутирует с x (см. (а)), поэтому он коммутирует с его компонентами s и n, т. е. s и n лежат в $\mathfrak{c}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. С другой стороны, поскольку y и n коммутируют, а $\mathrm{ad}\, n$ — нильпотентный оператор, мы видим, что $\mathrm{ad}\, y \circ \mathrm{ad}\, n$ — тоже нильпотентный оператор и его след $B(y, n)$ равен нулю. Таким образом, элемент n, принадлежащий подалгебре $\mathfrak{h}$, ортогонален ко всем ее элементам. Ввиду (г) это означает, что $n = 0$, т. е. элемент $x = s$ полупрост, как и утверждалось.

Свойство (в) можно переформулировать так:

Следствие 1. *Подалгебра Картана является максимальной абелевой подалгеброй полупростой алгебры* $\mathfrak{g}$.

Следствие 2. *Каждый регулярный элемент в полупростой алгебре полупрост.*

Для доказательства следует лишь заметить, что любой регулярный элемент x содержится в подалгебре Картана $\mathfrak{g}_x^0$.

Замечание. Можно было бы показать, что всякая максимальная абелева подалгебра, состоящая из полупростых элементов, является подалгеброй Картана. Напротив, существуют при $\mathfrak{g} \neq 0$ максимальные абелевы подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$, содержащие ненулевые нильпотентные элементы и тем самым не являющиеся подалгебрами Картана.

§ 6. Вещественные алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}_0$ — алгебра Ли над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, а алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ — ее комплексификация. Определения подалгебры Картана, регулярного элемента и ранга для вещественных алгебр формулируются точно так же, как и для комплексных. Заметим, что ранг алгебры $\mathfrak{g}_0$ (над $\mathbf{R}$) и ранг алгебры $\mathfrak{g}$ (над $\mathbf{C}$) равны и что подалгебра $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ тогда и только тогда является подалгеброй Картана, когда ее комплексификация $\mathfrak{h}_0 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$. Хотя теоремы 1 и 3 остаются верными и в вещественном случае (первая, в частности, доказывает существование подалгебр Картана), этого уже нельзя сказать о теореме 2. Можно только утверждать, что подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$ распадаются на конечное число классов сопряженности относительно внутренних автоморфизмов. (Последнее объясняется тем, что множество регулярных элементов алгебры $\mathfrak{g}_0$ не обязательно связно, а является лишь объединением конечного числа связных открытых множеств.) Явное описание этих классов можно найти в работе Костанта [1].

Глава IV[1]

АЛГЕБРА $sl(2)$ И ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В этой главе (за исключением § 6) основным полем является поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел.

§ 1. Алгебра Ли $sl(2)$

Эта алгебра состоит, как известно, из квадратных матриц второго порядка с нулевым следом; обозначим ее для краткости через $\mathfrak{g}$. Легко проверяется, что алгебра $\mathfrak{g}$ проста, имеет ранг 1 и естественный базис из трех элементов

$$X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$[X, Y]=H,\quad [H, X]=2X,\quad [H, Y]=-2Y.$$

Отсюда видно, что эндоморфизм $\operatorname{ad}(H)$ полупрост и имеет три собственных значения: 2, 0, -2. Прямая $\mathfrak{h}=\mathbf{C}\cdot H$, проходящая через H, является подалгеброй Картана, которую называют также *канонической* подалгеброй.

Элементы X и Y нильпотентны. Подалгебра $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{g}$, порожденная H и X, разрешима ($\mathfrak{b}$ есть не что иное, как подалгебра Бореля алгебры $\mathfrak{g}$)[2]).

---

[1]) Основная часть результатов этой главы содержится по существу в гл. VII ч. I. Однако в дальнейшем автору понадобятся в явном виде свойства алгебры $sl(2)$. Поэтому было признано целесообразным перевести настоящую главу. — *Прим. перев.*

[2]) Определение подалгебры Бореля будет дано в гл. VI. — *Прим. перев.*

§ 2. Модули, веса, примитивные элементы

Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль (не обязательно конечной размерности). Пусть V^λ ($\lambda \in \mathbf{C}$) — собственное подпространство оператора H в пространстве V с собственным значением λ, т. е.

$$V^\lambda = \{x \in V \mid Hx = \lambda x\}.$$

Об элементах из V^λ мы будем говорить, что они *имеют вес* λ.

Предложение 1. (а) *Сумма* $\sum\limits_{\lambda \in \mathbf{C}} V^\lambda$ *(в пространстве V) является прямой суммой.*

(б) *Если элемент x имеет вес λ, то Xx имеет вес $\lambda+2$, а Yx — вес $\lambda-2$.*

Доказательство. Свойство (а) выражает лишь тот известный факт, что векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Далее, если $Hx = \lambda x$, то

$$HXx = [H, H]\, x + XHx = 2X,$$

т. е. вектор Xx имеет вес $\lambda + 2$.

Аналогичное вычисление показывает, что вектор Yx имеет вес $\lambda - 2$.

Замечание. Если пространство V конечномерно, то сумма $\sum\limits_{\lambda \in \mathbf{C}} V^\lambda$ равна V (см. предложение 1.7.2.2). Это, вообще говоря, уже неверно в бесконечномерном случае.

Определение 1. Пусть V — произвольный $\mathfrak{g}$-модуль и λ — комплексное число. Мы скажем, что элемент $e \in V$ является *примитивным элементом веса* λ, если $x \neq 0$ и если

$$Xe = 0 \text{ и } He = \lambda e.$$

Предложение 2. *Для того чтобы ненулевой вектор e модуля V был примитивен, необходимо и достаточно, чтобы прямая, проходящая через вектор e, была инвариантна относительно подалгебры Бореля $\mathfrak{b}$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Если прямая $\mathbf{C}e$ инвариантна относительно алгебры $\mathfrak{b}$, то $Xe = \mu e$ и $He = \lambda e$, где $\mu, \lambda \in \mathbf{C}$. Из формулы $[H, X] = 2X$ видно, что $2\mu = 0$, т. е. $\mu = 0$, и, значит, элемент e примитивен.

Предложение 3. *Каждый $\mathfrak{g}$-модуль конечной размерности содержит примитивный элемент.*

Для доказательства достаточно применить теорему Ли (см. ч. I, гл. V, § 5).

[Другое доказательство. Рассмотрим произвольный собственный (относительно H) вектор x и возьмем последний ненулевой элемент в последовательности

$$x,\ Xx,\ X^2x,\ \ldots .$$

Он и будет примитивным.]

§ 3. Строение подмодуля, порожденного примитивным элементом

Теорема 1. *Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль и $e \in V$ — его примитивный элемент веса λ. Положим $e_n = Y^n e/n!$ при $n \geqslant 0$ и $e_{-1} = 0$. Тогда*

$$\text{(i)}\ He_n = (\lambda - 2n)\, e_n,$$

$$\text{(ii)}\ Ye_n = (n+1)\, e_{n+1},$$

$$\text{(iii)}\ Xe_n = (\lambda - n + 1)\, e_{n-1}$$

для всех $n \geqslant 0$.

Доказательство. Формула (i), выражающая тот факт, что вектор e_n имеет вес $\lambda - 2n$, есть прямое следствие предложения 1.

Формула (ii) очевидна.

Формула (iii) доказывается индукцией по n. При $n = 0$ формула справедлива, так как $e_{-1} = 0$ и $Xe = 0$. При $n \geqslant 0$ имеем

$$\begin{aligned} nXe_n &= XYe_{n-1} = [X, Y]\, e_{n-1} + YXe_{n-1} = \\ &= He_{n-1} + (\lambda - n + 2)\, Ye_{n-2} = \\ &= \big((\lambda - 2n + 2) + (\lambda - n + 2)(n-1)\big)\, e_{n-1} = \\ &= n(\lambda - n + 1)\, e_{n-1}. \end{aligned}$$

Деля это равенство на n, получаем формулу (iii).

Следствие 1. *Возможны только два случая:*

(а) *все векторы* $\{e_n\}$ $(n \geqslant 0)$ *линейно независимы;*

(б) *вес* λ *вектора* e *есть целое число* $m \geqslant 0$, *такое, что векторы* $e_0, \ldots, e_m$ *линейно независимы и* $e_i = 0$ *при* $i > m$.

Доказательство. Поскольку все элементы в последовательности

$$e_0 = e, \ e_1, \ e_2, \ \ldots$$

имеют различные веса, ненулевые элементы этой последовательности линейно независимы. Если все элементы отличны от нуля, то мы, очевидно, приходим к случаю (а). В противном случае существует такое целое число $m \geqslant 0$, что $e_0, \ldots, e_m$ не равны нулю, а $e_{m+1} = 0$ (и тем более $e_{m+2} = e_{m+3} = \ldots = 0$). Применяя формулу (iii) при $n = m + 1$, получаем

$$Xe_{m+1} = (\lambda - m)\, e_m.$$

Но по условию $e_{m+1} = 0$ и $e_m \neq 0$, откуда и вытекает, что $\lambda = m$.

Следствие 2. *Допустим, что модуль* V *имеет конечную размерность* (*т. е. случай* (а) *следствия 1 исключается*). *Тогда подпространство* $W \subset V$, *порожденное векторами* $\{e_0, \ldots, e_m\}$, *является* $\mathfrak{g}$-*подмодулем* (*т. е. инвариантно относительно* $\mathfrak{g}$), *и притом неприводимым.*

Доказательство. Формулы (i), (ii) и (iii) показывают, что подпространство W инвариантно относительно $\mathfrak{g}$. Согласно (i), собственные значения оператора H равны $m, m-2, m-4, \ldots, -m$, причем кратность их равна 1. Поэтому если W содержит подпространство W', инвариантное относительно H, то один из векторов e_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$ лежит в W'. Если, кроме того, пространство W' инвариантно относительно $\mathfrak{g}$, то оно содержит в силу формулы (iii) векторы $e_{i-1}, \ldots, e_0 = e$, а в силу формулы (ii) — векторы $e_i, e_{i+1}, \ldots$. Следовательно, $W' = W$, т. е. W — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль.

§ 4. Модули W_m

Пусть m — целое неотрицательное число и W_m — векторное пространство размерности $m+1$ с фиксированным базисом $\{e_0, \ldots, e_m\}$. Определим действие элементов X, Y, H на пространстве W_m следующими формулами:

$$\text{(i)}\ He_n = (m-2n)\,e_n,$$
$$\text{(ii)}\ Ye_n = (n+1)\,e_{n+1},$$
$$\text{(iii)}\ Xe_n = (m-n+1)\,e_n.$$

(Мы считаем здесь, что $e_{m+1} = e_{-1} = 0$.) Простая проверка показывает, что

$$HXe_n - XHe_n = 2Xe_n,$$
$$HYe_n - YHe_n = -2Ye_n,$$
$$XYe_n - YXe_n = He_n.$$

Другими словами, эндоморфизмы X, Y, H наделяют W_m структурой $\mathfrak{g}$-модуля.

Теорема 2. (а) *W_m — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль.*

(б) *Всякий неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль размерности $m+1$ изоморфен W_m.*

Доказательство. (а) легко следует из следствия 2 теоремы 1, если заметить, что e_0 — примитивный элемент веса m.

(б) Пусть V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль, $\dim V = m+1$. Согласно следствию 3, V содержит примитивный элемент. Следствие 2 теоремы 1 показывает, что вес элемента e есть целое неотрицательное число m' и подмодуль W, порожденный вектором e, имеет размерность $m'+1$. Так как V неприводим, W совпадает с V и $m' = m$. Изоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей V и W_m следует теперь из формул (i), (ii), (iii) теоремы 3.1.

Примеры. Модуль W_0 есть тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль размерности 1. Пространство $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, наделенное естественной структурой $\mathfrak{g}$-модуля, изоморфно W_1. Алгебра $\mathfrak{g}$, рассматриваемая как $\mathfrak{g}$-модуль относительно присоединенного представления, изоморфна W_2.

Замечание. Можно показать, что модуль W_m изоморфен m-й симметрической степени модуля $W_1 = \mathbf{C}^2$.

§ 5. Строение конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей

Теорема 3. *Всякий $\mathfrak{g}$-модуль конечной размерности изоморфен прямой сумме модулей вида W_m.*

Доказательство. В самом деле, по теореме Вейля (см. ч. I, гл. VI, § 3) любой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль есть прямая сумма своих неприводимых подмодулей. Наша теорема вытекает поэтому из доказанного ранее утверждения о том, что неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль изоморфен модулю вида W_m.

Теорема 4. *Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль конечной размерности. Тогда*

(а) *Эндоморфизм пространства V, определенный элементом H, полупрост. Его собственные значения являются целыми числами. Если n — собственное значение оператора H, то таковыми являются также числа $n-2$, $n-4$, ..., $-n$.*

(б) *Линейные отображения*

$$Y^n\colon V^n \to V^{-n} \quad \textit{и} \quad X^n\colon V^{-n} \to V^n$$

являются изоморфизмами. В частности, V^n и V^{-n} имеют одинаковую размерность.

(Напомним, что V^n обозначает множество всех элементов пространства V, имеющих вес n.)

Доказательство. Теорема 3 позволяет свести все эти утверждения к случаю, когда $V = W_m$. Но в этом частном случае, как показывают формулы теоремы 1, свойства (а) и (б) очевидны.

Замечания. 1. Тот факт, что пространства V^n и V^{-n} имеют одну и ту же размерность, можно было бы доказать, воспользовавшись автоморфизмом $\theta = e^X e^Y e^{-X}$ пространства V. (Заметим, что X и Y — нильпотентные операторы на V, так что все экспоненты суть многочлены.) Легко показать, что

$$\theta \circ X = -Y \circ \theta, \quad \theta \circ Y = -\theta \circ X, \quad \theta \circ H = -H \circ \theta.$$

Из последнего соотношения вытекает, что θ переводит V^n в V^{-n}.

2. Укажем одно применение теорем 3 и 4, не связанное с интерпретацией алгебры $sl(2)$ как алгебры Ли группы $SL(2)$. Пусть A — компактное кэлерово многообразие (комплексной) размерности n, и пусть V — пространство когомологий $H^*(A, \mathbf{C})$. Согласно теории Ходжа, с кэлеровой структурой на многообразии A ассоциируются эндоморфизмы Λ и L пространства Y (см. Вейль А. [1*], гл. IV); обозначим их через X и Y. Действие элемента H на V определим формулой $Hx = (n-p)x$, где $x \in H^p(A, \mathbf{C})$. Такое определение снабжает пространство V структурой $\mathfrak{g}$-модуля (см. цитированную выше книгу Вейля). Применяя к этому модулю теоремы 3 и 4, мы приходим к известным теоремам Ходжа о „примитивных" классах когомологий.

§ 6. Топологические свойства группы $SL(2)$

Рассмотрим группу $SL(2)$ комплексных квадратных матриц второго порядка с определителем 1; она является комплексной группой Ли, и ее алгеброй Ли служит алгебра $sl(2)$. Элементы $X, Y, H \in sl(2)$ определяют в группе $SL(2)$ однопараметрические подгруппы

$$e^{tX} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{tY} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{tH} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Далее, в группе $SL(2)$ содержится подгруппа $SU(2)$, состоящая из унитарных матриц; это вещественная компактная группа Ли, алгебру Ли которой мы обозначим через $su(2)$.

Теорема 5. (а) *Группа $SL(2)$ изоморфна (как вещественное аналитическое многообразие) прямому произведению $SU(2) \times \mathbf{R}^3$.*

(б) *Группа $SU(2)$ изоморфна (как группа Ли) группе кватернионов с единичной нормой и гомеоморфна (как топологическое пространство) сфере $\mathbf{S}^3$.*

(в) *Группы $SU(2)$ и $SL(2)$ связны и односвязны.*

(г) *Алгебра Ли* $sl(2)$ *естественным образом отождествляется с комплексификацией вещественной алгебры Ли* $su(2)$, *т. е.* $sl(2) = su(2) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = su(2) \oplus \oplus\, isu(2)$.

Доказательство. Утверждение (б) хорошо известно и мы не будем на нем останавливаться.

Далее, алгебра $su(2)$ есть не что иное, как алгебра Ли *косоэрмитовых* матриц со следом 0. При этом очевидно, что $sl(2) = su(2) \oplus P$, где через P мы обозначили множество эрмитовых матриц с нулевым следом. Свойство (г), таким образом, тоже доказано.

С другой стороны, элементарные вычисления показывают, что отображение

$$(U, P) \longmapsto U \cdot e^P$$

устанавливает изоморфизм (вещественных аналитических многообразий) $SU(2) \times P$ и $SL(2)$. Но множество P, будучи трехмерным векторным пространством, изоморфно $\mathbf{R}^3$, так что $SL(2)$, как и утверждалось в пункте (а), гомеоморфно $\mathbf{R}^3$.

Утверждение (в) вытекает из (б), если учесть, что сфера $\mathbf{S}^3$ связна и односвязна.

„Унитарный прием“ Вейля принимает, таким образом, следующий вид:

Теорема 6. *Для всякой комплексной группы Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ указанные ниже канонические отображения суть биекции:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(SL(2), G) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(SU(2), G) \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(sl(2), \mathfrak{g}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(su(2), \mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

(Символ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(SL(2), G)$ обозначает здесь множество аналитических комплексных гомоморфизмов группы $SL(2)$ в группу G; соответственно символ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(su(2), \mathfrak{g})$ обозначает множество $\mathbf{R}$-гомоморфизмов алгебры Ли $su(2)$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и т. д. Отображения α и γ суть не что иное, как отображения ограничения; отображения β и δ определяются стандартным функтором, переводящим группы Ли в соответствующие алгебры Ли.)

Доказательство. Отображения β и δ биективны, поскольку группы $SL(2)$ и $SU(2)$ связны и односвязны. Отображение γ биективно, поскольку $sl(2)$ — комплексификация вещественной алгебры $su(2)$. Наконец, биективность отображения α (заранее не очевидная) вытекает из коммутативности нашей диаграммы.

Следствие. *Конечномерные линейные представления групп и алгебр Ли $SL(2)$, $SU(2)$, $sl(2)$, $su(2)$ находятся в биективном соответствии друг с другом.*

Для доказательства достаточно применить теорему 6 к линейной группе $G = GL(n, \mathbf{C})$, $n = 0, 1, \ldots$.

§ 7. Приложения

Глобальные результаты предыдущего параграфа позволяют иначе доказать некоторые свойства $sl(2)$-модулей. Например:

(i) Полная приводимость конечномерных $sl(2)$-модулей вытекает из следствия теоремы 6, согласно которому эти модули биективно соответствуют линейным представлениям *компактной* группы $SU(2)$.

(ii) Тот факт, что собственными значениями оператора H могут быть лишь целые числа, можно установить следующим образом. Пусть V — произвольный $sl(2)$-модуль конечной размерности, и пусть $x \in V$ — собственный вектор оператора H с собственным значением λ. По следствию теоремы 6 группа $SL(2)$ действует на V_n; в частности, элемент $e^{tH} \in SL(2)$ переводит x в $e^{t\lambda}x$. Положим $t = 2\pi i$, тогда $e^{tH} = 1$ и $e^{tH}x = x$. Следовательно, $e^{t\lambda} = 1$ при $t = 2\pi i$, а это и означает, что λ — *целое* число.

(iii) Автоморфизм θ, введенный в конце § 5, есть не что иное, как действие элемента $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ группы $SL(2)$.

Глава V

СИСТЕМЫ КОРНЕЙ

В этой главе (за исключением § 17) основным полем является поле $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Все рассматриваемые векторные пространства имеют конечную размерность.

§ 1. Отражения

Пусть V — векторное пространство и α — его ненулевой элемент. *Отражением* (относительно вектора α) мы назовем автоморфизм s пространства V, удовлетворяющий следующим двум условиям:

(i) $s(\alpha) = -\alpha$;

(ii) множество H элементов пространства V, инвариантных при автоморфизме s, является гиперплоскостью в V.

Очевидно, что V разлагается в прямую сумму подпространства H и прямой $\mathbf{R}\alpha$, что автоморфизм s имеет порядок 2 и что отражение s однозначно определяется заданием прямой $\mathbf{R}\alpha$ и гиперплоскости H.

Пусть V^* — двойственное к V пространство и α^* — его элемент, такой, что

$$\alpha^*(H) = 0 \quad \text{и} \quad \alpha^*(\alpha) = 2.$$

Имеем

$$s(x) = x - \langle \alpha^*, x \rangle \alpha \quad \text{для всех} \quad x \in V$$

Последнее равенство можно переписать еще так:

$$s = 1 - \alpha^* \otimes \alpha,$$

где $\operatorname{End} V$ отождествляется с $V \otimes V^*$.

Обратно, если $\alpha \in V$ и $\alpha^* \in V^*$, причем

$$\langle \alpha^*, \alpha \rangle = 2,$$

то элемент $1-\alpha^*\otimes\alpha$ есть отражение относительно вектора α.

Лемма 1. *Пусть α — ненулевой вектор пространства V и R — конечный набор векторов, порождающих V. Тогда существует не более одного отражения (относительно вектора α) переводящего множество R в себя.*

Доказательство. Пусть s и s' — два таких отражения и u — их произведение. Автоморфизм u обладает следующими свойствами:

$u(R)=R$,

$u(\alpha)=\alpha$,

u индуцирует тождественный эндоморфизм на факторпространстве $V/\mathbf{R}\alpha$.

Два последних свойства показывают, что все собственные значения оператора u равны 1. С другой стороны, так как R конечно, существует целое число $n\geqslant 1$, такое, что $u^n(x)=x$ для всех $x\in R$. Отсюда следует, что $u^n=1$, поскольку множество R порождает V, и, значит, эндоморфизм u диагонализуем. Поскольку все собственные значения оператора u равны 1, заключаем, что $u=1$ и $s=s'$.

§ 2. Определение системы корней

Определение 1. Пусть V — векторное пространство и R — некоторое его подмножество. Мы скажем, что R есть *система корней* в пространстве V, если выполнены следующие условия:

1) R — конечное множество, порождающее пространство V и не содержащее нулевого вектора;

2) для любого вектора $\alpha\in R$ существует отражение s_α (относительно α), переводящее множество R в себя (в силу леммы 1 такое отражение единственно);

3) для любых $\alpha,\ \beta\in R$

$$s_\alpha(\beta)-\beta=n\alpha,\quad \text{где } n\in\mathbf{Z}.$$

Размерность пространства V называется *рангом* системы R, а элементы множества R — *корнями* пространства V (относительно системы R). Как было установлено в § 1, отражение s_α, соответствующее корню α, записывается следующим (единственным) образом:

$$s_\alpha = 1 - \alpha^* \otimes \alpha, \quad \text{где} \quad \langle \alpha^*, \alpha \rangle = 2.$$

Элемент $\alpha^* \in V^*$ мы назовем корнем, *двойственным* (или *обратным*) к α. Условие 3) можно теперь переформулировать так:

3′) Для любых $\alpha, \beta \in R$ число $\langle \alpha^*, \beta \rangle$ является целым.

Заметим, что $-\alpha \in R$, если $\alpha \in R$. Это вытекает из 2) или 3), так как $-\alpha = s_\alpha(\alpha)$.

Определение 2. Система корней R называется *приведенной*, если при любом $\alpha \in R$ вектор $-\alpha$ является единственным корнем, коллинеарным α.

Если R не является приведенной системой, то в ней содержатся два корня вида α и $t\alpha$ с $0 < t < 1$. Применяя свойство 3) к корню $\beta = t\alpha$, мы видим, что $2t \in \mathbf{Z}$, так что $t = 1/2$.

Таким образом, корни, коллинеарные вектору α, имеют вид

$$-\alpha, \ -\alpha/2, \ \alpha/2, \ \alpha.$$

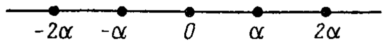
Замечание. Приведенные системы корней соответствуют в теории алгебр Ли (или алгебраических групп) полупростому случаю при условии, что основное поле алгебраически замкнуто. Именно с такими системами мы и будем в дальнейшем встречаться. Неприведенные системы появляются лишь тогда, когда основное поле алгебраически не замкнуто.

§ 3. Первые примеры

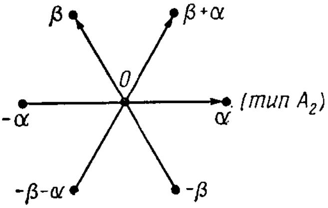
(Другие будут указаны в § 16.)

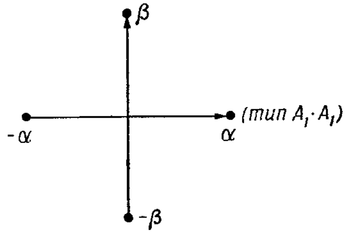
Единственной приведенной системой корней ранга 1 является система

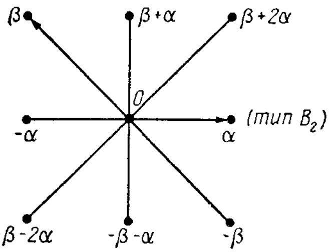
Существует также неприведенная система ранга 1:

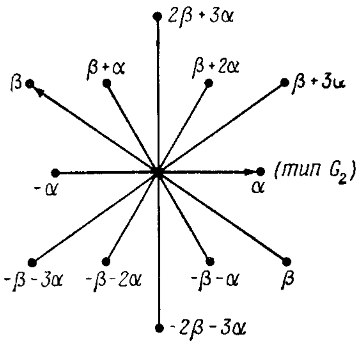


Можно показать (см. § 8, 15), что всякая приведенная система ранга 2 изоморфна одному из следующих четырех типов:









Упражнение. Пополнить систему корней типа B_2 так, чтобы получить неприведенную систему. Можно ли сделать то же самое с системами A_2 и G_2?

§ 4. Группа Вейля

Определение 3. Пусть R — система корней в векторном пространстве V. Назовем *группой Вейля* системы R подгруппу W в полной линейной группе $GL(V)$, порожденную отражениями s_α, $\alpha \in R$.

Группа W является, очевидно, подгруппой группы $\mathrm{Aut}(R)$ автоморфизмов пространства V, переводящих R в себя. Поскольку R порождает V, обе эти группы отождествляются с некоторыми подгруппами в группе всех подстановок множества R. В частности, обе эти группы конечны.

Пример. В том случае, когда R есть приведенная система ранга 2, группа W изоморфна *диэдральной* группе порядка $2n$, где $n=2$ (для типа $A_1 \times A_1$), $n=3$ (для типа A_2), $n=4$ (для типа B_2) и $n=6$ (для типа G_2). При этом $\mathrm{Aut}(R)=W$, если R имеет тип B_2 или G_2, и $(\mathrm{Aut}(R)\colon W)=2$, если R имеет тип $A_1 \times A_1$ или A_2.

§ 5. Инвариантные квадратичные формы

Предложение 1. *Пусть R — система корней в пространстве V. Существует невырожденная билинейная симметрическая положительно определенная форма $(\ ,\ )$ в пространстве V, инвариантная относительно группы Вейля W системы R.*

Доказательство. В самом деле, W — конечная группа. Возьмем на V произвольную билинейную невырожденную симметричную положительно определенную форму $B(x, y)$ и рассмотрим форму

$$(x, y) = \sum_{w \in W} B(wx, wy).$$

Легко видеть, что форма (x, y) инвариантна относительно W и $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$.

Всюду в дальнейшем через $(\ ,\ )$ будет обозначаться именно такая форма.

Таким образом, пространство V оказалось снабженным структурой евклидова пространства, относительно которой элементы группы Вейля (в частности, отражения s_α) являются ортогональными преобразованиями. Легко видеть, что

$$s_\alpha(x) = x - 2\frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \quad \text{для всех } x \in V.$$

Наша форма (,) определяет изоморфизм $V \to V^*$. Пусть α' — элемент пространства V, соответствующий элементу α^* при этом изоморфизме. По определению

$$s_\alpha(x) = x - (\alpha', x)\alpha \text{ для всех } x \in V,$$

откуда (сравнивая с написанной выше формулой) получаем

$$\alpha' = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}.$$

(Итак, α' получается из α обычной „инверсией степени 2“, которая рассматривается в элементарной геометрии.)

Условие 3), наложенное на систему корней, записывается в виде

$$2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbf{Z}, \quad \text{где } \alpha, \beta \in R.$$

Здесь мы, наконец, возвращаемся к традиционному определению системы корней (см. Джекобсон [1] или Семинар „Софус Ли“ [1]). Определение § 2 взято по существу у Бурбаки [1]; по сравнению с традиционным оно имеет лишь то преимущество, что строго разграничены роли пространств V и V^*.)

§ 6. Дуальная система

Пусть R — система корней пространства V.

Предложение 2. *Множество R^*, состоящее из двойственных корней α^* $(\alpha \in R)$, является системой корней пространства V^*. Кроме того, $\alpha^{**} = \alpha$ для всех $\alpha \in R$.*

Доказательство. Ясно, что R^* конечно и не содержит 0. Для доказательства того, что R^* порождает V^*, достаточно (ввиду изоморфизма $V \to V^*$) установить, что V порождается векторами вида $\alpha' = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$. Но это очевидно. В качестве отражения s_{α^*} для $\alpha^* \in R^*$ можно взять транспозицию ${}^t s_\alpha = 1 - \alpha \otimes \alpha^*$ автоморфизма s_α. Далее, $s_{\alpha^*}(R^*) = R^*$, поскольку $s_\alpha(R)=R$, и аналогично $\alpha^{**}=\alpha$. Наконец, если α^*, $\beta^*\in R^*$, то

$$\langle\alpha^{**}, \beta^*\rangle=\langle\beta^*, \alpha\rangle\in \mathbf{Z},$$

ч. т. д.

Система R^* называется *дуальной* (или *обратной*) к R. Отображение

$$w\longmapsto {}^t w^{-1}$$

устанавливает изоморфизм групп Вейля для систем R и R^*.

§ 7. Относительное расположение двух корней

Пусть α, β — произвольные корни. Положим

$$n(\beta, \alpha)=\langle\alpha^*, \beta\rangle=2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}.$$

Как мы знаем, $n(\beta, \alpha)\in\mathbf{Z}$. Далее, $(\alpha, \beta)=|\alpha|\cdot|\beta|\cos\varphi$, где $|\alpha|=(\alpha, \alpha)^{1/2}$ и $|\beta|=(\beta, \beta)^{1/2}$ — длины векторов α и β, а φ — угол между ними (относительно введенной на V евклидовой структуры). Следовательно,

$$n(\beta, \alpha)=2\frac{|\beta|}{|\alpha|}\cos\varphi,$$

откуда

$$n(\beta, \alpha)\cdot n(\alpha, \beta)=4\cos^2\varphi.$$

Так как справа стоит целое число, величина $4\cos^2\varphi$ может принимать лишь конечное число значений: 0, 1, 2, 3, 4 (последний случай соответствует коллинеарным корням α и β). Мы ограничимся случаем *неколлинеарных* корней; меняя, если нужно, α и β местами, получаем семь существенно различных возможностей:

1) $n(\alpha, \beta)=0$, $n(\beta, \alpha)=0$, $\varphi=\pi/2$;
2) $n(\alpha, \beta)=1$, $n(\beta, \alpha)=1$, $\varphi=\pi/3$, $|\beta|=|\alpha|$;
3) $n(\alpha, \beta)=1$, $n(\beta, \alpha)=-1$, $\varphi=2\pi/3$, $|\beta|=|\alpha|$;
4) $n(\alpha, \beta)=1$, $n(\beta, \alpha)=2$, $\varphi=\pi/4$, $|\beta|=\sqrt{2}|\alpha|$;
5) $n(\alpha, \beta)=-1$, $n(\beta, \alpha)=-2$, $\varphi=3\pi/4$, $|\beta|=\sqrt{2}|\alpha|$;
6) $n(\alpha, \beta)=1$, $n(\beta, \alpha)=3$, $\varphi=\pi/6$, $|\beta|=\sqrt{3}|\alpha|$;
7) $n(\alpha, \beta)=-1$, $n(\beta, \alpha)=-3$, $\varphi=5\pi/6$, $|\beta|=\sqrt{3}|\alpha|$.

Из этой таблицы видно, что задание угла φ однозначно определяет пару чисел $\{n(\alpha, \beta), n(\beta, \alpha)\}$, а также отношения длин $\{|\alpha|/|\beta|, |\beta|/|\alpha|\}$ (если, конечно, $\varphi \neq \pi/2$).

Предложение 3. *Пусть* α *и* β — *два неколлинеарных корня. Тогда разность* $\alpha-\beta$ *тоже является корнем, если* $n(\beta, \alpha)>0$.

Отметим, что неравенство $n(\beta, \alpha)>0$ эквивалентно неравенству $(\alpha, \beta)>0$, которое показывает, что угол между векторами α и β *острый*.

Доказательство. Как видно из приведенной выше таблицы, в нашем случае одно из двух чисел $n(\beta, \alpha)$ или $n(\alpha, \beta)$ равно 1. Пусть, например, $n(\beta, \alpha)=1$. Тогда

$$\alpha-\beta=-(\beta-n(\beta, \alpha)\alpha)=-s_{\alpha}(\beta).$$

Если же $n(\alpha, \beta)=1$, то $\alpha-\beta=s_{\beta}(\alpha)$. В обоих случаях $\alpha-\beta \in R$.

§ 8. Базисы

Пусть R — система корней пространства V.

Определение 4. Подмножество $S \subset R$ называется *базисом* системы R, если (i) S — базис векторного пространства V; (ii) все корни $\beta \in R$ записываются в виде линейных комбинаций

$$\beta=\sum_{\alpha \in S} m_{\alpha}\alpha$$

с целыми коэффициентами m_{α}, имеющими один и тот же знак (т. е. все $m_{\alpha} \geqslant 0$ или все $m_{\alpha} \leqslant 0$).

Вместо слова „базис“ говорят также *система простых корней*, а элементы множества S называют *простыми корнями*.

Теорема 1. *Для всякой системы корней существует базис.*

В действительности мы докажем более точный результат. Пусть $t \in V^*$ — такой элемент, что $\langle t, \alpha\rangle \neq 0$ для всех $\alpha \in R$. Положим $R_t^+=\{\alpha \in R \mid \langle t, \alpha\rangle>0\}$. Очевидно,

$R = R_t^+ \cup (-R_t^+)$. Элемент $\alpha \in R_t^+$ называется *разложимым*, если существуют два корня β, $\gamma \in R_t^+$, такие, что $\alpha = \beta + \gamma$; в противном случае мы будем говорить, что α — *неразложимый* элемент. Обозначим через S_t множество всех неразложимых элементов из R_t^+.

Предложение 4. *Множество S_t является базисом системы R. Обратно, если S — базис системы R и элемент $t \in V^*$ таков, что $\langle t, \alpha \rangle > 0$ для всех $\alpha \in S$, то $S = S_t$.*

Доказательство. Покажем вначале, что S_t — базис системы R. Доказательство проведем в несколько этапов.

Лемма 2. *Любой элемент из R_t^+ записывается в виде линейной комбинации элементов из S_t с целыми неотрицательными коэффициентами.*

Доказательство леммы. Обозначим через I множество элементов, не удовлетворяющих нужному нам свойству. Мы хотим показать, что I пусто. Если это не так, существует элемент $\alpha \in I$, для которого величина $\langle t, \alpha \rangle$ минимальна. Элемент α разложим (иначе он лежит в S_t), т. е. $\alpha = \beta + \gamma$, где β, $\gamma \in R_t^+$. Следовательно,

$$\langle t, \alpha \rangle = \langle t, \beta \rangle + \langle t, \gamma \rangle.$$

Но так как числа $\langle t, \beta \rangle$ и $\langle t, \gamma \rangle$ строго положительны, оба они строго меньше $\langle t, \alpha \rangle$, и потому $\beta \notin I$ и $\gamma \notin I$. Из определения множества I вытекает тогда, что $\alpha \notin I$, и мы приходим к противоречию.

Лемма 3. $(\alpha, \beta) \leqslant 0$, *если* α, $\beta \in S_t$.

Доказательство леммы. Действительно, в противном случае (см. предложение 3) вектор $\gamma = \alpha - \beta$ является корнем. Если, например, $\gamma \in R_t^+$, то $\alpha = \beta + \gamma$, хотя вектор α, будучи элементом множества S_t, неразложим. Если же $-\gamma \in R_t^+$, то $\beta = \alpha + (-\gamma)$, а это противоречит неразложимости вектора β.

Лемма 4. *Пусть $t \in V^*$ и A — подмножество пространства V, такое, что*

(а) $\langle t, \alpha\rangle > 0$ для всех $\alpha \in A$;

(б) $(\alpha, \beta) \leqslant 0$ для $\alpha, \beta \in A$.

Тогда элементы множества A линейно независимы.

Другими словами, система векторов, образующих попарно тупые углы и лежащих в одном полупространстве, линейно независима.

Доказательство леммы. Любое линейное соотношение, наложенное на элементы множества A, можно записать в виде

$$\sum y_\beta \beta = \sum z_\gamma \gamma,$$

где $y_\beta > 0$ и $z_\gamma > 0$, причем индексы β и γ пробегают конечное число *различных* векторов из A.

Пусть $\lambda = \sum y_\beta \beta$. Тогда

$$(\lambda, \lambda) = \sum y_\beta z_\gamma (\beta, \gamma),$$

и, следовательно, $(\lambda, \lambda) \leqslant 0$ (см. (б)). Итак, мы получаем, что $\lambda = 0$. Значит,

$$0 = \langle t, \lambda\rangle = \sum y_\beta \langle t, \beta\rangle$$

и потому $y_\beta = 0$ и $z_\gamma = 0$ для всех β и γ.

Леммы 2, 3 и 4, как легко убедиться, в совокупности показывают, что множество S_t — базис системы R.

Обратно, пусть S — базис этой системы и для некоторого элемента $t \in V^*$ неравенство $\langle t, \alpha\rangle > 0$ имеет место для всех $\alpha \in S$. Обозначим через R^+ множество всех корней, представимых в виде линейных комбинаций корней из S с целыми неотрицательными коэффициентами. Очевидно, $R^+ \subset R_t^+$ и $(-R^+) \subset -R_t^+$. Поэтому $R^+ = R_t^+$, так как R есть объединение R^+ и $-R^+$. Из определения базиса вытекает, что элементы множества S неразложимы, т. е. $S \subset S_t$. Однако S и S_t имеют одинаковое количество элементов (равное размерности пространства V), что и доказывает искомое равенство $S = S_t$. Предложение доказано.

Пример. Пусть $\dim V = 2$ и $\{\alpha, \beta\}$ — базис системы R. Поскольку угол между α и β тупой (см. лемму 3), могут представиться лишь случаи 1), 3), 5), 7) (см. § 7) (с точностью до перестановки α и β). Эти возможности как раз соответствуют системам типов $A_1 \times A_1$, A_2, B_2 и G_2 (см. § 3).

§ 9. Некоторые свойства базисов

В этом и последующих параграфах символом S мы будем обозначать *базис* системы корней R, а символом R^+ — множество корней, представимых в виде линейной комбинации элементов множества S с целыми положительными коэффициентами. Элементы множества R^+ назовем *положительными корнями* (относительно системы S).

Предложение 5. *Каждый положительный корень* β *представим в виде суммы*

$$\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k, \quad \alpha_i \in S \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

притом так, чтобы, все частичные суммы

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_h, \qquad 1 \leqslant h \leqslant k,$$

тоже были корнями.

Доказательство. Выберем в V^* такой элемент t, что $\langle t, \alpha \rangle = 1$ для всех $\alpha \in S$. Так как β — положительный корень, число $\langle t, \beta \rangle$ является целым и положительным. Докажем наше предложение индукцией по $k = \langle t, \beta \rangle$. Прежде всего заметим, что неравенство $(\alpha, \beta) \leqslant 0$ не может иметь место для всех $\alpha \in S$. Действительно, в противном случае мы получили бы (см. лемму 4), что векторы базиса S и вектор β в совокупности линейно независимы, а это противоречит определению базиса. Итак, найдется такой корень $\alpha \in S$, что $(\alpha, \beta) > 0$. Если α и β коллинеарны, то либо $\alpha = \beta$, либо $\beta = 2\alpha$; в обоих случаях предложение очевидно. Если же это не так, то разность $\gamma = \beta - \alpha$ будет (предложение 3) корнем пространства V. Понятно, что γ не лежит в $-R^+$, так как равенство

$\alpha=\beta+(-\gamma)$ противоречило бы неразложимости корня α. Поэтому $\gamma \in R^+$ и

$$\langle t, \gamma\rangle = \langle t, \beta\rangle - \langle t, \alpha\rangle = k-1.$$

По предположению индукции $\gamma = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}$, $\alpha_i \in S$ $(i=1, \ldots, k-1)$, причем все суммы $\alpha_1 + \ldots + \alpha_h$, $1 \leqslant h \leqslant k-1$, являются корнями. Но тогда представление β в виде суммы

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1} + \alpha$$

удовлетворяет требуемым условиям.

Предложение 6. *Пусть система R является приведенной. Тогда отражение s_α (относительно $\alpha \in S$) переводит множество $R^+ \setminus \{\alpha\}$ в себя.*

Доказательство. Пусть $\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}$. Как мы знаем,

$$\beta = \sum_{\gamma \in S} m_\gamma \gamma, \quad \text{где} \quad m_\gamma \geqslant 0.$$

Поскольку R — приведенная система и $\beta \neq \alpha$, векторы α и β неколлинеарны. Существует, следовательно, такой корень $\gamma \in S$, что $\gamma \neq \alpha$ и $m_\gamma \neq 0$. Однако равенство $s_\alpha(\beta) = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha$ показывает, что коэффициенты корня γ в разложении корней $s_\alpha(\beta)$ и β по простым корням одинаковы, за исключением коэффициента при α. Поэтому $s_\alpha(\beta) \neq \alpha$ и $s_\alpha(\beta) \in R^+$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Обозначим через ρ полусумму всех положительных корней* $\left(\text{т. е. } \rho = 1/2 \sum_{\beta \in R^+} \beta\right)$. *Для всех $\alpha \in S$ имеет место равенство*

$$s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha.$$

Доказательство. Пусть $\rho_\alpha = 1/2 \sum_{\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}} \beta$. Очевидно (см. предложение 6), что $s_\alpha(\rho_\alpha) = \rho_\alpha$. С другой стороны, $\rho = \rho_\alpha + \alpha/2$. Поскольку $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, получаем $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$, Предложение 7. *Пусть система R приведенная. Множество S^*, состоящее из корней, двойственных к корням из S, является базисом системы R^*.*

Доказательство. Пусть R' — система корней вида $\alpha' = 2\alpha/(\alpha, \alpha)\,(\alpha \in R)$. Достаточно (в силу изоморфизма $V \to V^*$) показать, что множество S' векторов вида α' $(\alpha \in S)$ является базисом системы R'. Выберем такой элемент $t \in V^*$, что $\langle t, \alpha\rangle > 0$ при всех $\alpha \in S$, и натянем на систему векторов $R^+ = R_t^+$ выпуклый конус C. Натянув конус на векторы из $S = S_t$, мы получим то же самое тело C. Заметим теперь, что лучи, порожденные элементами базиса S, и только они, являются *ребрами*[1]) нашего конуса. Рассмотрим систему $(R_t')^+$. Легко видеть, что она образована векторами α', где $\alpha \in R^+$. Пусть S_t' — соответствующий базис этой системы (см. предложение 4). В силу сказанного выше конус, натянутый на векторы из $(R_t')^+$, совпадает с конусом, натянутым на векторы из R^+, т. е. с C. По аналогичным соображениям ребрами этого конуса являются лучи, порожденные элементами множества S_t'. Таким образом, элементы множеств S' и S_t' лежат на одних и тех же лучах. Поскольку R' — приведенная система (система R приведенная), на одном луче не может лежать двух разных корней, т. е. $S' = S_t'$.

Замечание. В общем случае дело обстоит следующим образом. Пусть S_1 (соответственно S_2) — подмножество в S, состоящее из таких $\alpha \in S$, что вектор 2α не является (соответственно является) корнем. Оказывается, базис в R^* образуется векторами α^* $(\alpha \in S_1)$ и $\alpha^*/2$ $(\alpha \in S_2)$.

§ 10. Связь с группой Вейля

Предполагается, что система корней R является приведенной.

[1]) В оригинале „génératrices extrémales". — *Прим. ред*

Теорема 2. *Пусть W — группа Вейля системы R.*

(а) *Для каждого элемента $t \in V^*$ существует автоморфизм $w \in W$, такой, что $\langle w(t), \alpha\rangle \geqslant 0$ при любом $\alpha \in S$.*

(б) *Для всякого базиса S' системы R существует автоморфизм $w \in W$, такой, что $w(S') = S$.*

(в) *Для каждого элемента $\beta \in R$ существует автоморфизм $w \in W$, такой, что $w(\beta) \in S$.*

(г) *Группа W порождена отображениями вида s_α, где $\alpha \in S$.*

Доказательство. Обозначим через W_S подгруппу в W, порожденную отражениями s_α, $\alpha \in S$. Докажем вначале утверждение (а) *для группы W_S*. Пусть $t \in V^*$ и ρ — полусумма положительных корней (см. следствие предложения 6). Выберем в группе W_S элемент w, для которого величина $\langle w(t), \rho\rangle$ *максимальна*. В частности,

$$\langle w(t), \rho\rangle \geqslant \langle s_\alpha w(t), \rho\rangle, \quad \alpha \in S.$$

Но

$$\langle s_\alpha w(t), \rho\rangle = \langle w(t), s_\alpha(\rho)\rangle = \langle w(t), \rho - \alpha\rangle$$

(см. указанное выше следствие). Из этого соотношения и предыдущего неравенства получаем $\langle w(t), \alpha\rangle \geqslant 0$ для всех $\alpha \in S$.

Докажем теперь утверждение (б), но *также для группы W_S*. Пусть элемент $t' \in V^*$ таков, что $\langle t', \alpha'\rangle > 0$ для всех $\alpha' \in S'$. В силу (уже доказанного) утверждения (а) существует автоморфизм $w \in W_S$, такой, что $\langle t, \alpha\rangle \geqslant 0$ при всех $\alpha \in S$, где $t = w(t')$. Но $\langle t, \alpha\rangle = \langle t', w^{-1}(\alpha)\rangle$, и форма t' не обращается в нуль ни на одном корне из R (так как $\langle t', \alpha'\rangle > 0$ при $\alpha' \in S'$). Поэтому $\langle t, \alpha\rangle > 0$. Итак, согласно предложению 4,

$$S = S_t \quad \text{и} \quad S' = S_{t'}.$$

Осталось заметить, что автоморфизм w переводит $S_{t'}$ в S, поскольку он переводит t' в t.

Докажем утверждение (в) (*снова для группы W_S*). Пусть $\beta \in R$, и пусть L — гиперплоскость в V^*, ортогональная к β. Гиперплоскости, ортогональные к корням, не равным $\pm\beta$, отличны от L, и число их *конечно*.

Поэтому в гиперплоскости L существует элемент t_0, который не лежит ни в одной из упомянутых гиперплоскостей, т. е.
$\langle t_0, \beta\rangle = 0$ и $\langle t_0, \gamma\rangle \neq 0$ для всех $\gamma \in R$, $\gamma \neq \pm\beta$. Итак, $|\langle t_0, \gamma\rangle| > \langle t_0, \beta\rangle$. В достаточно малой окрестности t_0 найдется такой элемент t, что $\langle t, \beta\rangle > 0$ и $|\langle t, \gamma\rangle| > \langle t, \beta\rangle$. Рассмотрим базис S_t системы R, ассоциированный с элементом t (см. § 8). Из двух последних неравенств вытекает, что $\beta \in S_t$. Однако, согласно (б), существует такое $w \in W_S$, что $w(S_t) = S$ и, следовательно, $w(\beta) \in S$.

Докажем, наконец, что $W_S = W$. Поскольку группа W порождена отражениями s_β, где $\beta \in R$, достаточно показать, что $s_\beta \in W_S$. Согласно (в), имеется автоморфизм $w \in W_S$, такой, что $\alpha = w(\beta) \in S$. Значит,

$$s_\alpha = s_{w(\beta)} = w \cdot s_\beta \cdot w^{-1}$$

и $s_\beta = w^{-1} \cdot s_\alpha \cdot w$, откуда $s_\beta \in W_S$.

Замечания. 1. Можно показать, что элемент w, существование которого утверждается в (б), определен однозначно (см. гл. VII, § 5).

2. Множество элементов $t \in V^*$, таких, что $\langle t, \alpha\rangle > 0$ для всех $\alpha \in S$, называется *камерой Вейля*, ассоциированной с S. В силу (а) и (б) камера Вейля является *связной компонентой* в $V^* \setminus \bigcup\limits_{\beta \in R} L_\beta$, где L_β — гиперплоскость, ортогональная к корню β.

3. Утверждение (г) можно уточнить, явно указав соотношения между образующими s_α $(\alpha \in S)$ группы W. Именно:

$$s_\alpha^2 = 1, \quad (s_\alpha, s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1,$$

где $m(\alpha, \beta)$ равно 2, 3, 4 или 6 в зависимости от того, каков угол между α и β: $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ или $5\pi/6$ (см., например, Шевалле [3], сообщение 14).

§ 11. Матрица Картана

Определение 5. *Матрицей Картана* системы корней R (при фиксированном базисе S) называется матрица $(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in S}$.

Напомним (см. § 7), что $n(\alpha, \beta) = \langle \beta^*, \alpha \rangle$ — целое число. Кроме того, $n(\alpha, \alpha) = 2$, а если $\alpha \neq \beta$, то $n(\alpha, \beta) \leqslant 0$ (см. лемму 3); $n(\alpha, \beta)$ может принимать значения $0, -1, -2, -3$.

Пример. Матрица Картана системы корней типа G_2 равна

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Предложение 8. *Приведенная система корней однозначно, с точностью до изоморфизма, определяется своей матрицей Картана.*

Имеет место более точное утверждение.

Предложение 8′. *Пусть R' — приведенная система корней векторного пространства V', и пусть S' — базис этой системы. Предположим, что задано биективное отображение φ: $S \to S'$, такое, что $n(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = n(\alpha, \beta)$ для всех α, $\beta \in S$. Если система R приведенная, то существует единственный изоморфизм f: $V \to V'$, продолжающий φ и переводящий систему R в систему R'.*

Доказательство. Продолжим по линейности отображение φ до изоморфизма f: $V \to V'$. Если α, $\beta \in S$, то

$$s_{\varphi(\alpha)}(f(\beta)) = s_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) = \varphi(\beta) - n(\varphi(\beta), \varphi(\alpha))\,\varphi(\alpha)$$

и

$$f(s_\alpha(\beta)) = f(\beta - n(\beta, \alpha)\,\alpha) = \varphi(\beta) - n(\beta, \alpha)\,\varphi(\alpha).$$

Обе формулы в совокупности дают равенство $s_{\varphi(\alpha)} \circ f = f \circ s_\alpha$, $\alpha \in S$. Пусть W и W' обозначают группы Вейля систем R и R' соответственно. Последнее равенство показывает, что $W = fWf^{-1}$, а следовательно, $f(R) = R'$, так как $R = W(S)$ и $R' = W'(S')$.

Рассмотрим группу E подстановок множества S, оставляющих инвариантной матрицу Картана. Из доказанного нами предложения 8 вытекает, что *группу E можно отождествить с подгруппой группы $\operatorname{Aut}(R)$, состоящей из таких автоморфизмов, которые переводят в себя множество S.*

Предложение 9. *Группа* $\mathrm{Aut}(R)$ *есть полупрямое произведение групп* E *и* W.

Доказательство. Если $w \in W \cap E$, то $w(S) = S$ и, значит, $w = 1$ (этот факт мы докажем несколько позже, см. гл. VII, § 5). С другой стороны, если $u \in \mathrm{Aut}(R)$, то $u(S)$ — базис системы R. Следовательно (см. теорему 2), существует элемент $w \in W$, такой, что $w(u(S)) = S$. Элемент wu лежит в E, т. е. любой элемент $u \in \mathrm{Aut}(R)$ имеет вид we, где $w \in W$ и $e \in E$.

Следствие. *Факторгруппа* $\mathrm{Aut}(R)/W$ *изоморфна группе* E.

§ 12. Графы Кокстера

Определение 6. *Графом Кокстера* системы R (относительно фиксированного базиса S) называется граф, вершинами которого служат элементы S, причем две различные вершины α и β соединены одним, двумя или тремя ребрами или не соединены вообще в зависимости от того, какому из чисел: 1, 2, 3 или 0 равно произведение $n(\alpha, \beta) \cdot n(\beta, \alpha)$.

Напомним (см. § 7), что

$$n(\alpha, \beta) \cdot n(\beta, \alpha) = 4\cos^2\varphi,$$

где φ — угол между векторами α и β.

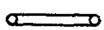
Заметим, что графы, отвечающие различным базисам, изоморфны (согласно теореме 2 § 10).

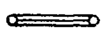
Пример. Графы Кокстера систем корней, указанных в § 3, имеют вид


(тип A_1)


(тип $A_1 \cdot A_1$)


(тип A_2)


(тип B_2)


(тип G_2)

§ 13. Неприводимые системы корней

Предложение 10. *Пусть V — прямая сумма своих подпространств V_1 и V_2, и пусть R содержится в объединении $V_1 \cup V_2$. Положим $R_i = R \cap V_i$ $i = 1, 2$. Тогда*

(a) *V_1 и V_2 ортогональны;*

(б) *R_i — система корней в пространстве V_i.*

Доказательство. Если $\alpha \in R_1$ и $\beta \in R_2$, то $\alpha - \beta \notin V_1 \cup V_2$. Элемент $\alpha - \beta$, как мы видим, не является корнем, поэтому (см. предложение 3) $(\alpha, \beta) \leqslant 0$. Применяя то же соображение к $-\beta$ вместо β, получаем, что $(\alpha, \beta) = 0$. Элементы R_i порождают V_i $(i = 1, 2)$, что и доказывает (а).

Для доказательства (б) достаточно заметить, что отражения $s_\alpha (\alpha \in R_1)$, согласно (а), действуют на V_2 тождественно и, следовательно, переводят в себя пространство V_1.

В ситуации, описанной в предложении 10, говорят, что система R есть *сумма* своих подсистем R_i. Если такое разложение невозможно (разумеется, в предположении, что пространства V_i нетривиальны) и если $V \neq 0$, то система R называется *неприводимой*.

Предложение 11. *Каждая система корней есть сумма своих неприводимых подсистем.*

Доказательство очевидно.

Можно показать, что такое разложение *единственно.*

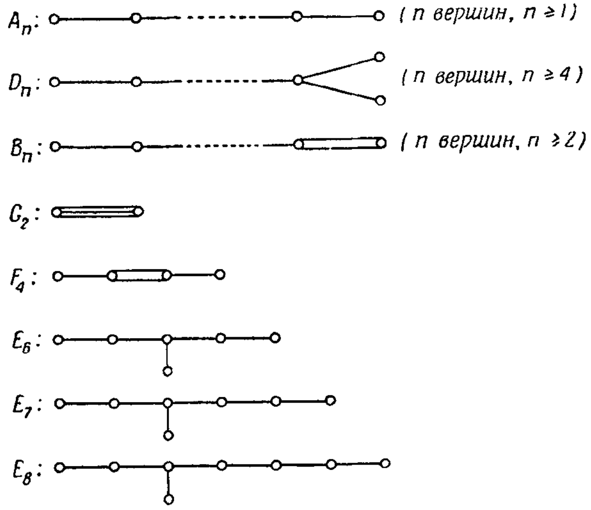
Предложение 12. *Для того чтобы система R была неприводима, необходимо и достаточно, чтобы ее граф Кокстера был связен и непуст.*

Доказательство. Если система R есть сумма своих нетривиальных подсистем R_1 и R_2, то в качестве базиса S этой системы можно взять объединение базисов S_1 и S_2 систем R_1 и R_2. Элементы базисов S_1 и S_2 попарно ортогональны, поэтому в графе Кокстера они *не соединяются никаким ребром*, т. е. граф Кокстера системы R распадается в несвязное объединение графов Кокстера для R_1 и R_2.

Обратно, если $S = S_1 \cup S_2$, причем части S_1 и S_2 не связаны никаким ребром, то все элементы множества S_1 ортогональны ко всем векторам из S_2. Следовательно, пространства V_1 и V_2, порожденные векторами S_1 и S_2, тоже друг другу ортогональны и инвариантны относительно отражений s_α, $\alpha \in S$. Теорема 2 позволяет нам заключить, что система R содержится в объединении $V_1 \cup V_2$ и, следовательно, является приводимой.

§ 14. Классификация связных графов Кокстера

Теорема 3. *Всякий непустой связный граф Кокстера изоморфен одному из следующих графов*:



Идея доказательства. Рассмотрим непустой связный граф G, множество вершин S которого конечно, причем последние либо соединены одним, двумя или тремя ребрами, либо не соединены вообще. Такому графу можно сопоставить билинейную симметрическую форму $A(x, y)$, определенную на пространстве $\mathbf{R}^S$ (с фиксированным базисом $\{e_\alpha\}_{\alpha \in S}$), полагая

$$A(e_\alpha, e_\alpha) = 1,$$
$$A(e_\alpha, e_\beta) = m_{\alpha\beta},$$

где $m_{\alpha\beta}$ равно $\cos(\pi/2)$, $\cos(2\pi/3)$, $\cos(3\pi/4)$ или $\cos(5\pi/6)$ в зависимости от того, сколько ребер соединяют вершины α и β — 0, 1, 2 или 3.

Для того чтобы граф G был графом Кокстера, необходимо, чтобы эта форма была *невырождена и положительно определена* (так как она реализуется одной из инвариантных форм, введенных в § 5). С помощью хитроумных вычислений можно показать, что условие положительной определенности этой формы влечет изоморфизм графа G с одним из графов вида A_n, D_n, ..., E_8. (Подробнее см. Семинар „Софус Ли" [1] или Джекобсон [1], стр. 146.)

§ 15. Схема Дынкина

Мы ограничимся для простоты лишь приведенными и неприводимыми системами корней.

Как легко понять, графа Кокстера недостаточно для определения матрицы Картана (а следовательно, и системы корней); он определяет всего-навсего угол между парой корней базиса, не давая никакой дополнительной информации. Двойственные друг другу системы корней (например, B_n и C_n, см. § 16) могут иметь один и тот же граф Кокстера.

Однако матрицу Картана можно однозначно восстановить, зная *отношения длин* корней. Это наводит на мысль приписать каждой вершине графа Кокстера коэффициент, пропорциональный квадрату длины (α, α) соответствующего корня α. Доопределенный таким образом граф Кокстера называется *схемой Дынкина* системы R.

Условимся не различать две схемы Дынкина, которые отличаются друг от друга только коэффициентом пропорциональности.

Предложение 13. *Задание схемы Дынкина равносильно заданию матрицы Картана. Каждый из этих объектов определяет систему корней с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. В силу предложения 8 и в силу сказанного выше достаточно доказать, что по схеме Дынкина однозначно восстанавливается матрица Картана. Действительно,

если $\alpha=\beta$, то $n(\alpha, \beta)=2$;

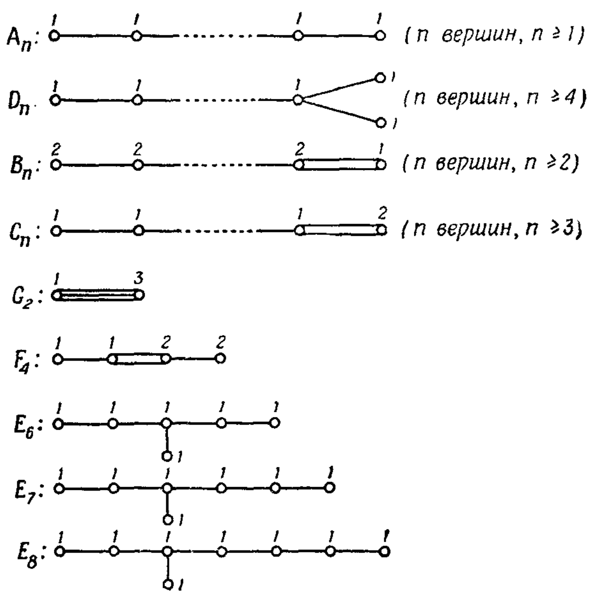
если $\alpha\neq\beta$ и если α и β не соединены ребром графа, то $n(\alpha, \beta)=0$;

если $\alpha\neq\beta$, α и β имеют хотя бы одно общее ребро и коэффициент при α не больше коэффициента при β, то $n(\alpha, \beta)=-1$;

если $\alpha\neq\beta$, α и β соединяются i ребрами ($1\leqslant i\leqslant 3$) и коэффициент при α больше коэффициента при β, то $n(\alpha, \beta)=-i$.

(В последнем случае коэффициент при α в i раз больше коэффициента при β; используя это обстоятельство, можно вычерчивать не все отрезки.)

Теорема 4. *Всякая непустая связная схема Дынкина изоморфна одной из схем вида*:



Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 3.

Замечания. 1. Можно утверждать и обратное: каждой из схем Дынкина $A_n, \ldots, E_8$ соответствует некоторая система корней. В следующем параграфе мы укажем явную конструкцию этих систем.

2. Из предложения 13 вытекает, что группа E автоморфизмов матрицы Картана (см. § 11) изоморфна группе автоморфизмов схемы Дынкина. С одного взгляда на таблицу теоремы 4 видно, что

$E=\{1\}$ для систем вида A_1, B_n, C_n, G_2, F_4, E_7, E_8;

E состоит из двух элементов для систем вида $A_n\,(n\geqslant 2)$, $D_n\,(n\geqslant 5)$ и E_6;

E изоморфна группе подстановок из трех элементов для системы D_4.

§ 16. Конструкция неприводимых систем корней

В этом параграфе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — канонический базис пространства $\mathbf{R}^n$; $(\ ,\ )$ — билинейная форма в пространстве $\mathbf{R}^n$, такая, что $(e_i, e_j)=\delta_{ij}$; L_n — аддитивная подгруппа пространства $\mathbf{R}^n$, порожденная векторами e_i, $1\leqslant i\leqslant n$.

Конструкция системы $A_n\,(n\geqslant 1)$. В качестве пространства V возьмем гиперплоскость в $\mathbf{R}^{n+1}$, ортогональную к вектору $e_1+\ldots+e_{n+1}$, а в качестве R — множество элементов $\alpha\in V\cap L_{n+1}$, для которых $(\alpha, \alpha)=2$. Для каждого $\alpha\in R$ рассмотрим отображение s_α:

$$\beta\longmapsto\beta-(\alpha, \beta)\,\alpha.$$

Непосредственная проверка показывает, что множество R является системой корней.

Элементы этого множества, как нетрудно видеть, суть векторы вида e_i-e_j, $i\neq j$. В качестве базиса S системы R можно взять, например, набор векторов e_i-e_{i+1}, $1\leqslant i\leqslant n$.

Группа Вейля естественным образом отождествляется с группой подстановок множества $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$.

Конструкция системы B_n $(n \geqslant 1)$. В пространстве $V = \mathbf{R}^n$ рассмотрим подмножество

$$R = \{\alpha \in L_n \mid (\alpha, \alpha) = 1 \text{ или } (\alpha, \alpha) = 2\}.$$

Очевидно, R состоит из векторов вида $\pm e_i$ и $\pm e_i \pm e_j (i \neq j)$.

Базис: $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n, e_n$.

Группа Вейля: произведение группы подстановок множества $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и группы преобразований, меняющих знаки при векторах e_i.

(При $n = 1$ системы A_1 и B_1 изоморфны.)

Конструкция системы C_n $(n \geqslant 1)$. Рассмотрим двойственную к B_n систему корней; она состоит из векторов вида $\pm e_i \pm e_j$ $(i \neq j)$ и $\pm 2e_i$.

Базис: $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n, 2e_n$.

Группа Вейля изоморфна соответствующей группе для системы B_n.

(При $n = 1$ система C_1 изоморфна системам A^1 и B_1; при $n = 2$ система C_2 изоморфна системе B_2.)

Конструкция системы D_n $(n \geqslant 2)$. Пусть $V = \mathbf{R}^n$ и $R = \{\alpha \in L_n \mid (\alpha, \alpha) = 2\}$. Множество R состоит из векторов вида $\pm e_i \pm e_j$ $(i \neq j)$.

Базис: $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n$.

Группа Вейля: произведение группы подстановок множества $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и группы преобразований, меняющих знаки (в четном числе) при векторах e_i.

(При $n = 2$ эта система изоморфна $A_1 \times A_1$, а при $n = 3$ — системе A_3.)

Конструкция системы G_2. Эта система была построена в § 3. Ее можно описать как множество целых алгебраических чисел кругового поля, порожденного корнем кубическим из единицы, с нормой 1 или 3.

Конструкция системы F_4. Обозначим через L'_4 подгруппу в пространстве $V = \mathbf{R}^4$, порожденную группой L_4 и элементом $\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. Положим

$$R = \{\alpha \in L'_4 \mid (\alpha, \alpha) = 2 \text{ или } (\alpha, \alpha) = 1\}.$$

Это множество состоит из векторов вида $\pm e_i$, $\pm e_i \pm e_j$ $(i \neq j)$ и $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$.

Базис: $e_2 - e_3$, $e_3 - e_4$, e_4, $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$.

Конструкция системы E_8. Обозначим через L_8' подгруппу в пространстве $V = \mathbf{R}^8$, порожденную группой L_8 и элементом $\frac{1}{2}(e_1 + \ldots + e_8)$, а через L_8'' — подгруппу группы L_8', образованную векторами, у которых сумма координат есть целое *четное* число. В качестве R возьмем множество $\{\alpha \in L_8'' \mid (\alpha, \alpha) = 2\}$. Оно состоит из векторов вида $\pm e_i \pm e_j$ $(i \neq j)$ и $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{m(i)} e_i$, где $\sum_i m(i)$ — четное число. Базис: $\frac{1}{2}\left(e_1 + e_8 - \sum_{i=2}^{7} e_i\right)$, $e_1 + e_2$, $e_2 - e_1$, $e_3 - e_2$, $e_4 - e_3$, $e_5 - e_4$, $e_6 - e_5$, $e_7 - e_6$.

Конструкция систем E_6 и E_7. В качестве системы E_6 (соответственно E_7) можно взять пересечение системы E_8 (построенной выше в пространстве $\mathbf{R}^8$) и векторного подпространства, порожденного первыми шестью (соответственно семью) элементами базиса $\{e_1, \ldots, e_8\}$.

Неприведенные системы корней. Можно показать, что для каждого целого $n \geqslant 1$ существует единственная (с точностью до изоморфизма) неприводимая, но не приведенная система корней BC_n, получаемая объединением систем B_n и C_n, построенных выше.

§ 17. Комплексные системы корней

Пусть V — *комплексное* векторное пространство конечной размерности. Определение отражения, данное в § 1, переносится без изменения на комплексный случай, причем лемма 1 по-прежнему остается справедливой. Последнее обстоятельство позволяет сформулировать следующее

Определение 7. Конечное подмножество R пространства V называется *системой* (*комплексных*) *корней*, если

1) множество R порождает V (как комплексное векторное пространство) и не содержит нулевого вектора;

2) для любого вектора $\alpha \in R$ существует отражение $s_\alpha = 1 - \alpha^* \otimes \alpha$ относительно вектора α, переводящее множество R в себя;

3) векторы $s_\alpha(\beta) - \beta$ и α (где $\alpha, \beta \in R$) коллинеарны и их отношение есть целое число.

Пример. Пусть R — система корней *вещественного* векторного пространства V_0. Обозначим через V *комплексификацию* $V_0 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Пространство V_0 вкладывается в пространство V, и множество R является *системой комплексных корней* этого пространства. Действительно, мы получим все требуемые отражения s_α, продолжая по линейности соответствующие отражения s_α^0 пространства V_0.

Теорема 5. *Всякая комплексная система корней может быть получена описанным выше способом.*

Имеет место более точное утверждение.

Теорема 5′. *Пусть R — система корней комплексного векторного пространства V, и пусть V_0 — его вещественное векторное подпространство, порожденное векторами множества R. Тогда*

(а) *R — (вещественная) система корней пространства V_0;*

(б) *каноническое отображение i: $V_0 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \to V$ есть изоморфизм;*

(в) *отражение $s_\alpha (\alpha \in R)$ пространства V есть продолжение по линейности отражения s_α^0 пространства V_0.*

Доказательство. (а) По условию множество R порождает пространство V_0. С другой стороны, множество R инвариантно относительно отражений s_α, и потому пространство V_0 тоже инвариантно относительно этих отражений. Обозначим через s_α^0 ограничение s_α на пространство V_0. Если $\alpha, \beta \in R$, то $s_\alpha^0(\beta) = \beta - \alpha^*(\beta)\alpha$, где $\alpha^*(\beta) \in \mathbf{Z}$. Таким образом, множество R действительно является системой корней пространства V_0. Более того, действительные корни $\alpha_0^* \in V_0^*$ суть не что иное, как образы соответствующих корней $\alpha^* \in V^*$ при гомоморфизме ограничения $V \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_0, \mathbf{C})$.

б) Поскольку R порождает V, отображение

$$i\colon V_0 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \to V$$

сюръективно. С другой стороны, сопряженное отображение

$${}^t i\colon V^* \to V_0^* \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$$

переводит α^* в α_0^* для всех $\alpha \in R$. Однако, согласно предложению 2, элементы α_0^* образуют систему корней в пространстве V_0^* и, в частности, порождают это пространство. Поэтому отображение ${}^t i$ также сюръективно, следовательно, само отображение i инъективно, что и доказывает (б).

Что касается утверждения (в), то оно вытекает из всего сказанного выше и из леммы 1.

Теорема 5 естественным образом сводит всю теорию комплексных систем корней к теории вещественных систем. Таким образом, все определения и все результаты настоящего параграфа без изменений переносятся на комплексный случай.

Глава VI

СТРОЕНИЕ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

В этой главе $\mathfrak{g}$ обозначает *полупростую комплексную алгебру* Ли, а $\mathfrak{h}$ — ее *подалгебру Картана.*

§ 1. Разложение алгебры $\mathfrak{g}$

Пусть α — элемент сопряженного пространства $\mathfrak{h}^*$. Обозначим через $\mathfrak{g}^\alpha$ соответствующее собственное подпространство в $\mathfrak{g}$. Иными словами, $\mathfrak{g}^\alpha$ состоит из таких элементов $x \in \mathfrak{g}$, что $[H, x] = \alpha(H)x$ для всех $H \in \mathfrak{h}$.

Векторы пространства $\mathfrak{g}^\alpha$ мы будем называть *элементами веса* α.

В частности, $\mathfrak{g}^0$ есть множество элементов $x \in \mathfrak{g}$, коммутирующих с $\mathfrak{h}$. Ввиду теоремы 3 гл. III мы получаем, что

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}.$$

Мы скажем, что элемент $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ является *корнем* алгебры $\mathfrak{g}$ (относительно $\mathfrak{h}$), если $\alpha \neq 0$ и $\mathfrak{g}^\alpha \neq (0)$; множество всех корней обозначим через R.

Теорема 1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$ (*прямая сумма*).

Доказательство. Согласно теореме 3 гл. III, каждый эндоморфизм $\operatorname{ad} H$ ($H \in \mathfrak{h}$) алгебры $\mathfrak{g}$ диагонализуем в некотором базисе. Поскольку, согласно той же теореме, эти эндоморфизмы коммутируют между собой, существует общий базис, в котором все эндоморфизмы $\operatorname{ad}(H)$ представляются диагональными матрицами. Последнее утверждение есть в точности содержание нашей теоремы.

Подпространства $\mathfrak{g}^\alpha$ обладают следующими свойствами.

Теорема 2. (а) *Множество R есть система корней пространства $\mathfrak{h}^*$ (в смысле определения 7 гл. V, § 17); система R приведенная (см. гл. V, § 2).*

(б) *Если $\alpha \in R$, то пространства $\mathfrak{g}^{\alpha}$ и $\mathfrak{h}_{\alpha} = [\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ одномерны, (очевидно, $\mathfrak{h}_{\alpha} \subset \mathfrak{h}$). Кроме того, существует единственный элемент $H_{\alpha} \in \mathfrak{h}_{\alpha}$, такой, что $\alpha(H_{\alpha}) = 2$; указанный элемент H_{α} является корнем, двойственным к α (см. гл. V, § 2).*

(в) *Для каждого ненулевого элемента $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ существует (единственный) элемент $Y_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, такой, что $[X_{\alpha}, Y_{\alpha}] = H_{\alpha}$, причем $[H_{\alpha}, X_{\alpha}] = 2X_{\alpha}$ и $[H_{\alpha}, Y_{\alpha}] = -2Y_{\alpha}$. Подалгебра $\mathfrak{s}_{\alpha} = \mathfrak{h}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$ изоморфна алгебре Ли $sl(2)$.*

(г) *Если $\alpha, \beta \in R$ и если $\alpha + \beta \neq 0$, то $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.*

Доказательство этой теоремы будет дано в § 2.

Перед тем как сформулировать следующую теорему, условимся обозначать через $(\ ,\ )$ некоторую фиксированную инвариантную невырожденную симметрическую билинейную форму на алгебре $\mathfrak{g}$ (например, форму Киллинга).

Теорема 3. (i) *Если $\alpha + \beta \neq 0$, то подпространства $\mathfrak{g}^{\alpha}$ и $\mathfrak{g}^{\beta}$ ортогональны. Формы, полученные ограничением формы $(\ ,\ )$ на $\mathfrak{h}$ и на $\mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$ $(\alpha \in R)$, невырождены. Форма $(\ ,\ )$ приводит в двойственность пространства $\mathfrak{g}^{\alpha}$ и $\mathfrak{g}^{-\alpha}$.*

(ii) *Если $x \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ и $H \in \mathfrak{h}$, то*

$$(H, [x, y]) = \alpha(H)(x, y).$$

(iii) *Пусть $\alpha \in R$, и пусть h_{α} — элемент, соответствующий корню α при изоморфизме $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$, индуцированном нашей билинейной формой. Тогда имеет место равенство*

$$[x, y] = (x, y) h_{\alpha}, \quad x \in \mathfrak{g}^{\alpha}, \quad y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}.$$

Доказательство. (i) Пусть $x \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, $y \in \mathfrak{g}^{\beta}$ и $H \in \mathfrak{h}$. Очевидно,

$$([H, x], y) + (x, [H, y]) = 0,$$

так как форма (x, y) инвариантна. Следовательно,

$$\alpha(H)(x, y) + \beta(H)(x, y) = 0.$$

Если $\alpha+\beta \neq 0$, то можно найти такой элемент $H \in \mathfrak{h}$, что $\alpha(H)+\beta(H) \neq 0$. В этом случае предыдущее равенство означает, что $(x, y)=0$, т. е. что пространства $\mathfrak{g}^\alpha$ и $\mathfrak{g}^\beta$ ортогональны.

Таким образом,

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h} \oplus \sum (\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha})$$

есть разложение алгебры $\mathfrak{g}$ на взаимно ортогональные подпространства. Форма (x, y) невырождена, и потому невырожденным будет ограничение ее на любое из из этих подпространств.

(ii) В силу инвариантности формы (,)

$$(H, [x, y])=([H, x], y)=\alpha(H)(x, y).$$

(iii) Если $H \in \mathfrak{h}$, то $\alpha(H)=(H, h_\alpha)$ по определению элемента h_α. Формулу (ii) можно теперь переписать так:

$$(H, [x, y])=(H, (x, y) h_\alpha).$$

Поскольку ограничение формы (,) на подалгебру $\mathfrak{h}$ невырождено, получаем

$$[x, y]=(x, y) h_\alpha.$$

§ 2. Доказательство теоремы 2

В этом параграфе будут существенно использоваться теорема 3 и свойства алгебры $sl(2)$, установленные в главе IV. Доказательство нашей теоремы мы разобьем на ряд последовательных шагов.

2.1. *Если* $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, *то* $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$. Действительно, это включение есть прямое следствие тождества Якоби

$$[H, [x, y]]=[[H, x], y]+[x, [H, y]],$$

примененного к элементам $H \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, $y \in \mathfrak{g}^\beta$.

2.2. *Множество* R *порождает* $\mathfrak{h}$. В противном случае существовал бы ненулевой элемент $H \in \mathfrak{h}$, такой, что $\alpha(H)=0$ для всех корней $\alpha \in R$. Последнее ввиду теоремы 1 означает, что $\operatorname{ad}(H)=0$, т. е. что элемент H лежит в центре алгебры $\mathfrak{g}$ и, следовательно, равен нулю, так как алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста.

2.3. *Если $\alpha\in R$, то подпространство $\mathfrak{h}_\alpha=[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]\subset\mathfrak{h}$ имеет размерность* 1. В самом деле, согласно теореме 3, (iii), все векторы пространства $\mathfrak{h}_\alpha$ коллинеарны вектору h_α.

2.4. *Если $\alpha\in R$, то существует элемент $H_\alpha\in\mathfrak{h}_\alpha$ (и притом единственный), такой, что $\alpha(H_\alpha)=2$.* В силу доказанного на предыдущем шаге нам достаточно показать, что ограничение формы α на подпространство $\mathfrak{h}_\alpha$ не является нулевым. Допустим противное и выберем элементы $x\in\mathfrak{g}^\alpha$ и $y\in\mathfrak{g}^{-\alpha}$ так, чтобы их коммутатор $z=[x, y]$ не равнялся нулю. Так как $\alpha(z)=0$, имеем

$$[z, x]=0,\quad [z, y]=0,\quad [x, y]=z.$$

Эти равенства показывают, что подалгебра $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$, порожденная тремя элементами x, y, z, разрешима (и даже нильпотентна). По теореме Ли (теорема 1.5.5.1) для любого конечномерного линейного представления $\rho\colon \mathfrak{g}\to\operatorname{End}V$ алгебры $\mathfrak{a}$ найдется флаг $\mathcal{F}$ пространства V, инвариантный относительно $\rho(\mathfrak{a})$.

Поскольку элемент z лежит в $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$, эндоморфизм $\rho(z)$ содержится в $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ и потому нильпотентен. Применяя это рассуждение к присоединенному представлению $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{a}\to\operatorname{End}(\mathfrak{g})$, получаем, что элемент z нильпотентен. Но, с другой стороны, этот элемент полупрост (см. гл. III, теорема 3), так что $z=0$, и мы приходим к противоречию.

2.5. *Пусть $\alpha\in R$ и X_α — ненулевой элемент пространства $\mathfrak{g}^\alpha$. Существует элемент $Y_\alpha\in\mathfrak{g}^{-\alpha}$, такой, что $[X_\alpha, Y_\alpha]=H_\alpha$.* В самом деле, так как форма $(\ ,\ )$ приводит в двойственность пространства $\mathfrak{g}^\alpha$ и $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, существует элемент $y\in\mathfrak{g}^{-\alpha}$, такой, что $(X_\alpha, y)\neq 0$. Но тогда, согласно теореме 3, (iii), $[X_\alpha, y]\neq 0$. Умножая y на подходящий скаляр, мы найдем искомый элемент Y_α. Итак,

$$[H_\alpha, X_\alpha]=\alpha(H_\alpha)X_\alpha=2X_\alpha,\quad [H_\alpha, Y_\alpha]=-\alpha(H_\alpha)Y_\alpha=-2Y_\alpha.$$

Обозначим через $\mathfrak{s}_\alpha$ подалгебру в алгебре $\mathfrak{g}$, порожденную элементами X_α, Y_α, H_α. Написанные выше формулы показывают, что отображение $(X, Y, H) \mapsto (X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha)$ определяет *изоморфизм* φ_α *алгебр* $\mathfrak{sl}(2)$ *и* $\mathfrak{s}_\alpha$. С помощью присоединенного представления мы можем теперь рассматривать алгебру $\mathfrak{g}$ *как* $\mathfrak{sl}(2)$-*модуль*.

2.6. *Если* $\alpha \in R$, *то* $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$. Сохраним обозначения предыдущего шага. Пусть, напротив, $\dim \mathfrak{g}^\alpha > 1$. Так как пространства $\mathfrak{g}^\alpha$ и $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ находятся в двойственности относительно формы $(\ ,\ )$, существует ненулевой элемент $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, ортогональный к X_α. По теореме 3, (iii), $[X_\alpha, y] = 0$; с другой стороны, $[H_\alpha, y] = -\alpha(H_\alpha)\, y = -2y$. Итак, если рассматривать (с помощью φ_α) алгебру $\mathfrak{g}$ как $\mathfrak{sl}(2)$-модуль, то элемент y является примитивным с весом (-2) (см. гл. IV, определение 1). Однако это обстоятельство противоречит следствию 2 теоремы 1 гл. IV.

2.7. *Имеем*

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}.$$

Это следует из 2.5 и 2.6.

2.8. *Элемент* Y_α, *построенный на шаге* 2.5, *единствен*. Это легко вытекает из одномерности пространства $\mathfrak{g}^{-\alpha}$.

2.9. *Если* α *и* β — *корни, то* $\beta(H_\alpha)$ — *целое число и* $\beta - \beta(H_\alpha)\,\alpha$ — *тоже корень*. Пусть $y \in \mathfrak{g}^\beta$, $y \neq 0$, и пусть $p = \beta(H_\alpha)$. Тогда

$$[H_\alpha, y] = \beta(H_\alpha)\, y = py.$$

Таким образом, элемент y имеет вес p, если рассматривать алгебру $\mathfrak{g}$ как $\mathfrak{sl}(2)$-модуль. Но теорема 4 гл. IV утверждает, что все веса алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ суть целые числа. Положим теперь

$$z = Y_\alpha^p y, \quad \text{если} \quad p \geqslant 0; \quad z = X_\alpha^{-p} y, \quad \text{если} \quad p \leqslant 0.$$

Согласно той же теореме, элемент z отличен от нуля и имеет вес $\beta - p\alpha$, а это и означает, что линейная форма $\beta - p\alpha$ является корнем.

2.10. *R — система корней и H_α — корень, двойственный к α.* Действительно, на шаге 2.2 было установлено, что множество R порождает $\mathfrak{h}^*$. С другой стороны, пусть $\alpha \in R$, и пусть s_α — эндоморфизм $\beta \longmapsto \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$. Из равенства $\alpha(H_\alpha) = 2$ легко вытекает, что этот эндоморфизм есть отражение (см. гл. V) относительно α. Далее, на предыдущем шаге было показано, что множество R устойчиво относительно всех s_α. Таким образом, R удовлетворяет всем условиям определения 7 гл. V.

2.11. *Система корней R приведенная.* Действительно, допустим, что найдется такой корень $\alpha \in R$, что $2\alpha \in R$. Пусть y — любой ненулевой элемент из $\mathfrak{g}^{2\alpha}$. Тогда $[H_\alpha, y] = 2\alpha(H_\alpha) y = 4y$. С другой стороны, элемент 3α не является корнем, поэтому $\mathrm{ad}(X_\alpha) y = 0$. Формула $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$ показывает тогда, что $\mathrm{ad}(H_\alpha) y = \mathrm{ad}(X_\alpha)\,\mathrm{ad}(Y_\alpha) y$. Элемент $\mathrm{ad}(Y_\alpha) y$ лежит в $\mathfrak{g}^\alpha$ и, следовательно, коллинеарен X_α и аннулируется эндоморфизмом $\mathrm{ad}(X_\alpha)$. Значит, $4y = \mathrm{ad}(H_\alpha) y = 0$, что противоречит условию.

2.12. *Пусть α и β — неколлинеарные корни, пусть p (соответственно q) — наибольшее целое число, для которого линейная форма $\beta - p\alpha$ (соответственно $\beta + q\alpha$) является корнем, и пусть $E = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{\beta + k\alpha}$. Тогда E — неприводимый $\mathfrak{s}_\alpha$-модуль размерности $p + q + 1$, $\beta(H_\alpha) = p - q$, и отображения*

$$\mathrm{ad}(X_\alpha)\colon\ \mathfrak{g}^{\beta + k\alpha} \to \mathfrak{g}^{\beta + (k+1)\alpha}, \qquad -p \leqslant k \leqslant q - 1,$$

суть изоморфизмы. В самом деле, E является модулем $\mathfrak{s}_\alpha$ модуля $\mathfrak{g}$. С другой стороны, если рассматривать E как $sl(2)$-модуль (отождествляя $sl(2)$ с $\mathfrak{s}_\alpha$), то легко усмотреть, что весами этого пространства являются числа $\beta(H_\alpha) + 2k$ (при условии, что $\beta + k\alpha$ — корень кратности 1). Применяя теперь структурную теорему 4 гл. IV, § 5, видим, что модуль E неприводим и имеет размерность $m + 1$, где $m = \beta(H_\alpha) + 2q$.

С учетом строения неприводимых $sl(2)$-модулей получаем, далее, что отображения

$$\mathrm{ad}(X_\alpha)\colon \mathfrak{g}^{\beta+k\alpha} \to \mathfrak{g}^{\beta+(k+1)\alpha}$$

суть изоморфизмы.

2.13. *Если* $\alpha \in R$, $\beta \in R$ *и* $\alpha+\beta \in R$, *то* $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$. Указанное равенство становится очевидным, если заметить, что отображение

$$\mathrm{ad}(X_\alpha)\colon \mathfrak{g}^\beta \to \mathfrak{g}^{\beta+\alpha}$$

является (как мы показали на предыдущем шаге) изоморфизмом.

Теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Рассмотрим *группу Вейля* W, связанную с системой корней R; отождествим W с подгруппой группы автоморфизмов алгебры $\mathfrak{h}$. Тогда *всякий элемент* $w \in W$ *индуцируется внутренним автоморфизмом алгебры* $\mathfrak{g}$, *оставляющим на месте подалгебру* $\mathfrak{h}$. Действительно, достаточно убедиться в этом для того случая, когда w есть отражение s_α, соответствующее корню. В этом случае автоморфизм w индуцируется внутренним автоморфизмом

$$\theta_\alpha = e^{\mathrm{ad}(X_\alpha)} e^{-\mathrm{ad}(Y_\alpha)} e^{\mathrm{ad}(X_\alpha)}$$

(см. гл. IV, § 5).

Обратно, можно показать, что ограничение на $\mathfrak{h}$ любого внутреннего автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$, оставляющего на месте подалгебру $\mathfrak{h}$, есть элемент из W. Более того, можно показать, что группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$ „внешних автоморфизмов“ алгебры $\mathfrak{g}$ естественно отождествляется с группой $E = \mathrm{Aut}(R)/W$, введенной в § 11 главы V (см. Семинар „Софус Ли“ [1]).

§ 3. Подалгебры Бореля

Пусть R — система корней, связанная с полупростой алгеброй $\mathfrak{g}$ и ее подалгеброй Картана $\mathfrak{h}$. Выберем в системе R некоторый *базис* S. Обозначим через R_+ множество всех положительных корней (относительно S) и положим

$$\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{n}_- = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}^{-\alpha}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

Теорема 4. (а) $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}$.

(б) $\mathfrak{n}_+$ *и* $\mathfrak{n}_-$ — *подалгебры алгебры* $\mathfrak{g}$, *состоящие из нильпотентных элементов, причем сами эти алгебры тоже нильпотентны.*

(в) $\mathfrak{b}$ — *разрешимая подалгебра алгебры* $\mathfrak{g}$, *и ее производная алгебра равна* $\mathfrak{n}_+$.

Доказательство. (а) Очевидно.

(б) Пусть $x \in \mathfrak{n}_+$. Для любого целого $k \geqslant 0$ и любой формы $\beta \in \mathfrak{h}^*$ имеем

$$\operatorname{ad}(x)^k (\mathfrak{g}^\beta) \subset \sum_{\alpha_i \in R_+} \mathfrak{g}^{\beta + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k}.$$

Пусть $\beta \in R$, тогда, очевидно, при достаточно большом k суммы вида $\beta + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ ($\alpha_i \in R_+$) не могут лежать в $R \cup \{0\}$, и, следовательно, при таком k имеет место равенство $\operatorname{ad}(x)^k = 0$, т. е. x — нильпотентный элемент. То обстоятельство, что алгебра $\mathfrak{n}_+$ сама нильпотентна, есть следствие теоремы Энгеля (теорема 1.5.3.1).

Утверждения относительно алгебры $\mathfrak{n}_-$ доказываются аналогично.

(в) Соотношение $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}_+$ есть легкое следствие равенства $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+] = \mathfrak{n}_+$.

Алгебра $\mathfrak{b}$ называется *подалгеброй Бореля* относительно $\mathfrak{h}$ и S.

Теорема 5 (Борель — Морозов). *Всякая разрешимая подалгебра алгебры* $\mathfrak{g}$ *может быть переведена посредством внутреннего автоморфизма этой алгебры в подалгебру Бореля* $\mathfrak{b}$; *в частности,* $\mathfrak{b}$ — *максимальная разрешимая подалгебра в алгебре* $\mathfrak{g}$.

Доказательство этой теоремы можно найти в работе Бореля [1].

Следствие. *Любая подалгебра алгебры* $\mathfrak{g}$, *состоящая из нильпотентных элементов, может быть* *переведена посредством внутреннего автоморфизма этой алгебры в подалгебру* $\mathfrak{n}_+$.

Это вытекает из теоремы 5, если учесть, что любой нильпотентный (относительно $\mathfrak{g}$) элемент алгебры $\mathfrak{b}$ лежит в $\mathfrak{n}_+$.

§ 4. Базис Вейля

Сохраним обозначения предыдущего параграфа.

Пусть $S=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — фиксированный базис и $n=\dim\mathfrak{h}$ — *ранг* алгебры $\mathfrak{g}$ (см. гл. III). Обозначим через H_i элемент $H_{\alpha_i}\in\mathfrak{h}$ (см. теорему 2) и выберем два элемента $X_i\in\mathfrak{g}^{\alpha_i}$, $Y_i\in\mathfrak{g}^{-\alpha_i}$, такие, что $[X_i, Y_i]=H_i$. Наконец, положим

$$n(i, j)=\alpha_j(H_i).$$

Матрица, образованная числами $n(i, j)$, есть не что иное, как *матрица Картана* рассматриваемой системы корней R. Известно (см. лемму 5.11.3), что числа $n(i, j)$ целы и $n(i, j)\leqslant 0$ при $i\neq j$.

Теорема 6. (а) *Алгебра* $\mathfrak{n}_+$ *порождается элементами* X_i, *алгебра* $\mathfrak{n}_-$ — *элементами* Y_i *и алгебра* $\mathfrak{g}$ — *элементами* X_i, Y_i, H_i.

(б) *Имеют место следующие формулы (сооотношения Вейля)*:

$$[H_i, H_j]=0,$$

$$[X_i, Y_i]=H_i, \qquad [X_i, Y_j]=0 \quad \text{при} \quad i\neq j,$$

$$[H_i, X_j]=n(i, j)X_j, \quad [H_i, Y_j]=-n(i, j)Y_j.$$

(в) *Для любых индексов* i *и* j $(i\neq j)$ *справедливы равенства*

$$\operatorname{ad}(X_i)^{-n(i, j)+1}(X_j)=0, \tag{θ_{ij}^+}$$

$$\operatorname{ad}(Y_i)^{-n(i, j)+1}(Y_j)=0. \tag{θ_{ij}^-}$$

Доказательство. (а) Достаточно показать, что $\mathfrak{n}_+$ порождается элементами X_i. Пусть α — некоторый положительный корень. Как известно (см.

предложение 5.9.5), α можно таким образом представить в виде суммы элементов α_i:

$$\alpha = \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k},$$

что все (частичные) суммы $\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_h}$, $h \leqslant k$, принадлежат R_+. Возьмем такое разложение и положим

$$X_\alpha = \left[X_{i_k}, \left[X_{i_{k-1}}, \ldots \left[X_{i_2}, X_{i_1}\right] \ldots\right]\right].$$

По теореме 2 X_α — ненулевой элемент прямой $\mathfrak{g}^\alpha$. Поскольку $\mathfrak{n}_+$ есть сумма пространств $\mathfrak{g}^\alpha$, $\alpha \in R_+$, мы видим, что $\mathfrak{n}_+$ порождается элементами X_i.

(б) Если бы коммутатор $[X_i, Y_j]$ был ненулевым, то он имел бы вес $\alpha_i - \alpha_j$, который, однако, не является корнем (так как каждый корень в разложении по элементам α_i имеет коэффициенты *одного знака*). Следовательно, $[X_i, Y_j] = 0$, $i \neq j$.

Все остальные формулы очевидны.

(в) Элемент

$$\theta_{ij}^+ = \operatorname{ad}(X_i)^{-n(i, j)+1}(X_j)$$

имеет вес $\alpha_j - n(i, j)\alpha_i + \alpha_i = s_i(\alpha_j - \alpha_i)$, где $s_i = s_{\alpha_i}$. Так как $\alpha_i - \alpha_j \notin R$, то и $s_i(\alpha_j - \alpha_i) \notin R$, и потому $\theta_{ij}^+ = 0$. Равенство $\theta_{ij}^- = 0$ доказывается тем же способом.

Теорема 7. (i) *Алгебра $\mathfrak{n}_+$ полностью определяется соотношениями (θ_{ij}^+), $i \neq j$, наложенными на образующие X_i.*

(ii) *Алгебра $\mathfrak{g}$ вполне определяется соотношениями Вейля и соотношениями (θ_{ij}^+) и (θ_{ij}^-), наложенными на образующие X_i, Y_i, H_i.*

Утверждение (i) означает следующее. Пусть L — свободная алгебра Ли со свободными образующими X_i. Тогда ядро канонического гомоморфизма $f\colon L \to \mathfrak{n}_+$ есть идеал, порожденный элементами θ_{ij}^+. Аналогично интерпретируется свойство (ii).

Доказательство этой теоремы приведено в добавлении в конце настоящей главы.

Пример. Если система R имеет тип G_2, алгебру $\mathfrak{n}_+$ можно представлять себе как алгебру Ли с двумя образующими X_1, X_2 и соотношениями

$$[X_1, [X_1, X_2]] = 0, \quad [X_2, [X_2, [X_2, [X_2, X_1]]]] = 0.$$

Следствие. *Существует автоморфизм σ алгебры $\mathfrak{g}$, равный (-1) на подалгебре $\mathfrak{h}$ и переводящий X_i в $-Y_i$, а Y_i в $-X_i$ для всех i. При этом $\sigma^2 = 1$.*

Доказательство. Положим $H'_i = -H_i$, $X'_i = -Y_i$, $Y'_i = -X_i$. Непосредственно проверяется, что элементы X'_i, Y'_i, H'_i удовлетворяют всем соотношениям Вейля и соотношениям (θ^+_{ij}), (θ^-_{ij}). Согласно теореме 7, (ii), существует автоморфизм $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, переводящий X_i, Y_i, H_i в X'_i, Y'_i, H'_i. Автоморфизм σ^2 оставляет инвариантными элементы X_i, Y_i, H_i и потому тождествен.

Замечание. Теорема 7 дает явное описание алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{n}_+$ через *матрицу Картана*.

§ 5. Теоремы существования и единственности

Теорема о сопряженности подалгебр Картана (гл. III, § 4) показывает, что система корней полупростой алгебры Ли не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора подалгебр Картана. Обратно, имеет место

Теорема 8. *Две полупростые алгебры Ли, которым отвечают изоморфные системы корней, сами изоморфны.*

Имеет место более точное утверждение.

Теорема 8′. *Пусть $\mathfrak{g}$ (соответственно $\mathfrak{g}'$) — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ (соответственно $\mathfrak{h}'$) — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ (соответственно алгебры $\mathfrak{g}'$), S (соответственно S') — базис соответствующей системы корней и $r\colon S \to S'$ — биективное отображение, такое, что $n(\alpha, \beta) = n(r(\alpha), r(\beta))$ при любых $\alpha, \beta \in S$. Для каждого элемента $\alpha \in S$ (соответственно $\beta \in S'$) выберем в пространстве $\mathfrak{g}^\alpha$ (соответственно в $\mathfrak{g}'^\beta$) нену-*

левой элемент X (соответственно X'_β). Тогда существует единственный изоморфизм $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, отображающий H_α в $H'_{r(\alpha)}$ и X_i в $X'_{r(\alpha)}$ для всех $\alpha \in S$.

Доказательство. Пусть Y_α (соответственно Y'_β) — такой элемент из $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ (соответственно из $\mathfrak{g}'^{-\beta}$), что $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ (соответственно $[X'_\beta, Y'_\beta] = H'_\beta$), Теорема 7 показывает, что найдется изоморфизм $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, переводящий X_α, Y_α, H_α в $X'_{r(\alpha)}$, $Y'_{r(\alpha)}$, $H'_{r(\alpha)}$. Указанный изоморфизм f (определяемый, очевидно, однозначно) является искомым.

Замечание. Полагая в этой теореме $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ и $S' = -S$, получаем следствие теоремы 7.

Сформулируем, наконец, теорему существования.

Теорема 9. *Пусть R — приведенная система корней. Существует полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$, система корней которой изоморфна R.*

Доказательство. Пусть $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — базис системы R и $(n(i, j))$ — соответствующая матрица Картана. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли, заданную посредством $3n$ образующих X_i, Y_i, H_i и соотношений, фигурирующих в теореме 6 (т. е. соотношений Вейля и (θ^+_{ij}), (θ^-_{ij})). Можно показать (см. добавление), что эта алгебра Ли конечномерна, полупроста и что система ее корней изоморфна R. Теорема доказана.

Следствие. *Для того чтобы алгебра $\mathfrak{g}$ была простой, необходимо и достаточно, чтобы система R была неприводима.*

Это очевидно.

§ 6. Нормализация Шевалле

Выберем для каждого корня $\alpha \in R$ ненулевой элемент $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$. Тогда

$$[X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha,\beta} X_{\alpha,\beta}, & \text{если} \quad \alpha + \beta \in R, \\ 0, & \text{если} \quad \alpha + \beta \notin R,\ \alpha + \beta \neq 0, \end{cases}$$

где $N_{\alpha,\beta}$ — ненулевой скаляр (по теореме 2, (г)). Числа $N_{\alpha,\beta}$ определяют „закон коммутирования" в алгебре $\mathfrak{g}$. Сами они определены неоднозначно (зависят от выбора элементов X_α).

Теорема 10. *Элементы X_α можно выбрать так, что*

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha \quad \text{для всех} \quad \alpha \in R,$$

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta} \quad \text{для всех} \quad \alpha, \beta, \alpha+\beta \in R.$$

Доказательство. Пусть R_+ — множество положительных корней (относительно базиса S системы R), и пусть σ — автоморфизм алгебры, удовлетворяющий условиям следствия теоремы 7. Тогда $\sigma(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Для каждого корня $\alpha \in R_+$ выберем ненулевой элемент $X'_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$. Как известно, $[X'_\alpha, \sigma(X'_\alpha)] \in [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$, т. е. существует ненулевой скаляр t_α, такой, что $[X'_\alpha, \sigma(X'_\alpha)] = t_\alpha H_\alpha$.

Обозначим через u_α один из квадратных корней из числа $-t_\alpha$ и положим

$$X_\alpha = u_\alpha^{-1} X'_\alpha, \quad X_{-\alpha} = -\sigma(X_\alpha).$$

Тогда

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha.$$

Равенство $N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$ вытекает теперь из соотношений

$$[\sigma(X_\alpha), \sigma(X_\beta)] = \sigma[X_\alpha, X_\beta] \quad \text{и} \quad \sigma(X_\alpha) = -X_{-\alpha}.$$

Теорема* 11 (Шевалле). *Пусть элементы $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ выбраны так, как указано в теореме* 10, *и пусть $\alpha, \beta \in R$ и $\alpha+\beta \in R$. Обозначим через p наибольшее целое число, такое, что $\beta - p\alpha \in R$ (см.* 2.12). *Тогда*

$$N_{\alpha,\beta} = \pm(p+1).$$

Доказательство см. в работе Шевалле [4].

Замечания. 1. Обозначим через $\mathfrak{g}(\mathbf{Z})$ аддитивную подгруппу алгебры $\mathfrak{g}$, порожденную элементами H_α и X_α (последние выбираются согласно теореме 10). Теорема 11 показывает, что $\mathfrak{g}(\mathbf{Z})$ является *алгеброй Ли* *над кольцом* $\mathbf{Z}$. Следовательно, над любым полем K можно рассмотреть алгебру Ли $\mathfrak{g}(K) = \mathfrak{g}(\mathbf{Z}) \otimes K$. Указанная конструкция служит отправной точкой построения так называемых *групп Шевалле* (см. по этому поводу цитированную выше работу Шевалле [4] или работу Картера [1]).

2. Знак $\pm$ в теореме 11 уточнен Титсом (однако при этом нужно изменить систему индексации элементов X_α). Им же получено новое доказательство теоремы существования (теоремы 9).

3. Пусть K — вещественное векторное подпространство алгебры $\mathfrak{g}$, порожденное элементами iH_α, $X_\alpha - X_{-\alpha}$, $i(X_\alpha + X_{-\alpha})$. Легко проверяется, что K — вещественная подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}$. Форма Киллинга этой подалгебры *отрицательно определена*, кроме того, алгебру $\mathfrak{g}$ можно отождествить с комплексификацией $K \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ алгебры K. Иными словами, существует *компактная форма* алгебры $\mathfrak{g}$. Существование такой формы можно установить с помощью „унитарного приема" Вейля. В случае, когда $\mathfrak{g} = sl(2)$, подалгебра K совпадает с $su(2)$ (см. гл. IV, § 6, 7).

Добавление

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ ПО ОБРАЗУЮЩИМ И СООТНОШЕНИЯМ

Пусть R — система корней в комплексном векторном пространстве V. Мы будем по возможности сохранять предыдущие обозначения. В частности,

$$V^* = \mathfrak{h} \quad \text{и} \quad V = \mathfrak{h}^*.$$

Пусть $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — базис системы R; $H_1, \ldots, H_n \in \mathfrak{h}$ — двойственные корни к элементам базиса, и пусть

$$n(i, j) = \langle \alpha_j, H_i \rangle.$$

Числа $n(i, j)$ образуют *матрицу Картана* нашей системы корней (относительно базиса S).

Наша цель — доказать следующую основную теорему.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, определенная $3n$ образующими и соотношениями*

(w. 1) $[H_i, H_j] = 0$;

(w. 2) $[X_i, Y_i] = H_i$, $[X_i, Y_j] = 0$ *при* $i \neq j$;

(w. 3) $[H_i, X_j] = n(i, j) X_j$, $[H_i, Y_j] = -n(i, j) Y_j$;

(θ_{ij}^+) $\operatorname{ad}(X_i)^{-n(i, j)+1}(X_j) = 0$ *при* $i \neq j$;

(θ_{ij}^-) $\operatorname{ad}(Y_i)^{-n(i, j)+1}(Y_j) = 0$ *при* $i \neq j$.

Тогда $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, причем ее подалгебра Картана порождена элементами H_i, а система корней есть R.

Доказательство. Рассмотрим сначала алгебру Ли $\bar{a}$, задаваемую теми же образующими X_i, Y_i, H_i и тремя первыми соотношениями (w. 1), (w. 2), (w. 3). Строение этой алгебры хорошо известно, оно было определено Шевалле, Хариш-Чандрой и Джекобсоном. Мы приведем здесь лишь окончательный результат (см. Джекобсон [1], стр. 231).

Предложение. *Имеет место разложение*

$$\bar{a} = \bar{x} \otimes \mathfrak{h} \otimes \bar{y},$$

где $\bar{x}$ (соответственно $\bar{y}$) — алгебра Ли, порожденная элементами Y_i (соответственно элементами X_i), и $\mathfrak{h}$ — пространство, натянутое на элементы H_i. Кроме того, алгебра $\bar{y}$ (соответственно $\bar{x}$) естественно изоморфна свободной алгебре Ли с множеством свободных образующих $\{Y_i\}$ (соответственно $\{X_i\}$), и, наконец, семейство $\{H_i\}$ образует базис пространства $\mathfrak{h}$.

Для простоты обозначений мы отождествили здесь первоначальное пространство $\mathfrak{h}$ и векторное подпространство алгебры $\bar{a}$, порожденное элементами H_i.)

Пусть, как и прежде,

$$\theta_{ij}^+ = \operatorname{ad}(X_i)^{-n(i, j)+1}(X_j),$$

$$\theta_{ij}^- = \operatorname{ad}(Y_i)^{-n(i, j)+1}(Y_j).$$

Очевидно, $\theta^+_{ij} \in \bar{x}$ и $\theta^-_{ij} \in \bar{y}$. Обозначим через $\bar{u}^+$ (соответственно $\bar{u}^-$) идеал в алгебре $\bar{x}$ (соответственно в алгебре $\bar{y}$), порожденный элементами θ^+_{ij} (соответственно θ^-_{ij}) с $i \neq j$. Положим $\bar{r} = \bar{u}^+ \oplus \bar{u}^-$.

(а) *$\bar{u}^+$, $\bar{u}^-$, $\bar{r}$ — идеалы в алгебре $\bar{a}$.* Пусть $U\bar{a}$, $U\bar{x}$, $U\bar{y}$ — универсальные обертывающие алгебры соответствующих алгебр Ли. Присоединенное представление $\mathrm{ad}\colon \bar{a} \to \mathrm{End}(\bar{a})$ наделяет алгебру $\bar{a}$ структурой $U\bar{a}$-модуля. Идеал $\bar{u}_{ij}$ алгебры $\bar{a}$, порожденный элементом θ^+_{ij}, равен подмодулю $U\bar{a}(\theta^+_{ij})$. Согласно следствию из теоремы Биркгофа — Витта (см. следствие 1.3.4.2), идеал $\bar{u}_{ij}$ натянут (как векторное пространство) на элементы вида $XYH(\theta^+_{ij})$, где $X \in U\bar{x}$, $Y \in U\bar{y}$, $H \in U\mathfrak{h}$. По понятным соображениям векторы $H\theta^+_{ij}$ и θ^+_{ij} коллинеарны. С другой стороны, как показывает несложное вычисление (см. Джекобсон [1], лемма 1, стр. 239), $\mathrm{ad}(Y_k)(\theta^+_{ij}) = 0$ для всех k, и, следовательно векторы $Y\theta^+_{ij}$ и θ^+_{ij} тоже коллинеарны. Таким образом, идеал $\bar{u}_{ij}$ порожден (как векторное пространство) элементами вида $X\theta^+_{ij}$ и потому содержится в $\bar{u}^+$. Осталось заметить, что $\bar{u}^+ = \sum \bar{u}_{ij}$, так что $\bar{u}^+$ действительно является идеалом алгебры $\bar{a}$. Аналогичное рассуждение показывает, что $\bar{u}^-$ — идеал, а отсюда уже следует, что их прямая сумма $\bar{r}$ тоже является идеалом.

Итак, $\bar{r}$ есть наименьший идеал алгебры $\bar{a}$, содержащий θ^+_{ij} и θ^-_{ij}. Наша алгебра $\mathfrak{g}$, которую мы намерены изучить, совпадает попросту с факторалгеброй $\bar{a}/\bar{r}$.

(б) *Имеет место разложение*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+,$$

где $\mathfrak{n}_+ = \bar{x}/\bar{u}^+$, $\mathfrak{n}_- = \bar{y}/\bar{u}^-$.

Это очевидно.

(в) *Эндоморфизмы* $\mathrm{ad}(X_i)$ *и* $\mathrm{ad}(Y_i)$ *алгебры* $\mathfrak{g}$ *локально нильпотентны.*

Обозначим через V_i множество таких элементов $z \in \mathfrak{g}$, что $\mathrm{ad}(X_i)^k z = 0$ для некоторого целого k. Мы должны показать, что $V_i = \mathfrak{g}$. Можно убедиться простым вычислением, что множество V_i образует подалгебру Ли в алгебре $\mathfrak{g}$. Однако $X_k \in V_i$ (ввиду соотношения $\theta_{ik}^{+}=0$) и $Y_k \in V_i$ (ввиду соотношений w) для всех k, и потому $H_k=[X_k, Y_k] \in V_i$. Следовательно, $V_i=\mathfrak{g}$. Аналогичное рассуждение проходит и для $\operatorname{ad}(Y_i)$.

Введем дополнительные обозначения. Пусть λ — линейная форма на пространстве $\mathfrak{h}$. Обозначим через $\bar{a}^{\lambda}$ (соответственно $\mathfrak{g}^{\lambda}$) множество таких элементов $z \in \bar{a}$ (соответственно $z \in \mathfrak{g}$), что $\operatorname{ad}(H) z=\lambda(H) z$ для всех $H \in \mathfrak{h}$. Мы будем говорить в этом случае, что элемент z имеет *вес* λ. Из приведенного выше разложения алгебры $\bar{a}$ ясно, что $\bar{a}$ есть прямая сумма своих подалгебр вида $\bar{a}^{\lambda}$; отсюда, кстати, вытекает, что и алгебра $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма подалгебр $\mathfrak{g}^{\lambda}$, Заметим также, что если $\bar{a}^{\lambda} \neq 0$, то линейная форма λ представляется в виде линейной комбинации элементов α_i с целыми коэффициентами одного и того же знака.

Имеем $\mathfrak{h}=\bar{a}^{0}$, $\bar{x}=\sum\limits_{\lambda>0} \bar{a}^{\lambda}$, $\bar{y}=\sum\limits_{\lambda<0} \bar{a}^{\lambda}$ и аналогично для алгебры $\mathfrak{g}$.

Вычислим теперь размерность пространств $\mathfrak{g}^{\alpha}, \alpha \in S$. Вначале докажем следующее утверждение.

(г) *Если линейные формы λ и μ (на $\mathfrak{h}$) переводятся друг в друга элементом w группы Вейля W, то* $\operatorname{dim} \mathfrak{g}^{\lambda}=\operatorname{dim} \mathfrak{g}^{\mu}$.

Достаточно доказать это в том случае, когда w является отражением s_i относительно корня $\alpha_i \in S$ (см. гл. V, теорема 2). Рассмотрим автоморфизм θ_i алгебры $\mathfrak{g}$, определенный формулой

$$\theta_i=e^{\operatorname{ad}(X_i)} e^{-\operatorname{ad}(Y_i)} e^{\operatorname{ad}(X_i)}.$$

Выражение это имеет смысл в силу (в). Нетрудно проверить, что θ_i индуцирует отражение пространства $\mathfrak{h}$ относительно H_i, сопряженное к s_i. Следовательно, $\theta_i(\mathfrak{g}^{\mu})=\mathfrak{g}^{\lambda}$ (поскольку $s_i(\mu)=\lambda$), так что $\operatorname{dim} \mathfrak{g}^{\lambda}=$ $=\operatorname{dim} \mathfrak{g}^{\mu}$.

(д) *Имеем* $\operatorname{dim} \mathfrak{g}^{\alpha_i}=1$ *и* $\operatorname{dim} \mathfrak{g}^{m \alpha_i}=0$ *при* $m \neq \pm 1, 0$.

Для алгебры $\bar{a}$ аналогичные формулы очевидны; наш результат получается отсюда, если заметить, что $X_i \notin \bar{u}^{+}$.

(е) *Если* $\alpha \in R$, *то* $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$.

Действительно, существует такой автоморфизм $w \in W$, что $w(\alpha) = \alpha_i$ (см. гл. V, теорема 2, (в)). Применяя (г) и (д), приходим к требуемому соотношению.

(ж) *Пусть линейная форма* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *представима в виде линейной комбинации корней* α_i *с вещественными коэффициентами и не коллинеарна ни одному из корней. Тогда найдется такой элемент* $w \in W$, *что в разложении* $w(\lambda) = \sum t_i \alpha_i$ *по крайней мере два ненулевых коэффициента будут иметь противоположные знаки.*

Обозначим через $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ вещественное векторное подпространство пространства $\mathfrak{h}$, порожденное элементами H_i (см. гл. V, § 17), через L_α (соответственно через L) — гиперплоскость в $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$, ортогональную к α (соответственно к λ). По условию гиперплоскость L не совпадает ни с одной гиперплоскостью L_α и потому не содержится в их объединении. Выберем произвольный элемент $H \in L$, не лежащий в $\bigcup\limits_\alpha L_\alpha$. Подвергая, если нужно, λ и L действию некоторого элемента $w \in W$, можно считать, что $\alpha_i(H) > 0$ при всех i (см. гл. V, теорема 2, (а)). Запишем λ в виде

$$\lambda = \sum t_i \alpha_i.$$

Тогда

$$0 = \lambda(H) = \sum t_i \alpha_i(H).$$

Из этого равенства видно (поскольку $\alpha_i(H) > 0$), что коэффициенты t_i не могут быть все одного знака.

(з) *Если линейная форма* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *не является корнем и если* $\lambda \neq 0$, *то* $\mathfrak{g}^\lambda = 0$.

Можно ограничиться случаем, когда λ есть линейная комбинация корней α_i с целыми коэффициентами. Если форма λ коллинеарна одному из корней, то наше утверждение вытекает из (г) и (д). Если же это не так, то можно найти такой элемент $w \in W$, что в разложении формы $\mu = w(\lambda)$ по элементам базиса S по крайней мере два коэффициента имеют разные знаки. Но для такой формы, как было показано, $\bar{a}^{\mu}=0$. Поэтому $\mathfrak{g}^{\mu}=0$, и нам остается снова применить (г).

(и) *Алгебра* $\mathfrak{g}$ *имеет конечную размерность, равную* $n+\operatorname{Card}(R)$.

В самом деле, согласно (е) и (з),

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in R}\mathfrak{g}^{\alpha},$$

а каждое пространство $\mathfrak{g}^{\alpha}$ одномерно.

(к) *Если* $\alpha\in R$, *то пространство* $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ *натянуто на элемент* H_{α} *(в частности,* $\dim[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]=1$*). Подалгебра* $\mathfrak{s}_{\alpha}$, *порожденная* H_{α}, $\mathfrak{g}^{\alpha}$, $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, *изоморфна* $sl(2)$.

Утверждение очевидно, если α совпадает с одним из корней α_i. Общий случай можно свести к этому, воспользовавшись автоморфизмами θ_i и их произведениями (см. (г)).

(л) *Алгебра* $\mathfrak{g}$ *полупроста.*

Пусть $\mathfrak{a}$ — коммутативный идеал алгебры $\mathfrak{g}$. Будучи идеалом, пространство $\mathfrak{a}$ инвариантно относительно всех $\operatorname{ad}(H)$, $H\in\mathfrak{h}$. Поэтому $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in R}\mathfrak{a}\cap\mathfrak{g}^{\alpha}$. Но так как алгебры $\mathfrak{s}_{\alpha}$ и $sl(2)$ изоморфны, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{s}_{\alpha}=0$ и тем более $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{g}^{\alpha}=0$, так что $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{h}$. Условие инвариантности идеала $\mathfrak{a}$ относительно $\operatorname{ad}(X_i)$ показывает теперь, что все формы α_i обращаются в 0 на $\mathfrak{a}$ и, следовательно, $\mathfrak{a}=0$.

(м) *Алгебра* $\mathfrak{h}$ *совпадает с подалгеброй Картана алгебры* $\mathfrak{g}$, *и система корней последней совпадает с* R.

Действительно, подалгебра $\mathfrak{h}$ совпадает со своим нормализатором. Второе свойство очевидно.

На этом доказательство нашей теоремы, а вместе с ней и теоремы 9 (теоремы существования) заканчивается.

Нетрудно доказать теперь и теорему 7. Пусть $\mathfrak{g}'$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}'$ — ее подалгебра Картана и X'_i, Y'_i, H'_i — соответствующие образующие Вейля (см. § 4). Допустим, что матрицы Картана алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ совпадают. Согласно теореме 6, образующие X'_i, Y'_i, H'_i удовлетворяют соотношениям (W),

(θ_{ij}^{+}) и (θ_{ij}^{-}). Существует, следовательно, гомоморфизм $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, переводящий X_i, Y_i, H_i в X_i', Y_i', H_i'. Поскольку последние элементы порождают $\mathfrak{g}'$, отображение f сюръективно. Но алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ имеют одинаковую размерность, равную $n + \mathrm{Card}(R)$, так что гомоморфизм f на самом деле является *изоморфизмом*. Теорема 7 доказана.

Упражнение. Пусть $\bar{r}'$ — некоторый идеал упомянутой выше алгебры $\bar{a}$. Доказать равносильность следующих свойств:

(i) идеал $\bar{r}$, порожденный элементами θ_{ij}^{+} и θ_{ij}^{-}, содержится в $\bar{r}'$:

(ii) алгебра $\bar{a}/\bar{r}'$ конечномерна;

(iii) существует целое число $m \geqslant 0$, такое, что $\mathrm{ad}(X_i)^m(X_j) \in \bar{r}'$ и $\mathrm{ad}(Y_i)^m(Y_j) \in \bar{r}'$ при $i \neq j$.

(Отсюда видно, в частности, что $\bar{r}$ — это наименьший идеал конечной коразмерности в алгебре $\bar{a}$.)

Глава VII

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

В этой главе, как и раньше, $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана и R — соответствующая система корней. Зафиксируем в этой системе некоторый базис $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и обозначим через R_+ множество всех положительных корней (относительно S).

Для каждого корня $\alpha \in R_+$ выберем элементы $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, такие, что $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ (см. гл. IV, § 1). Если α совпадает с одним из простых корней α_i, то мы будем писать X_i, Y_i, H_i вместо X_{α_i}, Y_{α_i}, H_{α_i}.

Положим

$$\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{n}_- = \sum_{\alpha < 0} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

Мы будем изучать неприводимые $\mathfrak{g}$-модули, соответствующие *старшему весу* (см. § 3), и, в частности, дадим описание тех из них, которые имеют *конечную размерность.*

§ 1. Веса

Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль (не обязательно конечной размерности), и пусть $\omega \in \mathfrak{h}^*$ — линейная форма на пространстве $\mathfrak{h}$. Обозначим через V^ω пространство всех элементов $v \in V$, таких, что $Hv = \omega(H)v$ для $H \in \mathfrak{h}$. Мы будем говорить, что элементы этого пространства имеют *вес* ω. Размерность $\dim V^\omega$ называется *кратностью* формы ω. Мы скажем, что форма ω является *весом* пространства V, если $V^\omega \neq 0$.

Предложение 1. (а) *Пусть* $\omega \in \mathfrak{h}^*$ *и* $\alpha \in R$. *Тогда* $\mathfrak{g}^\alpha V^\omega \subset V^{\omega+\alpha}$.

(б) *Сумма* $V' = \sum_\omega V^\omega$ *есть прямая сумма. Пространство* V' *инвариантно относительно действия алгебры* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, $v \in V^\omega$ и $H \in \mathfrak{h}$. Равенство

$$H(Xv) = X(Hv) + [H, X]v = (\omega(H) + \alpha(H))Xv$$

показывает, что вектор Xv имеет вес $\omega + \alpha$.

Утверждение (а) общеизвестно (собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы). Наконец, приведенное выше равенство доказывает инвариантность пространства V' относительно всех $\mathfrak{g}^\alpha$ и, следовательно, относительно всей алгебры $\mathfrak{h} \oplus \sum \mathfrak{g}^\alpha$.

§ 2. Примитивные элементы

Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль, v — элемент этого модуля и ω — линейная форма на $\mathfrak{h}$. Назовем v *примитивным*[1]) *элементом веса* ω, если выполнены следующие два условия:

(i) вектор v отличен от нуля и имеет вес ω;

(ii) для всех $\alpha \in R_+$ (или, что то же самое, для всех $\alpha \in S$)

$$X_\alpha v = 0.$$

Примитивные элементы можно охарактеризовать так же, как собственные векторы подалгебры Бореля $\mathfrak{b}$.

Предложение 2. *Пусть* v — *примитивный элемент* $\mathfrak{g}$-*модуля* V *веса* ω, *и пусть* E — *подмодуль, порожденный этим элементом. Тогда*

(1) *Модуль* E *порождается (как векторное пространство) элементами вида*

$$Y_{\beta_1}^{m_1} \ldots Y_{\beta_k}^{m_k} v, \qquad m_i \in \mathbf{N},$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_k$ — *различные положительные корни.*

---

[1]) В отечественной литературе примитивный элемент называют также *старшим вектором*. — *Прим. перев.*

(2) *Веса модуля* E *имеют вид*

$$\omega - \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_i, \quad p_i \in \mathbf{N},$$

и кратности их конечны.

(3) *Форма* ω *является весом модуля* E *кратности* 1.

(4) *Модуль* E *неразложим.*

(Напомним, что модуль E называется *неразложимым*, если он нетривиален и не разлагается в прямую сумму нетривиальных подмодулей. Всякий неприводимый модуль неразложим, обратное, вообще говоря, неверно.)

Доказательство. Обозначим через A, B, C универсальные обертывающие алгебр $U\mathfrak{g}$, $U\mathfrak{b}$, $U\mathfrak{n}_-$ соответственно. Как мы знаем, $A = C \otimes B$, поскольку $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}$ (см. ч. 1, гл. III, § 4), поэтому $E = Av = C \cdot Bv$. Однако вектор v является собственным для любого оператора $b \in B$, так что $C \cdot Bv = Cv$, т. е. $E = Cv$. Утверждение (1) вытекает теперь из теоремы Биркгофа — Витта, согласно которой одночлены

$$Y_{\beta_1}^{m_1} \ldots Y_{\beta_k}^{m_k}, \qquad m_i \in \mathbf{N},$$

образуют базис алгебры C.

Для того чтобы доказать утверждение (г), достаточно заметить (см. предложение 1), что элемент $Y_{\beta_1}^{m_1} \ldots Y_{\beta_k}^{m_k} v$ имеет вес $\omega - \sum m_j \beta_j$ ($m_j \in \mathbf{N}$), причем корни β разлагаются в линейные комбинации по элементам базиса $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Нетрудно также сообразить, что формы ω и $\omega - \sum m_j \beta_j$ ($\beta_j \in R_+$, $m_j \in \mathbf{N}$) равны тогда и только тогда, когда все числа m_j равны нулю, а это в точности эквивалентно части (3) предложения 2.

Допустим, наконец, что модуль E равен прямой сумме двух подмодулей E_1 и E_2. Тогда $E^\omega = E_1^\omega \oplus E_2^\omega$. Но, как мы доказали, $\dim E^\omega = 1$, а потому $E^\omega = E_1^\omega$ или $E^\omega = E_2^\omega$. В первом случае $v \in E_1$, и поскольку вектор v порождает E, мы получаем $E=E_1$ и $E_2=0$. Аналогично во втором случае $E=E_2$ и $E_1=0$.

§ 3. Неприводимые модули, соответствующие старшим весам

Теорема 1. *Пусть V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль, содержащий примитивный элемент v веса ω. Тогда*

(а) *Вектор v является единственным с точностью до умножения на скаляр примитивным элементом модуля V. Вес этого элемента называется старшим весом неприводимого модуля V.*

(б) *Любой вес π нашего модуля имеет вид*

$$\pi=\omega-\sum m_i\alpha_i, \text{ где } m_i\in\mathbf{N}.$$

Кратности всех весов конечны; в частности, кратность веса ω равна единице. Кроме того, $V=\sum V^{\pi}$.

(в) *Два неприводимых $\mathfrak{g}$-модуля V_1 и V_2 со старшими весами ω_1 и ω_2 изоморфны в том и только в том случае, когда $\omega_1=\omega_2$.*

(Как показывает (б), каждый вес модуля V в некотором очевидном смысле *строго меньше* веса ω, чем, собственно, и объясняется происхождение термина „старший вес".)

Доказательство. (б) Подмодуль $E\subset V$, порожденный элементом v, совпадает с модулем V ввиду неприводимости последнего. Применяя предложение 2, получаем (б).

(а) Пусть v' — примитивый элемент модуля V с весом ω'. Согласно (б),

$$\omega'=\omega-\sum m_i\alpha_i, \qquad m_i\geqslant 0.$$

Поменяв ролями v и v', приходим к соотношению

$$\omega=\omega'-\sum m_i'\alpha_i, \qquad m_i'\geqslant 0.$$

Сложив эти равенства, видим, что $m_i=m_i'=0$ для всех i, т. е. $\omega=\omega'$. Снова применяя (б), получаем, что векторы v и v' коллинеарны.

(в) Докажем, что равенство $\omega_1=\omega_2$ влечет за собой изоморфизм соответствующих $\mathfrak{g}$-модулей V_1 и V_2.

Обозначим через v_i ($v=1$, 2) примитивный элемент модуля V_i веса $\omega(=\omega_1=\omega_2)$. Очевидно, вектор $v = v_1+v_2$ модуля $V_1 \oplus V_2$ является примитивным элементом с тем же весом ω. Пусть E — подмодуль модуля V, порожденный элементом v. Проекция $\mathrm{pr}_1\colon V \to V_1$ индуцирует гомоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей $f_1\colon E \to V_1$. Ясно, что $f_1(v)=v_1$. Так как v_1 порождает модуль V_1, заключаем, что отображение f_1 *сюръективно*. С другой стороны, ядро $N_1 = V_2 \cap E$ этого гомоморфизма является подмодулем в V_2; при этом указанный подмодуль не содержит v_2, поскольку (см. предложение 2) любой элемент веса ω модуля E должен быть коллинеарен вектору v. Итак, $N_1 \neq V_2$, и, следовательно, в силу неприводимости последнего модуля $N_1=0$, т. е. отображение f_1 — изоморфизм. Доказав аналогичным образом изоморфизм модулей V_2 и E, мы получаем искомый изоморфизм первоначальных модулей V_1 и V_2.

Замечание. Можно привести пример неприводимого $\mathfrak{g}$-модуля, не обладающего старшим весом (иными словами, не имеющего примитивного элемента); такой модуль обязательно имеет бесконечную размерность (см. § 4).

Теорема 2. *Для всякой формы $\omega \in \mathfrak{h}^*$ существует неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль, старший вес которого равен ω.*

(В теореме 1 доказано, что такой модуль единствен с точностью до изоморфизма.)

Доказательство. (i) Построим вначале $\mathfrak{g}$-модуль V_ω, содержащий примитивный элемент v веса ω и порожденный этим элементом.

Обозначим через L_ω одномерный $\mathfrak{b}$-модуль (с базисным вектором v), такой, что

$$Hv = \omega(H)\,v \qquad \text{при } H \in \mathfrak{h}$$

и

$$Xv = 0 \qquad \text{при } X \in \mathfrak{n}_+.$$

Пространство L_ω можно рассматривать как модуль над соответствующей универсальной обертывающей алгеброй $U\mathfrak{b}$. Взяв тензорное произведение

$$V_\omega = U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} L_\omega,$$

мы получим некоторый $U\mathfrak{g}$-модуль. Очевидно, что этот модуль порожден элементом $1 \otimes v$ (который мы для краткости обозначим через v). Легко видеть, что элемент v не равен нулю, так как по следствию теоремы Биркгофа — Витта (см. ч. 1, гл. III, § 4) алгебра $U\mathfrak{g}$ является свободным $U\mathfrak{b}$-модулем, причем в качестве одного из элементов свободного базиса можно взять единицу. Из приведенных выше формул видно также, что v — примитивный элемент модуля V_ω веса ω.

(Можно было бы показать, что модуль V_ω обладает базисом, состоящим из элементов вида $Y_{\beta_1}^{m_1} \ldots Y_{\beta_k}^{m_k} v$, однако для нас это несущественно.)

(ii) Положим

$$V_\omega^- = \sum_{\pi \neq \omega} (V_\omega)^\pi,$$

где V_ω — построенный выше $\mathfrak{g}$-модуль. Если V' — некоторый подмодуль модуля V_ω, отличный от всего модуля V_ω, то $V' \subset V_\omega^-$. Действительно, во-первых, $V' = \sum V'^\pi$, поскольку пространство V' инвариантно относительно $\mathfrak{h}$; во-вторых, $V'^\omega = 0$, так как в противном случае мы имели бы $v \in V'^\omega$ и $V' = V_\omega$. Итак, $V' = \sum\limits_{\pi \neq \omega} V'^\pi$, т. е. $V' \subset V_\omega^-$. Таким образом, $\mathfrak{g}$-подмодуль $N_\omega \subset V_\omega$, порожденный всеми подмодулями, отличными от V_ω, содержится в V_ω^- и тем более не совпадает с V_ω. Фактормодуль $E_\omega = V_\omega / N_\omega$ является, очевидно, искомым неприводимым $\mathfrak{g}$-модулем.

Замечания. 1. Для заданной формы ω мы можем встретиться с двумя возможностями: $N_\omega = (0)$ и $N_\omega \neq (0)$; обе они реализуются в случае алгебры $sl(2)$.

2. Теоремы 1 и 2 дают в совокупности биективное соответствие между элементами $\omega \in \mathfrak{h}^*$ и классами

неприводимых $\mathfrak{g}$-модулей, имеющих в качестве старшего веса форму ω.

§ 4. Модули конечной размерности

Предложение 3. *Пусть V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда*

(а) $V=\sum V^{\pi}$;

(б) *числа вида $\pi(H_{\alpha})$, где π — вес модуля V и $\alpha \in R$, являются целыми;*

(в) *модуль V содержит примитивный элемент (если, конечно, $V \neq 0$);*

(г) *если модуль V порождается примитивным элементом, то он неприводим.*

Доказательство. (а) По теореме 3 гл. III каждый элемент алгебры $\mathfrak{h}$ полупрост; полупрост также соответствующий ему эндоморфизм пространства V (следствие 1.6.5.4). Поскольку алгебра $\mathfrak{h}$ коммутативна, все соответствующие эндоморфизмы диагонализуются в одном общем базисе.

(в) Теорема Ли (см. ч. 1, гл. V, § 4), примененная к разрешимой алгебре Бореля $\mathfrak{b}$, дает существование примитивного элемента.

(г) Комбинируя неразложимость модуля, порожденного примитивным элементом (предложение 2), и его полную приводимость (см. ч. 1, гл. VI, § 3), заключаем, что такой модуль неприводим.

(б) Наконец, если $\alpha \in R_{+}$, то пространство V можно рассматривать как модуль над алгеброй Ли $\mathfrak{s}_{\alpha}$, порожденной тремя элементами X_{α}, Y_{α}, H_{α} (см. гл. VI). Применяя теорему 4 гл. IV, мы видим, что собственные значения оператора, соответствующего элементу H_{α}, лежат в $\mathbf{Z}$. Остается заметить, что эти собственные значения суть не что иное, как числа $\pi(H_{\alpha})$.

Следствие. *Всякий конечномерный неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль имеет старший вес.*

Это непосредственно вытекает из утверждения (в) предыдущей теоремы.

С помощью теорем 1 и 2 мы в состоянии теперь дать описание тех форм $\omega \in \mathfrak{h}^*$, для которых соответствующий неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль имеет конечную размерность.

Теорема 3. *Пусть $\omega \in \mathfrak{h}^*$ и E_ω — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль, старший вес которого равен ω. Для того чтобы модуль E_ω имел конечную размерность, необходимо и достаточно, чтобы*

*) $\omega(H_\alpha)$ *были целыми неотрицательными числами для всех корней* $\alpha \in R^+$.

(Достаточно, впрочем, чтобы форма ω принимала целые неотрицательные значения на элементах базиса H_i.)

Доказательство. Необходимость. Пусть v — примитивный элемент $\mathfrak{g}$-модуля E_ω. Очевидно, этот элемент останется примитивным, если рассматривать E_ω как $\mathfrak{s}_\alpha$-модуль (где $\mathfrak{s}_\alpha$ — подалгебра, порожденная элементами X_α, Y_α, H_α). Применяя следствие 2 теоремы 1 гл. IV, мы заключаем, что $\omega(H_\alpha)$ — целое неотрицательное число.

Достаточность. Допустим, что свойство (*) выполнено. Пусть v — примитивный элемент модуля E_ω. Положим

$$m_i = \omega(H_i), \quad v_i = Y_i^{m_i+1} v, \text{ где } 1 \leqslant i < \dim \mathfrak{h}.$$

Если $i \neq j$, то элементы X_j и Y_i коммутируют, поэтому

$$X_j v_i = Y_i^{m_i+1} X_j v = 0.$$

Рассматривая E_ω как $\mathfrak{s}_i$-модуль (где подалгебра $\mathfrak{s}_i$ порождается элементами X_i, Y_i, H_i), получаем в силу теоремы 3.11, (iii), гл. IV

$$X_i v_i = 0.$$

Если бы $v_i \neq 0$, это означало бы, что v_i — примитивный элемент веса $\omega - (m_i + 1)\alpha$, в противоречие с теоремой 1, (a). Итак, $v_i = 0$. Согласно теореме 1 гл. IV, векторное подпространство F_i, порожденное векторами $Y_i^p v$, $0 \leqslant p \leqslant m_i$, является *$\mathfrak{s}_i$-модулем конечной размерности.*

Обозначим через T_i множество всех $\mathfrak{s}_i$-подмодулей модуля E_ω конечной размерности и через E'_i — их сумму. Очевидно, если $F \in T_i$, то и $\mathfrak{g} \cdot F \in T_i$. Отсюда вытекает, что E'_i является инвариантным (относительно $\mathfrak{g}$) подпространством модуля E_ω. Ввиду неприводимости последнего $E'_i = E_\omega$. Итак, мы доказали, что модуль E_ω есть сумма *$\mathfrak{s}_i$-модулей конечной размерности.*

Пусть P_ω — множество всех весов модуля E_ω. Покажем, что это множество *инвариантно относительно отражения* s_i, соответствующего корню α_i. В самом деле, пусть $\pi \in P_\omega$ и y — ненулевой элемент пространства E_ω^π. Как мы знаем, $p_i = \pi(H_i)$ — целое число (см. теорему 1, (б)). Положим

$$x = Y_i^{p_i} y, \text{ если } p_i \geqslant 0, \text{ и } x = X_i^{-p_i} y, \text{ если } p_i \leqslant 0.$$

Применяя теорему 4 гл. IV к конечномерному $\mathfrak{s}_i$-модулю, содержащему элемент y, видим, что $x \neq 0$. Вес элемента x равен

$$\pi - p_i \alpha_i = \pi - \pi(H_i)\alpha_i = s_i(\pi).$$

Таким образом, $s_i(\pi)$ — вес модуля E_ω, что и доказывает инвариантность множества P_ω.

Докажем теперь *конечность* этого множества. Пусть $\pi \in P_\omega$. Тогда (теорема 1)

$$\pi = \omega - \sum p_i \alpha_i, \text{ где } p_i \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Достаточно, разумеется, доказать ограниченность коэффициентов p_i. Рассмотрим множество

$$-S = \{-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n\}.$$

Оно, как и множество S, является базисом системы R. Найдется, следовательно, автоморфизм $w \in W$, такой, что $w(S) = -S$ (см. гл. V, § 10). Но, как известно, w есть произведение элементов вида s_i; поэтому в силу доказанного выше $\mathrm{w}(\pi) \in P_\omega$ и

$$\mathrm{w}(\pi) = \omega - \sum q_i \alpha_i, \qquad q_i \geqslant 0.$$

Применяя w^{-1} к этой формуле, находим

$$\pi = w^{-1}(\omega) + \sum r_i \alpha_i, \qquad r_i \geqslant 0. \tag{2}$$

Пусть $\omega - w^{-1}(\omega) = \sum c_i \alpha_i$. Ясно, что коэффициенты c_i зависят только от выбора базиса S (при фиксированной форме ω). Но из равенств (1) и (2) видно, что $c_i = p_i + r_i$. Отсюда следует, что $p_i \leqslant c_i$, т. е. числа p_i ограничены.

Итак, модуль E_ω имеет *конечное число* весов. Поскольку каждый из них имеет конечную кратность (см. теорему 1) и поскольку E_ω есть прямая сумма соответствующих собственных подпространств, рассматриваемый модуль E_ω имеет конечную размерность. Теорема доказана.

Замечания. 1. В ходе доказательства мы установили, что множество P_ω весов модуля E_ω *инвариантно относительно группы Вейля* W. Фактически веса π и $w(\pi)$ ($\pi \in P_\omega$, $w \in W$) *имеют одинаковую кратность*. Действительно, достаточно рассмотреть случай $w = s_i$, а в этом случае, как нетрудно проверить, автоморфизм

$$\theta = e^{X_i} e^{-Y_i} e^{X_i}$$

преобразует E_ω^π в $E_\omega^{s_i(\pi)}$ (см. гл. IV, § 5, замечание 1).

2. Рассмотрим базис $\{\omega_i\}$ пространства $\mathfrak{h}^*$, двойственный к базису $\{H_i\}$:

$$\omega_i(H_i) = 1, \quad \omega_i(H_j) = 0 \quad (i \neq j).$$

Веса ω_i называются *фундаментальными весами* системы корней R (относительно выбранного базиса S). Условие (*) теоремы 3 означает, что рассматриваемая форма ω представима в виде *линейной комбинации элементов* ω_i *с целыми неотрицательными коэффициентами*.

Неприводимые модули, соответствующие фундаментальным весам, называются *фундаментальными модулями* (*или фундаментальными представлениями*) алгебры $\mathfrak{g}$.

§ 5. Приложение к группе Вейля

Предложение 4. *На множестве всех базисов системы корней R группа Вейля действует транзитивно и „без неподвижных точек"*.

Доказательство. Свойство транзитивности было доказано выше в гл. V, § 10. Нам остается, следовательно, показать, что тогда и только тогда $w(S)=S$, где $w \in W$, когда $w=1$.

Пусть ω — произвольный фундаментальный вес (относительно базиса S), и пусть E_ω — соответствующий ему конечномерный неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль. Как мы уже знаем (см. замечание 1), форма $w^{-1}(\omega)$ тоже является весом модуля E_ω. Поэтому

$$w^{-1}(\omega)=\omega-\sum p_i\alpha_i, \quad p_i \in \mathbf{N}.$$

Отсюда, используя условие $w(S)=S$, находим

$$\omega=w(\omega)-\sum p_i'\alpha_i, \quad p_i' \in \mathbf{N},$$

или

$$w(\omega)=\omega+\sum p_i'\alpha_i, \quad p_i' \in \mathbf{N}.$$

Поскольку $w(\omega)$ — вес модуля E_ω, постольку в силу теоремы 1, (б), все коэффициенты $p_i'=0$, т. е. $w(\omega)=\omega$. Вспоминая, что фундаментальные корни образуют базис пространства $\mathfrak{h}^*$, получаем $w=1$.

§ 6. Пример: $sl(n+1)$

Пусть $\mathfrak{g}=sl(n+1)$ — алгебра квадратных матриц порядка $n+1$ с нулевым следом. В качестве подалгебры $\mathfrak{h}$ возьмем алгебру, состоящую из диагональных матриц

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$$

(сокращенно $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$), таких, что $\sum \lambda_i=0$. Корнями этой алгебры служат линейные формы вида $\alpha_{i,j}$, $i \neq j$, такие, что

$$\alpha_{i,j}(H)=\lambda_i-\lambda_j$$

где $H = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$. В качестве базиса системы корней можно взять формы $\alpha_i = \alpha_{i,\,i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$; соответствующий элемент $H_i \in \mathfrak{h}$ есть диагональная матрица $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$, у которой $\lambda_i = 1$, $\lambda_{i+1} = -1$ и $\lambda_j = 0$ при $j \neq i$, $i+1$.

Фундаментальные веса ω_i задаются равенствами

$$\omega_i(H) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_i,$$

где $H = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$.

Фундаментальный вес ω_1 является старшим весом стандартного представления алгебры $sl(n+1)$ в векторном пространстве $E = \mathbf{C}^{n+1}$. Более общо, фундаментальный вес ω_i есть старший вес представления $sl(n+1)$ в пространстве $\overset{i}{\wedge} E$ [1]).

В действительности любое неприводимое конечномерное представление алгебры $sl(n+1)$ можно получить, разлагая *тензорные степени* пространства E (см. Г. Вейль [2*]).

§ 7. Характеры

Пусть P — аддитивная подгруппа пространства $\mathfrak{h}^*$, образованная всеми формами π, такими, что $\pi(H_\alpha) \in \mathbf{Z}$ для любого корня $\alpha \in R$ (или, что то же самое, для любого простого корня $\alpha \in S$). Группа P является свободной абелевой группой, имеющей в качестве базиса систему фундаментальных весов $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Обозначим через $\mathbf{A}$ *групповое кольцо* $\mathbf{Z}[P]$. Иными словами, $\mathbf{A}$ есть $\mathbf{Z}$-алгебра со свободным базисом $(e^\pi)_{\pi \in P}$, таким, что $e^\pi \cdot e^{\pi'} = e^{\pi + \pi'}$.

Определение 1. Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль конечной размерности и π — его вес. Обозначим через m_π кратность $\dim V^\pi$ этого веса.

Элемент

$$\operatorname{ch}(V) = \sum m_\pi e^\pi$$

алгебры $\mathbf{A}$ называется *характером* модуля V.

---

[1]) См. предложение 1.7.4.6 — *Прим. перев.*

(Это определение корректно, поскольку ненулевые члены в указанной сумме соответствуют весам модуля V, а их, согласно предложению 3, конечное число.)

Предложение 5. (а) *Характер* $\mathrm{ch}(V)$ *инвариантен относительно группы Вейля* W.

(б) *Имеют место соотношения*

$$\mathrm{ch}(V \oplus V') = \mathrm{ch}(V) + \mathrm{ch}(V'),$$
$$\mathrm{ch}(V \otimes V') = \mathrm{ch}(V) \cdot \mathrm{ch}(V').$$

(в) *Два* $\mathfrak{g}$-*модуля* V *и* V' *конечной размерности изоморфны тогда и только тогда, когда* $\mathrm{ch}(V) = \mathrm{ch}(V')$.

Доказательство. Утверждение (а) выражает по существу тот факт, что два сопряженных (относительно группы Вейля) веса имеют одинаковую кратность (см. замечание 4.1).

Формулы пункта (б) очевидны.

Докажем (в). Нам надо показать, что из равенства $\mathrm{ch}(V) = \mathrm{ch}(V')$ следует изоморфизм модулей V и V'. Доказательство будем вести индукцией по размерности пространства V. Если $\dim V = 0$ (т. е. $V = 0$), то $\mathrm{ch}(V) = 0$, откуда $\mathrm{ch}(V') = 0$ и $V' = 0$. Пусть теперь $V \neq 0$. Обозначим через P_V множество всех весов модуля V. Поскольку $\mathrm{ch}(V) = \mathrm{ch}(V')$, множество всех весов модуля V' совпадает с P_V. Очевидно, $P_V \neq \varnothing$. Так как P_V конечно, существует такой элемент $\omega \in P_V$, что $\omega + \alpha_i \notin P_V$ для любого i. Выберем в пространстве V^ω произвольный ненулевой элемент v. Ясно, что этот элемент примитивен. В силу предложения 3 подмодуль $V_1 \subset V$, порожденный вектором v, неприводим и имеет старший вес ω. На основании теоремы Вейля о полной приводимости найдется дополнительный к V_1 подмодуль V_2, т. е. $V = V_1 \oplus V_2$.

По аналогичным соображениям $V' = V'_1 \oplus V'_2$, где V'_1 — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом ω. Но поскольку модули V_1 и V'_1 имеют одинаковые старшие веса и неприводимы, они по теореме 1 изоморфны и, следовательно, $\mathrm{ch}(V_1) = \mathrm{ch}(V'_1)$. Из формул (б) и последнего равенства вытекает, что $\mathrm{ch}(V_2) =$

$= \mathrm{ch}(V_2')$. Применяя предположение индукции, заключаем, что модули V_2 и V_2' (а потому и первоначальные модули V и V') изоморфны.

Пусть $\mathbf{A}^W$ — подалгебра алгебры $\mathbf{A} = \mathbf{Z}[P]$, состоящая из всех элементов, инвариантных относительно группы Вейля. В силу (а) каждый характер лежит в $\mathbf{A}^W$. Можно показать, что, обратно, любой элемент этой алгебры есть разность двух характеров. Указанное свойство вытекает из следующего более точного результата, который мы приведем без доказательства.

Предложение 6. *Пусть* $T_i = \mathrm{ch}(E_{\omega_i})$ — *характер i-го фундаментального модуля алгебры* $\mathfrak{g}$ (*см. замечание* 4.2). *Элементы* T_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *алгебраически независимы и порождают алгебру* $\mathbf{A}^W$.

Таким образом, алгебру $\mathbf{A}^W$ можно отождествить с алгеброй многочленов $\mathbf{Z}[T_1, \ldots, T_n]$.

Следствие. *Операция* ch *индуцирует изоморфизм „группы Гротендика" конечномерных* $\mathfrak{g}$-*модулей на алгебру* $\mathbf{A}^W$.

Это вытекает из предложений 5 и 6.

§ 8. Формула Вейля

Эта формула позволяет вычислять характер неприводимого $\mathfrak{g}$-модуля как функцию от его старшего веса. Введем предварительно несколько обозначений.

(i) Символом $\varepsilon(w)$ будем обозначать определитель автоморфизма $w \in W$ пространства $\mathfrak{h}^*$. Очевидно, $\varepsilon(w) = 1$, если w представляется в виде произведения четного числа отражений s_α, и $\varepsilon(w) = -1$ в противном случае.

(ii) Положим $\rho = \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \in R_+} \alpha$. Можно показать, что $\rho(H_i) = 1$ для всех i, так что $\rho \in P$.

(iii) Положим

$$D = \prod_{\alpha \in R_+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$$

(произведение берется в алгебре $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}P\right]$). Фактически $D \in \mathbf{Z}[P]$, так как имеет место (не доказываемое здесь) равенство

$$D = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\rho)}.$$

Теорема 4. *Пусть E — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль конечной размерности, и пусть ω — его старший вес. Тогда*

$$\operatorname{ch}(E) = \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, e^{w(\omega+\rho)}}{D}.$$

В первоначальном доказательстве этой теоремы (Вейль, 1922 г.) использовалась теория компактных групп Ли (см. Семинар „Софус Ли“ [1], гл. 16).

Чисто алгебраическое (но менее естественное) доказательство было получено в 1954 г. Фрейденталем. Оно воспроизведено в книгах Джекобсон [1] и Семинар „Софус Ли“ [1], гл. 15.

Следствие 1. *Размерность модуля E дается формулой*

$$\dim E = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{\langle \omega + \rho, H_\alpha \rangle}{\langle \rho, H_\alpha \rangle} = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{(\omega + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}.$$

Этот результат легко получается из формулы Вейля подсчетом суммы коэффициентов элемента $\operatorname{ch}(E)$ (см. Семинар „Софус Ли“ [1]).

Следствие 2. *Пусть V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, и пусть $n(V, \omega)$ — кратность неприводимого $\mathfrak{g}$-модуля E (со старшим весом ω), входящего в разложение (на неприводимые подмодули) модуля V. Тогда коэффициент при $e^{\omega+\rho}$ в произведении $D \cdot \operatorname{ch}(V)$ равен $n(V, \omega)$.*

Этот результат также непосредственно вытекает из основной теоремы.

Пример. Для алгебры $\mathfrak{g} = sl(2)$ существует всего один положительный корень α, равный 2ρ. Группа P

состоит из элементов вида $n\rho$, где $n \in \mathbf{Z}$, и старший вес $\omega = m\rho$, где $m \geqslant 0$. Формула Вейля принимает в этом случае следующий вид:

$$\operatorname{ch}(E) = \frac{e^{(m+1)\rho} - e^{-(m+1)\rho}}{e^{\rho} - e^{-\rho}} = e^{m\rho} + e^{(m-2)\rho} + \ldots + e^{-m\rho},$$

что вполне согласуется с результатами гл. IV.

Глава VIII

КОМПЛЕКСНЫЕ ГРУППЫ И КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ

Настоящая глава совсем не содержит доказательств[1].

Все рассматриваемые группы Ли предполагаются (за исключением § 7) *комплексными.*

§ 1. Подгруппы Картана

Всюду в дальнейшем группа G — связная группа Ли, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ которой полупроста. Такие группы Ли называются *комплексными полупростыми.*

Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ и H — соответствующая ей аналитическая подгруппа. Подгруппы, сопряженные подгруппе H, называются *подгруппами Картана.*

Теорема 1. (а) *Подгруппа H является замкнутым подмногообразием в группе G.*

(б) *Группа H является „мультипликативным тором"; иными словами, группа H изоморфна прямому произведению групп* $\mathbf{C}^*$.

Уточним строение группы $\mathbf{C}^*$.

Пусть R — система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно подалгебры $\mathfrak{h}$; $R^*(\subset \mathfrak{h})$ — двойственная к R система; Γ — аддитивная подгруппа алгебры $\mathfrak{h}$, порожденная элементами $H_\alpha \in R^*$, и Γ_1 — аддитивная подгруппа алгебры $\mathfrak{h}$, образованная элементами $x \in \mathfrak{h}$, такими, что $\alpha(x) \in \mathbf{Z}$ для всех $\alpha \in R$. Имеем

$$\Gamma \subset \Gamma_1 \subset \mathfrak{h}.$$

[1]) Доказательства следующих ниже теорем в случае компактных групп см. в работе Дынкина и Онищика [1]. Случай комплексных групп сводится к случаю компактных с помощью компактных вещественных форм (см. § 7). — *Прим. перев.*

Введем отображение

$$e\colon \mathfrak{h} \to H,$$

задаваемое правилом $x \longmapsto \exp(2\pi i x)$. Оно, очевидно, является гомоморфизмом, поскольку алгебра $\mathfrak{h}$ коммутативна.

Теорема 2. (а) *Гомоморфизм* $e\colon \mathfrak{h} \to H$ *сюръективен и для его ядра* $\Gamma(G)$ *имеют место включения*

$$\Gamma \subset \Gamma(G) \subset \Gamma_1.$$

(б) *Отображение* e *индуцирует изоморфизм факторгруппы* $\Gamma_1/\Gamma(G)$ *на центр группы* G.

(в) *Канонический гомоморфизм* $\pi_1(H) \to \pi_1(G)$ *сюръективен и индуцирует (если отождествить* $\pi_1(H)$ *и* $\Gamma(G)$ *посредством* e*) изоморфизм группы* $\Gamma(G)/\Gamma$ *на* $\pi_1(G)$.

Утверждение (а) допускает обращение.

Теорема 3. *Для всякой подгруппы* $M \subset \mathfrak{h}$, *такой, что* $\Gamma \subset M \subset \Gamma_1$, *существует полупростая комплексная группа* G, *алгебра Ли которой равна* $\mathfrak{g}$ *и для которой* $\Gamma(G) = M$. *Указанная группа* G *определяется (с точностью до изоморфизма) единственным образом.*

В частности, группа G *имеет тривиальный центр* тогда и только тогда, когда $\Gamma(G) = \Gamma_1$; группа G *односвязна* ($\pi_1(G) = (1)$) тогда и только тогда, когда $\Gamma(G) = \Gamma$.

Поскольку группа Γ_1/Γ конечна, имеется лишь *конечное число* (с точностью до изоморфизма) групп Ли с заданной полупростой комплексной алгеброй Ли; все они реализуются как накрытие группы Ли с тривиальным центром.

Примеры. 1. Если $\mathfrak{g} = sl(2)$, то имеется один положительный корень α, и группы Γ и Γ_1 имеют вид $\mathbf{Z}H_\alpha$ и $\frac{1}{2}\mathbf{Z}H_\alpha$ соответственно. Таким образом, существуют две группы с алгеброй Ли $sl(2)$: односвязная группа $SL(2)$ и группа с тривиальным центром $PGL(2) = SL(2)/\{\pm 1\}$.

2. Укажем строение факторгрупп Γ_1/Γ для различных типов простых алгебр Ли:

тип A_n, $n > 1$	$\Gamma_1/\Gamma = \mathbf{Z}/(n+1)\mathbf{Z}$
тип D_n, n четно, $n \geqslant 4$	$\Gamma_1/\Gamma = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
тип D_n, n нечетно, $n \geqslant 5$	$\Gamma_1/\Gamma = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$
тип E_6	$\Gamma_1/\Gamma = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$
типы B_n, C_n, $n > 2$, E_7	$\Gamma_1/\Gamma = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
типы G_2, F_4, F_8	$\Gamma_1/\Gamma = 0$

§ 2. Характеры

Характером подалгебры Картана H называется всякий гомоморфизм χ: $H \to \mathbf{C}^*$. Группа $X(H)$ характеров группы H является свободной абелевой группой ранга $\dim H$. Известно, что соответствующей группой характеров группы $X(H)$ служит группа H, т. е. имеет место естественный изоморфизм

$$H \simeq \mathrm{Hom}(X(H), \mathbf{C}^*).$$

Пусть $\chi \in X(H)$. Касательное к χ отображение есть гомоморфизм $\mathfrak{h} \to \mathbf{C}$, т. е. элемент пространства $\mathfrak{h}^*$. Таким образом, мы получаем *инъекцию* группы $X(H)$ в пространство $\mathfrak{h}^*$, которая позволяет *отождествить* $X(H)$ *с некоторым подмножеством в* $\mathfrak{h}^*$.

Теорема 4. (а) *Пусть* P_1 (*соответственно* P) — *аддитивная подгруппа пространства* $\mathfrak{h}^*$, *порожденная всеми корнями* (*соответственно старшими весами*). *Тогда*

$$P_1 \subset X(H) \subset P.$$

(б) *Обратно, всякая подгруппа* $M^* \subset \mathfrak{h}^*$, *такая, что* $P_1 \subset M^* \subset P$, *имеет вид* $X(H)$, *где* H — *подгруппа Картана некоторой группы* G; *эта группа* G *определяется единственным образом с точностью до изоморфизма.*

Это — простая переформулировка теоремы 3, так как P, P_1 и $X(H)$ двойственны группам Γ, Γ_1 и $\Gamma(G)$.

§ 3. Связь с представлениями

Пусть $\rho\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(E)$ — линейное конечномерное представление алгебры $\mathfrak{g}$.

Теорема 5. *Для того чтобы представление ρ соответствовало некоторому линейному представлению*

$$\tilde{\rho}\colon G \to GL(E)$$

группы G, необходимо и достаточно, чтобы веса пространства E лежали в подгруппе $X(H)$, определенной в § 2.

Замечания. 1. Требование теоремы 5 заведомо выполняется, если группа G односвязна.

2. Если E — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль, то в теореме 5 достаточно потребовать, чтобы старший вес принадлежал $X(E)$. Действительно, как мы знаем (гл. VII), всякий вес модуля E имеет вид $\omega - \gamma$, где $\gamma \in P_1$.

Пример. Возьмем в качестве G группу, ассоциированную с алгеброй Ли $sl(2)$, т. е. группу (с тривиальным центром) $PGL(2) = SL(2)/\{\pm 1\}$. На основании вышесказанного неприводимые представления группы G соответствуют таким неприводимым представлениям алгебры $sl(2)$, у которых старший вес есть *целое кратное* положительного корня α. Это представления W_{2n} из гл. IV.

§ 4. Подгруппы Бореля

Пусть S — базис системы R, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ — соответствующее разложение алгебры $\mathfrak{g}$ (см. гл. IV, § 3) и $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$.

Теорема 6. (а) *Экспоненциальное отображение определяет изоморфизм пространства $\mathfrak{n}_+$ на некоторую замкнутую подгруппу Ли $U \subset G$.*

(б) *Аналитическая подгруппа B, соответствующая подалгебре $\mathfrak{b}$, замкнута; группа B есть полупрямое произведение своих подгрупп H и U.*

(в) *Любая разрешимая связная аналитическая подгруппа группы G сопряжена некоторой подгруппе группы B.*

Подгруппа B и сопряженные с ней подгруппы называются *подгруппами Бореля.*

Теорема 7. *Факторпространство G/B есть проективное алгебраическое (и, следовательно, компактное) многообразие.*

Кроме того, существует клеточное разбиение однородного пространства G/B, так называемое *разбиение Брюа*, согласованное с действием группы B на G/B. Более точно, пусть W — группа Вейля, соответствующая алгебре $\mathfrak{g}$ и ее подалгебре Картана $\mathfrak{h}$. Для каждого автоморфизма $w \in W$ подыщем элемент $n_w \in G$, такой, что подалгебра $\mathfrak{h}$ инвариантна относительно внутреннего автоморфизма $\mathrm{Ad}\, n_w$ и что его ограничение на $\mathfrak{h}$ равно w (см. гл. VI, § 2); через $\bar{w}$ обозначим класс элемента n_w в G/B.

Теорема 8. *Факторпространство G/B есть несвязное объединение орбит $B\bar{w}$ $(w \in W)$.*

Следствие. *Отображение $w \mapsto Bn_wB$ есть биекция B на множество $B\diagdown(G/B)$ двусторонних смежных классов группы G по модулю B.*

Можно показать также, что орбита $B\bar{w}$ изоморфна аффинному пространству $\mathbf{C}^{n(w)}$.

§ 5. Построение неприводимых представлений при помощи подгрупп Бореля

Сохраним все обозначения предыдущего параграфа. Пусть ω — старший вес, т. е. такой элемент группы P, что $\omega(H_\alpha)$ — целое неотрицательное число для всех $\alpha \in S$. Допустим, что ω лежит в подгруппе $X(H)$ группы P. По теореме 5 (см. § 3) существует неприводимый G-модуль E_ω со старшим весом ω. Дадим его явное описание.

По условию ω можно рассматривать как гомоморфизм $H \to \mathbf{C}^*$. Продолжим этот гомоморфизм на B, полагая

$$\omega(u) = 1 \quad \text{для всех } u \in U.$$

Обозначим через V_ω множество голоморфных на G функций, удовлетворяющих тождеству

$$f(yb) = \omega(b) f(y), \text{ где } y \in G, \ b \in B.$$

Наделим V_ω структурой G-модуля с помощью формулы

$$(gf)(y) = f(g^{-1}y), \text{ где } y, \ g \in G.$$

Теорема 9. *Модуль V_ω неприводим и имеет конечную размерность. Двойственный к нему модуль изоморфен E_ω.*

Примитивный элемент $e \in E_\omega$ веса ω определяет G-отображение

$$i\colon (E_\omega)^* \to V_\omega,$$

где

$$i(\lambda)(y) = \langle \lambda, \ y \cdot e \rangle.$$

Можно доказать, что это отображение является изоморфизмом.

§ 6. Связь с алгебраическими группами[1])

По-прежнему G — комплексная полупростая группа Ли.

Теорема 10. (а) *На G существует (единственная) структура алгебраической группы, согласованная с заданной аналитической структурой.*

(б) *Каждый аналитический гомоморфизм группы G в алгебраическую комплексную группу G' является алгебраическим.*

Таким образом, во всех утверждениях, относящихся к полупростым комплексным группам Ли, эпитет „аналитический“ можно всюду заменять на „алгебраический“.

[1]) См. Шевалле [3]. — *Прим. перев.*

Замечание. Задавать алгебраическую структуру на группе можно несколькими различными способами. Наиболее „явный“ способ состоит в задании точного представления $\tilde{\rho}$: $G \to GL(E)$ и проверке того, что образ $\tilde{\rho}(G)$ является алгебраической подгруппой в $GL(E)$. После этого алгебраическая структура переносится с группы $\tilde{\rho}(G)$ на G и доказывается, что она не зависит от выбора $\tilde{\rho}$.

Можно также непосредственно указать соответствующую *аффинную алгебру* A_G(координатное кольцо) алгебраического многообразия G следующим образом: $f \in A_G \Leftrightarrow f$ — голоморфная на G функция, сдвиги которой (на элементы из группы G) порождают конечномерное векторное пространство.

§ 7. Связь с компактными группами

(В этом параграфе будут одновременно рассматриваться *комплексные* и *вещественные* группы Ли.)

Напомним сначала следующий результат.

Теорема 11. *Пусть U — вещественная полупростая связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{u}$. Группа U компактна тогда и только тогда, когда форма Киллинга алгебры $\mathfrak{u}$ отрицательно определена.*

Сформулируем теперь утверждение, которое лежит в основе „унитарного приема“ Вейля (см. следствие 2 ниже).

Теорема 12. *Пусть G — комплексная полупростая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть U — максимальная компактная (вещественная) подгруппа группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{u}$.*

(а) *Алгебра $\mathfrak{u}$ есть вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$, т. е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{u}$.*

(б) *Экспоненциальное отображение определяет изоморфизм (как вещественных аналитических многообразий) пространства $i\mathfrak{u}$ на замкнутое подмногообразие $N \subset G$.*

(в) *Отображение $(u, n) \mapsto u \cdot n$ определяет изоморфизм (как вещественных аналитических многообразий) $U \times N$ на G.*

(г) *Любая компактная подгруппа в G сопряжена некоторой подгруппе в U.*

Следствие 1. *Группы гомологий (соответственно гомотопий) многообразий G и U одинаковы. В частности, $\pi_1(G)=\pi_1(U)$.*

Это вытекает из (б) и (в).

Следствие 2. *Если G' — комплексная группа Ли, то отображение ограничения*

$$r\colon \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(G, G') \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(U, G')$$

биективно.

Это вытекает из (а) и из равенства $\pi_1(G)=\pi_1(K)$.

Следствие 3. *Группа Ли G определяется подгруппой U однозначно с точностью до изоморфизма.*

Обратно, имеет место

Теорема 13. *Пусть U — вещественная связная полупростая компактная группа Ли. Тогда существует комплексная полупростая группа Ли G, содержащая группу U в качестве максимальной компактной подгруппы.*

(Такая группа G, как мы видели, определяется однозначно; она называется *комплексификацией* группы U.)

Нетрудно описать аффинную алгебру $\mathbf{A}_G$ группы G. Она состоит из всех непрерывных (комплексных) функций f на U, таких, что всевозможные сдвиги функции f (на элементы из U) порождают конечномерное (комплексное) векторное пространство. Алгебра $\mathbf{A}_G$, разумеется, наделяется естественной вещественной структурой, поэтому она определяет некоторую алгебраическую группу L над $\mathbf{R}$. Вещественные точки этой группы образуют группу U, а комплексные — группу G.

Литература[1])

Боревич З. И. и Шафаревич И. Р.
1*. Теория чисел, «Наука», 1964.

Борель (Borel A.)
1. Groupes linéaires algébriques, *Ann. Math.*, **64** (1956), 20—82.

Бурбаки (Bourbaki N.)
1. Groupes et Algèbres de Lie, Paris, Hermann, 1960.
2*. Commutative algebra, Paris, Hermann, 1962.
3*. Алгебра, «Наука», 1966.
4*. Общая топология, Физматгиз, 1958.
5*. Integration, Livre VI, Paris, Hermann.

Вейль А. (Weil A.)
1*. Введение в теорию кэлеровых многообразий, ИЛ, 1961.

Вейль Г. (Weyl H.)
1. Selecta, Birkhäuser Verlag, Basel, 1956
2*. Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.

Витт (Witt E.)
1. Die Unterrings der freien Lieschen Ringe, *Math. Z.*, **64** (1956), № 2, 195—216.

Демазюр и Гротендик (Demazure M., Grothendieck A.)
1. Schémas en groupes, *Séminaire IHES*, 1963—64.

Джекобсон (Jacobson N.)
1. Алгебры Ли, ИЛ, 1954.

Дынкин Е .Б. и Онищик А. Л.
1. Компактные группы Ли в целом, *УМН*, **10** (1955), вып. 4, 3—74.

Дьёдонне (Dieudonné J.)
1. Lie groupes and Lie hyperalgebras over a field of characteristic *p*, I—VI; I, *Comment. Math. Helv.*, 28 (1954), 87—118; II, *Am. J. Math.*, **77** (1955), 218—244; III, *Math.*

[1]) Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. — *Прим. ред.*

Z., **62** (1955), 53—75; IV, *Am. J. Math.*, **77** (1955), 429—452; V, *Bull. Soc. Math. France*, 84 (1956), 207—239; VI. *Am. J. Math.*, **79** (1957), 331—388.

Картан (Cartan E.)
1. Oeuvres complètes, Paris, Gauthier-Villars, 1952.

Картер (Carter R.)
1. Simple groupes and simple Lie algebras, *J. London Math. Soc.*, **40** (1965), 193—240.

Костант (Kostant B.)
1. On the conjugycy of real Cartan subalgebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **41** (1955), № 11, 967—970.

Лазар (Lazard M.)
1. Sur les groupes de Lie formels à un paramètre, *Bull. Soc. Math. France*, 83 (1955), 251—274.
2. Lois de groupes et analyseurs, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 72 (1955), 299—400.
3*. Groupes analytiques p-adiques, Publ. Math., Paris, 1965, № 26, 389—594.

Манин Ю. И.
1. Теория коммутативных формальных групп над полем конечной характеристики, *УМН*, **18** (1963), вып. 3—91.

Милнор (Milnor J.)
1*. Теория Морса, «Мир», 1965.

Понтрягин Л. С.
1. Непрерывные группы, ГИТТЛ, 1954.

Семинар «Софус Ли».
1. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, ИЛ, 1962.

Серр (Serre J.-P.)
1*. Classification des variétés analytiques p-adiques compactes, *Topology*, 3 (1965), № 4, 409—412.
2*. Когомологии Галуа, «Мир», 1968.

Хелгасон (Helgason S.)
1. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, ИЛ, 1954.

Холл (Hall M., Jr.)
1*. Теория групп, ИЛ, 1962.

Хохшильд (Hochschild G.)
1. The structure of Lie groupes, Holden-Day, San Francisco, 1965.

Шевалле (Chevalley C.)
1. Теория групп Ли, ИЛ, т. 1, 1948, т. 2, 3, 1958.
2. Sur certaines groupes simples, *Tôhoku. Math. J.*, 7 (1955), 14—64. (Русский перевод: *Математика* 2 : 1 (1958), 3—53.)

3. Classification des groupes des Lie algébriques, Séminaire Chevalley, v. 1—2 (1956—1958), Ecole Norm. Sup.
4. Algebraic Lie Algebras, *Ann. Math.*, **48** (1947), 91—100.

Эст и Кортхаген (van Est W., Korthagen Th.)
1. Non-enlargible Lie algebras, *Proc. koninkl. Nederl. Acad. Wet.*, Ser. A, **67** (1964), № 1, 15—31.

Якоби (Jacoby R.)
1. Some theorems on the structure of locally compact local groups, *Ann. of Math.*, Ser. 2, **66** (1957), № 1, 36—39.

Указатель обозначений

k — основное кольцо (или поле)

$\otimes$ — тензорное произведение

$\wedge$ — внешнее произведение

$\oplus$ — прямая сумма

$\varinjlim$ — индуктивный предел

$\varprojlim$ — проективный предел

$M(n, k)$ — кольцо матриц n-го порядка над k

$\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел

$\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел

$\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел

$\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел

$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbf{F}_q$ — конечное поле из q элементов

$\mathbf{Q}_p$ — поле p-адических чисел

$\mathbf{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел

$\mathrm{Hom}_k M$ или $L(M_1, M_2)$ — множество k-линейных гомоморфизмов k-модуля M_1 в k-модуль M_2

$\mathrm{End}_k M$ — множество k-линейных эндоморфизмов k-модуля M

$r\mathrm{k}_k M$ — ранг k-модуля M

$\mathrm{Tr}\,\varphi$ — след линейного преобразования φ

$\det \varphi$ — определитель линейного преобразования φ

$L(\mathrm{G})$ — алгебра Ли группы Ли G

$\mathrm{Mor}(X, Y)$ — множество морфизмов аналитического многообразия X в аналитическое многообразие Y

Предметный указатель

Оглавление

ЧАСТЬ III. КОМПЛЕКСНЫЕ ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Ж.-П. Серр

АЛГЕБРЫ ЛИ
И
ГРУППЫ ЛИ

Редактор *В. И. Авербух*
Художник *С. А. Бычков*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Е. С. Потапенкова*

Сдано в производство 10/III 1969 г.
Подписано к печати 9/VI 1969 г.
Бумага № 3 $84\times108^1/_{32}$, 5,88 бум. л.
19,74 усл. печ. л. 15,43 уч.-изд. л.
Изд. № 1/4772. Цена 1 р. 06 к. Зак. № 14.