АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
имени В. А. СТЕКЛОВА

XLIII

Н. А. ШАНИН

О НЕКОТОРЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ АРИФМЕТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1955

Ответственный редактор
академик И. Г. Петровский

Зам. отв. редактора
профессор С. М. Никольский

ВВЕДЕНИЕ

Всякий вычислительный процесс слагается из преобразований групп знаков, выполняемых в соответствии с некоторым алгорифмом. В математике вводятся в рассмотрение группы знаков разнообразных типов. В одних случаях они являются объектами изучения, в других случаях — техническими средствами, применяемыми для записи алгорифмов, понятий, суждений и т. п. При этом определение групп знаков, относящихся к какому-либо конкретному типу, обычно осуществляется посредством задания тех или иных правил конструирования. Правила конструирования позволяют развертывать процессы построения вводимых в рассмотрение объектов, исходя из некоторых элементарных знаков. Объекты, определяемые этим методом, характеризуются как результаты развертывания порождающих процессов, основывающихся на заданных правилах конструирования.

Конструктивно определяемыми объектами являются, например, целые неотрицательные числа, характеризуемые как группы некоторых элементарных знаков, строящиеся на основании определенных правил. Такого же рода объектами являются отрицательные целые числа, дроби, полиномы с целыми или дробными коэффициентами, матрицы с целыми или дробными элементами, схемы рекурсивных функций и нормальных алгорифмов, конструктивные вещественные числа (определяемые при помощи схем рекурсивных функций или схем нормальных алгорифмов), полиномы с конструктивными вещественными коэффициентами, матрицы с конструктивными вещественными элементами, формулы различных логико-математических и логических исчислений и т. п.

Математические исследования конструктивно определяемых объектов иногда осуществляются при помощи понятий и методов теории множеств и, следовательно, на основе абстракций, характерных для теоретико-множественного направления в математике. В связи с этим необходимо отметить, что, применяя при рассмотрении конструктивно определяемых объектов систему абстракций, характерную для теоретико-множественного подхода, мы упускаем из поля зрения основную черту этих объектов. Эта черта состоит в том, что конструктивно определяемые объекты не заданы все сразу в совокупности

(мы исключаем те случаи, когда результаты применения заданных правил конструирования исчерпываются некоторой конечной совокупностью объектов), но лишь *потенциально осуществимы*, один вслед за другим, при развертывании тех или иных процессов построения. Учет этой черты приводит к своеобразной логической обстановке, требующей особого, конструктивного понимания логических связей, привлекаемых для образования суждений о конструктивно определяемых объектах.

Изучение конструктивно определяемых объектов с учетом этой их основной особенности составляет задачу особого направления математических исследований, которое можно охарактеризовать как *конструктивное направление в математике*. Это направление не только не охватывается теоретико-множественной системой понятий и методов, но в определенных отношениях противоположно теоретико-множественному направлению в математике.

Конструктивное направление в математике начало складываться в начале текущего столетия* и на начальных этапах своего развития связывалось с философским течением в математике, называемым интуиционизмом. Необходимо подчеркнуть, что методологические установки интуиционизма совершенно несостоятельны. Достаточно указать, например, на то, что основоположники интуиционизма Брауэр и Г. Вейль рассматривают понятие натурального числа не как результат абстрагирующей работы человеческого мышления, обрабатывающего богатый общественный опыт оперирования с различными группами предметов, а как проявление „первоначальной интуиции". Однако дальнейший прогресс науки убедительно доказал, что реальное содержание конструктивного направления в математике ни в какой мере не связано с методологическими установками интуиционизма, а обусловлено конкретными математическими проблемами особого типа, исследование которых представляет значительный интерес как для самой математики, так и для ее приложений. Развитие математики выявило необходимость всестороннего исследования различных процессов конструирования и потенциально осуществимых результатов развертывания таких процессов. Именно проблемы этого характера обусловливают содержание и методы конструктивного направления в математике.

Учение о целых неотрицательных числах, называемое в дальнейшем *арифметикой***, является такой областью математики, в которой идеи и методы конструктивного направления уже получили многостороннее развитие. В настоящее время разработка конструктивной математики вышла за рамки арифметики. Однако уже на простом арифметическом

* Изложение истории вопроса не входит в задачу настоящей статьи.

** В настоящей статье термин „арифметика" будет применяться только в этом смысле слова.

материале отчетливо выявляются идеи и проблемы, возникшие в математической логике в связи с исследованием различных конструктивно определяемых объектов.

В настоящей статье речь будет идти главным образом об арифметике.

Статья по содержанию делится на две части: вводную (гл. I) и основную (гл. II и III).

В вводной части освещаются в обзорной и притом конспективной форме некоторые понятия, проблемы и результаты конструктивной арифметики. При этом бóльшая часть результатов формулируется без доказательств.

Цель этой части статьи состоит в том, чтобы ввести читателя, незнакомого с конструктивным направлением в математике, в круг идей этого направления и облегчить ему ориентировку в дальнейших разделах статьи, а также в различных исследованиях, посвященных специальным проблемам.

Вторая (основная) часть статьи посвящена вопросу о соотношении между определенными аксиоматическими построениями классической арифметики и конструктивной арифметики. Изложение в этой части более детальное, чем в первой. Однако и здесь часто делаются ссылки на некоторые известные предложения, доказательства которых не приводятся.

Результаты, содержащиеся в гл. III (исключая раздел 13.4), а также в § 12 гл. II, получены автором и детально излагаются впервые *.

Охарактеризуем теперь более подробно содержание гл. I.

В § 1 этой главы характеризуются группы элементарных знаков, называемые *словами*. Далее характеризуется индуктивный метод определения слов различных типов и вводится ряд понятий, относящихся к словам и индуктивным определениям. Кроме того, характеризуются абстракции, применяемые при математическом рассмотрении слов.

Значительная часть этих вопросов освещена в работе А. А. Маркова [1]. В частности, именно в работе [1] впервые охарактеризованы основные абстракции, специфичные для конструктивного подхода к исследованию конструктивно определяемых объектов. Таким образом, существенная часть § 1 повторяет (с незначительными отступлениями в отдельных случаях) содержание некоторых разделов только что упомянутой работы А. А. Маркова и включение этого материала в настоящую статью продиктовано стремлением к полноте освещения основных принципов конструктивного направления в математике.

---

* Краткое изложение некоторых результатов в гл. III было дано в заметках [24, 25].

При описании основных особенностей конструктивного направления в математике мы основываемся также на характеристике этого направления, данной А. А. Марковым в его лекциях по основаниям математики*.

В связи с исследованием конструктивно определяемых объектов складываются различные математические теории. В процессе развития математической логики были выработаны особые методы оформления и логического анализа математических теорий. Исключительно важное значение имеет метод символической записи суждений. В настоящее время для некоторых математических теорий разработаны специальные логико-математические символики, позволяющие достичь определенного единообразия, графической простоты и наглядности при записи суждений и при формулировке правил логического вывода.

В основе символических изобразительных средств каждой конкретной математической теории, оформляемой при помощи логико-математической символики, лежит некоторый набор элементарных знаков, включающий знаки для обозначения логических связей. При этом точно характеризуются способы комбинирования элементарных знаков, приводящие к сочетаниям знаков, называемым *логико-математическими формулами*. Логико-математические формулы служат для символической записи суждений рассматриваемой математической теории. Логико-математические формулы представляют собой конструктивно определяемые объекты специального типа и поэтому они сами могут служить объектами изучения конструктивной математики. Последнее обстоятельство имеет большое значение для характеристики методов современной математической логики.

В настоящей статье метод символизации применяется только к арифметическим суждениям. При этом будут рассматриваться только арифметические суждения довольно простого типа. Описание соответствующей символики дается в § 2 и § 3. Центральным пунктом § 3 является индуктивное определение *логико-арифметических формул*— слов специального типа, служащих для записи арифметических суждений.

Первостепенную роль в конструктивной арифметике играют *конструктивные принципы истолкования логико-арифметических формул*, выражающие особое конструктивное понимание логических связей, привлекаемых для образования арифметических суждений. Начало разработки конструктивных принципов истолкования математических суждений было положено работой А. Н. Колмогорова [3], опубликованной в 1932 г. В этой работе рассматриваются математические задачи и определенные методы комбинирования задач при помощи некоторых логических связей. В результате применения к задачам допустимых методов комбинирования возникают новые задачи. А. Н. Колмогоров характеризует посредством специальных символи-

* Здесь имеется в виду курс лекций по основаниям математики, прочитанный А. А. Марковым в Ленинградском университете в 1948—1949 гг.

ческих выражений определенные типы задач и для задач рассматриваемых им типов дает конструктивное истолкование понятия «решение задачи». На основе этого истолкования он разрабатывает особое *исчисление задач*, обладающее следующим свойством: каждое символическое выражение, получающееся при развертывании исчисления задач, выражает некоторый тип задач, допускающих конструктивное решение.

В работе А. Н. Колмогорова речь идет о конструктивных принципах истолкования задач, а не суждений. Однако в дальнейшем оказалось, что конструктивные принципы истолкования суждений могут быть разработаны посредством уточнения идей этого исследования. В 30-х годах, когда писалась работа А. Н. Колмогорова, в математике еще не были разработаны такие средства, которые позволили бы произвести необходимые уточнения. Возможность осуществить необходимые уточнения появилась только тогда, когда в достаточной степени продвинулась разработка теории рекурсивных функций и алгорифмов.

Теория алгорифмов играет решающую роль в формулировке конструктивных принципов истолкования математических суждений. Необходимые сведения из этой теории сообщаются в § 4.

В настоящей статье конструктивные принципы истолкования формулируются только для арифметических суждений, допускающих запись посредством символики, описанной в § 2 и § 3. Эти принципы были сформулированы С. Клином [4]. Их изложению посвящен § 5. Главным пунктом этого параграфа следует считать характеризацию тех условий, при выполнении которых логико-арифметическая формула считается *конструктивно истинной*, и тех условий, при выполнении которых логико-арифметическая формула считается *конструктивно ложной*.

В § 6 проводится анализ логико-арифметических формул некоторых специальных типов с точки зрения конструктивных принципов истолкования.

В § 7 и § 8 рассматриваются некоторые вопросы, связанные с аксиоматическим методом в арифметике. Общеизвестно, что дедуктивный (аксиоматический) метод развертывания математических теорий играет очень важную роль в математике. Основная особенность этого метода состоит в том, что в основу развертывания той или иной теории кладутся некоторые предложения, называемые аксиомами, исходя из которых дальнейшие предложения теории получаются посредством применения определенных правил логического вывода. Характеристика применяемых правил логического вывода составляет необходимый элемент определения каждой конкретной дедуктивно развертываемой математической теории.

Заметим, что в математической практике обычно ограничиваются перечислением аксиом теории и на каждом шаге развертывания теории

применяют такие логические средства, которые по тем или иным соображениям представляются подходящими. Однако такой метод развертывания теории не является последовательно аксиоматическим.

В математической логике разработан особый метод оформления дедуктивно развертываемых теорий, плодотворность которого была уже неоднократно продемонстрирована в процессе исследования логических проблем математики. В математической логике дедуктивно развертываемые теории оформляются в виде *логико-математических исчислений*. В основе каждого логико-математического исчисления лежат некоторые правила построения групп элементарных знаков, называемых логико-математическими формулами рассматриваемого исчисления. Логико-математические формулы служат для символической записи суждений той математической теории, которая оформляется в виде логико-математического исчисления. Некоторые логико-математические формулы принимаются в качестве исходных формул (аксиом) логико-математического исчисления. Кроме того, точно характеризуются правила логического вывода, позволяющие развертывать процессы построения логико-математических формул, называемых *выводимыми формулами* рассматриваемого исчисления.

Оформление дедуктивно развертываемой математической теории в виде логико-математического исчисления не только уточняет характеризацию теории, но и дает возможность сделать рассматриваемую теорию предметом исследования конструктивной математики, позволяет ставить и во многих случаях успешно решать важные проблемы, относящиеся к свойствам этой теории.

Кроме логико-математических исчислений в математической логике определяются и исследуются также различные *логические исчисления*. В основе каждого логического исчисления лежат некоторые правила построения групп элементарных знаков, называемых *логическими формулами* рассматриваемого исчисления. Некоторые логические формулы принимаются в качестве исходных формул (аксиом) логического исчисления. Кроме того, точно характеризуются правила вывода, позволяющие развертывать процессы построения логических формул, называемых *выводимыми формулами* рассматриваемого исчисления.

Из сказанного следует, что в определенных отношениях логические исчисления сходны с логико-математическими исчислениями. В то же время имеются и существенные различия между ними. В частности, для логических формул характерно наличие в них так называемых *логических переменных* (одного типа или различных типов), отсутствующих в логико-математических формулах. Эта особенность логических формул обусловлена их назначением. Логические формулы каждого логического исчисления трактуются как символические характеристики логических типов логико-математических формул некоторых логико-математических исчислений.

Особую известность приобрело логическое исчисление, называемое в настоящее время *классическим исчислением высказываний*. Это исчисление получило в последнее десятилетие плодотворное применение в электротехнике (в теории релейно-контактных схем).

Исторически разработка логико-математических исчислений протекала в тесной связи с разработкой логических исчислений. Однако в настоящей статье логические исчисления совершенно не рассматриваются, а лишь упоминаются в некоторых замечаниях исторического характера. Поэтому мы не останавливаемся на детальной характеристике их назначения. Заметим лишь, что логические исчисления отражают более абстрактный подход к математическим теориям, чем логико-математические исчисления. В этом смысле теория логико-математических исчислений является более ранней главой современной математической логики, чем теория логических исчислений.

Среди логических принципов, применяемых в математике, особое место занимает *закон исключенного третьего*. Этот логический принцип используется без каких-либо ограничений во всех математических теориях, развиваемых в рамках теоретико-множественного направления в математике. Однако конструктивное понимание логических связей приводит к тому, что закон исключенного третьего не может быть принят в качестве безусловно правомерного логического принципа в рамках конструктивного направления в математике. Поэтому конструктивное направление в математике нуждается в особой теории умозаключений, не включающей в число логических принципов закон исключенного третьего. Развитие такой теории умозаключений протекало в форме разработки особых логических и логико-математических исчислений.

В подавляющем большинстве логико-математических и логических исчислений, рассматриваемых в настоящее время, определенным образом характеризуются формулы, называемые здесь *формулами типа закона исключенного третьего*. Определение логико-арифметических формул типа закона исключенного третьего дается в § 6. О логико математическом или о логическом исчислении говорят, что в нем действует закон исключенного третьего, если каждая формула типа закона исключенного третьего выводима (или, в частности, принимается в качестве аксиомы) в этом исчислении.

Проблемы, возникшие при развитии конструктивного направления в математике, стимулировали разработку таких логических и логико-математических исчислений, в которых не действует закон исключенного третьего. (Заметим, что если в исчислении не действует закон исключенного третьего, то это не исключает выводимости в исчислении *некоторых* формул типа закона исключенного третьего.) Фактически складывавшиеся логико-математические и логические исчисления, в которых не действует закон исключенного третьего, получили

в литературе совершенно неудачное наименование «интуиционистских» логико-математических и логических исчислений. Такое наименование искажает реальный смысл этих исчислений, вскрытый современными исследованиями. Имея в виду современные результаты, вскрывающие научное значение исчислений, о которых здесь идет речь, и следуя уже определившейся тенденции, мы будем называть эти исчисления *конструктивными* логико-математическими и соответственно логическими исчислениями.

Ряд соображений об умозаключениях без использования закона исключенного третьего был высказан Брауэром, Г. Вейлем и С. О. Шатуновским. Однако начало систематической разработки конструктивных логических и логико-математических исчислений было положено исследованиями А. Н. Колмогорова [2, 3], В. И. Гливенко [5, 6], А. Гейтинга [7—9] и Г. Генцена [10, 11].

В § 7 описывается конструктивное логико-математическое исчисление, отражающее один из возможных способов дедуктивного развертывания арифметики. Это исчисление называется в настоящей статье *основным конструктивным логико-арифметическим исчислением* и обозначается через Σ. Д. Нельсон [12], исследовавший исчисление Σ, установил следующий важный результат: исчисление Σ согласуется (в определенном смысле) с конструктивными принципами истолкования логико-арифметических формул. Более точно: *всякая логико-арифметическая формула, выводимая в исчислении Σ, является конструктивно истинной формулой.* Таким образом, исчисление Σ является содержательно обоснованным вариантом дедуктивного построения арифметики в рамках конструктивного направления в математике.

Аксиоматический метод стал применяться в арифметике раньше, чем были сформулированы основные установки конструктивного направления в математике. Поэтому сначала разрабатывались лишь такие варианты дедуктивного построения арифметики, которые включали закон исключенного третьего в качестве логического принципа, применяемого без каких-либо ограничений. Если к аксиомам исчисления Σ присоединить, в качестве дополнительных аксиом, всевозможные логико-арифметические формулы типа закона исключенного третьего, то получится новое логико-математическое исчисление, отражающее один из способов дедуктивного развертывания арифметики в рамках классической математики. Это исчисление описывается в § 8. Оно называется в настоящей статье *основным классическим логико-арифметическим исчислением* и обозначается через Σ^+.

Исчисление Σ^+ уже не согласуется с конструктивными принципами истолкования логико-арифметических формул, так как даже некоторые формулы типа закона исключенного третьего не являются конструктивно истинными. В то же время это исчисление отражает

довольно широкую область фактически сложившейся практики математических умозаключений в области арифметики. Поэтому возникает вопрос: представляет ли какую-либо ценность, с точки зрения конструктивных принципов истолкования арифметических суждений, основное классическое логико-арифметическое исчисление? Постановкой этого вопроса заканчивается первая глава настоящей статьи.

Положительный ответ на сформулированный выше вопрос следует из работы А. Н. Колмогорова [2]. Изложению некоторых результатов, относящихся к этому вопросу, посвящена гл. II. Центральную роль в гл. II (а также в гл. III) играет понятие погружающей операции.

Пусть α — некоторая операция над логико-арифметическими формулами, сопоставляющая конструктивным образом каждой логико-арифметической формуле некоторую логико-арифметическую формулу. Будем говорить, что α является *погружающей операцией*, если для каждой логико-арифметической формулы выполняется следующее условие: формула в том и только в том случае выводима в исчислении Σ^+, когда в результате применения к ней операции α получается формула, выводимая в исчислении Σ. (Это определение нуждается в уточнении. Уточненная формулировка дается в начале гл. II.)

Каждая погружающая операция сопоставляет всякой логико-арифметической формуле, выводимой в исчислении Σ^+, некоторую конструктивно истинную логико-арифметическую формулу. В этом смысле каждая погружающая операция определяет свою особую конструктивную «расшифровку» исчисления Σ^+.

Первая погружающая операция была построена А. Н. Колмогоровым в работе [2]. В дальнейшем другими авторами (в частности, К. Гёделем) были построены некоторые видоизменения операции А. Н. Колмогорова*. Рассмотрение погружающей операции А. Н. Колмогорова и наиболее интересных ее видоизменений составляет содержание гл. II.

Погружающая операция А. Н. Колмогорова и ее видоизменения не обладают одним свойством, наличие которого у той или иной погружающей операции следует считать ее существенным достоинством. В связи с этим возникает проблема о существовании так называемых *правильных погружающих операций*. Решению этой проблемы посвящена гл. III. В этой главе строится несколько правильных погружающих операций, каждая из которых обладает некоторыми специальными свойствами. Построение правильных погружающих операций достигается при помощи некоторых операций над логико-арифмети-

* Термин «видоизменение операции» имеет в настоящей статье определенный точный смысл. Соответствующее определение формулируется в начале гл. II.

ческими формулами, характеризующих частные типы понятия конструктивной истинности, и некоторых операций, характеризующих частные типы понятия конструктивной ложности.

А. А. Марков прочитал рукопись этой работы и сделал ряд весьма существенных замечаний, которые были учтены при окончательном редактировании. Автор приносит глубокую благодарность А. А. Маркову за все указания и за внимание, проявленное к этой работе.

Глава I

ОСНОВНОЕ КОНСТРУКТИВНОЕ ЛОГИКО-АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОСНОВНОЕ КЛАССИЧЕСКОЕ ЛОГИКО-АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Некоторые понятия, относящиеся к группам элементарных знаков

1.1. При разработке той или иной символики, как в конкретных математических теориях, так и в математической логике, некоторые знаки уславливаются считать *элементарными знаками.* Обычно задается список образцов (стандартов) элементарных знаков, каждый из которых по форме отчетливо отличается от всех остальных. При рассмотрении того или иного конкретного знака, не входящего в список стандартов, или констатируют, что он является *элементарным знаком, одинаковым с таким-то* (одним определенным) *стандартом,* или же констатируют, что он не является элементарным знаком (в рамках рассматриваемой символики). Как правило, пользуются следующим критерием: рассматриваемый конкретный знак считается элементарным знаком, одинаковым с таким-то стандартным знаком, если он графически подобен указанному стандартному знаку. В дальнейшем, в конкретных случаях, мы будем основываться именно на этом критерии.

Если некоторый конкретный знак рассматривается в качестве элементарного знака, то его части не причисляются к числу элементарных знаков. В этом смысле элементарные знаки рассматриваются как объекты, не имеющие частей.

Два элементарных знака считаются *одинаковыми,* если они одинаковы с одним и тем же стандартным знаком, и считаются *различными,* если соответствующие им стандартные знаки не совпадают.

1.2. Элементарные знаки составляют графическую основу для построения групп элементарных знаков различных специальных типов.

В дальнейшем будут применяться некоторые понятия и термины, относящиеся к группам элементарных знаков. Эти понятия и термины, а также определенные установки принципиального характера, касаю-

щиеся абстракций, допускаемых при рассмотрении групп элементарных знаков, заимствуются нами (с незначительными отступлениями в отдельных случаях) из работы А. А. Маркова «Теория алгорифмов» [1]. Эта работа А. А. Маркова будет в дальнейшем (при ссылках) обозначаться через [ТА]*.

1.3. Каждый список элементарных знаков называется *алфавитом*.

Каждая прямолинейно расположенная группа элементарных знаков, в которой выделены начальный знак и конечный знак, называется *словом*. Начальный знак и конечный знак могут совпадать и, следовательно, слово может состоять из одного элементарного знака. Если каждый элементарный знак, входящий в слово P, одинаков с некоторым знаком заданного алфавита A, то говорят, что *P есть слово в алфавите A*.

Например, словами в алфавите

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad + \quad \times \quad (\quad)$$

являются следующие группы элементарных знаков:

600989
$(((1 + 344) \times 0) + 44)$
5
$+ 0) 2 \times ((1$
$(+)))$
$)$

Если слова в алфавите

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

трактовать как записи чисел в десятичной системе, знак «+» — как символ операции сложения чисел и знак «×» — как символ операции умножения чисел, то в рамках арифметики лишь три первых слова можно рассматривать как осмысленные символические выражения. Однако при изучении структурных свойств осмысленных символических выражений той или иной математической теории иногда принудительным образом возникает необходимость рассматривать слова, вообще говоря, произвольного вида. Ввиду этого многие дальнейшие определения относятся к произвольным словам.

1.4. Говорят, что *слово P графически равно слову Q*, если при сопоставлении первому слева знаку слова P первого слева знака

---

* Примечание при корректуре. В настоящее время вышла из печати монография А. А. Маркова „Теория алгорифмов" (Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. XLII, 1954). Вопросы, кратко изложенные в [1], получили в этой монографии подробное освещение. Настоящая статья была подготовлена к печати в 1952 г. и поэтому в ней отсутствуют ссылки на упомянутую монографию.

слова Q, второму слева знаку слова P второго слева знака слова Q и т. д. окажется, что 1) для каждого знака слова P найдется соответствующий знак в слове Q, 2) каждый знак слова Q окажется сопоставленным (на определенном шаге процесса) некоторому знаку слова P и 3) сопоставленные друг другу элементарные знаки одинаковы.

Введем знак $\underline{\circ}$ для записи графического равенства слов. В дальнейшем мы будем иметь в виду лишь такие слова, в которые не входит знак $\underline{\circ}$. Если P и Q обозначают некоторые слова, то запись

$$P \underline{\circ} Q$$

будет означать: P графически равно Q.

1.5. Не всякие свойства слов изучаются и принимаются во внимание в математике. Одна из характерных особенностей математического подхода к рассмотрению слов состоит в отвлечении от различий между графически равными словами. В этом смысле можно сказать, что в математике рассматриваются *абстрактные слова*, понимая под абстрактным словом понятие, возникающее в результате отвлечения от различий между графически равными словами. Такого рода отвлечение составляет содержание *абстракции отождествления* в применении к словам (см. [ТА]).

Практически абстракция отождествления проявляется в том, что, рассматривая то или иное конкретное слово, мы трактуем его как полноценного заменителя любого другого графически равного ему слова, а вводя символическое обозначение для того или иного слова, мы трактуем его как обозначение любого слова, графически равного данному слову.

1.6. Слова в заданном алфавите A можно строить, применяя определенные правила конструирования (*порождающие правила*). Элементарные знаки, входящие в алфавит A, обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Порождающие правила для слов в алфавите A можно сформулировать следующим образом:

a_1) α_1 является словом в алфавите A;

. . . . . .

a_n) α_n является словом в алфавите A;

б) если P и Q — какие-либо слова в алфавите A, то результат приписывания справа к какому-либо слову, графически равному слову P, какого-либо слова, графически равного слову Q, является словом в алфавите A.

Буквы P и Q, фигурирующие в пункте (б), могут символизировать, в частности, одно и то же слово.

Пункты (a_1) — (a_n) характеризуют простейшие слова в алфавите A. Пункт (б) следует рассматривать как правило построения слов в алфавите A на основе уже построенных слов в алфавите A.

Результат любого конкретного осуществления порождающего правила (б) применительно к словам P и Q, а также любое слово, графически равное этому результату, называется *соединением слов P и Q* и обозначается через PQ. Если правило (б) применяется последовательно несколько раз таким образом, что на первом этапе процесса это правило применяется к словам P_0 и P_1, а на каждом этапе процесса, начиная со второго,— к результату непосредственно предшествующего этапа и к некоторому слову P_i (i — номер рассматриваемого этапа), то в результате осуществления n этапов процесса (n — какое-либо натуральное число) получается некоторое слово в алфавите A. Это слово, а также любое графически равное ему слово, называется *соединением слов* $P_0, P_1, \ldots, P_n$ и обозначается через $P_0P_1 \cdots P_n$.

Порождающие правила позволяют развертывать процессы построения все новых и новых слов в алфавите A. В математике изучаются не только слова, имеющиеся в наличии в том или ином конкретном случае, но и *возможные слова*, т. е. возможные результаты развертывания процессов конструирования, основывающихся на сформулированных выше порождающих правилах. Следовательно, *слова в алфавите A следует рассматривать, вообще говоря, как объекты, характеризуемые посредством определенных правил конструирования.*

1.7. В связи с различными потребностями, возникающими в конкретных математических теориях и в математической логике, из элементарных знаков заданного алфавита строятся слова тех или иных специальных типов. Для дальнейшего особый интерес представляют те случаи, когда определение слов вводимого в рассмотрение типа осуществляется посредством задания *порождающих правил*. Именно такой характер носят формулируемые в дальнейших параграфах определения чисел, постоянных термов, арифметических переменных, термов, элементарных формул, логико-арифметических формул, а также определения логико-арифметических формул некоторых специальных типов.

Приведем три простых примера. Будем рассматривать алфавит из двух элементарных знаков:

$$\alpha \quad \beta$$

I. *Определение слов типа* $\mathfrak{A}$. а) Слово $\alpha\beta$ есть слово типа $\mathfrak{A}$; б) если P — слово типа $\mathfrak{A}$, то и $\alpha P\beta$ является словом типа $\mathfrak{A}$.

Пункт (а) следует рассматривать как правило, определяющее исходное слово типа $\mathfrak{A}$, а пункт (б) — как правило построения слов типа $\mathfrak{A}$ на основе уже построенных слов типа $\mathfrak{A}$.

Примеры слов типа $\mathfrak{A}$:

$$\alpha\beta,\ \alpha\alpha\beta\beta,\ \alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta,\ \alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta.$$

II. *Определение слов типа* $\mathfrak{D}$. Это определение имеет более сложный характер: порождающие правила для слов типа $\mathfrak{D}$ опираются на порождающие правила для слов двух вспомогательных типов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$.

а) Слово α есть слово типа $\mathfrak{B}$; б) если P — слово типа $\mathfrak{B}$, то и $P\alpha$ является словом типа $\mathfrak{B}$; в) слово β есть слово типа $\mathfrak{C}$; г) если Q — слово типа $\mathfrak{C}$, то и $Q\beta$ является словом типа $\mathfrak{C}$; д) если P — слово типа $\mathfrak{B}$, Q — слово типа $\mathfrak{C}$ и если P и Q имеют одинаковое количество элементарных знаков, то PQ является словом типа $\mathfrak{D}$.

Пункт (а) [пункт (в)] следует рассматривать как правило, определяющее исходное слово типа $\mathfrak{B}$ (типа $\mathfrak{C}$), а пункты (б), (г) и (д) — как правила построения слов вспомогательных типов и основного типа на основе уже построенных слов.

Примеры слов типа $\mathfrak{B}$: α, $\alpha\alpha$, $\alpha\alpha\alpha$, $\alpha\alpha\alpha\alpha$.
» » » $\mathfrak{C}$: β, $\beta\beta$, $\beta\beta\beta$, $\beta\beta\beta\beta$.
» » » $\mathfrak{D}$: $\alpha\beta$, $\alpha\alpha\beta\beta$, $\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta$, $\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta$.

Отметим следующую особенность определения II. Выделяя отдельно порождающие правила (а) и (б), мы получим определение слов вспомогательного типа $\mathfrak{B}$, а выделяя отдельно порождающие правила (в) и (г), мы получим определение слов вспомогательного типа $\mathfrak{C}$.

Не всякое определение, характеризующее как слова основного определяемого типа, так и слова некоторых вспомогательных типов, допускает подобное отделение порождающих правил для слов вспомогательных типов. Иногда порождающие правила для слов вспомогательных типов в свою очередь опираются на такие порождающие правила, результатами применения которых являются (согласно формулировкам правил) слова основного определяемого типа. Приведем пример такого определения.

III. *Определение слов типа* $\mathfrak{F}$. Это определение характеризует как слова типа $\mathfrak{F}$, так и слова вспомогательного типа $\mathfrak{E}$.

(а) Слово $\alpha\beta$ есть слово типа $\mathfrak{F}$; (б) если P — слово типа $\mathfrak{F}$, то $P\beta$ является словом типа $\mathfrak{E}$; (в) если Q — слово типа $\mathfrak{E}$, то αQ является словом типа $\mathfrak{F}$.

Примеры слов типа $\mathfrak{F}$: $\alpha\beta$, $\alpha\alpha\beta\beta$, $\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta$, $\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta$.
» » » $\mathfrak{E}$: $\alpha\beta\beta$, $\alpha\alpha\beta\beta\beta$, $\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta$, $\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta\beta$.

Заметим, что каждое слово типа $\mathfrak{A}$ является словом типа $\mathfrak{D}$ и каждое слово типа $\mathfrak{D}$ является словом типа $\mathfrak{A}$. Такие же утверждения справедливы для слов типа $\mathfrak{D}$ и типа $\mathfrak{F}$, а также для слов типа $\mathfrak{A}$ и типа $\mathfrak{F}$.

1.8. Определение слов того или иного типа посредством задания порождающих правил называется *индуктивным определением*. Эта описательная характеристика индуктивных определений нуждается в уточнении, к которому мы и переходим. Необходимо заметить, что

даваемое ниже уточнение не претендует на охват всех определений, с которыми в математической практике связывается термин «индуктивное определение». Оно должно лишь обслужить запросы дальнейшего изложения.

В простейших случаях в индуктивном определении фигурирует наименование одного типа слов, а в более сложных случаях фигурируют наименования нескольких типов слов. Если в определении фигурируют наименования нескольких типов слов, то часто один из этих типов выделяется в качестве *основного* определяемого типа, а остальные типы рассматриваются как *вспомогательные,* хотя определение в целом характеризует как слова основного типа, так и слова вспомогательных типов. Если в индуктивном определении выделен некоторый тип слов в качестве основного типа, то такое определение будем называть *индуктивным определением с выделенным основным типом слов.* Если в индуктивном определении фигурирует наименование только одного типа слов, то такое определение тривиальным образом является индуктивным определением с выделенным основным типом слов. Нетривиальными примерами индуктивных определений с выделенным основным типом слов являются определения II и III из раздела 1.7.

Индуктивное определение обычно слагается из конечного числа *элементарных порождающих правил* и конечного числа *индуктивных порождающих правил.* Охарактеризуем эти правила, обозначая через $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ наименования типов слов, встречающиеся в рассматриваемом индуктивном определении.

Элементарными порождающими правилами называются правила вида:

«Слово U является словом типа $\mathfrak{K}_j$»,

где U — некоторое конкретное слово в заданном алфавите. Слово U называется *исходным словом рассматриваемого индуктивного определения.*

Индуктивными порождающими правилами называются правила вида:

«Если P_1 — слово типа $\mathfrak{K}_{i_1}, \ldots, P_r$ — слово типа $\mathfrak{K}_{i_r}$ и если слова $P_1, \ldots, P_r$ обладают такими-то свойствами (последнее условие может отсутствовать), то слово, получающееся в результате таких-то действий над $P_1, \ldots, P_r$, является словом типа $\mathfrak{K}_j$».

В последней формулировке имеются два неопределенных пункта: «слова $P_1, \ldots, P_r$ обладают такими-то свойствами» и «слово, получающееся в результате таких-то действий над словами $P_1, \ldots, P_r$». Уточнение этих пунктов может быть произведено с помощью понятия нормального алгорифма (см. [ТА]). Однако в простейших случаях эти пункты формулируются без привлечения понятия нормального алгорифма.

Поясним введенные понятия на примерах определений, рассмотренных в разделе 1.7. Пункт (а) определения I, пункты (а) и (в) определения

II и пункт (а) определения III представляют собой элементарные порождающие правила, а остальные пункты определений I, II, III — индуктивные порождающие правила. Исходными словами являются: в определении I — слово $\alpha\beta$, в определении II — слова α и β, в определении III — слово $\alpha\beta$.

Применение элементарного порождающего правила состоит в написании определенного исходного слова. Применение индуктивного порождающего правила возможно лишь при наличии некоторых слов, которые, в соответствии с формулировкой правила, могут играть роль исходных данных для применения правила. При этом исходные данные должны быть расположены в определенном порядке. Применение индуктивного порождающего правила состоит в построении нового слова по исходным данным. В процессе построения этого нового слова в соответствии с правилом могут возникать промежуточные слова, но только окончательное слово считается результатом применения данного индуктивного порождающего правила к заданным исходным данным.

При рассмотрении того или иного индуктивного определения мы будем называть *собственным порождающим правилом для слов типа* $\mathfrak{K}$ (буква $\mathfrak{K}$ символизирует наименование некоторого типа слов, фигурирующего в определении) каждое порождающее правило, как элементарное, так и индуктивное, результатами применения которого являются (на основании формулировки рассматриваемого правила) слова типа $\mathfrak{K}$.

При рассмотрении того или иного индуктивного определения с выделенным основным типом слов мы будем называть *основным порождающим правилом данного определения* каждое собственное порождающее правило для слов основного типа.

Проиллюстрируем введенные понятия на примерах I, II и III из раздела 1.7.

В определении I каждое порождающее правило является собственным порождающим правилом для слов типа $\mathfrak{A}$ и одновременно основным порождающим правилом определения I.

В определении II собственными порождающими правилами для слов типа $\mathfrak{B}$ (для слов типа $\mathfrak{C}$) являются правила (а) и (б) [соответственно правила (в) и (г)]. Правило (д) является единственным собственным порождающим правилом для слов типа $\mathfrak{D}$ и одновременно единственным основным порождающим правилом определения II.

В определении III собственными порождающими правилами для слов типа $\mathfrak{F}$ являются правила (а) и (в). Эти же правила являются основными порождающими правилами определения III. Правило (б) является единственным собственным порождающим правилом для слов типа $\mathfrak{E}$.

1.9. Порождающие правила служат основой развертывания *порождающих процессов*, состоящих в последовательном применении в

том или ином порядке порождающих правил. Каждый порождающий процесс расчленяется на этапы. Каждый этап процесса состоит в применении одного из порождающих правил. Если этап процесса осуществлен посредством применения некоторого собственного порождающего правила для слов типа $\mathfrak{K}$ (буква $\mathfrak{K}$ символизирует наименование некоторого типа слов, фигурирующего в определении), то такой этап мы будем называть *собственным по отношению к словам типа $\mathfrak{K}$ этапом процесса.*

Результатом осуществления того или иного этапа порождающего процесса называется, во-первых, то конкретное слово, которое фактически получено в результате применения соответствующего порождающего правила и, во-вторых, любое слово в рассматриваемом алфавите, графически равное полученному конкретному слову. Такая трактовка результатов осуществления этапов порождающего процесса представляет собой проявление абстракции отождествления (см. раздел 1.5).

При рассмотрении того или иного порождающего процесса, основывающегося на индуктивном определении с выделенным основным типом слов, нас будут интересовать главным образом собственные по отношению к словам основного типа этапы процесса. Эти этапы будут называться в дальнейшем *основными этапами порождающего процесса.* Каждый результат осуществления какого-либо основного этапа порождающего процесса будет называться *основным результатом развертывания порождающего процесса.*

Развертывание порождающего процесса, основывающегося на том или ином индуктивном определении, может протекать или в форме деятельности человека, или в форме работы некоторого механизма, или в форме сочетания работы людей и механизмов.

Приведем некоторые примеры, иллюстрирующие введенные понятия.

На основании определения II из раздела 1.7 можно осуществить, например, следующий порождающий процесс:

1-й этап. Применяем правило (а). Получаем слово α.

2-й этап. Применяем правило (в). Получаем слово β.

3-й этап. Применяем правило (г) к результату 2-го этапа. Получаем слово $\beta\beta$.

4-й этап. Применяем правило (г) к результату 3-го этапа. Получаем слово $\beta\beta\beta$.

5-й этап. Применяем правило (б) к результату 1-го этапа. Получаем слово $\alpha\alpha$.

6-й этап. Применяем правило (д) к результатам 5-го и 3-го этапов. Получаем слово $\alpha\alpha\beta\beta$.

7-й этап. Применяем правило (б) к результату 5-го этапа. Получаем слово $\alpha\alpha\alpha$.

8-й этап. Применяем правило (д) к результатам 7-го и 4-го этапов. Получаем слово $\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta$.

Собственными по отношению к словам типа $\mathfrak{B}$ (к словам типа $\mathfrak{C}$) этапами этого процесса являются 1-й, 5-й и 7-й этапы (соответственно 2-й, 3-й и 4-й этапы). Собственными по отношению к словам типа $\mathfrak{D}$ этапами процесса и одновременно основными этапами этого процесса являются 6-й и 8-й этапы, а основными результатами развертывания этого процесса являются слова $\alpha\alpha\beta\beta$ и $\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta$.

Описанный порождающий процесс имеет конечное число этапов. Однако можно задать предписания, определяющие потенциально неограниченное развертывание порождающих процессов, основывающихся на определении II. Приведем пример такого предписания.

Предписание Ξ. Первый этап состоит в применении правила (а), второй—в применении правила (в), третий—в применении правила (д) к результатам первого и второго этапов. Каждый очередной этап, начиная с четвертого, предопределяется осуществленными перед ним этапами порождающего процесса и характеризуется следующим образом. Среди уже осуществленных этапов процесса, состоящих в применении правил (а) или (б) [правил (в) или (г)], выделяется последний этап и его результат мы назовем *крайним словом типа* $\mathfrak{B}$ (соответственно *крайним словом типа* $\mathfrak{C}$). Далее рассматривается последний из уже осуществленных этапов развертывания процесса и выявляется то порождающее правило, которое применено на этом последнем этапе. Если применено правило (д), то очередной этап состоит в применении правила (б) к крайнему слову типа $\mathfrak{B}$; если применено правило (б), то очередной этап состоит в применении правила (г) к крайнему слову типа $\mathfrak{C}$; наконец, если применено правило (г), то очередной этап состоит в применении правила (д) к крайнему слову типа $\mathfrak{B}$ и крайнему слову типа $\mathfrak{C}$.

Легко убедиться в том, что основными этапами порождающего процесса, развертывающегося согласно этому предписанию, являются те и только те этапы, порядковые номера которых делятся на 3. Основными результатами развертывания порождающего процесса являются слова

$$\alpha\beta,\ \alpha\alpha\beta\beta,\ \alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta,\ \alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta, \ldots$$

1.10. Приводя выше примеры индуктивных определений (см. раздел 1.7), мы ограничивались в каждом примере перечислением порождающих правил и выделением основного типа слов. Однако этим не исчерпывается полная формулировка индуктивного определения.

Полная формулировка того или иного индуктивного определения слагается из перечисления порождающих правил, указания основного типа слов (в том случае, если формулируется индуктивное определение с выделенным основным типом слов) и ряда формулировок следующего вида:

Словами типа $\mathfrak{K}$ (буква $\mathfrak{K}$ символизирует наименование некоторого типа слов, фигурирующего в определении) *называются результаты осу-*

ществления собственных по отношению к словам типа $\mathfrak{K}$ этапов развертывания порождающих процессов, основывающихся на заданных порождающих правилах.

Количество таких формулировок равно количеству наименований типов слов, фигурирующих в совокупности порождающих правил.

Формулировки указанного вида обычно не включаются в состав индуктивных определений, но лишь подразумеваются, и мы в дальнейшем также не будем удлинять индуктивных определений включением таких формулировок. Однако все сказанное в этом разделе необходимо иметь в виду как при рассмотрении определений I, II и III из раздела 1.7, так и при рассмотрении всех индуктивных определений, встречающихся в дальнейшем изложении. Заметим, что именно полные формулировки индуктивных определений характеризуют слова вводимых в рассмотрение типов и являются основаниями метода математической индукции, широко практикуемого в математике при доказательствах различных свойств слов.

Если рассматривается индуктивное определение с выделенным основным типом слов, то, на основании сказанного выше, слова основного типа характеризуются как основные результаты развертывания порождающих процессов, основывающихся на заданных порождающих правилах.

1.11. Важную роль в некоторых вопросах играют *алгорифмически развертывающиеся порождающие процессы,* т. е. такие порождающие процессы, для которых последовательность чередования порождающих правил определяется некоторым точным предписанием, не оставляющим места произволу для порядка применения порождающих правил. Уточнение понятия алгорифмически развертывающегося порождающего процесса может быть осуществлено на основе понятия нормального алгорифма, введенного А. А. Марковым (см. [ТА]). Мы ограничимся здесь приведенной описательной характеристикой понятия алгорифмически развертывающегося порождающего процесса.

В дальнейшем, для краткости, мы будем вместо слов «алгорифмически развертывающийся порождающий процесс» писать: а. р. п. процесс.

Примером а. р. п. процесса может служить порождающий процесс, развертывающийся на основании предписания Ξ из раздела 1.9.

1.12. Алгорифмически развертывающийся порождающий процесс, основывающийся на заданном индуктивном определении, называется *универсальным а. р. п. процессом для слов типа* $\mathfrak{K}$ (буква $\mathfrak{K}$ символизирует наименование некоторого типа слов, фигурирующего в индуктивном определении), если каждое слово типа $\mathfrak{K}$ является результатом осуществления некоторого собственного по отношению к словам типа $\mathfrak{K}$ этапа развертывания рассматриваемого процесса.

А. р. п. процесс, основывающийся на заданном индуктивном определении, называется *универсальным а. р. п. процессом для рассматриваемого индуктивного определения*, если этот а. р. п. процесс одновременно является универсальным а. р. п. процессом для слов типа $\mathfrak{K}_1, \ldots$, для слов типа $\mathfrak{K}_r$, где $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_r$—полный список наименований типов слов, фигурирующих в индуктивном определении.

Например, а. р. п. процесс, развертывающийся на основе предписания Ξ из раздела 1.9, является универсальным а. р. п. процессом для определения II. Без труда задаются правила развертывания универсальных а. р. п. процессов для определений I и III раздела 1.7.

Вообще можно указать определенный метод, связывающий с каждым индуктивным определением некоторое предписание, задающее правило развертывания универсального а. р. п. процесса для рассматриваемого индуктивного определения.

1.13. Алгорифмически развертывающийся порождающий процесс называется *потенциально неограниченным*, если закон его развертывания таков, что после осуществления каждого этапа имеются исходные данные для продолжения процесса и в результате продолжения через конечное число этапов получается слово, графически отличное от результатов осуществления всех предшествующих этапов процесса.

Примером потенциально неограниченного а. р. п. процесса является процесс, развертывающийся на основе предписания Ξ из раздела 1.9.

Индуктивное определение называется *потенциально неограниченным*, если на основе этого определения может быть задано правило развертывания некоторого потенциально неограниченного а. р. п. процесса.

Легко убедиться в том, что индуктивные определения I, II и III из раздела 1.7 являются потенциально неограниченными определениями. Все индуктивные определения, встречающиеся в дальнейшем изложении, также являются потенциально неограниченными определениями.

1.14. При осуществлении некоторых конструктивных операций над словами (например, операции соединения слов) могут возникать материальные препятствия (например, недостаток места, материала и т. п.). В частности, такие препятствия обязательно возникают на достаточно далеких этапах развертывания каждого конкретного потенциально неограниченного а. р. п. процесса. Но при математическом рассмотрении операций над словами принимается определенная абстракция — *абстракция потенциальной осуществимости* (см. [ТА]), состоящая в отвлечении от реальных границ выполнимости материально осуществляемых операций над словами. В частности, *каждый потенциально неограниченный а. р. п. процесс мыслится неограниченно продолжимым.*

Ни один конкретный потенциально неограниченный а. р. п. процесс не завершается в конечный промежуток времени. В связи с этим на

каждом этапе развертывания такого процесса следует различать *уже выявленные результаты развертывания процесса*, характеризующиеся некоторой конечной совокупностью конкретных слов, и *ожидаемые результаты дальнейшего развертывания процесса*. Таким образом, любое потенциально неограниченное индуктивное определение следует рассматривать как конструктивное определение *потенциально осуществимых слов* некоторых типов (см. [ТА]).

Слова того или иного типа, охарактеризованного потенциально неограниченным индуктивным определением, иногда не оказываются осуществленными все одновременно и все сразу не могут быть подвергнуты экспериментальному рассмотрению. Поэтому основой для установления свойств слов, характеризуемых некоторым индуктивным определением, является, вообще говоря, список порождающих правил, а основным методом доказательства свойств слов — метод математической индукции. Последнее замечание не следует, однако, трактовать слишком широко. Например, чтобы обосновать суждение о существовании слова, обладающего некоторым свойством, часто бывает достаточно построить некоторое слово и непосредственно сопоставить его с теми или иными заданными словами.

1.15. При теоретическом рассмотрении слов и групп элементарных знаков иного рода (например, целочисленных матриц) в дополнение к абстракции потенциальной осуществимости иногда привлекается еще одна абстракция — *абстракция актуальной бесконечности*. В применении к словам абстракция актуальной бесконечности состоит в том, что каждый потенциально неограниченный а. р. п. процесс *мыслится завершенным* и в результате этого акта воображения в связи с каждым индуктивным определением в мышлении возникают новые понятия:

«множество всех слов типа $\mathfrak{K}_1$», . . . , «множество всех слов типа $\mathfrak{K}_n$», где $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ — полный список наименований типов слов, фигурирующих в рассматриваемом индуктивном определении.

Привлечение абстракции актуальной бесконечности при рассмотрении слов выводит за рамки *конструктивного направления в математике*, одной из важнейших черт которого является *привлечение абстракции потенциальной осуществимости и исключение абстракции актуальной бесконечности*. Исключение последней абстракции накладывает существенный отпечаток на характер логических связей, используемых для образования суждений о словах. Описание и истолкование основных логических связей, применяемых в конструктивной арифметике, дается в § 4.

Допуская абстракцию потенциальной осуществимости и исключая абстракцию актуальной бесконечности, мы не затушевываем, а, наоборот, подчеркиваем тот факт, что предметы нашего исследования характеризуются как *результаты развертывания порождающих процессов* и выявляем необходимость специального истолкования

логических связей для этих особых, не учитываемых классической логикой условий; одновременно мы существенно ограничиваем роль актов чистого воображения при мысленном рассмотрении слов.

В настоящей статье, при рассмотрении слов различных типов, мы всегда будем ограничиваться рамками конструктивного направления в математике.

§ 2. Числа и термы

2.1: *Алфавитом чисел* называется список, состоящий из двух элементарных знаков:

0 (нуль) ′ (штрих).

Числа характеризуются следующим индуктивным определением: а) 0 есть число; б) если N — число, то и слово N' является числом.

Полное определение чисел формулируется следующим образом.

Числами называются* результаты развертывания порождающих процессов, основывающихся на порождающих правилах (а) и (б).

Универсальный а. р. п. процесс для сформулированного индуктивного определения может быть задан следующим предписанием: 1-й этап процесса состоит в применении порождающего правила (а); каждый этап процесса, начиная со 2-го, состоит в применении правила (б) к результату непосредственно предшествующего этапа. При развертывании этого порождающего процесса последовательно получаются числа:

$$0,\ 0',\ 0'',\ 0''',\ 0'''',\ 0''''',\ldots$$

Каждый этап процесса является основным этапом.

Каждое число является словом в алфавите чисел. Иногда мы будем числа $0'$, $0''$, $0'''$, $0''''$,... обозначать соответственно посредством общеупотребительных знаков 1, 2, 3, 4,... Эти знаки всегда будут рассматриваться лишь как *обозначения чисел*.

В дальнейшем мы будем рассматривать не только числа, но и числовые системы.

N-членные числовые системы (буква N обозначает какое-либо число, большее нуля) характеризуются следующим индуктивным определением:

Если $K_1,\ldots,K_N$ — какие-либо числа (список состоит из N чисел), то слово $K_1\cdots K_N$ является N-членной числовой системой.

К сформулированному порождающему правилу должны быть присоединены порождающие правила для чисел.

---

* В настоящей статье термин «число» будет употребляться только в определяемом здесь смысле слова.

Трехчленными числовыми системами являются, например, следующие слова:

$$000, \quad 0''''00'', \quad 0'0'''0'''.$$

Каждое число является, согласно сформулированному определению, одночленной числовой системой.

Двухчленные числовые системы мы будем иногда называть *числовыми парами.*

2.2. *Алфавитом постоянных термов* называется следующий список элементарных знаков:

$$0 \quad ' \quad + \quad \times \quad (\quad)$$

Постоянные термы характеризуются следующим индуктивным определением:

а) 0 есть постоянный терм; б) если T — постоянный терм, то слово T' также является постоянным термом; в) если T и S — постоянные термы, то слово $(T+S)$ является постоянным термом; г) если T и S — постоянные термы, то слово $(T \times S)$ является постоянным термом.

Постоянными термами являются, например, следующие слова:

$$0'''', \quad (0 \times 0'')''', \quad ((0''+0'')''' \times (0'+(0+0'''')')).$$

Очевидно, что каждое число является постоянным термом.

Можно доказать, что каждый постоянный терм, отличный от постоянного терма 0, единственным образом представим в одном и только в одном из следующих трех видов:

$$T', \ (T+S), \ (T \times S),$$

где T и S обозначают некоторые постоянные термы.

Элементарным преобразованием постоянного терма T, не являющегося числом, называется построение исходя из постоянного терма T нового постоянного терма, совершаемое согласно следующему предписанию. В постоянном терме T выделяются все части вида $(M+N)$ и $(M \times N)$, где M и N — какие-либо числа. Каждая выделенная часть вида $(M+N)$ заменяется числом, равным результату применения алгорифма сложения к числам M и N, а каждая выделенная часть вида $(M \times N)$ заменяется числом, равным результату применения алгорифма умножения к числам M и N. Можно доказать, что в результате выполнения указанных замещений получится постоянный терм. Этот постоянный терм называется *результатом применения элементарного преобразования к постоянному терму* T.

Значением постоянного терма T называется результат завершающего этапа процесса, определяемого следующим предписанием. Первый этап состоит в написании постоянного терма T. Каждый этап, начиная со второго, состоит в применении элементарного преобразования к результату непосредственно предшествующего этапа. Завершающим этапом считается тот, к результату которого невозможно применить

элементарное преобразование. Завершающий этап обязательно наступит, так как количество левых скобок, входящих в результат элементарного преобразования какого-либо постоянного терма, по крайней мере на единицу меньше количества левых скобок, входящих в преобразуемый терм. Результат завершающего этапа описанного процесса представляет собой число, являющееся (по определению) значением постоянного терма T.

Значение постоянного терма T будет обозначаться через $\mathfrak{z}(T)$.

2.3. *Алфавитом арифметических переменных* называется список, состоящий из следующих трех элементарных знаков:

$$t \quad (\quad)$$

Арифметические переменные характеризуются следующим индуктивным определением:

а) слово (t) является арифметической переменной; б) если X — арифметическая переменная, то слово, получающееся заменой крайнего правого элементарного знака, входящего в X, словом t), также является арифметической переменной.

Универсальный а. р. п. процесс для этого индуктивного определения может быть задан следующим предписанием: первый этап процесса состоит в применении порождающего правила (а); каждый этап процесса, начиная со второго, состоит в применении правила (б) к результату непосредственно предшествующего этапа. При развертывании этого порождающего процесса последовательно получаются арифметические переменные:

$$(t),\ (tt),\ (ttt),\ (tttt),\ (ttttt), \ldots$$

Сформулированное выше определение арифметических переменных предложено А. А. Марковым.

В дальнейшем мы будем вместо термина «арифметическая переменная» применять более короткий термин «переменная».

2.4. *Алфавитом термов* называется следующий список элементарных знаков:

$$0 \quad ' \quad + \quad \times \quad (\quad) \quad t$$

Термы характеризуются следующим индуктивным определением (формулируются лишь основные порождающие правила):

а) 0 есть терм; б) всякая переменная является термом*; в) если T —терм, то слово T' также является термом; г) если T и S — термы,

---

* Более точно пункт (б) формулируется следующим образом: если T — какая-либо переменная, то T является термом.

то слово $(T+S)$ является термом; д) если T и S — термы, то слово $(T\times S)$ является термом.

К порождающим правилам (а) — (д) должны быть присоединены еще порождающие правила для переменных.

Термами являются, например, следующие слова:

$$((0'+0'''')\times 0)', \quad ((t)+(ttt)), \quad ((((tt)'''\times 0)+(tttt))'+0'''')''.$$

Очевидно, что каждый постоянный терм является термом. Терм T в том и только в том случае является постоянным термом, когда в T не входит буква t.

Можно доказать, что каждый терм, отличный от терма 0 и не являющийся арифметической переменной, единственным образом представим в одном и только в одном из следующих трех видов:

$$T', \quad (T+S), \quad (T\times S),$$

где T и S обозначают некоторые термы.

§ 3. Логико-арифметические формулы

3.1. *Алфавитом элементарных формул* называется следующий список элементарных знаков:

$$0 \quad ' \quad + \quad \times \quad (\quad) \quad t \quad =$$

Постоянные элементарные формулы характеризуются единственным основным порождающим правилом:

Если T и S — постоянные термы, то слово $(T=S)$ является постоянной элементарной формулой.

К этому порождающему правилу должны быть присоединены порождающие правила для постоянных термов.

Элементарные формулы характеризуются единственным основным порождающим правилом:

Если T и S — термы, то слово $(T=S)$ является элементарной формулой.

К этому порождающему правилу должны быть присоединены порождающие правила для термов.

Элементарными формулами являются, например, следующие слова:

$$(0=((0'+0''')\times 0'')'''), \quad ((((tt)'+0)\times(t))=((0+0)\times 0''')').$$

При этом первое слово является постоянной элементарной формулой.

Очевидно, что каждая постоянная элементарная формула является элементарной формулой.

3.2. *Алфавитом логико-арифметических формул* называется следующий список элементарных знаков:

$$0 \quad ' \quad + \quad \times \quad (\quad) \quad t \quad = \quad \& \quad \vee \quad \supset \quad \neg \quad \forall \quad \exists$$

Последние шесть знаков служат для обозначения логических связей и имеют следующие наименования: & — знак конъюнкции, $\vee$ — знак дизъюнкции, $\supset$ — знак импликации, $\neg$ — знак отрицания, $\forall$ — знак всеобщности (квантор всеобщности), $\exists$ — знак существования (квантор существования).

Логико-арифметические формулы характеризуются следующим индуктивным определением (формулируются лишь основные порождающие правила):

а) всякая элементарная формула является логико-арифметической формулой; б) если P и Q — логико-арифметические формулы, то слова $(P \& Q)$, $(P \vee Q)$ и $(P \supset Q)$ также являются логико-арифметическими формулами (этот пункт объединяет три порождающих правила); в) если P — логико-арифметическая формула, то слово $\neg P$ также является логико-арифметической формулой; г) если P — логико-арифметическая формула и X — переменная, то слова $\forall XP$ и $\exists XP$ также являются логико-арифметическими формулами (этот пункт объединяет два порождающих правила).

К порождающим правилам (а) — (г) должны быть присоединены порождающие правила для элементарных формул.

В дальнейшем мы будем вместо термина «логико-арифметическая формула» часто применять более короткий термин «формула».

3.3 Можно доказать, что каждая формула R, не являющаяся элементарной формулой, единственным образом представима в одном и только в одном из следующих шести видов:

$$(P \& Q), \quad (P \vee Q), \quad (P \supset Q), \quad \neg P, \quad \forall XP, \quad \exists XP$$

где P и Q обозначают некоторые формулы, а X — некоторую переменную. Каждую из формул P, Q в первых трех случаях и формулу P в остальных случаях будем называть *графическим звеном формулы* R.

3.4. Формулы вида $((P \supset Q) \& (Q \supset P))$ будем сокращенно записывать так:

$$(P \equiv Q).$$

Условимся также при обособленной записи термов и формул (т. е. в тех случаях, когда рассматриваемые термы и формулы не являются составными частями других термов и формул), имеющих одновременно в качестве крайнего левого знака левую скобку и в качестве крайнего правого знака правую скобку, опускать (где это окажется целесообразным) эти крайние скобки. Последнее соглашение распространим также на записи вида $(P \equiv Q)$.

3.5. В дальнейшем нам придется неоднократно рассматривать формулы определенного специального типа — так называемые квазиэлементарные формулы. *Квазиэлементарные формулы* характеризуются следующим индуктивным определением:

а) всякая элементарная формула является квазиэлементарной формулой; б) если P и Q — квазиэлементарные формулы, то слова $(P \& Q)$, $(P \vee Q)$ и $(P \supset Q)$ также являются квазиэлементарными формулами (этот пункт объединяет три порождающих правила); в) если P — квазиэлементарная формула, то слово $\neg P$ также является квазиэлементарной формулой.

К порождающим правилам (а) — (в) должны быть присоединены порождающие правила для элементарных формул.

Формула R в том и только в том случае является квазиэлементарной, когда в R не входят знаки $\forall$ и $\exists$.

3.6. Говорят, что слово C, состоящее из знаков логико-арифметического алфавита, *входит в формулу* R, если R представима в виде BCD, где каждая из букв B и D обозначает некоторое слово в логико-арифметическом алфавите или символизирует «пустое слово». Может оказаться, что формула R не единственным образом (при заданном C) представима в виде BCD. Каждое представление формулы R в виде BCD определяет некоторое *вхождение слова* C *в формулу* R. Мы ограничимся здесь этой описательной характеристикой понятия вхождения слова в формулу. Точное определение этого понятия дается в работе А. А. Маркова [ТА].

Важную роль в теории логико-арифметических формул играет классификация вхождений переменных в формулу на *свободные вхождения* и *связанные вхождения*.

Пусть R — некоторая формула и X — некоторая переменная. Если R — элементарная формула, то каждое вхождение X в R считается свободным вхождением. Если R представима в виде $\forall XP$ или в виде $\exists XP$, то каждое вхождение X в R считается связанным вхождением. Если R представима в одном из видов

$$(P \& Q), \quad (P \vee Q), \quad (P \supset Q), \quad \neg P, \quad \forall YP, \quad \exists YP,$$

где P и Q обозначают некоторые формулы и Y — некоторую переменную, отличную от X, то свободными (связанными) вхождениями X в R называются вхождения, происходящие от свободных соответственно, от связанных) вхождений X в графические звенья формулы R.

Если все вхождения всех переменных в R являются связанными вхождениями, то R называется *постоянной формулой*. В частности, всякая формула, вообще не содержащая переменных, является постоянной формулой.

Говорят, что *переменная* X *свободно входит в формулу* R, если имеется хотя бы одно свободное вхождение X в R.

Нормальным списком переменных для формулы R будем называть полный список переменных, свободно входящих в R и выписанных без повторений в том порядке, который устанавливается первыми

(при рассмотрении формулы слева направо) свободными вхождениями этих переменных в формулу R.

Если список переменных

$$X_1, \ldots, X_n$$

является нормальным списком переменных для формулы R, то будем говорить, что R является *формулой типа* $[X_1,\ldots,X_n]$.

3.7. Постоянные формулы трактуются как символические записи арифметических суждений. Формулы, содержащие свободные вхождения переменных, применяются, во-первых, при определении различных понятий и отношений — для символической записи условий, характеризующих вводимые понятия и отношения, и, во-вторых, для символической записи суждений определенного вида.

Пусть R — формула типа $[X_1, \ldots, X_n]$, где $X_1, \ldots, X_n$ — список попарно различных переменных. Рассматривая формулу R как символическую запись суждения, уславливаются считать, что она выражает то же суждение, что и постоянная формула $\forall X_1 \ldots \forall X_n R$.

Благодаря использованию для записи суждений, наряду с постоянными формулами, также и формул, содержащих свободные вхождения переменных, удается сделать довольно простым оформление различных дедуктивных (аксиоматических) построений арифметики в виде логико-арифметических исчислений. Именно это обстоятельство обусловило применение в математической логике для символической записи суждений, наряду с постоянными формулами, также и формул, содержащих свободные вхождения переменных.

3.8. Приведем теперь несколько примеров, иллюстрирующих введенные в разделе 3.6 понятия. В этих примерах буквы X, Y, Z, U и V обозначают соответственно переменные:

$$(t),\ (tt),\ (ttt),\ (tttt),\ (ttttt).$$

Пример 1. Обозначим через R_1 формулу

$$\exists X((X \times 0''') = Z).$$

Оба вхождения переменной X в R_1 являются связанными вхождениями, а вхождение переменной Z в R_1 — свободное. R_1 является формулой типа $[Z]$. Эта формула, рассматриваемая как запись условия, характеризует понятие «Z делится на 3». Эта же формула, рассматриваемая как запись суждения, выражает то же суждение, что и постоянная формула

$$\forall Z \exists X((X \times 0''') = Z).$$

Последнюю формулу можно прочитать следующим образом:

«Каково бы ни было Z, Z делится на 3».

Пример 2. Обозначим через R_2 формулу

$$\exists Z((Z \times V) = Y).$$

Оба вхождения переменной Z в R_2 являются связанными вхождениями. Вхождения переменных V и Y в R_2 являются свободными вхождениями. Нормальный список переменных для формулы R_2 имеет вид: V, Y. Следовательно, R_2 является формулой типа $[V, Y]$. Условие, выражаемое формулой R_2, характеризует два двухчленных отношения: «Y делится на V» и «V является делителем Y».

Пример 3. Обозначим через R_3 формулу

$$((Y + V) = Z).$$

Вхождения переменных Y, V и Z в формулу R_3 являются свободными вхождениями. Нормальный список переменных для формулы R_3 имеет вид: Y, V, Z. Следовательно, R_3 является формулой типа $[Y, V, Z]$. Условие, выражаемое формулой R_3, характеризует шесть трехчленных отношений, из которых мы отметим следующие два:

«Z является суммой Y и V»,

«Y является разностью Z и V».

Пример 4. Обозначим через R_4 формулу

$$(\exists X((X + 0'''') = V) \,\&\, \neg \exists Z((Z \times V) = Y)).$$

Все вхождения переменных X и Z в формулу R являются связанными вхождениями, а все вхождения переменных V и Y являются свободными вхождениями. Нормальный список переменных для формулы R_4 имеет вид: V, Y. Следовательно, R_4 является формулой типа $[V, Y]$. Формулу R_4 можно прочитать следующим образом:

«V больше трех и Y не делится на V».

Условие, выражаемое формулой R_4, характеризует два двухчленных отношения. Формула R_4, рассматриваемая как запись суждения, выражает то же суждение, что и постоянная формула

$$\forall V \forall Y(\exists X((X + 0'''') = V) \,\&\, \neg \exists Z((Z \times V) = Y)).$$

Пример 5. Обозначим через R_5 формулу

$$(((\exists X((X \times 0''') = Z) \,\&\, \exists Y((Y \times 0''') = V) \,\&\, ((Y + V) = Z)) \supset$$
$$\supset \exists U((U \times 0''')) = Y)).$$

Все вхождения переменных X и U в формулу R_5 являются связанными вхождениями, а все вхождения переменных Z и V являются свободными вхождениями. Первые два вхождения Y в R_5 являются связанными вхождениями, а последние два — свободными вхожде-

ниями. Таким образом, в R_5 свободно входят переменные Z, V, Y. Нормальный список переменных для формулы R_5 имеет вид: Z, V, Y. Следовательно, R_5 является формулой типа $[Z, V, Y]$.

Формулу R_5 можно прочитать следующим образом:

«Если Z делится на 3 и V делится на 3 и Y является разностью Z и V, то Y делится на 3».

Формулу R_5 можно рассматривать как один из вариантов символической записи суждения:

«Каковы бы ни были Z, V и Y, если Z делится на 3 и V делится на 3 и Y является разностью Z и V, то Y делится на 3».

Пример 6. Обозначим через R_6 формулу

$$\forall X \exists Y (\exists Z (Y = (X + Z')) \& \exists V ((V \times 0'') = Y)).$$

Все вхождения переменных в формулу R_6 являются связанными вхождениями. R_6 является постоянной формулой. Нормальный список переменных для этой формулы пустой.

Формула R_6 представляет собой один из вариантов символической записи суждения:

«Каково бы ни было X, существует Y такое, что Y больше X и Y делится на 3».

3.9. В дальнейшем изложении неоднократно будут применяться некоторые однотипные операции над формулами — *операции подстановки термов вместо свободных вхождений переменных в формулу*. Каждая операция подстановки определяется некоторым списком переменных, не содержащим повторений, а в остальном совершенно произвольным, и некоторым списком термов, имеющим то же число членов, что и список переменных, а в остальном совершенно произвольным. Каждой переменной из первого списка ставится в соответствие терм из второго списка, имеющий такой же порядковый номер в списке термов, какой имеет рассматриваемая переменная в списке переменных. Применение к некоторой формуле R операции подстановки, определяемой списком переменных $X_1, \ldots, X_n$ и списком термов $T_1, \ldots, T_n$, состоит в построении некоторой формулы согласно следующему предписанию. Сначала выявляются все свободные вхождения каждой из переменных $X_1, \ldots, X_n$ в формулу R. Пусть представление формулы R в виде

$$P_0 Y_1 P_1 \ldots P_{k-1} Y_k P_k,$$

где каждое Y_i обозначает одну из переменных $X_1, \ldots, X_n$ и каждое P_i обозначает некоторое слово в логико-арифметическом алфавите или символизирует «пустое слово», выявляет *все* свободные вхождения в R переменных $X_1, \ldots, X_n$. Строится слово

$$P_0 S_1 P_1 \ldots P_{k-1} S_k P_k,$$

где $S_i \overline{\underline{\circ}} T_j$, если $Y_i \overline{\underline{\circ}} X_j$. Можно доказать, что построенное таким образом слово является формулой. Эта формула называется результатом применения к формуле R рассматриваемой операции подстановки и обозначается через

$$F^{X_1, \ldots, X_n}_{T_1, \ldots, T_n} R \Big| .$$

Например, используя обозначения из раздела 3.8, имеем:

$$F^{X,\ Y,\ U,}_{(0'\times 0''),\ (((Y'+0')+X)'+U),\ 0'''} R_4 \Big| \overline{\underline{\circ}}$$
$$\overline{\underline{\circ}} (\exists X((X+0''')=V) \& \neg \exists Z((Z\times V)=(((Y'+0')+X)'+U))).$$

Очевидно, что результат применения любой операции подстановки к постоянной формуле R графически равен формуле R.

3.10. Суммарное число вхождений знаков &, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ в формулу R называется *логической длиной формулы* R.

3.11. Как было отмечено выше, каждая формула R, не являющаяся элементарной формулой, единственным образом представима в одном и только в одном из следующих шести видов:

$$(P \& Q), \quad (P \vee Q), \quad (P \supset Q), \quad \neg P, \quad \forall X P, \quad \exists X P,$$

где P и Q обозначают некоторые формулы, а X — некоторую переменную. Каждую из формул P, Q в первых трех случаях, формулу P в четвертом случае и каждую формулу вида $F^X_N P|$, где N обозначает какое-либо число, в пятом и шестом случаях будем называть *смысловым звеном формулы* R.

§ 4. Арифметические алгорифмы

4.1. В дальнейшем изложении существенную роль будет играть понятие *алгорифма*. Анализ этого понятия проводится в работе А. А. Маркова [ТА]. По статье [ТА] можно познакомиться также с основными понятиями и результатами разработанной А. А. Марковым теории *нормальных алгорифмов**.

В настоящем параграфе излагаются самые необходимые для дальнейшего сведения об алгорифмах. При этом мы основываемся на работе [ТА], а также на работах [14, 15, 16, 18].

4.2. Пусть $\mathfrak{U}$ — какой-либо тип слов, охарактеризованный посредством индуктивного определения. Задать *алгорифм над словами*

---

* При чтении работы А. А. Маркова [ТА] необходимо иметь в виду, что на стр. 185 в формулировке теоремы об универсальном алгорифме имеются две опечатки. В третьей снизу строке буква $\mathfrak{A}$ должна быть заменена буквой $\mathfrak{U}$, а вторая снизу строка должна быть заменена следующей строкой:

$$\mathfrak{U}(\overline{\mathfrak{A}}\,\delta\, P) \approx \mathfrak{A}(P).$$

типа $\mathfrak{U}$ — это значит: а) задать точное предписание, определяющее для любого слова типа $\mathfrak{U}$ расчлененный на этапы процесс последовательного построения некоторых слов, развертывающийся таким образом, что каждый очередной этап процесса определяется однозначно; б) задать правило, позволяющее при любом слове S типа $\mathfrak{U}$ после осуществления каждого этапа процесса применения алгорифма к слову S устанавливать, является ли полученное на рассматриваемом этапе слово *результатом применения алгорифма к слову* S или не является.

Если при развертывании процесса применения алгорифма к слову S наступает этап, на котором получается результат применения алгорифма к слову S, то говорят, что *алгорифм применим к слову* S.

Результат применения алгорифма $\mathfrak{A}$ к слову S обозначается через $\mathfrak{A}(S)$.

Примером алгорифма является предписание, по которому производится вычисление значения любого постоянного терма (см. раздел 2.2). Этот алгорифм применим к любому постоянному терму.

В качестве второго примера алгорифма отметим алгорифм для преобразования обыкновенных дробей в конечные десятичные дроби. Каждая обыкновенная дробь записывается в виде слова в определенном алфавите. Общеизвестный из элементарной математики процесс последовательного построения знаков десятичного разложения исходной обыкновенной дроби, развертывающийся на основании определенного предписания, можно оформить в виде процесса последовательного построения некоторых слов. Этот процесс заканчивается не при любой исходной обыкновенной дроби, хотя любая обыкновенная дробь предусматривается в качестве допустимого исходного данного. Следовательно, рассматриваемый алгорифм применим не к любому исходному данному.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{W}$ — какие-либо типы слов и пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — какие-либо алгорифмы над словами типа $\mathfrak{U}$. Говорят, что *алгорифмы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *эквивалентны относительно слов типа* $\mathfrak{W}$, если, каково бы ни было слово S типа $\mathfrak{U}$, выполняются следующие условия: 1) если алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову S и перерабатывает S в какое-либо слово типа $\mathfrak{W}$, то алгорифм $\mathfrak{B}$ также применим к слову S и $\mathfrak{B}(S) \overset{\circ}{=} \mathfrak{A}(S)$; 2) если алгорифм $\mathfrak{B}$ применим к слову S и перерабатывает S в какое-либо слово типа $\mathfrak{W}$, то алгорифм $\mathfrak{A}$ также применим к слову S и $\mathfrak{A}(S) \overset{\circ}{=} \mathfrak{B}(S)$.

4.3. Особый интерес для дальнейшего представляют так называемые *арифметические алгорифмы*.

Об алгорифме $\mathfrak{A}$ говорят, что он является *N-местным арифметическим алгорифмом* или *вычислимой N-местной арифметической функцией* (буква N обозначает какое-либо число, большее нуля), если любая N-членная числовая система является допустимым исходным

данным для алгорифма $\mathfrak{A}$ и результат применения алгорифма $\mathfrak{A}$ к любой N-членной числовой системе, к которой он применим, является числом. При этом не требуется, чтобы алгорифм $\mathfrak{A}$ был применим к каждой N-членной числовой системе и не требуется, чтобы допустимые исходные данные исчерпывались N-членными числовыми системами.

Может оказаться, что тот или иной алгорифм является одновременно N_1-местным, N_2-местным, ..., N_k-местным арифметическим алгорифмом, где $N_1, N_2, \ldots, N_k$ — попарно различные числа. Может оказаться даже, что тот или иной алгорифм является M-местным арифметическим алгорифмом при каждом M, большем нуля.

Об N-местных арифметических алгорифмах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ говорят, что они *арифметически эквивалентны*, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, рассматриваемые как алгорифмы только над N-членными числовыми системами, эквивалентны относительно чисел.

Об алгорифме $\mathfrak{A}$ говорят, что он является *полным N-местным арифметическим алгорифмом* (буква N обозначает какое-либо число, большее нуля), если $\mathfrak{A}$ является N-местным арифметическим алгорифмом и если $\mathfrak{A}$ применим к любой N-членной числовой системе.

В качестве примеров полных двухместных арифметических алгорифмов отметим алгорифмы сложения чисел и умножения чисел.

4.4. Приведенная в разделе 4.2 характеристика алгорифмов не может рассматриваться как математическое определение. В этой характеристике лишь фиксируются в несколько неопределенной форме общие черты многих конкретных предписаний, с которыми в математике связывается термин «алгорифм». Встречающиеся в математике алгорифмы весьма разнообразны. Однако при сопоставлении друг с другом различных алгорифмов иногда можно подметить общие черты в предписаниях, характеризующих сравниваемые алгорифмы. В связи с этим возникает возможность вводить в рассмотрение разнообразные *типы алгорифмов* и для отдельных типов алгорифмов давать точные характеризации.

В последние десятилетия появился ряд исследований, посвященных проблеме стандартизации понятия алгорифма. Мы ограничимся здесь характеристикой более частной проблемы, а именно, *проблемы стандартизации понятия N-местного арифметического алгорифма*. Эта проблема заключается в выявлении точно охарактеризованного типа N-местных арифметических алгорифмов, с таким расчетом, чтобы для любого N-местного арифметического алгорифма, известного в современной математике, можно было указать арифметически эквивалентный ему N-местный арифметический алгорифм выделенного типа.

Было предложено несколько вариантов решения этой проблемы. В качестве арифметических алгорифмов стандартного типа А. М. Тюринг [14, 15] предложил рассматривать «*вычислительные машины*»,

придав понятию вычислительной машины некоторый точный смысл. А. Чёрч [16], использовав некоторые идеи московского математика М. И. Шейнфинкеля [17], разработал понятие *λ-определимой функции* и предложил рассматривать λ-определимые функции в качестве арифметических алгорифмов стандартного типа. С. Клин [18], исходя из исследований Ж. Эрбрана, К. Гёделя и других авторов о так называемых рекурсивных функциях, сформулировал понятие *частично рекурсивной функции* и предложил рассматривать частично рекурсивные функции как арифметические алгорифмы стандартного типа.

В последние годы А. А. Марков предложил совершенно новый вариант решения проблемы стандартизации понятия алгорифма, учитывающий не только арифметические алгорифмы, но также и алгорифмы, осуществляющие преобразования произвольных слов какого-либо типа. В качестве алгорифмов стандартного типа А. А. Марков рассматривает охарактеризованные им *нормальные алгорифмы* (см. [ТА]). Понятие нормального алгорифма выгодно отличается от понятий «вычислительной машины», λ-определимой функции и частично рекурсивной функции своей простотой, наглядностью и общностью. Ввиду того, что в настоящее время в литературе имеется лишь конспективное изложение теории нормальных алгорифмов, мы в дальнейшем нигде не будем ссылаться на эту теорию*.

Авторы различных вариантов стандартизации понятия арифметического алгорифма руководствовались совершенно различными идеями. Однако при сопоставлении любых двух упомянутых вариантов оказывается, что каждый N-местный арифметический алгорифм одного типа арифметически эквивалентен некоторому N-местному арифметическому алгорифму другого типа.

До настоящего времени не удалось построить при каком-либо N конкретный N-местный арифметический алгорифм, для которого было бы невозможно определить арифметически эквивалентный ему N-местный арифметический алгорифм стандартного типа. Не удалось даже наметить какой-либо подход к построению такого алгорифма. Авторами перечисленных выше вариантов стандартизации понятия арифметического алгорифма было высказано мнение, что вообще *любой возможный N-местный арифметический алгорифм арифметически эквивалентен некоторому N-местному арифметическому алгорифму стандартного типа.* Это мнение основывается на перечисленных выше фактах и на некоторых дополнительных доводах.

---

* Примечание при корректуре. См. подстрочное примечание в конце раздела 1.2 (на стр. 14).

4.5. *В дальнейшем мы будем называть N-местными арифметическими алгорифмами только N-местные арифметические алгорифмы одного из перечисленных выше стандартных типов.* При этом совершенно безразлично, какой именно из этих типов будет иметь в виду читатель, так как мы нигде не будем основываться на технических деталях соответствующих определений. Для дальнейшего будут существенны лишь некоторые черты определений N-местных арифметических алгорифмов стандартного типа. Перечислим эти черты, имея в виду любой из отмеченных выше стандартных типов. Буква N будет символизировать произвольное, но фиксированное число, большее нуля.

1. В основу задания всевозможных N-местных арифметических алгорифмов можно положить некоторый фиксированный алфавит, называемый в дальнейшем *алфавитом операций.*

2. Каждый N-местный арифметический алгорифм характеризуется некоторым конечным списком слов определенного типа, составленных из знаков алфавита операций. Этот список слов называется *схемой рассматриваемого алгорифма.*

Схемы N-местных арифметических алгорифмов характеризуются посредством некоторого индуктивного определения. При этом может быть указан конструктивный метод для распознавания схем N-местных арифметических алгорифмов среди всевозможных списков слов, составленных из знаков алфавита операций.

3. Определяется, как надлежит развертывать процесс применения схемы N-местного арифметического алгорифма к той или иной N-членной числовой системе и как при развертывании этого процесса выявлять результат применения схемы алгорифма к исходному данному.

4. Схемы N-местных арифметических алгорифмов допускают конструктивную нумерацию. Это значит, что можно задать правило сопоставления каждой схеме, определяющей N-местный арифметический алгорифм, некоторого числа, обладающее следующими свойствами: а) различным схемам ставятся в соответствие различные числа, б) может быть указан конструктивный метод, позволяющий для любого числа установить, сопоставляется ли данное число схеме некоторого N-местного арифметического алгорифма, и позволяющий при положительном ответе на этот вопрос построить схему соответствующего алгорифма.

Возможность конструктивной нумерации схем N-местных арифметических алгорифмов без труда усматривается из пунктов 1 и 2.

Записью N-местного арифметического алгорифма относительно фиксированного метода нумерации схем N-местных арифметических алгорифмов называется то число, которое сопоставляется схеме рассматриваемого алгорифма при заданном методе нумерации схем.

§ 5. Конструктивные принципы истолкования логико-арифметических формул

5.1. Характеризуя числа как результаты развертывания порождающих процессов, основывающихся на определенных порождающих правилах (см. раздел 2.1), допуская при рассмотрении чисел абстракцию потенциальной осуществимости и исключая абстракцию актуальной бесконечности, мы оказываемся в особых условиях, не учитываемых классической логикой. Конструктивные принципы истолкования формул дают характеризацию основных логических связей, учитывающую как индуктивный характер определения чисел, так и абстракции, допускаемые при рассмотрении чисел.

Конструктивные принципы истолкования формул предложены С. Клином [4]. Эти принципы представляют собой уточнение, применительно к арифметике, принципов конструктивного истолкования задач, предложенных А. Н. Колмогоровым [3].

При описании конструктивных принципов истолкования формул центральным понятием является понятие *восполнения формулы* *. В качестве объектов, играющих роль восполнений формул, в одних случаях фигурируют схемы одноместных или двухместных арифметических алгорифмов, в других случаях — числовые пары. Специальное определение, основывающееся на индуктивном определении формул (см. раздел 3.2), характеризует те условия, при выполнении которых заданная схема арифметического алгорифма или заданная числовая пара считается восполнением заданной формулы. Важную роль в этом определении играет технический прием, состоящий в обозначении схем арифметических алгорифмов и числовых пар посредством простых и единообразных символов; роль этих символов играют числа.

Восполнение формулы может быть не единственным. С другой стороны, та или иная схема алгорифма или та или иная числовая пара может являться восполнением различных формул. Важно подчеркнуть, что определение, характеризующее восполнения формул, представляет собой определение условий истинности двухчленного отношения:

«H является восполнением формулы R»,

где H обозначает схему какого-либо одноместного или двухместного арифметического алгорифма или какую-либо числовую пару, а R — какую-либо формулу.

Не всякая формула имеет восполнения. Формулы, имеющие по крайней мере одно восполнение, и только они называются конструктивно истинными формулами.

---

* Мы будем пользоваться терминологией, предложенной А. А. Марковым и отличающейся от терминологии С. Клина.

Восполнения формул представляют собой некоторые конструкции и каждую формулу, имеющую восполнения, можно трактовать как своеобразное описание свойств соответствующих ей конструкций.

5.2. Переходим к формулировке конструктивных принципов истолкования формул. Условимся прежде всего о некоторых обозначениях.

Для любой числовой пары H однозначно определяются числа K и L, удовлетворяющие условию

$$H \overline{\underline{\circ}} KL.$$

Число K (первый член числовой пары H) мы будет обозначать через $v(H)$, а число L (второй член числовой пары H) — через $w(H)$.

Зафиксируем теперь некоторый полный двухместный арифметический алгорифм $\mathfrak{R}$, распознающий среди всевозможных числовых пар такие числовые пары, у которых оба члена графически равны друг другу. Для определенности будем считать, что $\mathfrak{R}$ перерабатывает числовую пару в число 0, если члены рассматриваемой числовой пары графически равны друг другу, и перерабатывает числовую пару в число 0′, если рассматриваемая числовая пара состоит из неравных чисел. Алгорифм $\mathfrak{R}$, обладающий этими свойствами, легко построить.

Зафиксируем также некоторый конструктивный метод нумерации схем одноместных арифметических алгорифмов (см. раздел 4.5). Выбранный метод нумерации обозначим через $\mathfrak{S}$.

Наконец, зафиксируем некоторый двухместный арифметический алгорифм $\mathfrak{P}$, осуществляющий конструктивную нумерацию числовых пар, т. е. обладающий следующими свойствами: а) $\mathfrak{P}$ перерабатывает любую числовую пару в некоторое число (иными словами, $\mathfrak{P}$ является полным двухместным арифметическим алгорифмом), б) графически различные числовые пары $\mathfrak{P}$ перерабатывает в графически различные числа, в) может быть указан конструктивный метод, позволяющий для любого числа установить, сопоставляется ли рассматриваемое число некоторой числовой паре, и позволяющий при положительном ответе на этот вопрос построить соответствующую числовую пару.

В качестве алгорифма $\mathfrak{P}$ можно взять, например, алгорифм, перерабатывающий любую числовую пару H в число, определяемое посредством общеупотребительной арифметической символики выражением $2^{v(H)} \cdot 3^{w(H)}$.

В дальнейшем *записью того или иного одноместного арифметического алгорифма* $\mathfrak{A}$ будет называться запись алгорифма $\mathfrak{A}$ относительно зафиксированного выше и обозначенного через $\mathfrak{S}$ метода нумерации схем одноместных арифметических алгорифмов.

Записью двухместного арифметического алгорифма $\mathfrak{R}$ будем считать число 0.

Записью той или иной числовой пары H будем называть результат применения к H алгорифма $\mathfrak{P}$ (т. е. число $\mathfrak{P}(H)$).

Переходим к характеристике восполнений формул. Сначала будем рассматривать только постоянные формулы. Каждая постоянная формула единственным образом представима в одном и только в одном из следующих семи видов:

а) $(T = S)$, где T и S — некоторые постоянные термы;
б) $(P \& Q)$, » P и Q — некоторые постоянные формулы;
в) $(P \vee Q)$, » P и Q — » » »
г) $(P \supset Q)$, » P и Q — » » »
д) $\neg P$, » P — некоторая постоянная формула;
е) $\forall XP$, » X — некоторая переменная и P — некоторая формула типа $[X]$ или некоторая постоянная формула;
ж) $\exists XP$, » » » » » »

Восполнения постоянной формулы характеризуются особым образом в каждом из перечисленных семи случаев. Во всех случаях, начиная с (б), характеристика восполнений формулы дается в предположении, что уже охарактеризованы восполнения смысловых звеньев рассматриваемой формулы (см. раздел 3.11). Логическая длина любого смыслового звена формулы меньше логической длины самой формулы. Таким образом, определение восполнений формул проводится методом индукции по логической длине формул.

Случай (а). В этом случае в качестве восполнения формулы может фигурировать лишь алгорифм $\mathfrak{R}$. Алгорифм $\mathfrak{R}$ считается восполнением формулы $(T = S)$ в том и только в том случае, когда он перерабатывает числовую пару $\mathfrak{z}(T)\mathfrak{z}(S)$ в число 0. Записью восполнения $\mathfrak{R}$ формулы $(T = S)$ считается запись алгорифма $\mathfrak{R}$ (т. е. число 0).

Случай (б). В этом случае в качестве восполнений формулы могут фигурировать лишь числовые пары. Числовая пара H считается восполнением формулы $(P \& Q)$ в том и только в том случае, когда число $v(H)$ является записью некоторого восполнения формулы P и число $w(H)$ является записью некоторого восполнения формулы Q. Записью восполнения H формулы $(P \& Q)$ считается запись числовой пары H.

Случай (в). В этом случае в качестве восполнений формулы могут фигурировать лишь числовые пары двух специальных типов, а именно: числовые пары, у которых первым членом является число 0, и числовые пары, у которых первым членом является число 0′. Числовая пара H первого типа считается восполнением формулы $(P \vee Q)$ в том и только в том случае, когда число $w(H)$ является записью некоторого восполнения формулы P. Числовая пара H второго типа считается восполнением формулы $(P \vee Q)$ в том и только в том случае, когда число $w(H)$

является записью некоторого восполнения формулы Q. Записью восполнения H формулы $(P \vee Q)$ называется запись числовой пары H.

Замечание к случаю (в). Первый член числовой пары H, относящейся к одному из двух упомянутых типов, играет роль указателя на то графическое звено формулы $(P \vee Q)$, с которым надлежит сопоставить второй член числовой пары H, чтобы выяснить, является ли H восполнением формулы $(P \vee Q)$.

Случай (г). В этом случае в качестве восполнений формулы могут фигурировать лишь одноместные арифметические алгорифмы *. Одноместный арифметический алгорифм $\mathfrak{A}$ считается восполнением формулы $(P \supset Q)$ в том и только в том случае, когда алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к каждому числу, являющемуся записью какого-либо восполнения формулы P, и перерабатывает любое такое число в запись некоторого восполнения формулы Q. Записью восполнения $\mathfrak{A}$ формулы $(P \supset Q)$ считается запись алгорифма $\mathfrak{A}$.

Замечание к случаю (г). Если формула P не имеет восполнений, то соглашаются считать, что любой одноместный арифметический алгорифм является восполнением формулы $(P \supset Q)$.

Случай (д). В этом случае в качестве восполнений формулы могут фигурировать лишь одноместные арифметические алгорифмы. Одноместный арифметический алгорифм $\mathfrak{A}$ считается восполнением формулы $\neg P$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{A}$ является восполнением формулы $(P \supset (0 = 0'))$. Записью восполнения $\mathfrak{A}$ формулы $\neg P$ считается запись алгорифма $\mathfrak{A}$.

Замечание к случаю (д). Формула $(0 = 0')$ не имеет восполнений. Поэтому некоторый одноместный арифметический алгорифм $\mathfrak{A}$ является восполнением формулы $(P \supset (0 = 0'))$ в том и только в том случае, когда формула P не имеет восполнений. Таким образом, для формулы $\neg P$ можно построить восполнение в том и только в том случае, когда невозможно построение восполнения формулы P. Из сказанного следует также, что если некоторый одноместный арифметический алгорифм является восполнением формулы $\neg P$, то и любой другой одноместный арифметический алгорифм является восполнением формулы $\neg P$ и каждое число, являющееся записью какого-либо одноместного арифметического алгорифма, является записью некоторого восполнения формулы $\neg P$.

Случай (е). В этом случае в качестве восполнений формулы могут фигурировать лишь полные одноместные арифметические алгорифмы. Полный одноместный арифметический алгорифм $\mathfrak{A}$ считается восполнением формулы $\forall XP$ в том и только в том случае, когда алгорифм $\mathfrak{A}$

---

* Говоря об одноместном арифметическом алгорифме, как о восполнении формулы, мы имеем в виду (здесь и в дальнейшем) схему алгорифма.

перерабатывает любое число M в запись некоторого восполнения постоянной формулы $F_M^X P|$. Записью восполнения $\mathfrak{A}$ формулы $\forall XP$ считается запись алгорифма $\mathfrak{A}$.

Случай (ж). В этом случае в качестве восполнений формулы могут фигурировать лишь числовые пары. Числовая пара H считается восполнением формулы $\exists XP$ в том и только в том случае, когда число $w(H)$ является записью некоторого восполнения постоянной формулы $F_{v(H)}^X P|$. Записью восполнения H формулы $\exists XP$ считается запись числовой пары H.

Теперь охарактеризуем восполнения формул, содержащих свободные вхождения переменных.

Если для формулы R нормальный список переменных имеет вид

$$X_1, \ldots, X_k,$$

то (по определению) восполнения формулы R совпадают с восполнениями постоянной формулы $\forall X_1 \cdots \forall X_k R$.

Заметим, что восполнением постоянной формулы $\forall X_1 \cdots \forall X_k R$ является [на основании пункта (е)] каждый полный одноместный арифметический алгорифм, перерабатывающий любое число M в запись некоторого восполнения постоянной формулы $F_M^{X_1} \forall X_2 \cdots \forall X_k R|$.

На этом заканчивается характеризация восполнений формул.

Для дальнейшего представляет интерес следующая теорема.

Пусть R — произвольная формула типа $[X_1, \ldots, X_k]$. Для формулы R осуществимо восполнение в том и только в том случае, когда можно построить полный k-местный арифметический алгорифм, перерабатывающий любую k-членную числовую систему $M_1 \cdots M_k$ (буквы $M_1, \ldots, M_k$ обозначают члены числовой системы) *в запись некоторого восполнения постоянной формулы*

$$F_{M_1, \ldots, M_k}^{X_1, \ldots, X_k} R|.$$

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

5.3. Объекты, фигурирующие в качестве восполнений формул (схемы одноместных и двухместных арифметических алгорифмов и числовые пары), характеризуются посредством потенциально неограниченных индуктивных определений и поэтому они должны рассматриваться, вообще говоря, как потенциально осуществимые конструкции. *Утверждение о том, что та или иная конкретная формула имеет восполнение, следует понимать в том смысле, что потенциально осуществима некоторая конструкция, являющаяся восполнением рассматриваемой формулы.*

Процесс восполнения той или иной формулы слагается из построения некоторой конструкции, или из указания метода осуществления некоторой конструкции, и из доказательства того, что вводимая в

рассмотрение конструкция удовлетворяет условиям, налагаемым на восполнения рассматриваемой формулы.

5.4. Формула R называется *восполнимой*, а также *конструктивно истинной*, если осуществимо по крайней мере одно восполнение формулы R. Из сказанного выше следует, что формула R типа $[X_1, \ldots, X_k]$ является восполнимой (конструктивно истинной) формулой в том и только в том случае, когда восполнима постоянная формула $\forall X_1 \cdots \forall X_k R$.

Постоянная формула R называется *невосполнимой*, а также *конструктивно ложной*, если восполнима (конструктивно истинна) формула $\neg R$. Формула R типа $[X_1, \ldots, X_k]$ называется *невосполнимой*, а также *конструктивно ложной* *, если восполнима (конструктивно истинна) постоянная формула $\neg \forall X_1 \cdots \forall X_k R$.

5.5. В конструктивных принципах истолкования формул отражаются особенности конструктивного направления в арифметике. Особенно ярко проявляется специфика конструктивных принципов истолкования формул в определении восполнений постоянных формул вида $\forall XP$. Рассмотрим подробнее этот случай.

Пусть X — некоторая переменная и P — некоторая формула типа $[X]$. Будем рассматривать смысловые звенья формулы $\forall XP$, т. е. постоянные формулы вида $F_M^X P|$, где M обозначает какое-либо число. Поскольку числа характеризуются как результаты развертывания порождающих процессов определенного типа (см. раздел 2.1), то и смысловые звенья формулы $\forall XP$ характеризуются таким же образом. В частности, универсальному а. р. п. процессу для чисел, вырабатывающему последовательно числа

$$0,\ 0',\ 0'',\ 0''', \ldots,$$

может быть сопоставлен универсальный а. р. п. процесс для смысловых звеньев формулы $\forall XP$, вырабатывающий последовательно постоянные формулы

$$F_0^X P|, \quad F_{0'}^X P|, \quad F_{0''}^X P|, \quad F_{0'''}^X P|, \ldots$$

Для каждой из этих последовательно конструируемых формул возникает вопрос об осуществимости восполнения. Каждый такой вопрос представляет собой конструктивную задачу — задачу о построении некоторого объекта (числовой пары или схемы арифметического алгорифма), удовлетворяющего определенным условиям. Трактовка восполнений всех последовательно конструируемых смысловых звеньев формулы $\forall XP$, как одновременно существующих, основывается на абстракции актуальной бесконечности, исключаемой из конструктивной арифметики.

---

* Эта терминология не является общеупотребительной. В частности, в работе Д. Нельсона [13] термин «конструктивная ложность» употребляется в другом смысле.

По мере развертывания процесса конструирования формул

$$F_0^X P|, \quad F_{0'}^X P|, \quad F_{0''}^X P|, \quad F_{0'''}^X P|, \ldots$$

можно последовательно ставить задачи:

об осуществимости восполнения формулы $F_0^X P|$,
» » » » $F_{0'}^X P|$,
» » » » $F_{0''}^X P|$,
» » » » $F_{0'''}^X P|$,

. . . . . .

Возможно, что нам удастся последовательно решать в положительном смысле эти задачи и продвигаться все дальше и дальше по мере развертывания процесса конструирования смысловых звеньев формулы $\forall XP$. Однако, как бы далеко мы ни осуществили такое продвижение, на этом пути мы не получим *знания* об осуществимости восполнения для *любой* формулы вида $F_M^X P|$. В то же время мы получим знание об осуществимости восполнения любой формулы вида $F_M^X P|$, если найдем конструктивный метод (алгорифм), сопоставляющий каждому числу M некоторое восполнение формулы $F_M^X P|$.

При конструктивном истолковании постоянных формул вида $\forall XP$ как раз учитываются изложенные выше соображения. Постоянная формула вида $\forall XP$ считается восполнимой (конструктивно истинной), если может быть построен полный одноместный арифметический алгорифм, относительно которого может быть доказано, что он перерабатывает любое число M в запись некоторого восполнения постоянной формулы $F_M^X P|$. Восполнение заданной формулы восстанавливается по записи восполнения однозначно.

§ 6. Проблема восполнимости для формул некоторых специальных типов

6.1. Каждую формулу вида $(P \vee \neg P)$, где P — какая-либо формула (постоянная или непостоянная — безразлично), будем называть *формулой типа закона исключенного третьего.*

Рассмотрим вопрос о восполнимости формул типа закона исключенного третьего. Остановимся прежде всего на постоянных формулах типа закона исключенного третьего.

Пусть P_0 — какая-либо конкретная постоянная формула. Процесс восполнения формулы $(P_0 \vee \neg P_0)$ может быть осуществлен одним и только одним из следующих двух способов: а) посредством осуществления процесса восполнения формулы P_0 или б) посредством осуществления процесса восполнения формулы $\neg P_0$. (Очевидно, что, осуществив процесс восполнения одной из формул P_0, $\neg P_0$, мы получаем доказательство невосполнимости другой формулы.) Стремясь осуществить процесс восполнения формулы P_0, мы, быть может, достигнем положительного резуль-

тата и в этом случае формула $(P_0 \vee \neg P_0)$ окажется восполненной. Быть может мы достигнем положительного результата, стремясь доказать невозможность восполнения формулы P_0, т. е. стремясь восполнить формулу $\neg P_0$; и в этом случае формула $(P_0 \vee \neg P_0)$ окажется восполненной. Однако может оказаться, что даже очень долгие поиски процесса восполнения формулы $(P_0 \vee \neg P_0)$, осуществляемые в обоих направлениях, не дадут результата. Возникает вопрос: не является ли источником нашей неудачи то обстоятельство, что мы стремимся осуществить процесс восполнения формулы $(P_0 \vee \neg P_0)$, основываясь на индивидуальных особенностях этой формулы и не замечая каких-либо общих соображений, позволяющих доказать, что вообще для каждой постоянной формулы вида $(P \vee \neg P)$ осуществимо восполнение? Необходимо подчеркнуть, что вопрос об осуществимости восполнения какой-либо постоянной формулы вида $(P \vee \neg P)$ представляет собой конструктивную задачу — задачу о построении числовой пары, удовлетворяющей определенному условию. Трактовка восполнений постоянных формул вида $(P \vee \neg P)$, как одновременно существующих, основывается на абстракции актуальной бесконечности, лежащей за рамками конструктивного направления в математике. Таким образом, знание об осуществимости восполнения каждой постоянной формулы вида $(P \vee \neg P)$ мы можем получить только обладая конструктивным методом (алгорифмом), сопоставляющим каждой формуле рассматриваемого типа некоторое ее восполнение. Вообще в рамках конструктивного направления в математике суждение

«каждая формула такого-то типа восполнима»

имеет следующий смысл: возможен конструктивный метод (алгорифм), сопоставляющий каждой формуле R рассматриваемого типа некоторое восполнение формулы R.

Так как характеристика алгорифмов, приведенная в разделе 4.2, не может рассматриваться как математическое определение, то сказанное выше нуждается в уточнении. Уточнение можно осуществить, например, следующим образом. Можно задать конструктивный метод нумерации всевозможных логико-арифметических формул, т. е. задать правило сопоставления каждой формуле некоторого числа, обладающее следующими свойствами: а) графически различным формулам ставятся в соответствие различные числа, б) можно указать конструктивный метод, позволяющий для любого числа установить, сопоставляется ли данное число некоторой формуле, и позволяющий при положительном ответе на этот вопрос построить соответствующую формулу. Возможность такой нумерации формул была установлена К. Гёделем [19]. Число, сопоставляемое формуле R при выбранном методе нумерации формул, будем называть *записью формулы* R.

Утверждение «каждая формула такого-то типа восполнима» следует понимать как утверждение о возможности одноместного арифметического алгорифма, перерабатывающего любое число, являющееся записью какой-либо формулы R рассматриваемого типа, в запись некоторого восполнения формулы R.

Оказывается, что *невозможен одноместный арифметический алгорифм, перерабатывающий запись любой постоянной формулы R вида $(P \vee \neg P)$ в запись некоторого восполнения формулы R.* Несколько ниже будут указаны соображения, на которых основывается доказательство этой теоремы. Из сказанного следует, что в рамках конструктивного направления в математике *не может быть выдвинут в качестве логического принципа тезис о том, что каждая постоянная формула вида $(P \vee \neg P)$ восполнима.*

Теперь возникает вопрос: может ли быть построена постоянная формула P_0 таким образом, что окажется осуществимым доказательство невосполнимости формулы $(P_0 \vee \neg P_0)$, т. е. окажется восполнимой формула $\neg(P_0 \vee \neg P_0)$? Докажем, что такую формулу P_0 построить невозможно.

Построим какую-либо постоянную формулы P_0. Предположим, что удалось доказать невосполнимость формулы $(P_0 \vee \neg P_0)$, т. е. 1) удалось осуществить доказательство невосполнимости формулы P_0 и 2) удалось осуществить доказательство невосполнимости формулы $\neg P_0$. Но, осуществив доказательство невосполнимости формулы P_0, мы тем самым осуществили доказательство восполнимости формулы $\neg P_0$. Таким образом, обладая процессом восполнения формулы $\neg(P_0 \vee \neg P_0)$, мы, с одной стороны, обладаем процессом восполнения формулы $\neg P_0$ и, с другой стороны, обладаем доказательством невосполнимости формулы $\neg P_0$. Мы пришли к очевидной нелепости. Следовательно, невозможно доказать невосполнимость формулы $(P_0 \vee \neg P_0)$, невозможно осуществить восполнение формулы $\neg(P_0 \vee \neg P_0)$.

В приведенном рассуждении мы не использовали каких-либо индивидуальных особенностей постоянной формулы P_0. Следовательно, *каждая постоянная формула вида $\neg(P \vee \neg P)$ невосполнима.* Из последнего предложения вытекает, что *восполнима каждая постоянная формула вида $\neg\neg(P \vee \neg P)$.* Любой одноместный арифметический алгорифм является восполнением каждой постоянной формулы вида $\neg\neg(P \vee \neg P)$.

Осуществленный выше процесс восполнения формулы $\neg\neg(P_0 \vee \neg P_0)$, слагающийся из указания какого-либо одноместного арифметического алгорифма и рассуждения, доказывающего невозможность осуществления восполнения формулы $\neg(P_0 \vee \neg P_0)$, не является процессом восполнения формулы $(P_0 \vee \neg P_0)$. Так как невозможен одноместный арифметический алгорифм, перерабатывающий запись любой постоянной формулы R вида $(P \vee \neg P)$ в запись некоторого восполнения фор-

мулы R, то для той или иной конкретной постоянной формулы R_0 вида $(P \vee \neg P)$ вопрос об осуществимости восполнения остается проблемой до того момента, когда в результате поисков, основывающихся на учете индивидуальных особенностей формулы R_0, удастся осуществить процесс восполнения формулы R_0. В связи с этим важно отметить, что теорема о восполнимости каждой постоянной формулы вида $\neg\neg(P \vee \neg P)$ дает возможность сделать следующий вывод: поиски восполнения той или иной *конкретной* постоянной формулы R_0 вида $(P \vee \neg P)$, как бы длительны и безрезультатны они ни были, не могут быть обесценены рассуждением, устанавливающим невозможность построения восполнения формулы R_0.

6.2. Перейдем теперь к рассмотрению формул типа закона исключенного третьего, содержащих свободные вхождения переменных.

Пусть X — некоторая переменная и P — какая-либо формула типа $[X]$. Восполнения формулы $(P \vee \neg P)$ совпадают (по определению) с восполнениями постоянной формулы $\forall X(P \vee \neg P)$. Формула $\forall X(P \vee \neg P)$ восполнима в том и только в том случае, когда может быть построена схема полного одноместного арифметического алгорифма, перерабатывающего каждое число M в запись некоторого восполнения постоянной формулы $F_M^X(P \vee \neg P)|$.

Оказалось, что можно построить конкретную формулу P_0 типа $[X]$ таким образом, что будет невозможен полный одноместный арифметический алгорифм, перерабатывающий каждое число M в запись некоторого восполнения формулы $F_M^X(P_0 \vee \neg P_0)|$. Иначе говоря, можно построить конкретную формулу P_0 типа $[X]$ таким образом, что формула $\forall X(P_0 \vee \neg P_0)$ окажется невосполнимой и, следовательно, окажется восполнимой формула $\neg\forall X(P_0 \vee \neg P_0)$. Следовательно, *гипотезу об осуществимости восполнения каждой постоянной формулы вида* $\forall X(P \vee \neg P)$ *можно опровергнуть на конкретном примере.*

Первый такой пример построен С. Клином [4] (несколько раньше С. Клина родственный результат установил А. Чёрч [21]). В настоящее время известны уже разнообразные примеры такого рода. Источником их построения могут служить так называемые массовые задачи следующего типа: требуется найти алгорифм, применимый к любому слову в заданном алфавите A и выявляющий среди всевозможных слов в алфавите A те слова, которые удовлетворяют заданному условию $\mathfrak{T}$. Словам в алфавите A можно конструктивным и взаимно однозначным образом сопоставить числа. Во многих случаях удается построить такую формулу P_0 типа $[X]$, что при любом M формула $F_M^X P_0|$ оказывается восполнимой в том и только в том случае, когда число M соответствует слову в алфавите A, удовлетворяющему условию $\mathfrak{T}$. В этих случаях исходная массовая задача оказывается равносильной задаче о построении восполнения формулы $\forall X(P_0 \vee \neg P_0)$. В настоящее время выявлены уже многие неразрешимые массовые задачи, т. е.

такие массовые задачи (указанного типа), для которых невозможны решающие их алгорифмы. Исходя из таких массовых задач и строятся арифметические формулы, о которых шла речь выше. Рамки настоящей статьи не позволяют остановиться на конкретных примерах. Однако в дальнейшем мы будем неоднократно основываться на факте существования таких примеров.

Для любого списка попарно различных переменных $X_1, \ldots, X_k$ можно построить формулу P_* типа $[X_1, \ldots, X_k]$ таким образом, что формула $\forall X_1 \ldots \forall X_k (P_* \vee \neg P_*)$ окажется невосполнимой и, следовательно, окажется восполнимой формула $\neg \forall X_1 \ldots \forall X_k (P_* \vee \neg P_*)$. Для построения по заданному списку переменных $X_1, \ldots, X_k$ (предполагается, что $k > 1$) формулы P_*, обладающей этим свойством, будем исходить из какой-либо конкретной формулы P_0 типа $[X_1]$, выбранной таким образом, чтобы формула $\forall X_1 (P_0 \vee \neg P_0)$ не имела восполнений. Построим последовательно формулы $Q_2, \ldots, Q_k$, полагая

$$Q_2 \overset{\circ}{=} (X_2 = X_2),$$
$$Q_i \overset{\circ}{=} (Q_{i-1} \& (X_i = X_i)), \text{ если } 2 < i \leqslant k.$$

Теперь полагаем

$$P_* \overset{\circ}{=} (P_0 \& Q_k).$$

Нетрудно доказать, что восполнима формула

$$\forall X_1 \ldots \forall X_k (P_* \vee \neg P_*) \equiv \forall X_1 (P_0 \vee \neg P_0).$$

Следовательно, формула $\forall X_1 \ldots \forall X_k (P_* \vee \neg P_*)$ не имеет восполнений.

Заметим, что, основываясь на результатах, изложенных в разделе 6.1, нетрудно доказать следующее предложение:

Каковы бы ни были переменные $X_1, \ldots, X_n$ и формула P, восполнима формула

$$\forall X_1 \ldots \forall X_n \neg \neg (P \vee \neg P).$$

6.3. Возвратимся теперь к материалу раздела 6.1. Проведем рассуждение, доказывающее, что невозможен одноместный арифметический алгорифм, перерабатывающий запись любой постоянной формулы R вида $(P \vee \neg P)$ в запись некоторого восполнения формулы R. Допустим, что возможен одноместный арифметический алгорифм $\mathfrak{A}$ с таким свойством. Зафиксируем некоторую переменную X и введем в рассмотрение конкретную формулу P_0 типа $[X]$, выбранную таким образом, чтобы формула $\forall X (P_0 \vee \neg P_0)$ не имела восполнений. Метод нумерации формул, введенный К. Гёделем (см. раздел 6.1), таков, что можно построить полный одноместный арифметический алгорифм $\mathfrak{B}$, перерабатывающий любое число M в запись постоянной

формулы $(F_M^X P_0 | \vee \neg F_M^X P_0 |)$. Последняя формула является постоянной формулой вида $(P \vee \neg P)$; при этом

$$(F_M^X P_0 | \vee \neg F_M^X P_0 |) \overline{\circ} F_M^X (P_0 \vee \neg P_0)|.$$

Обозначим через $\mathfrak{C}$ полный одноместный арифметический алгорифм, являющийся композицией алгорифмов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{C}(M) \overline{\circ} \mathfrak{A}(\mathfrak{B}(M)) \text{ для любого числа } M.$$

Алгорифм $\mathfrak{C}$ сопоставляет каждому числу M запись некоторого восполнения формулы $F_M^X(P_0 \vee \neg P_0)|$. Следовательно, алгорифм $\mathfrak{C}$ является восполнением формулы $\forall X(P_0 \vee \neg P_0)$. Но последняя формула не имеет восполнений. Возникшее противоречие свидетельствует о том, что невозможен одноместный арифметический алгорифм, перерабатывающий запись любой постоянной формулы R вида $(P \vee \neg P)$ в запись некоторого восполнения формулы R.

6.4. Пусть R — какая-либо формула (постоянная или непостоянная). Рассмотрим два следующих вопроса.

1) Известно, что восполнима формула R. Что можно утверждать относительно восполнимости формулы $\neg\neg R$?

2) Известно, что восполнима формула $\neg\neg R$. Что можно утверждать относительно восполнимости формулы R?

Нетрудно доказать, что, обладая восполнением формулы R, можно осуществить процесс восполнения формулы $\neg\neg R$. Так разрешается первый вопрос.

Второй вопрос нуждается в более детальном анализе. Будем исходить из того, что известен некоторый процесс восполнения формулы $\neg\neg R$. Рассмотрим раздельно два случая.

Случай 1. R — постоянная формула.

По условию осуществим процесс восполнения формулы $\neg\neg R$ и, следовательно, опровержимо предположение о возможности опровержения гипотезы об осуществимости восполнения формулы R. Если процесс восполнения формулы $\neg\neg R$ осуществляется на основе какого-либо выявленного восполнения формулы R, то в этом случае процесс восполнения формулы $\neg\neg R$, конечно, дает возможность осуществить процесс восполнения формулы R. Однако во многих случаях удается осуществить процесс восполнения формулы $\neg\neg R$ без ссылки на какое-либо восполнение формулы R (см., например, раздел 6.1). Более того, процесс восполнения постоянной формулы $\neg\neg R$ может быть таков, что из него невозможно извлечь какой-либо метод построения восполнения формулы R. Именно такой характер имеет процесс восполнения постоянных формул вида $\neg\neg(P \vee \neg P)$, приведенный в разделе 6.1.

Заметим также, что, основываясь на результатах, изложенных в разделе 6.1, нетрудно доказать следующее предложение:

Невозможен одноместный арифметический алгорифм, перерабатывающий запись любой постоянной формулы R вида $(\neg\neg P \supset P)$ в запись некоторого восполнения формулы R.

Однако, с другой стороны, наличие восполнения формулы $\neg\neg R$ свидетельствует о том, что поиски восполнения формулы R, как бы длительны и безрезультатны они ни были, не могут быть обесценены рассуждением, устанавливающим невозможность построения восполнения формулы R. Таким образом, наличие восполнения формулы $\neg\neg R$ обосновывает целесообразность творческих поисков, направленных на осуществление восполнения формулы R.

Случай 2. R — формула типа $[X_1, \ldots, X_k]$, где $X_1, \ldots, X_k$ — некоторый непустой список переменных.

Восполнения формулы $\neg\neg R$ совпадают с восполнениями формулы $\forall X_1 \cdots \forall X_k \neg\neg R$, а восполнения формулы R совпадают с восполнениями формулы $\forall X_1 \cdots \forall X_k R$. В разделе 6.2 было показано, что можно построить формулу Q_* типа $[X_1, \cdots, X_k]$ таким образом, что формула $\forall X_1 \cdots \forall X_k \neg\neg Q_*$ окажется восполнимой, а формула $\forall X_1 \cdots \forall X_k Q_*$ не будет иметь восполнений и, следовательно, окажется восполнимой формула $\neg\forall X_1 \cdots \forall X_k Q_*$.

Отметим попутно, что формула

$$(\neg\neg Q_* \supset Q_*)$$

не имеет восполнений. Это утверждение следует из отмеченных выше свойств формулы Q_* и из следующего предложения:

Каковы бы ни были переменные $X_1, \ldots, X_n$ и формулы A и B, восполнима формула

$$\forall X_1 \cdots \forall X_n (A \supset B) \supset (\forall X_1 \cdots \forall X_n A \supset \forall X_1 \cdots \forall X_n B).$$

Из сказанного вытекает, что в случае, когда R содержит свободные вхождения переменных, наличие восполнения формулы $\neg\neg R$ нельзя рассматривать как безусловное указание на целесообразность поисков восполнения формулы R, так как в некоторых случаях такие поиски могут быть обесценены рассуждением, устанавливающим невозможность осуществления восполнения формулы R. Однако, если мы зададим какой-либо универсальный а. р. п. процесс для k-членных числовых систем, последовательно порождающий числовые системы

$$M_1^{(1)} \cdots M_k^{(1)},\ M_1^{(2)} \cdots M_k^{(2)},\ M_1^{(3)} \cdots M_k^{(3)}, \ldots,$$

и будем, последовательно составляя формулы

$$F^{X_1, \ldots, X_k}_{M_1^{(1)}, \ldots, M_k^{(1)}} R \Big|,\ F^{X_1, \ldots, X_k}_{M_1^{(2)}, \ldots, M_k^{(2)}} R \Big|,\ F^{X_1, \ldots, X_k}_{M_1^{(3)}, \ldots, M_k^{(3)}} R \Big|, \ldots,$$

ставить для каждой из этих постоянных формул *самостоятельную задачу* об осуществимости восполнения, то наличие восполнения формулы $\neg\neg R$ будет свидетельствовать о том, что поиски решения любой такой задачи не могут быть обесценены рассуждением, решающим рассматриваемую задачу в отрицательном смысле. Это следует из теоремы, сформулированной в конце раздела 5.2, и из предыдущих рассуждений. Таким образом, наличие восполнения формулы $\neg\neg R$ обосновывает целесообразность творческих поисков, направленных на осуществление восполнения любой конкретной постоянной формулы вида $F^{X_1, \ldots, X_k}_{M_1^{(l)}, \ldots, M_k^{(l)}} R\Big|$ и основывающихся на учете индивидуальных особенностей формулы $F^{X_1, \ldots, X_k}_{M_1^{(l)}, \ldots, M_k^{(l)}} R\Big|$.

§ 7. Основное конструктивное логико-арифметическое исчисление

7.1. В этом параграфе определяется *основное конструктивное логико-арифметическое исчисление,* представляющее собой один из вариантов аксиоматического построения арифметики. Основное конструктивное логико-арифметическое исчисление мы будем обозначать через Σ.

Характеристика исчисления Σ представляет собой индуктивное определение логико-арифметических формул специального типа, называемых *выводимыми в исчислении* Σ *формулами.* Это индуктивное определение содержит 26 основных порождающих правил. Каждое из первых 20 порождающих правил мы сформулируем в сокращенном виде, выписывая лишь вид слова, получающегося в результате применения порождающего правила к исходным данным. В этих сокращенных формулировках буквы X, Y, Z, P, Q, R будут символизировать исходные данные. При этом буквы X, Y, Z будут символизировать любые переменные, а буквы P, Q, R — любые формулы.

Введем одно вспомогательное определение. Будем говорить, что *формула* P, *переменная* X *и терм* T *согласованы,* если X не входит свободно ни в какую подформулу* формулы P, представимую в виде $\forall YG$ или в виде $\exists YG$, где G — какая-либо формула и Y — какая-либо переменная, входящая в терм T.

Выводимые в исчислении Σ *формулы* характеризуются следующим индуктивным определением [порождающие правила (1)—(20) формулируются в сокращенном виде]:

---

* Говорят, что *формула* Q *является подформулой формулы* P, если Q входит в P (см. раздел 3.6). В частности, формула P является подформулой формулы P.

1) $(X = X)$;
2) $((X = Y) \supset ((X = Z) \supset (Y = Z)))$;
3) $((X = Y) \supset (X' = Y'))$;
4) $((X' = Y') \supset (X = Y))$;
5) $\neg (X' = 0)$;
6) $((X + 0) = X)$;
7) $((X + Y') = (X + Y)')$;
8) $((X \times 0) = 0)$;
9) $((X \times Y') = ((X \times Y) + X))$;
10) $((F_0^X P| \,\&\, \forall X (P \supset F_{X'}^X P|)) \supset \forall X P)$;
11) $(P \supset (Q \supset P))$;
12) $((P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset R)))$;
13) $(P \supset (Q \supset (P \,\&\, Q)))$;
14) $((P \,\&\, Q) \supset P)$;
15) $((P \,\&\, Q) \supset Q)$;
16) $(P \supset (P \vee Q))$;
17) $(Q \supset (P \vee Q))$;
18) $((P \supset R) \supset ((Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset R)))$;
19) $((P \supset Q) \supset ((P \supset \neg Q) \supset \neg P))$;
20) $(\neg P \supset (P \supset Q))$.

21) Если P и Q — формулы, X — переменная и X не входит свободно в P, то слово

$$(\forall X (P \supset Q) \supset (P \supset \forall X Q))$$

является выводимой в Σ формулой.

22) Если P и Q — формулы, X — переменная и X не входит свободно в Q, то слово

$$(\forall X (P \supset Q) \supset (\exists X P \supset Q))$$

является выводимой в Σ формулой.

23) Если P — формула, X — переменная, T — терм и если P, X и T согласованы, то слово

$$(\forall X P \supset F_T^X P|)$$

является выводимой в Σ формулой.

24) Если P — формула, X — переменная, T — терм и если P, X и T согласованы, то слово

$$(F_T^X P| \supset \exists X P)$$

является выводимой в Σ формулой.

25) Если P и R — выводимые в Σ формулы и слово R представимо в виде $(P \supset Q)$, где Q — некоторая формула, то Q является выводимой в Σ формулой.

Это порождающее правило часто записывают в виде следующей схемы:

$$\frac{\begin{matrix} P \\ (P \supset Q) \end{matrix}}{Q}$$

26) Если P — выводимая в Σ формула и X — переменная, то слово $\forall XP$ является выводимой в Σ формулой.

Это порождающее правило часто записывают в виде следующей схемы:

$$\frac{P}{\forall XP}$$

Мы перечислили основные порождающие правила для выводимых в исчислении Σ формул. К ним должны быть присоединены порождающие правила для логико-арифметических формул в качестве порождающих правил, определяющих слова вспомогательных типов.

Легко видеть, что результат применения любого порождающего правила из числа сформулированных в этом разделе к любым предусмотренным в формулировке правила исходным данным является формулой.

7.2. Порождающие правила (1) — (10) называются правилами построения арифметических аксиом исчисления Σ, а результаты применения этих порождающих правил называются *арифметическими аксиомами исчисления* Σ. Порождающие правила (11) — (24) называются правилами построения логических аксиом исчисления Σ, а результаты применения этих порождающих правил называются *логическими аксиомами исчисления* Σ. Порождающие правила (25) и (26) называются *правилами логического вывода в исчислении* Σ.

В дальнейшем мы будем применять термин «правило вывода I» для обозначения порождающего правила (25) и термин «правило вывода II» для обозначения порождающего правила (26).

7.3. Список формул $R_1, \ldots, R_n$ называется *выводом в исчислении* Σ, если при каждом k $(k = 1, \ldots, n)$ выполняется одно из трех условий: или R_k является аксиомой исчисления Σ, или существуют i и j такие, что $i < k$, $j < k$ и $R_j \overline{\circ} (R_i \supset R_k)$, или существуют переменная X и число i такие, что $i < k$ и $R_k \overline{\circ} \forall XR_i$.

Замечание. Список формул $R_1, \ldots, R_n$ в том и только в том случае является выводом в исчислении Σ, когда возможен конечный порождающий процесс, основывающийся на индуктивном определении выводимых в исчислении Σ формул и такой, что $R_1, \ldots, R_n$ представляет собой список всех последовательно получаемых основных результатов развертывания этого процесса.

Очевидно, что формула H является выводимой в исчислении Σ формулой в том и только в том случае, когда возможно построить вывод в исчислении Σ, последняя формула которого графически равна формуле H.

Любой вывод в исчислении Σ, последняя формула которого графически равна формуле H, называется *выводом в исчислении* Σ *формулы* H.

7.4. Приведем пример вывода в исчислении Σ. Обозначим через G какую-либо конкретную формулу и рассмотрим следующий список формул:

(а) $(G \supset ((G \supset G) \supset G))$,
(б) $((G \supset ((G \supset G) \supset G)) \supset ((G \supset (G \supset G)) \supset (G \supset G)))$,
(в) $((G \supset (G \supset G)) \supset (G \supset G))$,
(г) $(G \supset (G \supset G))$,
(д) $(G \supset G)$.

Этот список формул представляет собой вывод в исчислении Σ. Действительно, формула (а) получается в результате применения порождающего правила (11), если в качестве P взять формулу G, а в качестве Q — формулу $(G \supset G)$. Формула (б) получается в результате применения порождающего правила (12), если в качестве P, Q и R взять соответственно формулы G, $(G \supset G)$ и G. Формула (в) получается из формул (а) и (б) в результате применения правила вывода I, а формула (г) получается в результате применения порождающего правила 11), если в качестве P и Q взять одну и ту же формулу G. Формула (д) получается в результате применения правила вывода I, если в качестве P и R взяты соответственно формулы (г) и (в).

Список формул (а) — (д) представляет собой вывод в Σ формулы $(G \supset G)$. Так как в качестве G можно взять любую формулу, то мы получаем следующую теорему:

Какова бы ни была формула G, в Σ выводима формула

$$(G \supset G).$$

Эта теорема говорит о выводимости в Σ любой формулы определенного точно охарактеризованного типа*. В результате исследований различных авторов получены разнообразные теоремы, утверждающие выводимость в Σ формул некоторых типов. В дальнейших главах настоящей статьи мы будем систематически пользоваться такими теоремами, не воспроизводя, однако, их доказательств. В этом разделе мы отметим лишь следующие теоремы:

---

* Суждение «каждая формула такого-то типа выводима в исчислении Σ» имеет следующий смысл: возможен конструктивный метод (алгорифм), сопоставляющий каждой формуле R рассматриваемого типа некоторый вывод в исчислении Σ формулы R.

1. *Какова бы ни была формула P, в исчислении Σ выводима формула*

$$\neg\neg(P \vee \neg P).$$

2. *Какова бы ни была квазиэлементарная формула P, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$(P \vee \neg P),$$
$$(\neg\neg P \supset P).$$

3. Закон устойчивости формул в исчислении Σ. *Пусть P, Q и R — какие-либо формулы. Пусть R^* — формула, получаемая в результате подстановки формулы Q вместо какого-либо одного вхождения или вместо нескольких вхождений формулы P в формулу R. Если в Σ выводима формула $(P \equiv Q)$, то в Σ выводима также формула $(R \equiv R^*)$.*

4. *Пусть P и Q — какие-либо формулы. Если в Σ выводимы формулы $(P \supset Q)$ и $(Q \supset P)$, то в Σ выводима также формула $(P \equiv Q)$. Если в Σ выводима формула $(P \equiv Q)$, то в Σ выводимы также формулы $(P \supset Q)$ и $(Q \supset P)$.*

7.5. Условимся говорить, что *формула P эквивалентна в исчислении Σ формуле Q*, если в Σ выводима формула $(P \equiv Q)$.

7.6. Д. Нельсон, исследовавший в работе [12] исчисление Σ, установил следующий важный результат*:

Существует конструктивный метод сопоставления любому выводу в исчислении Σ некоторого восполнения последней формулы рассматриваемого вывода.

Из этого результата следует:

Всякая формула, выводимая в исчислении Σ, является конструктивно истинной формулой.

Теорема Д. Нельсона раскрывает значение исчисления Σ для конструктивной арифметики. Исчисление Σ представляет собой такую дедуктивную арифметическую теорию, при развертывании которой получаются только конструктивно истинные логико-арифметические формулы.

Заметим, что существуют конструктивно истинные формулы, не выводимые в исчислении Σ. Приведем пример такой формулы. Выберем какую-либо переменную X и построим формулу P_0 типа $[X]$ таким образом, чтобы оказалась конструктивно истинной формула $\neg\forall X(P_0 \vee \neg P_0)$ (см. раздел 6.2). В гл. II будет определена операция над формулами θ_2. С помощью этой операции легко доказывается, что невозможен вывод в исчислении Σ формулы $\neg\forall X(P_0 \vee \neg P_0)$.

---

* Исчисление Σ несколько отличается от исчисления, исследованного Д. Нельсоном. Однако различия между этими двумя исчислениями проявляются лишь в несущественных технических деталях.

§ 8. Основное классическое логико-арифметическое исчисление

8.1. В этом параграфе определяется *основное классическое логико-арифметическое исчисление,* обозначаемое в дальнейшем через Σ^+.

Характеристика исчисления Σ^+ представляет собой индуктивное определение логико-арифметических формул особого типа, называемых *выводимыми в исчислении* Σ^+ формулами. Это индуктивное определение содержит 27 основных порождающих правил, которые мы будем обозначать через (1^+), (2^+), ..., (26^+), (27^+). Порождающие правила (1^+) — (26^+) получаются из порождающих правил (1)—(26), характеризующих исчисление Σ, посредством замены в формулировках этих правил символа Σ символом Σ^+. Порождающее правило (27^+) формулируется следующим образом:

27^+) Если P — формула, то слово $(P \vee \neg P)$ является выводимой в исчислении Σ^+ формулой.

Мы перечислили основные порождающие правила для выводимых в исчислении Σ^+ формул. К ним должны быть присоединены порождающие правила для логико-арифметических формул в качестве порождающих правил, определяющих слова вспомогательных типов.

Порождающие правила (1^+) — (10^+) называются правилами построения арифметических аксиом исчисления Σ^+, а результаты применения этих порождающих правил называются *арифметическими аксиомами исчисления* Σ^+. Порождающие правила (11^+) — (24^+) и порождающее правило (27^+) называются правилами построения логических аксиом исчисления Σ^+, а результаты применения этих порождающих правил называются *логическими аксиомами исчисления* Σ^+. Порождающие правила (25^+) и (26^+) называются *правилами логического вывода в исчислении* Σ^+.

В дальнейшем мы будем применять термин «правило вывода I» для обозначения порождающего правила (25^+) и термин «правило вывода II» для обозначения порождающего правила (26^+).

Заменяя в формулировках раздела 7.3 символ Σ символом Σ^+, мы получим определение *вывода в исчислении* Σ^+ и определение *вывода в исчислении* Σ^+ *формулы* H.

Очевидно, что каждый вывод в исчислении Σ является выводом и в исчислении Σ^+. Следовательно, каждая формула, выводимая в исчислении Σ, является формулой, выводимой в исчислении Σ^+.

8.2. В дальнейших главах настоящей статьи мы будем использовать различные теоремы, утверждающие выводимость в исчислении Σ^+ формул некоторых типов. В этом разделе мы отметим лишь следующие две теоремы:

1. Закон устойчивости формул в исчислении Σ^+. Формулировка теоремы, имеющей это наименование, получается из

формулировки закона устойчивости формул в исчислении Σ посредством замены символа Σ символом Σ^+.

2. *Пусть P и Q — какие-либо формулы. Если в Σ^+ выводимы формулы $(P \supset Q)$ и $(Q \supset P)$, то в Σ^+ выводима также формула $(P \equiv Q)$. Если в Σ^+ выводима формула $(P \equiv Q)$, то в Σ^+ выводимы также формулы $(P \supset Q)$ и $(Q \supset P)$.*

8.3. Условимся говорить, что *формула P эквивалентна в исчислении Σ^+ формуле Q*, если в Σ^+ выводима формула $(P \equiv Q)$.

8.4. Исчисление Σ^+ отражает в особой форме сложившийся в классической математике метод дедуктивного развертывания арифметики. При сопоставлении исчисления Σ^+ с конструктивными принципами истолкования формул обнаруживается, что не все выводимые в исчислении Σ^+ формулы конструктивно истинны. В частности, существуют конкретные формулы типа закона исключенного третьего, являющиеся конструктивно ложными формулами (см. раздел 6.2). Поэтому возникает вопрос: представляет ли какую-либо ценность, с точки зрения конструктивных принципов истолкования логико-арифметических формул, основное классическое логико-арифметическое исчисление?

Положительный ответ на этот вопрос следует из результатов А. Н. Колмогорова [2]. А. Н. Колмогоров открыл некоторую операцию над формулами, позволяющую дать определенную конструктивную «расшифровку» выводимых в исчислении Σ^+ формул. Исследования А. Н. Колмогорова были продолжены другими авторами. Изложение некоторых результатов, полученных в этом направлении, составляет содержание двух следующих глав настоящей статьи.

Глава II

ПОГРУЖАЮЩАЯ ОПЕРАЦИЯ А. Н. КОЛМОГОРОВА И ЕЕ ВИДОИЗМЕНЕНИЯ

§ 9. Определение погружающих операций

9.1. Всякий алгорифм, применимый к любой формуле и перерабатывающий каждую формулу в формулу, будем называть *операцией**. Результат применения операции α к формуле R будем называть α-образом формулы R и обозначать через αR.

Пусть α и β — две операции. Будем говорить, что операция β представляет собой *видоизменение* операции α, если, какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула

$$(\beta R \equiv \alpha R).$$

9.2. Будем говорить, что операция α *осуществляет погружение исчисления* Σ^+ *в исчисление* Σ или что α является *погружающей операцией,* если выполняются следующие условия:

а) существует алгорифм, позволяющий по любому выводу в исчислении Σ^+

$$P_1, \ldots, P_n$$

построить некоторый вывод в исчислении Σ формулы αP_n;

б) существует алгорифм, позволяющий по любому выводу в исчислении Σ

$$Q_1, \ldots, Q_k$$

и по любой формуле R, удовлетворяющей условию

$$\alpha R \overline{\underline{\circ}} Q_k,$$

построить некоторый вывод в исчислении Σ^+ формулы R.

---

* В настоящей статье термин «операция» будет употребляться только в определяемом здесь смысле слова.

Погружающие операции существуют. Первые примеры погружающих операций приводятся в следующем параграфе.

Легко видеть, что справедливо следующее предложение.

Если α — какая-либо погружающая операция и операция β представляет собой видоизменение операции α, то β является погружающей операцией.

9.3. Пусть α — какая-либо погружающая операция. Будем говорить, что формула R *α-восполнима*, если восполнима формула αR. Всякое восполнение формулы αR будем называть α-восполнением формулы R.

Из теоремы Д. Нельсона (см. раздел 7.6) вытекает следующее предложение:

Если формула R выводима в исчислении Σ^+ и α — какая-либо погружающая операция, то формула R α-восполнима.

Таким образом, с любой погружающей операцией α можно связать некоторое *косвенное* конструктивное истолкование формул, выводимых в основном классическом логико-арифметическом исчислении, а само исчисление Σ^+ можно охарактеризовать как дедуктивную арифметическую теорию, при развертывании которой получаются только α-восполнимые формулы.

Отметим также следующее предложение:

Если α — какая-либо погружающая операция, R — формула, выводимая в исчислении Σ^+, и $\alpha R \overline{\circ} R$, то формула R выводима в исчислении Σ и, следовательно, восполнима.

Сформулированные в этом разделе предложения раскрывают значение погружающих операций.

§ 10. Погружающая операция А. Н. Колмогорова

10.1. В этом параграфе определяется погружающая операция А. Н. Колмогорова (см. [2]). Эта операция будет обозначаться через θ_0. Операция θ_0 определяется посредством некоторой схемы и некоторого предписания, указывающего, как следует развертывать процесс применения схемы алгорифма θ_0 к любой формуле*. Схема алгорифма θ_0 представляет собой список слов, составленных из следующих элементарных знаков:

$$\theta_0 \quad T \quad S \quad P \quad Q \quad X \quad \& \quad \vee \quad \supset \quad \neg \quad \forall \quad \exists \quad = \quad (\quad) \quad \rightarrow$$

Схема алгорифма θ_0 имеет следующий вид:

$$\theta_0 (T = S) \rightarrow \neg\neg (T = S),$$
$$\theta_0 (P \& Q) \rightarrow \neg\neg (\theta_0 P \& \theta_0 Q),$$

* Конкретные операции, рассматриваемые в настоящей статье, будут задаваться посредством метода, близкого к методу задания рекурсивных функций и существенно отличающегося от метода задания нормальных алгорифмов.

$$\theta_0(P \vee Q) \to \neg\neg(\theta_0 P \vee \theta_0 Q),$$
$$\theta_0(P \supset Q) \to \neg\neg(\theta_0 P \supset \theta_0 Q),$$
$$\theta_0 \neg P \to \neg\neg\neg\theta_0 P,$$
$$\theta_0 \forall X P \to \neg\neg\forall X \theta_0 P,$$
$$\theta_0 \exists X P \to \neg\neg\exists X \theta_0 P.$$

Чтобы сформулировать предписание, указывающее, как следует развертывать процесс применения схемы алгорифма θ_0 к любой формуле, введем некоторые вспомогательные понятия.

Список элементарных знаков, получаемый присоединением к логико-арифметическому алфавиту элементарного знака θ_0, будем называть *алфавитом псевдоформул.*

Псевдоформулы характеризуются следующим индуктивным определением (формулируются только основные порождающие правила):

а) всякая формула является псевдоформулой, б) если P — формула, то слово $\theta_0 P$ является псевдоформулой, в) если U и V — псевдоформулы, то слова $(U \& V)$, $(U \vee V)$ и $(U \supset V)$ являются псевдоформулами, г) если U — псевдоформула, то и слово $\neg U$ является псевдоформулой, д) если U — псевдоформула и X — переменная, то слова $\forall X U$ и $\exists X U$ являются псевдоформулами.

Всякая псевдоформула является словом в алфавите псевдоформул.

Псевдоформулу U назовем *простой*, если она имеет вид $\theta_0 R$, где R обозначает некоторую формулу. Фигурирующую здесь формулу R назовем *основой простой псевдоформулы* U.

Индексом простой псевдоформулы назовем число, на единицу большее логической длины основы рассматриваемой псевдоформулы. *Индексом произвольной псевдоформулы,* не являющейся формулой, назовем максимум индексов входящих в нее простых псевдоформул. *Индексом произвольной формулы* будем считать число 0.

Охарактеризуем теперь понятие *элементарного преобразования псевдоформулы.* Сначала определим это понятие для простых псевдоформул.

Пусть U—простая псевдоформула. Эта псевдоформула единственным образом представима в одном и только в одном из следующих семи видов:

$$\theta_0(T = S), \quad \theta_0(P \& Q), \quad \theta_0(P \vee Q), \quad \theta_0(P \supset Q), \quad \theta_0 \neg P, \quad \theta_0 \forall X P, \quad \theta_0 \exists X P,$$

где T и S — некоторые термы, P и Q — некоторые формулы и X — некоторая переменная. Схема алгорифма θ_0 такова, что для любой простой псевдоформулы U найдется одна и только одна строка схемы алгорифма θ_0, в которой слева от знака $\to$ стоит символическая запись, выражающая вид простой псевдоформулы U. Построение псевдоформулы, вид которой характеризуется символической записью, стоящей справа от знака $\to$ в той же строке схемы алгорифма θ_0, представляет

собой (по определению) *элементарное преобразование простой псевдоформулы* U. Результат элементарного преобразования простой псевдоформулы U представляет собой псевдоформулу, индекс которой по крайней мере на единицу меньше индекса U.

Пусть V — произвольная псевдоформула, не являющаяся формулой. Можно доказать, что V единственным способом представима в виде

$$C_0U_1C_1 \cdots C_{r-1}U_rC_r,$$

где каждое U_i обозначает некоторую простую псевдоформулу и каждое C_i обозначает некоторое слово в логико-арифметическом алфавите, не содержащее простых псевдоформул, или символизирует «пустое слово». Построение слова

$$C_0H_1C_1 \cdots C_{r-1}H_rC_r,$$

где каждое H_i обозначает результат элементарного преобразования простой псевдоформулы U_i, представляет собой (по определению) *элементарное преобразование псевдоформулы* V. Можно доказать, что результат элементарного преобразования псевдоформулы представляет собой псевдоформулу и при этом индекс результата преобразования по крайней мере на единицу меньше индекса преобразуемой псевдоформулы.

Для псевдоформул, являющихся формулами, элементарное преобразование не определяется.

Пусть V — произвольная псевдоформула. *Разверткой псевдоформулы* V называется окончательный результат процесса, этапы которого определяются следующим предписанием. Первый этап состоит в написании псевдоформулы V. Каждый этап, начиная со второго, состоит в применении элементарного преобразования к результату непосредственно предшествующего этапа. Завершающим этапом считается тот, к результату которого невозможно применить элементарное преобразование. Завершающий этап обязательно наступит, так как результат каждого этапа имеет индекс, по крайней мере на единицу меньший индекса результата непосредственно предшествующего этапа. Разверткой всякой псевдоформулы является формула.

Теперь можно сформулировать предписание, по которому происходит процесс применения алгорифма θ_0. Пусть R — произвольная формула. Первый этап состоит в построении простой псевдоформулы θ_0R. Дальнейшие этапы совпадают с этапами получения развертки псевдоформулы θ_0R.

Результатом применения алгорифма θ_0 к формуле R является формула, совпадающая с разверткой псевдоформулы θ_0R.

10.2. Псевдоформулы рассматриваются как слова в алфавите псевдоформул в тех случаях, когда осуществляются процессы получения разверток (в частности, когда осуществляется процесс отыскания резуль-

тата применения операции θ_0 к той или иной формуле), а также когда изучаются те или иные вопросы, связанные с такими процессами. В дальнейшем изложении, в остальных случаях, мы будем каждую псевдоформулу рассматривать как символическую запись ее развертки. В частности, через $\theta_0 R$ (где R — некоторая формула) будем обозначать результат применения операции θ_0 к формуле R. Смысл применения псевдоформул в каждом конкретном случае будет явствовать из текста.

Из определения разверток псевдоформул непосредственно вытекает, что, *если псевдоформулы понимать как символические записи соответствующих разверток и если в схему, определяющую операцию* θ_0, *вместо знака* $\rightarrow$ *подставить знак* $\underline{\circ}$, *вместо букв* P *и* Q — *любые конкретные формулы и вместо буквы* X — *любую конкретную переменную, то результат такого преобразования любой строки схемы будет представлять собой верное графическое равенство формул.* Этим обстоятельством мы будем систематически пользоваться в дальнейшем.

10.3. В дальнейшем изложении различные операции над формулами будут задаваться схемами, аналогичными схеме для θ_0. Иногда задание интересующей нас операции будет усложняться тем, что в схеме, определяющей операцию, наряду со знаком основной определяемой операции будут фигурировать также знаки некоторых вспомогательных операций, определяемых той же схемой. В таких случаях видоизменяется определение псевдоформул путем замены порождающего правила (б) в определении операции θ_0 следующими порождающими правилами: если P — формула, то слово, получаемое присоединением слева к P знака любой встречающейся в схеме операции, является псевдоформулой. Все остальные определения и предписания, а также замечания, содержащиеся в разделе 10.2, будут формулироваться аналогично. Это необходимо иметь в виду в дальнейшем, так как мы не будем больше останавливаться на такого рода формулировках.

10.4. Из схемы операции θ_0 легко усмотреть, что формула $\theta_0 R$ может быть получена из формулы R посредством вставок двух смежных знаков отрицания перед каждым вхождением в R каждой входящей в R формулы (в частности, перед самой формулой R).

Схема операции θ_0 характеризует определенную связь между θ_0-восполнениями формулы R и θ_0-восполнениями смысловых звеньев формулы R. Эта связь существенно отличается от связи между восполнениями формулы R и восполнениями смысловых звеньев формулы R. Характер различия выясняет приведенное выше в разделе 6.4 сопоставление восполнений формулы P и восполнений формулы $\neg\neg P$.

10.5. Ниже будет доказано, что θ_0 является погружающей операцией. Доказательство этого утверждения целесообразно провести при помощи другой операции θ_2, определение которой дается в следующем параграфе.

В настоящей главе, кроме операции θ_0, будут рассмотрены операции

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ \theta_5,\ \theta_6.$$

Каждая из этих операций представляет собой видоизменение операции θ_0. Будет доказано, что θ_2 является погружающей операцией. После этого мы сможем заключить, что каждая из операций θ_0, θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5, θ_6 является погружающей операцией.

В дальнейшем изложении, при записи формул, мы будем часто пользоваться соглашением об опускании крайних скобок, введенным в разделе 3.4.

10.6. Определим операцию θ_1. Схема операции θ_1 получается и схемы операции θ_0 заменой первой и пятой строк соответственно следующими строками

$$\theta_1(T=S)\to(T=S),$$
$$\theta_1\neg P\to\neg\theta_1 P$$

и заменой буквы θ_0 буквой θ_1 в остальных строках.

Методом математической индукции доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула*:

$$\theta_1 R\equiv\theta_0 R.$$

Мы не проводим доказательства этой теоремы, так как операция θ_1 не играет заметной роли в дальнейшем.

§ 11. Погружающие операции θ_2, θ_3, θ_4 и θ_5

11.1. Определим операцию θ_2 посредством следующей схемы:

$$\theta_2(T=S)\to(T=S),$$
$$\theta_2(P\,\&\,Q)\to(\theta_2 P\,\&\,\theta_2 Q),$$
$$\theta_2(P\vee Q)\to\neg\neg(\theta_2 P\vee\theta_2 Q),$$
$$\theta_2(P\supset Q)\to(\theta_2 P\supset\theta_2 Q),$$
$$\theta_2\neg P\to\neg\theta_2 P,$$
$$\theta_2\forall XP\to\forall X\theta_2 P,$$
$$\theta_2\exists XP\to\neg\neg\exists X\theta_2 P.$$

О формуле G будем говорить, что она является *особенной формулой*, если G представима в виде $(P\vee Q)$ или в виде $\exists XP$, где P и Q обозначают формулы и X обозначает переменную.

Из схемы операции θ_2 легко усмотреть, что формула $\theta_2 R$ может быть получена из формулы R посредством вставок двух смежных знаков отрицания перед каждым вхождением в R особенной формулы.

Теорема 2. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула*

$$\neg\neg\theta_2 R \supset \theta_2 R.$$

Теорема 2 доказывается методом математической индукции. Мы проведем доказательство достаточно подробно, чтобы подчеркнуть особенности применения метода индукции к формулам.

Логико-арифметические формулы характеризуются как результаты развертывания порождающих процессов, основывающихся на индуктивном определении, сформулированном в разделе 3.2. Среди исходных данных для применения основных порождающих правил упомянутого индуктивного определения в каждом конкретном случае или вообще не фигурируют формулы (таково первое порождающее правило), или фигурируют две формулы, или фигурирует одна формула. В соответствии с этим основная часть доказательства теоремы 2 слагается из следующих трех лемм:

Лемма 1. *Если P — элементарная формула, то в Σ выводима формула*

$$(1)\quad \neg\neg\theta_2 P \supset \theta_2 P.$$

Лемма 2. *Если формулы P и Q таковы, что в Σ выводимы формулы*

$$(а)\quad \neg\neg\theta_2 P \supset \theta_2 P, \qquad (б)\quad \neg\neg\theta_2 Q \supset \theta_2 Q,$$

то в Σ выводимы следующие формулы:

$$(2)\quad \neg\neg\theta_2 (P \& Q) \supset \theta_2 (P \& Q),$$
$$(3)\quad \neg\neg\theta_2 (P \vee Q) \supset \theta_2 (P \vee Q),$$
$$(4)\quad \neg\neg\theta_2 (P \supset Q) \supset \theta_2 (P \supset Q).$$

Лемма 3. *Если формула P такова, что в Σ выводима формула*

$$(а)\quad \neg\neg\theta_2 P \supset \theta_2 P,$$

то в Σ выводимы следующие формулы:

$$(5)\quad \neg\neg\theta_2 \neg P \supset \theta_2 \neg P,$$
$$(6)\quad \neg\neg\theta_2 \forall X P \supset \theta_2 \forall X P,$$
$$(7)\quad \neg\neg\theta_2 \exists X P \supset \theta_2 \exists X P.$$

В последних двух строчках X обозначает какую-либо переменную.

Доказательство леммы 1. Пусть P — элементарная формула. Тогда формула (1) представима в виде *

$$(1^*)\quad \neg\neg P \supset P.$$

Какова бы ни была элементарная формула P, формула $(\neg\neg P \supset P)$ выводима в Σ (см. раздел 7.4).

---

* См. раздел 10.2.

Доказательство леммы 2. Предположим, что формулы (а) и (б) выводимы в Σ. Заметим прежде всего, что формулы (2), (3) и (4) представимы соответственно в виде*

$$(2^*)\quad \neg\neg(\theta_2 P \,\&\, \theta_2 Q) \supset (\theta_2 P \,\&\, \theta_2 Q),$$
$$(3^*)\quad \neg\neg\neg\neg(\theta_2 P \vee \theta_2 Q) \supset \neg\neg(\theta_2 P \vee \theta_2 Q),$$
$$(4^*)\quad \neg\neg(\theta_2 P \supset \theta_2 Q) \supset (\theta_2 P \supset \theta_2 Q).$$

Из осуществимости выводов в Σ формул (а) и (б) следует осуществимость вывода в Σ формулы

$$(8)\quad (\neg\neg\theta_2 P \supset \theta_2 P) \,\&\, (\neg\neg\theta_2 Q \supset \theta_2 Q).$$

Заметим, что, каковы бы ни были формулы A и B, в исчислении Σ выводимы формулы

$$(9)\quad ((\neg\neg A \supset A) \,\&\, (\neg\neg B \supset B)) \supset (\neg\neg(A \,\&\, B) \supset (A \,\&\, B)),$$

$$(10)\quad (\neg\neg B \supset B) \supset (\neg\neg(A \supset B) \supset (A \supset B)).$$

Будем рассматривать (9) и (10) в предположении, что роль A и B играют соответственно формулы $\theta_2 P$ и $\theta_2 Q$. Применяя к формулам (8) и (9) правило вывода I, получаем формулу (2*). Применяя к формулам (б) и (10) правило вывода I, получаем формулу (4*). Следовательно, формулы (2*) и (4*) выводимы в Σ.

Осуществимость вывода в Σ формулы (3*) вытекает из следующего предложения:

Какова бы ни была формула G, в исчислении Σ выводима формула

$$\neg\neg\neg G \supset \neg G.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Предположим, что в Σ выводима формула (а). Заметим прежде всего, что формулы (5), (6) и (7) представимы соответственно в виде

$$(5^*)\quad \neg\neg\neg\theta_2 P \supset \neg\theta_2 P,$$
$$(6^*)\quad \neg\neg\forall X\theta_2 P \supset \forall X\theta_2 P,$$
$$(7^*)\quad \neg\neg\neg\neg\exists X\theta_2 P \supset \neg\neg\exists X\theta_2 P.$$

Формулы (5*) и (7*) имеют вид

$$\neg\neg\neg G \supset \neg G.$$

Какова бы ни была формула G, формула $(\neg\neg\neg G \supset \neg G)$ выводима в Σ.

Чтобы доказать осуществимость вывода в Σ формулы (6*), применим правило вывода II к формуле (а). Мы получим формулу

$$(11)\quad \forall X(\neg\neg\theta_2 P \supset \theta_2 P).$$

* См. раздел 10.2.

Заметим теперь, что, какова бы ни была формула A, в исчислении Σ выводима формула

$$(12)\quad \forall X(\neg\neg A \supset A) \supset (\neg\neg \forall XA \supset \forall XA).$$

Будем рассматривать (12) в предположении, что роль A играет формула $\theta_2 P$. Применяя к формулам (11) и (12) правило вывода I, мы получим формулу (6*). Следовательно, формула (6*) выводима в Σ.

Лемма 3 доказана.

Заключительная часть доказательства теоремы 2 проводится следующим образом.

Рассмотрим конечное число этапов какого-либо порождающего процесса, основывающегося на порождающих правилах для логико-арифметических формул (см. раздел 3.2). Результаты основных этапов развертывания рассматриваемого процесса расположим в порядке их получения и обозначим соответственно через $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Применяя последовательно к каждому основному этапу рассматриваемого процесса одну из лемм 1, 2, 3, мы докажем, что последовательно осуществимы выводы в исчислении Σ следующих формул:

$$\neg\neg\theta_2 R_1 \supset \theta_2 R_1, \qquad \neg\neg\theta_2 R_2 \supset \theta_2 R_2, \ldots, \qquad \neg\neg\theta_2 R_n \supset \theta_2 R_n.$$

Так как любая логико-арифметическая формула является (по определению) результатом некоторого основного этапа некоторого порождающего процесса рассматриваемого типа, то мы приходим к следующему заключению:

Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ осуществим вывод формулы

$$\neg\neg\theta_2 R \supset \theta_2 R.$$

Теорема 2 доказана.

11.2. Метод математической индукции систематически применяется для доказательств различных утверждений о формулах. Во всех случаях, с которыми придется иметь дело в дальнейшем, доказательства будут проводиться по такому же плану, как в теореме 2. Поэтому при доказательствах методом индукции мы не будем в дальнейшем проводить заключительного рассуждения, а будем ограничиваться леммами, аналогичными леммам 1, 2 и 3 из доказательства теоремы 2.

11.3. Теорема 3. Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула

$$\neg\neg\theta_2 R \equiv \theta_2 R.$$

Теорема 3 является следствием теоремы 2 и следующего предложения:

Какова бы ни была формула G, в исчислении Σ выводима формула

$$G \supset \neg\neg G.$$

Теорема 4. *Если формула R выводима в исчислении Σ^+, то формула $\theta_2 R$ выводима в исчислении Σ.*

Теорема доказывается методом индукции. Выводимыми в Σ^+ формулами называются результаты развертывания порождающих процессов, основывающихся на определенных порождающих правилах. При доказательстве теоремы 4 порождающие правила для выводимых в исчислении Σ^+ формул целесообразно разбить на четыре группы и в соответствии с этим подразделением основная часть доказательства теоремы 4 слагается из следующих четырех лемм:

Лемма 1. *В исчислении Σ выводимы θ_2-образы формул, являющихся результатами применения порождающих правил* (1^+)—(24^+) (см. раздел 8.1).

Докажем лемму 1. В результате применения к исходным данным порождающих правил (1^+)—(24^+) мы получим формулы

$$
\begin{array}{ll}
(1^+) & (X = X), \\
(2^+) & ((X = Y) \supset ((X = Z) \supset (Y = Z))), \\
(3^+) & ((X = Y) \supset (X' = Y')), \\
(4^+) & ((X' = Y') \supset (X = Y)), \\
(5^+) & \neg (X' = 0), \\
(6^+) & ((X + 0) = X), \\
(7^+) & ((X + Y') = (X + Y)'), \\
(8^+) & ((X \times 0) = 0), \\
(9^+) & ((X \times Y') = ((X \times Y) + X)), \\
(10^+) & ((F_0^X P| \,\&\, \forall X (P \supset F_{X'}^X P|)) \supset \forall X P), \\
(11^+) & (P \supset (Q \supset P)), \\
(12^+) & ((P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset R))), \\
(13^+) & (P \supset (Q \supset (P \,\&\, Q))), \\
(14^+) & ((P \,\&\, Q) \supset P), \\
(15^+) & ((P \,\&\, Q) \supset Q), \\
(16^+) & (P \supset (P \vee Q)), \\
(17^+) & (Q \supset (P \vee Q)), \\
(18^+) & ((P \supset R) \supset ((Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset R))), \\
(19^+) & ((P \supset Q) \supset ((P \supset \neg Q) \supset \neg P)), \\
(20^+) & (\neg P \supset (P \supset Q)), \\
(21^+) & (\forall X (P \supset Q) \supset (P \supset \forall X Q)), \\
(22^+) & (\forall X (P \supset Q) \supset (\exists X P \supset Q)), \\
(23^+) & (\forall X P \supset F_T^X P|), \\
(24^+) & (F_T^X P| \supset \exists X P).
\end{array}
$$

В выписанных выражениях буквы X, Y и Z обозначают переменные, буквы P, Q и R — формулы, буква T — терм. При составлении формул (21^+) — (24^+) предполагаются выполненными дополнительные

условия, налагаемые на исходные данные в соответствующих порождающих правилах.

Легко видеть, что θ_2-образы формул (1^+)—(24^+) графически равны соответственно следующим формулам:

$$
\begin{array}{ll}
(1^*) & (X = X), \\
(2^*) & ((X = Y) \supset ((X = Z) \supset (Y = Z))), \\
(3^*) & ((X = Y) \supset (X' = Y')), \\
(4^*) & ((X' = Y') \supset (X = Y)), \\
(5^*) & \neg (X' = 0), \\
(6^*) & ((X + 0) = X), \\
(7^*) & ((X + Y') = (X + Y)'), \\
(8^*) & ((X \times 0) = 0), \\
(9^*) & ((X \times Y') = ((X \times Y) + X)), \\
(10^*) & ((F_0^X \theta_2 P \,|\, \& \forall X (\theta_2 P \supset F_{X'}^X \theta_2 P \,|)) \supset \forall X \theta_2 P), \\
(11^*) & (\theta_2 P \supset (\theta_2 Q \supset \theta_2 P)), \\
(12^*) & ((\theta_2 P \supset (\theta_2 Q \supset \theta_2 R)) \supset ((\theta_2 P \supset \theta_2 Q) \supset (\theta_2 P \supset \theta_2 R))), \\
(13^*) & (\theta_2 P \supset (\theta_2 Q \supset (\theta_2 P \,\&\, \theta_2 Q))), \\
(14^*) & ((\theta_2 P \,\&\, \theta_2 Q) \supset \theta_2 P), \\
(15^*) & ((\theta_2 P \,\&\, \theta_2 Q) \supset \theta_2 Q), \\
(16^*) & (\theta_2 P \supset \neg\neg (\theta_2 P \vee \theta_2 Q)), \\
(17^*) & (\theta_2 Q \supset \neg\neg (\theta_2 P \vee \theta_2 Q)), \\
(18^*) & ((\theta_2 P \supset \theta_2 R) \supset ((\theta_2 Q \supset \theta_2 R) \supset (\neg\neg (\theta_2 P \vee \theta_2 Q) \supset \theta_2 R))), \\
(19^*) & ((\theta_2 P \supset \theta_2 Q) \supset ((\theta_2 P \supset \neg \theta_2 Q) \supset \neg \theta_2 P)), \\
(20^*) & (\neg \theta_2 P \supset (\theta_2 P \supset \theta_2 Q)), \\
(21^*) & (\forall X (\theta_2 P \supset \theta_2 Q) \supset (\theta_2 P \supset \forall X \theta_2 Q)), \\
(22^*) & (\forall X (\theta_2 P \supset \theta_2 Q) \supset (\neg\neg \exists X \theta_2 P \supset \theta_2 Q)), \\
(23^*) & (\forall X \theta_2 P \supset F_T^X \theta_2 P \,|), \\
(24^*) & (F_T^X \theta_2 P \,| \supset \neg\neg \exists X \theta_2 P).
\end{array}
$$

Для доказательства графического равенства θ_2-образов формул (10^+), (23^+) и (24^+) соответственно формулам (10*), (23*) и (24*) нужно воспользоваться следующим предложением:

Каковы бы ни были формула P, переменная X и терм T, справедливо графическое равенство

$$\theta_2 F_T^X P \,| \overline{\circ} F_T^X \theta_2 P \,|.$$

Это предложение доказывается методом индукции.

Докажем теперь, что формулы (1*)—(24*) выводимы в исчислении Σ. В некоторых пунктах доказательства мы будем опираться на следующие предложения:

а) Если переменная X не входит свободно в формулу G, то X не входит свободно и в формулу $\theta_2 G$.

б) Если формула G, переменная X и терм T согласованы, то формула $\theta_2 G$, переменная X и терм T также согласованы.

Эти предложения без труда доказываются методом индукции.

Формулы (1*)—(15*), (19*)—(21*) и (23*) могут быть получены в результате применения порождающих правил (1)—(15), (19)—(21) и (23) исчисления Σ. [При рассмотрении формулы (21*) необходимо иметь в виду предложение (а), а при рассмотрении формулы (23*) — предложение (б).] Следовательно, перечисленные формулы выводимы в Σ.

Осуществимость выводов в Σ формул (16*) и (17*) доказывается следующим образом. В исчислении Σ выводимы формулы

$$(\alpha) \quad \theta_2 P \supset (\theta_2 P \vee \theta_2 Q),$$
$$(\beta) \quad \theta_2 Q \supset (\theta_2 P \vee \theta_2 Q).$$

Далее, каковы бы ни были формулы A и B, в исчислении Σ выводима формула

$$(\gamma) \quad (A \supset B) \supset (A \supset \neg\neg B).$$

Будем рассматривать (γ) в предположении, что роль A играет формула $\theta_2 P$ и роль B играет формула $(\theta_2 P \vee \theta_2 Q)$. Применяя к ($\alpha$) и ($\gamma$) правило вывода I, получаем формулу (16*). Следовательно, формула (16*) выводима в Σ. Осуществимость вывода в Σ формулы (17*) доказывается аналогично.

Докажем осуществимость вывода в Σ формулы (24*). Из предложения (б) и из порождающего правила (24) исчисления Σ вытекает следующее предложение·

Если формула P, переменная X и терм T согласованы, то в Σ выводима формула

$$(\delta) \quad F_T^X \theta_2 P \mid \supset \exists X \theta_2 P.$$

Будем теперь рассматривать (γ) в предположении, что роль A и B играют соответственно формулы $F_T^X \theta_2 P \mid$ и $\exists X \theta_2 P$. Применяя к (δ) и (γ) правило вывода I, получаем формулу (24*). Следовательно, формула (24*) выводима в Σ.

Перейдем к формулам (18*) и (22*). При доказательстве осуществимости вывода в Σ этих формул мы будем опираться на теорему 3. Заметим прежде всего, что, каковы бы ни были формулы A, B и C, в исчислении Σ выводима формула

$$(\varepsilon) \quad (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (\neg\neg (A \vee B) \supset \neg\neg C)).$$

Будем рассматривать (ε) в предположении, что роль A, B и C играют соответственно формулы $\theta_2 P$, $\theta_2 Q$ и $\theta_2 R$. Из осуществимости выводов в Σ формулы (ε) и формулы ($\neg\neg \theta_2 R \equiv \theta_2 R$) и из закона устойчивости формул в исчислении Σ следует осуществимость вывода в Σ формулы (18*).

Переходя к рассмотрению формулы (22*), заметим, что, каковы бы ни были формулы A, B и переменная X, не входящая свободно в B, в исчислении Σ выводима формула

$$(\eta) \quad \forall X(A \supset B) \supset (\neg\neg\exists XA \supset \neg\neg B).$$

Будем рассматривать (η) в предположении, что роль A и B играют соответственно формулы $\theta_2 P$ и $\theta_2 Q$. Допустимость выбора в качестве B формулы $\theta_2 Q$ следует из предложения (б). Из осуществимости выводов в Σ формулы (η) и формулы $(\neg\neg\theta_2 Q \equiv \theta_2 Q)$ и из закона устойчивости формул в исчислении Σ следует осуществимость вывода в Σ формулы (22*).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если формулы P и Q таковы, что в Σ выводимы формулы $\theta_2 P$ и $\theta_2(P \supset Q)$, то в Σ выводима формула $\theta_2 Q$.*

Действительно, $\theta_2(P \supset Q) \overset{\circ}{=} (\theta_2 P \supset \theta_2 Q)$. По правилу вывода I из формул $\theta_2 P$ и $(\theta_2 P \supset \theta_2 Q)$ получаем формулу $\theta_2 Q$.

Лемма 3. *Если формула P такова, что в Σ выводима формула $\theta_2 P$, то в Σ выводима также формула $\theta_2 \forall XP$, где X — какая-либо переменная.*

Действительно, $\theta_2 \forall XP \overset{\circ}{=} \forall X\theta_2 P$. По правилу вывода II из формулы $\theta_2 P$ получаем формулу $\forall X\theta_2 P$.

Лемма 4. *Какова бы ни была формула P, в исчислении Σ выводима формула*

$$\theta_2(P \vee \neg P).$$

Действительно, $\theta_2(P \vee \neg P) \overset{\circ}{=} \neg\neg(\theta_2 P \vee \neg\theta_2 P)$. Известно, что, какова бы ни была формула A, в исчислении Σ выводима формула

$$\neg\neg(A \vee \neg A).$$

Следовательно, в Σ выводима формула $\theta_2(P \vee \neg P)$.

Заключительная часть доказательства теоремы 4 проводится так же, как в теореме 2.

Теорема 5. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ^+ выводима формула*

$$\theta_2 R \equiv R.$$

Теорема 5 доказывается без труда методом индукции. При доказательстве используются закон устойчивости формул в исчислении Σ^+ и следующее предложение:

Какова бы ни была формула G, в исчислении Σ^+ выводима формула

$$\neg\neg G \equiv G.$$

Теорема 6. *Операция θ_2 является погружающей операцией.*

Доказательство. Предположим, что формула R выводима в исчислении Σ^+. Согласно теореме 4 формула $\theta_2 R$ выводима в исчисле-

нии Σ. Более точно: из доказательства теоремы 4 можно получить алгорифм построения вывода в Σ формулы $\theta_2 R$ по выводу в Σ^+ формулы R.

Предположим теперь, что формула R такова, что в Σ выводима формула $\theta_2 R$. Тогда формула $\theta_2 R$ выводима в Σ^+. Из теоремы 5 следует, что и формула R выводима в Σ^+. Более точно: из доказательства теоремы 5 можно получить алгорифм построения вывода в Σ^+ формулы R по выводу в Σ формулы $\theta_2 R$.

Теорема доказана.

11.4. Теорема 7. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула*

$$\theta_0 R \equiv \theta_2 R.$$

Доказательство проводится методом индукции.

Пусть R — элементарная формула. Тогда формула $(\theta_0 R \equiv \theta_2 R)$ графически равна формуле $(\neg\neg R \equiv R)$. Последняя формула выводима в Σ.

Дальнейшие рассуждения проводятся без труда на основании закона устойчивости формул в исчислении Σ и следующих предложений:

а) Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула

$$\neg\neg\theta_0 R \equiv \theta_0 R.$$

б) Каковы бы ни были формулы A, B и переменная X, в Σ выводимы формулы

$$\neg\neg(A \,\&\, B) \equiv (\neg\neg A \,\&\, \neg\neg B),$$
$$\neg\neg(A \supset B) \equiv (A \supset \neg\neg B),$$
$$\neg\neg\neg A \equiv \neg A,$$
$$\neg\neg\forall X \neg\neg A \equiv \forall X \neg\neg A.$$

Из теорем 6 и 7 непосредственно вытекает следующая теорема:

Теорема 8. *Операция θ_0 является погружающей операцией.*

Из теорем 1 и 8 вытекает следующая теорема;

Теорема 9. *Операция θ_1 является погружающей операцией.*

11.5. Легко видеть, что операция θ_2 обладает следующим свойством: *Если формула R не содержит знаков $\vee$ и $\exists$, то*

$$\theta_2 R \,\overline{\underline{\circ}}\, R.$$

Следовательно:

Если формула R не содержит знаков $\vee$ и $\exists$ и если R выводима в исчислении Σ^+, то R выводима и в исчислении Σ.

Последнее предложение будет в дальнейшем существенно усилено при помощи некоторых специальных погружающих операций.

11.6. В этом разделе рассматриваются погружающие операции θ_3, θ_4 и θ_5. Каждая из этих операций представляет собой видоизменение операции θ_0.

Операция θ_3 определяется следующей схемой:

$$\begin{aligned}
&\theta_3(T = S) \to (T = S),\\
&\theta_3(P \,\&\, Q) \to (\theta_3 P \,\&\, \theta_3 Q),\\
&\theta_3(P \vee Q) \to \neg(\neg\theta_3 P \,\&\, \neg\theta_3 Q),\\
&\theta_3(P \supset Q) \to \neg(\theta_3 P \,\&\, \neg\theta_3 Q),\\
&\theta_3 \neg P \to \neg\theta_3 P,\\
&\theta_3 \forall X P \to \forall X \theta_3 P,\\
&\theta_3 \exists X P \to \neg\forall X \neg\theta_3 P.
\end{aligned}$$

Операция θ_3 введена К. Гёделем [20]. Эта операция интересна тем, что θ_3-образы формул не содержат знаков $\vee$, $\supset$ и $\exists$.

Определим теперь операцию θ_4. Схема операции θ_4 получается из схемы операции θ_3 заменой четвертой строки следующей строкой:

$$\theta_4(P \supset Q) \to (\theta_4 P \supset \theta_4 Q)$$

и заменой буквы θ_3 буквой θ_4 в остальных строках.

Операция θ_4 известна автору от А. А. Маркова. Эта операция интересна тем, что, во-первых, θ_4-образы формул не содержат знаков $\vee$ и $\exists$ и, во-вторых, для любой формулы R, не содержащей знаков $\vee$ и $\exists$, справедливо графическое равенство:

$$\theta_4 R \,\overline{\underline{\circ}}\, R.$$

Отметим еще операцию θ_5. Эта операция определяется следующей схемой:

$$\begin{aligned}
&\theta_5(T = S) \to (T = S),\\
&\theta_5(P \,\&\, Q) \to (\theta_5 P \,\&\, \theta_5 Q),\\
&\theta_5(P \vee Q) \to \neg(\neg\theta_5 P \,\&\, \neg\theta_5 Q),\\
&\theta_5(P \supset Q) \to \neg(\theta_5 P \,\&\, \neg\theta_5 Q),\\
&\theta_5 \neg P \to \neg\theta_5 P,\\
&\theta_5 \forall X P \to \neg\exists X \neg\theta_5 P,\\
&\theta_5 \exists X P \to \neg\neg\exists X \theta_5 P.
\end{aligned}$$

Операция θ_5 обладает следующим свойством: θ_5-образы формул не содержат знаков $\vee$, $\supset$ и $\forall$.

Методом индукции доказываются следующие две теоремы:

Теорема 10. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$\neg\neg\theta_3 R \equiv \theta_3 R, \quad \neg\neg\theta_4 R \equiv \theta_4 R, \quad \neg\neg\theta_5 R \equiv \theta_5 R.$$

Теорема 11. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$\theta_3 R \equiv \theta_2 R, \quad \theta_4 R \equiv \theta_2 R, \quad \theta_5 R \equiv \theta_2 R.$$

Из теорем 6 и 11 вытекает следующая теорема:

Теорема 12. *Операции θ_3, θ_4 и θ_5 являются погружающими операциями.*

§ 12. Погружающая операция θ_6

12.1. В разделе 11.1 было отмечено, что формула $\theta_2 R$ может быть получена из формулы R посредством вставок двух смежных знаков отрицания перед каждым вхождением в R особенной формулы. Покажем, что можно видоизменить операцию θ_2 таким образом, что новая погружающая операция, обозначаемая в дальнейшем через θ_6, будет во многих случаях вносить существенно меньшие изменения в формулы, чем операция θ_2.

Введем одно вспомогательное понятие. Будем говорить, что формула R является *простой дизъюнкцией*, если R представима в виде $(P \vee Q)$, где P и Q — некоторые формулы, причем, по крайней мере одна из этих формул квазиэлементарная (см. раздел 3.6).

Отметим, что существует конструктивный метод (алгорифм) распознавания простых дизъюнкций среди всевозможных логико-арифметических формул.

12.2. Операция θ_6 задается следующей схемой (определяющей одновременно операцию θ_6 и некоторую вспомогательную операцию $\bar{\theta}_6$):

$\theta_6 (T = S) \to (T = S)$;
$\theta_6 (P \& Q) \to (\theta_6 P \& \theta_6 Q)$;
$\theta_6 (P \vee Q) \to (\theta_6 P \vee \theta_6 Q)$, если $(P \vee Q)$ — простая дизъюнкция;
$\theta_6 (P \vee Q) \to \neg\neg (\bar{\theta}_6 P \vee \bar{\theta}_6 Q)$ в остальных случаях;
$\theta_6 (P \supset Q) \to (\bar{\theta}_6 P \supset \theta_6 Q)$;
$\theta_6 \neg P \to \neg \bar{\theta}_6 P$;
$\theta_6 \forall X P \to \forall X \theta_6 P$;
$\theta_6 \exists X P \to \neg\neg \exists X \bar{\theta}_6 P$;
$\bar{\theta}_6 (T = S) \to (T = S)$;
$\bar{\theta}_6 (P \& Q) \to (\bar{\theta}_6 P \& \bar{\theta}_6 Q)$;
$\bar{\theta}_6 (P \vee Q) \to (\bar{\theta}_6 P \vee \bar{\theta}_6 Q)$;
$\bar{\theta}_6 (P \supset Q) \to (\bar{\theta}_6 P \supset \bar{\theta}_6 Q)$;
$\bar{\theta}_6 \neg P \to \neg \bar{\theta}_6 P$;
$\bar{\theta}_6 \forall X P \to \forall X \theta_6 P$;
$\bar{\theta}_6 \exists X P \to \exists X \bar{\theta}_6 P$.

Теорема 13. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$\theta_6 R \equiv \theta_2 R, \qquad \neg \bar{\theta}_6 R \equiv \neg \theta_2 R.$$

Доказательство проводится методом индукции. При доказательстве систематически используется закон устойчивости формул в Σ, ссылки на который мы будем опускать.

Лемма 1. *Если P — элементарная формула, то в Σ выводимы формулы*

$$\theta_6 P \equiv \theta_2 P, \qquad \neg \bar{\theta}_6 P \equiv \neg \theta_2 P.$$

Лемма 1 очевидна.

Лемма 2. *Если формулы P и Q таковы, что в Σ выводимы формулы*

$$\text{(а)}\quad \theta_6 P \equiv \theta_2 P, \qquad \text{(в)}\quad \neg\bar{\theta}_6 P \equiv \neg\theta_2 P,$$
$$\text{(б)}\quad \theta_6 Q \equiv \theta_2 Q, \qquad \text{(г)}\quad \neg\bar{\theta}_6 Q \equiv \neg\theta_2 Q,$$

то в Σ выводимы также формулы

$$\begin{array}{ll}
(1) & \theta_6(P \& Q) \equiv \theta_2(P \& Q),\\
(2) & \theta_6(P \vee Q) \equiv \theta_2(P \vee Q),\\
(3) & \theta_6(P \supset Q) \equiv \theta_2(P \supset Q),\\
(4) & \neg\bar{\theta}_6(P \& Q) \equiv \neg\theta_2(P \& Q),\\
(5) & \neg\bar{\theta}_6(P \vee Q) \equiv \neg\theta_2(P \vee Q),\\
(6) & \neg\bar{\theta}_6(P \supset Q) \equiv \neg\theta_2(P \supset Q).
\end{array}$$

Докажем лемму 2. Предположим, что в Σ выводимы формулы (а) — (г).

Из теоремы 3 следует осуществимость выводов в Σ формул

$$\text{(д)}\quad \neg\neg\theta_6 P \equiv \theta_6 P, \qquad \text{(е)}\quad \neg\neg\theta_6 Q \equiv \theta_6 Q.$$

Заметим далее, что формулы (1)—(6) представимы соответственно в виде

$$\begin{array}{ll}
(1^*) & (\theta_6 P \& \theta_6 Q) \equiv (\theta_2 P \& \theta_2 P);\\
(2_1^*) & (\theta_6 P \vee \theta_6 Q) \equiv \neg\neg(\theta_2 P \vee \theta_2 Q), \text{ если } (P \vee Q) \text{ — простая дизъюнкция;}\\
(2_2^*) & \neg\neg(\bar{\theta}_6 P \vee \bar{\theta}_6 Q) \equiv \neg\neg(\theta_2 P \vee \theta_2 Q) \text{ в остальных случаях;}\\
(3^*) & (\bar{\theta}_6 P \supset \theta_6 Q) \equiv (\theta_2 P \supset \theta_2 Q);\\
(4^*) & \neg(\bar{\theta}_6 P \& \bar{\theta}_6 Q) \equiv \neg(\theta_2 P \& \theta_2 Q);\\
(5^*) & \neg(\bar{\theta}_6 P \vee \bar{\theta}_6 Q) \equiv \neg\neg\neg(\theta_2 P \vee \theta_2 Q);\\
(6^*) & \neg(\bar{\theta}_6 P \supset \bar{\theta}_6 Q) \equiv \neg(\theta_2 P \supset \theta_2 Q).
\end{array}$$

Осуществимость вывода в Σ формулы (1^*) очевидна.

Обратимся к формуле (2_1^*). Предполагается, что $(P \vee Q)$ — простая дизъюнкция. Будем считать для определенности, что именно P является квазиэлементарной формулой. Из этого условия вытекает, что $\theta_2 P$ — квазиэлементарная формула. Известно, что, какова бы ни была квазиэлементарная формула G, в Σ выводима формула $(G \vee \neg G)$. Следовательно, в Σ выводима формула

$$(\theta_2 P \vee \neg\theta_2 P).$$

Заметим теперь, что каковы бы ни были формулы A и B, в Σ выводима формула

$$(A \vee \neg A) \supset (\neg\neg(A \vee B) \equiv (\neg\neg A \vee \neg\neg B)).$$

Следовательно, в Σ выводима формула

$$\neg\neg(\theta_2 P \vee \theta_2 Q) \equiv (\neg\neg\theta_2 P \vee \neg\neg\theta_2 Q).$$

Отсюда следует, что формула (2_1^*) эквивалентна в Σ формуле

$$(\theta_6 P \vee \theta_6 Q) \equiv (\neg\neg\theta_2 P \vee \neg\neg\theta_2 Q).$$

Из теоремы 3 и из осуществимости вывода в Σ формул (а) и (б) следует осуществимость вывода в Σ последней формулы. Следовательно, формула (2_1^*) выводима в Σ.

Формула (2_2^*) эквивалентна в Σ формуле

$$\neg(\neg\bar{\theta}_6 P \,\&\, \neg\bar{\theta}_6 Q) \equiv \neg(\neg\theta_2 P \,\&\, \neg\theta_2 Q).$$

Эта формула выводима в Σ, так как выводимы в Σ формулы (в) и (г). Следовательно, формула (2_2^*) выводима в Σ.

Из теоремы 3 и из выводимости в Σ формулы (е) следует, что формула (3^*) эквивалентна в Σ формуле

$$(\bar{\theta}_6 P \supset \neg\neg\theta_6 Q) \equiv (\neg\neg\theta_2 P \supset \neg\neg\theta_2 Q).$$

Заметим теперь, что, каковы бы ни были формулы A и B, в Σ выводима формула

$$(A \supset \neg B) \equiv (\neg\neg A \supset \neg B).$$

Следовательно, формула (3^*) эквивалентна в Σ формуле

$$(\neg\neg\bar{\theta}_6 P \supset \neg\neg\theta_6 Q) \equiv (\neg\neg\theta_2 P \supset \neg\neg\theta_2 Q).$$

Последняя формула выводима в Σ, так как выводимы в Σ формулы (б) и (в). Следовательно, в Σ выводима формула (3^*).

Формула (4^*) эквивалентна в Σ формуле

$$\neg\neg(\bar{\theta}_6 P \,\&\, \bar{\theta}_6 Q) \equiv \neg\neg(\theta_2 P \,\&\, \theta_2 Q),$$

а эта формула эквивалентна в Σ следующей формуле:

$$(\neg\neg\bar{\theta}_6 P \,\&\, \neg\neg\bar{\theta}_6 Q) \equiv (\neg\neg\theta_2 P \,\&\, \neg\neg\theta_2 Q).$$

Последняя формула выводима в Σ, так как выводимы в Σ формулы (в) и (г). Следовательно, формула (4^*) выводима в Σ.

Формула (5^*) эквивалентна в Σ формуле

$$(\neg\bar{\theta}_6 P \,\&\, \neg\bar{\theta}_6 Q) \equiv (\neg\theta_2 P \,\&\, \neg\theta_2 Q).$$

Последняя формула выводима в Σ, так как выводимы в Σ формулы (в) и (г). Следовательно, формула (5^*) выводима в Σ.

Формула (6^*) эквивалентна в Σ формуле

$$\neg\neg(\bar{\theta}_6 P \supset \bar{\theta}_6 Q) \equiv \neg\neg(\theta_2 P \supset \theta_2 Q).$$

Каковы бы ни были формулы A и B, в Σ выводима формула

$$\neg\neg(A \supset B) \equiv (\neg\neg A \supset \neg\neg B).$$

Следовательно, формула (6*) эквивалентна в Σ формуле

$$(\neg\neg\bar{\theta}_6 P \supset \neg\neg\bar{\theta}_6 Q) \equiv (\neg\neg\theta_2 P \supset \neg\neg\theta_2 Q).$$

Последняя формула выводима в Σ, так как выводимы формулы (в) и (г). Следовательно, формула (6*) выводима в Σ.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если формула P такова, что в Σ выводимы формулы*

$$\text{(а)}\quad \theta_6 P \equiv \theta_2 P, \qquad \text{(б)}\quad \neg\bar{\theta}_6 P \equiv \neg\theta_2 P,$$

то в Σ выводимы также формулы

$$\begin{aligned}
&(7) && \theta_6 \neg P \equiv \theta_2 \neg P,\\
&(8) && \theta_6 \forall X P \equiv \theta_2 \forall X P,\\
&(9) && \theta_6 \exists X P \equiv \theta_2 \exists X P,\\
&(10) && \neg\bar{\theta}_6 \neg P \equiv \neg\theta_2 \neg P,\\
&(11) && \neg\bar{\theta}_6 \forall X P \equiv \neg\theta_2 \forall X P,\\
&(12) && \neg\bar{\theta}_6 \exists X P \equiv \neg\theta_2 \exists X P.
\end{aligned}$$

Буква X обозначает какую-либо переменную.

Докажем лемму 3. Предположим, что в Σ выводимы формулы (а) и (б).

Из теоремы 3 следует осуществимость вывода в Σ формулы

$$\text{(д)}\quad \neg\neg\theta_6 P \equiv \theta_6 P.$$

Заметим далее, что формулы (7)—(12) представимы соответственно в виде:

$$\begin{aligned}
&(7^*) && \neg\bar{\theta}_6 P \equiv \neg\theta_2 P,\\
&(8^*) && \forall X \theta_6 P \equiv \forall X \theta_2 P,\\
&(9^*) && \neg\neg\exists X \bar{\theta}_6 P \equiv \neg\neg\exists X \theta_2 P,\\
&(10^*) && \neg\neg\bar{\theta}_6 P \equiv \neg\neg\theta_2 P,\\
&(11^*) && \neg\forall X \theta_6 P \equiv \neg\forall X \theta_2 P,\\
&(12^*) && \neg\exists X \bar{\theta}_6 P \equiv \neg\neg\neg\exists X \theta_2 P.
\end{aligned}$$

Осуществимость выводов в Σ формул (7*), (8*), (10*) и (11*) очевидна. Формулы (9*) и (12*) эквивалентны в Σ соответственно формулам

$$\neg\forall X \neg\bar{\theta}_6 P \equiv \neg\forall X \neg\theta_2 P,$$
$$\forall X \neg\bar{\theta}_6 P \equiv \forall X \neg\theta_2 P.$$

Эти формулы выводимы в Σ, так как выводима формула (в). Следовательно, в Σ выводимы формулы (9*) и (12*).

Лемма 3 доказана.

Заключительная часть доказательства теоремы 13 проводится так же, как в теореме 2.

Теорема 14. *Операция* θ_6 *является погружающей операцией.*

Эта теорема непосредственно вытекает из теорем 6 и 13.

12.3. Формула $\theta_6 R$ может быть получена из формулы R посредством вставок двух смежных знаков отрицания перед некоторыми вхождениями в R особенных формул. Может оказаться, что, несмотря на наличие многих вхождений в R особенных формул, формула $\theta_6 R$ графически равна формуле R. Приведем пример, подтверждающий последнее замечание.

Буквы A, B, C, D будут обозначать какие-либо элементарные формулы, буквы X, Y, Z, H — какие-либо переменные. Полагаем:

$$U \overline{\circ} \exists X \exists Y (A \vee B),$$
$$V \overline{\circ} \forall Z (\exists YB \supset (C \vee D)),$$
$$W \overline{\circ} \forall X \neg (\exists ZC \vee (\forall HD \supset \exists YA)),$$
$$R \overline{\circ} ((U \vee V) \supset (W \vee (B \& D))).$$

Построим формулу $\theta_6 R$. Прежде всего, очевидно, что формула $\theta_6 R$ представима в виде

$$((\bar{\theta}_6 U \vee \bar{\theta}_6 V) \supset (\theta_6 W \vee \theta_6 (B \& D))).$$

Далее имеем:

$$\bar{\theta}_6 U \overline{\circ} U,$$
$$\bar{\theta}_6 V \overline{\circ} \forall Z \theta_6 (\exists YB \supset (C \vee D)) \overline{\circ}$$
$$\overline{\circ} \forall Z (\bar{\theta}_6 \exists YB \supset \theta_6 (C \vee D)) \overline{\circ} \forall Z (\exists YB \supset (C \vee D)) \overline{\circ} V,$$
$$\theta_6 W \overline{\circ} \forall X \neg \bar{\theta}_6 (\exists ZC \vee (\forall HD \supset \exists YA)) \overline{\circ} W,$$
$$\theta_6 (B \& D) \overline{\circ} (B \& D).$$

Следовательно, $\theta_6 R \overline{\circ} R$.

Заметим, что формула R содержит 5 вхождений формул вида $(P \vee Q)$ и 5 вхождений формул вида $\exists XP$. Следовательно, формула $\theta_2 R$ получается из формулы R посредством вставок десяти пар знаков отрицания.

Глава III

ПРАВИЛЬНЫЕ ПОГРУЖАЮЩИЕ ОПЕРАЦИИ

§ 13. Определение правильных погружающих операций

13.1. Погружающую операцию α будем называть *правильной погружающей операцией*, если, какова бы ни была формула R, восполнима формула

$$(R \supset \alpha R).$$

Из теоремы Д. Нельсона (см. раздел 7.6) вытекает следующее предложение:

Если α — погружающая операция и если при любой формуле R в исчислении Σ выводима формула $(R \supset \alpha R)$, то α является правильной погружающей операцией.

Этим предложением мы будем часто пользоваться в дальнейшем

Важное свойство правильных погружающих операций раскрывает следующая теорема.

Теорема 15. *Если α — правильная погружающая операция и R — восполнимая формула, то αR также является восполнимой формулой. Иначе говоря, правильная погружающая операция перерабатывает любую конструктивно истинную формулу в конструктивно истинную формулу.*

Доказательство. Пусть α — правильная погружающая операция и R — восполнимая формула. Рассмотрим раздельно два случая.

1) R — постоянная формула.

В этом случае из осуществимости восполнения формулы $(R \supset \alpha R)$ и из определения восполнений постоянных формул вида $(P \supset Q)$ непосредственно следует, что αR является восполнимой формулой.

2) R — формула типа $[X_1, \ldots, X_n]$, где $X_1, \ldots, X_n$ — список попарно различных переменных.

В этом случае формулы αR и $(R \supset \alpha R)$ являются формулами типа $[X_1, \ldots, X_n]$. Далее, восполнимы формулы

$$\text{(a)} \quad \forall X_1 \ldots \forall X_n R$$

и

$$(\text{б}) \quad \forall X_1 \ldots \forall X_n (R \supset \alpha R).$$

Воспользуемся теперь следующим предложением:

Каковы бы ни были формулы A и B и переменные $X_1, \ldots, X_n$, в исчислении Σ выводима формула

$$\forall X_1 \ldots \forall X_n (A \supset B) \supset (\forall X_1 \ldots \forall X_n A \supset \forall X_1 \ldots \forall X_n B).$$

Применяя это предложение к тому случаю, когда роль A и B играют соответственно формулы R и αR, и используя теорему Д. Нельсона (см. раздел 7.6), мы заключаем об осуществимости восполнения формулы

$$(\text{в}) \quad \forall X_1 \ldots \forall X_n (R \supset \alpha R) \supset (\forall X_1 \ldots \forall X_n R \supset \forall X_1 \ldots \forall X_n \alpha R).$$

Из определения восполнений постоянных формул вида $(P \supset Q)$ и из осуществимости восполнений постоянных формул (а) — (в) следует осуществимость восполнения формулы $\forall X_1 \ldots \forall X_n \alpha R$. Следовательно, формула αR восполнима.

Легко видеть, что справедливо следующее предложение:

Если α — какая-либо правильная погружающая операция и операция β представляет собой видоизменение операции α, то β является правильной погружающей операцией.

13.2. Операции θ_0, θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5 и θ_6, рассмотренные в предыдущей главе, не являются правильными погружающими операциями. Чтобы убедиться в этом, достаточно построить такую формулу R_0, для которой формула $(R_0 \supset \theta_2 R_0)$ невосполнима.

Для построения формулы R_0, обладающей этим свойством, а также для построения ряда примеров, рассматриваемых в дальнейшем, зафиксируем некоторую переменную X и введем в рассмотрение формулу Γ типа $[X]$, выбранную с таким расчетом, чтобы была восполнима формула $\neg \forall X (\Gamma \vee \neg \Gamma)$ (см. раздел 6.2).

Положим $R_0 \overset{\circ}{=} \neg \forall X (\Gamma \vee \neg \Gamma)$. Формула R_0 восполнима. Формула $\theta_2 R$ представима в виде

$$\neg \forall X \neg \neg (\theta_2 \Gamma \vee \neg \theta_2 \Gamma).$$

Формула $\forall X \neg \neg (\theta_2 \Gamma \vee \neg \theta_2 \Gamma)$ выводима в Σ и, следовательно, восполнима. Поэтому формула $\neg \forall X \neg \neg (\theta_2 \Gamma \vee \neg \theta_2 \Gamma)$ не имеет восполнений.

Из сказанного следует, что формула $(R_0 \supset \theta_2 R_0)$ не имеет восполнений.

В настоящей главе строятся и изучаются некоторые правильные погружающие операции.

13.3. При построении правильных погружающих операций существенную роль будут играть некоторые вспомогательные операции.

Будем говорить, что *операция ξ определяет частный тип понятия конструктивной истинности*, если, какова бы ни была формула

R, восполнима формула $(\xi R \supset R)$. Будем говорить, что *операция* η *определяет частный тип понятия конструктивной ложности*, если, какова бы ни была формула R, восполнима формула $(\eta R \supset \neg R)$.

13.4. Интересный частный тип понятия конструктивной ложности ввел Д. Нельсон [13]*. Этот тип ложности можно определить посредством следующей операции τ (называемой в дальнейшем *операцией сильного отрицания*):

$$\begin{aligned}
&\tau(T = S) \to \neg(T = S),\\
&\tau(P \& Q) \to (\tau P \vee \tau Q),\\
&\tau(P \vee Q) \to (\tau P \& \tau Q),\\
&\tau(P \supset Q) \to (P \& \tau Q),\\
&\tau \neg P \to P,\\
&\tau \forall X P \to \exists X \tau P,\\
&\tau \exists X P \to \forall X \tau P.
\end{aligned}$$

Методом индукции доказывается следующее предложение:

Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула $(\tau R \supset \neg R)$.

Следовательно, операция τ определяет частный тип понятия конструктивной ложности.

Отметим еще следующее предложение, доказываемое методом индукции:

Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула

$$\neg R \equiv (R \supset \tau R).$$

Для построения правильных погружающих операций нужно ввести некоторые новые операции, определяющие частные типы понятия конструктивной ложности, а также некоторые операции, определяющие частные типы понятия конструктивной истинности.

§ 14. Операции Δ_0 и ∇_0

14.1. Операции Δ_0 и ∇_0 определяются следующей схемой:

$$\begin{aligned}
&\Delta_0(T = S) \to (T = S), && \nabla_0(T = S) \to \neg(T = S),\\
&\Delta_0(P \& Q) \to (\Delta_0 P \& \Delta_0 Q), && \nabla_0(P \& Q) \to (\nabla_0 P \vee \nabla_0 Q),\\
&\Delta_0(P \vee Q) \to (\Delta_0 P \vee \Delta_0 Q), && \nabla_0(P \vee Q) \to (\nabla_0 P \& \nabla_0 Q),\\
&\Delta_0(P \supset Q) \to (\nabla_0 P \vee \Delta_0 Q), && \nabla_0(P \supset Q) \to (\Delta_0 P \& \nabla_0 Q),\\
&\Delta_0 \neg P \to \nabla_0 P, && \nabla_0 \neg P \to \Delta_0 P,\\
&\Delta_0 \forall X P \to \forall X \Delta_0 P, && \nabla_0 \forall X P \to \exists X \nabla_0 P,\\
&\Delta_0 \exists X P \to \exists X \Delta_0 P, && \nabla_0 \exists X P \to \forall X \nabla_0 P.
\end{aligned}$$

---

* См. также А. А. Марков [22].

Теорема 16. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$\Delta_0 R \supset R, \quad \nabla_0 R \supset \neg R.$$

Доказательство проводится методом индукции.

Лемма 1. *Если P — элементарная формула, то в Σ выводимы формулы*

$$\Delta_0 P \supset P, \quad \nabla_0 P \supset \neg P.$$

Лемма 1 очевидна.

Лемма 2. *Если формулы P и Q таковы, что в Σ выводимы формулы*

$$\begin{array}{llll} \text{(а)} & \Delta_0 P \supset P, & \text{(в)} & \Delta_0 Q \supset Q, \\ \text{(б)} & \nabla_0 P \supset \neg P, & \text{(г)} & \nabla_0 Q \supset \neg Q, \end{array}$$

то в Σ выводимы также формулы

$$\begin{array}{ll} (1) & \Delta_0 (P \& Q) \supset (P \& Q), \\ (2) & \Delta_0 (P \vee Q) \supset (P \vee Q), \\ (3) & \Delta_0 (P \supset Q) \supset (P \supset Q), \\ (4) & \nabla_0 (P \& Q) \supset \neg (P \& Q), \\ (5) & \nabla_0 (P \vee Q) \supset \neg (P \vee Q), \\ (6) & \nabla_0 (P \supset Q) \supset \neg (P \supset Q). \end{array}$$

Докажем лемму 2. Предположим, что в Σ выводимы формулы (а) — (г).

Заметим прежде всего, что формулы (1) — (6) представимы соответственно в виде

$$\begin{array}{ll} (1^*) & (\Delta_0 P \& \Delta_0 Q) \supset (P \& Q), \\ (2^*) & (\Delta_0 P \vee \Delta_0 Q) \supset (P \vee Q), \\ (3^*) & (\nabla_0 P \vee \Delta_0 Q) \supset (P \supset Q), \\ (4^*) & (\nabla_0 P \vee \nabla_0 Q) \supset \neg (P \& Q), \\ (5^*) & (\nabla_0 P \& \nabla_0 Q) \supset \neg (P \vee Q), \\ (6^*) & (\Delta_0 P \& \nabla_0 Q) \supset \neg (P \supset Q). \end{array}$$

Отметим теперь следующее предложение:

Каковы бы ни были формулы A, B, C, D, P и Q, в исчислении Σ выводимы формулы

$$\begin{array}{ll} (7) & ((A \supset P) \& (B \supset Q)) \supset ((A \& B) \supset (P \& Q)), \\ (8) & ((A \supset P) \& (B \supset Q)) \supset ((A \vee B) \supset (P \vee Q)), \\ (9) & ((C \supset \neg P) \& (B \supset Q)) \supset ((C \vee B) \supset (P \supset Q)), \\ (10) & ((C \supset \neg P) \& (D \supset \neg Q)) \supset ((C \vee D) \supset \neg (P \& Q)), \\ (11) & ((C \supset \neg P) \& (D \supset \neg Q)) \supset ((C \& D) \supset \neg (P \vee Q)), \\ (12) & ((A \supset P) \& (D \supset \neg Q)) \supset ((A \& D) \supset \neg (P \supset Q)). \end{array}$$

Будем рассматривать (7) — (12) в предположении, что роль A, B, C, D играют соответственно формулы $\Delta_0 P$, $\Delta_0 Q$, $\nabla_0 P$, $\nabla_0 Q$.

Из осуществимости выводов в Σ формул (а) — (г) вытекает осуществимость выводов в Σ следующих формул:

$$
\begin{array}{ll}
(13) & (\Delta_0 P \supset P) \,\&\, (\Delta_0 Q \supset Q), \\
(14) & (\nabla_0 P \supset \neg P) \,\&\, (\Delta_0 Q \supset Q), \\
(15) & (\Delta_0 P \supset P) \,\&\, (\nabla_0 Q \supset \neg Q), \\
(16) & (\nabla_0 P \supset \neg P) \,\&\, (\nabla_0 Q \supset \neg Q).
\end{array}
$$

Применяя к парам формул (13) и (7), (13) и (8), (14) и (9), (16) и (10), (16) и (11), (15) и (12) правило вывода I, получаем формулы (1) — (6). Следовательно, формулы (1) — (6) выводимы в Σ.

Лемма 3. *Если формула P такова, что в Σ выводимы формулы*

$$(а)\quad \Delta_0 P \supset P, \qquad (б)\quad \nabla_0 P \supset \neg P,$$

то в Σ выводным также формулы

$$
\begin{array}{llll}
(17) & \Delta_0 \neg P \supset \neg P, & (20) & \nabla_0 \neg P \supset \neg\neg P, \\
(18) & \Delta_0 \forall X P \supset \forall X P, & (21) & \nabla_0 \forall X P \supset \neg \forall X P, \\
(19) & \Delta_0 \exists X P \supset \exists X P, & (22) & \nabla_0 \exists X P \supset \neg \exists X P.
\end{array}
$$

Буква X обозначает какую-либо переменную.

Докажем лемму 3. Предположим, что в Σ выводимы формулы (а) и (б).

Заметим прежде всего, что формулы (17) — (22) представимы соответственно в виде:

$$
\begin{array}{llll}
(17^*) & \nabla_0 P \supset \neg P, & (20^*) & \Delta_0 P \supset \neg\neg P, \\
(18^*) & \forall X \Delta_0 P \supset \forall X P, & (21^*) & \exists X \nabla_0 P \supset \neg \forall X P, \\
(19^*) & \exists X \Delta_0 P \supset \exists X P, & (22^*) & \forall X \nabla_0 P \supset \neg \exists X P.
\end{array}
$$

Осуществимость выводов в Σ формул (17*) и (20*) очевидна.

Отметим теперь следующее предложение:

Каковы бы ни были формулы A, C и P, в исчислении Σ выводимы формулы

$$
\begin{array}{ll}
(23) & \forall X (A \supset P) \supset (\forall X A \supset \forall X P), \\
(24) & \forall X (A \supset P) \supset (\exists X A \supset \exists X P), \\
(25) & \forall X (C \supset \neg P) \supset (\exists X C \supset \neg \forall X P), \\
(26) & \forall X (C \supset \neg P) \supset (\forall X C \supset \neg \exists X P).
\end{array}
$$

Будем рассматривать (23) — (26) в предположении, что роль A и C играют соответственно формулы $\Delta_0 P$ и $\nabla_0 P$.

Применяя к формулам (а) и (б) правило вывода II, получаем формулы

$$
\begin{array}{ll}
(27) & \forall X (\Delta_0 P \supset P), \\
(28) & \forall X (\nabla_0 P \supset \neg P).
\end{array}
$$

Применяя к парам формул (27) и (23), (27) и (24), (28) и (25), (28) и (26) правило вывода I, получаем формулы (18*), (19*), (21*) и (22*). Следовательно, формулы (17*)—(22*) выводимы в Σ.

Заключительная часть доказательства теоремы 16 проводится так же, как в теореме 2.

Следствие. *Операция Δ_0 определяет частный тип понятия конструктивной истинности, а операция ∇_0 определяет частный тип понятия конструктивной ложности.*

Теорема 17. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы:*

$$\begin{array}{ll} (1) & R \supset \neg \nabla_0 R, \\ (2) & \Delta_0 R \supset \neg \nabla_0 R, \\ (3) & \nabla_0 R \supset \neg \Delta_0 R, \\ (4) & \neg (\Delta_0 R \,\&\, \nabla_0 R). \end{array}$$

Доказательство. Каковы бы ни были формулы A, B и C, в исчислении Σ выводимы формулы

$$\begin{array}{ll} (а) & (A \supset \neg B) \equiv (B \supset \neg A), \\ (б) & (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)), \\ (в) & (A \supset \neg B) \equiv \neg (A \,\&\, B). \end{array}$$

Осуществимость выводов в Σ формул (1)—(4) вытекает из этого предложения и из теоремы 16.

Теорема 18. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ^+ выводимы формулы*

$$\Delta_0 R \equiv R, \qquad \nabla_0 R \equiv \neg R.$$

Теорема 18 доказывается без труда методом индукции.

Отметим еще следующую теорему, выясняющую соотношение между операциями ∇_0 и τ:

Теорема 19. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула*

$$\nabla_0 R \supset \tau R.$$

Доказательство теоремы 19 проводится методом индукции.

14.2. При доказательствах некоторых предложений об операциях, рассматриваемых в настоящей главе, мы будем пользоваться следующей леммой:

Лемма. *Если формулы A и B таковы, что восполнима формула $(A \supset B)$, а формула B невосполнима, то формула A невосполнима.*

Мы будем в дальнейшем применять эту лемму лишь к таким формулам A и B, которые имеют один и тот же нормальный список переменных (этот список переменных может быть, в частности, пу-

стым). Поэтому мы проведем доказательство леммы только для формул A и B, удовлетворяющих этому условию.

Если A и B — постоянные формулы, то доказательство очевидно.

Рассмотрим теперь тот случай, когда A и B — формулы типа $[X_1, \ldots, X_n]$, где $X_1, \ldots, X_n$ — список попарно различных переменных. Предположим, что восполнима формула $(A \supset B)$ и невосполнима формула B. Иначе говоря, предположим, что восполнимы следующие постоянные формулы:

$$\text{(а)} \quad \forall X_1 \cdots \forall X_n (A \supset B),$$
$$\text{(б)} \quad \neg \forall X_1 \cdots \forall X_n B.$$

Заметим, что в исчислении Σ выводима постоянная формула

$$\text{(в)} \quad \forall X_1 \cdots \forall X_n (A \supset B) \supset (\neg \forall X_1 \cdots \forall X_n B \supset \neg \forall X_1 \cdots \forall X_n A).$$

Из теоремы Д. Нельсона (см. раздел 7.6) следует, что формула (в) восполнима. Наконец, из осуществимости восполнений формул (а) — (в) вытекает осуществимость восполнения формулы $\neg \forall X_1 \cdots \forall X_n A$. Следовательно, формула A невосполнима.

14.3. Отметим некоторые особенности операций Δ_0 и ∇_0.

Полагаем: $R_1 \overset{\circ}{=} \exists X \neg (\Gamma \vee \neg \Gamma)$, $R_2 \overset{\circ}{=} \forall X \neg \neg (\Gamma \vee \neg \Gamma)$, $R_3 \overset{\circ}{=} \exists X \neg \neg \neg (\Gamma \vee \neg \Gamma)$, где Γ — формула, введенная в разделе 13.2.

Формула R_2 выводима в исчислении Σ. В то же время формула $\Delta_0 R_2$ не имеет восполнений и, следовательно, невыводима в Σ. Действительно, $\Delta_0 R_2 \overset{\circ}{=} \forall X (\Delta_0 \Gamma \vee \nabla_0 \Gamma)$. Из теоремы 16 следует, что в Σ выводима формула

$$(\Delta_0 \Gamma \vee \nabla_0 \Gamma) \supset (\Gamma \vee \neg \Gamma).$$

Следовательно, в Σ выводима формула

$$\forall X (\Delta_0 \Gamma \vee \nabla_0 \Gamma) \supset \forall X (\Gamma \vee \neg \Gamma).$$

Формула $\forall X (\Gamma \vee \neg \Gamma)$ невосполнима. На основании леммы из раздела 14.2 заключаем, что формула $\Delta_0 R_2$ также невосполнима.

Из сказанного следует, что *существуют выводимые в Σ формулы Δ_0-образы которых не имеют восполнений и, следовательно, невыводимы в Σ*. В то же время справедливо следующее предложение:

Если формула R такова, что в исчислении Σ^+ выводима формула $\neg R$, то в исчислении Σ выводима формула $\neg \Delta_0 R$.

Доказательство будет дано в § 15.

Из этого предположения вытекает, в частности, что *формулы, представимые в виде $\Delta_0 \neg \forall X (P \vee \neg P)$, не имеют восполнений* (хотя при специальном выборе P формула $\neg \forall X (P \vee \neg P)$ может оказаться восполнимой). Последнее утверждение может быть доказано и непосредственно на основании пункта (4) теоремы 17.

Отметим теперь, что среди формул, представимых в виде $(R \supset \Delta_0 R)$, имеются невосполнимые формулы. Такое же замечание можно сделать о формулах, представимых в виде $(\neg R \supset \nabla_0 R)$, и о формулах, представимых в виде $(\tau R \supset \nabla_0 R)$.

Действительно, из сказанного выше следует, что постоянная формула $(R_2 \supset \Delta_0 R_2)$ не имеет восполнений. Далее, в исчислении Σ выводима формула $\neg R_1 \equiv R_2$. Кроме того, $\nabla_0 R_1 \overset{\circ}{=} \Delta_0 R_2$. Следовательно, в Σ выводима формула

$$(\neg R_1 \supset \nabla_0 R_1) \equiv (R_2 \supset \Delta_0 R_2).$$

Следовательно, постоянная формула $(\neg R_1 \supset \nabla_0 R_1)$ не имеет восполнений. Далее, $\tau R_3 \overset{\circ}{=} R_2$ и $\nabla_0 R_3 \overset{\circ}{=} \Delta_0 R_2$. Поэтому

$$(\tau R_3 \supset \nabla_0 R_3) \overset{\circ}{=} (R_2 \supset \Delta_0 R_2).$$

Следовательно, постоянная формула $(\tau R_3 \supset \nabla_0 R_3)$ не имеет восполнений.

14.4. Пусть R — произвольная формула. Каждое вхождение в R знака отрицания $\neg$, непосредственно примыкающее (слева) к какому-либо вхождению в R элементарной формулы, будем называть *элементарным вхождением знака* $\neg$ в формулу R. *Внутренней логической длиной формулы* R будем называть число элементарных вхождений в R знака отрицания, а *внешней логической длиной формулы* R — разность между логической длиной R и внутренней логической длиной R.

Будем говорить, что формула R *регулярна*, если, во-первых, R не содержит знака $\supset$ и, во-вторых, все вхождения в R знака $\neg$ являются элементарными вхождениями.

Легко установить, что справедливы следующие предложения:

1) *Какова бы ни была формула R, формулы $\Delta_0 R$ и $\nabla_0 R$ регулярны.*

2) *Какова бы ни была формула R, внешняя логическая длина формулы $\Delta_0 R$ и внешняя логическая длина формулы $\nabla_0 R$ не превосходят внешней логической длины формулы R.*

Заметим, что внутренняя логическая длина формулы $\Delta_0 R$ может оказаться больше внутренней логической длины формулы R. То же самое можно сказать о внутренней логической длине формулы $\nabla_0 R$.

Методом индукции без труда доказывается также следующая теорема:

Теорема 20. *Какова бы ни была формула R, справедливы графические равенства:*

$$\Delta_0 \Delta_0 R \overset{\circ}{=} \Delta_0 R, \quad \Delta_0 \nabla_0 R \overset{\circ}{=} \nabla_0 R,$$
$$\nabla_0 \nabla_0 R \overset{\circ}{=} \Delta_0 R, \quad \nabla_0 \Delta_0 R \overset{\circ}{=} \nabla_0 R.$$

§ 15. Погружающая операция α_0

15.1. Введем операцию α_0, полагая для каждой формулы R:

$$\alpha_0 R \overset{\circ}{=} \neg \nabla_0 R.$$

Выяснению свойств операции α_0 предпошлем следующую теорему.

Теорема 21. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$\Delta_0 R \supset \theta_2 R, \qquad \theta_2 R \supset \neg \nabla_0 R.$$

Доказательство проводится методом индукции.

Лемма 1. *Если P — элементарная формула, то в Σ выводимы формулы*

$$\Delta_0 P \supset \theta_2 P, \qquad \theta_2 P \supset \neg \nabla_0 P.$$

Лемма 1 очевидна.

Лемма 2. *Если формулы P и Q таковы, что в Σ выводимы формулы*

(а) $\Delta_0 P \supset \theta_2 P$, (в) $\Delta_0 Q \supset \theta_2 Q$,
(б) $\theta_2 P \supset \neg \nabla_0 P$, (г) $\theta_2 Q \supset \neg \nabla_0 Q$,

то в Σ выводимы также формулы

(1) $\Delta_0 (P \& Q) \supset \theta_2 (P \& Q)$,
(2) $\Delta_0 (P \vee Q) \supset \theta_2 (P \vee Q)$,
(3) $\Delta_0 (P \supset Q) \supset \theta_2 (P \supset Q)$,
(4) $\theta_2 (P \& Q) \supset \neg \nabla_0 (P \& Q)$,
(5) $\theta_2 (P \vee Q) \supset \neg \nabla_0 (P \vee Q)$,
(6) $\theta_2 (P \supset Q) \supset \neg \nabla_0 (P \supset Q)$.

Докажем лемму 2. Предположим, что в Σ выводимы формулы (а)—(г).

Заметим прежде всего, что формулы (1)—(6) представимы соответственно в виде:

(1*) $(\Delta_0 P \& \Delta_0 Q) \supset (\theta_2 P \& \theta_2 Q)$,
(2*) $(\Delta_0 P \vee \Delta_0 Q) \supset \neg\neg (\theta_2 P \vee \theta_2 Q)$,
(3*) $(\nabla_0 P \vee \Delta_0 Q) \supset (\theta_2 P \supset \theta_2 Q)$,
(4*) $(\theta_2 P \& \theta_2 Q) \supset \neg (\nabla_0 P \vee \nabla_0 Q)$,
(5*) $\neg\neg (\theta_2 P \vee \theta_2 Q) \supset \neg (\nabla_0 P \& \nabla_0 Q)$,
(6*) $(\theta_2 P \supset \theta_2 Q) \supset \neg (\Delta_0 P \& \nabla_0 Q)$.

Отметим теперь следующее предложение:

Каковы бы ни были формулы A, B, C, D, E, F, в исчислении Σ выводимы формулы

(7) $((A \supset E) \& (B \supset F)) \supset ((A \& B) \supset (E \& F))$,
(8) $((A \supset E) \& (B \supset F)) \supset ((A \vee B) \supset \neg\neg (E \vee F))$,

$$(9)\quad ((E \supset \neg C) \& (B \supset F)) \supset ((C \vee B) \supset (E \supset F)),$$
$$(10)\quad ((E \supset \neg C) \& (F \supset \neg D)) \supset ((E \& F) \supset \neg (C \vee D)),$$
$$(11)\quad ((E \supset \neg C) \& (F \supset \neg D)) \supset (\neg\neg (E \vee F) \supset \neg (C \& D)),$$
$$(12)\quad ((A \supset E) \& (F \supset \neg D)) \supset ((E \supset F) \supset \neg (A \& D)).$$

Будем рассматривать (7) — (12) в предположении, что роль A, B, C, D, E, F играют соответственно формулы $\Delta_0 P$, $\Delta_0 Q$, $\nabla_0 P$, $\nabla_0 Q$, $\theta_2 P$, $\theta_2 Q$.

Из осуществимости выводов в Σ формул (а) — (г) вытекает осуществимость выводов в Σ следующих формул:

$$(13)\quad (\Delta_0 P \supset \theta_2 P) \& (\Delta_0 Q \supset \theta_2 Q),$$
$$(14)\quad (\theta_2 P \supset \neg \nabla_0 P) \& (\Delta_0 Q \supset \theta_2 Q),$$
$$(15)\quad (\theta_2 P \supset \neg \nabla_0 P) \& (\theta_2 Q \supset \neg \nabla_0 Q),$$
$$(16)\quad (\Delta_0 P \supset \theta_2 P) \& (\theta_2 Q \supset \neg \nabla_0 Q).$$

Применяя к парам формул (13) и (7), (13) и (8), (14) и (9), (15) и (10), (15) и (11), (16) и (12) правило вывода I, получаем формулы (1*)—(6*). Следовательно, формулы (1) — (6) выводимы в Σ.

Лемма 3. *Если формула P такова, что в Σ выводимы формулы*

$$(а)\quad \Delta_0 P \supset \theta_2 P, \qquad (б)\quad \theta_2 P \supset \neg \nabla_0 P,$$

то в Σ выводимы также формулы

$$(17)\quad \Delta_0 \neg P \supset \theta_2 \neg P,$$
$$(18)\quad \Delta_0 \forall X P \supset \theta_2 \forall X P,$$
$$(19)\quad \Delta_0 \exists X P \supset \theta_2 \exists X P,$$
$$(20)\quad \theta_2 \neg P \supset \neg \nabla_0 \neg P,$$
$$(21)\quad \theta_2 \forall X P \supset \neg \nabla_0 \forall X P,$$
$$(22)\quad \theta_2 \exists X P \supset \neg \nabla_0 \exists X P.$$

Буква X обозначает какую-либо переменную.

Докажем лемму 3. Предположим, что в Σ выводимы формулы (а) и (б).

Заметим прежде всего, что формулы (17) — (22) представимы соответственно в виде

$$(17^*)\quad \nabla_0 P \supset \neg \theta_2 P,$$
$$(18^*)\quad \forall X \Delta_0 P \supset \forall X \theta_2 P,$$
$$(19^*)\quad \exists X \Delta_0 P \supset \neg\neg \exists X \theta_2 P,$$
$$(20^*)\quad \neg \theta_2 P \supset \neg \Delta_0 P,$$
$$(21^*)\quad \forall X \theta_2 P \supset \neg \exists X \nabla_0 P,$$
$$(22^*)\quad \neg\neg \exists X \theta_2 P \supset \neg \forall X \nabla_0 P.$$

Отметим теперь следующее предложение:

Каковы бы ни были формулы A, C, E, в исчислении Σ выводимы формулы:

$$(23)\quad (E \supset \neg C) \supset (C \supset \neg E),$$
$$(24)\quad \forall X (A \supset E) \supset (\forall X A \supset \forall X E),$$

$$(25)\quad \forall X(A \supset E) \supset (\exists XA \supset \neg\neg\exists XE),$$
$$(26)\quad (\forall \supset E) \supset (\neg E \supset \neg A),$$
$$(27)\quad \forall X(E \supset \neg C) \supset (\forall XE \supset \neg\exists XC),$$
$$(28)\quad \forall X(E \supset \neg C) \supset (\neg\neg\exists XE \supset \neg\forall XC).$$

Будем рассматривать (23)—(28) в предположении, что роль A, C, E играют соответственно формулы $\Delta_0 P$, $\nabla_0 P$, $\theta_2 P$.

Применяя к формулам (а) и (б) правило вывода II, получаем формулы:

$$(29)\quad \forall X(\Delta_0 P \supset \theta_2 P),$$
$$(30)\quad \forall X(\theta_2 P \supset \neg\nabla_0 P).$$

Применяя к парам формул (б) и (23), (29) и (24), (29) и (25), (а) и (26), (30) и (27), (30) и (28) правило вывода I, получаем формулы (17*)—(22*). Следовательно, формулы (17)—(22) выводимы в Σ.

Заключительная часть доказательства теоремы 21 проводится так же, как в теореме 2.

Теорема 22. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$\theta_2 R \supset \alpha_0 R,$$
$$R \supset \alpha_0 R,$$
$$\Delta_0 R \supset \alpha_0 R.$$

Теорема 22 непосредственно вытекает из теорем 21 и 17.

Теорема 23. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ^+ выводима формула*

$$\alpha_0 R \equiv R.$$

Эта теорема следует из теоремы 18.

Основной теоремой настоящего параграфа является следующая

Теорема 24. *Операция α_0 является правильной погружающей операцией.*

Доказательство. Предположим, что в исчислении Σ^+ выводима формула R. Из теоремы 4 следует, что в исчислении Σ выводима формула $\theta_2 R$. Применяя теперь теорему 22, заключаем, что в исчислении Σ выводима формула $\alpha_0 R$.

Пусть формула R такова, что в исчислении Σ выводима формула $\alpha_0 R$. Всякая формула, выводимая в исчислении Σ, выводима в исчислении Σ^+. Следовательно, формула $\alpha_0 R$ выводима в исчислении Σ^+. Применяя теперь теорему 23, заключаем, что формула R выводима в исчислении Σ^+.

Мы доказали, что α_0 является погружающей операцией. Из теоремы 22 следует, что α_0 — правильная погружающая операция.

15.2. Отметим некоторые особенности погружающей операции α_0.

1) *α_0-образ любой формулы имеет вид $\neg G$, где G — регулярная формула.*

2) Условимся обозначать через $\lambda(R)$ внешнюю логическую длину формулы R. *Какова бы ни была формула R, справедливо соотношение*

$$\lambda(\alpha_0 R) \leqslant \lambda(R) + 1.$$

3) *Какова бы ни была формула R, справедливы графические равенства*

$$\alpha_0 \Delta_0 R \overline{\circ} \alpha_0 R,$$
$$\alpha_0 \nabla_0 R \overline{\circ} \alpha_0 \neg R,$$
$$\alpha_0 \alpha_0 R \overline{\circ} \alpha_0 R,$$
$$\Delta_0 \alpha_0 R \overline{\circ} \Delta_0 R,$$
$$\nabla_0 \alpha_0 R \overline{\circ} \nabla_0 R.$$

Это предложение следует из теоремы 20.

4) *Среди формул, представимых в виде* $(\alpha_0 R \supset \theta_2 R)$, *имеются невосполнимые формулы.*

Чтобы обосновать это утверждение, рассмотрим постоянную формулу R_0, введенную в разделе 13.2. Формула R_0 восполнима, а формула $\theta_2 R_0$ не имеет восполнений. Из теоремы 15 следует, что формула $\alpha_0 R$ восполнима. Следовательно, постоянная формула $(\alpha_0 R_0 \supset \theta_2 R_0)$ не имеет восполнений.

15.3. Исходя из операции сильного отрицания τ, можно, по аналогии с операцией α_0, ввести следующую операцию σ:

$$\sigma R \overline{\circ} \neg \tau R \text{ для всякой формулы } R.$$

Возникает вопрос: является ли σ погружающей операцией? Ответ на этот вопрос отрицательный. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим формулу R_4, определяемую следующим образом: $R_4 \overline{\circ} \neg \neg \forall X (\Gamma \vee \neg \Gamma)$, где Γ — формула, введенная в разделе 13.2. Формула R_4 выводима в исчислении Σ^+, но она не имеет восполнений. Далее имеем

$$\sigma R_4 \overline{\circ} \neg \tau \neg \neg \forall X (\Gamma \vee \neg \Gamma) \overline{\circ} \neg \neg \forall X (\Gamma \vee \neg \Gamma) \overline{\circ} R_4.$$

Следовательно, формула σR_4 не имеет восполнений и поэтому не выводима в исчислении Σ.

15.4. В заключение параграфа докажем теорему, сформулированную уже ранее в разделе 14.3.

Теорема 25. *Если формула R такова, что в исчислении Σ^+ выводима формула $\neg R$, то в исчислении Σ выводима формула $\neg \Delta_0 R$.*

Доказательство. Предположим, что в исчислении Σ^+ выводима формула $\neg R$. Тогда, на основании теоремы 24, в исчислении Σ выводима формула $\neg \nabla_0 \neg R$. Но $\neg \nabla_0 \neg R \overline{\circ} \neg \Delta_0 R$. Следовательно, в исчислении Σ выводима формула $\neg \Delta_0 R$.

§ 16. Погружающая операция α_1

16.1. Операция α_0 обладает по сравнению с операцией θ_2 тем существенным достоинством, что она является правильной погружающей операцией. В то же время, операция α_0, вообще говоря, радикально перестраивает формулы, к которым она применяется. В этом отношении операция α_0 в невыгодную сторону отличается от операции θ_2, так как θ_2-образ любой формулы R может быть получен из формулы R посредством одних лишь вставок двух смежных знаков отрицания перед вхождениями в R особенных формул*.

В настоящем параграфе определяется правильная погружающая операция α_1, обладающая в усиленном виде отмеченным выше достоинством операции θ_2. Операция α_1 задается схемой, определяющей одновременно операцию α_1 и вспомогательную операцию Δ_1. Эта схема имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1(T=S)\to(T=S), & \Delta_1(T=S)\to(T=S),\\
\alpha_1(P\,\&\,Q)\to(\alpha_1P\,\&\,\alpha_1Q), & \Delta_1(P\,\&\,Q)\to(\Delta_1P\,\&\,\Delta_1Q),\\
\alpha_1(P\vee Q)\to\neg\neg(\alpha_1P\vee\alpha_1Q), & \Delta_1(P\vee Q)\to(\Delta_1P\vee\Delta_1Q),\\
\alpha_1(P\supset Q)\to(\Delta_1P\supset\alpha_1Q), & \Delta_1(P\supset Q)\to(\alpha_1P\supset\Delta_1Q),\\
\alpha_1\neg P\to\neg\Delta_1P, & \Delta_1\neg P\to\neg\alpha_1P,\\
\alpha_1\forall XP\to\forall X\alpha_1P, & \Delta_1\forall XP\to\forall X\Delta_1P,\\
\alpha_1\exists XP\to\neg\neg\exists X\alpha_1P, & \Delta_1\exists XP\to\exists X\Delta_1P.
\end{array}$$

Введем еще операцию ∇_1, полагая для каждой формулы R:

$$\nabla_1R\to\neg\alpha_1R.$$

16.2. Вхождения подформул любой формулы R в формулу R мы будем подразделять на *положительные вхождения* и *отрицательные вхождения*. Такое подразделение определяется следующим правилом:

Пусть G — какая-либо подформула формулы R. Если $G\,\underline{\circ}\,R$, то единственное вхождение G в R считается положительным вхождением. В дальнейшем будем считать, что формула G отлична от формулы R.

Если формула R представима в виде $(P\,\&\,Q)$ или в виде $(P\vee Q)$, где P и Q — формулы, то рассматриваемое вхождение G в R считается положительным вхождением (отрицательным вхождением), если оно происходит от положительного вхождения (соответственно от отрицательного вхождения) формулы G в первое или во второе графическое звено формулы R. Если формула R представима в виде $(P\supset Q)$, где P и Q — формулы, то рассматриваемое вхождение G в R считается положительным вхождением (отрицательным вхождением), если оно происходит от отрицательного вхождения формулы G в первое гра-

* См. раздел 11.1.

фическое звено формулы R или от положительного вхождения формулы G во второе графическое звено формулы R (соответственно, если оно происходит от положительного вхождения формулы G в первое графическое звено формулы R или от отрицательного вхождения формулы G во второе графическое звено формулы R). Если формула R представима в виде $\neg P$, где P — формула, то рассматриваемое вхождение G в R считается положительным вхождением (отрицательным вхождением), если оно происходит от отрицательного вхождения (соответственно, от положительного вхождения) формулы G в формулу R. Если формула R представима в виде $\forall XP$ или в виде $\exists XP$, где P — формула и X — переменная, то рассматриваемое вхождение G в R считается положительным вхождением (отрицательным вхождением), если оно происходит от положительного вхождения (соответственно от отрицательного вхождения) формулы G в формулу P.

Основываясь на определении разверток псевдоформул $\alpha_1 R$ и $\Delta_1 R$ (см. разделы 10.1 и 10.2), можно доказать следующее предложение.

1) *Формула $\alpha_1 R$ может быть получена из формулы R посредством вставок двух смежных знаков отрицания перед каждым положительным вхождением в R каждой входящей в R особенной формулы, а формула $\Delta_1 R$ может быть получена из формулы R посредством вставок двух смежных знаков отрицания перед каждым отрицательным вхождением в R каждой входящей в R особенной формулы.*

Из этого предложения следует, что операция α_1 вносит в формулы, вообще говоря, меньшие изменения, чем операция θ_2.

Из предложения (1) вытекает также следующее предложение.

2) *Если формула R не содержит положительных вхождений особенных формул, то $\alpha_1 R \overline{\circ} R$. Если формула R не содержит отрицательных вхождений особенных формул, то $\Delta_1 R \overline{\circ} R$.*

16.3. Теорема 26. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула*

$$\neg\neg\alpha_1 R \supset \alpha_1 R.$$

Доказательство проводится без труда методом индукции. При этом используется, в частности, следующее предложение:

Каковы бы ни были формулы A, B, C и переменная X, в исчислении Σ выводимы формулы

$$((\neg\neg A \supset A) \& (\neg\neg B \supset B)) \supset (\neg\neg(A \& B) \supset (A \& B)),$$
$$(\neg\neg B \supset B) \supset (\neg\neg(C \supset B) \supset (C \supset B)),$$
$$\forall X(\neg\neg A \supset A) \supset (\neg\neg\forall XA \supset \forall XA).$$

Следствием теоремы 26 является следующая теорема:

Теорема 27. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула*

$$\neg\neg\alpha_1 R \equiv \alpha_1 R.$$

Следующие три теоремы 28, 29 и 30 доказываются без каких-либо затруднений методом индукции.

Теорема 28. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$\Delta_1 R \supset R, \qquad R \supset \alpha_1 R.$$

Теорема 29. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ^+ выводимы формулы*

$$\Delta_1 R \equiv R, \qquad \alpha_1 R \equiv R.$$

Теорема 30. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы:*

$$\Delta_1 R \supset \theta_2 R, \qquad \theta_2 R \supset \alpha_1 R.$$

Замечание. При доказательстве теорем 28 и 30 используется, в частности, следующее предложение:

Каковы бы ни были формулы A, B, C, D, в исчислении Σ выводимы формулы

$$((A \supset B) \& (C \supset D)) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset D)),$$
$$(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A).$$

Основной теоремой настоящего параграфа является следующая

Теорема 31. *Операция α_1 является правильной погружающей операцией.*

Эта теорема доказывается на основании теорем 4, 30, 29 и 28 так же, как теорема 24 доказывается на основании теорем 4, 22 и 23.

16.4. Отметим теперь некоторые свойства операций Δ_1 и ∇_1.

Теорема 32. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы:*

$$\neg\neg\nabla_1 R \equiv \nabla_1 R,$$
$$\alpha_1 R \equiv \neg\nabla_1 R.$$

Эта теорема следует из определения операции ∇_1 и из теоремы 27.

Теорема 33. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула*

$$\nabla_1 R \supset \neg R,$$

а в исчислении Σ^+ выводима формула

$$\nabla_1 R \equiv \neg R.$$

Эта теорема следует из теорем 28 и 29.

Следствие теорем 28 и 33. *Операция Δ_1 определяет частный тип понятия конструктивной истинности, а операция ∇_1 определяет частный тип понятия конструктивной ложности.*

Теорема 34. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$R \supset \neg \nabla_1 R,$$
$$\Delta_1 R \supset \neg \nabla_1 R,$$
$$\nabla_1 R \supset \neg \Delta_1 R,$$
$$\neg (\Delta_1 R \,\&\, \nabla_1 R).$$

Эта теорема доказывается на основании теорем 28 и 33 так же, как теорема 17 доказывается на основании теоремы 16.

§ 17. Сопоставление операций Δ_1 и Δ_0, ∇_1 и ∇_0, α_1 и α_0, ∇_1 и τ, α_1 и θ_2.

17.1. Теорема 35. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$\Delta_0 R \supset \Delta_1 R, \qquad \nabla_0 R \supset \nabla_1 R.$$

Доказательство проводится методом индукции.

Лемма 1. *Если P — элементарная формула, то в Σ выводимы формулы*

$$\Delta_0 P \supset \Delta_1 P, \qquad \nabla_0 P \supset \neg \alpha_1 P.$$

Лемма 1 очевидна.

Лемма 2. *Если формулы P и Q таковы, что в Σ выводимы формулы*

(а) $\Delta_0 P \supset \Delta_1 P$, (в) $\Delta_0 Q \supset \Delta_1 Q$,
(б) $\nabla_0 P \supset \neg \alpha_1 P$, (г) $\nabla_0 Q \supset \neg \alpha_1 Q$,

то в Σ выводимы также формулы

(1) $\Delta_0 (P \,\&\, Q) \supset \Delta_1 (P \,\&\, Q)$,
(2) $\Delta_0 (P \vee Q) \supset \Delta_1 (P \vee Q)$,
(3) $\Delta_0 (P \supset Q) \supset \Delta_1 (P \supset Q)$,
(4) $\nabla_0 (P \,\&\, Q) \supset \neg \alpha_1 (P \,\&\, Q)$,
(5) $\nabla_0 (P \vee Q) \supset \neg \alpha_1 (P \vee Q)$,
(6) $\nabla_0 (P \supset Q) \supset \neg \alpha_1 (P \supset Q)$.

Докажем лемму 2. Предположим, что в Σ выводимы формулы (а)—(г).

Заметим прежде всего, что формулы (1)—(6) представимы соответственно в виде:

(1*) $(\Delta_0 P \,\&\, \Delta_0 Q) \supset (\Delta_1 P \,\&\, \Delta_1 Q)$,
(2*) $(\Delta_0 P \vee \Delta_0 Q) \supset (\Delta_1 P \vee \Delta_1 Q)$,
(3*) $(\nabla_0 P \vee \Delta_0 Q) \supset (\alpha_1 P \supset \Delta_1 Q)$,
(4*) $(\nabla_0 P \vee \nabla_0 Q) \supset \neg (\alpha_1 P \,\&\, \alpha_1 Q)$,
(5*) $(\nabla_0 P \,\&\, \nabla_0 Q) \supset \neg \neg \neg (\alpha_1 P \vee \alpha_1 Q)$,
(6*) $(\Delta_0 P \,\&\, \nabla_0 Q) \supset \neg (\Delta_1 P \supset \alpha_1 Q)$.

Отметим теперь следующее предложение:

Каковы бы ни были формулы A, B, C, D, E, F, G, H, в исчислении Σ выводимы формулы:

$$
\begin{array}{ll}
(7) & ((A \supset C) \& (B \supset D)) \supset ((A \& B) \supset (C \& D)), \\
(8) & ((A \supset C) \& (B \supset D)) \supset ((A \vee B) \supset (C \vee D)), \\
(9) & ((E \supset \neg G) \& (B \supset D)) \supset ((E \vee B) \supset (G \supset D)), \\
(10) & ((E \supset \neg G) \& (F \supset \neg H)) \supset ((E \vee F) \supset \neg (G \& H)), \\
(11) & ((E \supset \neg G) \& (F \supset \neg H)) \supset ((E \& F) \supset \neg\neg\neg (G \vee H)), \\
(12) & ((A \supset C) \& (F \supset \neg H)) \supset ((A \& F) \supset \neg (C \supset H)).
\end{array}
$$

Будем рассматривать (7)—(12) в предположении, что роль A, B, C, D, E, F, G, H играют соответственно формулы

$$\Delta_0 P,\ \Delta_0 Q,\ \Delta_1 P,\ \Delta_1 Q,\ \nabla_0 P,\ \nabla_0 Q,\ \alpha_1 P,\ \alpha_1 Q.$$

Из осуществимости выводов в Σ формул (а)—(г) вытекает осуществимость выводов в Σ следующих формул:

$$
\begin{array}{ll}
(13) & (\Delta_0 P \supset \Delta_1 P) \& (\Delta_0 Q \supset \Delta_1 Q), \\
(14) & (\nabla_0 P \supset \neg\alpha_1 P) \& (\Delta_0 Q \supset \Delta_1 Q), \\
(15) & (\nabla_0 P \supset \neg\alpha_1 P) \& (\nabla_0 Q \supset \neg\alpha_1 Q), \\
(16) & (\Delta_0 P \supset \Delta_1 P) \& (\nabla_0 Q \supset \neg\alpha_1 Q).
\end{array}
$$

Применяя к парам формул (13) и (7), (13) и (8), (14) и (9), (15) и (10), (15) и (11), (16) и (12) правило вывода I, получаем формулы (1*)—(6*). Следовательно, формулы (1)—(6) выводимы в Σ.

Лемма 3. *Если формула P такова, что в Σ выводимы формулы*

$$\text{(а)}\quad \Delta_0 P \supset \Delta_1 P, \qquad \text{(б)}\quad \nabla_0 P \supset \neg\alpha_1 P,$$

то в Σ выводимы также формулы

$$
\begin{array}{ll}
(17) & \Delta_0 \neg P \supset \Delta_1 \neg P, \\
(18) & \Delta_0 \forall X P \supset \Delta_1 \forall X P, \\
(19) & \Delta_0 \exists X P \supset \Delta_1 \exists X P, \\
(20) & \nabla_0 \neg P \supset \neg\alpha_1 \neg P, \\
(21) & \nabla_0 \forall X P \supset \neg\alpha_1 \forall X P, \\
(22) & \nabla_0 \exists X P \supset \neg\alpha_1 \exists X P.
\end{array}
$$

Буква X обозначает какую-либо переменную.

Докажем лемму 3. Предположим, что в Σ выводимы формулы (а) и (б).

Заметим прежде всего, что формулы (17)—(22) представимы соответственно в виде

$$
\begin{array}{llll}
(17^*) & \nabla_0 P \supset \neg\alpha_1 P, & (20^*) & \Delta_0 P \supset \neg\neg\Delta_1 P, \\
(18^*) & \forall X \Delta_0 P \supset \forall X \Delta_1 P, & (21^*) & \exists X \nabla_0 P \supset \neg\forall X \alpha_1 P, \\
(19^*) & \exists X \Delta_0 P \supset \exists X \Delta_1 P, & (22^*) & \forall X \nabla_0 P \supset \neg\neg\neg\exists X \alpha_1 P.
\end{array}
$$

Осуществимость выводов в Σ формул (17*)—(20*) очевидна.

Осуществимость выводов в Σ двух последних формул вытекает из следующего предложения:

Каковы бы ни были формулы E, G и переменная X, в исчислении Σ выводимы формулы

$$\forall X(E \supset \neg G) \supset (\exists XE \supset \neg \forall XG),$$
$$\forall X(E \supset \neg G) \supset (\forall XE \supset \neg\neg\neg \exists XG).$$

Итак, формулы (17)—(22) выводимы в Σ.

Заключительная часть доказательства теоремы 35 проводится так же, как в теореме 2.

Теорема 36. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула*

$$\alpha_1 R \supset \alpha_0 R.$$

Доказательство. В исчислении Σ выводима формула

$$(\nabla_0 R \supset \neg \alpha_1 R) \supset (\alpha_1 R \supset \neg \nabla_0 R).$$

На основании теоремы 35 в Σ выводима формула $(\nabla_0 R \supset \neg \alpha_1 R)$. По правилу вывода I получаем формулу $(\alpha_1 R \supset \alpha_0 R)$.

17.2. Из изложенного выше вытекает, что, какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы

$$\begin{array}{lll} \Delta_1 R \supset R, & \nabla_1 R \supset \neg R, & R \supset \alpha_1 R, \\ \Delta_0 R \supset \Delta_1 R, & \nabla_0 R \supset \nabla_1 R, & \alpha_1 R \supset \alpha_0 R. \\ \Delta_1 R \supset \theta_2 R, & \theta_2 R \supset \alpha_1 R. & \end{array}$$

Выпишем обратные импликации:

$$\begin{array}{llllll} (а) & R \supset \Delta_1 R, & (б) & \neg R \supset \nabla_1 R, & (в) & \alpha_1 R \supset R, \\ (г) & \Delta_1 R \supset \Delta_0 R, & (д) & \nabla_1 R \supset \nabla_0 R, & (е) & \alpha_0 R \supset \alpha_1 R, \\ (ж) & \theta_2 R \supset \Delta_1 R, & (з) & \alpha_1 R \supset \theta_2 R. & & \end{array}$$

Докажем, что среди формул, представимых в виде (а), имеются невосполнимые формулы. Таковы же утверждения докажем для формул, представимых в виде (б), . . . , для формул, представимых в виде (з). Исходной формулой для построения соответствующих примеров будет служить формула Γ, введенная в разделе 13.2.

Полагаем:

$$G_0 \overset{\circ}{=} \forall X(\Gamma \vee \neg \Gamma), \quad G_1 \overset{\circ}{=} \neg \forall X(\Gamma \vee \neg \Gamma).$$

Следующие формулы восполнимы: G_1 (см. раздел 13.2), $\neg G_0$ (так как $\neg G_0 \overset{\circ}{=} G_1$), $\theta_2 G_0$ (так как G_0 выводима в исчислении Σ^+ и, следовательно, $\theta_2 G_0$ выводима в Σ), $\alpha_1 G_0$ (так как на основании теоремы 30 в Σ выводима формула $\theta_2 G_0 \supset \alpha_1 G_0$), $\alpha_1 G_1$ (так как восполнима формула G_1 и α_1 является правильной погружающей операцией).

Следующие формулы не имеют восполнений: $\Delta_1 G_1$ (так как

$\Delta_1 G_1 \overline{\circ} \Delta_1 \neg G_0 \overline{\circ} \neg \alpha_1 G_0$ и формула $\alpha_1 G_0$ восполнима), $\nabla_1 G_0$ (так как $\nabla_1 G_0 \overline{\circ} \neg \alpha_1 G_0$ и формула $\alpha_1 G_0$ восполнима), G_0 (так как $\neg G_0 \overline{\circ} G_1$ и формула G_1 восполнима), $\Delta_1 G_0$ (так как на основании теоремы 28 в Σ выводима формула $\Delta_1 G_0 \supset G_0$ и формула G_0 не имеет восполнений), $\theta_2 G_1$ (см. раздел 13.2).

Из сказанного следует, что формулы

$$G_1 \supset \Delta_1 G_1, \qquad \neg G_0 \supset \nabla_1 G_0, \qquad \alpha_1 G_0 \supset G_0,$$
$$\theta_2 G_0 \supset \Delta_1 G_0, \qquad \alpha_1 G_1 \supset \theta_2 G_1$$

не имеют восполнений.

Введем теперь новые формулы G_2 и G_3. Для построения этих формул мы введем в рассмотрение формулу Γ_* типа $[X]$, выбранную с таким расчетом, чтобы были восполнимы следующие две формулы:

$$\neg \forall X (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*), \qquad \forall X (\alpha_1 \Gamma_* \supset \neg \neg \Delta_1 \Gamma_*).$$

Такую формулу Γ_* можно получить, например, основываясь на результатах работы М. Девиса [23].

Формулы G_2 и G_3 строим следующим образом:

$$G_2 \overline{\circ} \exists X \neg (\neg \neg \Gamma_* \supset \Gamma_*), \qquad G_3 \overline{\circ} \neg G_2.$$

Очевидны следующие графические равенства:

$$\alpha_0 G_2 \overline{\circ} \neg \forall X (\nabla_0 \Gamma_* \vee \Delta_0 \Gamma_*),$$
$$\nabla_1 G_2 \overline{\circ} \neg \neg \neg \exists X \neg (\neg \neg \alpha_1 \Gamma_* \supset \Delta_1 \Gamma_*).$$

Из теоремы 16 вытекает, что в Σ выводима формула

$$(\nabla_0 \Gamma_* \vee \Delta_0 \Gamma_*) \supset (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*).$$

Следовательно, в Σ выводима формула

$$\neg \forall X (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*) \supset \neg \forall X (\nabla_0 \Gamma_* \vee \Delta_0 \Gamma_*).$$

Формула $\neg \forall X (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*)$ восполнима. Следовательно, формула $\alpha_0 G_2$ тоже восполнима. Далее, в Σ выводима формула

$$\neg \neg \neg \exists X \neg (\neg \neg \alpha_1 \Gamma_* \supset \Delta_1 \Gamma_*) \equiv \forall X (\alpha_1 \Gamma_* \supset \neg \neg \Delta_1 \Gamma_*).$$

Формула $\forall X (\alpha_1 \Gamma_* \supset \neg \neg \Delta_1 \Gamma_*)$ восполнима. Следовательно, восполнима и формула $\nabla_1 G_2$. Заметим теперь, что $\Delta_1 G_3 \overline{\circ} \Delta_1 \neg G_2 \overline{\circ} \neg \alpha_1 G_2 \overline{\circ} \nabla_1 G_2$ Следовательно, формула $\Delta_1 G_3$ восполнима.

Следующие формулы не имеют восполнений: $\alpha_1 G_2$ (так как $\neg \alpha_1 G_2 \overline{\circ} \Delta_1 \neg G_2 \overline{\circ} \Delta_1 G_3$), $\nabla_0 G_2$ (так как $\neg \nabla_0 G_2 \overline{\circ} \alpha_0 G_2$), $\Delta_0 G_3$ (так как $\Delta_0 G_3 \overline{\circ} \Delta_0 \neg G_2 \overline{\circ} \nabla_0 G_2$).

Из сказанного следует, что формулы

$$(\Delta_1 G_3 \supset \Delta_0 G_3), \qquad (\nabla_1 G_2 \supset \nabla_0 G_2), \qquad (\alpha_0 G_2 \supset \alpha_1 G_2)$$

не имеют восполнений.

17.3. Сопоставим теперь операции ∇_1 и τ. Оказывается, что, как среди формул, представимых в виде $(\tau R \supset \nabla_1 R)$, так и среди формул, представимых в виде $(\nabla_1 R \supset \tau R)$, имеются невосполнимые формулы. Чтобы убедиться в этом, введем новые формулы G_4 и G_5. Полагаем

$$G_4 \overset{\circ}{=} \neg\neg \forall X (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*),$$
$$G_5 \overset{\circ}{=} \exists X \neg (\neg\neg (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*) \supset (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*)).$$

Очевидны следующие графические равенства:

$$\nabla_1 G_4 \overset{\circ}{=} \neg \alpha_1 G_4 \overset{\circ}{=} \neg\neg\neg \forall X \neg\neg (\alpha_1 \Gamma_* \vee \neg \Delta_1 \Gamma_*),$$
$$\tau G_4 \overset{\circ}{=} \neg \forall X (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*),$$
$$\nabla_1 G_5 \overset{\circ}{=} \neg \alpha_1 G_5 \overset{\circ}{=} \neg\neg\neg \exists X \neg (\neg\neg\neg\neg (\alpha_1 \Gamma_* \vee \neg \Delta_1 \Gamma_*) \supset (\Delta_1 \Gamma_* \vee \neg \alpha_1 \Gamma_*)),$$
$$\tau G_5 \overset{\circ}{=} \forall X (\neg\neg (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*) \supset (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*)).$$

В исчислении Σ выводимы формулы

$$\nabla_1 G_4 \equiv \neg \forall X \neg\neg (\alpha_1 \Gamma_* \vee \neg \Delta_1 \Gamma_*),$$
$$\nabla_1 G_5 \equiv \forall X ((\Delta_1 \Gamma_* \supset \alpha_1 \Gamma_*) \supset (\alpha_1 \Gamma_* \supset \neg\neg \Delta_1 \Gamma_*)).$$

На основании теоремы 28 формула $(\Delta_1 \Gamma_* \supset \alpha_1 \Gamma_*)$ выводима в Σ. Следовательно, в исчислении Σ выводима формула

$$\nabla_1 G_5 \equiv \forall X (\alpha_1 \Gamma_* \supset \neg\neg \Delta_1 \Gamma_*).$$

Отсюда вытекает, что формула $\nabla_1 G_5$ восполнима. Далее, в Σ выводимы формулы

$$\Gamma_* \supset \alpha_1 \Gamma_*, \qquad \neg \Gamma_* \supset \neg \Delta_1 \Gamma_*$$

(см. теорему 28) и, следовательно, в Σ выводима формула

$$\neg \forall X \neg\neg (\alpha_1 \Gamma_* \vee \neg \Delta_1 \Gamma_*) \supset \neg \forall X \neg\neg (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*).$$

Формула $\neg \forall X \neg\neg (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*)$ не имеет восполнений (так как в Σ выводима формула $\forall X \neg\neg (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*)$). Следовательно, не имеет восполнений и формула

$$\neg \forall X \neg\neg (\alpha_1 \Gamma_* \vee \neg \Delta_1 \Gamma_*).$$

Отсюда вытекает, что $\nabla_1 G_4$ не имеет восполнений. Отметим, наконец, что формула τG_4 восполнима, а τG_5 не имеет восполнений (так как формула $\neg\neg (\Gamma_* \vee \neg \Gamma_*)$ восполнима).

Итак, формулы τG_4 и $\nabla_1 G_5$ восполнимы, а формулы $\nabla_1 G_4$ и τG_5 не имеют восполнений. Следовательно, формулы

$$\tau G_4 \supset \nabla_1 G_4, \qquad \nabla_1 G_5 \supset \tau G_5$$

не имеют восполнений.

§ 18. Некоторые видоизменения операции α_1

18.1. В этом разделе определяется и изучается новая погружающая операция α_2, представляющая собой видоизменение операции α_1. Операция α_2 обладает определенным преимуществом перед опера-

цией α_1: она вносит существенно меньшие (вообще говоря) изменения в формулы, чем операция α_1. Соотношение между операциями α_1 и α_2 аналогично соотношению между операциями θ_2 и θ_6.

Предварительно определим формулы одного специального типа, называемые в дальнейшем формулами типа Ω. *Формулы типа* Ω характеризуются следующим индуктивным определением (формулируются лишь основные порождающие правила):

а) всякая элементарная формула является формулой типа Ω, б) если P и Q — формулы типа Ω, то $(P \& Q)$ является формулой типа Ω, в) если формулы P и Q таковы, что одна из этих формул квазиэлементарна, а другая является формулой типа Ω, то $(P \vee Q)$ является формулой типа Ω, г) если P — произвольная формула, а Q — формула типа Ω, то $(P \supset Q)$ является формулой типа Ω, д) если P — произвольная формула, то $\neg P$ является формулой типа Ω, е) если P — формула типа Ω и X — произвольная переменная, то $\forall XP$ является формулой типа Ω.

Например, каковы бы ни были формулы P, Q, R, переменные X и Y и квазиэлементарная формула G, формула

$$(\exists X(P \vee Q) \vee \forall YR) \supset \forall Y((G \vee (\forall XR \supset \neg Q)) \& \neg(\exists X R \vee (R \supset P)))$$

является формулой типа Ω.

Нетрудно доказать, что существует конструктивный метод (алгорифм) распознавания формул типа Ω среди всевозможных логико-арифметических формул.

18.2. Операция α_2 задается схемой, определяющей одновременно операцию α_2 и три вспомогательные операции: $\bar{\alpha}_2$, Δ_2 и $\bar{\Delta}_2$. Эта схема имеет следующий вид:

$\alpha_2(T = S) \to (T = S)$;
$\alpha_2(P \& Q) \to (\alpha_2 P \& \alpha_2 Q)$;
$\alpha_2(P \vee Q) \to (\alpha_2 P \vee \alpha_2 Q)$, если $(P \vee Q)$ — простая дизъюнкция*;
$\alpha_2(P \vee Q) \to \neg\neg(\bar{\alpha}_2 P \vee \bar{\alpha}_2 Q)$ в остальных случаях;
$\alpha_2(P \supset Q) \to (\bar{\Delta}_2 P \supset \alpha_2 Q)$;
$\alpha_2 \neg P \to \neg \bar{\Delta}_2 P$;
$\alpha_2 \forall XP \to \forall X \alpha_2 P$;
$\alpha_2 \exists XP \to \neg\neg \exists X \bar{\alpha}_2 P$;
$\bar{\alpha}_2(T = S) \to (T = S)$;
$\bar{\alpha}_2(P \& Q) \to (\bar{\alpha}_2 P \& \bar{\alpha}_2 Q)$;
$\bar{\alpha}_2(P \vee Q) \to (\bar{\alpha}_2 P \vee \bar{\alpha}_2 Q)$;
$\bar{\alpha}_2(P \supset Q) \to (\bar{\Delta}_2 P \supset \bar{\alpha}_2 Q)$;
$\bar{\alpha}_2 \neg P \to \neg \bar{\Delta}_2 P$;

* См. раздел 12.1.

$\overline{\alpha}_2 \forall XP \to \forall X\alpha_2 P$;
$\overline{\alpha}_2 \exists XP \to \exists X\overline{\alpha}_2 P$;

$\Delta_2(T = S) \to (T = S)$;
$\Delta_2(P \& Q) \to (\Delta_2 P \& \Delta_2 Q)$;
$\Delta_2(P \vee Q) \to (\Delta_2 P \vee \Delta_2 Q)$;
$\Delta_2(P \supset Q) \to (\overline{\alpha}_2 P \supset \Delta_2 Q)$, если Q — формула типа Ω;
$\Delta_2(P \supset Q) \to (\alpha_2 P \supset \Delta_2 Q)$ в остальных случаях;
$\Delta_2 \neg P \to \neg \overline{\alpha}_2 P$;
$\Delta_2 \forall XP \to \forall X\Delta_2 P$;
$\Delta_2 \exists XP \to \exists X\Delta_2 P$;

$\overline{\Delta}_2(T = S) \to (T = S)$;
$\overline{\Delta}_2(P \& Q) \to (\overline{\Delta}_2 P \& \overline{\Delta}_2 Q)$;
$\overline{\Delta}_2(P \vee Q) \to (\overline{\Delta}_2 P \vee \overline{\Delta}_2 Q)$;
$\overline{\Delta}_2(P \supset Q) \to (\overline{\alpha}_2 P \supset \overline{\Delta}_2 Q)$;
$\overline{\Delta}_2 \neg P \to \neg \overline{\alpha}_2 P$;
$\overline{\Delta}_2 \forall XP \to \forall X\Delta_2 P$;
$\overline{\Delta}_2 \exists XP \to \exists X\overline{\Delta}_2 P$.

Введем еще операцию ∇_2, полагая для каждой формулы R:

$$\nabla_2 R \overset{\circ}{=} \neg \alpha_2 R.$$

Докажем прежде всего следующую вспомогательную теорему

Теорема 37. *Если R — формула типа Ω, то в исчислении Σ выводима формула*

$$\neg\neg \Delta_2 R \equiv \Delta_2 R.$$

Доказательство проводится методом индукции, в основе которого лежат порождающие правила для формул типа Ω.

Лемма 1. *Если P — элементарная формула, то в Σ выводима формула*

$$\neg\neg \Delta_2 P \equiv \Delta_2 P.$$

Лемма 1 очевидна.

Лемма 2. *Если формулы P и Q таковы, что в Σ выводимы формулы*

$$\text{(а)} \quad \neg\neg \Delta_2 P \equiv \Delta_2 P, \qquad \text{(б)} \quad \neg\neg \Delta_2 Q \equiv \Delta_2 Q,$$

то в Σ выводима формула

$$(1) \quad \neg\neg \Delta_2(P \& Q) \equiv \Delta_2(P \& Q).$$

Докажем лемму 2. Формула (1) представима в виде

$$(2) \quad \neg\neg(\Delta_2 P \& \Delta_2 Q) \equiv (\Delta_2 P \& \Delta_2 Q).$$

Формула (2) эквивалентна в Σ формуле

$$(3) \quad (\neg\neg\Delta_2 P \,\&\, \neg\neg\Delta_2 Q) \equiv (\Delta_2 P \,\&\, \Delta_2 Q).$$

Предположим, что в Σ выводимы формулы (а) и (б). Тогда на основании закона устойчивости формул в исчислении Σ формула (3) выводима в исчислении Σ. Следовательно, формула (1) выводима в Σ.

Лемма 3. *Если формула P квазиэлементарна, а формула Q такова, что в Σ выводима формула*

$$(б) \quad \neg\neg\Delta_2 Q \equiv \Delta_2 Q,$$

то в Σ выводима формула

$$(4) \quad \neg\neg\Delta_2 (P \vee Q) \equiv \Delta_2 (P \vee Q).$$

Докажем лемму 3. Предположим, что P — квазиэлементарная формула и что в Σ выводима формула (б). Формула (4) представима в виде

$$(5) \quad \neg\neg(\Delta_2 P \vee \Delta_2 Q) \equiv (\Delta_2 P \vee \Delta_2 Q).$$

Легко видеть, что $\Delta_2 P$ — квазиэлементарная формула. Следовательно, в Σ выводимы формулы

$$(6) \quad \Delta_2 P \vee \neg\Delta_2 P, \qquad \neg\neg\Delta_2 P \equiv \Delta_2 P.$$

Заметим теперь, что, каковы бы ни были формулы A и B, в Σ выводима формула

$$(A \vee \neg A) \supset (\neg\neg(A \vee B) \equiv (\neg\neg A \vee \neg\neg B)).$$

Следовательно, формула (5) эквивалентна в Σ формуле

$$(7) \quad (\neg\neg\Delta_2 P \vee \neg\neg\Delta_2 Q) \equiv (\Delta_2 P \vee \Delta_2 Q).$$

Из осуществимости выводов в Σ формулы (б) и формулы

$$\neg\neg\Delta_2 P \equiv \Delta_2 P$$

следует (на основании закона устойчивости формул в Σ) осуществимость вывода в исчислении Σ формулы (7). Следовательно, формула (4) выводима в Σ.

Лемма 3*. *Если формула Q квазиэлементарна, а формула P такова, что в Σ выводима формула*

$$\neg\neg\Delta_2 P \equiv \Delta_2 P,$$

то в Σ выводима формула

$$\neg\neg\Delta_2 (P \vee Q) \equiv \Delta_2 (P \vee Q).$$

Доказательство леммы 3* аналогично доказательству леммы 3.

Лемма 4. *Если P — произвольная формула, а формула Q такова, что в Σ выводима формула*

$$(б) \quad \neg\neg\Delta_2 Q \equiv \Delta_2 Q,$$

то в Σ выводима формула

$$(8) \quad \neg\neg\Delta_2(P \supset Q) \equiv \Delta_2(P \supset Q).$$

Докажем лемму 4. Предположим, что в Σ выводима формула (б). Формула (8) представима в виде

$$(9) \quad \neg\neg(G \supset \Delta_2 Q) \equiv (G \supset \Delta_2 Q),$$

где $G \overset{\circ}{=} \overline{\alpha}_2 P$ или $G \overset{\circ}{=} \alpha_2 P$.

Каковы бы ни были формулы A и B, в Σ выводима формула

$$\neg\neg(A \supset B) \equiv (A \supset \neg\neg B).$$

Следовательно, формула (9) эквивалентна в Σ формуле

$$(G \supset \neg\neg\Delta_2 Q) \equiv (G \supset \Delta_2 Q).$$

Дальнейшая часть доказательства леммы очевидна.

Лемма 5. *Какова бы ни была формула P, в Σ выводима формула*

$$\neg\neg\Delta_2\neg P \equiv \Delta_2\neg P.$$

Лемма 5 очевидна.

Лемма 6. *Если формула P такова, что в Σ выводима формула*

$$(а) \quad \neg\neg\Delta_2 P \equiv \Delta_2 P$$

и если X — произвольная переменная, то в Σ выводима формула

$$(10) \quad \neg\neg\Delta_2\forall X P \equiv \Delta_2\forall X P.$$

Докажем лемму 6. Предположим, что в Σ выводима формула (а). Формула (10) представима в виде

$$(11) \quad \neg\neg\forall X\Delta_2 P \equiv \forall X\Delta_2 P.$$

Из осуществимости вывода в Σ формулы (а) следует, что формула (11) эквивалентна в Σ формуле

$$(12) \quad \neg\neg\forall X\neg\neg\Delta_2 P \equiv \forall X\neg\neg\Delta_2 P.$$

Отметим теперь следующее предложение:

Каковы бы ни были формула A и переменная X, в исчислении Σ выводима формула

$$\neg\neg\forall X\neg\neg A \equiv \forall X\neg\neg A.$$

Следовательно, формула (12) выводима в Σ. Формула (10) эквива-

лентна в Σ формуле (12). Следовательно, формула (10) выводима в Σ.

Лемма 6 доказана.

Заключительная часть доказательства теоремы 37 аналогична заключительной части доказательства теоремы 2.

Перейдем теперь к основной теореме настоящего раздела.

Теорема 38. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы:*

$$\Delta_2 R \equiv \Delta_1 R, \qquad \alpha_2 R \equiv \alpha_1 R,$$
$$\neg\bar{\Delta}_2 R \equiv \neg\Delta_1 R, \qquad \neg\bar{\alpha}_2 R \equiv \neg\alpha_1 R.$$

Доказательство проводится методом индукции.

Лемма 1. *Если P — элементарная формула, то в Σ выводимы формулы*

$$\Delta_2 P \equiv \Delta_1 P, \qquad \alpha_2 P \equiv \alpha_1 P,$$
$$\neg\bar{\Delta}_2 P \equiv \neg\Delta_1 P, \qquad \neg\bar{\alpha}_2 P \equiv \neg\alpha_1 P.$$

Лемма 1 очевидна.

Лемма 2. *Если формулы P и Q таковы, что в Σ выводимы формулы*

(а) $\Delta_2 P \equiv \Delta_1 P, \quad \alpha_2 P \equiv \alpha_1 P, \quad \neg\bar{\Delta}_2 P \equiv \neg\Delta_1 P, \quad \neg\bar{\alpha}_2 P \equiv \neg\alpha_1 P,$

(б) $\Delta_2 Q \equiv \Delta_1 Q, \quad \alpha_2 Q \equiv \alpha_1 Q, \quad \neg\bar{\Delta}_2 Q \equiv \neg\Delta_1 Q, \quad \neg\bar{\alpha}_2 Q \equiv \neg\alpha_1 Q,$

то в Σ выводимы также формулы:

(1) $\Delta_2(P \& Q) \equiv \Delta_1(P \& Q),$

(2) $\Delta_2(P \vee Q) \equiv \Delta_1(P \vee Q),$

(3) $\Delta_2(P \supset Q) \equiv \Delta_1(P \supset Q),$

(4) $\alpha_2(P \& Q) \equiv \alpha_1(P \& Q),$

(5) $\alpha_2(P \vee Q) \equiv \alpha_1(P \vee Q),$

(6) $\alpha_2(P \supset Q) \equiv \alpha_1(P \supset Q),$

(7) $\neg\bar{\Delta}_2(P \& Q) \equiv \neg\Delta_1(P \& Q),$

(8) $\neg\bar{\Delta}_2(P \vee Q) \equiv \neg\Delta_1(P \vee Q),$

(9) $\neg\bar{\Delta}_2(P \supset Q) \equiv \neg\Delta_1(P \supset Q),$

(10) $\neg\bar{\alpha}_2(P \& Q) \equiv \neg\alpha_1(P \& Q),$

(11) $\neg\bar{\alpha}_2(P \vee Q) \equiv \neg\alpha_1(P \vee Q),$

(12) $\neg\bar{\alpha}_2(P \supset Q) \equiv \neg\alpha_1(P \supset Q).$

Докажем лемму 2. Предположим, что в Σ выводимы формулы (а) и (б). Сначала рассмотрим формулы (3) и (5).

Предположим, что Q является формулой типа Ω. Тогда формула (3) представима в виде

(13) $(\bar{\alpha}_2 P \supset \Delta_2 Q) \equiv (\alpha_1 P \supset \Delta_1 Q).$

Из теоремы 37 и из осуществимости вывода в Σ формулы $(\Delta_2 Q \equiv \Delta_1 Q)$ следует, что в Σ выводимы формулы

$$(14)\quad \Delta_2 Q \equiv \neg\neg\Delta_2 Q, \quad \Delta_1 Q \equiv \neg\neg\Delta_1 Q.$$

Следовательно, формула (13) эквивалентна в Σ формуле

$$(15)\quad (\bar{\alpha}_2 P \supset \neg\neg\Delta_2 Q) \equiv (\alpha_1 P \supset \neg\neg\Delta_1 Q).$$

Отметим теперь следующее предложение (которое неоднократно будет применяться в процессе доказательства теоремы 38):

Лемма (*). *Каковы бы ни были формулы A и B, в исчислении Σ выводима формула*

$$(A \supset \neg\neg B) \equiv (\neg\neg A \supset \neg\neg B).$$

Из леммы (*) следует, что формула (15) эквивалентна в Σ формуле

$$(16)\quad (\neg\neg\bar{\alpha}_2 P \supset \neg\neg\Delta_2 Q) \equiv (\neg\neg\alpha_1 P \supset \neg\neg\Delta_1 Q).$$

Основываясь на формулах (а) и (б) и на законе устойчивости формул в исчислении Σ, мы заключаем, что формула (16) выводима в Σ. Следовательно, формула (13) выводима в Σ.

Предположим теперь, что Q не является формулой типа Ω. Тогда формула (3) представима в виде

$$(17)\quad (\alpha_2 P \supset \Delta_2 Q) \equiv (\alpha_1 P \supset \Delta_1 Q).$$

Осуществимость вывода в Σ формулы (17) очевидна. Итак, формула (3) выводима в Σ.

Переходим к формуле (5). Сначала предположим, что $(P \vee Q)$ — простая дизъюнкция. Будем считать, для определенности, что именно P — квазиэлементарная формула. Легко видеть, что $\alpha_1 P$ — также квазиэлементарная формула и поэтому в Σ выводима формула

$$(18)\quad \alpha_1 P \vee \neg\alpha_1 P.$$

Заметим теперь, что формула (5) представима в виде

$$(19)\quad (\alpha_2 P \vee \alpha_2 Q) \equiv \neg\neg(\alpha_1 P \vee \alpha_1 Q).$$

Каковы бы ни были формулы A и B, в исчислении Σ выводима формула

$$(A \vee \neg A) \supset (\neg\neg(A \vee B) \equiv (\neg\neg A \vee \neg\neg B)).$$

Из этого предложения и из осуществимости вывода в Σ формулы (18) следует, что формула (19) эквивалентна в Σ формуле

$$(20)\quad (\alpha_2 P \vee \alpha_2 Q) \equiv (\neg\neg\alpha_1 P \vee \neg\neg\alpha_1 Q).$$

Из теоремы 27 следует, что формула 20 эквивалентна в Σ формуле

$$(21)\quad (\alpha_2 P \vee \alpha_2 Q) \equiv (\alpha_1 P \vee \alpha_1 Q).$$

Очевидно, что формула (21) выводима в Σ. Следовательно, в Σ выводима формула 19.

Будем теперь предполагать, что формула $(P \vee Q)$ не является простой дизъюнкцией. В этом случае формула (5) представима в виде

$$(22) \qquad \neg\neg(\bar{\alpha}_2 P \vee \bar{\alpha}_2 Q) \equiv \neg\neg(\alpha_1 P \vee \alpha_1 Q).$$

Формула (22) эквивалентна в Σ формуле

$$(23) \qquad \neg(\neg\bar{\alpha}_2 P \,\&\, \neg\bar{\alpha}_2 Q) \equiv \neg(\neg\alpha_1 P \,\&\, \neg\alpha_1 Q).$$

Очевидно, что формула (23) выводима в Σ. Следовательно, в Σ выводима формула (22).

Из сказанного вытекает, что формула (5) выводима в Σ.

Переходим к рассмотрению формул (1), (2), (4) и (6). Эти формулы представимы соответственно в виде

$$\begin{array}{ll}
(1^*) & (\Delta_2 P \,\&\, \Delta_2 Q) \equiv (\Delta_1 P \,\&\, \Delta_1 Q), \\
(2^*) & (\Delta_2 P \vee \Delta_2 Q) \equiv (\Delta_1 P \vee \Delta_1 Q), \\
(4^*) & (\alpha_2 P \,\&\, \alpha_2 Q) \equiv (\alpha_1 P \,\&\, \alpha_1 Q), \\
(6^*) & (\bar{\Delta}_2 P \supset \alpha_2 Q) \equiv (\Delta_1 P \supset \alpha_1 Q).
\end{array}$$

Осуществимость выводов в Σ формул (1*), (2*) и (4*) очевидна Из осуществимости выводов в Σ формул (6), из теоремы 27, леммы (*) и закона устойчивости формул в Σ следует, что формула (6*) эквивалентна в Σ формуле

$$(24) \qquad (\neg\neg\bar{\Delta}_2 P \supset \neg\neg\alpha_2 Q) \equiv (\neg\neg\Delta_1 P \supset \neg\neg\alpha_1 Q).$$

Легко видеть, что формула (24) выводима в Σ. Следовательно, в Σ выводима формула (6*).

Формулы (7)—(12) представимы соответственно в виде

$$\begin{array}{ll}
(7^*) & \neg(\bar{\Delta}_2 P \,\&\, \bar{\Delta}_2 Q) \equiv \neg(\Delta_1 P \,\&\, \Delta_1 Q), \\
(8^*) & \neg(\bar{\Delta}_2 P \vee \bar{\Delta}_2 Q) \equiv \neg(\Delta_1 P \vee \Delta_1 Q), \\
(9^*) & \neg(\bar{\alpha}_2 P \supset \bar{\Delta}_2 Q) \equiv \neg(\alpha_1 P \supset \Delta_1 Q), \\
(10^*) & \neg(\bar{\alpha}_2 P \,\&\, \bar{\alpha}_2 Q) \equiv \neg(\alpha_1 P \,\&\, \alpha_1 Q), \\
(11^*) & \neg(\bar{\alpha}_2 P \vee \bar{\alpha}_2 Q) \equiv \neg\neg\neg(\alpha_1 P \vee \alpha_1 Q), \\
(12^*) & \neg(\bar{\Delta}_2 P \supset \bar{\alpha}_2 Q) \equiv \neg(\Delta_1 P \supset \alpha_1 Q).
\end{array}$$

Легко установить, что формулы (7*)—(12*) эквивалентны в Σ соответственно формулам

$$\begin{array}{ll}
(7^{**}) & (\neg\neg\bar{\Delta}_2 P \,\&\, \neg\neg\bar{\Delta}_2 Q) \equiv (\neg\neg\Delta_1 P \,\&\, \neg\neg\Delta_1 Q), \\
(8^{**}) & (\neg\bar{\Delta}_2 P \,\&\, \neg\bar{\Delta}_2 Q) \equiv (\neg\Delta_1 P \,\&\, \neg\Delta_1 Q), \\
(9^{**}) & (\neg\neg\bar{\alpha}_2 P \,\&\, \neg\bar{\Delta}_2 Q) \equiv (\neg\neg\alpha_1 P \,\&\, \neg\Delta_1 Q), \\
(10^{**}) & (\neg\neg\bar{\alpha}_2 P \,\&\, \neg\neg\bar{\alpha}_2 Q) \equiv (\neg\neg\alpha_1 P \,\&\, \neg\neg\alpha_1 Q), \\
(11^{**}) & (\neg\bar{\alpha}_2 P \,\&\, \neg\bar{\alpha}_2 Q) \equiv (\neg\alpha_1 P \,\&\, \neg\alpha_1 Q), \\
(12^{**}) & (\neg\neg\bar{\Delta}_2 P \,\&\, \neg\bar{\alpha}_2 Q) \equiv (\neg\neg\Delta_1 P \,\&\, \neg\alpha_1 Q).
\end{array}$$

Очевидно, что формулы (7**) — (12**) выводимы в Σ. Следовательно, формулы (7) — (12) выводимы в Σ.

Лемма 3. *Если формула P такова, что в Σ выводимы формулы*

$$\text{(a)} \quad \Delta_2 P \equiv \Delta_1 P, \quad \alpha_2 P \equiv \alpha_1 P, \quad \neg\bar{\Delta}_2 P \equiv \neg\Delta_1 P, \quad \neg\bar{\alpha}_2 P \equiv \neg\alpha_1 P,$$

то в Σ выводимы также формулы

$$\begin{array}{ll}
(25) & \Delta_2 \neg P \equiv \Delta_1 \neg P, \\
(26) & \Delta_2 \forall X P \equiv \Delta_1 \forall X P, \\
(27) & \Delta_2 \exists X P \equiv \Delta_1 \exists X P, \\
(28) & \alpha_2 \neg P \equiv \alpha_1 \neg P, \\
(29) & \alpha_2 \forall X P \equiv \alpha_1 \forall X P, \\
(30) & \alpha_2 \exists X P \equiv \alpha_1 \exists X P, \\
(31) & \neg\bar{\Delta}_2 \neg P \equiv \neg\Delta_1 \neg P, \\
(32) & \neg\bar{\Delta}_2 \forall X P \equiv \neg\Delta_1 \forall X P, \\
(33) & \neg\bar{\Delta}_2 \exists X P \equiv \neg\Delta_1 \exists X P, \\
(34) & \neg\bar{\alpha}_2 \neg P \equiv \neg\alpha_1 \neg P, \\
(35) & \neg\bar{\alpha}_2 \forall X P \equiv \neg\alpha_1 \forall X P, \\
(36) & \neg\bar{\alpha}_2 \exists X P \equiv \neg\alpha_1 \exists X P.
\end{array}$$

Буква X обозначает какую-либо переменную.

Докажем лемму 3. Предположим, что в Σ выводимы формулы (a). Формулы (25) — (36) представимы соответственно в виде:

$$\begin{array}{ll}
(25^*) & \neg\bar{\alpha}_2 P \equiv \neg\alpha_1 P, \\
(26^*) & \forall X \Delta_2 P \equiv \forall X \Delta_1 P, \\
(27^*) & \exists X \Delta_2 P \equiv \exists X \Delta_1 P, \\
(28^*) & \neg\bar{\Delta}_2 P \equiv \neg\Delta_1 P, \\
(29^*) & \forall X \alpha_2 P \equiv \forall X \alpha_1 P, \\
(30^*) & \neg\neg\exists X \bar{\alpha}_2 P \equiv \neg\neg\exists X \alpha_1 P, \\
(31^*) & \neg\neg\bar{\alpha}_2 P \equiv \neg\neg\alpha_1 P, \\
(32^*) & \neg\forall X \Delta_2 P \equiv \neg\forall X \Delta_1 P, \\
(33^*) & \neg\exists X \bar{\Delta}_2 P \equiv \neg\exists X \Delta_1 P, \\
(34^*) & \neg\neg\bar{\Delta}_2 P \equiv \neg\neg\Delta_1 P, \\
(35^*) & \neg\forall X \alpha_2 P \equiv \neg\forall X \alpha_1 P, \\
(36^*) & \neg\exists X \bar{\alpha}_2 P \equiv \neg\neg\neg\exists X \alpha_1 P.
\end{array}$$

Осуществимость выводов в Σ формул (25*), (26*), (27*), (29*), (31*), (32*), (34*) и (35*) устанавливается без труда с помощью закона устойчивости формул в исчислении Σ. Формулы (30*), (33*) и (36*) эквивалентны в Σ соответственно формулам

$$\begin{array}{ll}
(30^{**}) & \neg\forall X \neg\bar{\alpha}_2 P \equiv \neg\forall X \neg\alpha_1 P, \\
(33^{**}) & \forall X \neg\bar{\Delta}_2 P \equiv \forall X \neg\Delta_1 P, \\
(36^{**}) & \forall X \neg\bar{\alpha}_2 P \equiv \forall X \neg\alpha_1 P.
\end{array}$$

С помощью закона устойчивости формул в Σ легко устанавливается, что формулы (30**), (33**) и (36**) выводимы в Σ.

Следовательно, формулы (25) — (36) выводимы в Σ.

Заключительная часть доказательства теоремы 38 проводится так же, как в теореме 2.

Теорема 39. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула*:

$$\nabla_2 R \equiv \nabla_1 R.$$

Теорема 39 является следствием теоремы 38.

Теоремы 38 и 39 свидетельствуют о том, что операции Δ_2, ∇_2 и α_2 представляют собой соответственно видоизменения операций Δ_1, ∇_1 и α_1.

18.3. Нетрудно доказать, что формула $\alpha_2 R$ может быть получена из формулы R посредством вставок двух смежных знаков отрицания перед некоторыми положительными вхождениями в R особенных формул. Может оказаться, что, несмотря на наличие многих положительных вхождений в формулу особенных формул, α_2-образ формулы графически равен этой же формуле. Последнее замечание мы проиллюстрируем на следующем примере.

Буквы A, B, C, D, P и Q будут обозначать какие-либо элементарные формулы, а буквы X, Y и Z — какие-либо переменные. Полагаем

$$U \overset{\circ}{=} \exists X \exists Y((P \vee Q) \vee A),$$
$$V \overset{\circ}{=} (\exists Y Q \supset \neg B),$$
$$W \overset{\circ}{=} \forall X \neg (\exists Z (C \vee P) \supset D),$$
$$R \overset{\circ}{=} ((U \supset V) \supset W).$$

Легко убедиться в том, что $\alpha_2 R \overset{\circ}{=} R$.

Заметим, что имеется 7 положительных вхождений в R особенных формул и поэтому формула $\alpha_1 R$ получается из формулы R посредством вставок семи пар знаков отрицания.

18.4. В этом разделе определяются операции Δ_3, ∇_3 и α_3, представляющие собой, так же как и операции Δ_2, ∇_2 и α_2, видоизменения операций Δ_1, ∇_1 и α_1. Однако операции Δ_3, ∇_3 и α_3 не обладают достоинствами операций Δ_2, ∇_2 и α_2. Они представляют интерес с другой точки зрения: способ задания операций Δ_2, ∇_3 и α_3 аналогичен способу задания операций Δ_0, ∇_0 и α_0 и в этом смысле операции Δ_3, ∇_3 и α_3 можно рассматривать как промежуточные операции при переходе от операций Δ_0, ∇_0 и α_0 к операциям Δ_1, ∇_1 и α_1.

Операции Δ_3 и ∇_3 определяются следующей схемой:

$$\Delta_3 (T = S) \rightarrow (T = S),$$
$$\Delta_3 (P \,\&\, Q) \rightarrow (\Delta_3 P \,\&\, \Delta_3 Q),$$
$$\Delta_3 (P \vee Q) \rightarrow (\Delta_3 P \vee \Delta_3 Q),$$

$$\Delta_3(P \supset Q) \to (\neg \nabla_3 P \supset \Delta_3 Q),$$
$$\Delta_3 \neg P \to \neg \neg \nabla_3 P,$$
$$\Delta_3 \forall X P \to \forall X \Delta_3 P,$$
$$\Delta_3 \exists X P \to \exists X \Delta_3 P,$$
$$\nabla_3(T = S) \to \neg (T = S),$$
$$\nabla_3(P \& Q) \to \neg \neg (\nabla_3 P \vee \nabla_3 Q),$$
$$\nabla_3(P \vee Q) \to (\nabla_3 P \& \nabla_3 Q),$$
$$\nabla_3(P \supset Q) \to (\neg \neg \Delta_3 P \& \nabla_3 Q),$$
$$\nabla_3 \neg P \to \neg \neg \Delta_3 P,$$
$$\nabla_3 \forall X P \to \neg \neg \exists X \nabla_3 P,$$
$$\nabla_3 \exists X P \to \forall X \nabla_3 P.$$

Для каждой формулы R полагаем

$$\alpha_3 R \overset{\circ}{=} \neg \nabla_3 R.$$

Методом индукции доказываются следующие две теоремы:

Теорема 40. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула*

$$\neg \neg \nabla_3 R \equiv \nabla_3 R.$$

Теорема 41. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$\Delta_1 R \equiv \Delta_3 R, \qquad \alpha_1 R \equiv \neg \nabla_3 R.$$

Из теорем 40 и 41 вытекает следующая теорема:

Теорема 42. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$\Delta_3 R \equiv \Delta_1 R, \qquad \nabla_3 R \equiv \nabla_1 R, \qquad \alpha_3 R \equiv \alpha_1 R.$$

Следствие. *Операция α_3 является правильной погружающей операцией.*

§ 19. Операции Δ_*, ∇_* и α_*

19.1. В этом параграфе рассматриваются операции Δ_*, ∇_* и α_*. Операции Δ_* и ∇_* определяются следующей схемой:

$$\Delta_*(T = S) \to (T = S), \qquad \nabla_*(T = S) \to \neg (T = S),$$
$$\Delta_*(P \& Q) \to (\Delta_* P \& \Delta_* Q), \qquad \nabla_*(P \& Q) \to (\nabla_* P \vee \nabla_* Q),$$
$$\Delta_*(P \vee Q) \to (\Delta_* P \vee \Delta_* Q), \qquad \nabla_*(P \vee Q) \to (\nabla_* P \& \nabla_* Q),$$
$$\Delta_*(P \supset Q) \to (\neg \nabla_* P \supset \Delta_* Q), \qquad \nabla_*(P \supset Q) \to (\Delta_* P \& \nabla_* Q),$$
$$\Delta_* \neg P \to \neg \neg \nabla_* P, \qquad \nabla_* \neg P \to \Delta_* P,$$
$$\Delta_* \forall X P \to \forall X \Delta_* P, \qquad \nabla_* \forall X P \to \exists X \nabla_* P,$$
$$\Delta_* \exists X P \to \exists X \Delta_* P, \qquad \nabla_* \exists X P \to \forall X \nabla_* P.$$

Для каждой формулы R полагаем

$$\alpha_* R \overset{\circ}{=} \neg \nabla_* R.$$

19.2. Методом индукции доказываются следующие две теоремы:

Теорема 43. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$\Delta_0 R \supset \Delta_* R, \quad \nabla_0 R \supset \nabla_* R.$$

Теорема 44. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$\Delta_* R \supset \Delta_3 R, \quad \nabla_* R \supset \nabla_3 R.$$

Из теорем 44, 42, 28 и 33 следует, что операция Δ_* определяет частный тип понятия конструктивной истинности, а операция ∇_* определяет частный тип понятия конструктивной ложности.

Из теорем 43 и 44 вытекает следующая теорема:

Теорема 45. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводимы формулы*

$$\alpha_* R \supset \alpha_0 R, \quad \alpha_3 R \supset \alpha_* R.$$

Замечание. Операция α_* занимает промежуточное положение между операцией α_0 и операцией α_3. Можно доказать, что она не является видоизменением операции α_0 и не является видоизменением операции α_3.

Теорема 46. *Операция α_* является правильной погружающей операцией.*

Доказательство этой теоремы проводится без труда на основании теоремы 45 и доказанных выше теорем об операциях α_0 и α_3.

Отметим еще следующую теорему:

Теорема 47. *Какова бы ни была формула R, в исчислении Σ выводима формула:*

$$\nabla_* R \supset \tau R.$$

Эта теорема легко доказывается методом индукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марков А. А., Теория алгорифмов. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, XXXVIII (1951), 176—189*.
2. Колмогоров А. Н., О принципе tertium non datur. Математический сборник, **32**, № 4, 646—667 (1925).
3. Kolmogoroff A., Zur Deutung der intuitionistischen Logik. Math. Zeitschrift, **35**, № 1, 58—65 (1932).
4. Kleene S. C., On the interpretation of intuitionistic number theory, Journ. of Symb. Logic, **10**, № 4, 109—123 (1945).
5. Glivenko V., Sur la logique de M. Brouwer, Bull. Acad. Sci. de Belgique, (5), **14**, 225—228 (1928).
6. Glivenko V., Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, Bull. Acad. Sci de Belgique, (5) 15, 183—188 (1929).
7. Heyting A., Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 42—56 (1930).
8. Heyting A., Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik. Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss., phys.-math. Kl., 57—71 (1930).
9. Heyting A., Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik. Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss., phys.-math. Kl., 158—169 (1930).
10. Gentzen G., Untersuchungen über das logische Schließen. I. Math. Zeitschr., **39**, № 2, 176—210 (1934).
11. Gentzen G., Untersuchungen über das logische Schließen. II. Math. Zeitschr., **39**, № 3, 405—431 (1934).
12. Nelson D., Recursive functions and intuitionistic number theory. Trans. Amer. Math. Soc., **61**, № 2, 307—368 (1947).
13. Nelson D., Constructible falsity, Journ. of Symb. Logic, **14**, № 1, 16—26 (1949).
14. Turing A. M., On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. London Math. Soc., ser. 2, **42**, 230—265 (1936).
15. Turing A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. A correction, Proc. London Math. Soc., ser. 2, **43**, 544—546 (1937).
16. Church A., The calculi of lambda-conversions. Annals of mathematical studies, № 6, Princeton, 1941.
17. Schönfinkel M., Über die Bausteine der mathematischen Logic. Math. Annalen, **92**, 305—316 (1924).
18. Kleene S. C., Recursive predicates and quantifiers, Trans. Amer. Math. Soc., **33**, № 1, 41—73 (1943).
19. Gödel K., Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I. Monatshefte für Mathematik und Physik, **38**, 173—198 (1931).
20. Gödel K., Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. Ergebnisse eines math. Kolloquiums, **4**, 34—38 (1933).

---

* В тексте статьи эта работа обозначается также через [TA].

21. Church A., An unsolvable problem of elementary number theory, Amer. Journ. of Math., **58**, 345—363 (1936).
22. Марков А. А., Конструктивная логика. Успехи математич. наук, V, № 3 (37), 187—188 (1950).
23. Davis M., Arithmetical problems and recursively enumerable predicates. Journ. of Symb. Logic, **18**, № 1, 33—41 (1953).
24. Шанин Н. А., О некоторых операциях над логико-арифметическими формулами. ДАН, XCIII, № 5, 779—782 (1953).
25. Шанин Н. А., О погружениях классического логико-арифметического исчисления в конструктивное логико-арифметическое исчисление. ДАН, XCIV, № 2, 193—196 (1954).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Утверждено к печати Математическим институтом им. В. А. Стеклова АН СССР

Редактор издательства *К. П. Гуров*. Технический редактор *Г. А. Астафьева*.
Корректор *Т. С. Петрикова*

РИСО АН СССР № 20-2Р. Т-01588. Издат. № 809. Тип. заказ № 881. Сдано в набор 11/XII 1954 г. Подп. к печ. 24/II 1955 г. Формат бум. $70\times108^1/_{16}$. Печ. лист. 7=9,59. Уч.-издат. 7,4 л. Тираж 3000. Цена 5 руб. 20 коп.

2-я тип. Издательства Академии Наук СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
5	2 сн.	в гл. III	гл. III
24	9 св.	иногда	никогда
83	13 св.	выводным	выводимы
85	5 сн.	предположения	предложения

Труды Математ. института, вып. XLIII