

Е. Л. ШЕНДЕРОВ



ВОЛНОВЫЕ  
ЗАДАЧИ  
ГИДРОАКУСТИКИ

---



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
«СУДОСТРОЕНИЕ»  
ЛЕНИНГРАД ● 1972



Шендеров Е. Л.

Ш47 Волновые задачи гидроакустики. Л., «Судостроение», 1972.  
352 стр.

В монографии излагаются основные методы, используемые при расчетах звуковых полей, излучаемых и дифрагированных телами. Проанализировано взаимодействие звуковых волн с упругими телами, а также прохождение звука через упругие пластины и оболочки. Приведенные материалы являются основой для анализа акустических характеристик различных конструкций.

Книга рассчитана на широкий круг инженеров, занимающихся расчетами звуковых полей в гидроакустике, судостроении и архитектурной акустике, специалистов морского флота и студентов вузов соответствующих специальностей. Отдельные разделы будут полезны специалистам в области электромагнитных волн.

3—18—5  
52—71

543.01-14

В связи с широким применением акустических приборов на судах возникает необходимость вычислять звуковые поля излучателей звука, а также звуковые поля, прошедшие через корпус судна или отраженные от него. При этом приходится встречаться с расчетами, связанными со звукоизлучением различных поверхностей, дифракцией звука на препятствиях, прохождением звуковой волны через упругие пластины и оболочки. Основы теории, используемой при таких расчетах, изложены в хорошо известных руководствах (см., например, С. Н. Ржевкин «Курс лекций по теории звука», Ф. Морз «Колебания и звук», Е. Скучик «Основы акустики»).

Настоящая книга предназначена в основном для инженеров, применяющих в своей практике расчеты звуковых полей. Среди всего многообразия теоретических методов, используемых в акустике, инженер стремится выбрать такие способы решения задач, которые допускали бы анализ физической сущности явления и в то же время исключали необходимость длительных и громоздких расчетов. Однако, к сожалению, расчетные методы акустики в большинстве случаев не приводят к простым формулам, и анализ физики явления возможен только после проведения численных расчетов (иногда называемых численным экспериментом), включающих перебор различных параметров.

При расчетах звуковых полей необходимые величины часто определяются из решения интегральных уравнений или бесконечных систем алгебраических уравнений. Широко распространено разложение выражений, определяющих звуковые поля, в ряды. В этих условиях инженера интересует не столько возможность найти аналитическое решение, сколько возможность получить численные результаты при помощи доступных ему вычислительных средств.

С применением электронных вычислительных машин (ЭВМ) резко увеличился класс задач гидроакустики, для которых могут быть получены численные решения. Так, например, до появления ЭВМ использование рядов по специальным функциям для вычисления дифрагированных и излученных звуковых полей ограничивалось значениями волновых размеров порядка нескольких единиц. Во многих книгах прямо указывалось, что ряды применимы лишь при малых значениях волновых размеров. В настоящее время положение

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ

### § 1. Уравнение Гельмгольца и граничные условия

**Волновое уравнение.** Изучение звуковых процессов в жидкости связано с небольшим числом основных уравнений акустики. В этом параграфе приводится краткая сводка наиболее важных соотношений между величинами, характеризующими звуковое поле. Подробный вывод уравнений содержится в хорошо известных книгах [42, 71, 79, 90].

Звуковое давление  $p$  в жидкости удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $c$  — скорость звука в среде.

Волновое уравнение определяет широкий класс функций. Оно описывает любое волновое движение в жидкости. Фактически волновое уравнение является формулировкой второго закона Ньютона для малых колебаний сжимаемой жидкости.

Физическая интерпретация уравнения (1.1) особенно проста в одномерном случае. Рассмотрим трубку сечением  $1 \text{ см}^2$ , наполненную средней плотностью  $\rho$ . В трубке находится поршень, совершающий колебательное движение в направлении оси  $x$ , совпадающей с осью трубки. Выделим объем внутри трубки, ограниченный двумя плоскостями, расположенными на расстоянии  $dx$  друг от друга. Очевидно, что сила, действующая на элемент в направлении оси  $x$ , равна разности полных давлений  $\tilde{p}$ , действующих на левую и правую грань объема:

$$\tilde{p}(x) - \tilde{p}(x + dx) \approx - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} dx. \quad (1.2)$$

Если смещение левой грани элемента равно  $u(x)$ , а правой  $u(x + dx)$ , то относительная деформация элемента составляет  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Сила инерции элемента равна  $\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . Приравнявая последнее выражение правой части (1.2), получаем

$$- \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

коренным образом изменилось. Расчет одного значения звукового давления в волне, рассеянной цилиндром или сферой, даже при волновых размерах порядка нескольких сотен занимает на ЭВМ несколько секунд, хотя при этом приходится вычислять сотни или тысячи членов ряда. Та же ситуация имеет место при проведении расчетов, связанных с вычислением сложных интегралов, решением интегральных уравнений и систем алгебраических уравнений.

В настоящей книге значительное внимание уделяется методам, эффективным при использовании ЭВМ. Однако возможности существующих ЭВМ также ограничены. Если решение задачи требует десятков или более часов машинного времени, то тот факт, что оно представлено в виде уравнений или алгоритмов, для инженера бесполезен. Поэтому в тех случаях, когда это возможно, рассматривают приближенные асимптотические решения.

Математический аппарат, применяемый в книге, в основном не выходит за рамки курса технического вуза. В тех немногих случаях, когда требуются дополнительные сведения, даются необходимые краткие пояснения.

Вопросы распространения звука в море в книгу не включены, так как они весьма фундаментально изложены в монографиях Л. М. Бреховских «Волны в слоистых средах», Д. П. Сташкевича «Акустика моря», а также И. Толстого и К. Клея «Акустика океана».

Ряд результатов, излагаемых в книге, может быть полезен в технике электромагнитных волн, поскольку математический аппарат, применяемый в акустике и электродинамике, во многом сходен.

Автор глубоко признателен проф. [Г. Д. Малюжинцу] и проф. С. Н. Ржевкину за внимательное рецензирование рукописи и полезные замечания.

Продифференцируем (1.3) по координате  $x$  и воспользуемся законом Гука  $p = -\beta \frac{\partial u}{\partial x}$ , где  $\beta$  — сжимаемость среды. Учтя, что  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}$ , получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0; \quad c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}.$$

Таким образом, первый член волнового уравнения обусловлен сжатием элемента среды, а второй — инерцией.

Связь между вектором колебательной скорости  $\vec{v}$  и звуковым давлением в среде определяется уравнением Эйлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0. \quad (1.4)$$

**Потенциал скорости.** Строго говоря, звуковое поле является векторным полем, поскольку движение каждой частицы описывается вектором колебательной скорости  $\vec{v}$  с компонентами  $v_x, v_y, v_z$ . Тем не менее звуковое поле удается исчерпывающим образом характеризовать одной скалярной функцией  $\Phi(x, y, z, t)$ , зная которую можно определить звуковое давление и колебательную скорость. Такая функция называется потенциалом скорости, причем

$$\vec{v} = -\text{grad } \Phi. \quad (1.5)$$

Воспользовавшись уравнением Эйлера (1.4), получаем

$$p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (1.6)$$

Не всякое векторное поле можно полностью описать одной скалярной потенциальной функцией. Для этого необходимо, чтобы поле было безвихревым, т. е. должно выполняться условие  $\text{rot } \vec{v} = 0$ . В идеальной жидкости при отсутствии вязкости равнодействующая сил, действующих на элемент, проходит через его центр и вращательный момент равен нулю.

В твердом теле на границах элемента присутствуют напряжения сдвига. В результате на элемент тела действуют крутящие моменты, и элемент кроме поступательных перемещений совершает и вращательные движения. Таким образом, в твердом теле  $\text{rot } \vec{v} \neq 0$  и ввести одну скалярную функцию, которая описывала бы все движение, нельзя. Поэтому при решении задач, связанных с распространением упругих волн в твердом теле, приходится либо рассматривать непосредственно компоненты деформации, либо вводить кроме скалярной потенциальной функции и векторную функцию. Такие задачи будут изучаться в гл. 6.

**Уравнение Гельмгольца.** В этой книге мы будем в основном рассматривать гармонические колебания вида

$$p(\vec{r}) = p_0(\vec{r}) \cos[\omega t + \alpha(\vec{r})], \quad (1.7)$$

где  $p_0(\vec{r})$  — амплитуда;  $\alpha(\vec{r})$  — фаза колебания;  $\omega$  — угловая частота звука. Вместо выражения (1.7) можно использовать комплексную форму записи

$$p(\vec{r}) = p_0(\vec{r}) e^{\pm i[\omega t + \alpha(\vec{r})]}. \quad (1.8)$$

При этом следует иметь в виду, что физический смысл имеет лишь вещественная часть (1.8). Так как вещественная часть совпадает с выражением (1.7) при любом знаке в показателе экспоненты, то безразлично, использовать ли представление с зависимостью от времени в виде  $e^{+i\omega t}$  или в виде  $e^{-i\omega t}$ .

Для описания плоской звуковой волны можно пользоваться любой из форм записи

$$p = p_0 e^{+i(\omega t - kx)}, \quad (1.9a)$$

$$p = p_0 e^{-i(\omega t - kx)} \quad (1.9б)$$

(здесь  $k = \frac{\omega}{c}$  — волновое число). Необходимо только следить, чтобы для описания волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ , использовались выражения, в которых члены  $\omega t$  и  $kx$  имели противоположные знаки. Однако, выбрав один раз знак члена  $\omega t$ , необходимо в дальнейшем последовательно его придерживаться.

В большинстве книг и статей зависимость от времени берется в форме  $e^{-i\omega t}$ , и мы также будем использовать это представление. Для того чтобы перейти к другой форме записи, достаточно во всех выражениях знаки перед  $i$  заменить на противоположные.

Если звуковое давление записать в виде  $p(\vec{r}, t) = p(\vec{r}) e^{-i\omega t}$  и затем подставить его в волновое уравнение (1.1), то получим уравнение Гельмгольца

$$\Delta p(\vec{r}) + k^2 p(\vec{r}) = 0. \quad (1.10)$$

В математической физике принята следующая классификация уравнений с частными производными. Уравнение

$$a_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \dots + a_n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n^2} + F\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}; \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}; \Phi\right) = 0$$

называется гиперболическим, если знак хотя бы одного из коэффициентов  $a_j$  отличается от знака остальных коэффициентов. Если все  $a_j$  имеют один знак, то уравнение называется эллиптическим. Если

хотя бы один из коэффициентов  $a_j$  равен нулю, то уравнение называется параболическим.

Из приведенной классификации следует, что волновое уравнение является гиперболическим, а уравнение Гельмгольца — эллиптическим. Методы решения этих уравнения существенно различаются. Волновое уравнение чаще используется при изучении нестационарных процессов, например в сейсмологии (теоретическое описание методов см. в работе [102]); в акустике и гидроакустике в большинстве случаев рассматривается уравнение Гельмгольца. Параболическое уравнение (уравнение диффузии или теплопроводности) до последнего времени не применялось в акустике, однако с развитием приближенных способов расчета волновых полей был разработан так называемый «метод параболического уравнения» [11]. Описание его приведено в обзорной статье [57].

Физическое различие между гиперболическими и эллиптическими уравнениями хорошо иллюстрируются на примере акустики движущейся среды. Известно [6], что уравнение распространения звука в среде, движущейся в направлении оси  $x$  со скоростью  $U = Mc$  ( $M$  — число Маха), имеет вид

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2ikM \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0.$$

Если  $M < 1$ , то уравнение является эллиптическим и звуковые поля в среде, движущейся с дозвуковой скоростью, не отличаются качественно от полей в неподвижной среде. Если же  $M > 1$ , то уравнение становится гиперболическим. Решения таких уравнений рассматриваются в газодинамике больших скоростей. При больших скоростях в среде появляются скачки уплотнения и ударные волны, которые отсутствуют при дозвуковых скоростях. Изучение подобных проблем имеет смысл в аэродинамике, в гидроакустике же столь большие скорости не встречаются.

**Затухание волны.** Следует сделать замечание относительно способа введения членов, учитывающих затухание в формулах с различной зависимостью колебаний от времени. Как известно, затухание вводится формально представлением волнового числа  $k$  в комплексной форме:  $k = k' + ik''$ , где  $k'$  определяет фазовую скорость волны, а  $k''$  — затухание.

Если волна задана в виде (1.96), то, выделив множитель, зависящий от  $k''$ , можно записать

$$p = p_0 e^{-k''x} e^{i(k'x - \omega t)}.$$

Показатель в вещественном множителе является отрицательным. Это означает, что представление волнового числа в виде комплексной величины с положительной мнимой частью при записи (1.96) действительно дает затухающую волну. Если то же самое проделать для волны (1.9а), то получим

$$p = p_0 e^{k''x} e^{i(\omega t - k'x)}.$$

Вместо затухания будет происходить возрастание амплитуды волны с расстоянием. Отсюда следует, что волновое число в последнем случае следует записывать в виде  $k = k' - ik''$  ( $k'' > 0$ ).

Комплексное волновое число можно также записать в форме  $k = k' (1 + i\eta_k)$ , где величина  $\eta_k = \frac{k''}{k'}$  представляет собой коэффициент затухания. Индекс  $k$  у величины  $\eta$  показывает, что здесь мы имеем дело с коэффициентом затухания по волновому числу в отличие от коэффициентов затухания по скорости звука или по модулю упругости среды. В этих случаях

$$c = c' (1 + i\eta_c); \quad \eta_c = \frac{c''}{c'};$$

$$E = E' (1 + i\eta_E); \quad \eta_E = \frac{E''}{E'}.$$

Можно найти связь между величинами  $\eta_k$  и  $\eta_c$ . Имеем

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c' (1 + i\eta_c)} = \frac{\omega c'}{|c|^2} - i \frac{\omega c'}{|c|^2} \eta_c = k' + ik''.$$

Приравняв вещественные и мнимые части, получаем

$$k' = \frac{\omega c'}{|c|^2}; \quad \eta_k = -\eta_c.$$

Таким образом, абсолютные величины коэффициентов затухания по скорости и по волновому числу равны, а знаки противоположны.

**Типы граничных условий.** Для гармонического колебательного движения из соотношения (1.6) получаем  $p = -i\omega r\Phi$ . Таким образом, потенциал и звуковое давление отличаются друг от друга лишь постоянным множителем. Ниже, в тех случаях, когда постоянные множители не имеют существенного значения, термины «звуковое давление» и «потенциал» будут употребляться как синонимы.

Типичными задачами акустики являются задача излучения и задача дифракции звука. Задача излучения обычно формулируется следующим образом. На некоторой поверхности  $S$  задана нормальная составляющая колебательной скорости  $v|_S = -\frac{\partial\Phi}{\partial n}|_S = f(S)$  ( $n$  — нормаль к поверхности). Требуется определить звуковое поле в пространстве.

Иногда на поверхности задается не колебательная скорость, а звуковое давление (или потенциал)  $\Phi|_S = f(S)$ . Может быть также задана комбинация  $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \sigma\Phi\right)|_S = f(S)$ .

Задача определения поля по заданному потенциалу (звуковому давлению)  $\Phi|_S = f(S)$  называется задачей Дирихле или первой краевой задачей. Определение поля по заданной производной

(колебательной скорости)  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S = f(S)$  называется задачей Неймана или второй краевой задачей. Если же задана комбинация  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \sigma \Phi \right) \Big|_S = f(S)$ , причем коэффициент  $\sigma$  на всей поверхности  $S$  является постоянной величиной, то такая задача называется смешанной или третьей краевой задачей. В частных случаях  $\sigma \rightarrow \infty$  и  $\sigma \rightarrow 0$  из смешанной задачи следуют задачи Дирихле и Неймана.

Если же  $\sigma$  зависит от расположения точки на поверхности  $S$ , то такая задача называется четвертой краевой задачей. Иногда ее, так же как и третью, называют смешанной. Простейшим примером четвертой краевой задачи является определение звукового поля, излучаемого поршнем, движущимся с заданной колебательной скоростью, который расположен в акустически мягком экране с граничным условием  $\Phi \Big|_S = 0$ .

Кроме условий на границе, для определения поля необходимо также использовать условие излучения (см. § 3), заключающееся в том, что из всех возможных решений следует выбирать такие функции, которые при удалении точки наблюдения от излучающего тела давали бы убывание поля по определенному закону.

Задача дифракции формулируется следующим образом. На тело, ограниченное поверхностью  $S$ , падает волна  $\Phi_0$ . В результате рассеяния возникает новое поле  $\Phi$ , которое можно представить в виде  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_S$ , причем разница между новым полем и первоначальным называется рассеянной волной  $\Phi_S$ . Требуется определить  $\Phi_S$  таким образом, чтобы полное поле  $\Phi$  на поверхности  $S$  удовлетворяло одному из следующих граничных условий:

1)  $\Phi \Big|_S = 0$  — задача Дирихле, соответствующая дифракции звука на абсолютно мягкой поверхности;

2)  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S = 0$  — задача Неймана, соответствующая дифракции на абсолютно жесткой поверхности;

3)  $\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \sigma \Phi \right] \Big|_S$  — смешанная (или третья) краевая задача, соответствующая дифракции на импедансной поверхности.

Величина импеданса поверхности  $Z$  определяется отношением звукового давления к нормальной составляющей колебательной скорости (с обратным знаком):

$$Z = - \frac{p}{v_n}. \quad (1.11)$$

Выбор знака обусловлен следующим обстоятельством. Если нормаль к поверхности  $S$  направлена наружу, то положительное значение колебательной скорости  $v_n$  также направлено во внешнюю область. В то же время ясно, что при положительном звуковом давлении у поверхности  $S$  (сжатии) поверхность будет стремиться прогнуться во внутреннюю область и колебательная скорость будет отрицательной. Для устранения этого противоречия в формуле

(1.11) введен знак минус. Если же нормаль к поверхности направлена во внутреннюю область, то в формуле (1.11) должен быть взят знак плюс.

Выразив потенциал через звуковое давление и колебательную скорость, получим соотношения между  $\sigma$  и  $Z$ :

$$Z = \frac{i\omega\rho}{\sigma}; \quad (1.12)$$

4)  $\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \sigma(S) \Phi \right] \Big|_S = 0$  — четвертая краевая задача, из которой в частных случаях  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $\sigma = \text{const}$  следуют соответственно первая, вторая или третья задачи. Эту задачу также иногда называют смешанной.

Кроме указанных четырех задач существует еще обширный класс проблем, для которых граничные условия являются более сложными и зависят не только от первой производной потенциала, но и от производных более высоких порядков. В общем случае такие граничные условия можно записать в виде  $L\Phi = 0$ , где  $L$  — дифференциальный оператор, определяющий свойства поверхности. В частных случаях при  $L\Phi = \Phi$ ,  $L = \frac{\partial}{\partial n}$ ,  $L = \frac{\partial}{\partial n} + \sigma$  получаются записанные выше граничные условия. Операторные граничные условия с производными высоких порядков встречаются при анализе излучения и дифракции звука упругими поверхностями. Такие задачи будут рассматриваться в гл. 7—9.

Реальные поверхности являются упругими, поэтому указанные выше граничные условия должны рассматриваться как соотношения, которые лишь приближенно характеризуют свойства поверхности.

В отличие от задачи излучения в задаче дифракции условию излучения должно удовлетворять не полное поле  $\Phi$ , а лишь рассеянная часть полного поля  $\Phi_S$ .

## § 2. Об аналогии между акустическими и электромагнитными краевыми задачами

В большинстве книг и статей по волновым процессам рассматриваются не акустические, а электромагнитные задачи. Следовательно, надо уметь применить результаты решения электромагнитных задач к акустическим проблемам.

Методы математического описания акустических и электромагнитных волн весьма сходны. Поэтому многие (хотя далеко и не все) результаты, полученные для электромагнитных явлений, остаются справедливыми и для звуковых волн.

Звуковые волны описываются скалярным уравнением Гельмгольца, а электромагнитные волны — векторными уравнениями Максвелла. Однако, несмотря на это, многие законы для звуковых и электромагнитных волн оказываются общими [147].

Рассмотрим случай двух измерений. В двумерном случае уравнения Максвелла сводятся к двум независимым уравнениям для векторов напряженности электрического и магнитного полей

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0;$$

$$\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0.$$

Такие же уравнения можно записать для каждой из составляющих векторов вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . В результате для каждой составляющей получаем уравнение Гельмгольца. Поэтому в двумерном случае

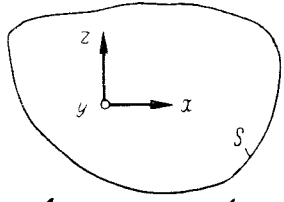


Рис. 1. К аналогии между акустическим и электромагнитным полями.

решения акустических и электромагнитных задач совпадают. Однако при сопоставлении этих задач необходимо привести в соответствие и граничные условия. Рассмотрим частные случаи.

1. *Абсолютно мягкая поверхность.* В акустическом случае на поверхности  $p|_S = 0$ . Если электромагнитная волна, падающая на поверхность (рис. 1), поляризована таким образом, что вектор  $\vec{E}$  параллелен оси  $y$  ( $E$  — поляризация), то граничным условием для абсолютно проводящей поверхности  $S$  будет равенство  $E|_S = E_y|_S = 0$ . Таким образом, решение

для вектора  $\vec{E}$ , поляризованного параллельно образующей (параллельной оси  $y$ ) абсолютно проводящей поверхности, полностью переносится на величину звукового давления  $p$  для абсолютно мягкой поверхности.

2. *Абсолютно жесткая поверхность.* В акустическом случае имеем  $v_n|_S = 0$  или  $\frac{\partial p}{\partial n}|_S = 0$ . Если электромагнитная волна падает на поверхность таким образом, что вектор  $\vec{H}$  параллелен оси  $y$ , то граничное условие имеет вид  $\frac{\partial H}{\partial n}|_S = \frac{\partial H_y}{\partial n}|_S = 0$ . В результате

сопоставления видим, что решение для вектора  $\vec{H}$ , поляризованного параллельно образующей, переносится на величину звукового давления для абсолютно жесткой поверхности.

Промежуточный случай для электромагнитных волн, когда векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  не параллельны границам раздела, распадается на два рассмотренных случая.

В качестве примера рассмотрим отражение звуковых волн от плоской границы раздела двух различных жидких сред и аналогичную задачу об отражении электромагнитной волны от плоской границы двух диэлектрических сред. В акустическом случае граничными условиями будут непрерывность нормальных составляющих

колебательной скорости при переходе через границу и непрерывность звуковых давлений, т. е.  $v_{n1} = v_{n2}$ ;  $p_1 = p_2$  при  $y = 0$ . Для электромагнитного случая граничные условия определяются равенствами, характеризующими непрерывность касательных к поверхности раздела компонент напряженности электрического и магнитного полей:  $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$ ,  $H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$  при  $y = 0$ .

Если вектор  $\vec{E}$  поляризован параллельно оси  $y$ , т. е.  $E_{\tau} = E_y$ ,  $H_{\tau} = H_x$ , то граничные условия принимают вид  $E_{y1} = E_{y2}$ ;  $H_{x1} = H_{x2}$ . Связь между  $E_y$  и  $H_x$  определяется формулой  $H_x = -\frac{c}{i\omega\mu} \times \frac{\partial E_y}{\partial z}$  (здесь  $c$  — скорость света в вакууме;  $\mu$  — магнитная проницаемость). В акустическом случае связь между  $v_z$  и  $p$  задается выражением  $v_z = \frac{1}{i\omega\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}$ . Из сравнения двух последних формул можно заключить, что аналогом звукового давления  $p$  в рассматриваемой задаче будет  $E_y$ , а аналогом нормальной составляющей колебательной скорости  $v_z$  — величина  $H_x$ . В результате найдем, что выражение, определяющее коэффициент отражения для вектора  $\vec{E} = \vec{E}_y$ , будет аналогично формуле для коэффициента отражения звуковой волны (по давлению). Окончательные выражения отличаются только некоторыми константами, например акустическое сопротивление среды  $\rho c$  заменяется на величину  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$  (здесь  $\rho$  — плотность среды;  $c$  — скорость звука;  $\varepsilon$  и  $\mu$  — соответственно электрическая и магнитная проницаемости). Все эти изменения легко проследить при выводе формул.

В акустическом случае сохраняется известный оптический закон преломления  $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_2}{c_1}$ . Сохраняется также значение угла Брюстера, при котором коэффициент отражения равен нулю:  $\text{tg } \theta = \frac{c_1}{c_2}$ .

В трехмерном случае за редким исключением векторные уравнения Максвелла не сводятся к скалярным, и найти решения для электромагнитных волн, которые бы соответствовали и звуковым волнам, невозможно.

Однако несоответствие между решениями акустических и электромагнитных задач постепенно уменьшается при увеличении волнового размера тела. Ниже будет показано, что в приближении Кирхгофа для акустически жестких и акустически мягких тел, размеры которых велики по сравнению с длиной звуковой волны, решения практически совпадают. Точно так же и в векторном случае в приближении Кирхгофа для любой поляризации решения будут одинаковыми и аналогичными скалярному случаю. Поэтому все результаты, полученные в теории излучения электромагнитных антенн для больших волновых размеров антенн, а также в теории дифракции на больших поверхностях, остаются справедливыми и в акустическом случае.

■  
**ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ  
 КИРХГОФА К РАСЧЕТУ  
 ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ**

**§ 3. Формула Кирхгофа**

**Интегральное представление звуковых по-**

**лей.** Как уже указывалось в § 1, при расчете звуковых полей, излучаемых колеблющимися поверхностями, возникает необходимость вычисления потенциала поля  $\Phi$  в некоторой области пространства по значению потенциала и его нормальной производной (т. е. по значению звукового давления и колебательной скорости) на заданной поверхности.

Рассмотрим область, ограниченную поверхностью  $S$  (рис. 2). Требуется найти связь между значением  $\Phi$  в точке наблюдения  $M$  и значением  $\Phi$  на поверхности  $S$ . Такая связь может быть получена путем использования формулы Грина, связывающей значения объемного и поверхностного интегралов.

Формула Грина записывается следующим образом: любые две функции  $\Phi$  и  $u$ , непрерывные вместе со своими первыми и вторыми производными в объеме  $V$ , удовлетворяют соотношению

$$\iiint_V (u\Delta\Phi - \Phi\Delta u) dV = \iint_S \left( u \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (3.1)$$

В этой формуле  $n$  — внешняя нормаль. Соотношение (3.1) иногда называется формулой интегрирования по частям.

Пусть внутри объема  $V$  существуют два звуковых поля  $\Phi$  и  $u$ , которые удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Phi + k^2\Phi &= 0; \\ \Delta u + k^2u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Звуковое поле  $\Phi$  — это основное поле, которое требуется определить; поле  $u$  является вспомогательной величиной.

Умножим первое уравнение (3.2) на  $u$ , а второе — на  $\Phi$ , вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем по объему  $V$ . В результате получим соотношение

$$\iiint_V (u\Delta\Phi - \Phi\Delta u) dV = 0. \quad (3.3)$$

Применяя к последнему выражению формулу Грина (3.1), можно записать

$$\iint_S \left( u \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (3.4)$$

Вспомогательной функцией  $u$  может быть любая функция, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца и сформулированным выше требованиям непрерывности в объеме  $V$ . Выберем в качестве  $u$  поле точечного ненаправленного источника, помещенного в точке наблюдения  $M$ :

$$u = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r = |\vec{R}' - \vec{R}|. \quad (3.5)$$

Здесь  $\vec{R}$  — радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку наблюдения  $M$ ;  $\vec{R}'$  — радиус-вектор, направленный в любую точку поля.

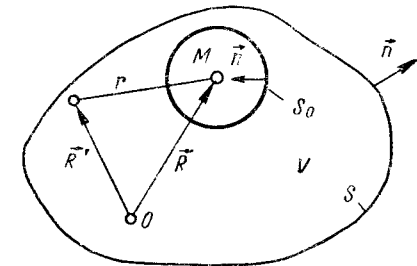


Рис. 2. К выводу формулы Кирхгофа.

Проверим, удовлетворяет ли функция  $u$  уравнению (3.2). В сферических координатах в силу сферической симметрии уравнение Гельмгольца можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + k^2 u = 0. \quad (3.6)$$

Вычисляя производные, получим

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{ikr - 1}{r^2} e^{ikr};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \left[ \frac{ik(ikr - 1)}{r^2} + \frac{2 - ikr}{r^3} \right] e^{ikr}$$

Подставляя эти значения в уравнение (3.6), видим, что  $u$  действительно является решением уравнения Гельмгольца. Это утверждение справедливо во всех точках области, за исключением точки  $r = 0$  ( $\vec{R} = \vec{R}'$ ). В точке  $r = 0$  функция  $u$  имеет особенность, и дифференцирование ее в этой точке невозможно. Кроме того, для функции (3.5) неверна и формула Грина, так как она справедлива лишь для функций, непрерывных во всех точках области. Поэтому точку наблюдения надо исключить из рассматриваемой области. Для этого окружим точку  $M$  малой сферой  $S_0$  радиуса  $\epsilon$ . Новая область будет расположена между  $S$  и  $S_0$ , а новая поверхность, ограничивающая объем, будет состоять из двух частей  $S$  и  $S_0$ .

Рассмотрим интеграл по поверхности  $S_0$ . Наружная к области нормаль к поверхности  $S_0$  будет направлена внутрь сферы  $S_0$  (рис. 2),



т. е. направление ее будет противоположно направлению возрастания  $r$ . В результате на  $S_0$  имеем  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$ . Сколь бы мал ни был радиус  $\varepsilon$  (за исключением  $\varepsilon = 0$ ), величины  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}$  на поверхности  $S$  будут оставаться конечными, так что применение формулы Грина является допустимым. Вычислим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_0} \left( u \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS_0.$$

Поскольку искомое поле  $\Phi$  является непрерывной функцией координат в любой точке области, то в пределах малой сферы радиуса  $\varepsilon$  можно считать, что  $\Phi$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  мало зависят от положения точки на поверхности  $S_0$ . Поэтому  $\Phi$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  можно вынести из-под знака интеграла, заменив их значениями в точке, определяемой вектором  $\vec{R}$  (для  $u$  этого сделать нельзя, поскольку  $u$  не является непрерывной функцией). В результате можно записать

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{\partial \Phi(\vec{R})}{\partial r} \iint_{S_0} u dS_0 + \Phi(\vec{R}) \iint_{S_0} \frac{\partial u}{\partial r} dS_0 \right].$$

Учитывая, что на поверхности  $S_0$

$$\frac{du}{dr} = \left( \frac{ik}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) e^{ik\varepsilon}; \quad dS_0 = \varepsilon^2 d\Omega,$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла, получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{\partial \Phi(\vec{R})}{\partial r} \iint_{S_0} \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \varepsilon^2 d\Omega + \Phi(\vec{R}) \iint_{S_0} e^{ik\varepsilon} \left( \frac{ik}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \varepsilon^2 d\Omega \right] = -4\pi \Phi(\vec{R}).$$

Воспользуемся равенством (3.4) и учтем, что поверхность интегрирования в этой формуле является суммой поверхности  $S$ , ограничивающей объем снаружи, и поверхности  $S_0$ . Тогда окажется, что  $\iint_{S_0} = -\iint_S$ . Поскольку предельное значение интеграла по  $S_0$  равно  $-4\pi \Phi(\vec{R})$ , то в результате получим

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS. \quad (3.7)$$

Так как интегрирование проводится по поверхности  $S$ , то величина  $r$  в этой формуле является расстоянием от точки наблюдения  $M$  до элемента  $dS$  поверхности  $S$ .

Последнее выражение называется формулой Кирхгофа (или интегралом Кирхгофа). Иногда эту формулу называют интегралом Гюйгенса, поскольку она служит математическим определением принципа Гюйгенса (см. ниже). Формула (3.7) является частным случаем более общей формулы Грина (см. § 12). Поэтому ее называют также формулой Грина.

Заметим попутно, что при выводе формулы Кирхгофа мы использовали не столько конкретный вид вспомогательной функции  $u$ , сколько тот факт, что  $u$  имеет особенность типа  $1/r$ . Поэтому результат, аналогичный (3.7), получился бы при использовании любой функции  $u$ , удовлетворяющей уравнению Гельмгольца и обладающей особенностью типа  $1/r$ . При этом в подынтегральном выражении вместо функции  $e^{ikr}/r$  стояла бы выбранная функция  $u$ . Данное обстоятельство будет использовано нами в дальнейшем.

**Физический смысл формулы Кирхгофа.** Формула (3.7) определяет значение потенциала внутри области в любой точке  $R$  по значениям  $\Phi$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  на границе.

Оба члена в правой части формулы имеют ясный физический смысл. Первый член дает потенциал объемных источников (иногда называемых простыми источниками), расположенных на поверхности  $S$ . Действительно, первый член можно записать в виде

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} dS = \frac{dQ}{4\pi r} e^{ikr},$$

где  $dQ$  — объемная скорость элемента  $dS$ . Таким образом, первый член определяет потенциал источников сферических волн.

Во второй член входит производная  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right)$ . Она определяет потенциал двойного слоя источников, дающих дипольное излучение звука. Для того чтобы это показать, представим, что вблизи поверхности  $S$  расположены два слоя источников звука. Каждый из элементов этих слоев является сферически симметричным источником, причем фазы колебаний слоев противоположны (рис. 3). Тогда общий потенциал элемента  $dS$  можно записать в виде

$$\frac{dQ}{4\pi} \left( \frac{e^{ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \right),$$

причем для малых значений  $h$  ( $h \ll r$ ) можно положить  $r_1 \approx r + \frac{h}{2} \cos \alpha$ ,  $r_2 \approx r - \frac{h}{2} \cos \alpha$ .

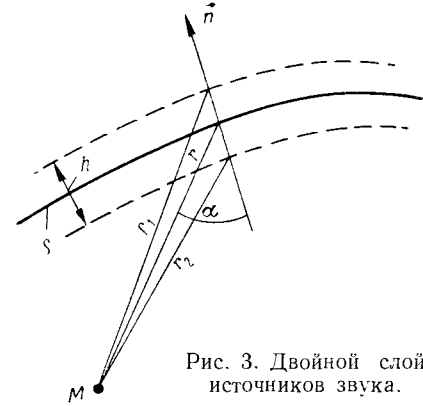


Рис. 3. Двойной слой источников звука.

Будем считать, что при сближении слоев объемная скорость источников возрастает по закону  $1/h$ , поэтому общее поле, которое убывает с уменьшением размеров диполя, остается постоянным. Вычислим предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{e^{ik(r - \frac{h}{2} \cos \alpha)}}{r - \frac{h}{2} \cos \alpha} - \frac{e^{ik(r - \frac{h}{2} \cos \alpha)}}{r - \frac{h}{2} \cos \alpha} \right] = \frac{ikr - 1}{r^2} \cos \alpha e^{ikr}. \quad (3.8)$$

Вычислим также производную

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{ikr - 1}{r^2} e^{ikr} \frac{\partial r}{\partial n}.$$

Учитывая, что производная любой функции по направлению  $\vec{n}$  определяется выражением

$$\frac{\partial f}{\partial n} = (\text{grad } f \cdot \vec{n}),$$

получаем  $\frac{\partial r}{\partial n} = \cos(\widehat{n, r}) = \cos \alpha$ . В результате можно записать

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{ikr - 1}{r^2} \cos \alpha e^{ikr}. \quad (3.9)$$

Сравнение выражений (3.8) и (3.9) показывает, что нормальная производная от поля сферического источника действительно является потенциалом двойного (дипольного) источника. Диаграмма направленности дипольного источника представляет собой  $\cos \alpha$ .

Формула (3.7) дает математическую формулировку принципа Гюйгенса, согласно которому любое звуковое поле может быть представлено в виде суперпозиции волн, излучаемых сферическими и дипольными источниками, которые расположены на поверхности, охватывающей точку наблюдения.

Интересно рассмотреть, как меняется поле, если точка наблюдения  $M$  движется к поверхности, пересекает ее и оказывается во внешней области. При выводе формулы Кирхгофа мы учли, что вспомогательное решение уравнения Гельмгольца  $u$  имеет особенность внутри области. Эта особенность была исключена в результате того, что точка  $M$  была окружена поверхностью  $S_0$ , интеграл по которой оказался пропорциональным значению поля в точке  $M$ . Если же точка наблюдения находится вне области, то поле точечного источника, помещенного в точке наблюдения, во всей области  $V$  оказывается регулярным. В этом случае введение дополнительной поверхности  $S_0$  является излишним, и из выражения (3.4) сразу следует, что интеграл равен нулю.

Таким образом, интеграл Кирхгофа (3.7) можно записать в виде

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS = \begin{cases} \Phi(\vec{R}), & \text{если } M \text{ внутри } S; \\ 0, & \text{если } M \text{ вне } S, \end{cases} \quad (3.10)$$

т. е. интеграл Кирхгофа дает разрывное решение, которое скачком обращается в нуль, если точка наблюдения пересекает границу области. Очевидно, что величина скачка определяется полем на границе, поэтому интеграл Кирхгофа дает решение задачи вычисления потенциала по заданному разрыву непрерывности поля при переходе через границу. Подробное обсуждение этого вопроса читатель найдет в работе [103].

Заметим, что во многих книгах по математической физике [81], [94] рассматривается не уравнение Гельмгольца, а уравнение Лапласа  $\Delta \Phi = 0$ , представляющее собой частный случай уравнения Гельмгольца при  $k = 0$ . Данное уравнение характеризует безвихревое движение несжимаемой жидкости и поэтому приближенно описывает звуковые процессы на низких частотах, когда длина волны велика по сравнению со всеми линейными размерами.

Элементарным решением уравнения Лапласа является функция  $u = \frac{1}{r}$  вместо функции  $\frac{e^{ikr}}{r}$ , полученной для уравнения Гельмгольца. Так как эти функции в точке  $r = 0$  имеют одинаковую особенность, то и весь качественный анализ интегральных представлений поля для уравнений Лапласа и Гельмгольца оказывается одинаковым.

**Условие излучения.** Пусть имеется замкнутая поверхность  $S$ , на которой заданы граничные условия  $\Phi = 0$  или  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  (абсолютно мягкая или абсолютно жесткая поверхности). Предположим, что источников звука в объеме, ограниченном поверхностью  $S$ , нет. В этом случае еще нельзя однозначно утверждать, что поле в области, ограниченной поверхностью, равно нулю. Внутри области при малом активном затухании в среде продолжительное время могут существовать собственные колебания объема без притока энергии извне. Эти колебания можно интерпретировать как стоячие волны, возникающие в результате наложения волн, распространяющихся по направлению к границе, и волн, отраженных от границы. Если же область является безграничной, то такое явление невозможно, поскольку волны, отраженные от границы, в этом случае должны отсутствовать. Другими словами, источники, расположенные на бесконечно удаленной поверхности, не должны вносить вклада в звуковое поле. Поэтому необходимо наложить на поле условие, которое исключало бы возможность появления потока энергии из бесконечности.

Пусть поверхность  $S$  представляет собой сферу радиуса  $r$  и точка наблюдения находится в центре сферы. Тогда должно выполняться условие

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS = 0.$$

Если  $\Phi$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  постоянны на поверхности сферы, то из последнего выражения находим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} - \Phi \frac{ikr-1}{r^2} e^{ikr} \right] = 0.$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} - ik\Phi \right) = 0. \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) называется условием излучения Зоммерфельда.

Иногда условие излучения записывают в другом виде: звуковое поле на больших расстояниях от источника должно представлять собой уходящую сферическую волну, т. е.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = A(\varphi, \theta) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (3.12)$$

Такая формулировка условия излучения подчеркивает, что даже при сколь угодно сложном источнике зависимость  $\Phi$  от расстояния вдали от излучателя должна определяться вторым множителем (3.12). Первый множитель является диаграммой направленности источника. Таким образом, для любых источников диаграмма направленности, начиная с достаточно больших величин  $r$ , не должна зависеть от расстояния.

Для того чтобы убедиться в том, что условия (3.11) и (3.12) эквивалентны, подставим правую часть (3.12) в условие Зоммерфельда. Получаем

$$A(\varphi, \theta) \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{ikr-1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) e^{ikr} = -A(\varphi, \theta) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{ikr}}{r} = 0.$$

Условием излучения называют также соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\Phi < \infty. \quad (3.13)$$

Если допустить наличие в среде хотя бы малого поглощения, т. е. считать волновое число комплексной величиной  $k = k' + ik''$ ,  $k'' > 0$  (см. § 1), то, подставив в (3.13) выражение для сферической волны  $\frac{e^{ikr}}{r}$ , получим  $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{ikr} = 0$ .

Проверим, удовлетворяет ли условию излучения волна, приходящая из бесконечности,  $\frac{e^{-ikr}}{r}$ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{-ikr-1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right] e^{-ikr} = -\lim_{r \rightarrow \infty} \left( 2ik + \frac{1}{r} \right) e^{k''r} \neq 0.$$

Оба множителя не удовлетворяют условию излучения, и волны типа  $e^{-ikr}/r$  в неограниченной области должны быть отброшены.

[Заметим, что если бы зависимость во времени была взята в форме  $e^{-i\omega t}$ , условие излучения следовало бы записать в виде  $\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} + ik\Phi \right) = 0$ , и именно решения типа  $e^{-ikr}/r$  представляли бы расходящиеся волны.]

Сформулированное выше условие излучения было получено для трехмерной области. В двумерном случае поле точечного (линейного) источника описывается выражением  $H_0^{(1)}(kr)$  (см. гл. 5), характеризующим собой цилиндрическую волну. Здесь  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода. При  $r \rightarrow \infty$  функция  $H_0^{(1)}(kr)$  стремится к функции  $C \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}$  ( $C$  — константа). Поэтому в двумерном случае условие излучения записывается в виде

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} - ik\Phi \right) = 0. \quad (3.14a)$$

Поле любого излучателя в двумерном случае может быть записано в виде расходящейся волны с амплитудой, меняющейся по закону  $1/\sqrt{r}$ :

$$\Phi \sim A(\varphi) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (3.14б)$$

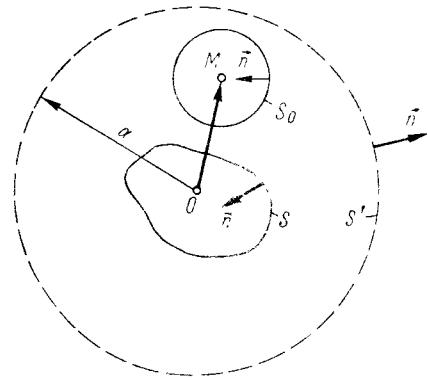
Если же зависимость от времени задана в виде  $e^{-i\omega t}$ , то расходящуюся цилиндрическую волну следует записать как

$$H_0^{(2)}(kr) \sim C \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

И, наконец, в одномерном случае (например, для плоской волны, распространяющейся в трубе) использование принципа излучения является излишним и достаточно потребовать выполнения условия  $k'' = \text{Im } k > 0$ .

**Излучение звука поверхностью во внешнюю область.** Имея условие излучения, можно сформулировать и внешнюю задачу: найти поле вне излучающей поверхности  $S$  по заданным значениям  $\Phi$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  на поверхности  $S$ . Поскольку формула Грина (3.1) справедлива лишь для замкнутых объемов, то поверхность  $S$  следует окружить другой

поверхностью  $S'$  (рис. 4), в качестве которой может быть взята сфера радиуса  $a$ . Так же как и для внутренней области, в качестве вспомогательного решения выберем поле точечного источника, расположенного в точке наблюдения  $M$ . Окружим точку наблюдения сферой малого радиуса  $\varepsilon$ . Будем считать теперь, что область интегрирования  $V$  в формуле (3.1) лежит между поверхностями  $S$ ,  $S_0$  и  $S'$ , а интегрирование в формуле (3.4) проводится по всем указанным поверхностям. В силу принципа излучения при  $a \rightarrow \infty$  интеграл по  $S'$  стремится к нулю. Интеграл по  $S_0$  определяет величину поля в точке наблюдения. При переходе точки наблюдения во внутреннюю область, поле скачком обращается в нуль. В результате получаем формулу Кирхгофа для внешней области:



Заметим, что в формуле (3.15) дифференцирование производится по нормали, внешней по отношению к рассматриваемой области, т. е. направленной внутрь поверхности  $S$ .

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS = \begin{cases} \Phi(\vec{R}), & \text{если } M \text{ вне } S; \\ 0, & \text{если } M \text{ внутри } S. \end{cases} \quad (3.15)$$

Рис. 4. К выводу формулы Кирхгофа для внешней области.

Формула Кирхгофа для двух измерений. Если потенциал не зависит от одной из координат (например, координаты  $z$ ), то трехмерная задача определения звукового поля в пространстве сводится к двумерной задаче вычисления звукового поля на плоскости. Формула Кирхгофа для двух измерений несколько отличается от формулы (3.7).

Вывод формулы Кирхгофа для двумерной области аналогичен выводу, приведенному выше для трехмерной области. Формулу Грина можно записать в виде

$$\iint_S (u \Delta \Phi - \Phi \Delta u) dS = \int_l \left( u \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl. \quad (3.16)$$

Здесь  $S$  — рассматриваемая область;  $l$  — ограничивающий ее контур.

Если  $\Phi$  и  $u$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца, то левая часть (3.16) равна нулю. Следовательно,

$$\int_l \left( u \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl = 0. \quad (3.17)$$

В качестве вспомогательной функции  $u$  выберем функцию  $u = H_0^{(1)}(kr)$ , определяющую поле излучения бесконечного линейного источника, параллельного оси  $z$ . Вблизи точки наблюдения  $M$  при  $r \rightarrow 0$  функция  $u$  имеет особенность логарифмического типа  $u \sim i \cdot \frac{2}{\pi} [\ln(kr) - 0,1159]$ . Поэтому она должна быть исключена из области  $S$ . Это можно сделать, проведя вокруг точки  $M$  окружность  $l_0$  радиуса  $\varepsilon$ . Выражение (3.17) следует при этом рассматривать как сумму интегралов по  $l$  и  $l_0$ . При этом  $\int_l = - \int_{l_0}$ . Вычислим интеграл по окружности  $l_0$ . Так же как и при выводе (3.7), имеет место соотношение  $\frac{\partial}{\partial n} = - \frac{\partial}{\partial r}$ . Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{l_0} \left( u \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ - \frac{\partial \Phi(\vec{R})}{\partial r} \int_0^{2\pi} u \varepsilon d\varphi + \Phi(\vec{R}) \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \varepsilon d\varphi \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \frac{\partial \Phi(\vec{R})}{\partial r} \cdot 2\pi i \frac{2}{\pi} \varepsilon [\ln(k\varepsilon) - 0,1159] + \Phi(\vec{R}) \varepsilon \cdot 2\pi \left( \frac{2i}{\pi \varepsilon} \right) \right\} = 4i \Phi(\vec{R}).$$

Если точка  $M$  переходит во внешнюю область, то интеграл оказывается равным нулю.

Для внешней задачи (т. е. задачи определения звукового поля вне области, ограниченной кривой  $l$ , по значениям поля на кривой) ход решения также принципиально не отличается от трехмерного случая. Объединяя внешнюю и внутреннюю задачи, получаем

$$\frac{i}{4} \int_l \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) - \Phi \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) \right] dl = \begin{cases} \text{Для внутренней задачи} \\ \Phi(\vec{R}), & \text{если } M \text{ внутри } l; \\ 0, & \text{если } M \text{ вне } l. \\ \text{Для внешней задачи} \\ \Phi(\vec{R}), & \text{если } M \text{ вне } l; \\ 0, & \text{если } M \text{ внутри } l. \end{cases} \quad (3.18)$$

Подчеркнем еще раз, что дифференцирование здесь следует производить по нормали, внешней к той области, в которой определяется поле.

Формула Кирхгофа для звукового поля при наличии отражающей поверхности. До сих пор мы предполагали, что поле в пространстве создается в результате излучения звука колеблющейся поверхностью, на которой известны потенциал  $\Phi$  и производная  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ . Для вычисле-

ния звукового поля нам пришлось ввести поле вспомогательного источника  $u$ , при этом предполагалось, что реальные физические источники звука в пространстве отсутствуют. Получим теперь формулу для звукового поля источника, расположенного в точке  $Q$ , с учетом отражения звука от поверхности  $S$  (рис. 5).

Пусть в точке  $Q$  расположен источник (например, малый пульсирующий шарик), создающий в точке наблюдения  $M$  при отсутствии отражающей поверхности  $S$  поле  $\Phi_0$ :

$$\Phi_0(\vec{R}_0) = \frac{e^{ikR_0}}{R_0}. \quad (3.19)$$

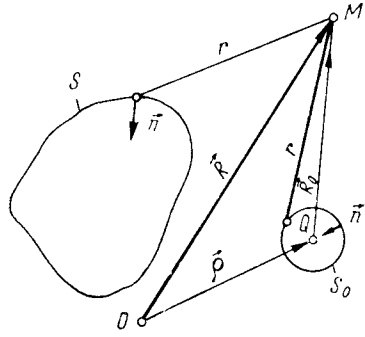


Рис. 5. К выводу формулы (3.21).

Для вычисления звукового поля воспользуемся формулой (3.15). Применение этой формулы предполагает, что поле  $\Phi$  во всем пространстве является непрерывной функцией. В данном случае в точке  $Q$  имеется особенность типа  $1/R_0$ . Поэтому точку  $Q$  необходимо исключить из рассмотрения, окружив ее малой сферой  $S_0$  радиуса  $\epsilon$ . Таким образом, в формуле (3.15) в качестве поверхности интегрирования следует использовать  $S + S_0$ :

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S+S_0} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS. \quad (3.20)$$

Представим теперь полное поле в виде суммы  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_S$ , где  $\Phi_S$  — поле, отраженное поверхностью. Формулу (3.20) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{R}) &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \left[ \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \Phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS_0 + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \left[ \frac{\partial \Phi_S}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \right. \\ &\quad \left. - \Phi_S \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS. \end{aligned}$$

Воспользуемся соотношениями

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \Big|_{S_0} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial R_0} = -\frac{ike-1}{\epsilon^2} e^{ik\epsilon}, \quad \frac{\partial r}{\partial n} \Big|_{S_0} = \cos(\widehat{n, r}).$$

Устремив радиус  $\epsilon$  к нулю, в интегралах по  $S_0$  можно вынести мало меняющиеся множители за знаки интеграла, приравняв их средним

значениям. Получим

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{R}) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \iint_{S_0} -\frac{\partial \Phi_0}{\partial R_0} dS_0 + \frac{\partial}{\partial R_0} \left( \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \right) \iint_{S_0} \Phi_0 \cos(\widehat{n, r}) dS_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \cdot \frac{\partial \Phi_S}{\partial R_0} \iint_{S_0} dS_0 + \Phi_S \frac{\partial}{\partial R_0} \left( \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \right) \iint_{S_0} \cos(\widehat{n, r}) dS_0 \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $dS_0 = \epsilon^2 d\Omega$ , где  $d\Omega$  — элемент телесного угла, найдем, что последние три слагаемых в фигурных скобках стремятся к нулю при уменьшении радиуса сферы  $\epsilon$ . Предел первого слагаемого в фигурных скобках определится выражением

$$\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S_0} \frac{-ike+1}{\epsilon^2} e^{ik\epsilon} \epsilon^2 d\Omega = \frac{e^{ikR_0}}{R_0} = \Phi_0(R_0).$$

Окончательный результат можно представить в виде

$$\Phi(\vec{R}) = \Phi_0(\vec{R}_0) + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS. \quad (3.21a)$$

Для двумерной задачи последнее соотношение можно записать следующим образом:

$$\Phi(\vec{R}) = \Phi_0(\vec{R}_0) + \frac{i}{4} \int_l \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) - \Phi \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) \right] dl. \quad (3.21b)$$

Первое слагаемое в правой части определяет прямое поле в точке наблюдения, второе слагаемое характеризует отраженное (или рассеянное) поле. Если поверхность является абсолютно жесткой ( $\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S = 0$ ), то первое слагаемое под интегралом обращается в нуль. Для абсолютно мягкой поверхности ( $\Phi \Big|_S = 0$ ) в нуль обращается второе слагаемое.

Предположим теперь, что поверхность  $S$  не является реальной физической поверхностью, рассеивающей звук, а представляет собой лишь воображаемую поверхность в пространстве, по которой производится интегрирование. Очевидно, что в этом случае рассеянное поле отсутствует и  $\Phi(\vec{R}) = \Phi_0(\vec{R}_0)$ . Следовательно,

$$\iint_S \left[ \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} - \Phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS = 0. \quad (3.22)$$

Таким образом, интеграл по воображаемой поверхности обращается в нуль в том случае, когда источник и точка наблюдения расположены по одну сторону от поверхности интегрирования. Если же точка наблюдения находится внутри области, ограниченной

воображаемой поверхностью  $S$ , то введение дополнительной поверхности  $S_0$  при интегрировании является излишним, поскольку внутри области интегрирования поле везде непрерывно. Непосредственное применение формулы Кирхгофа (3.17) вместе с выражением (3.22) дает тождество

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} - \Phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS = \begin{cases} \Phi_0(\vec{R}_0), & \text{если излучатель и точка наблюдения находятся по разные стороны от } S; \\ 0, & \text{если излучатель и приемник находятся по одну сторону от } S. \end{cases} \quad (3.23a)$$

Выражение, подобное формуле (3.21a), можно записать и для рассеянного поля.

Воспользовавшись тождеством (3.21a), (3.22) и представлением  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_S$ , найдем

$$\Phi_S(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{\partial \Phi_S}{\partial n} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} - \Phi_S \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS. \quad (3.23b)$$

Последнее выражение совпадает с формулой (3.7), определяющей излучение звука поверхностью во внешнюю область при заданных значениях потенциала и его нормальной производной на поверхности. Таким образом, отражение звука поверхностью можно представить как результат излучения звука некоторыми фиктивными источниками, расположенными на поверхности. Представление о фиктивных источниках весьма полезно при вычислении звуковых полей приближенными методами (§ 8).

#### § 4. Излучение звука плоской поверхностью

**Формулы Гюйгенса для трехмерной области.** Использование интеграла Кирхгофа (3.7) или (3.18) для практических расчетов поля затрудняется тем обстоятельством, что на излучающей поверхности обычно известна лишь одна из величин  $\Phi$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ . Если колебательная скорость  $v_n$  (или  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ ) на поверхности задана, то звуковое давление, пропорциональное потенциалу  $\Phi$ , в большинстве случаев неизвестно. Поэтому неизвестная величина входит и в левую, и в правую части уравнения. Фактически интеграл Кирхгофа является интегральным уравнением. Сведение интеграла Кирхгофа к интегральному уравнению будет рассмотрено в § 6.

В ряде случаев удается из физических соображений указать приближенно связь между величинами  $\Phi$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ . Тогда интеграл Кирхгофа определяет приближенное решение задачи излучения или

дифракции звука (§ 8). Если поверхность  $S$  представляет собой плоскость, то интеграл Кирхгофа удается свести к формулам, которые дают точное решение задачи для случая, когда на поверхности задана лишь одна из величин  $\Phi$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ . Такие формулы называются интегральными формулами Гюйгенса.

Рассмотрим излучение бесконечной плоскости  $S$  в верхнее полу-пространство (рис. 6). Дополним плоскость до замкнутой поверхности полусферой  $S'$ . При увеличении радиуса полусферы интеграл по  $S'$  должен стремиться к нулю в силу принципа излучения. Таким образом, при использовании формулы Грина для верхнего полу-пространства можно ограничиться интегрированием по плоскости.

Запишем формулу Кирхгофа в виде

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} u - \Phi \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS, \quad (4.1)$$

где  $u$  — вспомогательная функция, представляющая собой поле точечного источника (3.5). В соответствии с замечанием, приведенным на стр. 17, в качестве функции  $u$  может быть использована любая функция, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца и имеющая особенность типа  $1/r$ . Выберем в данном случае  $u$  в виде функции, которая описывает поле точечного источника, расположенного над абсолютно жесткой плоскостью. В точке  $Q$  поле источника, помещенного в точку наблюдения  $M$ , может быть представлено в виде суммы полей источника  $M$  и зеркально расположенного источника  $M'$ :

$$u = \frac{e^{ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{ikr_2}}{r_2}. \quad (4.2)$$

Нормальная производная этого поля определится выражением

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{ikr_1 - 1}{r_1^2} e^{ikr_1} \frac{\partial r_1}{\partial n} + \frac{ikr_2 - 1}{r_2^2} e^{ikr_2} \frac{\partial r_2}{\partial n}.$$

Устремим точку  $Q$  к границе. Учитывая, что на границе  $r_1 = r_2 = r$ ,  $\frac{\partial r_1}{\partial n} = -\frac{\partial r_2}{\partial n}$  ( $r_1$  увеличивается при движении точки  $Q$  по нормали  $\vec{n}$ , а  $r_2$  уменьшается), получим  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . Подставляя эти значения в формулу (4.1), находим

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} dS. \quad (4.3)$$

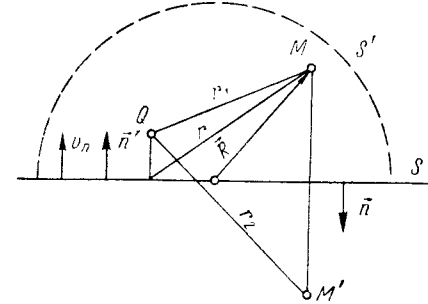


Рис. 6. К выводу формулы Гюйгенса.

Выражение (4.3) называется первой интегральной формулой Гюйгенса. Важным преимуществом этой формулы по сравнению с интегралом Кирхгофа является то, что здесь для расчета звукового поля во всем полупространстве требуется знать только одну величину  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ , т. е. колебательную скорость поверхности.

Перейдем от потенциалов к колебательной скорости и звуковому давлению:  $v_n = -\frac{\partial \Phi}{\partial n'} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ ;  $p = -i\omega \rho \Phi$  (здесь в качестве положительного принято направление  $v_n$  в сторону точки наблюдения — рис. 6). Тогда получаем

$$p(\vec{R}) = \frac{-i\omega \rho}{2\pi} \iint_S v_n \frac{e^{ikr}}{r} dS. \quad (4.4)$$

Выражения (4.3), (4.4) служат основными формулами для расчета звуковых полей плоских излучателей и приемников звука. Формально эти формулы являются точными. Однако при их применении колебательная скорость должна быть известна на всем бесконечном протяжении плоскости  $S$ . Реальные излучающие поверхности всегда ограничены, поэтому при расчете звуковых полей плоских излучателей звука необходимо дополнить излучающую поверхность до бесконечной плоскости абсолютно жестким экраном, на котором можно положить  $v_n = 0$ .

Заметим, что первую формулу Гюйгенса (4.3) можно получить из следующих простых и наглядных соображений. Поле элементарного излучателя с объемной скоростью  $dQ$  можно записать в виде

$$d\Phi = \frac{dQ}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}; \quad dQ = v_n dS.$$

Если элемент находится вблизи абсолютно жесткой плоскости, то потенциал волны, которую он излучает, удваивается, поскольку излучение идет не во все пространство, а в полупространство. Учитывая, кроме того, что  $v_n = -\frac{\partial \Phi}{\partial n'} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ , и интегрируя по всей поверхности, получаем формулу (4.3). Из этого рассуждения следует, что звуковое поле расположенного в абсолютно жестком экране поршня с заданной колебательной скоростью может быть представлено в виде суперпозиции волн, излучаемых одними простыми источниками; введение дипольных источников в этом случае является излишним.

Для того чтобы получить вторую интегральную формулу Гюйгенса, следует в качестве вспомогательной функции  $u$  выбрать поле точечного ненаправленного источника, расположенного над абсолютно мягкой поверхностью. В этом случае поле мнимого источника  $M'$  будет противоположно по знаку полю источника  $M$ :

$$u = \frac{e^{ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{ikr_2}}{r_2}. \quad (4.5)$$

Вычисляя производную  $\frac{\partial u}{\partial n}$  и устремляя точку  $Q$  (см. рис. 6) к границе, получаем  $u = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n} = 2 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right)$ .

Таким образом, выражение (4.1) можно в этом случае записать в виде

$$\Phi(\vec{R}) = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS. \quad (4.6)$$

Вместо потенциалов в выражении (4.6) могут быть взяты и звуковые давления.

Формула (4.6) называется второй интегральной формулой Гюйгенса. Она определяет значение звукового давления в полупространстве по известной величине звукового давления на плоскости.

Для того чтобы можно было применить формулу (4.6) для ограниченных участков плоскости, излучатель следует дополнить до бесконечной плоскости абсолютно мягким экраном, на котором можно задать условие  $\Phi = 0$ . Если расстояние до точки наблюдения велико по сравнению с длиной волны, то нормальную производную в формуле (4.6) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) &= \\ &= \frac{ikr - 1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} e^{ikr} \approx \frac{ike^{ikr}}{r} \cos(\widehat{n, r}). \end{aligned}$$

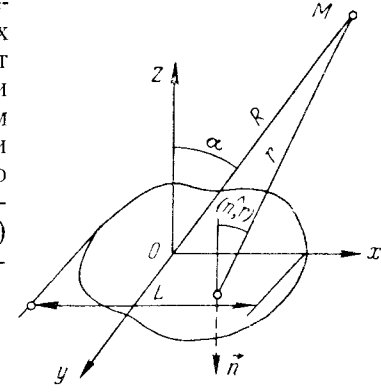


Рис. 7. Звуковое поле поршня в дальней зоне.

Предположим теперь, что расстояние  $r$  велико по сравнению с наибольшим размером той части плоскости, на которой поле отлично от нуля, т. е.  $r \gg L$  (рис. 7). Тогда можно принять, что  $\cos(\widehat{n, r})$  и  $r$  в пределах поршня меняются мало, и вынести амплитудные множители за знак интеграла, положив в них  $r = R$ . Получим

$$p(\vec{R}) \approx -\frac{ik \cos \alpha}{2\pi R} \iint_S p(S) e^{ikr} dS. \quad (4.7)$$

При тех же предположениях из первой формулы Гюйгенса найдем

$$p(R) \approx -\frac{i\omega \rho}{2\pi R} \iint_S v_n(S) e^{ikr} dS. \quad (4.8)$$

Сравнение формул (4.7) и (4.8) показывает, что при одинаковых функциях  $p(S)$  и  $v_n(S)$ , определяющих распределение колебаний по поверхности поршня, диаграмма направленности поршня в абсо-

лотно мягком экране отличается от диаграммы направленности поршня в абсолютно жестком экране множителем  $\cos \alpha$ . Этот множитель характеризует дипольный характер излучения. Вблизи мягкого экрана звуковое давление должно быть равно нулю. Действительно, из формулы (4.7) следует, что если  $\alpha = 90^\circ$ , то  $p(\vec{R}) = 0$ .

**Формулы Гюйгенса для двумерной области.** При выводе формулы Гюйгенса для двумерной области можно воспользоваться выражением (3.18), в котором поле элементарного (линейного) источника в свободном пространстве  $H_0^{(1)}(kr)$  следует заменить полем линейного источника, расположенного над абсолютно жесткой поверхностью,

$$v = H_0^{(1)}(kr_1) + H_0^{(1)}(kr_2).$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше для трехмерного случая, получим первую интегральную формулу Гюйгенса для двумерной области

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) dx, \quad r = \sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}. \quad (4.9)$$

Здесь  $x_1, y_1$  — координаты точки наблюдения; ось  $x$  направлена вдоль излучающей поверхности.

Формулу (4.9) можно также записать в виде

$$p(\vec{R}) = \frac{\omega \rho}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v_n H_0^{(1)}(kr) dx. \quad (4.10)$$

За положительное направление  $v_n$  принято направление в сторону излучения звука.

Если в качестве вспомогательного решения выбрать поле линейного источника, расположенного над абсолютно мягкой поверхностью,

$$v = H_0^{(1)}(kr_1) - H_0^{(1)}(kr_2),$$

то получим вторую интегральную формулу Гюйгенса для двумерной области

$$\Phi(\vec{R}) = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) dx. \quad (4.11)$$

### § 5. Вычисление звуковых полей плоских излучателей при помощи интеграла Фурье

Формулы (4.10), (4.11), позволяющие рассчитывать звуковое поле плоского излучателя, основаны на применении интеграла Кирхгофа. Однако для этой цели можно применить другой способ, основанный на интегральном преобразовании Фурье.

Рассмотрим для простоты двумерный случай.

**Излучение звука волной, бегущей по поверхности.** Идея применения преобразования Фурье заключается в следующем. Пусть распределение колебательной скорости на поверхности представляет собой волну, бегущую в направлении оси  $x$ :

$$v(x, \beta) = e^{i\beta x}, \quad (5.1)$$

где  $\beta$  — постоянная распространения волны.

В этом случае потенциал звукового поля в полупространстве  $y > 0$  (рис. 8) может быть записан следующим образом:

$$\Phi(x, y, \beta) = \frac{i}{\sqrt{k^2 - \beta^2}} e^{i\beta x + i\sqrt{k^2 - \beta^2} y}. \quad (5.2)$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Действительно, функция (5.2) удовлетворяет уравнению Гельмгольца и граничному условию

$$-\frac{\partial \Phi(x, y, \beta)}{\partial y} \Big|_{y=0} = v(x, \beta). \quad (5.3)$$

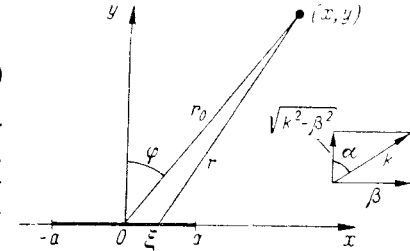


Рис. 8. К применению преобразования Фурье.

Решение (5.2) характеризует плоскую волну, бегущую под углом  $\alpha$  к оси  $y$ :  $e^{ik(x \sin \alpha + y \cos \alpha)}$ , причем угол  $\alpha$  определяется соотношениями

$$\beta = k \sin \alpha; \quad \sqrt{k^2 - \beta^2} = k \cos \alpha. \quad (5.4)$$

Если теперь произвольное распределение колебательной скорости представить в виде набора членов типа (5.1) с различными постоянными распространения  $\beta$ , то общее поле можно будет записать в виде интеграла от функции (5.2) по  $\beta$ .

**Применение интеграла Фурье.** Для того чтобы реализовать указанную схему, представим потенциал звукового поля в пространстве в виде интеграла Фурье

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(\beta, y) e^{i\beta x} d\beta, \quad (5.5)$$

где  $\tilde{\Phi}(\beta, y)$  — спектральная функция, которая определяется обратным преобразованием Фурье:

$$\tilde{\Phi}(\beta, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y) e^{-i\beta x} dx. \quad (5.6)$$



Подставим разложение (5.5) в уравнение Гельмгольца. В результате получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}(\beta, y)}{\partial y^2} + (k^2 - \beta^2) \tilde{\Phi}(\beta, y) \right] e^{i\beta x} d\beta = 0.$$

Поскольку последнее равенство должно удовлетворяться при любых  $x$ , то в силу известных свойств интеграла Фурье получаем дифференциальное уравнение для функции  $\tilde{\Phi}(\beta, y)$

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}(\beta, y)}{dy^2} + (k^2 - \beta^2) \tilde{\Phi}(\beta, y) = 0. \quad (5.7)$$

Решение этого уравнения может быть записано в виде

$$\tilde{\Phi}(\beta, y) = A(\beta) e^{i\sqrt{k^2 - \beta^2} y} + B(\beta) e^{-i\sqrt{k^2 - \beta^2} y}.$$

В данной записи подчеркнута, что коэффициенты  $A$  и  $B$  не зависят от  $y$ , но являются функциями  $\beta$ .

Второе слагаемое в последнем выражении представляет собой волны, приходящие из бесконечности. В силу принципа излучения эти волны должны отсутствовать; поэтому следует положить  $B(\beta) = 0$ . Из формулы (5.5) получаем

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\beta) e^{i\beta x + i\sqrt{k^2 - \beta^2} y} d\beta. \quad (5.8)$$

Таким образом, звуковое поле определилось в виде набора плоских волн типа (5.2).

Функцию  $A(\beta)$  следует найти из граничных условий. Если распределение колебательной скорости представляет собой заданную функцию  $v = f(\xi)$ , то ее преобразование Фурье можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\beta) e^{i\beta\xi} d\beta; \\ \tilde{f}(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\beta\xi} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Заметим, что здесь мы ввели переменную  $\xi$ , чтобы не путать координаты точки наблюдения и переменной точки на поверхности, по которой производится интегрирование. Используя граничное условие (5.3), получим

$$\frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - \beta^2} A(\beta) e^{i\beta\xi} d\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\beta) e^{i\beta\xi} d\beta,$$

откуда

$$A(\beta) = \frac{i\tilde{f}(\beta)}{\sqrt{k^2 - \beta^2}}.$$

Подставив найденное значение в формулу (5.8), находим

$$\Phi(x, y) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\beta) e^{i(\beta x + \sqrt{k^2 - \beta^2} y)}}{\sqrt{k^2 - \beta^2}} d\beta. \quad (5.10)$$

Преимущества последнего выражения проявляются в тех случаях, когда необходимо рассчитать звуковое поле вблизи колеблющейся поверхности, вдоль которой распространяются различные типы волн (например, при расчете звукового поля вблизи упругой пластины, совершающей колебания изгиба, — см. § 34). Если функция  $f(\xi)$  содержит явно выраженную бегущую волну с постоянной распространения  $\beta_0$ , то преобразование Фурье этой функции  $\tilde{f}(\beta)$  будет иметь особенность в точке  $\beta = \beta_0$ . Введем в рассмотрение комплексную плоскость  $\beta$  и деформируем контур интегрирования таким образом, чтобы он охватывал полюса функции  $\tilde{f}(\beta)$ . Тогда вычеты в этих полюсах (а также интегралы по берегам разреза неоднозначной функции  $\sqrt{k^2 - \beta^2}$ ) дадут пространственные волны различных типов, которые излучаются колеблющейся поверхностью.

Легко установить связь между преобразованием (5.10) и формулой Гюйгенса. Подставим в формулу (5.10) преобразование (5.9). Интеграл по  $\beta$  можно взять (см. [76]). Получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta(x-\xi) + i\sqrt{k^2 - \beta^2} y}}{\sqrt{k^2 - \beta^2}} d\beta = \pi H_0^{(1)}(kr),$$

где

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

В результате находим

$$\Phi(x, y) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) H_0^{(1)}(kr) d\xi. \quad (5.11)$$

Последняя формула совпадает с выражением (4.9), определяющим интеграл Гюйгенса для двумерной области.

Если колебательная скорость отлична от нуля в области  $(-a, a)$ , а на остальной части плоскости равна нулю, то мы имеем дело с поршнем, вставленным в абсолютно жесткий экран. Рассмотрим дальнее поле поршня в области  $kr \gg 1$ ,  $r \gg 2a$ . В этом случае  $r \approx r_0 -$

—  $\xi \sin \varphi$  (рис. 8). Заменяя функцию Ханкеля ее асимптотическим представлением [см. (18.11)], получим

$$\Phi(r_0, \varphi) = \frac{e^{ikr_0 + i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi kr_0}} \int_{-a}^a f(\xi) e^{-ik\xi \sin \varphi} d\xi.$$

Последнее соотношение определяет диаграмму направленности отрезка длиной  $2a$ .

**Неоднородные волны.** При интегрировании по  $\beta$  в формуле (5.10) встретятся области изменения переменной интегрирования, для которых будет выполняться условие  $\beta > k$ . Тогда экспоненциальный член принимает вид

$$e^{i\beta x - \sqrt{\beta^2 - k^2} y} \quad (5.12)$$

Волны типа (5.12) представляют собой колебательное движение среды, бегущее вдоль поверхности. Амплитуда этих колебаний затухает при удалении от плоскости  $y = 0$  по экспоненциальному закону. Такие волны называются неоднородными. Скорость их распространения всегда меньше скорости звука в среде. На больших расстояниях от поверхности ( $ky \gg 1$ ) роль этих волн весьма мала, и вклад в диаграмму направленности они не вносят. Отсюда следует, что волна колебательной скорости, бегущая вдоль поверхности с фазовой скоростью  $c_1 < c$ , не излучает звука в дальнее поле. Поэтому волновое движение, существующее при таких колебаниях, сосредоточено вблизи поверхности.

Заменой переменных (5.4) можно привести интеграл (5.10) к виду

$$\Phi(x, y) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \tilde{f}_1(\alpha) e^{ik(x \sin \alpha + y \cos \alpha)} d\alpha, \quad (5.13)$$

где интегрирование производится по контуру  $\Gamma$  (рис. 9), называемому контуром Зоммерфельда.

Запись (5.13) показывает, что поле  $\Phi(x, y)$  может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся под различными углами к оси  $x$ . Заметим, однако, что кроме вещественных углов  $\alpha$  в рассмотрение необходимо вводить и комплексные углы  $\alpha = -\frac{\pi}{2} + i\alpha''$ ;  $\alpha = +\frac{\pi}{2} - i\alpha''$ , соответствующие неоднородным волнам. На рис. 9 отрезок пути интегрирования, лежащий на вещественной оси, определяет однородные плоские волны, а вертикальные участки — неоднородные волны.

Более подробно вопросы, связанные с записью звуковых полей в виде набора плоских однородных и неоднородных волн, обсуждаются в § 34.

## § 6. Применение интегральных уравнений к решению задач излучения и дифракции звука

**Главное значение интеграла.** В дальнейшем нам понадобится понятие о главном значении интеграла. Рассмотрим несобственный интеграл

$$I = \int_a^b \frac{dx}{f(x)}.$$

Функция  $f(x)$  в некоторой точке  $C$  промежутка  $[a, b]$  обращается в нуль. Если  $f(x)$  в точке  $C$  меняется по закону  $(x - C)^n$ ,  $n \geq 1$ , то интеграл в обычном смысле не существует. Вырежем малую окрестность точки  $C$  и запишем интеграл в виде

$$I(\varepsilon) = \int_a^{C-\varepsilon} \frac{dx}{f(x)} + \int_{C+\varepsilon}^b \frac{dx}{f(x)}$$

Если существует предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon)$ , то он называется главным значением интеграла.

В качестве примера вычислим интеграл от функции  $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x-C}$ . В обычном смысле такой интеграл не существует, поскольку подынтегральное выражение имеет неинтегрируемую особенность.

Находим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{C-\varepsilon} \frac{dx}{x-C} + \int_{C+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-C} \right] &= \ln \varepsilon - \ln(C-a) + \ln(b-C) - \ln \varepsilon = \\ &= \ln \frac{b-C}{C-a}. \end{aligned}$$

Интеграл, взятый в смысле главного значения, оказался конечной величиной, несмотря на то, что каждый из интегралов, входящих в последнее выражение, стремится к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Приведение формулы Кирхгофа к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода.** Для того чтобы вычислить звуковое поле в некоторой области, достаточно знать распределение либо звукового давления, либо колебательной скорости на границе области. Каждая из этих величин полностью определяет звуковое поле. Если на поверхности задана колебательная скорость, распределение звукового давления вблизи поверхности уже не может быть задано произвольно, поскольку оно само является результатом решения задачи.

Однако, чтобы применить формулу (3.7) или (3.15), необходимо знать одновременно распределения и колебательной скорости и звукового давления. Таким образом, интеграл Кирхгофа является переопределенным. Фактически формула Кирхгофа представляет собой интегральное уравнение, в котором неизвестная функция входит и в левую и в правую часть уравнения. В правой части эта функция описывает неизвестное поле на поверхности, а в левой части — то же поле в точке наблюдения  $M$ .

Для того чтобы получить это интегральное уравнение, необходимо устремить точку наблюдения  $M$  к поверхности тела в точку  $M'$ ;

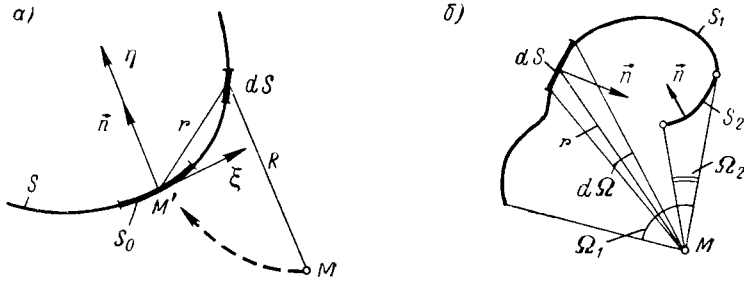


Рис. 10. К выводу интегрального уравнения.

тогда отрезок  $r$  будет являться расстоянием между элементом поверхности  $dS$  и точкой  $M'$  (рис. 10). Однако если просто предположить, что точка  $M$  совмещена с поверхностью, то интеграл (3.15) разойдется, поскольку на поверхности интегрирования  $S$  найдется точка ( $r = 0$ ), в которой величина

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) = \left( \frac{ik}{r} e^{ikr} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) \frac{\partial r}{\partial n} \quad (6.1)$$

имеет особенность. Для того чтобы это показать, необходимо вычислить  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial r}{\partial n}$ . Проведем сечение поверхности  $S$  плоскостью  $\xi\eta$  и совместим ось  $\eta$  с нормалью (рис. 10, а). Если уравнение сечения есть  $\eta = f(\xi)$ , то  $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{\xi^2 + f^2(\xi)}$ . Учитывая, что для гладкой поверхности  $f(0) = f'(0) = 0$ , и разлагая  $f(\xi)$  в ряд вблизи точки  $\xi = 0$ , получим  $f(\xi) \approx \frac{f''(0)\xi^2}{2}$ . Тогда предел определится следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial r}{\partial n} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial r}{\partial \eta} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(\xi)}{\sqrt{\xi^2 + f^2(\xi)}} \approx \\ &\approx \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f''(0) \frac{\xi^2}{2}}{\sqrt{\xi^2 + [f''(0)]^2 \frac{\xi^4}{4}}} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при малых  $\xi$  величина  $\frac{\partial r}{\partial n}$  меняется по закону  $f''(0) \frac{\xi}{2}$  или  $f''(0) \frac{r}{2}$ .

В результате оказывается, что вблизи  $r = 0$  второй сомножитель (6.1) обратно пропорционален  $r$  и вся величина (6.1) при уменьшении  $r$  стремится к бесконечности.

Для того чтобы иметь возможность воспользоваться формулой (3.15), если точка наблюдения находится на поверхности тела, необходимо провести ряд дополнительных преобразований. Подробности подобных преобразований приводятся в курсах математической физики [36], [81]. Здесь мы лишь наметим схему такого перехода.

Вычислим краевое значение второго слагаемого в формуле Кирхгофа

$$\lim_{M \rightarrow M'} \frac{1}{4\pi} \iint_S \Phi(S) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS. \quad (6.2)$$

Для этого разобьем поверхность  $S$  на две части: малую окрестность  $S$  вблизи точки  $M'$  и оставшуюся часть  $S - S_0$ .

Разобьем интеграл по  $S$  на сумму интегралов и в первом из них в силу малости величины  $kr$  заменим член  $e^{ikr}/r$  на  $1/r$ . Тогда (6.2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \Phi(S) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS + \frac{1}{4\pi} \iint_{S-S_0} \Phi(S) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS. \quad (6.3)$$

Второе слагаемое в последнем выражении всегда непрерывно, так как в пределах  $S - S_0$  длина отрезка  $r$  в нуль не обращается. Вычислим предельное значение первого члена. Для этого заметим, что  $d\Omega = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS$  есть телесный угол, под которым виден элемент  $dS$  из точки  $M$ . На участке  $S_1$  (рис. 10, б) нормаль образует с отрезком  $r$  острый угол. Следовательно, на этом участке

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} dS = \frac{dS \cdot \cos(\widehat{n, r})}{r^2} = d\Omega.$$

На участке  $S_2$  нормаль образует с отрезком тупой угол. Следовательно, в этой области  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS = -d\Omega$ . В таком случае интеграл по поверхности  $S = S_1 + S_2$  будет определяться разностью телесных углов:

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS = \iint_{S_1} d\Omega_1 - \iint_{S_2} d\Omega_2 = \Omega_1 - \Omega_2.$$

Для замкнутой поверхности  $S$  последняя величина равна нулю в том случае, если точка  $M$  находится вне поверхности. Если точка находится во внутренней области, то телесный угол, под которым

видна замкнутая поверхность, равен  $4\pi$ . Если же точка находится на самой поверхности, то поверхность видна под телесным углом  $2\pi$ . Следовательно,

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS = \begin{cases} 0, & \text{если } M \text{ вне } S; \\ 2\pi, & \text{если } M \text{ на } S; \\ 4\pi, & \text{если } M \text{ внутри } S. \end{cases} \quad (6.4)$$

В пределах малой области  $S_0$  функция  $\Phi(S)$  меняется мало и ее можно вынести из-под знака интеграла. Выражение (6.3) можно записать теперь следующим образом:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S-S_0} \Phi(S) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS + \begin{cases} 0, & \text{если } M \text{ вне } S; \\ \frac{1}{2} \Phi(M), & \text{если } M \text{ на } S; \\ \Phi(M), & \text{если } M \text{ внутри } S. \end{cases} \quad (6.5)$$

Устремим площадь  $S_0$  к нулю. Тогда поверхность  $S - S_0$  будет стремиться к поверхности  $S$ . При этом необходимо считать, что исходный интеграл берется в смысле главного значения. Подставив (6.5) в формулу Кирхгофа (3.15) и считая, что точка  $M$  находится на поверхности  $S$  (т. е. совпадает с  $M'$ ), получим

$$\Phi(M') = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left[ \frac{\partial \Phi(S)}{\partial n} \cdot \frac{e^{ikr(M', S)}}{r(M', S)} - \Phi(S) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr(M', S)}}{r(M', S)} \right) \right] dS. \quad (6.6)$$

Запись  $r(M', S)$  показывает, что  $r$  является расстоянием между любой фиксированной точкой  $M'$  на поверхности и элементом  $dS$ .

Выражение (6.6) отличается от формулы, которая получилась бы из интеграла Кирхгофа, если бы точку наблюдения прямо устремить на поверхность тела, множителем 2. Отличием является также то, что в правой части (6.6) взято главное значение интеграла.

Уравнение (6.6) можно записать следующим образом:

$$\Phi(M') + \iint_S \Phi(S) K(M', S) dS = f(M'), \quad (6.7)$$

где  $K(M', S)$  — ядро интегрального уравнения, а  $f(M')$  — свободный член, определяемые формулами

$$K(M', S) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr(M', S)}}{r(M', S)} \right);$$

$$f(M') = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\partial \Phi(S)}{\partial n} \cdot \frac{e^{ikr(M', S)}}{r(M', S)} dS.$$

Если на поверхности тела задана колебательная скорость  $v_n = -\frac{\partial \Phi(S)}{\partial n}$ , то правую часть (6.7) можно считать известной. Поэтому (6.7) является интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода относительно неизвестной функции  $\Phi(S)$ .

Решив интегральное уравнение и определив функцию  $\Phi(S)$ , можно воспользоваться формулой Кирхгофа для вычисления поля в любой точке пространства. Методы решения интегральных уравнений приведены, например, в книгах [30], [61], [63]. В § 7 путем использования интегрального уравнения получено решение задачи дифракции на цилиндрическом теле с произвольной формой поперечного сечения. В качестве примера далее рассматривается дифракция звука на прямоугольном брусе.

## § 7. Дифракция и излучение звука импедантным цилиндром с произвольной формой поперечного сечения

**Составление интегрального уравнения для задачи дифракции.** Применим метод интегрального уравнения к решению задачи дифракции плоской звуковой волны на бесконечном

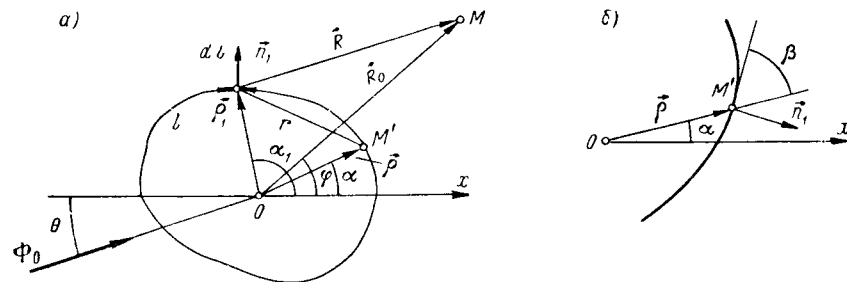


Рис. 11. К дифракции плоской волны на цилиндре с произвольной формой поперечного сечения.

цилиндрическом теле с произвольной формой поперечного сечения (рис. 11). Будем считать, что на поверхности тела задано импедантное граничное условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_1} + \sigma \Phi = 0, \quad (7.1)$$

и будем предполагать, что  $\vec{n}_1$  — нормаль, внешняя по отношению к телу. Тогда величина  $\sigma$  может быть выражена через нормальный импеданс поверхности по формуле (1.12). Заметим, что  $\sigma$  может быть переменной величиной, различной в разных точках тела:  $\sigma = \sigma(\alpha)$ . В частных случаях при  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $\sigma = \text{const}$  из решения задачи для тела с переменным импедансом следуют решения задач дифракции соответственно на абсолютно мягком, абсолютно жестком теле, а также на теле с постоянным импедансом. Потенциал  $\Phi$  представляет собой полное поле вне тела  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_S$ , где  $\Phi_S$  — рассеянное поле;  $\Phi_0$  — падающая волна, определяемая выражением

$$\Phi_0 = e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}. \quad (7.2)$$

Потенциалы  $\Phi$ ,  $\Phi_0$ ,  $\Phi_S$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца, а  $\Phi_S$ , кроме того, условию излучения для двумерной области (3.14).

Воспользовавшись формулой Кирхгофа (3.18) для внешней области, запишем (см. рис. 11, а)

$$\Phi_S(R_0) = \frac{i}{4} \int_l \left[ -\frac{\partial \Phi_S(\vec{\rho}_1)}{\partial n_1} H_0^{(1)}(kR) + \Phi_S(\vec{\rho}_1) \frac{\partial}{\partial n_1} H_0^{(1)}(kR) \right] dl_1. \quad (7.3)$$

Здесь  $R = |\vec{R}_0 - \vec{\rho}_1|$ . Запись  $dl_1$  означает, что при интегрировании  $\vec{\rho}_1$  является переменной, а  $\vec{R}_0$  играет роль параметра. Заметим, что знаки в формуле (7.3) по сравнению с (3.18) заменены на противоположные, поскольку направление нормали изменилось. Положительное направление нормали показано на рис. 11, а. Индекс 1 в записи  $\partial/\partial n_1$  означает, что производная действует на координату, отмеченную этим индексом.

Устремим точку  $M$  к поверхности тела в точку  $M'$ . Тогда отрезок  $R$  на рис. 11, а займет положение  $r$ . При этом предельный переход должен быть выполнен таким же образом, как и в § 6. В результате получаем интегральное уравнение

$$\Phi_S(\vec{\rho}) = \frac{i}{2} \int_l \left[ \Phi_S(\vec{\rho}_1) \frac{\partial}{\partial n_1} H_0^{(1)}(kr) - \frac{\partial \Phi_S(\vec{\rho}_1)}{\partial n_1} H_0^{(1)}(kr) \right] dl_1, \quad (7.4)$$

где  $r = |\vec{\rho} - \rho_1|$ .

Из граничного условия (7.1) находим

$$\frac{\partial \Phi_S(\vec{\rho}_1)}{\partial n_1} = -\sigma(\vec{\rho}_1) \Phi_S(\vec{\rho}_1) - \left[ \frac{\partial \Phi_0(\vec{\rho}_1)}{\partial n_1} + \sigma(\vec{\rho}_1) \Phi_0(\vec{\rho}_1) \right]. \quad (7.1a)$$

Подставляя это значение в формулу (7.4), получаем интегральное уравнение

$$\Phi_S(\vec{\rho}) - \int_l \Phi_S(\vec{\rho}_1) K(\vec{\rho}, \vec{\rho}_1) dl = f(\vec{\rho}). \quad (7.5)$$

Ядро уравнения и свободный член определяются формулами

$$K(\vec{\rho}, \vec{\rho}_1) = \frac{i}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial n_1} H_0^{(1)}(k|\vec{\rho} - \vec{\rho}_1|) + \sigma(\vec{\rho}_1) H_0^{(1)}(k|\vec{\rho} - \vec{\rho}_1|) \right];$$

$$f(\vec{\rho}) = \frac{i}{2} \int_l \left[ \frac{\partial}{\partial n_1} \Phi_0(\vec{\rho}_1) + \sigma(\vec{\rho}_1) \Phi_0(\vec{\rho}_1) \right] H_0^{(1)}(k|\vec{\rho} - \vec{\rho}_1|) dl_1.$$

Перейдем к полярным координатам. Если уравнение поверхности выражается функцией  $\rho = \rho(\alpha)$ , то  $dl_1 =$

$= \sqrt{\rho^2(\alpha_1) + [\rho'(\alpha_1)]^2} d\alpha_1$ , и интегральное уравнение можно переписать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_S(\alpha) - \int_0^{2\pi} \Phi_S(\alpha_1) K(\alpha, \alpha_1) d\alpha_1 &= f(\alpha); \\ K(\alpha, \alpha_1) &= \frac{i}{2} \left[ -H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n_1} + \sigma(\alpha_1) H_0^{(1)}(kr) \right] \times \\ &\quad \times \sqrt{\rho^2(\alpha_1) + [\rho'(\alpha_1)]^2}; \\ f(\alpha) &= \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \Phi_0(\alpha_1)}{\partial n_1} + \sigma(\alpha_1) \Phi_0(\alpha_1) \right] H_0^{(1)}(kr) \times \\ &\quad \times \sqrt{\rho^2(\alpha_1) + [\rho'(\alpha_1)]^2} d\alpha_1, \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

где  $r$  определяется формулой

$$r(\alpha, \alpha_1) = \sqrt{\rho^2(\alpha) + \rho^2(\alpha_1) - 2\rho(\alpha)\rho(\alpha_1)\cos(\alpha - \alpha_1)}. \quad (7.7)$$

Вычислим теперь производные  $\frac{\partial r}{\partial n_1}$  и  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial n_1}$ , входящие в формулы (7.6). Воспользуемся равенством  $\frac{\partial u}{\partial n_1} = \text{grad } u \cdot \vec{n}_1$ . В полярных координатах можно записать

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha. \quad (7.8)$$

Здесь  $\vec{e}_\rho$  и  $\vec{e}_\alpha$  — единичные векторы в направлениях  $\rho$  и  $\alpha$ .

Угол  $\beta$  между направлением касательной и радиусом-вектором  $\vec{\rho}$  определяется соотношением  $\text{tg } \beta = \frac{\rho(\alpha)}{\rho'(\alpha)}$ . Компоненты вектора нормали (рис. 11, б) определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} n_\rho &= n_1 \sin \beta = \frac{\text{tg } \beta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta}} = \frac{\rho(\alpha)}{\sqrt{\rho^2(\alpha) + [\rho'(\alpha)]^2}}; \\ n_\alpha &= -n_1 \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta}} = -\frac{\rho'(\alpha)}{\sqrt{\rho^2(\alpha) + [\rho'(\alpha)]^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Вычислив скалярное произведение вектора (7.8) и вектора с компонентами (7.9), получим

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2(\alpha) + [\rho'(\alpha)]^2}} \left[ \rho(\alpha) \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right]. \quad (7.10)$$

Подставим теперь в равенство (7.10) в качестве функции  $u$  расстояние  $r(\alpha, \alpha_1)$ , определяемое формулой (7.7). При этом дифферен-

цирование будем проводить по координатам с индексом 1. После упрощений найдем

$$\frac{\partial r(\alpha, \alpha_1)}{\partial n_1} = \frac{\rho^2(\alpha_1) - \rho(\alpha)\rho(\alpha_1)\cos(\alpha - \alpha_1) + \rho'(\alpha_1)\rho(\alpha)\sin(\alpha - \alpha_1)}{r(\alpha, \alpha_1)\sqrt{\rho^2(\alpha_1) + [\rho'(\alpha_1)]^2}}. \quad (7.11)$$

Заметим, что в ядро интегрального уравнения (7.6) входит произведение  $H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n_1}$ . Функция Ханкеля  $H_1^{(1)}(kr)$  при  $r \rightarrow 0$  имеет особенность первого порядка:  $H_1^{(1)}(kr) \approx -\frac{2i}{\pi kr}$ . Однако все произведение остается ограниченным. Для того чтобы это показать, вычислим предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_1} H_1^{(1)}[kr(\alpha, [\alpha_1])] \cdot \frac{\partial r(\alpha, \alpha_1)}{\partial n_1} = \frac{-2i}{\pi k} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_1} \frac{1}{r(\alpha, \alpha_1)} \cdot \frac{\partial r(\alpha, \alpha_1)}{\partial n_1}.$$

Последняя величина при  $\alpha = \alpha_1$  представляет собой неопределенность типа 0/0. Воспользовавшись дважды правилом Лопиталья, получим

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_1} H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n_1} = -\frac{2i}{\pi k} \cdot \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho \cdot \rho''}{2[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}} = -\frac{i}{\pi k} \kappa.$$

Множитель  $\kappa$  определяет кривизну кривой в полярных координатах. Для любой гладкой кривой он является конечной величиной [при наличии излома в точке  $\alpha = \alpha_1$  можно получить тот же результат, если под величиной  $\kappa$  понимать  $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_1} \kappa(\alpha_1)$ ].

Следовательно, единственной особенностью ядра  $K(\alpha, \alpha_1)$  является логарифмическая особенность, которую содержит функция  $H_0^{(1)}(kr)$ . Такая особенность не препятствует вычислению интеграла.

По формуле (7.10) можно определить также производную  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial n_1}$  на поверхности тела в точке  $\alpha_1$ . Если записать падающую волну (7.2) в виде

$$\Phi_0(\rho_1, \alpha_1) = e^{ik\rho_1 \cos(\alpha_1 - \theta)},$$

то после применения (7.10) получим

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial n_1} = \frac{ike^{ik\rho(\alpha_1)\cos(\alpha_1 - \theta)}}{\sqrt{\rho^2(\alpha_1) + [\rho'(\alpha_1)]^2}} [\rho(\alpha_1)\cos(\alpha_1 - \theta) + \rho'(\alpha_1)\sin(\alpha - \theta)]. \quad (7.12)$$

Таким образом, теперь в явном виде записаны все функции, входящие в интегральное уравнение (7.6).

**Вычисление волны, рассеянной телом.** Если интегральное уравнение (7.6) решено, то на поверхности тела известно и рассеянное поле  $\Phi_S$ , и его нормальная производная, которая определяется по формулам (7.1a) и (7.12). Теперь можно воспользоваться формулой Кирхгофа (7.3) для определения рассеянного поля в любой точке

пространства. Опуская ненужные теперь индексы переменной  $\alpha$ , формулу (7.3) можно переписать следующим образом:

$$\Phi_S(R_0, \varphi) = \frac{i}{4} \int_l \Phi_S(\alpha) \left[ \frac{\partial H_0^{(1)}(kR)}{\partial n} + \sigma(\alpha) H_0^{(1)}(kR) \right] dl + \frac{i}{4} \int_l \left[ \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} + \sigma(\alpha) \Phi_0 \right] H_0^{(1)}(kR) dl. \quad (7.13)$$

Будем искать поле в удаленной точке  $kR_0 \gg 1$ ,  $R_0 \gg l$ , где  $l$  — наибольший линейный размер поперечного сечения. Тогда

$$R \approx R_0 - \rho \cos(\alpha - \varphi).$$

Вычислим производную функции Ханкеля

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(kR)}{\partial n} = -kH_1^{(1)}(kR) \frac{\partial R}{\partial n}. \quad (7.14)$$

Производную  $\frac{\partial R}{\partial n}$  можно вычислить по формуле (7.10):

$$\frac{\partial R}{\partial n} = -\frac{[\rho(\alpha)\cos(\alpha - \varphi) + \rho'(\alpha)\sin(\alpha - \varphi)]}{\sqrt{\rho^2(\alpha) + [\rho'(\alpha)]^2}}. \quad (7.15)$$

Величина  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial n}$  была определена ранее [формула (7.12)]. В дальней зоне ( $kR \gg 1$ ) можно воспользоваться асимптотическими равенствами

$$\left. \begin{aligned} H_1^{(1)}(kR) &\approx -i \sqrt{\frac{2}{\pi kR_0}} e^{ikR_0 - i\pi/4} e^{-ik\rho(\alpha)\cos(\alpha - \varphi)}; \\ H_0^{(1)}(kR) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi kR_0}} e^{ikR_0 - i\pi/4} e^{-ik\rho(\alpha)\cos(\alpha - \varphi)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

Подставляя величины (7.14), (7.15), (7.16) в формулу (7.13), находим рассеянное поле

$$\Phi_S(R_0, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi kR_0}} e^{ikR_0 - i\pi/4} F(\varphi), \quad (7.17)$$

где

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \Phi_S(\alpha) [k\rho(\alpha)\cos(\alpha - \varphi) + k\rho'(\alpha)\sin(\alpha - \varphi) + \\ &+ \sigma(\alpha)] e^{-ik\rho(\alpha)\cos(\alpha - \varphi)} d\alpha - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [k\rho(\alpha)\cos(\alpha - \theta) + \\ &+ k\rho'(\alpha)\sin(\alpha - \theta) + \sigma(\alpha)] e^{ik\rho(\alpha)[\cos(\alpha - \theta) - \cos(\alpha - \varphi)]} d\alpha. \end{aligned}$$

**Излучение звука участком цилиндра, расположенным в импедансном экране.** Рассмотрим теперь задачу излучения звука цилиндром

с произвольной формой поперечного сечения. Пусть на некоторой части поверхности  $l^{(1)}$  ( $0 < \alpha < \gamma$ ) задана колебательная скорость. Остальная часть поверхности  $l^{(2)}$  ( $\gamma < \alpha < 2\pi$ ) является импедантной, и на ней выполняется граничное условие (7.1). Тогда

$$\left. \begin{aligned} -v_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \Psi(\rho) \quad \text{при } 0 < \alpha < \gamma; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \sigma \Phi = 0 \quad \text{при } \gamma < \alpha < 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Поле излучения можно записать в виде выражения (7.3). Разобьем интеграл на сумму двух интегралов по участкам  $l^{(1)}$  и  $l^{(2)}$  и воспользуемся граничными условиями (7.18):

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{\rho}) = & \frac{i}{2} \int_{l^{(1)}} \left[ -\Psi(\vec{\rho}_1) H_0^{(1)}(kr) + \Phi(\vec{\rho}_1) \frac{\partial}{\partial n_1} H_0^{(1)}(kr) \right] dl_1 + \\ & + \frac{i}{2} \int_{l^{(2)}} \Phi(\vec{\rho}_1) \left[ \frac{\partial}{\partial n_1} H_0^{(1)}(kr) + \sigma(\vec{\rho}_1) H_0^{(1)}(kr) \right] dl_1. \end{aligned}$$

В результате получаем интегральное уравнение

$$\Phi(\vec{\rho}) - \int_l \Phi(\vec{\rho}_1) K(\vec{\rho}, \vec{\rho}_1) dl_1 = f(\vec{\rho}), \quad (7.19)$$

где

$$\begin{aligned} K(\vec{\rho}, \vec{\rho}_1) = & \frac{i}{2} \left\{ \delta_1 \frac{\partial}{\partial n_1} H_0^{(1)}(kr) + \delta_2 \left[ \sigma(\vec{\rho}_1) H_0^{(1)}(kr) + \frac{\partial}{\partial n_1} H_0^{(1)}(kr) \right] \right\}; \\ f(\vec{\rho}) = & -\frac{i}{2} \int_{l^{(1)}} \Psi(\vec{\rho}_1) H_0^{(1)}(kr) dl_1. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \delta_1 = 1, \delta_2 = 0 \quad \text{при } 0 < \alpha_1 < \gamma; \\ \delta_1 = 0, \delta_2 = 1 \quad \text{при } \gamma < \alpha_1 < 2\pi. \end{aligned}$$

Дальнейшее преобразование уравнения (7.19) и вычисление нормальных производных проводятся аналогично тем выкладкам, которые были выполнены при преобразованиях уравнения (7.5), и мы не будем их повторять.

**Рассеяние звука на прямоугольном брус.** В качестве примера применения полученных уравнений рассмотрим решение задачи дифракции волн на абсолютно жестком прямоугольном брус. В полярных координатах уравнение рассеивающей поверхности можно представить в форме

$$\rho(\alpha) = \frac{a}{\cos \alpha} [\varepsilon_1(\alpha) - \varepsilon_3(\alpha)] + \frac{b}{\sin \alpha} [\varepsilon_2(\alpha) - \varepsilon_4(\alpha)]. \quad (7.20)$$

Здесь  $\varepsilon_j(\alpha)$  — коэффициенты, равные единице для  $j$ -й грани и обращаясь в нуль на других гранях (рис. 12).

Решив численно интегральное уравнение (7.6) и определив распределение потенциала рассеянного поля по поверхности, можно затем по формуле (7.17) найти рассеянное поле. Такое вычисление выполнено в работе [142], причем вместо интегрального уравнения (7.6) относительно потенциала рассеянного поля было использовано интегральное уравнение для потенциала полного поля на поверхности.

Для того чтобы получить такое уравнение, воспользуемся формулой (3.216). При граничном условии  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  находим

$$\begin{aligned} \Phi(R, \varphi) = & \Phi_0(R_0, \varphi) - \\ & - \frac{i}{4} \int_l \Phi(\rho, \alpha) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kR) dl. \end{aligned} \quad (7.21)$$

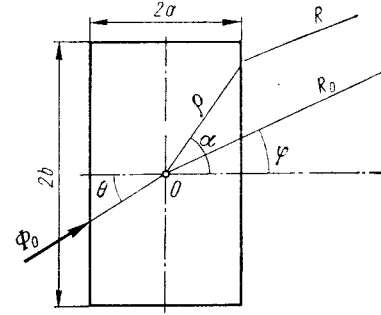


Рис. 12. К рассеянию звука на прямоугольном брус.

Устремим теперь точку наблюдения к поверхности тела. Выполнив предельный переход методом, изложенным в § 6, получим интегральное уравнение относительно полного поля на поверхности

$$\Phi(\vec{\rho}) - \int_l \Phi(\vec{\rho}_1) K(\vec{\rho}, \vec{\rho}_1) dl_1 = f(\vec{\rho}), \quad (7.22)$$

где

$$\begin{aligned} K(\vec{\rho}, \vec{\rho}_1) = & -\frac{i}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr); \quad r = |\vec{\rho} - \vec{\rho}_1|; \\ f(\vec{\rho}) = & 2\Phi_0(\vec{\rho}). \end{aligned}$$

Подставив в это уравнение значения входящих в него функций и учитывая, что  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n_1}$ , получим

$$\Phi(\alpha) - \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha_1) K(\alpha, \alpha_1) d\alpha_1 = f(\alpha); \quad (7.23)$$

где

$$\begin{aligned} K(\alpha, \alpha_1) = & -\frac{ik}{2} \cdot \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r} [\rho^2(\alpha_1) - \rho(\alpha) \rho(\alpha_1) \cos(\alpha - \alpha_1) + \\ & + \rho'(\alpha_1) \rho(\alpha) \sin(\alpha - \alpha_1)]; \quad f(\alpha) = 2e^{ik\rho(\alpha) \cos(\alpha - \theta)}. \end{aligned}$$

Значение  $r$  вычисляется по формуле (7.7). Определив из интегрального уравнения (7.23) потенциал на поверхности тела, можно найти рассеянное поле в пространстве либо по формуле (7.21), либо через рассеянное поле на поверхности тела  $\Phi_S = \Phi - \Phi_0$  по формуле (7.17).

Результаты расчетов приведены на рис. 13 и 14. На рис. 13 показаны эпюры распределения амплитуды и фазы потенциала на поверхности бруса квадратного сечения при  $\theta = 0^\circ$ . При малых волновых размерах сечения бруса ( $ka = 0,3$ ) распределение амплитуды потенциала почти постоянно и мало отличается от амплитуды потенциала (принятой за единицу) в падающей волне. По мере увеличения параметра  $ka$  амплитуда потенциала на передней грани стремится к удвоен-

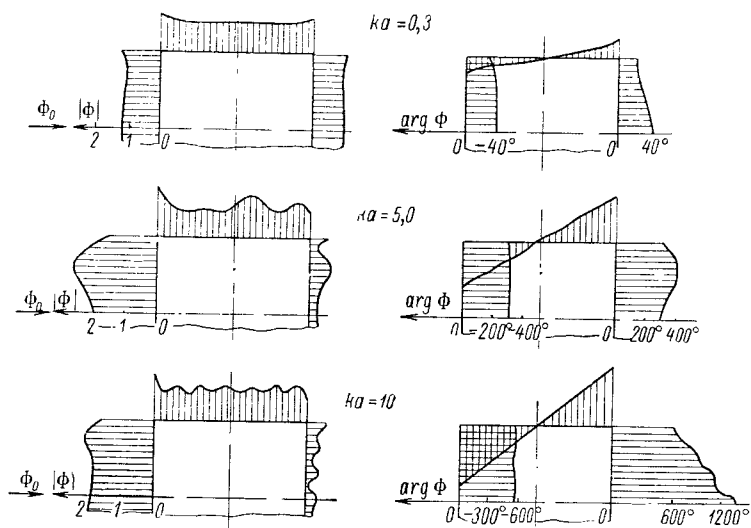


Рис. 13. Эпюры распределения потенциала на поверхности абсолютно жесткого квадратного бруса.

ной амплитуде падающей волны, амплитуда потенциала на боковой грани стремится к единице, а амплитуда на задней грани в зоне тени стремится к нулю.

Фаза потенциала на передних и боковых гранях при всех значениях  $ka$  близка к фазе падающей волны. Так, например, на передней грани при  $ka = 5,0$  фаза падающей волны  $e^{ika}$  составляет  $286^\circ$ , что приблизительно соответствует значению, показанному на рисунке. Линейное изменение фазы на боковых гранях соответствует распространению волны вдоль этих граней практически без искажений. Фаза в зоне тени при большом значении  $ka$  ( $ka = 10$ ) линейно нарастает с удалением от границы зоны тени. Таким образом, в зоне тени за препятствием существует волна, распространяющаяся вдоль его поверхности в направлении от границы тени к середине зоны. Более подробно природа таких волн рассматривается в § 24.

Диаграммы рассеяния  $\left| \frac{F(\varphi)}{F(0)} \right|$  приведены на рис. 14. При  $ka = 0,7$  диаграмма рассеяния (рис. 14, а) незначительно отличается от диаграммы рассеяния на круговом цилиндре малого радиуса, определяе-

мой функцией  $1 - 2 \cos \varphi$  (см. § 18). При больших  $ka$  ( $ka = 5; 10$ ) диаграмма рассеяния превращается в два лепестка (рис. 14, б). Лепесток, направленный навстречу падающей волне, обусловлен отражением звука от передней грани; второй лепесток является тенеобразующим. Ширина лепестков при больших значениях  $ka$  приблизительно соот-

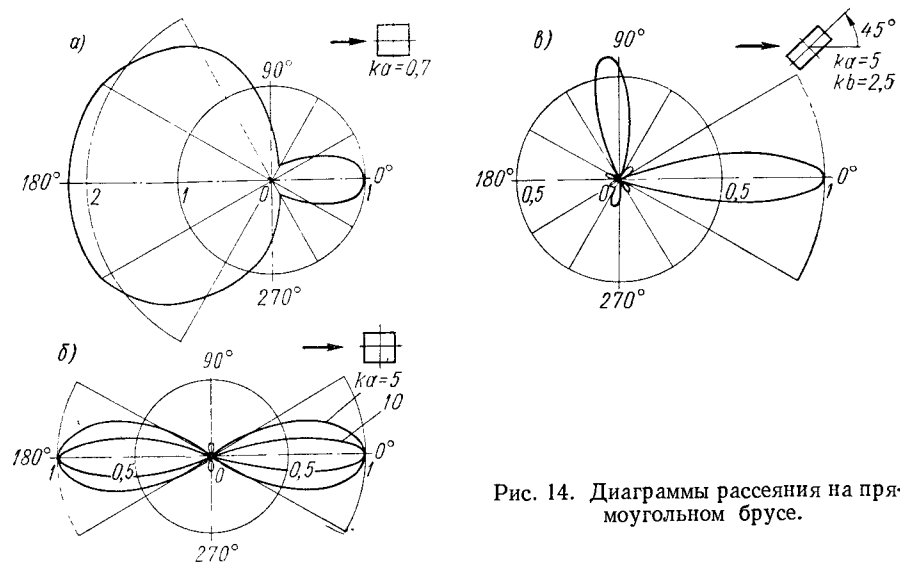


Рис. 14. Диаграммы рассеяния на прямоугольном брус.

ветствует ширине основного лепестка диаграммы направленности плоского поршневого излучателя с длиной, равной поперечному размеру бруса  $2a$ .

При наклонном падении волны на брус возникают три основных лепестка (рис. 14, в). Лепесток в направлении  $\varphi = 0$  по-прежнему является тенеобразующим. Лепесток при  $\varphi = 90^\circ$  характеризует волну, зеркально отраженную от большей грани. Лепесток при  $\varphi = 270^\circ$  соответствует волне, отраженной от малой грани.

## § 8. Приближенные методы расчета звуковых полей

Как уже указывалось, на поверхности никогда заранее не известны одновременно и звуковое давление, и колебательная скорость. В этом состоит основная трудность, которая встречается при использовании интеграла Кирхгофа для расчета звуковых полей. Необходимость вычислять величину потенциала на поверхности по заданной колебательной скорости приводит к появлению интегрального уравнения, решение которого связано с определенными вычислительными трудностями. В случае, если излучателем является бесконечная плоскость, интеграл Гюйгенса сразу дает простое решение. Если же колебательная скорость задана лишь на огра-



нической части плоскости или же поверхность изогнута, то приходится либо применять интегральное уравнение, либо искать приближенные способы решения. Одним из таких способов является метод, называемый приближением Кирхгофа.

Сущность метода состоит в следующем. Если размеры излучающей поверхности значительно больше, чем длина звуковой волны, и радиус кривизны этой поверхности также велик по сравнению с длиной волны, то можно приближенно считать, что на поверхности отношение звукового давления к колебательной скорости приблизительно такое же, как и в плоской звуковой волне. Таким образом, можно принять, что на поверхности  $p \approx \rho c v_n$  и каждый элемент  $dS$  поверхности излучает звук точно так же, как он излучал бы, если бы был расположен в бесконечном плоском экране, совпадающем с касательной к поверхности в данной точке.

Ниже приближенный метод Кирхгофа сформулирован для трех наиболее распространенных случаев: излучения звука поверхностью, отражения звука от поверхности и дифракции на щели в экране.

**Основные допущения, принимаемые при расчетах звуковых полей, излучаемых поверхностью.** Для того чтобы рассчитать звуковое поле в пространстве, необходимо прежде всего условиться о том, какие именно параметры излучающей поверхности будут считаться известными. Будем полагать, что на поверхности задана нормальная составляющая колебательной скорости  $v_n$ . Заметим, однако, что в действительности в большинстве практических случаев колебательная скорость поверхности неизвестна. Если поверхность состоит из ряда электроакустических преобразователей, то известной величиной является электрическое напряжение, возбуждающее преобразователи.

Для того чтобы определить излучаемое звуковое давление, строго говоря, необходимо рассматривать эквивалентную электрическую схему преобразователя. При этом сопротивление излучения должно быть определено из решения чисто акустической задачи об излучении поверхности с заданной колебательной скоростью.

В некоторых случаях известной величиной является сила, действующая на упругую поверхность. Тогда колебательная скорость должна определиться в результате решения задачи о вынужденных колебаниях механической системы в акустической среде. При этом придется рассматривать и механическую задачу об упругих колебаниях с учетом реакции среды, и акустическую задачу об излучении звука поверхностью.

Таким образом, задача об излучении звука поверхностью при заданной колебательной скорости является составной частью более общей задачи об излучении звука реальными поверхностями в акустической среде. Однако указанная задача имеет и большое самостоятельное значение при расчетах звуковых полей в гидроакустике, поскольку во многих практических случаях распределение колебательной скорости по поверхности тела можно приближенно считать известным. В частности, при достаточно больших размерах излучаю-

щей поверхности, состоящей из отдельных электроакустических преобразователей, можно считать, что распределение колебательной скорости по поверхности приблизительно соответствует распределению напряжения возбуждения.

После этих замечаний можно сформулировать задачу. Необходимо определить звуковое поле, излучаемое гладкой поверхностью больших по сравнению с длиной звуковой волны размеров, если известно распределение колебательной скорости по поверхности.

Введем следующие допущения:

1. Будем считать, что поле в точке  $M$  (рис. 15) создается только в результате действия части поверхности, которая видна из  $M$ . Это условие означает, что для тела больших волновых размеров вклад в общее звуковое поле за счет дифракции участков, расположенных в зоне геометрической тени, пренебрежимо мал.

2. На поверхности тела имеет место соотношение  $\frac{p}{v_n} \approx \rho c$ . Учтыва-

я, что  $p = -i\omega\rho\Phi$  и  $v_n = -\frac{\partial\Phi}{\partial n_1} = \frac{\partial\Phi}{\partial n}$ , соотношение между  $\Phi$  и  $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$  на поверхности можно записать в виде

$$\Phi \approx -\frac{1}{ik} \frac{\partial\Phi}{\partial n}. \quad (8.1)$$

В этом случае формула Кирхгофа (3.15) принимает вид

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} v_n e^{ikr} \left[ \frac{1}{r} + \frac{kr+i}{kr^2} \cos\alpha \right] dS; \quad (8.2)$$

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{n}, r).$$

Здесь  $S_1$  — участок поверхности, который виден из точки  $M$ .

Если теперь предположить, что  $kr \gg 1$ , то из последней формулы получаем

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} v_n \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \cos\alpha) dS. \quad (8.3)$$

Таким образом, в приближении Кирхгофа излучение звука поверхностью определяется излучением объемных и дипольных источников, причем амплитуды звукового давления, развиваемого этими источниками, равны друг другу. Это означает, что каждому элементу поверхности приписывается диаграмма направленности  $1 + \cos\alpha$ .

Если излучение сосредоточено в сравнительно небольшом телесном угле пространства (остронаправленные поверхности) и направлено

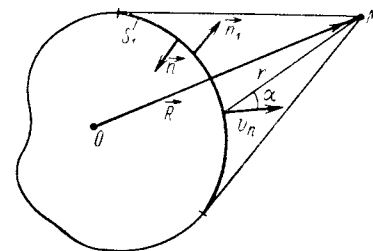


Рис. 15. К излучению звука поверхностью в приближении Кирхгофа.

приблизительно по нормали к поверхности (слабозогнутая поверхность), то можно положить  $\cos \alpha \approx 1$ , и формула (8.3) принимает вид

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_1} v_n \frac{e^{ikr}}{r} dS. \quad (8.4)$$

Следовательно, в приближении Кирхгофа излучение остро направленной слабоизогнутой поверхности под углами, не слишком отклоняющимися от нормали, определяется интегралом Гюйгенса (4.3).

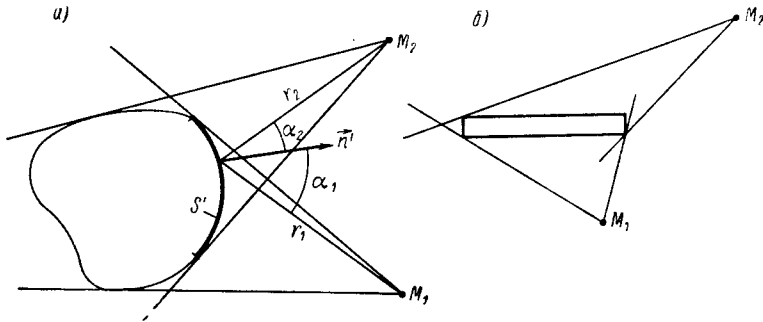


Рис. 16. К отражению звука поверхностью в приближении Кирхгофа.

**Отражение звука от препятствия.** Предположим, что в точке  $M_1$  (рис. 16, а) находится источник звука, излучающий сферическую волну с потенциалом

$$\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikr_1}}{r_1}. \quad (8.5)$$

Болна  $\Phi_1$  отражается от тела больших волновых размеров. Необходимо вычислить потенциал отраженной волны в точке  $M_2$ .

Вводим следующие допущения:

1. Считаем, что распределение поля на поверхности в зоне, освещенной источником  $M_1$ , равно распределению того поля, которое имелось бы в месте, где находится отражающая поверхность, если бы самой поверхности не было. Таким образом, допускаем, что поверхность не вносит искажений в поле падающей волны.

2. Считаем, что звуковое поле в неосвещенной области равно нулю. Это означает, что дифракцией на теле и проникновением волны в теневую область в этом приближении мы пренебрегаем.

3. На поверхности тела выполняется условие (8.1).

Предположим для определенности, что тело является абсолютно жестким, т. е.  $v_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S = 0$ . Чтобы удовлетворить этому условию, примем, что поверхность  $S$  в освещенной зоне покрыта фиктивными источниками, колебательная скорость которых равна по величине и противоположна по знаку колебательной скорости падающей волны:

$v_n \text{ фикт} = -v_n$ . Вычислим потенциал звукового поля, излучаемого этими источниками. Формулу Кирхгофа запишем в виде

$$\Phi_2(M_2) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[ v_n \text{ фикт} \frac{e^{ikr_2}}{r_2} - \Phi_1 \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \right) \right] dS. \quad (8.6)$$

Направление нормали по сравнению с формулой (3.15) здесь заменено на противоположное.

Вычислим  $v_n \text{ фикт}$ . Радиальная колебательная скорость в падающей волне определяется выражением

$$v_r = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r_1} = -\frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{ikr_1 - 1}{r_1^2} e^{ikr_1}.$$

Нормальная составляющая будет равна

$$v_n = -\frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{ikr_1 - 1}{r_1^2} e^{ikr_1} \cos \alpha_1.$$

Таким образом, при  $kr_1 \gg 1$  можно записать

$$v_n \text{ фикт} = \frac{Qik}{4\pi r_1} e^{ikr_1} \cos \alpha_1. \quad (8.7)$$

Производная по нормали, входящая в выражение (8.6), при  $kr_2 \gg 1$  определится следующим выражением:

$$\frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \right) = \frac{ikr_2 - 1}{r_2^2} e^{ikr_2} \frac{\partial r_2}{\partial n'} \approx -ik \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \cos \alpha_2. \quad (8.8)$$

Учитывая первое из принятых допущений и выражения (8.7), (8.8), из формулы (8.6) получаем

$$\Phi_2(M_2) = -\frac{ikQ}{16\pi^2} \iint_{S'} \frac{e^{ik(r_1+r_2)}}{r_1 r_2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) dS. \quad (8.9)$$

Здесь  $S'$  — часть поверхности  $S$ , которая видна одновременно из точек  $M_1$  и  $M_2$ . Если на поверхности  $S$  нет участков, которые были бы одновременно видны из точек  $M_1$  и  $M_2$ , то в приближении Кирхгофа отраженное от тела звуковое поле в точке  $M_2$  отсутствует. Пример такого расположения источников относительно поверхности приведен на рис. 16, б.

Для того чтобы получить в точке  $M_2$  полное поле, к отраженному полю надо прибавить поле падающей волны.

Если тело является абсолютно мягким ( $\Phi = 0$ ), то можно предположить, что на поверхности заданы фиктивные источники, потенциал которых равен по величине и противоположен по знаку потенциалу падающей волны:  $\Phi_{\text{фикт}} = -\Phi_1$ . Повторяя преобразования, получим, что отраженное поле будет определяться по-прежнему формулой (8.9), в которой знак минус следует заменить на плюс (фаза волны, отраженной от мягкой поверхности, отличается на  $180^\circ$  от фазы волны, отраженной от жесткой поверхности). Таким образом, в приближении Кирхгофа звуковое поле, отраженное от абсолютно мяг-

кого тела, совпадает (с точностью до знака) со звуковым полем, отраженным от абсолютно жесткого тела.

Формула (8.9) может быть использована для расчета диаграмм направленности источников, расположенных вблизи отражающих поверхностей больших волновых размеров, в частности для расчета рефлекторных звукоизлучателей и звукоприемников. Рефлекторные антенны электромагнитных волн в электродинамике в приближении Кирхгофа [2] также рассчитываются по формуле, аналогичной (8.9).

Легко изменить формулу (8.9) на случай, когда источник, расположенный в точке  $M_1$ , имеет собственную направленность. Для этого необходимо под знак интеграла добавить множитель, учитывающий неравномерное освещение поверхности источником.

Практическое выполнение расчетов по формуле (8.9) сводится к вычислению двойного интеграла по поверхности отражателя. Если форма тела и расположение точек  $M_1, M_2$  таковы, что на промежутке интегрирования фаза  $k(r_1 + r_2)$  меняется в значительных пределах, то вещественная и мнимая части подинтегрального выражения быстро осциллируют. Поэтому количество точек, в которых должно вычисляться подинтегральное выражение при численном интегрировании, может оказаться весьма большим. Так, например, если величина  $r_1 + r_2$  меняется на 10 длин волн, то это значит, что количество полупериодов осцилляций равно 20. Взяв на каждом полупериоде пять точек для численного интегрирования, получаем, что общее количество точек по одной из координат равно 100, а по обеим координатам  $10^4$ .

Несмотря на то, что объем вычислений по формуле (8.9) оказывается большим, их трудоемкость значительно меньше трудоемкости вычислений при решении интегрального уравнения.

Приближенные методы вычислений по формуле (8.9), основанные на применении метода стационарной фазы, рассматриваются в § 10.

**Дифракция звука на отверстии в экране.** Приближение Кирхгофа в этом случае сводится к следующим допущениям:

- 1) поле на неосвещенной стороне экрана равно нулю;
- 2) поле в отверстии равно полю падающей волны.

Таким образом, предполагается, что в пределах отверстия дифракция на краю отверстия не искажает поля; за экраном поле скачком падает до нуля. Например, для плоской звуковой волны, падающей на экран из нижнего полупространства, распределение поля в приближении Кирхгофа будет иметь вид, показанный на рис. 17, а пунктирной линией. В действительности распределение поля в плоскости экрана является гораздо более сложным. Однако при  $kL \gg 1$  ( $L$  — характерный размер отверстия) можно считать, что дифракционные искажения имеют место лишь в некоторой зоне вблизи краев отверстия, а в остальной области поле повторяет поле падающей волны. Тогда для расчета поля в точке  $M_2$  можно применить формулу Гюйгенса для плоских экранов (4.3):

$$\Phi(M_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot \frac{e^{ikr_2}}{r_2} dS; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = - \frac{\partial \Phi}{\partial n'} = v_n. \quad (8.10)$$

Поскольку распределение колебательной скорости в падающей звуковой волне  $v_n$  известно, формула (8.10) и дает решение задачи. Из выражения (8.10) следует, что в приближении Кирхгофа поле, прошедшее через отверстие в экране, совпадает с полем излучения плоского поршня, расположенного в бесконечном жестком экране. При этом предполагается, что форма поршня совпадает с формой отверстия, а распределение амплитуд и фаз возбуждения по его поверхности — с распределением поля в отверстии, задаваемом падающей волной.

При уменьшении волновых размеров отверстия зона дифракционных искажений увеличивается (рис. 17, б) и при  $L \sim \lambda$  поле в отвер-

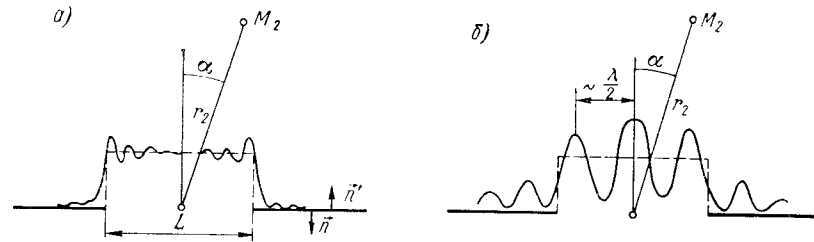


Рис. 17. Распределение поля в плоскости экрана при дифракции на отверстии в приближении Кирхгофа: а — при  $L \gg \lambda$ ; б — при  $L \sim \lambda$ .

сти осциллирует, причем период осцилляций примерно равен половине длины волны звука. При этом оказывается, что приближение Кирхгофа справедливо и в тех случаях, когда осцилляции занимают всю площадь отверстия.

Сравнение результатов, полученных точными методами, с результатами расчетов по формуле (8.10) показывает, что приближение Кирхгофа дает достаточную для практических расчетов точность уже при  $L \geq (1+2)\lambda$ . Объяснение этого явления состоит в следующем. В точке  $M_2$  суммируются звуковые поля, излучаемые различными участками отверстия. При не слишком больших углах  $\alpha$  действия максимумов и минимумов компенсируются, и общее поле в точке  $M_2$  оказывается приближенно равным полю, излучаемому отверстием с некоторым средним распределением, весьма близким к распределению, создаваемому падающей волной. Поэтому приближение Кирхгофа не приводит к появлению больших ошибок в определении поля. По мере увеличения угла  $\alpha$  начинают возрастать сдвиги фаз между звуковыми волнами, пришедшими в точку наблюдения из различных участков отверстия. При некотором значении угла  $\alpha$  сдвиги фаз достигнут такой величины, что действия участков, создающих положительные и отрицательные возмущения поля, будут не компенсироваться, а накапливаться. При этом ошибки, возникающие в результате применения метода Кирхгофа, начнут резко увеличиваться. Таким образом, в области глубокой тени метод Кирхгофа неприменим.

## § 9. Метод стационарной фазы

Обратимся снова к формуле (8.9). В подынтегральное выражение входит медленно меняющаяся амплитудная функция и быстро меняющаяся фазовая. Если на промежутке интегрирования величина  $r_1 + r_2$  изменяется таким образом, что фаза  $k(r_1 + r_2)$  меняется на большое число периодов, то вещественная и мнимая части подынтегрального выражения быстро осциллируют. Как показано в § 8, даже если изменение суммы  $r_1 + r_2$  составляет всего 10 длин волн, то для вычисления интеграла может потребоваться порядка  $10^4$  слагаемых. Если же это изменение составляет десятки и сотни длин волн, то расчет становится невозможным и при помощи

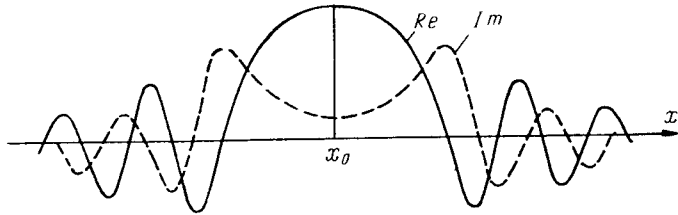


Рис. 18. Характер изменения вещественной и мнимой частей подынтегрального выражения (8.9) вблизи точки зеркального отражения.

электронных вычислительных машин. Кроме того, в процессе численного интегрирования приходится складывать весьма близкие по модулю положительные и отрицательные числа. Поэтому все вычисления необходимо проводить с весьма большой точностью.

Для того чтобы упростить вычисления, можно воспользоваться методом стационарной фазы. Сущность этого метода заключается в следующем. Из интуитивных соображений должно быть ясно, что из всей поверхности  $S$  (рис. 16, а) наибольшую роль играет участок, расположенный вблизи точки зеркального отражения. Эта точка обладает следующими свойствами:  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $r_1 + r_2 = \min$  (или  $r_1 + r_2 = \max$  при отражении от вогнутой поверхности). Таким образом, наибольшую роль играет участок поверхности, около которого фаза  $k(r_1 + r_2)$  меняется наиболее медленно.

Характер изменения вещественной и мнимой частей подынтегрального выражения (8.9) показан на рис. 18. Вблизи точки  $x_0$ , являющейся точкой зеркального отражения, подынтегральное выражение меняется наиболее медленно. Известно, что сумма медленно меняющегося знакопеременного ряда определяется первыми членами, поскольку остальные члены компенсируют друг друга. Нечто подобное будет происходить в рассматриваемом случае. Наибольшую роль должна играть область вблизи точки  $x_0$ , действие же остальных участков поверхности  $S$  должно быть малым.

Рассмотрим сначала одномерный случай.

**Метод стационарной фазы для однократных интегралов.** Теорию метода стационарной фазы можно найти в литературе [19]. Приведем необходимые в дальнейшем формулы.

Рассмотрим интеграл типа

$$I = \int_a^b f(x) e^{ip\varphi(x)} dx. \quad (9.1)$$

Здесь  $f(x)$  — медленно меняющаяся в промежутке  $[a, b]$  амплитудная функция;  $\varphi(x)$  — фазовая функция;  $p$  — большое число.

Приближенное значение интеграла (9.1) определяется выражением

$$I = \frac{\sqrt{2\pi} f(x_0) e^{ip\varphi(x_0) \pm i\pi/4}}{\sqrt{p|\varphi''(x_0)|}}. \quad (9.2)$$

Здесь  $x_0$  — корень уравнения  $\varphi'(x_0) = 0$ . Точка  $x_0$  называется точкой стационарной фазы, поскольку вблизи этой точки фаза  $\varphi(x)$  меняется наиболее медленно. Знак показателя экспоненты совпадает со знаком величины  $\varphi''(x_0)$ .

Таким образом, величина интеграла пропорциональна амплитуде, вычисленной в точке стационарной фазы.

Фаза результирующего колебания также определяется фазой в стационарной точке. Кроме того, в выражение (9.2) входит величина  $\varphi''(x_0)$ . Она определяет кривизну фазовой функции в стационарной точке. Легко дать физическую интерпретацию зависимости амплитуды звукового поля от  $\varphi''(x_0)$ . Чем медленнее меняется фаза вблизи стационарной точки, тем больше размеры участка поверхности, для которого  $k(r_1 + r_2) \approx \text{const}$ . Отраженные от этого участка волны приходят в точку наблюдения почти синфазно. Поэтому при увеличении радиуса кривизны поверхности (а следовательно, и уменьшении второй производной фазовой функции) площадь этого участка увеличивается и отраженное поле также возрастает. И наоборот, при увеличении  $\varphi''(x_0)$  (например, при уменьшении радиуса кривизны поверхности  $S$  в точке зеркального отражения) рассеяние энергии увеличивается и амплитуда поля уменьшается.

Заметим, что применение метода стационарной фазы требует, чтобы велико было не  $p$ , а  $p\varphi''$ . Это означает, что точность метода определяется не расстоянием от поверхности до точки наблюдения, а скоростью изменения фазовой функции.

Может оказаться, что стационарных точек несколько. В этом случае величина интеграла определяется суммой членов типа (9.2), соответствующих каждой из точек стационарной фазы.

**Метод стационарной фазы для двукратных и многократных интегралов.** Метод стационарной фазы может быть применен также и к многомерным интегралам. Рассмотрим интеграл следующего вида:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\varphi(x_1, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n. \quad (9.3)$$

Асимптотические формулы для интегралов подобного типа получены в работе [98]. Приведем здесь без доказательства конечные результаты. Предположим, что  $\varphi$  и  $f$  — непрерывные функции, имеющие не меньше чем  $\frac{n}{2} + 2$  непрерывных производных. Стационарными точками будут являться решения уравнения

$$\text{grad } \varphi = 0. \quad (9.4)$$

Предположим, что имеется конечное число  $N$  таких решений  $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Тогда приближенное значение интеграла определится следующим выражением:

$$I = \sum_{j=1}^N I_j, \quad (9.5)$$

где

$$I_j = \frac{e^{i \frac{\pi}{4} \delta_j} (2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\rho^{\frac{n}{2}} |D_j|} f(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) e^{i\rho\varphi(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})}.$$

В этой формуле  $D_j$  — определитель с элементами

$$a_{rs} = \frac{\partial^2 \varphi(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})}{\partial x_r \partial x_s};$$

величина  $\delta_j$  в показателе экспоненты является сигнатурой квадратичной формы с матрицей  $\|a_{rs}\|$ , т. е. разностью между числом положительных и отрицательных членов, образующихся после приведения квадратичной формы к сумме квадратов. Способ вычисления сигнатуры приведен в [13]. В частности, если смешанные производные в точке стационарной фазы равны нулю, то величина  $\delta_j$  равна разности между числом положительных и отрицательных производных  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r^2}$ ,  $r = 1, \dots, n$ , вычисленных в точке стационарной фазы.

Наиболее важным частным случаем (9.5) является формула для приближенного вычисления двукратных интегралов

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho\varphi(x, y)} f(x, y) dx dy. \quad (9.6)$$

Точками стационарной фазы  $(x^{(j)}, y^{(j)})$ ,  $j = 1, \dots, N$ , являются решения системы уравнений

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Значение интеграла определяется суммой членов, вычисленных для всех точек стационарной фазы:

$$I = \sum_{j=1}^N I_j, \quad (9.7)$$

где

$$I_j = \frac{2\pi f(x^{(j)}, y^{(j)})}{\rho V|D_j|} e^{i\rho\varphi(x^{(j)}, y^{(j)}) + i \frac{\pi}{4} \delta_j};$$

$$D_j = \left[ \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \Bigg|_{\substack{x=x_j \\ y=y_j}}.$$

Величина  $\delta_j$  в показателе экспоненты может принимать значения 2, 0, -2. Выбор  $\delta_j$  производится по следующему правилу:  $\delta_j = 2$ , если величины  $a_{11}$  и  $D_j/a_{11}$  одновременно положительны;  $\delta_j = -2$ , если обе эти величины отрицательны;  $\delta_j = 0$ , если одна из них положительна, а другая отрицательна.

Заметим, что  $1/D_j$  является гауссовой кривизной  $(R_1 R_2)^{-1}$  поверхности  $\varphi(x, y)$  [см. формулу (10.7), где  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны]. Поэтому при положительной гауссовой кривизне (поверхность вогнутая или выпуклая)  $\delta_j = \pm 2$ , причем для вогнутой поверхности используется знак плюс, так как при этом  $a_{11} > 0$ . При отрицательной гауссовой кривизне (поверхность типа «седло» в стационарной точке)  $\delta_j = 0$ .

**Дополнительные замечания о методе стационарной фазы.** Метод стационарной фазы позволяет находить простые решения задач об излучении и дифракции звука поверхностями, размеры которых велики по сравнению с длиной звуковой волны. Однако далеко не все задачи подобного типа могут быть решены указанным методом. Для того чтобы этот метод был применим, необходимо, чтобы в области интегрирования фазовая функция изменялась на большое количество длин волн. Поэтому методом стационарной фазы нельзя, например, вычислить диаграмму направленности излучателя, помещенного в фокусе (или вблизи фокуса) параболического рефлектора. В этом случае сумма расстояний  $r_1 + r_2$  в пределах рефлектора будет постоянной (или слабо меняющейся) величиной. Кроме того, метод нельзя использовать для определения диаграммы остронаправленного излучателя, поскольку в направлении главного максимума диаграммы волны, приходящие в точку наблюдения из различных участков поверхности, будут складываться практически синфазно. Для направлений, далеких от оси главного максимума, волны, приходящие в точку наблюдения, имеют большие фазовые сдвиги. Однако точка стационарной фазы будет находиться вне излучающей поверхности и в приближении, определяемом методом стационарной фазы, в указанном диапазоне углов поле будет равно нулю. Таким образом, метод не позволяет находить дифракционную картину добавочных максимумов диаграмм направленности.

Можно показать, что метод стационарной фазы соответствует чисто геометрическому приближению. Пусть, например, на зеркально гладкую поверхность падает пучок лучей с телесным углом  $d\Omega_1$  (рис. 19, а). Предположим, что размеры поверхностей и радиусы кривизны настолько велики по сравнению с длиной звуковой волны, что отражение происходит по законам геометрической оптики. Тогда пучок отраженных лучей оказывается сосредоточенным в телесном угле  $d\Omega_2$ . При этом плотность звуковой энергии в отраженном пучке будет пропорциональна отношению  $\frac{d\Omega_1}{d\Omega_2}$ . Очевидно, что, чем шире отраженный пучок, тем меньше в нем плотность энергии. Звуковое

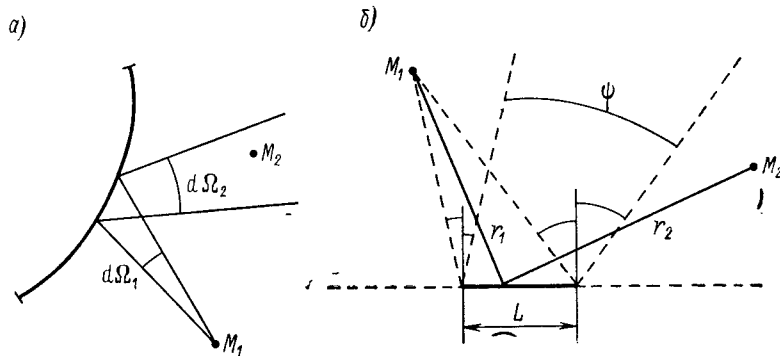


Рис. 19. К вычислению волновых полей методом стационарной фазы.

давление будет пропорционально величине  $\sqrt{\frac{d\Omega_1}{d\Omega_2}}$ . Если вычислить звуковое давление в отраженной волне подобным способом и сравнить полученную величину со звуковым давлением, вычисленным методом стационарной фазы, то окажется, что оба метода приводят к одинаковым результатам. Это означает, что метод стационарной фазы дает возможность вычислить звуковое поле лишь в геометрическом приближении без учета дифракции.

Из предыдущих результатов следует также, что при отражении звука от больших гладких поверхностей величина отраженного поля практически не зависит от размеров поверхности. Она определяется лишь радиусом кривизны в нескольких точках поверхности, являющихся точками стационарной фазы. Выше мы видели, что положение точек стационарной фазы определяется условием  $r_1 + r_2 = \begin{cases} \min \\ \max \end{cases}$  и  $\alpha_1 = \alpha_2$  (см. рис. 16). Поэтому точки стационарной фазы на поверхности являются точками световых бликов, которые видны наблюдателю, находящемуся в точке  $M_2$  при освещении поверхности источником, расположенным в точке  $M_1$ . Величина отраженного поля зависит лишь от числа бликов и характера поверхности в их окрестности.

Следует отметить, что формула (9.2) может быть использована лишь в тех случаях, когда точка стационарной фазы находится в пре-

делах поверхности. Рассмотрим следующий пример. Звук от источника  $M_1$  отражается от полосы шириной  $L$  (рис. 19, б). Предположим, что имеют место неравенства  $kL \gg 1$ ,  $kr_1 \gg 1$ ,  $kr_2 \gg 1$ . Выполнение этих условий еще не говорит о том, можно или нельзя применять метод стационарной фазы. Если точка  $M_2$  находится в секторе  $\psi$ , образованном лучами, отраженными по законам геометрической оптики, то стационарная точка лежит в пределах отрезка  $L$  и метод может быть использован. Если же  $M_2$  выходит за пределы сектора  $\psi$ , то она попадает в зону геометрической тени (для отраженной волны), стационарная точка смещается за пределы отрезка  $L$  и метод оказывается неприменимым.

Вблизи границы тени можно применить уточненный метод стационарной фазы, не раздвигая границ области интегрирования в бесконечность, и учесть влияние краев путем использования интегралов Френеля. Однако вдали от границы тени, вне сектора  $\psi$ , точность такого расчета резко падает. Поэтому расчет поля в области глубокой тени должен выполняться более точными способами. Впрочем, последний недостаток свойствен не только методу стационарной фазы как математическому приему, но и вообще приближению Кирхгофа, которое по самой физической сути не дает возможности произвести расчет поля в области тени.

## § 10. Локационное отражение от гладких поверхностей

Приближение Кирхгофа в сочетании с методом стационарной фазы дает возможность получить простые формулы для звукового поля, отраженного от гладкой поверхности в направлении, обратном направлению падения. Такое отражение называется локационным. Пусть на поверхность больших волновых размеров падает звуковая волна (рис. 20), создаваемая источником, расположенным в точке  $M$ :

$$\Phi_0 = \frac{Q}{4\pi r} e^{ikr}. \quad (10.1)$$

Уравнение поверхности  $S$  задано выражением  $z = f(x, y)$ . Необходимо найти отраженную волну.

Воспользуемся выражением (8.9) и совместим точку наблюдения  $M_2$  на рис. 16, а с точкой излучения  $M_1$ . На рис. 20 эта точка обозначена через  $M$ . Очевидно, что в этом случае  $r_1 = r_2 = r$ ,  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \cos \alpha$ . Будем считать, что точка  $M$  находится на большом расстоянии от поверхности, так что все лучи, соединяющие точку с поверхностью, можно считать параллельными. Тогда

$$r \approx r_0 - f(x, y), \quad (10.2)$$

где  $r_0$  — расстояние от точки  $M$  до начала координат.

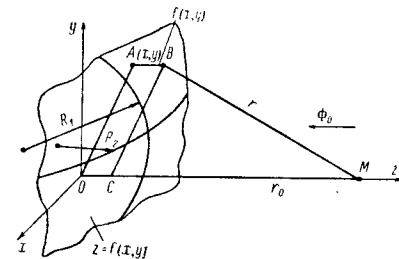


Рис. 20. Локационное отражение от гладкой поверхности.

Учитывая, что  $dS = \frac{dx dy}{\cos \alpha}$ , из формулы (8.9) получим

$$\Phi_{\text{отр}} = -\frac{ikQe^{2ikr_0}}{8\pi^2} \int_S \frac{e^{-2ikf(x, y)}}{[r_0 - f(x, y)]^2} dx dy. \quad (10.3)$$

Если на поверхности укладывается много зон Френеля, то пределы интегрирования можно раздвинуть в бесконечность и применить метод стационарной фазы. Для приближенного вычисления двойного интеграла воспользуемся формулой (9.7). Точка стационарной фазы  $(x_1, y_1)$  определяется как решение системы уравнений

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (10.4)$$

Используя (9.7), запишем выражение (10.3) следующим образом:

$$\Phi_{\text{отр}} = \frac{Q}{8\pi r_0^2} \cdot \frac{e^{2ik[r_0 - f(x_1, y_1)] + i\frac{\pi}{4}\delta}}{\sqrt{\left| \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right)^2 \right|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}}}}. \quad (10.5)$$

Заметим, что подкоренное выражение можно выразить через главные радиусы кривизны поверхности в точке стационарной фазы.

Известно, что главные радиусы кривизны  $R_1$  и  $R$  определяются как корни квадратного уравнения

$$(rt - s^2) R^2 + \sqrt{H} [2pqs - (1 + p^2)t - (1 + q^2)r] R + H^4 = 0,$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

$$H = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

С учетом условий (10.4) для точки  $x = x_1, y = y_1$  это уравнение можно записать в виде

$$R^2 - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2} R + \frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2} = 0. \quad (10.6)$$

Произведение корней должно равняться свободному члену. Таким образом,

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}}. \quad (10.7)$$

Заметим, что величина  $(R_1 R_2)^{-1}$  является гауссовой кривизной поверхности.

В результате получаем окончательно

$$\Phi_{\text{отр}} = \frac{Q \sqrt{R_1 R_2}}{8\pi r_0^2} e^{2ik[r_0 - f(x_1, y_1)] + i\frac{\pi}{4}\delta}, \quad (10.8)$$

где величина  $\delta$  находится по правилу, изложенному в § 9.

Таким образом, фаза отраженной волны определяется удвоенным кратчайшим расстоянием от точки приема (излучения) до поверхности. Амплитуда отраженной волны обратно пропорциональна корню из гауссовой кривизны поверхности. При увеличении радиусов кривизны отраженный сигнал возрастает. Физически это объясняется следующим образом. С увеличением радиуса кривизны растет размер первой зоны Френеля. Первая зона является эффективным отражателем звука, а остальные зоны гасят друг друга. Следовательно, с возрастанием радиуса кривизны увеличивается площадь поверхности, активно участвующей в формировании отраженного поля.

Обычно отражающие поверхности имеют весьма сложную форму, и аналитически задать их практически невозможно. Поэтому можно воспользоваться следующим экспериментальным приемом. Осветим модель поверхности пучком света, источник которого находится вблизи точки приема (излучения), и сфотографируем поверхность фотоаппаратом, расположенным в точке приема. Тогда световые блики на снимке укажут расположение точек стационарной фазы. Дальнейшее вычисление сводится к определению главных радиусов кривизны в этих точках.

Если точек стационарной фазы несколько, то общее отраженное поле складывается из вкладов всех точек.

Заметим, что предельный переход  $R_1 \rightarrow \infty$  или  $R_2 \rightarrow \infty$  в формуле (10.8) недопустим. Это ограничение следует из исходных предположений, сделанных при выводе формулы. Действительно, вычисляя интеграл (10.3) методом стационарной фазы, мы предполагали, что на поверхности укладывается много зон Френеля. Однако при увеличении радиуса кривизны (и сохранении условия  $r_0 \gg L$ , где  $L$  — максимальный размер тела) по одному из размеров на поверхности не уложится и первая зона. Таким образом, применение метода стационарной фазы будет невозможно. Для того чтобы избежать этой трудности, необходимо с самого начала предполагать, что расстояние точки  $M$  до тела сравнимо с размерами тела.

В этом случае необходимо использовать более точное выражение, чем приближенное равенство (10.2). Рассмотрим прямоугольный треугольник  $ВСМ$  (рис. 20). Точка  $В$  находится на поверхности, точка  $А$  является ее проекцией на плоскость  $xOy$ , угол  $ВСМ$  — прямой.

Расстояние  $r$  может быть записано следующим образом:

$$r = \sqrt{[r_0 - f(x, y)]^2 + (x^2 + y^2)} \approx r_0 - f(x, y) + \frac{x^2 + y^2}{2r_0}.$$

Подставим это значение в формулу (8.9) и проведем вычисление методом стационарной фазы. В результате получим

$$\Phi_{\text{отр}} = \frac{Q}{8\pi r_0^2} \cdot \frac{e^{2ik \left[ r_0 - f(x_1, y_1) + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2r_0} \right] + i \frac{\pi}{4} \delta}}{\sqrt{\left| \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{1}{r_0} \right|} \times \left[ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{r_0^2} \Big|_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}}}. \quad (10.9)$$

Первые два слагаемых под корнем определяются через главные радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  по формуле (10.7). Следующие два слагаемых также можно выразить через  $R_1$  и  $R_2$ . Для этого необходимо учесть, что второй коэффициент уравнения (10.6) с обратным знаком равен сумме корней:

$$R_1 R_2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = R_1 + R_2.$$

С учетом последнего соотношения и формулы (10.7) знаменатель выражения (10.9) можно записать в виде

$$8\pi r_0 \sqrt{\left(1 - \frac{r_0}{R_1}\right) \left(1 - \frac{r_0}{R_2}\right)}. \quad (10.10)$$

Заметим, что главные радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$ , определяемые из уравнения (10.6), могут оказаться отрицательными. Это будет иметь место в том случае, если поверхность в принятой для расчета системе координат является выпуклой. Например, для поверхности, изображенной на рис. 20,  $R_1 < 0$  и  $R_2 < 0$ . Поэтому выражение (10.10) можно записать в виде

$$8\pi r_0 \sqrt{\left(1 + \frac{r_0}{|R_1|}\right) \left(1 + \frac{r_0}{|R_2|}\right)}.$$

Окончательно формулу (10.9) можно переписать следующим образом:

$$\Phi_{\text{отр}} = \frac{Q}{8\pi r_0} \cdot \frac{e^{2ik \left[ r_0 - f(x_1, y_1) + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2r_0} \right] + i \frac{\pi}{4} \delta}}{\sqrt{\left(1 + \frac{r_0}{|R_1|}\right) \left(1 + \frac{r_0}{|R_2|}\right)}}. \quad (10.11)$$

Выражение, близкое к формуле (10.11), ранее было получено В. Н. Тюлиным геометрическим способом.

Если  $|R_1| \rightarrow \infty$ ,  $r_0 \gg |R_2|$  (поверхность  $S$  стремится к цилиндрической поверхности), то

$$|\Phi_{\text{отр}}| \rightarrow \frac{Q}{8\pi r_0} \sqrt{\frac{|R_2|}{r_0}}. \quad (10.12)$$

Таким образом, при  $|R_1| \rightarrow \infty$  отраженное поле остается конечным. Если  $|R_1| \rightarrow \infty$  и  $|R_2| \rightarrow \infty$  (поверхность  $S$  приближается к плоской поверхности), то формула (10.11) дает

$$|\Phi_{\text{отр}}| = \frac{Q}{8\pi r_0}. \quad (10.13)$$

Последнее выражение может быть получено также путем зеркального отражения источника от отражающей плоскости. Поскольку расстояние от мнимого зеркально отраженного источника до точки приема равно  $2r_0$ , то потенциал мнимого источника сферической волны определяется формулой (10.13)

## ГЛАВА 3

### ■ ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ

#### § 11. Дельта-функция и неоднородное волновое уравнение

В настоящей главе рассматриваются методы расчета звуковых полей при помощи функций, определяющих поля малых источников звука. Эти функции удовлетворяют неоднородному волновому уравнению, правая часть которого описывает распределение источников в пространстве. Такие функции называются функциями Грина.

Пусть размеры источника настолько малы, что практически можно считать его сосредоточенным в одной точке. Тогда плотность распределения источников в пространстве может быть записана в виде функции, равной нулю во всем пространстве за исключением той точки, в которой находится источник. В этой точке плотность распределения источников бесконечно велика. Для описания подобных распределений применяются дельта-функции.

**Понятие о дельта-функции.** Предположим, что на некоторую поверхность действует распределенная сила, плотность которой зависит от координаты  $x$ .

Общая сила  $F$ , действующая на поверхность, будет определяться интегралом

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \quad (11.1)$$



Если сила равномерно распределена на участке длиной  $2\varepsilon$  (рис. 21), то плотность  $f(x)$  равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{F}{2\varepsilon} & \text{при } x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon; \\ 0 & \text{при } x < x_0 - \varepsilon; \quad x > x_0 + \varepsilon. \end{cases} \quad (11.2)$$

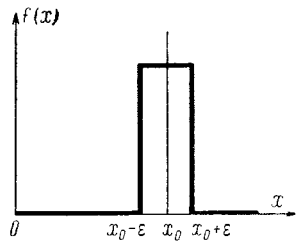
Очевидно, что соотношение (11.1) при такой записи выполняется.

Устремим теперь  $\varepsilon$  к нулю, т. е. перейдем к силе, сосредоточенной на весьма малой площади. Тогда при постоянной общей нагрузке  $F$  плотность силы будет стремиться к бесконечности. В пределе получим функцию, равную нулю везде, кроме точки  $x = x_0$ , а в точке  $x_0$  равную бесконечности. Такой предел называется дельта-функцией Дирака:

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x), \quad (11.3)$$

где  $f(x)$  определяется формулой (11.2). Если  $x_0$  равно нулю, то дельта-функция описывает силу, действующую в начале координат.

Рис. 21. К определению дельта-функции.



Приведем ряд свойств дельта-функции.

1. Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (11.4)$$

Очевидно, что пределы интегрирования не обязательно должны быть равны бесконечности. То же условие будет иметь место и для любого другого промежутка  $[a, b]$ , если только точка  $x_0$  лежит внутри промежутка. Если точка  $x_0$  расположена вне промежутка, то интеграл равен нулю. И, наконец, если  $x_0$  совпадает с одним из концов промежутка, то интеграл равен  $1/2$ , что вытекает непосредственно из рис. 21. Следовательно, можно записать

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } x_0 \text{ внутри } [a, b]; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x_0 = a \text{ или } x_0 = b; \\ 0, & \text{если } x_0 \text{ вне } [a, b]. \end{cases} \quad (11.5)$$

2. Основное свойство дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (11.6)$$

Это свойство непосредственно следует из определения (11.2), (11.3). Таким образом, умножение любой функции  $f(x)$  на дельта-функцию

с последующим интегрированием дает значение функции  $f(x)$  в точке, где дельта-функция отлична от нуля.

Аналогично выражению (11.5) можно записать

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{если } x_0 \text{ внутри } [a, b]; \\ \frac{1}{2} f(x_0), & \text{если } x_0 = a \text{ или } x_0 = b; \\ 0, & \text{если } x_0 \text{ вне } [a, b]. \end{cases} \quad (11.7)$$

Иногда это свойство называют определением дельта-функции.

С дельта-функцией тесно связана ступенчатая функция, играющая большую роль при изучении нестационарных процессов:

$$f(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \delta(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x_0 < 0; \\ 1 & \text{при } x_0 > 0. \end{cases} \quad (11.8)$$

Можно определить трехмерную дельта-функцию

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0),$$

которая обладает свойствами, аналогичными свойствам (11.5), (11.7):

$$\iiint_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{r}_0 \text{ внутри } V; \\ 0, & \text{если } \vec{r}_0 \text{ вне } V; \end{cases} \quad (11.9)$$

$$\iiint_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \begin{cases} f(\vec{r}_0), & \text{если } \vec{r}_0 \text{ внутри } V; \\ 0, & \text{если } \vec{r}_0 \text{ вне } V. \end{cases} \quad (11.10)$$

Запишем также выражения для дельта-функции в цилиндрической и сферической системах координат. В цилиндрической системе

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0). \quad (11.11)$$

В сферической системе

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (11.12)$$

Выражения (11.11) и (11.12) удовлетворяют условию нормировки (11.9), поскольку в цилиндрической и сферической системах координат соответственно  $dV = \rho d\rho d\varphi dz$  и  $dV = \rho^2 \sin^2 \theta d\rho d\theta d\varphi$ .

Заметим, что дельта-функцию не обязательно определять как предел выражения (11.2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Можно дать различные ее представления. Приведем здесь некоторые из них:

$$\begin{aligned} \delta(x - x_0) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-x_0|}{\alpha}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\alpha}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{2\pi i (x-x_0) \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Последнее выражение является представлением дельта-функции в виде интеграла Фурье.

**Неоднородное волновое уравнение.** До сих пор рассматривалось однородное волновое уравнение. При этом предполагалось, что внешние силы в жидкости отсутствуют и ни в одной точке пространства нет источников, из которых поступала бы жидкость. Модель источника можно представить в виде трубочки, из которой периодически вытекает жидкость. Примером такого источника служит сирена или турбулентная струя жидкости или газа.

Если источники жидкости имеются, то в правую часть волнового уравнения, определяющего равновесие сил в жидкости, необходимо добавить член  $q(\vec{r}, t)$ , характеризующий действие источников:

$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\vec{r}, t) = -q(\vec{r}, t). \quad (11.13)$$

Приведем простой пример, иллюстрирующий повышение давления за счет дополнительного притока вещества. Будем толкать впереди себя с ускорением гибкий резиновый шарик, наполненный воздухом (шарик здесь выступает в роли элементарного объема вещества). Очевидно, что шарик будет сжиматься, поскольку при движении с ускорением на него будет действовать сила  $F = m\ddot{x}$ , где  $m$  — масса шарика. При этом давление внутри шарика будет пропорционально силе  $F$ , т. е.  $p = AF$  ( $A$  — константа). Предположим теперь, что одновременно с движением шарик надувается за счет притока воздуха. Тогда в левую часть добавится член, учитывающий приток вещества:  $p + q = AF$  или  $p - Am\ddot{x} = -q$ , что по физическому смыслу эквивалентно уравнению (11.13).

Если силы имеют гармоническую зависимость от времени, то уравнение (11.13) превращается в неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta\Phi(\vec{r}) + k^2\Phi(\vec{r}) = -q(r). \quad (11.14)$$

Однако неоднородное волновое уравнение можно получить не только в тех случаях, когда источником звука служит приток (или сток) вещества. С помощью неоднородного уравнения можно также записать звуковое поле, излучаемое любой колеблющейся поверхностью.

Можно показать, что однородное уравнение  $\Delta\Phi + k^2\Phi = 0$  с неоднородным граничным условием  $\Phi|_S = f(S)$  [или  $\frac{\partial\Phi}{\partial n}|_S = f(S)$ ] эквивалентно неоднородному уравнению

$$\Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1 = \Psi \quad (11.15)$$

с однородным граничным условием  $\Phi_1|_S = 0$  (или  $\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}|_S = 0$ ).

Представим потенциал  $\Phi$  в виде суммы потенциалов:  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ , причем в качестве  $\Phi_2$  выберем любую функцию, удовлетворяющую условию на границе  $\Phi_2|_S = f(S)$  (но не удовлетворяющую однородному уравнению Гельмгольца). Очевидно, что при таком выборе  $\Phi_2$  функция  $\Phi_1$  удовлетворяет однородному граничному условию  $\Phi_1|_S = 0$ .

Подставив  $\Phi$  в волновое уравнение Гельмгольца, получим

$$\Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1 = -(\Delta\Phi_2 + k^2\Phi_2).$$

Если правую часть обозначить через  $\Psi$ , то получим неоднородное уравнение Гельмгольца (11.15) относительно функции, удовлетворяющей однородному граничному условию.

Физический смысл такого преобразования состоит в том, что результат излучения звука поверхностью всегда можно представить в виде звукового поля, излучаемого источниками, распределенными в пространстве при наличии абсолютно жестких или абсолютно мягких границ. Последнее обстоятельство дает возможность использовать одни и те же функции Грина для решения и однородных и неоднородных задач.

## § 12. Функции Грина

**Физический смысл функции Грина.** Для того чтобы пояснить смысл функции Грина, рассмотрим струну, на которую действует сила, распределенная по малому участку  $2\varepsilon$  вокруг точки  $x_0$ . Под влиянием этой силы струна прогибается. Пусть смещение в точке  $x$  под воздействием силы, равной единице, описывается функцией  $y = G(x, x_0)$ . Если размер участка  $2\varepsilon$  весьма мал, то смещение соответствует прогибу струны под действием сосредоточенной силы. Зная  $G(x, x_0)$ , можно получить решение для силы, распределенной вдоль струны по закону  $f(x)$ . Поскольку струна — линейная система, то общий эффект в точке  $x$  будет равен сумме эффектов отдельных малых элементов. Разобьем струну на участки  $dx_0$ . Сила, действующая на участке  $dx_0$ , будет равна  $f(x_0) dx_0$ , а смещение в точке  $x$  под воздействием этой силы определится выражением  $G(x, x_0) f(x_0) dx_0$ . Очевидно, что общее смещение в точке  $x$  будет описываться интегралом

$$y(x) = \int_0^a G(x, x_0) f(x_0) dx_0. \quad (12.1)$$

Функция  $G(x, x_0)$ , описывающая поведение любой системы под воздействием сосредоточенной силы, называется функцией Грина. Если функция Грина известна, то решение для любой распределенной силы получается путем интегрирования.

Аналогичным образом определяется и звуковое поле, излучаемое системой источников, распределенных в пространстве. Пусть имеется область  $V$ , занятая источниками  $q(\vec{r}_0)$ . Если известно поле  $G(\vec{r}_1, \vec{r}_0)$

в точке  $\vec{r}_1$ , излучаемое точечным источником, расположенным в точке  $\vec{r}_0$ , то общее звуковое поле определится как

$$\Phi(\vec{r}_1) = \int \int_V q(\vec{r}_0) G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) dV_0. \quad (12.2)$$

Обозначение  $dV_0$  соответствует интегрированию по координате источника  $\vec{r}_0$ .

Из принципа Гюйгенса должно быть ясно, что указанный способ может применяться и для расчета звуковых полей, излучаемых колеблющимися поверхностями. Действительно, интеграл Кирхгофа определяет звуковое поле как результат действия простых и двойных источников, расположенных на поверхности. Если решение для элементарного источника известно, то легко найти все поле.

**Свойства функций Грина.** Функции Грина для звуковых полей обладают рядом общих свойств:

1. Функция Грина удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца во всех точках, кроме точки  $\vec{r}_1 = \vec{r}_0$ , в которой находится источник. В самой точке  $\vec{r}_1 = \vec{r}_0$  функция Грина имеет особенность, характер которой мы определим ниже. Используя дельта-функцию, можно записать уравнение для функции Грина, справедливое во всех точках пространства без исключения:

$$\Delta G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) + k^2 G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) = -4\pi \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0). \quad (12.3)$$

Правая часть Уравнения (12.3) равна нулю во всех точках пространства за исключением точки  $\vec{r}_1 = \vec{r}_0$ , в которой находится источник. Коэффициент  $-4\pi$  служит для нормировки функции Грина. В некоторых работах этот множитель опускается; в этом случае соответствующий коэффициент должен быть включен в саму функцию  $G$ .

Обратимся к выводу формулы Кирхгофа (§ 3). При выводе ее предполагалось, что вспомогательная функция, описывающая поле точечного источника, задана в виде сферической волны  $u = \frac{e^{ikr}}{r}$ , распространяющейся в свободном пространстве. Если источник расположен в точке  $\vec{r}_0$ , то эту функцию можно записать в виде

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) = \frac{e^{ik|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|}; \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \vec{r}. \quad (12.4)$$

Выражение (12.4) является функцией Грина для свободного пространства.

Убедимся в том, что функция (12.4) удовлетворяет уравнению (12.3). Для всех точек  $\vec{r}_1 \neq \vec{r}_0$  это легко установить подстановкой функции (12.4) в уравнение. При  $\vec{r}_1 = \vec{r}_0$  непосредственная подста-

новка не приводит к цели, так как при этом обе части уравнения остаются неопределенными. Для того чтобы проверить выполнение равенства (12.3) в точке, в которой находится источник, необходимо использовать интегральные свойства дельта-функции.

Возьмем функцию  $u(\vec{r}_0)$ , которая удовлетворяет во всем пространстве уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u(\vec{r}_0) + k^2 u(\vec{r}_0) = 0. \quad (12.5)$$

Умножим теперь уравнение (12.3) на  $u(\vec{r}_0)$ , а уравнение (12.5) на  $G(\vec{r}_1, \vec{r}_0)$ . Вычтем одно уравнение из другого и проинтегрируем по объему, содержащему точку  $\vec{r}_1$ . Используя свойства дельта-функции, получим

$$\begin{aligned} & \int \int_V [u(\vec{r}_0) \Delta_0 G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) - G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) \Delta_0 u(\vec{r}_0)] dV_0 = \\ & = - \int \int_V 4\pi u(\vec{r}_0) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) dV_0 = -4\pi u(\vec{r}_1). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Запись  $\Delta_0$  означает, что дифференцирование проводится по координатам точки  $\vec{r}_0$ .

Преобразуем объемный интеграл в левой части в поверхностный по формуле Грина (3.1). После преобразования получим

$$\int \int_S \left[ u(\vec{r}_0) \frac{\partial G(\vec{r}_1, \vec{r}_0)}{\partial n_0} - G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) \frac{\partial u(\vec{r}_0)}{\partial n_0} \right] dS_0. \quad (12.7)$$

Предположим, что поверхность  $S$  является сферой с центром в точке  $\vec{r}_1$ . Устремим радиус сферы  $\epsilon$  к нулю. Регулярные функции  $u(\vec{r}_0)$  и  $\frac{\partial u(\vec{r}_0)}{\partial n_0}$  можно вынести из-под интеграла, приравняв их значениям в точке  $\vec{r}_1$ . Очевидно, что  $\frac{\partial}{\partial n_0} = \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $dS = \epsilon^2 d\Omega$ , где  $d\Omega$  — элемент телесного угла. Поэтому из выражения (12.7) получим

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ u(\vec{r}_1) \int_{\Omega} \frac{ike - 1}{\epsilon^2} e^{ike} \epsilon^2 d\Omega - \frac{du(\vec{r}_1)}{dr} \int_{\Omega} \frac{e^{ike}}{\epsilon} \epsilon^2 d\Omega \right\} = -4\pi u(\vec{r}_1).$$

Правая часть данного выражения совпадает с правой частью (12.6). Следовательно, функция Грина (12.4) в точке  $\vec{r}_1 = \vec{r}_0$  действительно удовлетворяет уравнению (12.3).

Заметим, что при выводе формулы Кирхгофа в качестве вспомогательной функции  $u$  можно использовать любую функцию, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца, так как при выводе формулы учитывается лишь поведение функции  $u$  вблизи источника при  $r \rightarrow 0$ .

Поэтому формула

$$\Phi(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int_S \int \left[ \frac{\partial \Phi(\vec{r}_0)}{\partial n_0} G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) - \Phi(\vec{r}_0) \frac{\partial G(\vec{r}_1, \vec{r}_0)}{\partial n_0} \right] dS_0 \quad (12.8)$$

справедлива не только для функции Грина типа (12.4), но и для любой функции, удовлетворяющей уравнению (12.3) и имеющей при  $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_0$  особенность вида  $G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) \sim \frac{A}{r}$ , где  $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_0|$ .

В формуле (12.8) запись  $\frac{\partial}{\partial n_0}$  означает, что дифференцирование производится по нормали в точке  $\vec{r}_0$ .

Отметим также следующее обстоятельство. Потенциал звукового поля, излучаемого точечным источником, описывается формулой

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi r} e^{ikr},$$

где  $Q$  — объемная колебательная скорость. Поэтому функция Грина (12.4) определяет поле точечного источника с объемной скоростью  $Q = 4\pi$ . Если бы исходное уравнение было задано в виде

$$\Delta G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) + k^2 G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0),$$

то функцию Грина для свободного пространства следовало бы задать в форме

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|}.$$

В этом случае функция Грина определяла бы поле точечного источника с объемной скоростью  $Q = 1$ .

2. Функция Грина является симметричной функцией относительно аргументов, т. е. при перемене местами источника и точки наблюдения вид функции не меняется:  $G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) = G(\vec{r}_0, \vec{r}_1)$ . Это свойство представляет собой одну из формулировок принципа взаимности (см. § 14).

3. Функция Грина должна иметь особенность при  $\vec{r}_1 = \vec{r}_0$  типа  $1/r$ , где  $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_0|$ . Для того чтобы это показать, проинтегрируем обе части уравнения (12.3) по объему  $V$ , содержащему точку  $\vec{r}_0$ :

$$\int_V \int \left[ \Delta_1 G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) + k^2 G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) \right] dV_1 = -4\pi.$$

Устремим радиус поверхности, ограничивающей объем, к нулю. Очевидно, что интеграл от первого слагаемого при этом окажется намного больше интеграла от второго слагаемого, поскольку первое

слагаемое содержит дифференцирование особенности. Преобразуя объемный интеграл в поверхностный, получим

$$\begin{aligned} \int_V \int \int &\approx \int_V \int \int \Delta_1 G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) dV_1 = \int_S \int \frac{\partial G(\vec{r}_1, \vec{r}_0)}{\partial n_1} dS_1 = \\ &= \int_\Omega \frac{\partial G(\vec{r}_1, \vec{r}_0)}{\partial r} r^2 d\Omega = 4\pi r^2 \frac{\partial G(\vec{r}_1, \vec{r}_0)}{\partial r} = -4\pi. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\frac{\partial G(\vec{r}_1, \vec{r}_0)}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}$ , или  $G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) \sim \frac{1}{r}$  при  $r \rightarrow 0$ .

В двумерных задачах аналогичным образом можно показать, что функция Грина должна иметь особенность типа  $\ln r$ .

**Применение функций Грина для решения задач излучения звука.** Предположим, что в объеме  $V$  заданы источники звуковых полей, потенциал которых удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\Delta \Phi(\vec{r}_0) + k^2 \Phi(\vec{r}_0) = -4\pi q(\vec{r}_0). \quad (12.9)$$

Кроме того, в пространстве имеются тела, отражающие звук, причем на поверхности тел выполняется граничное условие  $\Phi|_S = 0$  (или  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_S = 0$ ). Тогда звуковое поле  $\Phi(\vec{r}_1)$  может быть определено в виде

$$\Phi(\vec{r}_1) = \int_V \int \int q(\vec{r}_0) G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) dV_0, \quad (12.10)$$

где функция Грина  $G(\vec{r}_1, \vec{r}_0)$  удовлетворяет условию  $G|_S = 0$  (или  $\frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0$  соответственно). Вывод формулы (12.10) очень похож на доказательство, приведенное выше в этом параграфе. Умножим уравнение (12.3) на  $\Phi(\vec{r}_0)$ , уравнение (12.9) — на  $G(\vec{r}_1, \vec{r}_0)$ , вычтем одно уравнение из другого и проинтегрируем по объему  $V$ . Получим

$$\begin{aligned} \int_V \int \int &[\Delta_0 G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) \Phi(\vec{r}_0) - G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) \Delta_0 \Phi(\vec{r}_0)] dV_0 = \\ &= 4\pi \int_V \int \int q(\vec{r}_0) G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) dV_0 - 4\pi \int_V \int \int \Phi(\vec{r}_0) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) dV_0. \end{aligned}$$

В силу свойств дельта-функции последний интеграл равен  $-4\pi \Phi(\vec{r}_1)$ . Преобразуя по формуле Грина объемный интеграл, стоящий в левой части, в поверхностный, находим

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}_1) &= \int_V \int \int q(\vec{r}_0) G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) dV_0 + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_S \int \left[ G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) \frac{\partial \Phi(\vec{r}_0)}{\partial n_0} - \Phi(\vec{r}_0) \frac{\partial G(\vec{r}_1, \vec{r}_0)}{\partial n_0} \right] dS_0. \end{aligned}$$

Если на поверхности  $S$  выполняется условие  $\Phi|_S = 0$ , то, выбирая функцию Грина, удовлетворяющую условию  $G|_S = 0$ , получаем формулу (12.10). Если же на поверхности задано граничное условие  $\frac{\partial\Phi}{\partial n}|_S = 0$ , то и функцию Грина необходимо выбрать таким образом,

чтобы она удовлетворяла условию  $\frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0$ . Аналогично для импедансного граничного условия  $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \sigma\Phi\right)|_S = 0$  функция Грина должна удовлетворять условию  $\left(\frac{\partial G}{\partial n} + \sigma G\right)|_S = 0$ .

Предположим теперь, что источниками звука являются колеблющиеся поверхности, а объемные источники отсутствуют. Тогда  $q(\vec{r}_0) = 0$ , и из выражения (12.11) следует формула (12.8), которая эквивалентна формуле Кирхгофа, если функцией Грина служит поле точечного источника в свободном пространстве.

Как было показано в гл. 2, формула Кирхгофа фактически представляет собой интегральное уравнение, поскольку на поверхности тела неизвестны одновременно и потенциал, и его нормальная производная. Важное преимущество формулы (12.11) заключается в том, что она дает возможность определить поле в явном виде через единственную функцию  $\Phi$  (или  $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ ), известную на поверхности излучающего тела. Выберем функцию Грина таким образом, чтобы она удовлетворяла условию  $G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) = 0$  в том случае, когда точка  $\vec{r}_0$  лежит на поверхности  $S$ . В результате из соотношения (12.11) получим

$$\Phi(\vec{r}_1) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \Phi(\vec{r}_0) \frac{\partial G(\vec{r}_1, \vec{r}_0)}{\partial n_0} dS_0. \quad (12.12)$$

В последней формуле  $n_0$  означает нормаль, наружную по отношению к той области, в которой определяется поле (т. е. для внешней задачи  $n_0$  будет являться внутренней нормалью по отношению к поверхности).

Таким образом, потенциал в любой точке пространства может быть определен через потенциал на поверхности тела.

Можно выбрать функцию  $G$  и другим способом. Зададим функцию Грина так, чтобы она удовлетворяла условию  $\frac{\partial G}{\partial n_0}|_S = 0$ . Тогда из выражения (12.11) получаем

$$\Phi(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial\Phi(\vec{r}_0)}{\partial n_0} G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) dS_0. \quad (12.13)$$

Формула (12.13) дает возможность определить поле в любой точке пространства, если известна колебательная скорость поверхности.

Сформулируем полученный результат. Если на поверхности известно звуковое давление, то, для того чтобы определить поле в любой

точке пространства, необходимо выбрать функцию Грина для абсолютно мягкой поверхности. Если на поверхности известна колебательная скорость, то должна быть выбрана функция Грина для абсолютно жесткой поверхности.

Заметим, что при выводе формул Гюйгенса (4.3), (4.6) для плоских поверхностей формулу Кирхгофа удалось привести к простому виду именно потому, что было известно решение задачи о поле точечного источника вблизи абсолютно жесткой или абсолютно мягкой поверхности. В § 4 эти решения были заданы формулами (4.2), (4.5) для вспомогательной функции  $u$ . Фактически функция  $u$  и являлась функцией Грина, удовлетворяющей на поверхности условию  $\frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0$  или  $G|_S = 0$ .

Разумеется, воспользоваться простыми формулами (12.12), (12.13) можно лишь в тех случаях, когда функция Грина известна. Определение этой функции для достаточно сложных поверхностей само по себе является трудной задачей, которая лишь немногим легче непосредственного определения поля для произвольного распределения  $\Phi$  или  $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ , заданного на поверхности. Таким образом, в описанном методе вся трудность переносится на определение функции Грина. Однако если функция Грина для заданной конфигурации поверхности однажды определена, то при помощи формул (12.12), (12.13) можно сразу находить поле для любого распределения, не решая каждый раз всю задачу целиком.

**Примеры функций Грина.** Приведем несколько простейших примеров функций Грина:

1. Функция Грина для свободного пространства в трехмерном случае определяется формулой (12.4).

2. Функция Грина для свободного пространства в двумерном случае определяется выражением (см. гл. 5)

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) = \pi i H_0^{(1)}(kr), \quad r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_0|, \quad (12.14)$$

где  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля. Выражение (12.14) характеризует цилиндрическую волну, излучаемую бесконечно длинной линией. При больших расстояниях  $kr$  от источника поле, определяемое выражением (12.14), ведет себя как расходящаяся волна, амплитуда которой уменьшается по закону  $1/\sqrt{r}$ . При малых  $kr$  функция Грина (12.14) имеет особенность типа  $\ln(kr)$ .

3. Функция Грина для полупространства в трехмерном случае определяется формулой

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) = \frac{e^{ik\sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2}} \pm e^{ik\sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1+z_0)^2}}}{V(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2} \pm \frac{e^{ik\sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1+z_0)^2}}}{V(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1+z_0)^2}. \quad (12.15)$$

Здесь  $x_0, y_0, z_0$  — координаты источника;  $x_1, y_1, z_1$  — координаты точки наблюдения. Ось  $z$  направлена перпендикулярно поверхности. Знаки плюс и минус используются соответственно для абсолютно жесткой и абсолютно мягкой поверхностей.

Для абсолютно жесткой поверхности функция Грина (12.15) удовлетворяет граничному условию  $\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{z_1=0} = \frac{\partial G}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} = 0$ . Для абсолютно мягкой поверхности выполняется условие  $G \Big|_{z_1=0} = 0$ .

4. Функция Грина для полупространства в двумерном случае имеет вид

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) = \pi i \left[ H_0^{(1)} \left( k \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \right) \pm H_0^{(1)} \left( k \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 + y_0)^2} \right) \right]. \quad (12.16)$$

Ось  $y$  направлена перпендикулярно поверхности. Знаки плюс и минус также соответствуют абсолютно жесткой и абсолютно мягкой поверхностям.

5. Функция Грина для плоского слоя с абсолютно жесткими стенками определяется в виде ряда [8]

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) = \frac{\pi i}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos \frac{\pi n z_1}{d} \cos \frac{\pi n z_0}{d} H_0^{(1)} \left[ k r \sqrt{1 - \left( \frac{\pi n}{k d} \right)^2} \right], \quad (12.17)$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0; \\ 2 & \text{при } n > 0; \end{cases} \quad r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Расположение системы координат приведено на рис. 22.

Непосредственным дифференцированием легко убедиться, что на стенках слоя выполняется условие  $\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{z_1=0, d} = \frac{\partial G}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0, d} = 0$ .

Для абсолютно мягких поверхностей косинусы следует заменить на синусы. Если одна поверхность абсолютно мягкая, а другая абсолютно жесткая, то вместо  $\cos \frac{\pi n z_1}{d} \cos \frac{\pi n z_0}{d}$  следует использовать выражение  $\sin \frac{\pi (2n+1) z_1}{2d} \sin \frac{\pi (2n+1) z_0}{2d}$ . В этом случае при  $z_1 = 0$  будет выполняться условие  $G \Big|_{z_1=0} = 0$ , а при  $z_1 = d$  — условие  $\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{z_1=d} = 0$ .

Очевидно, что функции (12.14)—(12.17) обладают свойством  $G(\vec{r}_1, \vec{r}_0) = G(\vec{r}_0, \vec{r}_1)$ .

6. Если плоский слой является полубесконечным, т. е. в плоскости  $x = 0$  находится жесткая стенка, то функцию Грина можно полу-

чить непосредственно из выражения (12.17). Поле точечного источника, расположенного в точке  $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ , определяется в виде суммы прямого поля источника и поля источника, представляющего собой зеркальное отражение источника относительно плоскости  $x = 0$ . Поэтому функция Грина для такого слоя может быть представлена в виде суммы

$$G_1(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) = G(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) + G(-x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1).$$

На всех трех стенках эта функция удовлетворяет условию  $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ .

Если излучателем звука является поршень, вмонтированный в боковую стенку волновода  $x = 0$ , то, для того чтобы воспользоваться формулой (12.13), необходимо найти значение функции Грина  $G_1$  при  $x_0 = 0$ . В результате находим

$$G_1(0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) = 2G(0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1).$$

Эта запись означает, что точечный источник, расположенный на жесткой стенке, создает звуковое поле с амплитудой вдвое большей, чем амплитуда поля источника при отсутствии этой стенки.

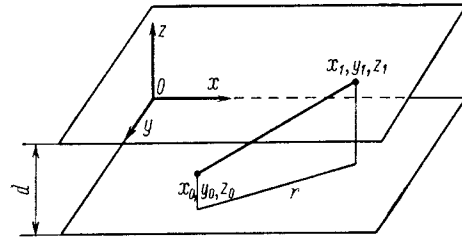


Рис. 22. К определению функции Грина для плоского слоя.

### § 13. Излучение звука системой круглых поршней, расположенных на одной оси

Вычислим при помощи функций Грина звуковое давление, излучаемое бесконечной системой круглых поршней, расположенных на одной оси. Будем считать, что каждый поршень пульсирует, т. е. совершает колебания, симметричные относительно его средней плоскости (рис. 23). При расчетах примем, что толщина поршня весьма мала по сравнению с его диаметром, расстоянием между поршнями и длиной звуковой волны. Поэтому при расчетах можно считать поршни бесконечно тонкими.

Если колебания всех поршней являются синфазными и амплитуда колебательной скорости их одинакова, то из соображений симметрии следует, что в плоскостях, совпадающих с плоскостями поршней, нормальная составляющая колебательной скорости должна быть равна нулю. Та же ситуация имеет место и в плоскостях, перпендикулярных оси  $z$  и расположенных точно посередине между дисками. Поэтому если заменить указанные воображаемые плоскости абсолютно жесткими поверхностями, то звуковое поле не должно изменяться. Таким образом, решение задачи об излучении бесконечной

системы поршней можно заменить вычислением звукового поля одного поршня, вмонтированного в абсолютно жесткую стенку слоя толщиной  $H/2$  ( $H$  — расстояние между дисками). Вторая стенка также является абсолютно жесткой.

Применим формулу (12.13). В связи с тем, что колебательная скорость отлична от нуля лишь в пределах поршня, интегрирование по обеим плоскостям сводится к интегрированию по площади поршня.

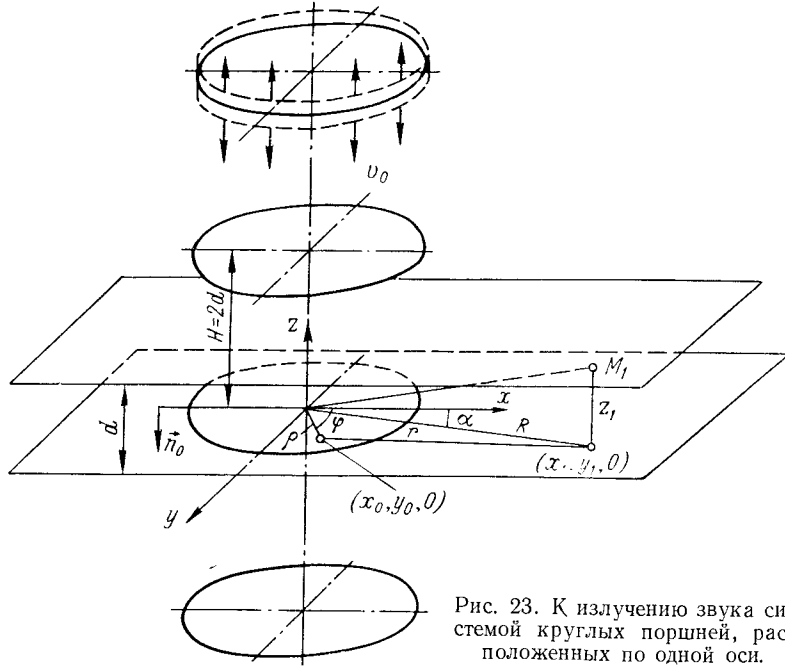


Рис. 23. К излучению звука системой круглых поршней, расположенных по одной оси.

На нижней плоскости внешняя нормаль направлена противоположно оси  $z$ . Поэтому  $v = \frac{\partial \Phi}{\partial n_0}$  и формула (12.13) принимает вид

$$\Phi(R, \alpha, z_1) = \frac{1}{4\pi} \iint_S v(\rho, \varphi) G(R, \alpha, z_1, \rho, \varphi, 0) \rho d\rho d\varphi. \quad (13.1)$$

Воспользуемся функцией Грина для плоского слоя с жесткими стенками (12.17). Взяв значение функции на поверхности поршня, получаем

$$\Phi(R, \alpha, z_1) = \frac{i}{4d} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos \frac{\pi n z_1}{d} \iint_0^{2\pi a} v(\rho, \varphi) H_0^{(1)}(k_n r) \rho d\rho d\varphi. \quad (13.2)$$

Здесь  $k_n = k \sqrt{1 - \left(\frac{\pi n}{kd}\right)^2}$ ;  $a$  — радиус поршня.

Формула (13.2) является решением задачи, позволяющим вычислить поле в любой точке при произвольном распределении колебательной скорости.

Для дальнейших преобразований примем, что скорость на поверхности поршня постоянна:  $v(\rho, \varphi) = v_0$ . Кроме того, будем вычислять звуковое поле вдали от поршня при условиях  $kr \gg 1$ ,  $r \gg a$ .

Заменим функцию Ханкеля асимптотическим приближением (см. § 18)

$$H_0^{(1)}(k_n r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} e^{ik_n r - i\frac{\pi}{4}}.$$

Расстояние  $r$  можно приближенно записать в виде

$$r = R - \rho \cos(\varphi - \alpha).$$

Вынося мало меняющиеся амплитудные множители за знак интеграла, получаем

$$\Phi(R, \alpha, z_1) = \frac{iv_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4d} \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\cos \pi n z_1}{d} \frac{e^{ik_n R}}{\sqrt{k_n}} \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-ik_n \rho \cos(\alpha - \varphi)} \rho d\rho d\varphi.$$

Интегрирование выполняется по формулам, приведенным в [76]. Окончательно имеем

$$\Phi(R, z_1) = \frac{Q e^{i\frac{\pi}{4}}}{2d \sqrt{2\pi R}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos \frac{\pi n z_1}{d} \frac{e^{ik_n R}}{\sqrt{k_n}} \cdot \frac{2J_1(k_n a)}{k_n a}, \quad (13.3)$$

где  $Q = v_0 \pi a^2$  — объемная скорость поршня (для одной стороны).

Для больших расстояний  $kR$  ряд (13.3) из бесконечного превращается в конечный. Если  $n$  настолько велико, что  $\frac{\pi n}{kd} > 1$ , то  $k_n$  является чисто мнимой величиной:  $k_n = i|k_n|$ . В этом случае экспоненциальные члены будут иметь вид  $e^{-k_n R}$ . С увеличением расстояния эти члены быстро убывают. Таким образом, ряд будет содержать конечное число членов  $N = E\left(\frac{2d}{\lambda}\right)$ ; здесь  $E$  означает целую часть числа.

Каждый член ряда соответствует нормальной волне (см. гл. 4), распространяющейся вдоль слоя. Количество таких незатухающих волн конечно. Если  $d < \frac{\lambda}{2}$ , то в формуле (13.3) остается только нулевая поршневая волна с равномерным распределением амплитуды поперек слоя. Тогда  $k_n = k$  и

$$\Phi(R) = \frac{Q e^{ikR + i\frac{\pi}{4}}}{2d \sqrt{2\pi k R}} \cdot \frac{2J_1(ka)}{ka}.$$

Предположим теперь, что количество поршней  $m$  конечно и общая высота набора  $h = 2d(m-1)$ . При  $kh \ll 1$  и  $m \gg 1$  можно считать, что все поршни (за исключением поршней, лежащих вблизи краев) работают в тех же условиях, что и в бесконечной системе излучателей. В этом случае пересчет потенциала звукового поля для конечной системы излучателей может быть произведен по формуле (21.23).

При малых расстояниях между излучателями  $d < \frac{\lambda}{2}$  потенциал звукового поля для конечной системы излучателей определится выражением

$$\Phi_m(R) = \frac{Q(m-1)}{2\pi} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \frac{2J_1(ka)}{ka}. \quad (13.4)$$

Заметим, что множитель  $\frac{2J_1(ka)}{ka}$  представляет собой значение диаграммы направленности кругового поршня, работающего в абсолютно жестком экране, в направлении, совпадающем с его плоскостью  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Эта же закономерность должна иметь место и для поршней других форм. В общем случае при  $d < \frac{\lambda}{2}$  потенциал можно выразить через значение диаграммы направленности одиночного поршня  $f(\theta)$  следующим образом:

$$\Phi_m(R) = \frac{Q(m-1)}{2\pi} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

#### § 14. Формулировка принципа взаимности

##### Излучение звука объемными источниками.

Для малых амплитуд колебаний акустическая среда является линейной. Это означает, что поля двух источников звука в любой точке пространства должны накладываться друг на друга без взаимодействия (принцип суперпозиции полей). Теорема взаимности в акустике, связывающая свойства двух звуковых полей, является следствием принципа суперпозиции.

Возьмем два источника звука  $q_1$  и  $q_2$  (рис. 24, а). Потенциалы звуковых полей, излучаемых этими источниками, удовлетворяют неоднородному волновому уравнению (11.14):

$$\begin{cases} \Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1 = -q_1; \\ \Delta\Phi_2 + k^2\Phi_2 = -q_2. \end{cases} \quad (14.1)$$

Здесь  $q_1$  и  $q_2$  — объемные скорости источников, приходящиеся на единицу объема, занятого источниками (плотности распределения источников). Умножим первое уравнение (14.1) на  $\Phi_2$ , а второе — на  $\Phi_1$ , вычтем первое из второго и проинтегрируем по объему  $V$ , включающему источники и ограниченному некоторой поверхностью  $S$  и сферой бесконечно большого радиуса  $S'$ .

Применим к полученному выражению формулу Грина (3.1) и учтем, что в силу принципа излучения интеграл по  $S'$  обращается в нуль. В результате получим

$$\iint_S \left( \Phi_1 \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} - \Phi_2 \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} \right) dS = \iiint_V (q_1\Phi_2 - q_2\Phi_1) dV. \quad (14.2)$$

Предположим теперь, что поверхность  $S$  является либо абсолютно мягкой, либо абсолютно жесткой, либо импедантной. Тогда выполняется одно из следующих граничных условий:  $\Phi_{1,2}|_S = 0$ ;

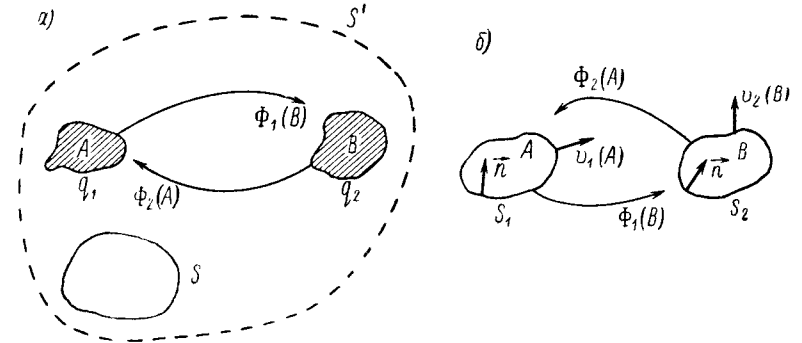


Рис. 24. К выводу теоремы взаимности: а — для объемных источников; б — для колеблющихся поверхностей.

$\frac{\partial\Phi_{1,2}}{\partial n} \Big|_S = 0$ ;  $\left( \frac{\partial\Phi_{1,2}}{\partial n} + \sigma\Phi_{1,2} \right) \Big|_S = 0$ . При любом из этих условий поверхностный интеграл равен нулю. Выражение (14.2) можно переписать теперь в виде

$$\iiint_V q_1\Phi_2 dV = \iiint_V q_2\Phi_1 dV. \quad (14.3)$$

Формула (14.3) является математической формулировкой принципа взаимности.

Если источники звука малы по сравнению с длиной звуковой волны, то можно принять, что потенциал  $\Phi_2$  мало меняется в пределах области  $A$ , занимаемой источником  $q_1$ . Аналогичное положение имеет место и для потенциала  $\Phi_1$  в области  $B$ , занимаемой источником  $q_2$ . Поэтому потенциалы можно вынести за знак интеграла и записать формулу (14.3) следующим образом:

$$\Phi_2(A) Q_1(A) = \Phi_1(B) Q_2(B), \quad (14.4)$$

где  $Q_1(A) = \iiint_V q_1 dV$ ;  $Q_2(B) = \iiint_V q_2 dV$  — полные объемные скорости источников. Если к тому же  $Q_1 = Q_2$ , то

$$\Phi_2(A) = \Phi_1(B). \quad (14.5)$$



Таким образом, источник  $Q_1$  вызывает в области  $B$  такое же звуковое давление, как источник  $Q_2$  в области  $A$ . При этом имеется в виду, что поверхности источников заторможены.

Условие (14.4) означает, например, следующее (см. [77]). Если излучение в области  $A$  производится излучателем с концентратором звука (рупором), а прием в области  $B$  — без концентратора, то общий эффект не будет отличаться от эффекта, который имел бы место, если бы излучение производилось без концентратора, а прием — с концентратором.

Из принципа взаимности следует также, что по виду формулы для звукового давления, развиваемого излучателем в некоторой точке пространства, невозможно установить, где находится источник звука, а где приемник. Математической формулировкой этого принципа является второе свойство функции Грина (см. § 12):  $G(\vec{r}_0, \vec{r}_1) = G(\vec{r}_1, \vec{r}_0)$ .

Соотношения (14.3) и (14.4) можно рассматривать и энергетически. В левой части стоит величина, пропорциональная произведению объемной скорости первого источника на звуковое давление, создаваемое вторым источником. Таким образом, этот член определяет мощность, затрачиваемую первым источником на преодоление дополнительного сопротивления, создаваемого действием второго источника. Следовательно, соотношение (14.4) означает, что мощность, которую затрачивает первый источник на преодоление действия второго, равна мощности, которую второй источник затрачивает на преодоление действия первого.

**Излучение звука колеблющимися поверхностями.** Предположим теперь, что источниками звука являются колеблющиеся поверхности, а объемные источники отсутствуют (рис. 24, б). В этом случае правая часть соотношения (14.2) обращается в нуль. Считая, что поверхность  $S$  состоит из двух поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  (на каждой из которых задана колебательная скорость  $v_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}$ ;  $v_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}$ ), получим

$$\iint_{S_1} \Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} dS = \iint_{S_2} \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS. \quad (14.6)$$

Подынтегральное выражение в каждой части пропорционально произведению звукового давления, создаваемого одним излучателем на заторможенной поверхности другого, и колебательной скорости другого излучателя. Поэтому левая и правая части равенства представляют собой мощность, которую затрачивает источник на преодоление действия другого источника. Таким образом, по физическому смыслу равенство (14.6) эквивалентно соотношению (14.3).

Рассмотрим поршневую диафрагму, колебательная скорость которой постоянна. Тогда

$$v_2(B) F_1(B) = v_1(A) F_2(A),$$

где

$$F_1(B) = \iint_{S_2} p_1 dS; \quad F_2(A) = \iint_{S_1} p_2 dS.$$

Величина  $F_1(B)$  представляет собой силу, действующую на поверхность диафрагмы  $B$  со стороны источника  $A$ . Соответственно  $F_2(A)$  — сила, с которой источник  $B$  действует на диафрагму  $A$ . Если  $v_1 = v_2$ , то

$$F_1(B) = F_2(A).$$

Рассмотрим теперь другой частный случай — колеблющиеся поверхности не являются поршневыми излучателями, но их размеры малы по сравнению с длиной волны. Тогда в формуле (14.6) величины  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  можно вынести за знак интеграла. В результате получим

$$\Phi_2(A) Q_1(A) = \Phi_1(B) Q_2(B),$$

$$\text{где } Q_1(A) = \iint_{S_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} dS; \quad Q_2(B) = \iint_{S_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS$$

— объемные скорости источников.

Если  $Q_1(A) = Q_2(B)$ , то  $\Phi_2(A) = \Phi_1(B)$ . Сравнение этого соотношения с равенством (14.5) показывает, что формулировка принципа взаимности остается одинаковой как в случае объемных источников, так и в случае колеблющихся поверхностей.

**Сравнение свойств преобразователя как излучателя и как приемника.** Принцип взаимности широко используется для сопоставления свойств обратимого преобразователя, работающего в качестве излучателя и в качестве приемника.

Возьмем исследуемый преобразователь 2 и малую пульсирующую сферу 1 (рис. 25). Звуковое давление  $p_0$ , развиваемое сферой в том месте, где находится преобразователь 2 (при отсутствии этого преобразователя), определяется формулой

$$p_0 = -\frac{i\omega\rho Q_1}{4\pi r} e^{ikr} = -\frac{i\rho c Q_1}{2r\lambda} e^{ikr}. \quad (14.7)$$

Здесь  $Q_1$  — объемная колебательная скорость сферы.

Запишем соотношение взаимности в следующем виде:

$$p_2(A) Q_1(A) = p_1(B) Q_2(B).$$

Разделим обе части последнего равенства на  $p_0$ . Тогда с учетом (14.7) можно записать

$$\frac{p_1(B)}{p_0} = -\frac{2r\lambda e^{-ikr}}{i\rho c} \cdot \frac{p_2(A)}{Q_2(B)}. \quad (14.8)$$

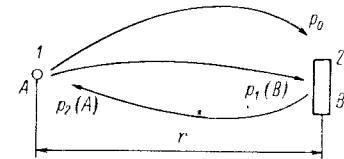


Рис. 25. К сравнению приемных и излучающих свойств преобразователя.

Левая часть равенства (14.8) представляет собой отношение звукового давления на преобразователе к звуковому давлению в свободном поле. Поэтому она характеризует свойства преобразователя как приемника. Множитель  $\frac{p_2(A)}{Q_2(B)}$  в правой части определяет отношение звукового давления в волне, излучаемой преобразователем, к объемной скорости последнего и, таким образом, характеризует свойства преобразователя как излучателя. Величина  $\frac{2r\lambda}{\rho c}$  называется параметром взаимности. Этот параметр зависит от частоты звука. Если в режиме приема исследуемый преобразователь имеет равномерную частотную характеристику, то в режиме излучения звуковое давление линейно возрастает при увеличении частоты. И наоборот, при равномерной характеристике в режиме излучения характеристика в режиме приема будет убывать обратно пропорционально частоте звука.

Заметим, что параметр взаимности существенно зависит от типа волнового поля. В рассматриваемом случае использовался сферический тип волны, поэтому найденная величина  $\frac{2r\lambda}{\rho c}$  является параметром взаимности для сферического закона распространения.

Соотношения типа (14.8) находят применение при абсолютной калибровке преобразователей методом взаимности. Изложение метода и обзор литературы, посвященной калибровке этим методом, приведены в работе [31]. Используя различные представления параметра взаимности, можно производить калибровку не только при сферическом законе распространения, но и в случае более сложных звуковых полей [111].

**Теорема взаимности в механике.** В механике теорема взаимности носит название теоремы Бетти. Математическая формулировка ее имеет следующий вид:

$$\iiint_V f_1(\vec{r}) u_2(\vec{r}) dV = \iiint_V f_2(\vec{r}) u_1(\vec{r}) dV. \quad (14.9)$$

Здесь  $f_1$  и  $f_2$  — плотности двух систем сил, приложенных к упругому телу;  $u_1$  и  $u_2$  — вызываемые ими смещения.

Левая и правая части равенства представляют собой работу, затраченную одной системой сил для преодоления действия другой системы. Для двух сил  $F_1$  и  $F_2$ , сосредоточенных в точках  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , имеем  $f_1(\vec{r}) = F_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$ ;  $f_2(\vec{r}) = F_2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_2)$ . Из (14.9), пользуясь формулой (11.10), можно получить

$$F_1 u_2(\vec{r}_1) = F_2 u_1(\vec{r}_2).$$

Выражение (14.3) представляет собой обобщение теоремы Бетти на акустический случай.

**Теорема взаимности для дипольных источников.** Формулы (14.3), (14.4) были получены для объемных (т. е. простых) источников. Если источником звука является диполь, то при записи соотношения взаимности необходимо учитывать направленность диполя. Это очевидно из следующего простого рассуждения. Пусть в точке 1 находится дипольный излучатель звука, а в точке 2, расположенной в экваториальной плоскости диполя, — простой сферический приемник. Звуковое давление на приемнике будет равно нулю. Однако ясно, что давление, излучаемое сферическим приемником 2 в месте расположения диполя 1, не равно нулю. Поэтому принцип взаимности в виде (14.3), (14.4) для дипольного источника будет несправедлив. Если же считать, что при излучении звука источником 2 прием ведется на диполь (ориентированный так же, как и в случае излучения), то электрическое напряжение на выходе диполя будет равно нулю и принцип взаимности будет соблюдаться.

Для того чтобы получить математическую формулировку принципа взаимности для диполей, необходимо заменить  $q_1(\vec{r})$  на  $\frac{\partial q_1(\vec{r})}{\partial n_1}$ , где  $n_1$  — направление оси диполя. Если же обе системы источников являются дипольными, то следует и  $q_2(\vec{r})$  заменить на  $\frac{\partial q_2(\vec{r})}{\partial n_2}$  ( $n_2$  — направление оси диполя во второй системе).

**Теорема взаимности в акустике движущейся среды.** В движущейся среде теорема взаимности не выполняется. Это следует из того, что два источника 1 и 2, один из которых расположен ниже другого по течению жидкости, находятся не в одинаковых условиях. В работе [52] показано, что в движущейся среде теорема взаимности типа (14.2) будет справедливой в том случае, если вместе с изменением расположения излучателя и приемника заменить и направление скорости потока на противоположное.

## § 15. Принцип взаимности для упругих поверхностей

При выводе соотношений взаимности мы считали, что поверхности, расположенные в звуковом поле, являются либо абсолютно мягкими, либо абсолютно жесткими, либо импедансными. В работе [50] показано, что теорема взаимности остается справедливой также при наличии в пространстве упругих тел и оболочек, свойства которых не описываются нормальным локальным импеданцем. В этой же работе принцип взаимности обобщен на случай внешних сил, действующих на поверхность тела, и найдены общие соотношения, связывающие звуковое поле, дифрагированное на упругой поверхности, и звуковое поле, излученное этой поверхностью под действием внешних сил.

**Вывод соотношений взаимности для упругих тел.** Следуя [50], запишем уравнение Гельмгольца для звукового поля  $p_1(\vec{r})$ , излучаемого системой объемных источников  $q_1(\vec{r})$ , в виде

$$\Delta \Phi_1(\vec{r}) + k^2 \Phi_1(\vec{r}) = -q_1(\vec{r})$$

или

$$\Delta p_1(\vec{r}) + k^2 p_1(\vec{r}) = i\omega \rho q_1(\vec{r}). \quad (15.1)$$

Пусть в пространстве находятся упругие поверхности, уравнения движения которых определяются линейным дифференциальным оператором

$$Lv_1(\vec{r}) = f_1(\vec{r}) - p_1(\vec{r})|_S. \quad (15.2)$$

Здесь  $v_1(\vec{r})$  — нормальная составляющая колебательной скорости поверхности;  $f_1(\vec{r})$  — плотность распределения внешней силы, приложенной к телу.

На поверхности должно выполняться граничное условие

$$\frac{1}{i\omega\rho} \cdot \frac{\partial p_1(\vec{r})}{\partial n} \Big|_S = v_1(\vec{r}). \quad (15.3)$$

Считаем, что нормаль  $n$  и положительное значение колебательной скорости направлены наружу.

Соотношения, аналогичные формулам (15.1) — (15.3), могут быть записаны и для звукового поля  $p_2(\vec{r})$ , излучаемого системой объемных источников  $q_2(\vec{r})$  и сил с плотностью  $f_2(\vec{r})$ , действующих на поверхность:

$$\Delta p_2(\vec{r}) + k^2 p_2(\vec{r}) = i\omega \rho q_2(\vec{r}); \quad (15.1a)$$

$$Lv_2(\vec{r}) = f_2(\vec{r}) - p_2(\vec{r})|_S; \quad (15.2a)$$

$$\frac{1}{i\omega\rho} \cdot \frac{\partial p_2(\vec{r})}{\partial n} \Big|_S = v_2(\vec{r}). \quad (15.3a)$$

Умножим уравнение (15.1) на  $p_2(\vec{r})$ , а уравнение (15.1a) на  $p_1(\vec{r})$ , вычтем одно из другого и проинтегрируем по объему, содержащему источники и ограниченному упругими поверхностями. Преобразовав объемный интеграл в левой части в поверхностный по формуле Грина, получим

$$\begin{aligned} - \iint_S \left[ \frac{\partial p_1(\vec{r})}{\partial n} p_2(\vec{r}) - \frac{\partial p_2(\vec{r})}{\partial n} p_1(\vec{r}) \right] dS = i\omega\rho \iiint_V \left[ q_1(\vec{r}) p_2(\vec{r}) - \right. \\ \left. - q_2(\vec{r}) p_1(\vec{r}) \right] dV. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Заметим, что знак в левой части по сравнению с (3.1) заменен на противоположный в связи с тем, что здесь мы используем направление нормали, внешнее по отношению к поверхности, т. е. внутреннее по отношению к рассматриваемой нами внешней области поверхности.

Воспользовавшись уравнениями движения (15.2), (15.2a) и граничными условиями (15.3), (15.3a), получим

$$\begin{aligned} \iint_S \left[ \frac{\partial p_1(\vec{r})}{\partial n} f_2(\vec{r}) - \frac{\partial p_2(\vec{r})}{\partial n} f_1(\vec{r}) \right] dS + \\ + i\omega\rho \iint_S \left[ v_2(\vec{r}) \cdot Lv_1(\vec{r}) - v_1(\vec{r}) \cdot Lv_2(\vec{r}) \right] dS = \\ = -i\omega\rho \iiint_V \left[ q_1(\vec{r}) p_2(\vec{r}) - q_2(\vec{r}) p_1(\vec{r}) \right] dV. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Дифференциальные операторы, встречающиеся в теории упругости, являются самосопряженными. Это означает, что должно выполняться условие

$$\iint_S [v_2(\vec{r}) \cdot Lv_1(\vec{r}) - v_1(\vec{r}) \cdot Lv_2(\vec{r})] dS = 0. \quad (15.6)$$

Если поверхность  $S$  является незамкнутой, то правая часть может быть и не равна нулю. Тогда в нее войдут члены, зависящие от внешних сил и моментов, действующих на край поверхности. В дальнейшем будем полагать, что такие силы и моменты отсутствуют и условие (15.6) выполняется. В этом случае соотношение (15.5) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_S \left[ \frac{\partial p_1(\vec{r})}{\partial n} f_2(\vec{r}) - \frac{\partial p_2(\vec{r})}{\partial n} f_1(\vec{r}) \right] dS = \\ = -i\omega\rho \iiint_V [q_1(\vec{r}) p_2(\vec{r}) - q_2(\vec{r}) p_1(\vec{r})] dV. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Выражение (15.7) является математической формулировкой принципа взаимности, справедливого при наличии упругих поверхностей.

Если внешние силы, действующие на поверхность тела, отсутствуют, т. е.  $f_1(\vec{r}) = f_2(\vec{r}) = 0$ , то из выражения (15.7) вновь получаем формулу (14.3). Это означает, что принцип взаимности справедлив не только для абсолютно мягких, абсолютно жестких и импедансных поверхностей, но и для произвольных упругих тел.

Если отсутствуют объемные источники, то из (15.7) получаем

$$\iint_S v_1(\vec{r}) f_2(\vec{r}) dS = \iint_S v_2(\vec{r}) f_1(\vec{r}) dS. \quad (15.8)$$

■  
**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ  
 РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН  
 В ТРУБЕ К РАСЧЕТУ  
 ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ**

§ 16. Излучение звука отверстием  
 в жестком экране

Всю теорию распространения волн в трубах (волноводах) можно разделить на два больших раздела: теорию распространения плоских (однородных) волн и теорию распространения неоднородных волн. Прохождение плоских волн по каналам изу-

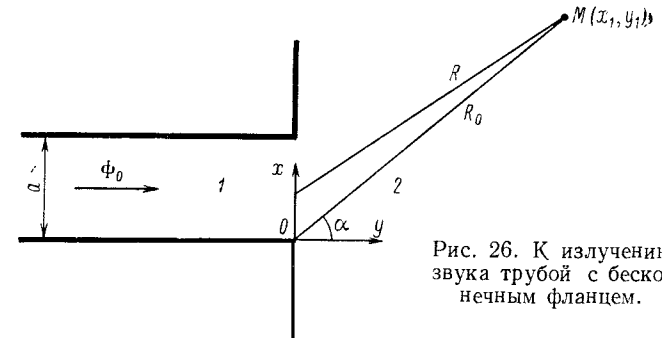


Рис. 26. К излучению звука трубой с бесконечным фланцем.

чается в воздушной акустике в связи с расчетами эффективности глушителей шума. Эти вопросы подробно освещены в книге [71].

В гидроакустике наибольшее значение имеет теория распространения в волноводах неоднородных волн. Это обусловлено несколькими причинами. Во-первых, указанная теория является основой для изучения работы ряда измерительных акустических устройств: импульсных труб, интерферометров; во-вторых, при помощи теории волноводов широко изучается распространение звука в море, и, наконец, в-третьих, методы этой теории могут применяться для выполнения расчетов излучения звука периодическими решетками излучателей, прохождения через отверстия в экране и т. д.

Первые два вопроса выходят за рамки настоящей книги. Поэтому ниже мы остановимся лишь на приложениях, связанных с вычислениями звуковых полей излучателей и прохождением звука через решетку из щелей в экране.

**Составление системы уравнений.** Рассмотрим излучение звука трубой с бесконечным фланцем (рис. 26). Будем считать, что фланец

Последнее выражение формально аналогично формуле (14.6). Однако по смыслу они различны, так как в (14.6)  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  являются звуковыми давлениями на поверхности, излучающей звук за счет колебаний с колебательными скоростями  $v_{1,2} = \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial n}$ , а в формуле (15.8)  $f_1$  и  $f_2$  являются внешними (сторонними) силами, действующими на поверхность и возбуждающими колебания поверхностей со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ .

**О связи между звуковыми полями, излученными и рассеянными упругими поверхностями.** Рассмотрим наиболее интересный частный случай формулы (15.7). Предположим, что на упругой поверхности задана одна система сил  $f_2(\vec{r})$ , а в пространстве имеется одна система объемных источников  $q_1(\vec{r})$ . Тогда из выражения (15.7) можно определить связь между полем  $p_2(\vec{r})$ , излученным поверхностью под действием упругих сил, и полем  $p_1(\vec{r})$ , рассеянным поверхностью. Получаем

$$\iint_S \frac{\partial p_1(\vec{r})}{\partial n} f_2(\vec{r}) dS = -i\omega\rho \iiint_V q_1(\vec{r}) p_2(\vec{r}) dV. \quad (15.9)$$

Соотношение (15.9) определяет удобный метод вычисления звуковых полей, излучаемых упругой поверхностью под действием внешних сил, по известным выражениям для звукового поля, рассеянного этой поверхностью.

Предположим, что необходимо вычислить звуковое поле, излучаемое поверхностью, в точке  $\vec{r}_0$ . Поместим в эту точку вспомогательный точечный источник  $q_1(\vec{r}) = Q_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ , поле которого  $p_1(\vec{r}, \vec{r}_0)$  на упругой поверхности известно. Выполняя интегрирование в правой части (15.9) по формуле (11.10), получаем

$$p_2(\vec{r}_0) = -\frac{1}{i\omega\rho Q_1} \iint_S \frac{\partial p_1(\vec{r}, \vec{r}_0)}{\partial n} f_2(\vec{r}) dS. \quad (15.10)$$

Таким образом, излученное поле  $p_2(\vec{r}_0)$  однозначно определяется через вспомогательное решение  $p_1(\vec{r}, \vec{r}_0)$ , описывающее звуковое поле точечного источника, помещенного в точку наблюдения. Заметим, что формула (15.10) аналогична выражению (12.12), которое определяет звуковое поле через функцию Грина. В данном случае вспомогательное решение  $p_1(\vec{r}, \vec{r}_0)$  является, по существу, функцией Грина для пространства, содержащего упругие поверхности. Указанный метод был применен в работах [51], [53] для определения звуковых полей, излучаемых упругими пластинами и оболочками.

Соотношение (15.10) позволяет также получить простые формулы для звуковых полей, излучаемых пластиной, по известному выражению для коэффициента прохождения звука через пластину (см. § 39).

и стенки трубы являются абсолютно жесткими и на их поверхности выполняется условие  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ .

Для упрощения вычислений предположим, что вся картина звукового поля не зависит от координаты  $z$ , т. е. будем рассматривать плоскую задачу.

На отверстие набегают плоская звуковая волна

$$\Phi_0 = e^{iky}. \quad (16.1)$$

Поле внутри трубы можно представить в виде суммы падающей волны и набора волн, отраженных от отверстия:

$$\Phi_1 = e^{iky} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n x}{a} e^{-ik_n y}. \quad (16.2)$$

Здесь  $k_n = k \sqrt{1 - \left(\frac{\pi n}{ka}\right)^2}$ ;  $A_n$  — неизвестные коэффициенты.

Звуковое поле, излученное отверстием, в области  $y > 0$  можно записать в форме интеграла Гюйгенса (4.3). Поскольку поверхность фланца абсолютно жесткая, то  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$  при  $x < 0$  и  $x > a$ . Таким образом, интегрирование в бесконечных пределах в интеграле Гюйгенса можно заменить интегрированием по отверстию:

$$\Phi_2(x_1, y_1) = -\frac{i}{2} \int_0^a \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \Big|_{y=0} H_0^{(1)}(kr) dx, \quad (16.3)$$

где  $r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}$ . Вычислив производную  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}$  и подставив ее в выражение (16.3), находим

$$\Phi_2(x_1, y_1) = \frac{k}{2} \int_0^a H_0^{(1)}(kr) dx - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} k_n A_n \int_0^a \cos \frac{\pi n x}{a} H_0^{(1)}(kr) dx. \quad (16.4)$$

Воспользуемся теперь граничным условием, определяющим непрерывность потенциала при переходе через отверстие:

$$\Phi_1|_{y_1=0} = \Phi_2|_{y_1=0}.$$

Устремив точку  $M(x_1, y_1)$  на плоскость отверстия, получаем

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n x_1}{a} = \frac{k}{2} \int_0^a H_0^{(1)}(k|x - x_1|) dx - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} k_n A_n \int_0^a \cos \frac{\pi n x}{a} H_0^{(1)}(k|x - x_1|) dx. \quad (16.5)$$

Левая часть последнего выражения представляет собой ряд Фурье. Разложим в ряд Фурье и правую часть. Для этого умножим обе части уравнения на  $\cos \frac{\pi q x_1}{a}$  ( $q \neq 0$ ) и проинтегрируем по промежутку  $(0, a)$ . Воспользовавшись ортогональностью тригонометрических функций, получим

$$A_q + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{k} A_n Z_{qn} = Z_{q0}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (16.6a)$$

Здесь величины  $Z_{qn}$  определяются выражением

$$Z_{qn} = \frac{k}{a} \int_0^a \int_0^a \cos \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi q x_1}{a} H_0^{(1)}(k|x - x_1|) dx dx_1. \quad (16.7)$$

Повторяя эти же преобразования для  $q = 0$ , находим

$$A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{k} A_n Z_{0n} = Z_{00} - 1. \quad (16.6b)$$

Формулы (16.6a) и (16.6b) можно объединить. Получим

$$A_q + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{k} A_n Z_{qn} = Z_{q0} - (2 - \varepsilon_q), \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad (16.8)$$

где

$$Z_{qn} = \frac{k \varepsilon_q}{2a} \int_0^a \int_0^a \cos \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi q x_1}{a} H_0^{(1)}(k|x - x_1|) dx dx_1,$$

$\varepsilon_q = 1$  при  $q = 0$ ;  $\varepsilon_q = 2$  при  $q > 0$ .

Выражение (16.8) представляет собой бесконечную систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_q$ . Краткие сведения о таких системах уравнений приведены в § 17.

Матрица коэффициентов бесконечной системы определяется через величины  $Z_{qn}$ , физический смысл и способы вычисления которых рассматриваются ниже.

**Вычисление импеданцев излучения отверстия в экране для различных форм колебаний.** Величины  $Z_{qn}$  имеют четкий физический смысл. Они представляют собой импедансы излучения звука отверстием для различных форм колебаний. При этом  $Z_{nn}$  являются собственными импедансами излучения, а  $Z_{qn}$  ( $q \neq n$ ) — импедансами взаимодействия между различными формами. Для того чтобы это показать, рассмотрим излучение звука отверстием или плоским поршнем, на поверхности которого задана колебательная скорость

$$v = v_n \cos \frac{\pi n x}{a}. \quad (16.9)$$

Вычислим звуковое давление на поверхности поршня в точке  $x_1$ :

$$p(x_1) = \frac{\omega \rho v_n}{a} \int_0^a \cos \frac{\pi n x}{a} H_0^{(1)}(k|x - x_1|) dx.$$

Разложим  $p(x_1)$  в ряд Фурье, т. е. представим последнее выражение в виде ряда

$$p(x_1) = \sum_{q=0}^{\infty} p_q \cos \frac{\pi q x_1}{a}; \quad p_q = \frac{\varepsilon_q}{a} \int_0^a \cos \frac{\pi q x_1}{a} p(x_1) dx_1.$$

Коэффициенты  $p_q$  определяются в следующей форме:

$$p_q = \frac{\varepsilon_q k \rho c v_n}{2a} \iint_0^a \cos \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi q x_1}{a} H_0^{(1)}(k|x - x_1|) dx dx_1.$$

Составим отношение

$$Z_{qn} = \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{p_q}{v_n} = \frac{k \varepsilon_q}{2a} \iint_0^a \cos \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi q x_1}{a} H_0^{(1)}(k|x - x_1|) dx dx_1. \quad (16.10)$$

Если  $q = n$ , то последнее выражение представляет собой отношение амплитуды звукового давления для формы с номером  $n$  к амплитуде колебательной скорости для этой же формы колебаний. Поэтому оно является импедансом излучения для формы с номером  $n$ . Этот импеданс представляет собой безразмерную величину, выраженную в долях  $\rho c$  и рассчитанную на единицу площади отверстия.

Величина  $Z_{00}$  является импедансом излучения поршня с равномерным распределением колебательной скорости (при  $n = 0$ ). Если  $q \neq n$ , то формула (16.10) характеризует взаимодействие между различными формами колебаний. Импеданс  $Z_{qn}$  определяет трансформацию формы колебательной скорости типа (16.9) с номером  $n$  в форму звукового давления с номером  $q$ .

Вычисление членов матрицы  $Z_{qn}$ , записанной в виде (16.7) и включающей двойной несобственный интеграл, является весьма трудоемкой операцией. Приведем это выражение к более простому виду. Путем замены переменных  $kx = u$ ,  $kx_1 = u_1$ ,  $ka = \mu$  можно перейти к безразмерным величинам:

$$Z_{qn} = \frac{\varepsilon_q}{2\mu} \int_0^{\mu} \int_0^{\mu} \cos \frac{\pi n u}{\mu} \cos \frac{\pi q u_1}{\mu} H_0^{(1)}(|u - u_1|) du du_1. \quad (16.11)$$

Представим внутренний интеграл в виде суммы интегралов на интервалах  $(0, u_1)$  и  $(u_1, \mu)$ :

$$Z_{qn} = \frac{\varepsilon_q}{2\mu} \int_0^{\mu} \left[ \int_0^{u_1} \cos \frac{\pi n u}{\mu} \cos \frac{\pi q u_1}{\mu} H_0^{(1)}(u_1 - u) du + \right.$$

$$\left. + \int_{u_1}^{\mu} \cos \frac{\pi n u}{\mu} \cos \frac{\pi q u_1}{\mu} H_0^{(1)}(u - u_1) du \right] du_1.$$

В первом слагаемом во внутреннем интеграле выполним замену переменных  $u_1 - u = v$  и во втором слагаемом  $u - u_1 = v$ . Затем во внешнем интеграле второго слагаемого произведем замену  $\mu - u_1 = u_1'$ . Опуская ненужный после этого штрих, можно записать

$$Z_{qn} = \frac{\varepsilon_q [1 + (-1)^{n+q}]}{2\mu} \int_0^{\mu} \int_0^{u_1} \cos \frac{\pi n (u_1 - v)}{\mu} \cos \frac{\pi q u_1}{\mu} H_0^{(1)}(v) dv du_1.$$

Воспользуемся формулой Дирихле, определяющей правило замены переменных в двойном интеграле [80]:

$$\int_0^a \left[ \int_0^y f(x, y) dx \right] dy = \int_0^a \left[ \int_x^a f(x, y) dy \right] dx. \quad (16.12)$$

В результате получим

$$Z_{qn} = \frac{\varepsilon_q}{2\mu} \int_0^{\mu} I_{qn} H_0^{(1)}(v) dv, \quad (16.13)$$

где

$$I_{qn} = [1 + (-1)^{n+q}] \int_v^{\mu} \cos \frac{\pi n (u_1 - v)}{\mu} \cos \frac{\pi q u_1}{\mu} du_1.$$

Вычисляя интеграл, находим

$$I_{qn} = \begin{cases} \frac{\mu}{\pi} \cdot \frac{[1 + (-1)^{n+q}]}{n^2 - q^2} \left( q \sin \frac{\pi q v}{\mu} - n \sin \frac{\pi n v}{\mu} \right) & \text{при } n \neq q; \\ (\mu - v) \cos \frac{\pi n v}{\mu} - \frac{\mu}{\pi n} \sin \frac{\pi n v}{\mu} & \text{при } n = q \neq 0; \\ 2(\mu - v) & \text{при } n = q = 0. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \Psi_n(\mu) &= \int_0^{\mu} \cos \frac{\pi n v}{\mu} H_0^{(1)}(v) dv; \\ F_n(\mu) &= \int_0^{\mu} \sin \frac{\pi n v}{\mu} H_0^{(1)}(v) dv; \\ T_n(\mu) &= \int_0^{\mu} v \cos \frac{\pi n v}{\mu} H_0^{(1)}(v) dv. \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

Тогда импедансы излучения можно записать в следующем виде:

$$Z_{qn} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_q [1 + (-1)^{n-q}]}{2\pi(n^2 - q^2)} [qF_q(\mu) - nF_n(\mu)] & \text{при } n \neq q; \\ \Psi_n(\mu) - \frac{1}{\mu} T_n(\mu) - \frac{1}{\pi n} F_n(\mu) & \text{при } n = q \neq 0; \\ \Psi_0(\mu) - H_1^{(1)}(\mu) - \frac{2i}{\pi\mu} & \text{при } n = q = 0. \end{cases} \quad (16.15)$$

При записи последнего выражения были учтены соотношения

$$[vH_1^{(1)}(v)]' = vH_0^{(1)}(v); \quad \lim_{v \rightarrow 0} vH_1^{(1)}(v) = -\frac{2i}{\pi}.$$

Функцию  $T_n(\mu)$  можно выразить через функцию  $F_n(\mu)$ . Для этого следует дважды проинтегрировать  $T_n(\mu)$  по частям, каждый раз интегрируя тригонометрические функции и дифференцируя остальные множители. В результате получим уравнение относительно функции  $T_n(\mu)$ , из которого следует

$$T_n(\mu) = \frac{-\mu^2}{(\pi n)^2 - \mu^2} \left[ \frac{\pi n}{\mu} F_n(\mu) + (-1)^n \mu H_1^{(1)}(\mu) + \frac{2i}{\pi} \right]. \quad (16.16)$$

Таким образом, определение сопротивлений излучения свелось к вычислению функций  $F_n(\mu)$ ,  $\Psi_n(\mu)$ .

Из формул (16.15) следует, что импедансы  $Z_{qn}$ , характеризующие взаимодействие между четными и нечетными формами колебаний, равны нулю. Действительно, колебание четной формы, определяющее симметричное относительно центра отверстия распределение колебательной скорости, не может возбудить несимметричное распределение звукового давления.

Выражение (16.16) при  $\mu = \pi n$  остается конечным, так как в этом случае одновременно обращаются в нуль и числитель и знаменатель. Для того чтобы вычислить числитель при  $\mu = \pi n$ , можно воспользоваться тождеством

$$\int_0^a \sin(a-x) H_0^{(1)}(x) dx = aH_1^{(1)}(a) + \frac{2i}{\pi} \cos a$$

(эту формулу легко получить, дважды интегрируя по частям, причем первый раз следует дифференцировать все подынтегральное выражение, а второй раз — только тригонометрический множитель).

Раскрыв неопределенность, получаем конечную величину

$$T_n(\pi n) = (-1)^n \frac{\pi n}{2} H_1^{(1)}(\pi n) + \frac{i}{\pi}.$$

**Метод вычисления функций  $F_n(\mu)$ ,  $\Psi_n(\mu)$ .** При небольших значениях  $\mu$  (порядка нескольких единиц или первых десятков) интег-

ралы, определяющие  $F_n(\mu)$  и  $\Psi_n(\mu)$ , могут быть легко рассчитаны на электронной цифровой машине. Однако непосредственное вычисление интегралов при больших значениях  $\mu$  встречает серьезные вычислительные трудности, поскольку подынтегральная функция является быстро осциллирующей. Амплитуда осцилляций при увеличении  $v$  убывает весьма медленно (как  $1/v$ ), и на участке интегрирования будут чередоваться положительные и отрицательные значения с почти одинаковой амплитудой. Поэтому точность вычислений с увеличением  $\mu$  будет быстро падать. Для того чтобы преодолеть это затруднение, проведем некоторые преобразования.

Представим  $F_m(\mu)$  в виде

$$F_m(\mu) = \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(v) \sin \frac{\pi m v}{\mu} dv - \int_{\mu}^{\infty} H_0^{(1)}(v) \sin \frac{\pi m v}{\mu} dv = I_1' + I_2'. \quad (16.17)$$

Значения интегралов в бесконечных пределах от произведений цилиндрических и тригонометрических функций приведены в [76]. Воспользовавшись соответствующими формулами, запишем

$$I_1' = \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(av) \sin bv dv = \begin{cases} \frac{2i \arcsin \frac{b}{a}}{\pi \sqrt{a^2 - b^2}} & \text{при } 0 < b < a; \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \left[ 1 + i \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{b}{a} - \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right) \right] & \text{при } 0 < a < b; \end{cases} \quad (16.18a)$$

$$I_2' = \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(av) \cos bv dv = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} & \text{при } 0 < b < a; \\ -\frac{i}{\sqrt{b^2 - a^2}} & \text{при } 0 < a < b. \end{cases} \quad (16.18б)$$

Если  $\mu \gg 1$ , то в интеграле  $I_2'$  переменная  $v$  пробегает только большие значения. Поэтому можно ввести асимптотическое представление

$$H_0^{(1)}(v) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi v}} e^{iv - i\frac{\pi}{4}}.$$

С точностью 2% это приближение выполняется уже при  $\mu = 5$ . Тогда получим

$$I_2' \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}} e^{iv} \sin \frac{\pi m v}{\mu} dv.$$

При помощи подстановки  $\sqrt{v} = v_1$  последнее выражение сводится к интегралам Френеля. После преобразований находим

$$I_2' \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{\mu}}^{\infty} \left[ e^{iv_1^2 \left(1 + \frac{\pi m}{\mu}\right)} - e^{iv_1^2 \left(1 - \frac{\pi m}{\mu}\right)} \right] dv_1.$$

Заметим, что при вычислениях с использованием интегралов Френеля иногда возникают недоразумения, связанные с различными определениями этих функций, встречающимися в литературе. Мы воспользуемся следующими определениями:

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt; \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt.$$

Именно для таких функций составлены таблицы, приведенные в [84]. При интегрировании выполняем задачу переменных. В первом интеграле  $v_1^2 \left(1 + \frac{\pi m}{\mu}\right) = \frac{\pi}{2} t^2$ ; во втором интеграле  $v_1^2 \left(1 - \frac{\pi m}{\mu}\right) = \frac{\pi}{2} t^2$  при  $\frac{\pi m}{\mu} < 1$  и  $v_1^2 \left(\frac{\pi m}{\mu} - 1\right) = \frac{\pi}{2} t^2$  при  $\frac{\pi m}{\mu} > 1$ . В результате получаем

$$I_2' \approx \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{1 - 2C(\mu_m^+)}{\mu_m^+} - \frac{1 - 2C(\mu_m^-)}{\mu_m^-} + i \left[ \frac{1 - 2S(\mu_m^+)}{\mu_m^+} \pm \frac{1 - 2S(\mu_m^-)}{\mu_m^-} \right] \right\}. \quad (16.19)$$

Здесь введены обозначения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}(\mu + \pi m)} = \mu_m^+; \quad \sqrt{\pm \frac{2}{\pi}(\mu - \pi m)} = \mu_m^-.$$

Верхние знаки используются при  $\mu > \pi m$ , нижние — при  $\mu < \pi m$ . С учетом (16.18а) и (16.19) находим

$$F_m(\mu) \approx I_2' + \begin{cases} \frac{2i \arcsin \frac{\pi m}{\mu}}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{\pi m}{\mu}\right)^2}} \text{ при } \mu > \pi m; \\ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\pi m}{\mu}\right)^2 - 1}} \left[ 1 + \frac{i \cdot 2}{\pi} \ln\left(\frac{\pi m}{\mu} - \sqrt{\left(\frac{\pi m}{\mu}\right)^2 - 1}\right) \right] \text{ при } \mu < \pi m. \end{cases} \quad (16.20)$$

Аналогичным образом вычисляется и  $\Psi_m(\mu)$ . Запишем  $\Psi_m(\mu) = I_1'' + I_2''$ , величина  $I_2''$  вычисляется по формуле (16.18б). Для  $\mu > 1$ , повторяя приведенные выше преобразования, получим

$$I_2'' \approx -\sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{1 - 2C(\mu_m^+)}{\mu_m^+} + \frac{1 - 2C(\mu_m^-)}{\mu_m^-} + i \left[ \frac{1 - 2S(\mu_m^+)}{\mu_m^+} \pm \frac{1 - 2S(\mu_m^-)}{\mu_m^-} \right] \right\}. \quad (16.21)$$

По-прежнему верхний знак используется при  $\mu > \pi m$ . Таким образом,

$$\Psi_m(\mu) \approx I_2'' + \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi m}{\mu}\right)^2}} \text{ при } \mu > \pi m; \\ -\frac{i}{\sqrt{\left(\frac{\pi m}{\mu}\right)^2 - 1}} \text{ при } \mu < \pi m. \end{cases} \quad (16.22)$$

Для вычисления интегралов Френеля на электронной машине при больших значениях  $x$  можно пользоваться асимптотическими формулами

$$C(x) = \frac{1}{2} + A(x) \frac{\cos \frac{\pi x^2}{2}}{\pi x} + B(x) \frac{\sin \frac{\pi x^2}{2}}{\pi x};$$

$$S(x) = \frac{1}{2} + A(x) \frac{\sin \frac{\pi x^2}{2}}{\pi x} - B(x) \frac{\cos \frac{\pi x^2}{2}}{\pi x},$$

где

$$A(x) = -\frac{1}{\pi x^2} + \frac{15}{(\pi x^2)^3}; \quad B(x) = 1 - \frac{3}{(\pi x^2)^2}.$$

Эти формулы дают три верных знака уже при  $x = 3$ , причем с увеличением  $x$  точность резко возрастает. При расчете вручную удобнее пользоваться непосредственно таблицами [84], дающими значения интегралов Френеля до значений  $x$ , равных 25. Если  $x \rightarrow \infty$ , то  $C(x) \approx S(x) \rightarrow 0,5$ . Следовательно, при этом  $I_2' \approx I_2'' \approx 0$ .

На рис. 27 приведены графики импедансов излучения  $Z_{nn}$  и импедансов  $Z_{qn}$  ( $q \neq n$ ), характеризующих взаимодействие между формами колебаний.

Из графиков видно, что при любых значениях волнового параметра  $\mu = ka$  импедансы излучения  $\text{Re } Z_{nn}$ ,  $\text{Im } Z_{nn}$  значительно больше, чем импедансы взаимодействия между различными формами колебаний  $\text{Re } Z_{qn}$ ,  $\text{Im } Z_{qn}$ . При увеличении  $\mu$  импедансы излучения  $\text{Re } Z_{nn}$  стремятся к значению, равному единице. Реактивные импедансы  $\text{Im } Z_{nn}$  при возрастании  $\mu$  стремятся к нулю.



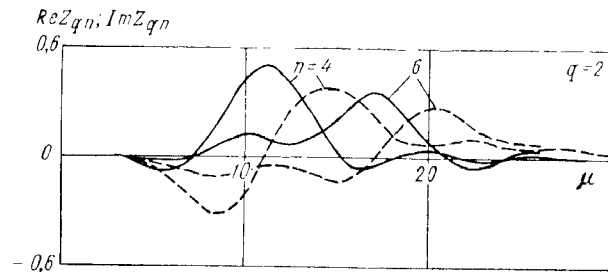
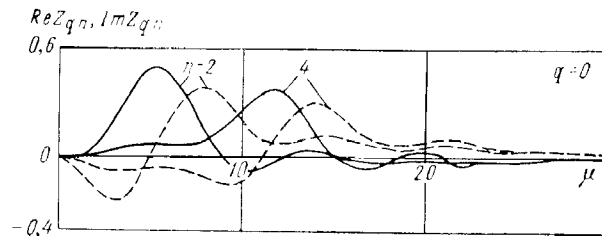
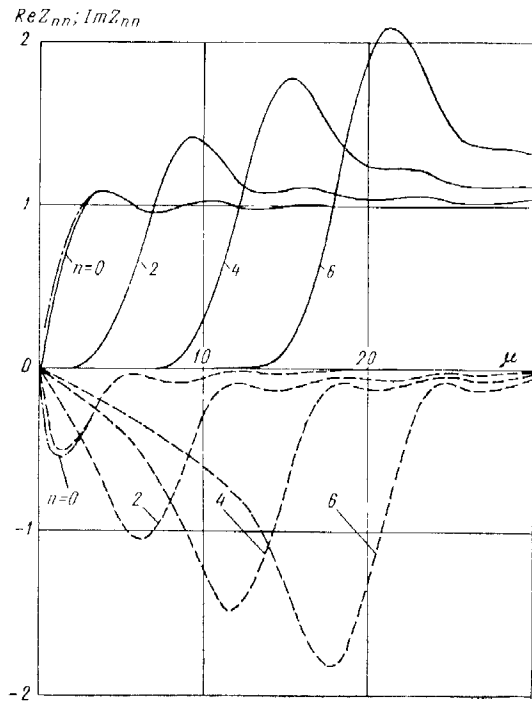


Рис. 27. Импедансы излучения для различных форм колебаний в отверстии.

— Re  $Z_{qn}$ ; - - - Im  $Z_{qn}$ ; - - - результат приближенного расчета для  $Z_{e0}$  по формулам (16.19) — (16.22); для остальных  $Z_{nn}$  и  $Z_{qn}$  кривые, рассчитанные по точным и приближенным формулам, сливаются.

Штрих-пунктирной линией на рис. 27, показаны результаты расчета с использованием приближенных формул (16.19) — (16.22). Видно, что указанные формулы обеспечивают высокую точность расчета.

Вблизи значений  $\mu = \pi l$  импедансы  $\text{Re } Z_{nn}$  и  $\text{Im } Z_{nn}$  резко увеличиваются. Для того чтобы объяснить появление этих максимумов, рассмотрим излучатель, на поверхности которого задано распределение колебательной скорости по закону (16.9). Стоячую волну (16.9) можно представить в виде суммы двух волн, бегущих в противоположных направлениях с волновыми числами  $\alpha_n = \frac{\pi n}{a} = k \frac{\pi n}{\mu}$  (или же со скоростью  $b_n = \frac{\omega a}{\pi n}$ ):

$$v = v_n \cos \frac{\pi n x}{a} = \frac{v_n}{2} \left[ e^{i \frac{\pi n}{a} x} + e^{-i \frac{\pi n}{a} x} \right]. \quad (16.23)$$

Вычислим сопротивление излучения бесконечной излучающей поверхности с распределением колебательной скорости в форме (16.23).

Воспользовавшись формулой (5.2), найдем звуковое давление

$$p = \frac{\rho c v_n}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{\pi n}{\mu}\right)^2}} e^{iky} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi n}{\mu}\right)^2} \left[ e^{i \frac{\pi n}{a} x} + e^{-i \frac{\pi n}{a} x} \right].$$

Безразмерный импеданс излучения, выраженный в долях  $\rho c$ , можно определить в виде отношения

$$Z = \frac{p|_{y=0}}{\rho c v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi n}{\mu}\right)^2}}. \quad (16.24)$$

Характер изменения импеданса  $Z$  показан на рис. 28.

При  $\mu > \pi l$  импеданс излучения является чисто активным, а при  $\mu < \pi l$  — чисто реактивным.

Неравенство  $\mu < \pi l$  соответствует распределению колебательной скорости по поверхности излучателя в форме волны, распространяющейся со скоростью, меньшей, чем скорость звука в свободной среде. В этом случае активного излучения звука в виде волн, уходящих

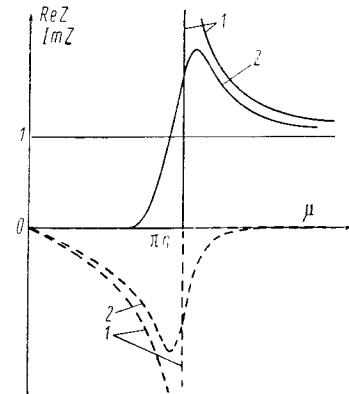


Рис. 28. Характер изменения импедансов излучения вблизи значения  $\mu = \pi l$ .

— Re  $Z$ ; - - - Im  $Z$   
1 — для бесконечной поверхности с распределением колебательной скорости в форме бегущей волны с волновым числом  $\alpha_n = k \pi n / \mu$ ; 2 — для ограниченной пластины.

от поверхности, не происходит и все звуковое поле представляет собой лишь неоднородные волны, сосредоточенные у поверхности.

Вблизи значений  $\mu = \pi n$  импеданцы излучения безграничной поверхности  $\text{Re } Z$  и  $\text{Im } Z$  резко возрастают (кривые 1). Бесконечное возрастание импеданцев при  $\mu = \pi n$  является следствием своеобразного резонанса, возникающего при совпадении скорости волны, бегущей по поверхности,  $b_n$  и скорости звука в свободной среде. Если волна движется со скоростью  $b_n = c$ , то вклады всех участков поверхности суммируются в данной точке (например, в точке  $A_0$  рис. 29) синфазно. Амплитуды волн, излучаемых этими участками, при увеличении расстояния  $r$  уменьшаются по закону  $1/\sqrt{r}$  (при

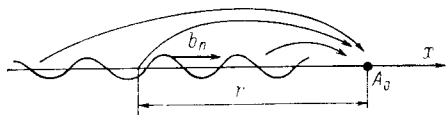


Рис. 29. К объяснению резонанса, обусловленного совпадением скоростей  $b_n$  и  $c$ .

$kr \gg 1$ ). Поэтому общий вклад поверхности, определяемый интегралом от функции  $1/\sqrt{r}$  с бесконечным верхним пределом, обращается в бесконечность и звуковое давление вблизи поверхности также является бесконечным.

Если же излучающая поверхность является ограниченной, то бесконечного возрастания импеданцев не происходит, несмотря на то, что корень, входящий в знаменатель выражений (16.20) и (16.22), обращается в нуль (для того чтобы это показать, следует раскрыть неопределенность типа  $\infty - \infty$ ). Таким образом, при любых значениях  $\mu$  импеданцы излучения ограниченной поверхности остаются конечными величинами. Характер изменения импеданцев излучения ограниченной пластины вблизи значения  $\mu = \pi n$  показан на рис. 28 (кривые 2).

При возрастании номера моды возрастает и абсолютная величина максимумов. В пределе при  $n \rightarrow \infty$  кривые 2 приближаются соответственно к кривым 1.

**Вычисление диаграммы направленности отверстия.** Считая коэффициенты  $A_n$  известными, определим теперь диаграмму направленности в дальней зоне ( $kr \gg 1$ ,  $r \gg a$ ). Расстояние до точки наблюдения определится выражением  $r \approx r_0 - x \sin \alpha$ . Функцию Ханкеля в формуле (16.4) можно заменить асимптотическим представлением

$$H_0^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} e^{ikr_0 - ikx \sin \alpha - i\frac{\pi}{4}}.$$

После интегрирования получаем

$$\Phi_2(r_0, \alpha) = \frac{ka}{2} \int \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} e^{ikr_0 - i\frac{ka}{2} \sin \alpha - i\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{\sin u_0}{u_0} (1 - A_0) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k_n}{k} A_n \cdot i^n \left[ \frac{\sin u_n^-}{u_n^-} + \frac{\sin u_n^+}{u_n^+} \right] \right\}, \quad (16.25)$$

где  $u_0 = \frac{ka}{2} \sin \alpha$ ;  $u_n^+ = \frac{1}{2} (ka \sin \alpha + \pi n)$ ;  $u_n^- = \frac{1}{2} (ka \sin \alpha - \pi n)$ , причем суммируются лишь четные члены.

Слагаемое  $\frac{\sin u_0}{u_0}$  представляет собой диаграмму направленности плоского поршня с равномерным распределением амплитуды. На эту диаграмму наложены диаграммы плоских излучателей с амплитудным распределением

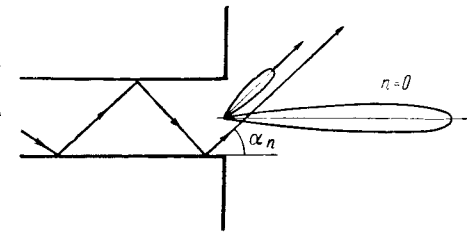


Рис. 30. Формирование боковых лепестков диаграммы направленности за счет волн Бриллюэна.

$\cos \frac{\pi n x}{a}$ , которые имеют вид

$$R_n(\alpha) = \frac{\sin u_n^\pm}{u_n^\pm}.$$

Главный максимум диаграмм высших номеров сдвинут относительно оси на угол, который определяется из условия  $u_n^\pm = 0$  или  $\sin \alpha_n = \pm \frac{\pi n}{ka}$  ( $n$  — четное число). Члены  $R_n(\alpha)$  суммируются с диаграммой поршневой моды и проявляются на ней в виде новых добавочных максимумов (рис. 30), число которых определяется выражением  $N = E \left( \frac{a}{\lambda} \right)$ . При  $n > N$  углы  $\alpha_n$  становятся мнимыми, и соответствующие слагаемые  $R_n(\alpha)$  уже не будут сильно влиять на основную диаграмму.

Появление боковых лепестков характеристик направленности легко объяснить при помощи волн Бриллюэна. Действительно, волна Бриллюэна, последовательно отражаясь от стенок волновода, выходит, наконец, из отверстия и продолжает идти в направлении, которое образует угол  $\alpha_n$  с осью  $y$ . Вклад этой волны приводит к появлению добавочного максимума на диаграмме направленности отверстия.

Производя замену  $n = 2m$ , из выражения (16.25) получаем диаграмму направленности

$$R(\alpha) = \left| \frac{\Phi_2(r_0, \alpha)}{\Phi_2(r_0, 0)} \right| = \left| \frac{1}{1 - A_0} \left[ \frac{\sin u_0}{u_0} (1 - A_0) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{2m}}{k} A_{2m} \frac{u_0^2}{u_0^2 - (\pi m)^2} \right] \right|. \quad (16.26)$$

**О решении бесконечных систем алгебраических уравнений.** Расчет прохождения звука через решетку из щелей в экране конечной толщины может быть выполнен путем решения бесконечной системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

Приведение решения к бесконечной системе уравнений является весьма распространенным приемом (см., например, § 16, 20, 36). Поэтому целесообразно привести некоторые общие соображения, касающиеся бесконечных систем уравнений. Сведения по теории бесконечных систем уравнений изложены в [30]. Ниже дана сводка основных результатов, необходимых для практического решения таких систем.

Рассмотрим систему уравнений

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} x_m = b_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если сумма модулей коэффициентов в каждой строке меньше единицы, т. е.  $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}| < 1$ , то такая система называется регулярной. Если же эта сумма не превосходит постоянного числа, меньшего единицы, т. е.  $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}| \leq 1 - \theta < 1$ , то система уравнений называется вполне регулярной.

Вполне регулярная система имеет ограниченное решение  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) при любых ограниченных свободных членах  $b_n$ . Регулярная система имеет ограниченное решение в том случае, если свободные члены удовлетворяют условию

$$|b_n| < K \rho_n; \quad \rho_n = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}|,$$

где  $K$  — постоянная. Другими словами, если коэффициенты  $b_n$  убывают с увеличением  $n$  так же, как и величины  $\rho_n$ , или быстрее, то система имеет ограниченное решение.

Если условие регулярности выполнено лишь начиная с некоторой строки, а для остальных строк справедливо неравенство  $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}|^2 \leq A_n < \infty$ , то такая система называется квазирегулярной.

К квазирегулярным системам применимы все утверждения относительно регулярных систем.

Решение регулярных и вполне регулярных систем может быть выполнено методом редукции или методом последовательных приближений. Метод редукции (иногда называемый методом усечения)

Амплитуда волны с номером  $n = 0$  пропорциональна величине  $1 - A_0$ . Заметим, что  $A_0$  является коэффициентом отражения звука от отверстия для плоской чисто поршневой волны. Если  $A_0 = 0$ , то вся энергия, которую несет с собой плоская волна, либо выходит из отверстия, либо преобразуется в энергию высших форм колебаний.

При  $ka \gg 1$  импедансы излучения намного больше, чем импедансы, характеризующие взаимодействие между различными формами колебаний, т. е.  $Z_{nn} > Z_{qn}$  ( $q \neq n$ ). Оставляя в системе уравнений лишь диагональные члены, в этом приближении находим значения неизвестных коэффициентов

$$A_n \approx \frac{\varepsilon_n Z_{n0} - (2 - \varepsilon_n)}{1 + \varepsilon_n \frac{k_n}{k} Z_{nn}}.$$

Поскольку  $Z_{00} \gg Z_{n0}$  ( $n \neq 0$ ), то  $A_0 \gg A_n$ . В этом случае в формулах (16.25), (16.26) можно пренебречь бесконечной суммой и оставить лишь нулевой член

$$A_0 = \frac{Z_{00} - 1}{Z_{00} + 1}.$$

Последнее выражение напоминает формулу для коэффициента отражения звука от границы раздела двух различных сред. Импеданс излучения  $Z$  можно рассматривать как входной импеданс среды 2 (см. рис. 26) со стороны волновода. Второе слагаемое, равное единице, является безразмерным волновым сопротивлением трубы для плоской чисто поршневой волны.

Рассмотрим поведение  $A_0$  при увеличении волнового размера отверстия. Из формул (16.15), (16.21) и (16.22) следует, что при  $\mu \rightarrow \infty$

$$Z_{00} \rightarrow 1 - \frac{\sin \mu}{\sqrt{\pi \mu}} + i \left( -\frac{2}{\pi \mu} + \frac{\sin \mu}{\sqrt{\pi \mu}} \right).$$

Таким образом, при увеличении размеров отверстия активное сопротивление  $\text{Re } Z_{00}$  осциллирует вблизи значения, равного единице, причем амплитуда осцилляций убывает как  $1/\sqrt{\mu}$ . Реактивная часть сопротивления излучения осциллирует вблизи нуля.

Если  $\mu \rightarrow \infty$ , то  $A_0 \rightarrow 0$ . Это означает, что при больших размерах отверстия бегущая плоская волна практически не отражается от отверстия. Вся энергия волны уходит во внешнюю область, и характеристика направленности отверстия определяется членом  $\frac{\sin u_0}{u_0}$ .

Заметим, что в данной задаче удалось сравнительно просто записать выражение, описывающее звуковое поле в области 2, только потому, что отверстие было снабжено бесконечным абсолютно жестким фланцем. Если такой фланец отсутствует, то решение задачи резко усложняется. Определение волновых полей, излучаемых волноводами без фланца, может быть выполнено методом Винера—Хопфа, описание которого выходит за рамки настоящей книги. Решение таких задач приведено в работах [10, 65].

закljučается в следующем. Решается конечная (усеченная) система некоторого фиксированного порядка  $N$

$$x_n + \sum_{m=1}^N a_{mn} x_m = b_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

В результате получается решение  $x_n^{(1)}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), являющееся первым приближением. Затем решается система уравнений порядка  $N + 1$ , решение которой (второе приближение) обозначим через  $x_n^{(2)}$  ( $n = 1, 2, \dots, N + 1$ ). После  $k$  приближений получим набор решений, которые можно свести в таблицу:

$x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	$\dots$	$x_1^{(k)}$
$x_2^{(1)}$	$x_2^{(2)}$	$\dots$	$x_2^{(k)}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_N^{(1)}$	$x_N^{(2)}$	$\dots$	$x_N^{(k)}$
$\dots$	$x_{N+1}^{(2)}$	$\dots$	$x_{N+1}^{(k)}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$x_{N+k}^{(k)}$

Решение бесконечной системы уравнений можно считать законченным в том случае, если значения  $x_n^{(k)}$  с достаточной для практики точностью совпадают со значениями  $x_n^{(k-1)}$ .

Чаще всего при решении практических задач необходимо вычислять в конечном итоге не сами величины  $x_n$ , а бесконечные ряды

$I = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n$ , где  $C_n$  — известные коэффициенты. В этом случае к приведенному условию добавляется требование, чтобы количество вычисленных величин  $x_n$  обеспечивало сходимость ряда  $I$ .

Иногда возникает ситуация, при которой необходимо решать системы уравнений с порядком, значительно превосходящим количество членов, обеспечивающих сходимость ряда  $I$ . Это происходит в результате того, что стабилизация решения при увеличении  $k$  может происходить достаточно медленно. В таких условиях может оказаться, что для получения достоверных значений первых  $N$  величин  $x_n$  необходимо решить систему уравнений с порядком, значительно большим, чем  $N$ . Каких-либо общих правил здесь не существует, и определять наибольший порядок усеченной системы приходится опытным путем.

При решении системы по методу последовательных приближений или «итерационному методу» в качестве нулевого приближения можно выбрать любые числа.

Первое приближение образуется по формуле

$$x_n^{(1)} = b_n - \sum_{m=1}^N a_{mn} x_m^{(0)}.$$

Продолжая итерационный процесс, определяем  $k$ -е приближение, пользуясь рекуррентным соотношением

$$x_n^{(k)} = b_n - \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} x_m^{(k-1)}.$$

Преимуществом метода последовательных приближений по сравнению с методом редукции при решении систем уравнений высокого порядка  $N$  является то, что для определения очередной величины  $x_n$  не нужно хранить в оперативной памяти машины весь набор коэффициентов  $a_{mn}$ , количество которых определяется величиной  $N^2$ , а достаточно иметь лишь  $N$  значений  $a_{mn}$ .

Хотя в принципе можно получить однозначное решение системы, отправляясь от любых значений  $x_n^{(0)}$ , все же наиболее быстро итерационный процесс сходится в том случае, если величины  $x_n$  приблизительно известны заранее. Поэтому на практике целесообразно комбинировать метод редукции и метод последовательных приближений. При этом сначала решается конечная (усеченная) система уравнений, порядок которой (обозначим его через  $N_1$ ) допускает сравнительно быстрое получение решения без использования внешней памяти вычислительной машины. Если необходимо в конечном итоге определить  $N_2$  величин  $x_n$  ( $N_2 > N_1$ ), то в качестве нулевого приближения можно взять  $N_1$  значений, вычисленных при решении конечной системы, а в качестве остальных  $N_2 - N_1$  величин  $x_n^{(0)}$  взять нули. Дальнейшее решение проводится по методу последовательных приближений.

Заметим, что условие регулярности является достаточным для решения бесконечных систем уравнений как методом редукции, так и методом последовательных приближений. Однако существуют и другие, более слабые условия возможности решения бесконечных систем уравнений. В частности, достаточно потребовать, чтобы сходились ряды

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} |C_{mn}|^2 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2.$$

В большинстве практических случаев бесконечные системы уравнений, возникающие при решении задач, не удовлетворяют ни одному из перечисленных условий. Например, в системе уравнений (17.9) коэффициенты матрицы возрастают при увеличении  $m$ ; поэтому система (17.9) не может быть численно решена. Подобные системы требуют регуляризации, которая может быть выполнена путем замены  $\tilde{x}_n = x_n f(x_n)$ , где  $f(x_n)$  — некоторая специально подобранная в каждом отдельном случае функция. Примеры регуляризации бесконечных систем уравнений приведены в § 26.

**Составление систем уравнений.** Теория неоднородных волн в трубах оказывается весьма полезной при вычислении звукового поля, рассеянного экраном с отверстиями (рис. 31), поскольку в каждом отверстии распространение волн происходит по обычным законам теории волноводов.

Существуют строгие решения задачи дифракции на периодических ленточных решетках при произвольных соотношениях между размерами решетки и длиной волны, приведенные в работах [11, 156]. Однако в этих работах предполагается, что экран имеет нулевую толщину.

Точное решение задачи о прохождении электромагнитной волны  $E$ -поляризации (что в акустическом случае соответствует абсолютно мягкому экрану) через решетку из прямоугольных брусьев при нормальном падении выполнено в работе [59]. При этом исполь-

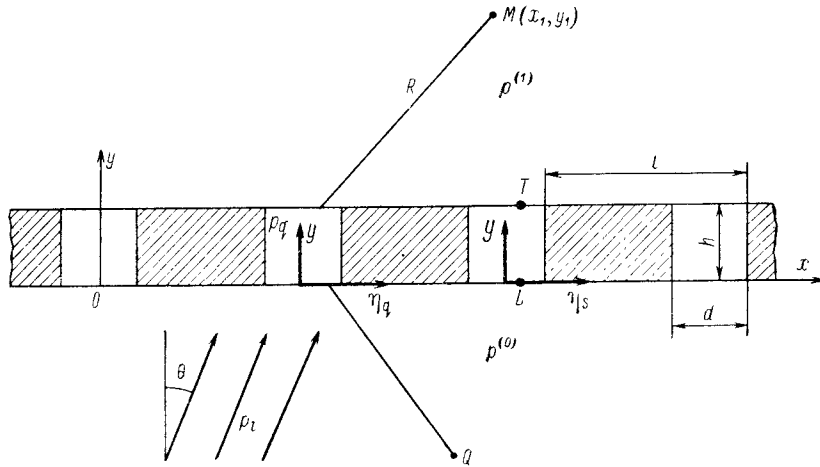


Рис. 31. К вычислению коэффициента прохождения звуковой волны через экран с отверстиями.

зовался метод, примененный в работе [20] для вычисления коэффициента отражения от неровной поверхности.

Ниже иным способом будет получено решение задачи (основанное на результатах работы [108]) для наклонного падения и абсолютно жесткого экрана, причем искомые поля выражаются через импедансы излучения щелей в экране.

Для упрощения вычислений будем считать, что щели являются бесконечно протяженными в направлении оси  $z$ , фронт волны также параллелен этой оси. Таким образом, будем рассматривать плоскую задачу.

Пусть плоская звуковая волна

$$p_i = e^{ik(x \sin \theta + y \cos \theta)} \quad (17.1)$$

падает из нижнего полупространства (рис. 31) на бесконечный жесткий экран произвольной толщины  $h$ , в котором с периодом  $l$  прорезаны щели шириной  $d$ . Требуется определить звуковое поле, прошедшее через экран.

Граничными условиями задачи являются:

1) нормальная составляющая колебательной скорости равна нулю на всей поверхности экрана;

$$2) \quad p^{(0)} = p_q|_{y=0}, \quad p^{(1)} = p_q|_{y=h}, \quad (17.2)$$

где  $p^{(0)}$  — поле в нижней полуплоскости;  $p_q$  — поле в щели с номером  $q$  ( $q = -\infty, \dots, +\infty$ );  $p^{(1)}$  — поле выше экрана.

Точное решение может быть построено путем разложения поля в щели в ряд по собственным функциям.

Введем ряд систем координат с осями  $\eta_q, y$  и началом, совмещенным с серединой щели, имеющей номер  $q$ , как показано на рис. 31. Тогда поле в этой щели может быть представлено в виде суммы бегущих и неоднородных волн, распространяющихся в обе стороны по оси  $y$ :

$$p_q = e^{ikql \sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} (A_m e^{ik_m y} + B_m e^{-ik_m y}) \cos \left( \frac{\pi m \eta_q}{d} - \frac{\pi m}{2} \right), \quad (17.3)$$

где  $k_m = \sqrt{k^2 - \left( \frac{\pi m}{d} \right)^2}$  — волновое число в щели для формы с номером  $m$ ;  $k$  — волновое число падающей на пластину волны в пространстве вне щели.

Выражение (17.3) удовлетворяет на стенках щели, т. е. при  $\eta = \pm \frac{d}{2}$ , условию, требующему обращения в нуль нормальной составляющей колебательной скорости среды:

$$\frac{\partial p_q}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\pm d/2} = 0.$$

Члены, для которых  $\frac{\pi m}{d} > k$ , т. е. с номерами  $m > \frac{2d}{\lambda}$ , где  $\lambda$  — длина волны в среде, дают неоднородные волны с постоянной затухания  $k_m$ ; члены с номерами  $m < \frac{2d}{\lambda}$  представляют собой бегущие волны вдоль оси  $y$ ; нулевой член является волной поршневого типа, распространяющейся со скоростью звука в окружающей среде. Множитель  $e^{ikql \sin \theta}$  определяет фазу колебаний в щели с номером  $q$ , которая задается падающей волной.

Колебательная скорость в щели при  $|\eta_q| \leq \frac{d}{2}$  равна

$$v_q(\eta_q, y) = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_q}{\partial y} = \frac{e^{ikql \sin \theta}}{\omega\rho} \sum_{m=0}^{\infty} k_m (A_m e^{ik_m y} - B_m e^{-ik_m y}) \cos \left( \frac{\pi m \eta_q}{d} - \frac{\pi m}{2} \right). \quad (17.4)$$

При  $|\eta_q| > \frac{d}{2}$  имеем  $v_q = 0$ .

Звуковое поле в точке  $M(x_1, y_1)$ , излучаемое всеми щелями, определяется интегралом Гюйгенса (4.10)

$$p^{(1)}(x_1, y_1) = \frac{\omega\rho}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v(x)|_{y=h} H_0^{(1)}(kR) dx.$$

Учитывая, что  $v = 0$  при  $|\eta_q| > \frac{d}{2}$ , запишем

$$p^{(1)}(x_1, y_1) = \frac{\omega\rho}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-d/2}^{d/2} v_q(\eta_q, h) H_0^{(1)}(kR) d\eta_q, \quad (17.5)$$

где  $R = \sqrt{(y_1 - h)^2 + (x_1 - lq - \eta_q)^2}$ .

Таким образом, задачей является определение пока неизвестной колебательной скорости в отверстии.

Совместим точку  $M(x_1, y_1)$  с точкой  $T$ , находящейся в плоскости щели с номером  $s$ . Тогда  $y_1 = h$  и  $x_1 = ls + \eta_s$ . Подставляя в (17.5) выражение (17.4), получим

$$p^{(1)}(T) = \frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{ikql \sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} k_m [A_m e^{ik_m h} - B_m e^{-ik_m h}] \times \\ \times \int_{-d/2}^{d/2} H_0^{(1)} [k | l(s - q) + \eta_s - \eta_q |] \cos \left( \frac{\pi m \eta_q}{d} - \frac{\pi m}{2} \right) d\eta_q.$$

Пользуясь вторым из условий (17.2) для щели с номером  $s$ , находим одно из уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $A_m$  и  $B_m$ :

$$\frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{ikql \sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} k_m (A_m e^{ik_m h} - B_m e^{-ik_m h}) \times \\ \times \int_{-d/2}^{d/2} \cos \left( \frac{\pi m \eta_q}{d} - \frac{\pi m}{2} \right) H_0^{(1)} (k | l(s - q) + \eta_s - \eta_q |) d\eta_q = \\ = e^{iks l \sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} (A_m e^{ik_m h} + B_m e^{-ik_m h}) \cos \left( \frac{\pi m \eta_s}{d} - \frac{\pi m}{2} \right). \quad (17.6)$$

Второе уравнение может быть получено из граничных условий на нижней стороне экрана. Поле в нижнем полупространстве складывается из поля падающей волны  $p_i$ , поля волны, отраженной от экрана без щелей  $p'_i$ , и поля  $p$ , излученного отверстием. Таким образом, поле в точке  $Q$  равно

$$p^{(0)}(Q) = e^{ik(x_1 \sin \theta + y, \cos \theta)} + e^{ik(x_1 \sin \theta - y, \cos \theta)} - p. \quad (17.7)$$

Совместим точку  $Q$  с точкой  $L$ , расположенной на нижней стороне экрана напротив точки  $T$ . Воспользуемся первым граничным условием (17.2) и представлением (17.4). Получим соотношение

$$2e^{ik(ls + \eta_s) \sin \theta} - \frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{ikql \sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} k_m (A_m - B_m) \times \\ \times \int_{-d/2}^{d/2} \cos \left( \frac{\pi m \eta_q}{d} - \frac{\pi m}{2} \right) H_0^{(1)} [k | l(s - q) + \eta_s - \eta_q |] d\eta_q = \\ = e^{iksl \sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} \cos \left( \frac{\pi m \eta_s}{d} - \frac{\pi m}{2} \right) (A_m + B_m). \quad (17.8)$$

Итак, мы имеем два уравнения (17.6) и (17.9), необходимые для определения неизвестных коэффициентов. Умножим левые и правые части этих уравнений на  $\cos \left( \frac{\pi m \eta_s}{d} - \frac{\pi n}{2} \right)$  и проинтегрируем по промежутку  $\left( -\frac{d}{2}, \frac{d}{2} \right)$ . Поскольку

$$\int_{-d/2}^{d/2} \cos \left( \frac{\pi m \eta}{d} - \frac{\pi m}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi n \eta}{d} - \frac{\pi n}{2} \right) d\eta = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ \frac{d}{\varepsilon_n} & \text{при } m = n, \end{cases}$$

где  $\varepsilon_n = 1$  при  $n = 0$ ,  $\varepsilon_n = 2$  при  $n > 0$ , то в правых частях уравнений (17.6) и (17.8) все члены, кроме слагаемых с номерами  $m = n$ , обратятся в нуль. В результате получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$ :

$$\left. \begin{aligned} A_n e^{ik_n h} + B_n e^{-ik_n h} - \varepsilon_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m}{k} (A_m e^{ik_m h} - B_m e^{-ik_m h}) Z_{mn} &= 0; \\ A_n + B_n + \varepsilon_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m}{k} (A_m - B_m) Z_{mn} &= 2\varepsilon_n a_n(\sin \theta), \\ n &= 0, 1, \dots, \infty. \end{aligned} \right\} \quad (17.9)$$

В выражении (17.9) обозначено

$$a_n(\sin \theta) = -i \sin \theta \frac{\left[ e^{i \frac{\mu}{2} \sin \theta} - (-1)^n e^{-i \frac{\mu}{2} \sin \theta} \right]}{\mu \left[ \sin^2 \theta - \left( \frac{\pi n}{\mu} \right)^2 \right]}, \quad (17.10)$$

причем при  $\theta = 0$  следует принять  $a_0 = 1$ ,  $a_n = 0$  ( $n > 0$ ).

Значения  $Z_{mn}$  определяются по формуле

$$Z_{mn} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{i\delta r \sin \theta} Z_{mn}^{(r)}, \quad (17.11)$$

где

$$Z_{mn}^{(r)} = \frac{1}{2\mu} \int_0^{\mu} \int_0^{\mu} \cos \frac{\pi nu}{\mu} \cos \frac{\pi mv}{\mu} H_0^{(1)} |\delta r + v - u| du dv;$$

$$\mu = kd; \quad \delta = kl.$$

Величина  $Z_{mn}^{(0)}$  при  $m = n$  является сопротивлением излучения из одиночного отверстия в бесконечном экране для формы колебаний с номером  $m$ ;  $Z_{mn}^{(0)}$  есть импеданс, характеризующий взаимодействие между формами колебаний с номерами  $m$  и  $n$  для одного и того же отверстия;  $Z_{mn}$  — импеданс взаимодействия между формами колебаний с номерами  $m$  и  $n$  для отверстий, находящихся на расстоянии  $lr$  ( $r = s - q$ ) друг от друга. Суммарный импеданс  $Z_{mn}$  есть импеданс взаимодействия между формами колебаний с номерами  $m$  и  $n$  при учете взаимодействия всех отверстий. Заметим, что  $Z_{mn}$  зависит от угла падения звука, поскольку фазы колебаний в отверстиях определяются фазой вынуждающей силы, т. е. фазой падающей звуковой волны.

Выражение (17.10) можно привести к более удобному для вычислений виду. Воспользуемся формулой суммирования Пуассона и преобразованием Фурье функции Ханкеля. Подробности этого преобразования приведены в § 37. В результате получим

$$Z_{mn} = \frac{\mu}{\delta} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{a_m(\delta_r) \bar{a}_n(\delta_r)}{\sqrt{1 - \delta_r^2}}, \quad \delta_r = \frac{2\pi r}{\delta} - \sin \theta. \quad (17.12)$$

Запись  $a_m(\delta_r)$  означает, что в формулу (17.10) необходимо вместо  $\sin \theta$  подставить  $\delta_r$ ; черта над  $a_n(\delta_r)$  означает комплексно сопряженную величину.

Непосредственно система уравнений (17.9) не может быть решена, поскольку ряды, составленные из коэффициентов, расходятся. Для приведения этой системы к удобному для расчетов виду введем подстановку, регуляризирующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{e^{-ik_n \frac{h}{2}}}{i \sin k_n h} \left( A'_n \cos \frac{k_n h}{2} + i B'_n \sin \frac{k_n h}{2} \right); \\ B_n &= \frac{e^{ik_n \frac{h}{2}}}{i \sin k_n h} \left( A'_n \cos \frac{k_n h}{2} - i B'_n \sin \frac{k_n h}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (17.13)$$

Тогда система (17.9) может быть разбита на две независимые системы уравнений

$$A'_n - i\epsilon_n \operatorname{tg} \frac{k_n h}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m}{k} Z_{mn} A'_m = i\epsilon_n a_n (\sin \theta) \operatorname{tg} \frac{k_n h}{2}; \quad (17.14)$$

$$B'_n + i\epsilon_n \operatorname{ctg} \frac{k_n h}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m}{k} Z_{mn} B'_m = i\epsilon_n a_n (\sin \theta) \operatorname{ctg} \frac{k_n h}{2}, \quad (17.15)$$

$$n = 0, 1, \dots, \infty.$$

Полученные системы представляют собой бесконечные системы алгебраических уравнений типа

$$x_n + \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} x_m = b_n, \quad n = 0, 1, \dots, \infty, \quad (17.16)$$

где

$$C_{mn} = \begin{cases} -\operatorname{tg} \frac{k_n h}{2} i\epsilon_n \frac{k_m}{k} Z_{mn}; \\ \operatorname{ctg} \frac{k_n h}{2} i\epsilon_n \frac{k_m}{k} Z_{mn}. \end{cases}$$

Проведем оценку матричных коэффициентов системы (17.16) при  $m, n \rightarrow \infty$ .

При больших  $m$  и  $n$  имеют место оценки  $a_n \sim \frac{1}{n^2}$  и  $Z_{mn} \sim \frac{1}{n^2 m^2}$ .

При этом  $C_{mn} \sim \frac{1}{mn^2}$ . Следовательно, матричные коэффициенты системы уравнений удовлетворяют условию  $\sum_{m,n} |C_{mn}|^2 < \infty$ . Значит, полученные системы могут быть решены методом редукции или методом последовательных приближений.

Таким образом, точно определено поле в плоскости  $y = h$ . Теперь в том или ином приближении можно определить звуковое поле в точке  $M(x_1, y_1)$ , считая коэффициенты разложения известными.

**Расчет коэффициента прохождения звука.** Под коэффициентом прохождения волны через неоднородную пластину (дифракционную решетку) будем понимать отношение звукового давления в нулевом пространственном спектре прошедшей звуковой волны к звуковому давлению в падающей волне. Более подробно этот вопрос рассматривается в § 35.

Для вычисления коэффициента прохождения предположим на некоторое время, что решетка в направлении оси  $x$  является конечной, причем длина решетки равна  $L = 2Nl$ , где  $2N + 1$  — количество щелей. Решетка дополнена до бесконечной плоскости абсолютно жестким экраном (рис. 32, а). Примем, что  $2N + 1 \gg 1$ ,  $kL \gg 1$ . При выполнении этих условий можно считать, что искажения зву-

кового поля в плоскости  $y = 0$ ,  $y = h$ , обусловленные влиянием конечности размеров решеток и дифракционных явлений на дополнительном экране, являются незначительными.

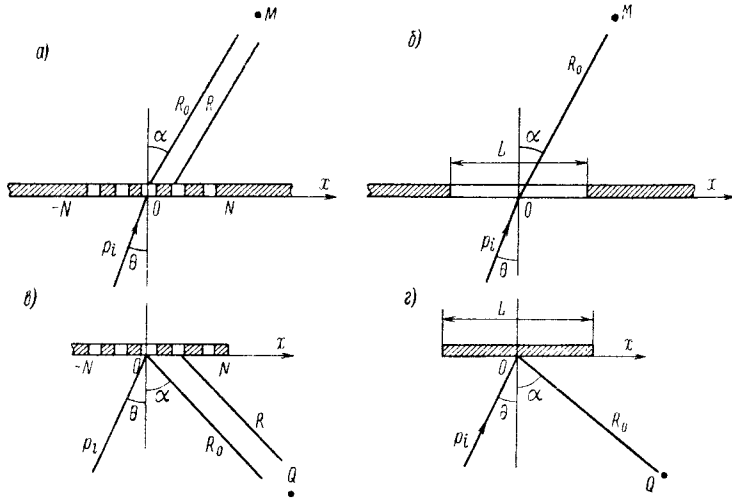


Рис. 32. К определению коэффициентов отражения и прохождения звука для экрана с отверстиями.

Звуковое поле в точке  $M$ , лежащей на большом расстоянии от экрана ( $kR \gg 1$ ,  $R \gg L$ ), определится по формуле, аналогичной выражению (17.5), однако суммирование должно производиться в конечных пределах:

$$p(M) = \frac{\omega \rho}{2} \sum_{q=-N}^N \int_{-d/2}^{d/2} v_q(\eta_q, h) H_0^{(1)}(kR) d\eta_q,$$

где

$$R \approx R_0 - (x \sin \alpha + h \cos \alpha) = R_0 - [(ql + \eta_q) \sin \alpha + h \cos \alpha].$$

Подставим вместо  $v_q$  выражение (17.4) и воспользуемся асимптотическим представлением функции Ханкеля при больших значениях аргумента. Получим

$$p(M) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} e^{ikR_0 - ikh \cos \alpha - i\frac{\pi}{4}} \sum_{q=-N}^N e^{ikql (\sin \theta - \sin \alpha)} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} k_m (A_m e^{ik_m h} - B_m e^{-ik_m h}) \int_{-d/2}^{d/2} \cos\left(\frac{\pi m \eta_q}{d} - \frac{\pi m}{2}\right) e^{-ik \eta_q \sin \alpha} d\eta_q.$$

Для вычисления коэффициента прохождения следует положить  $\alpha = \theta$ . Из последней формулы получим

$$p(M) = \frac{(2N+1)d}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} e^{ikR_0 - ikh \cos \theta - i\frac{\pi}{4}} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} k_m [A_m e^{ik_m h} - B_m e^{-ik_m h}] \bar{a}_m(\sin \theta). \quad (17.17)$$

Для того чтобы определить коэффициент прохождения звука, давление  $p(M)$ , вычисленное по формуле (17.17), необходимо разделить на величину звукового давления  $p_i(M)$ , которое возникло бы в точке  $M$  при полностью открытом отверстии длиной  $L$  (рис. 32, б). Поскольку по предположению  $kL \gg 1$ , то для определения  $p_i(M)$  можно воспользоваться приближением Кирхгофа (§ 8). Нормальную составляющую колебательной скорости падающей волны в плоскости  $y = 0$  можно задать следующим образом:

$$v_i(x) = \frac{\cos \theta}{\rho c} e^{ikx \sin \theta}.$$

Воспользовавшись формулой (4.3), найдем звуковое давление  $p_i(M)$  в дальней зоне отверстия:

$$p_i(M) = \frac{kL \cos \theta}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} e^{ikR_0 - i\frac{\pi}{4}}. \quad (17.18)$$

Окончательно с учетом подстановки (17.13) получим коэффициент прохождения звука

$$B = \frac{p(M)}{p_i(M)} = \frac{\mu}{\delta \cos \theta} e^{-ikh \cos \theta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m}{k} \bar{a}_m(\sin \theta) (A'_m + B'_m). \quad (17.19)$$

Аналогичным образом можно вычислить коэффициент отражения звука  $A$ . Будем понимать под коэффициентом отражения от неоднородной пластины отношение звукового давления в отраженной волне в направлении зеркального отражения  $\theta = \alpha$  к звуковому давлению в волне, отраженной от абсолютно жесткой полосы тех же размеров (рис. 32, в, г). Наличие дополнительного экрана является в данном случае излишним. Опуская преобразования, запишем окончательный результат:

$$A = \frac{p(Q)}{p_i(Q)} = 1 - \frac{\mu}{\delta \cos \theta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m}{k} (B'_m - A'_m) \bar{a}_m(\sin \theta). \quad (17.20)$$

Для случая  $h = 0$  получаем следующие выражения:

$$B = \frac{\mu}{\delta \cos \theta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m}{k} C_m \bar{a}_m(\sin \theta); \quad A = 1 - B, \quad (17.21)$$



где  $C_m$  определяется из системы уравнений

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m}{k} C_m Z_{mn} = a_n; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

В частном случае  $\mu = \delta$  формула (17.19) определяет коэффициент прохождения звука через решетку из параллельных абсолютно жестких полос.

При  $\mu \ll 1$  можно считать, что в переносе звуковой энергии через отверстия основную роль играет чисто поршневая волна. Оставляя в уравнениях (17.14), (17.15) лишь нулевые члены, получаем

$$B \approx - \frac{4\mu e^{-ikh \cos \theta}}{\delta \cos \theta [e^{ikh} (1 - Z_{00})^2 - e^{ikh} (1 + Z_{00})^2]}. \quad (17.22)$$

Если, кроме того,  $\delta \ll 1$ , то  $Z_{00} \approx \frac{\mu}{\delta \cos \theta}$ . При  $kh = n\pi$ , т. е. при  $h = \frac{n\lambda}{2}$ , из выражения (17.22) следует  $|B| = 1$ . Это соответствует явлению полного прохождения звука через полуволновую пластину. Если устремить  $h$  к нулю, то при  $\mu, \delta \ll 1$  получим парадоксальный результат  $B \rightarrow 1$ , т. е. при малых отверстиях и нулевой толщине экрана волна полностью проходит через экран при любом коэффициенте перфорации  $\varepsilon = \frac{\mu}{\delta}$ , в том числе и при  $\varepsilon = 0$ . Этот явно неверный в предельном случае результат объясняется идеализацией задачи. С уменьшением коэффициента перфорации резко сужается область частот, для которой коэффициент прохождения является высоким. При весьма малом  $\varepsilon$  коэффициент прохождения будет близок к нулю во всем диапазоне частот  $\omega$  за исключением окрестности точки  $\omega = 0$ . Достаточно учесть хотя бы небольшое трение в отверстии или небольшое отличие толщины экрана от нуля, чтобы при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получить  $|B| \rightarrow 0$  в соответствии со здравым смыслом. Этот результат получится, например, если в формуле (17.22) выполнить предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ , оставляя  $kh$  конечной величиной.

Из выражения (17.21) следует, что при  $\delta_r = \pm 1$ , т. е. при  $\sin \theta_r = \pm \frac{\lambda}{l}$   $r \pm 1$ , импедансы  $Z_{mn}$  обращаются в бесконечность, и коэффициент прохождения становится равным нулю. При  $\theta = \theta_r$  разность хода падающей звуковой волны, приходящей к данному отверстию, и звуковых волн, излучаемых всеми отверстиями, составляет целое число длин волн. Поэтому падающая волна и волны, излучаемые всеми отверстиями, приходят к данному отверстию в одной и той же фазе, что значительно увеличивает сопротивление излучения.

Решение бесконечных систем уравнений (17.14) и (17.15) целесообразнее всего проводить методом последовательных приближений, взяв за нулевое приближение решение, которое получается,

если положить  $Z_{mn} = 0$  при  $m \neq n$ . Тогда в матрице коэффициентов системы (17.16) остаются лишь диагональные члены и решение будет иметь вид

$$x_n^{(0)} = \frac{b_n}{1 + C_{nn}}.$$

Последующие приближения можно найти из рекуррентного соотношения

$$x_n^{(v+1)} = b_n - \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} x_m^{(v)}.$$

Последовательность решений  $x_n^{(v)}$  по  $v$  быстро сходится, поскольку основную роль в излучении звука играют импедансы излучения  $Z_{nn}$ , и нулевое приближение сразу определяет главную часть решения. При  $\theta = 0$  в выражении (17.19) остается лишь член с номером  $m = 0$ . Бесконечный ряд (17.12) сходится в этом случае достаточно быстро (практически обрываясь на пятом—седьмом члене), а в системах уравнений при любых  $\delta$  можно ограничиться членами с номерами  $n = 0, 2, 4$ . При этом все вычисления практически можно провести вручную. При  $\theta \neq 0$  вычисления выполнимы лишь с помощью электронной вычислительной техники [за исключением случая  $\mu \ll 1$ , когда можно пользоваться формулой (17.22)].

На рис. 33 приведены зависимости коэффициента прохождения звука при  $\theta = 0$  от коэффициента перфорации  $\mu/\delta$  для случаев  $\delta = kl = 0,3; 2,5; 10$ . Параметром является волновая толщина экрана  $\beta = kh$ . Пунктиром на рис. 33, а показан результат расчета по формуле (17.22). Сплошная линия означает второе приближение. Третье приближение везде практически совпадает со вторым.

На рис. 34 показаны кривые коэффициента прохождения звука в функции волновой толщины пластины  $\beta$  для случаев  $\theta = 0^\circ; kd = 0,3; kl = 0,5; 0,7; 1,0$ . При  $kh = \pi, 2\pi, \dots$  в соответствии со сказанным выше наблюдаются максимумы коэффициента прохождения звука. Чем меньше коэффициент перфорации, тем острее максимумы.

Интересна зависимость коэффициента прохождения звука от волнового размера периода решетки при постоянном коэффициенте перфорации  $\mu/\delta$  (рис. 35). Коэффициент прохождения звука увеличивается при уменьшении размеров отверстий. Действительно, при больших размерах отверстий справедлива геометрическая акустика, и коэффициент прохождения в этом случае равен коэффициенту перфорации. При уменьшении волновых размеров отверстий все большую роль начинают играть дифракционные явления, и прохождение звука улучшается. Таким образом, при раздроблении большого отверстия на ряд малых коэффициент прохождения звука должен увеличиваться. При раздроблении же небольшого по сравнению с длиной волны отверстия на ряд еще более малых коэффициент прохождения остается постоянным. Действительно, при малых  $\delta$  волна «не замечает» от-

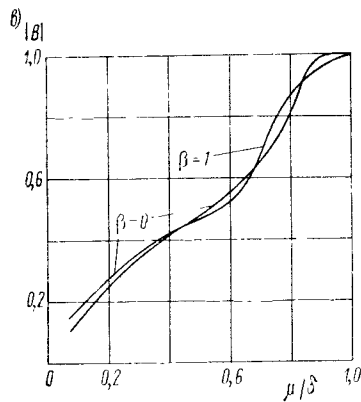
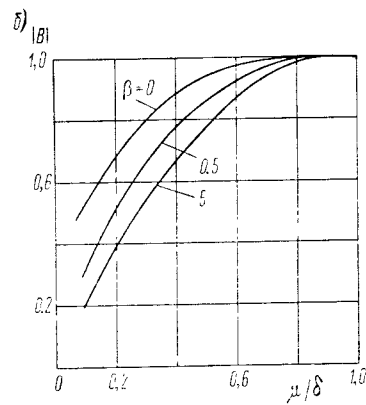
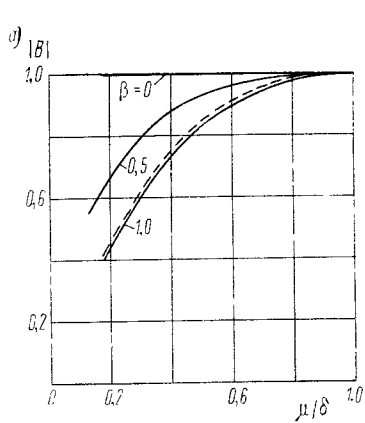


Рис. 33. Зависимость коэффициента прохождения звука через экран с отверстиями от коэффициента перфорации: а — при  $kl = 0,3$ ; б — при  $kl = 2,5$ ; в — при  $kl = 10$ .

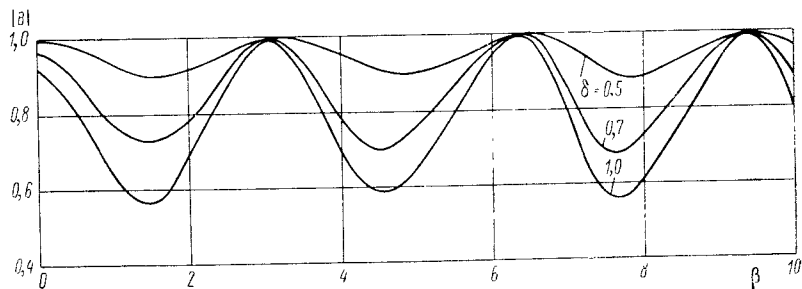


Рис. 34. Зависимость коэффициента прохождения звука от волновой толщины экрана.

дельного отверстия и реагирует лишь на общее изменение коэффициента перфорации. Поэтому при малых отверстиях коэффициент прохождения звука не зависит от их размеров. Провалы в кривой являются следствием увеличения  $Z_{mn}$  при  $\delta$ , кратном  $2\lambda$ .

Существенно отметить также следующее. Как видно из графиков, приведенных на рис. 34, коэффициент прохождения сильно зависит от волновой толщины экрана  $\beta$ . Причем при  $\beta = 0$  и малых  $\delta$  он почти не зависит от коэффициента перфорации и весьма близок к единице.

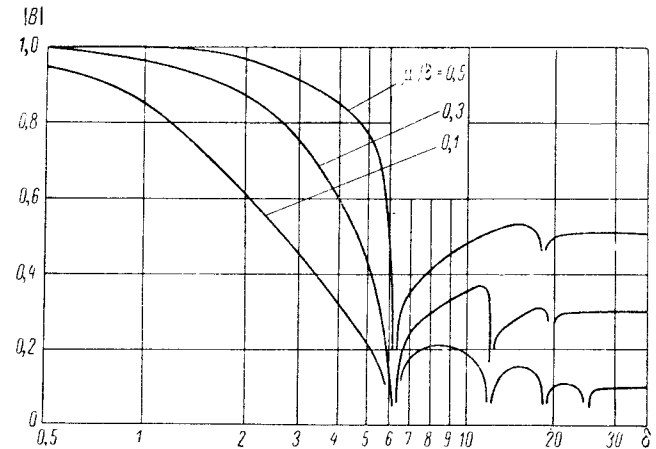


Рис. 35. Зависимость коэффициента прохождения звука от волнового периода решетки при  $\beta = 0$ .

При приближении  $\beta$  к величине, кратной  $\lambda$ , коэффициент прохождения увеличивается при любом отношении  $d/l$ .

Зависимость  $|B|$  от  $\theta$  показана на рис. 36. Все кривые рассчитаны для  $\frac{d}{l} = 0,5$ . При приближении  $\theta$  к  $\theta_r$  (рис. 36, б) коэффициент прохождения резко уменьшается.

При  $h = 0$  можно сравнить расчеты по приведенным выше формулам с результатами работы [56], в которой методом интегральных уравнений получено решение задачи о прохождении электромагнитной волны через плоскую решетку.

Приведенные в работе [56] результаты для  $E$ -поляризации эквивалентны в акустическом случае абсолютно мягкому экрану с граничным условием  $p = 0$ . Осуществим переход по формулам (53) и (54) работы [56] к случаю  $H$ -поляризации, соответствующему абсолютно жесткому экрану ( $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ ).

Для определения коэффициента прохождения звука в этом случае можно воспользоваться графиками статьи [56], если заменить на оси ординат коэффициент отражения коэффициентом прохождения, а на оси абсцисс — коэффициент заполнения  $1 - \frac{d}{l}$  коэффи-

циентом перфорации  $d/l$ . Расчет по формуле (17.21) в частном случае плоской решетки приводит к значениям, совпадающим со значениями, определяемыми графиками статьи [56].

Ряд численных результатов для плоского и диффузного звуковых полей приведен также в работе [113].

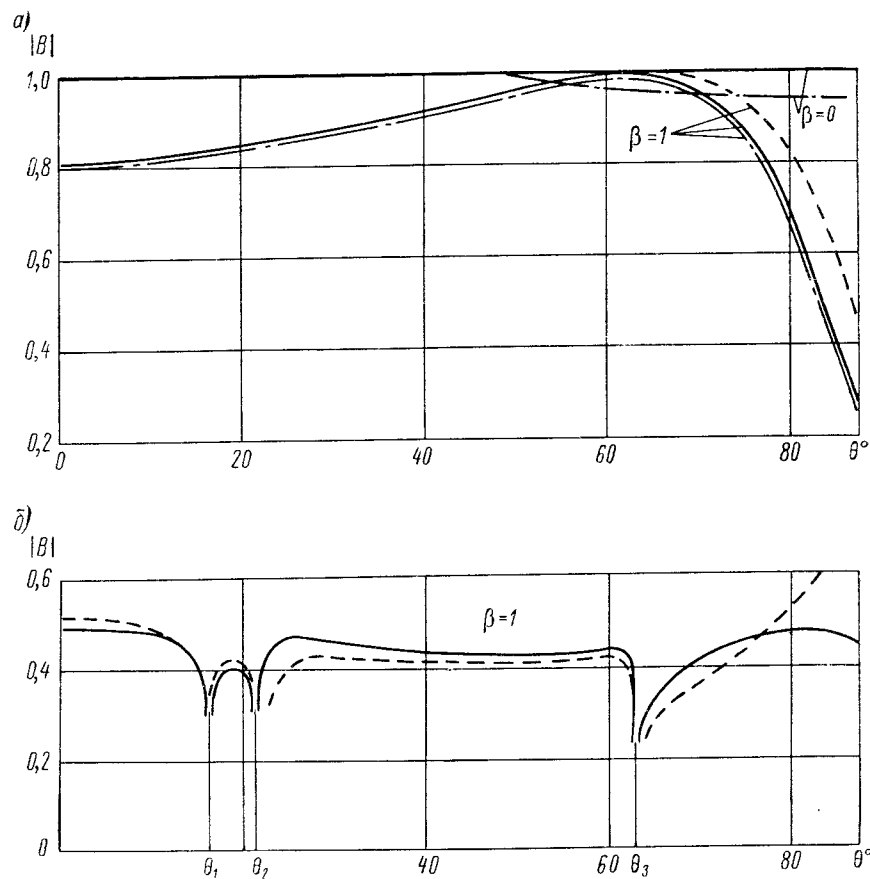


Рис. 36. Зависимость коэффициента прохождения звука от угла падения  $\theta$ : а — при  $\delta = 1$ ; б — при  $\delta = 10$ .

— точный расчет; — — — нулевое приближение; - · - · - расчет по формуле (17.22).

Рассмотренный выше метод решения является довольно общим. Действительно, вид уравнений (17.14) и (17.15) не зависит от формы отверстий и их расположения, причем вся информация о геометрии отверстий заключена в выражениях для импедансов излучения и взаимодействия  $Z_{mn}$ . Поэтому таким способом можно решать задачи о дифракции звука на любом числе отверстий в экране конечной толщины при произвольной форме и произвольном расположении отвер-

стий. Необходимо только, чтобы было известно решение уравнения Гельмгольца в замкнутой области, ограниченной контуром отверстия, с заданными граничными условиями на контуре. Для областей, в которых переменные в уравнении Гельмгольца разделяются (прямоугольник, круг и некоторые другие), эти решения хорошо изучены.

В нашей задаче предполагалось, что условия на границе являются граничными условиями Неймана. Не представляет труда видоизменить решение для граничных условий Дирихле.

Можно также с некоторыми изменениями найти решение и более сложных практических задач, предположив, например, что с одной или с двух сторон экрана щели закрыты пластинами, которые могут колебаться под действием падающей волны.

В работе [110] найден коэффициент прохождения звука сквозь абсолютно жесткую пластину произвольной волновой толщины с круглыми или прямоугольными отверстиями. Общее решение также сведено к бесконечной системе алгебраических уравнений, и, кроме того, для тех случаев, когда отверстия образуют правильную решетку, а размеры отверстий меньше длины звуковой волны, получены гораздо более простые выражения, пригодные для расчетов без помощи ЭВМ.

## ГЛАВА 5

### ■ ПРИМЕНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ДЛЯ РАСЧЕТА ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ

#### § 18. Представление звуковых полей в цилиндрических координатах

**Запись звуковых полей в цилиндрической системе координат.** Большое число различных практических задач может быть решено путем разложения аналитических представлений звуковых полей в ряды по цилиндрическим функциям. К таким задачам относятся: вычисление потенциалов звукового поля, возникающего при излучении звука цилиндрическими поверхностями; определение полей, рассеянных цилиндрами и системами цилиндров, а также звуковых полей в цилиндрических волноводах.

Методы решения уравнения Гельмгольца (1.10) в цилиндрических координатах приведены в книгах [71], [79], [83]. Общую теорию цилиндрических функций можно найти в специальных руководствах [12], [39]. Ниже приведена сводка результатов, необходимых для дальнейшего изложения.

Уравнение Гельмгольца в цилиндрических координатах является уравнением с переменными коэффициентами. Разделяя переменные  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ , представим потенциал  $\Phi(r, \varphi, z)$  в виде произведения:  $\Phi(r, \varphi, z) = R(r) \Psi(\varphi) Z(z)$ . В результате получим

$$\left[ \frac{1}{R(r)} \cdot \frac{\partial^2 R(r)}{\partial z^2} + \frac{1}{rR(r)} \cdot \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{1}{\Psi(\varphi) r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right] + \left[ \frac{1}{Z(z)} \cdot \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k^2 \right] = 0. \quad (18.1)$$

Выражение в первых скобках зависит только от  $r$  и  $\varphi$ , а во вторых — только от  $z$ , поэтому каждое из них может являться только постоянной величиной. Обозначив первое выражение через  $-\gamma^2$ , а второе через  $\gamma^2$ , получим

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k'^2 Z(z) = 0, \quad (18.2)$$

где  $k'^2 = k^2 - \gamma^2$ .

Общее решение уравнения (18.2) имеет вид

$$Z(z) = A e^{ik'z} + B e^{-ik'z}. \quad (18.3)$$

Выражение (18.3) определяет две плоские волны, одна из которых распространяется вдоль положительного направления оси  $z$ , другая — в обратном направлении. При  $k > \gamma$  эти волны являются бегущими, при  $k < \gamma$  они затухают с удалением от источника.

Уравнение (18.1) можно переписать в виде

$$\left[ \frac{r^2}{R(r)} \cdot \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)} \cdot \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \gamma^2 r^2 \right] + \frac{1}{\Psi(\varphi)} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (18.4)$$

Выражение в скобках зависит только от переменной  $r$ , последнее слагаемое — только от  $\varphi$ . Поэтому каждое из них является постоянной величиной. Обозначим выражение в скобках через  $m^2$  а последнее слагаемое через  $-m^2$ . Тогда уравнение (18.4) можно записать в виде двух уравнений:

$$\frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + m^2 \Psi(\varphi) = 0; \quad (18.5)$$

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left( \gamma^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0. \quad (18.6)$$

Решение уравнения (18.5) можно записать либо в тригонометрической форме

$$\Psi(\varphi) = C \cos m\varphi + D \sin m\varphi, \quad (18.7a)$$

либо в экспоненциальной форме

$$\Psi(\varphi) = C' e^{im\varphi} + D' e^{-im\varphi}, \quad (18.7b)$$

где  $C'$  и  $D'$  выражаются через  $C$  и  $D$ . Если поле периодически по углу  $\varphi$ , то требование, заключающееся в однозначности при обходе вокруг начала координат, приводит к заключению, что  $m$  должно быть целым числом.

Общее решение уравнения (18.6) записывается в виде

$$R(r) = E J_m(\gamma r) + F N_m(\gamma r), \quad (18.8)$$

где  $J_m$  и  $N_m$  — функции Бесселя и Неймана.

Любое звуковое поле в цилиндрических координатах можно представить как суперпозицию решений типа

$$\Phi_m(r, \varphi, z) = (A e^{ik'z} + B e^{-ik'z}) (C \cos m\varphi + D \sin m\varphi) \times \times [E J_m(\gamma r) + F N_m(\gamma r)].$$

Рассмотрим частные случаи:

1. Предположим, что поле не зависит от координаты  $z$  («плоское» звуковое поле). Тогда  $k' = 0$ ,  $\gamma = k$ . В этом случае общее решение можно записать в следующей форме:

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi) [E_m J_m(kr) + F_m N_m(kr)], \quad (18.9)$$

где  $C_m, D_m, E_m, F_m$  — произвольные коэффициенты.

2. Если поле симметрично относительно направления  $\varphi = 0$ , то в последнем выражении следует положить  $D_m = 0$ .

3. Воспользуемся выражением (18.7б). Тогда формулу (18.9) можно переписать в виде ряда, суммирование в котором производится в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [E'_m J_m(kr) + F'_m N_m(kr)] e^{im\varphi}. \quad (18.10)$$

4. Рассмотрим звуковое поле в области, не содержащей объемных источников звука. Во всех точках области потенциал звукового поля должен быть ограниченной величиной. Однако известно, что в точке  $r = 0$  функция  $N_m(kr)$  имеет особенность. Если начало координат лежит в рассматриваемой области, то, чтобы потенциал поля везде был конечен, необходимо положить  $F_m = 0$ .

5. Если известно, что поле должно представлять собой волны, расходящиеся от оси, то следует принять, что соотношение между коэффициентами  $E'_m$  и  $F'_m$  должно иметь вид  $F'_m = i E'_m$ . В этом случае выражение (18.10) примет вид

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E'_m H_m^{(1)}(kr) e^{im\varphi},$$

где  $H_m^{(1)}(kr) = J_m(kr) + iN_m(kr)$  — функция Ханкеля первого рода. При  $kr \gg 1$  имеет место асимптотическое равенство

$$H_m^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (18.11)$$

Поэтому при больших значениях  $kr$  функция  $H_m^{(1)}(kr)$  действительно определяет волну, расходящуюся от оси с амплитудой, убывающей по закону  $1/\sqrt{r}$ .

Аналогичным образом можно определить сходящуюся цилиндрическую волну, если положить  $F_m = -iE_m$ . Тогда решение может быть выражено через функции Ханкеля второго рода  $H_m^{(2)}(kr) = J_m(kr) - iN_m(kr)$ . При  $kr \gg 1$  эти функции допускают представление

$$H_m^{(2)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i\left(kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (18.12)$$

Таким образом, волна  $H_m^{(2)}(kr)$  движется по направлению к оси  $r = 0$ , причем амплитуда ее возрастает по закону  $1/\sqrt{r}$ .

В ряде книг по акустике ([71], [79]) зависимость звуковых полей выбрана в виде  $e^{+i\omega t}$ . При такой зависимости функция  $H_m^{(2)}(kr)$  будет определять расходящуюся цилиндрическую волну, а функция  $H_m^{(1)}(kr)$  — сходящуюся.

Функции  $H_m^{(1)}(kr)$  и  $H_m^{(2)}(kr)$  могут быть взяты как два линейно независимых решения уравнения (18.6). Поэтому общее решение можно записать в виде суммы сходящихся и расходящихся цилиндрических волн:

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi) [E_m H_m^{(1)}(kr) + F_m H_m^{(2)}(kr)].$$

6. Если звуковое поле не зависит от угла  $\varphi$  (радиальная симметрия), то в рядах следует оставить член с номером  $m = 0$ . Тогда

$$\Phi(r) = EJ_0(kr) + FN_0(kr).$$

Радиально симметричная расходящаяся цилиндрическая волна определяется нулевой функцией Ханкеля

$$\Phi(r) = E'H_0^{(1)}(kr). \quad (18.13)$$

Последнюю формулу легко получить из следующих соображений.

Предположим, что имеется бесконечная нить, совпадающая с линией  $r = 0$ , на которой расположены синфазно пульсирующие источники. Вычислим поле, создаваемое этими источниками, на расстоянии  $r$  от линии. Элементарный источник, расположенный на оси

в точке с координатой  $z$ , создает сферическую волну  $\frac{e^{ik\rho}}{\rho}$ , где  $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$ . Полное поле можно записать в виде интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} dz.$$

Этот интеграл и определяет функцию Ханкеля ([63], т. II, стр. 304). Он равен  $\pi i H_0^{(1)}(kr)$ . Таким образом, бесконечный набор пульсирующих источников действительно создает расходящуюся цилиндрическую волну типа (18.13).

7. Могут существовать звуковые поля, для которых требование однозначности при обходе вокруг оси является излишним. Для примера рассмотрим поле в секторе углов  $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ , ограниченном абсолютно жесткими плоскостями, расположенными вдоль поверхностей  $\varphi = \pm\alpha$ . Если поле симметрично относительно линии  $\varphi = 0$ , то угловая зависимость может быть взята в форме  $\cos m\varphi$ , где число  $m$  следует определить из граничных условий. На плоскостях  $\varphi = \pm\alpha$  радиальная составляющая колебательной скорости должна быть равна нулю, т. е.  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pm\alpha} = 0$ , или  $\sin m\alpha = 0$ . Следовательно,  $m\alpha = \pi n$ , где  $n$  — целое число. Таким образом, числа  $m$  могут принимать значения  $m = \frac{\pi n}{\alpha}$ . В результате получаем, что звуковое поле внутри сектора можно записать в виде ряда с использованием цилиндрических функций дробного индекса:

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [E_n J_{\frac{\pi n}{\alpha}}(kr) + F_n N_{\frac{\pi n}{\alpha}}(kr)] \cos \frac{\pi n \varphi}{\alpha}.$$

**Разложение плоской волны по цилиндрическим функциям.** При решении задач, связанных с определением звуковых полей, рассеянных на цилиндрах, необходимо использовать разложение плоской звуковой волны

$$e^{ikx} = e^{ikr \cos \varphi} \quad (18.14)$$

в ряд по цилиндрическим функциям. Разложим выражение (18.14) в ряд Фурье:

$$e^{ikr \cos \varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \cos n\varphi,$$

где  $f_n(r)$  — неизвестные функции. Умножим обе части последнего равенства на  $\cos m\varphi$ . Проинтегрировав по промежутку  $(0, 2\pi)$ , в силу ортогональности тригонометрических функций находим

$$f_m(r) = \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \varphi} \cos m\varphi d\varphi.$$

Здесь  $\varepsilon_m = 1$  при  $m = 0$ ,  $\varepsilon_m = 2$  при  $m > 0$ .

В соответствии с [76] интеграл в правой части равен  $2\pi i^m J_m(kr)$ . В результате получаем искомое разложение

$$e^{ikx} = e^{ikr \cos \varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kr) \cos n\varphi. \quad (18.15)$$

Заметим, что в выражение (18.15) входят лишь функции Бесселя. Функции Неймана, имеющие особенности при  $r = 0$ , не участвуют в разложении. Действительно, в данном случае рассматриваемой областью является вся плоскость и начало координат входит в эту область. В точке  $r = 0$  поле должно быть конечной величиной. Поэтому естественно, что разложение (18.15) составлено из функций, конечных во всех точках плоскости.

**Излучение звука цилиндром.** Вычислим звуковое поле, излучаемое цилиндром радиуса  $a$  с произвольным распределением колебательной скорости по поверхности цилиндра  $v = v(\varphi)$ . Звуковое поле можно представить в форме ряда с неизвестными коэффициентами  $A_n$  и  $B_n$ :

$$p(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(kr) [A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi]. \quad (18.16)$$

На поверхности цилиндра должно выполняться граничное условие

$$v(\varphi) = \frac{1}{i\omega\rho} \left. \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a}.$$

Используя разложение (18.16), получаем

$$v(\varphi) = \frac{1}{i\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)'}(ka) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Штрих означает производную по аргументу  $ka$ .

Для того чтобы найти коэффициенты, разложим левую часть в ряд Фурье. Умножим обе части последнего выражения на  $\cos n\varphi$ ,  $\sin n\varphi$  и проинтегрируем по окружности. В результате находим

$$A_n = \frac{i\rho c a_n}{H_n^{(1)'}(ka)}; \quad B_n = \frac{i\rho c b_n}{H_n^{(1)'}(ka)}, \quad (18.17a)$$

где  $a_n$  и  $b_n$  — коэффициенты ряда Фурье для функции  $v(\varphi)$

$$v(\varphi) = \sum_{a=0}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

определяемые формулами

$$a_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\varphi) \cos n\varphi d\varphi; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \quad (18.17b)$$

Таким образом, поле, излученное цилиндром с произвольным распределением колебательной скорости, можно записать в виде ряда

$$p(r, \varphi) = i\rho c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(ka)} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \quad (18.18)$$

Рассмотрим наиболее важные частные случаи.

1. *Пульсирующий цилиндр.* Если распределение колебательной скорости не зависит от угла  $\varphi$ , то в формуле (18.18) остается лишь нулевой член, причем  $v = a_0$ . Поэтому

$$p_0(r) = i\rho c v \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)'}(ka)} = -i\rho c v \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_1^{(1)}(ka)}. \quad (18.19)$$

На больших расстояниях от оси цилиндра ( $kr \gg 1$ ), воспользовавшись асимптотическими представлениями функций Ханкеля, получаем

$$p_0(r) = -\frac{i\rho c v}{H_1^{(1)}(ka)} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr - i\frac{\pi}{4}}. \quad (18.20)$$

Предположим теперь, что радиус цилиндра мал по сравнению с длиной звуковой волны ( $ka \ll 1$ ). Тогда можно использовать асимптотические представления цилиндрических функций при малых значениях аргумента

$$H_1^{(1)}(ka) = J_1(ka) + iN_1(ka) \approx \frac{ka}{2} - \frac{2i}{\pi ka} \approx -\frac{2i}{\pi ka}.$$

Из формулы (18.20) находим

$$p_0(r) \approx \frac{\pi\rho c v k a}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr - i\frac{\pi}{4}}. \quad (18.21a)$$

Звуковое давление в волне, излучаемой цилиндром с малым волновым размером поперечного сечения, пропорционально величине  $k^{1/2}a$ . Таким образом, малый по сравнению с длиной волны цилиндр является неэффективным излучателем. Объемную колебательную скорость цилиндра, рассчитанную на единицу его длины в направлении образующей, можно записать как  $Q = 2\pi a v$ . Тогда выражение (18.21a) можно представить в виде

$$p_0(r) = \frac{\rho c k Q}{2\sqrt{2\pi kr}} e^{ikr - i\frac{\pi}{4}}. \quad (18.21b)$$

Для того чтобы найти сопротивление излучения пульсирующего цилиндра, можно воспользоваться формулой (18.19). Составив отношение звукового давления на поверхности цилиндра к колебательной скорости, можно записать

$$Z_s = \frac{p_0(a)}{v} = -i\rho c \frac{H_0^{(1)}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)}. \quad (18.22)$$

Разделим вещественную и мнимую части последнего выражения и воспользуемся равенством

$$J_n(x) N_{n+1}(x) - J_{n+1}(x) N_n(x) = -\frac{2}{\pi x}. \quad (18.23)$$

В результате найдем активную и реактивную составляющие сопротивления излучения  $Z_s = r_s + ix_s$ :

$$r_s = \rho c \frac{2}{\pi ka [J_1^2(ka) + N_1^2(ka)]};$$

$$x_s = -\rho c \frac{J_0(ka) J_1(ka) + N_0(ka) N_1(ka)}{J_1^2(ka) + N_1^2(ka)}. \quad (18.24)$$

При малых значениях  $ka$  отсюда можно получить

$$r_s = \rho c \frac{\pi ka}{2}; \quad x_s = -\rho c ka \ln \frac{2}{\gamma ka}; \quad \gamma = 1,781. \quad (18.25)$$

Из последних формул следует, что при  $ka \ll 1$  выполняется неравенство  $|x_s| > r_s$ . Таким образом, реактивная составляющая сопротивления излучения для малых цилиндров превышает активную составляющую.

При больших значениях волнового размера  $ka \gg 1$  можно воспользоваться следующими асимптотическими представлениями цилиндрических функций:

$$J_n(ka) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \cos\left(ka - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$N_n(ka) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \sin\left(ka - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (18.26)$$

По формулам (18.24) найдем  $r_s \approx \rho c$ ,  $x_s \approx 0$ . Это означает, что при  $ka \gg 1$  сопротивление излучения цилиндрической поверхности, рассчитанное на единицу площади, совпадает с сопротивлением излучения плоского поршня больших волновых размеров.

Простую оценку  $r_s$  можно получить, используя неравенство (см. [76], стр. 983)

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - v^2}} > \frac{\pi}{2} [J_v^2(x) + N_v^2(x)] \geq \frac{1}{x} \quad \left(x > v \geq \frac{1}{2}\right).$$

Из выражения (18.24) находим, что при  $ka > 1$  имеет место соотношение

$$1 \geq \frac{r_s}{\rho c} > \sqrt{1 - \frac{1}{(ka)^2}}.$$

2. *Осциллирующий цилиндр.* Предположим, что цилиндр колеблется около положения равновесия как твердое тело. Тогда нормаль-

ная составляющая колебательной скорости на поверхности цилиндра в точке с координатой  $\varphi$  будет определяться выражением  $v = v_1 \cos \varphi$  ( $v_1$  — скорость цилиндра при  $\varphi = 0$ ). Звуковое давление, излучаемое осциллирующим цилиндром, можно определить по формуле (18.18), оставив член с номером  $n = 1$ :

$$p_1 = \frac{i\rho c v_1 \cos \varphi}{H_1^{(1)'}(ka)} H_1^{(1)}(kr).$$

Диаграмма направленности осциллирующего цилиндра соответствует направленности диполя  $R(\varphi) = \cos \varphi$ .

В дальней зоне, т. е. при  $kr \gg 1$ , из последней формулы получаем

$$p_1(r, \varphi) = \frac{\rho c v_1 \cos \varphi}{H_1^{(1)'}(ka)} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i kr - i \frac{\pi}{4}}.$$

При малых значениях  $ka$  производную функции Ханкеля можно записать в виде

$$H_1^{(1)'}(ka) = \frac{H_0^{(1)}(ka) - H_2^{(1)}(ka)}{2} \approx -\frac{H_2^{(1)}(ka)}{2} \approx \frac{i \cdot 2}{\pi (ka)^2}.$$

Таким образом,

$$p_1(r, \varphi) \approx \frac{-i\rho c \pi (ka)^2 v_1 \cos \varphi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i kr - i \frac{\pi}{4}}. \quad (18.27)$$

Сравнение выражений (18.21а) и (18.27) показывает, что осциллирующий цилиндр малых волновых размеров является еще менее эффективным излучателем звука, чем пульсирующий цилиндр.

3. *Линейный источник на цилиндре.* Пусть на поверхности абсолютно жесткого цилиндра находится линейный источник, расположенный вдоль образующей цилиндра  $\varphi = \varphi_0$ , с колебательной скоростью

$$v(\varphi) = \frac{Q(\varphi_0)}{a} \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (18.28)$$

Здесь  $Q(\varphi_0)$  — объемная скорость источника, рассчитанная на единицу его длины.

Разложив  $v(\varphi)$  в ряд Фурье по формулам (18.17), получаем

$$a_n = \frac{Q(\varphi_0) \varepsilon_n}{2\pi a} \cos n\varphi_0; \quad b_n = \frac{Q(\varphi_0)}{\pi a} \sin n\varphi_0.$$

Звуковое давление  $p(r, \varphi)$  определится выражением (18.18):

$$p(r, \varphi) = \frac{i\rho c Q(\varphi_0)}{2\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(ka)} \cos n(\varphi - \varphi_0). \quad (18.29a)$$

В дальнем поле при  $kr \gg 1$  из последнего выражения находим

$$p(r, \varphi) = \frac{i\rho c Q(\varphi_0)}{2\pi a} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr-i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n (-i)^n \cos n(\varphi - \varphi_0)}{H_n^{(1)'}(ka)}. \quad (18.29б)$$

Заметим, что выражение (18.29а) с точностью до постоянного множителя фактически является функцией Грина для решения двумерных задач излучения звука цилиндром. Как указано в § 12, функция Грина определяет потенциал поля, излучаемого источником с объемной скоростью  $Q = 4\pi$ . Таким образом, функцию Грина можно записать в виде

$$G(r, a, \varphi, \varphi_0) = -\frac{2}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(ka)} \cos n(\varphi - \varphi_0) \quad (18.30)$$

Для того чтобы вычислить звуковое поле при произвольном распределении колебательной скорости, можно воспользоваться формулой (12.13). Поскольку  $n_0$  является внутренней нормалью по отношению к цилиндру, то  $\frac{\partial \Phi}{\partial n_0} = v$ . Следовательно,

$$p(r, \varphi) = -i\omega\rho \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} v(\varphi_0) G(r, a, \varphi, \varphi_0) d\varphi_0.$$

Подставив в последнюю формулу функцию Грина (18.30), вновь получаем выражение (18.18).

Для того чтобы вычислить диаграмму направленности источника с произвольным распределением колебательной скорости, в формуле (18.18) следует положить  $kr \gg 1$ . Воспользовавшись приближенным выражением (18.11), находим диаграмму направленности, пронормированную к значению звукового давления, излучаемого в направлении  $\varphi_0$ :

$$R(\varphi) = \left| \frac{p(\varphi)}{p(\varphi_0)} \right| = \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi}{H_n^{(1)'}(ka)}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{a_n \cos n\varphi_0 + b_n \sin n\varphi_0}{H_n^{(1)'}(ka)}} \right|.$$

**Дифракция плоской звуковой волны на идеальных и импедантных цилиндрах при наклонном падении звука.** Пусть на цилиндр, наклонно к его оси, падает плоская звуковая волна (рис. 37)

$$p_0 = e^{ikr \cos \alpha \cos \varphi + ikz \sin \alpha}. \quad (18.31)$$

Вектор, определяющий направление падающей волны, лежит в плоскости  $\varphi = 0$ . Требуется определить звуковое поле, рассеянное цилиндром, в точке  $M(r, \varphi, z)$ .

Предположим сначала, что поверхность цилиндра является абсолютно жесткой и на ней выполняется граничное условие  $\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$ . В соответствии с принципом Гюйгенса можно считать, что возмущение звукового поля цилиндром есть результат действия некоторой системы фиктивных источников, расположенных на поверхности. Если цилиндр является абсолютно жестким, то эти источники должны дополнять поле падающей волны до такой величины, чтобы производная  $\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=a}$  обращалась в нуль. В соответствии с этим полное звуковое поле  $p$  можно представить в виде суммы падающего поля и фиктивного рассеянного поля:

$$p = p_0 + p_s.$$

Воспользовавшись формулой (18.15), разложим плоскую волну (18.31) в ряд по цилиндрическим функциям:

$$p_0 = e^{ikz \sin \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kr \cos \alpha) \cos n\varphi. \quad (18.32)$$

Рассеянное поле  $p_s$  запишем в аналогичной форме:

$$p_s = e^{ikz \sin \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr \cos \alpha) \cos n\varphi. \quad (18.33)$$

Неизвестные коэффициенты  $A_n$  найдем из граничного условия. Тогда

$$A_n = -\varepsilon_n i^n \frac{J_n'(ka \cos \alpha)}{H_n^{(1)'}(ka \cos \alpha)}. \quad (18.34)$$

Формулы (18.33) и (18.34) и решают поставленную задачу.

Для абсолютно мягкого цилиндра из граничного условия  $p \Big|_{r=a} = 0$  неизвестные коэффициенты можно определить следующим образом:

$$A_n = -\varepsilon_n i^n \frac{J_n(ka \cos \alpha)}{H_n^{(1)}(ka \cos \alpha)}. \quad (18.35)$$

Если поверхность цилиндра является импедантной, то на ней выполняется граничное условие

$$\frac{p}{v_n} \Big|_{r=a} = -Z \quad (18.36а)$$

(причины, приводящие к появлению отрицательного знака в этом выражении, обсуждались в § 1). Перепишем граничное условие в виде

$$\left( p + \frac{Z}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (18.36б)$$

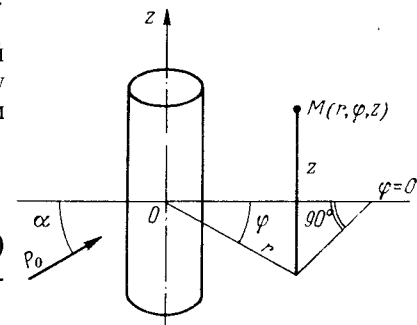


Рис. 37. К дифракции плоской звуковой волны на цилиндре при наклонном падении.



и подставив в него разложения (18.32), (18.33), найдем коэффициенты  $A_n$  для импедансного цилиндра:

$$A_n = -\varepsilon_n i^n \frac{J_n(ka \cos \alpha) + \frac{Z \cos \alpha}{i\rho c} J_n'(ka \cos \alpha)}{H_n^{(1)}(ka \cos \alpha) + \frac{Z \cos \alpha}{i\rho c} H_n^{(1)'}(ka \cos \alpha)}. \quad (18.37)$$

При  $Z = 0$  из этого выражения следует формула (18.35), а при  $Z \gg \rho c$  — формула (18.34). Заметим, что при  $Z = \rho c$  рассеянное поле не обращается в нуль, как могло показаться на первый взгляд из физических соображений. Известно, что бесконечная плоскость, обладающая импедансом  $Z = \rho c$ , полностью поглощает звук при нормальном падении волны. Однако изогнутая поверхность, выполненная даже из идеально поглощающего звук материала, все-таки будет рассеивать звук, хотя амплитуда рассеянной волны в направлении, обратном направлению падения звука, может быть при этом существенно уменьшена. В частности, очевидно, что для акустически непрозрачного цилиндра больших волновых размеров при любом импедансе поверхности должна существовать акустическая тень. Таким образом, путем подбора поглощающей облицовки невозможно полностью устранить рассеянное поле. Графики, иллюстрирующие это явление, приведены в § 19.

Отметим некоторые частные случаи. Если размеры цилиндра малы по сравнению с длиной звуковой волны ( $kr \ll 1$ ), то для больших расстояний ( $kr \gg 1$ ) из выражений (18.33), (18.34) с учетом асимптотических представлений цилиндрических функций получаем

$$p_s = e^{ikr \cos \alpha + ikz \sin \alpha - i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi kr \cos \alpha}} \Phi_s(\alpha, \varphi), \quad (18.38)$$

где

$$\Phi_s(\alpha, \varphi) = \frac{-i\pi (ka \cos \alpha)^2}{4} (1 - 2 \cos \varphi). \quad (18.39)$$

При  $\alpha = 0$  это выражение называется формулой Рэлея [77].

Заметим, что при подстановке  $ka \ll 1$  в формулу (18.34) коэффициенты  $A_0$  и  $A_1$  будут иметь одинаковый порядок величины. Таким образом, дипольное излучение в рассеянной волне с диаграммой вида  $\cos \varphi$  для абсолютно жесткого цилиндра имеет значительную величину. Амплитуда рассеянной волны пропорциональна величине  $\pi a^2$ , т. е. площади поперечного сечения цилиндра.

Для абсолютно мягкого цилиндра малых волновых размеров дипольное рассеяние не играет значительной роли. При  $ka \ll 1$  в этом случае выражения для коэффициентов приобретают вид

$$A_0 \approx \frac{1}{\frac{i2}{\pi} (\ln ka - 0,116)}; \quad A_1 \approx \frac{i\pi (ka)^2}{4}.$$

Таким образом,  $A_0 \gg A_1, A_2, \dots$  и диаграмма рассеяния имеет форму круга.

В случае импедансного цилиндра получение асимптотических формул при  $ka \ll 1$  лишено практического смысла, поскольку само понятие локального импеданса справедливо лишь для поверхностей, размеры которых велики (или хотя бы одного порядка) по сравнению с длиной звуковой волны.

При увеличении волнового размера  $ka$  диаграмма направленности вытягивается вперед в направлении  $\varphi = 0$  и появляется длинный и узкий лепесток, который называется тенеобразующим (см. § 24, рис. 56). Фаза рассеянной волны в направлениях, близких к лучу  $\varphi = 0$ , оказывается противоположной фазе падающей волны. Поэтому амплитуда полного поля за цилиндром резко уменьшается и возникает зона тени. Ширину тенеобразующего лепестка можно получить из следующих простых соображений. При больших волновых размерах цилиндра можно воспользоваться приближением Кирхгофа (§ 8). Будем считать, что распределение звукового поля за цилиндром в плоскости  $AA'$  (см. § 24, рис. 58) представляет собой ступенчатую функцию  $I$ , причем вне зоны геометрической тени звуковое давление равно давлению в падающей звуковой волне. Это распределение можно представить как результат суперпозиции падающей плоской волны  $2$  и отрицательного поля на участке  $BB'$ . Излучение поршня  $BB'$  и дает тенеобразующий лепесток. Полуширина этого лепестка  $\varphi_0$  (т. е. угловое расстояние от максимума до первого нуля) будет определяться выражением  $\sin \varphi_0 = \lambda/d$  ( $d = 2a$ ). Заметим, что это положение имеет место для цилиндрического тела с поперечным сечением любой формы, если размеры сечения велики по сравнению с длиной звуковой волны.

Кроме тенеобразующего лепестка при  $ka \gg 1$  возникает также ореол диаграммы рассеяния, являющийся следствием прямого отражения волны от цилиндра по законам геометрической оптики. Амплитуда этого ореола может быть вычислена, например, методом стационарной фазы. В результате находим (см. § 32), что в освещенной зоне амплитуда диаграммы оказывается равной

$$p_s(\varphi) \approx \sqrt{\frac{a}{2r} \sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (18.40a)$$

В направлении, обратном направлению падения ( $\varphi = \pi$ ), амплитуда диаграммы рассеяния будет определяться формулой

$$p_s(\pi) \approx \sqrt{\frac{a}{2r}}. \quad (18.40б)$$

Сравним это выражение с формулой (10.12), определяющей звуковое поле в локационном направлении для сферической волны, падающей на цилиндр. На поверхности цилиндра в точке, для которой расстояние от источника до цилиндра минимально, амплитуда потенциала в падающей волне определяется выражением  $|\Phi_0| = \frac{Q}{4\pi r_0}$ . Таким образом, при  $R_2 = a$  относительная величина локационного

**§ 19. Дифракция цилиндрических звуковых волн на идеальных и импедансных цилиндрах**

**Теорема сложения для цилиндрических функций.**

В дальнейшем нам понадобится теорема сложения для цилиндрических функций, позволяющая осуществить переход от системы цилиндрических координат с центром в точке  $O_1$  (рис. 38) к системе координат с центром в точке  $O_2$ . Вывод теоремы сложения дан в книгах [12], [39]. Здесь мы приведем лишь конечные результаты.

Пусть  $\rho$ ,  $R$  и  $b$  представляют собой стороны некоторого треугольника, так что  $R = \sqrt{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \varphi'}$ . Если  $\rho < b$ , то имеет место соотношение

$$e^{in\psi} Z_n(kR) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k\rho) Z_{m+n}(kb) e^{im\varphi'} \quad (19.1)$$

Здесь  $Z_n$  — любая цилиндрическая функция. Если  $Z_n$  является функцией Бесселя и при этом  $n$  — целое число, то формула (19.1) справедлива при любых соотношениях  $\rho$  и  $b$ .

При  $\rho > b$  разложение (19.1) расходится. В этом случае оно должно быть заменено соотношением

$$e^{in\psi} Z_n(kR) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_m(k\rho) J_{m+n}(kb) e^{im\varphi'} \quad (19.2)$$

Это выражение остается конечным при любых  $b < \rho$  (включая точку  $b = 0$ ).

**Дифракция произвольной цилиндрической волны на абсолютно жестком цилиндре.** Предположим, что линия  $O_1$ , перпендикулярная плоскости чертежа (см. рис. 38), является осью произвольной цилиндрической волны

$$p_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kR) e^{in\psi} \quad (19.3)$$

Эта волна рассеивается цилиндром радиуса  $a$  с осью, проходящей через точку  $O_2$ . Необходимо вычислить рассеянное поле. Решение такой задачи может быть выполнено при помощи теоремы сложения.

Для определенности положим, что цилиндр является абсолютно жестким. В этом случае должно иметь место граничное условие

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = 0, \quad (19.4)$$

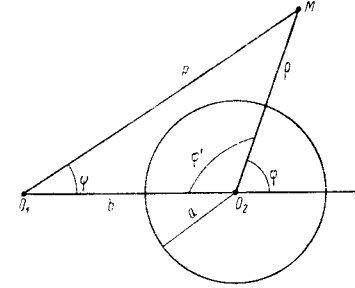


Рис. 38. Расположение системы координат.

отражения будет равна  $\left| \frac{\Phi}{\Phi_0} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{r_0}}$ . Это выражение отличается от формулы (18.40б) лишь множителем  $1/\sqrt{2}$ . Указанное различие обусловлено разницей типов волн, падающих на цилиндр. В § 10 предполагалось, что волна, падающая на цилиндр, является сферической. Поэтому по оси цилиндра укладывалось много зон Френеля, и действие нечетных зон частично компенсировало действие основной нулевой зоны. В рассматриваемом случае на цилиндр падает плоская волна, поэтому волны, отраженные от различных участков вдоль оси цилиндра, складываются синфазно. В результате при рассеянии плоской волны амплитуда отраженного поля оказывается несколько большей, чем амплитуда поля при рассеянии сферической волны.

Если цилиндр является конечным по высоте, то при условии  $kh \gg 1$  ( $h$  — высота цилиндра) переход от формул для бесконечного цилиндра может быть выполнен путем применения множителя перехода, рассмотренного в § 21.

При практических расчетах бывает необходимо знать значения диаграммы рассеяния при  $\alpha = 0$  в направлениях  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi$ . В приложении 1 приведены значения этих величин для абсолютно жесткого и абсолютно мягкого цилиндра. Расчетная формула имеет вид

$$p_s = \sqrt{\frac{\rho}{\pi k r}} e^{ikr - i\frac{\pi}{4}} \Phi(\varphi), \quad (18.41)$$

причем значения диаграммы рассеяния в направлениях  $\varphi = 0$ ;  $\pi$  определяются следующими формулами:

для абсолютно жесткого цилиндра

$$\Phi_1(0) = - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)}; \quad (18.42a)$$

$$\Phi_1(\pi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)}; \quad (18.42б)$$

для абсолютно мягкого цилиндра

$$\Phi_2(0) = - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}; \quad (18.43a)$$

$$\Phi_2(\pi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}. \quad (18.43б)$$

где  $\rho = \rho_0 + \rho_s$  — полное поле. В общем виде волну, рассеянную цилиндром, можно записать в виде

$$\rho_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(k\rho) e^{in\varphi'}. \quad (19.5)$$

Из выражения (19.5) видно, что, для того чтобы удовлетворить граничному условию, необходимо выразить расходящиеся волны (19.3), (19.5) в одной системе координат. Переход от некоторой цилиндрической системы координат к другой можно осуществить, воспользовавшись теоремой сложения для цилиндрических функций. Заметим, что на поверхности цилиндра при  $\rho = a$  всегда выполняется неравенство  $\rho < b$ . Поэтому следует использовать теорему сложения в форме (19.1). В результате получаем

$$\rho_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k\rho) H_{m+n}^{(1)}(kb) e^{im\varphi'}.$$

Заменим в последнем выражении индекс  $m$  на  $n$ , а индекс  $n$  на  $m$ . После этого из граничного условия (19.4) находим неизвестные коэффициенты  $B_n$ :

$$B_n = - \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_{m+n}^{(1)}(kb).$$

Таким образом, рассеянное поле определится выражением

$$\rho_s = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(k\rho) e^{in\varphi'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_{m+n}^{(1)}(kb). \quad (19.6)$$

В частном случае, если  $\rho_0$  представляет собой расходящуюся цилиндрическую волну  $A_0 H_0^{(1)}(kR)$ , решение имеет вид

$$\rho_s = - A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(kb) H_n^{(1)}(k\rho) \cos n\varphi; \quad \varphi = \pi - \varphi'. \quad (19.7)$$

Заметим, что в формулах (19.6), (19.7) имеет место симметрия относительно расстояний  $\rho$  и  $b$ , что согласуется с принципом взаимности.

Характер дифракции цилиндрической волны качественно отличается от характера дифракции плоской волны. В случае дифракции плоской волны амплитуда звукового давления в падающей волне не изменяется в направлении  $\varphi = 0$ , а амплитуда рассеянной волны убывает по цилиндрическому закону. Поэтому акустическая тень за препятствием, являющаяся результатом интерференции падающей

и рассеянной волн, на некотором расстоянии от препятствия исчезает. Начиная с этого расстояния звуковое поле является практически неискаженным. Иное положение имеет место при дифракции цилиндрической волны. В этом случае и падающая, и рассеянная волны являются цилиндрическими и на больших расстояниях от системы излучатель—препятствие убывают приблизительно по одному и тому же закону. Поэтому звуковая тень при дифракции цилиндрической волны не исчезает при сколь угодно больших расстояниях от точки наблюдения до препятствия.

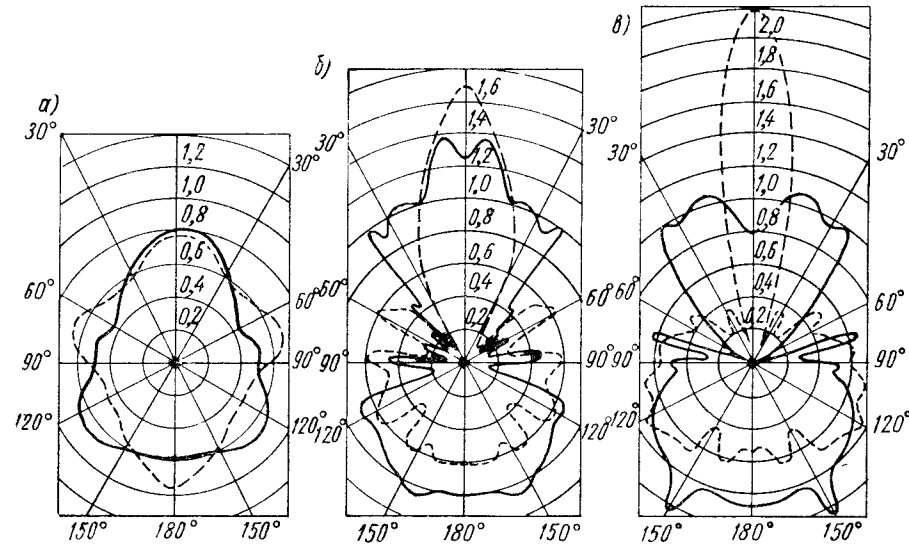
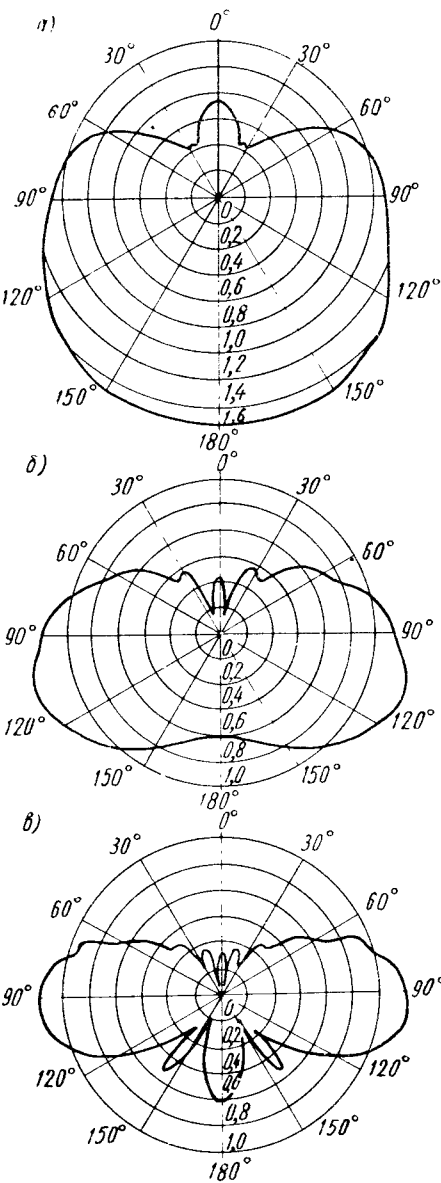


Рис. 39. Диаграммы рассеяния звуковой волны на цилиндре: а — при  $ka = 2$ ; б — при  $ka = 6$ ; в — при  $ka = 10$ . — — — диаграммы рассеяния цилиндрической волны ( $kb = 12$ ); — — — диаграммы рассеяния плоской волны.

Если считать, что расстояние между осями волны и препятствия достаточно велико, т. е.  $kb \gg 1$ , то функцию  $H_m^{(1)}(kb)$  можно заменить ее асимптотическим представлением. Тогда легко получить выражение, совпадающее с известной формулой для дифракции плоской звуковой волны на цилиндре. Для этого необходимо положить, что амплитуда звукового давления падающей звуковой волны равна величине

$$\sqrt{\frac{2}{\pi kb}} e^{ikb - i\frac{\pi}{4}}.$$

Действительно, очевидно, что при больших  $kb$  и соблюдении условия  $b \gg a$  волна, падающая на препятствие, приближается к плоской, и рассеяние при этом происходит по обычным законам дифракции плоской волны.



На рис. 39 приведены диаграммы рассеяния цилиндрической волны на абсолютно жестком цилиндре, рассчитанные по формуле (19.7) при условии  $kr \gg 1$  (сплошные линии). За единицу принята величина звукового давления в падающей волне при отсутствии препятствия. Углы  $\varphi$  соответствуют значениям  $\varphi = \pi - \varphi'$ . Кривые позволяют проследить характер изменения диаграммы рассеяния при изменении параметра  $ka$ .

При уменьшении длины волны закон, по которому происходит рассеяние, должен стремиться к геометрическому. Это хорошо заметно на рис. 39, в. Верхний лепесток диаграммы является тенеобразующим, нижний лепесток характеризует волну, непосредственно отраженную от препятствия.

Из геометрических соображений следует, что в направлениях, которые соответствуют плоскостям, касательным к поверхности рассеивающего цилиндра и проходящим через ось  $O_1$  (см. рис. 38), рассеянная волна должна отсутствовать. Это должно соответствовать углу, определяемому соотношением

$\sin \varphi = \frac{a}{b}$ . При  $ka=10$  и  $kb=12$  получаем  $\varphi = 57^\circ$ . Действительно, из рис. 39, в видно, что в направлениях, близких к  $60^\circ$ , наблюдается резкое уменьшение амплитуды рассеянной волны.

Для сравнения на рис. 39 пунктиром показаны характеристики рассеяния плоской волны с амплитудой  $p_0$ , равной по величине амплитуде цилиндрической волны на расстоянии  $b$  от точки  $O_1$ .

Полученные результаты позволяют найти диаграмму направленности пульсирующего цилиндра, искаженную из-за рассеяния звука на жестком цилиндре. В соответствии с определением диаграммы направленности можно записать

$$R(\varphi) = \left| \frac{p(\varphi)}{p_0} \right| = \left| \frac{p_0 + p_s(\varphi)}{p_0} \right|. \quad (19.8)$$

Используя асимптотическое представление функций Ханкеля при  $kr \gg 1$  с учетом приближенного равенства  $\rho \approx R - b \cos \varphi$ , из последней формулы можно получить выражение

$$R(\varphi) = \left| e^{ikb \cos \varphi} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(kb)} H_n^{(1)}(kb) \cos n\varphi \right|. \quad (19.9)$$

На рис. 40 приведены диаграммы направленности пульсирующего цилиндра, рассчитанные по формуле (19.9). Как видно из рисунка, препятствие сильно искажает диаграмму направленности.

Заметим, что выражение (19.9) можно также получить, воспользовавшись принципом взаимности. Предположим, что источник расположен не в точке  $O_1$  (см. рис. 33), а в точке  $M$ , находящейся на большом расстоянии ( $kr \gg 1$ ,  $\rho \gg b$ ) от цилиндра. При выполнении указанных условий падающую звуковую волну в пределах отрезка  $O_1O_2$  можно считать плоской. Вычислим звуковое давление в точке  $O_1$ , предположив, что начало координат находится в точке  $O_2$ . Звуковое давление в падающей плоской волне, вычисленное в точке  $O_1$ , определится первым слагаемым выражения (19.9), а звуковое давление в рассеянной волне — выражениями (18.33), (18.34), которые при  $\alpha = 0$  совпадают с бесконечной суммой, входящей в формулу (19.9).

**Дифракция цилиндрической волны на импедантном цилиндре.** Формулы, аналогичные выражениям (19.6), (19.7), могут быть получены и для импедантных граничных условий типа (18.36). В результате находим

$$p_s = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(ka) + \frac{Z}{i\rho c} J'_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka) + \frac{Z}{i\rho c} H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(k\rho) e^{in\varphi'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_{m+n}(kb). \quad (19.10)$$

Если  $p_0$  представляет собой простейшую цилиндрическую волну  $A_0 H_0^{(1)}(kR)$ , то из последнего выражения получаем

$$p_s = -A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n \frac{J_n(ka) + \frac{Z}{i\rho c} J'_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka) + \frac{Z}{i\rho c} H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(k\rho) H_n^{(1)}(kb) \cos n\varphi. \quad (19.11)$$

Рис. 40. Диаграммы направленности пульсирующего цилиндра, искаженные в результате рассеяния звука на жестком цилиндрическом рассеивателе: а — при  $ka = 2$ ; б — при  $ka = 6$ ; в — при  $ka = 10$ .

В выражения (19.10), (19.11) входит нормированный импеданс  $Z/\rho c$ . Заметим, что этой же величиной определяется и коэффициент отражения звука от импедантной плоскости. Если плоская звуковая волна падает нормально на импедантную поверхность, то коэффициент отражения  $A$  определяется формулой (см., например, [8])

$$A = \frac{Z - \rho c}{Z + \rho c}. \quad (19.12)$$

Выражение (19.12) можно записать в виде

$$\frac{Z}{\rho c} = \frac{1 + A}{1 - A}.$$

Таким образом, все особенности дифракции волны на импедантном цилиндре полностью характеризуются коэффициентом отражения от импедантной плоскости.

Диаграмма направленности пульсирующего цилиндрического источника, искаженная вследствие дифракции звука на импедантном цилиндре, может быть определена по формуле (19.8) при условии  $kr \gg 1$ ;  $\rho \gg b$ :

$$R(\varphi) = \left| e^{ikb \cos \varphi} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \frac{J_n(ka) + \frac{Z}{i\rho c} J_n'(ka)}{H_n^{(1)}(ka) + \frac{Z}{i\rho c} H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(kb) \cos n\varphi \right| \quad (19.13)$$

Результаты расчетов по этой формуле приведены на рис. 41. В области углов, близких к нулю, наблюдается четкая звуковая тень. В освещенной области звуковое поле осциллирует. Если  $kb \gg 1$ , то при изменении угла  $\varphi$  вещественная и мнимая части первого слагаемого в (19.13) быстро осциллируют. Прямое и рассеянное поле складываются в точке наблюдения либо синфазно, либо противфазно, что приводит к появлению максимумов в диаграмме направленности.

Как следует из (19.12), при  $Z = \infty$  (абсолютно жесткая поверхность)  $A = 1$ , при  $Z = 0$  (абсолютно мягкая поверхность)  $A = -1$ . Поэтому фаза рассеянной волны при  $Z = 0$  отличается на  $180^\circ$  от фазы рассеянной волны при  $Z = \infty$ ; это приводит к тому, что максимумы и минимумы кривых в данных случаях меняются местами.

Особый интерес представляет цилиндр с импедансом  $Z = \rho c$  (абсолютно поглощающая при нормальном падении волны плоская поверхность). В освещенной области неравномерность диаграммы направленности оказывается значительно меньшей, чем неравномерность диаграммы для абсолютно отражающего цилиндра. Однако некоторые осцилляции остаются, причем их величина возрастает по мере приближения точки наблюдения к границе тени.

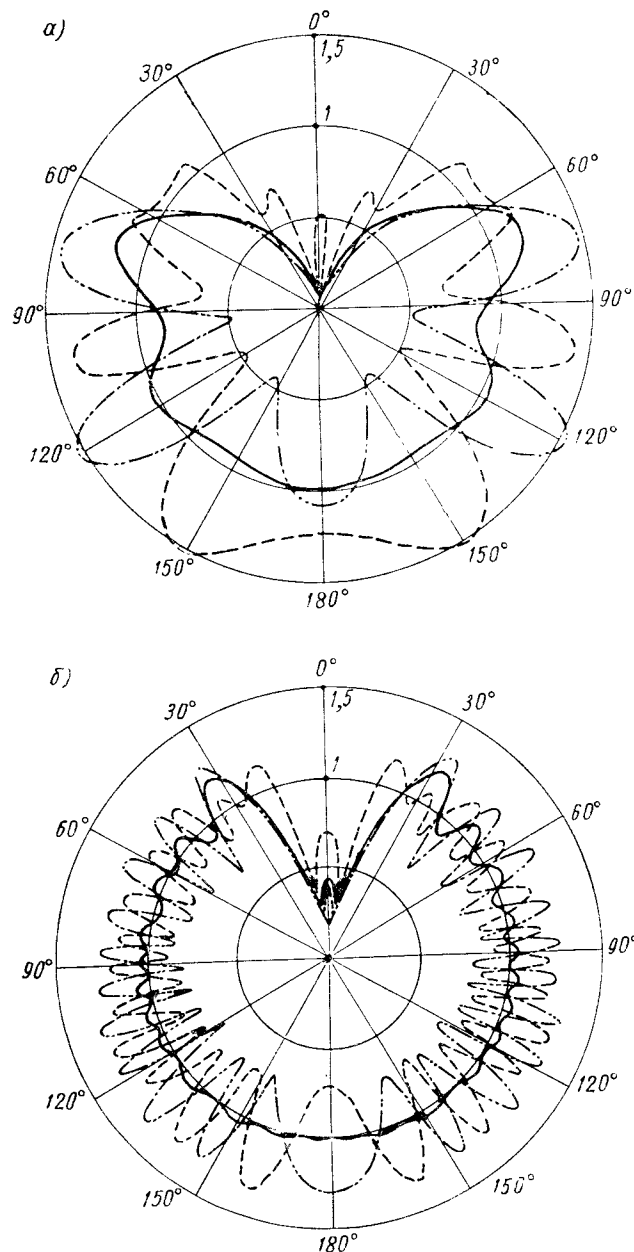


Рис. 41. Диаграммы направленности пульсирующего цилиндра, искаженные в результате рассеяния звука на цилиндрическом препятствии с различными импедансами: а — при  $ka = 7$ ;  $kb = 14$ ; б — при  $ka = 7$ ;  $kb = 40$ .  
 - - - -  $Z/\rho c = 0$  (абсолютно мягкая поверхность); —  $Z/\rho c = 1$  (абсолютно поглощающая поверхность); - · - ·  $Z/\rho c = \infty$  (абсолютно жесткая поверхность).

Для оценки неравномерности диаграммы направленности при  $ka \gg 1$  можно воспользоваться приведенной в § 24 асимптотической формулой (24.22) и принципом взаимности.

Если на цилиндр падает плоская волна единичной амплитуды, направление падения которой задается углом  $\varphi$ , то амплитуда рассеянного поля в точке  $O_1$  (см. рис. 38) может быть записана в виде

$$|p_s| = A(\gamma) \sqrt{\frac{a \cos \gamma}{2 \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \gamma} - a \cos \gamma}}. \quad (19.14)$$

Здесь  $\gamma$  — угол зеркального отражения (см. рис. 57);  $A(\gamma)$  — коэффициент отражения звука в точке зеркального отражения (при  $b \gg a$  можно считать, что  $\gamma \approx \frac{\pi - \varphi}{2}$ ).

Звуковое давление, определяемое формулой (19.14), может либо складываться в точке  $O_1$  с давлением в падающей волне, либо вычитаться из него в зависимости от соотношения фаз между ними. Таким образом, величина неравномерности поля в освещенной области определяется отношением

$$\frac{|p_0| + |p_s|}{|p_0| - |p_s|} = \frac{1 + A(\gamma) \sqrt{\frac{a \cos \gamma}{2 \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \gamma} - a \cos \gamma}}}{1 - A(\gamma) \sqrt{\frac{a \cos \gamma}{2 \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \gamma} - a \cos \gamma}}}. \quad (19.15)$$

В частности, при  $\varphi = \pi$  (т. е.  $\gamma = 0$ ) и  $b \gg a$  из последней формулы можно получить

$$\frac{|p_0| + |p_s|}{|p_0| - |p_s|} = \frac{1 + A(0) \sqrt{\frac{a}{2b}}}{1 - A(0) \sqrt{\frac{a}{2b}}}. \quad (19.16)$$

Интересно сравнить выражение (19.16) с формулой, которая должна следовать из выражения (10.12), определяющего амплитуду локационного отражения от цилиндра. При выводе (10.12) предполагалось, что источник излучает сферическую волну, причем источник и приемник совмещены. Предположим, что источник сферической волны находится в точке  $O_1$ , а приемник — в удаленной точке на оси  $\varphi = \pi$ . В этом случае, повторяя вывод, изложенный в § 10, и воспользовавшись обозначениями настоящего параграфа, правую часть формулы (10.12) можно записать в виде

$$\frac{Q}{8\pi R} \sqrt{\frac{a}{b}}. \quad (19.17)$$

Поскольку потенциал в прямой волне в точке наблюдения определяется выражением  $Q/4\pi R$ , то выражение для неравномерности поля сферической волны представляется в следующем виде:

$$\frac{|p_0| + |p_s|}{|p_0| - |p_s|} = \frac{1 + \frac{1}{2} A(0) \sqrt{\frac{a}{b}}}{1 - \frac{1}{2} A(0) \sqrt{\frac{a}{b}}}. \quad (19.18)$$

Сравнив выражения (19.16) и (19.18), можно заключить, что неравномерность поля сферического источника, возникающая вследствие дифракции звука на бесконечном цилиндре, несколько меньше, чем неравномерность поля бесконечно длинного цилиндрического источника, находящегося в тех же условиях. Физическое объяснение этого различия непосредственно следует из приведенных в § 18 рассуждений относительно характера дифракции цилиндрических и сферических волн.

## § 20. Дифракция и излучение волн произвольной системой цилиндров

Результаты, изложенные в § 18, относились к излучению и рассеянию волн одиночными цилиндрами; в § 19 уже предполагалось, что существует два цилиндра (см. рис. 38): один из них (с центром в точке  $O_2$ ) является рассеивателем, а другой (с центром в точке  $O_1$ ) — излучателем звука; взаимодействие между этими цилиндрами не рассматривалось, т. е. допускалась идеализация задачи. Такая идеализация может быть принята в том случае, если излучающий цилиндр  $O_1$  является звукопрозрачным. Тогда волна, излученная цилиндром  $O_1$  отражается от цилиндра  $O_2$  и беспрепятственно уходит в пространство, не рассеиваясь на самом излучающем цилиндре. При этом можно говорить об однократном рассеянии. Точно так же можно пренебречь взаимодействием, если размеры излучающего цилиндра малы по сравнению с длиной волны звука и по сравнению с радиусом цилиндра  $O_2$ . Кроме того, очевидно, что взаимодействие между цилиндрами уменьшается при увеличении расстояния  $O_1 O_2$ .

Если же все размеры сравнимы друг с другом и с длиной звуковой волны, то при расчете звуковых полей взаимодействие между цилиндрами (т. е. многократное рассеяние звука) необходимо учитывать. Учет такого взаимодействия может быть выполнен на основании теорем сложения методом, который был развит в работах [24]—[27]. Ниже приведены преобразования для цилиндрических волн, однако описываемый метод может быть использован и для других типов полей. В работе [26] этот метод с успехом применялся не только для цилиндров, но и для сфер, дисков, сфероидов и т. д. Общую теорию метода, а также теоремы сложения для сферических, сфероидальных функций, функций эллиптического цилиндра и других можно найти в книге [26].

**Излучение звука произвольной системой цилиндров.** Рассмотрим излучение звука произвольной системой цилиндров, центры которых находятся в точках  $O_1, O_2, \dots, O_N$ . Положение центра каждого цилиндра относительно начала координат определяется радиусом-вектором  $\vec{r}_q$  (рис. 42). Радиусы цилиндров равны  $a_q$ . На поверхности цилиндров задана нормальная составляющая колебательной скорости, причем распределение колебательной скорости  $v_q(\varphi_q)$  может быть различным для различных цилиндров. Будем считать, что известны разложения этих распределений в ряды Фурье:

$$v_q(\varphi_q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(q)} e^{in\varphi_q}. \quad (20.1)$$

Звуковое поле в точке  $M$  складывается из звуковых полей, излучаемых всеми цилиндрами, причем излучение каждого из цилиндров должно быть определено с учетом взаимодействия, возникающего в результате многократного рассеяния звука

$$p = \sum_{q=1}^N p_q. \quad (20.2)$$

Звуковое давление  $p_q$  можно представить в виде ряда

$$p_q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(q)} H_n^{(1)}(kR_q) e^{in\varphi_q}. \quad (20.3)$$

Коэффициенты  $C_n^{(q)}$ , которые, разумеется, зависят от номера цилиндра, являются неизвестными величинами.

Выделим цилиндр с номером  $s$  и потребуем, чтобы на его поверхности выполнялось граничное условие

$$v_s(\varphi_s) = \frac{1}{i\omega\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial R_s} \Big|_{R_s=a_s}. \quad (20.4)$$

Используя равенства (20.2) и (20.3), это условие можно представить в виде

$$v_s(\varphi_s) = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial}{\partial R_s} \left[ \sum_{q=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(q)} H_n^{(1)}(kR_q) e^{in\varphi_q} \right] \Big|_{R_s=a_s}. \quad (20.5)$$

В выражении (20.5) все волны записаны в различных системах координат, связанных с центрами каждого из цилиндров. Для того чтобы можно было выполнить дифференцирование и удовлетворить граничному условию на поверхности цилиндра с номером  $s$ , необходимо выразить волны, излучаемые всеми цилиндрами, в системе координат с центром в точке  $O_s$ .

Перенос начала отсчета в точку  $O_s$  можно осуществить, воспользовавшись теоремой сложения для цилиндрических функций. С этой целью выделим пару цилиндров с номерами  $q$  и  $s$  и применим к треугольнику  $MO_qO_s$  теорему сложения. Учитывая, что на поверхности цилиндра с номером  $s$  выполняется условие  $R_s < r_{qs}$ , можно использовать формулу (19.1). Получим

$$H_n^{(1)}(kR_q) e^{in(\varphi_q - \varphi_{qs})} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kR_s) H_{m+n}^{(1)}(kr_{qs}) e^{im(\pi - \varphi_s + \varphi_{qs})}. \quad (20.6)$$

В этом выражении  $\varphi_{qs}$  — угол между положительным направлением вектора  $\vec{r}_{qs}$  (направленного из точки  $O_q$  в точку  $O_s$ ) и положительным направлением оси  $x$ . При перемене индексов местами имеет место соотношение  $\varphi_{qs} = \varphi_{sq} + \pi$ .

Подставим выражение (20.6) в условие (20.5) и заметим при этом, что член ряда (20.5) с номером  $q = s$  записывать, используя теорему сложения, нет необходимости, поскольку он уже связан с системой координат, имеющей центр в точке  $O_s$ . В результате находим

$$i\omega\rho v_s(\varphi_s) = \frac{\partial}{\partial R_s} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(s)} H_n^{(1)}(kR_s) e^{in\varphi_s} + \sum_{q=1, q \neq s}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(q)} e^{in\varphi_{qs}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kR_s) H_{m+n}^{(1)}(kr_{qs}) e^{im(\pi - \varphi_s + \varphi_{qs})} \right] \Big|_{R_s=a_s}. \quad (20.7)$$

Произведем следующие операции: заменим в первом слагаемом значок суммирования  $n$  на  $m$ , а во втором слагаемом  $m$  на  $-m'$  (штрих после этой замены можно опустить). Учитывая соотношение  $Z_{-m}(x) = (-1)^m Z_m(x)$ , справедливое для целочисленных  $m$  ( $Z_m$  — любая цилиндрическая функция), можно записать правую часть равенства (20.7) в виде ряда Фурье по функциям  $e^{im\varphi_s}$ . В левую часть подставим разложение (20.1). В результате обе части окажутся представленными в виде рядов Фурье. Равенство (20.7) должно выполняться при любых углах  $\varphi_s$ , поэтому все множители, стоящие перед каждой из функций  $e^{im\varphi_s}$  в левой части, должны быть равны соответственно множителям, стоящим перед этими же функциями в правой части. Таким образом, получаем соотношение

$$C_m^{(s)} + \sum_{q=1, q \neq s}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(q)} Z_{mn}^{(qs)} = A_m^{(s)} \quad (20.8)$$

$$(m = -\infty, \dots, \infty, s = 1, 2, \dots, N),$$

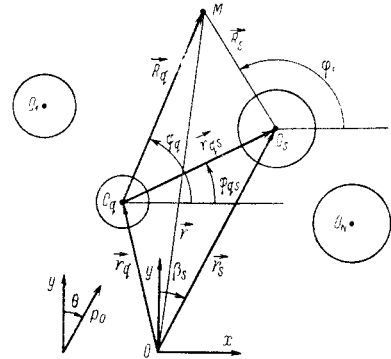


Рис. 42. Расположение системы координат при решении задач излучения и дифракции звука произвольной группой цилиндров.

где введены следующие обозначения:

$$Z_{mn}^{(qs)} = \frac{J'_m(ka_s)}{H_m^{(1)'}(ka_s)} H_{n-m}^{(1)}(kr_{qs}) e^{i(n-m)\varphi_{qs}}; \quad (20.9)$$

$$A_m^{(s)} = \frac{i\rho c a_m^{(s)}}{H_m^{(1)'}(ka_s)}. \quad (20.10)$$

Индекс  $s$  может принимать любые значения в пределах от 1 до  $N$ , индекс  $m$  меняется в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Поэтому выражение (20.8) является бесконечной системой уравнений относительно коэффициентов  $C_m^{(s)}$ . Если при суммировании по  $n$  можно с достаточной степенью точности ограничиться  $n = \pm n_1$  членами, то общее количество неизвестных коэффициентов будет  $(2n_1 + 1)N$ . Придавая индексу  $s$  значения  $s = 1, 2, \dots, N$ , а индексу  $n$  — значения  $n = -n_1, -n_1 + 1, \dots, n_1$ , получаем систему  $(2n_1 + 1)N$  алгебраических уравнений с таким же количеством неизвестных коэффициентов. Решение этой системы определяет значения неизвестных коэффициентов. Увеличивая число  $n_1$ , можно неограниченно повышать точность расчета.

Заметим, что коэффициенты, удовлетворяющие уравнению (20.8), определяют точное решение задачи, учитывающее все возможные взаимодействия цилиндров между собой, обусловленные многократным рассеянием звука.

Все члены выражений (20.8), (20.9) и (20.10) имеют ясный физический смысл. Свободные члены совпадают с коэффициентами (18.17а), определяющими излучение звука одиночными цилиндрами без учета многократного рассеяния. Двойная сумма характеризует взаимодействие между цилиндрами. В нее входит множитель  $H_{n-m}^{(1)}(kr_{qs})$ , зависящий от расстояний между цилиндрами. При увеличении волновых расстояний  $kr_{qs}$  этот множитель уменьшается и роль взаимодействия падает. Кроме того, присутствует множитель  $J'_m(ka)/H_m^{(1)'}(ka)$ , который определяет коэффициенты дифракции звука на абсолютно жестких цилиндрах [см., например, (18.34), (18.42а)].

**Анализ возможности решения бесконечной системы уравнений.** Проанализируем возможность решения системы уравнений (20.8). Для того чтобы бесконечная система уравнений могла быть численно решена методом редукции или методом последовательных приближений, ряды (см. § 17), составленные из коэффициентов матрицы  $Z_{mn}$ , должны сходиться. В данном случае сходимость по индексу  $n$  не имеет места, поскольку при больших значениях  $n - m$  ( $|n| + |m| > kb$ ) члены матрицы  $Z_{mn}$  начинают увеличиваться с ростом  $n$ . Таким образом, вдоль по строкам сходимость рядов, составленных из коэффициентов, отсутствует. При численном решении системы на ЭВМ это приведет к тому, что еще до того, как будет достигнута сходимость решения всей системы, коэффициенты  $Z_{mn}$  начнут резко увеличиваться и, начиная с некоторых значений  $n$ , не будут поме-

щаться в памяти машины. Это означает, что система уравнений (20.8) не удовлетворяет ни одному из условий, приведенных в § 17, и не является регулярированной.

Регуляризация системы уравнений может быть выполнена путем подстановки, предложенной в работах [26], [27]. Введем замену

$$\tilde{C}_m^{(s)} = C_m^{(s)} H_m^{(1)'}(ka_s). \quad (20.11)$$

Тогда система уравнений примет вид

$$\tilde{C}_m^{(s)} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq s}}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n^{(q)} \tilde{Z}_{mn}^{(qs)} = \tilde{A}_m^{(s)} \quad (m = -\infty, \dots, \infty, s = 1, 2, \dots, N), \quad (20.12)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Z}_{mn}^{(qs)} &= \frac{J'_m(ka_s)}{H_m^{(1)'}(ka_s)} H_{n-m}^{(1)}(kr_{qs}) e^{i(n-m)\varphi_{qs}}; \\ \tilde{A}_m^{(s)} &= i\rho c a_m^{(s)}. \end{aligned} \right\} \quad (20.13)$$

Оценим ряд, составленный из коэффициентов матрицы для любой пары цилиндров с номерами  $q$  и  $s$ , и покажем, что этот ряд сходится:

$$I_m^{(qs)} = \sum_n \sum_m |\tilde{Z}_{mn}^{(qs)}|^2 < \infty. \quad (20.14)$$

Воспользуемся асимптотическими значениями цилиндрических функций при больших значениях индекса ( $|m|, |n| > ka$ ):

$$J'_m(ka) \approx \frac{1}{(m-1)!} \frac{(ka)^{m-1}}{2^m}; \quad H_m^{(1)'}(ka) \approx \frac{im! 2^m}{\pi (ka)^{m+1}};$$

$$H_{m-n}^{(1)}(kr_{qs}) \approx \frac{-i(m+n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{kr_{qs}}\right)^{m+n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_m^{(qs)} &= \sum_n \sum_m |\tilde{Z}_{mn}^{(qs)}|^2 \approx \sum_n \sum_m \left| \frac{(|m| - |n|)!}{|m|! |n|!} u_s^{|m|} u_q^{|n|} \frac{|m|}{|m| + |n|} \right|^2 \leq \\ &\leq \sum_n \sum_m \left| \frac{(|m| + |n|)!}{|m|! |n|!} u_s^m u_q^n \right|^2. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения  $u_s = \frac{a_s}{r_{qs}}$ ;  $u_q = \frac{a_q}{r_{qs}}$ .

Применим к сумме по  $m$  неравенство Буяковского. В результате получим

$$I_m^{(qs)} \leq \sum_n \left| \sum_m \frac{(|m| + |n|)!}{m! n!} u_s^m u_q^n \right|^2.$$



Для вычисления суммы по  $m$  воспользуемся равенством [12]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!m!} u_s^m u_q^n = \frac{u_s^n}{(1-u_q)^{n+1}}.$$

Очевидно, что ряд по  $n$  будет сходиться при выполнении неравенства  $\frac{u_s}{1-u_q} < 1$ , или  $u_s + u_q < 1$ . Таким образом, величина  $I^{(qs)}$  оказывается ограниченной при условии  $a_s + a_q < r_{qs}$ , т. е. в том случае, когда цилиндры не касаются друг друга. Ясно, что приведенное доказательство справедливо для любой пары цилиндров.

Заметим, что имеет место также сходимость суммы, составленной из свободных членов:

$$\sum_m |\tilde{A}_m^{(s)}|^2 = (\rho c)^2 \sum_m |a_m^{(s)}|^2 < \infty, \quad (20.15)$$

поскольку величины  $a_m^{(s)}$  представляют собой коэффициенты ряда Фурье.

Из условий (20.14) и (20.15) следует, что система уравнений (20.15) является квазирегулярной (см. § 17) и решение ее может быть проведено методом редукции или методом последовательных приближений.

**Дифракция звука на произвольной системе цилиндров.** Аналогично излучению звука можно рассмотреть и дифракцию звука на произвольной системе цилиндров. Предположим, что на систему цилиндров падает плоская звуковая волна

$$p_0 = e^{ik(x \sin \theta + y \cos \theta)}.$$

Вводя полярные координаты с центром в точке  $O_s$  и раскладывая последнее выражение в ряд по цилиндрическим функциям, получаем

$$\begin{aligned} p_0 &= e^{ikr_s \cos(\theta - \beta_s) + ikR_s \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \varphi_s\right)} = \\ &= e^{ikr_s \cos(\theta - \beta_s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(kR_s) e^{-in(\varphi_s + \theta)}. \end{aligned} \quad (20.16)$$

Волны, рассеянные цилиндрами  $p_{\text{рас}}^{(s)}$ , можно представить в форме рядов (20.3). На поверхности цилиндра с номером  $s$  будет выполняться граничное условие

$$-\frac{\partial p_0}{\partial R_s} \Big|_{R_s=a} = \frac{\partial p_{\text{рас}}}{\partial R_s} \Big|_{R_s=a}, \quad (20.17)$$

где  $p_{\text{рас}}$  — полное рассеянное поле.

После применения теоремы сложения (20.6) получим выражение, правая часть которого совпадает с правой частью равенства (20.7), а левая часть представляет собой производную по  $R_s$  от выраже-

ния (20.16). В результате снова приходим к бесконечной системе уравнений типа системы (20.8), причем в правой части свободные члены  $A_m^{(s)}$  должны быть заменены выражениями

$$A_m^{(s)} = -e^{ikr_s \cos(\theta - \beta_s)} \frac{J'_m(ka_s)}{H_m^{(1)'}(ka_s)} e^{im\theta}. \quad (20.18)$$

Эти коэффициенты определяют члены ряда, входящие в разложение рассеянного поля для одиночного цилиндра.

Несмотря на внешнюю простоту системы уравнений (20.8), использование ее в практических случаях встречает ряд трудностей. С помощью электронных вычислительных машин решить систему алгебраических уравнений, порядок которой превышает 40—50, весьма сложно. В этих случаях требуется применение долговременной памяти, и время, необходимое для расчета, резко возрастает. В связи с тем что неизвестные коэффициенты являются комплексными величинами и фактически каждый из них состоит из двух неизвестных чисел, максимальное количество уравнений должно быть равно 20—25. Таким образом, величина  $(2n_1 + 1)N$  не может превышать указанное значение. Если, например,  $N = 5$ , то  $n_1 = 2$ . Это означает, что расчет возможен только в том случае, если ряды по цилиндрическим функциям сходятся на третьем члене. Такая быстрая сходимость имеет место лишь при малых значениях волнового размера цилиндров ( $ka_s < 1$ ).

При  $N = 2$  и одинаковых цилиндрах удается использовать соображения, связанные с симметрией поля относительно некоторых направлений. Это дает возможность заменить суммирование в промежутке  $(-\infty, +\infty)$  суммированием в промежутке  $(0, \infty)$  и сократить количество неизвестных в четыре раза (вдвое благодаря изменению пределов суммирования и еще вдвое благодаря тому, что коэффициенты разложения для одного цилиндра оказываются либо равными коэффициентам для другого цилиндра, либо легко через них выражаются). Таким образом, в этом случае удается вычислить 20—25 неизвестных коэффициентов ряда. Как указано в § 23, при суммировании рядов по цилиндрическим функциям практически можно ограничиться номером члена ряда, лишь немного превышающим параметр  $ka$ . Поэтому для двух цилиндров задача может быть численно решена при  $ka \leq 20$ .

**Дифракция звука на решетке, состоящей из цилиндрических стержней.** Полученные выше соотношения дают возможность вычислить коэффициенты отражения и прохождения для звуковой волны, падающей на решетку из цилиндрических стержней (рис. 43).

Прежде всего заметим, что в плоской бесконечной решетке, состоящей из одинаковых цилиндров, амплитуды рассеянных волн для различных цилиндров должны быть одинаковыми, поскольку все цилиндры находятся в идентичных условиях. Фазы рассеянных волн должны отличаться друг от друга множителем  $e^{ikdq \sin \theta}$ , опреде-

ляющим набег фазы, возникающий вследствие наклонного падения волны. Поэтому можно записать

$$C_m^{(q)} = C_m e^{ikdq \sin \theta}. \quad (20.19)$$

Здесь  $C_m$  уже не зависит от номера цилиндра. Из сравнения рис. 42 и 43 следует, что  $r_{qs} = d|q - s|$ ; для цилиндров с номерами  $s > q$  следует положить  $\varphi_{qs} = 0$ ,  $\beta_s = \frac{\pi}{2}$ ; для цилиндров с номерами

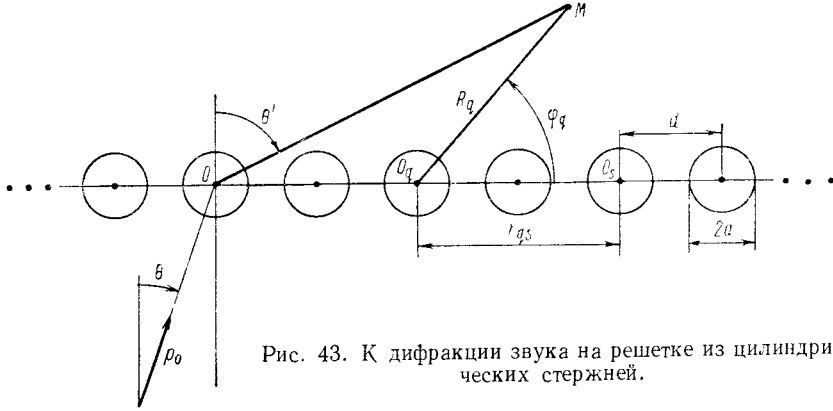


Рис. 43. К дифракции звука на решетке из цилиндрических стержней.

$s < q$  полагаем  $\varphi_{qs} = \pi$ ,  $\beta_s = -\frac{\pi}{2}$ . Система уравнений (20.8) приобретает вид

$$C_m + \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left[ \sum_{q=-s-1}^{s-1} e^{ikd(q-s) \sin \theta} (-1)^{n-m} H_{n-m}^{(1)}(kd|q-s|) + \sum_{q=s+1}^{\infty} e^{ikd(q-s) \sin \theta} H_{n-m}^{(1)}(kd|q-s|) \right] = -\frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} e^{im\theta},$$

$$m = -\infty, \dots, \infty.$$

Сумма по  $q$  в системе (20.8) разбита здесь на две суммы, поскольку коэффициенты  $Z_{mn}^{(qs)}$  для цилиндров, стоящих слева от фиксированного цилиндра  $q$ , отличаются от коэффициентов для цилиндров, расположенных справа. В первой сумме в квадратных скобках можно выполнить замену  $q' = s - q$ , во второй сумме — замену  $q' = q - s$ . Опуская после выполнения замены штрихи, получим бесконечную систему уравнений

$$C_m - a_n \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n Z_{n-m} = a_m e^{im\theta}; \quad m = -\infty, \dots, \infty; \quad (20.20)$$

$$Z_{n-m} = \sum_{q=1}^{\infty} H_{n-m}^{(1)}(kdq) [e^{ikdq \sin \theta} (-1)^{n-m} + e^{-ikdq \sin \theta}]; \quad (20.21)$$

$$a_n = -\frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)}. \quad (20.22)$$

Регуляризация этой системы может быть проведена способом, изложенным выше.

Вычислим далее коэффициенты прохождения и отражения звука. В данном случае мы имеем дело с прохождением звуковой волны через неоднородную структуру, и звуковое давление должно, вообще говоря, зависеть от положения точки наблюдения. Поэтому необходимо условиться о том, что мы будем называть коэффициентами прохождения и отражения звука для неоднородной структуры.

В соответствии с определением, принятым в § 17, будем временно полагать, что решетка является ограниченной, причем число цилиндров равно  $2N + 1$ ; решетка закрывает отверстие в бесконечном абсолютно жестком экране; размеры отверстия  $L = 2dN$  велики по сравнению с длиной волны. Если число цилиндров достаточно велико, то можно считать, что рассеяние на каждом из цилиндров происходит таким же образом, как и в бесконечной решетке.

Под коэффициентом прохождения звука через решетку будем понимать отношение звукового давления в точке наблюдения  $M$  в волне, прошедшей через решетку, к звуковому давлению в этой же точке при отсутствии решетки. Предполагается, что экран присутствует в обоих случаях,  $\theta' = \theta$ , точка  $M$  расположена в дальней зоне отверстия ( $R_0 \gg L$ ).

Принятое определение коэффициента прохождения звука соответствует вычислению звукового давления в нулевом спектре прошедшей волны. Для решетки, представляющей собой экран с отверстиями, подобное определение использовалось в § 17 (рис. 32).

Суммирование рассеянных полей по всем цилиндрам дает

$$p_{\text{рас}} = \sum_{q=-N}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^{(q)} H_m^{(1)}(kR_q) e^{im\varphi_q}. \quad (20.23)$$

В дальней зоне можно принять  $kR_q \gg 1$ ;  $\varphi_q \approx \frac{\pi}{2} - \theta$ ;  $R_q \approx \approx R_0 - qd \sin \theta$ . Подставив эти значения в формулу (20.23) и воспользовавшись асимптотическим представлением функций Ханкеля, получаем

$$p_{\text{рас}} = \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} e^{ikR_0 - i\frac{\pi}{4}} (2N + 1) \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{-im\theta}. \quad (20.24)$$

Поле падающей волны  $p_i$  в точке  $M$  можно вычислить по формуле (17.18). Коэффициент прохождения определится в виде

$$B = \frac{p_0 + p_{\text{рас}}}{p_0} = 1 + \frac{(2N + 1) \cdot 2}{kL \cos \theta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{-im\theta}.$$

Устремив число цилиндров к бесконечности, получаем

$$B = 1 + \frac{2}{kd} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{-im\theta}. \quad (20.25)$$

Аналогичным образом можно вычислить и коэффициент отражения звука от решетки, определив его способом, указанным в § 17. Поле рассеяния в точке  $Q$  (см. рис. 32) определится по формуле (20.23), в которой следует принять  $\varphi_q = -\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ . Поле, отраженное в зеркальном направлении от жесткой полосы больших волновых размеров, можно записать в виде

$$p_{отр} = -\frac{kL}{2} \cos \theta e^{ikR_0 - i\frac{\pi}{4}}. \quad (20.26)$$

Коэффициент отражения звука будет равен отношению

$$A = \frac{p_{рас}}{p_{отр}} = -\frac{2}{kd} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n C_n e^{-in\theta}. \quad (20.27)$$

Рассмотрим далее частный случай  $\theta = 0^\circ$ . В силу симметрии волновых полей, рассеянных каждым цилиндром, относительно направления  $\varphi_q = \frac{\pi}{2}$ , можно записать  $p_q\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = p_q\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ . Взяв слагаемые ряда (20.3) с номерами  $n$  и  $-n$ , получим

$$\begin{aligned} & C_{-n}^{(q)} H_{-n}^{(1)}(kR_q) e^{-in\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} + C_n^{(q)} H_n^{(1)}(kR_q) e^{in\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \\ & = C_{-n}^{(q)} H_{-n}^{(1)}(kR_q) e^{-in\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} + C_n^{(q)} H_n^{(1)}(kR_q) e^{in\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношением  $H_{-n}^{(1)} = (-1)^n H_n^{(1)}$  и приравняв коэффициенты при одинаковых множителях  $e^{in\alpha}$ , получаем  $C_{-n}^{(q)} = C_n^{(q)}$ . Теперь систему уравнений (20.20) можно переписать в следующей форме:

$$C_n - a_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} C_m (Z_{n-m} + Z_{n+m}) = a_n, \quad n = 0, 1, \dots, \infty. \quad (20.28)$$

Система уравнений (20.28) более удобна для расчетов, чем система (20.20), поскольку она содержит вдвое меньше неизвестных коэффициентов. Кроме того, как видно из формулы (20.21), при нормальном падении звука все коэффициенты с нечетными значениями  $m - n$  (а следовательно, и  $m + n$ ) равны нулю. Поэтому в системе (20.28) строки, соответствующие четным значениям  $n$ , будут содержать лишь четные коэффициенты  $C_m$ , а строки, соответствующие нечетным  $n$ , — нечетные коэффициенты. Таким образом, система уравнений распадается на две независимые системы: одна для четных коэффициентов, а вторая — для нечетных. Это позволяет еще вдвое сократить порядок системы уравнений.

Непосредственно вычислить коэффициенты  $Z_{n-m}$  по формуле (20.21) невозможно из-за чрезвычайно медленной сходимости ряда (при больших значениях  $q$  члены ряда меняются по закону  $1/\sqrt{q}$ ).

Для вычисления этих коэффициентов можно воспользоваться формулами, приведенными в работе [149]. При нормальном падении звука ( $\theta = 0^\circ$ ) коэффициенты  $Z_{n-m}$  определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} Z_0 &= \frac{1}{\pi\Delta} - 1 + \frac{2}{\pi\Delta} \sum_{q=1}^{q_+} \frac{1}{\cos \theta_q}; \\ \operatorname{Im} Z_0 &= -\frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma\Delta}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{q=1}^{q_+} \frac{1}{q} - \frac{2}{\pi} \sum_{q=q_++1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{q^2 - \Delta^2}} - \frac{1}{q} \right); \\ \operatorname{Re} Z_{2n} &= \frac{1}{\pi\Delta} + \frac{2}{\pi\Delta} \sum_{q=1}^{q_+} \frac{\cos(2n\theta_q)}{\cos \theta_q}; \\ \operatorname{Im} Z_{2n} &= \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^n \frac{(-1)^q 2^{2q} (n+q-1)! B_{2q}}{(2q)! (n-q)! \Delta^{2q}} - \\ & - \frac{2}{\pi\Delta} \sum_{q=1}^{q_+} \frac{\sin(2n\theta_q)}{\cos \theta_q} - \frac{2(-1)^n}{\pi\Delta^{2n}} \sum_{q_++1}^{\infty} \frac{[q - \sqrt{q^2 - \Delta^2}]^{2n}}{\sqrt{q^2 - \Delta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (20.29)$$

В формулах (20.29) введены следующие обозначения:  $\Delta = \frac{kd}{2\pi}$ ;  $\cos \theta_q = \sqrt{1 - \left(\frac{q}{\Delta}\right)^2}$ ;  $\gamma = 1,781$ ;  $q_+ = E(\Delta)$ , где  $E$  означает целую часть числа;  $B_{2q}$  — числа Бернулли:  $B_2 = 1/6$ ,  $B_4 = -1/30$ ,  $B_6 = 1/42$ ,  $B_8 = -1/30$ . Бесконечные ряды, входящие в формулы (20.29), быстро сходятся.

Для значений  $ka < 2$  можно ограничиться четырьмя членами ряда (20.23), т. е.  $m = 0, 1, 2, 3$ . Система уравнений (20.8) при этом распадается на две системы уравнений, причем каждая из них будет содержать два неизвестных коэффициента. Решив эти системы, получаем значения коэффициентов в явном виде:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= a_0 \frac{1 - a_2(Z_0 + Z_4 - 2Z_2)}{(1 - a_0 Z_0) [1 - a_2(Z_0 + Z_4)] - 2a_0 a_2 Z_2^2}; \\ C_1 &= a_1 \frac{1 - a_3(Z_0 + Z_6 - Z_2 - Z_4)}{[1 - a_1(Z_0 + Z_2)] [1 - a_3(Z_0 + Z_6)] - a_1 a_3 (Z_2 + Z_4)^2}; \\ C_2 &= a_2 \frac{1 - a_0(Z_0 - Z_2)}{(1 - a_0 Z_0) [1 - a_2(Z_0 + Z_4)] - 2a_0 a_2 Z_2^2}; \\ C_3 &= a_3 \frac{1 - a_1(Z_0 - Z_4)}{[1 - a_1(Z_0 + Z_2)] [1 - a_3(Z_0 + Z_6)] - a_1 a_3 (Z_2 + Z_4)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (20.30)$$

Эти формулы справедливы для любых значений  $kd$ .

Из формулы (20.25) следует

$$B = 1 + \frac{2}{kd} [C_0 + 2(C_1 + C_2 + C_3)] \quad (20.31)$$

На рис. 44 приведены результаты расчета коэффициента прохождения звука через решетку из круглых абсолютно жестких стержней. Осцилляции на графиках рис. 44, а появляются вследствие вза-

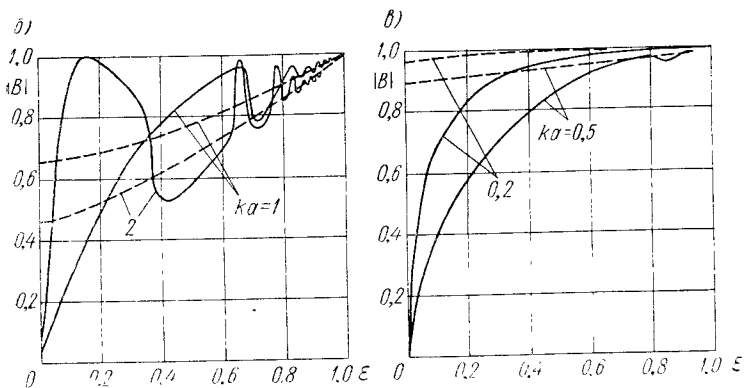
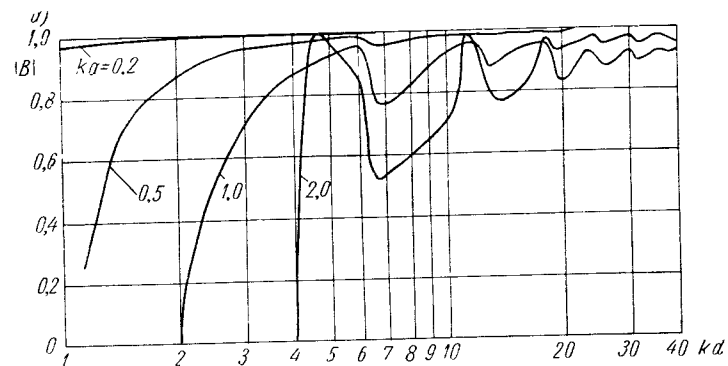


Рис. 44. Коэффициент прохождения звука через решетку.

— — расчет по формуле (20.31); — — — — расчет без учета взаимодействия.

звука отсутствует и решетка представляет собой набор изолированных стержней. Заменяв в формуле (20.31) коэффициенты  $C_n$  коэффициентами  $a_n$ , определяющими решения для изолированных стержней, получим

$$B \approx 1 + \frac{2}{kd} \Phi_1(0). \quad (20.32)$$

Здесь  $\Phi_1(0)$  — значение функции рассеяния звука на цилиндре в направлении падения волны, определяемое формулой (18.42а) и приложением 1 [аналогичное выражение можно получить и из приведенной ниже формулы (22.11), полагая, что перед решеткой расположен поршень площадью  $S = Ndh$ ;  $kd$  и  $kh \gg 1$ ].

Из сопоставления сплошных и пунктирных кривых на рис. 44, б, в следует, что взаимодействием можно пренебречь лишь при достаточно больших значениях  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0,7$  или  $d/a > 7$ ). При малых значениях  $\varepsilon$  взаимодействие играет решающую роль. Очевидно, что при  $\varepsilon = 0$  (т. е. в случае, когда цилиндры касаются друг друга) прохождения звука через решетку должно отсутствовать. Однако пунктирные кривые при малых  $\varepsilon$  дают явно неверные, сильно завышенные значения  $|B|$ .

Небольшие отличия коэффициента прохождения звука от нуля для сплошных кривых при  $\varepsilon = 0$  объясняются тем, что при выводе формул (20.30) в системе (20.28) было оставлено лишь четыре уравнения. При  $kd = 2$  и близком расположении цилиндров из-за многократного рассеяния несколько возрастает роль последующих членов ряда, входящего в уравнения (20.28), что приводит к появлению погрешности расчета. При  $kd \leq 1$  четыре уравнения системы (20.28) обеспечивают достаточно высокую точность расчета при любых значениях  $\varepsilon$  и  $kd$ .

## § 21. Излучение звука конечным по высоте цилиндром с цилиндрическим экраном

**Метод перевала.** В дальнейшем будет применяться метод асимптотической оценки интегралов типа

$$I = \int_C F(z) e^{pf(z)} dz$$

на комплексной плоскости при больших значениях параметра  $p$ . Один из таких методов, пригодный для интегрирования по вещественной оси (метод стационарной фазы), был рассмотрен в § 9.

Будем считать, что  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  является аналитической функцией переменной  $z = x + iy$ ;  $u$  и  $v$  являются гармоническими функциями и удовлетворяют условиям Коши—Римана. Внутри любой замкнутой области функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  не могут достигать ни максимума, ни минимума (имеется в виду, что  $u$  и  $v$  в этой области не постоянны). Максимальное или минимальное зна-

имдействия цилиндров при многократном рассеянии звука. Интервалы между максимумами приблизительно равны  $2\pi$ .

На рис. 44, б, в показана зависимость коэффициента прохождения звука от коэффициента перфорации  $\varepsilon = 1 - 2a/d$ . При малых значениях волнового радиуса  $ka$  (рис. 44, в) осцилляции появляются лишь при достаточно больших коэффициентах перфорации, т. е. в области, в которой звук почти полностью проходит через решетку.

Интересно сравнить результаты расчета по формуле (20.31) с результатами приближенного расчета коэффициента прохождения через решетку, выполненного при условии, что многократное рассеяние

чение функций достигается лишь на границе области. Если в некоторой точке  $z_0$  внутри области выполняются условия  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , то в окрестности такой точки поверхность может представлять собой только седло (рис. 45). Линия  $Az_0B$  на комплексной плоскости  $z$  соответствует наискорейшему подъему и спуску.

Трудность вычисления интеграла при больших значениях  $p$  заключается в том, что подинтегральная функция быстро осциллирует, так как ее фаза быстро меняется вдоль пути интегрирования. Если на некоторых участках модуль подинтегральной функции велик, а фаза быстро меняется, то на этих участках имеет место чередование положительных и отрицательных значений функции, близких по абсолютной величине. Это значит, что при интегрировании такой функции одни участки компенсируют другие и при численном расчете необходима очень высокая точность вычислений. Поэтому целесообразно так деформировать путь интегрирования, чтобы уменьшить влияние осцилляций подинтегральной функции на результат.

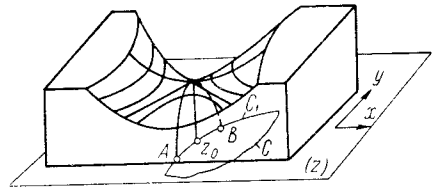


Рис. 45. Поверхность с седловой точкой.

Кроме того, путь интегрирования желательно построить таким образом, чтобы значения модуля подинтегральной функции  $|e^{pf(z)}|$  были велики там, где она не осциллирует (т. е. где ее фаза постоянна), и малы на тех участках, где ее осцилляции значительны.

Известно, что семейство кривых  $u(x, y) = \text{const}$  ортогонально семейству кривых  $v(x, y) = \text{const}$ . Поэтому линии  $v(x, y) = \text{const}$  являются линиями кратчайшего спуска для функции  $u(x, y)$ . Через каждую точку, за исключением седловой (точки перевала), проходит один путь кратчайшего спуска. Для точки перевала линиям наискорейшего спуска соответствуют участки  $Az_0$  и  $Bz_0$ . Если деформировать путь интегрирования  $C$  так, чтобы вблизи точки  $z_0$  он проходил по линии  $AB$ , то этим достигаются сразу две цели: во-первых, функция  $e^{pf(z)}$  будет велика лишь в окрестностях точки  $z_0$ , во-вторых, на том участке, где она велика, ее фаза будет постоянной величиной. На остальных участках пути интегрирования, не совпадающих с  $AB$ , значение функции будет мало, причем сама функция будет быстро осциллировать. Поэтому вклад этих участков должен быть мал.

Следовательно, не совершая большой ошибки, можно заменить первоначальный путь интегрирования  $C$  перевальным путем  $C_1$ , который соответствует линии  $v(x, y) = v(x_0, y_0) = \text{const}$ . Точка  $z_0$ , которую в дальнейшем будем называть точкой перевала, определяется из уравнения

$$f'(z) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Полагая, что  $F(z)$  медленно меняется вблизи точки  $z = z_0$ , можно получить асимптотическую формулу (см., например, [8])

$$I \approx \frac{\sqrt{2\pi} F(z_0) e^{pf(z_0)}}{\sqrt{pe^{i\pi} f''(z_0)}}. \quad (21.1)$$

Если у подинтегральной функции есть полюса, которые необходимо пересечь при деформации исходного контура интегрирования в перевальный, то к окончательному выражению необходимо добавить вычеты в этих полюсах.

Формула (21.1) неприменима, если полюса находятся вблизи точки перевала. В этом случае метод перевала следует видоизменить так, как указано в работе [8].

**Общее решение для произвольного распределения колебательной скорости.** В § 18 были приведены формулы, определяющие звуковое поле, излучаемое бесконечным цилиндром с равномерным распределением колебаний по высоте (плоская задача). Здесь мы рассмотрим случай произвольного распределения колебательной скорости по образующей цилиндра. Частным случаем этой задачи [136] является определение звукового поля, излучаемого конечным цилиндром, находящимся в жестком цилиндрическом экране (рис. 46).

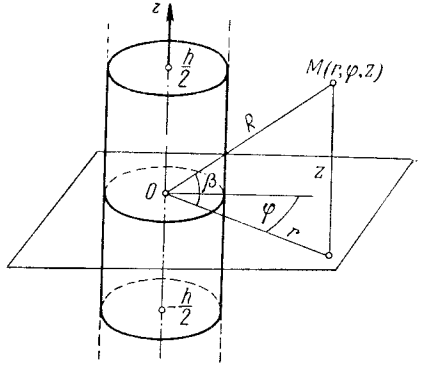


Рис. 46. Цилиндрическая система координат.

Как было показано в § 18, частное решение уравнения Гельмгольца имеет вид

$$H_n^{(1)}(\sqrt{k^2 - \gamma^2} \cdot r) e^{\pm i\gamma z}.$$

Это решение определяет цилиндрические волны, бегущие в положительном и отрицательном направлении оси  $z$  с волновым числом  $\gamma$ . Комбинируя все возможные значения  $n$  и  $\gamma$ , можно записать поле в следующем виде:

$$p(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\gamma) H_n^{(1)}(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r) e^{i\gamma z} d\gamma. \quad (21.2)$$

Неизвестные коэффициенты  $a_n$  и неизвестная функция  $A(\gamma)$  должны быть определены из граничного условия на поверхности цилиндра. Пусть на поверхности  $r = a$  задана колебательная скорость

$$v(\varphi, z) = \frac{1}{i\omega\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=a}. \quad (21.3)$$

Разложим функцию  $v(\varphi, z)$  по координате  $\varphi$  в ряд Фурье, а по координате  $z$  представим через интеграл Фурье. Запишем  $v(\varphi, z)$  в виде

$$v(\varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z) e^{in\varphi}, \quad (21.4)$$

где функции  $b_n(z)$  определяются интегралами

$$b_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\varphi, z) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (21.5)$$

Представим  $b_n(z)$  в виде интеграла Фурье:

$$b_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\gamma) e^{i\gamma z} d\gamma, \quad (21.6a)$$

$$B_n(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} b_n(z) e^{-i\gamma z} dz. \quad (21.6b)$$

Комбинируя (21.4) с (21.6a) и (21.5) с (21.6b), находим разложение

$$v(\varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\gamma) e^{i\gamma z} d\gamma, \quad (21.7)$$

где функции  $B_n(\gamma)$  определяются по формуле

$$B_n(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\varphi, z) e^{-in\varphi - i\gamma z} d\varphi dz. \quad (21.8)$$

Подставляя (21.2) и (21.7) в граничное условие (21.3), находим сразу произведение

$$a_n A(\gamma) = \frac{i\omega\rho B_n(\gamma)}{\sqrt{2\pi} \sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(1)'(\sqrt{k^2 - \gamma^2} a)}.$$

В результате получаем

$$p(r, \varphi, z) = \frac{i\omega\rho}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_n(\gamma) H_n^{(1)}(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r) e^{i\gamma z}}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(1)'(\sqrt{k^2 - \gamma^2} a)} d\gamma. \quad (21.9)$$

Формула (21.9) определяет звуковое поле для любых распределений колебательной скорости  $v(\varphi, z)$ , допускающих разложение в ряды и интегралы Фурье.

**Излучение цилиндра, совершающего осесимметричные колебания.** Рассмотрим частный случай, при котором колебательная скорость не зависит от азимутальной координаты  $\varphi$ . Тогда

$$p(r, z) = \frac{-i\omega\rho}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_0(\gamma) H_0^{(1)}(\sqrt{k^2 - \gamma^2} r) e^{i\gamma z}}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} H_1^{(1)'(\sqrt{k^2 - \gamma^2} a)} d\gamma. \quad (21.10)$$

Выполним замену переменных  $\gamma = k \sin \alpha$ . Последняя формула принимает вид

$$p(r, z) = \frac{-i\omega\rho}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_1} B_0(k \sin \alpha) \frac{H_0^{(1)}(kr \cos \alpha)}{H_1^{(1)'(ka \cos \alpha)} e^{ikz \sin \alpha} d\alpha. \quad (21.11)$$

Определим пределы интегрирования. Ясно, что если  $\gamma$  меняется в промежутке  $(-\infty, +\infty)$ , то  $|\sin \alpha| > 1$ ; следовательно,  $\alpha$  не может быть вещественным на всем промежутке интегрирования. Пусть  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ . Тогда

$$\gamma = k [\sin \alpha' \operatorname{ch} \alpha'' + i \cos \alpha' \operatorname{sh} \alpha''].$$

Предположим, что  $\gamma$  — большое отрицательное число (нижний предел интегрирования). Поскольку  $\gamma$  вещественно, то  $\cos \alpha' \operatorname{sh} \alpha'' = 0$ . Очевидно, что  $\alpha'' \neq 0$  (так как в противном случае  $|\sin \alpha| < 1$ ).

Поэтому следует принять, что  $\alpha' = -\frac{\pi}{2}$  и  $\gamma = -k \operatorname{ch} \alpha''$ . Функция  $\operatorname{sh} \alpha''$  является четной, следовательно,  $\alpha''$  может быть как положительной, так и отрицательной. Для того чтобы выбрать знак, необходимо обратиться к выражению (21.11). Исследуем поведение функции  $H_0^{(1)}(kr \cos \alpha)$  при увеличении  $kr$  в комплексной области  $\alpha$ . На линии  $\alpha' = -\frac{\pi}{2}$  выполняется соотношение  $\cos \alpha = i \operatorname{sh} \alpha''$ . При  $kr \gg 1$  можно воспользоваться асимптотическим представлением для функций Ханкеля

$$H_0^{(1)}(kr \cos \alpha) = H_0^{(1)}(ikr \operatorname{sh} \alpha'') \approx \sqrt{\frac{2}{i\pi kr \operatorname{sh} \alpha''}} e^{-kr \operatorname{sh} \alpha'' - i\frac{\pi}{4}}.$$

Для того чтобы это выражение стремилось к нулю при возрастании  $kr$ , необходимо, чтобы выполнялось условие  $\alpha'' > 0$ . Таким образом, путь интегрирования в формуле (21.11) идет из плюс бесконечности по линии  $\alpha' = -\frac{\pi}{2}$  (рис. 47). При  $|\gamma| < k$  имеем  $|\sin \alpha| < 1$ , поэтому  $\alpha$  является вещественной величиной, и путь интегрирования проходит по вещественной оси до точки  $\alpha' = \frac{\pi}{2}$ . При  $\gamma > k$  аналогично доказывается, что путь интегрирования уходит в минус бесконечность по линии  $\alpha' = +\frac{\pi}{2}$ .

Рассмотрим дальнейшее поле излучения  $kr \gg 1$ ,  $kr \cos \alpha \gg 1$  (заметим, что в точках  $\alpha' = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha'' = 0$  контура  $\Gamma_1$  последнее неравенство не выполняется, однако всегда можно так деформировать контур, чтобы он не проходил через эти точки). Воспользовавшись асимптотическим представлением функции Ханкеля, запишем

$$p(r, z) \approx \frac{-i\omega\rho}{\pi \sqrt{kr}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\Gamma_1} \frac{B_0(k \sin \alpha)}{\cos^{1/2} \alpha} \cdot \frac{e^{ik(r \cos \alpha + z \sin \alpha)}}{H_1^{(1)}(ka \cos \alpha)} d\alpha. \quad (21.12)$$

Легко дать физическую интерпретацию этого интеграла. Экспоненциальный множитель под интегралом представляет собой плоскую волну, распространяющуюся в направлении, составляющем угол  $\alpha$  с нормалью к оси цилиндра. Таким образом, подынтегральное выражение представляет собой набор плоских волн, бегущих под различными углами к оси при любом азимутальном угле  $\varphi$ . При этом образуется конический набор плоских волн. Кроме обычных однородных плоских волн в наборе участвуют и неоднородные волны, затухающие с удалением от оси цилиндра. Однородные плоские волны образуются при вещественных значениях  $\alpha$ , неоднородные — при комплексных значениях. Действительно,

$$\text{ пусть } \alpha = -\frac{\pi}{2} + i\alpha'' \quad (\alpha'' > 0). \quad \text{ Тогда}$$

$$e^{ik(r \cos \alpha + z \sin \alpha)} = e^{-kr \operatorname{sh} \alpha'' - ikz \operatorname{ch} \alpha''}.$$

Последнее выражение представляет собой волну, бегущую вдоль оси  $z$  и затухающую в направлении, перпендикулярном  $z$ .

Интеграл (21.12) можно вычислить методом перевала. При  $kr \gg 1$  экспонента является быстро осциллирующей функцией. Если к тому же расстояние  $R$  значительно превосходит длину области  $h$  вдоль оси цилиндра (см. рис. 46), в которой колебательная скорость отлична от нуля, то функция  $B_0(k \sin \alpha)$  меняется на промежутке интегрирования значительно медленней, чем экспоненциальный множитель [для того чтобы это показать, следует, например, сравнить скорость изменения экспоненты и выражения (21.16а), полученного ниже для равномерного распределения возбуждения; очевидно, что при  $R \gg h$  экспонента осциллирует намного быстрее, чем  $B_0(k \sin \alpha)$ ].

Точка перевала  $\alpha_0$  определится из уравнения  $f'(\alpha_0) = 0$ , где  $f(\alpha)$  — показатель экспоненты. Решая это уравнение, получаем вид

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{z}{r} = \operatorname{tg} \beta \quad \text{или} \quad \alpha_0 = \beta. \quad (21.13)$$

Таким образом, стационарная точка определяет направление на точку наблюдения  $M$ . Перевальный путь  $\Gamma_0$  можно определить из условия

$$\operatorname{Im} [ik(r \cos \alpha + z \sin \alpha)] = \operatorname{const} = \\ = \operatorname{Im} [ik(r \cos \alpha_0 + z \sin \alpha_0)]. \quad (21.14)$$

Воспользовавшись равенством (21.13), находим уравнение перевального пути  $\Gamma_0$ :

$$\operatorname{ch} \alpha'' \cos(\alpha' - \beta) = 1.$$

Соответствующая кривая пересекает ось абсцисс в точке  $\alpha' = \beta$  под углом в  $45^\circ$  (см. рис. 47). Применяя формулу (21.1), находим

$$p(r, \beta) \approx \frac{-2\rho c}{\sqrt{2\pi} H_1^{(1)}(ka \cos \beta)} \cdot \frac{B_0(k \sin \beta)}{\cos \beta} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (21.15)$$

В отличие от случая, рассмотренного в § 18, последнее выражение определяет сферическую волну.

Заметим, что формула (21.15) представляет собой выражение типа

$$p(R, \beta) = A\Phi(\beta) \frac{e^{ikR}}{R}.$$

Таким образом, на большом расстоянии от цилиндра удается разделить выражение для звукового давления на два множителя, один из которых определяет сферическую волну, а второй не зависит от расстояния  $R$ . Этот результат является следствием принципа излучения (§ 3).

**Излучение звука конечным цилиндром, расположенным в жестком экране.** Вид функции  $B_0(\gamma)$ , входящей в формулу (21.15), зависит от конкретного амплитудно-фазового распределения колебательной скорости. Предположим, что излучателем является цилиндр высотой  $h$  с равномерным амплитудно-фазовым распределением. Излучающая поверхность дополнена до бесконечного цилиндра абсолютно жестким экраном. Распределение колебательной скорости имеет вид

$$v(z) = \begin{cases} v & \text{при } |z| < \frac{h}{2}; \\ 0 & \text{при } |z| > \frac{h}{2}. \end{cases}$$

По формуле (21.8), полагая  $n = 0$ , находим

$$B_0(\gamma) = \frac{v}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h/2}^{h/2} e^{-i\gamma z} dz = \frac{vh}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin \frac{\gamma h}{2}}{\frac{\gamma h}{2}}. \quad (21.16a)$$

Подставляя вместо  $\gamma$  величину  $k \sin \beta$ , получим

$$B_0(k \sin \beta) = \frac{vh}{\sqrt{2\pi}} \cdot \Phi(\beta),$$

где

$$\Phi(\beta) = \frac{\sin\left(\frac{kh}{2} \sin\beta\right)}{\frac{kh}{2} \sin\beta}. \quad (21.166)$$

Функция  $\Phi(\beta)$  является диаграммой направленности отрезка длиной  $h$ .

Формула (21.15) принимает вид

$$p(r, \beta) \approx \frac{-\rho cvh}{\pi \cos\beta H_1^{(1)}(ka \cos\beta)} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \Phi(\beta). \quad (21.17)$$

Проанализируем это выражение. При  $ka \ll 1$  имеем

$$H_1^{(1)}(ka \cos\beta) \approx -\frac{i2}{\pi ka \cos\beta}.$$

Таким образом,

$$p(R, \beta) \approx -i\rho cvh \cdot \frac{ka}{2} \Phi(\beta) \frac{e^{ikR}}{R}.$$

Из этой формулы следует, что характеристика направленности тонкого цилиндра в вертикальной плоскости совпадает с характеристикой направленности линейного отрезка, длина которого равна высоте цилиндра.

Рассмотрим теперь случай малого по высоте кольца ( $kh \ll 1$ ). Поскольку при этом  $\Phi(\beta) \approx 1$ , то множитель  $[\cos\beta \cdot H_1^{(1)}(ka \cos\beta)]^{-1}$  определяет диаграмму направленности низкого кольца, находящегося в абсолютно жестком цилиндрическом экране. Этот множитель учитывает влияние конечного размера по диаметру цилиндра на диаграмму направленности в вертикальной плоскости.

Излучающий цилиндр высотой  $h$  можно представить в виде набора большого числа колец, каждое из которых имеет малую волновую высоту. Произведение диаграммы направленности элементарного кольца на диаграмму отрезка высотой  $h$  и дает формулу (21.17). Этот факт является наглядной иллюстрацией теоремы умножения диаграмм направленности.

Рассмотрим теперь частный случай  $ka \cos\beta \gg 1$ , который соответствует цилиндру больших волновых размеров при углах  $\beta$ , не слишком близких к  $\pi/2$ . В этом случае

$$H_1^{(1)}(ka \cos\beta) \approx -i \sqrt{\frac{2}{\pi ka \cos\beta}} e^{ika \cos\beta - i\frac{\pi}{4}}.$$

Тогда из (21.17) находим

$$p(r, \beta) \approx -\frac{i\rho cvh \sqrt{ka}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\cos\beta}} \cdot \frac{e^{ik(R-a \cos\beta) + i\frac{\pi}{2}}}{R} \cdot \Phi(\beta). \quad (21.18)$$

Из последнего выражения следует, что при углах  $\beta$ , не слишком близких к  $\pi/2$ , диаграмма направленности цилиндра большого волнового диаметра лишь незначительно (из-за наличия слабо меняющегося множителя  $1/\sqrt{\cos\beta}$ ) отличается от диаграммы направленности отрезка.

Заметим, что фаза звукового давления определяется величиной  $k(R - a \cos\beta)$ . В частности, при  $\beta = 0$  фаза соответствует пути, пройденному волной от поверхности цилиндра (а не от центра цилиндра) до точки наблюдения. Сравним теперь фазу звукового

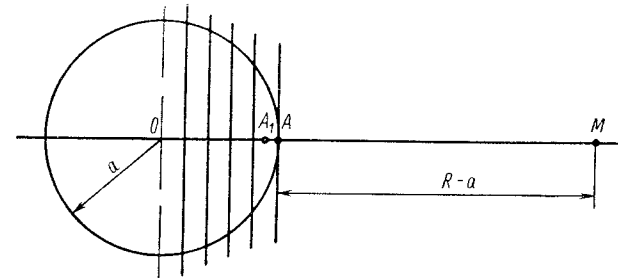


Рис. 48. Зоны Френеля на цилиндре больших волновых размеров.

давления, определяемого выражением (21.18), с фазой звукового давления малого источника звука

$$p_0 = -\frac{i\omega\rho Q}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}.$$

В выражение (21.18) входит дополнительный множитель  $e^{i\frac{\pi}{4}}$ . Появление этого множителя объясняется следующим образом. При большом волновом размере ( $ka \gg 1$ ) на поверхности цилиндра можно нарисовать ряд зон Френеля (рис. 48), причем поле в основном определяется вкладом нулевой зоны. Звуковые волны, приходящие в точку наблюдения  $M$  из различных участков нулевой зоны, имеют разные фазы, однако для всех участков длина пути несколько больше, чем расстояние  $R - a$ . В результате фаза суммарного колебания в точке наблюдения оказывается несколько больше величины  $k(R - a)$ . Поэтому наблюдателю, расположенному в удаленной точке, должно казаться, что эффективный излучатель расположен не в точке  $A$ , а в точке  $A_1$ , сдвинутой относительно точки  $A$  на величину  $\lambda/8$ .

В числителе выражения (21.18) стоит величина  $\sqrt{ka}$ . Это означает, что при увеличении радиуса звуковое давление, излучаемое цилиндром, возрастает медленнее, чем увеличивается площадь боковой поверхности. В отличие от плоского поршня, для которого интенсивность излучения пропорциональна площади колеблющейся поверхности, в случае цилиндра большого радиуса интенсивность излучения пропорциональна первой степени радиуса.



Вычислим теперь отношение звуковых давлений, излучаемых кольцом большого радиуса вдоль оси и перпендикулярно оси. Из формулы (21.18) следует

$$|p(R, 0)| \approx \frac{\rho c v h \sqrt{ka}}{\sqrt{2\pi} R}.$$

При вычислении  $p\left(R, \frac{\pi}{2}\right)$  по формуле (21.17) [очевидно, что нельзя воспользоваться выражением (21.18), поскольку оно справедливо лишь для значений  $\beta$ , не слишком близких к  $\pi/2$ ] возникает неопределенность. Раскрыв ее, находим

$$\left|p\left(R, \frac{\pi}{2}\right)\right| \approx \frac{\rho c v h k a}{2R} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Отношение звуковых давлений имеет вид

$$\left|\frac{p(\beta=0)}{p\left(\beta=\frac{\pi}{2}\right)}\right| \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi} k a \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Если длина цилиндра меньше длины звуковой волны, то отрезок длиной  $h$  имеет малую направленность. Поэтому величина  $\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$  близка к единице. Таким образом, в указанном случае звуковое давление, излучаемое вдоль оси, гораздо больше звукового давления, излучаемого перпендикулярно к оси. Если же длина цилиндра больше длины волны, то эти величины могут быть одного порядка. Заменяя в формуле (21.16б) числитель максимально возможным значением, равным единице, получим формулу, по которой можно оценить наибольший уровень излучения в направлении оси цилиндра:

$$\left.\frac{p(\beta=0)}{p\left(\beta=\frac{\pi}{2}\right)}\right|_{\min} = \sqrt{\frac{2h}{\lambda}} \sqrt{\frac{h}{a}}.$$

**Излучение звука точечным источником, расположенным на жесткой цилиндрической поверхности.** Рассмотрим излучение звука источником малых волновых размеров, расположенным на поверхности абсолютно жесткого цилиндра в точке с координатами  $\varphi_0, z_0$ . В этом случае распределение колебательной скорости по поверхности цилиндра можно записать в форме произведения дельта-функций:

$$v(\varphi, z) = \frac{Q(\varphi_0, z_0)}{a} \delta(z - z_0) \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (21.19)$$

Множитель  $1/a$  введен в последнее выражение для того, чтобы интеграл по поверхности цилиндра от функции  $v(\varphi, z)$  в точности был равен объемной скорости источника  $Q$ :

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\varphi, z) a d\varphi dz = Q(\varphi_0, z_0).$$

Воспользуемся выражением (21.9) и вычислим функцию  $B_n(\gamma)$  по формуле (21.8). В силу свойств дельта-функций получаем

$$B_n(\gamma) = \frac{Q(\varphi_0, z_0)}{a(2\pi)^{3/2}} e^{-in\varphi_0 - i\gamma z_0}.$$

Звуковое давление находим в следующей форме:

$$p_0(r, \varphi, z) = \frac{i\omega\rho Q(\varphi_0, z_0)}{a(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi - \varphi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(\sqrt{z^2 - \gamma^2} r) e^{i\gamma(z - z_0)}}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(1)'(\sqrt{k^2 - \gamma^2} a)} d\gamma.$$

Дальнейшее вычисление интеграла для дальнего поля ( $kr \gg 1$ ) проводится методом перевала в точности так же, как это было сделано при выводе формулы (21.15). В результате находим

$$p_0(R, \varphi, \beta) = \frac{Q(\varphi_0, z_0) \rho c}{2\pi^2 a \cos \beta} \cdot \frac{e^{ik(R - z_0 \sin \beta)}}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n \frac{\cos n(\varphi - \varphi_0)}{H_n^{(1)'(ka \cos \beta)}. \quad (21.20)$$

Сравним полученное выражение с формулой (18.29б), определяющей излучение звука линейным бесконечно длинным источником, расположенным вдоль образующей цилиндра. При  $\beta = 0$  (плоскость, перпендикулярная оси цилиндра) множители, характеризующие зависимость звукового давления от азимутальной координаты  $\varphi$ , в формулах (21.20) и (18.29б) совпадают. Таким образом, в плоскости  $\beta = 0$  направленные свойства точечного и линейного источников являются одинаковыми.

Имея выражение (21.20) (т. е. фактически функцию Грина), можно определить и поле источника с произвольным распределением колебательной скорости по поверхности цилиндра  $v = Q(\varphi_0, z_0)$ . Интегрируя (21.20) по поверхности цилиндра, получаем

$$p(R, \varphi, \beta) = \frac{\rho c}{2\pi^2} \cdot \frac{e^{ikR}}{R \cos \beta} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n (-i)^n}{H_n^{(1)'(ka \cos \beta)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} Q(\varphi_0, z_0) e^{-ikz_0 \sin \beta} \cos n(\varphi - \varphi_0) d\varphi_0 dz_0. \quad (21.21)$$

**Пересчет звукового давления при переходе от бесконечно длинного цилиндра к ограниченному цилиндру.** В § 18 были приведены формулы, позволяющие рассчитать звуковое давление, излучаемое бесконечно длинным цилиндром. Реальные излучающие цилиндры всегда являются конечными. Звуковое давление в дальнем поле должно убывать при удалении от конечного цилиндра не по цилиндрическому, а по сферическому закону. Материалы, приведенные в настоящем параграфе, дают возможность ввести поправочный мно-

житель, при помощи которого можно пересчитать звуковое давление при переходе от бесконечно длинного цилиндра к ограниченному цилиндру.

Звуковое давление, излучаемое бесконечно длинным цилиндром, можно записать в виде

$$p_{\text{дл}} = \frac{-i\rho c v}{H_1^{(1)}(ka)} H_0^{(1)}(kr) \approx_{kr \gg 1} -\frac{i\rho c v}{H_1^{(1)}(ka)} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i kr - i \frac{\pi}{4}}. \quad (21.22)$$

Звуковое давление  $p_{\text{огр}}$ , излучаемое ограниченным цилиндром в направлении  $\beta = 0$ , определяется по формуле (21.17). Очевидно, что  $\Phi(\beta) = 1$ ,  $R = r$ . Тогда

$$p_{\text{огр}} = -\frac{\rho c v h}{\pi H_1^{(1)}(ka)} \cdot \frac{e^{i kr}}{r}.$$

Составим отношение

$$\frac{p_{\text{дл}}}{p_{\text{огр}}} = \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{h} \sqrt{r \lambda}. \quad (21.23)$$

Последнее выражение и представляет собой коэффициент пересчета звукового давления при переходе от бесконечно длинного цилиндра к ограниченному. Множитель  $\sqrt{r}$  учитывает изменение характера излучения и появление сферической волны вместо цилиндрической.

Заметим, что все вычисления, проведенные выше, относились к излучению цилиндра, вставленного в абсолютно жесткий цилиндрический экран. Если же цилиндр является свободным, т. е. не имеет экрана, то задача резко усложняется. В этом случае возникает примерно та же ситуация, что и при излучении плоского поршня без экрана. Замена цилиндра без экрана цилиндром с экраном качественно эквивалентна введению приближения Кирхгофа для осциллирующего поршня.

На рис. 49 приведены диаграммы направленности плоского кольца, расположенного на поверхности абсолютно жесткого цилиндра. Для сравнения показана диаграмма направленности свободного кольца, рассчитанная по формуле

$$R(\beta) = J_0(\mu \cos \beta).$$

Заметим, что цилиндрический экран меньше влияет на поле излучающего цилиндра, чем плоский экран на поле плоского излучателя. Это должно быть понятно из интуитивных соображений. Действительно, плоский экран, окружающий плоский излучатель, препятствует появлению акустического короткого замыкания обеих сторон излучателя и существенно влияет на звуковое поле. Цилиндрический экран соприкасается с излучателем лишь вблизи торцов цилиндра. Поэтому и влияние его на поле должно быть меньше, чем влияние плоского экрана.

При увеличении волновой высоты цилиндра влияние экрана скатывается все меньше. При  $kh \gg 1$  (практически уже при  $h > \lambda$ ) поле колеблющегося цилиндра без экрана совпадает с полем цилиндра в экране.

Поправку, аналогичную формуле (21.23), можно приближенно ввести и для задачи дифракции звука на цилиндре. Представим

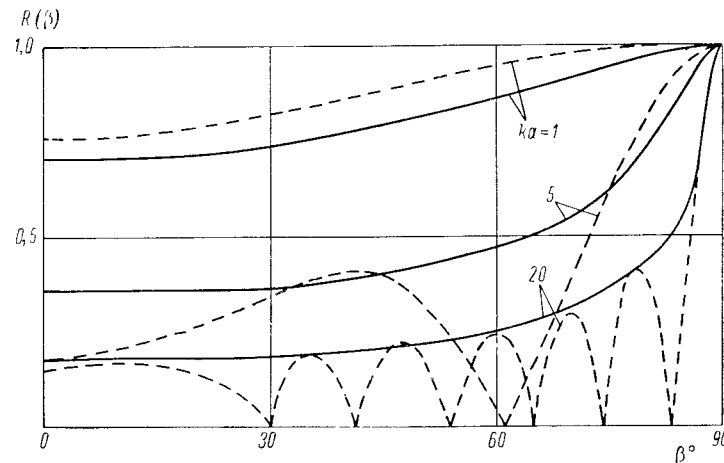


Рис. 49. Диаграмма направленности кольца в вертикальной плоскости. — для кольца, расположенного на жестком цилиндре; - - - для кольца без экрана.

рассеяние звука как результат излучения фиктивных источников, расположенных на поверхности цилиндра. Если  $kh \gg 1$ , то пренебрегая дифракцией на торцах, можно считать, что распределение источников по высоте не отличается от распределения звукового давления в падающей волне. Это рассуждение дает основание полагать, что в указанном приближении коэффициент перехода от дифракции на бесконечно длинном цилиндре к дифракции на ограниченном цилиндре будет совпадать со значением, определяемым формулой (21.23).

## § 22. Влияние цилиндрических рассеивателей на звуковое поле плоского направленного излучателя

Если перед плоским направленным излучателем звука находятся тела, рассеивающие звук, то их влияние будет проявляться в снижении звукового давления на оси главного максимума диаграммы направленности излучающего поршня. Предположим, что отрезок цилиндра длиной  $h$  находится в ближней зоне плоского направленного излучателя звука больших волновых размеров (рис. 50). Угол наклона оси цилиндра к излучающей плоскости  $S$  равен  $\beta$  (ясно, что угол поворота в плоскости, параллельной

поверхности поршня, не должен влиять на величину звукового давления в направлении главного максимума). Будем считать, что нам известна диаграмма рассеяния бесконечного цилиндра  $\Phi_S(\beta, \varphi)$ , зависящая от угла падения звука на цилиндр  $\beta$ , и азимутального угла  $\varphi$ . Поле, рассеянное бесконечным цилиндром в направлении падения, можно представить в следующем виде:

$$p_{s \text{ дл}} = p_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k R'}} e^{ikR' - i\frac{\pi}{4}} \Phi_S(\beta, 0). \quad (22.1)$$

Здесь  $p_0$  — амплитуда звукового давления в падающей плоской волне. В большинстве случаев диаграмма рассеяния для конечного

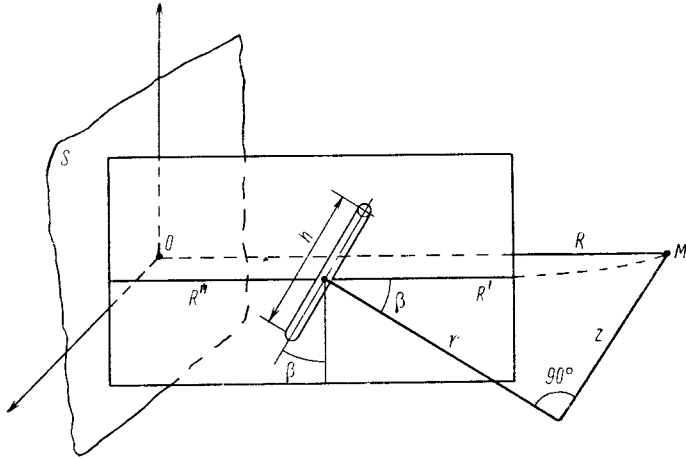


Рис. 50. Расположение излучающего поршня и рассеивающего отрезка.

цилиндра неизвестна. Поэтому необходимо перейти от значения  $p_s$ , определяемого выражением (22.1), к значению  $p_s$  для конечного цилиндра.

Заметим, что использование формулы (22.1) для бесконечного цилиндра без пересчета приводит к абсурду, хотя бы потому, что звуковая волна, излучаемая ограниченной поверхностью  $S$ , в дальнем поле подчинена сферическому закону, а рассеянное поле (22.1) — цилиндрическому. В то же время ясно, что закон изменения этих величин с расстоянием в дальнем поле должен быть одинаков.

При вычислениях будем предполагать, что длина цилиндра значительно больше любого линейного размера его поперечного сечения. Кроме того, допустим, что  $h > \lambda$ . При этих условиях можно воспользоваться рассуждениями, приведенными в конце § 21, и заменить коэффициент пересчета для задачи рассеяния коэффициентом пересчета для задачи излучения. При нормальном падении звука на рассеивающий цилиндр можно непосредственно воспользоваться формулой (21.23). Однако в рассматриваемом случае ( $\beta \neq 0$ ) следует заново вычислить коэффициент пересчета.

Очевидно, что при наклонном падении звука во все выражения должен входить фазовый экспоненциальный множитель  $\exp(ikz \times \sin \beta)$ . Поэтому колебательная скорость фиктивных источников на цилиндре может быть записана в виде

$$v = v_0 e^{ikz \sin \beta}. \quad (22.2)$$

Вычислим сначала звуковое давление, излучаемое бесконечным цилиндром с распределением колебательной скорости, определяемым равенством (22.2). Воспользуемся формулой (21.9) и найдем  $B(\gamma)$  по формуле (21.8) [заметим, что использовать формулу (21.15) в данном случае нельзя, поскольку она справедлива для конечного цилиндра лишь при  $kR \gg 1$ ]. Полагая  $n = 0$ , находим

$$B_0(\gamma) = \frac{v_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz(k \sin \beta - \gamma)} dz = v_0 \sqrt{2\pi} \delta(k \sin \beta - \gamma).$$

Подставим это значение в (21.9). В силу свойств дельта-функции (11.6), получим после интегрирования

$$p_{\text{дл}}(r, z) = -\frac{i\rho c v_0}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{H_0^{(1)}(kr \cos \beta)}{H_1^{(1)}(ka \cos \beta)} e^{ikz \sin \alpha}. \quad (22.3)$$

Пусть точка наблюдения  $M$  лежит на оси главного максимума. Тогда  $r = R' \cos \beta$ . Для дальней зоны ( $kr \cos \beta \gg 1$ ) можно записать

$$p_{\text{дл}}(r, z) \approx -\frac{i\rho c v_0}{\cos^2 \beta H_1^{(1)}(ka \cos \beta)} \sqrt{\frac{2}{\pi k R'}} e^{ikR' - i\frac{\pi}{4}}. \quad (22.4)$$

Определим теперь звуковое давление, излучаемое ограниченным цилиндром длиной  $h$  со следующим распределением колебательной скорости:

$$v = \begin{cases} v_0 e^{ikz \sin \beta} & \text{при } |z| < \frac{h}{2}; \\ 0 & \text{при } |z| > \frac{h}{2}. \end{cases}$$

При этом мы полагаем, что рассматриваемый излучатель в виде короткого цилиндра высотой  $h$  дополнен до бесконечного цилиндра абсолютно жестким цилиндрическим экраном. При указанных выше допущениях относительно соотношения между длиной цилиндра и размерами его поперечного сечения введение жесткого цилиндра не должно существенно сказываться на результате.

Согласно (21.8) найдем

$$B_0(\gamma) = v_0 \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin \left[ \frac{h}{2} (k \sin \beta - \gamma) \right]}{k \sin \beta - \gamma}.$$

В данном случае  $\gamma = k \sin \beta$ , поэтому  $B_0(k \sin \beta) = \frac{v_0 h}{\sqrt{2\pi}}$ . Из формулы (21.15) получаем

$$\rho_{\text{орг}} = - \frac{\rho c v_0 h}{\pi \cos \beta H_1^{(1)}(ka \cos \beta)} \cdot \frac{e^{ikR'}}{R'}. \quad (22.5)$$

Составим отношение  $\rho_{\text{дл}}/\rho_{\text{орг}}$ , по-прежнему считая, что точка наблюдения находится на оси главного максимума:

$$\frac{\rho_{\text{дл}}}{\rho_{\text{орг}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{h \cos \beta} \sqrt{R' \lambda}. \quad (22.6)$$

Последняя формула отличается от выражения (21.23) лишь наличием множителя  $1/\cos \beta$ .

Полагая, что имеет место приближенное равенство

$$\frac{\rho_s \text{ дл}}{\rho_s \text{ орг}} \approx \frac{\rho_{\text{дл}}}{\rho_{\text{орг}}},$$

можно найти звуковое давление в волне, рассеянной ограниченным цилиндром:

$$\rho_s \text{ орг} \approx - \frac{ih\rho_0 \cos \beta}{\pi} \cdot \frac{e^{ikR'}}{R'} \Phi_s(\beta, 0). \quad (22.7)$$

Как и следовало ожидать, волна  $\rho_s \text{ орг}$  является сферической.

Предположим, что излучателем звука служит плоский поршень с равномерным распределением амплитуды и фазы. Тогда звуковое давление на его оси можно записать в виде

$$\rho_1 = - \frac{ik\rho c v S}{2\pi} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (22.8)$$

Здесь  $S$  — площадь поршня;  $v$  — колебательная скорость его поверхности.

Если все размеры поршня велики по сравнению с длиной волны звука, то для ближнего поля в среднем можно положить  $\rho c v \approx \rho_0$ , где  $\rho_0$  — амплитуда звукового давления в плоской волне, которая излучалась бы бесконечной плоскостью, колеблющейся со скоростью  $v$ . На рассеивающий цилиндр будет падать волна  $\rho_0 e^{ikR'}$ . При этом  $R = R' + R''$ . Полное поле в точке наблюдения на оси главного максимума диаграммы направленности поршня определится в виде

$$\rho = \rho_1 + \rho_s e^{ikR''}.$$

С учетом формул (22.7), (22.8), полагая, что в дальнем поле для амплитудных членов  $R \approx R'$ , получим

$$\rho \approx \rho_1 \left[ 1 + \frac{2h \cos \beta}{kS} \Phi_s(\beta, 0) \right]. \quad (22.9)$$

Второе слагаемое в квадратных скобках определяет влияние рассеивающего цилиндра на звуковое поле.

Из выражения (22.9) следует, что влияние рассеивателя пропорционально длине его проекции на плоскость излучателя и обратно пропорционально площади излучающей поверхности.

Если перед излучающей поверхностью находится несколько рассеивающих тел, то с учетом взаимодействия (многократного рассеяния звука между ними) поле  $\Phi_s$  можно вычислить методом, изложенным в § 20. В случае, когда расстояния между телами велики настолько, что их взаимодействие пренебрежимо мало, величину  $\Phi_s$  приближенно можно определять как сумму рассеянных полей для каждого из тел в отдельности.

Пусть радиус рассеивающего цилиндра намного меньше длины волны звука ( $ka \ll 1$ ). Если теперь для определения  $\Phi_s$  воспользоваться формулой (18.39), то выражение (22.9) приведет к парадоксальному результату  $|p| > |p_1|$ , из которого следует, что рассеяние звука препятствием должно усиливать звуковое давление на оси главного максимума диаграммы излучателя. Это явно ошибочное заключение основано на том, что при выводе формулы (18.39) были отброшены все члены, имеющие порядок малости выше, чем  $(ka)^2$ . В частности, в формуле для  $\Phi_s$  не учтены вещественные слагаемые, имеющие порядок  $(ka)^4$ . При вычислении же модуля комплексной величины (22.9) мнимые члены порядка  $(ka)^3$  и вещественные члены порядка  $(ka)^4$  дают соизмеримые вклады.

Проведем вычисления более точно, сохраняя при делении комплексных чисел в выражении (18.34) вещественные части. В результате вместо (18.39) получим

$$\Phi_s(\beta, 0) \approx \frac{i\pi (ka \cos \beta)^2}{4} \left[ 1 + \frac{i3\pi}{4} (ka \cos \beta)^2 \right]. \quad (22.10)$$

Подставляя это значение в формулу (22.9) и пренебрегая малыми членами, найдем

$$|p| \approx |p_1| \sqrt{1 - \frac{\pi^2 h (ka)^4 \cos^5 \beta}{4kS} \left( 3 - \frac{h \cos \beta}{kS} \right)}.$$

Таким образом, при более тщательном вычислении оказывается, что  $|p| < |p_1|$ .

Отметим также следующее обстоятельство. Выше предполагалось, что амплитуда звукового давления в волне, падающей на цилиндр, может быть определена как  $\rho_0 \approx \rho c v$ . Однако ближнее поле направленного излучателя является неравномерным. В зоне Френеля наблюдаются интерференционные максимумы и минимумы, причем амплитуда звукового давления в максимумах может вдвое превосходить среднюю величину  $\rho_0$ . Если рассеивающий цилиндр попадает в область, где звуковое давление максимально, то и амплитуда звукового давления в рассеянном поле будет вдвое больше средней величины  $\rho_s$ .

Таким образом, перед вторым слагаемым в выражении (22.9), вообще говоря, должен еще стоять множитель, зависящий от расположения цилиндра вдоль поверхности поршня, причем максимальное значение этого множителя приблизительно равно двум. Если же перед поршнем расположено большое количество ( $N$ ) рассеивателей таким образом, что часть из них может оказаться в максимумах, а часть — в минимумах интерференционной картины, то среднее значение этого множителя можно принять равным единице. Тогда без учета взаимодействия между рассеивателями из формулы (22.9) получим

$$\rho \approx \rho_1 \left[ 1 + \frac{2}{kS} \sum_{q=1}^N h_q \cos \beta_q \Phi_{sq}(\beta_q, 0) \right]. \quad (22.11)$$

Аналогичное усреднение интерференционных максимумов и минимумов будет иметь место и в том случае, когда звуковое поле является не монохроматическим, а представляет собой широкий спектр частот.

В силу принципа взаимности все результаты настоящего параграфа остаются справедливыми, если поршень работает не только как излучатель, но и как приемник звуковых колебаний.

### § 23. О сходимости рядов, определяющих звуковые поля в цилиндрических координатах

Для выполнения численных расчетов по формулам, включающим бесконечные ряды с использованием цилиндрических функций, необходимо иметь оценки быстроты сходимости рядов. Охватить здесь все встречающиеся случаи невозможно, ввиду разнообразия ситуаций, возникающих при практических расчетах. Поэтому рассматриваются наиболее типичные случаи.

Как было показано выше (§ 18), при малых значениях волнового размера ( $x = ka \ll 1$ ) в разложениях, определяющих звуковые поля, достаточно оставить один или два первых члена. При увеличении  $ka$  количество членов, которые следует вычислить для получения достаточной точности, будет возрастать.

Нашей дальнейшей задачей является оценка степени сходимости рядов при больших значениях  $ka$ .

**Асимптотические представления цилиндрических функций.** Приведенные ниже асимптотические выражения справедливы для значений  $x \gg 1$  при условии  $|x - n| \gg x^{1/3}$ .

При  $x > n$  справедливы следующие приближенные формулы [76], [103]:

$$\left. \begin{aligned} H_n^{(1), (2)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{x^2 - n^2}}} e^{\pm i \left( \sqrt{x^2 - n^2} - n \arccos \frac{n}{x} - \frac{\pi}{4} \right)}; \\ J_n(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{x^2 - n^2}}} \cos \left( \sqrt{x^2 - n^2} - n \arccos \frac{n}{x} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (23.1)$$

Знак плюс соответствует функции  $H_n^{(1)}(x)$ .

При  $x \gg n$  приведенные выражения переходят в асимптотические формулы

$$\left. \begin{aligned} H_n^{(1), (2)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i \left( x - \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4} \right)}; \\ J_n(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (23.2)$$

При  $n > x$  вместо формул (23.1) следует использовать выражения

$$\left. \begin{aligned} H_n^{(1), (2)}(x) &\approx \mp i \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{n^2 - x^2}}} e^{\left[ n \ln \frac{n + \sqrt{n^2 - x^2}}{x} - \sqrt{n^2 - x^2} \right]}; \\ J_n(x) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \sqrt{n^2 - x^2}}} e^{- \left[ n \ln \frac{n + \sqrt{n^2 - x^2}}{x} - \sqrt{n^2 - x^2} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (23.3)$$

Знак минус соответствует функции  $H_n^{(1)}(x)$ . Указанные выражения являются первыми членами асимптотических разложений по степеням величины  $\frac{1}{\sqrt{n^2 - x^2}}$ . Полные ряды, позволяющие оценить точность формул (23.1)–(23.3), приведены в [76] на стр. 977, причем, сравнивая эти выражения с формулами (23.1)–(23.3), следует учесть соотношения

$$\alpha = \ln \frac{n + \sqrt{n^2 - x^2}}{x}; \quad \text{th } \alpha = \frac{\sqrt{n^2 - x^2}}{n}.$$

Заметим, кроме того, что в формуле (8.452.2) справочника [76] пропущен знак минус перед правой частью.

**Пример 1. Дифракция на абсолютно мягком цилиндре большого волнового радиуса  $x = ka \gg 1$ .**

Коэффициенты разложения определяются выражениями

$$A_n = -i^n \varepsilon_n \frac{J_n(x)}{H_n^{(1)}(x)}.$$

При  $n < x$  можно использовать формулы (23.1). Тогда получаем

$$A_n \approx -i^n \varepsilon_n \frac{\cos \left( \sqrt{x^2 - n^2} - n \arccos \frac{n}{x} - \frac{\pi}{4} \right)}{e^{i \left( \sqrt{x^2 - n^2} - n \arccos \frac{n}{x} - \frac{\pi}{4} \right)}}.$$

С увеличением  $n$  последнее выражение осциллирует, однако максимальные по модулю значения  $A_n$  не уменьшаются. Если же  $n > x$ , то следует воспользоваться формулами (23.3). Тогда имеем

$$A_n \approx i^n \frac{\varepsilon_n}{2} e^{-2 \left[ n \ln \frac{n + \sqrt{n^2 - x^2}}{x} - \sqrt{n^2 - x^2} \right]}.$$

При увеличении  $n$  показатель экспоненты изменяется приблизительно по закону  $-2n \left[ \ln \frac{2n}{x} - 1 \right]$ . Если  $\frac{2n}{x} > e$ , то  $\ln \frac{2n}{x} - 1 > 0$ . Поэтому показатель экспоненты растет (по абсолютной величине) быстрее, чем  $2n$ . Таким образом, при  $n > x$  ряд начинает сходиться. Для практических расчетов достаточно ограничиться членами  $n = (1,5 \div 2)x$ . Например, при  $x = 15$  и  $n = 25$  получаем  $|A_n| \approx e^{-15} \approx 3 \cdot 10^{-7}$ .

### Пример 2. Излучение звука цилиндром.

Воспользуемся формулой (18.18) и рассмотрим сначала дальнее поле ( $kr \gg ka \gg 1$ ). Получим

$$p \approx i\rho c \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr-i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (-i)^n \cos n\varphi}{H_n^{(1)'}(ka)}. \quad (23.4)$$

Как и в примере 1, сомножители  $1/H_n^{(1)'}(ka)$  при  $n > ka$  быстро убывают. Коэффициенты  $a_n$  так же убывают с ростом  $n$  и дополнительно улучшают сходимость. Поэтому в данном случае оценка необходимого количества членов ряда совпадает с оценкой, приведенной в примере 1.

Произведем теперь исследование для ближнего поля и рассмотрим крайний случай  $r = a$ . Ряд (18.18) принимает вид

$$p = i\rho c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \cos n\varphi. \quad (23.5)$$

Сходимость ряда (23.5) является значительно более медленной, чем сходимость ряда (23.4), поскольку в числителе (23.5) стоит сомножитель  $H_n^{(1)}(ka)$ , возрастающий с ростом  $n$ . Проведем оценку величины

$$I_n = \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} = \frac{2H_n^{(1)}(ka)}{H_{n-1}^{(1)}(ka) - H_{n+1}^{(1)}(ka)}.$$

При  $n-1 > ka \gg 1$  имеет место неравенство  $|H_{n-1}^{(1)}(ka)| \ll |H_{n+1}^{(1)}(ka)|$ . Поэтому

$$I_n \approx -\frac{2H_n^{(1)}(ka)}{H_{n+1}^{(1)}(ka)} \approx -2 \frac{\sqrt{(n+1)^2 - x^2}}{\sqrt{n^2 - x^2}} \times \\ \times \frac{e^{n \ln \frac{n + \sqrt{n^2 - x^2}}{x}} - \sqrt{n^2 - x^2}}{e^{(n+1) \ln \frac{n+1 + \sqrt{(n+1)^2 - x^2}}{x}} - \sqrt{(n+1)^2 - x^2}}.$$

При  $n^2 \gg x^2$  можно заменить  $\sqrt{n^2 - x^2}$  на  $n$ . Тогда

$$I_n \approx -2e^{1+n \ln \frac{n}{n+1} - \ln \frac{2(n+1)}{x}}.$$

Оценка суммы первых двух слагаемых в показателе экспоненты дает

$$1 + n \ln \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \approx 1 + n \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \approx 1 - n \cdot \frac{1}{n} = 0.$$

В результате получаем

$$I_n \approx -\frac{x}{n+1}. \quad (23.6)$$

Оценка (23.6) показывает, что величины  $I_n$ , входящие в члены ряда (23.5), убывают весьма медленно. Поэтому сходимость ряда определяется степенью убывания коэффициентов  $a_n$ . Рассмотрим, например, излучение цилиндра с равномерным амплитудно-фазовым распределением колебательной скорости по дуге  $2\alpha_0$ . В этом случае коэффициенты  $a_n$  пропорциональны отношению  $\sin n\alpha_0/n\alpha_0$ . Таким образом, коэффициенты ряда (23.5) убывают по закону  $1/n^2$ , и сходимость является весьма слабой. Для определения звуковых давлений на поверхности цилиндра необходимо брать в три—пять раз больше членов, чем для вычисления звукового давления в дальнем поле. Следует, однако, помнить, что при  $n \gg x$  и числитель, и знаменатель (23.5) являются настолько большими величинами, что уже не могут поместиться в памяти вычислительной машины. Поэтому непосредственное применение формулы (23.5) невозможно. Для того чтобы произвести расчет, следует перед началом вычисления, используя асимптотические представления цилиндрических функций, сократить числитель и знаменатель (23.5) на большую величину, т. е. произвести деление экспонент в аналитическом виде так, как это было выполнено при выводе (23.6).

Заметим, что сходимость ряда существенно улучшается в том случае, когда точка наблюдения находится не точно на поверхности тела, а на некотором (хотя бы и небольшом) расстоянии от него. Если  $kr > ka$ , то для членов  $n > kr$  получаем оценку, аналогичную оценке (23.6):

$$I_n \approx -\frac{x}{n+1} \left( \frac{a}{r} \right)^n. \quad (23.7)$$

При  $a < r$  второй сомножитель обеспечивает улучшение сходимости ряда.

Для практических расчетов звуковых полей с помощью бесконечных рядов важно установить критерий, при выполнении которого можно заканчивать вычисление членов ряда. В качестве такого критерия иногда используют сравнение очередного члена ряда  $A_n$  с некоторой малой величиной  $\varepsilon$  и составляют программу таким образом, чтобы счет останавливался при  $n = N$ , для которого  $|A_n| < \varepsilon$ . Заметим, что применение этого критерия во многих случаях ведет к грубым ошибкам. Наиболее часто ошибки возникают в тех случаях, когда в выражение для  $A_n$  входят осциллирующие функции (например, тригонометрические или цилиндрические). При некотором номере  $n$  осциллирующая величина  $A_n$  может оказаться близкой к нулю, и вычислительная машина прекратит счет задолго до того, как будет достигнута достаточно хорошая сходимость.

Более надежным является критерий, согласно которому счет можно останавливать в том случае, когда несколько членов подряд оказываются малыми, однако и этот критерий полностью не гарантирует сходимость. Простейшим примером здесь может служить ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , который вообще расходится, в то время как применение последнего критерия приведет к остановке счета при  $n = N = 1/\epsilon$ .

Поэтому всегда следует стремиться находить остаток  $\left| \sum_{n=N}^{\infty} A_n \right|$  (на-  
пример, заменяя ряд интегралом при достаточно больших  $N$ ) и  
прекращать вычисление на машине только при значениях  $n = N$ ,  
обеспечивающих выполнение условия  $\left| \sum_{n=N}^{\infty} A_n \right| < \epsilon$ .

#### § 24. Излучение и дифракция звука цилиндром большого волнового радиуса

Как было указано в § 23, при расчете вол-  
новых полей, излучаемых и дифрагированных цилиндрическими по-  
верхностями, в большинстве случаев следует сохранять в разложениях  
звуковых полей количество членов ряда, определяемое соотноше-  
нием  $N \approx (1,5 \div 2)ka$ . Таким образом, при увеличении волновых раз-  
меров цилиндров сходимость рядов ухудшается.

Современные ЭЦВМ позволяют эффективно вычислять значения  
цилиндрических функций при значениях аргумента и индекса по-  
рядка нескольких сотен. Так, например, на машине БЭСМ-4 для  
расчета набора функций  $J_n(x)$  и  $N_n(x)$  при  $x = 500$  и  $n = 0, 1, \dots$ ,  
1000 требуется затратить  $\sim 15$  сек. Полагая, что для расчета одного  
коэффициента при известных значениях цилиндрических функций  
необходимо  $\sim 10^2$  операций (с учетом того обстоятельства, что для  
вычисления одного значения тригонометрической функции, входящей  
в выражения типа (23.4), необходимо 70 тактов работы машины),  
получим, что для вычисления суммы  $10^3$  членов ряда потребуется  $10^5$   
операций или  $\sim 5$  сек (при средней скорости  $2 \cdot 10^4$  операций в секунду).  
Таким образом, для того чтобы вычислить диаграмму направленности  
при  $ka = 500$  в интервале  $(0, 180^\circ)$ , необходимо затратить  $15 + 5 \times$   
 $\times 180$  сек  $\approx 15$  мин.

Проведенный подсчет показывает, что для вычисления волновых  
полей даже при значениях  $ka$  порядка нескольких сотен требуется  
сравнительно небольшое машинное время.

Однако несмотря на то, что ряды по цилиндрическим функциям  
формально определяют точное решение задачи, они обладают рядом  
существенных недостатков. Главный из них заключается в том, что  
ряды не дают возможности провести исследование в аналитическом  
виде без выполнения расчетов на машине. Поэтому, чтобы составить  
представление о поведении волновых полей, требуется провести так  
называемый «численный эксперимент», т. е. выполнить ряд расчетов  
при различных значениях параметров и сопоставить полученные  
результаты. Провести физический анализ, выделить различные типы

отраженных и дифрагированных волн таким способом оказывается  
затруднительно.

Существуют методы, позволяющие выполнять приближенное  
суммирование рядов по цилиндрическим функциям при больших  
значениях параметра  $ka$ . Одним из таких методов является преобра-  
зование Ватсона [103].

**Ряд Ватсона для звукового поля линейного источника, располо-  
женного на цилиндре.** Рассмотрим излучение звука в направле-  
нии  $\varphi$  линейным источником  $Q$  малых волновых размеров, распо-  
ложенным на поверхности абсолютного жесткого цилиндра в точке  $\varphi_0 = 0$ .

На основании формулы (18.29а) точное решение можно записать  
в виде

$$p(r, \varphi) = \frac{i\rho c Q}{2\pi a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\varphi}, \quad (24.1)$$

где

$$A_n = \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(k)}$$

При записи последнего выражения использовано свойство цилин-  
дрических функций

$$H_v^{(1)}(x) = e^{-iv\pi} H_{-v}^{(1)}(x). \quad (24.2)$$

Идея преобразования Ватсона заключается в следующем: ряд  
(24.1) преобразуется в интеграл на комплексной плоскости, который  
вычисляется как сумма вычетов в полюсах подынтегрального выра-  
жения. При этом выражение сводится к новому ряду, быстро сходя-  
щемуся при больших значениях  $ka$ .

Возьмем интеграл

$$I = \int_{C_1} \frac{A(v) e^{iv(\varphi-\pi)}}{\sin \pi v} dv. \quad (24.3)$$

Контур  $C_1$  охватывает полюса подынтегрального выражения,  
расположенные на вещественной оси,  $v = \dots, -1, 0, 1, \dots$  (рис. 51).  
Предполагается, что функция  $A(v)$  не имеет особенностей на веще-  
ственной оси. Вычисляя интеграл по формуле Коши, находим

$$I = -2\pi i \sum_{v=n}^{\infty} \operatorname{Res} \frac{A(v)}{\sin \pi v} e^{iv(\varphi-\pi)} = -2i \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\varphi}. \quad (24.4)$$

Знак минус в последнем выражении соответствует обходу полюсов  
по часовой стрелке.

Воспользовавшись формулами (24.3), (24.4), выражение (24.1)  
можно записать в виде интеграла

$$p(r, \varphi) = -\frac{\rho c Q}{4\pi a} \int_{C_1} \frac{A(v) e^{iv(\varphi-\pi)}}{\sin \pi v} dv. \quad (24.5)$$

Функция  $A(v)$  является четной. Поэтому последнее выражение можно представить в следующей форме:

$$\rho(r, \varphi) = -\frac{\rho c Q}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} A(v) \frac{\cos v(\varphi - \pi)}{\sin \pi v} dv. \quad (24.6)$$

Здесь путь интегрирования проходит над вещественной осью.

Исследуем поведение функции  $A(v)$  в верхней полуплоскости.

Функция  $A(v)$  имеет полюса, соответствующие нулям функции  $H_{\nu}^{(1)'}(ka)$ . Эти полюса расположены вдоль линий, находящихся

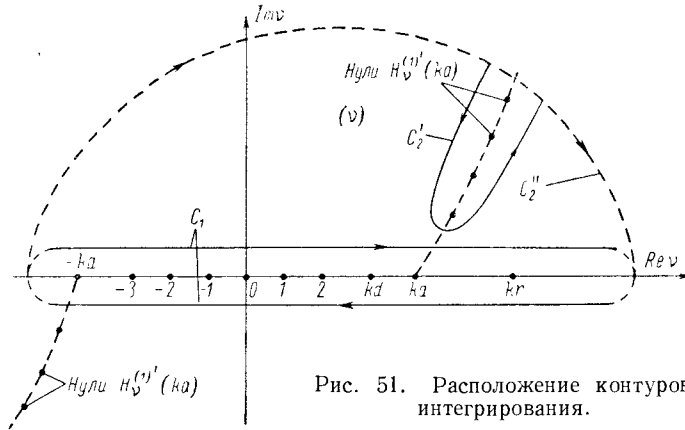


Рис. 51. Расположение контуров интегрирования.

в первом и четвертом квадрантах (см. рис. 51). Вычисление корней  $v_m$  уравнения  $H_{\nu_m}^{(1)'}(ka) = 0$  приведено ниже.

При увеличении  $|v|$  функция  $|A(v)|$  убывает. Для того чтобы это показать, рассмотрим область, расположенную на рис. 51 в первом квадранте справа от нулей функции  $H_{\nu}^{(1)'}(ka)$ . В этой области асимптотические формулы (23.3) справедливы и при комплексных значениях индекса. При  $|v| \gg ka$ ,  $|v| \gg kr$ , заменяя в формулах (23.3)  $\sqrt{v^2 - x^2} \approx v$ , находим

$$A(v) \approx \frac{2H_{\nu}^{(1)}(kr)}{H_{\nu-1}^{(1)}(ka) - H_{\nu+1}^{(1)}(ka)} \approx \frac{2H_{\nu}^{(1)}(kr)}{H_{\nu+1}^{(1)}(ka)} \approx e \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{\nu} \frac{ka}{\nu+1}.$$

Поскольку  $r > a$ , то при увеличении  $|v|$  последнее выражение убывает.

Используя асимптотические представления цилиндрических функций, справедливые в других областях плоскости  $v$  (см. [103]), можно доказать, что  $|A(v)|$  убывает при  $|v| \rightarrow \infty$  во всей верхней полуплоскости за исключением окрестностей точек  $v = v_m$ .

Множитель  $\cos v(\varphi - \pi) / \sin \pi v$  при увеличении  $|v|$  остается ограниченным. Это можно показать, приняв  $v = v' + iv''$  и выполнив предельный переход  $v'' \rightarrow \infty$ .

На основании приведенных рассуждений можно замкнуть путь интегрирования в верхней полуплоскости окружностью большого радиуса, не изменяя значения интеграла. В этом случае можно ограничиться интегрированием по петле  $C_2 = C_2' + C_2''$ , замыкающейся в бесконечности (рис. 51). Интеграл будет равен сумме вычетов в полюсах  $v_m$ :

$$\rho(r, \varphi) = -2\pi i \frac{\rho c Q}{2\pi a} \sum_{s=1}^{\infty} \text{Res} \left\{ \frac{H_{\nu_s}^{(1)}(kr)}{H_{\nu_s}^{(1)'}(ka)} \cdot \frac{\cos v(\varphi - \pi)}{\sin \pi v} \right\}.$$

Вычисляя вычеты, находим

$$\rho(r, \varphi) = \frac{i\rho c Q}{a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos v_s(\varphi - \pi)}{\sin \pi v_s} \left. \frac{H_{\nu_s}^{(1)}(kr)}{\frac{\partial}{\partial v} H_{\nu_s}^{(1)'}(ka)} \right|_{v=v_s}. \quad (24.7)$$

Тригонометрические функции можно представить в виде

$$\frac{\cos v_s(\varphi - \pi)}{\sin \pi v_s} = -i \frac{e^{iv_s\varphi} + e^{iv_s(2\pi - \varphi)}}{1 - e^{2\pi i v_s}}. \quad (24.8)$$

Выражение (24.7) можно теперь переписать следующим образом:

$$\rho(r, \varphi) = -\frac{\rho c Q}{a} \sum_{s=1}^{\infty} B_s \frac{H_{\nu_s}^{(1)}(kr)}{1 - e^{2\pi i v_s}} \left[ e^{iv_s\varphi} + e^{iv_s(\varphi - \pi)} \right]. \quad (24.9)$$

Здесь  $B_s$  — коэффициенты, определяемые как

$$B_s = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial v} [H_{\nu}^{(1)'}(ka)]} \Big|_{v=v_s}. \quad (24.10)$$

Рассмотрим подробнее ряд (24.9). Внешне он похож на исходный ряд (24.1). В формуле (24.9) разложение ведется по функциям  $\psi_s = H_{\nu_s}^{(1)}(kr) e^{\pm iv_s\varphi}$ , в формуле (24.1) — по функциям  $\psi_n = H_n^{(1)}(kr) e^{\pm in\varphi}$ . Однако между указанными выражениями имеется глубокое различие.

Функции  $\psi_n$  были получены в § 18 путем деления переменных в уравнении Гельмгольца, представленном в цилиндрических координатах. При выводе этих функций вначале находились угловые формы колебаний; для определения набора чисел  $m$  потребовалось использовать условие, согласно которому поле является периодическим по углу  $\varphi$ . Из этого условия следует, что числа  $m$  — целые. Далее из решения уравнения Бесселя (18.6) были получены цилиндрические функции с целым индексом. Таким образом, в выражениях для  $\psi_n$  тригонометрические функции являются основными, а цилиндрические функции — вторичными. В результате  $\psi_n$  описывают



волны, расходящиеся от центра цилиндра. В центре цилиндра при  $r = 0$  функции  $H_n^{(1)}(kr)$  имеют особенность. Поэтому наблюдателю вне цилиндра кажется, что эти волны исходят из центра (рис. 52, а)

При больших значениях  $ka$  функции  $\psi_n$  неудобны для описания волновых полей. Если за телом имеется глубокая акустическая тень, то для описания подобного поля необходимо взять большое количество членов ряда. Причина этого состоит в том, что тригонометрические функции не приспособлены для представления полей с глубокими провалами. В таких случаях говорят, что метод не адекватен задаче.

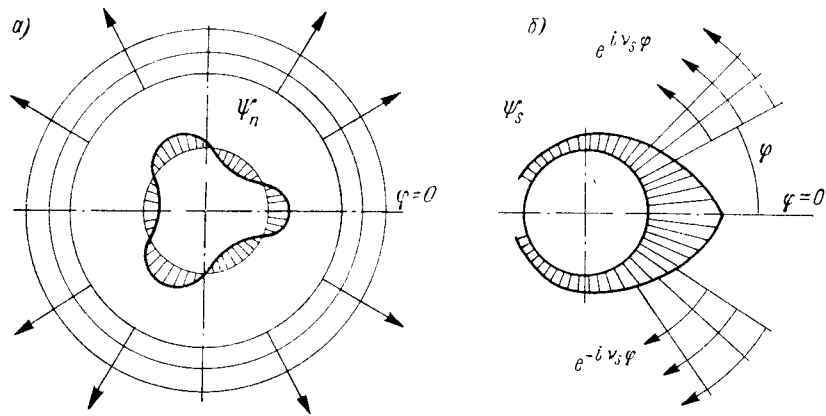


Рис. 52. Волновые поля, соответствующие функциям  $\Psi_n$  и  $\Psi_s$ .

В отличие от разложения с использованием  $\psi_n$  при разложении по функциям  $\psi_s$  основными являются радиальные функции  $H_{v_s}^{(1)}(kr)$  с комплексным индексом. Экспоненциальные множители  $e^{\pm i v_s \varphi}$  описывают волны, распространяющиеся по окружности с волновыми числами  $v_s$  по часовой и против часовой стрелки. При таком подходе каждая из функций  $\psi_s$  характеризует поле, излучаемое мнимыми (фиктивными) источниками, расположенными на каком-либо из лучей (например, на луче  $\varphi = 0$ , как показано на рис. 52, б). Для каждой из функций  $\psi_s$  в данном случае уже не имеет места однозначность при обходе вокруг цилиндра на угол  $2\pi$ , поскольку  $\psi_s(\varphi) \neq \psi_s(\varphi + 2\pi)$  ( $v_s$  не является целым числом). Физически это объясняется тем, что при переходе через линию источников поле должно испытывать скачок, который компенсируется потенциалом этих источников.

Величины  $v_s$  являются комплексными числами с положительной мнимой частью. Поэтому волны, бегущие вокруг источника, по мере распространения затухают. Заметим, что волна  $e^{-i v_s \varphi} = e^{v_s \varphi - i v_s \varphi}$  является затухающей в связи с тем, что угол  $\varphi$  уменьшается при движении против часовой стрелки. На рис. 52 заштрихованы эпюры распределения амплитуды волн  $\psi_n$  и  $\psi_s$ .

Комбинация экспоненциальных слагаемых, стоящая в квадратных скобках выражения (24.9), определяет функцию, значение которой в некоторой точке в пределах  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  подчиняется условию  $p(r, \varphi) = p(r, 2\pi - \varphi)$ . Однако при обходе на угол, больший, чем  $2\pi$ , периодичность выражения (24.9) уже не сохраняется.

**Вычисление коэффициентов  $B_s$ .** Значения корней  $v_s$  уравнения  $H_{v_s}^{(1)'}(ka) = 0$  для  $s = 1 \div 15$  приведены в книге [58]. При использовании этих таблиц следует учесть, что в [58] зависимость от времени принята в форме  $e^{+i\omega t}$ , поэтому для нашей записи знаки перед мнимыми частями в таблицах [58] следует изменить на противоположные.

Ниже записаны значения первых четырех корней:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= ka [1 + 0,4043 (1 + i\sqrt{3}) (ka)^{-2/3} - 0,0727 (1 - i\sqrt{3}) (ka)^{-4/3} + 0,0653 (ka)^{-2} + \dots]; \\ v_2 &= ka [1 + 1,2890 (1 + i\sqrt{3}) (ka)^{-2/3} - 0,1302 (1 - i\sqrt{3}) (ka)^{-4/3} + 0,1035 (ka)^{-2} + \dots]; \\ v_3 &= ka [1 + 1,9129 (1 + i\sqrt{3}) (ka)^{-2/3} - 0,2570 (1 - i\sqrt{3}) (ka)^{-4/3} + 0,2143 (ka)^{-2} + \dots]; \\ v_4 &= ka [1 + 2,4459 (1 + i\sqrt{3}) (ka)^{-2/3} - 0,4090 (1 - i\sqrt{3}) (ka)^{-4/3} + 0,3888 (ka)^{-2} + \dots]. \end{aligned} \right\} (24.11)$$

Мнимая часть корней  $v_s$  увеличивается с ростом номера  $s$  и волнового радиуса цилиндра  $ka$ . Поэтому волны высоких номеров при движении вокруг цилиндра большого радиуса быстро затухают. Это обстоятельство и определяет преимущества ряда (24.9) перед рядом (24.1). В отличие от ряда (24.1) сходимость разложения (24.9) улучшается при увеличении  $ka$ . При достаточно больших  $ka$  в разложении (24.9) достаточно удерживать один-два члена.

Вещественная часть корней  $v_s$  превышает  $ka$ . Таким образом, фазовые фронты волн  $e^{i v_s \varphi}$ , бегущих вокруг цилиндра, движутся со скоростью, несколько меньшей, чем скорость звука в окружающей среде.

Вычислим теперь коэффициенты  $B_s$ . Для того чтобы определить производную по индексу, заметим, что функция  $H_{v_s}^{(1)'}(z)$  зависит от  $z = ka$  как непосредственно, в явном виде, так и через индекс  $v_s$ , который в свою очередь зависит от  $z$ . Полная производная по  $z$  от функции  $H_{v_s}^{(1)'}(z)$  должна быть равна нулю, поскольку  $v_s$  есть корень

уравнения  $H_{\nu_s}^{(1)'}(z) = 0$ , и при любом  $z$  значение этой функции остается постоянным и равным нулю. Поэтому имеет место соотношение

$$\frac{dH_{\nu_s}^{(1)'}(z)}{dz} = \frac{\partial H_{\nu_s}^{(1)'}(z)}{\partial z} + \frac{\partial H_{\nu_s}^{(1)'}(z)}{\partial \nu_s} \cdot \frac{d\nu_s}{dz} = 0.$$

Функция  $H_{\nu_s}^{(1)}(z)$  является решением уравнения Бесселя

$$\frac{\partial^2 H_{\nu_s}^{(1)}(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial H_{\nu_s}^{(1)}(z)}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu_s^2}{z^2}\right) H_{\nu_s}^{(1)}(z) = 0,$$

причем первая производная в этом уравнении оказывается равной нулю.

В результате из последних двух выражений получаем

$$B_s = \frac{\frac{d\nu_s}{d(ka)}}{\left[1 - \frac{\nu_s^2}{(ka)^2}\right] H_{\nu_s}^{(1)}(ka)}. \quad (24.12)$$

Производная  $d\nu_s/d(ka)$  может быть вычислена путем дифференцирования соотношений (24.11). Функции Ханкеля с комплексным индексом не табулированы. Поэтому для их вычисления при больших значениях  $\nu$  и  $ka$  следует воспользоваться асимптотическим выражением [58], [76]

$$H_{\nu}^{(1)}(ka) \approx \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha - \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^{1/2} e^{i \frac{\pi}{6}} H_{1/3}^{(1)}[\nu(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)] + \text{члены порядка } \nu^{-5/4} + \dots \quad (24.13)$$

Здесь  $\cos \alpha = \nu/ka$ . Функции Ханкеля с индексом  $1/3$  от комплексного аргумента табулированы в работе [85].

**Соскальзывающие волны.** При больших значениях  $kr$ , удовлетворяющих условию  $kr - ka \gg (ka)^{1/3}$ , функцию  $H_{\nu_s}^{(1)}(kr)$  можно записать в виде (23.1). Как указано в работе [103], аппроксимация (23.1) справедлива и для комплексных значений  $\nu_s$ , в том случае, если эти значения лежат на комплексной плоскости  $\nu$  слева от нулей функции  $H_{\nu_s}^{(1)}(kr)$ . Не допуская большой погрешности, в некоторых членах можно произвести замену  $\nu_s = ka$ . В результате находим

$$H_{\nu_s}^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k \sqrt{r^2 - a^2}}} e^{i \left[ k \sqrt{r^2 - a^2} - \nu_s \arccos \frac{a}{r} - \frac{\pi}{4} \right]}. \quad (24.14)$$

Теперь ряд (24.9) можно переписать следующим образом:

$$p(r, \varphi) = \frac{\rho c Q}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi k \sqrt{r^2 - a^2}}} e^{i k \sqrt{r^2 - a^2} - i \frac{\pi}{4}} \times \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_s}{1 - e^{2\pi i \nu_s}} \left[ e^{i \nu_s \left( \varphi - \arccos \frac{a}{r} \right)} + e^{i \nu_s \left( 2\pi - \varphi - \arccos \frac{a}{r} \right)} \right]. \quad (24.15)$$

Из рис. 53, а следует, что экспоненциальные множители в квадратных скобках определяют волны, обогнувшие цилиндр по дугам  $QA_1$  и  $QA_2$ . В точках  $A_1$  и  $A_2$  волны отрываются (соскальзывают)

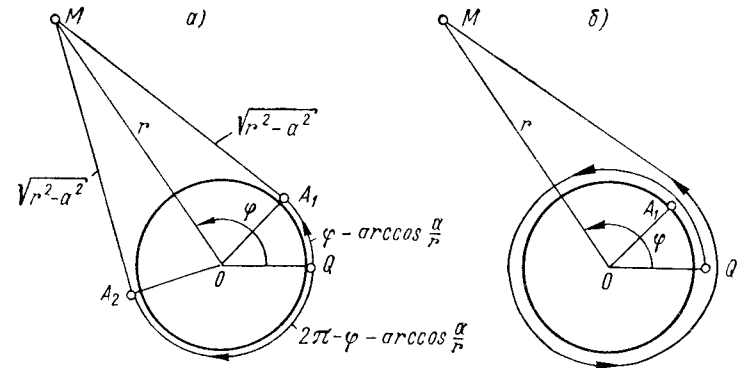


Рис. 53. Волны, обогнувшие цилиндр.

от цилиндра и достигают точки наблюдения  $M$ . На отрезках  $A_1M$  и  $A_2M$  дополнительно набегают фаза  $k \sqrt{r^2 - a^2}$ ; соответствующий фазовый множитель вынесен в формуле (24.15) за знак суммы. На этих участках амплитуда волн падает по цилиндрическому закону  $\frac{1}{\sqrt{A_1M}} = (r^2 - a^2)^{-1/4}$ .

Итак, формула (24.15) допускает простую физическую интерпретацию: из точки излучения  $Q$  исходят дифракционные лучи, которые огибают цилиндр и соскальзывают по касательным таким образом, что длины путей  $QA_1M$  и  $QA_2M$  оказываются минимальными.

Предположим теперь, что точка  $M$  перемещается по часовой стрелке, тогда дуга  $A_1Q$  будет уменьшаться и при некотором значении  $\varphi$  величина  $\varphi - \arccos \frac{a}{r}$  окажется отрицательной. Поскольку  $\operatorname{Im} \nu_s > 0$ , то вещественная часть показателя экспоненты станет отрицательной, и ряд (24.15) начнет расходиться. Таким образом, разложением (24.15) в освещенной области, а также вблизи границы тени пользоваться нельзя. Для того чтобы получить формулы, справедливые в освещенной области, надо выполнить некоторые дополнительные преобразования, рассматриваемые ниже.

**Волны, многократно обогнувшие цилиндр.** Заметим, что множитель  $(1 - e^{2\pi i v_s})^{-1}$  является суммой геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1 - e^{2\pi i v_s}} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{i v_s 2\pi m}. \quad (24.16)$$

Объединяя фазовые множители в формуле (24.15), получим набор волн ( $m = 0, 1, \dots$ ) с фазами  $v_s \left( \varphi + 2\pi m - \arccos \frac{a}{r} \right)$  и  $v_s \left( 2\pi - \varphi + 2\pi m - \arccos \frac{a}{r} \right)$ . Эти волны можно интерпретировать как дифракционные лучи, которые обогнули цилиндр целое число раз и затем соскользнули по касательным (рис. 53, б). Таким образом, полное поле складывается из волн, обогнувших цилиндр 0, 1, 2, ... раз.

Поскольку постоянная распространения  $v_s$  имеет положительную мнимую часть, эти волны быстро затухают. Для цилиндров при  $ka \gg 1$  вклад в суммарное поле в точке  $M$  практически вносят только волны с номером  $m = 0$ .

**Поле в освещенной области.** Вернемся к выражению (24.6) и разобьем тригонометрический множитель на два слагаемых:

$$\frac{\cos v(\varphi - \pi)}{\sin \pi v} = -ie^{i v \varphi} + e^{i \pi v} \frac{\cos v \varphi}{\sin \pi v}.$$

Теперь интеграл (24.6) можно разбить на сумму двух интегралов, причем подынтегральное выражение первого из них не имеет полюсов на вещественной оси:

$$\begin{aligned} \rho(r, \varphi) &= \rho_1 + \rho_2 = \frac{i \rho c Q}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i v \varphi} A(v) dv - \\ &- \frac{\rho c Q}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \pi v} \frac{\cos v \varphi}{\sin \pi v} A(v) dv. \end{aligned} \quad (24.17)$$

Рассмотрим сначала интеграл  $\rho_2$ . Деформируем путь интегрирования в петлю  $C_2$  и представим интеграл в виде суммы вычетов в полюсах функции  $A(v)$ :

$$\rho_2 = -\frac{i \rho c Q}{a} \sum_{s=1}^{\infty} B_s H_{v_s}^{(1)}(kr) \frac{\cos v_s \varphi}{\sin \pi v_s} e^{i \pi v_s}.$$

Воспользуемся тождеством

$$\frac{\cos v_s \varphi}{\sin \pi v_s} e^{i \pi v_s} = -i \frac{e^{i v_s (2\pi + \varphi)} + e^{i v_s (2\pi - \varphi)}}{1 - e^{i 2\pi v_s}}$$

и асимптотической формулой (24.14). В результате получим

$$\begin{aligned} \rho_2 &= -\frac{\rho c Q}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi k \sqrt{r^2 - a^2}}} e^{i k \sqrt{r^2 - a^2} - i \frac{\pi}{4}} \times \\ &\times \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_s}{1 - e^{i 2\pi v_s}} \left[ e^{i v_s \left( 2\pi + \varphi - \arccos \frac{a}{r} \right)} + e^{i v_s \left( 2\pi - \varphi - \arccos \frac{a}{r} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (24.18)$$

Экспоненты в квадратных скобках определяют волны, обогнувшие цилиндр (см. рис. 53) против часовой стрелки и по часовой стрелке на углы  $2\pi + \varphi - \arccos \frac{a}{r}$  и  $2\pi - \varphi - \arccos \frac{a}{r}$ . В освещенной области данные углы являются положительными. Поэтому ряд (24.18) в освещенной области быстро сходится. Воспользовавшись тождеством (24.16), можно получить бесконечный набор волн, обогнувших цилиндр целое число раз.

Рассмотрим теперь интеграл  $\rho_1$  и применим для его вычисления метод перевала. С этой целью разобьем интеграл  $\rho_1$  на два слагаемых:  $\rho_1 = \rho_1' + \rho_1''$ . В первом из них интегрирование будет проходить по левой полупетле  $C_2'$  контура  $C_2$  (см. рис. 51), во втором — по правой полупетле  $C_2''$ . На каждом из участков  $C_2'$  и  $C_2''$  следует использовать различные асимптотические формулы для функций Ханкеля. В интеграле  $\rho_1'$  путь интегрирования расположен слева от нулей функций  $H_v^{(1)}(kz)$  и  $H_v^{(1)'}(ka)$ . В этой области можно использовать формулу (23.1) для обеих функций. Для вычисления асимптотического значения производной  $H_v^{(1)'}(x)$  выполним дифференцирование выражения (23.1):

$$\begin{aligned} H_v^{(1)'}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i \left( \sqrt{x^2 - v^2} - v \arccos \frac{v}{x} - \frac{\pi}{4} \right)} (x^2 - v^2)^{-3/4} \times \\ &\times \left[ \frac{i(x^2 - v^2)}{x} - \frac{x}{2\sqrt{x^2 - v^2}} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку  $x = ka \gg 1$ , то вторым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь. В результате получаем

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \frac{\rho c k Q}{2\pi} \int_{C_1'} \frac{1}{[(kr)^2 - v^2]^{1/4} [(ka)^2 - v^2]^{1/4}} \times \\ &\times e^{i \left( v \varphi + \sqrt{(kr)^2 - v^2} - \sqrt{(ka)^2 - v^2} - v \arccos \frac{v}{kr} + v \arccos \frac{v}{ka} \right)} dv. \end{aligned} \quad (24.19)$$

Для определения точки перевала  $v_0$  необходимо решить уравнение  $f'(v_0) = 0$ , где  $f(v)$  — функция, стоящая в показателе экспоненты (24.19). Дифференцируя, находим

$$f'(v_0) = i \left( \varphi + \arccos \frac{v_0}{ka} - \arccos \frac{v_0}{kr} \right) = 0. \quad (24.20)$$

Решением этого уравнения является величина  $v_0 = kd$ , где  $d$  — длина перпендикуляра, опущенного из центра на луч  $QM$  (рис. 54). Таким образом, точка перевала лежит на вещественной оси слева от точки  $v = ka$  (см. рис. 51) (вблизи точки  $v_0 = ka$  подынтегральное выражение не имеет полюсов и метод перевала может быть использован).

В соответствии с выражением (21.1) находим

$$p'_1 = \frac{\rho ckQ}{\sqrt{2\pi kR}} e^{ikR - i\frac{\pi}{4}}. \quad (24.21)$$

Здесь  $R$  — кратчайшее расстояние от источника до точки наблюдения.

Последнее выражение с точностью до множителя, равного двум, совпадает с формулой (18.21б), определяющей поле линейного пульсирующего источника малого волнового радиуса в свободной среде. Таким образом,

величина  $p'_1$  является геометрическим приближением, не учитывающим дифракционных явлений. Удвоение звукового давления [по сравнению с (18.21б)] возникает в данном случае в связи с тем, что источник расположен на абсолютно жесткой поверхности, и излучение концентрируется в полупространстве  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Для того чтобы вычислить интеграл  $p''_1$  по полупетле  $C''_2$ , необходимо использовать для функции  $H_v^{(1)}(kr)$  асимптотическую формулу (23.1), а для функции  $H_v^{(1)}(ka)$  — формулу (23.3), справедливую для комплексных значений  $v$ , расположенных справа от нулей  $v_s$  (см. рис. 51). Из формулы (23.3) следует, что при  $|v| > ka \gg 1$  и  $\text{Re } v > 0$  модуль функции  $H_v^{(1)}(ka)$  весьма велик. Поэтому подынтегральное выражение в этой области оказывается малым, и интегрирование по участку  $C''_2$  не дает заметного вклада в звуковое поле.

Сформулируем полученный результат. Поле в освещенной области можно представить в виде суммы прямой волны (24.21), которая совпадает с волной, излучаемой линейным источником, расположенным на абсолютно жесткой плоскости, и набора волн (24.18), обогнувших цилиндр целое число раз. В зоне тени прямая волна отсутствует.

Вблизи границы тени ряды (23.15) и (24.18), описывающие волновые поля, сходятся плохо. В этой области для вычисления поля ряды Ватсона непригодны. Чтобы получить выражения, удобные для расчета вблизи границы тени, можно воспользоваться методом В. А. Фока [100].

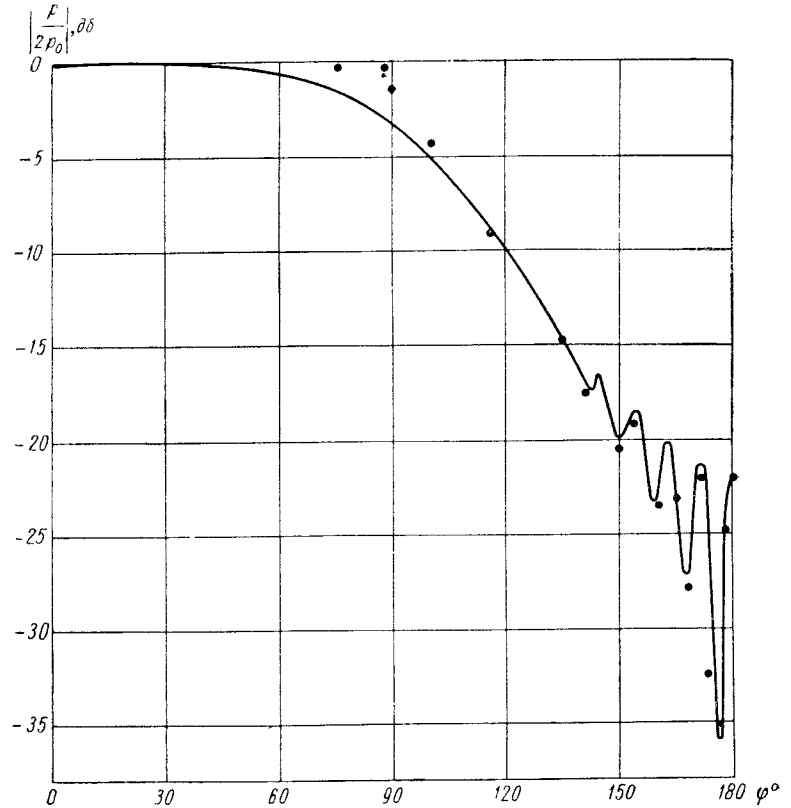


Рис. 55. Диаграмма направленности источника, расположенного на поверхности жесткого цилиндра при  $ka = 20$ .

— точный расчет; ..... расчет методом Ватсона.

На рис. 55 приведена диаграмма направленности источника, рассчитанная по формуле (24.1). Точками показаны результаты, полученные путем использования приближенных выражений, основанных на применении метода Ватсона. Все результаты нормированы к величине  $2p_0$ , где  $p_0$  — звуковое давление, создаваемое малым пульсирующим цилиндром, расположенным в свободной среде [формула (18.21б)]. В рядах Ватсона учтен лишь первый член. Для расчета диаграммы направленности принято  $r \gg a$  и  $\arccos \frac{a}{r} \approx \frac{\pi}{2}$ .

Расчетные формулы имеют вид:

в освещенной области ( $0 < \varphi < 90^\circ$ ).

$$\frac{p}{2p_0} = 1 - \frac{2}{ka} \cdot \frac{B_1}{(1 - e^{2\pi i v_1})} \left[ e^{i v_1 \left( \frac{3\pi}{2} + \varphi \right)} + e^{i v_1 \left( \frac{3\pi}{2} - \varphi \right)} \right],$$

в области тени ( $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ )

$$\frac{p}{2p_0} = \frac{2}{ka} \cdot \frac{B_1}{1 - e^{2\pi i v_1}} \left[ e^{i v_1 \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right)} + e^{i v_1 \left( \frac{3\pi}{2} - \varphi \right)} \right].$$

Сравнение результатов, полученных по точной и приближенным формулам, показывает, что они хорошо согласуются между собой. Таким образом, для  $ka = 20$  один член ряда Ватсона уже обеспечивает достаточно высокую точность.

Вблизи границы тени ( $\varphi = 90^\circ$ ) различие между точными и приближенными результатами возрастает вследствие причин, которые обсуждались выше.

#### Дифракция звука на цилиндре больших волновых размеров.

Асимптотическое суммирование ряда (18.33), определяющего рассеянное цилиндром звуковое поле, также можно выполнить методом Ватсона. Для абсолютно жесткого и абсолютно мягкого цилиндра преобразование рядов приведено в работе [103]. В отличие от задачи излучения для задачи дифракции интеграл по полупетле  $C_2'$  оказывается большой величиной. Вычислив его методом перевала, найдем, что полное поле в освещенной области складывается из падающей волны, волны, отраженной от цилиндра по законам геометрической оптики, и набора волн, обогнувших цилиндр целое число раз. Диаграмма рассеяния  $p_s$  состоит из двух частей. Участок 2 (рис. 56) характеризует поле, отраженное от цилиндра по законам геометрической оптики. В этой области для абсолютно жесткого цилиндра диаграмма рассеяния имеет вид

$$p_s = - \sqrt{\frac{a \cos \gamma}{2 \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \gamma} - a \cos \gamma}} e^{ik(L-a)}. \quad (24.22)$$

Здесь  $\gamma$  — угол зеркального отражения;  $L$  — суммарная длина пути луча  $CDM$  (рис. 57). Для абсолютно мягкого цилиндра в формуле (24.22) меняется лишь знак перед правой частью.

Если точка наблюдения находится вдали от цилиндра ( $r \gg a$ ), то  $\gamma \approx \frac{\pi - \varphi}{2}$ . Формула (24.22) приобретает следующий вид:

$$|p_s| \approx - \sqrt{\frac{a}{2r}} \cdot \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (24.23)$$

Таким образом, диаграмма рассеяния звука на участке 2 в геометрическом приближении описывается функцией  $\sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}}$ .

На участке 1 при малых углах  $\varphi$  (рис. 56) диаграмма рассеяния имеет вид длинного и узкого лепестка, который называется тенеобразующим. При интерференции рассеянной волны и падающей в этой области возникает акустическая тень.



Рис. 56. Диаграмма рассеяния звука на цилиндре больших волновых размеров.

1 — тенеобразующий лепесток; 2 — поле, образованное за счет рассеяния.

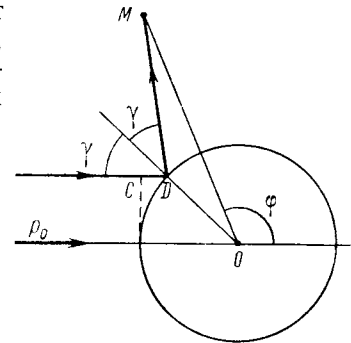


Рис. 57. Зеркальное отражение звука от цилиндра больших волновых размеров.

Форму тенеобразующего лепестка можно определить, воспользовавшись приближением Кирхгофа. Будем считать, что при  $ka \gg 1$  непосредственно за цилиндром имеется глубокая акустическая тень

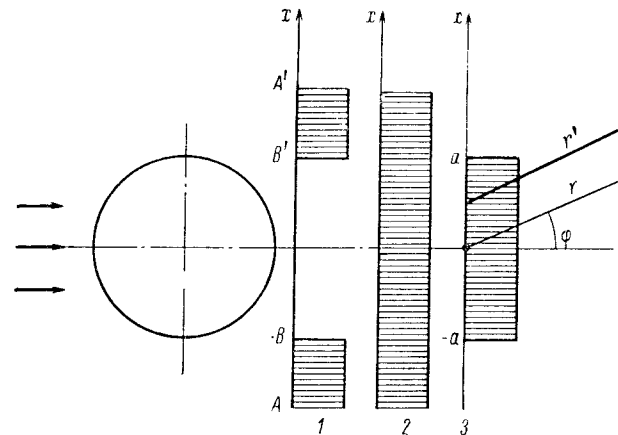


Рис. 58. Приближенное распределение поля в зоне тени.

(рис. 58) и поле равно нулю. Распределение поля за цилиндром 1 можно представить в виде суммы падающей плоской волны 2 и равномерного на отрезке  $(-a, a)$  распределения 3 с обратным знаком.

Поле плоского поршня с распределением колебательной скорости  $z$  можно определить по формуле (4.10):

$$\begin{aligned} p_s &= -\frac{\omega \rho}{2} \int_{-a}^a v H_0^{(1)}(kr') dx \approx -\frac{\omega \rho v}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{ikr-i\frac{\pi}{4}} \int_a^{-a} e^{-ikx \sin \varphi} dx = \\ &= -\frac{ka \rho c v}{\sqrt{2\pi k r}} e^{ikr-i\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(ka \sin \varphi)}{ka \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Произведение  $\rho c v$ , соответствующее звуковому давлению в падающей волне, можно положить равным единице. Взяв модуль, получим

$$|p_s| = \frac{ka}{\sqrt{2\pi k r}} \left| \frac{\sin(ka \sin \varphi)}{ka \sin \varphi} \right|. \quad (24.24)$$

Из выражения (24.24) следует, что диаграмма рассеяния на участке  $I$  (см. рис. 56) совпадает с диаграммой направленности отрезка с равномерным амплитудно-фазовым распределением.

Последнее выражение отличается от формулы, приведенной в книге [62], множителем  $(1 + \cos \varphi)/2$ . Однако при  $ka \gg 1$  ширина главного лепестка диаграммы (24.24) мала, и указанный множитель можно принять равным единице.

## ГЛАВА 6

### ■ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ С УПРУГИМИ ТЕЛАМИ

#### § 25. Сведения из теории упругости

Для изучения вопросов, возникающих при рассмотрении взаимодействия звуковой волны с упругими телами, нам понадобится ряд соотношений теории упругости. Общую теорию деформации упругих тел можно найти в специальных руководствах (см., например, [42], [44]). Здесь мы ограничимся сводкой основных результатов, которые будут использованы ниже.

Будем рассматривать однородную и изотропную упругую среду. Известно, что такая среда характеризуется двумя упругими константами  $\lambda$  и  $\mu$ , которые называются постоянными Ламэ. Через эти две величины могут быть выражены и другие упругие постоянные.

Модуль упругости (модуль Юнга)  $E$  и коэффициент Пуассона  $\sigma$  связаны с коэффициентами Ламэ следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}; \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\sigma)}; \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \end{aligned} \right\} \quad (25.1)$$

Модуль сдвига  $G$  равен второму коэффициенту Ламэ  $\mu$ . Смещение любой точки среды характеризуется вектором  $\vec{u}$ . Зная  $\vec{u}$ , можно вычислить компоненты тензора деформаций.

В прямоугольной системе координат формулы, связывающие компоненты вектора смещений с компонентами тензора деформаций, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25.2a)$$

Компоненты  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  определяют изменение длины элемента среды в направлении осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Компоненты  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  характеризуют вращение элемента соответственно в плоскостях  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ . Приведем также формулы для компонентов деформаций в других системах координат:

в цилиндрической системе координат

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ 2\varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \\ 2\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}; \end{aligned} \right\} \quad (25.2б)$$

в сферической системе координат

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r}; \\ 2\varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}; \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}; \\ 2\varepsilon_{\varphi r} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (25.2в)$$

Компоненты тензора напряжений в прямоугольной системе координат определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \varepsilon_{xx}; & \sigma_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy}; \\ \sigma_{yy} &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \varepsilon_{yy}; & \sigma_{xz} &= 2\mu \varepsilon_{xz}; \\ \sigma_{zz} &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \varepsilon_{zz}; & \sigma_{yz} &= 2\mu \varepsilon_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (25.3a)$$

Компоненты  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  являются нормальными напряжениями соответственно в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; компоненты  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  — касательные (сдвиговые) напряжения в плоскостях  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ .

В других системах координат формулы (25.3a) имеют вид: в цилиндрической системе координат

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \varepsilon_{rr}; & \sigma_{r\varphi} &= 2\mu \varepsilon_{r\varphi}; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \varepsilon_{\varphi\varphi}; & \sigma_{rz} &= 2\mu \varepsilon_{rz}; \\ \sigma_{zz} &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \varepsilon_{zz}; & \sigma_{\varphi z} &= 2\mu \varepsilon_{\varphi z}. \end{aligned} \right\} \quad (25.3b)$$

в сферической системе координат

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \varepsilon_{rr}; & \sigma_{r\theta} &= 2\mu \varepsilon_{r\theta}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \varepsilon_{\theta\theta}; & \sigma_{r\varphi} &= 2\mu \varepsilon_{r\varphi}; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \varepsilon_{\varphi\varphi}; & \sigma_{\varphi\theta} &= 2\mu \varepsilon_{\varphi\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (25.3b)$$

Уравнения равновесия элемента среды плотностью  $\rho$  при отсутствии внешних сил, действующих на элемент, в прямоугольных координатах записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

В правых частях этих уравнений стоят силы инерции, возникающие при движении элемента среды с ускорением.

Колебания тонких упругих пластин описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{M}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{p}{g}. \quad (25.5)$$

Здесь  $u$  — нормальное смещение пластины;  $M = \rho_m h$  — произведение плотности материала на толщину, или масса единицы площади пластины;  $g = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$  — цилиндрическая жесткость пластины;  $p$  — разность давлений, действующих на пластину с обеих сторон.

Для гармонического движения уравнение (25.5) приобретает вид

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - k_n^4 u = \frac{p}{g}, \quad (25.6)$$

где  $k_n = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 M}{g}}$  — волновое число изгибных волн в пластине.

Величина  $c_n = \frac{\omega}{k_n} = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 g}{M}}$  определяет скорость изгибных волн.

Более точные уравнения, учитывающие инерцию вращения элементов сечения пластины и сдвиг, приведены в работах [121], [143].

Для прямолинейного края пластины, параллельного оси  $y$ , выполняются следующие граничные условия:

при жестком закреплении

$$u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad (25.7)$$

при свободном опирании

$$u = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad (25.8)$$

при свободном крае

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (25.9)$$

## § 26. Уравнения распространения волн в упругом теле

Для того чтобы получить уравнения движения упругого тела, необходимо в уравнениях равновесия (25.4) выразить компоненты тензора напряжений  $\sigma$  через смещение  $\vec{u}$ . Подставим в формулы (25.4) выражения (25.3), затем вместо компонент тензора деформаций  $\varepsilon$  подставим формулы (25.2). Тогда получим выражение

$$\mu \Delta u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

и аналогичные выражения для компонент  $u_y$  и  $u_z$ .

В векторной форме последние три выражения можно заменить одним уравнением

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (26.1)$$

Учитывая известное соотношение

$$\text{grad div } \vec{u} = \text{rot rot } \vec{u} + \Delta \vec{u}, \quad (26.2)$$

получим

$$(\lambda + 2\mu) \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{rot rot } \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (26.3)$$

Последнее уравнение можно назвать волновым уравнением для упругой изотропной среды. Для гармонического движения  $\vec{u} = \vec{u}' e^{-i\omega t}$  выражение (26.3) принимает вид

$$(\lambda + 2\mu) \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{rot rot } \vec{u} = -\omega^2 \rho \vec{u} \quad (26.4)$$

(штрих здесь и далее опущен).

Уравнение (26.4) для упругих сред играет такую же роль, как уравнение Гельмгольца в случае жидких или газообразных сред. В идеальной жидкости модуль сдвига  $G = \mu = 0$ , поэтому компоненты, характеризующие вращение элемента среды, отсутствуют. Следовательно,  $\text{rot } \vec{u} = 0$ . Тогда уравнение (26.4) приводится к уравнению Гельмгольца (1.10) с волновым числом  $k = \frac{\omega}{c}$ , где  $c = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$ .

В общем случае для упругого тела в отличие от жидкой среды векторное поле смещений  $\vec{u}$  невозможно выразить через одну скалярную потенциальную функцию. Кроме нее необходимо ввести в рассмотрение векторную функцию. Тогда поле смещений в упругом теле можно будет разделить на поле продольных и поле поперечных волн. Эти две составляющие общего поля распространяются с различными скоростями и являются независимыми. Для того чтобы произвести указанное разделение, необходимо учесть, что любой вектор можно представить в виде суммы двух векторов

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad (26.5)$$

из которых первый удовлетворяет уравнению

$$\text{rot } \vec{u}_1 = 0, \quad (26.6)$$

а второй уравнению

$$\text{div } \vec{u}_2 = 0. \quad (26.7)$$

Таким образом, поле вектора  $\vec{u}_1$  является безвихревым, поэтому оно может быть выражено в виде градиента некоторой скалярной функции  $\Phi$ , которую можно назвать скалярным потенциалом, т. е.  $\vec{u}_1 = \text{grad } \Phi$ . Перемещения  $\vec{u}_1$  не связаны с поворотами элементов среды, а приводят лишь к изменению объема, поскольку  $\text{div } \vec{u}_1 = \Delta \Phi \neq 0$ . Поле  $\vec{u}_2$ , напротив, является чисто вихревым.

Соответствующие перемещения не связаны с изменениями объема среды, а представляют собой лишь поворот. Такое векторное поле может быть записано в виде ротора векторной функции  $\vec{\Pi}$ , которую можно назвать векторным потенциалом. Таким образом,  $\vec{u}_2 = \text{rot } \vec{\Pi}$ , и выражение (26.5) может быть записано в виде

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Pi}. \quad (26.8a)$$

Функции  $\Phi$  и  $\vec{\Pi}$  являются соответственно скалярным и векторным потенциалами поля смещения.

В ряде задач акустики бывает удобно вместо потенциалов смещений ввести потенциалы колебательных скоростей. Тогда

$$\vec{v} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Pi}. \quad (26.8b)$$

Для гармонических колебаний с зависимостью от времени в форме  $e^{-i\omega t}$  введенные таким образом потенциалы  $\Phi$  и  $\vec{\Pi}$  отличаются от величин, входящих в формулу (26.8a), лишь множителем  $-i\omega$ .

Подставим формулу (26.8) в уравнение (26.4) и затем применим операцию  $\text{div}$  к обеим частям равенства. Тогда в силу условия (26.7) все слагаемые, содержащие векторный потенциал  $\vec{\Pi}$ , обратятся в нуль, и мы получим

$$\text{div} [(\lambda + 2\mu) \Delta \vec{u}_1 + \omega^2 \rho \vec{u}_1] = 0.$$

Однако  $\text{rot}$  выражения, стоящего в квадратных скобках, по условию (26.6) также равен нулю. Таким образом, мы получили вектор, для которого  $\text{rot}$  и  $\text{div}$  равны нулю во всем пространстве. Отсюда следует, что этот вектор тождественно равен нулю. В результате находим

$$\Delta \vec{u}_1 + \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu} \vec{u}_1 = 0. \quad (26.9)$$

Чтобы получить уравнение для  $\vec{u}_2$ , подставим формулу (26.8) в уравнение (26.4) и к обеим частям равенства применим операцию  $\text{rot}$ . По условию (26.6) члены, содержащие  $\Phi$ , обратятся в нуль и мы получим

$$\text{rot} [(\lambda + 2\mu) \Delta \vec{u}_2 + (\lambda + \mu) \text{rot rot } \vec{u}_2 + \omega^2 \rho \vec{u}_2] = 0.$$

Ко второму слагаемому можно применить формулу (26.2). Если учесть, что  $\text{rot}$  любого градиента равен нулю, то в результате найдем

$$\text{rot} [\mu \Delta \vec{u}_2 + \omega^2 \rho \vec{u}_2] = 0.$$

Поскольку  $\text{div}$  выражения, стоящего в скобках, также равна нулю, то

$$\Delta \vec{u}_2 + \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \vec{u}_2 = 0. \quad (26.10)$$



Переходя в уравнениях (26.9) и (26.10) к потенциалам  $\Phi$  и  $\vec{\Pi}$ , получим

$$\Delta\Phi + k_l^2\Phi = 0, \quad (26.11)$$

$$\Delta\vec{\Pi} + k_l^2\vec{\Pi} = 0, \quad (26.12a)$$

где  $k_l = \omega/c_l$  и  $k_t = \omega/c_t$  — волновые числа продольных и поперечных волн соответственно. При этом

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (26.13)$$

Выражение (26.12a) можно записать в форме

$$-\text{rot rot } \vec{\Pi} + k_l^2\vec{\Pi} = 0. \quad (26.12b)$$

Это уравнение непосредственно следует из (26.12a), если учесть тождество (26.2) при условии  $\text{div } \vec{\Pi} = 0$ .

Формулы (26.13) можно записать через модуль Юнга и коэффициент Пуассона, воспользовавшись соотношениями (25.1):

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}; \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}. \quad (26.14)$$

Рассмотрим плоскую задачу, в которой все компоненты смещений не зависят от одной из координат (например, по оси  $y$ ) и лежат в одной плоскости  $xOz$ . Тогда будет отлична от нуля лишь составляющая вектора  $\vec{\Pi}$ , направленная по оси  $y$ , т. е. перпендикулярная к плоскости, в которой происходят колебания. Действительно, вектор  $\vec{u}_2 = \text{rot } \vec{\Pi}$  всегда перпендикулярен вектору  $\vec{\Pi}$ , поэтому если колебания происходят в плоскости  $xOz$ , то векторный потенциал  $\vec{\Pi}$  должен быть направлен по оси  $y$ . В этом случае вместо векторного уравнения (26.12) получаем скалярное уравнение

$$\Delta\Pi_y + k_l^2\Pi_y = 0. \quad (26.15)$$

В цилиндрических координатах в плоском случае получим аналогичное уравнение, причем под оператором Лапласа следует понимать двумерный оператор по переменным  $r, \varphi$ .

При осесимметричных колебаниях, не связанных с вращением вокруг оси  $\theta = 0$ , составляющие смещений лежат в диаметральных плоскостях, проходящих через ось  $\theta = 0$ . В этом случае отлична от нуля лишь составляющая вектора  $\vec{\Pi}$ , направленная по координате  $\varphi$ . Уравнение (26.12a) получает вид

$$\Delta\Pi_\varphi + k_l^2\Pi_\varphi = 0. \quad (26.16)$$

Здесь оператор Лапласа является двумерным оператором по координатам  $r, \theta$ .

При осесимметричных колебаниях, связанных с вращением вокруг оси  $\theta = 0$ , составляющая  $\Pi_\varphi = 0$  будет равна нулю, поскольку все движения частиц будут происходить по окружностям  $\theta = \text{const}$  и вектор  $\vec{\Pi}$  будет направлен параллельно оси  $\theta = 0$ .

К уравнениям для потенциалов (26.11) и (26.12) необходимо добавить граничные условия. На границе раздела двух твердых сред I и II должны соблюдаться равенства нормальных и касательных составляющих вектора смещения  $\vec{u}$  и равенства нормальных и сдвиговых напряжений

$$u_n^I = u_n^{II}; \quad u_\tau^I = u_\tau^{II}; \quad \sigma_{nn}^I = \sigma_{nn}^{II}; \quad \sigma_{n\tau}^I = \sigma_{n\tau}^{II}. \quad (26.17)$$

Здесь  $\sigma_{nn}$  — напряжения, нормальные к границе раздела;  $\sigma_{n\tau}$  — касательные напряжения. В обеих средах могут возбуждаться четыре волны: по одной продольной и по одной поперечной. Поэтому четырех условий (26.17) должно быть достаточно для определения полей.

Если средой II является идеальная жидкость, то второе условие является излишним, а остальные должны быть переписаны в виде

$$u_n^I = u_n^{II}; \quad \sigma_{nn}^I = -p^{II}; \quad \sigma_{n\tau}^I = 0, \quad (26.18)$$

где  $p^{II}$  — звуковое давление на границе в среде II.

Знак минус во втором условии появляется в связи с тем, что положительным напряжением в теории упругости является растяжение ( $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ ), в то время как при положительном звуковом давлении на границу в среде II должно наблюдаться сжатие.

Поскольку в жидкости при отсутствии сил вязкости существует лишь продольная волна, то всегда в обеих средах могут возбуждаться три волны: две в упругой среде (продольная и поперечная) и одна в жидкости. Таким образом, трех условий (26.18) должно быть достаточно для вычисления звукового поля.

Уравнения (26.11), (26.12) и граничные условия (26.17), (26.18) будут использованы ниже при рассмотрении взаимодействия звуковой волны с упругими телами.

## § 27. Дифракция звука на упругом цилиндре

В гл. 5 мы рассматривали дифракцию звука на цилиндре с идеализированными граничными условиями. При этом считалось, что на поверхности цилиндра выполняется условие  $p|_{r=a} = 0$  либо  $v_n|_{r=a} = 0$ . Кроме того, решалась задача и об импедантном цилиндре. Реальные тела в большинстве случаев являются упругими, и лишь в некотором приближении их можно рассматривать как поверхности, обладающие нормальным импеданцем.

Дифракция звука на упругих цилиндрах изучалась в работах [49], [119], [138]. При этом в статье [49] рассмотрено наклонное падение звука на цилиндр, а в работе [138] — дифракция цилиндрической волны. Заметим, что представление неизвестных коэффициентов в виде амплитудных и фазовых множителей, как это сделано в работах [119], [138], неудобно при использовании вычислительных машин, поскольку, используя стандартные программы для цилиндрических функций, легче непосредственно вычислять коэффициенты разложения.

Ниже дан вывод формул, в которых коэффициенты разложения выражены через механические импедансы вынужденных колебаний упругого цилиндра.

Пусть на однородный цилиндр, выполненный из материала с постоянными Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$  и плотностью  $\rho_m$ , падает из жидкости плоская звуковая волна единичной амплитуды

$$P_0 = e^{ikx} = e^{ikr \cos \varphi} \quad (27.1)$$

Фронт волны параллелен оси цилиндра, поэтому все смещения лежат в плоскости, перпендикулярной этой оси.

Представим смещение каждой точки внутри цилиндра через векторный и скалярный потенциалы [см. (26.8a)]:

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Pi}. \quad (27.2)$$

Очевидно, что вектор  $\vec{\Pi}$  будет параллелен оси цилиндра, т. е.  $\Pi = \Pi_z$ ,  $\Pi_\varphi = \Pi_r = 0$ . Раскрывая формулу (27.2), получим составляющие смещения

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}; \quad u_\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Pi}{\partial r}. \quad (27.3)$$

Потенциалы  $\Phi$  и  $\Pi$  удовлетворяют уравнениям (26.11) и (26.12).

На границе жидкость — твердое тело должны выполняться граничные условия (26.18), которые мы запишем в виде

$$u_r = \frac{1}{\omega^2 \rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}; \quad \delta_{rr} = -p; \quad \delta_{r\varphi} = 0. \quad (27.4)$$

Здесь  $\rho$  — плотность жидкости;  $p$  — полное звуковое давление в ней. При этом  $p = p_0 + p_s$ , где  $p_s$  — рассеянная волна.

Введем разложения звуковых полей по цилиндрическим функциям

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kr) \cos n\varphi; \\ p_s &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (27.5a)$$

а также разложения потенциалов  $\Phi$  и  $\Pi$

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_n(kr) \cos n\varphi; \\ \Pi &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_n(kr) \sin n\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (27.5b)$$

Здесь  $\varepsilon_n = 1$  при  $n = 0$  и  $\varepsilon_n = 2$  при  $n > 0$ .

Заметим, что в последнем выражении разложение идет по  $\sin n\varphi$ , и ряд начинается с  $n = 1$ . Действительно, составляющая смещения  $u_r$  симметрична относительно линии  $\varphi = 0$ . Поэтому производная  $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$ , входящая в выражение для  $u_r$ , должна быть четной функцией  $\varphi$ . Составляющая смещения  $u_\varphi$  должна быть антисимметрична относительно линии  $\varphi = 0$ . Из выражений (27.3) видно, что  $\sin n\varphi$  удовлетворяет этим условиям.

Выразим напряжения по формулам (25.3б) через потенциалы  $\Phi$  и  $\Pi$ :

$$\sigma_{rr} = \lambda \Delta \Phi + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r};$$

$$\sigma_{r\varphi} = \mu \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right).$$

Подставив значения  $u_r$  и  $u_\varphi$  по формулам (27.3), получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\lambda k_i^2 \Phi + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial \varphi} \right); \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu \left( \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - k_i^2 \Pi - 2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (27.6)$$

Используя граничные условия (27.4) и формулы (27.5), (27.6), можно записать систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$B_n F_1(k_i a) + C_n F_2(k_i a) = 0;$$

$$B_n k_i a J_n'(k_i a) + C_n n J_n(k_i a) - A_n \frac{k a}{\omega^2 \rho} H_n^{(1)'}(ka) = \frac{k a}{\omega^2 \rho} \varepsilon_n i^n J_n'(ka);$$

$$2B_n F_3(k_i a) + C_n F_1(k_i a) + A_n \frac{a^2}{c_i^2 \rho_m} H_n^{(1)'}(ka) = -\frac{\varepsilon_n i^n a^2}{c_i^2 \rho_m} J_n(ka).$$

Здесь обозначено

$$F_1(x) = 2n [x J_n'(x) - J_n(x)]; \quad F_2(x) = x^2 J_n''(x) - x J_n'(x) + n^2 J_n(x);$$

$$F_3(x) = x^2 \left[ J_n''(x) - \frac{\lambda}{2\mu} J_n(x) \right].$$

Решая систему, находим коэффициенты  $A_n$ :

$$A_n = -\varepsilon n i^n \frac{J_n(ka) + \frac{Z_n}{i\rho c} J_n'(ka)}{H_n^{(1)}(ka) + \frac{Z_n}{i\rho c} H_n^{(1)'}(ka)}, \quad (27.7)$$

где  $Z_n$  определяется выражением

$$Z_n = \frac{i\rho_m c t}{k_l a} \cdot \frac{F_1(k_l a) F_1(k_l a) - 2F_3(k_l a) F_2(k_l a)}{nJ_n(k_l a) F_1(k_l a) - k_l a J_n'(k_l a) F_2(k_l a)}. \quad (27.8)$$

Заметим, что выражение (27.7) формально совпадает с формулой (18.37), полученной для импедансного цилиндра. Однако по смыслу между ними имеется существенное различие. В формуле (18.37)  $Z$  представлял собой локальный импеданс поверхности, т. е. отношение  $p = -Zv_r$  ( $v_r$  — радиальная колебательная скорость) выполнялось в каждой точке поверхности. Для упругого тела оказывается, что  $Z_n$  зависит от номера формы колебаний  $n$ . При этом  $Z_n$  определяется как отношение максимального значения звукового давления для данной формы колебаний  $p_n$  к максимальному значению радиальной колебательной скорости  $v_n$  для этой же формы колебаний, взятому с обратным знаком (!) (причина изменения знака здесь та же, что и в § 1), т. е.

$$Z_n = -\frac{p_n}{v_n}. \quad (27.9)$$

Для того чтобы показать, что  $Z_n$  в виде (27.8) действительно является механическим импедансом, вычислим отношение

$$-\frac{p_n}{v_n} \Big|_{r=a} = -\frac{p_n}{-i\omega u_n} \Big|_{r=a}.$$

Пусть к поверхности цилиндра приложено произвольное нормальное давление

$$p(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos n\varphi,$$

изменяющееся по гармоническому закону во времени. Запишем радиальную колебательную скорость в виде

$$v_r = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos n\varphi.$$

Воспользовавшись двумя последними граничными условиями (27.4) и разложениями (27.5б), получаем

$$B_n F_1(k_l a) + C_n F_2(k_l a) = 0;$$

$$2B_n F_3(k_l a) + C_n F_1(k_l a) = -\frac{\rho_n a^2}{\rho_m c_l^2}.$$

Решим систему относительно коэффициентов  $B_n$  и  $C_n$ . Затем вычислим по формуле (27.3) значение  $u_r$ . Составив отношение (27.9), найдем, что полученное значение  $Z_n$  в точности совпадает с выражением (27.8). Таким образом, величины, определяемые уравнением (27.8), действительно являются механическими импедансами.

Из формул (27.7) следует, что при  $|Z_n| \gg \rho c$  коэффициенты  $A_n$  приближаются к коэффициентам для абсолютно жесткого цилиндра; при  $Z_n = 0$  они совпадают с коэффициентами для абсолютно мягкого цилиндра.

Очевидно, что импедансы  $Z_n$  при некоторых значениях частоты звука могут обращаться в нуль. Это соответствует совпадению час-

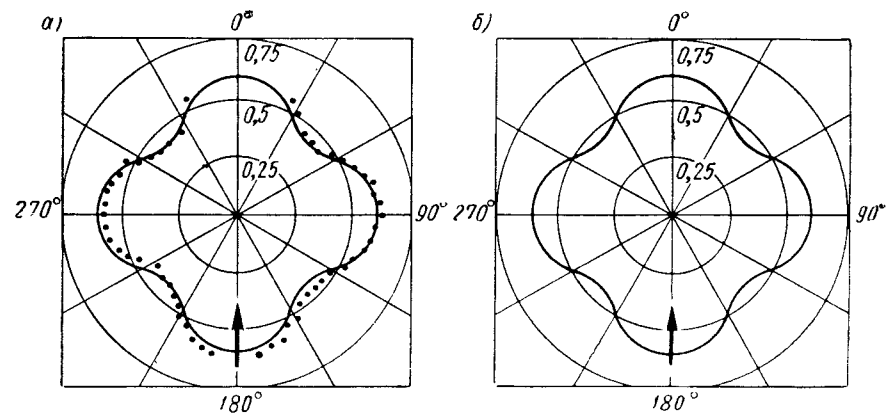


Рис. 59. Диаграммы рассеяния звука: а — на упругом цилиндре в воде; б — на жестком цилиндре.

тоты падающей волны с резонансными частотами цилиндра. Таким образом, на резонансной частоте для данной формы колебаний отражение происходит так же, как и от абсолютно мягкого цилиндра. Однако невозможно представить себе цилиндр, у которого резонансы имели бы место одновременно для всех форм колебаний. Поэтому для реальных цилиндров не найдется частоты, при которой отражение звука совпадало бы с отражением от абсолютно мягкого тела.

Результаты расчетов, проведенных в работе [119], показывают, что металлические цилиндры в воде в большинстве случаев рассеивают звук почти как абсолютно жесткие тела. Лишь в некоторых узких полосах частот вблизи собственных резонансов для низких форм колебаний (при  $n = 0, 1, 2, 3$ ) могут быть заметны отличия характеристик рассеяния упругих цилиндров от характеристик рассеяния жестких цилиндров.

На рис. 59 приведены диаграммы рассеяния звука на абсолютно жестком и упругом (медном) цилиндрах [119] при  $ka = 1,7$ . Параметры медного цилиндра:  $E = 10,1 \cdot 10^{11}$  г/см·сек<sup>2</sup>;  $k_l a = 0,6$ ;  $\sigma = 0,3$ ;  $\rho_m = 8,5$  г/см<sup>3</sup>. Точками показаны экспериментальные результаты. Из рисунка видно, что диаграммы весьма близки.

На рис. 60 показаны диаграммы рассеяния на упругом стальном цилиндре (сплошная кривая) и на абсолютно жестком цилиндре (пунктир) при  $ka = 5$ . Параметры стального цилиндра:  $E = 19,7 \times 10^{11} \text{ э/см} \cdot \text{сек}^2$ ;  $k_1 a = 1,293$ ;  $\sigma = 0,28$ ;  $\rho_m = 7,7 \text{ э/см}^3$ . На рис. 60, б приведена характеристика рассеяния на резонансной частоте для моды  $n = 2$ , на рис. 60, а — на частоте меньше резонансной на 3%, на рис. 60, в — на частоте больше резонансной на 3%. Сравнение рисунков показывает, что вблизи резонанса кривые весьма критичны к изменению частот. Если частота звука меньше наиболее низкой резонансной частоты колебаний упругого цилиндра ( $k_1 a < 2,2$  для

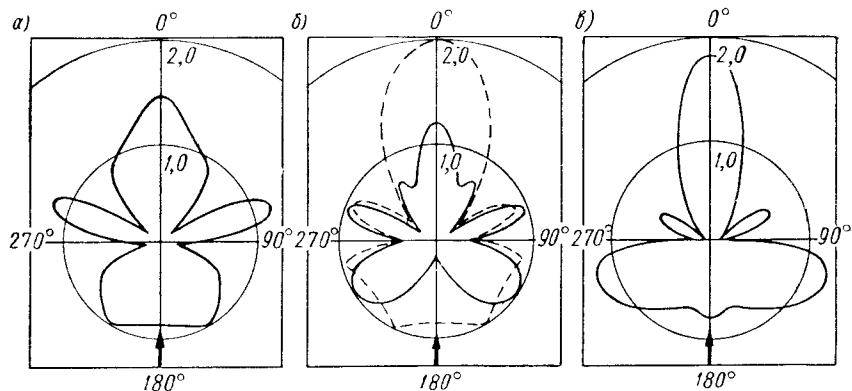


Рис. 60. Диаграммы рассеяния звука на упругом (стальном) и абсолютно жестком цилиндрах в воде при различной частоте звука.

металлических цилиндров), то резонансные колебания не могут возбуждаться. Единственным возможным видом движения в этом случае является колебание цилиндра как единого целого. Такой случай будет рассмотрен в следующем параграфе.

Если падающая на упругий цилиндр волна не плоская, а цилиндрическая, то решение может быть получено путем использования теоремы сложения [138].

Так же как и в § 19, разложим падающую цилиндрическую волну с центром в точке  $O_1$  (см. рис. 38) в ряд по цилиндрическим волнам с центром в точке  $O_2$ , используя теорему сложения для цилиндрических функций:

$$p_0 = H_0^{(1)}(kR) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(kr) H_n^{(1)}(kb) \cos n\varphi.$$

Повторяя преобразования, приходим к формуле для коэффициентов

$$A_n = -\varepsilon_n H_n^{(1)}(kb) \frac{J_n(ka) + \frac{Z_n}{i\rho c} J_n'(ka)}{H_n^{(1)}(ka) + \frac{Z_n}{i\rho c} H_n^{(1)'}(ka)},$$

которая отличается от выражения (27.7) лишь множителем  $H_n^{(1)}(kb)$ .

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай произвольной цилиндрической волны (см. § 19).

## § 28. Дифракция звука на колеблющемся стержне

Как показано в предыдущем параграфе, в большинстве случаев можно пренебречь резонансными колебаниями, связанными с изменением формы поперечного сечения цилиндра.

При этом остаются колебания, представляющие собой смещение цилиндра как единого целого. Подобное положение имеет место при прохождении звука через тонкую металлическую пластину (см. § 32). В этом случае можно пренебречь симметричными колебаниями пластины и нельзя пренебречь антисимметричными колебаниями, т. е. колебаниями, описывающими смещение осевой линии при неизменной толщине пластины.

Формулу для рассеяния звука на колеблющемся цилиндре можно было бы найти из общих выражений (27.7) и (27.8). Однако в данном случае проще и нагляднее непосредственно вычислить поправку к решению для абсолютно жесткого

и неподвижного цилиндра, учитывающую смещение оси цилиндра. Решение этой задачи для наклонного падения звука с учетом как изгибных колебаний, так и колебаний сжатия приведено в работе [46]. Мы рассмотрим более простой случай, полагая, что волна падает параллельно оси цилиндра и что существенными являются только колебания, связанные с движением оси стержня.

Рассмотрим длинный жесткий цилиндр, который свободно подвешен или закреплен в весьма податливых опорах. На цилиндр падает плоская волна в виде (27.1) (рис. 61). Будем искать рассеянное поле  $p_s$  в виде

$$p_s = p_{s0} - p_{s1}, \quad (28.1)$$

где  $p_{s0}$  — звуковое поле, рассеянное абсолютно жестким цилиндром;  $p_{s1}$  — поправка к решению для абсолютно жесткого цилиндра. Очевидно, что  $p_{s1}$  является полем цилиндра, осциллирующего в направлении оси  $x$ . Поэтому

$$p_{s1} = BH_1^{(1)}(kr) \cos \varphi.$$

Из граничного условия на поверхности цилиндра  $v_r = v \cos \varphi$  при  $r = a$  ( $v$  — колебательная скорость оси цилиндра) легко найти коэффициент  $B$ . В результате получаем

$$p_{s1} = \frac{i\rho c v H_1^{(1)}(kr)}{H_1^{(1)'}(ka)} \cos \varphi. \quad (28.2)$$

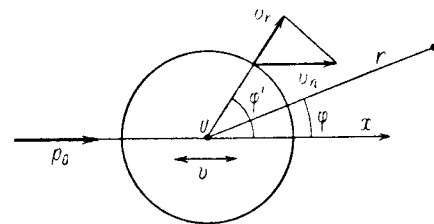


Рис. 61. К дифракции звука на колеблющемся стержне.

Колебательную скорость оси цилиндра можно записать в виде

$$v = \frac{F}{-i\omega M}, \quad (28.3)$$

где  $F$  — сумма всех сил, действующих на единицу длины цилиндра;  $M$  — масса цилиндра единичной длины плотностью  $\rho_m$ . Сила, действующая в направлении оси  $x$ , определится в виде

$$F = a \int_0^{2\pi} [p_s(\varphi') + p_0(\varphi')] \Big|_{r=a} \cos \varphi' d\varphi'. \quad (28.4)$$

Подставив выражения (28.2), (28.3) и (28.4) в (28.1), получим уравнение относительно  $p_s$ :

$$p_s = p_{s0} + \frac{\rho c a H_1^{(1)}(kr) \cos \varphi}{\omega M H_1^{(1)'}(ka)} \int_0^{2\pi} [p_s(\varphi') + p_0(\varphi')] \Big|_{r=a} \cos \varphi' d\varphi'.$$

Для решения последнего уравнения используем разложения (27.5). Подставив вместо  $p_{s0}$  выражения (18.33), (18.34) при  $\alpha = 0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -2i \frac{J_0(ka) - J_2(ka) - \frac{2}{ka} \cdot \frac{\rho}{\rho_m} J_1(ka)}{H_0^{(1)}(ka) - H_2^{(1)}(ka) - \frac{2}{ka} \cdot \frac{\rho}{\rho_m} H_1^{(1)}(ka)}; \\ A_n &= -\varepsilon_n i^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \quad \text{при } n \neq 1. \end{aligned} \right\} \quad (28.5)$$

Коэффициенты  $A_n$  при  $n \neq 1$ , как видно из (28.5), совпадают с коэффициентами разложения звукового поля для абсолютно жесткого неподвижного цилиндра. Все особенности рассматриваемого случая учитываются в выражении для  $A_1$ . Как и следовало ожидать, смещение оси цилиндра влияет только на коэффициент при  $\cos \varphi$ , т. е. именно на ту составляющую звукового поля, которая излучается осциллирующим цилиндром. С возрастанием  $ka$ , а также с убыванием отношения  $\rho/\rho_m$  третьи члены числителя и знаменателя в выражении для  $A_1$  убывают и результат приближается к решению для неподвижного цилиндра.

Силу, действующую на цилиндр, определим из выражения (28.3). В результате получим

$$F = \frac{8}{k \left[ H_0^{(1)}(ka) - H_2^{(1)}(ka) - \frac{2}{ka} \cdot \frac{\rho}{\rho_m} H_1^{(1)}(ka) \right]}. \quad (28.6)$$

Последняя формула отличается от известного выражения для силы, действующей на абсолютно жесткий и неподвижный цилиндр наличием в знаменателе слагаемого, зависящего от отношения  $\rho/\rho_m$ . В воздухе  $\rho \ll \rho_m$ ; в этом случае величина силы, действующей на

цилиндр, практически не зависит от способа его закрепления. Иное положение имеет место, если окружающей средой является жидкость. При этом  $\rho$  и  $\rho_m$  сравнимы по величине и разница между силой, действующей на неподвижный цилиндр, и силой, действующей на свободный цилиндр, становится заметной.

На рис. 62 приведены графики зависимости амплитуды силы, действующей в воде на цилиндр единичной длины, от параметра  $ka$ . Значения пронормированы к величине  $2\pi a$ . Верхняя кривая приведена

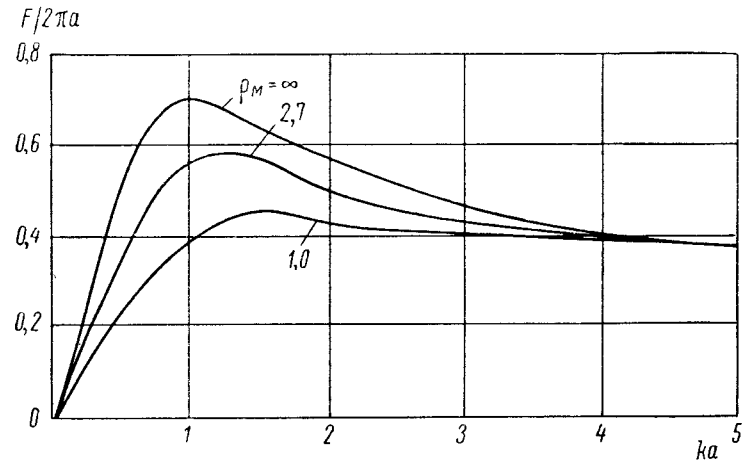


Рис. 62. Зависимость силы, действующей на цилиндр, от параметра  $ka$ .

в работе [62]. Она соответствует неподвижному, жестко закрепленному цилиндру. Средняя кривая соответствует незакрепленному цилиндру, выполненному из алюминия ( $\rho_m = 2,7 \text{ г/см}^3$ ), нижняя кривая — цилиндру с плотностью  $\rho_m = 1 \text{ г/см}^3$ . Заметим, что малые средние плотности цилиндров могут встретиться в тех случаях, когда внутри цилиндров имеются полости, уменьшающие эффективную плотность.

Запишем теперь выражение для диаграммы рассеяния при  $ka \ll \ll 1$ . Воспользовавшись асимптотическими представлениями функций Бесселя, получим

$$p_s = -\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr+i\frac{\pi}{4}} \frac{(\pi ka)^2}{4} \left(1 - 2 \frac{\rho_m - \rho}{\rho_m + \rho} \cos \varphi\right). \quad (28.7)$$

Сравнивая последнее выражение с формулой (18.38) при  $\alpha = 0$ , видим, что все постоянные множители перед скобками в обеих формулах одинаковы и различие заключается в члене, определяющем дипольное излучение цилиндра.

§ 29. Рассеяние продольных волн на цилиндрической полости в упругой среде

Если на полость, расположенную в упругой среде, падает упругая волна, то рассеянное поле должно состоять из продольных волн и волн сдвига.

Можно рассматривать различные частные случаи. Падающая на препятствие волна может быть как продольной, так и поперечной. Для цилиндрических препятствий, кроме того, следует различать случаи поляризации поперечных волн перпендикулярно и параллельно оси цилиндра.

Рассеяние волн на цилиндрической полости в упругой среде рассматривалось в работах [14], [95]. При этом в работе [14] найдены рассеянные поля в случае падения поперечных волн, поляризованных как перпендикулярно, так и параллельно оси цилиндра. Ниже рассмотрен случай рассеяния продольных волн.

Пусть на цилиндрическую полость радиуса  $a$  в упругой среде с постоянными Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$  падает плоская продольная волна с потенциалом смещений  $\Phi_0$ :

$$\Phi_0 = e^{ikx} = e^{ikr \cos \varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_l r) \cos n\varphi. \quad (29.1)$$

Смещение в упругой среде следует представить в виде суммы составляющих в продольной и поперечной волне, которые определяются через скалярный и векторный потенциалы в виде (26.8а). Поскольку вектор смещения в рассеянном поле при нормальном падении волны на цилиндр лежит в плоскости падения, то вектор  $\vec{\Pi}$  будет направлен вдоль оси  $z$ . Поэтому  $\Pi^{(s)} = \Pi_z^{(s)}$ .

Рассеянные поля  $\Phi^{(s)}$  и  $\Pi_z^{(s)}$  в упругой среде можно записать в виде разложений

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(s)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(k_l r) \cos n\varphi; \\ \Pi_z^{(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(k_l r) \sin n\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (29.2)$$

Так же как и в § 27, ряд для потенциала  $\Pi_z^{(s)}$  содержит нечетные составляющие смещения относительно прямой  $\varphi = 0$  и начинается с  $n = 1$ .

Напряжения в среде определяются через потенциалы по формулам (27.6), причем  $\Phi = \Phi_0 + \Phi^{(s)}$ . На границе полости при  $r = a$  должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангенциальных составляющих тензора напряжений:  $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$ . Подставляя разложения (29.2) в формулы

(27.6) и приравнивая их нулю при  $r = a$ , получим систему двух уравнений относительно коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$ . Решив ее, найдем

$$\left. \begin{aligned} A_n &= -\varepsilon_n i^n \frac{F_3(x_l) F_6(x_l) - F_5(x_l) F_1(x_l)}{F_4(x_l) F_6(x_l) - 2F_5(x_l) F_5(x_l)}; \\ B_n &= -\varepsilon_n i^n \frac{F_1(x_l) F_4(x_l) - 2F_3(x_l) F_5(x_l)}{F_4(x_l) F_6(x_l) - 2F_5(x_l) F_5(x_l)}, \end{aligned} \right\} \quad (29.3)$$

где  $F(x)$  — функции, близкие к приведенным в § 27;

$$x_l = k_l a, \quad x_t = k_t a; \quad F_4(x) = x^2 \left[ H_n^{(1)'}(x) - \frac{\lambda}{2\mu} H_n^{(1)}(x) \right];$$

$$F_1(x) = 2n [x J_n'(x) - J_n(x)]; \quad F_5(x) = n [x H_n^{(1)'}(x) - H_n^{(1)}(x)];$$

$$F_3(x) = x^2 [J_n''(x) - \frac{\lambda}{2\mu} J_n(x)]; \quad F_6(x) = x^2 [2H_n^{(1)''}(x) + H_n^{(1)}(x)].$$

Если размеры полости малы по сравнению с длинами продольных и поперечных волн ( $x_l \ll 1$  и  $x_t \ll 1$ ), то можно использовать асимптотические значения цилиндрических функций при малых значениях аргумента. Выражения для коэффициентов приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\frac{\pi^2 x_l^4}{16} (1 + \delta^2) + i \frac{\pi x_l^2}{4} (1 + \delta); \\ A_1 &= \frac{\pi x_l^2}{4} - i \frac{\pi^2 x_l^4}{32} (3 + \delta); \\ A_2 &= \frac{\pi^2 x_l^4}{8(1 + \delta)^2} (5 + 4\delta + \delta^2) - i \frac{\pi x_l^2}{2(1 + \delta)}; \\ B_0 &= 0; \quad B_1 = A_1 \sqrt{2 + \delta}; \quad B_2 = A_2 (2 + \delta). \end{aligned} \right\} \quad (29.4)$$

Заметим, что предельный переход в последних выражениях к жидкой среде путем замены  $\mu = 0$  и  $x_t = 0$ , разумеется, не допустим, так как при весьма малой скорости поперечных волн уже не будет выполняться условие  $x_t \ll 1$  и использование при выводе соотношений (29.4) асимптотических формул, определяющих функции Бесселя для  $x_t \rightarrow 0$ , будет невозможно.

В работе [95] исследовано поведение рассеянной волны нулевого порядка при изменении частоты. При этом показано, что на некоторых частотах имеют место резонансные явления, которые приводят к увеличению  $A_0$ , что соответствует интенсивному излучению цилиндрических волн нулевого порядка. Из формул (29.3) можно получить

$$A_0 = -\frac{x_l \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) J_0(x_l) - J_1(x_l)}{x_l \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) H_0^{(1)}(x_l) - H_1^{(1)}(x_l)}. \quad (29.5)$$

Если мнимая часть знаменателя обращается в нуль, то  $|A_0|$  принимает максимальное значение, равное единице. Это имеет место при выполнении условия

$$\frac{N_1(x_l)}{x_l N_0(x_l)} = 1 + \frac{\lambda}{2\mu}.$$

Наиболее интересным является случай резиноподобной среды, для которой модуль сдвига  $\mu$  может быть намного меньше, чем  $\lambda$ . Тогда величина  $\lambda/2\mu$  представляет собой большое число (порядка нескольких десятков или сотен).

Графическое решение последнего уравнения показывает, что при больших значениях  $\lambda/2\mu$  в пределах изменения  $x_l$  от 0 до 1 имеется два корня, один из которых близок к единице, а второй расположен в области малых значений  $x_l$ . При этом резонансное значение  $x_l$  сильно зависит от отношения  $\lambda/\mu$ . При уменьшении  $\mu$  резонансное значение  $x_l$  стремится к нулю. В то же время резонансное значение  $x_l = x_l \sqrt{\mu/(\lambda + 2\mu)}$  остается приблизительно постоянным, и для обычных резиноподобных материалов ( $\lambda/\mu = 200 \div 400$ ) цилиндрическая полость резонирует примерно при  $x_l = 0,7 \div 0,9$ .

С уменьшением отношения  $\lambda/\mu$  резонанс постепенно сглаживается и для отношения  $\lambda/\mu = 1,5$  (коэффициент Пуассона  $\sigma = 0,3$ , что соответствует металлу) максимальное значение  $|A_0|$  достигает значения 0,7.

На рис. 63 показана зависимость модуля и фазы потенциала рассеянной волны  $\Phi_s$  в направлении  $\varphi = 0$  от волнового размера  $k_1 a$ . Максимум при  $k_1 a \approx 0,8$  обусловлен резонансом для моды  $n = 0$ . Изгибы кривых соответствуют резонансам более высоких мод. Пунктиром нанесены значения  $\Phi_s(0)$  для абсолютно мягкого цилиндра в жидкости, взятые из приложения 1. Масштаб по горизонтальной оси при этом пересчитан по формуле

$$k_1 a = \frac{k_1 a}{\sqrt{2 + \frac{\lambda}{\mu}}}.$$

В области резонанса поле, рассеянное полостью в упругой среде, существенно больше поля, рассеянного абсолютно мягким цилиндром. Заметим, что аргумент величины  $\Phi_s(0)$  в области резонанса приблизительно равен  $\pi$ , и рассеянное поле противоположно по фазе полю падающей волны. Таким образом, вблизи резонанса полости в резиноподобной среде должны сильно снижать амплитуду проходящей волны.

В работе [95] проведена оценка влияния воздуха, содержащегося в полости, на рассеяние волн. Если модуль сдвига внешней среды при этом равен нулю (что соответствует воздушному цилиндру в воде), то величина  $A_0$  определяется формулой (29.5), в которой вместо  $1 + \frac{\lambda}{2\mu}$  следует подставить  $\delta' = \frac{\lambda}{\lambda_0}$ , где  $\lambda_0$  — модуль

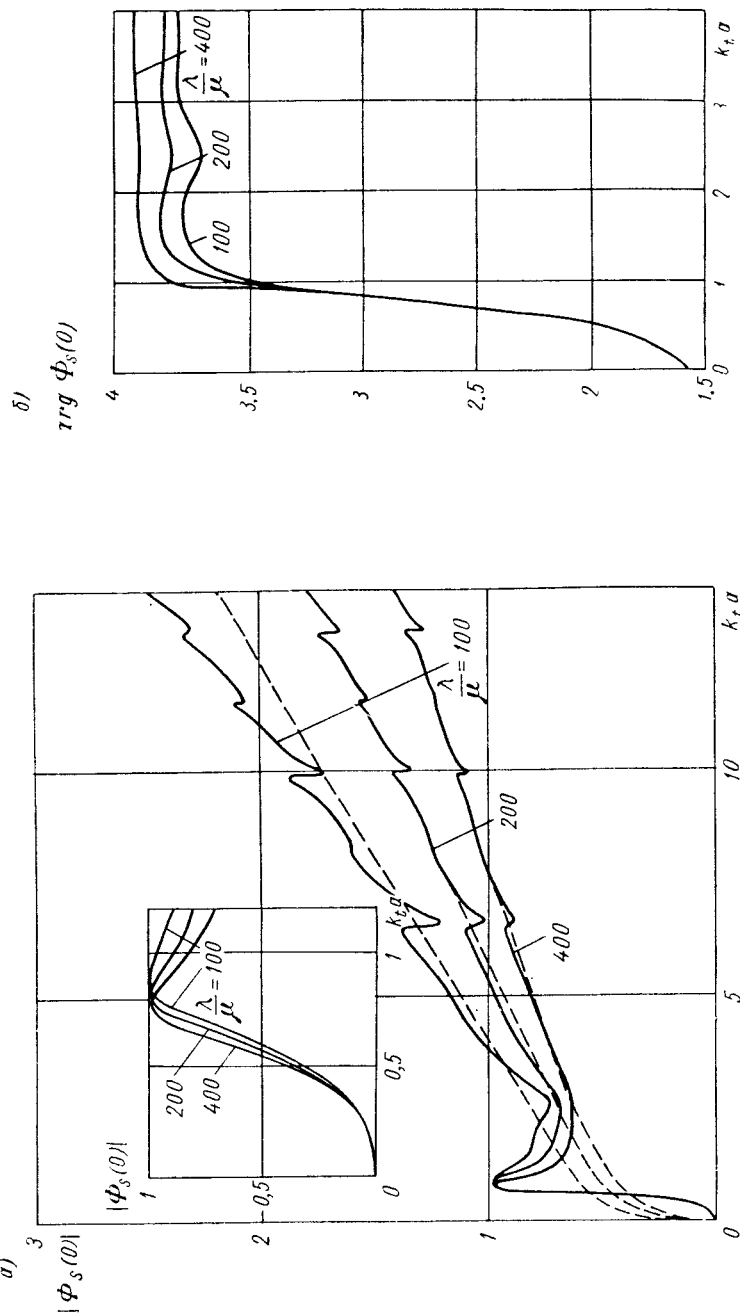


Рис. 63. Амплитуда (а) и фаза (б) волны, рассеянной на цилиндрической полости в упругой среде.

объемного сжатия среды внутри полости. Для воздушного пузырька в воде  $\delta \approx 10^4$ , при этом так же, как и при рассеянии на полости в резиноподобной среде, наблюдаются резонансные явления.

## ГЛАВА 7

### ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ОДНОРОДНЫЕ УПРУГИЕ ПЛАСТИНЫ

#### § 30. Прохождение звуковой волны через жидкий слой

Простейшим случаем прохождения звука через перегородку является падение плоской звуковой волны на слой жидкости, разделяющей два полупространства. Определение коэффициента прохождения звука через жидкий слой представляет собой значительно более простую задачу, чем вычисление коэффициента прохождения через твердый слой, поскольку в жидкости не возбуждаются волны сдвига. Решение такой задачи оказывается полезным и для расчета коэффициента прохождения звука через слои материалов, которые хотя и являются твердыми телами, но по акустическим характеристикам ведут себя подобно жидкости. К таким материалам относится, например, резина. Известно, что в резине волны сдвига практически не распространяются. Поэтому в слое резины возбуждаются только продольные волны, и формулы, определяющие коэффициенты отражения и прохождения звука для слоя жидкости, удовлетворительно описывают также процессы, возникающие при взаимодействии звуковой волны со слоем резины. Кроме резины к таким резиноподобным материалам относятся некоторые типы мягких пластмасс.

При нормальном падении звука ( $\theta = 0$ ) приведенные ниже формулы (30.4), (30.5) остаются справедливыми не только для жидких слоев, но и для упругих пластин, поскольку при  $\theta = 0$  волны сдвига в упругом материале не возбуждаются. Поэтому различия во взаимодействии звуковой волны с жидкими (или резиноподобными) и упругими материалами проявляются лишь при наклонном падении волны.

**Прохождение звука через слой жидкости.** Пусть на слой жидкости с акустическим сопротивлением  $\rho_2 c_2$  падает плоская звуковая волна  $p_0$  под углом  $\theta$ . Верхнее и нижнее полупространства заполнены средой с волновым сопротивлением  $\rho_1 c_1$ . В слое устанавливается

система отраженных волн, направления распространения которых составляют угол  $\theta_2$  с нормалью (рис. 64, а). Угол  $\theta_2$  при этом определяется из закона преломления

$$\frac{\sin \theta}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}. \quad (30.1)$$

Обозначим сумму всех волн в слое, бегущих в направлении, составляющем острый угол с осью  $z$ , через  $p'$ , а сумму волн, направле-

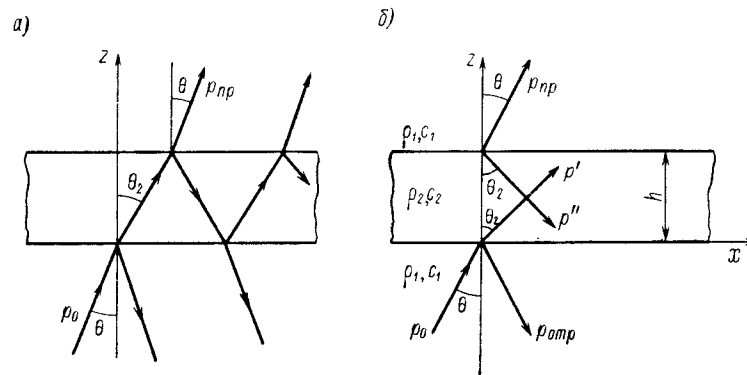


Рис. 64. Схема прохождения звука через слой.

ние распространения которых составляет тупой угол с осью  $z$ , через  $p''$ . В результате приходим к схеме, изображенной на рис. 64, б.

Запишем падающую, отраженную и прошедшую волны в виде

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= e^{ik_1(x \sin \theta + z \cos \theta)}, \\ p_{отр} &= A e^{ik_1(x \sin \theta - z \cos \theta)}, \\ p_{пр} &= B e^{ik_1(x \sin \theta + z \cos \theta)}. \end{aligned} \right\} \quad (30.2)$$

Здесь  $A$  — коэффициент отражения;  $B$  — коэффициент прохождения. Поле  $p_2$  в слое запишем в виде суммы волн  $p'$  и  $p''$  (см. рис. 64, б):

$$p_2 = C e^{ik_2(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)} + D e^{ik_2(x \sin \theta_2 - z \cos \theta_2)}.$$

В соответствии с формулой (30.1) имеем  $k_2 \sin \theta_2 = k_1 \sin \theta$ . Тогда

$$p_2 = (C e^{ik_2 z \cos \theta_2} + D e^{-ik_2 z \cos \theta_2}) e^{ik_1 x \sin \theta}. \quad (30.3)$$

На границах слоя должно соблюдаться равенство звуковых давлений и равенство колебательных скоростей:

$$p_0 + p_{отр} = p_2; \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial (p_0 + p_{отр})}{\partial z} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_2}{\partial z} \quad \text{при } z = 0;$$

$$p_{пр} = p_2; \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_{пр}}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z} \quad \text{при } z = h.$$



Подставляя выражения (30.2) и (30.3) в граничные условия, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} 1 + A &= C + D; \\ \omega(1 - A) &= C - D; \\ Be^{iP} &= Ce^{iP} + De^{-iP}; \\ \omega Be^{iR} &= Ce^{iP} - De^{-iP}, \end{aligned}$$

в которой введены обозначения

$$\begin{aligned} R &= k_1 h \cos \theta; \quad P = k_2 h \cos \theta_2; \\ \omega &= \frac{\rho_2 c_2 \cos \theta}{\rho_1 c_1 \cos \theta_2}, \end{aligned}$$

причем  $\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \theta}$ .

Складывая и вычитая первое уравнение со вторым, а третье с четвертым, получаем систему двух уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A$  и  $B$ . После решения системы находим

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{i \left( \frac{1}{\omega} - \omega \right) \sin P}{2 \cos P - i \left( \frac{1}{\omega} + \omega \right) \sin P}; \\ B &= \frac{2e^{-iR}}{2 \cos P - i \left( \frac{1}{\omega} + \omega \right) \sin P}. \end{aligned} \right\} \quad (30.4)$$

Если угол падения не превышает критический угол полного внутреннего отражения, то  $P$  — вещественная величина. Тогда, переходя к модулям комплексных величин  $A$  и  $B$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} |A| &= \frac{\left| \left( \frac{1}{\omega} - \omega \right) \sin P \right|}{\sqrt{4 \cos^2 P + \left( \frac{1}{\omega} + \omega \right)^2 \sin^2 P}}; \\ |B| &= \frac{2}{\sqrt{4 \cos^2 P + \left( \frac{1}{\omega} + \omega \right)^2 \sin^2 P}}. \end{aligned} \right\} \quad (30.5)$$

Выражения (30.5) называются формулами Рэлея.

Очевидно, что при  $\omega = 1$  звук проходит через слои. Для нормального падения это имеет место при равенстве волновых сопротивлений  $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$ . Полное прохождение звука будет наблюдаться также при выполнении условия  $\sin P = 0$ , что соответствует равенству  $k_2 h \cos \theta_2 = \pi n$ , где  $n$  — целое число, или

$$\frac{2h \cos \theta_2}{\lambda_2} = n.$$

Здесь  $\lambda_2$  — длина звуковой волны в слое. При нормальном падении звука последнее условие соответствует пластине, на толщине которой целое число раз укладывается половина длины волны звука в слое.

Между соседними максимумами коэффициента прохождения звука при выполнении условия  $\cos P = 0$  будут иметь место минимумы. При этом толщина пластины будет кратной нечетному числу четвертей длины звуковой волны в слое.

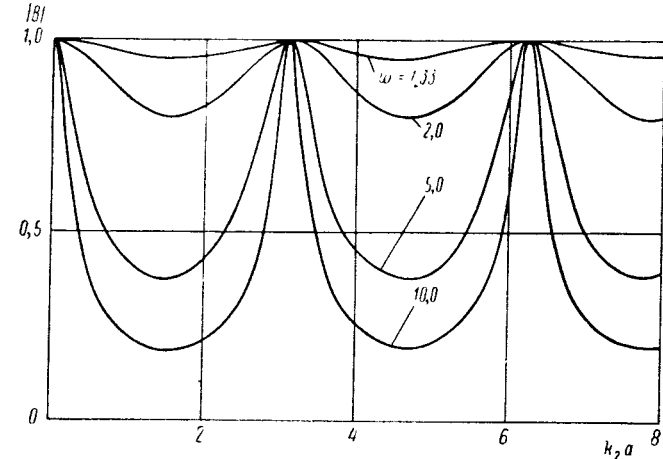


Рис. 65. Зависимость коэффициента прохождения звука через слой от волновой толщины слоя.

Минимальное значение коэффициента прохождения и максимальное значение коэффициента отражения будут равны

$$|A|_{\max} = \frac{\left| \frac{1}{\omega} - \omega \right|}{\frac{1}{\omega} + \omega}; \quad |B|_{\min} = \frac{2}{\frac{1}{\omega} + \omega}.$$

Эти значения соответствуют коэффициентам отражения и прохождения для границы раздела двух безграничных сред.

На рис. 65 показана зависимость коэффициента прохождения звука через слой от волновой толщины слоя при нормальном падении звука. Параметром семейства служит отношение  $\omega = \rho_2 c_2 / \rho_1 c_1$ . При волновой толщине, кратной  $\pi$ , звук полностью проходит через пластину (полуволновой резонанс), причем с увеличением отношения волновых сопротивлений слоя и среды резонансы становятся все более острыми.

Рассмотрим далее наклонное падение звука. Распространенным частным случаем является случай  $c_2 > c_1$ . Очевидно, что при этом  $\theta_2 > \theta$ . Как известно, угол падения, определяемый соотношением  $\sin \theta_{кр} = c_1 / c_2$ , является критическим. Для границы раздела двух полубесконечных сред при  $\theta > \theta_{кр}$  происходит полное внутреннее

отражение падающей волны. Если же волна падает на слой конечной толщины, то при  $\theta > \theta_{кр}$  полное отражение не будет наблюдаться. Действительно, при углах падения больше критического  $\sin \theta_2 > 1$ . Следовательно, угол  $\theta_2$  должен быть комплексным:  $\theta_2 = \theta'_2 + i\theta''_2$ . Синус его равен

$$\sin \theta_2 = \sin \theta'_2 \operatorname{ch} \theta''_2 + i \cos \theta'_2 \operatorname{sh} \theta''_2.$$

Мнимая часть этого выражения равна нулю, а вещественная должна быть больше единицы. Отсюда  $\theta'_2 = \frac{\pi}{2}$  и  $\sin \theta_2 = \operatorname{ch} \theta''_2 > 1$ .

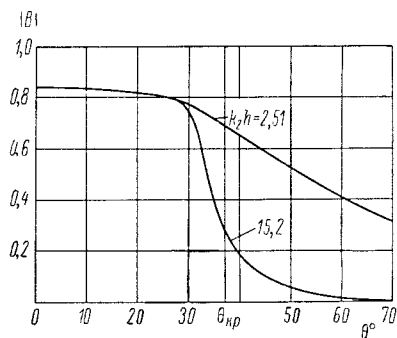


Рис. 66. Зависимость коэффициента прохождения звука через слой от угла падения.

в сторону уменьшения  $z$ , то станет ясно, что при указанном выборе знака второе слагаемое также определяет затухающее колебание.

Таким образом, при углах падения  $\theta > \theta_{кр}$  в слое вблизи границы  $z = h$  вдоль оси  $x$  будет распространяться волна

$$p_2 = [C e^{-k_2 h \operatorname{sh} \theta''_2} + D e^{k_2 h \operatorname{sh} \theta''_2}] e^{i k_1 x \sin \theta} \neq 0.$$

Отсюда следует, что прохождение звука через слой будет наблюдаться и при углах падения, превосходящих критический.

На рис. 66 показана зависимость коэффициента прохождения звука через слой от угла падения. Здесь принято:  $h = 3 \text{ см}$ ;  $\rho_1 = 1 \text{ г/см}^3$ ;  $c_1 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$ ;  $\rho_2 = 1,14 \text{ г/см}^3$ ;  $c_2 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$ . В данном примере критический угол равен  $37^\circ$ . Из рисунка видно, что вблизи этого угла начинается уменьшение коэффициента прохождения звука, причем с увеличением волновой толщины пластины коэффициент прохождения звука убывает.

Формулы (30.4) можно применять и для расчета коэффициентов прохождения и отражения звука через слой с активным затуханием. Наличие активных потерь в слое можно учесть, если ввести комплексную скорость звука  $\tilde{c}_2 = c_2 (1 - i\eta_c)$  и комплексное волновое число  $\tilde{k}_2 = k_2 (1 + i\eta_k)$ . Здесь  $\eta_c$  и  $\eta_k$  — коэффициенты затухания для скорости звука и для волнового числа.

Найдем связь между комплексным волновым числом и комплексной скоростью звука:

$$\tilde{k}_2 = \frac{\omega}{\tilde{c}_2} = \frac{\omega}{c_2 (1 - i\eta_c)} = \frac{\omega (1 + i\eta_c)}{c_2 (1 + \eta_c^2)}.$$

Следовательно,

$$k_2 = \frac{\omega}{c_2 (1 + \eta_c^2)}; \quad \eta_c = \eta_k.$$

Для малых значений  $\eta_c \ll 1$  получаем  $k_2 \approx \omega/c_2$ . При расчете следует учесть, что величины  $\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta$  и  $\cos \theta_2$  будут комплексными.

На рис. 67 приведены результаты расчета коэффициента прохождения звука через слой с активными потерями при различных коэффициентах потерь  $\eta_k$  для двух значений отношения волновых сопро-

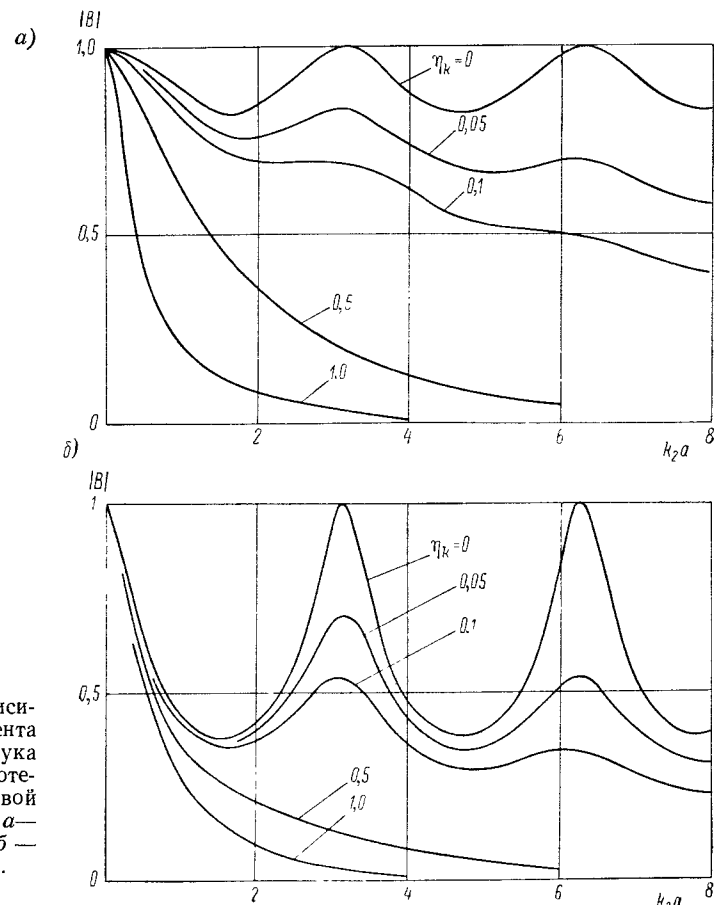


Рис. 67. Зависимость коэффициента прохождения звука через слой с потерями от волновой толщины слоя: а — при  $\omega = 1,9$ ; б — при  $\omega = 5,0$ .

тивлений. С возрастанием  $\eta_k$  коэффициент прохождения звука уменьшается. При больших коэффициентах  $\eta_k$  влияние потерь сказывается главным образом в области резонансов (см. рис. 67). Однако при  $\eta_k > 0,1$  потери существенно влияют на коэффициент прохождения звука даже при сравнительно малых волновых толщинах слоя. Можно считать, что при  $\eta_k > 0,1$  резонансные явления в слое практически отсутствуют.

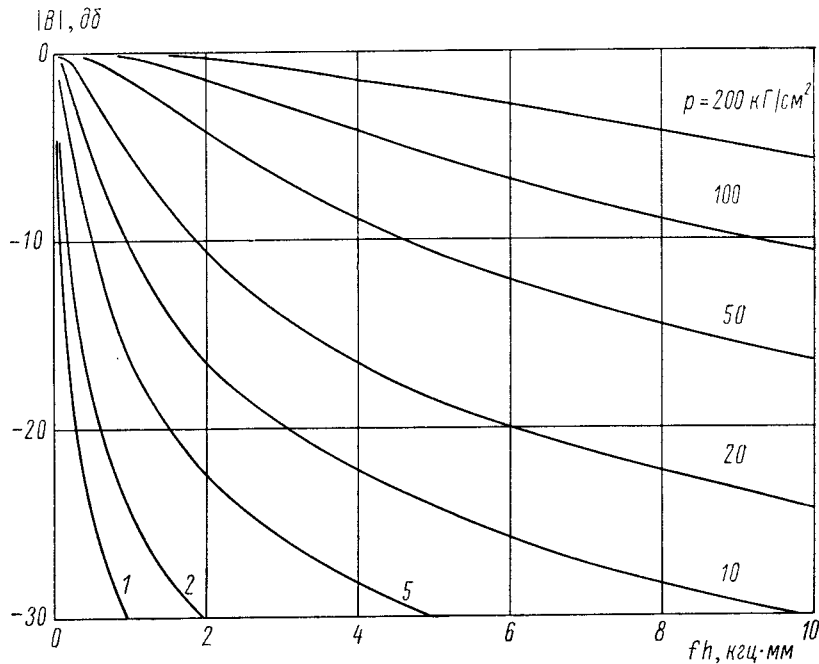


Рис. 68. Зависимость коэффициента прохождения звука через слой воздуха в воде от произведения  $fh$ .

**Прохождение звука через слой воздуха в воде.** По формулам (30.5) можно рассчитать коэффициент прохождения звука через слой воздуха в воде при различных гидростатических давлениях, полагая, что при давлении до нескольких сотен атмосфер скорость звука в воздухе мало меняется с увеличением давления, а плотность линейно возрастает. Скорость звука и плотность воды в указанном диапазоне давлений можно приближенно считать постоянными. Поэтому отношение волновых сопротивлений  $\omega$  возрастает при увеличении давления практически линейно.

На рис. 68 показана зависимость коэффициента прохождения звука от произведения  $fh$ . При малом гидростатическом давлении коэффициент прохождения быстро уменьшается с увеличением волновой толщины слоя. При возрастании давления отношение волновых сопротивлений воздуха и воды увеличивается и звукоизолирующие свойства воздушного слоя снижаются.

### § 31. Прохождение звука через упругую пластину

Вычисление коэффициентов прохождения и отражения звука для упругой пластины представляет собой более трудную задачу, чем определение соответствующих параметров для жидкого слоя, поскольку при расчете взаимодействия звуковых волн с упругой пластиной необходимо учитывать волны сдвига. Схема прохождения звука будет иметь вид, представленный на рис. 69. Угол  $\theta_l$  соответствует продольной волне, угол  $\theta_t$  — волне сдвига; при этом

$$\frac{\sin \theta_l}{c_l} = \frac{\sin \theta_t}{c_t} = \frac{\sin \theta}{c}, \quad (31.1)$$

где  $c_l$ ,  $c_t$  — соответственно скорости продольной и сдвиговой волны.

Звуковые давления в среде запишем в виде (30.2). Колебательную скорость в слое согласно выражению (26.86) можно представить как

$$v = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Pi}, \quad (31.2)$$

где  $\Phi$  — скалярный потенциал, а  $\vec{\Pi}$  — векторный потенциал колебательной скорости. Как указывалось в § 26, в двумерном случае должно быть  $\Pi_x = \Pi_z = 0$ . Тогда  $\Pi = \Pi_y$ .

Составляющие колебательной скорости в пластине определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Pi}{\partial z}; \\ v_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Pi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (31.3)$$

Решение уравнений (26.11) и (26.12) в соответствии с рис. 69 запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi' e^{ik_l(x \sin \theta_l + z \cos \theta_l)} + \Phi'' e^{ik_l(x \sin \theta_l - z \cos \theta_l)}; \\ \Pi &= \Pi' e^{ik_t(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} + \Pi'' e^{ik_t(x \sin \theta_t - z \cos \theta_t)}. \end{aligned} \right\} \quad (31.4)$$

Здесь  $k_l = \omega/c_l$ ,  $k_t = \omega/c_t$  — волновые числа для продольных и сдвиговых колебаний. Из выражения (31.1) получаем

$$k_l \sin \theta_l = k_t \sin \theta_t = k \sin \theta.$$

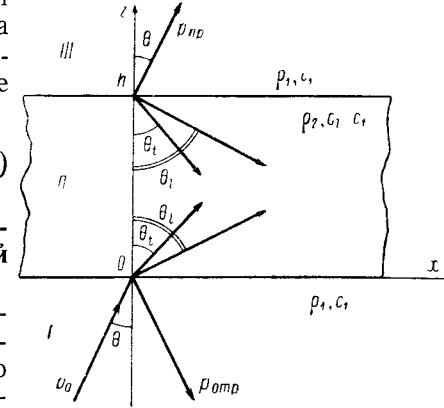


Рис. 69. Схема прохождения звука через упругую пластину.

Это равенство означает, что вдоль оси  $x$  все волны распространяются с одной скоростью, определяемой скоростью изменения фазы вдоль оси  $x$  в падающей плоской волне. Выражения (31.4) можно переписать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= (\Phi' e^{ik_l z \cos \theta_l} + \Phi'' e^{-ik_l z \cos \theta_l}) e^{ikx \sin \theta}, \\ \Pi &= (\Pi' e^{ik_l z \cos \theta_l} + \Pi'' e^{-ik_l z \cos \theta_l}) e^{ikx \sin \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (31.5)$$

Воспользовавшись соотношениями (25.3а), запишем

$$\left. \begin{aligned} -i\omega\sigma_{zz} &= \lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ -i\omega\sigma_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (31.6)$$

Граничные условия (26.18) можно представить в виде

$$\begin{aligned} v_z^I &= v_z^{II}; \quad \sigma_{zz} = -(\rho_0 + \rho_{\text{отр}}), \quad \sigma_{xz} = 0 \quad \text{при } z = 0; \\ v_z^{II} &= v_z^{III}; \quad \sigma_{zz} = -\rho_{\text{нр}}; \quad \sigma_{xz} = 0 \quad \text{при } z = h. \end{aligned}$$

Здесь  $v^I, II, III$  — составляющие колебательной скорости в средах I, II, III (см. рис. 69).

Шести граничных условий должно быть достаточно для определения шести неизвестных коэффициентов  $A, B, \Phi', \Phi'', \Pi', \Pi''$ . Подставим формулы (31.5) в выражения (31.3) и затем в (31.6).

Учитывая граничные условия и формулы (30.2), получаем систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Опуская громоздкие выкладки и воспользовавшись обозначениями [8], запишем окончательный результат:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{i(M^2 - N^2 + 1)}{2M + i(M^2 - N^2 - 1)}; \\ B &= \frac{2Ne^{-iR}}{2M + i(M^2 - N^2 - 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (31.7)$$

Здесь

$$N = \frac{Z_{2l}}{Z_1} \frac{\cos^2 2\theta_l}{\sin P} + \frac{Z_{2l}}{Z_1} \frac{\sin^2 2\theta_l}{\sin Q};$$

$$M = \frac{Z_{2l}}{Z_1} \cos^2 2\theta_l \operatorname{ctg} P + \frac{Z_{2l}}{Z_1} \sin^2 2\theta_l \operatorname{ctg} Q;$$

$$R = k_l h \cos \theta; \quad P = k_l h \cos \theta_l; \quad Q = k_l h \cos \theta_l;$$

$$Z_1 = \frac{\rho_1 c_1}{\cos \theta}; \quad Z_{2l} = \frac{\rho_2 c_l}{\cos \theta_l}; \quad Z_{2t} = \frac{\rho_2 c_t}{\cos \theta_l};$$

$$\cos \theta_l = \sqrt{1 - \frac{c_l^2}{c_1^2} \sin^2 \theta}; \quad \cos \theta_t = \sqrt{1 - \frac{c_t^2}{c_1^2} \sin^2 \theta}.$$

При углах падения больше критического для продольной и поперечной волны подкоренные выражения в двух последних формулах становятся отрицательными и следует считать

$$\cos \theta_l = i \sqrt{\frac{c_l^2}{c_1^2} \sin^2 \theta - 1}; \quad \cos \theta_t = i \sqrt{\frac{c_t^2}{c_1^2} \sin^2 \theta - 1}.$$

Из двух возможных знаков перед корнем здесь выбран знак плюс в соответствии с рассуждениями, приведенными в предыдущем параграфе;  $\sin \theta_l$  и  $\sin \theta_t$  при этом оказываются вещественными величинами, превосходящими единицу.

Выражения (31.7) из-за иного выбора координатных осей отличаются от формул, приведенных в книге [8], знаками перед  $i$ . Формулы (31.7) в несколько иной записи были получены в работе [146].

Для сред, в которых волны сдвига распространяются плохо (резиноподобных сред), можно положить  $\theta_t = 0, k_t = 0$ . В результате получим формулы (30.4).

При нормальном падении звука волны сдвига не возбуждаются в любой изотропной среде и формулы (31.7) также переходят в выражения (30.4).

Анализ формул (31.7), проведенный в книге [8], показывает, что существуют области полной прозрачности пластины. Для сред с высоким волновым сопротивлением ( $\rho_2 c_l \gg \rho_1 c_1$ ) эти области приближенно соответствуют углам, при которых скорость следа падающей волны вдоль пластины совпадает со скоростью одной из свободных (нормальных) волн в пластине  $v$ . Данное условие записывается в виде  $\sin \theta = c_1/v$ . Очевидно, что оно может иметь место лишь при  $v > c_1$ .

В ряде случаев при определенных углах падения звука наблюдается полное прохождение звука. Более подробно на этих эффектах мы остановимся при изучении прохождения звуковых волн через тонкие пластины.

В работе [120] теоретически и экспериментально исследовано положение максимумов прозрачности стальной пластины, погруженной в воду. Если толщина пластины составляет несколько длин волн в материале, то в пластине может одновременно возбуждаться несколько нормальных волн. Поэтому картина распространения звука сквозь толстые пластины при наклонном падении является весьма сложной. Авторы работы [120] экспериментально наблюдали возникновение максимумов прозрачности, соответствующих нормальным волнам вплоть до 14 порядка.

Результаты расчета по формуле (31.7) приведены на рис. 70 и 71. На рис. 70 показана зависимость коэффициента прохождения звука в воде от частоты вблизи полуволнового резонанса для стальной и алюминиевой пластин, на рис. 71 — зависимость от угла падения звука на частоте резонанса. Из рисунков видно, что высокий коэффициент прохождения звука имеет место лишь в очень малом диапа-

зоне частот и углов падения звука. Причиной такой узкополосности полуволновых металлических пластин является резкое отличие их волновых сопротивлений от волнового сопротивления воды.

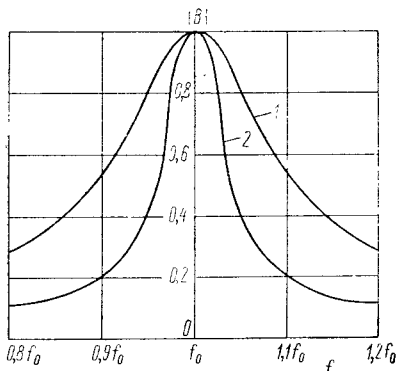


Рис. 70. Зависимость коэффициента прохождения звука через пластину от частоты вблизи полуволнового резонанса при нормальном падении звука.

1 — алюминий; 2 — сталь.

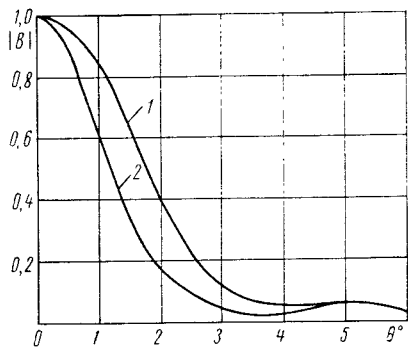


Рис. 71. Зависимость коэффициента прохождения звука через полуволновую пластину от угла падения.

1 — алюминий; 2 — сталь.

### § 32. Прохождение звука через тонкую пластину

**Симметричные и антисимметричные колебания тонкой пластины.** Значительно более простые формулы, имеющие наглядное физическое толкование, можно получить, если рассматривать пластину, толщина которой значительно меньше длины продольных и поперечных волн в материале. Такой анализ выполнен в работе [45].

При изучении взаимодействия звуковых волн с тонкими пластинами рассматриваются два типа приближений. Наиболее простым является приближение, согласно которому для очень тонких пластин можно пренебречь колебаниями, связанными с изменением толщины пластины. При этом допускается, что передача звука происходит только благодаря колебаниям изгиба. Для весьма тонких пластин (критерии будут указаны ниже) эта теория дает достаточно точные результаты. В работе [45] показано, что для умеренно тонких пластин существенными оказываются и поперечные колебания сжатия пластины.

Будем считать, что в пластине устанавливаются два типа колебаний, показанных на рис. 72. Стрелки указывают мгновенные направления колебательной скорости верхней и нижней сторон пластины. Колебания, показанные на рис. 72, а, являются изгибными (антисимметричными) по отношению к плоскости равновесия. Колебания рис. 72, б симметричны относительно средней линии. Произвольные колебания пластины всегда могут быть разложены на колебания этих двух типов.

Для каждого типа колебаний можно определить механические импедансы колебаний. Определим импеданс изгибных, или антисимметричных, колебаний в виде

$$Z = \frac{p'}{v'} \quad (32.1)$$

Здесь  $p'$  — антисимметричная составляющая общего звукового давления на пластину;  $v'$  — антисимметричная составляющая колебательной скорости. При этом

$$p' = p_1 - p_2 \quad (32.2)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — звуковые давления соответственно в нижнем и верхнем полупространствах. Если выбрать координатные оси таким образом,

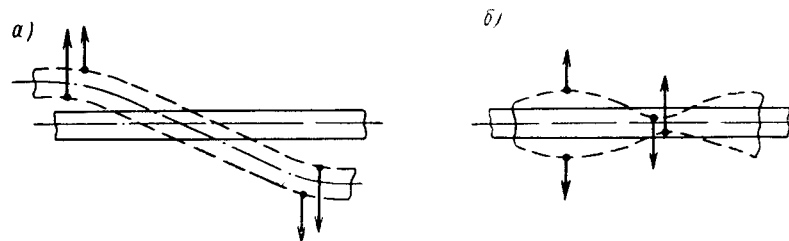


Рис. 72. Антисимметричные (а) и симметричные (б) колебания пластин.

чтобы волновой вектор падающей звуковой волны  $p_0$  лежал в плоскости  $xOz$ , то все смещения не будут зависеть от координаты вдоль оси  $y$ . Это дает возможность рассматривать плоскую задачу и для определения импеданцев использовать одномерные уравнения колебаний пластины.

Запишем одномерное уравнение колебаний тонкой пластины (25.6) в следующем виде:

$$M \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + g \frac{\partial^4 u'}{\partial x^4} = p' \quad (32.3)$$

Здесь  $u'$  — антисимметричная составляющая смещения пластины;  $M = \rho_m h$  — произведение плотности материала на толщину, или масса единицы площади пластины;  $g = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$  — цилиндрическая жесткость пластины.

Для гармонических колебаний получаем  $u' = \frac{v'}{-i\omega}$ . Следовательно,

$$-\frac{\partial^4 v'}{\partial x^4} - k_n^4 v' = \frac{i\omega p'}{g} \quad (32.4)$$

где  $k_n$  — волновое число для колебаний изгиба. При этом  $k_n^4 = \frac{\omega^2 M}{g}$ .

При падении плоской звуковой волны на пластину зависимость звукового давления от координаты  $x$  задается множителем  $e^{ikx \sin \theta}$ . Аналогичной будет и зависимость колебательной скорости от координаты  $x$ . Таким образом, из уравнения (32.4) получаем

$$Z = \frac{p'}{v'} = -i\omega M \left( 1 - \frac{k^4}{k_n^4} \sin^4 \theta \right).$$

Записав последнее выражение через скорости волн, получим

$$Z = -i\omega M \left( 1 - \frac{c_n^4}{c^4} \sin^4 \theta \right). \quad (32.5)$$

Здесь  $c$  — скорость звука в воде;  $c_n$  — скорость волн изгиба в пластине, определяемая соотношением

$$c_n^4 = \frac{\omega^2 g}{M}.$$

Из выражения (32.5) следует, что импеданс изгибных колебаний определяется в основном инерционным сопротивлением пластины  $-i\omega M$ , совпадающим с импедансом массы. Кроме того, в выражение (32.5) входит поправочный член, зависящий от угла падения звука. Это показывает, что пластина, вообще говоря, не обладает локальным импедансом, поскольку понятие локального импеданца предполагает независимость отношения звукового давления к колебательной скорости на поверхности материала от угла падения [8]. Представление о существовании локального импеданца справедливо для тех типов поверхностей, на которых возмущения, вызванные звуковой волной, не передаются вдоль границы по материалу. Для такой поверхности нормальная скорость в каждой точке будет определяться только местным (локальным) значением звукового давления. Поверхности этого типа называются локально реагирующими. Из выражения (32.5) следует, что упругая пластина не относится к классу локально реагирующих поверхностей.

Однако для тонких пластин второе слагаемое в выражении (32.5) может быть весьма мало. Так, например, для стальной пластины толщиной 2 мм на частоте 15 кгц получаем  $c_n = 0,5 \cdot 10^5$  см/сек. Тогда в воде  $c_n^4/c^4 \approx 0,012$ . Наличие малого множителя  $\sin^4 \theta$  еще сильнее уменьшает эту величину. Таким образом, тонкая металлическая пластина, находящаяся в воде, приближенно может быть отнесена к классу локально реагирующих поверхностей. Критерием для частот, при которых можно пренебречь вторым слагаемым, следует считать неравенство  $c_n < c$  или  $f < f_{кр}$ , где  $f_{кр}$  — критическая частота, на которой скорость изгибных волн в пластине равна скорости звука в среде:

$$f_{кр} = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{M}{g}}. \quad (32.6)$$

Для стальной пластины толщиной 2 мм эта частота составляет  $1,2 \cdot 10^5$  гц.

Вычислим теперь импеданс симметричных колебаний. Определим его в виде

$$Z_{np} = \frac{p''}{v''}. \quad (32.7)$$

Здесь  $p'' = p_1 + p_2$  — симметричная составляющая звукового давления;  $v''$  — симметричная относительно средней линии составляющая колебательной скорости.

Такое определение импеданца  $Z_{np}$  отличается от определения, принятого в работе [45] множителем 2. Запись в форме (32.7) представляется более удобной в силу симметрии получающихся при этом выражений для коэффициентов отражения и прохождения.

Воспользуемся дифференциальным уравнением для поперечных колебаний сжатия [45] тонкой пластины

$$\frac{\partial^2 u''}{\partial t^2} - c_{np}^2 \frac{\partial^2 u''}{\partial x^2} = \pm \frac{h}{4E_1} \left[ (\sigma_1^2 - 1) \frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} + c_{np}^2 \frac{\partial^2 p''}{\partial x^2} \right]. \quad (32.8)$$

Здесь  $E_1 = \frac{E}{1-\sigma^2}$  — модуль упругости для тонкой пластины;  $c_{np} = \sqrt{E_1/\rho_m}$  — скорость продольной волны в тонкой пластине;  $\sigma_1 = \frac{\sigma}{1-\sigma^2}$  — коэффициент Пуассона для тонкой пластины;  $u''$  — симметричная составляющая смещения (для гармонического движения  $u'' = \frac{v''}{-i\omega}$ ). Знак плюс в выражении (32.8) относится к верхней стороне пластины.

Будем по-прежнему полагать, что зависимость смещений от координаты вдоль оси  $x$  задается множителем  $e^{ikx \sin \theta}$ . Тогда получим

$$Z_{np} = \frac{i4E_1}{\omega h \left[ 1 - \sigma_1^2 - \left( \frac{c_{np}}{c} \sin \theta \right)^2 \right]} \left[ 1 - \left( \frac{c_{np}}{c} \sin \theta \right)^2 \right]. \quad (32.9)$$

При нормальном падении звука ( $\theta = 0$ ) из последней формулы находим

$$Z_{np} = \frac{i4}{\omega h} \cdot \frac{E(1-\sigma)}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}, \quad (32.10)$$

что соответствует значению для статической деформации пластины под действием равномерно распределенной силы [42].

**Вычисление коэффициентов отражения и прохождения звука.** Имея выражения для импедансов механических колебаний, можно вычислить коэффициенты отражения и прохождения звука.

Запишем звуковые давления (см. рис. 73) в виде

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}; \\ p_{np} &= B e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}; \\ p_{отр} &= A e^{ik(x \sin \theta - z \cos \theta)}. \end{aligned} \right\} \quad (32.11)$$

Выделим симметричную и антисимметричную составляющие звукового давления на пластину. При этом учтем, что  $p_2 = p_{np}$  при  $z = h$  и  $p_1 = p_0 + p_{отр}$  при  $z = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} p' &= p_1 - p_2 = (1 + A - B e^{ikh \cos \theta}) e^{ikx \sin \theta}; \\ p'' &= p_1 + p_2 = (1 + A + B e^{ikh \cos \theta}) e^{ikx \sin \theta}. \end{aligned} \right\} (32.12)$$

Колебательная скорость пластины на нижней стороне будет равна сумме колебательных скоростей антисимметричных и симметричных колебаний, а на верхней стороне — их разности:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v' + v'' \text{ при } z = 0; \\ v_2 &= v' - v'' \text{ при } z = h. \end{aligned} \right\} (32.13)$$

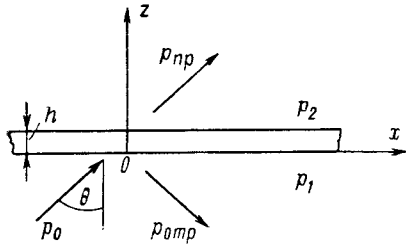


Рис. 73. К прохождению звука через тонкую пластину.

Действительно, положительное направление колебательной скорости на обеих сторонах пластины, соответствующее колебаниям изгиба, направлено вверх (поскольку положительное значение разности  $p' = p_1 - p_2$  направлено в эту сторону), в то же время положительное направление скорости на обеих сторонах, соответствующее симметричным колебаниям, направлено внутрь пластины (поскольку при положительном значении суммы  $p' = p_1 + p_2$  пластина сжимается). Поэтому на нижней стороне происходит сложение скоростей, а на верхней — вычитание.

Подставляя формулы (32.1), (32.7) и (32.12) в последние выражения, получаем

$$v_1 = \frac{p'}{Z} + \frac{p''}{Z_{np}} = \left[ \frac{1 + A - B e^{ikh \cos \theta}}{Z} + \frac{1 + A + B e^{ikh \cos \theta}}{Z_{np}} \right] e^{ikx \sin \theta} \text{ при } z = 0;$$

$$v_2 = \frac{p'}{Z} - \frac{p''}{Z_{np}} = \left[ \frac{1 + A - B e^{ikh \cos \theta}}{Z} - \frac{1 + A + B e^{ikh \cos \theta}}{Z_{np}} \right] e^{ikx \sin \theta} \text{ при } z = h.$$

Воспользуемся теперь граничными условиями на верхней и нижней стороне пластины

$$v_1 = \frac{1}{i\omega\rho} \cdot \frac{\partial(p_0 + p_{отр})}{\partial z} \text{ при } z = 0;$$

$$v_2 = \frac{1}{i\omega\rho} \cdot \frac{\partial p_{np}}{\partial z} \text{ при } z = h.$$

Подставляя в эти выражения формулы (32.11), получаем систему двух уравнений относительно коэффициентов  $A$  и  $B$ , решение которой дает

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{Z Z_{np} - 4Z_0^2}{(Z + 2Z_0)(Z_{np} + 2Z_0)}; \\ B &= \frac{2Z_0(Z_{np} - Z)}{(Z + 2Z_0)(Z_{np} + 2Z_0)} e^{-ikh \cos \theta}. \end{aligned} \right\} (32.14)$$

В этих формулах введено обозначение  $Z_0 = \frac{\rho c}{\cos \theta}$ .

Рассмотрим поведение импеданса  $Z_{np}$  при различных углах падения звука. При угле падения, определяемом соотношением

$$\sin \theta_1 = \frac{c}{c_{np}}, \quad (32.15)$$

импеданс  $Z_{np}$  обращается в нуль. Это явление соответствует совпадению скорости следа в звуковой зоне, бегущей вдоль пластины, со скоростью продольной волны в пластине. Оно носит название резонанса совпадений для продольных волн. При угле, определяемом равенством

$$\sin \theta_2 = \frac{c}{c_{np}} \cdot \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma}, \quad (32.16)$$

импеданс  $Z_{np}$  обращается в бесконечность.

**Приближенные формулы без учета продольных волн.** На рис. 74 показана зависимость  $Z_{np}$  от  $\theta$  для стальной пластины толщиной 2 мм. Почти во всем диапазоне углов падения модуль  $Z_{np}$  на три порядка больше акустического сопротивления воды [ $\rho c = 1,5 \cdot 10^5 \text{ г/(см}^2 \cdot \text{сек)}$ ], в то время как модуль  $Z$  одного порядка с волновым сопротивлением воды. Например, для  $f = 6 \cdot 10^4$  и  $h = 2 \text{ мм}$  получаем  $Z = -i5,9 \cdot 10^5 \text{ г/(см}^2 \cdot \text{сек)}$ . Практически для любых тонких металлических пластин сохраняется соотношение  $Z_{np} \gg Z$ . Исключением служит лишь весьма узкая область вблизи угла  $\theta = \theta_1$ . Можно найти критерий, при котором выполняется указанное неравенство. Вычислив отношение  $Z_{np}/Z$  при  $\theta = 0$ , получаем, что  $Z_{np}$  намного больше, чем  $Z$ , при выполнении условия  $k_{np} h \ll 2$ , где  $k_{np} = \omega/c_{np}$  — волновое число для продольных волн в пластине. Это означает, что толщина пластины должна быть значительно меньше одной трети длины волны в материале.

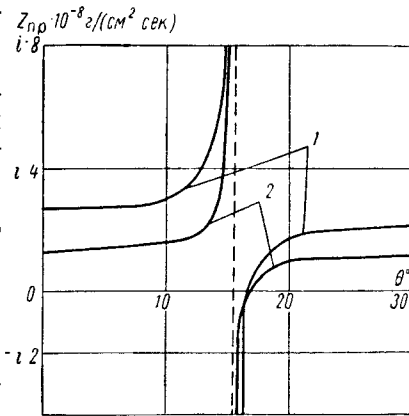


Рис. 74. Зависимость импеданса продольных колебаний пластины от угла падения звука.

1 — при  $fh = 6 \cdot 10^3 \text{ см} \cdot \text{гц}$ ; 2 — при  $fh = 12 \cdot 10^3 \text{ см} \cdot \text{гц}$ .

Если положить в выражениях (32.14)  $Z_{np} = \infty$ , то получаем формулы Кремера [21]:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{Z}{Z + 2Z_0}; \\ B &= \frac{2Z_0}{Z + 2Z_0} e^{-ikh \cos \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (32.17)$$

Переходя к модулям, находим

$$\left. \begin{aligned} |A| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left[ \frac{2\rho c}{\omega M \cos \theta \left[ 1 - \left( \frac{c_n}{c} \right)^4 \sin^4 \theta \right]} \right]^2}}; \\ |B| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left[ \frac{\omega M \cos \theta \left[ 1 - \left( \frac{c_n}{c} \right)^4 \sin^4 \theta \right]}{2\rho c} \right]^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (32.18)$$

Коэффициенты  $|A|$  и  $|B|$  подчиняются условию  $|A|^2 + |B|^2 = 1$ , соответствующему закону сохранения энергии при отсутствии диссипативных потерь в пластине.

Из выражения (32.5) и формул (32.18) следует, что при угле падения звуковой волны на пластину, подчиняющемся условию  $\sin \theta = \frac{c}{c_n}$ , импеданс  $Z$  обращается в нуль. При указанном условии скорость волн изгиба в пластине  $c_n$  совпадает со скоростью распространения следа падающей волны вдоль пластины  $c/\sin \theta$ . Коэффициент отражения в этом случае становится равным нулю, а модуль коэффициента прохождения — равным единице. Данное явление может быть названо резонансом совпадений для изгибных волн (или консиденс-резонансом).

Выше было показано, что для тонких металлических пластин скорость волн изгиба меньше, чем скорость звука в воде. Поэтому резонанс совпадений для изгибных волн в тонких металлических пластинах, расположенных в воде, наблюдаться не может. Иное положение существует в воздушной акустике. Поскольку скорость звука в воздухе примерно в пять раз меньше скорости звука в воде, то для пластины, находящейся в воздухе, при некоторых углах падения звука может оказаться, что  $Z = 0$ . Тогда будет иметь место полное прохождение звука через пластину. Резонанс совпадений для изгибных волн в воздушной акустике является одной из причин уменьшения звукоизоляции конструкций.

Если условие  $c_n < c$  выполнено, то в формулах (32.18) можно пренебречь членами, зависящими от  $c_n$ . Тогда получаем

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{2\rho c}{\omega M \cos \theta} \right)^2}}; \quad |B| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\omega M \cos \theta}{2\rho c} \right)^2}}. \quad (32.19)$$

Приведенные выражения показывают, что коэффициенты отражения и прохождения звука через тонкую металлическую пластину определяются только величиной  $M$ , т. е. массой единицы площади пластины. Поэтому выражения (32.19) иногда называют законом массы. В указанном приближении  $|A|$  и  $|B|$  не зависят от модуля упругости материала пластины. Такую пластину в воде можно рассматривать как поверхность, обладающую локальным импеданцем.

Фазы коэффициентов отражения и прохождения звука  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  будут определяться следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_A &= \arg A = \\ &= \arctg \frac{\omega M \cos \theta}{2\rho c} - \frac{\pi}{2}; \\ \varphi_B &= \arg B = -kh \cos \theta + \\ &+ \arctg \frac{\omega M \cos \theta}{2\rho c}. \end{aligned} \right\} \quad (32.20)$$

Отметим, что при вычислении фазы коэффициента прохождения звука нельзя было в исходных формулах пренебречь набегом фазы волны в воде на толщине  $h$ , т. е. членом  $kh \cos \theta$ , даже для весьма тонких пластин, так как при уменьшении толщины пластины оба слагаемых в выражении (32.20) оказываются

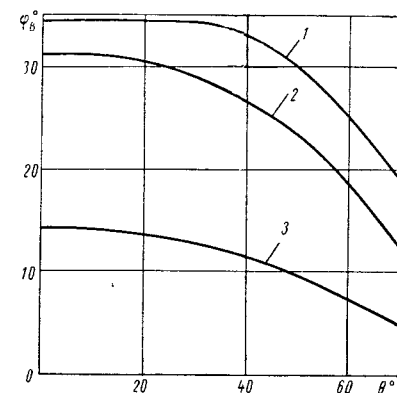


Рис. 75. Зависимость фазы коэффициента прохождения звука через пластину от угла падения звука. 1 — при  $fh = 1,2 \cdot 10^4$  см · гц; 2 — при  $fh = 0,6 \cdot 10^4$  см · гц; 3 — при  $fh = 0,2 \cdot 10^4$  см · гц.

величинами одного порядка.

На рис. 75 показана зависимость набега фазы звуковой волны, прошедшей через стальную пластину толщиной 2 мм, от угла падения. Графики, приведенные на рис. 76, позволяют определить коэффициенты отражения и прохождения звука для тонкой стальной пластины, находящейся в воде.

На рис. 77 приведены зависимости коэффициента прохождения звука через стальную пластину от угла падения. При наклонном падении коэффициент прохождения звука оказывается выше, чем при нормальном падении. Заметим, что в этом отношении ситуация для жидкого слоя (см. § 30) была противоположной. Как следует из рис. 66, при наклонном падении волны на жидкий (или резиноподобный) слой коэффициент прохождения звука меньше, чем при нормальном падении. Различный характер кривых для жидкого слоя и тонкой упругой пластины объясняется существенным различием механизмов взаимодействия звуковой волны с материалом.

В жидком слое передача звуковой энергии осуществляется исключительно благодаря распространению продольных волн, которые возбуждаются в слое. При углах падения, превосходящих угол полного внутреннего отражения от границы раздела двух полубесконечных сред (свойства которых совпадают со свойствами окружаю-



шей среды и слоя), как было показано в § 30, коэффициент прохождения звука уменьшается.

В отличие от жидкого слоя передача звука через тонкую упругую пластину (без учета симметричных колебаний) происходит в резуль-

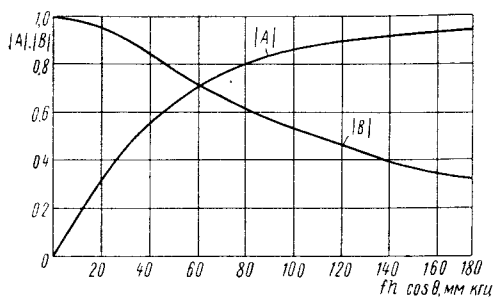


Рис. 76. Зависимость коэффициентов прохождения и отражения звука через тонкую стальную пластину от произведения  $fh \cos \theta$ .

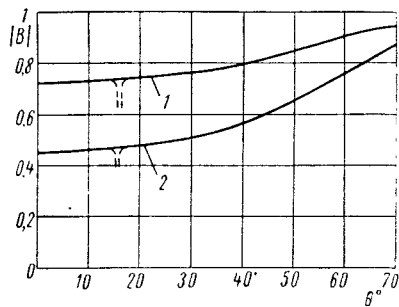


Рис. 77. Зависимость коэффициента прохождения звука через стальную пластину от угла падения.

1 — при  $fh = 6 \cdot 10^8$  см·гц; 2 — при  $fh = 12 \cdot 10^8$  см·гц (пунктиром показан провал, обусловленный влиянием симметричных колебаний).

тате колебаний пластины как единого целого по закону массы. Поэтому нормальная составляющая колебательной скорости пластины определяется разностью звуковых давлений по обе стороны пластины, т. е. разностью величин  $1 + A$  и  $B$  (рис. 78). Нормальную составляющую колебательной скорости можно записать как отношение

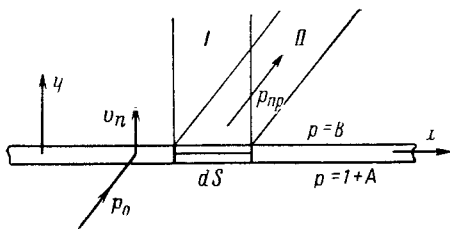


Рис. 78. К объяснению возрастания коэффициента прохождения звука через тонкую металлическую пластину при наклонном падении.

$$v_n = \frac{1 + A - B}{Z}$$

Подставляя вместо  $A$  и  $B$  выражения (32.17) и пренебрегая экспоненциальным членом, находим

$$v_n \approx \frac{2}{Z + Z_0} \approx \frac{2}{-i\omega M + \frac{2\rho c}{\cos \theta}}$$

Для качественного анализа предположим, что  $\omega M > \frac{2\rho c}{\cos \theta}$ .

Тогда  $|v_n| \approx \frac{2}{\omega M}$ . Таким образом, в принятом приближении можно считать, что амплитуда нормальной составляющей колебательной скорости пластины практически не зависит от угла падения звука.

Распределение колебательной скорости вдоль пластины при наклонном падении задается выражением  $v = v_n e^{ikx \sin \theta}$ . Звуковое

давление, излучаемое поверхностью с таким распределением, представляет собой прошедшую волну  $p_{np}$ . Из условия  $v_n = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_{np}}{\partial y} \Big|_{y=0}$  находим

$$p_{np} \approx \frac{v_n \rho c}{\cos \theta} e^{ik(x \sin \theta + y \cos \theta)}$$

Поскольку  $v_n$  почти не зависит от угла падения, то  $|p_{np}|$  увеличивается при наклонном падении волны. Другими словами, энергия волны, соответствующая излучению участка  $dS$ , при нормальном падении звука сосредоточена в трубке  $I$ , а при наклонном падении — в трубке  $II$ , ширина которой меньше ширины трубки  $I$ . Поэтому и звуковое давление  $|p_{np}|$  при наклонном падении оказывается больше, чем при нормальном падении.

**Влияние продольных (симметричных) волн на прохождение звука.** Формулы (32.17) не учитывают продольных (симметричных относительно средней линии пластины) волн. Выше было показано, что эти формулы справедливы при условии  $Z_{np} \gg Z$ . Если же указанное неравенство не выполняется и импеданцы  $Z_{np}$  и  $Z$  сравнимы по величине, то продольные волны необходимо учитывать при расчете коэффициентов отражения и прохождения звука.

Характер изменения величины  $Z_{np}$  и  $Z$  показан на рис. 79. При нормальном падении звука  $Z_{np}$  является положительной мнимой величиной, а  $Z$  — отрицательной мнимой величиной. Однако в диапазоне углов падения  $\theta_1 > \theta > \theta_2$  [где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  определяются формулами (32.15), (32.16)] импеданс  $Z_{np}$  меняет знак. Поэтому при некотором угле падения  $\theta_0$  будет выполнено равенство  $Z_{np} = Z$ . Из второй формулы (32.14) следует, что при этом значении угла падения коэффициент прохождения обратится в нуль.

Для стальных пластин углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  равны приблизительно  $16^\circ$  и  $10^\circ$  соответственно. Таким образом, при значении  $\theta$ , близком к  $16^\circ$ , коэффициент прохождения звука через стальную пластину должен уменьшаться до нуля. На рис. 77 эти провалы кривых обозначены пунктиром. Заметим, что для тонких металлических пластин области провалов должны быть весьма узкими. Выше было показано, что для тонких металлических пластин (величина  $Z_{np}$  почти во всем диапазоне углов падения звука (за исключением рассматриваемой здесь области вблизи  $\theta_0$ ) на несколько порядков больше величины  $Z$ , поэтому ветвь кривой  $Z_{np}$ , пересекающая ось абсцисс, идет очень круто вверх. Это приводит к тому, что  $Z_{np}$  может быть близко к  $Z$  только в очень узкой полосе углов падения, исчисляемой угловыми минутами и даже секундами (на рис. 77 для наглядности область провалов сильно увеличена). Достаточно малейшего искривления пластины, искривления фронта падающей плоской волны или наличия в материале пластины хотя бы малых потерь, чтобы возникновение провалов не наблюдалось.

Иная ситуация имеет место при взаимодействии звуковой волны с неметаллическими пластинами, например пластмассами, каче-

ственное отличие которых от металлических пластин заключается в гораздо меньшем модуле упругости (обычно на один-два порядка). В этом случае ветви кривой  $Z_{np}$  идут более полого и возможно понижение коэффициента прохождения звука в значительном диапазоне углов падения.

Физическое объяснение появления провалов в угловых характеристиках коэффициента прохождения звука состоит в следующем. При  $Z = Z_{np}$  амплитуды колебаний пластины, соответствующие изгибным и продольным колебаниям, станут равными. При этом возможен случай, когда в любой точке на верхней стороне пластины

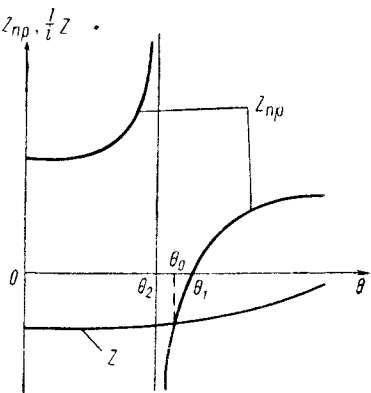


Рис. 79. К объяснению возникновения провалов в угловых характеристиках коэффициента прохождения звука.

составляющая скорости  $v'$  будет равна по величине и противоположна по направлению составляющей  $v''$ , а на нижней стороне их направления будут совпадать. Поэтому мгновенная форма пластины будет иметь вид, представленный на рис. 80. Верхняя сторона пластины останется плоской и не будет излучать звука в верхнее полупространство. Нижняя сторона, напротив, будет колебаться с удвоенной амплитудой, что приведет к интенсивному отражению звука. Таким образом, появление провалов в области  $\theta_2 > \theta > \theta_1$  связано с взаимодействием продольных (симметричных) и изгибных (антисимметричных) волн. Примеры графиков с провалами в угловых характеристиках приведены в книге [64].

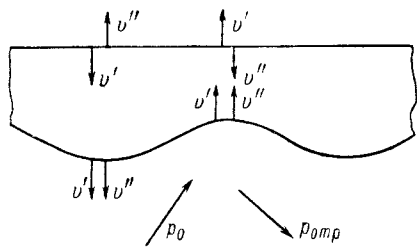


Рис. 80. К объяснению явления полной звукоизоляции для упругой пластины.

составляющая скорости  $v'$  будет равна по величине и противоположна по направлению составляющей  $v''$ , а на нижней стороне их направления будут совпадать. Поэтому мгновенная форма пластины будет иметь вид, представленный на рис. 80. Верхняя сторона пластины останется плоской и не будет излучать звука в верхнее полупространство. Нижняя сторона, напротив, будет колебаться с удвоенной амплитудой, что приведет к интенсивному отражению звука. Таким образом, появление провалов в области  $\theta_2 > \theta > \theta_1$  связано с взаимодействием продольных (симметричных) и изгибных (антисимметричных) волн. Примеры графиков с провалами в угловых характеристиках приведены в книге [64].

На рис. 81 показана зависимость коэффициента прохождения звука от угла падения для пластины из плексигласа с параметрами  $E = 5 \cdot 10^{10} \text{ г/(см} \cdot \text{сек}^2)$ ;  $\sigma = 0,35$ ;  $\rho = 1,2 \text{ г/см}^3$  при различном значении коэффициента потерь  $\eta_E$ . Провал в области  $40\text{--}50^\circ$  обусловлен взаимодействием продольных и изгибных волн. Заметим, что зависимости коэффициента прохождения от угла падения, аналогичные приведенным на рисунке, характерны для большинства пластмасс.

Провалы до нуля могут иметь место лишь в том случае, если затухание волн в материале пластины пренебрежимо мало. При наличии затухания его можно учесть, вводя в выражения для импедансов  $Z$

и  $Z_{np}$  (32.5) и (32.9) комплексный модуль упругости  $\bar{E} = E(1 - i\eta_E)$ . Из выражений (32.5) и (32.9) видно, что  $Z_{np}$  прямо зависит от модуля упругости, а в выражении для  $Z$  модуль упругости входит лишь во второе слагаемое, представляющее собой небольшую поправку. Поэтому при  $\eta_E \neq 0$  оказывается, что  $\text{Re } Z_{np} \gg \text{Re } Z$ . Отсюда следует, что при наличии потерь равенство  $\frac{1}{2}Z = Z_{np}$  ни при каких углах падения соблюдаться не будет и достижение нулевых значений коэффициента прохождения станет невозможным. Таким образом, с возрастанием коэффициента потерь кривые будут сглаживаться.

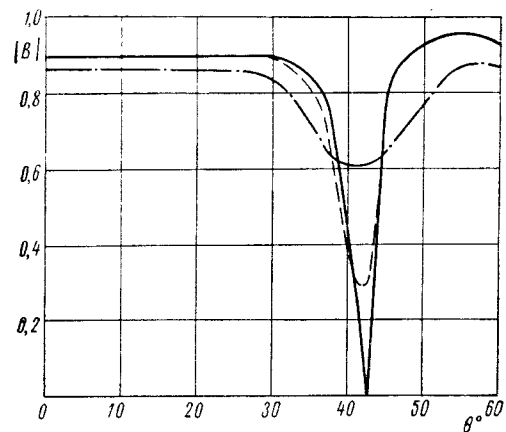


Рис. 81. Зависимость коэффициента прохождения звука через пластину из плексигласа от угла падения при  $jh = 3,2 \cdot 10^4 \text{ см} \cdot \text{гц}$ .  
—  $\eta_E = 0$ ;    - - -  $\eta_E = 0,02$ ;  
- · -  $\eta_E = 0,2$ .

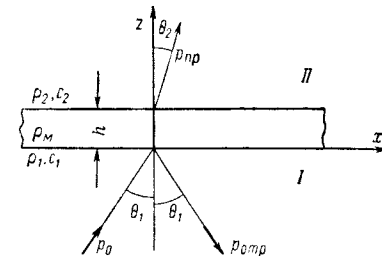


Рис. 82. К вычислению коэффициента прохождения звука через пластину, расположенную на границе раздела различных сред.

При нормальном падении звука активные потери слабо влияют на прохождение звука через тонкие пластины, и их действие сказывается лишь вблизи полуволнового резонанса (рис. 67).

**Случай, когда пластина разделяет две различные жидкости.** Определим коэффициенты отражения и прохождения звука через пластину, находящуюся на границе раздела двух различных жидкостей. Волны в жидкостях запишем в виде (рис. 82)

$$p_0 = e^{ik_1(x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1)},$$

$$p_{отр} = Ae^{ik_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)},$$

$$p_{np} = Be^{ik_2(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)},$$

причем соблюдаются следующие соотношения:

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2, \text{ т. е. } \sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1.$$

Граничные условия имеют вид

$$v_1 = \frac{1}{i\omega\rho_1} \cdot \frac{\partial(p_0 + p_{отр})}{\partial z} \text{ при } z = 0; \quad v_2 = \frac{1}{i\omega\rho_2} \cdot \frac{\partial p_{np}}{\partial z} \text{ при } z = h.$$

Далее ход решения не отличается от преобразований, приведенных выше для пластины, находящейся на границе раздела двух одинаковых сред. Опуская преобразования, запишем окончательный результат:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{ZZ_{np} - 4Z_0^{(1)}Z_0^{(2)} + (Z_0^{(2)} - Z_0^{(1)})(Z + Z_{np})}{ZZ_{np} + 4Z_0^{(1)}Z_0^{(2)} + (Z_0^{(2)} + Z_0^{(1)})(Z + Z_{np})}; \\ B &= \frac{2Z_0^{(2)}(Z_{np} - Z)e^{-ik_2h \cos \theta_2}}{ZZ_{np} + 4Z_0^{(1)}Z_0^{(2)} + (Z_0^{(2)} + Z_0^{(1)})(Z + Z_{np})}. \end{aligned} \right\} \quad (32.21)$$

Здесь  $Z_0^{(1)} = \frac{\rho_1 c_1}{\cos \theta_1}$ ,  $Z_0^{(2)} = \frac{\rho_2 c_2}{\cos \theta_2}$ , причем  $\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \theta_1}$ ;

формулы для импедансов  $Z$  и  $Z_{np}$ , входящих в выражения (32.21), совпадают соответственно с формулами (32.5) и (32.9), причем отношение  $c/\sin \theta$  следует заменить на  $c_1/\sin \theta_1$  или на  $c_2/\sin \theta_2$ .

При  $\theta_1 > \theta_{кр}$ , где  $\sin \theta_{кр} = \frac{c_1}{c_2}$ , имеет место полное отражение звука, так же как и при отражении звуковой волны от границы раздела двух различных сред без пластины. Подробный анализ прохождения звука через пластину, лежащую на границе раздела двух различных сред, проведен в работе [35]. Там же проанализированы условия возникновения поверхностных волн вблизи пластины.

В частном случае при  $Z_0^{(1)} = Z_0^{(2)} = Z_0$  формулы (32.21) переходят в формулы (32.14).

Для тонких металлических пластин можно принять  $Z_{np} \gg Z$ . Тогда из последних выражений получаем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{Z + Z_0^{(2)} - Z_0^{(1)}}{Z + Z_0^{(2)} + Z_0^{(1)}}; \\ B &= \frac{2Z_0^{(2)}}{Z + Z_0^{(2)} + Z_0^{(1)}} e^{-ik_2h \cos \theta_2}. \end{aligned} \right\} \quad (32.22)$$

Формулы (32.22) допускают простое физическое истолкование. Легко видеть, что  $Z + Z_0^{(2)}$  является входным импедансом поверхности  $z = 0$  со стороны нижнего полупространства, а  $Z_0^{(1)}$  — входным импедансом этой же поверхности со стороны верхнего полупространства. Таким образом, коэффициент отражения на границе  $z = 0$  определяется как отношение разности входных импедансов к их сумме, что характерно для границы раздела двух любых сред.

Заметим, что при  $Z_0^{(2)} > Z_0^{(1)}$ , т. е. при переходе звука из акустически менее плотной среды в акустически более плотную среду, коэффициент прохождения звука по давлению  $|B|$  может быть больше единицы. Например, при отсутствии пластины максимальное

значение  $|B|$  при  $Z_0^{(2)} \gg Z_0^{(1)}$  может равняться двум, что соответствует удвоению звукового давления в акустически более плотной среде, например при переходе звука из воздуха в воду. Естественно, что коэффициент прохождения по энергии  $T$  никогда не будет превышать единицу, т. е.

$$T = \frac{Z_0^{(1)}}{Z_0^{(2)}} |B|^2 \leq 1.$$

Положив в выражениях (32.22)  $Z = 0$ ,  $h = 0$ , получаем обычные формулы для коэффициентов отражения и прохождения звука на границе раздела двух жидкостей.

Аналогичный предельный переход можно выполнить и в формулах (32.21). Для этого следует положить  $Z = 0$ ,  $Z_{np} = \infty$ ,  $h = 0$ .

В частном случае, если пластина лежит на границе раздела жидкости и вакуума,  $Z_0^{(2)} = 0$  и  $B = 0$ . Тогда из формул (32.21) следует, что

$$A = \frac{ZZ_{np} - Z_0^{(1)}(Z + Z_{np})}{ZZ_{np} + Z_0^{(1)}(Z + Z_{np})}. \quad (32.23)$$

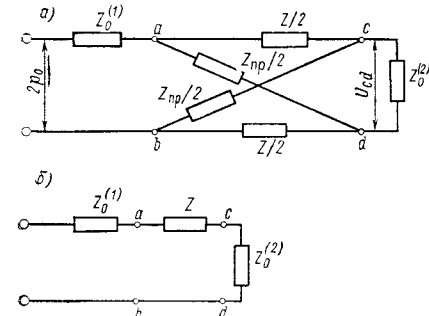


Рис. 83. Эквивалентные схемы прохождения звука через пластину.

Поскольку  $Z$  и  $Z_{np}$  — чисто мнимые величины (при отсутствии потерь в пластине), а  $Z_0^{(1)}$  — вещественная величина, то  $|A| = 1$  и влияние пластины сказывается лишь на фазе коэффициента отражения.

**Эквивалентная схема прохождения звука через тонкую пластину.** Можно построить [35] эквивалентную схему, соответствующую формулам (32.21). Такая схема приведена на рис. 83, а. Четырехполюсник  $abcd$ , выполненный по мостовой схеме, имитирует пластину. На входе схемы действует напряжение  $2p_0$ , равное звуковому давлению на поверхности  $z = 0$  при заторможенной пластине (э. д. с. холостого хода). Отношение напряжения на клеммах  $cd$  к напряжению  $p_0$  дает коэффициент прохождения звука (без учета экспоненциального множителя, определяющего набег фазы в среде на расстоянии, равном толщине пластины). При  $Z_{np} = Z$  мост оказывается уравновешенным и  $U_{cd} = 0$ , а следовательно, и  $B = 0$ .

Заметим, что условие полной звукоизоляции  $Z = Z_{np}$  не зависит от свойств среды  $II$ , поэтому отсутствие проходящей волны при равенстве механических импедансов  $Z$  и  $Z_{np}$  может наблюдаться при любых соотношениях параметров сред  $I$  и  $II$  (см. рис. 82).

Для тонких металлических пластин можно положить  $Z_{np} \approx \infty$ . Тогда эквивалентная схема будет иметь вид, показанный на рис. 83, б.

**Импедансы симметричных и антисимметричных колебаний пластин произвольной толщины.** Заметим, что при выводе формул

Применение матриц перехода для вычисления коэффициентов прохождения и отражения звука. Для того чтобы рассмотреть взаимодействие звуковой волны с системой упругих слоев, можно воспользоваться тем же методом, который был применен в § 31 для одиночной пластины.

Для каждого из слоев векторный и скалярный потенциалы можно записать в форме (31.5) и, пользуясь четырьмя граничными условиями типа (26.17) на каждой из границ, получить систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Количество уравнений при этом зависит от числа слоев. Так, например, для системы, состоящей из трех твердых слоев, расположенных в жидкой среде, получаем систему из 14 уравнений с 14 неизвестными (по четыре уравнения для каждого слоя и по одному — для жидких полупространств). Решение становится чрезвычайно громоздким и аналитическая запись формул оказывается практически невозможной.

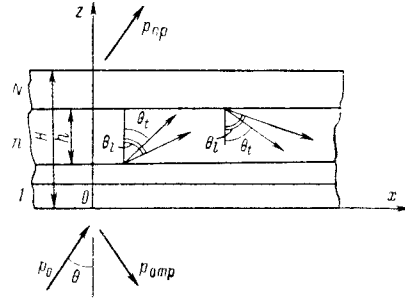


Рис. 84. К прохождению звука через систему слоев.

Гораздо более удобным является применение матриц перехода, связывающих значения колебательных скоростей и напряжений на одной границе каждого слоя с величинами скоростей и напряжений на другой границе [131], [148]. Изложение этого метода дано в [8]. Б. Д. Тартаковский указал на неточности работы [148]. Ниже приведены исправленные формулы.

Предположим, что на нижней границе системы из  $N$  слоев (рис. 84) заданы значения составляющих вектора колебательной скорости  $v_x^{(0)}$  и  $v_z^{(0)}$ , а также нормальные и касательные составляющие тензора напряжений  $\sigma_{zz}^{(0)}$  и  $\sigma_{zx}^{(0)}$ . Пусть значения этих же величин на верхней границе равны  $v_x^N$ ,  $v_z^N$ ,  $\sigma_{zz}^{(N)}$ ,  $\sigma_{zx}^{(N)}$ . Таким образом, на входе и выходе системы слоев заданы по четыре значения величин, причем каждый из выходных параметров зависит от всех входных. Следовательно, система слоев эквивалентна восьмиполюснику с четырьмя выходами. Параметры этого восьмиполюсника можно описать матрицей  $\|A_{jk}\|$ ,  $j, k = 1, 2, 3, 4$ . Связь между значениями скоростей и напряжений на верхней и нижней границах можно представить в виде системы уравнений, записанной в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} v_x^{(N)} \\ v_z^{(N)} \\ \sigma_{zz}^{(N)} \\ \sigma_{zx}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x^{(0)} \\ v_z^{(0)} \\ \sigma_{zz}^{(0)} \\ \sigma_{zx}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (33.1)$$

(32.14) и (32.21) не накладывалось никаких ограничений на волновую толщину пластины. Поэтому приближенный характер этих формул проявляется лишь при подстановке в них значений импеданцев, определяемых выражениями (32.5) и (32.9), которые справедливы лишь для тонких пластин.

В работах [72], [75] показано, что соотношения (32.14) будут точными, если в качестве формул импеданцев симметричных и антисимметричных колебаний использовать точные формулы, справедливые для пластин произвольной толщины. Соотношения (32.14) применимы и для пластин, параметры которых изменяются по толщине и являются четными функциями расстояния до срединной плоскости. Для этого следует использовать соответствующие значения импеданцев. Аналогичное утверждение можно распространить и на формулы (32.21).

Для однородной пластины произвольной волновой толщины в работе [72] приведены следующие выражения для импеданцев:

$$\left. \begin{aligned} Z &= -\frac{i\mu}{\omega q k_i^2} \times \\ &\times \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{sh}{2} \right) \cdot 4k^2 s q \sin^2 \theta + \operatorname{tg} \left( \frac{qh}{2} \right) (s^2 - k^2 \sin^2 \theta)^2 \right]; \\ Z_{\text{нр}} &= \frac{i\mu}{\omega q k_i^2 \operatorname{tg} \left( \frac{sh}{2} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{qh}{2} \right)} \times \\ &\times \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{sh}{2} \right) 4k^2 s q \sin^2 \theta + \operatorname{tg} \left( \frac{qh}{2} \right) (s^2 - k^2 \sin^2 \theta)^2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (32.24)$$

где  $q = k_i \cos \theta_i$ ;  $s = k_i \sin \theta_i$ .

Значения  $\cos \theta_1$  и  $\cos \theta_2$  определяются по формулам § 31. Если выполняется условие  $Z = Z_{\text{нр}}$ , то будет иметь место полная звукоизоляция пластины любой волновой толщины. Приравняв значения импеданцев, получим условие полной изоляции звука в форме

$$4k^2 s q \sin^2 \theta \sin(qh) + (s^2 - k^2 \sin^2 \theta)^2 \sin(sh) = 0. \quad (32.25)$$

Для тонких пластин ( $kh \ll 1$ ), решив приближенно уравнение (32.25), получим значение угла  $\theta_0$ , при котором звук полностью отражается от пластины:

$$\sin \theta_0 = \frac{c}{c_{\text{нр}}} \sqrt{1 - \frac{(\omega h)^2 \sigma}{12c_{\text{нр}}^2 (1 - \sigma)}}. \quad (32.26)$$

Как и следовало ожидать, угол  $\theta_0$  лежит в промежутке  $(\theta_1, \theta_2)$ , где  $\theta_1, \theta_2$  — углы, определяемые соотношениями (32.15) и (32.16).

Таким образом, мы рассмотрели прохождение через пластину монохроматической звуковой волны. Прохождение через пластину звуковых импульсов рассмотрено в работах [104, 139, 144]

Перемножение производится здесь по обычным правилам умножения матриц. Например,

$$v_x^{(N)} = A_{11}v_x^{(0)} + A_{12}v_z^{(0)} + A_{13}\sigma_{zz}^{(0)} + A_{14}\sigma_{zx}^{(0)}.$$

Значения элементов  $A_{jk}$  зависят от упругих параметров слоев. Ниже они будут определены. Если значения  $A_{jk}$  известны, то можно вычислить и коэффициенты прохождения и отражения звука.

Падающую, прошедшую и отраженную волны по-прежнему представим в форме (30.2). Граничные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} p_{\text{пр}} &= -\sigma_{zz}^{(N)}; v_z^{(N)} = \frac{1}{i\omega\rho} \cdot \frac{\partial p_{\text{пр}}}{\partial z}; \sigma_{zx}^{(N)} = 0 \text{ при } z = H; \\ p_0 + p_{\text{отр}} &= -\sigma_{zz}^{(0)}; v_z^{(0)} = \frac{1}{i\omega\rho} \cdot \frac{\partial (p_0 + p_{\text{отр}})}{\partial z}; \\ \sigma_{zx}^{(0)} &= 0 \text{ при } z = 0. \end{aligned} \right\} (33.2)$$

Воспользовавшись формулами (30.2) и (33.1), получаем систему уравнений, в которой неизвестными являются  $A$ ,  $B$ ,  $v_x^{(0)}$ ,  $v_z^{(0)}$ ,  $\sigma_{zz}^{(0)}$ :

$$\left. \begin{aligned} A_{31}v_x^{(0)} + A_{32}v_z^{(0)} + A_{33}\sigma_{zz}^{(0)} &= -Be^{iR}; \\ A_{21}v_x^{(0)} + A_{22}v_z^{(0)} + A_{23}\sigma_{zz}^{(0)} &= \frac{\cos\theta}{\rho c} Be^{iR}; \\ A_{41}v_x^{(0)} + A_{42}v_z^{(0)} + A_{43}\sigma_{zz}^{(0)} &= 0; \\ \sigma_{zz}^{(0)} &= -(1 + A); \\ v_z^{(0)} &= \frac{\cos\theta}{\rho c} (1 - A). \end{aligned} \right\} (33.3)$$

Ниже введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} M_{22} &= A_{22} - \frac{A_{21}A_{42}}{A_{41}}; \quad M_{23} = A_{23} - \frac{A_{21}A_{43}}{A_{41}}; \\ M_{32} &= A_{32} - \frac{A_{31}A_{42}}{A_{41}}; \quad M_{33} = A_{33} - \frac{A_{31}A_{43}}{A_{41}}; \\ R &= kH \cos\theta, \quad Z_0 = \frac{\rho c}{\cos\theta}. \end{aligned} \right\} (33.4)$$

Решая систему уравнений относительно коэффициентов  $A$  и  $B$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{M_{22} + \frac{M_{32}}{Z_0} - (M_{33} + M_{23}Z_0)}{M_{22} + \frac{M_{32}}{Z_0} + (M_{33} + M_{23}Z_0)}; \\ B &= \frac{2(M_{33}M_{22} - M_{32}M_{23})}{M_{22} + \frac{M_{32}}{Z_0} + (M_{33} + M_{23}Z_0)} e^{-iR}. \end{aligned} \right\} (33.5)$$

Определим теперь коэффициенты  $A_{jk}$ . Предположим, что известна матрица перехода  $\|a_{jk}^{(n)}\|$  для произвольного однородного слоя с номером  $n$ . Тогда величины  $v_x^{(n)}$ ,  $v_z^{(n)}$ ,  $\sigma_{zz}^{(n)}$ ,  $\sigma_{zx}^{(n)}$  на границе слоев  $n$  и  $n - 1$  могут быть определены из матричного соотношения

$$\begin{pmatrix} v_x^{(n)} \\ v_z^{(n)} \\ \sigma_{zz}^{(n)} \\ \sigma_{zx}^{(n)} \end{pmatrix} = \|a_{jk}^{(n)}\| \cdot \begin{pmatrix} v_x^{(n-1)} \\ v_z^{(n-1)} \\ \sigma_{zz}^{(n-1)} \\ \sigma_{zx}^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (33.6)$$

Применяя  $N$  раз рекуррентное соотношение (33.6), получим

$$\begin{pmatrix} v_x^{(N)} \\ v_z^{(N)} \\ \sigma_{zz}^{(N)} \\ \sigma_{zx}^{(N)} \end{pmatrix} = \|a_{jk}^{(N)}\| \cdot \|a_{jk}^{(N-1)}\| \cdot \dots \cdot \|a_{jk}^{(1)}\| \cdot \begin{pmatrix} v_x^{(0)} \\ v_z^{(0)} \\ \sigma_{zz}^{(0)} \\ \sigma_{zx}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Сравнивая последнее соотношение с формулой (33.1), запишем

$$\|A_{jk}\| = \|a_{jk}^{(N)}\| \cdot \|a_{jk}^{(N-1)}\| \cdot \dots \cdot \|a_{jk}^{(1)}\|. \quad (33.7)$$

Таким образом, матрица  $\|A_{jk}\|$  может быть получена путем перемножения матриц  $\|a_{jk}^{(n)}\|$ , начиная с матрицы для последнего слоя. Заметим, что матрицы при перемножении не коммутируют, поэтому менять порядок перемножения в формуле (33.7) нельзя. Физически это соответствует тому обстоятельству, что коэффициенты отражения и прохождения зависят от порядка следования слоев.

**Определение элементов матрицы перехода.** Нашей дальнейшей задачей является определение элементов переходной матрицы  $\|a_{jk}\|$  для произвольного однородного упругого слоя с номером  $n$ . Индекс  $n$  для упрощения записи опускаем. Начало координат для последующих вычислений удобно переместить на границу между слоями с номерами  $n$  и  $n - 1$ .

Введем в слое скалярный и векторный потенциалы и выразим через них колебательные скорости и напряжения по формулам (31.2) — (31.6). Для верхней границы слоя (при  $z = h$ ) получим

$$\begin{pmatrix} v_x^{(n)} \\ v_z^{(n)} \\ \sigma_{zz}^{(n)} \\ \sigma_{xz}^{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} i\gamma \cos P & -\gamma \sin P & -\alpha \sin P & i\mu \cos Q \\ -\alpha \sin P & i\alpha \cos P & -\gamma \sin Q & i\gamma \cos Q \\ \frac{2\mu\alpha\gamma}{\omega} \sin P & -\frac{i2\mu\alpha\gamma}{\omega} \cos P & -\frac{\mu}{\omega}(\beta^2 - \gamma^2) \sin Q & \frac{i\mu}{\omega}(\beta^2 - \gamma^2) \cos Q \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Phi' + \Phi'' \\ \Phi' - \Phi'' \\ \Pi' - \Pi'' \\ \Pi' + \Pi'' \end{vmatrix}. \quad (33.8)$$

Здесь обозначено

$$\left. \begin{aligned} k_l h \cos \theta_l &= P; & k_l h \cos \theta_l &= Q; \\ k_l \cos \theta_l &= \alpha; & k_l \cos \theta_l &= \beta; \\ \gamma &= k_l \sin \theta_l = k_l \sin \theta_l. \end{aligned} \right\} \quad (33.9)$$

Для нижней границы слоя (при  $z = 0$ ), полагая  $P = Q = 0$ , из формул (33.8) находим

$$\begin{vmatrix} v_z^{(n-1)} \\ v_z^{n-1} \\ \sigma_{zz}^{(n-1)} \\ \sigma_{zx}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i\gamma & 0 & -i\beta & 0 \\ 0 & i\alpha & 0 & i\gamma \\ -\frac{i}{\omega}(\lambda k_l^2 + 2\mu\alpha^2) & 0 & -\frac{i2\mu\alpha\gamma}{\omega} & 0 \\ 0 & -\frac{2\mu\alpha\gamma}{\omega} & 0 & \frac{i\mu(\beta^2 - \gamma^2)}{\omega} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Phi' + \Phi'' \\ \Phi' - \Phi'' \\ \Pi' - \Pi'' \\ \Pi' + \Pi'' \end{vmatrix}. \quad (33.10)$$

Исключим теперь из восьми уравнений (33.8) и (33.10) величины  $\Phi' \pm \Phi''$ ,  $\Pi' \pm \Pi''$ . Для этого решим систему уравнений (33.10) относительно данных величин, а затем найденные значения подставим в правую часть системы (33.8). В результате получаем матрицу перехода для одного слоя  $\|a_{jk}\|$ .

Коэффициенты  $a_{jk}$  определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 2 \sin^2 \theta_l \cos P + \cos 2\theta_l \cos Q; \\ a_{12} &= i (\operatorname{tg} \theta_l \cos 2\theta_l \sin P - \sin 2\theta_l \sin Q); \\ a_{13} &= \frac{\sin \theta_l}{\rho_m c_l} (\cos Q - \cos P); \\ a_{14} &= -\frac{i}{\rho_m c_l} (\operatorname{tg} \theta_l \sin \theta_l \sin P + \cos \theta_l \sin Q); \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{21} &= i [2 \operatorname{ctg} \theta_l \sin^2 \theta_l \sin P - \operatorname{tg} \theta_l \cos 2\theta_l \sin Q]; \\ a_{22} &= \cos 2\theta_l \cos P + 2 \sin^2 \theta_l \cos Q; \\ a_{23} &= -\frac{i}{\rho_m c_l} (\cos \theta_l \sin P + \operatorname{tg} \theta_l \sin \theta_l \sin Q); \\ a_{31} &= 2\rho_m c_l \sin \theta_l \cos 2\theta_l (\cos Q - \cos P); \\ a_{32} &= -i\rho_m \left( \frac{c_l \cos^2 2\theta_l}{\cos \theta_l} \sin P + 4c_l \cos \theta_l \sin^2 \theta_l \sin Q \right); \\ a_{41} &= -2i\rho_m c_l^2 \left( \frac{2}{c_l} \cos \theta_l \sin^2 \theta_l \sin P + \frac{\cos^2 2\theta_l}{2c_l \cos \theta_l} \sin Q \right). \end{aligned} \right\} \quad (33.11)$$

Матрица  $\|a_{jk}\|$  является симметричной относительно диагонали  $a_{14} \dots a_{41}$ . Поэтому  $a_{44} = a_{11}$ ,  $a_{42} = a_{31}$ ,  $a_{43} = a_{21}$ ,  $a_{33} = a_{22}$ ,  $a_{24} = a_{13}$ ,  $a_{34} = a_{12}$ .

Таким образом, мы определили все неизвестные величины, входящие в формулы (33.5).

Сформулируем результат: коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются формулами (33.5) и (33.4), в которых элементы  $A_{jk}$  согласно (33.7) могут быть найдены путем перемножения матриц для каждого отдельного слоя. Элементы этих матриц вычисляются по формуле (33.11). Естественно, что все величины, входящие в выражения (33.11), зависят от номера  $n$ .

Главную трудность при выполнении расчетов по указанным формулам представляет перемножение матриц. Поэтому важным свойством формулы (33.7) является то, что она весьма удобна для расчетов с помощью цифровых электронных вычислительных машин. Действительно, для перемножения матриц можно использовать одну стандартную программу и увеличение числа слоев приводит к необходимости лишь произвести добавочные умножения.

Физический анализ прохождения звука через систему упругих слоев очень сложен. Особенности могут иметь место всякий раз при совпадении скорости следа в падающей волне со скоростью одной из нормальных волн в слоях. Однако на скорость нормальных волн в данном слое существенно влияют параметры соседних слоев. Поэтому зависимость коэффициента прохождения звука от угла падения может иметь сложный вид с большим количеством максимумов и минимумов, иногда трудно поддающихся простому объяснению.

На рис. 85 показана зависимость  $|B| = f(\theta)$  для системы, состоящей из трех слоев, при  $f = 4 \cdot 10^4$  гц. Средним слоем является материал со следующими параметрами:  $c_l = 2,2 \cdot 10^5$  см/сек;  $c_t = 1,1 \cdot 10^5$  см/сек;  $\rho_m = 1,3$  г/см<sup>3</sup>;  $h = 0,6$  см. Крайние слои представляют собой стальные пластины с параметрами  $c_l = 5,9 \cdot 10^5$  см/сек;  $c_t = 3,2 \cdot 10^5$  см/сек;  $\rho_m = 7,8$  г/см<sup>3</sup>;  $h = 0,057$  см. Из рисунка видно, что имеют место острые минимумы, аналогичные провалам для одиночных пластин.

**Система из двух твердых и одного жидкого слоя.** Значительно более простые формулы можно получить для системы, состоящей из чередующихся твердых и жидких слоев.

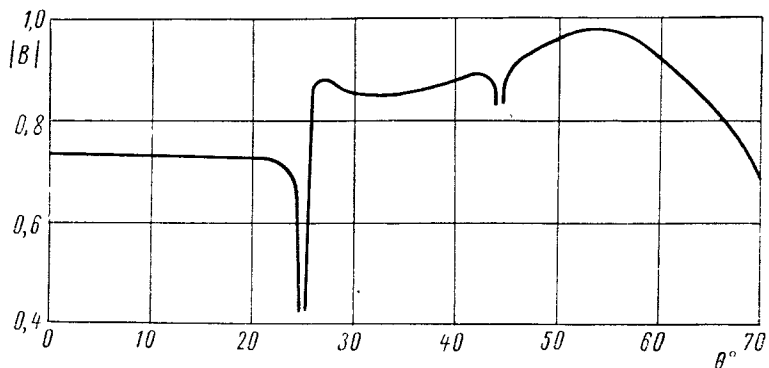


Рис. 85. Зависимость коэффициента прохождения звука через систему из трех слоев от угла падения звука.

В работе [127] было замечено, что при некоторых соотношениях параметров двух пластин, разделенных промежутком, заполненным жидкостью, звуковая волна полностью проходит через систему. Проведем анализ прохождения звука через такую систему, следуя в основном [127].

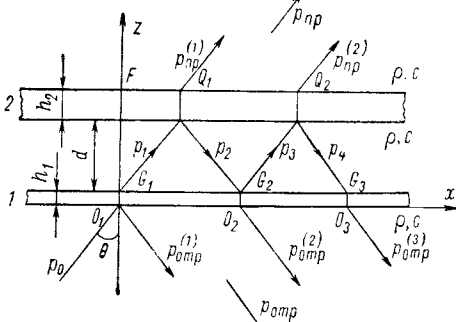


Рис. 86. Схема прохождения звука через трехслойную систему с жидким средним слоем.

Искомое решение можно было бы получить из формул (33.5), (33.7), положив  $N = 3$  и  $c_l = 0$  для среднего слоя. Однако проще воспользоваться методом последовательных отражений. Схема прохождения звука показана на рис. 86. Прошедшая волна образуется как сумма частичных волн, прошедших через вторую пластину после ряда отражений. Аналогично формируется и отраженная волна. Таким образом,

$$p_{np} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{np}^{(n)}; \quad p_{отр} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{отр}^{(n)}. \quad (33.12)$$

Если принять амплитуду звукового давления падающей плоской волны  $p_0$  за единицу, то амплитуда звукового давления в волне  $p_1$  равна  $B_1$  (коэффициенты прохождения звука через пластины 1 и 2

равны соответственно  $B_1$  и  $B_2$ ; коэффициенты отражения —  $A_1$  и  $A_2$ ). Звуковое давление в волне  $p_{np}^{(1)}$  в точке  $Q_1$  определится выражением

$$p_{np}^{(1)}(Q_1) = B_1 B_2 e^{ik \left( \frac{d}{\cos \theta} + h_1 \cos \theta + h_2 \cos \theta \right)}.$$

Аналогично в волне  $p_2$  в точке  $G_2$

$$p_2(G_2) = B_1 A_2 e^{2ik \frac{d}{\cos \theta} + ik h_1 \cos \theta}.$$

Таким образом, получаем последовательности отраженных волн

$$\begin{aligned} p_{отр}^{(1)}(O_1) &= A_1; \\ p_{отр}^{(2)}(O_2) &= B_1^2 A_2 e^{2ikd/\cos \theta + 2ikh_1 \cos \theta}; \\ p_{отр}^{(3)}(O_3) &= B_1^2 A_2^2 A_1 e^{4ikd/\cos \theta + 2ikh_1 \cos \theta}; \end{aligned}$$

$$p_{отр}^{(q)}(O_q) = B_1^2 A_1^{q-2} A_2^{q-1} e^{i2(q-1) \frac{kd}{\cos \theta} + i2kh_1 \cos \theta};$$

и аналогичные последовательности прошедших волн

$$p_{np}^{(1)}(Q_1) = B_1 B_2 e^{ik \left[ \frac{d}{\cos \theta} + (h_1 + h_2) \cos \theta \right]};$$

$$p_{np}^{(2)}(Q_2) = B_1 B_2 A_1 A_2 e^{ik \left[ \frac{3d}{\cos \theta} + (h_1 + h_2) \cos \theta \right]};$$

$$p_{np}^{(3)}(Q_3) = B_1 B_2 (A_1 A_2)^2 e^{ik \left[ \frac{5d}{\cos \theta} + (h_1 + h_2) \cos \theta \right]};$$

$$p_{np}^{(q)}(Q_q) = B_1 B_2 (A_1 A_2)^{q-1} e^{ik \left[ \frac{(2q-1)d}{\cos \theta} + (h_1 + h_2) \cos \theta \right]};$$

Отнесем фазы колебаний всех волн к точке  $O_1$ . Вычтем для этого из фазовых множителей в отраженных волнах фазу, пропорциональную величине  $\overline{O_1 O_q} \sin \theta$ . Поскольку  $O_1 O_q = 2(q-1)d + \text{tg } \theta$ , то получаем

$$p_{отр}^{(q)}(O_1) = B_1^2 A_1^{q-2} A_2^{q-1} e^{i2(q-1)kd \cos \theta + 2ikh_1 \cos \theta}.$$

Аналогично поступаем с фазовыми множителями в прошедших волнах. Сначала приводим фазы к точке  $Q$ , вычитая фазу  $kFQ_k \cos \theta$ ,

а затем переходим к точке  $O_1$ , вычитая фазу  $k(h_1 + h_2 + d) \cos \theta$ . В результате находим

$$p_{\text{пр}}^{(q)}(O_q) = B_1 B_2 (A_1 A_2)^{q-1} e^{i(2q-1)kd \cos \theta - ikd \cos \theta}.$$

Суммируя отраженные и прошедшие волны как геометрические прогрессии, получаем значения коэффициентов отражения и прохождения звука

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{A_1 + A_2 (B_1^2 e^{2ikh_1 \cos \theta} - A_1^2) e^{2ikd \cos \theta}}{1 - A_1 A_2 e^{2ikd \cos \theta}}; \\ B' &= \frac{B_1 B_2}{1 - A_1 A_2 e^{2ikd \cos \theta}}. \end{aligned} \right\} \quad (33.13)$$

Нетрудно показать, что при условии

$$2kd \cos \theta + \arg A_1 + \arg A_2 = 2\pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

коэффициент прохождения звука  $B'$  является максимальным. Модуль его определится в этом случае выражением

$$|B'|_{\max} = \frac{|B_1| \cdot |B_2|}{1 - |A_1| \cdot |A_2|}.$$

Если пластины одинаковы, то  $h_1 = h_2 = h$ ,  $A_1 = A_2 = A$ ,  $B_1 = B_2 = B$ . Так как  $|B|^2 = 1 - |A|^2$ , то очевидно, что в этом случае  $|B'|_{\max} = 1$ . Таким образом, при одинаковых пластинах путем выбора расстояния  $d$  можно получить полное прохождение звука через слоистую систему. Из формул (33.13) получаем

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{A + A (B^2 e^{2ikh \cos \theta} - A^2) e^{2ikd \cos \theta}}{1 - A^2 e^{2ikd \cos \theta}}; \\ B' &= \frac{B^2}{1 - A^2 e^{2ikd \cos \theta}}. \end{aligned} \right\} \quad (33.14)$$

В качестве выражений для коэффициентов прохождения и отражения от пластин можно использовать точные формулы (31.7) или приближенные (32.14), (32.17), если толщина пластин мала по сравнению с длиной звуковой волны. Воспользуемся сначала формулами (31.7) и введем обозначения:

$$M^2 - N^2 + 1 = V, \quad M^2 - N^2 - 1 = U, \quad kd \cos \theta = \Psi.$$

Тогда коэффициент прохождения звука (по энергии) будет определяться выражением

$$T = |B'|^2 = \frac{16N^4}{[U^2 - 4M^2 - V^2 \cos 2\Psi]^2 + [4UM + V^2 \sin 2\Psi]^2}. \quad (33.15)$$

Вычислим производную  $\frac{d|B'|^2}{d\Psi}$  и приравняем ее нулю. Получаем условие полного прохождения звука через систему

$$\operatorname{tg}(2k_0 d \cos \theta_0) = -\frac{4UM}{U^2 - 4M^2}. \quad (33.16)$$

Здесь  $k_0$  — волновое число в среде и  $\theta_0$  — угол, при котором звук полностью проходит через систему. Величины  $U$  и  $M$  в формуле (33.16) также взяты при  $\theta = \theta_0$ ,  $k = k_0$ .

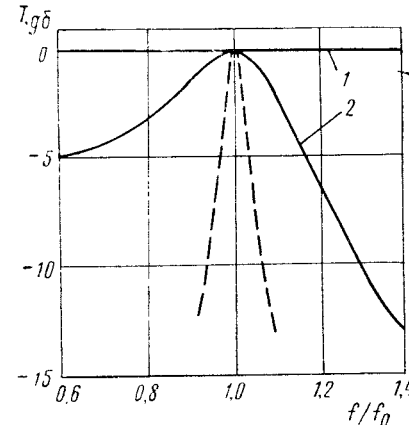


Рис. 87. Зависимость коэффициента прохождения звука (по энергии) через слоистую систему от относительной частоты при нормальном падении.

1 — при  $h/\lambda_1 = 0,001$ ; 2 — при  $h/\lambda_1 = 0,025$ .

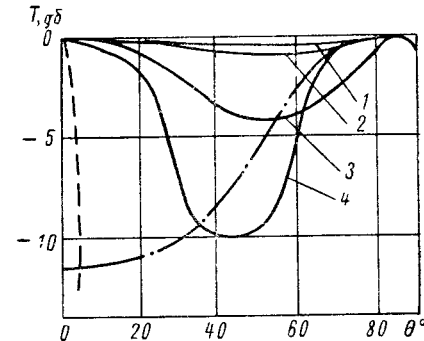


Рис. 88. Зависимость коэффициента прохождения звука (по энергии) через слоистую систему от угла падения на резонансной частоте.

1 — при  $h/\lambda_1 = 0,003$ ; 2 — при  $h/\lambda_1 = 0,006$ ; 3 — при  $h/\lambda_1 = 0,025$ ; 4 — при  $h/\lambda_1 = 0,05$ .

Значения расстояний, при которых наблюдается полное прохождение звука, получаются в виде

$$d_n = d_0 + \frac{\pi n}{2k \cos \theta_0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где

$$d_0 = \frac{1}{2k \cos \theta_0} \operatorname{arctg} \left( -\frac{4UM}{U^2 - 4M^2} \right).$$

Вычислив вторую производную коэффициента прохождения звука, можно показать, что найденные значения  $d_n$  соответствуют максимумам величины  $|B'|$ .

На рис. 87—90 показан ряд зависимостей для двух одинаковых стальных пластин, расположенных в воде [127].

На рис. 87 показана зависимость коэффициента прохождения звука (по энергии) в децибелах от относительной частоты  $f/f_0$  при различных волновых толщинах пластин (сплошные кривые). За  $f_0$



принято значение резонансной частоты, при которой наблюдается максимальное прохождение звука. Пунктирная кривая представляет собой частотную зависимость коэффициента прохождения звука через полуволновую пластину тол-

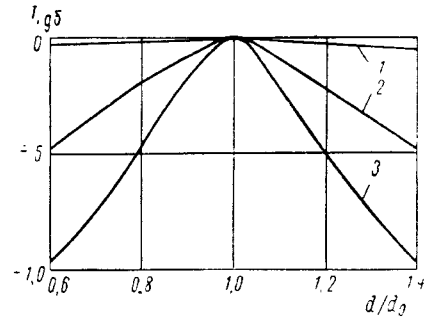


Рис. 89. Зависимость коэффициента прохождения звука (по энергии) через слоистую систему от относительного расстояния между пластинами на резонансной частоте.

1 — при  $h/\lambda_1 = 0,001$ ; 2 — при  $h/\lambda_1 = 0,025$ ; 3 — при  $h/\lambda_1 = 0,04$ .

Рис. 89 иллюстрирует зависимость коэффициента прохождения звука (по энергии) от расстояния между пластинами при нормальном падении звуковой волны на резонансной частоте. Чем больше толщина пластин, тем более критичен коэффициент прохождения звука к изменению расстояния.

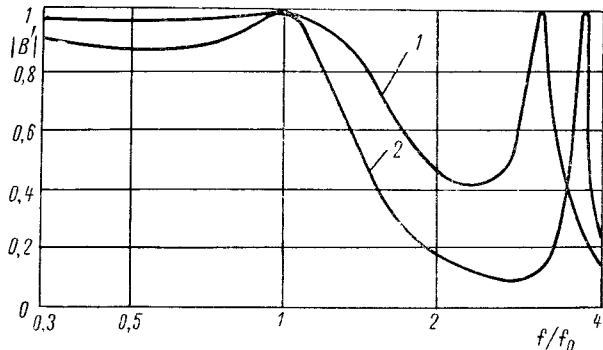


Рис. 90. Зависимость коэффициента прохождения звука через слоистую систему от относительной частоты при нормальном падении.

1 — при  $h = 0,4$  см;  $d_0 = 4,8$  см; 2 — при  $h = 0,8$  см;  $d_0 = 3,6$  см.

Формулы (33.14) справедливы при любом соотношении между толщиной слоев и длиной звуковой волны. Если же крайние слои являются тонкими, то в качестве выражений для  $A$  и  $B$  можно исполь-

зовать приближенные формулы § 32. Для тонких металлических пластин после подстановки выражений (32.17) в формулы (33.14) получаем

$$\left. \begin{aligned} A' &= A \sqrt{1 + \frac{1 + 2[P \cos(2kd \cos \theta) + Q \sin(2kd \cos \theta)]}{P^2 + Q^2}} e^{i(\psi - \varphi)}, \\ B' &= \frac{1}{\sqrt{P^2 + Q^2}} e^{-i(2kh \cos \theta + \varphi)}, \end{aligned} \right\} (33.17)$$

где

$$\begin{aligned} P &= 1 - 2b^2 \sin^2(kd \cos \theta); \\ Q &= -2b + b^2 \sin(2kd \cos \theta); \\ b &= \frac{\omega M \cos \theta}{2\rho c} \left[ 1 - \left( \frac{c_H}{c} \right)^4 \sin^4 \theta \right]; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P};$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{P + \cos(2kh \cos \theta)}{Q + \sin(2kh \cos \theta)}.$$

Из формул (33.17) можно найти условие максимального прохождения звука. Для того чтобы коэффициент прохождения звука был равен единице при круговой частоте звука  $\omega_0$  и угле падения  $\theta_0$ , необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{tg}(k_0 d \cos \theta_0) = \frac{2\rho c'}{\omega_0 M \cos \theta_0 \left[ 1 - \left( \frac{c_H}{c} \right)^4 \sin^4 \theta_0 \right]}. \quad (33.18)$$

При нормальном падении звука получаем простое условие

$$\operatorname{tg}(k_0 d) = \frac{2\rho c}{\omega_0 M}. \quad (33.19)$$

Поскольку тангенс является периодической функцией, то для одного значения  $d$  найдется ряд частот, при которых будет наблюдаться полное прохождение звука.

На рис. 90 приведена частотная характеристика коэффициента прохождения звука через систему, состоящую из двух слоев стали. Чем больше масса пластин, тем острее резонанс.

Максимумы в области  $f \approx 3f_0$  являются вторыми резонансами системы.

### § 34. Прохождение сферической звуковой волны через пластину

Предыдущий анализ проводился в предположении, что волна, падающая на пластину, является плоской. В результате оказалось возможным представить прошедшие и отраженные звуковые поля также в виде плоских волн. Аппроксимация

поля реального источника расходящихся волн на некотором ограниченном участке плоской поверхности плоской волной справедлива в том случае, если расстояние от источника до поверхности значительно больше длины звуковой волны. На практике часто приходится встречаться со случаями, когда это условие не выполняется и источники сферических волн расположены вблизи поверхности. Возникает ситуация, при которой уже нельзя не учитывать сферический характер падающей волны. Сферичность фронта падающей волны обуславливает не только количественные изменения коэффициента прохождения звука, но и новые качественные явления, например возникновение поверхностных волн вблизи пластины.

**Разложение сферической волны по плоским волнам.** Схема расчета звукового поля, излучаемого сферическим источником, состоит в следующем. Сферическую волну можно представить в виде суперпозиции плоских волн, падающих под различными углами на плоскую поверхность. Если коэффициенты отражения и прохождения звука для каждой плоской волны известны, то, интегрируя затем по всем углам падения звука, можно вычислить прошедшее и отраженное звуковые поля.

Вывод формулы, определяющей разложение сферической волны по плоским волнам, приведен в книге [8]. Это разложение имеет следующий вид:

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma}. \quad (34.1a)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — составляющие волнового вектора для каждой из плоских волн, причем  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ ;  $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

От интегрирования по  $\alpha$ ,  $\beta$  можно перейти к интегрированию по пространственным углам  $\theta$ ,  $\varphi$ :

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (34.16)$$

В сферической системе координат  $\theta$ ,  $\varphi$  компоненты волнового вектора определяются следующим образом:

$$\alpha = k \sin \theta \cos \varphi, \quad \beta = k \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma = k \cos \theta.$$

Интегрирование по  $\theta$  проводится вдоль вещественной оси в интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$  и затем вдоль прямой, параллельной мнимой оси. Знак плюс соответствует полупространству  $z > 0$ .

Формула (34.16) характеризует набор плоских волн, распространяющихся под различными углами к оси выбранной сферической системы координат.

В разложении (34.1) кроме волн, соответствующих вещественным углам  $\theta$ ,  $\varphi$ , участвуют и волны, для которых углы  $\theta$  являются комплексными:  $\theta = \theta' + i\theta''$ ;  $\theta' = \frac{\pi}{2}$ ;  $\theta'' < 0$ . Для комплексных углов  $\theta$  можно записать

$$\gamma = k \cos \theta = k \cos \left( \frac{\pi}{2} + i\theta'' \right) = -ik \operatorname{sh} \theta''.$$

Следовательно, элементарная волна такого типа имеет вид

$$e^{i(\alpha x + \beta y) + kz \operatorname{sh} \theta''}.$$

Отсутствие множителя  $i$  во втором слагаемом говорит о том, что такая волна является неоднородной. Она распространяется вдоль плоскости  $xOy$ , и амплитуда ее экспоненциально уменьшается (так как  $\theta'' < 0$ ) в направлении оси  $z$ .

При достаточно больших  $kz$  можно считать, что амплитуда неоднородных волн пренебрежимо мала и в разложении участвуют лишь обычные однородные плоские волны.

Интеграл по  $\varphi$  в формуле (34.16) можно взять. Вводя полярные координаты  $x = r \cos \varphi_1$ ,  $y = r \sin \varphi_1$ , получаем после интегрирования

$$\frac{e^{ikR}}{R} = ik \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} J_0(kr \sin \theta) e^{\pm ikz \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (34.2)$$

Это же выражение можно записать в виде интеграла по вещественной оси. Выполнив замену переменных  $\alpha = \sin \theta$ , находим

$$\frac{e^{ikR}}{R} = ik \int_0^{\infty} J_0(kr\alpha) e^{\pm ikz \sqrt{1-\alpha^2}} \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \quad (34.3)$$

Интервал  $(0, 1)$  на пути интегрирования соответствует однородным волнам, а интервал  $(1, \infty)$  — неоднородным.

Еще одну форму разложения сферической волны по плоским волнам можно найти, если воспользоваться формулами  $J_0(u) = -\frac{1}{2} [H_0^{(1)}(u) + H_0^{(2)}(u)]$ ;  $H_0^{(2)}(-u) = -H_0^{(1)}(u)$ . Из выражения (34.2) получаем интеграл Вейля—Бреховских [8]

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{ik}{2} \int_{\Gamma_1} H_0^{(1)}(kr \sin \theta) e^{\pm ikz \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (34.4)$$

Путь интегрирования  $\Gamma_1$  показан на рис. 91.

**Представление волны, прошедшей через пластину, в виде набора плоских волн.** Пусть малый сферический источник расположен

в точке  $N$  над пластиной, разделяющей две одинаковые среды (рис. 92). Поле источника в свободной среде определяется выражением

$$p_0 = -\frac{i\omega\rho Q e^{ikr}}{4\pi R} = \frac{Q\omega\rho k}{8\pi} \int_{\Gamma_1} H_0^{(1)}(kr \sin \theta) e^{\pm ikz \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (34.5)$$

Здесь  $Q$  — объемная колебательная скорость источника.

Для того чтобы определить прошедшее и отраженное поле, следует умножить каждую элементарную плоскую волну, входящую в подынтегральное выражение (34.1), на коэффициент прохождения звука  $B(\theta)$  для соответствующего угла падения. Проинтегрировав затем по  $\varphi$ , получим выражения,

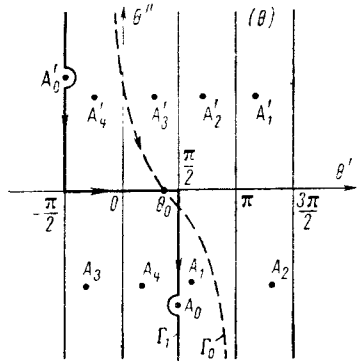


Рис. 91. Расположение полюсов на комплексной плоскости.

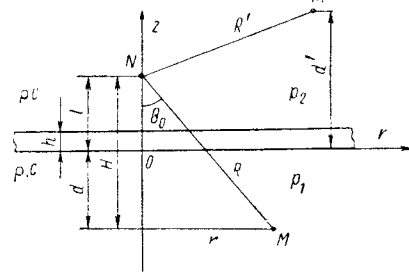


Рис. 92. К анализу прохождения сферической звуковой волны через пластину.

аналогичные формуле (34.5), для звуковых полей в нижнем и верхнем полупространстве (соответственно в точках наблюдения  $M$  и  $M'$ ):

$$p_1 = \frac{\omega\rho k Q}{8\pi} \int_{\Gamma_1} H_0^{(1)}(kr \sin \theta) B(\theta) e^{ik(l+d) \cos \theta} \sin \theta d\theta; \quad (34.6)$$

$$p_2 = p_0 + p_{\text{отр}} = -\frac{i\omega\rho Q e^{ikR'}}{4\pi R'} + \frac{\omega\rho k Q}{8\pi} \int_{\Gamma_1} H_0^{(1)}(kr \sin \theta) A(\theta) e^{ik(l+d') \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (34.7)$$

Интегральные представления (34.6) и (34.7) являются точными выражениями, определяющими звуковые поля при любых расстояниях  $l$ ,  $h$  и  $d$ . Заметим, что расстояния  $l$  и  $d$  входят в формулу (34.6) в виде суммы  $l+d$ . Поэтому поле в точке наблюдения зависит лишь от проекции на ось  $z$  суммарного расстояния между точками  $N$  и  $M$ . Таким образом, если точку  $N$  приближать к пластине, а точку  $M$  удалять от нее так, чтобы расстояние  $l+d$  осталось неизменным, то поле в точке  $M$  будет оставаться постоянным. Из этого рассуждения следует, что  $p_1$  не зависит от расположения пластины между

точкой наблюдения и точкой излучения, несмотря на то, что возбуждение пластины существенно определяется положением точки  $N$ . Физическое объяснение этого, на первый взгляд неожиданного, явления состоит в следующем. При приближении источника  $N$  к пластине последняя возбуждается все большим набором плоских волн, на которые раскладывается падающая сферическая волна, в частности появляются и неоднородные волны. В результате движение пластины становится все более сложным. Однако при одновременном увеличении расстояния  $d$  точка наблюдения как бы «выбирает» из этого набора все меньшее количество волн, поскольку она выходит из зоны, в которой сосредоточена главная часть неоднородных волн. В результате общее поле не меняется.

Аналогичное утверждение справедливо и для отраженной волны (34.7).

В качестве приложения полученных общих соотношений мы рассмотрим прохождение сферической звуковой волны через тонкую упругую пластину, движение которой может быть описано уравнением изгибных колебаний (32.4). В § 32 было найдено, что коэффициент прохождения звука через тонкую пластину определяется вторым из выражений (32.17). Воспользовавшись формулой (34.6), запишем

$$p = \frac{\omega\rho k Q}{8\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{H_0^{(1)}(kr \sin \theta) e^{ik(H-h) \cos \theta}}{1 - ib \cos \theta \left[1 - \left(\frac{c_H}{c}\right)^4 \sin^4 \theta\right]} \sin \theta d\theta, \quad (34.8a)$$

где  $b = \omega M/2\rho c$ .

Анализ интеграла подобного типа для прошедшей звуковой волны был проведен в работе [137]. Близкое к этому интегралу выражение исследовано также в работе [38], в которой изучено отражение звука от тонкой пластины, расположенной на границе жидкости и вакуума. В работе [41] аналогичным методом изучено взаимодействие сферической звуковой волны и упругой пластины с учетом антисимметричных и симметричных колебаний пластины.

Будем вычислять значение интеграла при  $kr \gg 1$ . Используя асимптотическое представление функции Ханкеля, интеграл (34.8a) можно записать в следующем виде:

$$p_1 = \frac{\omega\rho k Q}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{ik[r \sin \theta + (H-h) \cos \theta]}}{1 - ib \cos \theta \left[1 - \left(\frac{k}{k_H}\right)^4 \sin^4 \theta\right]} \sqrt{\sin \theta} d\theta. \quad (34.8b)$$

Трудность, заключающаяся в том, что на некоторых участках пути интегрирования аргумент функции Ханкеля обращается в нуль, можно обойти, деформируя контур интегрирования так, чтобы он не проходил вблизи точки  $\theta = 0$ .

Следуя [38], найдем положение полюсов подынтегрального выражения. Местоположение полюсов определяется условием обращения в нуль знаменателя:

$$\sin^4 \theta \cos \theta - \left(\frac{k_n}{k}\right)^4 \cos \theta = i \left(\frac{k_n}{k}\right)^4 \frac{1}{b}. \quad (34.9)$$

После замены переменных  $\omega = -i \cos \theta$  получаем уравнение

$$\omega^5 + 2\omega^3 + \left[1 - \left(\frac{k_n}{k}\right)^4\right] \omega = \left(\frac{k_n}{k}\right)^4 \frac{1}{b}. \quad (34.10)$$

**Пространственные и неоднородные волны в докритическом случае.** Решение уравнения (34.10) в общем случае возможно только численными методами. Чтобы получить приближенную оценку корней, заметим, что для тонкой металлической пластины, расположенной в воде, на частоте ниже критической [определяемой выражением (32.6)] соблюдается условие  $c_n < c$  и правая часть уравнения является большим числом. Для стальной пластины в воде имеет место оценка

$$\left(\frac{k_n}{k}\right)^4 \cdot \frac{1}{b} = \frac{24\rho c^2}{E_1(kh)^3} \approx \frac{0,25}{(kh)^3},$$

где  $E_1 = E/(1 - \sigma^2)$  — модуль упругости тонкой пластины.

Если  $kh \ll 1$ , то выражение  $\frac{0,25}{(kh)^3}$  весьма велико. Поэтому в качестве первого приближения при решении уравнения (34.10) можно взять

$$\omega_n = \omega_0 e^{i \frac{2\pi n}{5}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4), \quad \omega_0 = \left[\left(\frac{k_n}{k}\right)^4 \cdot \frac{1}{b}\right]^{1/5}. \quad (34.11)$$

Выражение, аналогичное уравнению (34.9), встречается также и в задаче об отражении сферической звуковой волны от пластины, расположенной на границе жидкости и вакуума [38]. Поскольку в этом случае жидкость находится лишь с одной стороны пластины, то акустическая нагрузка на пластину будет вдвое меньше, чем при двусторонней нагрузке, и величина  $b = \omega M/2\rho c$  в правой части уравнения должна быть заменена на  $b' = \omega M/\rho c$ .

Сравнение точного и приближенного решений уравнения (34.10) (рис. 93) показывает, что при  $kh < 0,6$  формула (34.11) дает удовлетворительную точность.

В приложении 2 приведены значения вещественных корней  $\omega_0$  и  $\omega'_0$ , полученных путем численного решения уравнения пятой степени для стальной пластины, соприкасающейся с водой соответственно двумя сторонами и одной стороной.

Каждому значению  $\omega$  в полосе  $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Re } \theta \leq \frac{3\pi}{2}$  соответствуют два значения  $\theta$ . В результате получаем 10 полюсов, расположенных так, как показано на рис. 91. Полюса  $A_0$  и  $A'_0$  попадают

на контур интегрирования. Для того чтобы выбрать направления обхода, следует придать  $k_n$  малую мнимую часть  $\text{Im } k_n > 0$ , т. е. ввести поглощение в материале пластины. При этом полюса выйдут из полосы  $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Re } \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , и, следовательно, контур  $\Gamma_1$  должен обходить полюса  $A_0$  и  $A'_0$  так, как показано на рис. 91.

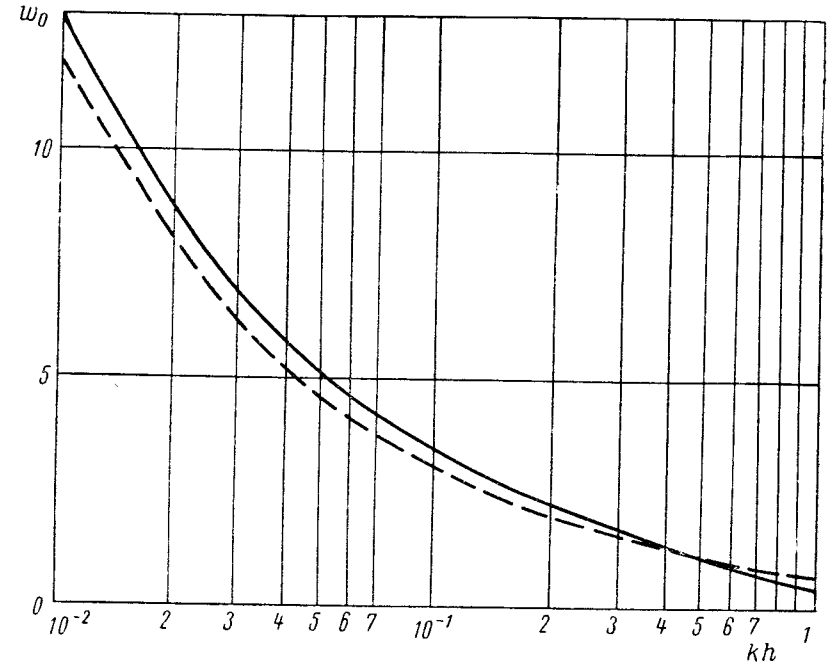


Рис. 93. Зависимость величины  $\omega_0$  от волновой толщины пластины.  
— точное решение; - - - приближенный расчет.

При  $kr \gg 1$  интегралы (34.8а, б) могут быть вычислены методом перевала. Точка перевала  $\theta_0$  определится из соотношения (см. рис. 92)

$$\text{tg } \theta_0 = \frac{r}{H-h} \approx \frac{r}{H}. \quad (34.12)$$

Таким образом, точка перевала характеризуется углом, соответствующим направлению на точку наблюдения  $M$ . Перевальный путь интегрирования на плоскости  $\theta$  определится из условия

$$\text{Im} \{ik[r \sin \theta + (H-h) \cos \theta]\} = \text{const}.$$

Учитывая, что  $r = R \sin \theta_0$ ,  $H-h \approx R \cos \theta_0$ , запишем

$$\text{Im} [ikR \cos(\theta - \theta_0)] = \text{const}$$

или  $\operatorname{Re} \cos(\theta - \theta_0) = \operatorname{const}$ . При  $\theta = \theta_0$  имеем  $\operatorname{Re} \cos(\theta - \theta_0) = 1$ . Если  $\theta = \theta' + i\theta''$ , то последнее условие можно записать в виде

$$\cos(\theta' - \theta_0) \operatorname{ch} \theta'' = 1. \quad (34.13)$$

Выражение (34.13) является уравнением перевального пути интегрирования  $\Gamma_0$ . Путь  $\Gamma_0$  пересекает вещественную ось в точке  $\theta_0$ ; угол наклона кривой к оси в этой точке составляет  $45^\circ$ .

При деформации контура  $\Gamma_1$  в контур  $\Gamma_0$  необходимо пересечь полюса  $A_4$ ,  $A_0$  и  $A_1$ . Поэтому к выражению, полученному методом перевала, надо добавить вычеты в указанных полюсах.

Главная часть интеграла, вычисленная по методу перевала, будет равна

$$p_{\text{п}} \approx -\frac{i\omega\rho Q}{4\pi R} B(\theta_0) e^{ikR} = p_0 B(\theta_0). \quad (34.14)$$

Эту часть можно назвать пространственной волной, прошедшей через пластину. Из выражения (34.14) следует, что пространственная волна соответствует чисто геометрической картине распространения звука и полностью определяется коэффициентом прохождения для угла падения  $\theta_0$ .

Можно провести более точное вычисление пространственной волны, учитывая второй член асимптотического выражения, получаемого методом перевала, и сохраняя второй член асимптотического представления функции Ханкеля. В результате получается формула

$$p_2 \approx -\frac{i\omega\rho Q e^{ikR}}{4\pi R} \left\{ B(\theta_0) - \frac{i[B''(\theta_0) + B'(\theta_0) \operatorname{ctg} \theta_0]}{2kR} \right\}, \quad (34.15)$$

близкая к выражению, подробно исследованному в [8] для волны, отраженной от полупространства.

Если коэффициент прохождения вблизи  $\theta_0$  меняется мало, то производные  $B''(\theta_0)$  и  $B'(\theta_0)$  также малы, и роль второго члена незначительна. С увеличением волнового расстояния  $kR$  этот член уменьшается.

Рассмотрим теперь вклады, которые дают вычеты. В точках  $A_1$  и  $A'$  величины  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$  имеют большую положительную мнимую часть. Поэтому плоские волны типа  $\exp[ik(r \sin \theta + H \cos \theta)]$ , соответствующие вычетам, быстро затухают с увеличением  $r$  и  $H$ . Они могут наблюдаться лишь на малых расстояниях от источника. Гораздо более существенным является вклад, определяемый полюсом  $A_0$ . В точке  $A_0$  оказывается, что  $\cos \theta = i\omega_0$ ,  $\sin \theta = \sqrt{1 + \omega_0^2}$ . Поскольку  $\sin \theta$  в этом случае есть вещественная величина, то плоская волна с увеличением расстояния  $r$  не затухает. Вычислив вычет в точке  $A_0$ , найдем

$$p_{\text{п}} = -\frac{k\omega\rho Q}{4b} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ikr} \sqrt{1 + \omega_0^2 - k\omega_0(H-h)}}{\sqrt{1 + \omega_0^2} \left[ 1 - \left(\frac{k}{k_{\text{н}}}\right)^4 (1 + \omega_0^2)(\omega_0^2 - 3) \right]}. \quad (34.16)$$

Выражение (34.16) представляет собой неоднородную (поверхностную) волну, распространяющуюся вблизи пластины и обусловленную изгибными колебаниями пластины. При увеличении волнового расстояния  $kH$  амплитуда этой волны экспоненциально уменьшается.

С физической точки зрения природу волны  $p_{\text{п}}$  можно пояснить следующим образом. Вблизи поверхности, обладающей положительным реактивным импедансом (т. е. импедансом гибкости), может распространяться поверхностная волна [8]. В данном случае для всех вещественных углов падения  $\theta$  в диапазоне частот ниже критической импеданс пластины (32.5) представляет собой отрицательную мнимую величину (импеданс массы). Поэтому при всех вещественных  $\theta$  поверхностная волна, связанная с изгибными колебаниями пластины, возбудиться не может.

Сферическая волна, падающая на пластину, может быть представлена как набор плоских волн, причем в разложении участвуют и комплексные углы  $\theta$ , для которых  $\sin \theta > 1$ . При уменьшении волнового расстояния  $kH$  роль неоднородных волн, соответствующих комплексным  $\theta$ , возрастает. Для некоторого комплексного угла падения импеданс пластины (32.5) оказывается положительной мнимой величиной, и движение пластины описывается не инерционным импедансом, а импедансом гибкости. Таким образом, возникают условия, при которых вблизи пластины может существовать поверхностная волна.

С увеличением расстояния  $r$  амплитуда поверхностной волны изменяется по цилиндрическому закону, в то время как пространственная волна (34.14) убывает по сферическому закону. Поэтому на больших расстояниях от источника вблизи пластины амплитуда поверхностной волны может превышать амплитуду пространственной волны. Фазовая скорость  $c_{\text{фаз}}$  и глубина проникновения в жидкость  $H_1$  (расстояние, при котором амплитуда волны уменьшается в  $e$  раз) определяются следующими выражениями:

$$c_{\text{фаз}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \omega_0^2}}; \quad H_1 = \frac{1}{k\omega_0}, \quad (34.17)$$

где  $\omega_0$  находится по таблице (см. приложение 2). При  $kh \ll 1$ , воспользовавшись приближенным выражением (34.11), получим

$$c_{\text{фаз}} \approx (\omega h)^{3/5} \left(\frac{E_1}{24\rho}\right)^{1/5}; \quad H = \frac{(\omega h)^{3/5}}{\omega} \left(\frac{E_1}{24\rho}\right)^{1/5}.$$

В отличие от формулы, определяющей скорость изгибной волны в пластине, расположенной в вакууме,  $c_{\text{фаз}}$  не зависит от плотности материала пластины, а зависит только от плотности окружающей жидкости. Это связано с тем, что для весьма тонких пластин силы инерции при колебаниях пластины, обусловленные ее массой, малы по сравнению с силами инерции, обусловленными наличием соколеблющейся массы среды.

**Пространственные и неоднородные волны на частоте выше критической.** С увеличением волновой толщины пластины скорость изгибных волн возрастает и правая часть уравнения (34.10) уменьшается. При этом полюса подынтегрального выражения (34.8a) приближаются к вещественной оси. При некоторой волновой толщине  $kh$  полюс  $A_0$  пересечет перевальный путь интегрирования и окажется выше него. Поэтому в процессе деформации исходного контура  $\Gamma_1$  в контур  $\Gamma_0$  полюс  $A_0$  не будет задет. В результате для достаточно больших  $kh$  неоднородная волна типа (34.16) будет отсутствовать.

Определим критерий, при выполнении которого поверхностная волна исчезает. Из уравнения (34.13) следует, что контур  $\Gamma_0$  пересекает прямую  $\frac{\pi}{2} \pm i\theta''$  в точке, определяемой равенством  $\operatorname{ch}\theta'' = \frac{1}{\sin\theta_0}$ . Подставив соответствующее значение  $\theta''$  в уравнение (34.9), получим условие, при котором полюс  $A_0$  пересекает контур  $\Gamma_0$ :

$$\left(\frac{k_n}{k}\right)^4 = \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\sin^4\theta_0\left(\operatorname{tg}\theta_0 + \frac{1}{b}\right)}.$$

При изучении поверхностных волн вблизи пластины наибольший интерес представляет собой область скользких углов падения. В этой области  $\operatorname{tg}\theta_0 \gg \frac{1}{b}$  и последнее выражение приобретает вид  $c_n = c \sin\theta_0$ . При  $c_n > c \sin\theta_0$  полюс пересекает контур  $\Gamma_0$ , и поверхностная волна исчезает. Очевидно, что при  $c_n > c$ , т. е. на частоте выше критической, поверхностная волна вообще не наблюдается.

Исчезновение поверхностной волны при  $c_n > c$  имеет простое объяснение. Пусть колебательная скорость некоторой плоскости задана в виде бегущей волны  $e^{ik_n x}$ . Тогда звуковое давление в среде определяется выражением  $\exp i(k_n x + \sqrt{k^2 - k_n^2} z)$ . При  $k_n > k$ , т. е. при  $c_n < c$ , звуковое давление представляет собой волну  $\exp(i k_n x - \sqrt{k_n^2 - k^2} z)$ , которая распространяется вдоль поверхности и экспоненциально затухает при удалении от нее. Излучения энергии в пространство не происходит. Если же  $c_n > c$ , то такая поверхность является излучающей и направление распространения волны составляет с осью  $z$  угол  $\theta = \arcsin c_n/c$ .

Таким образом, поверхностные волны вдоль границы, по которой распространяется изгибная волна, могут существовать лишь при  $c_n < c$ .

Рассмотрим теперь вклад других полюсов, пересекаемых при деформации исходного контура  $\Gamma_1$  в перевальный путь  $\Gamma_0$ . При достаточно больших  $kh$  полюса располагаются либо так, как показано на рис. 94, а, либо так, как показано на рис. 94, б. Полюс  $A_4$

в обоих случаях имеет большую мнимую часть. Поэтому волны, соответствующие этому полюсу, быстро затухают с удалением от источника.

Определим теперь расположение полюса  $A_3'$ . На частоте выше критической  $k_n < k$ ,  $b > 1$ , и правая часть уравнения (34.9) представляет собой малую величину. Поэтому вещественная часть одного из корней уравнения должна быть близка к величине  $k_n/k$ , а коэф-

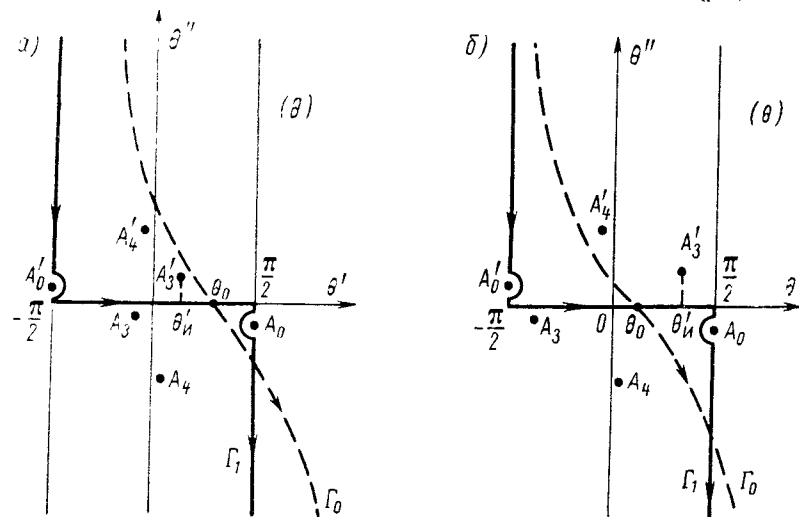


Рис. 94. Расположение полюсов при частоте выше критической: а — в случае  $\sin\theta_0 > k_n/k$ ; б — в случае  $\sin\theta_0 < k_n/k$ .

фициент при мнимой части должен быть малым числом. Если обозначить это решение через  $\theta_n$ , то можно записать

$$\sin\theta_n \approx \frac{k_n}{k} + i\frac{\alpha}{k}; \quad \theta_n = \theta'_n + i\theta''_n; \quad \theta'_n \approx \arcsin \frac{k_n}{k},$$

где  $\alpha$  — малое число.

При вычислении вычета в точке  $\theta = \theta_n$  в окончательное выражение войдет множитель

$$e^{ikr \sin\theta_n} \approx e^{i(k_n + i\alpha)r},$$

определяющий распространение волны вдоль пластины. Поэтому величину  $k'_n = k_n + i\alpha$  можно рассматривать как комплексное волновое число изгибных волн, распространяющихся вдоль пластины, погруженной в жидкость.

Подставив выражение для  $\sin\theta_n$  в уравнение (34.9), можно определить  $\alpha$ . Пренебрегая малыми членами, получаем

$$\alpha = \frac{2\rho c}{4Mc_n \sqrt{1 - \left(\frac{k_n}{k}\right)^2}}. \quad (34.18)$$

Формула (34.18) совпадает с выражением для коэффициента затухания изгибной волны в пластине, излучающей энергию в жидкость [45]. Жидкость мало влияет на фазовую скорость изгибной волны на частоте выше критической, но приводит к появлению затухания, связанного с излучением части энергии в жидкость.

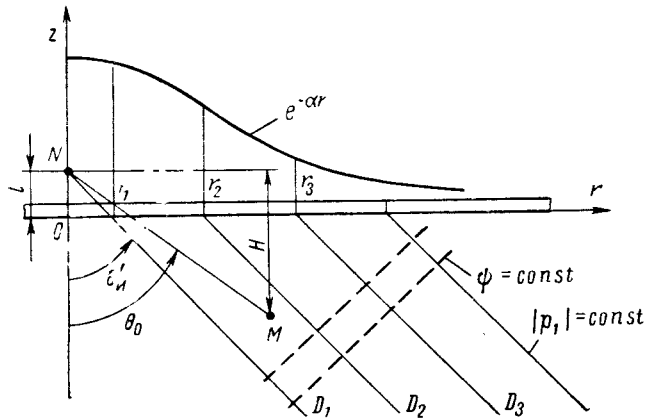


Рис. 95. Характер волнового поля на частоте выше критической.

Если  $\sin \theta_0 > \frac{k_n}{k}$ , то полюс  $A'_3$  расположен слева от точки перевала (рис. 94, а) и вычет в этом полюсе должен учитываться при вычислении интеграла (34.8б). Вычисляя вычет, положим

$$\cos \theta_n = \sqrt{1 - \left(\frac{k_n}{k} + \frac{i\alpha}{k}\right)^2} \approx \sqrt{1 - \left(\frac{k_n}{k}\right)^2} - \frac{i\alpha k_n}{k^2 - k_n^2}$$

(последнее приближенное равенство справедливо при  $\alpha \ll \sqrt{k^2 - k_n^2}$ , что имеет место в большинстве практических случаев). Вклад, определяемый вычетом, с точностью до величин порядка  $\alpha^2$  будет равен

$$p_n = -\frac{i\omega\rho Q e^{i\frac{\pi}{2}}}{16b} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \frac{k k_n^{3/2}}{(k^2 - k_n^2)} e^{i[k_n r + \sqrt{k^2 - k_n^2} (H-h)] - \alpha r + \frac{\alpha k_n^k (H-h)}{k^2 - k_n^2}}. \quad (34.19)$$

Из полученного выражения следует, что вклад изгибных колебаний в общее поле в точке наблюдения  $M$  представляет собой волну, которая излучается пластиной под углом  $\theta'_n = \arcsin \frac{k_n}{k}$  к оси  $z$  (рис. 95). Линии постоянной фазы показаны пунктиром. Линии постоянной амплитуды — прямые  $D_1$ ,  $D_2$  и т. д.

Амплитуда волны вдоль пластины уменьшается по закону  $e^{-\alpha r}$ , а при удалении от нее — увеличивается как  $\exp \frac{\alpha k_n k H}{k^2 - k_n^2}$ . Увеличение амплитуды излученного поля с ростом расстояния  $kH$  можно понять из рассмотрения рисунка. Если точка  $M$  удаляется от пластины, то она последовательно пересекает ряд линий равных амплитуд. При этом должно выполняться неравенство  $p(D_1) > p(D_2) > p(D_3)$ , поскольку, например, на линии  $D_1$  амплитуда пропорциональна величине  $e^{-\alpha r_1}$ , а на линии  $D_2$  — величине  $e^{-\alpha r_2}$  ( $r_2 > r_1$ ). Таким образом, при увеличении  $H$  в точке  $M$  увеличивается амплитуда поля, обусловленного изгибными колебаниями пластины. Однако, как только точка  $M$  пересекает линию  $D_1$ , амплитуда волны  $P_{изг}$  скачком уменьшается до нуля. Действительно, при  $\theta'_n > \theta_0$  полюс  $A'_3$  (рис. 94, б) оказывается справа от контура интегрирования  $\Gamma_0$ , и вычет в этом полюсе уже не должен учитываться. Таким образом, внутри конуса, ось которого совпадает с осью  $z$ , вершина находится в точке  $N$  и половина угла раствора равна  $\theta_n$ , волна  $p_n$  наблюдаться не будет и поле в нижнем пространстве будет состоять только из пространственной волны.

Скачкообразный характер изменения поля вблизи линии  $D_1$  объясняется приближением, сделанным при расчете, поскольку применение метода перевала в форме (21.1) допустимо лишь в тех случаях, когда полюс подынтегрального выражения не находится вблизи точки перевала. В окрестности же линии  $D_1$  при  $\theta'_n \approx \theta_0$  полюс  $A'_3$  оказывается рядом с точкой перевала  $\theta_0$ , и вместо выражения (21.1) необходимо использовать другую форму метода перевала [8].

#### Коэффициент прохождения для сферической звуковой волны.

На больших расстояниях от пластины ( $kR \gg 1$  и  $kH \gg 1$ ) неоднородные волны практически отсутствуют, а пространственная волна определяется формулой (34.14). Поэтому коэффициент прохождения для сферической волны при больших волновых расстояниях  $H$  не отличается от коэффициента прохождения для плоской волны, падающей на пластину под углом  $\theta_0$ . В силу замечания, приведенного на стр. 244, это положение оказывается справедливым, если даже одна из точек ( $M$  или  $Q$ ) находится вблизи пластины, но суммарное расстояние  $H$  остается большим. Однако если обе точки находятся на малых расстояниях от пластины, то коэффициент прохождения должен измениться.

Приведем интеграл (34.8а) к интегралу по вещественной оси. Для этого выполним замену переменных  $\sin \theta = u$ . В результате формула (34.8а) запишется в виде

$$p_1 = \frac{\omega\rho k Q}{4\pi} \int_0^\infty B(u) J_0(kru) \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} e^{ikH \sqrt{1-u^2}} du, \quad (34.20)$$

где

$$B(u) = \frac{e^{-ikh\sqrt{1-u^2}}}{1 - ib\sqrt{1-u^2} \left[ 1 - \left(\frac{k}{k_n}\right)^4 u^4 \right]}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть  $r = 0$  (точки  $N$  и  $M$  находятся на оси  $z$ ). Предположим, что  $B(u) = 1$  (пластина отсутствует). Тогда при больших значениях  $u$  подынтегральное выражение приобретает вид  $e^{-kHu}$ . С уменьшением волнового расстояния  $kH$  величина интеграла увеличивается, и при  $kH \rightarrow 0$  в точке  $M$  имеем  $p_1 \rightarrow \infty$ .

Пусть теперь скорость изгибных волн в пластине равна нулю ( $c_n = 0, k_n = \infty$ ). Этот случай соответствует локально реагирующей пластине конечной массы, но обладающей нулевой жесткостью. Тогда в случае  $u \gg 1$  подынтегральное выражение равно  $\frac{1}{u} e^{-kHu}$ .

При  $kH \rightarrow 0$  интеграл от такого выражения также неограниченно возрастает, поскольку при весьма малых  $kH$  это выражение близко к зависимости  $1/u$ .

Таким образом, если точки, в которых находятся излучатель и приемник, разделяет гибкая пластина, то при сближении точек поле стремится к бесконечности.

Качественно иная картина наблюдается в том случае, если пластина имеет конечную жесткость  $c_n \neq 0$ . Тогда при увеличении  $u$  подынтегральное выражение меняется по закону

$$\frac{k_n^4}{bu^5 k^4} e^{-kHu}.$$

Интеграл от такого выражения сходится при любых значениях  $kH$  (включая и  $kH = 0$ ). Следовательно, поле  $p_1$  при приближении точки  $M$  к точке  $Q$  не может неограниченно возрастать, и предельная величина  $p_1$  определяется выражением

$$p_{1\max} = \omega \rho k Q \int_0^{\infty} B(u) \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du. \quad (34.21)$$

Легко дать физическое истолкование этого явления. При малом расстоянии  $l$  на пластину со стороны источника воздействует звуковое давление, имеющее весьма большой градиент в направлении, перпендикулярном оси  $z$ . Это давление стремится сильно изогнуть пластину вблизи источника (возбуждение пластины в таких условиях подобно возбуждению пластины точечной силой). Однако из-за наличия жесткости пластина не может иметь резкий излом, и амплитуда смещения, а также производная от смещения пластины по  $r$  всегда остаются конечными (рис. 96, а).

В отличие от пластины, обладающей конечной жесткостью, локально реагирующая поверхность не сопротивляется изгибу, по-

этому ее смещение и производная вблизи источника могут неограниченно возрастать (рис. 96, б).

Таким образом, звуковое давление вблизи пластины, обладающей конечной жесткостью, при любых  $kH$  остается конечным,

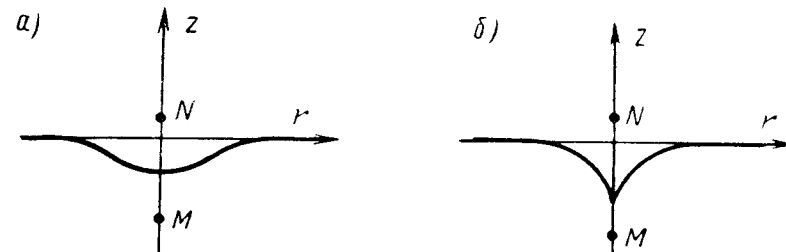


Рис. 96. Распределение колебаний при малых расстояниях  $l$ : а — для пластины, обладающей конечной жесткостью; б — для локально реагирующей пластины.

а вблизи локально реагирующей поверхности при уменьшении  $kH$  поле неограниченно возрастает.

Определим коэффициент прохождения для сферической волны  $B_{сф}$  как отношение звуковых давлений (или потенциалов) при наличии и при отсутствии пластины в точке  $M$ :

$$B_{сф} = \frac{p_1}{p_0}. \quad (34.22)$$

Поскольку  $p_1$  при уменьшении расстояния  $kH$  стремится к ограниченному постоянному значению, а  $p_0$  возрастает по сферическому закону (рис. 97), то  $B_{сф} \rightarrow 0$  при  $kH \rightarrow 0$ . Разумеется, стремление к нулю коэффициента прохождения не означает падения до нуля и звукового давления за пластиной.

Для вычисления коэффициента прохождения интеграл (34.20) следует представить в виде суммы интегралов в интервалах  $(0, 1)$  и  $(1, \infty)$ . Тогда

$$B_{сф} = ikRe^{-ikR} \left[ \int_0^1 B_1(u) J_0(kru) \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} e^{ikh\sqrt{1-u^2}} du - i \int_1^{\infty} B_2(u) J_0(kru) \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} e^{-kh\sqrt{u^2-1}} du \right], \quad (34.23)$$

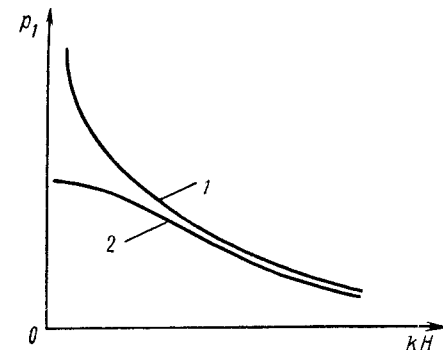


Рис. 97. Поведение амплитуды звукового поля вблизи пластины. 1 — амплитуда падающей волны; 2 — амплитуда прошедшей волны.



где

$$B_1(u) = \frac{e^{-ikh\sqrt{1-u^2}}}{1 - ib\sqrt{1-u^2} \left[ 1 - \left(\frac{k}{k_n}\right)^4 u^4 \right]};$$

$$B_2(u) = \frac{e^{kh\sqrt{u^2-1}}}{1 + b\sqrt{u^2-1} \left[ 1 - \left(\frac{k}{k_n}\right)^4 u^4 \right]}.$$

При некотором значении  $u = u_0$  знаменатель функции  $B_2(u)$  обращается в нуль. Следовательно, подынтегральное выражение во втором интеграле (34.23) имеет полюс на вещественной оси. Выполнив замену  $u^2 = 1 + \omega^2$  и приравняв знаменатель нулю, получим вновь уравнение (34.10), вещественные решения которого приведены в приложении 2. Таким образом, особенность возникает при  $u = u_0 = \sqrt{1 + \omega_0^2}$ . Выясним характер особенности в этой точке. Разлагая знаменатель

$$f(u) = 1 + b\sqrt{u^2-1} \left[ 1 - \left(\frac{k}{k_n}\right)^4 u^4 \right]$$

Рис. 98. К вычислению интеграла (34.23).

в ряд по степеням величины  $u - u_0$  и ограничиваясь первыми двумя членами, получим выражение, справедливое вблизи точки  $u = u_0$ :

$$f(u) \approx f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0).$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как  $u_0$  является корнем уравнения  $f(u) = 0$ . После преобразований получаем

$$f(u) \approx \frac{b\sqrt{1+\omega_0^2}}{\omega_0} \left[ 1 - \left(\frac{k}{k_n}\right)^4 (1 + \omega_0^2)(1 + 5\omega_0^2) \right] (u - u_0).$$

Таким образом, подынтегральное выражение во втором слагаемом (34.23) имеет полюс первого порядка.

Для того чтобы выяснить, как следует обходить полюс при интегрировании, необходимо рассмотреть, в какую сторону сместится полюс, если допустить наличие в материале пластины малого затухания. Предположим, что  $k_n = k_n' + ik_n''$  ( $k_n'' > 0$ ). Как следует из оценки (34.11), при этом  $\text{Im } \omega_0 > 0$ ,  $\text{Im } u_0 > 0$ . Следовательно, полюс  $u_0$  смещается с вещественной оси в верхнюю полуплоскость, и контур должен обходить полюс снизу. Теперь второе слагаемое (34.23) можно представить в виде суммы трех интегралов

$$-i \left[ \int_1^{u_0-\varepsilon} + \int_C + \int_{u_0+\varepsilon}^{\infty} \right].$$

Контур  $C$  представляет собой полуокружность малого радиуса  $\varepsilon$ , расположенную в нижней полуплоскости (рис. 98). Учитывая значение интеграла

$$\int_C \frac{du}{u - u_0} = \pi i,$$

находим второе слагаемое (34.23):

$$-i \left( \int_1^{u_0-\varepsilon} + \int_{u_0+\varepsilon}^{\infty} \right) B_2(u) J_0(kru) \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} e^{-kH\sqrt{u^2-1}} du + \frac{\pi J_0(kr\sqrt{1+\omega_0^2}) e^{-kH\omega_0}}{b \left[ 1 - \left(\frac{k}{k_n}\right)^4 (1 + 5\omega_0^2)(1 + \omega_0^2) \right]}.$$

На рис. 99 приведены результаты расчета коэффициента прохождения  $B_{сф}$ . По вертикальной оси отложено отношение коэффициентов прохождения для сферической и для плоской волны. Если

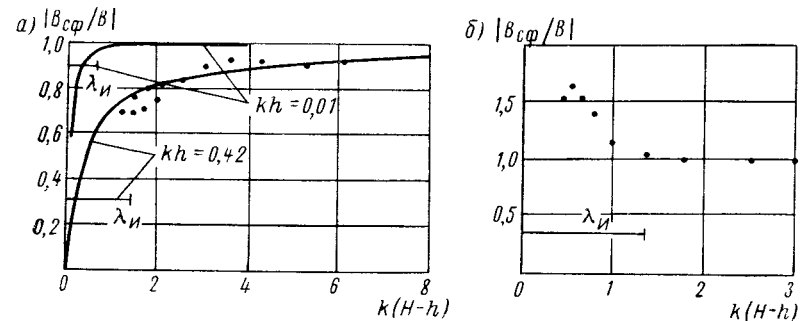


Рис. 99. Зависимость отношения  $|B_{сф}/B|$  от волнового расстояния  $k(H-h)$ : а — при  $kr = 0$ ; б — при  $kr = 17$ ;  $kh = 0,42$ .

$kr = 0$ , то при малых волновых расстояниях  $kH$  отношение  $|B_{сф}/B|$  резко уменьшается (см. рис. 94, а). Точками показаны экспериментальные результаты. При увеличении волновой толщины пластины увеличивается и область пониженных значений коэффициента прохождения звука.

На больших волновых расстояниях  $kr$  (рис. 99, б) амплитуда неоднородной волны оказывается больше, чем амплитуда пространственной волны. В этих условиях из-за концентрации энергии вблизи пластины коэффициент прохождения может стать больше единицы. На рис. 99 для сравнения в волновом масштабе нанесены отрезки, равные длине волны изгиба  $\lambda_n$ .

Вне зоны неоднородных волн коэффициент прохождения  $B_{сф}$  при увеличении волнового расстояния  $kH$  быстро стремится к коэффициенту прохождения для плоской волны.

**Влияние среды на скорость распространения волн изгиба.** Соотношение  $c_n^4 = \omega^2 g/M$  определяет скорость волн изгиба; распространяющихся по пластине, находящейся в вакууме. Если же пластина находится в среде, то скорость волн изгиба меняется, поскольку появляется дополнительная соколеблющаяся масса, которая складывается с массой пластины.

Пусть вдоль пластины, находящейся в среде, распространяется волна изгиба с амплитудой колебательной скорости, равной единице, и волновым числом  $\tilde{k}_n$ :

$$v' = e^{i\tilde{k}_n x}. \quad (34.24)$$

Рассмотрим уравнение колебаний изгиба (32.4). В правую часть уравнения входит разность звуковых давлений по обе стороны пластины. Звуковое давление, излучаемое поверхностью с распределением колебательной скорости по закону (34.24), можно определить из выражения (5.2):

$$p(x, y) = \frac{\omega \rho}{\sqrt{k^2 - \tilde{k}_n^2}} e^{i\tilde{k}_n x + i\sqrt{k^2 - \tilde{k}_n^2} y}. \quad (34.25)$$

При антисимметричных колебаниях пластины звуковые давления с разных сторон пластины равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому разность их будет определяться выражением

$$p'(x, 0) = \frac{2\omega \rho}{\sqrt{k^2 - \tilde{k}_n^2}} e^{i\tilde{k}_n x}. \quad (34.26)$$

Подставив (34.24) и (34.26) в формулу (32.4), найдем уравнение относительно  $\tilde{k}_n$ , полученное в работе [45]:

$$(\tilde{k}_n^4 - k_n^4) \sqrt{k^2 - \tilde{k}_n^2} = -i \frac{2\rho k_n^4}{M}.$$

Выполнив замену  $\frac{\tilde{k}_n^2}{k^2} - 1 = w$ , получим уравнение относительно  $w$ , совпадающее с уравнением (34.10). Таким образом, волновое число  $\tilde{k}_n$  можно выразить через корни уравнения, приведенные в приложении 2.

Скорость волн изгиба в пластине, расположенной в среде, определяется выражением

$$\tilde{c}_n = \frac{c}{\sqrt{1 + w_0^2}}. \quad (34.27)$$

Для весьма тонких пластин ( $kh \ll 1$ ,  $\omega_0 \gg 1$ ) в качестве  $w_0$  можно использовать приближенное выражение (34.11). Тогда получим приближенное равенство  $\tilde{c}_n \approx c_{\text{фаз}}$ , где  $c_{\text{фаз}}$  вычисляется по формуле (34.17).

При  $kh < 0,5$  увеличение волновой толщины пластины приводит к возрастанию величины  $\tilde{c}_n/c_n$  — отношения скоростей изгибных волн для пластины, находящейся в среде, и пластины в вакууме (рис. 100). Действительно, с увеличением толщины возрастает масса и жесткость пластины, поэтому влияние среды на распространение волн изгиба сказывается все меньше.

Появление максимума на графиках при  $kh = 0,5 \div 0,6$  объясняется следующим образом. С возрастанием толщины пластины увеличивается и каждая из скоростей  $\tilde{c}_n$ ,  $c_n$ . При некотором значении  $kh$  скорость  $c_n$  становится равной скорости звука в среде (для стальной пластины, находящейся в воде, совпадение скоростей происходит при  $kh \approx 0,98$ ).

Рассмотрим сопротивление излучения пластины, по которой

распространяется волна со скоростью  $\tilde{c}_n$ . Взяв отношение звукового давления на поверхности пластины (34.25) к колебательной скорости, получим сопротивление излучения

$$Z = \frac{\rho c}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{\tilde{c}_n}\right)^2}}. \quad (34.28)$$

Если  $\tilde{c}_n \ll c$ , то  $Z \approx i\rho c$ . При  $\tilde{c}_n < c$  импеданс излучения является чисто реактивным, и активного излучения звука не происходит. С возрастанием  $kh$ , а следовательно, и  $\tilde{c}_n$  импеданс излучения увеличивается. Влияние среды в данном случае сводится к добавлению некоторой соколеблющейся массы, которая складывается с массой пластины и замедляет рост  $\tilde{c}_n$ . При  $\tilde{c}_n$ , близком к  $c$ , соколеблющаяся масса весьма велика. Поэтому в области значений параметра  $kh$ , соответствующих критической частоте, воздействие среды приводит к существенному замедлению роста  $\tilde{c}_n$ .

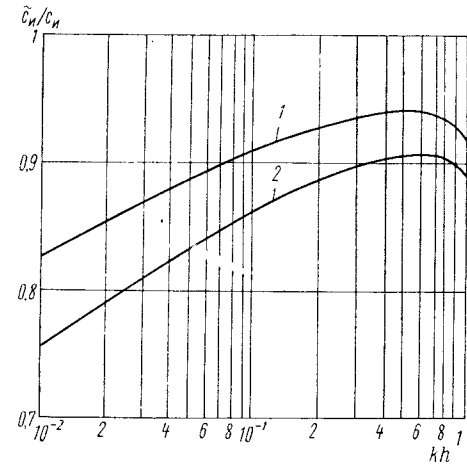


Рис. 100. Зависимость отношения  $\tilde{c}_n/c_n$  от волновой толщины пластины.

1 — пластина соприкасается с жидкостью одной стороной; 2 — пластина соприкасается с жидкостью двумя сторонами.

■  
ПРОХОЖДЕНИЕ  
ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ  
ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНЫЕ  
ПЛАСТИНЫ

§ 35. Об определении коэффициента  
прохождения звука через  
неоднородные пластины

До сих пор мы рассматривали прохождение звука через однородные безграничные пластины. На практике часто приходится сталкиваться с неоднородными конструкциями, например пластинами, подкрепленными ребрами жесткости. Кроме того, реальные пластины всегда являются ограниченными. Следовательно, возникает задача об определении коэффициента прохождения звука через неоднородные и ограниченные пластины. Как будет показано ниже, при взаимодействии звука с такими пластинами возникает ряд новых явлений, в частности появляются резонансные эффекты, связанные с ограниченными размерами пластины, а также происходит интенсивное отражение звука не под углом отражения, равным углу падения, а в направлении, противоположном направлению падающей звуковой волны (так называемое «незеркальное отражение»).

Для решения этих задач прежде всего необходимо определить, что следует понимать под коэффициентом прохождения звука через неоднородную пластину. Строго говоря, само понятие «коэффициент прохождения звука» применимо только к бесконечным однородным плоским пластинам. В этом случае плоская звуковая волна, проходящая через пластину, также остается плоской, и коэффициент прохождения звука может быть определен как отношение звуковых давлений в прошедшей и падающей волнах.

Определить таким же образом коэффициент прохождения для неоднородной пластины невозможно, поскольку прошедшая волна будет рассеиваться неоднородностями и звуковое давление за пластиной будет являться функцией координаты точки наблюдения. Отсюда следует, что при вычислении коэффициента прохождения необходимо оперировать не локальными значениями звукового поля, а некоторыми средними величинами.

Пусть ограниченная неоднородная пластина закрывает отверстие в бесконечном жестком экране (рис. 101, а). На пластину падает

Заметим, что выражение (34.27) описывает лишь скорость незатухающих изгибных волн в пластине. Кроме них в пластине могут существовать и волны, которые характеризуются комплексными корнями уравнения (34.10) [для вычисления скорости подобных волн по формуле (34.27) вместо величины  $\omega_0$  следует подставить соответствующие комплексные значения]. Эти волны затухают по мере распространения вдоль пластины в результате излучения энергии в окружающую среду.

Рассмотрим, например, распространение волн вдоль пластины в диапазоне частот выше критической частоты, т. е. при  $k_n^4/k^4 \ll 1$ ,  $b \gg 1$ .

Уравнение (34.10) можно переписать следующим образом:

$$\omega(\omega^2 + 1)^2 = \left(\frac{k_n}{k}\right)^4 \left(\omega + \frac{1}{b}\right). \quad (34.29)$$

Это уравнение имеет вещественный корень  $\omega_0$  и две пары комплексных корней. В нулевом приближении, приравняв правую часть нулю, находим  $\omega = \pm i$ . В первом приближении получаем

$$1 + \omega^2 \approx \left(\frac{k_n}{k}\right)^2 \left(\pm \frac{i}{b} + 1\right)^{1/2}. \quad (34.30)$$

Подставим в соотношение (34.27) сначала значение  $\omega_0$ , взятое из приложения 2. В результате найдем  $\tilde{c}_n^{(0)}$ . Используя равенство (34.30), аналогичным образом получим еще одно значение скорости:

$$\tilde{c}_n^{(1)} \approx c_n - i \frac{c_n}{4b}$$

(из двух возможных знаков выбран знак минус, обеспечивающий затухание волны).

Таким образом, в диапазоне частот выше критической частоты могут существовать два типа волн. Одна волна распространяется без затухания со скоростью  $\tilde{c}_n^{(0)}$ , несколько меньшей, чем скорость звука в среде. Это типичная поверхностная волна, распространяющаяся вдоль импедантной границы. Вторая волна движется со скоростью  $c_n$  и затухает по мере распространения вдоль пластины вследствие излучения части энергии в жидкость.

Условия возникновения поверхностных волн вблизи пластины, разделяющей две среды с различными волновыми сопротивлениями, проанализированы в работе [35].

плоская волна с волновым вектором  $\vec{k}$ . Определим коэффициент прохождения звука как отношение

$$B' = \frac{p_D}{p_D^{(0)}}. \quad (35.1)$$

Здесь  $p_D$  — звуковое давление в точке  $D$  при наличии пластины;  $p_D^{(0)}$  — звуковое давление в этой же точке при отсутствии пластины. Звуковые давления вычисляются в предположении, что точка наблю-

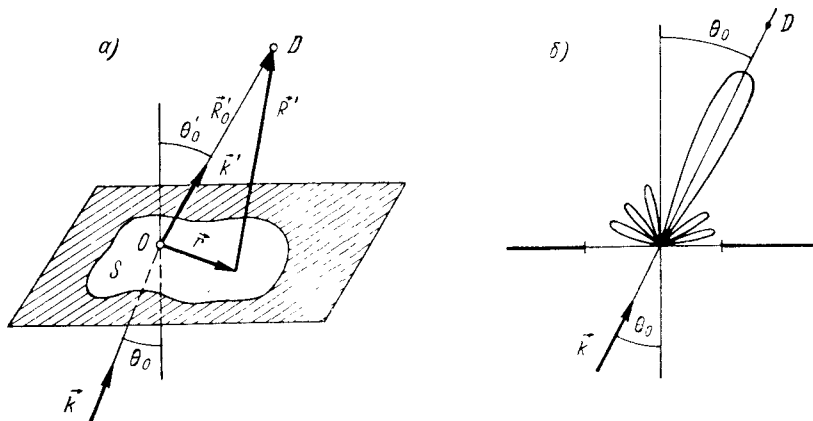


Рис. 101. К определению коэффициента прохождения через ограниченную неоднородную пластину.

дения  $D$  находится во френгоферовой зоне отверстия и лежит на прямой  $\theta_0 = \theta_0'$ , т. е. на прямой, проходящей через главный максимум диаграммы рассеяния (рис. 101, б).

Такое определение является в известной мере условным. Оно отличается от энергетического определения, при котором под коэффициентом прохождения понимается отношение всей прошедшей энергии ко всей падающей. Представление (35.1) более удобно в связи с тем, что оно может быть непосредственно связано с понятием о пространственных спектрах в звуковом поле, прошедшем через неоднородную пластину.

Пусть на бесконечную неоднородную пластину падает звуковая волна, излучаемая плоским поршнем  $A$  больших волновых размеров. В результате рассеяния звука на неоднородностях пластины как на дифракционной решетке в дальнем поле (во френгоферовой зоне) возникает ряд пространственных спектров (рис. 102). Главным из них является нулевой спектр, определяющий излучение звука в направлении, совпадающем с направлением главного максимума поршня. Амплитуда рассеяния в нулевом спектре за пластиной определяет снижение звукового давления на оси поршня, обусловленное влиянием пластины.

Имеется тесная связь между коэффициентом прохождения, определенным в форме (35.1), и снижением звукового давления в нулевом спектре, поскольку и та, и другая величина определяются лишь средним значением колебательной скорости пластины (т. е. постоянной составляющей вдоль пластины). Для того чтобы это показать, выразим коэффициент прохождения через колебательную скорость пластины.

Пусть падающая плоская волна с амплитудой  $p_0$  заставляет пластину колебаться со скоростью  $v(\vec{r})$  (рис. 101, а). Выделив фазовый член, возникающий за счет набега фазы при наклонном падении, запишем

$$v(\vec{r}) = v_0(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}}. \quad (35.2)$$

По формуле Гюйгенса найдем

$$p_D = -\frac{i\omega\rho}{2\pi} \int_S v_0(\vec{r}) \frac{e^{i(\vec{k}\vec{r} + \vec{k}'\vec{R}')} }{R'} dS.$$

Поскольку по предположению точка наблюдения лежит во френгоферовой зоне отверстия, то  $k'R' \gg 1$  и  $R' \gg L$ , где  $L$  — максимальный линейный размер отверстия. Учитывая, что  $\vec{r} + \vec{R}' = \vec{R}_0$ , получим

$$p_D \approx -\frac{i\omega\rho}{2\pi} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_S v_0(\vec{r}) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} dS. \quad (35.3)$$

Для вычисления  $p_D^{(0)}$  положим  $kL \gg 1$ . Тогда в приближении Кирхгофа нормальная составляющая колебательной скорости на поверхности будет равна  $\cos\theta_0 \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\rho c}$ . По нашему определению для вычисления коэффициента прохождения звука следует положить  $\vec{k} = \vec{k}'$ . Тогда по формуле (35.3) находим

$$p_D^{(0)} = -\frac{i \cos\theta_0 k S p_0 e^{ikR_0}}{2\pi R_0}.$$

Коэффициент прохождения звука будет равен

$$B = \frac{p_D}{p_D^{(0)}} = \frac{\rho c v_{cp}}{p_0 \cos\theta_0}, \quad (35.4)$$

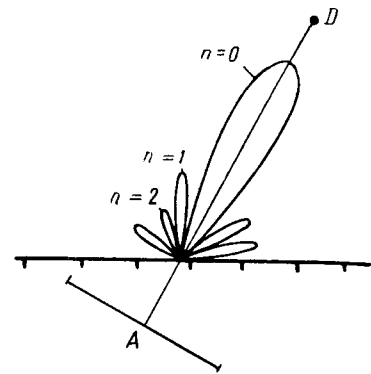


Рис. 102. Пространственные спектры, возникающие при прохождении звука через неоднородную пластину.

где

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{S} \int_S v_0(\vec{r}) dS.$$

Формулу (35.4) можно записать с учетом выражения (35.2) в виде

$$B = \frac{\rho c}{\rho_0 S \cos \theta_0} \int_S v(\vec{r}) e^{-ik\vec{r}} dS. \quad (35.5)$$

Таким образом, коэффициент прохождения звука через неоднородную пластину полностью определяется средней величиной колебательной скорости.

Прохождение звука через периодически неоднородную пластину имеет сходство с проникновением волны через препятствие в волноводе. Если на препятствие в волноводе (стержень, диафрагма) падает нормальная волна заданного типа, то в результате рассеяния возникает бесконечный набор прошедших и отраженных волн различных типов. Под коэффициентом прохождения в этом случае понимается отношение потенциала в прошедшей нормальной волне того же типа, что и исходная падающая волна, к потенциалу падающей волны.

Если перейти от терминов теории волноводов (т. е. от нормальных волн) к понятиям о пространственных спектрах (т. е. к геометрической интерпретации нормальных волн) и принять в волноводе в качестве падающего поля плоскую волну, то станет очевидно, что определение (35.1) и определение теории волноводов эквивалентны.

### § 36. Прохождение звука через ограниченную пластину

**Вывод основных уравнений.** В 1941 г.

С. Н. Ржевкиным и С. И. Кречмером при помощи метода визуализации звуковых полей было открыто незеркальное отражение звука ограниченными пластинами [141]. При этом было показано, что при отражении звука от неограниченной пластины в ряде случаев возникает звуковой луч, направление которого противоположно направлению падающей волны. Дальнейшее развитие теории этого вопроса получила в работах [122] и [45], причем в последней работе подробно исследованы эффекты, связанные как с изгибными, так и с симметричными колебаниями пластины.

Рассмотрим прохождение звука через ограниченную пластину, расположенную в бесконечном абсолютно жестком экране; при этом предполагаем, что для тонких металлических пластин, как показано в § 32, эффекты, связанные с поперечными колебаниями сжатия, выражены слабо. Изложение будем проводить по методу [45] с исправлением некоторых коэффициентов.

Запишем падающую плоскую волну в виде (рис. 103)

$$p_0 = e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}. \quad (36.1)$$

Будем считать, что пластина подчиняется уравнению изгибных колебаний (25.5). Если зависимость смещения от координаты  $y$  отсутствует, то уравнение принимает вид

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = p'.$$

Здесь  $p' = p_1 - p_2$  — разность звуковых давлений по обе стороны пластины.

Для гармонического движения, переходя к колебательной скорости пластины  $v = -i\omega u$ , получаем

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} - k_0^4 v(x) = -\frac{i\omega p'}{g}. \quad (36.2)$$

Звуковое давление в верхнем полупространстве ( $z > 0$ ) является результатом излучения звука пластиной. Поэтому  $p_2 = p_s$ , где  $p_s$  — излученная пластиной волна. Звуковое давление в точке наблюдения  $p_2(x_1, z_1)$  можно определить через интеграл Гюйгенса (4.10):

$$p_2(x_1, z_1) = \frac{\omega \rho}{2} \int_0^l v(x') H_0^{(1)}(kR) dx', \quad (36.3)$$

где  $R = \sqrt{(x' - x_1)^2 + z_1^2}$ . При этом мы учитываем, что пластина расположена в бесконечном абсолютно жестком экране. Отсюда следует, что  $v(x)$  отлично от нуля только при  $0 < x < l$  и интегрирование в бесконечных пределах можно заменить интегрированием по пластине.

Устремив точку наблюдения к поверхности пластины, получим

$$p_2(x_1) = \frac{\omega \rho}{2} \int_0^l v(x') H_0^{(1)}(k|x' - x_1|) dx'. \quad (36.4)$$

Звуковое давление в нижнем полупространстве можно представить в виде  $p_1 = p_0 + p_{\text{отр}}$ , причем отраженная волна  $p_{\text{отр}}$  может быть записана как  $p_{\text{отр}} = p_{\text{отр}}^{(0)} - p_s$ , где  $p_{\text{отр}}^{(0)}$  — звуковое давление в волне, отраженной от абсолютно жесткой пластины без отверстия;  $p_s$  — излученная пластиной волна.

Таким образом, полное поле  $p_1$  будет равно

$$p_1 = e^{ik(x_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta)} + e^{ik(x_1 \sin \theta - z_1 \cos \theta)} - p_s. \quad (36.5)$$

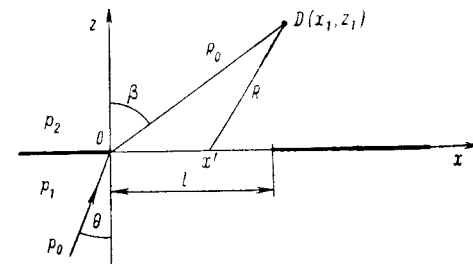


Рис. 103. К прохождению звука через ограниченную пластину.

Для того чтобы получить давление, действующее на пластину, необходимо положить  $z_1 = 0$ . В результате находим в точке  $x_1$  на поверхности пластины

$$p'(x_1) = p_1 - p_2 = 2e^{ikx_1 \sin \theta} - \rho \int_0^l v(x') H_0^{(1)}(k|x' - x_1|) dx'.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (36.2), получаем интегродифференциальное уравнение относительно колебательной скорости пластины

$$-\frac{g}{i\omega} \left[ \frac{d^4 v(x_1)}{dx_1^4} - k_n^4 v(x_1) \right] = 2e^{ikx_1 \sin \theta} - \omega \rho \int_0^l v(x') H_0^{(1)}(k|x' - x_1|) dx. \quad (36.6)$$

Разложим колебательную скорость пластины в ряд по собственным функциям колебаний пластины в вакууме  $\psi_n$ :

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \psi_n(x).$$

Для того чтобы выбрать собственные функции, необходимо условиться о закреплении краев пластины. Предположим, что края закреплены шарнирно, т. е. при  $x = 0, l$  выполняются условия  $v = 0$ ;  $\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = 0$ , соответствующие равенству нулю смещений и изгибающих моментов на краях пластины. Тогда собственные функции могут быть записаны в форме  $\psi_n = \sin \frac{\pi n x}{l}$ , и разложение колебательной скорости в ряд принимает вид

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (36.7)$$

Собственные функции удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$\frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi m x}{l} dx = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m; \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases} \quad (36.8)$$

Подставив (36.7) в уравнение (36.6), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n v_n \sin \frac{\pi n x_1}{l} = 2e^{ikx_1 \sin \theta} - \omega \rho \sum_{n=1}^{\infty} v_n \int_0^l \sin \frac{\pi n x'}{l} H_0^{(1)}(k|x' - x_1|) dx'. \quad (36.9)$$

Здесь обозначено

$$Z_n = -i\omega M \left( 1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2} \right), \quad (36.10)$$

где  $\omega_n$  — угловые частоты собственных колебаний пластины в вакууме, определяемые соотношением

$$\omega_n^2 = \frac{g}{M} \left( \frac{\pi n}{l} \right)^4. \quad (36.11)$$

Величины  $Z_n$  представляют собой механические импедансы шарнирно закрепленной пластинки для различных форм колебаний типа (36.7). При  $\omega \gg \omega_n$  импеданцы  $Z_n$  не отличаются от импеданцев пластины без опор:  $Z_n \approx -i\omega M$ . При  $\omega < \omega_n$  величина  $Z_n$  меняет знак. Таким образом, ниже резонанса для данной формы колебаний пластина представляет не инерционное, а упругое сопротивление.

Левая часть равенства (36.9) представляет собой ряд Фурье. Разложим и правую часть в ряд Фурье. Для этого умножим обе части уравнения на  $\sin \frac{\pi m x_1}{l}$  и проинтегрируем в интервале  $(0, l)$ . В силу условия ортогональности (36.8) в левой части пропадут все слагаемые, кроме члена с номером  $n = m$ . В результате получим

$$Z_m v_m + \sum_{n=1}^{\infty} v_n Z_{mn} = a_m(\sin \theta), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (36.12)$$

Здесь обозначено:

$$a_m(\sin \theta) = \frac{4}{l} \int_0^l e^{ikx_1 \sin \theta} \sin \frac{\pi m x_1}{l} dx_1; \quad (36.13a)$$

$$Z_{mn} = \frac{2\omega \rho}{l} \int_0^l \int_0^l \sin \frac{\pi m x'}{l} \sin \frac{\pi n x_1}{l} H_0^{(1)}(k|x' - x_1|) dx' dx_1. \quad (36.14a)$$

Выполняя интегрирования и переходя к безразмерным координатам  $kx' = \xi$ ,  $kx_1 = \eta$ ,  $kl = \mu$ , получаем

$$a_m(\sin \theta) = \frac{4\pi m}{\mu^2 \sin^2 \theta - (\pi m)^2} [(-1)^m e^{i\mu \sin \theta} - 1]; \quad (36.13b)$$

$$Z_{mn} = \frac{2\rho c}{\mu} \int_0^{\mu} \int_0^{\mu} \sin \frac{\pi n \xi}{\mu} \sin \frac{\pi m \eta}{\mu} H_0^{(1)}(|\xi - \eta|) d\xi d\eta. \quad (36.14b)$$

Заметим, что при  $\sin \theta_m = \pm \frac{\pi m}{\mu}$  выражение (36.13b) не имеет особенности, поскольку в нуль обращаются и числитель, и знаменатель. Раскрывая неопределенность, получим

$$a_m(\sin \theta) = 2i.$$

Выражение (36.12) представляет собой систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $v_m$ . Решив эту систему, можно определить коэффициенты.

**Импеданцы излучения ограниченной пластины.** Величины  $Z_{mn}$  имеют четкий физический смысл. Они представляют собой импеданцы излучения для различных форм колебаний. При этом величина  $Z_{mn}$  является собственно импедансом излучения для формы с номером  $m$ , а  $Z_{mn}$  представляет собой импеданс взаимодействия между различными формами колебаний.

Для того чтобы это показать, рассмотрим излучение поршня с распределением колебательной скорости по его поверхности в виде  $v(x) = v_n \sin \frac{\pi n x}{l}$ . Тогда на поверхности поршня звуковое давление будет определяться выражением

$$p(x_1) = \frac{v_n \omega \rho}{2} \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} H_0^{(1)}(k|x - x_1|) dx. \quad (36.15)$$

Очевидно, что вид функции  $p(x_1)$  не совпадает с видом исходной функции  $v(x)$ . Поэтому поршень с заданной формой колебательной скорости излучает волну, в которой присутствует не только форма с номером  $n$ , но и все остальные типы колебаний с номерами  $m \neq n$ .

Разложим выражение (36.15) в ряд Фурье:

$$p(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \frac{\pi n x_1}{l}.$$

Умножим левую и правую части равенства на  $\sin \frac{\pi m x_1}{l}$  и проинтегрируем по поверхности поршня. Тогда получим

$$Z_{mn} = \frac{p_n}{v_m} = \frac{\omega \rho}{l} \int_0^l \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi m x_1}{l} H_0^{(1)}(k|x - x_1|) dx dx_1,$$

что совпадает с выражением (36.14а) с точностью до множителя, равного двум. Вдвое большее значение в формуле (36.14а) объясняется тем, что импеданс пластины рассчитан с учетом излучения в обе стороны, а последнее выражение определяет излучение в одну сторону.

Для того чтобы упростить расчеты по формуле (36.14б), целесообразно произвести преобразования таким образом, чтобы свести двойной интеграл к одинарному. Это можно выполнить, воспользовавшись методом, изложенным в § 16. Опуская преобразования, запишем окончательный результат

$$\left. \begin{aligned} Z_{mn} &= \frac{2\rho c [1 + (-1)^{m+n}]}{\pi (m^2 - n^2)} [mF_n(\mu) - nF_m(\mu)] \quad \text{при } m \neq n; \\ Z_{mm} &= 2\rho c \left[ \Psi_m(\mu) - \frac{1}{\mu} S_m(\mu) + \frac{1}{\pi m} F_m(\mu) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (36.16)$$

Формулы для вычисления функций  $\Psi_m$ ,  $S_m$  и  $F_m$  были приведены в § 16.

Импеданцы  $Z_{mn}$  отличны от нуля, только если  $m$  и  $n$  одновременно либо четные, либо нечетные числа. Если же  $m$  — четное, а  $n$  — нечетное, то  $Z_{mn} = 0$ . Поэтому взаимодействие между четными и нечетными формами колебаний отсутствует. Этот результат можно легко понять из соображений симметрии.

На рис. 104 приведены зависимости сопротивлений излучения от  $\mu = kl$ .

**Прохождение звука через пластину и незеркальное отражение.** При  $\mu > 10$  импеданцы излучения  $Z_{mm}$  намного больше импедансов взаимодействия  $Z_{mn}$ . Однако и при малых значениях  $\mu$  оказывается, что  $Z_{mn}$  в несколько раз превосходят  $Z_{mm}$ . Это дает право в первом приближении пренебречь всеми импедансами  $Z_{mn}$  при  $m \neq n$ . Тогда система уравнений (36.12) распадается на ряд независимых уравнений, из которых получаем

$$v_m \approx \frac{a_m(\sin \theta)}{Z_m + Z_{mm}}. \quad (36.17)$$

Для более точного определения  $v_m$  необходимо решать бесконечную систему. Пример такого вычисления будет приведен в следующем параграфе для пластины с промежуточными опорами. Здесь мы ограничимся приближением (36.17).

Имея коэффициенты  $v_m$ , можно вернуться к выражению (36.3) и определить рассеянное поле. Предположим, что точка наблюдения лежит в дальнем поле ( $kR \gg 1$ ,  $R \gg l$ ). Тогда  $R \approx R_0 - x \sin \beta$ .

Используя асимптотическое выражение функции Ханкеля и разложение (36.7), запишем

$$p_2(R_0, \beta) = \frac{\omega \rho}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} e^{ikR_0 - i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} e^{-ikx \sin \beta} dx.$$

После вычисления интеграла получим

$$p_2(R_0, \beta) = \frac{\omega \rho l}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} e^{ikR_0 - i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \bar{a}_n(\sin \beta). \quad (36.18)$$

Для определения коэффициента прохождения звука необходимо принять  $\beta = \theta$  и разделить  $p_2(R_0, \theta)$  на величину звукового давления в верхнем полупространстве при отсутствии пластины. Последняя величина может быть получена, если в выражении для  $p_2(R_0, \theta)$  положить  $Z_m = 0$ .

Коэффициент прохождения звука будет равен

$$B' = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} v_n \bar{a}_n(\sin \theta)}{\sum_{n=1}^{\infty} v_n |_{h=0} \bar{a}_n(\sin \theta)}. \quad (36.19)$$

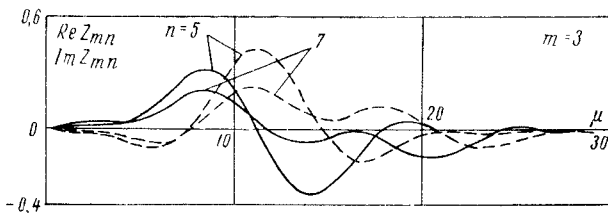
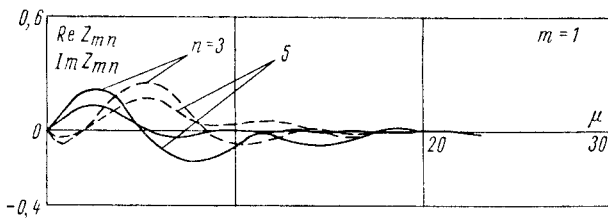
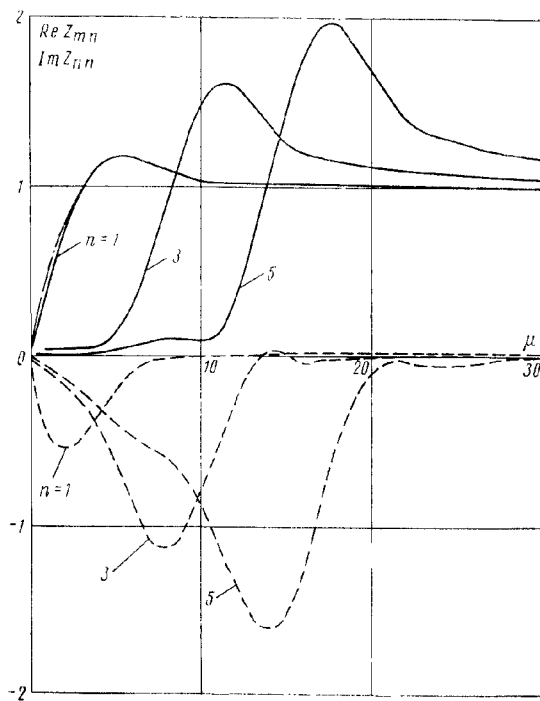


Рис. 104. Импедансы излучения ограниченной пластины. — Re  $Z_{mn}$ ; - - - Im  $Z_{mn}$ ; - - - результат приближенного расчета для  $Z_{11}$  по формулам (36.16); для остальных импеданцев точные и приближенные кривые сливаются.

Для не слишком малых значений  $\mu$  можно воспользоваться формулой Кирхгофа и определением (36.5). Приняв  $p_0 = 1$ , получим

$$B' = \frac{\rho c}{l \cos \theta} \int_0^l v(x) e^{-ikx \sin \theta} dx.$$

Подставляя сюда (36.7) и интегрируя, найдем

$$B'(\theta) = \frac{\rho c}{4 \cos \theta} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \bar{a}_n(\sin \theta).$$

После подстановки (36.17) окончательное выражение можно записать в виде

$$B'(\theta) = \frac{\rho c}{4 \cos \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n(\sin \theta)|^2}{Z_n + Z_{nn}}. \quad (36.20)$$

Рассмотрим поведение рассеянного поля  $p_2(R_0, \beta)$  при различных положениях точки наблюдения. Максимальные значения коэффициентов  $a_n(\sin \theta)$  достигаются при выполнении условия  $\sin \beta_n = \pm \frac{\pi n}{\mu}$ . Это легко показать, вычислив производную  $\frac{\partial |a_n|}{\partial (\mu \sin \beta)}$  и приравняв ее нулю.

При угле падения звука  $\theta_n = \pm \beta_n$  один максимум оказывается направленным в сторону падения звука, а другой — в сторону, противоположную направлению падающей волны. Отражение звука от упругой пластины, направленное навстречу падающей волне, называется незеркальным отражением звука.

Амплитуда незеркального отражения зависит от величины  $(Z_n + Z_{nn})^{-1}$ . Учитывая, что  $Z_n$  является чисто мнимой величиной, можно записать

$$|Z_n + Z_{nn}|^{-1} = [(|Z_n| + \text{Im } Z_{nn})^2 + (\text{Re } Z_{nn})^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

При изменении параметров пластины это выражение достигает максимального значения в случае

$$|Z_n| = -\text{Im } Z_{nn}. \quad (36.21)$$

Для больших значений  $\mu$ , как было показано выше, величина  $\text{Im } Z_{nn}$  мала и последнее соотношение можно заменить условием  $Z_n = 0$  или  $\omega \approx \omega_n$ . Таким образом, максимальное значение незеркального отражения наблюдается в том случае, если частота звука в падающей волне приблизительно совпадает с резонансной частотой для той же формы колебаний, которая создает незеркальное отражение звука. В результате получаем, что максимальное значение незеркального отражения имеет место при одновременном выполнении двух условий:

$$\omega \approx \omega_n, \quad \sin \theta_n = \frac{\pi n}{\mu}.$$



Исключая из этих двух выражений частоту, получаем условие максимального незеркального отражения:

$$\sin \theta \approx \frac{c}{c_n}. \quad (36.22)$$

Таким образом, максимальное незеркальное отражение возникает при совпадении скорости следа падающей волны вдоль пластины со скоростью изгибной волны.

Заметим, что выражение (36.22) совпадает с условием, при котором импеданс изгибных колебаний  $Z$ , определяемый формулой (32.5), обращается в нуль. Поэтому максимум незеркального отражения, обусловленного изгибными колебаниями ограниченной пластины, возникает при тех же углах падения, при которых имеет место максимум коэффициента прохождения звука через тонкую неограниченную пластину.

Если учесть влияние среды на резонансные частоты пластин, то вместо условия  $Z_n = 0$  необходимо воспользоваться более точным равенством (36.21). Наличие небольшой мнимой части сопротивления излучения приводит к некоторому изменению резонансных частот пластины в воде (по сравнению с ее резонансными частотами в вакууме) и, следовательно, к смещению угла незеркального отражения относительно значения, определяемого формулой (36.22). Если же в этой формуле понимать под  $c_n$  скорость изгибных волн в пластине, погруженной в воду, то выражение (36.22) будет в точности определять угол максимума незеркального отражения для изгибных волн.

Можно дать простое физическое объяснение явлению незеркального отражения звука. Под действием падающей звуковой волны возникают вынужденные колебания пластины, имеющие характер стоячих волн (36.7). Стоячую волну можно представить в виде суммы двух бегущих волн, одна из которых бежит в положительном направлении оси  $x$ , другая — в отрицательном (рис. 105):

$$\sin \frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2i} \left( e^{\frac{i\pi n x}{l}} - e^{-\frac{i\pi n x}{l}} \right).$$

Каждой из этих волн можно приписать волновое число  $k_n = \frac{\pi n}{l}$ .

Бегущая вдоль поверхности волна излучает пространственную звуковую волну, причем угол  $\theta_n$  определяется соотношением  $k_n = = k \sin \theta_n = \frac{\pi n}{l}$  или  $\sin \theta_n = \frac{\pi n}{kl}$ . Составляющая  $e^{ik_n x}$  излучает волны  $I$  и  $II$ , составляющая  $e^{-ik_n x}$  — волны  $III$  и  $IV$ . При угле падения  $\theta = \theta_n$  волна  $IV$  направлена в сторону, противоположную направлению падающей волны, что и приводит к появлению незеркального отражения звука.

Если  $k_n > k$ , то скорость волны  $e^{ik_n x}$  оказывается меньше скорости распространения звука в среде. Такая замедленная волна на бесконечной пластине не создает пространственного излучения звука

в дальнем поле, а приводит лишь к появлению поверхностных волн, сосредоточенных в небольшой области вблизи пластины. Следовательно, эффективное излучение звука имеет место только для номеров  $n \leq N$ , где  $N = E \left( \frac{\mu}{\pi} \right) = E \left( \frac{l}{\lambda/2} \right)$ . Здесь  $E$  — целая часть числа. Для ограниченной пластины некоторое излучение в дальнем поле будет иметь место и при  $n > N$ . Однако амплитуда этого отражения с ростом  $n$  убывает быстрее, чем  $1/n^2$ .

Таким образом, образуются резонансы двух типов: пространственный и частотный. Очевидно, что максимум амплитуды стоячей волны,

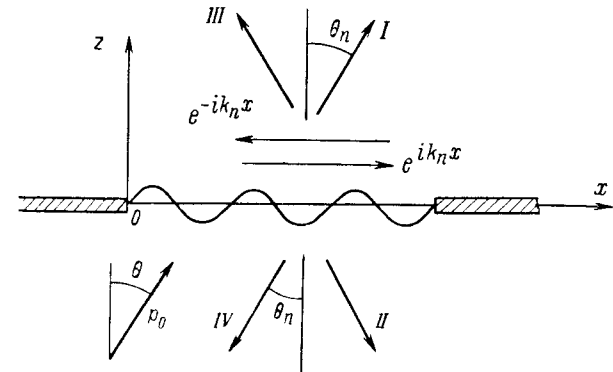


Рис. 105. К объяснению причин незеркального отражения.

а следовательно, и незеркального отражения звука пластиной имеет место при совпадении частоты падающей волны с резонансной частотой той же формы колебаний, которая создает отражение в незеркальном направлении. В работе [45] это явление названо пространственно-частотным резонансом.

Как уже было указано в § 32, для тонких металлических пластин в воде выполняется неравенство  $c_n < c$ . Поэтому соотношение (36.22) может иметь место лишь при достаточно большой волновой толщине пластины.

Условие, при котором может наблюдаться максимум незеркального отражения за счет изгибных колебаний, определяется из неравенства  $c_n > c$  или

$$hf > \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{12\rho_m}{E}}. \quad (36.23)$$

Для стальной пластины в воде это условие можно записать в виде  $hf > 2,5 \cdot 10^4 \text{ см} \cdot \text{гц}$ .

Вычислим отношение максимально возможной амплитуды незеркального отражения к амплитуде зеркального отражения при нормальном падении волны на абсолютно жесткую пластину  $p^{(0)}$ .

Для абсолютно отражающей пластины больших волновых размеров можно записать

$$p^{(0)} = \frac{kl}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} e^{ikR_0 - i\frac{\pi}{4}}.$$

При вычислении уровня незеркального отражения необходимо учесть, что рассеянное поле  $p_s$  в нижнем полупространстве, входящее в формулу (36.5), совпадает с прошедшим полем  $p_2$ , причем в направлении, обратном направлению падения:  $\beta = -\theta$ .

Составляя отношение  $\left| \frac{p_2}{p_0} \right|$  для формы колебаний с номером  $n$ , запишем

$$\left| \frac{p_2}{p_0} \right| = \frac{\rho c}{4} v_n \bar{a}_n(\sin \beta) = \frac{\rho c}{4} \cdot \frac{|a_n(\sin \theta)|^2}{|Z_n + Z_{nn}|}. \quad (36.24)$$

В соответствии с формулой (36.13б)  $|a_n(\sin \theta)| = 2$  при  $\sin \theta_n = \frac{\pi n}{\mu}$ . Импеданс  $Z_n$  при максимуме незеркального отражения равен нулю. Следовательно, остается оценить величину  $Z_{nn}$ . Воспользуемся выражениями (36.16), (16.17)—(16.22) при  $\mu \gg 1$ .  $I_2$  и  $I_2''$  при  $\mu \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, поскольку  $C(\mu_n^\pm) \rightarrow \frac{1}{2}$  при  $\mu_n^\pm \rightarrow \infty$ . Таким образом, для больших значений  $\mu$  получим

$$\Psi_n(\mu) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi n}{\mu}\right)^2}} = \frac{1}{\cos \theta_n};$$

$$F_n(\mu) \approx \frac{2i \arcsin \frac{\pi n}{\mu}}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{\pi n}{\mu}\right)^2}} \rightarrow 0;$$

$$\frac{1}{\mu} S_n(\mu) \rightarrow 0.$$

В результате находим

$$Z_{nn} \approx \frac{2\rho c}{\cos \theta}. \quad (36.25)$$

Из выражения (36.24) теперь можно получить

$$\left| \frac{p_2}{p^{(0)}} \right| = \frac{\cos \theta_n}{2}. \quad (36.26)$$

Последняя величина и является оценкой максимально возможной (теоретически) величины незеркального отражения звука. Практически амплитуда незеркального отражения никогда не достигает

этого значения. Действительно, стоит допустить небольшое отклонение формы пластины от прямоугольной (порядка длины волны изгиба), неидеальность граничных условий на концах или наличие колебаний с распределением вдоль оси  $y$ , чтобы резко ухудшить возможность возникновения стоячей волны вдоль оси  $x$  и уменьшить амплитуду незеркального отражения.

В работе [45] показано, что интенсивное незеркальное отражение может быть обусловлено не только изгибными колебаниями пла-

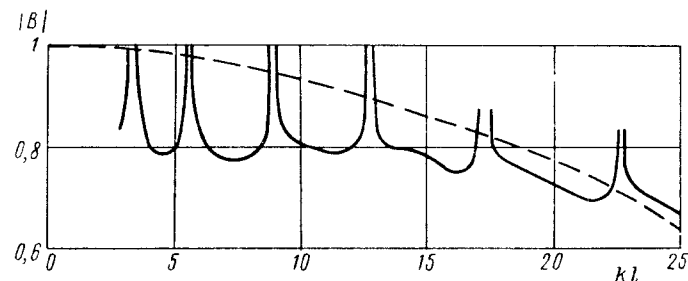


Рис. 106. Зависимость коэффициента прохождения звука через ограниченную пластину от волнового размера  $\mu = kl$ .  
— расчет по формуле (36.19); — — — расчет для безграничной пластины.

стины, но и симметричными колебаниями сжатия. При этом угол максимума незеркального отражения определяется из условия

$$\sin \theta = \frac{c}{c_{np}}, \quad (36.27)$$

где  $c_{np}$  — скорость продольной волны в пластине. Для стальной пластины в воде этот угол равен  $16^\circ$ . Как было показано в § 32, импеданс симметричных колебаний для тонких металлических пластин значительно больше импеданса изгибных колебаний, и потому область углов падения, для которых наблюдается незеркальное отражение звука, обусловленное резонансом симметричных колебаний, оказывается значительно меньше такой же области в случае резонанса изгибных колебаний. Вследствие этого незеркальное отражение, обусловленное симметричными колебаниями, может быть замечено практически для не слишком тонких пластин.

**Результаты расчетов.** На рис. 106 показана зависимость коэффициента прохождения звука через ограниченную пластину от волнового размера  $kl$ . При расчете было принято  $l = 50$  см,  $\rho_m = 7,8$  г/см<sup>3</sup>,  $c = 1,5 \cdot 10^5$  см/сек,  $h = 0,5$  см. Сплошной кривой показан результат расчета по формуле (36.19). Для улучшения сходимости ряда, стоящего в знаменателе, его вычисление производилось не для значения  $h = 0$ , а для значения  $h = 0,02$  см. Такая замена практически не влияла на результат, однако скорость сходимости ряда при этом существенно увеличивалась. Максимумы

на кривой являются следствием резонансов пластины. Пунктиром показан результат вычислений для бесконечной пластины по второй из формул (32.19).

При малых значениях  $kl$  расчет поля, дифрагированного на отверстии, в приближении Кирхгофа уже неверен и формула (36.20) дает неправильный результат. Появление значений коэффициента

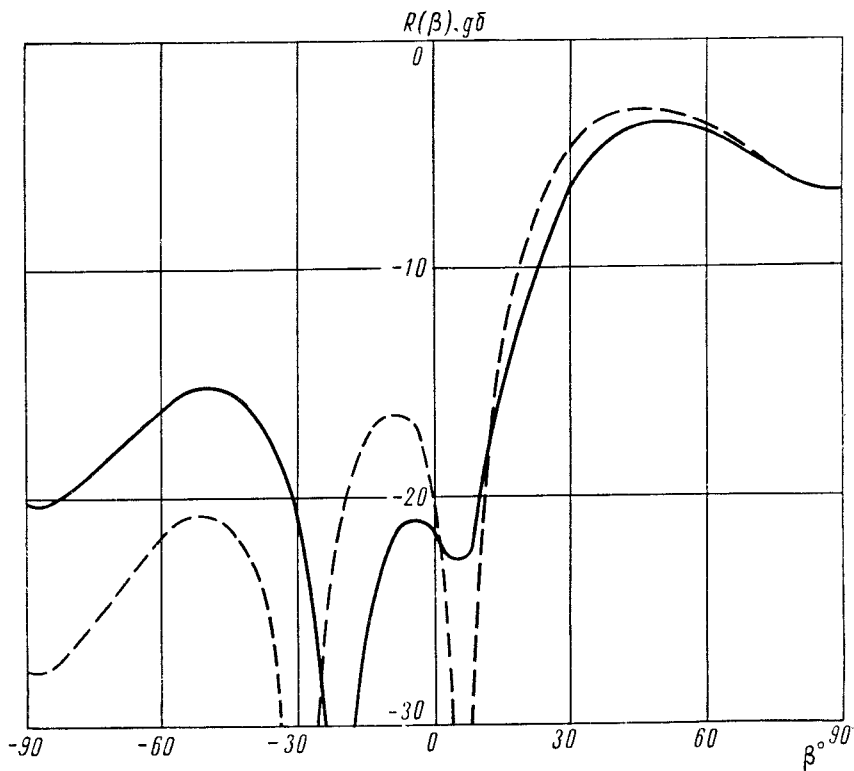


Рис. 107. Диаграмма рассеяния звука на ограниченной пластине.  
 — расчет по формуле (36.28); - - - расчет для открытого отверстия.

прохождения звука, превышающих единицу, объясняется приближенным характером расчета, выражающимся в пренебрежении взаимодействием между формами колебаний.

На рис. 107 сплошной кривой показана диаграмма рассеяния

$$R(\theta, \beta) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\theta) \bar{a}_n(\sin \beta). \quad (36.28)$$

Выражение (36.28) может быть получено путем нормировки звукового давления, рассеянного упругой пластиной (36.18), к звуковому давлению в волне, зеркально отраженной от абсолютно же-

сткой пластины при нормальном падении. В приближении Кирхгофа для пластины больших волновых размеров последняя величина равна  $\frac{\omega \rho l}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} e^{ikR_0 - i\frac{\pi}{4}}$ . Расчет проводился при следующих значениях параметров:  $\theta = 45^\circ$ ;  $l = 50$  см;  $h = 0,5$  см;  $kl = 10,4$ ;  $\rho_m = 7,8$  г/см<sup>3</sup>;  $c = 1,5 \cdot 10^5$  см/сек.

Пунктиром на рис. 107 показана диаграмма рассеяния на открытом отверстии, вычисленная в приближении Кирхгофа:

$$R(\beta) |_{h=0} = \cos \theta \frac{\sin \left[ \frac{kl}{2} (\sin \theta - \sin \beta) \right]}{\frac{kl}{2} (\sin \theta - \sin \beta)}.$$

Значение диаграммы рассеяния в направлении  $\beta = -45^\circ$  определяет уровень незеркального отражения.

### § 37. Прохождение звуковой волны через тонкую пластину с промежуточными опорами

**Вывод системы уравнений.** Рассмотрим теперь взаимодействие звуковой волны с тонкой пластиной, закрепленной вдоль периодически расположенных опор [105], которые разбивают пластину на ряд пролетов.

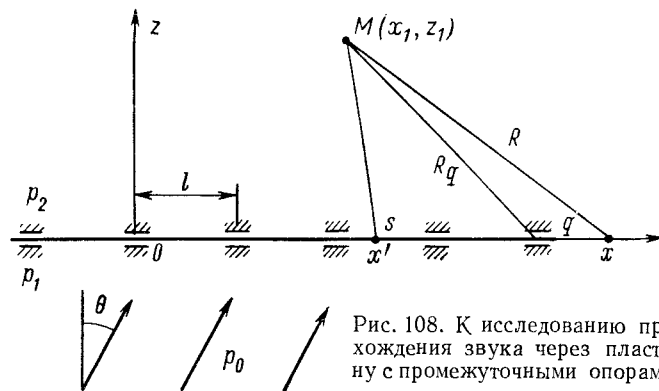


Рис. 108. К исследованию прохождения звука через пластину с промежуточными опорами.

Задача ставится следующим образом. На бесконечную пластину, лежащую в плоскости  $xOy$ , падает плоская звуковая волна из нижнего полупространства, как показано на рис. 108. Пластина жестко закреплена вдоль линий, параллельных оси  $y$ . При этом сами опоры настолько малы, что они практически не вносят возмущений в проходящую звуковую волну, а лишь влияют на условия, при которых происходят колебания пластины. Падающую звуковую волну запишем в виде

$$p_0 = e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}. \quad (37.1)$$

Амплитуда волн принята за единицу. Звуковое давление в точке  $M(x_1, z_1)$  определяется выражением

$$p_2(x_1, z_1) = \frac{\omega \rho}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v(x') H_0^{(1)}(k \sqrt{(x' - x_1)^2 + z_1^2}) dx', \quad (37.2)$$

где колебательная скорость  $v(x')$  остается пока неизвестной. Пренебрегая поперечными колебаниями сжатия тонкой пластины, будем, так же как и в § 36, считать, что движение пластины подчиняется уравнению изгибных колебаний (37.2).

Звуковое давление в нижнем полупространстве  $p_1$  можно представить в виде суммы давлений в падающей волне, в волне, отраженной от заторможенной пластины, и в волне  $p_s$ , излучаемой пластиной при ее колебаниях. Поэтому  $p_1$  можно записать по-прежнему в виде (36.5). В верхнем полупространстве  $p_2 = p_s$ . Кроме того, очевидно, что на поверхности пластины  $p_s(x) = p_2(x, 0)$ . Совмещая точку  $M(x_1, z_1)$  с точкой  $(x_1, 0)$ , получаем уравнение движения

$$-\frac{g}{i\omega} \left[ \frac{\partial^4 v(x_1)}{\partial x^4} - k_n^4 v(x_1) \right] = 2e^{ikx_1 \sin \theta} - \omega \rho \int_{-\infty}^{\infty} v(x') H_0^{(1)}(k|x_1 - x'|) dx'. \quad (37.3)$$

Выражение (37.3) представляет собой интегродифференциальное уравнение относительно колебательной скорости  $v(x)$ . В отличие от случая, рассмотренного в § 36, здесь  $v(x)$  не может быть разложена в ряд по собственным функциям, одинаковым для всех пролетов, и выражения для таких функций будут различны для разных участков пластины, что соответствует сдвигу кривых, описывающих собственные функции, вдоль оси  $x$ . Поэтому мы введем в рассмотрение собственные функции  $X_n^{(q)}(x)$ , зависящие от номера пролета  $q$ . Эти функции должны удовлетворять уравнению свободных колебаний пластины и граничным условиям для жесткого закрепления

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - k_n^4 v = 0; \quad (37.4)$$

$$X_n^{(q)}(lq) = 0; \quad \frac{d}{dx} X_n^{(q)}(x) \Big|_{x=lq} = 0. \quad (37.5)$$

Для однопролетной пластины собственные функции имеют вид [91]

$$X_n(x) = \operatorname{ch} k_n x - \cos k_n x - \alpha_n (\operatorname{sh} k_n x - \sin k_n x),$$

где

$$\alpha_n = \frac{\operatorname{ch} \mu_n - \cos \mu_n}{\operatorname{sh} \mu_n - \sin \mu_n};$$

$\mu_n = k_n l$  — корень уравнения  $\cos \mu_n \operatorname{ch} \mu_n = 1$ .

При переходе к многопролетной пластине можно воспользоваться правилом определения собственных функций для областей, состоящих из отдельных не связанных между собой частей, не имеющих общих внутренних точек, но имеющих общие граничные точки. В этом случае совокупность собственных значений и собственных функций для всей области состоит из собственных значений и собственных функций для отдельных частичных областей, причем каждую из этих собственных функций, определенную только внутри соответствующей частичной области, во всех остальных частичных областях полагаем равной нулю.

В нашем случае для пролета с номером  $q$  можно записать

$$\left. \begin{aligned} X_n^{(q)}(x) &= \operatorname{ch} k_n(x - lq) - \cos k_n(x - lq) - \alpha_n [\operatorname{ch} k_n(x - lq) - \\ &\quad - \sin k_n(x - lq)] \text{ при } lq < x < l(q + 1); \\ X_n^{(q)}(x) &= 0 \text{ при } x < lq \text{ и } x > l(q + 1). \end{aligned} \right\} \quad (37.6)$$

Для того чтобы найти звуковое давление в точке  $x$  пролета  $q$ , необходимо просуммировать вклады колебаний всех пролетов в точке  $x$ . Суммирование звуковых давлений даст нам реакцию жидкости на колебания пластины. Обозначив через  $s$  индекс суммирования, введем в рассмотрение собственные функции для пролета с номером  $s$  в точке  $x'$

$$\begin{aligned} X_n^{(s)}(x') &= \operatorname{ch} k_n(x' - ls) - \cos k_n(x' - ls) - \\ &\quad - \alpha_n [\operatorname{sh} k_n(x' - ls) - \sin k_n(x' - ls)]. \end{aligned}$$

Определенные таким образом собственные функции будут удовлетворять уравнению (37.4) и граничным условиям (37.5). Кроме того, будет выполняться условие

$$\frac{1}{l} \int_{lq}^{l(q+1)} X_n^{(q)}(x) X_m^{(q)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ 1 & \text{при } n = m. \end{cases} \quad (37.7)$$

Поэтому функции  $\frac{1}{\sqrt{l}} X_n^{(q)}(x)$  образуют ортогональную и нормированную систему на участке  $lq \leq x \leq l(q + 1)$ .

Колебательная скорость пластины в пролетах с номерами  $s$  и  $q$  может быть разложена по собственным функциям  $X_n^{(s)}$  и  $X_n^{(q)}$ . При этом коэффициенты разложения будут, вообще говоря, зависеть от номера пролета. Однако очевидно, что эта зависимость будет определяться лишь фазовым сдвигом колебаний в падающей волне на соответствующих пролетах относительно начала отсчета. Следовательно, можно считать, что коэффициенты разложения не зависят от номера пролета, но для компенсации в разложения ввести фазовые множители.

Экспоненциальный множитель, входящий в правую часть уравнения (37.3), также можно представить в виде разложения по собственным функциям. Тогда

$$\left. \begin{aligned} v^{(s)}(x') &= e^{ikls \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n^{(s)}(x'); \\ v^{(q)}(x) &= e^{iklq \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n^{(q)}(x); \\ 2e^{ikx \sin \theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n^{(q)}(x), \end{aligned} \right\} (37.8)$$

где

$$a_n^{(q)} = \int_{lq}^{l(q+1)} 2e^{ikx \sin \theta} X_n^{(q)}(x) dx.$$

Введем замену переменных  $\xi = x - ql$ . Тогда

$$a_n^{(q)} = a_n e^{ikql \sin \theta}.$$

Здесь

$$a_n(\sin \theta) = \frac{2}{l} \int_0^l e^{ik\xi \sin \theta} X_n(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{4\mu_n^2}{\mu_x^4 - \mu_n^4} \left\{ \frac{(-1)^n \mu_n \sin \mu_n}{1 - (-1)^n \cos \mu_n} [(-1)^n e^{i\mu_x} - 1] - i\mu_x [(-1)^n e^{i\mu_x} + 1] \right\}, \quad (37.9)$$

где  $\mu_x = \mu \sin \theta$ ;  $\mu = kl$ .

Подставим теперь выражения (37.8) в уравнение движения (37.3). Поскольку выражения для  $v(x')$  на различных пролетах отличаются друг от друга, интеграл в правой части следует представить как сумму интегралов, и уравнение (37.3) приводится к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n b_n X_n^{(q)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n^{(q)}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n^{(q)}(x), \quad (37.10)$$

где

$$P_n^{(q)}(x) = \omega \rho \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-ik(q-s)l \sin \theta} \int_{ls}^{l(s+1)} X_n^{(s)}(x) H_0^{(1)}(k|x-x'|) dx'; \quad (37.11)$$

$Z_n = -i\omega M \left(1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2}\right)$  — механический импеданс пластины;  $\omega_n$  — угловая частота собственных колебаний зажатой пластины, определяемая как

$$\omega_n^2 = \frac{g}{M} \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^4.$$

Для дальнейшего решения задачи величину  $P_n^{(q)}(x)$ , выраженную через собственные функции  $X_n^{(s)}(x')$ , необходимо представить через функции  $X_n^{(q)}(x)$ . С этой целью введем разложение

$$P_n^{(q)}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_{mn} X_m^{(q)}(x), \quad (37.12)$$

где  $Z_{mn}$  — коэффициенты, смысл которых будет установлен ниже.

Для определения коэффициентов  $b_n$  воспользуемся условием ортогональности (37.7). Умножив выражение (37.12) на  $\frac{1}{l} X_n^{(q)}(x)$  и проинтегрировав по пролету с номером  $q$ , после замены переменных  $\xi = x - ql$ ,  $\xi' = x - sl$  и  $q - s = r$  получим

$$\left. \begin{aligned} Z_{mn} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-i\mu x'} Z_{mn}^{(r)}; \\ Z_{mn}^{(r)} &= \frac{\rho c}{\mu} \int_0^{\mu} \int_0^{\mu} X_m\left(\frac{u}{k}\right) X_n\left(\frac{u'}{k}\right) H_0^{(1)}(|u-u'+\mu r|) du du'. \end{aligned} \right\} (37.13)$$

Подставим теперь выражение (37.12) в формулу (37.10) и поменяем местами индексы  $m$  и  $n$ . Приравняв коэффициенты при одинаковых собственных функциях в левой и правой частях уравнения, получим

$$Z_m b_m + \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn} b_n = a_m(\sin \theta), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (37.14)$$

Это выражение представляет собой бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $b_m$ .

**Определение импеданцев излучения.** Выясним смысл коэффициентов  $Z_{mn}$ .

Так же как и в § 36, можно показать, что  $Z_{mn}$  являются импедансами излучения. Рассматривая все возможные комбинации индексов  $m$  и  $n$ , можно разбить коэффициенты на четыре группы:

а)  $Z_{nn}$  при  $r = 0$ . Эти величины представляют собой сопротивление излучения для любого данного пролета при колебаниях в форме с номером  $n$  (все импедансы рассчитаны для обеих сторон пластины на единицу длины);

б)  $Z_{nn}$  при  $r \neq 0$ . Эти величины являются вносимыми сопротивлениями для формы с номером  $n$ . Они образуются в результате воздействия пролета, находящегося на расстоянии  $lr$  от данного пролета и колеблющегося также в форме с номером  $n$ ;

в)  $Z_{mn}$  при  $r = 0$ . Эти члены определяют влияние колебаний в форме с номером  $m$  на колебания в форме с номером  $n$  для данного пролета;

г)  $Z_{mn}$  при  $r \neq 0$ . Эти члены могут рассматриваться как вносимое сопротивление формы  $m$  на форму  $n$  для пролета, отстоящего от данного на расстояние  $lr$ .

В вакууме формы колебаний пластины ортогональны. Поэтому колебание формы  $m$  не влияет на колебания форм  $n \neq m$ . Однако при наличии окружающей среды колебания разных форм уже нельзя считать независимыми, поскольку возбуждение одной формы приведет к образованию других форм вследствие сдвигов фаз колебаний, приходящихся в данную точку от всех остальных участков пластины (через окружающую среду).

Заметим, что импеданцы  $Z_{mn}$  зависят от угла падения звука  $\theta$ , так как  $\mu_x = \mu \sin \theta$ . Это можно понять из рассмотрения рис. 108. Действительно, звуковое давление в пролете, например с номером  $q$  зависит от фазы колебания другого пролета с номером  $s$ , которая в свою очередь определяется фазой падающей звуковой волны. При этом вследствие наклона фронта падающей волны на угол  $\theta$  и образуется дополнительный сдвиг  $e^{-i\mu_x r}$ . Последнее обстоятельство связано также с тем, что фактически, в связи с независимостью колебаний различных пролетов в вакууме, в данном случае система собственных функций разбивается на ряд независимых систем. Связь между этими системами осуществляется только через окружающую среду и определяется вынуждающей силой.

Выражение для  $Z_{mn}$  в форме (37.13) весьма неудобно для численных расчетов, поскольку для каждого конкретного значения параметров  $\mu$  и  $\sin \theta$  требуется вычислять матрицу коэффициентов  $Z_{mn}$ , включающую суммирование и двойной несобственный интеграл (подынтегральное выражение обращается в бесконечность при  $u - u' + \mu r$ ). Это оказывается трудоемким даже при использовании электронных счетных машин. Поэтому приведем выражение (37.13) к более простому виду.

Выделим в формуле (37.13) член

$$I(u, u') = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-i\mu_x r} H_0^{(1)}(|\omega + \mu r|), \quad \omega = u - u', \quad (37.15)$$

и применим формулу суммирования Пуассона [63]

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} f(\mu r) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\mu} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi r}{\mu}\right), \quad (37.16)$$

где  $F(x)$  — преобразование Фурье функции  $f(x)$ , определяемое выражением

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x) dx.$$

В нашем случае

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega(x - \sin \theta)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(x - \sin \theta)} H_0^{(1)}|x| dx.$$

Интегрирование можно выполнить, воспользовавшись преобразованием Фурье функции Ханкеля [76]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ibx} H_0^{(1)}|ax| dx = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Тогда

$$F(x) = \frac{e^{-i\omega(x - \sin \theta)}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1 - (x - \sin \theta)^2}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (37.16), получим

$$I(u, u') = \frac{2}{\mu} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(u-u')\mu_r}}{\sqrt{1 - \mu_r^2}},$$

где

$$\mu_r = \frac{2\pi r}{\mu} - \sin \theta.$$

Теперь двойной интеграл в формуле (37.13) может быть представлен как произведение интегралов, и интегрирование легко выполняется. В результате находим

$$Z_{mn} = \frac{\rho c}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{a}_m(\mu_r) a_n(\mu_r)}{\sqrt{1 - \mu_r^2}}. \quad (37.17)$$

Запись  $a_n(\mu_r)$  означает, что в формуле (37.9)  $\sin \theta$  должен быть заменен на  $\mu_r$ ; черта над  $a_m(\mu_r)$  обозначает комплексно сопряженную величину. Выражение (37.17) физически менее наглядно, чем выражение (37.13), однако вычисления по последней формуле осуществляются значительно проще.

Можно найти асимптотические выражения для импеданцев  $Z_{mn}$  при малых значениях волнового размера пролета ( $\mu \ll 1$ ):

$$\frac{Z_{mn}}{2\rho c} \approx \frac{64}{\pi^2(2n+1)(2m+1)} + iO(\mu).$$

Импеданцы излучения ограниченной пластины (§ 36) при уменьшении  $\mu$  стремились к нулю. В отличие от этого импеданцы для пластины с периодическими опорами при уменьшении размера пролета стремятся к постоянным значениям, отличным от нуля.

Из выражения (37.17) можно заключить, что при  $\mu_r = \pm 1$ , т. е. при соблюдении условия

$$\sin \theta_r = \frac{\lambda r}{l} \pm 1, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (37.18)$$

импеданцы обращаются в бесконечность.

Из рис. 108 легко понять, что при  $\theta = \theta_r$  разность хода падающей звуковой волны и звуковых волн, излучаемых всеми пролетами, составляет целое число длин волн. Иными словами, к любому данному пролету колебания в падающей волне и колебания всех остальных пролетов приходят в одной и той же фазе, что во много раз увеличивает сопротивление излучения. Парадоксальный вывод о бесконечном увеличении импедансов  $Z_{mn}$  объясняется пренебрежением затуханием звука в среде. При этом получается, что сумми-

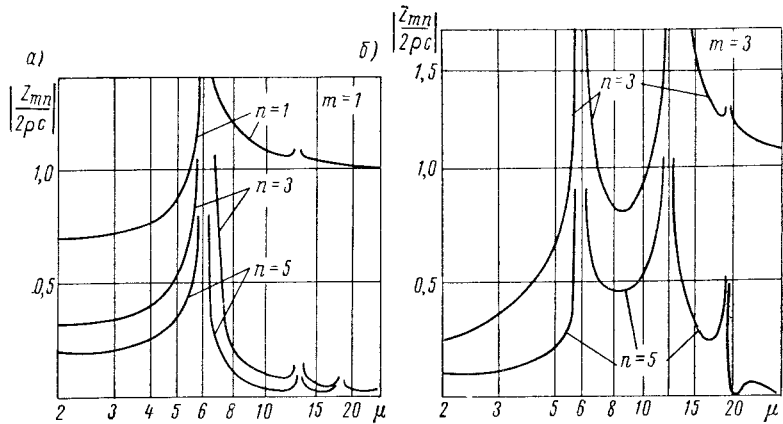


Рис. 109. Зависимость импедансов излучения и взаимодействия между колебаниями различных форм от волнового размера пролета для пластинки с периодическими опорами: *a* — при  $m = 1$ ; *б* — при  $m = 3$ .

руются в фазе вклады бесконечно удаленных участков пластины. При учете затухания должно иметь место значительное, но не бесконечное возрастание импедансов излучения.

На рис. 109, *a* приведены зависимости импедансов излучения и взаимодействия для первой формы колебаний от волнового размера пролета  $\mu$  пластины с промежуточными опорами при  $\theta = 0$ . При  $\mu > 15$  можно считать, что  $|Z_{11}| \approx \rho c$  и  $|Z_{11}| \gg |Z_{13}|$ . Для третьей формы колебаний (рис. 109, *б*) соотношение  $|Z_{33}| \gg |Z_{35}|$  выполняется при  $\mu > 20$ . Импедансы взаимодействия между четными и нечетными формами при нормальном падении, очевидно, равны нулю.

На рис. 110 приведены графики импедансов излучения и взаимодействия для одиночной ограниченной пластины  $Z_{mn}^{(0)}$ , рассчитанные по формуле (37.13). При  $\mu > 20$  можно считать, что  $|Z_{nn}^{(0)}| \approx 2\rho c$  и  $|Z_{mn}| \gg |Z_{mn}|$ . Во всех случаях соблюдается неравенство  $|Z_{mm}| > |Z_{mn}|$ .

**Расчет коэффициента прохождения звука.** Полагая коэффициенты разложения колебательной скорости по собственным функциям известными, определим коэффициенты отражения и прохождения звука.

В соответствии с определением коэффициента прохождения звука через неоднородную пластину, приведенным в § 35, будем временно считать, что пластина с опорами закрывает отверстие в бесконечном жестком экране. Длина пластины  $L \gg \lambda$ , и пластина разбивается на большое число пролетов:  $N = \frac{L}{l} \gg 1$ . В соответствии с формулой (35.5) запишем

$$B' = \frac{\rho c}{L \cos \theta} \int_0^L v(x) e^{-ikx \sin \theta} dx.$$

Разобьем интеграл на сумму  $N$  интегралов по отдельным пролетам и воспользуемся формулами (37.8). Тогда

$$B' = \frac{\rho c}{N l \cos \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_n e^{ikql \sin \theta} \times \int_{iq}^{l(q+1)} e^{-ikx \sin \theta} X_n^{(q)}(x) dx.$$

Вводя замену переменных  $\xi = x - lq$ , получим

$$B' = \frac{\rho c}{2 \cos \theta} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \bar{a}_n(\sin \theta). \quad (37.19)$$

Аналогичным образом определим коэффициент отражения

$$A' = 1 - \frac{\rho c}{2 \cos \theta} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \bar{a}_n(\sin \theta). \quad (37.20)$$

Полученные здесь коэффициенты  $A'$  и  $B'$  определяют звуковое давление в нулевом спектре для прошедшей и отраженной звуковых волн.

Решение системы уравнений (37.14) может быть проведено методом редукции или методом последовательных приближений (см. § 17). Для определения сходимости этих методов следует рассмотреть сходимость ряда  $\sum_{m, n} \left| \frac{Z_{mn}}{Z_m} \right|^2$ , составленного из квадратов модулей матричных коэффициентов системы (условие Коха). Рассматривая коэффициенты при  $m, n \rightarrow \infty$ , получим, что  $\left| \frac{Z_{mn}}{Z_m} \right|$  изменяется по закону  $\frac{1}{mn^3}$ . Следовательно, указанный ряд сходится. Аналогич-

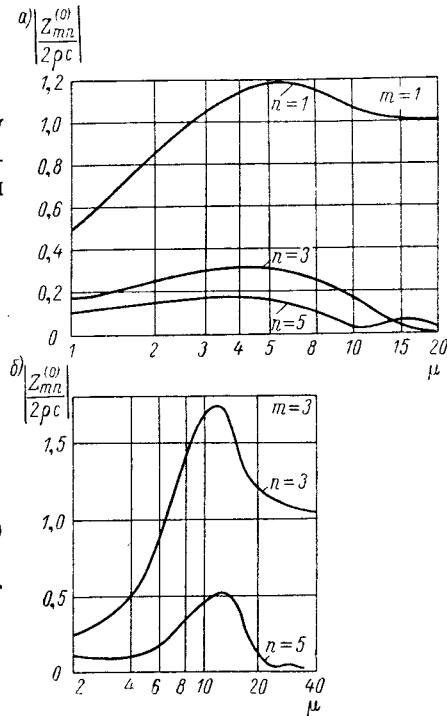


Рис. 110. Зависимость импедансов излучения и взаимодействия между колебаниями различных форм от волнового размера для ограниченной зажатой пластины: *a* — при  $m = 1$ ; *б* — при  $m = 3$ .

ным образом легко показать, что  $|a_n|$  изменяется как  $\frac{1}{n}$  при  $n \rightarrow \infty$ ,

и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ , составленный из квадратов модулей правых частей системы уравнений (37.14), также сходится. Отсюда следует, что система (37.14) может быть решена одним из указанных методов. Заметим, что условие регулярности системы уравнений

$$\sum_{n, m=1}^{\infty} \left| \frac{Z_{mn}}{Z_m} \right| < 1 \text{ в данном случае не выполняется.}$$

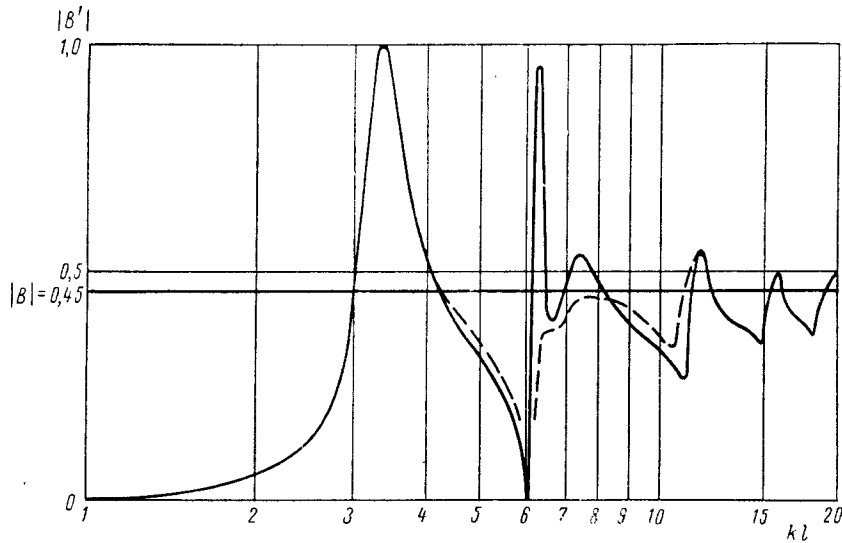


Рис. 111. Зависимость коэффициента прохождения звука через стальную пластину с абсолютно жесткими опорами от волнового размера пролета при  $kh = 0,5$ .

Наиболее целесообразно решать систему методом последовательных приближений. Действительно, нулевое приближение  $b_n^{(0)}$ , получающееся из системы (37.14), если пренебречь членами  $Z_{mn}$  при  $m \neq n$ , сразу дает главную часть решения

$$b_n^{(0)} = \frac{a_n}{Z_n + Z_{nn}}.$$

При этом мы учитываем лишь собственное сопротивление излучения пластины и пренебрегаем импедансами взаимодействия между формами колебаний. Дальнейшие приближения  $b_n^{(v)}$  определяются из рекуррентного соотношения

$$b_n^{(v)} = \frac{1}{Z_n} \left( a_n - \sum_{m=1}^{\infty} b_m^{(v-1)} Z_{mn} \right).$$

Последовательность приближений  $b_n^{(v)}$  по  $v$  должна быстро сходиться, поскольку основную часть импеданца излучения составляют  $Z_{nn}$ .

На рис. 111 и 112 приведены графики коэффициента прохождения звука, рассчитанные с помощью электронной вычислительной машины, при  $\rho c = 1,5 \cdot 10^5 \text{ г/(см}^2 \cdot \text{сек)}$ ;  $\rho_m = 7,8 \text{ г/см}^3$ ;  $kh = 0,2; 0,5$ . Рассчитывались нулевое, первое и второе приближения. В некоторых точках для проверки определялось и третье приближение. Зависимость коэффициента прохождения от волнового расстояния между опорами при  $kh = 0,5$  приведена на рис. 111. Прямая на уровне  $|B| \approx 0,45$  соответствует значению коэффициента прохождения звука через пластину без опор. Пунктирная кривая — нулевое приближение; первое приближение на графике не показано; сплошная кривая — второе приближение; третье приближение практически совпадает со вторым.

При приближении  $kl$  к одному из значений, определяемых формулой (37.18), импедансы  $Z_{mn}$  возрастают и коэффициент прохождения звука уменьшается. Такое явление может существовать лишь при выполнении условия  $2l > \lambda$ . При этом для  $\theta > 0$  должны выполняться неравенства  $-\frac{l}{\lambda} < r < 0$  или  $\frac{l}{\lambda} < r < \frac{2l}{\lambda}$ , где  $r$  — целое число.

Как видно из рис. 108, положительные  $r$  соответствуют пространственному резонансу для пролетов, находящихся слева от данного, а отрицательные — справа. Количество провалов в зависимости коэффициента прохождения звука от угла падения определяется как целая часть отношения  $\frac{2l}{\lambda}$ .

Особенности возникают также при приближении угловой частоты звука  $\omega$  к одной из угловых частот собственных колебаний пластины  $\omega_n$ . При этом механический импеданс пластины  $Z_n$  обра-

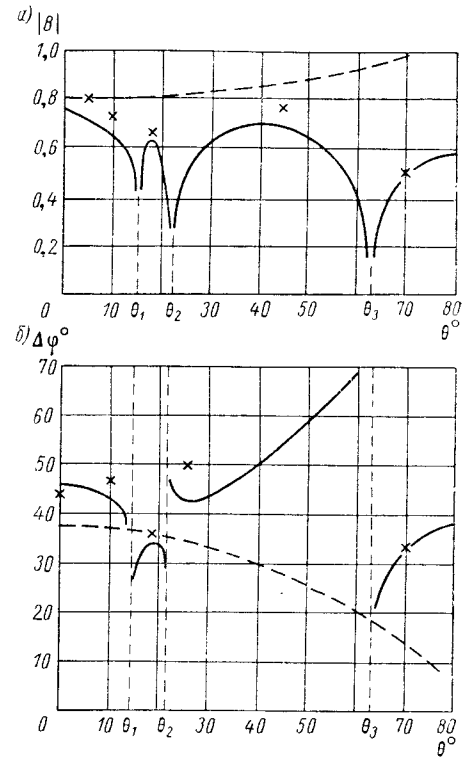


Рис. 112. Зависимость модуля и фазы коэффициента прохождения звука через пластину с опорами от угла падения звука при  $\mu = 10$ ;  $kh = 0,2$ .

— пластина с опорами; - - - пластина без опор.



щается в нуль, и может иметь место значительное увеличение коэффициента прохождения звука. Если  $\omega < \omega_1$ , т. е. если частота меньше самой низкой частоты собственных колебаний, импеданс  $Z_1$  (а также и все остальные импедансы  $Z_n$ ) резко увеличивается, и прохождение звука через пластину существенно уменьшается. Последний вывод противоречит широко распространенному мнению о том, что акустическая прозрачность конструкций на низких частотах больше, чем на высоких. Разумеется, подобное рассуждение справедливо лишь в тех случаях, когда сами опоры не принимают участия в колебаниях.

Из рис. 111 видно, что при  $\mu = 3,4$  коэффициент прохождения звука практически равен единице. Значение  $\mu = 3,4$  соответствует частоте первого резонанса пластины, значения  $\mu = 7,7$  и  $12,4$  — частотам третьего и пятого резонансов. Вторая форма колебаний в силу симметрии при  $\theta = 0$  не возбуждается. На частотах меньше частоты первого резонанса механические импедансы с уменьшением волнового размера  $kl$  увеличиваются, и коэффициент прохождения звука снижается. При  $\mu \rightarrow \infty$   $B'$  стремится к значению коэффициента прохождения через пластину без опор.

Зависимость модуля и фазы коэффициента прохождения звука от угла падения для  $\mu = 10$  и  $kh = 0,2$  (нулевое приближение) показана на рис. 112 (сплошная кривая). При значениях  $\theta$ , подчиняющихся условию (37.18), на рис. 112, а наблюдаются провалы, а на рис. 112, б — разрывы функции, причем с увеличением  $\mu$  ширина провалов уменьшается. Пунктирная кривая представляет собой такую же зависимость для пластины без опор, рассчитанную по формуле (32.18).

Из рис. 112, а видно, что закрепление пластины на опорах значительно уменьшает коэффициент прохождения звука.

Крестиками на рис. 112, а, б показано первое приближение.

Таким образом, подтверждается, что опоры могут сильно влиять на коэффициент прохождения звука, причем наибольшее влияние имеет место в области малых значений  $\mu$ , т. е. при низких частотах. При  $\mu > 20 \div 30$ , т. е. в случае, если длина пролета пластины составляет несколько длин волн, можно считать, что коэффициент прохождения через пластину с опорами мало отличается от коэффициента прохождения через бесконечную пластину без опор. Для пластин, обладающих высокой звукопрозрачностью (выше 0,8), опоры мало влияют на коэффициенты прохождения уже при  $l > (1,5 \div 2) \lambda$ .

### § 38. Прохождение звука через пластину, подкрепленную ребрами жесткости

**Постановка задачи.** Усложним задачу, решенную в § 37, и рассмотрим прохождение звука через пластину, подкрепленную ребрами жесткости, которые обладают конечными импедансами по отношению к поперечным и вращательным движе-

ниям. Для одиночного ребра жесткости такая задача рассмотрена в работе [33], а для периодической системы ребер — в работах [34], [70]. Изложение, приведенное ниже, основано на материалах работы [70] с исправлением некоторых неточностей. Дифракцию звука на ребрах жесткости учитывать не будем, чтобы излишне не усложнять задачу.

Расположение системы координат приведено на рис. 113. Будем полагать, что толщина ребер в направлении оси  $x$  мала по сравнению с длиной пролета и длинами волны в материале пластины. Это предположение дает возможность считать, что ребра подкрепляют пластину вдоль линий  $x = qa$  ( $q$  — целое число).

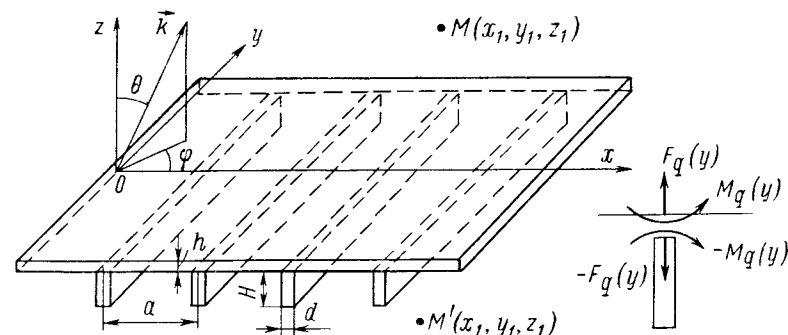


Рис. 113. Пластина с ребрами жесткости.

Отбросим мысленно ребра жесткости и заменим их действие силами реакции  $F_q(y)$  и моментами реакции  $M_q(y)$ . Таким образом, возникает новая задача: определить коэффициент прохождения через однородную пластину, на которую действует некоторая система сил и моментов. Силы реакции и моменты, действующие на ребро, связаны с колебательной скоростью пластины  $v(x, y)$  соотношениями

$$-F_q(y) = v_z(qa, y) Z_F; \quad -M_q(y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=qa} Z_M. \quad (38.1)$$

Здесь  $Z_F$  и  $Z_M$  — импедансы ребра по отношению к перемещениям в направлении оси  $Z$  и к вращательным движениям.

Полное звуковое давление в нижнем и верхнем полупространствах запишем соответственно в виде

$$p_1 = p_0 + p_{\text{отр}}^{(0)} + p_{\text{изл}}^{(1)}; \quad p_2 = p_{\text{пр}}^{(0)} + p_{\text{изл}}^{(2)}. \quad (38.2)$$

Здесь  $p_0 = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$  — падающая волна;  $p_{\text{отр}}^{(0)} = A(\theta) \times e^{i(k_x x + k_y y - k_z z)}$  — звуковое давление в волне, отраженной от однородной пластины;  $p_{\text{пр}}^{(0)} = B(\theta) p_0$  — звуковое давление в волне,

прошедшей через однородную пластину;  $p_{\text{изл}}^{(1), (2)}$  — звуковые давления, создаваемые в результате излучения звука силами и моментами:

$$p_{\text{изл}}^{(1), (2)} = p_F^{(1), (2)} + p_M^{(1), (2)} \quad (38.3)$$

**Излучение звука силами и моментами, распределенными по пластине.** Определим сначала звуковое поле в верхнем полупространстве, излучаемое сосредоточенной силой, действующей на пластину в точке  $(x = qa, y)$ . Воспользуемся для этого теоремой взаимности [см. (15.10)]. Поместим в точку наблюдения малый источник сферической волны с объемной скоростью  $Q$  и вычислим звуковое давление  $\tilde{p}$ , создаваемое в точке приложения силы  $F_q(y)$  (в § 15 это давление было обозначено через  $p_1$ ).

Представим сферическую волну в виде набора плоских волн. Для этого воспользуемся формулой (34.1a). Пусть для каждой из плоских волн с составляющими волнового вектора в направлениях осей  $x, y$ , равными  $\alpha$  и  $\beta$ , коэффициент прохождения звука определяется известным выражением  $B(\alpha, \beta)$ . Тогда звуковое давление  $\tilde{p}$  в точке  $(x, y, z)$  в нижнем полупространстве можно записать в следующей форме:

$$\tilde{p} = \frac{\omega \rho Q}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha, \beta) e^{i[\alpha(x-x_1) + \beta(y-y_1) - \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}(z-z_1)]} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}} d\alpha d\beta. \quad (38.4)$$

Формулу (15.10) представим в виде

$$p_F^{(2)}(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{i\omega\rho Q} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{\partial \tilde{p}(x, y, z, x_1, y_1, z_1)}{\partial z} \right|_{z=0} f(x, y) dx dy. \quad (38.5)$$

Амплитуда силы на различных ребрах жесткости должна быть одинаковой, а фаза вследствие периодичности системы ребер полностью определяется фазой падающей волны. Поэтому можно записать

$$\left. \begin{aligned} F_q(y) &= F e^{i(k_x qa + k_y y)}; & \mathcal{M}_q(y) &= \mathcal{M} e^{i(k_x qa + k_y y)}; \\ f(x, y) &= F e^{i(k_x x + k_y y)} \delta(x - qa). \end{aligned} \right\} \quad (38.6)$$

Подставив формулы (38.4) и (38.6) в выражение (38.5), найдем после интегрирования по координате  $x$

$$p_F^{(2)} = \frac{F}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha, \beta) \times \\ \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i[\alpha(qa-x_1) + \beta(y-y_1) + \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2} z_1 + k_x qa + k_y y]} d\alpha d\beta dy.$$

Суммирование и интегрирование по  $y$  можно выполнить, воспользовавшись следующими формулами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_y + \beta)y} dy = 2\pi \delta(k_y + \beta);$$

$$\sum_{a=-\infty}^{\infty} e^{iqa(k_x + \alpha)} = 2\pi \delta[a(k_x + \alpha) + 2\pi n].$$

Тогда

$$p_F^{(2)} = \frac{F}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha, \beta) e^{i(-\alpha x_1 - \beta y_1 + \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2} z_1)} \times \\ \times \delta(k_y + \beta) \delta[a(k_x + \alpha) + 2\pi n] d\alpha d\beta.$$

Интегрирование легко осуществляется по формуле (11.6). При этом для интегрирования по  $\alpha$  следует предварительно выполнить замену  $\alpha a = \alpha'$ . В результате находим

$$p_F^{(2)} = \frac{F}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B(\theta_n) e^{i\left[\left(k_x + \frac{2\pi n}{a}\right)x_1 + k_y y_1 + k z_1 \cos \theta_n\right]} \quad (38.7)$$

Здесь  $\theta_n$  — угол, определяемый соотношением

$$\cos \theta_n = \sqrt{1 - \left(\frac{k_x}{k} + \frac{2\pi n}{ka}\right)^2 - \frac{k_y^2}{k^2}} = \\ = \sqrt{1 - \left(\sin \theta \cos \varphi + \frac{2\pi n}{ka}\right)^2 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}. \quad (38.8)$$

Найдем звуковое давление, излучаемое при воздействии момента  $\mathcal{M}$ . Для этого представим момент в виде пары сил, действующих в точках  $x = qa \pm \varepsilon$ , и затем устремим  $\varepsilon$  к нулю. Таким образом, плотность силы можно записать в виде

$$f(x, y) = F e^{i(k_x x + k_y y)} \{\delta[x - (qa + \varepsilon)] - \delta[x - (qa - \varepsilon)]\}.$$

Тогда

$$p_M^{(2)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [p_F^{(2)}(x_1 - \varepsilon) - p_F^{(2)}(x_1 + \varepsilon)] = -2\varepsilon \frac{\partial p_F^{(2)}}{\partial x_1}.$$

Учитывая, что  $2\varepsilon F = \mathcal{M}$ , найдем

$$p_M^{(2)} = -\frac{i\mathcal{M}}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B(\theta_n) \left(k_x + \frac{2\pi n}{a}\right) e^{i\left[\left(k_x + \frac{2\pi n}{a}\right)x_1 + k_y y_1 + k z_1 \cos \theta_n\right]}$$

Вычисление коэффициента прохождения звука. В соответствии с (38.2), (38.3) получим звуковое давление в прошедшей волне

$$p_2 = B(\theta) e^{i(k_x x_1 + k_y y_1 + k_z z_1)} + \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B(\theta_n) \left[ F - i\mathcal{M} \left( k_x + \frac{2\pi n}{a} \right) \right] \times e^{i \left[ \left( k_x + \frac{2\pi n}{a} \right) x_1 + k_y y_1 + k_z z_1 \cos \theta_n \right]}. \quad (38.9)$$

Выражение (38.9) определяет прошедшую звуковую волну как суперпозицию плоских волн, распространяющихся под различными углами к оси  $z$ . Эти волны можно назвать пространственными спектрами. Член с номером  $n = 0$  (нулевой спектр) определяет волну, распространяющуюся в направлении падения. Спектры, для которых  $\cos \theta_n$  являются вещественными величинами, представляют собой однородные плоские волны; спектры, соответствующие мнимым значениям  $\cos \theta_n$ , дают неоднородные волны, сосредоточенные вблизи пластины. Если длина пролета меньше длины звуковой волны, то при нормальном падении ( $\theta = \varphi = 0$ ) все члены, кроме слагаемого с номером  $n = 0$ , дают неоднородные волны. Если же длина пролета меньше половины длины звуковой волны, то это утверждение справедливо при любом угле падения.

Вычислим теперь звуковое давление в нижнем полупространстве. Для этого поместим вспомогательный источник в точку  $M'$ . В результате преобразований получим

$$p_1 = e^{i(k_x x_1 + k_y y_1 + k_z z_1)} + A(\theta) e^{i(k_x x_1 + k_y y_1 - k_z z_1)} - \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ F - i\mathcal{M} \left( k_x + \frac{2\pi n}{a} \right) \right] [1 - A(\theta_n)] \times e^{i \left[ \left( k_x + \frac{2\pi n}{a} \right) x_1 + k_y y_1 - k_z z_1 \cos \theta_n \right]}. \quad (38.10)$$

Неизвестные величины  $F$  и  $\mathcal{M}$  следует определить из граничных условий (38.1). Колебательная скорость  $v_z$  и производная  $\partial v_z / \partial x_1$  в местах крепления ребер жесткости определяются выражениями

$$v_z \Big|_{\substack{z_1=0 \\ x_1=qa}} = \frac{1}{i\omega\rho} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial z_1} \Big|_{\substack{z_1=0 \\ x_1=qa}}; \quad \frac{\partial v_z}{\partial x_1} \Big|_{\substack{z_1=0 \\ x_1=qa}} = \frac{1}{i\omega\rho} \cdot \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_1 \partial z_1} \Big|_{\substack{z_1=0 \\ x_1=qa}}.$$

Воспользовавшись формулами (38.1) и (38.10), получаем систему уравнений

$$F \left( C_{1F} + \frac{2\rho ca}{Z_F} \right) - k\mathcal{M} C_{1M} = -2a [1 - A(\theta)] \cos \theta; \\ FC_{2F} + k\mathcal{M} \left( C_{2M} + \frac{2\rho ca}{k^2 Z_M} \right) = -i \cdot 2a \cos \theta \sin \theta \cos \varphi [1 - A(\theta)].$$

Здесь обозначено

$$\left. \begin{aligned} C_{1F} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [1 - A(\theta_n)] \cos \theta_n; \\ C_{2F} = C_{1M} &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} [1 - A(\theta_n)] \left( \sin \theta \cos \varphi + \frac{2\pi n}{ka} \right) \cos \theta_n; \\ C_{2M} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [1 - A(\theta_n)] \left( \sin \theta \cos \varphi + \frac{2\pi n}{ka} \right)^2 \cos \theta_n. \end{aligned} \right\} \quad (38.11)$$

Решив систему уравнений, найдем по формуле (38.9) прошедшую волну. Для того чтобы вычислить коэффициент прохождения, воспользуемся определениями, принятыми в § 35. Будем понимать под коэффициентом прохождения звука отношение амплитуды звукового давления в нулевом спектре прошедшей волны к амплитуде падающей волны. Аналогичные определения были использованы в § 17. Из выражения (38.9) находим

$$B'(\theta) = B(\theta) \left[ 1 + \frac{1}{2a} (F - i\mathcal{M} \sin \theta \cos \varphi) \right]. \quad (38.12)$$

После подстановки значений  $F$  и  $\mathcal{M}$  получаем окончательно

$$B'(\theta) = B(\theta) \times \left\{ 1 - \frac{[1 - A(\theta_n)] \cos \theta \left[ C_{2M} + \frac{2\rho ca}{k^2 Z_M} + \left( C_{1F} + \frac{2\rho ca}{Z_F} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right]}{\left( C_{1F} + \frac{2\rho ca}{Z_F} \right) \left( C_{2M} + \frac{2\rho ca}{k^2 Z_M} \right) + C_{1M}^2} \right\}. \quad (38.13)$$

Формула (38.13) приобретает более простой вид при нормальном падении звука ( $\theta = 0$ ). Из выражений (38.8), (38.11) следует, что при  $\theta = 0$  произведение  $[1 - A(\theta_n)] \cos \theta_n$  является четной функцией  $n$ . Члены, которые суммируются в формуле для  $C_{1M}$ , являются нечетными функциями  $n$ . Поэтому  $C_{1M} = 0$ . В результате получаем

$$B'(0) = B(0) \left[ 1 - \frac{1 - A(0)}{C_{1F} + \frac{2\rho ca}{Z_F}} \right]. \quad (38.14)$$

При выводе формул (38.13), (38.14) не накладывалось никаких ограничений на параметры пластины и ее волновую толщину. Поэтому полученные выражения справедливы для расчета коэффициента прохождения звука через любые пластины, подкрепленные ребрами жесткости, в том числе и через слоистые пластины с переменными по толщине параметрами.

**Механические импедансы колебаний ребер жесткости.** Источником погрешностей, возникающих при использовании формул (38.13),

(38.14), является главным образом применение приближенных выражений для импеданцев ребер жесткости. При выводе формулы (38.13) мы полагали, что ребра воздействуют на пластину вдоль линии  $x = qa$  и что толщина ребер в направлении оси  $x$  мала по сравнению с длинами волн всех возможных масштабов (длины волны в среде, продольной и поперечной волн в материале пластины, изгибных и продольных волн в пластине). В этом приближении ребро можно рассматривать как пластину, совершающую колебания изгиба со смещениями, параллельными пластине, и продольные

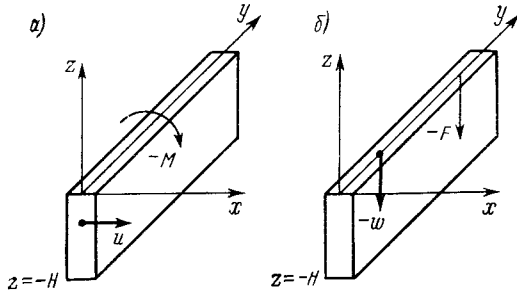


Рис. 114. К определению механических импеданцев ребра: а — для изгибных колебаний; б — для продольных колебаний.

$= \sqrt[4]{\frac{\omega^2 M_p}{g_p}}$  — волновое число колебаний изгиба в ребре;  $M_p = \rho_p d$  — масса на единицу площади ребра;  $g_p = \frac{E_p d^3}{12(1-\sigma_p^2)}$  — цилиндрическая жесткость ребра;  $\sigma_p$ ,  $\rho_p$ ,  $E_p$  — соответственно коэффициент Пуассона, плотность, модуль упругости материала ребра.

Поскольку зависимость приложенного момента от координаты задана как  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 e^{iky}$ , то смещение следует искать в виде

$$u = u_0 e^{iky} f(z).$$

Подставляя это выражение в уравнение (38.15), находим уравнение для  $f(z)$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z^4} - 2k_y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + (k_y^4 - k_1^4) f = 0.$$

Решив его, получим

$$u = u_0 e^{iky} (A_1 \cos k_1' z + A_2 \sin k_1' z + A_3 \operatorname{ch} k_1'' z + A_4 \operatorname{sh} k_1'' z).$$

Здесь обозначено  $k_1' = \sqrt{k_1^2 - k_y^2}$ ;  $k_1'' = \sqrt{k_1^2 + k_y^2}$ ;  $A_1 - A_4$  — неизвестные постоянные. Для определения неизвестных коэффициентов запишем четыре граничных условия. На свободном краю  $z =$

$= -H$  должен быть равен нулю изгибающий момент и перерезывающая сила; на краю  $z = 0$  должно быть равно нулю смещение и задан изгибающий момент. Обратившись к соотношениям (25.9), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + (2 - \sigma_p) \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y^2} &= 0; & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sigma_p \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 & \text{при } z = -H; \\ u &= 0; & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sigma_p \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\mathcal{M}}{g_p} & \text{при } z = 0. \end{aligned} \right\} (38.16)$$

Импеданц  $Z_M$  найдем в виде отношения

$$Z_M = \frac{\mathcal{M}}{-i\omega \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}}.$$

Тогда

$$Z_M = \frac{\mathcal{M}_0}{i\omega (k_1' A_2 + k_1'' A_4) u_0}.$$

После решения системы (38.16) найдем

$$Z_M = \frac{i2g_p k_1^2}{\omega} \cdot \frac{k_1' [k_1^2 + k_y^2 (1 - \sigma_p)]^2 \cos k_1' H \operatorname{sh} k_1'' H - k_1'' [k_1^2 + k_y^2 (1 - \sigma_p)]^2 \sin k_1' H \operatorname{ch} k_1'' H}{\sqrt[4]{k_1^4 - k_y^4} [k_1^4 + k_y^4 (1 - \sigma_p)^2] \operatorname{ch} k_1' H \operatorname{sh} k_1'' H + \sqrt[4]{k_1^4 - k_y^4} \times [k_1^4 - k_y^4 (1 - \sigma_p)^2] + k_y^2 [k_1^4 (1 - 2\sigma_p) + k_y^4 (1 - \sigma_p)^2] \times \sin k_1' H \operatorname{sh} k_1'' H} (38.17)$$

Более простое выражение получается в том случае, если ребро возбуждается синфазно вдоль оси  $y$ , т. е. при падении звуковой волны в плоскости  $xOz$ . Тогда  $\varphi = 0$  и  $k_y = 0$ ,  $k_1' = k_1'' = k_1$ . В результате находим

$$Z_M = -i\omega \rho_p d H^3 \frac{\sin k_1 H \operatorname{ch} k_1 H - \cos k_1 H \operatorname{sh} k_1 H}{(k_1 H)^3 (1 + \cos k_1 H \operatorname{ch} k_1 H)}. (38.18)$$

Если  $k_1 H \ll 1$ , то ребро колеблется как единое целое вокруг точки  $z = 0$ . Соответствующий импеданц получим из (38.18) после раскрытия неопределенности:

$$Z_M = -i\omega \rho_p \frac{d H^3}{3}. (38.19)$$

Величина  $\frac{H^3}{2}$  определяет момент инерции сечения ребра относительно линии  $z = 0$ .

Вычислим теперь  $Z_F$ . Приложенная к ребру сила возбуждает систему продольных волн. Запишем механическое напряжение

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(0)} e^{ik_y y} [B_1 e^{ik_2' z} + B_2 e^{-ik_2' z}].$$

Здесь  $k_2' = \sqrt{k_2^2 - k_y^2}$ ;  $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$  — волновое число продольных колебаний в пластине;  $c_2 = \sqrt{\frac{E_p}{(1 - \sigma_p^2) \rho_p}}$ .

На краях выполняются условия  $\sigma_{zz}|_{z=-H} = 0$ ;  $\sigma_{zz}|_{z=0} = F$ , из которых определяются постоянные  $B_1$  и  $B_2$ . В результате находим:

$$Z_F = -i\omega M_p \frac{\operatorname{tg} k_2' H}{k_2' H}, \quad (38.20)$$

где  $M_p = \rho_p H_p d$  — погонная масса ребра. Если высота ребра мала по сравнению с длиной продольной волны ( $k_2' H \ll 1$ ), то ребро колеблется вдоль оси  $z$  как единое целое. Тогда

$$Z_F \approx -i\omega M_p. \quad (38.21)$$

**Расчет коэффициента прохождения звука через тонкую пластину с ребрами жесткости.** Рассмотрим тонкую пластину. Коэффициент прохождения звука через пластину определяется второй из формул (32.17). При нормальном падении волны ( $\theta = 0$ ) для вычисления коэффициента прохождения звука через пластину с опорами можно воспользоваться формулой (38.14), которая для тонкой пластины приобретает вид

$$B'(0) = \frac{e^{-ikh}}{1 - \frac{i\omega M}{2\rho c}} \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{i\omega M}{2\rho c}\right) \left(C_{1F} + \frac{2\rho c a}{Z_F}\right)} \right], \quad (38.22)$$

где

$$C_{1F} = \frac{1}{1 - \frac{i\omega M}{2\rho c}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi n}{ka}\right)^2}}{1 - \frac{i\omega M}{2\rho c} \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi n}{ka}\right)^2} \left[1 - \left(\frac{c_n}{c} \cdot \frac{2\pi n}{ka}\right)^4\right]}. \quad (38.23)$$

При  $n > \frac{ka}{2\pi}$  в формуле (38.23) следует выполнить замену

$$\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi n}{ka}\right)^2} = i \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{ka}\right)^2 - 1}.$$

В работе [70] приведены результаты расчета коэффициента прохождения звука через пластину с опорами при различных отношениях  $\frac{M_p}{aM}$ . Импеданс  $Z_F$  определялся по формуле (38.21). Зависимость

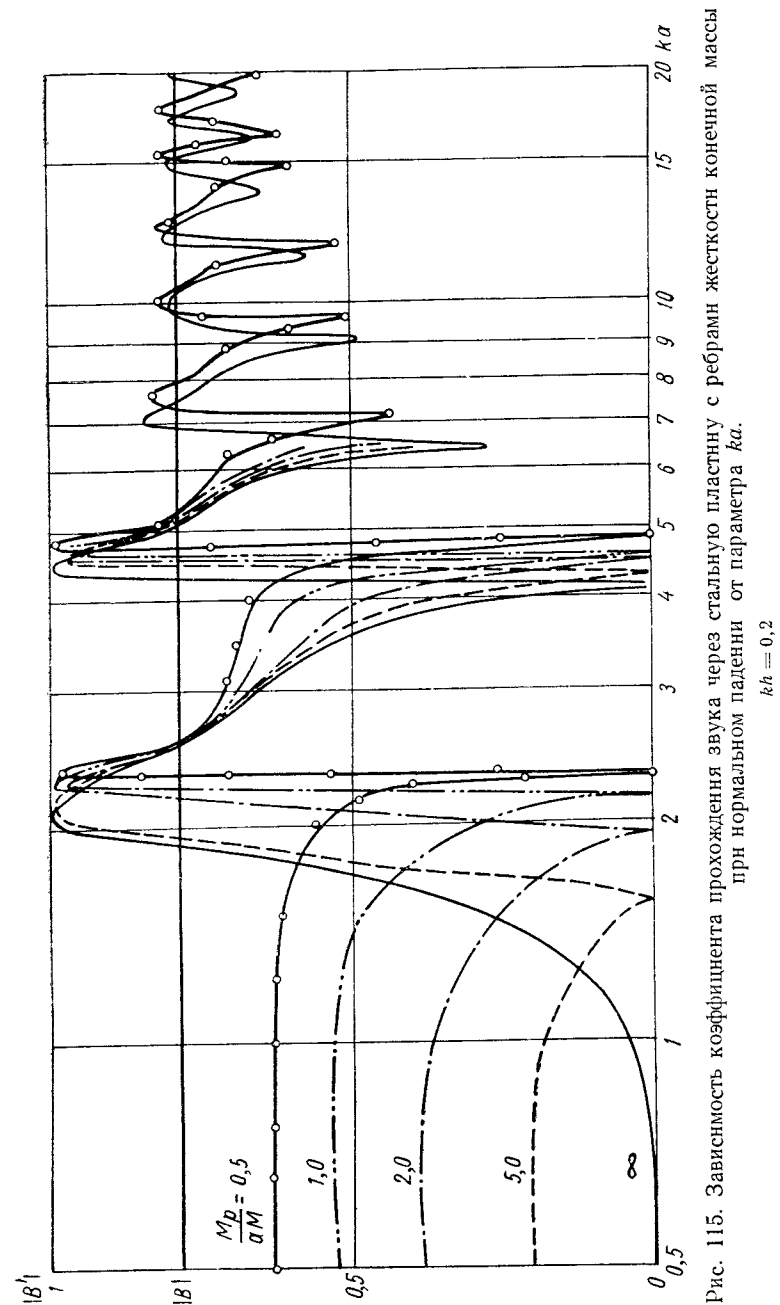


Рис. 115. Зависимость коэффициента прохождения звука через стальную пластину с ребрами жесткости конечной массы при нормальном падении от параметра  $ka$ .

$kh = 0,2$

коэффициента прохождения от параметра  $ka$  (рис. 115) имеет резонансные максимумы и минимумы. Причина появления этих особенностей обсуждалась в § 37.

При увеличении волновых расстояний между ребрами жесткости ( $ka > 5$ ) различие между кривыми уменьшается, и они стремятся к прямой  $|B| \approx 0,78$ , соответствующей значению коэффициента прохождения звука через пластину без опор.

При малых  $ka$  различие между кривыми весьма существенно. Легко найти асимптотическое представление величины  $B'(0)$  при малых значениях  $ka$ . Из формулы (38.23) следует, что бесконечная сумма с уменьшением  $ka$  стремится к нулю. При выполнении неравенства  $\left(\frac{c}{c_n} \cdot \frac{ka}{2\pi}\right)^4 \ll 1$  можно принять

$$C_{1F} \approx \frac{1}{1 - \frac{i\omega M}{2\rho c}}.$$

Тогда формула (38.22) приобретает вид

$$B'(0) = \frac{e^{-ikh}}{1 - \frac{i\omega}{2\rho c} \left(M + \frac{M_p}{a}\right)}. \quad (38.24)$$

Величина  $M + \frac{M_p}{a}$  является суммарной массой пластины и ребер жесткости, приходящейся на единицу площади пластины. Кривые на рис. 115 при уменьшении  $ka$  асимптотически стремятся к предельным значениям, определяемым выражением (38.24). Для стальной пластины в воде критерием, при выполнении которого можно пользоваться формулой (38.24), служит неравенство  $ka < 6\sqrt{kh}$ .

### § 39. О связи излучения звука пластинами с их звукопрозрачностью

**Общее решение для произвольной пластины, погруженной в жидкость.** Излучение звука тонкими пластинами под действием внешних сил рассмотрено в работах [18], [51]

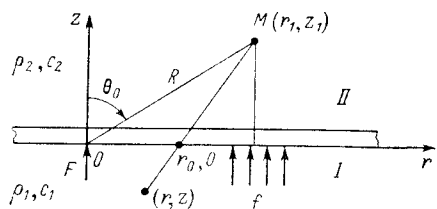


Рис. 116. К излучению звука безграничной пластиной.

[68], [86], [140]. Наиболее общее решение, справедливое для пластины любой толщины, может быть получено на основании теоремы взаимности § 15.

Пусть к пластине приложена некоторая система сил плотностью  $f$  и необходимо определить звуковое поле в точке  $M$  рис. 116. Бу-

дем предполагать, что пластина с двух сторон соприкасается с одинаковой жидкостью. Поместим в точку  $M$  источник, создающий в пространстве сферическую волну

$$p_0 = -\frac{i\omega\rho Q}{4\pi R} e^{ikR}. \quad (39.1)$$

Разложив эту волну по плоским волнам (34.5), получим для нижнего полупространства ( $z < 0$ )

$$p_1(r, z, r_1, z_1) = \frac{\omega\rho Qk}{8\pi} \int_{\Gamma_1} H_0^{(1)}(k|r_1 - r|\sin\theta) B(\theta) e^{ik(z_1 - z)\cos\theta} \sin\theta d\theta. \quad (39.2)$$

Звуковое давление  $p_1$  является вспомогательным решением, входящим в подынтегральное выражение (15.10). Таким образом, поле излучения определится интегралом

$$p_{\text{изл}}(r_1, z_1) = -\frac{1}{i\omega\rho Q} \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{\partial p_1(r, z, r_1, z_1)}{\partial z} \Big|_{z=0} f(r, \varphi) r dr d\varphi. \quad (39.3)$$

Пусть на пластину в начале координат ( $r = 0$ ) действует сосредоточенная сила  $F$ . Плотность силы определится функцией  $f(r) = F\delta(\varphi)\frac{\delta(r)}{r}$ . Тогда после интегрирования по площади получаем

$$p_{\text{изл}}(r_1, z_1) = \frac{k^2 F}{8\pi} \int_{\Gamma_1} H_0^{(1)}(kr_1 \sin\theta) B(\theta) e^{ikz_1 \cos\theta} \cos\theta \sin\theta d\theta. \quad (39.4)$$

Последнее выражение связывает звуковое давление в волне, излучаемой колеблющейся пластиной, и коэффициент прохождения звука. Эта формула справедлива для пластины любой толщины; в частности, она может быть использована и для расчета излучения звука слоистыми пластинами и пластинами с параметрами, изменяющимися по толщине.

Рассмотрим наиболее важный частный случай, когда точка наблюдения находится на большом волновом расстоянии от пластины ( $kR \gg 1$ ,  $kz \gg 1$ ). Заменяв функцию Ханкеля ее асимптотическим приближением, получим интеграл, который может быть вычислен методом перевала. Так же как и в § 34, при деформации контура  $\Gamma_1$  в перевальный путь  $\Gamma_0$  могут быть пересечены полюса функции  $B(\theta)$ . Вычеты в этих полюсах дадут неоднородные (поверхностные) волны, сосредоточенные вблизи пластины. При удалении от пластины амплитуды волн быстро убывают. Поэтому при  $kz \gg 1$  можно считать, что поле полностью определяется пространственной волной, вычисленной методом перевала. После вычисления находим

$$p_{\text{изл}}(R, \theta_0) \approx -\frac{ikF \cos\theta_0 B(\theta_0) e^{ikR}}{4\pi R}. \quad (39.5)$$

Поле излучения представляет собой сферическую волну, амплитуда которой пропорциональна коэффициенту прохождения звука через пластину. Поэтому увеличение толщины пластины в одинаковой степени снижает и уровень звукового давления, создаваемого пластиной, и ее звукопрозрачность [109].

Из формулы (39.5) следует, что пространственное распределение в излученном звуковом поле отличается от угловой зависимости коэффициента прохождения звука лишь множителем  $\cos \theta_0$ .

Для тонкой пластины с учетом колебаний изгиба в соответствии с (32.17) можно записать

$$p_{\text{изл}}(R, \theta_0) = -\frac{ikFe^{ik(R-h)}}{4\pi R} \cdot \frac{2\rho c \cos \theta_0}{Z \cos \theta_0 + 2\rho c}. \quad (39.6)$$

Если  $|Z| \gg \rho c$ , то  $p_{\text{изл}}$  слабо зависит от угла  $\theta_0$  и пластина излучает звук как ненаправленный источник (монополь). Если же выполняется обратное неравенство  $|Z| \ll \rho c$ , то  $p_{\text{изл}}$  пропорционально  $\cos \theta_0$  и излучение носит дипольный характер.

**Случай, когда пластина разделяет две различные среды.** Пусть пластина разделяет две среды с параметрами  $\rho_1, c_1$  и  $\rho_2, c_2$  (рис. 116). Поле вспомогательного источника, помещенного в точку  $M(r_1, z_1)$ , можно записать в виде набора плоских волн (34.1а):

$$p_0 = -\frac{i\omega\rho_2 Q}{4\pi} \cdot \frac{i}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i[\alpha(x-x_1) + \beta(y-y_1) \pm \gamma(z-z_1)]} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma}, \quad (39.7)$$

где  $\alpha = k_2 \sin \theta \cos \varphi$ ;  $\beta = k_2 \sin \theta \sin \varphi$ ;  $\gamma = k_2 \cos \theta$ . Угол преломления каждой из плоских волн в среде  $I$  определится соотношением  $\sin \theta_1 = \frac{c_1}{c_2} \sin \theta$ . Составляющие волнового вектора в этой среде будут  $\alpha_1 = k_1 \sin \theta_1 \cos \varphi$ ;  $\beta_1 = k_1 \sin \theta_1 \sin \varphi$ ;  $\gamma_1 = k_1 \cos \theta_1$ . С учетом закона преломления получаем  $\alpha_1 = \alpha$ ;  $\beta_1 = \beta$ ;  $\gamma_1 = k_1 \cos \theta_1$ . Набег фазы плоской волны в среде  $II$  определится как  $\alpha(x_0 - x_1) + \beta(y_0 - y_1) + \gamma z_1$ , в среде  $I$  — в виде  $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) - \gamma_1 z$ . После интегрирования по всем плоским волнам и перехода к переменной  $\theta$  так же, как и при выводе выражения (34.5), получим

$$p_1 = \frac{\omega\rho_2 k_2 Q}{8\pi} \int_{\Gamma_1} H_0^{(1)}(k_2 |r_2 - r| \sin \theta) B(\theta) e^{i[k_2 z_1 \cos \theta - k_1 z \cos \theta_1]} \sin \theta d\theta.$$

Используя далее теорему взаимности (39.3), находим звуковое давление, излученное в результате воздействия сосредоточенной силы  $F$ :

$$p_{\text{изл}}(r_1, z_1) = \frac{\rho_2 k_2 k_1 F}{\rho_1 8\pi} \int_{\Gamma_1} H_0^{(1)}(k_2 r \sin \theta) B(\theta) e^{ik_2 z_1 \cos \theta} \cos \theta_1 \sin \theta d\theta.$$

Вычисление методом перевала приводит к результату

$$p_{\text{изл}}(R, \theta) \approx -i \frac{Z_0^{(2)}}{Z_0^{(1)}} \cdot \frac{k_2 F \cos \theta B(\theta_0)}{4\pi R} e^{ik_2 R}, \quad (39.8)$$

где

$$Z_0^{(1)} = \frac{\rho_1 c_1}{\cos \theta_1}; \quad Z_0^{(2)} = \frac{\rho_2 c_2}{\cos \theta_0}.$$

Рассмотрим тонкую пластину, коэффициент прохождения через которую может быть вычислен по формуле (32.22). Поскольку в данном случае звук переходит из среды  $II$  в среду  $I$ , то в числителе формулы (32.22) следует заменить  $Z_0^{(2)}$  на  $Z_0^{(1)}$ . Если пластина лежит на границе жидкости и вакуума, то  $\rho_1 c_1 = 0$ , и мы находим выражение

$$p_{\text{изл}}(R, \theta) = -\frac{ik_2 F e^{ik_2 R}}{4\pi R} \times \frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_0}{Z \cos \theta_0 + \rho_2 c_2}, \quad (39.9)$$

совпадающее с формулой, полученной в работе [18]. По-прежнему при изменении отношения  $\left| \frac{Z}{\rho c} \right|$  характер излучения меняется от ненаправленного (при больших  $\left| \frac{Z}{\rho c} \right|$ ) к дипольному (при малых  $\left| \frac{Z}{\rho c} \right|$ ).

Вычисление мощности излучения тонкой колеблющейся пластины и изучение распределения ее между пространственной и неоднородной волнами выполнено в работе [18].

**Случай ограниченной неоднородной пластины.** Рассмотрим теперь произвольную ограниченную пластину площадью  $S$ , расположенную в жестком экране (рис. 117). Пластину может быть подкреплена ребрами жесткости. Запишем сначала выражение для коэффициента прохождения звука через пластину, определив его как отношение  $B = \frac{p_D}{p_D^{(0)}}$ , где  $p_D$  — звуковое давление в точке  $D$ , создаваемое источником  $Q$  при наличии пластины;  $p_D^{(0)}$  — та же величина при отсутствии пластины. Будем предполагать, что  $kR, kR' \gg 1$ ;  $R_0, R_0' \gg L$ , где  $L$  — максимальный линейный размер пластины.

Пусть плоская волна с амплитудой  $p_0$ , падающая на пластину из нижнего полупространства под углом  $\theta_0$ , заставляет пластину колебаться с нормальной скоростью  $v$  ( $\vec{r}$ ). С учетом ограничений, наложенных на размеры области, сферическую волну, излучаемую источ-

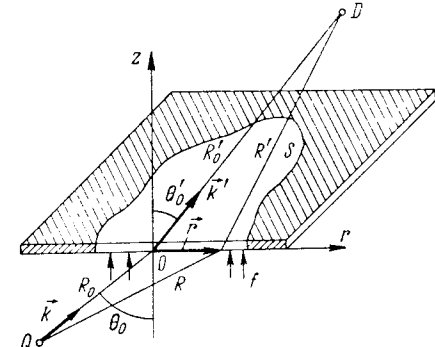


Рис. 117. К излучению звука ограниченной неоднородной пластиной.

ником  $Q$ , в пределах пластины приближенно можно считать плоской. Тогда скорость пластины, создаваемая источником  $Q$ , будет равна

$$v_{\text{пл}}(\vec{r}) = -\frac{i\omega\rho Qv(\vec{r})}{\rho_0 \cdot 4\pi R_0} e^{ikR_0}. \quad (39.10)$$

Звуковое давление в верхнем полупространстве определится по формуле Гюйгенса:

$$p_D = -\frac{i\omega\rho}{2\pi} \int_S v_{\text{пл}}(\vec{r}) \frac{e^{ikR'}}{R'} dS \approx -\frac{\omega^2 \rho^2 Q e^{ik(R_0+R'_0)}}{\rho_0 \cdot 8\pi^2 R_0 R'_0} \int_S v(\vec{r}) e^{-i\vec{k}'\vec{r}} dS. \quad (39.11)$$

При записи последнего выражения было учтено, что отрезок  $R'$  почти параллелен отрезку  $R'_0$ . Поэтому  $R' \approx R'_0 - \vec{k}' \cdot \vec{r}$ .

Для вычисления  $p_D^{(0)}$  положим  $kL \gg 1$ . Заметим, что это условие не является принципиальным и не ограничивает общности результатов, поскольку пластина может быть разбита ребрами жесткости на сколь угодно малые участки. Нормальная составляющая колебательной скорости в отверстии будет равна

$$v^{(0)}(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{i\omega\rho Q}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \right) \approx -\frac{ikQ \cos \theta_0}{4\pi R_0} e^{ikR}.$$

Звуковое давление  $p_D^{(0)}$  вычислим по формуле Гюйгенса:

$$p_D^{(0)} = -\frac{i\omega\rho}{2\pi} \int_S v^{(0)}(\vec{r}) \frac{e^{ikR'}}{R'} dS \approx -\frac{k\omega\rho Q \cos \theta}{8\pi^2 R_0 R'_0} e^{ik(R_0+R'_0)} \int_S e^{i(\vec{k}r - \vec{k}'\vec{r})} dS. \quad (39.12)$$

В соответствии с определением коэффициента прохождения через неоднородную пластину (см. § 35) следует в прошедшей волне рассматривать направление, соответствующее направлению падающей волны, т. е.  $\vec{k} = \vec{k}'$ . Тогда интеграл равен  $S$ . Находя отношение звуковых давлений (39.11) и (39.12), получаем выражение, совпадающее с формулой (35.5):

$$B' = \frac{p_D}{p_D^{(0)}} = \frac{\rho c}{S \rho_0 \cos \theta_0} \int_S v(\vec{r}) e^{-i\vec{k}r} dS. \quad (39.13)$$

Запишем теперь выражение для звукового давления, создаваемого при излучении звука пластиной под действием силы с распределением  $f$ . Воспользуемся опять теоремой взаимности (15.10). Для этого поместим в точку  $D$  сферический источник. Производная

по нормали от вспомогательного решения  $p_1$ , входящего в формулу (15.10), определится как  $\left. \frac{\partial p_1}{\partial n} \right|_{z=0} = -i\omega\rho v_{\text{пл}}(\vec{r})$ . Поэтому

$$\begin{aligned} p_{\text{изл}} &= -\frac{1}{i\omega\rho Q} \int_S (-i\omega\rho) v_{\text{пл}}(\vec{r}) f(\vec{r}) dS = \\ &= -\frac{i\omega\rho e^{ikR_0}}{\rho_0 \cdot 4\pi R_0} \int_S v(\vec{r}) f(\vec{r}) dS. \end{aligned} \quad (39.14)$$

Сравнение выражений (39.13) и (39.14) показывает, что  $B'$  и  $p_{\text{изл}}$  определяются через одну и ту же величину  $v(\vec{r})$ . Остальные величины, входящие в эти формулы, уже не зависят от параметров пластин. Это указывает на глубокую связь между задачами излучения и дифракции звука на упругих пластинах.

Рассмотрим частный случай: сила равномерно распределена по поверхности пластины. Тогда  $f(z) = \text{const}$  и

$$p_{\text{изл}} = -\frac{i\omega\rho f S e^{ikR_0}}{\rho_0 \cdot 4\pi R_0} v_{\text{ср}}; \quad v_{\text{ср}} = \frac{1}{S} \int_S v(\vec{r}) dS. \quad (39.15)$$

С другой стороны, при нормальном падении звука из (39.13) получаем  $B' = \rho c v_{\text{ср}} / \rho_0$ . Подставив это значение в (39.15), находим связь между  $B'$  и  $p_{\text{изл}}$ :

$$p_{\text{изл}} = -\frac{ikF e^{ikR_0}}{4\pi R_0} B',$$

где  $F = fS$  — сила, действующая на пластину. Последнее выражение совпадает с (39.5) при  $\theta_0 = 0$ . Это показывает, что прямая пропорциональность между  $B'$  и  $p_{\text{изл}}$  при равномерной нагрузке на пластину сохраняется и для произвольной ограниченной неоднородной пластины.

Для случайной нагрузки с функцией корреляции  $K_f = \bar{f}^2 \sigma \delta |\vec{r} - \vec{r}'|$  (здесь  $\bar{f}^2$  — средний квадрат плотности сил, действующих на пластину;  $\sigma$  — площадь корреляции) в работе [109] получен следующий результат:

$$\bar{p}^2 \geq \left( \frac{k}{4\pi R_0} \right)^2 \bar{f}^2 \sigma S \cos^2 \theta_0 |B'|^2.$$

В этом выражении знак равенства достигается для однородной пластины больших волновых размеров. Таким образом, введение в пластину неоднородностей (например, различных опор и ребер жесткости) сильнее снижает коэффициент прохождения звука, чем излучаемое ею звуковое давление. Для многопролетной пластины данный эффект рассмотрен в работе [69]. Показано, что пластина с опорами в отдельных случаях может излучать звук значительно сильнее, чем пластина без опор.



ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКА  
ЧЕРЕЗ УПРУГИЕ ОБОЛОЧКИ

§ 40. Прохождение звука через упругую цилиндрическую оболочку

Вопросы, связанные с дифракцией звука на упругой оболочке, исследовались во многих работах. В работах [47, 48], например, получено решение задачи рассеяния звука как на безграничной, так и на конечной в аксиальном направлении пустотелой цилиндрической оболочке при произвольном угле падения. Анализ звукового поля внутри тонкой упругой оболочки, заполненной средой, выполнен в работе [106], а в статье [118] найдено решение задачи для оболочки произвольной толщины. Отражение звука от оболочек рассмотрено в работах [123], [125], [126], [129], [130], отражение импульсных волн — в работе [150]. Анализ звукового поля внутри оболочки, приведенный ниже, основан главным образом на работах [43], [106], [107].

**Прохождение звука через тонкую цилиндрическую оболочку.** Будем рассматривать структуру звукового поля во внутренней области оболочки, полагая, что плоская звуковая волна падает на цилиндрическую оболочку, внутренняя полость которой заполнена средой с волновым сопротивлением, вообще говоря, отличным от волнового сопротивления внешней среды. При этом будем считать, что фронт волны параллелен оси цилиндра.

Выберем цилиндрическую систему координат так, чтобы ось оболочки совпадала с осью  $z$  координатной системы, и воспользуемся дифференциальными уравнениями движения тонкой оболочки.

Существует большое число теорий движения тонких оболочек, построенных при различных приближениях. Обзор этих теорий приведен в статье [124]. В качестве уравнений движения можно принять, например, уравнения, приведенные в работе [132]. Учитывая, что при нормальном падении звука составляющие смещения оболочки вдоль оси цилиндра будут равны нулю, перепишем уравнения [132] в виде

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho_M v_0 + \frac{E_1}{a^2} \left[ \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{8} \cdot \frac{h^2}{a^4} E_1 \frac{\sigma}{1-\sigma} \left( \frac{\partial^3 v_r}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) = \\ = \frac{i\omega}{a} \cdot \frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{\partial p''}{\partial \varphi}; \end{aligned} \quad (40.1)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho_M v_r - \frac{E_1}{a^2} \left[ \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + v_r \right] - \frac{h^2}{24a^4} \cdot \frac{E_1}{1-\sigma} \left[ 2(1-\sigma) \frac{\partial^4 v_r}{\partial \varphi^4} + \right. \\ \left. + (4-\sigma) \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + (2+\sigma) v_r \right] = \frac{i\omega}{h} \left[ p' + \frac{(1-2\sigma)h}{(1-\sigma)a} p'' \right]. \end{aligned} \quad (40.2)$$

Здесь  $v_0$  и  $v_r$  — соответственно периферическая и радиальная составляющие колебательной скорости элемента оболочки;  $\rho_M$  — плотность материала оболочки;  $a$  — радиус оболочки;  $h$  — толщина стенки;  $\sigma$  — коэффициент Пуассона;  $E_1 = \frac{E}{1-\sigma^2}$  — модуль упругости для тонкой пластины;  $E$  — модуль упругости материала;  $p'$  и  $p''$  — соответственно антисимметричная и симметричная составляющие звукового давления, определяемые выражениями

$$p' = p_2 - p_1, \quad p'' = \frac{1}{2} (p_1 + p_2),$$

где  $p_2$  — полное звуковое давление вне оболочки;  $p_1$  — звуковое давление внутри оболочки.

На границе оболочки с окружающей средой должны соблюдаться граничные условия

$$v_r \Big|_{r=a+\frac{h}{2}} = v_r \Big|_{r=a-\frac{h}{2}} = -v_r,$$

где  $v_r \Big|_{r=a \pm \frac{h}{2}}$  — соответственно колебательные скорости вне и внутри оболочки. Знак минус в последнем выражении появляется в связи с тем, что антисимметричная составляющая звукового давления взята здесь в виде разности наружного и внутреннего звуковых давлений, вследствие чего положительная радиальная составляющая колебательной скорости оболочки оказывается направленной внутрь, в то время как положительные колебательные скорости среды внутри и вне оболочки, определяемые через радиальные производные от соответствующих звуковых давлений, направлены наружу.

Ввиду того что оболочка тонкая ( $h \ll \lambda$ , где  $\lambda$  — длина звуковой волны в материале оболочки), можно заменить колебательные скорости сред на внешней и внутренней поверхностях оболочки при  $r = a \pm \frac{h}{2}$  колебательными скоростями на средней линии  $r = a$ . Граничные условия при этом можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{i\omega \rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{1}{i\omega \rho_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial r} \Big|_{r=a}; \quad (40.3)$$

$$\frac{1}{i\omega \rho_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial r} \Big|_{r=a} = -v_r. \quad (40.4)$$

Здесь  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — плотности сред внутри и вне оболочки соответственно.

Представим звуковое поле вне оболочки как результат наложения звукового поля падающей волны, звукового поля, рассеянного жестким цилиндром, и звукового поля, излученного оболочкой, совершающей упругие колебания, т. е.

$$p_2(r, \varphi) = p_0(r, \varphi) + p_r(r, \varphi) - p_{\text{изл}}(r, \varphi), \quad (40.5)$$

где  $p_0$  — звуковое давление в падающей волне;  $p_r$  — звуковое давление в волне, отраженной жестким цилиндром;  $p_{\text{изл}}$  — звуковое давление в излученной волне. (Заметим, что поле вне цилиндра можно было бы представить в виде  $p_2 = p_0 + p_{\text{изл}}$ , где  $p_{\text{изл}}$  — полное рассеянное поле. Все полученные ниже результаты при этом сохранились бы. Удобство записи (40.5) заключается в том, что при этом непосредственно выделяется член, содержащий поправку к известному выражению для рассеяния звука на абсолютно жестком цилиндре).

Положив амплитуду падающей плоской волны равной единице, запишем

$$p_0(r, \varphi) = e^{ik_2 r \cos \varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(k_2 r) \cos n\varphi. \quad (40.6)$$

Выражение для волны, рассеянной жестким цилиндром, имеет вид [см. (18.33)]

$$p_r(r, \varphi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \frac{J'_n(\mu_2)}{H_n^{(1)'}(\mu_2)} H_n^{(1)}(k_2 r) \cos n\varphi. \quad (40.7)$$

В выражениях (40.6), (40.7) и ниже введены обозначения:  $k_1$  и  $k_2$  — волновые числа соответственно для внутренней и внешней областей;  $c_1$  и  $c_2$  — скорости распространения звука во внутренней и внешней областях;  $c_{\text{пр}} = \sqrt{E_1/\rho_m}$  — скорость распространения продольной волны в пластине;  $k_{\text{пр}} = \omega/c_{\text{пр}}$ ,  $\mu_{\text{пр}} = k_{\text{пр}}a$ ,  $\mu_1 = k_1 a$ ,  $\mu_2 = k_2 a$ . Волну, излученную цилиндром, можно записать в виде ряда

$$p_{\text{изл}}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(k_2 r) \cos n\varphi. \quad (40.8)$$

Поле внутри оболочки есть результат излучения звука колеблющейся поверхностью во внутреннюю область. Всюду конечное внутри оболочки решение имеет вид

$$p_1(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(k_1 r) \cos n\varphi. \quad (40.9)$$

Составляющие колебательной скорости можно представить в виде рядов Фурье

$$v_0(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\varphi; \quad (40.10)$$

$$v_r(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\varphi. \quad (40.11)$$

При записи последних выражений мы учли, что  $v_0$  является нечетной функцией угла  $\varphi$ , а  $v_r$  — четной функцией.

Подставив выражения (40.5) — (40.11) в систему дифференциальных уравнений (40.1) — (40.4), получим систему из четырех алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $A_n$ ,  $B_n$ . Опуская промежуточные преобразования, запишем окончательный результат для звуковых полей  $p_1$  и  $p_2$ :

$$p_2 = e^{ik_2 r \cos \varphi} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \frac{J'_n(\mu_2)}{H_n^{(1)'}(\mu_2)} H_n^{(1)}(k_2 r) \cos n\varphi + \frac{2\rho_2 c_2}{\pi \mu_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n i^n H_n^{(1)}(k_2 r) \cos n\varphi}{[H_n^{(1)'}(\mu_2)]^2 [Z_n + Z_s^{(1)} + Z_s^{(2)}]}; \quad (40.12a)$$

$$p_1(r, \varphi) = \frac{2\rho_1 c_1}{\pi \mu_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n i^n J_n(k_1 r) \cos n\varphi}{H_n^{(1)'}(\mu_2) J'_n(\mu_1) [Z_n + Z_s^{(1)} + Z_s^{(2)}]}. \quad (40.12b)$$

В выражениях (40.12) и (40.13) величина  $Z_n$  представляет собой механический импеданс цилиндрической оболочки:

$$Z_n = \frac{iE_1}{\omega a} \frac{\alpha n - \gamma(n^2 - \mu_{\text{пр}}^2)}{\beta n - \delta(n^2 - \mu_{\text{пр}}^2)}, \quad (40.13)$$

где

$$\alpha = n - \frac{1}{8} \frac{h^2}{a^2} \frac{\sigma}{1-\sigma} (n^3 - n); \quad \beta = -\frac{\sigma n}{2(1-\sigma)}; \quad \delta = \frac{a}{h} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)};$$

$$\gamma = 1 - \mu_{\text{пр}}^2 + \frac{h^2}{24a^2(1-\sigma)} [2n^4(1-\sigma) + (4-\sigma)n^2 + 2 + \sigma];$$

величина  $Z_s^{(2)}$  — импеданс излучения цилиндра в наружную область:

$$Z_s^{(2)} = i\rho_2 c_2 \frac{H_n^{(1)}(\mu_2)}{H_n^{(1)'}(\mu_2)} \quad (40.14)$$

(при  $\mu_2 \gg 1$ , как и следовало ожидать,  $Z_s^{(2)} \approx \rho_2 c_2$ ); и, наконец, величина  $Z_s^{(1)}$  — импеданс излучения внутрь оболочки, или, другими словами, импеданс жидкого цилиндра с волновым сопротивлением среды:

$$Z_s^{(1)} = -i\rho_1 c_1 \frac{J_n(\mu_1)}{J'_n(\mu_1)}. \quad (40.15)$$

В частности, если считать цилиндр пустотелым, т. е.  $\mu_1 = 0$ , то нужно положить  $Z_s^{(1)} = 0$ , и выражение (40.12a) для поля вне

цилиндра совпадает с выражением, полученным в работе [48], если в формулах работы [48] угол падения волны на цилиндр положить равным нулю.

Допуская, что толщина оболочки цилиндра весьма мала и оболочка не оказывает существенного влияния на прохождение звука, из выражений (40.12а) как частный случай легко получить формулы для рассеяния звука на жидком цилиндрическом препятствии [112].

Определим звуковое давление в центре оболочки. Если положить  $r = 0$ , то все члены ряда, кроме нулевого, исчезнут. Это объясняется тем, что при  $n > 0$  и распределении колебательной скорости по закону  $\cos n\varphi$  на поверхности оболочки будут чередоваться участки, колеблющиеся в противофазе. Поэтому все моды колебаний с номерами  $n = 1, 2, \dots$  создают внутри цилиндра звуковые волны, которые в точке  $r = 0$  полностью взаимно уничтожаются. Формула (40.12б) при  $r = 0$  принимает вид

$$p_1 = \frac{2\rho_1 c_1}{\pi \mu_2 [Z_0 H_1^{(1)}(\mu_2) J_1(\mu_1) - i\rho_2 c_2 H_0^{(1)}(\mu_2) J_1(\mu_1) + i\rho_1 c_1 J_0(\mu_1) H_1^{(1)}(\mu_2)]}. \quad (40.16)$$

Если теперь считать среды внутри и вне цилиндра одинаковыми, т. е.  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ;  $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2 = \rho c$ , то, учитывая, что для цилиндрических функций выполняется равенство

$$H_0^{(1)}(\mu) J_1(\mu) - J_0(\mu) H_1^{(1)}(\mu) = \frac{2i}{\pi \mu},$$

получим простое выражение

$$p_1 = \frac{2\rho c}{\pi \mu Z_0 H_1^{(1)}(\mu) J_1(\mu) + 2\rho c}. \quad (40.17)$$

Интересно отметить, что при изменении частоты звука каждый раз, когда  $\mu$  проходит через значения  $\mu^{(m)}$ , соответствующие корням уравнения  $J_1(\mu^{(m)}) = 0$ , звуковое давление в центре цилиндра становится равным звуковому давлению в падающей звуковой волне. Как видно из выражения для  $Z_s^{(1)}$ , импеданс жидкого цилиндра при указанных значениях  $\mu^{(m)}$  обращается в бесконечность. Это соответствует при различных  $m$  различным последовательным резонансам цилиндрического столба жидкости внутри цилиндра, заключенного в сосуд с абсолютно жесткими стенками. Первые четыре значения  $\mu^{(m)}$  равны 3,832; 7,016; 10,17; 13,32.

То же самое происходит при механическом резонансе оболочки. Поскольку

$$Z_0 \approx \frac{iE_1}{\omega a} \frac{(1 - \mu_{\text{пр}}^2)}{\left(\frac{a}{h} - \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}\right)}, \quad (40.18)$$

то при условии  $\mu_{\text{пр}} = 1$  импеданс  $Z_0$  обращается в нуль, и, как следует из выражения (40.17), звуковое давление в центре цилиндра становится равным звуковому давлению в падающей волне.

При некоторых значениях частоты звука мнимая часть выражения (40.17) может обращаться в нуль. Это связано с существованием резонансов оболочки, нагруженной на окружающую среду внутри и вне цилиндра. Для определения резонансных частот всей системы жидкий цилиндр — оболочка — внешняя среда необходимо найти величины  $\mu$ , при которых модуль знаменателя принимает минимальные значения. Но это приводит к громоздкому трансцендентному уравнению относительно частоты. Проще искать резонансные частоты простым подбором, определяя  $\mu$  таким образом, чтобы модуль знаменателя был минимальным.

На рис. 118 приведена зависимость звукового давления в центре оболочки от параметра  $\mu$ , рассчитанная по формуле (40.12б) (кривая 1). При расчете было принято: материал оболочки — сталь;  $E = 2 \cdot 10^{12}$  дн/см<sup>2</sup>;  $\sigma = 0,29$ ;  $\rho c = 1,5 \cdot 10^5$  з/(см<sup>2</sup>·сек). Кривая рассчитана для случая  $a = 8,1$  см;  $h = 0,5$  см. За единицу принят уровень звукового давления в падающей плоской волне. Значения, обозначенные на рис. 118 через  $\mu_p$ , соответствуют резонансам системы. С приближением к резонансным частотам звуковое давление в центре цилиндра резко увеличивается и в областях резонанса в три-четыре раза превосходит давление в падающей волне. Таким образом, на резонансных частотах оболочка ведет себя как своеобразный концентратор звука.

Первый максимум связан с радиальным резонансом оболочки. Для стальной оболочки в вакууме радиальный резонанс соответствует значению  $\mu_{\text{пр}} \sim 1$ , при этом  $\mu = \frac{c_1}{c} \mu_{\text{пр}} = 3,53$ . Однако резонансное значение  $\mu$  оболочки, погруженной в воду, смещено от величины  $\mu_{\text{пр}} = 3,53$  в сторону более низких частот. Это объясняется следующим образом. Оболочка в жидкости оказывается нагруженной на окружающую среду внутри и вне цилиндра. Сопротивление излучения во внешнюю область, определяемое в данном случае как  $Z_s^{(2)} = -i\rho c H_0^{(1)}(\mu) / H_1^{(1)}(\mu)$ , для значений  $\mu \geq 3$  носит в основном активный характер; реактивная составляющая, обусловленная наличием соколеблющейся массы, невелика и быстро уменьшается при увеличении  $\mu$ . Поэтому основной реактивной нагрузкой для оболочки является внутренний столб жидкости с импедансом  $Z_s^{(1)} = i\rho c J_0(\mu) / J_1(\mu)$ . При  $\mu \approx 3 \div 4$  импеданс  $Z_s^{(1)}$  отрицателен, что соответствует чисто инерциальному сопротивлению. Это приводит к появлению некоторой соколеблющейся массы с внутренней стороны оболочки, и резонансное значение  $\mu$  сдвигается в сторону низких частот. На рис. 118 разность между значениями  $\mu$ , при которых имеют место резонансы в воде и в вакууме, обозначена через  $\Delta\mu_p$ .

Последующие максимумы кривой представляют собой резонансы столба жидкости внутри оболочки.

Как было сказано выше, жидкость в сосуде с абсолютно жесткими стенками резонирует при значениях  $\mu = \mu^{(m)}$ , являющихся корнями уравнения  $J_1(\mu^{(m)}) = 0$ . В действительности жидкость заключена

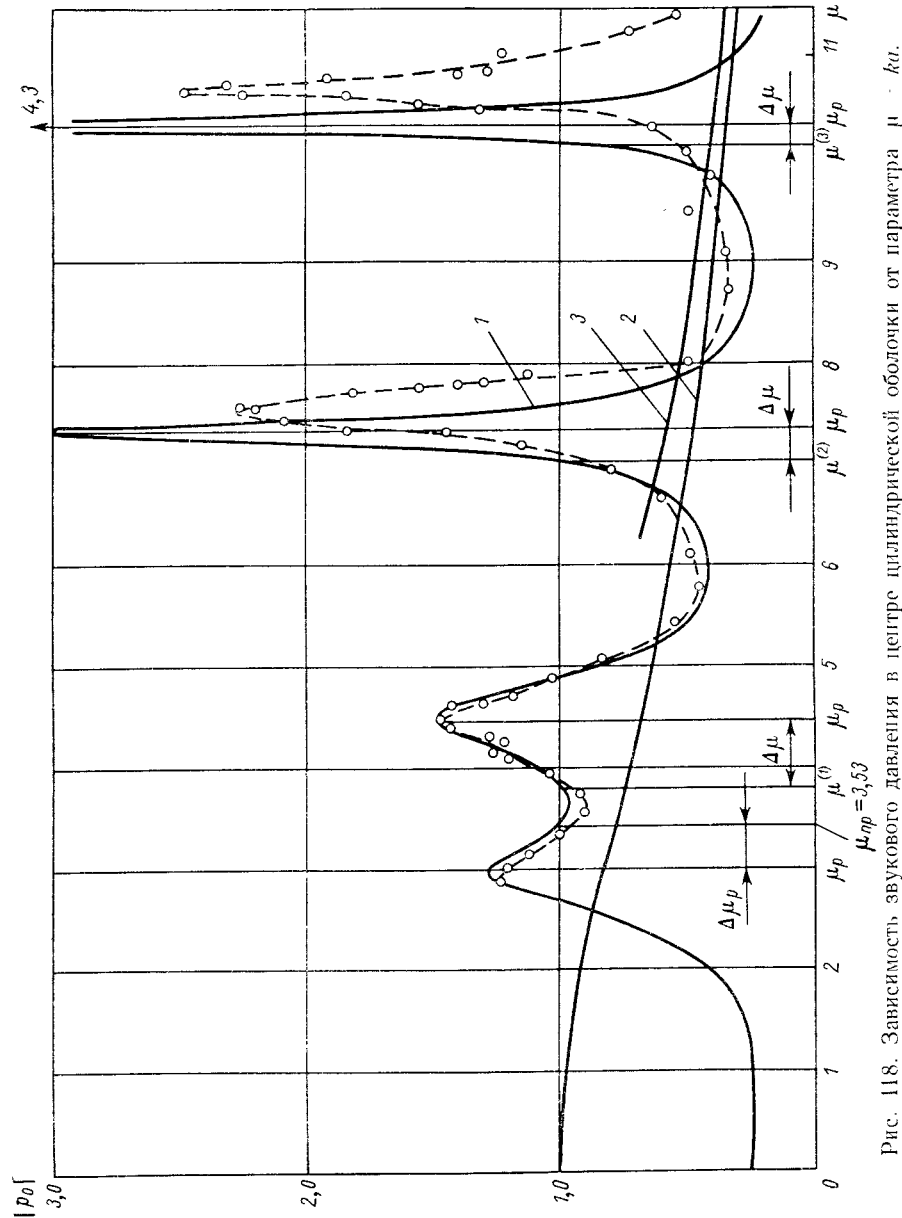


Рис. 118. Зависимость звукового давления в центре цилиндрической оболочки от параметра  $\mu = ka$ .

в сосуд, стенки которого не являются жесткими. Сопrotивление стенок при  $\mu > 3,53$  является инерциальным (существует еще активная составляющая сопротивления, на которую нагружен столб жидкости внутри цилиндра, обусловленная наличием излучения во внешнюю область. Однако для данного рассуждения это не имеет значения, поскольку резонансные частоты определяются лишь реактивными сопротивлениями).

Импеданс столба жидкости  $Z_s^{(1)}$  при частотах ниже резонансной носит инерциальный характер. Выше резонансной частоты он представляет собой сопротивление упругости. Поэтому выше частот, соответствующих значениям  $\mu^{(m)}$ , сопротивление стенок оказывается противоположным по знаку сопротивлению жидкости внутри сосуда, и резонанс имеет место при  $\mu_p > \mu^{(m)}$ . Разность  $\Delta\mu = \mu_p - \mu^{(m)}$  показана на рис. 118.

На низких частотах звуковое давление внутри оболочки резко уменьшается. Это легко понять, если представить импеданс цилиндра в виде

$$Z_0 \approx -i\omega M \left(1 - \frac{1}{\mu_{\text{пр}}^2}\right). \quad (40.19)$$

Здесь  $M$  — масса участка оболочки площадью, равной единице. При  $\mu_{\text{пр}} \ll 1$

$$Z_0 \approx \frac{i\omega M}{\mu_{\text{пр}}^2} = \frac{iE_1 h}{\omega a^2}. \quad (40.20)$$

С уменьшением  $\omega$  импеданс  $Z_0$  возрастает, что вызывает уменьшение поля внутри оболочки. Подставив в выражение (40.17) асимптотические значения цилиндрических функций при  $\mu \rightarrow 0$ , получим с учетом соотношения (40.20) выражение для звукового давления внутри оболочки на низких частотах

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{E_1}{2\rho c^2} \cdot \frac{h}{a}}. \quad (40.21)$$

В данном случае  $p_1$  не зависит от частоты звука и положения точки наблюдения.

Для наглядности на рис. 118 нанесен график зависимости от частоты коэффициента прохождения звука через плоскую стальную пластину толщиной, равной толщине стенки цилиндра (кривая 2). При этом подразумевается, что по оси абсцисс отложены значения частоты звука, совпадающие с частотами, для которых рассчитаны величины  $\mu = ka$ . Так как уровень звукового давления падающей на оболочку плоской волны принят за единицу, то сопоставление кривых 1 и 2 дает возможность сравнить звукопрозрачность пластины и оболочки. Из рисунка видно, что прохождение звука через цилиндр сильно отличается от прохождения звука через плоскую пластину, причем отличия наиболее существенны на низких частотах и в областях, близких к резонансам.

На рис. 119 показана зависимость первых четырех резонансных частот  $\mu_p$  для стальной оболочки от параметра  $q = \frac{M}{2ap}$ . Пунктирной линией отмечено значение, при котором имеет место радиальный резонанс оболочки. С увеличением массы  $M$  влияние жидкости на колебания оболочки уменьшается, и кривая 1 асимптотически стремится снизу к значению  $\mu = 3,53$  в соответствии с рассуждением, приведенным выше. Аналогично кривые 2—4 для последующих резонансов стремятся к своим асимптотическим значениям  $\mu^{(m)}$  (штрихпунктирные линии), поскольку

с увеличением массы оболочки граничные условия при колебаниях столба жидкости внутри цилиндра приближаются к граничным условиям при колебаниях жидкого цилиндра в сосуде с жесткими стенками.

Если  $\mu \gg 1$ , то, используя асимптотические представления для функций Бесселя и Ханкеля при  $\mu \rightarrow \infty$ , из формулы (40.17) можно получить

$$p_1 \approx \frac{2\rho c}{Z_0(1 + e^{i2\mu}) + 2\rho c}. \quad (40.22)$$

Выражение (40.22) не совпадает с известной формулой для прохождения звуковой волны через пластину, отличаясь наличием осциллирующего члена.

Рис. 119. Зависимость первых четырех резонансных частот для нулевой формы колебаний от параметра  $q = \frac{M}{2ap}$ .

Подобная же ситуация возникает, например, при изучении отражения от плоскопараллельного слоя. Если беспредельно увеличивать толщину слоя, то формула для коэффициента отражения звука не перейдет в формулу для коэффициента отражения от границы раздела двух полубесконечных сред, поскольку при любой толщине слоя будет существовать волна, отраженная от задней поверхности слоя. Чтобы получить формулу для полубесконечных сред, необходимо принять, что в материале слоя происходит затухание звука, т. е.  $\text{Im } k > 0$ .

Осцилляции, определяемые выражением (40.22), обусловлены отражениями звука от внутренней поверхности цилиндра. Поэтому, если положить  $\text{Im } k > 0$  и после этого выполнить предельный переход  $\mu \rightarrow \infty$ , то получим формулу для коэффициента прохождения звуковой волны через пластину с импеданцем, равным импеданцу цилиндра:

$$B = \frac{2\rho c}{Z_0 + 2\rho c}. \quad (40.23)$$

Подобное выражение было использовано в работе [115] для расчета звукоизоляции цилиндрической оболочки. При этом предполагалось, что оболочка в каждой точке ведет себя как пластина, импеданс которой совпадает с импедансом оболочки. Очевидно, такой подход не учитывает отражения звука от задней поверхности и не может быть использован для объяснения резонансных явлений внутри оболочки.

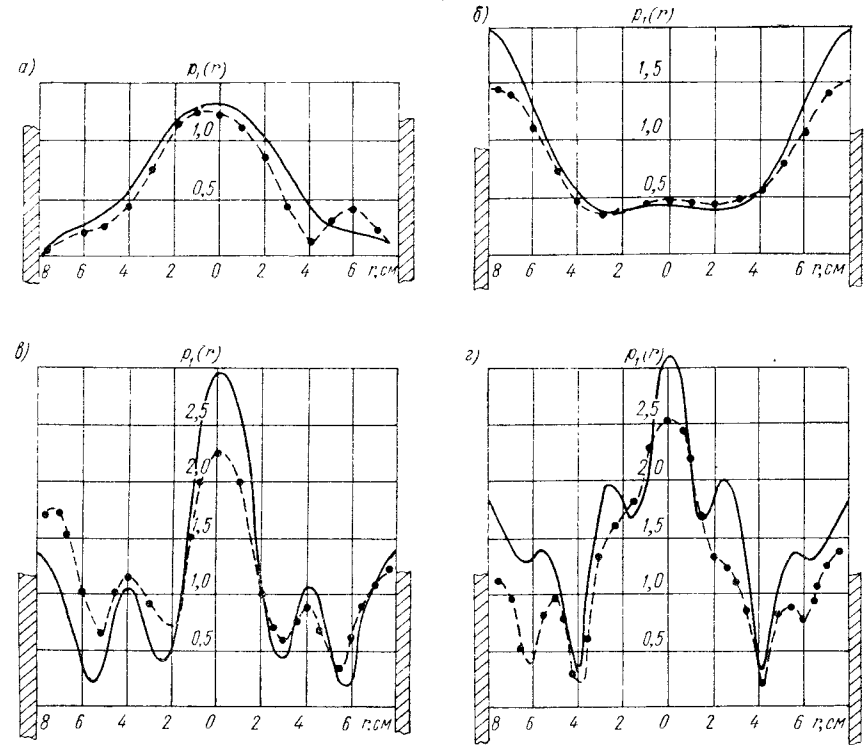


Рис. 120. Распределение звукового давления вдоль радиуса оболочки: а — при  $\mu = 4,5$ ; б — при  $\mu = 5,8$ ; в — при  $\mu = 7,35$ ; г — при  $\mu = 10,35$ .

На рис. 118 для сравнения нанесен график (кривая 3), рассчитанный по формуле (40.23) для значений  $\mu > 6,28$ , поскольку в работе [115] указано, что упрощенный метод может применяться при условии  $a > \lambda$ . Кривая 3 существенно отличается от кривой 1, рассчитанной по общим формулам (40.12б), (40.17), и дает лишь незначительную поправку к частотной зависимости коэффициента прохождения звука через пластину (кривая 2).

Интересно рассмотреть распределение поля вдоль радиуса цилиндра. Разумеется, следует ожидать, что значительное усиление давления на резонансной частоте будет иметь место лишь вблизи оси цилиндра. На рис. 120 сплошными кривыми показаны результаты расчета распределения звукового поля вдоль диаметра оболочки,

перпендикулярного к направлению падения, при различных значениях  $\mu$ . Расчет произведен по формуле (40.126) для случая  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ . При подстановке в (40.126) значений  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  обращаются в нуль нечетные члены ряда, поэтому он сходится достаточно быстро (при  $n$ , в 1,5—2 раза меньших, чем  $\mu$ ), благодаря чему значительно облегчаются численные расчеты. Физическое обращение в нуль нечетных членов объясняется тем, что при нечетном  $n$  смещения оболочки антисимметричны относительно линии  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ . Поэтому звуковые волны, излучаемые внутрь цилиндра оболочкой, совершающей колебания в формах с нечетными номерами, полностью уничтожают друг друга на диаметре, перпендикулярном к направлению распространения падающей волны.

Расчет распределения поля вдоль диаметра произведен для той же оболочки, для которой была рассчитана кривая 1 на рис. 118. Увеличение звукового давления на резонансных частотах имеет место лишь в некоторой области около оси. При увеличении номера резонанса эта область сужается. В промежутке между резонансами давление на оси падает ниже значения, соответствующего прохождению звука через тонкую пластину. На рис. 120, б показано распределение поля внутри цилиндра при условии  $\mu = 5,8$ . Падение давления на оси цилиндра и подъем у стенок показывают, что в этом случае значительная часть энергии распространяется внутри цилиндра в виде колебаний с номерами  $n = 1, 2, \dots$ . Действительно, если бы основной вклад вносила форма с номером  $n = 0$ , то кривая распределения звукового давления внутри цилиндра была бы близка к функции  $J_0(kr)$ . Провал кривой в центральной области цилиндра показывает, что в промежутке между резонансами вклад формы  $n = 0$  не является преобладающим, как это имеет место на резонансах.

Точками на рис. 118 показаны экспериментальные результаты. Небольшой сдвиг значений  $\mu$ , при которых имеют место резонансы, в сторону высоких частот не случаен. Он вызван тем обстоятельством, что положения максимумов, соответствующих резонансам столба жидкости внутри цилиндра, определяются внутренним радиусом оболочки  $r_{\text{вн}} = a - \frac{h}{2}$ , в то время как в расчете везде принимался во внимание средний радиус  $r = a$ . Такая замена допустима при нахождении звуковых давлений внутри тонких оболочек, однако положения резонансов при этом оказываются несколько сдвинутыми в сторону высоких частот. Множитель пересчета для значений  $\mu$ , очевидно, будет равен отношению среднего и внутреннего радиусов, т. е.  $\frac{1}{1 - h/(2a)}$ . Если учесть это обстоятельство, то расчетные и экспериментальные положения резонансов совпадут практически полностью.

На рис. 120 точками показаны экспериментально полученные распределения звукового поля внутри цилиндра вдоль радиусов

$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  на частотах резонансов (рис. 120, а, в, г) и в промежутке между ними (рис. 120, б).

Измерения звукового поля внутри цилиндра на низких частотах ( $ka \ll 1$ ) подтверждают, что звукоизоляция цилиндра резко возрастает при уменьшении волновых размеров. На рис. 121 пунктиром дана зависимость от волнового размера  $\mu$  звукового давления внутри трубки с толщиной стенки  $h = 2,7$  мм и средним радиусом  $a = 9,3$  мм. Сплошной линией показано значение звукового давления при  $\mu \ll 1$ , рассчитанное по формуле (40.21). Подтверждается, что прохождение звука через трубку на низких частотах сильно уменьшается. Пластина толщиной, равной толщине цилиндра, была бы в исследуемом диапазоне частот почти полностью звукопрозрачна, в то время как звуковое давление в трубке уменьшается по сравнению с давлением в падающей волне почти в 15 раз.

**Ползущие волны вблизи оболочки.** В § 24 было показано, что вокруг жесткого цилиндра большого волнового радиуса ( $ka \gg 1$ ) могут распространяться волны со скоростью, меньшей, чем скорость звука в среде. Волны такого типа существуют и вблизи упругой цилиндрической оболочки.

Для того чтобы выделить эти волны, необходимо применить к рядам (40.12а), (40.12б) преобразование Ватсона (§ 24).

Рассмотрим пустотелую оболочку. Тогда  $Z_s^{(1)} = 0$ . Волны, обогнувшие цилиндр, будут определяться вычетами в полюсах на комплексной плоскости  $v = v' + iv''$ , которые находятся из решения уравнения

$$\frac{Z_v}{i\rho c} + \frac{H_v^{(1)}(ka)}{H_v^{(1)'}(ka)} = 0. \quad (40.24)$$

Фазовая скорость волн определяется соотношением  $v_{\text{фаз}} = \frac{\omega a}{v}$ . Уравнение (40.24) имеет бесконечную последовательность комплексных корней  $v$ , из которых наиболее важными являются корни с малым значением  $v''$ , поскольку  $v''$  определяет затухание волны. Уравнение (40.24) приближенно решено в работе [129], причем найдена лишь вещественная часть  $v'$  одного из корней с наименьшим значением  $v''$ . Величина  $v'$  оказывается несколько больше параметра  $ka$ . Этому значению корня соответствует волна, распространяющаяся вокруг цилиндра со скоростью, немного меньшей, чем скорость звука

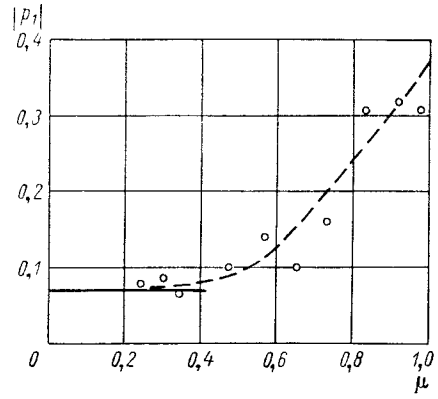


Рис. 121. Зависимость звукового давления внутри трубки малого радиуса от параметра  $\mu$ .

в свободной среде; скорость волны слабо зависит от упругих параметров оболочки. Кроме корня, близкого по величине к параметру  $ka$ , уравнение (40.24) может еще иметь корень, для которого  $v'$  значительно больше, чем  $ka$ . Соответствующая волна в среде определяется изгибными волнами в оболочке и представляет собой поверхностную волну. Более подробное исследование решения уравнения (40.23) выполнено в работах [43], [118].

**Возникновение каустик внутри оболочки.** Если размеры оболочки велики по сравнению с длиной звуковой волны, то внутри оболочки на некоторых поверхностях может происходить концентрация звуковой энергии и возрастание звукового давления. Объяснение этого явления приведено в работах [54], [55].

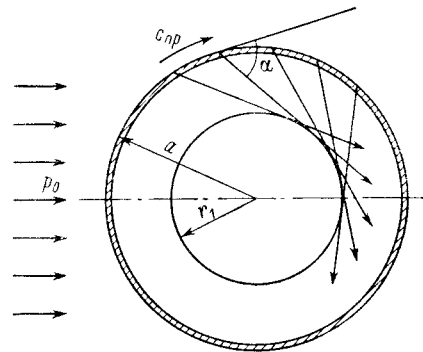


Рис. 122. К объяснению возникновения каустик внутри оболочки.

Пусть на оболочку больших волновых размеров ( $ka \gg 1$ ) падает плоская звуковая волна. Эта волна вызывает возмущение на оболочке, которое распространяется по окружности. В общем случае по оболочке могут распространяться как изгибные, так и продольные волны.

Рассмотрим сначала продольные волны. Для оболочки больших волновых размеров можно считать, что отдельный ее участок в механическом отношении ведет себя как плоская пластина и скорость распространения продольных волн в оболочке совпадает с их скоростью в пластине. Если  $c_{np} > c$ , то бегущая продольная волна излучает в жидкость звуковую волну, причем направление ее распространения составляет с касательной к оболочке угол  $\alpha$  (рис. 122), характеризуемый выражением

$$\sin \alpha = \frac{c}{c_{np}}.$$

В результате значительная часть энергии оказывается сосредоточенной вблизи окружности, касательной к направлению лучей, определяющих направление распространения волны. Радиус этой окружности равен  $r_1 = ac_{np}/c$ .

По той же причине изгибная волна, распространяющаяся по оболочке, может приводить к концентрации энергии вблизи окружности

радиусом  $r_2 = \frac{ac_n}{c}$ . Здесь  $\tilde{c}_n$  — скорость изгибных волн, определенная с учетом влияния жидкости на колебания оболочки. Поверхности, которые служат огибающими семейства лучей, называются каустическими поверхностями или каустиками. Ясно, что возникновение каустик благодаря изгибным волнам может иметь место только в случае  $\tilde{c}_n > c$ .

В работах [54], [55] приведены фотографии картины звуковых полей внутри цилиндрической оболочки, возбуждаемой ультразвуком. На этих фотографиях четко видны каустические окружности.

## § 41. Излучение звука через тонкую цилиндрическую оболочку

**Излучение звука прозрачными источниками.** Мы рассмотрели прохождение плоской звуковой волны, падающей извне на цилиндрическую оболочку. Представляет интерес решение обратной задачи: определение звукового поля вне оболочки, если внутри нее находится система дискретных или непрерывных источников.

Предположим, что сами источники являются прозрачными для звукового поля. Вычисление поля вне оболочки может быть проведено путем непосредственного решения граничной задачи возбуждения оболочки звуковой волной, падающей на оболочку изнутри. Однако проще воспользоваться теоремой взаимности [50], поскольку решение прямой задачи, необходимое для применения принципа взаимности, в данном случае известно.

Согласно принципу взаимности (15.7), при отсутствии сил, действующих на оболочку, имеет место соотношение

$$\int_{\Omega} p_1(\vec{r}) Q_2(\vec{r}) dS = \int_{\Omega} p_2(\vec{r}) Q_1(\vec{r}) dS, \quad (41.1)$$

где  $\Omega$  — область, занятая источниками;  $Q_1$  и  $Q_2$  — две системы источников;  $p_1(\vec{r})$  — звуковое давление, создаваемое первой системой источников в месте расположения второй системы;  $p_2(\vec{r})$  — звуковое давление, создаваемое второй системой источников в месте расположения первой.

Пусть  $Q_1 = Q(r, \varphi)$  представляет собой заданную систему источников внутри оболочки, распределенную по некоторой кривой  $\gamma$ . Требуется определить поле  $p_1(\vec{R})$  этих источников вне оболочки в удаленной точке с координатами  $R, \psi$ . Выберем в качестве  $Q_2$  вспомогательный источник в виде излучающей линии  $Q_2(R) = Q_2 \delta(\vec{R} - \vec{r})$ , где  $\delta$  — дельта-функция. Тогда из формулы (41.1) следует

$$p_1(R, \psi) = \frac{1}{Q_2} \int_{\gamma} p_2(r, R, \varphi - \psi) Q(r, \varphi) dl, \quad (41.2)$$

где  $Q_2$  — объемная скорость источника, рассчитанная на единицу его длины.

Звуковое давление, создаваемое линейным источником на расстоянии  $R$  от него в свободной среде, при  $kR \gg 1$  равно величине

$$\frac{\rho_2 c_2 Q_2}{2 \sqrt{\lambda_2 R}} e^{ik_2 R + i \frac{\pi}{4}},$$

где  $\rho_2 c_2$  — волновое сопротивление внешней среды;  $\lambda_2$  — длина звуковой волны.

Звуковое давление, создаваемое линейным удаленным источником внутри оболочки, равно

$$p_2(r, R, \varphi - \psi) = \frac{\rho_2 c_2 Q_2}{2 \sqrt{\lambda_2 R}} p(r, \varphi - \psi) e^{ik_2 R + i \frac{\pi}{4}}. \quad (41.3)$$

Здесь  $p(r, \varphi - \psi)$  — решение задачи о поле внутри оболочки, создаваемом падающей на нее плоской волной с амплитудой, равной единице.

Из формул (41.2) и (41.3) следует

$$p_1(R, \psi) = \frac{\rho_2 c_2}{2 \sqrt{\lambda_2 R}} e^{ik_2 R + i \frac{\pi}{4}} \int_{\gamma} p(r, \varphi - \psi) Q(r, \varphi) dl. \quad (41.4)$$

Это соотношение позволяет определить поле излучения произвольной системы источников, окруженных упругой оболочкой, если известно решение прямой задачи.

Для примера вычислим звуковое давление вне цилиндрической оболочки, создаваемое системой источников, равномерно распределенных вдоль прямолинейного отрезка длиной  $2r_0$ , который лежит в плоскости, перпендикулярной к оси оболочки  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , и проходит через центр. Подставим в формулу (41.4) выражение для поля звуковой волны, прошедшей через цилиндрическую оболочку, (40.13). Внешнее поле системы источников, излучающих через оболочку, определится тогда в виде

$$p_1(R, \psi) = \frac{2\rho_1 c_1 \rho_2 c_2 Q}{\pi \mu_2 k_1} e^{ik_2 R + i \frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \cos n \psi \int_0^{k_1 r_0} J_n(x) dx}{J'_n(\mu_1) H_n^{(1)'}(\mu_2) (Z_n + Z_s^{(1)} + Z_s^{(2)})}.$$

Штрих у знака суммы означает, что суммируются только четные члены. При интегрировании по отрезку  $2r_0$  встретятся суммы вида

$$\cos n \left( \psi - \frac{\pi}{2} \right) + \cos n \left( \psi + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cos n \psi \cos \frac{\pi n}{2}.$$

Поэтому нечетные члены оказываются равными нулю.

На рис. 123 приведены результаты расчета и эксперимента для решетки точечных источников, помещенных внутри оболочки вдоль ее диаметра. При расчете приняты следующие значения параметров:  $a = 8,1$  см; толщина оболочки  $0,5$  см,  $k_2 a = 5,8$ . Решетка состоит из семи источников, расстояние между которыми  $2$  см. Из рисунка

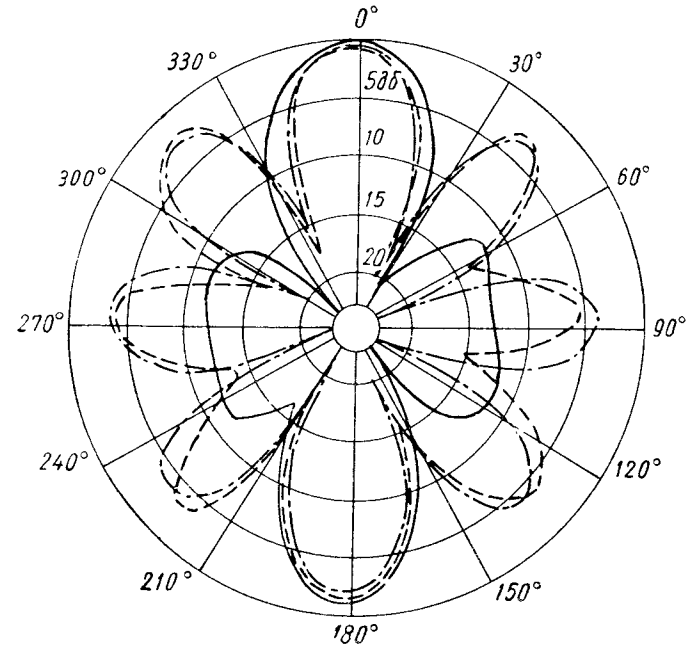


Рис. 123. Искажение поля решетки точечных источников цилиндрической оболочкой.  
— поле при отсутствии оболочки (эксперимент); - - - поле при наличии оболочки (эксперимент); - · - поле при наличии оболочки (расчет).

видно, что оболочка существенно искажает поле решетки. График, полученный экспериментально, хорошо согласуется с расчетной кривой.

**Влияние цилиндрической оболочки на поле излучения цилиндра.** Выше предполагалось, что источник звука является звукопрозрачным и не искажает звукового поля. Далее рассмотрим излучение звука цилиндром через оболочку с учетом влияния самого излучателя на поле внутри оболочки и с учетом влияния оболочки на импеданс излучения цилиндра.

Пусть цилиндр радиуса  $R$  (рис. 124) излучает звук сквозь тонкую упругую оболочку радиуса  $a$ . Пространство между оболочкой и цилиндром заполнено средой с волновым сопротивлением  $\rho_1 c_1$ . Волновое сопротивление окружающей среды будем считать равным



$\rho_2 c_2$ . На поверхности цилиндра задана колебательная скорость  $v|_{r=R} = f(\varphi)$ . Разложим эту функцию в ряд Фурье. Тогда

$$v|_{r=R} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\varphi}. \quad (41.5)$$

Коэффициенты  $a_n$  будем полагать известными.

Звуковое давление в промежутке между цилиндром и оболочкой можно представить в виде

$$p_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n J_n(k_1 r) + B_n N_n(k_1 r)] e^{in\varphi}. \quad (41.6)$$

Здесь и далее  $A_n, B_n, C_n$  — неизвестные коэффициенты;  $k_1$  и  $k_2$  — волновые числа соответственно внутри и вне оболочки.

Звуковое давление вне цилиндра равно

$$p_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(k_2 r) e^{in\varphi}. \quad (41.7)$$

Неизвестные коэффициенты определяются из граничных условий.

Колебательная скорость среды внутри оболочки при  $r = R$  должна быть равна колебательной скорости поверхности цилиндра:

$$v|_{r=R} = \frac{1}{i\omega\rho_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (41.8)$$

Рис. 124. Расположение излучающего цилиндра и оболочки.

Колебательные скорости сред внутри и вне оболочки при  $r = a$  должны быть равны, поскольку симметричные колебания сжатия не учитываются:

$$\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial r} \Big|_{r=a}. \quad (41.9)$$

Третье граничное условие должно учитывать механические свойства оболочки. Для этой цели можно использовать уравнение движения тонкой цилиндрической оболочки. Однако проще воспользоваться выражениями для импеданца оболочки  $Z_n$ , полученными в § 40. Тогда имеем

$$\frac{p_{1n} - p_{2n}}{Z_n} \Big|_{r=a} = v'_n = \frac{1}{i\omega\rho_2} \cdot \frac{\partial p_{2n}}{\partial r} \Big|_{r=a}. \quad (41.10)$$

Здесь  $p_{1n}, p_{2n}$  — звуковые давления в  $n$ -й форме колебаний внутри и вне оболочки;  $v'_n$  — колебательная скорость оболочки (положительной считается колебательная скорость, направленная наружу).

Подставляя разложения полей в граничные условия, получим систему уравнений относительно коэффициентов  $A_n, B_n, C_n$ . Решая эти уравнения относительно  $C_n$ , находим

$$C_n = \frac{i\rho_2 c_2 Z_s^{(3)} a_n}{H_n^{(1)}(\mu_2) (Z_n + Z_s^{(1)} + Z_s^{(2)})} \sqrt{\frac{\mu_R}{\mu_1}}. \quad (41.11)$$

Здесь  $\mu_R = k_1 R$ ,  $\mu_1 = k_1 a$ ,  $\mu_2 = k_2 a$ .

Величина  $Z_s^{(1)}$ , определяемая выражением

$$Z_s^{(1)} = i\rho_1 c_1 \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad (41.12)$$

где

$$\Delta = N'_n(\mu_R) J'_n(\mu_1) - N'_n(\mu_1) J'_n(\mu_R);$$

$$\Delta_1 = N_n(\mu_1) J'_n(\mu_R) - J_n(\mu_1) N'_n(\mu_R),$$

является сопротивлением излучения оболочки во внутреннюю область при условии, что поверхность излучающего цилиндра заторможена.

Действительно, отношение  $-\frac{p_{1n}}{v_{1n}} \Big|_{r=a}$  при условии  $v_{1n}|_{r=R} = 0$  равно выражению (41.12). Знак минус появляется в связи с тем, что определяется сопротивление излучения во внутреннюю область, и положительная радиальная составляющая колебательной скорости оболочки оказывается направленной внутрь. Величина

$Z_s^{(2)} = i\rho_2 c_2 \frac{H_n^{(1)}(\mu_2)}{H_n^{(1)}(\mu_2)}$  является

сопротивлением излучения оболочки во внешнюю область.

Импеданс  $Z_s^{(3)}$  определяется формулой

$$Z_s^{(3)} = -\frac{i\rho_1 c_1}{\Delta} \cdot \frac{2}{\pi\mu_1} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_R}}. \quad (41.13)$$

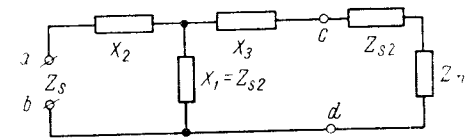


Рис. 125. Эквивалентная схема.

Смысл  $Z_s^{(3)}$  можно понять, если рассмотреть эквивалентную схему нашей механической системы (рис. 125). Четырехполюсник  $abcd$  изображает на этой схеме промежуток между цилиндром и оболочкой;  $X_1$  — сопротивление распределенной гибкости;  $X_2$  и  $X_3$  имитируют распределенную массу.

Для определения импеданцев  $X_1, X_2$  и  $X_3$  следует найти входные и выходные сопротивления холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника. Одно из этих сопротивлений уже найдено, поскольку  $Z_s^{(1)}$  представляет собой  $Z_{x,x}^{(вх)}$  — сопротивление холостого хода на выходе. Сопротивление холостого хода на входе определяется отношением  $Z_{x,x}^{(вх)} = \frac{p_{1n}}{v_{1n}} \Big|_{r=R}$ , взятом при условии  $v_{1n}|_{r=a} = 0$ ,

т. е. при заторможенной оболочке. После преобразований получаем

$$Z_{x, x}^{(вх)} = i\rho_1 c_1 \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (41.14)$$

где

$$\Delta_2 = J'_n(\mu_1) N_n(\mu_R) - N'_n(\mu_1) J_n(\mu_R).$$

Входное сопротивление короткого замыкания, определяемое выражением  $Z_{к.з}^{(вх)} = \frac{p_{1n}}{v_{1n}} \Big|_{r=a}$  при условии  $p_{1n}|_{r=a} = 0$ , т. е. при абсолютно податливой оболочке, равно

$$Z_{к.з}^{(вх)} = i\rho_1 c_1 \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (41.15)$$

где  $\Delta_3 = N_n(\mu_1) J_n(\mu_R) - J_n(\mu_1) N_n(\mu_R)$ .

Зная сопротивление холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника, можно определить все импедансы:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{i\rho_1 c_1}{\Delta} \cdot \frac{2}{\pi\mu_1} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_R}}, \\ X_2 &= \frac{i\rho_2 c_2}{\Delta} \left( \Delta_2 + \frac{2}{\pi\mu_1} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_R}} \right); \\ X_3 &= \frac{i\rho_1 c_1}{\Delta} \left( \Delta_1 + \frac{2}{\pi\mu_1} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_R}} \right). \end{aligned}$$

Первое из этих выражений совпадает с формулой (41.13). Поэтому  $Z_s^{(3)}$  в формуле (41.11) является сопротивлением гибкости промежутка между оболочкой и системой.

Выражения (41.7) и (41.11) дают решение поставленной задачи. Можно рассмотреть некоторые частные случаи.

Пусть  $Z_n = 0$ . При этом влияние оболочки исчезает. Тогда (41.11) определяет коэффициенты разложения ряда, характеризующего излучение цилиндра через кольцевой слой с волновым сопротивлением, отличным от волнового сопротивления внешней среды. Если теперь считать среды внутри и вне цилиндра одинаковыми, т. е. полагать  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  и  $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2 = \rho c$ , то получим  $C_n = i\rho_2 c_2 a_n / H_n^{(1)'}(\mu_2)$ . Последнее выражение определяет обычные коэффициенты излучения цилиндра с заданным распределением колебательной скорости.

**Расчет с учетом влияния оболочки на колебательную скорость цилиндра.** При выводе выражения (41.11) мы предполагали, что колебательная скорость на поверхности цилиндра известна. Отражение звука от оболочки приводит к появлению стоячих волн в пространстве между излучателем и оболочкой. В результате сопротивление излучения меняется.

Если задано распределение электрического напряжения возбуждения цилиндра, то изменение сопротивления излучения приводит и к изменению колебательной скорости.

Сопротивление излучения можно подсчитать непосредственно, определив отношение звукового давления к колебательной скорости при  $r = R$ . Однако проще воспользоваться эквивалентной схемой (рис. 125). Сопротивление излучения цилиндра  $Z_s$  в присутствии оболочки для  $n$ -й формы колебаний представляет собой входное сопротивление на клеммах  $a, b$ . Из эквивалентной схемы получим

$$Z_s = i\rho_1 c_1 \frac{\Delta_3 + \frac{\Delta_2}{i\rho_1 c_1} (Z_s^{(2)} + Z_n)}{\Delta_1 + \frac{\Delta_2}{i\rho_1 c_1} (Z_s^{(2)} + Z_n)}. \quad (41.16)$$

Зная сопротивление излучения, можно вычислить колебательную скорость поверхности преобразователя с учетом влияния оболочки. Комплексная амплитуда этой колебательной скорости в  $n$ -й форме может быть представлена как

$$a_n = \frac{K_n}{Z_M + Z_s}. \quad (41.17)$$

Здесь  $Z_M$  — механический импеданс излучающего цилиндра для  $n$ -й формы колебаний;  $K_n$  — коэффициент пропорциональности.

Подставляя (41.17) в формулу (41.11), получим

$$C_n = \frac{i\rho_2 c_2 Z_s^{(3)} K_n}{(Z_M + Z_s) (Z_n + Z_s^{(1)} + Z_s^{(2)}) H_n^{(1)'}(\mu_2)} \sqrt{\frac{\mu_R}{\mu_1}}.$$

Для случая радиальной симметрии в формуле (41.7) остается лишь нулевой член. Звуковое давление на расстоянии  $r$  от оси цилиндра тогда определится в следующем виде:

$$p_2 = -\frac{i\rho_2 c_2 Z_s^{(3)} K_0 H_0^{(1)}(k_2 r)}{(Z_M + Z_s) (Z_0 + Z_s^{(1)} + Z_s^{(2)}) H_1^{(1)}(\mu_2)} \sqrt{\frac{\mu_R}{\mu_0}}.$$

При этом в выражениях для  $Z_s, Z_s^{(1)}, Z_s^{(2)}, Z_s^{(3)}$  следует положить  $n = 0$ . Давление, развиваемое преобразователем при отсутствии оболочки, равно

$$\tilde{p}_2 = -\frac{i\rho_2 c_2 K_0 H_0^{(1)}(k_2 r)}{(Z_M + \tilde{Z}_s) H_1^{(1)}(k_2 R)}.$$

Здесь  $\tilde{Z}_s = -i\rho_2 c_2 \frac{H_0^{(1)}(k_2 R)}{H_1^{(1)}(k_2 R)}$  — сопротивление излучения цилиндра при отсутствии оболочки.

Отношение  $B = \frac{p_2}{\tilde{p}_2}$  является коэффициентом прохождения звука через оболочку с учетом влияния самого преобразователя. Находим

$$B = \frac{Z_s^{(3)} (Z_M + \tilde{Z}_s) H_1^{(1)}(k_2 R)}{(Z_M + Z_s) (Z_s^{(2)} + Z_s^{(1)} + Z_0) H_1^{(1)}(\mu_2)} \sqrt{\frac{\mu_R}{\mu_1}}. \quad (41.18)$$

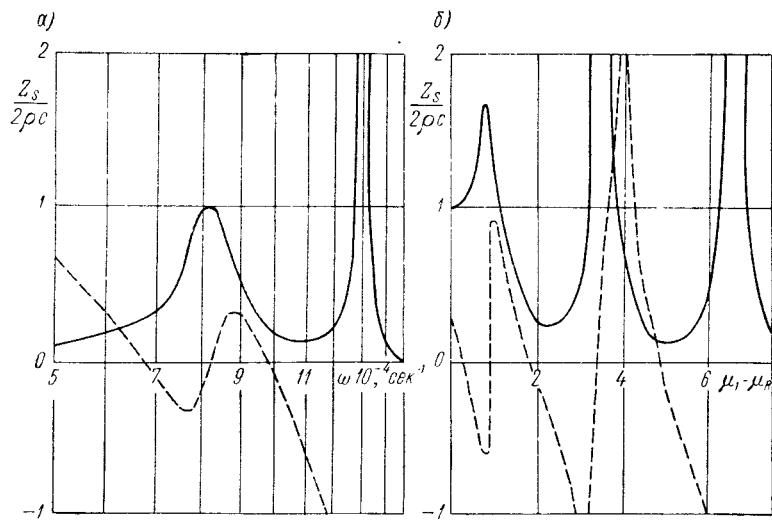


Рис. 126. Зависимость сопротивления излучения цилиндра, расположенного внутри оболочки: *a* — от угловой частоты; *б* — от волнового размера зазора между излучающим цилиндром и оболочкой.

$$\text{— Re } \frac{Z_s}{2\rho c}; \quad \text{--- Im } \frac{Z_s}{2\rho c}.$$

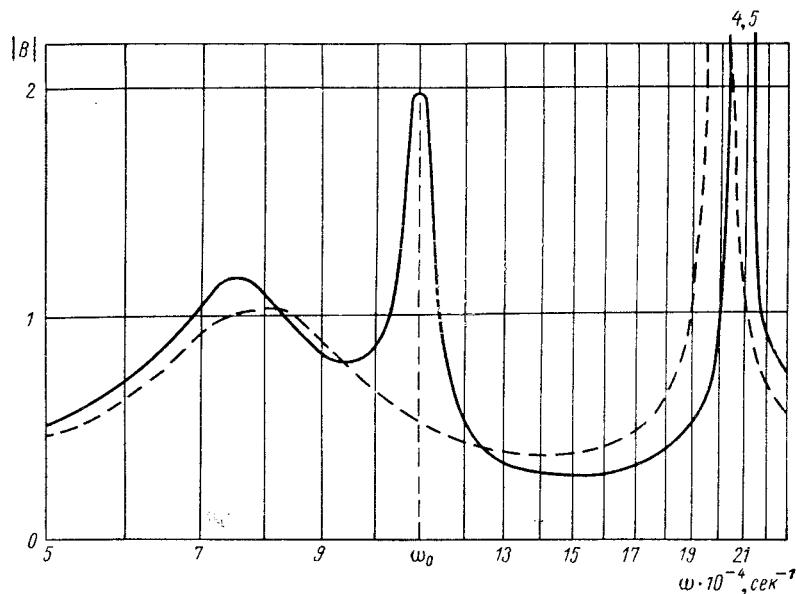


Рис. 127. Зависимость коэффициента прохождения звука от угловой частоты.

Резонансная частота преобразователя с учетом влияния оболочки может быть определена из выражения  $\text{Im}(Z_M + Z_s) = 0$ .

На рис. 126 приведены зависимости активной и реактивной составляющих импеданса излучения  $Z_s$  от частоты и от волновой величины зазора. При расчете было принято: толщина оболочки  $h = 0,5 \text{ см}$ ;  $R = 4,45 \text{ см}$ ;  $E = 2 \cdot 10^{12} \text{ г/см} \cdot \text{сек}^2$ ;  $\sigma = 0,29$ . Первый максимум кривой обусловлен радиальным резонансом оболочки, последующие максимумы являются следствием резонансов слоя жидкости в зазоре. Из рисунка видно, что отраженная от оболочки волна сильно изменяет импеданс излучения.

Для расчета частотной характеристики коэффициента прохождения звука (41.18) следует задать механический импеданс излучателя. Если излучателем звука является тонкостенное кольцо с угловой резонансной частотой  $\omega_0$  и массой (на единицу площади)  $M_1$ , то без учета механических потерь можно записать

$$Z_M = -i\omega M_1 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right).$$

Сплошная кривая на рис. 127 соответствует значениям  $\omega_0 = 1,08 \cdot 10^5 \text{ 1/сек}$ ;  $M_1 = 4,7 \text{ г/см}^2$ ;  $R = 4,45 \text{ см}$ ;  $a = 7 \text{ см}$ . Первый максимум кривой связан с радиальным резонансом оболочки. Вто-

рой лежит в районе резонансной частоты излучателя  $\omega_0$  (в данном случае величина зазора специально подобрана таким образом, чтобы вблизи этой частоты сопротивление излучения было минимально — см. рис. 126). Третий максимум является резонансом зазора. Пунктирная кривая определяет  $|B|$  при  $Z_M = \infty$ . В этом случае мы пренебрегаем влиянием оболочки на колебательную скорость преобразователя, считая ее заданной и постоянной величиной. Из рисунка видно, что в области  $\omega = \omega_0$  сплошная и пунктирная кривые существенно отличаются.

Сравнение частотных характеристик звукового давления, излучаемого цилиндром при наличии оболочки и без нее (рис. 128), показывает, что в рассмотренном случае оболочка обостряет резонанс и в узкой области частот повышает излучаемое звуковое давление.

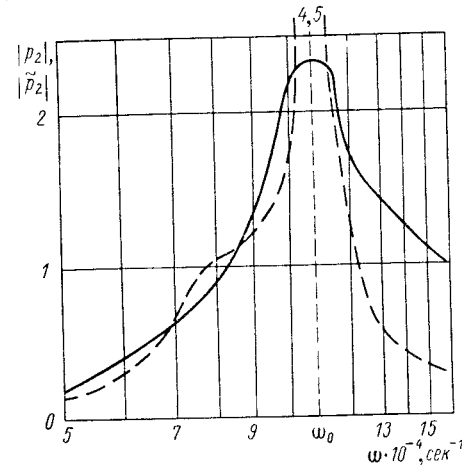


Рис. 128. Зависимость звукового давления, излучаемого цилиндром, от угловой частоты.

— цилиндр без оболочки; --- цилиндр с оболочкой.

§ 42. Прохождение звука  
через сферическую оболочку

Для тонкой сферической оболочки можно провести решение тем же способом, какой был использован в § 40, т. е. путем непосредственной подстановки выражений для звуковых полей в уравнения движения оболочки. Можно также сначала определить из уравнений движения механические импедансы оболочки и затем уже воспользоваться ими для определения звуковых полей. Оба способа эквивалентны и приводят к одинаковым выражениям.

**Определение механических импеданцев тонких сферических оболочек.** Для определения механических импеданцев  $Z_n$  воспользуемся моментными уравнениями равновесия произвольной оболочки в перемещениях [15]. Чтобы получить уравнения осесимметричных колебаний сферической оболочки, в уравнениях следует положить  $A = \sin \theta$ ,  $B = 1$ ,  $\alpha = \varphi r$ ,  $\beta = \theta r$ ,  $u = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ . Проекция сил на оси подвижного трехгранника по принципу Даламбера следует задать в виде

$$Y = -\rho_m h \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}; \quad Z = -\rho_m h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + p_1 - p_2.$$

Здесь  $u_\theta$  и  $u_r$  — соответственно меридиональное и радиальное смещения оболочки;  $p_1 - p_2$  — разность давлений по обе стороны оболочки, представляющая собой нормальную составляющую нагрузки. Остальные составляющие приняты равными нулю.

В результате получим уравнения колебаний в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) \right] - 2 \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \\ & \quad + (1 - \sigma) \left( u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \\ & \quad + \frac{h^2}{12a^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \left( u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + (1 - \sigma) \left( u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right\} + \frac{1 - \sigma^2}{E} a^2 \rho_m \omega^2 u_\theta = 0; \\ & \frac{(1 + \sigma)}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) - 2(1 + \sigma) u_r - \\ & \quad - \frac{h^2}{12a^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta (u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta})) \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1 - \sigma}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta (u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta})) \right\} + \\ & \quad \left. + \frac{1 - \sigma^2}{E} a^2 \rho_m \omega^2 u_r = - \frac{1 - \sigma^2}{Eh} a^2 (p_1 - p_2). \right\} \quad (42.1) \end{aligned}$$

Если пренебречь членами, стоящими в фигурных скобках, то получим уравнения колебаний сферической оболочки в безмоментном приближении. Более точные уравнения движения сферических оболочек с учетом инерции вращения поперечных сечений оболочки и сдвига приведены в работе [145].

Для того чтобы решить уравнения (42.1), разложим  $p' = p_1 - p_2$  в ряд:

$$p' = \sum_{n=0}^{\infty} p'_n P_n(\cos \theta).$$

Смещения  $u_r$  и  $u_\theta$  представим в виде

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} u_{rn} P_n(\cos \theta); \quad u_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\theta n} \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}.$$

Заметим, что смещение  $u_\theta$  необходимо раскладывать в ряд не по обычным полиномам Лежандра  $P_n(\cos \theta)$ , а по присоединенным полиномам  $P'_n(\cos \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta)$ .

Подставив указанные разложения в уравнения (42.1) и пренебрегая малыми членами, получим следующую систему уравнений относительно  $u_m$  и  $u_{\theta n}$ :

$$\left. \begin{aligned} & u_{\theta n} a_{11} - u_{rn} a_{12} = 0; \\ & u_{\theta n} a_{21} - u_{rn} (G + a_{22}) = \frac{1 - \sigma^2}{Eh} a^2 p'_n, \end{aligned} \right\} \quad (42.2)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= G + 1 - \sigma - n(n + 1); \\ a_{21} &= n(n + 1)(1 + \sigma) + \frac{h^2}{12a^2} n^2(n + 1)^2; \\ a_{12} &= 1 + \sigma + n(n + 1) \frac{h^2}{12a^2}; \\ a_{22} &= -2(1 + \sigma) - \frac{h^2}{12a^2} n^2(n^2 + 1)^2; \\ G &= \frac{1 - \sigma^2}{E} a^2 \rho_m \omega^2 = \alpha^2 \frac{(1 - \sigma)^2}{1 - 2\sigma}; \quad \alpha = k_l a. \end{aligned}$$

Необходимые для расчета звуковых полей механические импедансы  $Z_n$  определяются как отношение разности нормальных составляющих нагрузки к нормальной составляющей колебательной скорости:

$$Z_n = - \frac{p'_n}{i\omega u_{rn}}.$$

Все величины при этом берутся для формы колебаний с номером  $n$ .

Найдя из системы уравнений (42.2) коэффициент  $u_{rn}$ , получим

$$Z_n = -i\omega M \zeta_n; \quad \zeta_n = 1 - \frac{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}{Ga_{11}}. \quad (42.3)$$

Сомножитель  $-i\omega M$  представляет собой инерционный механический импеданс пластины толщиной, равной толщине оболочки. Влияние кривизны оболочки учитывается множителем  $\zeta_n$ . При увеличении волновых размеров оболочки  $\zeta_n$  стремится к единице и импеданс приближается к импедансу пластины. Поэтому  $\zeta_n$  можно назвать безразмерным сферическим импедансом оболочки.

В качестве следующего приближения можно вычислить импеданс с помощью безмоментной теории оболочек, пренебрегая членами, содержащими  $h^2/12a^2$ . Тогда сферический импеданс  $\zeta_n$  будет равен

$$\zeta_n = 1 - \frac{-2(1+\sigma) + \frac{1}{G} [n(n+1)(1-\sigma^2) - 2(1-\sigma^2)]}{n(n+1) - G - (1-\sigma)}. \quad (42.4)$$

Последнее выражение совпадает с формулой, полученной в работе [130] путем решения уравнений Лагранжа. Это объясняется тем, что способ, примененный в работе [130], соответствует безмоментной теории.

При  $n=0$  по любой из формул (42.3), (42.4) получаем

$$\zeta_n = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (42.5)$$

Здесь  $\omega_0$  — угловая резонансная частота сферической оболочки, равная

$$\omega_0 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2E}{\rho_m(1-\sigma)}}. \quad (42.6)$$

**Прохождение звука через тонкую сферическую оболочку.** Введем сферическую систему координат с осью  $z$ , направление которой совпадает с направлением распространения плоской звуковой волны  $p_0$ , падающей на оболочку. Тогда

$$p_0 = e^{ik_2z} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(k_2r) P_n(\cos \theta), \quad (42.7)$$

где  $j_n(x)$  — сферическая функция Бесселя.

Звуковое давление внутри оболочки равно

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n i^n (2n+1) j_n(k_1r) P_n(\cos \theta). \quad (42.8)$$

Звуковое давление вне оболочки можно записать как алгебраическую сумму падающего звукового поля  $p_0$ , поля, рассеянного жест-

кой сферой,  $p_r$ , и звукового поля, излучаемого оболочкой, совершающей упругие колебания,  $p_{изл}$  (см. замечание на стр. 306):

$$p_2 = p_0 + p_r - p_{изл}. \quad (42.9)$$

Звуковое поле  $p_r$  имеет вид [62]

$$p_r = - \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{j_n'(\mu_2)}{h_n^{(1)'}(\mu_2)} h_n^{(1)}(k_2r) P_n(\cos \theta), \quad (42.10)$$

где  $h_n^{(1)}(x)$  — сферическая функция Ханкеля первого рода.

Поле  $p_{изл}$  можно записать в виде ряда

$$p_{изл} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n i^n (2n+1) h_n^{(1)}(k_2r) P_n(\cos \theta). \quad (42.11)$$

В качестве граничных условий необходимо использовать равенство скоростей на внутренней и внешней сторонах оболочки (симметричными колебаниями для тонкой оболочки пренебрегаем) и соотношение, связывающее разность звуковых давлений по обе стороны оболочки с ее механическим импедансом:

$$\frac{1}{i\omega\rho_1} \cdot \frac{\partial p_{1n}}{\partial r} = \frac{1}{i\omega\rho_2} \cdot \frac{\partial p_{2n}}{\partial r}; \quad p_{1n} - p_{2n} = v_n Z_n \quad \text{при } r = a. \quad (42.12)$$

Индекс  $n$  означает, что все величины берутся для формы колебаний с номером  $n$ .

Подставляя разложения (42.7) — (42.11) в граничные условия (42.12) и решая систему двух уравнений относительно коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$ , получим выражения, аналогичные формулам (40.12), (40.13). Поле вне оболочки будет равно

$$p_2(r, \theta) = e^{ik_2r \cos \theta} - \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \frac{j_n'(\mu_2)}{h_n^{(1)'}(\mu_2)} h_n^{(1)}(k_2r) P_n(\cos \theta) - \frac{\rho_2 c_2}{\mu_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (2n+1) h_n^{(1)}(k_2r) P_n(\cos \theta)}{[h_n^{(1)'}(\mu_2)]^2 (Z_n + Z_s^{(1)} + Z_s^{(2)})}. \quad (42.13)$$

Поле внутри оболочки определится в виде

$$p_1(r, \theta) = \frac{\rho_1 c_1}{\mu_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (2n+1) j_n(k_1r) P_n(\cos \theta)}{h_n^{(1)'}(\mu_2) j_n(\mu_1) (Z_n + Z_s^{(1)} + Z_s^{(2)})}. \quad (42.14)$$

Здесь  $Z_s^{(2)} = i\rho_2 c_2 h_n^{(1)}(\mu_2)/h_n^{(1)'}(\mu_2)$  и  $Z_s^{(1)} = -i\rho_1 c_1 j_n(\mu_1)/j_n'(\mu_1)$  — соответственно импедансы излучения сферы в наружную и внутреннюю области для формы колебаний с номером  $n$ .

При одинаковых средах внутри и вне оболочки ( $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2 = \rho c$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ) последнее выражение можно упростить, используя соотношение

$$j'_n(\mu) h_n^{(1)}(\mu) - h_n^{(1)'}(\mu) j_n(\mu) = -\frac{i}{\mu^2}.$$

В результате получим

$$p_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \theta)}{1 + \mu^2 \frac{Z_n}{\rho c} h_n^{(1)'}(\mu) j'_n(\mu)}. \quad (42.15)$$

Для определения поля в центре оболочки достаточно взять член  $n = 0$ , поскольку при  $n \geq 1$  имеем  $j_n(0) = 0$ .

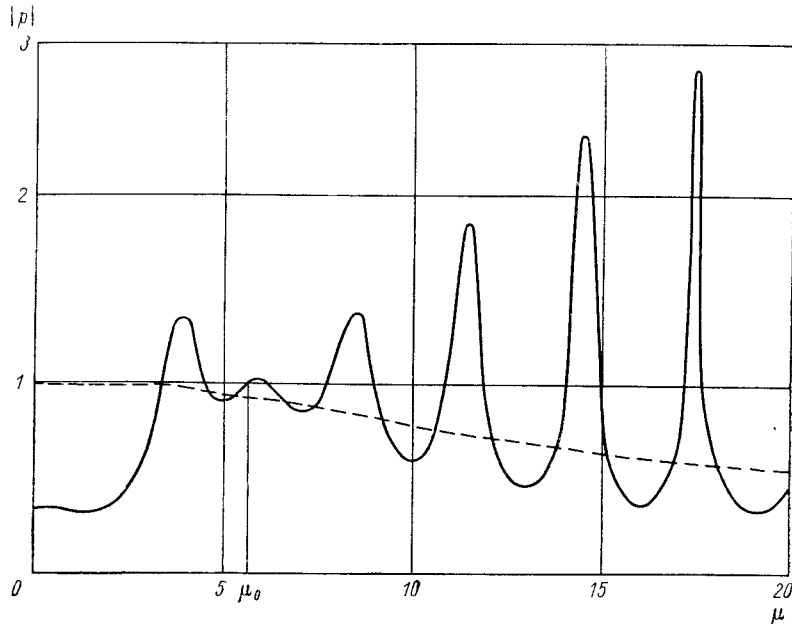


Рис. 129. Зависимость звукового давления в центре стальной сферической оболочки от волнового размера  $\mu = ka$ .

Зависимость звукового давления в центре оболочки от волнового размера  $\mu = ka$  показана на рис. 129. При расчете принималось  $E = 2 \cdot 10^{12}$  дн/см<sup>2</sup>;  $\rho_m = 7,8$  г/см<sup>3</sup>;  $\sigma = 0,3$ ;  $a = 25$  см;  $h = 0,5$  см;  $\rho c = 1,5 \cdot 10^5$  г/см<sup>3</sup>. Кривая аналогична графику для звукового давления в центре цилиндрической оболочки (рис. 118). Максимумы кривой являются следствием возникновения резонансов самой оболочки и резонансов жидкости во внутренней полости. При этом уровень звукового давления в центре оболочки может превосходить уро-

вень звукового давления в падающей волне, и оболочка ведет себя как концентратор звука. Анализ условий возникновения резонансов для сферической оболочки полностью эквивалентен анализу для цилиндрической оболочки (§ 40), и мы не будем его повторять.

На низких частотах, при  $\omega \ll \omega_0$  ( $\mu \ll \mu_0 = \frac{a\omega_0}{c}$ ), звуковое давление внутри оболочки резко уменьшается, поскольку на этих частотах импеданс  $Z_0$  увеличивается по закону  $1/\omega$ . В предельном случае из формулы (42.15) можно получить следующее асимптотическое выражение:

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{E}{(1-\sigma^2)\rho c^2} \cdot \frac{h}{a}}.$$

Пунктирной кривой на рис. 129 показана зависимость коэффициента прохождения звука от частоты для пластины толщиной, равной толщине сферической оболочки. При этом масштаб по горизонтальной оси пересчитан исходя из соотношения  $2\pi fa/c = \mu$ .

Прохождение звука через оболочку отличается от его прохождения через пластину, причем отличия наиболее заметны на низких частотах и в резонансных областях.

Таблица значений функции рассеяния звука цилиндром (18.42), (18.43)

$ka$	$\text{Re } \Phi_1 (0)$	$\text{Im } \Phi_1 (0)$	$\text{Re } \Phi_2 (0)$	$\text{Im } \Phi_2 (0)$	$\text{Re } \Phi_1 (\pi)$	$\text{Im } \Phi_1 (\pi)$	$\text{Re } \Phi_2 (\pi)$	$\text{Im } \Phi_2 (\pi)$
0,01	$-1,90 \cdot 10^{-8}$	$8,2 \cdot 10^{-5}$	-0,099	-0,3056	$6,6 \cdot 10^{-9}$	$-2,38 \cdot 10^{-4}$	-0,099	-0,3024
0,02	$-2,10 \cdot 10^{-7}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$	-0,135	-0,3526	$1,9 \cdot 10^{-8}$	$-9,50 \cdot 10^{-4}$	-0,135	-0,3544
0,03	$-1,50 \cdot 10^{-6}$	$7,1 \cdot 10^{-4}$	-0,151	-0,3704	$5,04 \cdot 10^{-7}$	-0,00212	-0,151	-0,3676
0,04	$-4,74 \cdot 10^{-6}$	0,00126	-0,1816	-0,3880	$1,60 \cdot 10^{-6}$	-0,00372	-0,1816	-0,3830
0,05	$-1,16 \cdot 10^{-5}$	0,00198	-0,2031	-0,4062	$3,93 \cdot 10^{-6}$	-0,00589	-0,2031	-0,3984
0,06	$-2,40 \cdot 10^{-5}$	0,00287	-0,2234	-0,4222	$8,20 \cdot 10^{-6}$	-0,00848	-0,2234	-0,4109
0,07	$-4,44 \cdot 10^{-5}$	0,00391	-0,2428	-0,4364	$1,53 \cdot 10^{-5}$	-0,01154	-0,2428	-0,4211
0,08	$-7,57 \cdot 10^{-5}$	0,00513	-0,2615	-0,4494	$2,63 \cdot 10^{-5}$	-0,01506	-0,2614	-0,4296
0,09	$-1,21 \cdot 10^{-4}$	0,00652	-0,2796	-0,4613	$4,24 \cdot 10^{-5}$	-0,01905	-0,2794	-0,4362
0,10	$-1,84 \cdot 10^{-4}$	0,00809	-0,2972	-0,4723	$6,50 \cdot 10^{-5}$	-0,02351	-0,2970	-0,4414
0,11	$-2,70 \cdot 10^{-4}$	0,00983	-0,3145	-0,4829	$9,59 \cdot 10^{-5}$	-0,02843	-0,3141	-0,4456
0,12	$-3,82 \cdot 10^{-4}$	0,01175	-0,3314	-0,4926	$1,37 \cdot 10^{-4}$	-0,03381	-0,3309	-0,4485
0,13	$-5,25 \cdot 10^{-4}$	0,01385	-0,3479	-0,5022	$1,90 \cdot 10^{-4}$	-0,03964	-0,3473	-0,4504
0,14	$-7,06 \cdot 10^{-4}$	0,01613	-0,3643	-0,5111	$2,57 \cdot 10^{-4}$	-0,04593	-0,3634	-0,4512
0,15	$-9,29 \cdot 10^{-4}$	0,01860	-0,3804	-0,5197	$3,41 \cdot 10^{-4}$	-0,05266	-0,3792	-0,4512
0,16	-0,00120	0,02125	-0,3962	-0,5279	$4,45 \cdot 10^{-4}$	-0,05985	-0,3947	-0,4502
0,17	-0,00153	0,02409	-0,4119	-0,5359	$5,71 \cdot 10^{-4}$	-0,06747	-0,4100	-0,4485
0,18	-0,00191	0,02711	-0,4274	-0,5436	$7,22 \cdot 10^{-4}$	-0,07553	-0,4250	-0,4459
0,19	-0,00237	0,03033	-0,4427	-0,5510	$9,01 \cdot 10^{-4}$	-0,08402	-0,4398	-0,4426
0,20	-0,00290	0,03374	-0,4579	-0,5582	0,00111	-0,09295	-0,4543	-0,4386

Продолжение

$ka$	$\text{Re } \Phi_1 (0)$	$\text{Im } \Phi_1 (0)$	$\text{Re } \Phi_2 (0)$	$\text{Im } \Phi_2 (0)$	$\text{Re } \Phi_1 (\pi)$	$\text{Im } \Phi_1 (\pi)$	$\text{Re } \Phi_2 (\pi)$	$\text{Im } \Phi_2 (\pi)$
0,21	-0,00352	0,03733	-0,4729	-0,5652	0,00136	-0,1023	-0,4686	-0,4338
0,22	-0,00422	0,04111	-0,4878	-0,5720	0,00164	-0,1120	-0,4827	-0,4284
0,23	-0,00503	0,04507	-0,5026	-0,5787	0,00197	-0,1221	-0,4965	-0,4223
0,24	-0,00594	0,04922	-0,5172	-0,5852	0,00235	-0,1327	-0,5100	-0,4157
0,25	-0,00697	0,05356	-0,5318	-0,5915	0,00277	-0,1436	-0,5234	-0,4084
0,26	-0,00812	0,05807	-0,5462	-0,5977	0,00325	-0,1549	-0,5364	-0,4006
0,27	-0,00940	0,06275	-0,5605	-0,6038	0,00378	-0,1665	-0,5493	-0,3922
0,28	-0,01082	0,06761	-0,5747	-0,6098	0,00438	-0,1785	-0,5619	-0,3832
0,29	-0,01239	0,07264	-0,5889	-0,6156	0,00504	-0,1909	-0,5742	-0,3737
0,3	-0,01410	0,07783	-0,6029	-0,6213	0,00578	-0,2035	-0,5862	-0,3637
0,4	-0,04140	0,1371	-0,7391	-0,6736	0,01748	-0,3448	-0,6912	-0,2385
0,5	-0,09037	0,2034	-0,8696	-0,7188	0,03744	-0,5003	-0,7640	-0,0773
0,6	-0,1603	0,2658	-0,9959	-0,7588	0,06138	-0,6502	-0,7991	0,1069
0,7	-0,2445	0,3163	-1,119	-0,7949	0,07930	-0,7765	-0,7927	0,3021
0,8	-0,3334	0,3529	-1,241	-0,8279	0,07917	-0,8675	-0,7426	0,4964
0,9	-0,4196	0,3793	-1,360	-0,8583	0,05133	-0,9176	-0,6491	0,6782
1,0	-0,5000	0,4015	-1,478	-0,8868	-0,00929	-0,9250	-0,5147	0,8370
1,1	-0,5758	0,4249	-1,595	-0,9135	-0,1034	-0,8902	-0,3442	0,9636
1,2	-0,6504	0,4525	-1,711	-0,9387	-0,2286	-0,8154	-0,1444	1,050
1,3	-0,7278	0,4844	-1,826	-0,9627	-0,3793	-0,7047	-0,0757	1,091
1,4	-0,8109	0,5181	-1,940	-0,9855	-0,5475	-0,5641	0,3065	1,082

$ka$	$\text{Re } \Phi_1 (0)$	$\text{Im } \Phi_1 (0)$	$\text{Re } \Phi_2 (0)$	$\text{Im } \Phi_2 (0)$	$\text{Re } \Phi_1 (\pi)$	$\text{Im } \Phi_1 (\pi)$	$\text{Re } \Phi_2 (\pi)$	$\text{Im } \Phi_2 (\pi)$
1,5	-0,900	0,5502	-2,053	-1,007	-0,7221	-0,4011	0,5368	1,022
1,6	-0,993	0,5779	-2,166	-1,028	-0,8895	-0,2231	0,7554	0,9121
1,7	-1,088	0,6002	-2,278	-1,048	-1,035	-0,3710	0,9511	0,7551
1,8	-1,181	0,6181	-2,390	-1,067	-1,146	0,1515	1,113	0,5566
1,9	-1,271	0,6340	-2,502	-1,086	-1,211	0,3379	1,234	0,3244
2,0	-1,358	0,6502	-2,613	-1,104	-1,221	0,5179	1,305	0,0676
2,1	-1,444	0,6685	-2,724	-1,122	-1,171	0,6873	1,321	-0,2030
2,2	-1,532	0,6889	-2,834	-1,139	-1,059	0,8421	1,280	-0,4758
2,3	-1,621	0,7106	-2,944	-1,155	-0,8898	0,9783	1,181	-0,7388
2,4	-1,714	0,7320	-3,054	-1,171	-0,6673	1,092	1,027	-0,9800
2,5	-1,808	0,7515	-3,163	-1,186	-0,4021	1,179	0,8229	-1,188
2,6	-1,903	0,7683	-3,272	-1,201	-0,1067	1,236	0,5758	-1,352
2,7	-1,999	0,7826	-3,381	-1,216	0,2043	1,258	0,2954	-1,465
2,8	-2,092	0,7954	-3,489	-1,230	0,5158	1,241	-0,0069	-1,519
2,9	-2,184	0,8080	-3,598	-1,245	0,8128	1,181	-0,3188	-1,511
3,0	-2,275	0,8216	-3,706	-1,258	1,081	1,075	-0,6270	-1,439
3,1	-2,366	0,8364	-3,814	-1,272	1,308	0,9235	-0,9180	-1,303
3,2	-2,457	0,8523	-3,922	-1,285	1,483	0,7274	-1,179	-1,109
3,3	-2,551	0,8683	-4,030	-1,298	1,599	0,4906	-1,398	-0,8632
3,4	-2,646	0,8836	-4,138	-1,311	1,651	0,2191	-1,564	-0,5735
3,5	-2,742	0,8974	-4,245	-1,323	1,637	-0,0784	-1,670	-0,2518

$ka$	$\text{Re } \Phi_1 (0)$	$\text{Im } \Phi_1 (0)$	$\text{Re } \Phi_2 (0)$	$\text{Im } \Phi_2 (0)$	$\text{Re } \Phi_1 (\pi)$	$\text{Im } \Phi_1 (\pi)$	$\text{Re } \Phi_2 (\pi)$	$\text{Im } \Phi_2 (\pi)$
3,6	-2,838	0,9096	-4,353	-1,335	1,558	-0,3909	-1,708	0,0891
3,7	-2,933	0,9207	-4,460	-1,347	1,418	-0,7056	-1,677	0,4353
3,8	-3,027	0,9313	-4,567	-1,359	1,223	-1,008	-1,575	0,7723
3,9	-3,120	0,9422	-4,674	-1,371	0,9804	-1,284	-1,405	1,085
4,0	-3,213	0,9539	-4,781	-1,382	0,6992	-1,519	-1,173	1,361
4,1	-3,306	0,9663	-4,887	-1,394	0,3898	-1,700	-0,8872	1,588
4,2	-3,400	0,9791	-4,994	-1,404	0,0631	-1,815	-0,5578	1,753
4,3	-3,496	0,991	-5,100	-1,415	-0,2693	-1,858	-0,1980	1,851
4,4	-3,592	1,003	-5,206	-1,426	-0,5964	-1,822	0,1779	1,874
4,5	-3,688	1,014	-5,313	-1,436	-0,9069	-1,706	0,5548	1,820
4,6	-3,784	1,024	-5,419	-1,447	-1,190	-1,514	0,9168	1,690
4,7	-3,879	1,034	-5,525	-1,457	-1,435	-1,251	1,248	1,488
4,8	-3,974	1,043	-5,631	-1,467	-1,634	-0,9281	1,536	1,221
4,9	-4,068	1,052	-5,737	-1,477	-1,779	-0,5583	1,766	0,8982
5,0	-4,162	1,062	-5,843	-1,487	-1,862	-0,1575	1,928	0,5322
5,1	-4,257	1,073	-5,948	-1,496	-1,879	0,2570	2,015	0,1374
5,2	-4,353	1,084	-6,054	-1,506	-1,826	0,6672	2,021	-0,2705
5,3	-4,448	1,094	-6,159	-1,515	-1,704	1,055	1,944	-0,6749



$ka$	$\text{Re } \Phi_1 (0)$	$\text{Im } \Phi_1 (0)$	$\text{Re } \Phi_2 (0)$	$\text{Im } \Phi_2 (0)$	$\text{Re } \Phi_1 (\pi)$	$\text{Im } \Phi_1 (\pi)$	$\text{Re } \Phi_2 (\pi)$	$\text{Im } \Phi_2 (\pi)$
5,4	-4,545	1,104	-6,265	-1,525	-1,514	1,403	1,787	-1,059
5,5	-4,641	1,113	-6,370	-1,534	-1,260	1,698	1,553	-1,407
5,6	-4,738	1,122	-6,476	-1,543	-0,951	1,192	1,252	-1,703
5,7	-4,833	1,130	-6,581	-1,552	-0,5938	2,076	0,8954	-2,935
5,8	-4,929	1,138	-6,686	-1,561	-0,2025	2,145	0,4955	-2,093
5,9	-5,024	1,147	-6,791	-1,570	0,2088	2,127	0,0688	-2,167
6,0	-5,119	1,156	-6,897	-1,578	0,6242	2,025	-0,3678	-2,155
6,5	-5,600	1,199	-7,421	-1,621	2,179	0,4856	-2,095	-0,8810
7,0	-6,080	1,238	-7,945	-1,661	1,771	-1,562	-1,939	1,341
7,5	-6,563	1,276	-8,467	-1,698	-0,4164	-2,320	0,0902	2,436
8,0	-7,045	1,311	-8,989	-1,735	-2,336	-1,008	2,170	1,275
8,5	-7,529	1,346	-9,509	-1,770	-2,121	1,373	2,311	-1,176
9,0	-8,013	1,379	-10,03	-1,804	0,07218	2,664	0,2613	-2,654
9,5	-8,498	1,410	-10,54	-1,836	2,277	1,492	-2,152	-1,695
10,0	-8,983	1,441	-11,06	-1,867	2,496	-1,192	-2,654	0,9222
10,5	-9,469	1,470	-11,58	-1,898	0,4240	-2,865	-0,6704	2,799
11,0	-9,955	1,498	-12,10	-1,927	-2,181	-1,897	2,042	2,122
11,5	-10,44	1,525	-12,62	-1,956	-2,898	0,8632	2,953	-0,5884

$ka$	$\text{Re } \Phi_1 (0)$	$\text{Im } \Phi_1 (0)$	$\text{Re } \Phi_2 (0)$	$\text{Im } \Phi_2 (0)$	$\text{Re } \Phi_1 (\pi)$	$\text{Im } \Phi_1 (\pi)$	$\text{Re } \Phi_2 (\pi)$	$\text{Im } \Phi_2 (\pi)$
12,0	-10,93	1,552	-13,13	-1,984	0,9025	2,910	1,121	-2,864
12,5	-11,41	1,577	-13,65	-2,011	2,051	2,352	-1,844	-2,540
13,0	-11,90	1,602	-14,16	-2,037	3,179	-0,4051	-3,195	0,1857
13,5	-12,39	1,627	-14,68	-2,062	1,357	-2,921	-1,597	2,843
14,0	-12,88	1,650	-15,19	-2,097	-1,774	-2,824	1,559	2,931
14,5	-13,37	1,673	-15,71	-2,112	-3,346	-0,0586	3,368	0,2737
15,0	-13,85	1,696	-16,22	-2,135	-1,876	2,876	2,083	-2,733
15,5	-14,34	1,717	-16,73	-2,159	1,379	3,202	-1,196	-3,282
16,0	-14,83	1,739	-17,25	-2,182	3,482	0,5396	-3,462	-0,7769
16,5	-15,32	1,760	-17,76	-2,204	2,417	-2,687	-2,562	2,534
17,0	-15,81	1,781	-18,27	-2,226	-0,9567	-3,499	0,7611	3,577
17,5	-16,30	1,801	-18,79	-2,247	-3,550	-1,098	3,472	1,309
18,0	-16,79	1,820	-19,30	-2,268	-2,891	2,387	3,018	-2,246
18,5	-17,28	1,839	-19,81	-2,289	0,4849	3,771	-0,2648	-3,805
19,0	-17,77	1,858	-20,32	-2,309	3,482	1,689	-3,391	-1,856
19,5	-18,26	1,877	-20,83	-2,329	3,315	-2,039	-3,437	1,876
20,0	-18,75	1,895	-21,35	-2,349	0,0785	-3,973	-0,2807	3,956

Таблица вещественных корней уравнения (34.10) для пластины, соприкасающейся с жидкостью двумя сторонами ( $\omega_0$ ) и одной стороной ( $\omega'_0$ )

$kh$	$\omega_0$	$\omega'_0$	$kh$	$\omega_0$	$\omega'_0$	$kh$	$\omega_0$	$\omega'_0$
0,010	12,95	11,84	0,065	4,44	4,16	0,400	1,400	1,314
0,012	11,67	10,69	0,070	4,25	3,99	0,450	1,272	1,191
0,014	10,68	9,81	0,075	4,08	3,83	0,500	1,167	1,084
0,016	9,90	9,10	0,080	3,93	3,69	0,550	1,065	0,988
0,018	9,25	8,52	0,085	3,80	3,57	0,600	0,978	0,902
0,020	8,71	8,03	0,090	3,67	3,45	0,650	0,898	0,822
0,025	7,67	7,10	0,095	3,56	3,34	0,700	0,825	0,748
0,030	6,94	6,41	0,100	3,45	3,25	0,750	0,757	0,678
0,035	6,33	5,88	0,110	3,26	3,07	0,800	0,693	0,611
0,040	5,86	5,46	0,150	2,71	2,56	0,850	0,632	0,549
0,045	5,48	5,11	0,200	2,26	2,14	0,900	0,575	0,486
0,050	5,16	4,82	0,250	1,96	1,85	0,950	0,520	0,426
0,055	4,88	4,57	0,300	1,73	1,63	1,000	0,467	0,369
0,060	4,65	4,35	0,350	1,55	1,46			

1. Агранович З. С., Марченко В. А. и Шестопалов В. П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. — ЖТФ, 1962, т. 32, № 4.
2. Айзенберг Г. З. Антенны ультракоротких волн. М., Связьиздат, 1957.
3. Альперт Л. Я., Гинзбург В. Л. и Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн. М., Гостехиздат, 1953.
4. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М., «Наука», 1967.
5. Бакушинский А. Б. О некотором численном методе решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода. — «Вычислительные методы и программирование», 1966, № 5.
6. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М., Гостехиздат, 1946.
7. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., «Наука», 1966.
8. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
9. Бреховских Л. М. Поверхностные волны в акустике. — «Акустический журнал», 1959, т. 5, вып. 1.
10. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М., «Советское радио», 1966.
11. Вайнштейн Л. А. Открытые волноводы и резонаторы. М., «Советское радио», 1967.
12. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М., ИЛ, 1959.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
14. Голубев А. С. Отражение плоских волн от цилиндрического дефекта. — «Акустический журнал», 1961, т. 7, вып. 2.
15. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
16. Грабарь Л. П. Применение полиномов Чебышева, ортонормированных на системе равноотстоящих точек для решения интегральных уравнений первого рода. — ДАН СССР, 1967, т. 172, № 4.
17. Гуань Дин-Хуа. К теории возбуждения поверхностных звуковых волн. — «Акустический журнал», 1961, т. 7, вып. 2.
18. Гутин Л. Я. О звуковом поле осциллирующего излучателя. — ЖТФ, 1939, т. 7, № 10.
19. Гутин Л. Я. Звуковое излучение бесконечной пластины, возбуждаемой нормальной к ней сосредоточенной силой. — «Акустический журнал», 1964, т. 10, вып. 4.
20. Дерюгин Л. Н. Уравнения для коэффициентов отражения волн от периодически неровной поверхности. — ДАН СССР, 1952, т. 87, № 6.
21. Заборов В. И. Теория звукоизоляции ограждающих конструкций. М., Госстройиздат, 1962.
22. Зелкин Е. Г. Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.
23. Зиновьев А. Л. и Филиппов Л. И. Методы аналитического выражения радиосигналов. М., «Высшая школа», 1966.

24. Иванов Е. А. К решению задачи о дифракции плоской волны на двух круговых цилиндрах в случае коротких волн. — «Радиотехника и электроника», 1966, т. 11, № 5.
25. Иванов Е. А. и Гельфонд Б. С. О дифракции поля продольного электрического излучателя на двух параллельных круговых цилиндрах. — Известия вузов, «Радиофизика», 1967, т. 10, № 5.
26. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, «Наука и техника», 1968.
27. Иванов Е. А. и Родов А. М. К решению некоторых краевых задач для уравнения Гельмгольца методом разделения переменных. — Изв. АН БССР, Сер. физ.-техн., 1964, № 4.
28. Каминир Г. Н. и Тартаковский Б. Д. Экспериментальное исследование ультразвуковых переходных слоев. — «Акустический журнал», 1956, т. 2, вып. 2.
29. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика. — «Успехи математических наук», 1948, т. 3, вып. 6.
30. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Л.—М., Физматгиз, 1962.
31. Ключкин И. И. Акустические измерения в судостроении. Л., «Судостроение», 1966.
32. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. М., ИЛ, 1956.
33. Коновалюк И. П. и Красильников В. Н. Влияние ребра жесткости на отражение плоской звуковой волны от тонкой пластины. — «Проблемы дифракции и распространения волн», 1965, вып. 4.
34. Коновалюк И. П. Дифракция плоских акустических волн на бесконечной пластине, подкрепленной ребрами жесткости. — Всесоюзная акустическая конференция, 4-я. Рефераты докладов. М., 1958.
35. Коузов Д. П. О низкочастотных движениях тонкого упругого слоя, разделяющего две жидкости. — «Проблемы дифракции и распространения волн», 1966, вып. 6.
36. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б. и Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения математической физики. М.—Л., Физматгиз, 1962.
37. Кравцов В. В. Интегральные уравнения в задачах дифракции. — «Вычислительные методы и программирование», 1966, № 5.
38. Красильников В. Н. Влияние тонкого упругого слоя на распространение звука в жидком полупространстве. — «Акустический журнал», 1960, т. 6, вып. 2.
39. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. Л.—М., ОНТИ, 1935.
40. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
41. Куртепов В. М. Звуковое поле точечного гармонического источника при наличии в однородной среде тонкой бесконечной пластинки. — «Акустический журнал», 1970, т. 16, вып. 1.
42. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
43. Лиходаева Е. А. и Шендеров Е. Л. Периферические волны, возникающие при дифракции плоской звуковой волны на тонкой цилиндрической оболочке. — «Акустический журнал», 1971, т. 17, вып. 1.
44. Ляв А. Математическая теория упругости. М.—Л., ОНТИ, 1935.
45. Лямшев Л. М. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1955.
46. Лямшев Л. М. К теории рассеяния звука тонким стержнем. — «Акустический журнал», 1956, т. 2, вып. 4.
47. Лямшев Л. М. Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой оболочке. — ДАН СССР, 1957, т. 115, № 2.
48. Лямшев Л. М. Дифракция звука на тонкой безграничной упругой цилиндрической оболочке. — «Акустический журнал», 1958, т. 4, вып. 2.
49. Лямшев Л. М. Рассеяние звука упругими цилиндрами. — «Акустический журнал», 1959, т. 5, вып. 1.
50. Лямшев Л. М. К вопросу о принципе взаимности в акустике. — ДАН СССР, 1959, т. 125, № 6.
51. Лямшев Л. М. Об одном способе решения задачи излучения звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. — «Акустический журнал», 1959, т. 5, вып. 1.
52. Лямшев Л. М. Некоторые интегральные соотношения в акустике движущейся среды. — ДАН СССР, 1961, т. 138, № 3.
53. Лямшев Л. М. Излучение звука упругими оболочками, возбуждаемыми турбулентным аэродинамическим потоком. — «Акустический журнал», 1961, т. 7, вып. 1.
54. Макаров В. И. и Кузьмичев Ю. М. Возбуждение цилиндрической оболочки ультразвуком. — «Акустический журнал», 1958, т. 4, вып. 3.
55. Макаров В. И. и Фадеева Н. А. Об излучении звука оболочками в звуковом поле. — «Акустический журнал», 1960, т. 6, вып. 2.
56. Малин В. В. К теории ленточных решеток конечного периода. — «Радиотехника и электроника», 1963, № 2.
57. Малужинец Г. Д. Дифракция волн. Физический энциклопедический словарь. М., «Советская энциклопедия», 1960.
58. Марков Г. Т. и Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. Л.—М., «Энергия», 1967.
59. Масалов С. А. и Таранов И. Е. Дифракция электромагнитных волн на пространственно периодической решетке, составленной из брусьев прямоугольного поперечного сечения. — «Радиотехника и электроника», 1964, т. 9, № 1.
60. Миллер М. А. и Галанов В. И. Использование понятия импеданса в теории поверхностных электромагнитных волн. — Изв. вузов, «Радиофизика», 1961, т. 4, № 5.
61. Михлин С. Г. Интегральные уравнения математической физики. М.—Л., Физматгиз, 1967.
62. Морс Ф. Колебания и звук. М., Гостехиздат, 1949.
63. Морс Ф. и Фешбах Г. Методы теоретической физики. II, М., ИЛ, 1960.
64. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке. М., ИЛ, 1952.
65. Нобл Б. Метод Винера—Хопфа. М., ИЛ, 1962.
66. Новацкий В. Динамика сооружений. М., Госстройиздат, 1963.
67. Плахов Д. Д. Акустическое поле бесконечной пластины при воздействии случайных пульсаций давления. — «Акустический журнал», 1966, т. 12, вып. 4.
68. Плахов Д. Д. Ближнее акустическое поле бесконечной пластины, возбуждаемой сосредоточенной силой. — «Акустический журнал», 1967, т. 13, вып. 2.
69. Плахов Д. Д. Звуковое поле многопролетной пластины. — «Акустический журнал», 1967, т. 13, вып. 4.
70. Плахов Д. Д. Прохождение акустической волны сквозь многослойную пластину, подкрепленную ребрами жесткости. — «Акустический журнал», 1968, т. 14, вып. 1.
71. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960.
72. Рыбак С. А. и Тартаковский Б. Д. Об одном случае полной звукоизоляции при прохождении звука через слоистосимметричную перегородку. — «Акустический журнал», 1961, т. 8, вып. 4.
73. Рыбак С. А. Прохождение звука через периодически неоднородную пластину в жидкости. — «Акустический журнал», 1962, т. 8, вып. 1.
74. Рыбак С. А. и Тартаковский Б. Д. Некоторые применения матрицы перехода к теории плоских волн в системе упругих слоев. — «Акустический журнал», 1962, т. 8, вып. 1.
75. Рыбак С. А. и Тартаковский Б. Д. О колебаниях тонких пластин. — «Акустический журнал», 1963, т. 9, вып. 1.
76. Рыжик И. С. и Градштейн И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
77. Рэлеи Дж. Теория звука. Т. 1—2. М., Гостехиздат, 1955.
78. Сивухин Д. В. Дифракция плоской звуковой волны на сферической полости. — «Акустический журнал», 1954, т. 1, вып. 1.
79. Скучик Е. Основы акустики. Т. 1. М., ИЛ, 1958.
80. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. М., «Наука», 1967.

81. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
82. Сташкевич Д. П. Акустика моря. Л., «Судостроение», 1966.
83. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. М., Гостехиздат, 1948.
84. Таблицы интегралов Френеля. М., Изд-во АН СССР, 1953.
85. Таблицы модифицированных функций Ханкеля порядка  $1/3$  и их производных. М., Вычислит. центр, 1965. (Библ. матем. таблиц. Вып. 32).
86. Гамм И. Е. и Бреховских Л. М. О вынужденных колебаниях бесконечной пластины, соприкасающейся с жидкостью. — ЖТФ, 1946, т. 16, № 7.
87. Гартаковский Б. Д. Звуковые переходные слои. — ДАН СССР, 1950, т. 75, № 1.
88. Гартаковский Б. Д. К теории распространения плоских волн через однородные слои. — ДАН СССР, 1950, т. 71, № 3.
89. Гартаковский Б. Д. Ультразвуковые интерференционные фильтры с изменяемыми частотами пропускания. — «Акустический журнал», 1957, т. 3, вып. 2.
90. Гернстон Р. Распространение волн в жидкостях и твердых телах. В кн.: Физическая акустика. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Т. 1, Ч. А. Под ред. У. Мезона. М., «Мир», 1966.
91. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1959.
92. Тимошенко С. П. и Войновский - Кригер С. П. Пластины и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
93. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. — ДАН СССР, т. 151, 1963, № 3.
94. Тихонов А. Н. и Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
95. Тютенко В. В. Рассеяние плоских волн цилиндрической полостью в изотропной упругой среде. — «Акустический журнал», 1959, т. 5, вып. 1.
96. Уилкинсон Т. и Калнинс А. Несимметричные задачи динамики упругих сферических оболочек. — «Прикладная механика», 1965, № 3.
97. Уилкинсон Т. и Калнинс А. Деформация открытых сферических оболочек под действием произвольно расположенных сосредоточенных сил. — «Прикладная механика», 1966, № 2.
98. Федорюк М. В. Метод стационарной фазы для многомерных интегралов. — «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1962, т. 2, № 1.
99. Фок В. А. Распределение токов, возбуждаемых плоской волной по поверхности проводника. — ЖЭТФ, 1945, т. 12.
100. Фок В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М., Изд-во АН СССР, 1946.
101. Фрадин А. З. Антенны сверхвысоких частот. М., «Советское радио», 1957.
102. Фридлиндер Ф. Звуковые импульсы. М., ИЛ, 1962.
103. Хенл Х., Мауэ А. и Вестпфаль К. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
104. Шейнман Л. Е. и Шендеров Е. Л. Прохождение звукового импульса через пластину при наклонном падении. — «Акустический журнал», 1969, т. 15, вып. 3.
105. Шендеров Е. Л. Прохождение звуковой волны сквозь тонкую пластину с промежуточными опорами. — «Акустический журнал», 1963, т. 9, вып. 3.
106. Шендеров Е. Л. Прохождение звуковой волны через упругую цилиндрическую оболочку. — «Акустический журнал», 1963, т. 9, вып. 2.
107. Шендеров Е. Л. Излучение звука системой источников сквозь упругую цилиндрическую оболочку. — «Акустический журнал», т. 9, 1963, вып. 3.
108. Шендеров Е. Л. Дифракция звука на щелях в экране конечной толщины. — «Акустический журнал», 1964, т. 10, вып. 3.
109. Шендеров Е. Л. О связи между звукоизлучением пластин и их звукопрозрачностью. — «Акустический журнал», 1966, т. 12, вып. 3.
110. Шендеров Е. Л. Прохождение звука сквозь экран произвольной волновой толщины с отверстиями. — «Акустический журнал», 1970, т. 16, вып. 1.
111. Янольскийкий А. А. Абсолютная градуировка электроакустических преобразователей методом взаимности в квазисферическом поле. — Труды Комиссии по акустике, сб. № 8, Изд-во АН СССР, 1955.
112. Bezuska S. I. Scattering of Underwater plane Ultrasonic Waves by a liquid Cylindrical Obstacles. — «JASA», 1953, v. 25, N 6.
113. Budach P. Der Transmissionsgrad ebener, schallharter schlitzzitter geringer Tiefe. — «Hochfrequenztechnik und Elektroakustik», 1968, Bd. 77, Febr., Heft 1.
114. Coupley L. C. Integral Equation Method for Radiation from Vibrating Bodies. — «JASA», 1967, v. 41, N 4, part 1.
115. Cremer L. Theorie der Luftschalldämpfung Zylindrischer Schallen. — «Acustica», 1955, v. 5, N 5.
116. Diericks K. I., Hickling R. Echoes from Aluminum Spheres in Water. — «JASA», 1967, v. 42, N 2.
117. Diericks K. I., Goldsberry T. G., Horton C. W. Circumferential waves in thin-walled Cylinders in Water. — «JASA», 1963, v. 35, N 1.
118. Doolittle R. D., Uberall H. Sound Scattering by Elastic Cylindrical Shells. — «JASA», 1966, v. 39, N 2.
119. Faran I. Sound Scattering by Solid Cylinder and Spheres. — «JASA», 1951, v. 23, N 4.
120. Fay R. D., Fortier O. V. Transmission of Sound Through Steel Plates Immersed in Water. — «JASA», 1951, v. 23, N 3.
121. Feit D. Pressure Radiated by a Point Excited Elastic Plate. — «JASA», 1966, v. 40, N 6.
122. Finney W. F. Reflection of Sound from Submerged Plates. — «JASA», 1948, v. 20, 626.
123. Goodman R. D., Stern R. Reflection and Transmission of Sound by Elastic Spherical Shells. — «JASA», 1962, v. 34, N 3.
124. Greenspan I. E. Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell-Comparison of the Exact Theory with Approximate Theory. — «JASA», 1960, v. 32, N 5.
125. Hickling R. Analysis of Echoes from a Solid Elastic Spheres in Water. — «JASA», 1962, v. 34, N 10.
126. Hickling R. Analysis of Echoes from a Hollow Metallic Sphere in Water. — «JASA», 1964, v. 36, N 6.
127. Hickmann I. S., Risty D. E., Stewart E. S. Properties of Sandwich-Type Structures as Acoustic Windows. — «JASA», 1957, v. 29, N 7.
128. Horton C. W. Acoustic Impedance of an Outgoing Cylindrical Wave. — «JASA», 1962, v. 34, N 10.
129. Horton C. W. Theoretical Analysis of Scattering Short Impulses from Thin-Walled Metall Cylinders Immersed in Water. — «JASA», 1962, v. 34, N 12.
130. Junger M. C. Sound Scattering by a Thin Elastic Shells. — «JASA», 1952, v. 24, N 4.
131. Käsnter S. Das Reflexionsvermögen und Durchlässigkeit eines Schichtsystems visko-elastischer Medien bei Einfall einer ebenen Schallwelle unter beliebigen Winkel. — «Annalen der Physik», 1956, Bd. 18, N 3—4; 1957, Bd. 19, N 3—5.
132. Keppard E. H. The new Approach to Shell Theory circular Cylinders. — «J. Appl. Mech.», 1953, v. 20, N 1.
133. Kporoff L. Scattering of Compression Waves by a Spherical Obstacles. — «Geophysics», 1959, v. 24, N 1.
134. Kporoff L. Scattering of Shear Waves by Spherical Obstacles. — «Geophysics», 1959, v. 24, N 2.
135. Kurtze G., Bolt R. H. On the Interaction between Plate Bending Waves and their Radiation Load. — «Acustica», 1959, Bd. 9, Akustische Beich., 1.
136. Laird D. T., Cohen H. Directionality Patterns for Acoustic Radiation from a Course on a Rigid Cylinder. — «JASA», 1952, v. 24, N 1.
137. Lamb G. L. The Transmission of a Spherical Sound Wave Through a Thin Elastic Plate. — «Annals of Physics», New York, 1957, v. 1, N 1.
138. Lee F. A. Scattering of a Cylindrical Wave of Sound by an Elastic Cylinder. — «Acustica», 1963, v. 13, N 13.



139. Lindh G. The Transmission and Reflection of an Exponential Shock Wave Impinging on a Homogeneous Elastic Plate, Immersed in Liquid. — «Acustica», 1955, v. 5, N 5.

140. Maidanik C., Kerwin E. M. Influence of Fluid Loading on the Radiation from Infinite Plates below the Critical Frequency. — «JASA», 1966, v. 40, N 5.

141. Makarov W. I., Rshkevkin S. N. Untersuchungen der Schallausbreitung in festen Körpern, Platten und Schalen mittels eines optischen Verfahrens und Dunkelfeld. Proc. 3rd Intern. Congress on Acoustic, 1959.

142. Mei K., I. Van Bladel. Scattering by Perfectly Conducting Rectangular Cylinders. — «IEEE Trans. on Antennas and Prop.», 1963, AP-11, N 2.

143. Mindlin R. D. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates. — «J. Appl. Mech.», 1951, v. 18, N 1.

144. Osborn M. F. M., Hart S. D. Transmission, Reflection and Guiding of an Exponential pulse by a Steel Plate in Water. Part I. Theory. «JASA», 1945, v. 17, N 1; Part II. Experiment. «JASA», 1946, v. 18, N 1.

145. Prasad C. On Vibration of Spherical Shells. — «JASA», 1964, v. 36, N 3.

146. Reissner R. Der senkrechte und schräge Durchtritt einer in einem flüssigen medium erzeugten ebenen Dilatations (Longitudinal). Welle durch eine in diesem Medium belindliche planparallele feste Platte. — «Helv. phys. Acta», 1938, Bd. 11, N 140.

147. Severin H. Zur Analogie Akustischer und Electromagnetischen Randwertprobleme. — «Akustische Beichefte», 1959, Bd. 1.

148. Thompson W. T. Transmission on Elastic Waves Through a Stratified Solid Material. — «J. Appl. Phys.», 1950, v. 21, N 2.

149. Tversky V. T. On Scattering of Waves by the Infinite Grating of Circular Cylinders. — «IRE Trans. of Antennas and Propagation», 1962, v. AP-10, N 11.

150. Uberall H., Doolittle R. D., McNickolas J. K. Use of Sound Pulses for a study of Circumferential Waves. — «JASA», 1966, v. 39, N 3.

151. White P. H. Sound Transmission Through a Finite, Closed Cylindrical Shell. — «JASA», 1966, v. 40, N 5.

152. Ying C. F., Truell R. Scattering of a Plane Longitude Wave by a Spherical Obstacle in an isotropically elastic Solid. — «J. Appl. Phys.», 1956, v. 27, N 9.

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава 1. Основные уравнения звуковых полей . . . . .</b>	<b>5</b>
§ 1. Уравнение Гельмгольца и граничные условия . . . . .	—
Волновое уравнение (5). Потенциал скорости (6). Уравнение Гельмгольца (7). Затухание волны (8). Типы граничных условий (9).	
§ 2. Об аналогии между акустическими и электромагнитными краевыми задачами . . . . .	11
<b>Глава 2. Применение формулы Кирхгофа к расчету звуковых полей . . . . .</b>	<b>14</b>
§ 3. Формула Кирхгофа . . . . .	—
Интегральное представление звуковых полей (14). Физический смысл формулы Кирхгофа (17). Условие излучения (19). Излучение звука поверхностью во внешнюю область (21). Формула Кирхгофа для двух измерений (22). Формула Кирхгофа для звукового поля при наличии отражающей поверхности (23).	
§ 4. Излучение звука плоской поверхностью . . . . .	26
Формулы Гюйгенса для трехмерной области (26). Формулы Гюйгенса для двумерной области (30).	
§ 5. Вычисление звуковых полей плоских излучателей при помощи интеграла Фурье . . . . .	30
Излучение звука волной, бегущей по поверхности (31). Применение интеграла Фурье (31). Неоднородные волны (34).	
§ 6. Применение интегральных уравнений к решению задач излучения и дифракции звука . . . . .	35
Главное значение интеграла (35). Приведение формулы Кирхгофа к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода (35).	
§ 7. Дифракция и излучение звука импедантным цилиндром с произвольной формой поперечного сечения . . . . .	39
Составление интегрального уравнения для задачи дифракции (39). Вычисление волны, рассеянной телом (42). Излучение звука участком цилиндра, расположенным в импедансном экране (43). Рассеяние звука на прямоугольном брусе (44).	
§ 8. Приближенные методы расчета звуковых полей . . . . .	47
Основные допущения, принимаемые при расчетах звуковых полей, излучаемых поверхностью (48). Отражение звука от препятствия (50). Дифракция звука на отверстиях в экране (52).	
§ 9. Метод стационарной фазы . . . . .	54
Метод стационарной фазы для однократных интегралов (55). Метод стационарной фазы для двукратных и многократных интегралов (55). Дополнительные замечания о методе стационарной фазы (57).	
§ 10. Локационное отражение от гладких поверхностей . . . . .	59
<b>Глава 3. Применение функций Грина к определению звуковых полей . . . . .</b>	<b>63</b>

§ 11. Дельта-функция и неоднородное волновое уравнение . . . . .	63	§ 23. О сходимости рядов, определяющих звуковые поля в цилиндрических координатах . . . . .	168
Понятие о дельта-функции (63). Неоднородное волновое уравнение (66).		Асимптотические представления цилиндрических функций (168). Примеры (169).	
§ 12. Функции Грина . . . . .	67	§ 24. Излучение и дифракция звука цилиндром большого волнового радиуса . . . . .	172
Физический смысл функции Грина (67). Свойства функций Грина (68). Применение функций Грина для решения задач излучения звука (71). Примеры функций Грина (73).		Ряд Ватсона для звукового поля линейного источника, расположенного на цилиндре (173). Вычисление коэффициентов $B_s$ (177). Соскальзывающие волны (178). Волины, многократно обогнувшие цилиндр (180). Поле в освещенной области (180). Дифракция звука на цилиндре больших волновых размеров (184).	
§ 13. Излучение звука системой круглых поршней, расположенных на одной оси . . . . .	75	Глава 6. Взаимодействие звуковой волны с упругими телами . . . . .	186
§ 14. Формулировка принципа взаимности . . . . .	78	§ 25. Сведения из теории упругости . . . . .	—
Излучение звука объемными источниками (78). Излучение звука колеблющимися поверхностями (80). Сравнение свойств преобразователя как излучателя и как приемника (81). Теорема взаимности в механике (82). Теорема взаимности для дипольных источников (83). Теорема взаимности в акустике движущейся среды (83).		§ 26. Уравнения распространения волн в упругом теле . . . . .	189
§ 15. Принцип взаимности для упругих поверхностей . . . . .	83	§ 27. Дифракция звука на упругом цилиндре . . . . .	193
Вывод соотношений взаимности для упругих тел (84). О связи между звуковыми полями, излученными и рассеянными упругими поверхностями (86).		§ 28. Дифракция звука на колеблющемся стержне . . . . .	199
Глава 4. Применение теории распространения волн в трубе к расчету звуковых полей . . . . .	87	§ 29. Рассеяние продольных волн на цилиндрической полости в упругой среде . . . . .	202
§ 16. Излучение звука отверстием в жестком экране . . . . .	—	Глава 7. Прохождение звуковых волн через однородные упругие пластины	206
Составление системы уравнений (87). Вычисление импедансов излучения отверстия в экране для различных форм колебаний (89). Метод вычисления функций $F_n(\mu)$ , $\Psi_n(\mu)$ (92). Вычисление диаграммы направленности отверстия (98).		§ 30. Прохождение звуковой волны через жидкий слой . . . . .	—
§ 17. Дифракция звука на щелях в экране конечной толщины . . . . .	101	Прохождение звука через слой жидкости (206). Прохождение звука через слой воздуха в воде (212).	
О решении бесконечных систем алгебраических уравнений (101). Составление системы уравнений (103). Расчет коэффициента прохождения звука (109).		§ 31. Прохождение звука через упругую пластину . . . . .	213
Глава 5. Применение цилиндрических координат для расчета звуковых полей . . . . .	117	§ 32. Прохождение звука через тонкую пластину . . . . .	216
§ 18. Представление звуковых полей в цилиндрических координатах . . . . .	—	Симметричные и антисимметричные колебания тонкой пластины (216). Вычисление коэффициентов отражения и прохождения звука (219). Приближенные формулы без учета продольных волн (221). Влияние продольных (симметричных) волн на прохождение звука (225). Случай, когда пластина разделяет две различные жидкости (227). Эквивалентная схема прохождения звука через тонкую пластину (229). Импедансы симметричных и антисимметричных колебаний пластины произвольной толщины (229).	
Запись звуковых полей в цилиндрической системе координат (117). Разложение плоской волны по цилиндрическим функциям (121). Излучение звука цилиндром (122). Дифракция плоской звуковой волны на идеальных и импедансных цилиндрах при наклонном падении звука (126).		§ 33. Прохождение звука через систему упругих слоев . . . . .	231
§ 19. Дифракция цилиндрических звуковых волн на идеальных и импедансных цилиндрах . . . . .	131	Применение матриц перехода для вычисления коэффициентов прохождения и отражения звука (231). Определение элементов матрицы перехода (233). Система из двух твердых и одного жидкого слоя (236).	
Теорема сложения для цилиндрических функций (131). Дифракция произвольной цилиндрической волны на абсолютно жестком цилиндре (131). Дифракция цилиндрической волны на импедансном цилиндре (135).		§ 34. Прохождение сферической звуковой волны через пластину . . . . .	241
§ 20. Дифракция и излучение волны произвольной системой цилиндров . . . . .	139	Разложение сферической волны по плоским волнам (242). Представление волны, прошедшей через пластину, в виде набора плоских волн (243). Пространственные и неоднородные волны в докритическом случае (246). Пространственные и неоднородные волны на частоте выше критической (250). Коэффициент прохождения для сферической звуковой волны (253). Влияние среды на скорость распространения волны изгиба (258).	
Излучение звука произвольной системой цилиндров (140). Анализ возможности решения бесконечной системы уравнений (142). Дифракция звука на произвольной системе цилиндров (144). Дифракция звука на решетке, состоящей из цилиндрических стержней (145).		Глава 8. Прохождение звуковой волны через неоднородные пластины . . . . .	261
§ 21. Излучение звука конечным по высоте цилиндром с цилиндрическим экраном . . . . .	151	§ 35. Об определении коэффициента прохождения звука через неоднородные пластины . . . . .	—
Метод перевала (151). Общее решение для произвольного распределения колебательной скорости (153). Излучение цилиндра, совершающего осесимметричные колебания (155). Излучение звука конечным цилиндром, расположенным в жестком экране (157). Излучение звука точечным источником, расположенным на жесткой цилиндрической поверхности (160). Пересчет звукового давления при переходе от бесконечно длинного цилиндра к ограниченному цилиндру (161).		§ 36. Прохождение звука через ограниченную пластину . . . . .	264
§ 22. Влияние цилиндрических рассеивателей на звуковое поле плоского направленного излучателя . . . . .	163	Вывод основных уравнений (264). Импедансы излучения ограниченной пластины (268). Прохождение звука через пластину и зеркальное отражение (269). Результаты расчетов (275).	
		§ 37. Прохождение звуковой волны через тонкую пластину с промежуточными опорами . . . . .	277
		Вывод системы уравнений (277). Определение импедансов излучения (281). Расчет коэффициента прохождения звука (284).	

§ 38. Прохождение звука через пластину, подкрепленную ребрами жесткости . . . . .	288
Постановка задачи (288). Излучение звука силами и моментами, распределенными по пластине (290). Вычисление коэффициента прохождения звука (292). Механические импедансы колебаний ребер жесткости (293). Расчет коэффициента прохождения звука через тонкую пластину с ребрами жесткости (296).	
§ 39. О связи излучения звука пластинами с их звукопрозрачностью . . . . .	298
Общее решение для произвольной пластины, погруженной в жидкость (298). Случай, когда пластина разделяет две различные среды (300). Случай ограниченной неоднородной пластины (301).	
Глава 9. Прохождение звука через упругие оболочки . . . . .	304
§ 40. Прохождение звука через упругую цилиндрическую оболочку . . . . .	—
Прохождение звука через тонкую цилиндрическую оболочку (304). Полуходящие волны вблизи оболочки (315). Возникновение каустик внутри оболочки (316).	
§ 41. Излучение звука через тонкую цилиндрическую оболочку . . . . .	317
Излучение звука прозрачными источниками (317). Влияние цилиндрической оболочки на поле излучения цилиндра (319). Расчет с учетом влияния оболочки на колебательную скорость цилиндра (322).	
§ 42. Прохождение звука через сферическую оболочку . . . . .	326
Определение механических импедансов тонких сферических оболочек (326). Прохождение звука через тонкую сферическую оболочку (328).	
Приложение . . . . .	332
Литература . . . . .	339

*Евгений Львович ШЕНДЕРОВ*

**ВОЛНОВЫЕ ЗАДАЧИ ГИДРОАКУСТИКИ**

Рецензенты д-р физ.-мат. наук *Г. Д. Малюжинец*, д-р физ.-мат. наук *С. Н. Ржевский*  
 Редактор *Н. М. Розенгауз*  
 Художественный редактор *Н. Ф. Шакуро*  
 Технический редактор *Р. К. Чистякова*  
 Корректоры: *И. Е. Ковтун, В. Д. Макаров*  
 Оформление переплета художника  
*Б. Н. Осенчакова*

Сдано в набор 10/V 1971 г. М-24563. Подписано к печати 27/IX 1971 г. Формат издания 60×90 1/16 Печ. л. 22 Уч.-изд. л. 21,2. Изд. № 2348-69 Тираж 2900 экз. Цена 1 р. 36 к. Заказ № 1130 Бумага для глубокой печати № 1

Издательство «Судостроение»,  
 Ленинград, Д-65, ул. Гоголя, 8

Ленинградская типография № 6  
 Главполиграфпрома  
 Комитета по печати  
 при Совете Министров СССР  
 Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10