ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
1152

PUBLICATIONS
DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE
L'UNIVERSITÉ DE NANCAGO
I

THÉORIE
DES
GROUPES DE LIE

Tome II
GROUPES ALGÉBRIQUES

PAR
Claude CHEVALLEY

Paris
HERMANN & C^{ie}, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6
1951

КЛОД ШЕВАЛЛЕ

ТЕОРИЯ ГРУПП ЛИ

II

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Перевод с французского
Л. А. КАЛУЖНИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва — 1958

АННОТАЦИЯ

Первый том монографии Клода Шевалле по теории групп Ли был издан в США в 1946 г.; в 1951 г. во Франции вышел второй том, а в 1955 г. — третий. Перевод первого тома вышел в Издательстве иностранной литературы в 1948 г.; перевод третьего тома выйдет из печати вскоре после перевода второго тома.

Настоящий, второй, том посвящен изложению теории алгебраических групп (групп матриц, задаваемых алгебраическими соотношениями между коэффициентами), теории, развившейся за последние годы в значительной мере в работах самого автора. Это первое в мировой литературе систематическое изложение теории алгебраических групп.

Третий том посвящен теории алгебр Ли.

Книга рассчитана на математиков — студентов старших курсов, аспирантов и научных работников.

Редакция литературы по математическим наукам

Заведующий редакцией доцент Б. В. ШАБАТ

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга является в некоторой мере продолжением моей „Теории групп Ли, I“, опубликованной в издательстве Princeton University Press в 1944 г.[1]). Но темы, рассматриваемые здесь, сильно отличаются от тех, которые затрагивались в „Теории групп Ли, I“, и доказательства основных теорем, содержащиеся в настоящем томе, не зависят от общей теории групп Ли.

В первой главе собран ряд определений и теорем из общей алгебры, необходимых для дальнейшего.

Вторая глава посвящена теории линейных алгебраических групп. Изучение алгебраических групп было начато в прошлом столетии Маурером в ряде мемуаров (особенно следует отметить работу „Zur Theorie der continuierlichen, homogenen und linearen Gruppen“, Sitz. d. Bayer. Acad., **24**, 1894); именно, Маурер указал условия, которым должна удовлетворять алгебра Ли линейной группы, для того чтобы группа была алгебраична. К этому вопросу недавно вернулись, с одной стороны, А. Ф. Туан и я, с другой — Е. Р. Кольчин; в то время как работы Маурера касались групп матриц с комплексными коэффициентами, указанные недавние работы направлены на изучение групп с коэффициентами из произвольного поля. Основная цель гл. II — показать, как классический аппарат теории Ли (соответствие между группами и алгебрами Ли) может быть использован для изучения алгебраических линейных групп над произвольным полем K характеристики 0. Так, например, если L — надполе конечной степени над K, то с помощью теории алгебр Ли удается определить все подгруппы мультипликативной группы поля L, которые, если их рассматривать как линейные группы преобразований структуры векторного пространства L

---

[1]) Русский перевод: Клод Шевалле, Теория групп Ли, I (ИЛ, 1948); цитируется как „том I“. — *Прим. перев.*

над K, являются алгебраическими группами. Можно надеяться, что эти группы будут играть некоторую роль в арифметической теории поля L (это уже имеет место в случае, когда K — некоторое поле алгебраических чисел, а L — циклическое расширение K).

Многие вопросы еще остаются открытыми в теории алгебраических линейных групп. В особенности это относится к теории линейных групп над полями характеристики $\neq 0$, которая находится еще в зачаточном состоянии, главным образом из-за того, что аппарат теории Ли не дает в этом случае таких же полных результатов, как в случае характеристики 0. Тем не менее работы Е. Р. Кольчина [см. его мемуар „Algebraic matric groups and the Picard — Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations", Ann. of Math., **49** (1948)] и особенно тот факт, что ему удалось распространить теорему Ли о линейных разрешимых группах на случай характеристики $\neq 0$, позволяют надеяться, что на этом пути будут получены важные результаты. С другой стороны, даже в случае характеристики 0 еще неизвестно, является ли рациональным всякое многообразие алгебраической линейной группы (хотя можно доказать, что над алгебраически замкнутым полем это так).

Наконец, следовало бы полностью построить теорию алгебраических многообразий, которые являются многообразиями групп. Это было сделано А. Вейлем для случая абелевых многообразий в его книге „Variétés abéliennes et courbes algébriques" (Hermann, Paris, 1948). Случай, который он рассматривает, является как раз тем, в котором нельзя почерпнуть никаких сведений из рассмотрения присоединенной группы (так как сама группа абелева). Остается объединить его результаты с теми, которые в общем случае получаются из изучения присоединенной группы (эта последняя линейна), чтобы получить теорию всех алгебраических групп, как линейных, так и нелинейных.

* * *

Мы часто пользуемся результатами, содержащимися в уже вышедших томах „Элементов математики" Н. Бурбаки [1])

---

[1]) Часть из них приведена без доказательств в добавлении переводчика в конце настоящей книги. — *Прим. перев.*

(N. Bourbaki, Éléments de Mathématique); знание гл. V книги „Алгебра“ из этой серии особенно необходимо для понимания многих наших доказательств. При ссылках на „Элементы математики“ мы будем писать „Бурбаки“ и указывать том, параграф и n° места, к которому мы отсылаем, а также номер предложения или теоремы, о которых идет речь.

* * *

Главы, которые будут опубликованы позже, будут посвящены следующим темам[1]: гл. III — общей теории полупростых алгебр Ли; гл. IV — классификации полупростых алгебр и их представлений; гл. V — когомологиям алгебр Ли; гл. VI — топологии групп Ли.

* * *

Я не хотел бы закончить это введение, не выразив мою признательность „Гугенхеймовскому фонду“ за очень ценную для меня материальную поддержку при подготовке труда, начало которого я представляю на рассмотрение математической общественности. Я также хочу поблагодарить Ж.-П. Серра, любезно взявшего на себя чтение корректур.

---

[1] Фактическое расположение дальнейшего материала в третьем томе „Теории групп Ли“ отличается от первоначального плана. — *Прим. перев.*

Глава I

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. Тензорная алгебра

Определение 1. *Алгебру, обладающую единицей*[1], *мы будем называть унитарной алгеброй. Мы будем обозначать единицу унитарной алгебры знаком* 1 (*если не оговорено противное*) *и отождествлять ее с единицей основного поля. Вообще, каждый элемент* $a \cdot 1$ *алгебры будет отождествляться с элементом* a *основного поля. Элементы основного поля будем называть скалярами алгебры. Под унитарным гомоморфизмом унитарной алгебры* A *в унитарную алгебру* B *мы будем понимать гомоморфизм, отображающий единицу алгебры* A *в единицу алгебры* B.

Напомним, что системой образующих алгебры A называется такое подмножество E алгебры A, которое не содержится ни в какой подалгебре, строго содержащейся в алгебре A. В случае унитарных алгебр вместо понятия системы образующих уместно рассматривать более общее понятие системы почти-образующих алгебры A, определяемое следующим образом:

Определение 2. *Пусть* E — *подмножество унитарной алгебры* A. *Мы будем говорить, что* E *является системой почти-образующих алгебры* A *или что* E *почти порождает алгебру* A, *если подмножество* E *становится системой образующих после прибавления к нему единицы алгебры* A.

Пусть нам заданы поле K и какое-нибудь множество E. Исходя из этих данных, мы построим некоторую ассоциативную алгебру над полем K, которая будет называться свободной ассоциативной алгеброй множества E над полем K. Пусть сперва M — свободная полугруппа, порожденная множеством E

---

[1] В первом томе „Теории групп Ли“ употреблялся термин „нейтральный элемент“. — *Прим. перев.*

(ср. Бурбаки, Алгебра, гл. I, § 1, n°3[1])). Она состоит из „слов“, образованных из элементов множества E, причем каждое слово является произведением в полугруппе M конечной последовательности элементов множества E. (Случай пустой последовательности не исключается; ей соответствует единичный элемент полугруппы M.) Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n'}$ — две последовательности элементов множества E, то равенство

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n'} a'_i$$

имеет место тогда и только тогда, когда $n = n'$ и $a_i = a'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Элемент множества E и слово, соответствующее одноэлементной последовательности, состоящей из этого элемента, отвечают друг другу взаимно однозначно; мы их будем отождествлять. Пусть, далее, L — алгебра полугруппы M над полем K (ср. Бурбаки, Алгебра, гл. II, § 7, n°9). Полугруппа M отождествляется с подмножеством алгебры L, замкнутым относительно операции умножения в L, причем умножение в полугруппе M является ограничением умножения в алгебре L на множество $M \times M$. Кроме того, множество M образует базис алгебры L, если эту алгебру рассматривать как векторное пространство над полем K. Ясно, что L является ассоциативной унитарной алгеброй над полем K и что множество E есть система почти-образующих алгебры L. Эту алгебру L и называют *свободной ассоциативной алгеброй множества E над полем K*.

Предложение 1. *Пусть K — поле, E — множество и A — унитарная ассоциативная алгебра над полем K. Пусть f — отображение множества E в алгебру A. Тогда существует один и только один унитарный гомоморфизм f^* свободной ассоциативной алгебры L множества E над полем K в алгебру A, продолжающий отображение f*[2]). *Элементы $f(E)$ составляют систему почти-образующих подалгебры $f^*(L)$ алгебры A.*

---

[1]) Свободная полугруппа, которую мы здесь используем, не вполне идентична объекту, который имеет это же название в цитированной книге Н. Бурбаки, и отличается от него присоединением единичного элемента. Свободную полугруппу в нашем смысле можно непосредственно определить, опустив слова „non vides“ [„не пустые“] в определении, данном Н. Бурбаки.

[2]) То есть f^* совпадает с f на $E \subset L$. — *Прим. перев.*

Отображение f распространяется сперва на свободную полугруппу M, порождаемую множеством E. Для этого следующим образом определяется отображение f_0^* множества M в алгебру A:

$$f_0^*(1)=1; \qquad f_0^*\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)=\prod_{i=1}^{n} f(a_i) \tag{1}$$

(где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любые элементы множества E). Ясно, что для каждой пары (m, m') элементов полугруппы M имеет место равенство

$$f_0^*(m\,m')=f_0^*(m)\,f_0^*(m').$$

Так как элементы множества M образуют базис векторного пространства L над полем K, то существует одно и только одно линейное отображение f^* пространства L в пространство A, продолжающее отображение f_0^*. Непосредственно видно, что f^* является гомоморфизмом алгебры L в алгебру A и что $f^*(1)=1$. Обратно, очевидно, что унитарный гомоморфизм g^* алгебры L в алгебру A, продолжающий отображение f, должен совпадать с f_0^* на полугруппе M и что поэтому отображение g^* совпадает с отображением f^*. Формулы (1) показывают, что образ $f^*(M)$ множества M содержится в подалгебре A' алгебры A, порождаемой множеством $f(E)$ и 1; следовательно, имеет место включение $f^*(L)\subset A'$. С другой стороны, алгебра $f^*(L)$ содержит 1 и множество $f(E)$, так что $f^*(L)=A'$.

Предложение 1 показывает, что свободные ассоциативные алгебры играют по отношению ко всем ассоциативным (но не обязательно коммутативным) алгебрам роль, аналогичную той, которую алгебры полиномов играют по отношению к ассоциативным и коммутативным алгебрам. Поэтому элементы свободной ассоциативной алгебры множества E над полем K называются также *некоммутативными полиномами от элементов множества E с коэффициентами из поля K*. При тех же обозначениях, что и в формулировке предложения 1, пусть P — некоммутативный полином от элементов множества E (т. е. $P\in L$); символом $P(\ldots, f(x), \ldots)$ обозначают элемент $f^*(P)$ алгебры A и говорят, что этот элемент получается из полинома P подстановкой $x\to f(x)$ (для всех $x\in E$).

Пусть даны множество E, поле K и некоторое множество $\mathfrak{R}$ некоммутативных полиномов от элементов множества E с коэффициентами из K. Пусть L — алгебра всех некоммутативных полиномов от элементов множества E с коэффициентами из K. Обозначим через $\mathfrak{A}$ двусторонний идеал алгебры L, порожденный элементами множества $\mathfrak{R}$, а через A — фактор-алгебру $L/\mathfrak{A}$. Очевидно, A — унитарная алгебра. Обозначим через y_x образ элемента $x \in E$ при естественном отображении алгебры L на алгебру A. Тогда видно, что совокупность элементов y_x, соответствующих всем $x \in E$, составляет систему почти-образующих алгебры A и что $P(\ldots, y_x, \ldots) = 0$ для всех $P \in \mathfrak{R}$.

Предложение 2. *Пусть K — поле, E — множество, L — свободная ассоциативная алгебра множества E над полем K, $\mathfrak{R}$ — подмножество алгебры L, $\mathfrak{A}$ — идеал, порожденный множеством $\mathfrak{R}$ в алгебре L, A — алгебра $L/\mathfrak{A}$ и f — естественный гомоморфизм алгебры L на алгебру A. Пусть, далее, A' — ассоциативная унитарная алгебра над K и g — отображение множества E в алгебру A', такое, что $P(\ldots, g(x), \ldots) = 0$ для всех $P \in \mathfrak{R}$. Тогда существует один и только один унитарный гомоморфизм h алгебры A в алгебру A', такой, что $h(f(x)) = g(x)$ для всех $x \in E$. Множество $g(E)$ является системой почти-образующих алгебры $h(A)$.*

Отображение g можно продолжить до унитарного гомоморфизма g^* алгебры L в алгебру A (согласно предложению 1). Из наших предположений следует, что ядро гомоморфизма g^* содержит $\mathfrak{R}$, а поскольку это ядро является идеалом алгебры L, оно содержит идеал $\mathfrak{A}$. Следовательно, g^* определяет при переходе в фактор-алгебру гомоморфизм h алгебры A в алгебру A', который, очевидно, унитарен и для которого имеет место равенство $h(f(x)) = g(x)$ при всех $x \in E$. Множество $f(E)$ является системой почти-образующих алгебры A. Поэтому $h(f(E)) = g(E)$ — система почти-образующих алгебры $h(A)$ и гомоморфизм h вполне определяется условием, что $f(x)$ отображается в $g(x)$ (для всякого $x \in E$), а 1 — в 1.

Пусть теперь V — векторное пространство над полем K, и пусть L — свободная ассоциативная алгебра множества V над полем K. Следует заметить, что нужно проводить строгое различие между операциями умножения элементов множества V на скаляры из поля K и сложения элементов множества V, рассматриваемыми в заданном векторном пространстве V, и соответствующими операциями в векторном пространстве L. Мы сохраняем обычные обозначения для операций в векторном пространстве V; для $a \in K$, $x \in V$, $x' \in V$ мы обозначаем через $a \times x$ скалярное произведение элемента a на элемент x в пространстве L и через $x \dot{+} x'$ сумму элементов x и x' в L. Образуем идеал $\mathfrak{T}$, порожденный в алгебре L элементами следующего вида:

$$(2) \qquad \begin{gathered} (x + x') \dot{-} (x \dot{+} x'), \\ a \times x \dot{-} ax \end{gathered}$$

(для всех элементов $a \in K$ и для всех возможных пар (x, x') элементов из V; знак $\dot{-}$ обозначает операцию вычитания в алгебре L). Пусть T — фактор-алгебра $L/\mathfrak{T}$, и пусть f — естественный гомоморфизм алгебры L на алгебру T. Для $a \in K$, $x \in V$ и $x' \in V$ имеем

$$f(x + x') - (f(x) + f(x')) = 0 \text{ и } f(ax) - af(x) = 0,$$

и эти равенства показывают, что отображение, индуцированное на множестве V отображением f, является линейным отображением заданного векторного пространства V в векторное пространство T. Покажем, что это отображение взаимно однозначно. Пусть B — базис пространства V, и пусть T' — свободная ассоциативная алгебра множества B над полем K. Тождественное отображение множества B в векторное пространство T' может быть продолжено до линейного отображения g пространства V в пространство T'.

Применяя предложение 2 для случая, когда множество $\mathfrak{R}$ состоит из элементов (2) алгебры L, мы видим, что существует унитарный гомоморфизм h алгебры T в алгебру T', такой, что $h(f(x)) = g(x)$ при всех $x \in V$. Но элементы множества B линейно независимы в T', а с другой стороны, они являются образами при отображении h элементов множества $f(B)$. Следовательно, семейство элементов $(f(b))_{b \in B}$ линейно независимо в пространстве T. Этим доказывается, что ограничение отображения f на пространство V является взаимно однозначным отображением. Элементы x пространства V мы отождествляем с их образами $f(x)$ в алгебре T; V становится тогда векторным подпространством в T. После этого отождествления алгебру T называют *тензорной алгеброй над векторным пространством* V[1]).

[1]) Так определенная тензорная алгебра совпадает (с точностью до изоморфизма) с алгеброй, носящей то же название у Бурбаки, см. Алгебра, гл. III, § 4, n° 6; это сразу вытекает из приведенного далее предложения 3. [Ср. добавление переводчика в конце настоящей книги, стр. 259. — *Прим. перев.*]

Предложение 3. *Пусть V — векторное пространство, T — тензорная алгебра над V, B — базис пространства V и M — полугруппа, состоящая из конечных произведений (в T) элементов множества B. Полугруппа M является (с точностью до изоморфизма, совпадающего с тождественным отображением на множестве B) свободной полугруппой, порождаемой множеством B; M является, кроме того, базисом векторного пространства T.*

Построенный выше гомоморфизм h совпадает с тождественным отображением на множестве B; он отображает полугруппу M на полугруппу, состоящую из конечных произведений (в T') элементов из B, т. е. на полугруппу M', порожденную множеством B. Обратно, тождественное отображение множества B в алгебру T можно продолжить в однозначно определенный унитарный гомоморфизм h' алгебры T' в алгебру T, причем $h'(M') = M$. Отображение $h' \circ h$ является гомоморфизмом алгебры T в себя, совпадающим с тождественным отображением на множестве B и, следовательно, также на множестве V и переводящим 1 в 1. Так как V, очевидно, является системой почти-образующих алгебры T, то $h' \circ h$ — тождественное отображение, и h является изоморфизмом полугруппы M на полугруппу M'. Так как, кроме того, элементы из M' линейно независимы в T', то элементы из M линейно независимы в T. Из этого следует, что M является базисом векторного пространства T.

Пусть теперь A — некоторая ассоциативная унитарная алгебра над полем K, и пусть φ — линейное отображение пространства V в A. Если P — какой-нибудь из элементов вида (2) алгебры L, то в результате подстановки $y \to \varphi(y)$ (для $y \in V$) в элемент P получается элемент 0. Поэтому из предложения 2 следует, что отображение φ может быть продолжено в однозначно определенный унитарный гомоморфизм φ^* алгебры T в алгебру A. Элементы алгебры T называются также *тензорными выражениями* от элементов векторного пространства V; если $E \in T$, то говорят, что $\varphi^*(E)$ *получается в результате подстановки* $x \to \varphi(x)$ (для $x \in V$) *в выражение* E; этот элемент алгебры A обозначается $E(\ldots, \varphi(x), \ldots)$. Как видно, тензорные выражения играют по отношению к элементам векторного пространства роль, аналогичную роли некоммутативных полиномов по отношению к элементам абстрактного множества.

Теорема 1. *Пусть V — векторное пространство, T —*

тензорная алгебра над V, $\mathfrak{E}$ — *подмножество пространства* V, $\mathfrak{A}$ — *идеал, порожденный множеством* $\mathfrak{E}$ *в алгебре* T, A — *алгебра* $T/\mathfrak{A}$ *и* f — *естественное отображение алгебры* T *на алгебру* A. *Пусть* A' — *унитарная ассоциативная алгебра и* g — *линейное отображение пространства* V *в* A', *такое, что* $E(\ldots, g(x), \ldots) = 0$ *для каждого* $E \in \mathfrak{E}$. *Тогда существует один и только один унитарный гомоморфизм* h *алгебры* A *в алгебру* A', *при котором* $h(f(x)) = g(x)$ *для* всех $x \in V$; *множество* $g(V)$ *является системой почти-образующих алгебры* $h(A)$.

Как мы видели, отображение g может быть продолжено в унитарный гомоморфизм g^* алгебры T в алгебру A'. Из наших предположений следует, что ядро гомоморфизма g^* содержит множество $\mathfrak{E}$ и, следовательно, также идеал $\mathfrak{A}$. Поэтому g^* при переходе в фактор-алгебру определяет гомоморфизм h алгебры A в алгебру A'. Ясно, что h является унитарным гомоморфизмом и что $h(f(x)) = g(x)$ для $x \in V$. Так как $f(V)$ является системой почти-образующих алгебры A, то $h(f(V)) = g(V)$ — система почти-образующих алгебры $h(A)$. Гомоморфизм h вполне определяется условием, что образом $f(x)$ служит $g(x)$ (для всех $x \in V$), а образом 1 служит 1.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть* V — *векторное пространство над полем* K, *а* T — *тензорная алгебра над пространством* V. *Пусть заданы два линейных отображения* Φ *и* Ψ *пространства* V *в пространство* $\mathfrak{E}$ *эндоморфизмов векторного пространства* T, *и пусть* u — *элемент из* T. *Тогда в* $\mathfrak{E}$ *существует один и только один элемент* X, *для которого имеет место равенство*

$$X(xy) = (\Phi(x))(X(y)) + (\Psi(x))(y)$$

при каждом $x \in V$ *и каждом* $y \in T$ *и, кроме того,* $X(1) = u$.

Пусть B — базис пространства V. Как мы знаем, полугруппа, состоящая из конечных произведений элементов из B, представляет собой базис пространства T, а с другой стороны, ее можно рассматривать как свободную полугруппу, порожденную множеством B (предложение 3). Каждый элемент этой полугруппы, отличный от 1, записывается однозначным образом в виде произведения $b_1 b_2 \ldots b_n$, где n — целое > 0, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — элементы множества B. Определим рекуррентно элементы $\xi(b_1, \ldots, b_n)$ алгебры T следующим образом. Положим

$$\xi(b) = (\Phi(b))(u) + (\Psi(b))(1)$$

для каждого элемента $b \in B$. Если элементы $\xi(b_1, \ldots, b_n)$ уже определены, то положим

$$\xi(b_1, \ldots, b_{n+1}) = (\Phi(b_1))(\xi(b_2, \ldots, b_{n+1})) + (\Psi(b_1))(b_2, \ldots, b_{n+1}).$$

Существует линейное отображение X пространства T в себя, при котором $X(1) = u$ и $X(b_1 \ldots b_n) = \xi(b_1, \ldots, b_n)$ для всякой конечной последовательности $(b_1, \ldots, b_n)$ элементов множества B. Следовательно, формула

$$X(xy) = (\Phi(x))(X(y)) + (\Psi(x))(y)$$

справедлива для случая, когда $x \in B$, а y является произведением конечного числа элементов множества B. Но обе части равенства зависят линейно от y (при заданном x), поэтому наша формула остается справедливой для всех $y \in T$, если $x \in B$. Так как обе части равенства зависят (при фиксированном y) линейно от x, то мы видим, что формула справедлива для всех $x \in V$ и всех $y \in T$. Для того чтобы доказать единственность эндоморфизма X, достаточно показать, что линейное отображение Y пространства T в себя, при котором

$$Y(1) = 0 \quad \text{и} \quad Y(xy) = (\Phi(x))(Y(y))$$

для всех $x \in V$ и всех $y \in T$, является нулевым отображением. Пусть T' — ядро отображения Y; оно является векторным пространством, и из $x \in V$, $y \in T'$ следует $xy \in T'$. Кроме того, по предположению, T' содержит единичный элемент. Утверждение, что $Y = 0$, будет доказано, если мы установим, что T' является левым идеалом. Последнее вытекает из следующей леммы:

Лемма 2. *Пусть A — ассоциативная унитарная алгебра, S — система почти-образующих алгебры A, и пусть $\mathfrak{a}$ — векторное подпространство пространства A, для которого $x\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ при каждом $x \in S$. Тогда $\mathfrak{a}$ является левым идеалом алгебры A.*

Действительно, пусть A_1 — множество всех $x \in A$, для которых $x\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$. Очевидно, A_1 является векторным подпространством пространства A. Для элементов x и y из A_1 имеем $xy\mathfrak{a} \subset x\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, так что $xy \in A_1$. Этим доказано, что A_1 — подалгебра алгебры A. Она, очевидно, содержит 1 и, по предположению, содержит множество S. Следовательно, $A_1 = A$, и лемма 2 доказана.

§ 2. Градуированные алгебры

Определение 1. *Пусть A — алгебра, и пусть W — абелева группа в аддитивной записи. Предположим, что алгебра A представлена в виде прямой суммы семейства $(A_w)_{w \in W}$ векторных пространств A_w, где множество индексов состоит из элементов группы W. Далее, мы предполагаем, что из $x \in A_w$ и $x' \in A_{w'}$ (где w и w' — элементы W) следует, что произведение xx' принадлежит пространству $A_{w+w'}$. Тогда говорят, что это разложение в прямую сумму определяет в алгебре A градуировку; A называется в этом случае градуированной алгеброй. Элемент градуированной алгебры A называется однородным, если он принадлежит одному из пространств A_w, и однородным степени w, если он принадлежит именно пространству A_w. Пусть теперь x — любой элемент из A; представим x в виде суммы $x = \sum_{w \in W} x_w$, где $x_w \in A_w$ для каждого $w \in W$. Слагаемые x_w называются однородными компонентами элемента x, причем x_w называется однородной компонентой степени w элемента x.*

Например, пусть L — свободная ассоциативная алгебра множества E над полем K. Для каждого целого $n \geqslant 0$ обозначим через L_n множество линейных комбинаций произведений из последовательностей длины n элементов множества E; для целого $n < 0$ положим $L_n = \{0\}$. Тогда очевидно, что алгебра L является прямой суммой пространств L_n $(-\infty < n < +\infty)$ и что это разложение определяет градуировку в L, группой степеней которой служит аддитивная группа целых чисел. Однородными элементами степени 0 в алгебре L являются скаляры.

В градуированной алгебре A нулевой элемент является, очевидно, сразу однородным элементом всевозможных степеней. Напротив, если x — однородный элемент, отличный от 0, то существует только одна степень w, такая, что x является однородным элементом степени w; можно поэтому говорить о степени такого элемента.

Предложение 1. *Пусть A — градуированная унитарная алгебра. Элемент* 1 *алгебры A является однородным элементом степени* 0.

Пусть $1 = \sum_{w \in W} e_w$ — разложение элемента 1 в сумму его однородных компонент. Пусть x — однородный элемент некоторой степени z из A. Тогда $x = x \cdot 1 = \sum_{w \in W} xe_w$ и xe_w является однородным элементом степени $w + z$. Следовательно, $xe_w = 0$ для $w \neq 0$ и $xe_0 = x$. Так как последнее равенство справедливо для всех однородных элементов x, то оно также имеет место для любого $x \in A$, в частности и для $x = 1$. Поэтому $e_0 = 1 \cdot e_0 = 1$, что и доказывает предложение 1.

Определение 2. *Пусть A — градуированная алгебра. Векторное подпространство V алгебры A называется однородным, если однородные компоненты всех элементов из V сами принадлежат пространству V. Базис векторного подпространства алгебры A называется однородным, если он состоит из однородных элементов.*

Пусть V — однородное подпространство алгебры A. Так как каждый элемент алгебры A является суммой своих однородных компонент, то векторное пространство V порождается однородными элементами, которые в нем содержатся. Отсюда непосредственно следует, что пространство V обладает однородным базисом. Правильно и обратное, как это видно из следующего предложения:

Предложение 2. *Пусть A — градуированная алгебра, а E — подмножество алгебры A, состоящее из однородных элементов. Пусть M, B, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{b}$ — соответственно векторное подпространство, подалгебра, левый, правый и двусторонний идеалы, порожденные множеством E. Тогда векторные подпространства M, B, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$ однородны.*

Пусть w — элемент группы степеней W градуированной алгебры A. Обозначим через p_w отображение, сопоставляющее каждому элементу $x \in A$ его однородную компоненту степени w. Ясно, что p_w — линейное отображение алгебры A в себя. Если $x \in E$, то $p_w(x)$ равен или x, или 0. Поэтому $p_w(E) \subset M$ и, следовательно, $p_w(M) \subset M$, т. е. M является однородным подпространством. Пусть B', $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{d}'$ и $\mathfrak{b}'$ — векторные подпространства алгебры A, порожденные однородными элементами множеств B, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{b}$ соответственно; из доказанного следует, что эти пространства однородны. Так как произведения однородных элементов из подалгебры B сами являются однородными элементами из B, то сразу видно, что B' — подалгебра алгебры A. Пусть x — однородный элемент левого идеала $\mathfrak{g}$, а $y = \sum_{w \in W} y_w$ — любой элемент алгебры A, представленный в виде суммы своих однородных компонент. Так как все элементы $y_w x$ являются однородными элементами из левого идеала $\mathfrak{g}$, то очевидно, что $yx \in \mathfrak{g}'$; из этого непосредственно вытекает, что $\mathfrak{g}'$ — левый идеал. Таким же образом заключаем, что $\mathfrak{d}'$ является правым, а $\mathfrak{b}'$ — двусторонним идеалом. Но множества B', $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{d}'$ и $\mathfrak{b}'$ содержат множество E и соответственно содержатся в множествах B, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{b}$; следовательно, имеем $B' = B$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}$ и $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}$, что и доказывает предложение 2.

Следствие. *Сумма однородных подпространств градуированной алгебры A является однородным подпространством алгебры A.*

Этот факт непосредственно вытекает из предложения 2.

Пусть $\mathfrak{a}$ — однородный идеал градуированной алгебры A. Пользуясь обозначениями определения 1, мы, кроме того, положим $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a} \cap A_w$ для каждого $w \in W$. Так как идеал $\mathfrak{a}$ однороден, то он является прямой суммой пространств $\mathfrak{a}_w$ (для $w \in W$). Из этого легко следует, что $A/\mathfrak{a}$ является прямой суммой пространств $A_w/\mathfrak{a}_w$, если пространства $A_w/\mathfrak{a}_w$ отождествлять с пространствами $(A_w + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}$. Если w и w' — элементы группы W, то ясно, что произведение элемента из $A_w/\mathfrak{a}_w$ на элемент из $A_{w'}/\mathfrak{a}_{w'}$ находится в $A_{w+w'}/\mathfrak{a}_{w+w'}$; отсюда мы заключаем, что разложение $A/\mathfrak{a} \doteq \sum_{w \in W} A_w/\mathfrak{a}_w$ определяет градуировку в алгебре $A/\mathfrak{a}$. Эта градуированная алгебра называется *градуированной фактор-алгеброй алгебры A по однородному идеалу $\mathfrak{a}$*.

Тензорная алгебра T над векторным пространством V является фактор-алгеброй свободной ассоциативной алгебры L множества V по идеалу, порожденному элементами вида (2) § 1. Эти элементы однородны степени 1, и они, следовательно, порождают однородный идеал (предложение 2). Поэтому в алгебре T определена градуировка, для которой аддитивная группа целых чисел является группой степеней. Когда мы будем говорить об алгебре T как о градуированной алгебре, мы будем подразумевать именно эту градуировку. Все однородные элементы степени < 0 градуированной алгебры T равны нулю, и единственными однородными элементами степени 0 являются скаляры. Элементы из пространства V однородны степени 1. Пусть n — целое неотрицательное число, и пусть B — базис пространства V. Пространство T_n однородных элементов степени n из T обладает базисом, состоящим из всевозможных произведений n элементов множества B; отсюда вытекает, что если V является векторным пространством конечной размерности d, то T_n — конечномерное пространство размерности d^n. С другой стороны, как легко видеть, элементы из T_n можно рассматривать как контравариантные тензоры ранга n над V (ср. Бурбаки, Алгебра, гл. III, § 4, n° 6[1]).

Если $\mathfrak{a}$ — однородный идеал алгебры T, то фактор-алгебра $T/\mathfrak{a}$ является градуированной алгеброй с аддитивной группой целых чисел в качестве группы степеней. В градуированной алгебре $T/\mathfrak{a}$ все однородные элементы степени < 0 равны нулю; однородными элементами степени 0 являются скаляры; для $n > 0$ однородные элементы степени n представляют собой линейные комбинации (или, что то же самое, суммы) произведений из n элементов пространства V' — образа пространства V при естественном отображении алгебры T на алгебру $T/\mathfrak{a}$.

Предложение 3. *Пусть A — градуированная алгебра с аддитивной группой целых чисел в качестве группы степеней; предположим, что все однородные элементы степени < 0 алгебры A равны нулю. Обозначим через $\mathfrak{a}_n$ (n — целое число) множество всех элементов $x \in A$, у которых все однородные компоненты степени $< n$ равны нулю. Множество $\mathfrak{a}_n$ является тогда однородным идеалом алгебры A.*

Легко видеть, что $\mathfrak{a}_n$ — однородное векторное подпространство алгебры A. Пусть x — однородный элемент степени p из $\mathfrak{a}_n$, и пусть y — элемент из A. Из условий предложения следует, что $y = \sum_{m \geqslant 0} y_m$, где y_m обозначает однородную компоненту степени m элемента y. Элементы $y_m x$ и $x y_m$ являются однородными степени $m+p$. Если $x \neq 0$, то $p \geqslant n$, так что $m+p \geqslant n$. Мы видим, что элементы yx и xy принадлежат множеству $\mathfrak{a}_n$, так что $\mathfrak{a}_n$ является идеалом.

---

[1]) См. добавление переводчика в конце настоящей книги, стр. 259. — *Прим. перев.*

Следствие. *Пусть* V — *векторное пространство*, T — *тензорная алгебра над* V, E — *подмножество алгебры* T, *состоящее из некоторых однородных элементов степени* $\geqslant 2$, *и* $\mathfrak{a}$ — *идеал, порожденный множеством* E *в алгебре* T. *Тогда естественное отображение алгебры* T *на алгебру* $T/\mathfrak{a}$ *индуцирует взаимно однозначное отображение пространства* V *в алгебру* $T/\mathfrak{a}$.

Действительно, из предложения 3 следует, что идеал $\mathfrak{a}$ содержится в множестве $\mathfrak{a}_2$ элементов алгебры T, все однородные компоненты степени < 2 которых равны нулю. Следовательно, $\mathfrak{a} \cap V = \{0\}$, что и доказывает следствие.

Определение 3. *Пусть* A *и* A' — *две градуированные алгебры над одним и тем же полем и с одной и той же группой степеней* W. *Линейное отображение* f *алгебры* A *в алгебру* A' *называется однородным степени* z (*где* z — *некоторый элемент группы* W), *если выполнено следующее условие: для каждого* $w \in W$ *отображение* f *переводит пространство однородных элементов степени* w *алгебры* A *в пространство однородных элементов степени* $w + z$ *алгебры* A'.

В этом случае также говорят, что отображение f *увеличивает степени на* z.

Линейные однородные отображения степени z алгебры A в алгебру A' образуют, очевидно, подпространство F_z векторного пространства F всех линейных отображений алгебры A в алгебру A'. Покажем, что *сумма пространств* F_z (*для всех* $z \in W$) *является прямой*. Предположим, что $\sum_{z \in W} f_z = 0$, где $f_z \in F_z$ для каждого z и $f_z \neq 0$ только для конечного числа элементов z. Пусть x — однородный элемент степени w алгебры A; тогда $f_z(x)$ — однородный элемент степени $z + w$. Из формулы $\sum_{z \in W} f_z(x) = 0$ и из взаимной однозначности отображения $z \to z + w$ следует, что $f_z(x) = 0$ для каждого z. Отсюда немедленно заключаем, что $f_z = 0$ для каждого z. Пусть теперь $A' = A$. Пространство F можно тогда рассматривать как ассоциативную алгебру (где умножением является операция последовательного применения отображений). Легко видеть, что произведение элемента из F_z на элемент из $F_{z'}$ принадлежит $F_{z+z'}$. Отсюда следует, что подпространство $F' = \sum_{z \in W} F_z$ алгебры F является подалгеброй и что эта подалгебра обладает градуировкой с группой W в качестве группы степеней. *Если A — алгебра конечной размерности, то $F' = F$.* Действительно, пусть (для $w \in W$) A_w — множество однородных элементов степени w алгебры A. Так как сумма пространств A_w прямая, а размерность алгебры A конечна, то множество W_0 элементов w, для которых $A_w \neq \{0\}$, тоже конечно. Пусть f — линейное отображение алгебры A в себя. Если w и w' — элементы группы W, то через $f_{w, w'}$ мы обозначим линейное отображение, определенное следующими условиями: если $x \in A_w$, то $f_{w, w'}(x)$ является однородной компонентой степени w' элемента $f(x)$; если $x \in A_{w''}$ и $w'' \neq w$, то $f_{w, w'}(x) = 0$. Ясно, что $f_{w, w'} \in F_{w'-w}$ и что $f_{w, w'} = 0$, если w и w' не принадлежат одновременно W_0. Следовательно, только конечное число отображений $f_{w, w'}$ отлично от нулевого и, как легко видеть, отображение f является их суммой, так что $f \in F'$.

Определение 4. *Пусть A — градуированная алгебра, для которой аддитивная группа целых чисел является группой степеней. Пусть $x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n$ — разложение элемента x алгебры A в сумму его однородных компонент. Элемент $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x_n$ обозначается через $\bar{x}$; отображение $x \to \bar{x}$ называется главной инволюцией алгебры A.*

Очевидно, что главная инволюция алгебры A является линейным отображением и что квадрат этого отображения равен тождественному отображению алгебры A. Кроме того, если x и y — однородные элементы степеней m и n, то

$$\overline{xy} = (-1)^{m+n} xy = \bar{x}\bar{y}.$$

Отсюда следует, что главная инволюция является не только линейным отображением, но и инволютивным автоморфизмом алгебры A. Наконец, очевидно, что главная инволюция — однородное отображение степени 0.

Предложение 4. *Пусть A и A' — градуированные алгебры над одним и тем же полем с аддитивной группой целых чисел в качестве группы степеней; пусть J и J' — главные инволюции алгебр A и A'. Пусть f — линейное отображение A в A'. Если f является суммой однородных линейных отображений четной степени, то $J' \circ f = f \circ J$;*

если же f — сумма однородных линейных отображений нечетной степени, то $J' \circ f = -f \circ J$.

Очевидно, можно ограничиться случаем, когда отображение f само однородно некоторой степени p. Если x — однородный элемент степени n алгебры A, то $f(x)$ — однородный элемент степени $n+p$, так что

$$J'(f(x)) = (-1)^{n+p} f(x) = (-1)^p f((-1)^n x) = (-1)^p f(J(x)).$$

В силу линейности отображения f заключаем, что $J' \circ f = f \circ J$ для четного p и $J' \circ f = -f \circ J$ для нечетного p.

Пусть теперь дано векторное пространство V. Будем говорить, что в пространстве V определена градуировка с (аддитивной) группой степеней W, если задано семейство $(V_w)_{w \in W}$ подпространств пространства V, для которого группа W является множеством индексов, и если пространство V является прямой суммой подпространств V_w (для $w \in W$). Предположим, что эти условия выполнены. Пространство V можно превратить в алгебру, условившись, что произведение любых двух элементов из V равняется 0. Очевидно, что разложение $V = \sum_{w \in W} V_w$ определяет тогда градуировку и в алгебре V. Это позволяет перенести на случай градуированных векторных пространств все определения и результаты относительно градуированных алгебр. В частности, можно доказать следующий результат (ср. предложение 2):

Предложение 5. *Пусть V — градуированное векторное пространство, а E — подмножество пространства V, состоящее из однородных элементов. Тогда подпространство пространства V, порожденное множеством E, однородно. Всякое однородное подпространство пространства V обладает однородным базисом.*

Мы опишем сейчас один способ, который иногда применяется для построения градуировки в векторных пространствах. Напомним, что элемент x векторного пространства V называется *собственным вектором* эндоморфизма X пространства V, если Xx представим в форме ax, где a — элемент основного поля. Если x — собственный вектор $\neq 0$, то элемент a, для которого $Xx = ax$, однозначно определен; он называется *собственным значением* эндоморфизма X, а про вектор x говорят, что он принадлежит этому собственному значению. Пусть $(X_H)_{H \in \mathfrak{H}}$ — семейство эндоморфизмов пространства V

с некоторым множеством $\mathfrak{H}$ в качестве множества индексов. Мы будем говорить, что элемент x пространства V является собственным вектором этого семейства, если x —собственный вектор эндоморфизма X_H для всех $H \in \mathfrak{H}$. Нас особенно будет интересовать тот случай, когда множество $\mathfrak{H}$ является векторным пространством (над тем же полем, что и пространство V) и когда отображение $H \to X_H$ пространства $\mathfrak{H}$ в векторное пространство эндоморфизмов пространства V линейно; в этом случае говорят, что $(X_H)_{H \in \mathfrak{H}}$ является *линейным семейством* эндоморфизмов.

Предположим, что мы находимся в условиях этого случая, и пусть x — отличный от 0 собственный вектор линейного семейства $(X_H)_{H \in \mathfrak{H}}$. Положим $X_H x = \varpi(H) x$, где $\varpi(H)$ — элемент основного поля. Очевидно, отображение ϖ пространства $\mathfrak{H}$ в основное поле является линейной функцией над пространством $\mathfrak{H}$, т. е. элементом пространства, дуального к $\mathfrak{H}$. Мы будем говорить, что элемент x *принадлежит* линейной функции ϖ.

Предложение 6. *Пусть V — векторное пространство, а $(X_H)_{H \in \mathfrak{H}}$ — линейное семейство эндоморфизмов пространства V. Предположим, что V порождается (как векторное пространство) собственными векторами семейства $(X_H)_{H \in \mathfrak{H}}$, содержащимися в V. Если ϖ — элемент пространства W, дуального к $\mathfrak{H}$, то пусть V_ϖ — подпространство пространства V, состоящее из 0 и собственных векторов, принадлежащих ϖ. Пространство V является тогда прямой суммой подпространств V_ϖ (для всех $\varpi \in W$). Всякое подпространство U пространства V, инвариантное относительно операторов X_H (для всех $H \in \mathfrak{H}$), однородно в смысле градуировки, определенной на пространстве V разложением $V = \sum_{\varpi \in W} V_\varpi$.*

Тот факт, что пространство V является суммой подпространств V_ϖ, непосредственно следует из того, что V порождается собственными векторами семейства $(X_H)_{H \in \mathfrak{H}}$. Докажем, что эта сумма прямая. Для этого покажем, что если $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$ — различные элементы пространства W, а $x_1, \ldots, x_n$ — элементы пространства V, такие, что $x_i \in V_{\varpi_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, то $x_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Доказательство будем вести индукцией по n. Для $n=1$ наше утверждение очевидно. Предположим, что оно справедливо для $n-1$ (где n — целое число >1). При $H \in \mathfrak{H}$ имеем

$$0=\sum_{i=1}^{n} X_H x_i=\sum_{i=1}^{n} w_i(H)\, x_i,$$

а также $0=w_n(H)\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$, и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n-1}(w_i(H)-w_n(H))\, x_i=0.$$

Легко видеть, что для каждого данного H элемент $(w_i(H)-w_n(H))\, x_i$ принадлежит пространству V_{w_i}. Поэтому, по предположению индукции,

$$(w_i(H)-w_n(H))\, x_i=0 \qquad (1\leqslant i\leqslant n-1)$$

для каждого $H \in \mathfrak{H}$. С другой стороны, для любого индекса $i\leqslant n-1$ найдется такой элемент $H \in \mathfrak{H}$, что $w_i(H)\neq w_n(H)$, так что $x_i=0$. Отсюда непосредственно следует, что и элемент x_n равен 0, что и доказывает наше утверждение для n.

Пусть теперь U — подпространство пространства V, такое, что $X_H(U)\subset U$ для всех $H \in \mathfrak{H}$. Каждый элемент X_H определяет при переходе в фактор-пространство эндоморфизм Y_H пространства V/U, и семейство $(Y_H)_{H\in\mathfrak{H}}$ является линейным. Класс эквивалентности $(\mathrm{mod}\, U)$ собственного вектора семейства (X_H) является собственным вектором семейства (Y_H). Это показывает, что пространство V/U порождается собственными векторами семейства (Y_H), содержащимися в этом пространстве. Пусть $(V/U)_w$ — пространство элементов y из V/U, таких, что $Y_H y=w(H)\, y$ для всех $H \in \mathfrak{H}$. Из первой части доказательства следует, что сумма пространств $(V/U)_w$ (для $w \in W$) прямая. Пусть теперь $x=\sum_{w\in W} x_w$ — разложение вектора $x \in U$ в сумму своих однородных компонент (где $x_w \in V_w$ для всех $w \in W$). Пусть y_w — класс элемента x_w $(\mathrm{mod}\, U)$. Имеем $\sum_{w\in W} y_w=0$, причем ясно, что элемент y_w принадлежит $(V/U)_w$. Отсюда следует, что $y_w=0$ для каждого w, т. е. $x_w \in U$. Это показывает, что U — однородное подпространство.

§ 3. Косые деривации

Напомним, что деривацией алгебры A называется линейное отображение D алгебры A в себя, такое, что

$$D(xy) = (Dx)\,y + x\,(Dy)$$

для каждой пары элементов x и y из A. Мы обобщим это понятие следующим образом:

Определение 1. *Пусть A и B — алгебры над одним и тем же полем, и пусть f и g — гомоморфизмы алгебры A в алгебру B. Косой деривацией типа (f, g) алгебры A в алгебру B называется линейное отображение D алгебры A в алгебру B, удовлетворяющее равенству*

$$D(xy) = D(x)\,g(y) + f(x)\,D(y)$$

для любой пары элементов x, y из A. Если A — подалгебра алгебры B и если I обозначает тождественное отображение A в B, то косая деривация типа (I, I) алгебры A в алгебру B называется деривацией A в B.

Согласно этому определению, понятие деривации алгебры A совпадает с понятием деривации алгебры A в алгебру A.

Как легко видеть, для заданных гомоморфизмов f и g косые деривации типа (f, g) алгебры A в алгебру B образуют подпространство векторного пространства всех линейных отображений алгебры A в алгебру B.

Предложение 1. *Пусть A, B, C и D — алгебры, φ — гомоморфизм A в B, f и g — гомоморфизмы B в C, Δ — косая деривация типа (f, g) алгебры B в алгебру C и ψ — гомоморфизм C в D; $\psi\circ\Delta\circ\varphi$ является тогда косой деривацией типа $(\psi\circ f\circ\varphi,\ \psi\circ g\circ\varphi)$ алгебры A в алгебру D.*

Это предложение следует непосредственно из определения.

Предложение 2. *Пусть f и g — гомоморфизмы некоторой алгебры A в некоторую алгебру B; D — косая деривация типа (f, g) алгебры A в алгебру B; $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — идеалы алгебр A и B соответственно. Предположим, что операторы f, g и D отображают идеал $\mathfrak{A}$ в идеал $\mathfrak{B}$. Для $\bar{x}\in A/\mathfrak{A}$ обозначим через $\bar{f}(\bar{x})$, $\bar{g}(\bar{x})$ и $\bar{D}(\bar{x})$ классы* $(\mathrm{mod}\,\mathfrak{B})$ *элементов $f(x)$, $g(x)$ и $D(x)$ соответственно, где x — некоторый представитель класса $\bar{x}$* $\mathrm{mod}\,\mathfrak{A}$ *(элементы $\bar{f}(\bar{x})$, $\bar{g}(\bar{x})$, $\bar{D}(\bar{x})$,* *конечно, не зависят от выбора представителя x в классе $\bar{x}$). Отображение $\bar{D}$ является тогда косой деривацией типа $(\bar{f}, \bar{g})$ алгебры $A/\mathfrak{A}$ в алгебру $B/\mathfrak{B}$.*

Это предложение вытекает непосредственно из определения.

Предложение 3. *Пусть f и g—гомоморфизмы алгебры A в алгебру B, D—косая деривация типа (f, g) алгебры A в алгебру B, S—подмножество алгебры A, A' и $\mathfrak{A}$—соответственно подалгебра и идеал, порожденные множеством S в алгебре A, B' и $\mathfrak{B}$—соответственно некоторая подалгебра и некоторый идеал алгебры B. Тогда*

1) *если $D(S)\subset\mathfrak{B}$, то $D(A')\subset\mathfrak{B}$;*

2) *если $D(S)$, $f(S)$ и $g(S)$ принадлежат подалгебре B', то $D(A')\subset B'$;*

3) *если $D(S)$, $f(S)$ и $g(S)$ принадлежат идеалу $\mathfrak{B}$, то $D(\mathfrak{A})\subset\mathfrak{B}$.*

Имеют место равенства

$$D(xy) = D(x)\,g(y) + f(x)\,D(y); \tag{1}$$

$$f(xy) = f(x)\,f(y); \qquad g(xy) = g(x)\,g(y). \tag{2}$$

Из формулы (1) и из линейности отображения D следует, что множество $D^{-1}(\mathfrak{B})$ образует подалгебру алгебры A. Если эта подалгебра содержит множество S, то она содержит и подалгебру A'. Множества $f^{-1}(B')$ и $g^{-1}(B')$, очевидно, являются подалгебрами алгебры A (в силу формулы (2)); если они содержат множество S, то они содержат, конечно, и подалгебру A'. Формула (1) показывает, что элементы из A', образы которых при отображении D принадлежат B', образуют подалгебру алгебры A'; если эта подалгебра содержит S, то она совпадает с A'. Аналогично заключаем, что множества $f^{-1}(\mathfrak{B})$ и $g^{-1}(\mathfrak{B})$ являются идеалами алгебры A; если эти идеалы содержат множество S, то они содержат и идеал $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathfrak{A}_1$ множество тех $x\in\mathfrak{A}$, для которых $D(x)\in\mathfrak{B}$. Пусть $x\in\mathfrak{A}_1$ и $y\in A$; тогда из формулы (1) следует, что $\mathfrak{A}_1$—правый идеал; аналогично, если $y\in\mathfrak{A}_1$ и $x\in A$, то в силу формулы (1) множество $\mathfrak{A}_1$ является левым идеалом. Следовательно, $\mathfrak{A}_1$—двусторонний идеал; если он содержит множество S, то он совпадает с идеалом $\mathfrak{A}$.

Следствие. *Пусть f и g—гомоморфизмы алгебры A в алгебру B, а S—подмножество алгебры A. Каждая косая* *деривация типа* (f, g) *алгебры* A *в алгебру* B, *отображающая элементы множества* S *в элемент* 0, *отображает также в* 0 *все элементы алгебры* A', *порожденной множеством* S; *две косые деривации типа* (f, g) *алгебры* A *в алгебру* B, *совпадающие на множестве* S, *совпадают также на алгебре* A'.

Первое утверждение является частным случаем утверждения 1) предложения 3, второе утверждение вытекает из первого и из того факта, что разность двух косых дериваций одного и того же типа сама является косой деривацией того же типа.

Предложение 4. *Пусть* A *и* B — *унитарные алгебры*, f *и* g — *унитарные гомоморфизмы алгебры* A *в алгебру* B *и* D — *косая деривация типа* (f, g) *алгебры* A *в алгебру* B. *Тогда* $D(1)=0$.

Действительно,

$$D(1)=D(1^2)=D(1)g(1)+f(1)D(1)=2D(1),$$

откуда $D(1)=0$.

Следствие. *Пусть* A *и* B — *унитарные алгебры*, f *и* g — *унитарные гомоморфизмы алгебры* A *в алгебру* B *и* D — *косая деривация типа* (f, g) *алгебры* A *в алгебру* B. *Пусть* S — *подмножество алгебры* A, A' — *подалгебра алгебры* A, *порожденная* 1 *и элементами множества* S, B' — *подалгебра и* $\mathfrak{B}$ — *идеал алгебры* B. *Тогда* 1) *если* $D(S)\subset\mathfrak{B}$, *то* $D(A')\subset\mathfrak{B}$; 2) *если* $D(S)=\{0\}$, *то* $D(A')=\{0\}$; 3) *всякая косая деривация типа* (f, g) *алгебры* A *в алгебру* B, *совпадающая с косой деривацией* D *на множестве* S, *совпадает с* D *на подалгебре* A'; 4) *если* $f(S)$, $g(S)$ *и* $D(S)$ *лежат в подалгебре* B', *то и* $D(A')$ *содержится в* B'.

Пусть A'' — подалгебра, порождаемая множеством S; элементы подалгебры A' представимы тогда в форме $a+x'$, где a — скаляр и $x'\in A''$. Из предложения 4 следует, что $D(a)=0$, т. е. $D(A')=D(A'')$. Следствие вытекает теперь из предложения 3 и его следствия.

Предложение 5. *Пусть* A — *алгебра*, f, g, f' *и* g' — *ее эндоморфизмы, причем* f *перестановочен с* f', *а* g *перестановочен с* g', D — *косая деривация типа* (f, g) *алгебры* A *в себя, а* D' — *косая деривация типа* (f', g') *алгебры* A *в себя. Тогда*:

1) *если* D *перестановочна с одним из операторов* f, g *и антиперестановочна с другим, то отображение* D^2 *является косой деривацией типа* (f^2, g^2);

2) *если* D *перестановочна с* f' *и* g', *а* D' *перестановочна с* f *и* g, *то оператор* $[D, D'] = DD' - D'D$ *является косой деривацией типа* (ff', gg').

Для $x \in A$ обозначим через L_x операцию умножения слева на элемент x в алгебре A (т. е. отображение $y \to xy$). Тогда имеем

$$DL_x = L_{Dx}g + L_{fx}D \quad \text{и} \quad D'L_x = L_{D'x}g' + L_{f'x}D'.$$

Отсюда

$$D'DL_x = L_{D'Dx}g'g + L_{f'Dx}D'g + L_{D'fx}g'D + L_{f'fx}D'D,$$
$$DD'L_x = L_{DD'x}gg' + L_{fD'x}Dg' + L_{Df'x}gD' + L_{ff'x}DD'.$$

Положим сначала $D' = D$, $f' = f$, $g' = g$. Если, например, D перестановочна с эндоморфизмом f и антиперестановочна с эндоморфизмом g, то

$$fDx = Dfx, \quad Dgx = -gDx$$

и, следовательно,

$$D^2L_x = L_{D^2x}g^2 + L_{f^2x}D^2,$$

что как раз означает, что отображение D^2 является косой деривацией типа (f^2, g^2).

Предположим теперь, что выполнено условие 2). Тогда

$$f'Dx = Df'x, \qquad D'g = gD', \qquad D'fx = fD'x, \qquad g'D = Dg';$$

вычитая первую из вышестоящих формул из второй, получаем

$$(DD' - D'D)L_x = L_{(DD'-D'D)x}gg' + L_{ff'x}(DD' - D'D),$$

что означает, что отображение $[D, D']$ — косая деривация типа (ff', gg').

Следствие. *Если* D *и* D' — *деривации алгебры* A, *то и отображение* $[D, D']$ *является деривацией.*

Предложение 6. *Пусть* A *и* B — *градуированные алгебры над одним и тем же полем с одной и той же группой степеней* W, *и пусть* f *и* g — *однородные гомоморфизмы степени* 0 *алгебры* A *в алгебру* B. *Пусть* S — *множество однородных образующих алгебры* A, *и пусть* D — *косая* *деривация типа (f, g) алгебры A в алгебру B, удовлетворяющая следующему условию: если x — однородный элемент степени w множества S, то Dx — однородный элемент степени $w+z$, где z — элемент группы W, не зависящий от x. Тогда отображение D однородно степени z.*

Для $w \in W$ обозначим через A_w пространство однородных элементов степени w алгебры A, через B_w — пространство однородных элементов степени w алгебры B и через A'_w — пространство тех элементов $x \in A_w$, для которых $Dx \in B_{w+z}$. Пусть w и w' — элементы группы W, x — элемент пространства A'_w, а x' — элемент пространства $A'_{w'}$. Имеем

$$D(xx') = D(x)\,g(x') + f(x)\,D(x');$$

элемент $D(x)$ содержится в пространстве B_{w+z}, $g(x')$ — в $B_{w'}$, $f(x)$ — в B_w и $D(x')$ — в $B_{w'+z}$; следовательно, $D(xx')$ содержится в пространстве $B_{w+w'+z}$, т. е. $xx' \in A'_{w+w'}$. Отсюда заключаем, что сумма подпространств A'_w (для всех $w \in W$) является подалгеброй алгебры A. Так как она содержит множество S, то она совпадает с алгеброй A, что и доказывает предложение 6.

Следствие. *Заключение предложения* 6 *остается верным, если в случае унитарных алгебр A и B и унитарных гомоморфизмов f и g предположить, что множество S является только системой почти-образующих алгебры A.*

Это следует непосредственно из предложения 6, примененного к множеству, получаемому из S добавлением элемента 1, и из того факта, что $D(1) = 0$ (предложение 4).

Определение 2. *Пусть A — градуированная алгебра с аддитивной группой целых чисел в качестве группы степеней. Пусть I — тождественное отображение алгебры A на себя, а J — ее главная инволюция. Косая деривация типа (I, J) алгебры A в себя называется антидеривацией алгебры A.*

Антидеривация D алгебры A — это линейное отображение алгебры A в себя, такое, что $D(xy) = D(x)\,y + \bar{x}\,D(y)$ для любой пары элементов (x, y) из A.

Предложение 7. *Пусть A — градуированная алгебра с группой целых чисел в качестве группы степеней, и пусть D — однородная антидеривация нечетной степени* *алгебры A. Оператор D^2 является тогда деривацией алгебры A. Если D' — другая однородная антидеривация нечетной степени алгебры A, то $DD'+D'D$ — однородная деривация четной степени алгебры A. Если же D'' — однородная деривация алгебры A четной степени, то $[D, D'']$ является антидеривацией алгебры A.*

Из предложения 5 следует, что если антидеривация Δ антиперестановочна с главной инволюцией J, то Δ^2 является деривацией. Но если Δ — однородная антидеривация нечетной степени h, то $\Delta J + J\Delta = 0$. Действительно, для однородного элемента x степени n имеем

$$\Delta Jx = (-1)^n \Delta x \quad \text{и} \quad J\Delta x = (-1)^{n+h} \Delta x,$$

что и доказывает наше утверждение. Подобным же образом доказывается и более общее утверждение: всякая сумма однородных линейных отображений нечетной степени алгебры A в себя антиперестановочна с главной инволюцией J. Отсюда вытекает, что отображения D^2, D'^2 и $(D+D')^2$ являются деривациями; но тогда и отображение

$$DD' + D'D = (D+D')^2 - D^2 - D'^2$$

— деривация. Подобным же образом можно убедиться, что всякое однородное линейное отображение четной степени алгебры A в себя перестановочно с главной инволюцией J; поэтому, согласно предложению 5, отображение $[D, D'']$ оказывается антидеривацией.

Предложение 8. *Пусть A — ассоциативная алгебра. Если $x \in A$, то пусть D_x — отображение $y \to [x, y] = xy - yx$ алгебры A в себя. Тогда D_x — деривация алгебры A. Если D — какая-нибудь деривация алгебры A, то для любой пары элементов x и y из A имеем*

$$D([x, y]) = [Dx, y] + [x, Dy], \quad \text{т. е.} \quad [D, D_x] = D_{Dx}.$$

Пусть x, y и z — элементы алгебры A. Тогда

$$[x, yz] = xyz - yzx = (xy - yx)z + y(xz - zx) =$$
$$= [x, y]z + y[x, z],$$

что доказывает первое утверждение. Если D — деривация алгебры A, то

$$D([x, y]) = D(xy) - D(yx) =$$
$$= (Dx)y + x(Dy) - (Dy)x - y(Dx) = [Dx, y] + [x, Dy].$$

Этим доказывается второе утверждение.

Предложение 9. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Для каждого $x \in \mathfrak{g}$ отображение D_x алгебры $\mathfrak{g}$ в себя, определенное формулой $y \to D_x y = [x, y]$, является деривацией алгебры $\mathfrak{g}$. Если D — любая деривация алгебры $\mathfrak{g}$, то $[D, D_x] = D_{Dx}$; в частности, для любой пары элементов x и y из $\mathfrak{g}$ справедливо равенство $D_{[x, y]} = [D_x, D_y]$.*

Пусть x, y и z — элементы алгебры $\mathfrak{g}$. Имеет место тождество Якоби

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0;$$

кроме того, для любых элементов u, v алгебры $\mathfrak{g}$ имеем $[v, u] = -[u, v]$. Отсюда легко следует тождество

$$D_x([y, z]) = [D_x y, z] + [y, D_x z],$$

которое показывает, что D_x является деривацией. Если D — любая деривация алгебры $\mathfrak{g}$, то для элементов x и y из $\mathfrak{g}$ имеем

$$[D, D_x]y = DD_x y - D_x Dy =$$
$$= D([x, y]) - [x, Dy] = [Dx, y] = D_{Dx}y,$$

т. е. $[D, D_x] = D_{Dx}$.

Предложение 10. *Пусть A и B — ассоциативные алгебры, f и g — гомоморфизмы алгебры A в алгебру B, D — косая деривация типа (f, g) алгебры A в алгебру B. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — элементы алгебры A. Элемент $D(x_1 \ldots x_n)$ является тогда суммой n произведений $p_1, p_2, \ldots, p_n$, где p_i получается из произведения $x_1 x_2 \ldots x_n$ заменой j-го множителя x_j элементом $f(x_j)$ для $j < i$, элементом $D(x_j)$ для $j = i$ и элементом $g(x_j)$ для $j > i$.*

Доказательство будем вести индукцией по n. Для $n = 1$ предложение 10 очевидно. Предположим, что оно уже доказано для какого-то значения n, и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ — элементы алгебры A. Тогда

$$D(x_1\ldots x_n x_{n+1}) = D(x_1\ldots x_n)\,g(x_{n+1}) + f(x_1\ldots x_n)\,D(x_{n+1}) =$$
$$= (p_1 + \ldots + p_n)\,g(x_{n+1}) + f(x_1)\ldots f(x_n)\,D(x_{n+1}),$$

что доказывает предложение 10 для $n+1$.

Следствие. *Пусть B — ассоциативная унитарная алгебра над полем K, A — подалгебра алгебры B, такая, что $1 \in A$, и пусть D — деривация A в B. Пусть x — элемент алгебры A, такой, что Dx перестановочен с x. Если P — полином с коэффициентами из поля K, то $D(P(x)) = P'(x)\cdot Dx$, где P' — производная полинома P.*

Согласно предложению 4, это утверждение справедливо для случая полинома P, сводящегося к постоянной. Так как D — линейное отображение, то наше утверждение достаточно доказать для $P(x) = x^n$ $(n > 0)$, $P'(x) = nx^{n-1}$. Но для этого случая оно непосредственно следует из предложения 10.

Предложение 11. *Пусть A и B — ассоциативные алгебры, S — система образующих алгебры A, f и g — гомоморфизмы алгебры A в алгебру B и D — линейное отображение алгебры A в алгебру B. Для того чтобы D было косой деривацией типа (f, g) алгебры A в алгебру B, достаточно, чтобы равенство*

$$D(xy) = D(x)\,g(y) + f(x)\,D(y)$$

выполнялось для всех $x \in S$ и $y \in A$.

Для $x \in A$ обозначим через L_x операцию умножения слева на элемент x в алгебре A, а для $u \in B$ через M_u — умножение слева на элемент u в алгебре B. Пусть A' — совокупность всех элементов $x \in A$, таких, что

$$D \circ L_x = M_{Dx} \circ g + M_{f(x)} \circ D.$$

Ясно, что A' — векторное подпространство алгебры A. Мы покажем, что A' — подалгебра; так как, согласно нашему условию, $S \subset A'$, то из этого будет следовать, что $A' = A$, и предложение 11 будет тем самым доказано. Пусть x и y — элементы пространства A'. Так как алгебра A ассоциативна, то $L_{xy} = L_x L_y$, так что

$$D \circ L_{xy} = (M_{Dx} \circ g + M_{f(x)} \circ D) \circ L_y.$$

Поскольку g является гомоморфизмом, $g \circ L_y = M_{g(y)} \circ g$, откуда

$$D \circ L_{xy} = M_{Dx} \circ M_{g(y)} \circ g + M_{f(x)} \circ M_{Dy} \circ g + M_{f(x)} \circ M_{f(y)} \circ D.$$

3 Зак. 2604. Клод Шевалле

Так как алгебра B ассоциативна, то $M_{Dx} \circ M_{g(y)} + M_{f(x)} \circ M_{Dy}$ — операция умножения слева на элемент $(Dx) g(y) + f(x)(Dy) = D(xy)$, и $M_{f(x)} \circ M_{f(y)} = M_{f(xy)}$, т. е.

$$D \circ L_{xy} = M_{D(xy)} \circ g + M_{f(xy)} \circ D.$$

Тем самым показано, что $xy \in A'$, и предложение 11 доказано.

Следствие. *Пусть M — векторное пространство, T — тензорная алгебра над M, f и g — унитарные гомоморфизмы алгебры T в себя и D_1 — линейное отображение пространства M в алгебру T. Тогда существует косая деривация типа (f, g) алгебры T в себя, продолжающая отображение D_1, и притом только одна.*

Для $x \in M$ обозначим через $\Phi(x)$ операцию умножения слева на элемент $f(x)$ в алгебре T и через $\Psi(x)$ — отображение $u \to D_1(x) g(u)$ алгебры T в себя. Из леммы 1 § 1 следует существование одного и только одного линейного отображения D алгебры T в себя, для которого имеет место равенство

$$D \circ L_x = \Phi(x) \circ D + \Psi(x)$$

при каждом $x \in M$ (L_x означает здесь умножение слева на элемент x) и, кроме того, $D(1) = 0$. Если $x \in M$, то имеем

$$D(x) = (D \circ L_x)(1) = (\Psi(x))(1) = D_1(x),$$

что показывает, что отображение D продолжает отображение D_1. Равенство

$$D(xu) = D(x) g(u) + f(x) D(u)$$

имеет место для $x \in M$ и $u \in T$; оно, очевидно, также справедливо для $x = 1$ и $u \in T$. Из предложения 11 следует, что отображение D является косой деривацией типа (f, g). Единственность деривации D вытекает из следствия предложения 4.

§ 4. Симметрические алгебры

Пусть V — векторное пространство. Обозначим через T тензорную алгебру над пространством V и через $\mathfrak{S}$ — идеал, порожденный в алгебре T элементами вида $xx' - x'x$ для всевозможных пар элементов x и x' пространства V. Пусть S — фактор-алгебра $T/\mathfrak{S}$. Элементы $xx' - x'x$ однородны степени 2 в градуированной алгебре T; поэтому естественное отображение T на S индуцирует изоморфизм векторного пространства V на некоторое подпространство в S (следствие предложения 3 из § 2). Мы отождествим элементы пространства V с их образами в алгебре S. После этого отождествления будем называть алгебру S *симметрической алгеброй над* V. Это унитарная ассоциативная алгебра, для которой V является системой почти-образующих. Отсюда вытекает, что и всякий базис пространства V оказывается системой почти-образующих алгебры S. Так как $\mathfrak{s}$—однородный идеал алгебры T (предложение 2 из § 2), то градуировка алгебры T индуцирует градуировку в алгебре S. Группой степеней для градуированной алгебры S является аддитивная группа целых чисел; все элементы степени < 0 равны нулю; элементами степени 0 алгебры S оказываются скаляры, а элементами степени 1 — элементы пространства V. Следует помнить, что операция умножения для элементов пространства V имеет различный смысл в зависимости от того, рассматривается ли пространство V как часть алгебры T или как часть алгебры S. Чтобы избежать недоразумений, мы будем употреблять знак $\otimes$ для операции умножения в алгебре T и сохраним обычное обозначение для умножения в алгебре S.

Так как идеал $\mathfrak{s}$ содержит элементы $x \otimes x' - x' \otimes x$ (для x и x' в пространстве V), то $xx' - x'x = 0$, т. е. элементы пространства V перестановочны в алгебре S. Они также перестановочны с элементом 1; отсюда следует, что S — коммутативная алгебра, как это показывает следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть E — система образующих ассоциативной алгебры A. Если элементы множества E перестановочны друг с другом, то алгебра A коммутативна.*

Множество элементов алгебры A, перестановочных с $x \in E$, образует подалгебру алгебры A (так как A ассоциативна), содержащую, по предположению, множество E; следовательно, эта подалгебра совпадает с алгеброй A, так что элемент x принадлежит центру алгебры A. Центр алгебры оказывается подалгеброй, содержащей множество E; поэтому он совпадает с A, что и доказывает лемму 1.

Предложение 1. *Пусть V — векторное пространство, S — симметрическая алгебра над V и f — линейное отображение пространства V в ассоциативную коммутативную и унитарную алгебру A. Тогда существует один и только* *один унитарный гомоморфизм f^* алгебры S в алгебру A, продолжающий отображение f; множество $f(V)$ является системой почти-образующих алгебры $f^*(S)$.*

Пусть x и x' — элементы пространства V. Так как алгебра A коммутативна, то

$$f(x)f(x')-f(x')f(x)=0;$$

предложение 1 следует поэтому из теоремы 1 § 1.

Унитарный гомоморфизм f^* называется *естественным продолжением отображения f на алгебру S.*

Пусть, в частности, f — линейное отображение векторного пространства V в векторное пространство V', и пусть S и S' — симметрические алгебры соответственно над V и V'. Можно, конечно, рассматривать отображение f как линейное отображение V в S'; тогда отображение f допускает естественное продолжение f^*, являющееся унитарным гомоморфизмом алгебры S в алгебру S'. Если g — линейное отображение пространства V' в векторное пространство V'' и g^* — естественное продолжение отображения g в гомоморфизм алгебры S' в симметрическую алгебру S'' над V'', то, как легко видеть, естественным продолжением отображения $g\circ f$ пространства V в пространство V'' является гомоморфизм $g^*\circ f^*$.

Предложение 2. *Пусть f — линейное отображение векторного пространства V в векторное пространство V'. Пусть S и S' — симметрические алгебры соответственно над V и V', и пусть f^* — гомоморфизм алгебры S в алгебру S', являющийся естественным продолжением отображения f. Тогда гомоморфизм f^* однороден степени 0. Если отображение f взаимно однозначно, то и гомоморфизм f^* взаимно однозначен.*

Пусть y — однородный элемент степени n алгебры S (где n — целое число). Если $n<0$, то $y=0$, и тогда $f^*(y)=0$. Если $n=0$, то элемент y — скаляр и скаляром также является элемент $f^*(y)$, так как f^*—унитарный гомоморфизм. Если $n>0$, то элемент y — линейная комбинация произведений из n элементов пространства V и, следовательно, $f^*(y)$ — линейная комбинация произведений из n элементов пространства V'. Во всех случаях $f^*(y)$ оказывается однородным элементом степени n, так что гомоморфизм f^* однороден степени 0. Пусть теперь отображение f взаимно однозначно. Обозначим через V'' некоторое подпространство, дополнительное к подпространству $f(V)$ в V'. Тогда существует линейное отображение g пространства V' в пространство V, такое, что $g(f(x)) = x$ для $x \in V$ и $g(x'') = 0$ для $x'' \in V''$. Пусть g^* — унитарный гомоморфизм алгебры S' в алгебру S, продолжающий отображение g. Гомоморфизм $g^* \circ f^*$ алгебры S в себя унитарен и переводит элементы пространства V в себя; это, следовательно, тождественное отображение алгебры S на себя, что и доказывает взаимную однозначность отображения f^*.

Рассмотрим, в частности, случай, когда V является подпространством пространства V' и когда f — тождественное отображение. Очевидно, в этом случае отображение f можно продолжить в изоморфизм f^* алгебры S в алгебру S'. В случае необходимости мы можем отождествить симметрическую алгебру над пространством V с подалгеброй симметрической алгебры над пространством V' (посредством изоморфизма f^*).

Каждый эндоморфизм X векторного пространства V обладает естественным продолжением $\sigma(X)$ на симметрическую алгебру S над пространством V; $\sigma(X)$ является унитарным эндоморфизмом алгебры S. Из сказанного выше следует, что эндоморфизм $\sigma(X)$ однороден степени 0 и что для эндоморфизмов X в Y пространства V имеет место равенство $\sigma(X \circ Y) = \sigma(X) \circ \sigma(Y)$. Естественное продолжение тождественного эндоморфизма пространства V является тождественным эндоморфизмом алгебры S; из этого следует, что отображение $X \to \sigma(X)$ оказывается представлением мультипликативной группы обратимых эндоморфизмов пространства V.

Предложение 3. *Пусть V_1 и V_2 — векторные пространства над одним и тем же полем, а V — произведение этих пространств; пусть S_1, S_2 и S — симметрические алгебры соответственно над V_1, V_2 и V. Отображение*

$$(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2$$

(где $x_i \in V_i$, $i = 1, 2$) пространства V в тензорное произведение $S_1 \otimes S_2$ алгебр S_1 и S_2 может быть продолжено (единственным способом) в изоморфизм f^* алгебры S на алгебру $S_1 \otimes S_2$ [1]).

[1]) Знак $\otimes$ служит здесь для обозначения тензорного произведения алгебр S_1 и S_2 (Бурбаки, Алгебра, гл. III, § 3, n° 1), а не для обозначения умножения в тензорной алгебре над пространством V. [Ср. добавление переводчика в конце настоящей книги, стр. 259. — *Прим. перев.*]

Из предложения 1 вытекает существование однозначно определенного унитарного гомоморфизма f^* алгебры S в алгебру $S_1 \otimes S_2$, продолжающего отображение f. Кроме того, $f(V)$ является системой почти-образующих алгебры $f^*(S)$. Но

$$f(V) = V_1 \otimes 1 + 1 \otimes V_2,$$

и мы видим, что $f(V)$ — система почти-образующих алгебры $S_1 \otimes S_2$, так что $f^*(S) = S_1 \otimes S_2$. Линейные отображения $x_1 \to (x_1, 0)$ и $x_2 \to (0, x_2)$ пространств V_1 и V_2 в пространство V можно продолжить в унитарные гомоморфизмы g_1^* и g_2^* алгебр S_1 и S_2 в алгебру S. Существует линейное отображение g^* алгебры $S_1 \otimes S_2$ в алгебру S, для которого

$$g^*(s_1 \otimes s_2) = g_1^*(s_1)\, g_2^*(s_2),$$

если $s_i \in S_i$ $(i = 1, 2)$ (Бурбаки, Алгебра, гл. III, § 1, n°2 [1])). Так как алгебра S коммутативна, то, как непосредственно видно, g^* является гомоморфизмом; этот гомоморфизм, очевидно, унитарен. Отображение $g^* \circ f^*$ — унитарный гомоморфизм алгебры S в себя. Для $x_i \in V_i$ $(i = 1, 2)$ имеем

$$g^*(x_1 \otimes 1) = (x_1, 0) \quad \text{и} \quad g^*(1 \otimes x_2) = (0, x_2).$$

Следовательно, гомоморфизм $g^* \circ f^*$ переводит каждый элемент пространства V в себя и поэтому является тождественным отображением алгебры S на себя. Это показывает, что отображение f^* — изоморфизм.

Предложение 4. *Пусть V — векторное пространство, B — базис пространства V, а S — симметрическая алгебра над V. Тогда элементы множества B алгебраически независимы в алгебре S над основным полем пространства V.*

Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — различные элементы базиса B. Пусть P — алгебра полиномов от n переменных $X_1, \ldots, X_n$ с коэффициентами из основного поля пространства V. Как известно, существует линейное отображение f пространства V в алгебру P, для которого $f(b_i) = X_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. Пусть f^* — естественное продолжение отображения f на алгебру S. Ясно, что

$$f^*(F(b_1, \ldots, b_n)) = F(X_1, \ldots, X_n) = F$$

[1]) См. добавление переводчика, стр. 258. — *Прим. перев.*

для всякого $F \in P$, поэтому $F(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$ для $F \neq 0$, что и доказывает предложение 4.

Следствие 1. *При тех же обозначениях, что и в предложении 4, каждый элемент алгебры S может быть представлен в виде полинома от элементов базиса B с коэффициентами из основного поля K пространства V. Алгебра S изоморфна алгебре полиномов от переменных, множество которых равномощно базису B, с коэффициентами из поля K.*

Это следует непосредственно из предложения 4 и из того факта, что множество B—система почти-образующих алгебры S.

Следствие 2. *Симметрическая алгебра над векторным пространством не содержит делителей нуля, отличных от* 0.

Это вытекает из следствия 1.

Следствие 2 показывает, что симметрическую алгебру S над векторным пространством V можно погрузить в поле отношений R. Поле R является чисто трансцендентным расширением основного поля K пространства V.

Определение 1. *Пусть R — поле отношений симметрической алгебры S над векторным пространством V. Элементы поля R называются рациональными выражениями от элементов пространства V.*

Предложение 5. *Пусть V — векторное пространство, S — симметрическая алгебра над пространством V и R—алгебра рациональных выражений от элементов пространства V. Всякое линейное отображение φ пространства V в алгебру S может быть продолжено в деривацию D_φ алгебры R и притом единственным образом. Эта деривация переводит алгебру S в себя; если φ однородно степени m, то тем же свойством обладает ограничение деривации D_φ на алгебру S. Отображение $\varphi \to D_\varphi$ пространства линейных отображений пространства V в алгебру S в пространство дериваций алгебры R линейно.*

Пусть T — тензорная алгебра над V, а $\mathfrak{S}$ — идеал, порожденный в T элементами $x \otimes x' - x' \otimes x$ (для x и x' из V). Пусть S_0 — некоторое подпространство, дополнительное к пространству $\mathfrak{S}$ в T; естественное отображение алгебры T на алгебру S индуцирует взаимно однозначное линейное отображение пространства S_0 на пространство S. Для $x \in V$ обозначим через $\psi(x)$ элемент пространства S_0, принадлежащий к классу $\varphi(x) \bmod \mathfrak{S}$; ψ — линейное отображение пространства V в T. Это отображение может быть продолжено в деривацию Δ алгебры T (следствие предложения 11 из § 3). Для $x \in V$, $x' \in V$ имеем

$$\Delta(x \otimes x' - x' \otimes x) =$$
$$= \Delta(x) \otimes x' + x \otimes \Delta(x') - \Delta(x') \otimes x - x' \otimes \Delta(x).$$

Так как алгебра S коммутативна, то эта формула показывает, что образ элемента $\Delta(x \otimes x' - x' \otimes x)$ при естественном отображении алгебры T в алгебру S есть нуль, следовательно, $\Delta(x \otimes x' - x' \otimes x) \in \mathfrak{S}$. Из предложения 3 § 3 тогда следует, что деривация Δ отображает идеал $\mathfrak{S}$ в себя, а согласно предложению 2 из § 3, отображение Δ индуцирует при переходе в фактор-алгебру деривацию D_φ^S алгебры S. Ясно, что деривация D_φ^S продолжает отображение φ. Но, как известно, деривация кольца без делителей нуля $\neq 0$ может быть продолжена в деривацию поля отношений этого кольца (Бурбаки, Алгебра, гл. IV, § 4, n°4, предложение 11). Этим доказано существование деривации D_φ поля R, продолжающей отображение φ.

Поле R порождается (как поле) элементами пространства V и элементами основного поля K этого пространства. Отсюда мы заключаем, что всякая деривация поля R однозначно определяется своим действием на элементы поля K и на элементы пространства V. Но деривация алгебры R переводит элементы поля K в 0, как легко видеть из предложения 4 § 3; такая деривация, следовательно, однозначно определяется своим действием на элементы пространства V, что и доказывает единственность деривации D_φ.

Если отображение φ однородно степени m, то из следствия предложения 6 § 3 вытекает, что деривация D_φ^S также однородна степени m.

Пусть φ и φ' — линейные отображения пространства V в алгебру S. Отображение $D_\varphi + D_{\varphi'}$ является тогда деривацией алгебры R, продолжающей отображение $\varphi + \varphi'$, т. е. $D_\varphi + D_{\varphi'} = D_{\varphi+\varphi'}$. Аналогично доказывается, что $D_{a\varphi} = aD_\varphi$ для всех $a \in K$. Это показывает, что $\varphi \to D_\varphi$ — линейное отображение.

Предложение 6. *Пусть X и X' — эндоморфизмы векторного пространства V, а D_X, $D_{X'}$ — деривации ал-*

гебры R рациональных выражений от элементов пространства V, продолжающие эндоморфизмы X и X' соответственно. Тогда деривацией алгебры R, продолжающей эндоморфизм

$$[XX'] = XX' - X'X,$$

является отображение

$$[D_X, D_{X'}] = D_X D_{X'} - D_{X'} D_X.$$

Действительно, $[D_X, D_{X'}]$ — деривация алгебры (следствие предложения 5 из § 3), и эта деривация, очевидно, продолжает эндоморфизм $[X, X']$.

Пусть теперь V — векторное пространство, V^* — пространство, дуальное к V, и S^* — симметрическая алгебра над V^*. Пусть $\mathfrak{o}$ — множество всех отображений пространства V в поле K. Множество $\mathfrak{o}$ является кольцом, если для φ и ψ из $\mathfrak{o}$ определить $\varphi + \psi$ как отображение $x \to \varphi(x) + \psi(x)$, а $\varphi\psi$ — как отображение $x \to \varphi(x)\psi(x)$. Это кольцо коммутативно и содержит подполе, изоморфное полю K, состоящее из постоянных отображений. Следовательно, его можно рассматривать как алгебру над полем K. Алгебра $\mathfrak{o}$, очевидно, унитарна и содержит пространство V^* в качестве подпространства. Предложение 1 показывает, что тождественное отображение пространства V^* в алгебру $\mathfrak{o}$ можно продолжить в унитарный гомоморфизм π алгебры S^* в алгебру $\mathfrak{o}$. Элементы подкольца $\pi(S^*)$ алгебры $\mathfrak{o}$ мы будем называть *полиномиальными функциями над пространством V*, и через $\mathfrak{P}$ мы будем обозначать кольцо $\pi(S^*)$ полиномиальных функций.

Предложение 7. *Пусть V — векторное пространство над бесконечным полем K, S^* — симметрическая алгебра над дуальным к V пространством V^* и π — гомоморфизм алгебры S^* на кольцо $\mathfrak{P}$ полиномиальных функций над пространством V, продолжающий тождественное отображение пространства V^* в $\mathfrak{P}$. В этом случае гомоморфизм π является изоморфизмом.*

Пусть s^* — отличный от 0 элемент алгебры S^*, а B^* — базис пространства V^*. Тогда s^* можно представить в виде полинома от конечного числа элементов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ базиса B^*: $s^* = F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где F — полином с коэффициентами из поля K. Ясно, что $\pi(s^*)$ — отображение $x \to F(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x))$ пространства V в поле K. Так как поле K содержит бесконечно много элементов и так как $F \neq 0$, то существуют элементы $a_1, \ldots, a_n$ поля K, такие, что $F(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Так как $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — линейно независимые элементы пространства V^*, то существует элемент $x \in V$, такой, что $\lambda_i(x) = a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (Бурбаки, Алгебра, гл. II, § 4, n°8). Тогда $(\pi(s^*))(x) \neq 0$, откуда $\pi(s^*) \neq 0$.

Всякий раз, когда мы будем рассматривать векторное пространство V над бесконечным полем, мы будем отождествлять симметрическую алгебру над дуальным к V пространством с алгеброй полиномиальных функций над пространством V посредством гомоморфизма π.

Предложение 8. *Пусть V_1 и V_2 — векторные пространства над одним и тем же бесконечным полем K, и пусть $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ — алгебры полиномиальных функций соответственно над пространствами V_1 и V_2. Тогда существует изоморфизм тензорного произведения $\mathfrak{P}_1 \otimes \mathfrak{P}_2$ на алгебру полиномиальных функций над пространством $V_1 \times V_2$, отображающий произведение $P_1 \otimes P_2$ $(P_i \in \mathfrak{P}_i,\ i = 1, 2)$ в функцию*

$$(x, y) \to P_1(x) P_2(y)$$

для $x \in V_1$, $y \in V_2$).

Этот факт непосредственно вытекает из предложения 3.

Пусть теперь R^* — алгебра рациональных выражений от элементов пространства V^*. Даже если предположить, что поле K содержит бесконечно много элементов, то все-таки невозможно отождествить алгебру R^* с подполем кольца отображений пространства V в поле K. Действительно, если $V \neq \{0\}$, то всегда существует линейная функция $\lambda \neq 0$ над пространством V, и так как $\lambda(0) = 0$, то отображение λ не имеет обратного элемента в кольце отображений пространства V в поле K, между тем как λ обладает обратным элементом в алгебре R^*.

Но в некоторой мере все-таки можно исправить положение. Пусть r^* — элемент алгебры R^*, и пусть x — элемент пространства V. Мы будем говорить, что *элемент r^* определен в точке x*, если r^* можно представить в виде частного двух полиномиальных функций P и Q, причем $Q(x) \neq 0$. (Мы предполагаем, что поле K содержит бесконечно много элементов, так что алгебра R^* является полем отношений кольца $\mathfrak{P}$ полиномиальных функций над пространством V.) Предположим, что элемент r^* определен в точке x; если P, Q, P', Q' — полиномиальные функции, такие, что

$$r^* = PQ^{-1} = P'Q'^{-1} \text{ и } Q(x) \neq 0,\ Q'(x) \neq 0,$$

то

$$P(x)(Q(x))^{-1} = P'(x)(Q'(x))^{-1};$$

мы будем говорить, что элемент $P(x)(Q(x))^{-1}$ поля K, зависящий только от элементов r^* и x, является *значением элемента* r^* *в точке* x, и будем обозначать этот элемент через $r^*(x)$. Как легко видеть, множество элементов r^* алгебры R^*, определенных в заданной точке x пространства V, образует подкольцо в R^* (содержащее кольцо $\mathfrak{P}$) и отображение $r^* \to r^*(x)$ является гомоморфизмом этого подкольца в поле K. Таким образом, каждому элементу r^* алгебры R^* сопоставляется отображение $\pi(r^*)$ некоторого подмножества пространства V (а именно, множества тех точек, в которых определен элемент r^*) в поле K. Отображение H подмножества E пространства V в поле K мы будем называть *рациональной функцией над* V, если в R^* существует такой элемент r^*, что E является множеством точек, в которых r^* определен, и если $r^*(x) = H(x)$ для всех $x \in E$. В этом случае, как мы сейчас покажем, элемент r^* определен однозначно.

Определение 2. *Подмножество E векторного пространства V над бесконечным полем K называется алгебраически плотным в V, если существует полиномиальная функция $Q \neq 0$ над пространством V, такая, что все точки $x \in V$, для которых $Q(x) \neq 0$, содержатся в E.*

Из предложения 7 следует, что пустое множество не может быть алгебраически плотным в пространстве V.

Лемма 2. *Пересечение конечного числа алгебраически плотных подмножеств векторного пространства V над бесконечным полем K алгебраически плотно и, следовательно, не пусто.*

Пусть E_i $(i = 1, \ldots, h)$ — алгебраически плотные подмножества пространства V, E — их пересечение, Q_i при каждом i — полиномиальная функция $\neq 0$, равная нулю на дополнении к множеству E_i (в пространстве V). Тогда $Q = Q_1 \ldots Q_h$ является полиномиальной функцией $\neq 0$ и равной нулю на дополнении к множеству E.

Лемма 3. *Пусть V — векторное пространство над бесконечным полем, V^* — дуальное к нему пространство. Тогда* *рациональное выражение r^* от элементов пространства V^*, определенное и принимающее значение 0 на алгебраически плотном подмножестве E пространства V, равно нулю.*

Действительно, пусть $r^* = PQ^{-1}$, где P и Q — полиномиальные функции над V. Тогда $P(x) = 0$ во всех точках x подмножества E' множества E, в которых $Q(x) \neq 0$. Пусть Q_1 — полиномиальная функция $\neq 0$, принимающая значение 0 на дополнении к E. Тогда

$$P(x)\,Q(x)\,Q_1(x) = 0$$

для всех $x \in V$, т. е. $PQQ_1 = 0$. Но $QQ_1 \neq 0$; следовательно, $P = 0$, т. е. $r^* = 0$.

Если r^* и s^* — два рациональных выражения от элементов пространства V^*, то, как видно из леммы 2, множество точек, на котором одновременно определены оба выражения, алгебраически плотно в пространстве V; если для всех точек x этого множества $r^*(x) = s^*(x)$, то, согласно лемме 3, $r^* = s^*$. Мы видим, что соответствие между рациональными выражениями от элементов пространства V^* и рациональными функциями над пространством V взаимно однозначно. Поэтому *можно отождествить поле R^* рациональных выражений от элементов пространства V^* с множеством $\mathfrak{R}$ рациональных функций над пространством V.* После такого отождествления множество $\mathfrak{R}$ можно рассматривать и как поле, и как алгебру над основным полем K пространства V. Для элементов H и H' алгебры $\mathfrak{R}$ имеем

$$(H + H')(x) = H(x) + H'(x) \text{ и } (HH')(x) = H(x)\,H'(x)$$

в каждой точке x, в которой элементы H и H' оба определены.

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{R}$ — алгебра рациональных функций над векторным пространством V над полем с бесконечным числом элементов, и пусть x — элемент из V. Пусть V^* — пространство, дуальное к V; линейное отображение $\lambda \to \lambda(x)$ пространства V^* в основное поле (которое можно рассматривать как линейное отображение пространства V^* в симметрическую алгебру S^* над V^*) может быть продолжено в деривацию D_x алгебры $\mathfrak{R}$* (предложение 5). *Эта деривация называется частной деривацией по x в алгебре $\mathfrak{R}$.*

Предположим теперь, что размерность пространства V конечна, и пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — базис пространства V^*. Каждый элемент H алгебры $\mathfrak{R}$ можно тогда представить в виде рациональной дроби $\rho(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Для $x \in V$ имеем

$$(1) \qquad D_x(\rho(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\lambda_i(x),$$

где ρ_i — частная производная рациональной дроби ρ_i по ее i-му аргументу. Действительно, отображение

$$\rho(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \to \rho_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

является деривацией алгебры $\mathfrak{R}$; следовательно, деривацией также оказывается отображение D'_x:

$$\rho(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \to \sum_{i=1}^{n} \rho_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\lambda_i(x).$$

Если λ — какой-нибудь элемент пространства V^*, то $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i$, где a_i — элементы основного поля. Имеем $D'_x\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i(x) = D_x\lambda$; отсюда $D'_x = D_x$ (ср. предложение 5).

Если H — элемент алгебры $\mathfrak{R}$, а x — элемент пространства V, то функция D_xH определена во всех точках y пространства V, в которых определена функция H. Действительно, положим $H = FG^{-1}$, где F и G — полиномиальные функции и $G(y) \neq 0$. Тогда $D_xH = ((D_xF)G - F(D_xG))G^{-2}$ [1]) и D_xF, D_xG — полиномиальные функции. Это доказывает наше утверждение.

Определение 4. *Пусть V — векторное пространство над бесконечным полем, и пусть H — рациональная функция над V. Обозначим через E множество точек пространства V, в которых H определена. Если $y \in E$, то линейное отображение $x \to (D_xH)(y)$ пространства V в основное поле называется дифференциалом функции H в точке y и обозначается через $(dH)_y$. Отображение $(y, x) \to (dH)_y(x)$ множества $E \times V$ в основное поле пространства V называется дифференциалом функции H и обозначается через dH.*

Для $(y, x) \in E \times V$ имеем

$$(dH)(y, x) = (dH)_y(x) = (D_xH)(y).$$

[1]) Ср. Бурбаки, Алгебра, гл. IV, § 4, предложение 11.

Пусть H и H' — рациональные функции над V и y — точка из V, в которой обе функции определены. Тогда для $x \in V$ имеем

$$(2)\quad \begin{aligned} (d(H+H'))(y, x) &= (dH)(y, x) + (dH')(y, x), \\ (d(HH'))(y, x) &= ((dH)(y, x))\, H'(y) + H(y)\,((dH')(y, x)), \end{aligned}$$

как это немедленно следует из того, что отображение D_x является деривацией. Если λ — линейная функция над V, то

$$(3)\qquad (d\lambda)(y, x) = \lambda(x),$$

так как отображение D_x продолжает отображение $\lambda \to \lambda(x)$.

Определение 5. *Пусть V — векторное пространство над бесконечным полем, а X — эндоморфизм пространства V; пусть V^* — пространство, дуальное к V, и ${}^tX$ — эндоморфизм пространства V^*, сопряженный по отношению к эндоморфизму X* (Бурбаки, Алгебра, гл. II, § 4, n°9[1]). *Деривация алгебры $\mathfrak{R}$ рациональных функций над V, продолжающая эндоморфизм $-{}^tX$ пространства V^*, называется деривацией алгебры $\mathfrak{R}$, естественно соответствующей эндоморфизму X.*

Предложение 9. *Пусть V — векторное пространство над бесконечным полем и $\mathfrak{R}$ — алгебра рациональных функций над V. Обозначим через D_X деривацию алгебры $\mathfrak{R}$, естественно соответствующую эндоморфизму X пространства V. Тогда:*

1) *отображение $X \to D_X$ пространства эндоморфизмов пространства V в пространство дериваций алгебры $\mathfrak{R}$ линейно;*

2) *для двух эндоморфизмов X и X' пространства V имеем*

$$D_{[X, X']} = [D_X, D_{X'}];$$

3) *если $H \in \mathfrak{R}$, то рациональная функция D_XH определена во всех точках y, в которых определена функция H, и имеет место равенство*

$$(D_XH)(y) = -(dH)(y, Xy).$$

---

[1]) См. добавление переводчика в конце настоящей книги, стр. 257. — *Прим. перев.*

Первое утверждение непосредственно следует из предложения 5. Второе утверждение вытекает из предложения 6, если принять во внимание, что

$$-{}^t[X,\ X'] = -{}^t(XX') + {}^t(X'X) = -({}^tX')({}^tX) + ({}^tX)({}^tX') =$$
$$= [{}^tX,\ {}^tX'] = [-{}^tX,\ -{}^tX']$$

ср. Бурбаки, Алгебра, гл. II, § 4, n° 9, формула (15)].

Если рациональная функция H определена в точке y, то можно написать $H = FG^{-1}$, где F и G — полиномиальные функции, такие, что $G(y) \neq 0$. Но тогда

$$D_X H = ((D_X F)\, G - F\,(D_X G))\, G^{-2},$$

где $D_X F$, $D_X G$ — полиномиальные функции. Следовательно, функция $D_X H$ определена в точке y.

Пусть $\mathfrak{P}'$ — множество полиномиальных функций F над пространством V, таких, что

$$(D_X F)(y) = -(dF)(y,\ Xy)$$

во всех точках y пространства V. Это множество, очевидно, является векторным подпространством алгебры $\mathfrak{P}$ всех полиномиальных функций над V. Множество $\mathfrak{P}'$ содержит, конечно, функции-постоянные (являющиеся скалярами алгебры $\mathfrak{P}$). Если F — линейная функция над V, то

$$(D_X F)(y) = (-{}^tX(F))(y) = -F(Xy) = -(dF)(y,\ Xy)$$

[ср. формулу (3)], т. е. $F \in \mathfrak{P}'$. Если F и G — функции из $\mathfrak{P}'$, то

$$D_X(FG) = (D_X F)\, G + F\,(D_X G)$$

и

$$(d(FG))(y,\ Xy) = ((dF)(y,\ Xy))\, G(y) + F(y)\,((dG)(y,\ Xy)).$$

Поэтому $FG \in \mathfrak{P}'$. Из сказанного вытекает, что $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$. Пусть теперь H — любой элемент алгебры $\mathfrak{R}$, и пусть y — точка пространства V, в которой функция H определена. Представим H в виде FG^{-1}, где F и G принадлежат алгебре $\mathfrak{P}$ и, кроме того, $G(y) \neq 0$. Тогда

$$(D_X H)(y) = \frac{((D_X F)(y))\, G(y) - F(y)\,((D_X G)(y))}{(G(y))^2}$$

и

$$(dH)(y,\ Xy) = \frac{((dF)(y,\ Xy))\, G(y) - F(y)\,((dG)(y,\ Xy))}{(G(y))^2}.$$

Это показывает, что $(D_X H)(y) = -(dH)(y,\ Xy)$.

Мы хотим обобщить понятие рациональной функции над векторным пространством V. Определим понятие *рационального отображения* одного векторного пространства в другое. Пусть даны векторные пространства V и U над одним и тем же бесконечным полем K. Пусть $\mathfrak{R}$ — алгебра рациональных функций над пространством V; образуем тензорное произведение $\mathfrak{R}^U$ векторных пространств $\mathfrak{R}$ и U над полем K. Каждому элементу пространства $\mathfrak{R}^U$ мы сопоставим отображение некоторого алгебраически плотного подмножества пространства V в пространство U. Для $y \in V$ обозначим через $\mathfrak{R}_y$ множество рациональных функций над V, определенных в точке y; $\mathfrak{R}_y$ — подпространство пространства $\mathfrak{R}$. Мы будем говорить, что элемент $R \in \mathfrak{R}^U$ определен в точке y, если он принадлежит подпространству $\mathfrak{R}_y \otimes U$ пространства $\mathfrak{R}^U$. Отображение $(H, u) \to H(y)u$ является билинейным отображением декартова произведения $\mathfrak{R}_y \times U$ в пространство U; оно определяет линейное отображение тензорного произведения $\mathfrak{R}_y \otimes U$ в U. Образ элемента R пространства $\mathfrak{R}_y \otimes U$ при этом отображении называется *значением элемента R в точке y* и обозначается $R(y)$. Если R — заданный элемент пространства $\mathfrak{R}^U$, то множество E точек $y \in V$, в которых элемент R определен, алгебраически плотно в пространстве V. Действительно, элемент R можно представить в виде суммы $H_1 \otimes u_1 + \ldots + H_m \otimes u_m$, где $H_1, \ldots, H_m$ — элементы алгебры $\mathfrak{R}$, а $u_1, \ldots, u_m$ — элементы пространства U. Пусть E_i — множество точек пространства V, в которых определена функция H_i; очевидно, что R определен во всех точках пересечения множеств $E_1, \ldots, E_m$, что и доказывает наше утверждение (в силу леммы 2). Мы будем называть отображение ρ подмножества E пространства V в пространство U *рациональным отображением пространства V в пространство U*, если существует элемент R пространства $\mathfrak{R}^U$, для которого множество E является областью определения и $R(y) = \rho(y)$ при всех $y \in E$. Если это условие выполнено, то элемент R определен однозначно, как это показывает следующая лемма:

Лемма 4. *Пусть R и R' — элементы пространства $\mathfrak{R}^U$. Если существует алгебраически плотное подмножество E пространства V, в котором оба элемента R и R' определены и принимают одинаковые значения, то $R = R'$.*

Пусть $(u_i)_{i \in I}$ — базис пространства U. Положим

$$R = \sum_{i \in I} H_i \otimes u_i \text{ и } R' = \sum_{i \in I} H'_i \otimes u_i,$$

где H_i и H'_i — элементы алгебры $\mathfrak{R}$. Пусть y — точка множества E; из наших определений следует, что все элементы H_i и H'_i определены в точке y. Кроме того,

$$R(y) = \sum_{i \in I} H_i(y) u_i = R'(y) = \sum_{i \in I} H'_i(y) u_i,$$

т. е. $H'_i(y) = H_i(y)$ для всех $i \in I$. Так как множество E алгебраически плотно в пространстве V, то, как показывает лемма 3, $H'_i = H_i$ для всех i, так что $R' = R$.

Мы, следовательно, можем отождествить множество $\mathfrak{R}^U$ с множеством рациональных отображений пространства V в пространство U, после чего это второе множество становится векторным пространством над основным полем K пространства V. Пусть $\mathfrak{P}$ — алгебра полиномиальных функций над V; пространство $\mathfrak{P} \otimes U$ — мы обозначим его через $\mathfrak{P}^U$ — является подпространством пространства рациональных отображений пространства V в пространство U. Элементы пространства $\mathfrak{P}^U$ мы будем называть *полиномиальными отображениями пространства V в пространство U*; такие отображения, очевидно, всюду определены.

Пространство $\mathfrak{R}$ является одновременно полем, и пространство $\mathfrak{R}^U$ рациональных отображений V в U можно также рассматривать как векторное пространство над полем $\mathfrak{R}$. Для $H \in \mathfrak{R}$ и $R \in \mathfrak{R}^U$ мы обозначим через HR произведение вектора R на скаляр H в векторном пространстве $\mathfrak{R}^U$ над полем $\mathfrak{R}$; тогда $(HR)(y) = H(y) R(y)$ для всех $y \in V$, в которых оба элемента H и R определены. Элементы u пространства U можно отождествить с элементами $1 \otimes u$ пространства $\mathfrak{R}^U$, т. е. с постоянными отображениями пространства V в пространство U. Каждый элемент пространства $\mathfrak{R}^U$ можно поэтому записать в виде $\sum_{i=1}^{m} H_i u_i$, где $H_1, \ldots, H_m$ — элементы поля $\mathfrak{R}$, а $u_1, \ldots, u_m$ — элементы пространства U.

Лемма 5. *Пусть R — рациональное отображение векторного пространства V в векторное пространство U, и* *пусть y — точка пространства V, в которой отображение R определено. Тогда существует полиномиальная функция F над V, такая, что произведение FR является полиномиальным отображением и $F(y) \neq 0$.*

Пусть $(u_i)_{i \in I}$ — базис пространства U; положим

$$R = \sum_{i \in I} H_i u_i,$$

где H_i — рациональные функции над V. Все эти функции определены в точке y, причем $H_i \neq 0$ только для конечного числа индексов i. Можно, следовательно, положить $H_i = G_i F_i^{-1}$, где G_i и F_i — полиномиальные функции над пространством V и $F_i(y) \neq 0$ для всех индексов i; кроме того, можно предположить, что имеется только конечное число индексов i, для которых $F_i \neq 1$. Произведение F функций F_i является полиномиальной функцией с искомыми свойствами.

Полиномиальная функция F над пространством V, такая, что произведение FR является полиномиальным отображением, называется *знаменателем* отображения R.

Лемма 6. *Пусть V, U и T — векторные пространства над одним и тем же бесконечным полем K, R — рациональное отображение пространства V в пространство U, а S — рациональное отображение пространства U в пространство T. Пусть A и B — множества точек, где соответственно определены отображения R и S, и пусть A' — множество тех точек $y \in A$, для которых $R(y) \in B$. Предположим, что A' содержит по крайней мере одну точку y_0; тогда существует полиномиальная функция над V, отличная от нуля в y_0, такая, что множество A' содержит все точки пространства V, в которых эта функция отлична от нуля, и существует одно и только одно рациональное отображение M пространства V в пространство T, определенное на множестве A', такое, что $M(y) = S(R(y))$ для всех $y \in A'$.*

Пусть F' — знаменатель отображения S, такой, что $F'(R(y_0)) \neq 0$ (лемма 5); F' можно представить в виде полинома $F'(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ от конечного числа линейных функций $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ над пространством U. Пусть F — знаменатель отображения R, такой, что $F(y_0) \neq 0$, и пусть $(u_i)_{i \in I}$ — базис пространства U; пусть $FR = \sum_{i \in I} G_i u_i$, где G_i — полиномиальные функции над пространством V. Положим

$$L_j = F^{-1} \sum_{i \in I} \lambda_j(u_i)\, G_i \qquad (1 \leqslant j \leqslant n);$$

L_j является рациональной функцией над пространством V, и если $F(y) \neq 0$ для точки $y \in V$, то

$$F'(R(y)) = F'(L_1(y), \ldots, L_n(y)).$$

Рациональную функцию $F'(L_1, \ldots, L_n)$ можно, конечно, представить в виде GF^{-h}, где G — полиномиальная функция, а h — показатель > 0. Имеем $F'(R(y_0)) \neq 0$, так что $G(y_0) \neq 0$. Полиномиальная функция FG отлична от нуля в точке y_0, и если $y \in V$ — точка, в которой $(FG)(y) \neq 0$, то $y \in A$, $F'(R(y)) \neq 0$, откуда следует, что $R(y) \in B$ и $y \in A'$.

Пусть теперь $(t_j)_{j \in J}$ — базис пространства T; положим $S = \sum_{j \in J} H'_j t_j$, где H'_j — рациональные функции над пространством U. Поле рациональных функций над U можно получить присоединением к полю K линейных функций над U. В этом поле функция H'_j может быть представлена в виде рациональной дроби от некоторого числа линейных функций $\lambda_{j,k}\,(1 \leqslant k \leqslant n_j)$. Пусть $H'_j = \tilde{H}'_j(\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,n_j})$ — такое представление. Можно предположить, что для каждого j функции $\lambda_{j,k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n_j)$ линейно независимы. В таком случае рациональная дробь $\tilde{H}'_j$ однозначно определена. Положим

$$L_{j,k} = F^{-1} \sum_{i \in J} \lambda_{j,k}(u_i)\, G_i;$$

$L_{j,k}$ являются рациональными функциями над пространством V. Для $y \in A$ все функции $F^{-1}G_i$ определены в точке y, и, следовательно, все функции $L_{j,k}$ определены на множестве A. Каждая функция H'_j определена в точке y_0. Поэтому если представить рациональную функцию H'_j как частное двух взаимно простых полиномов, то знаменатель будет отличен от нуля, когда его аргументы принимают соответственно значения $L_{j,1}(y_0), \ldots$ $\ldots, L_{j,n_j}(y_0)$. Таким образом, выражение $\tilde{H}'_j(L_{j,1}, \ldots, L_{j,n_j})$, очевидно, имеет смысл и представляет некоторый элемент M_j поля рациональных дробей над V. Кроме того, все функции M_j определены на множестве A' и только для конечного числа индексов j функция $M_j \neq 0$. Положим $M = \sum_{j \in J} M_j t_j$; M является тогда рациональным отображением пространства V в пространство T, и имеет место равенство $M(y)=S(R(y))$ для всех $y\in A'$. Утверждения леммы доказаны.

При тех же обозначениях, что и выше, в случае, когда множество A' не пустое, мы будем называть отображение M *композицией отображений* S *и* R и записывать его в виде $M=S\circ R$.

По поводу этого понятия уместно сделать следующие замечания. 1) Если композиция $S\circ R$ существует, то ее область определения может быть строго больше, чем множество A' тех точек y, для которых отображения $R(y)$ и $S(R(y))$ определены (это легко себе уяснить, рассмотрев случай $S=0$). 2) Если R и R' — рациональные отображения пространства V в пространство U, а S — рациональное отображение пространства U в пространство T, то может случиться, что композиции $S\circ R$ и $S\circ R'$ существуют, а композиция $S\circ(R+R')$ не существует. (Это происходит, например, в случае, когда $R'=-R$ и отображение S не определено в точке 0 пространства U.) Это показывает, что понятием композиции рациональных отображений следует пользоваться с большой осторожностью.

Мы определим теперь понятие дифференциала рационального отображения R векторного пространства V в векторное пространство U. Пусть y — точка, в которой определено отображение R, и пусть $\mathfrak{R}_y$ — множество всех рациональных функций, определенных в точке y. Пусть x — некоторый элемент из V; отображение $(H, u)\to((dH)(y, x))u$ является билинейным отображением декартова произведения $\mathfrak{R}_y\times U$ в пространство U; это отображение, следовательно, определяет линейное отображение подпространства $\mathfrak{R}_y\otimes U$ пространства $\mathfrak{R}^U$ в пространство U. Мы обозначим через $(dR)(y, x)$ образ отображения R при этом линейном отображении.

Отображение $y\to(dR)(y,x)$ пространства V в пространство U, очевидно, линейно; мы будем называть его *дифференциалом отображения* R *в точке* y и обозначать через $(dR)y$.

Пусть даны точки x и y пространства V, и пусть $\mathfrak{R}_y^U$ — векторное пространство (над основным полем K пространства V), состоящее из рациональных отображений пространства V в пространство U, определенных в точке y. Тогда отображение $R\to(dR)(y, x)$ пространства $\mathfrak{R}_y$ в пространство U линейно.

Пусть $(u_i)_{i \in I}$ — базис пространства U, и пусть R — рациональное отображение пространства V в пространство U; положим $R = \sum_{i \in I} H_i u_i$, где H_i — рациональные функции над V. Если y — точка пространства V, в которой отображение R определено, то

$$(4) \qquad \boxed{(dR)(y, x) = \left(d\left(\sum_{i \in I} H_i u_i\right)\right)(y, x) = \sum_{i \in I} ((dH_i)(y, x))\, u_i.}$$

Пусть, далее, H — рациональная функция над пространством V, определенная в точке y. Из формул (2) и (4) непосредственно следует, что

$$(5) \qquad \boxed{(d(HR))(y, x) = ((dH)(y, x))\, R(y) + H(y)((dR)(y, x)).}$$

Если R — линейное отображение, то и все функции H_i линейны, так что $(dH_i)(y, x) = H_i(x)$, и, следовательно,

$$(6) \qquad \boxed{(dR)(y, x) = R(x) \text{ (если } R \text{ линейно).}}$$

Пусть теперь R — рациональное отображение пространства V в пространство U, а S — рациональное отображение пространства U в векторное пространство T. Пусть y — такая точка пространства V, что отображение R определено в y, а отображение S — в $R(y)$; из существования такой точки следует существование композиции $S \circ R$. Мы покажем, что (для всех $x \in V$)

$$(7) \qquad \boxed{(d(S \circ R))(y, x) = (dS)(R(y),\ (dR)(y, x)).}$$

Рассмотрим сначала тот частный случай, когда пространством T является основное поле K пространств V и U. Тогда S — рациональная функция над U, а $S \circ R$ — рациональная функция над V. Формула (7) очевидна, если функция S — постоянная, так как в этом случае обе ее части равны 0. Предположим теперь, что S — линейная функция. Правая часть формулы (7) равна тогда $S((dR)(y, x))$. Пусть $(u_i)_{i \in I}$ — базис пространства U, и пусть $R = \sum_{i \in I} H_i u_i$, где H_i — рациональные функции над V. Все эти функции определены в точке y, и мы имеем

$$S \circ R = \sum_{i \in I} S(u_i) H_i,$$

так что

$$(d(S \circ R))(y, x) = \sum_{i \in I} S(u_i)((dH_i)(y, x)).$$

Кроме того,

$$(dR)(y, x) = \sum_{i \in I} (dH_i)(y, x) u_i$$

и, следовательно,

$$(d(S \circ R))(y, x) = S((dR)(y, x)).$$

Этим формула (7) для случая линейной функции S доказана. Пусть теперь S_1 и S_2 — две рациональные функции над U, определенные в точке $R(y)$ и такие, что формула (7) справедлива для $S = S_1$ и $S = S_2$. Композиции $S_1 \circ R$ и $S_2 \circ R$ существуют, и легко убедиться, что существуют также функции $(S_1 + S_2) \circ R$ и $(S_1 S_2) \circ R$ и что они соответственно равны $S_1 \circ R + S_2 \circ R$ и $(S_1 \circ R)(S_2 \circ R)$; кроме того, если $S_1(R(y)) \neq 0$, то существует композиция $S_1^{-1} \circ R$, которая равна $(S_1 \circ R)^{-1}$. Для сокращения записи положим

$$H_1 = S_1 \circ R, \quad H_2 = S_2 \circ R, \quad v = R(y), \quad u = (dR)(y, x).$$

Для $S = S_1 + S_2$ имеем

$$\begin{aligned}(d(S \circ R))(y, x) &= (dH_1)(y, x) + (dH_2)(y, x) = \\ &= (dS_1)(v, u) + (dS_2)(v, u) = (dS)(v, u).\end{aligned}$$

Для $S = S_1 S_2$

$$\begin{aligned}(d(S \circ R))(y, x) &= ((dH_1)(y, x)) H_2(y) + H_1(y)((dH_2)(y, x)) = \\ &= ((dS_1)(v, u)) S_2(v) + S_1(v)((dS_2)(v, u)) = \\ &= (dS)(v, u).\end{aligned}$$

Наконец, если $S_1(R(y)) \neq 0$ и $S = S_1^{-1}$, то

$$\begin{aligned}(d(S \circ R))(y, x) &= -(H_1(y))^{-2}((dH_1)(y, x)) = \\ &= -(S_1(v))^{-2}((dS_1)(v, u)) = (dS)(v, u).\end{aligned}$$

Мы видим, что формула (7) справедлива для $S = S_1 + S_2$, $S = S_1 S_2$ и [если $S_1(R(y)) \neq 0$] для $S = S_1^{-1}$. Совокупность *полиномиальных* функций S над пространством U, для которых формула (7) справедлива, есть подкольцо в множестве всех полиномиальных функций над пространством U, и это подкольцо содержит постоянные и линейные функции; это показывает, что формула (7) справедлива для всех полиномиальных функций. Если теперь S — рациональная функция над пространством U, определенная в точке $R(y)$, то можно положить $S = S_1^{-1}S_2$, где S_1 и S_2 — полиномиальные функции и $S_1(R(y)) \neq 0$. Мы видим, что формула (7) имеет место и для функции S.

Чтобы перейти к общему случаю, выберем базис $(t_j)_{j \in J}$ в пространстве T и положим $S = \sum_{j \in J} H'_j t_j$, где H'_j — рациональные функции над U. Все эти функции определены в точке $R(y)$, так что композиции $H'_j \circ R$ существуют. Легко видеть, что имеет место равенство

$$S \circ R = \sum_{j \in J} (H'_j \circ R)\, t_j,$$

и, следовательно,

$$(d(S \circ R))(y, x) = \sum_{j \in J} \left(\left(d\left(H'_j \circ R\right)\right)(y, x) \right) t_j,$$

$$(dS)(R(y), (dR)(y, x)) = \sum_{j \in J} \left((dH'_j)(R(y), (dR)(y, x)) \right) t_j.$$

Справедливость формулы (7) для отображения S непосредственно вытекает теперь из того факта, что эта формула верна для каждого H'_j. Формула (7) полностью доказана.

Предложение 10. *Пусть A — ассоциативная унитарная алгебра, а V — ее конечномерное векторное подпространство. Обозначим через $\mathfrak{E}(V)$ пространство эндоморфизмов пространства V. Для целого $n \geqslant 0$ обозначим через A_n векторное подпространство алгебры A, порожденное произведениями из n элементов пространства V, и пусть $\mathfrak{E}(A_n)$ — пространство эндоморфизмов пространства A_n. Предположим, что для каждого $X \in \mathfrak{E}(V)$ существует один и только один унитарный эндоморфизм $f(X)$ алгебры A, продолжающий эндоморфизм X; пусть $f_n(X)$ — ограничение эндоморфизма $f(X)$ на пространство A_n. Отображение f_n пространства $\mathfrak{E}(V)$ в пространство $\mathfrak{E}(A_n)$ является тогда полиномиальным отображением.*

Утверждение тривиально для случая $n = 0$, так как A_0

есть пространство скаляров алгебры A и $f_0(X)$ — тождественное отображение пространства A_0 на себя, так что f_0 — постоянное отображение. Предположим, что $n > 0$, и пусть B—базис пространства V. Для $b_1, \ldots, b_n$ из B имеем

$$f_n(X)(b_1 \ldots b_n) = \sum_{b'_1, \ldots, b'_n \in B} \prod_{i, j=1}^{n} u(b'_i, b, X) b'_1 \ldots b'_n,$$

где $Xb = \sum_{b' \in B} u(b', b, X) b'$. Для фиксированных b и b' отображение $X \to u(b', b, X)$ является линейной функцией над $\mathfrak{E}(V)$. Отсюда вытекает, что каждое из отображений

$$X \to \prod_{i, j=1}^{n} u(b'_i, b_j, X)$$

— полиноминальная функция. Но совокупность элементов вида $b_1 \ldots b_n$, где множители b_i независимо друг от друга пробегают множество B, содержит некоторый базис C пространства A_n. Если выразить произведения $b_1 \ldots b_n$ в виде линейных комбинаций элементов из C, то ясно, что матрица, представляющая отображение $f_n(X)$ в базисе C, имеет своими коэффициентами полиномиальные функции от X. Отсюда непосредственно вытекает, что f_n — полиномиальное отображение.

§ 5. Внешние алгебры

Пусть V — векторное пространство, а T—тензорная алгебра над V. Пусть $\mathfrak{e}$ — идеал, порожденный в алгебре T элементами вида x^2 для всех $x \in V$, и пусть E — фактор-алгебра $T/\mathfrak{e}$. Элементы x^2 $(x \in V)$ однородны степени 2 в градуированной алгебре T; отсюда следует, что естественное отображение алгебры T на алгебру E индуцирует изоморфизм векторного пространства V на некоторое подпространство алгебры E (следствие предложения 3 из § 2). Мы отождествим элементы пространства V с их образами в алгебре E. После такого отождествления алгебра E называется *внешней алгеброй над* V. Это, очевидно, ассоциативная унитарная алгебра, для которой пространство V является системой почти-образующих. Отсюда уже следует, что и каждый базис пространства V оказывается системой почти-образуюших алгебры E. Квадраты всех элементов пространства V в алгебре E равны нулю. Так как $\mathfrak{e}$—однородный идеал алгебры T (предложение 2 из § 2), то градуировка алгебры T индуцирует градуировку во внешней алгебре E. Группой степеней градуированной алгебры E является аддитивная группа целых чисел; элементы степени <0 равны нулю; элементы степени 0—скаляры алгебры E; элементы степени 1 — элементы пространства V.

Если нам придется рассматривать одновременно умножение элементов пространства V как в алгебре T, так и в алгебре E, то (чтобы избежать недоразумений) мы будем употреблять знак $\otimes$ для обозначения умножения в алгебре T.

Предложение 1. *Пусть V — векторное пространство, E — внешняя алгебра над V и f — линейное отображение пространства V в ассоциативную унитарную алгебру A, для которого $(f(x))^2=0$ при каждом $x\in V$. Тогда существует один и только один унитарный гомоморфизм f^* алгебры E в алгебру A, продолжающий отображение f; множество $f(V)$ является системой почти-образующих алгебры $f^*(E)$.*

Это непосредственно следует из теоремы 1 § 1.

Унитарный гомоморфизм f^* называется *естественным продолжением отображения f на алгебру E.*

В частности, всякий эндоморфизм X пространства V может быть естественным образом продолжен в унитарный эндоморфизм $\tilde{X}$ алгебры E. Для всякого целого $n>0$ однородными элементами степени n алгебры E являются линейные комбинации произведений из n элементов пространства V (ср. § 2); отсюда мы непосредственно заключаем, что отображение $\tilde{X}$ однородно степени 0. Если X и Y—эндоморфизмы пространства V, а $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ — их естественные продолжения на алгебру E, то $\tilde{X}\circ\tilde{Y}$ — унитарный эндоморфизм алгебры E, продолжающий эндоморфизм $X\circ Y$ пространства V; он является, следовательно, естественным продолжением эндоморфизма $X\circ Y$ на алгебру E. Естественным продолжением тождественного эндоморфизма пространства V будет, конечно, тождественный эндоморфизм алгебры E. Отсюда заключаем, что отображение $X\to\tilde{X}$ определяет представление мультипликативной группы обратимых эндоморфизмов (автоморфизмов) пространства V.

Предложение 2. *Пусть V — векторное пространство, E — внешняя алгебра над V, x и y — однородные элементы из E степеней m и n соответственно. Тогда $yx=(-1)^{mn}xy$.*

Эта формула очевидна, если $m \leqslant 0$ или $n \leqslant 0$ (так как тогда один из множителей — скаляр, а в случае если его степень < 0, он даже равен 0). Рассмотрим случай $m = 1$. Если $n = 1$, то x и y принадлежат пространству V. Но квадрат каждого элемента из V в алгебре E равен нулю, так что

$$(x+y)^2 = 0, \qquad x^2 = 0, \qquad y^2 = 0$$

и, следовательно, $yx + xy = 0$. Если $n > 1$, элемент y является линейной комбинацией произведений из n элементов пространства V. Поэтому формулу достаточно доказать для случая $y = y_1 y_2 \ldots y_n$, где $y_i \in V$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; но тогда $y_i x = -x y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, откуда легко следует, что $yx = (-1)^n xy$. Если наконец, $m > 1$, то достаточно рассмотреть случай $x = x_1 x_2 \ldots x_m$, где $x_i \in V$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Но тогда $y x_i = (-1)^n x_i y$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, откуда непосредственно заключаем, что $yx = (-1)^{mn} xy$.

Следствие 1. *Пусть V — векторное пространство, а E — внешняя алгебра над V. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — однородные элементы алгебры E, а π — подстановка множества $\{1, 2, \ldots, m\}$; тогда*

$$x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \ldots x_{\pi(m)} = \pm x_1 x_2 \ldots x_m.$$

Это утверждение вытекает непосредственно из предложения 2 и из того факта, что каждая подстановка может быть представлена в виде произведения транспозиций, переставляющих два соседних элемента множества $\{1, 2, \ldots, m\}$.

Следствие 2. *Всякий левый (или правый) однородный идеал внешней алгебры E над векторным пространством V является идеалом в E. Произведение двух любых элементов идеала, порожденного в алгебре E некоторым элементом x пространства V, равно нулю.*

Пусть $\mathfrak{a}$ — левый однородный идеал алгебры E. Чтобы доказать, что $\mathfrak{a}$ является также и правым идеалом, достаточно убедиться, что $\mathfrak{a} y \subset \mathfrak{a}$ для всякого однородного элемента y алгебры E. Пусть x — элемент из $\mathfrak{a}$, и пусть x_n для целого n — однородная компонента степени n элемента x. Тогда $x_n \in \mathfrak{a}$ для всех n, так что $y x_n \in \mathfrak{a}$. Так как $x_n y = \pm y x_n$, то также $x_n y \in \mathfrak{a}$ и, следовательно, $xy \in \mathfrak{a}$. Таким же образом мы убеждаемся, что всякий правый однородный идеал является идеалом. Пусть теперь x — элемент пространства V. Левый идеал Ex и правый идеал xE оба однородны (предложение 2 § 2) и, следовательно, совпадают с идеалом, порожденным элементом x. Отсюда вытекает, что произведение двух элементов из этого идеала всегда можно записать в виде $(ax)(xb) = ax^2b = 0$ (где a и b — элементы алгебры E), так как квадрат каждого элемента пространства V равен нулю.

Теорема 2. *Пусть E — внешняя алгебра над векторным пространством V, V^* — пространство, дуальное к V, и E^* — внешняя алгебра над V^*. Обозначим через $\mathfrak{L}(E)$ ассоциативную алгебру эндоморфизмов векторного пространства E. Тогда существует один и только один унитарный гомоморфизм ι алгебры E^* в алгебру $\mathfrak{L}(E)$, обладающий следующим свойством: для $x^* \in V^*$ эндоморфизм $\iota(x^*)$ является антидеривацией алгебры E, продолжающей отображение $x \to x^*(x)$ пространства V в поле K. Если u^* — однородный элемент степени m алгебры E^*, то $\iota(u^*)$ — однородное отображение степени — m.*

Пусть T — тензорная алгебра над V, и пусть $\mathfrak{e}$ — идеал, порожденный в алгебре T квадратами элементов пространства V, так что $E = T/\mathfrak{e}$. Пусть x^* — элемент из V^*. Отображение $x \to x^*(x)$ можно рассматривать как линейное отображение пространства V в алгебру T. Это отображение может быть продолжено в антидеривацию Δ алгебры T (следствие предложения 11 из § 3). Для $x \in V$ имеем

$$\Delta(x \otimes x) = \Delta(x) \otimes x - x \otimes \Delta(x) = 0,$$

так как $\Delta(x) = x^*(x)$ — скаляр. Из предложения 3 § 2 следует, что антидеривация Δ отображает идеал $\mathfrak{e}$ в себя, а из предложения 2 § 3 — что она определяет в фактор-алгебре $T/\mathfrak{e}$ антидеривацию $\iota(x^*)$, которая, очевидно, продолжает отображение $x \to x^*(x)$ пространства V в поле K. Согласно следствию предложения 6 § 3, отображение $\iota(x^*)$ однородно степени -1. Отображение $(\iota(x^*))^2$ однородно степени -2 и переводит, следовательно, пространство V в $\{0\}$. Кроме того, это отображение является деривацией алгебры E (предложение 5 § 3); отсюда мы заключаем, что $(\iota(x^*))^2 = 0$ (следствие предложения 3 § 3). Пусть x^* и y^* — элементы пространства V^*. Тогда $\iota(x^* + y^*)$ и $\iota(x^*) + \iota(y^*)$ являются антидеривациями, совпадающими на пространстве V, так что (согласно следствию предложения 3 из § 3) $\iota(x^* + y^*) = \iota(x^*) + \iota(y^*)$. Таким же образом убеждаемся, что $\iota(ax^*) = a\iota(x^*)$ для каждого элемента a основного поля пространства V; следовательно, отображение $x^* \to \iota(x^*)$ пространства V^* в алгебру $\mathfrak{L}(E)$ линейно. Из предложения 1 вытекает, что это отображение можно продолжить в унитарный гомоморфизм алгебры E^* в алгебру $\mathfrak{L}(E)$; мы его также обозначим через ι. Пусть u^* — однородный элемент степени m алгебры E^*. Если $m < 0$, то $u^* = 0$. Если $m = 0$, то u^* — скаляр и $\iota(u^*)$ — скалярное кратное тождественного отображения алгебры E, следовательно, однородный элемент степени 0. Если $m > 0$, то u^* — линейная комбинация произведений из m элементов пространства V^*; поэтому $\iota(u^*)$ — линейная комбинация произведений из m однородных линейных отображений степени -1 пространства E в себя, так что $\iota(u^*)$ — однородное отображение степени $-m$. Пусть теперь ι' — гомоморфизм E^* в алгебру $\mathfrak{L}(E)$, обладающий свойством, требуемым для гомоморфизма ι в формулировке теоремы 2. Из следствия предложения 3 § 3 вытекает, что ι' совпадает с гомоморфизмом ι на пространстве V^*, так что, согласно предложению 1, $\iota' = \iota$. Теорема 2 доказана.

Определение 1. *При тех же обозначениях, что и в теореме* 2, *пусть v^* — элемент пространства E^* и v — элемент пространства E; элемент $\iota(v^*)v$ называется копроизведением элемента v^* на элемент v.*

Теорема 3. *Пусть E — внешняя алгебра над векторным пространством V, и пусть $x_1, \ldots, x_m$ — элементы из V. Для того чтобы произведение этих элементов в алгебре E было отлично от* 0, *необходимо и достаточно, чтобы они были линейно независимы в пространстве V.*

Предположим сперва, что $x_1, \ldots, x_m$ линейно независимы. Неравенство $x_1 \ldots x_m \neq 0$ будем доказывать индукцией по m. Оно тривиально для $m = 1$. Пусть $m > 1$; предположим, что наше утверждение доказано для систем из $m - 1$ элементов. Так как $x_1, \ldots, x_m$ линейно независимы, то существует линейная функция x^* над V, для которой

$$x^*(x_1) = 1, \quad x^*(x_2) = \ldots = x^*(x_m) = 0.$$

Пусть $\iota(x^*)$ — операция коумножения на элемент x^*. Эта операция — антидеривация, отображающая в 0 элементы алгебры, порожденной элементами $x_2, \ldots, x_m$ (предложение 3 из § 3); следовательно,

$$\iota(x^*)(x_1 x_2 \ldots x_m) = (\iota(x^*)x_1)x_2 \ldots x_m = x_2 \ldots x_m.$$

Но $x_2 \ldots x_m \neq 0$ по предположению индукции, так что $x_1 x_2 \ldots x_m \neq 0$. Пусть теперь элементы $x_1, \ldots, x_m$ линейно зависимы. Один из них является линейной комбинацией других, и следствие 1 предложения 2 показывает, что для доказательства равенства $x_1 \ldots x_m = 0$ можно, не ограничивая общности, предположить, что x_m — линейная комбинация элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$. Тогда $x_1 \ldots x_m$ — линейная комбинация произведений $x_1 \ldots x_{m-1} x_i$, где $1 \leqslant i \leqslant m-1$, и все эти произведения равны нулю, согласно следствию 2 предложения 2.

Лемма 1. *Пусть A — алгебра. Предположим, что каждому конечному подмножеству F некоторого множества B сопоставлен элемент $p(F)$ из A так, что выполнено следующее условие: для двух конечных подмножеств F и F' множества B произведение $p(F)p(F')$ равно $\pm p(F \cup F')$, если пересечение множеств F и F' пусто, и это произведение равно 0, если F и F' имеют общие элементы. Если все элементы $p(F)$ отличны от 0, то они образуют линейно независимое семейство в алгебре A.*

Действительно, предположим, что существует нетривиальное линейное соотношение вида $\sum_F a(F)p(F) = 0$ между элементами $p(F)$ (где коэффициенты $a(F)$ принадлежат основному полю алгебры A и знак суммы распространяется на все конечные подмножества F множества B). Пусть F_1 — некоторое конечное подмножество множества B, для которого $a(F_1) \neq 0$. Существует только конечное число конечных множеств F, для которых $a(F) \neq 0$; объединение таких множеств будет опять конечным подмножеством F' множества B. Пусть F'_1 — дополнение к множеству F_1 в F'. Умножим равенство $\sum_F a(F)p(F) = 0$ на элемент $p(F'_1)$. Имеем $p(F_1)p(F'_1) = \pm p(F')$, а если $F \neq F'_1$, то или $a(F) = 0$, или $F \cap F'_1 \neq \emptyset$, так что $a(F)p(F)p(F'_1) = 0$. Получаем $a(F_1)p(F') = 0$ и, следовательно, $p(F') = 0$, что и доказывает лемму.

Теорема 4. *Пусть V — векторное пространство, B — базис пространства V и E — внешняя алгебра над V. Пусть $\mathfrak{F}$ — совокупность конечных подмножеств множества B. Для каждого $F \in \mathfrak{F}$ обозначим через $p(F)$ произведение элементов множества F, взятых в каком-нибудь порядке.*

Семейство $(p(F))_{F\in\mathfrak{F}}$ *является тогда базисом векторного пространства* E. *Если* $\mathfrak{F}_n$ *есть совокупность подмножеств множества* B, *содержащих* n *элементов (где* n — *натуральное число), то семейство* $(p(F))_{F\in\mathfrak{F}_n}$ — *базис пространства однородных элементов степени* n *алгебры* E.

Из следствия 1 предложения 2 непосредственно вытекает, что $p(F)p(F') = \pm p(F \cup F')$, если пересечение множеств F, F' пустое, а из следствия 2 предложения 2 — что $p(F)p(F') = 0$, если множества F и F' имеют общий элемент. Теорема 3 показывает, что все элементы $p(F)$ отличны от 0; в силу леммы 1 они линейно независимы. Как легко видеть, пространство линейных комбинаций элементов $p(F)$ является подалгеброй E' алгебры E (так как элементы $\pm p(F)$ образуют полугруппу относительно умножения в алгебре E). Эта подалгебра содержит 1, так как $p(\emptyset) = 1$; она содержит также множество B, так как $p(\{b\}) = b$ для каждого $b \in B$. Алгебра E' совпадает, следовательно, с алгеброй E, что и доказывает первое утверждение теоремы 4. Второе утверждение получается непосредственно, если заметить, что элемент $p(F)$ однороден и его степень равна числу элементов множества F.

Следствие. *Пусть* V — *векторное пространство конечной размерности* n. *Внешняя алгебра* E *пространства* V *имеет тогда размерность* 2^n. *Пространство* E_m *однородных элементов степени* m *алгебры* E *имеет размерность* 0, *если* $m > n$, *и эта размерность равна биномиальному коэффициенту* $\binom{n}{m}$, *если* $0 \leqslant m \leqslant n$. *Пусть* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — *базис пространства* V; *если* $m > 1$, *то произведения* $x_{i_1} \ldots x_{i_m}$, *где* $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n$, *образуют базис пространства* E_m. *В частности, пространство* E_n *имеет размерность* 1 *и порождается элементом* $x_1 \ldots x_n$.

Это следует непосредственно из теоремы 4.

Предложение 3. *Пусть* V — *векторное пространство конечной размерности,* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — *базис пространства* V, f — *гомоморфизм внешней алгебры* E *над* V *в некоторую алгебру* A. *Для того чтобы гомоморфизм* f *был изоморфизмом алгебры* E *на некоторую подалгебру алгебры* A, *необходимо и достаточно, чтобы* $f(x_1 \ldots x_n) \neq 0$.

Условие, конечно, необходимо, так как $x_1 \ldots x_n \neq 0$. Предположим, что оно выполнено. Пусть F — некоторое подмножество множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, и пусть $p(F)$ — произведение элементов множества F, взятых в каком-то определенном порядке. Если F' — дополнение множества F, то $p(F)p(F') = \pm x_1 \ldots x_n$, так что $f(p(F)) \neq 0$. Из леммы 1 следует, что элементы $f(p(F))$, где F пробегает все подмножества множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, линейно независимы. Из следствия теоремы 4 вытекает, что гомоморфизм f является изоморфизмом.

Предложение 4. *Пусть f — линейное отображение векторного пространства V в векторное пространство V', и пусть f^* — естественное продолжение отображения f в гомоморфизм внешней алгебры E пространства V во внешнюю алгебру E' пространства V'. Если f — изоморфизм пространства V на некоторое подпространство пространства V', то f^* — изоморфизм алгебры E на некоторую подалгебру алгебры E'.*

Пусть B — базис пространства V; если F — конечное подмножество множества B, то пусть $p(F)$ — произведение элементов множества F, взятых в каком-то порядке. Из условия предложения следует, что семейство $(f(b))_{b \in B}$ линейно независимо в пространстве V'. Теорема 3 показывает, что элементы $f^*(p(F))$ отличны от нуля. В силу леммы 1 они линейно независимы, что и доказывает, что f^* — изоморфизм.

Если, в частности, V — подпространство пространства V', то тождественное отображение V в V' может быть продолжено в изоморфизм внешней алгебры E над V во внешнюю алгебру E' над V'. С помощью этого изоморфизма мы отождествляем алгебру E с подалгеброй алгебры E'.

Предложение 5. *Пусть V — векторное пространство, являющееся прямой суммой двух подпространств V_1 и V_2; пусть E, E_1 и E_2 — внешние алгебры над пространствами V, V_1 и V_2 соответственно. Билинейное отображение $(u_1, u_2) \to u_1u_2$ множества $E_1 \times E_2$ в алгебру E определяет взаимно однозначное линейное отображение φ тензорного произведения $E_1 \otimes E_2$ на алгебру E, такое, что*

$$\varphi(u_1 \otimes u_2) = u_1u_2$$

для $u_i \in E_i$, $i = 1, 2$.

Как известно, можно сопоставить отображению $(u_1, u_2) \to u_1u_2$ множества $E_1 \times E_2$ в алгебру E линейное отображение φ тензорного произведения $E_1 \otimes E_2$ в алгебру E, для которого $\varphi(u_1 \otimes u_2) =$

$=u_1 u_2$. Пусть теперь B — базис пространства V, являющийся объединением базисов B_1 пространства V_1 и B_2 пространства V_2. Каждому конечному подмножеству F_i множества B_i $(i=1, 2)$ сопоставим элемент $p(F_i)$ алгебры E_i — произведение элементов множества F_i, взятых в каком-то определенном порядке. Каждое конечное подмножество F множества B представимо одним и только одним образом в виде объединения $F_1 \cup F_2$, где $F_i \subset B_i$ $(i=1, 2)$. Положим $p(F)=p(F_1)\,p(F_2)$. Из теоремы 4 следует, что элементы $p(F_i)$ образуют базис пространства E_i $(i=1, 2)$, а элементы $p(F)$ — базис пространства E. Кроме того, имеет место равенство

$$\varphi(p(F_1)\otimes p(F_2)) = p(F_1 \cup F_2).$$

Отсюда вытекает, что отображение φ взаимно однозначно и отображает $E_1 \otimes E_2$ на E.

Нужно заметить, что, вообще говоря, отображение φ не будет изоморфизмом алгебры $E_1 \otimes E_2$ (тензорного произведения алгебр E_1 и E_2) на алгебру E, так как, вообще говоря, элементы алгебры E_1 не перестановочны в алгебре E с элементами алгебры E_2. Пусть u_i, u_i' — *однородные* элементы алгебры E_i $(i=1, 2)$, причем u_2 — элемент степени m, а u_1' — степени n. Тогда из предложения 2 сразу следует, что

$$\varphi(u_1 \otimes u_2)\,\varphi(u_1' \otimes u_2') = (-1)^{mn}\varphi(u_1 u_1' \otimes u_2 u_2').$$

Предложение 6. *Пусть V — векторное пространство, U и U' — два его конечномерных подпространства. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис пространства U, а $\{x_1', \ldots, x_{n'}'\}$ — базис пространства U'. Для того чтобы элемент x из V принадлежал U, необходимо и достаточно, чтобы $x x_1 \ldots x_n = 0$; далее, $U \subset U'$ тогда и только тогда, когда элемент $x_1' \ldots x_{n'}'$ является произведением элемента $x_1 \ldots x_n$ на некоторый элемент алгебры E; $U = U'$ тогда и только тогда, когда элемент $x_1' \ldots x_{n'}'$ — скалярное кратное элемента $x_1 \ldots x_n$; пространства U и U' имеют общий элемент, отличный от нуля, тогда и только тогда, когда*

$$x_1 \ldots x_n x_1' \ldots x_{n'}' = 0.$$

Для того чтобы $x \in U$, необходимо и достаточно, чтобы элементы $x, x_1, \ldots, x_n$ были линейно зависимы, т. е. чтобы $x x_1 \ldots x_n = 0$ (теорема 3). Если $U \subset U'$, то элементы x_i принадлежат внешней алгебре $E_{U'}$ над пространством U'. Тогда элемент $x_1 \dots x_n$ также содержится в алгебре $E_{U'}$. Правый идеал, порожденный элементом $x_1 \dots x_n$ в алгебре $E_{U'}$, однороден (предложение 2 § 2) и является, следовательно, некоторым идеалом $\mathfrak{a}$ алгебры $E_{U'}$ (следствие предложения 2). Идеал $\mathfrak{a}$ отличен от $\{0\}$, так что естественный гомоморфизм алгебры $E_{U'}$ на фактор-алгебру $E_{U'}/\mathfrak{a}$ не является изоморфизмом и $x'_1 \dots x'_{n'} \in \mathfrak{a}$ (предложение 3). Наоборот, предположим, что

$$x'_1 \dots x'_{n'} = x_1 \dots x_n y,$$

где $y \in E$. Для $x \in V$ условие $xx_1 \dots x_n = 0$ влечет за собой $xx'_1 \dots x'_{n'} = 0$, что, как показывает первое утверждение предложения 6, означает, что $U \subset U'$. Элемент y можно разложить на его однородные компоненты, так что можно предположить, что y — однородный элемент степени $n' - n$. Если $U' \subset U$, то $U' = U$ тогда и только тогда, когда $n' = n$, т. е. когда y — скаляр. Для того чтобы пространства U и U' имели общий элемент, отличный от нуля, необходимо и достаточно, чтобы сумма этих пространств не была прямой, т. е. чтобы элементы $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_{n'}$ были линейно зависимы. Согласно теореме 3, это эквивалентно равенству

$$x_1 \dots x_n x'_1 \dots x'_{n'} = 0.$$

Пусть V — векторное пространство конечной размерности и $\{x_1, \dots, x_n\}$ — базис пространства V. Пусть m — целое число, $1 \leqslant m \leqslant n$; элементы вида $x_{i_1} \dots x_{i_m}$ (где $i_1 < \dots < i_m$) образуют базис пространства E_m однородных элементов степени m внешней алгебры E над V. Если представить элемент u пространства E_m в виде линейной комбинации элементов этого базиса, то коэффициенты этого выражения называются *плюккеровыми координатами элемента* u (относительно базиса $\{x_1, \dots, x_n\}$ пространства V). Пусть U — подпространство размерности m пространства V, и пусть u — произведение элементов некоторого базиса пространства U. О плюккеровых координатах элемента u говорят, что они образуют *систему плюккеровых координат подпространства* U. Из предложения 6 следует, что две системы плюккеровых координат подпространства U (относительно одного и того же базиса пространства V) пропорциональны.

Предложение 7. *Пусть V — векторное пространство и E — внешняя алгебра над V. Для целого $n > 0$ обозначим через E_n пространство однородных элементов степени n алгебры E. Пусть φ — линейное отображение пространства E_n в векторное пространство U. Отображение*

$$(x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(x_1 \ldots x_n) \qquad (\text{где } x_i \in V,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$$

множества V^n в пространство U будет полилинейным и знакопеременным отображением. Обратно, если f — полилинейное и знакопеременное отображение множества V^n в пространство U, то существует одно и только одно линейное отображение φ пространства E_n в пространство U, такое, что

$$\varphi(x_1 \ldots x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \text{ для всех } (x_1, \ldots, x_n) \in V^n.$$

Отображение $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$, очевидно, будет полилинейным; если для двух различных индексов i и j имеет место равенство $x_i = x_j$, то $x_1 \ldots x_n = 0$ (следствие 2 предложения 2), так что отображение

$$(x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(x_1 \ldots x_n)$$

знакопеременно.

Пусть теперь f — полилинейное знакопеременное отображение множества V^n в пространство U. Пусть T — тензорная алгебра над пространством V, T_n — пространство однородных элементов степени n алгебры T, и пусть B — базис пространства V. Элементы вида $b_1 \otimes \ldots \otimes b_n$, где $b_i \in B$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, образуют тогда базис пространства T_n (ср. предложение 3 § 1). Существует линейное отображение Φ пространства T_n в пространство U, такое, что

$$\Phi(b_1 \otimes \ldots \otimes b_n) = f(b_1, \ldots, b_n)$$

для всякой конечной последовательности $(b_1, \ldots, b_n)$ элементов множества B. Полилинейные отображения f и отображение

$$(x_1, \ldots, x_n) \to \Phi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$$

множества V^n в пространство U совпадают на множестве элементов из V^n вида $(b_1, \ldots, b_n)$ (где $b_i \in B$, $1 \leqslant i \leqslant n$). Так как B — базис пространства V, то эти отображения совпадают. Пусть $\mathfrak{e}$ — идеал, порожденный в алгебре T элементами вида $x \otimes x$, где $x \in V$. Всякий элемент из $\mathfrak{e}$ является суммой элементов вида $y \otimes x \otimes x \otimes z$, где $x \in V$, $y \in T$, $z \in T$. Разлагая элементы y и z на их однородные компоненты, мы убеждаемся, что каждый элемент из идеала $\mathfrak{e} \cap T_n$ есть сумма элементов вида $y \otimes x \otimes x \otimes z$, где y и z — однородные элементы степеней m и p соответственно, причем $m+p+2=n$. Можно поэтому предположить, что y и z — произведения (в алгебре T) соответственно m и p элементов из V. Но тогда $y \otimes x \otimes x \otimes z$ является произведением n элементов пространства V, в котором два соседних множителя равны. Так как отображение f знакопеременно, то $\Phi(y \otimes x \otimes x \otimes z) = 0$. Отсюда мы заключаем, что Φ отображает элементы из $\mathfrak{e} \cap T_n$ в 0. Но $E = T/\mathfrak{e}$ и естественное отображение алгебры T на алгебру E индуцирует линейное отображение пространства T_n на пространство E_n, ядро которого есть $T_n \cap \mathfrak{e}$. Отсюда следует, что при переходе в фактор-алгебру отображение Φ определяет линейное отображение φ пространства E_n в пространство U, такое, что

$$\varphi(x_1 \ldots x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

для всякого $(x_1, \ldots, x_n) \in V^n$. Предложение 7 доказано.

Это предложение показывает, что пространство E_n однородных элементов степени n внешней алгебры E над векторным пространством V изоморфно n-й внешней степени пространства V, определенной у Бурбаки (Алгебра, гл. III, § 5, n°5). Отсюда же легко заключить, что определенная нами внешняя алгебра совпадает (с точностью до изоморфизма) с внешней алгеброй, определенной Бурбаки (Алгебра, гл. III, § 5, n°9). В частности, можно легко вывести следующий результат. Пусть V — векторное пространство конечной размерности n, E — внешняя алгебра над V, u — отличный от 0 однородный элемент алгебры E, имеющий степень n, и X — эндоморфизм пространства V. Если обозначить через $\tilde{X}$ эндоморфизм алгебры E, естественно продолжающий эндоморфизм X на алгебру E, то

$$\tilde{X}u = (\det X)\, u.$$

Предложение 8. *Пусть V — векторное пространство, E — внешняя алгебра над V и X — эндоморфизм пространства V. Тогда существует одна и только одна деривация D_X алгебры E, продолжающая эндоморфизм X. Отображение $X \to D_X$ пространства эндоморфизмов пространства V в пространство дериваций алгебры E является линейным. Для* *двух эндоморфизмов X и X' пространства V эндоморфизм $[X, X']$ продолжается в деривацию $[D_X, D_{X'}]$.*

Пусть T — тензорная алгебра над пространством V, а $\mathfrak{e}$ — идеал, порожденный в T элементами вида $x \otimes x$, где $x \in V$. Следствие предложения 11 § 3 показывает, что эндоморфизм X можно продолжить в деривацию Δ алгебры T. Для $x \in V$ имеем

$$\Delta(x \otimes x) = \Delta(x) \otimes x + x \otimes \Delta(x).$$

Но так как x и $X(x) = \Delta(x)$ принадлежат V, то они антиперестановочны в E, т. е. $\Delta(x \otimes x) \in \mathfrak{e}$. Из предложения 3 § 3 следует, что деривация Δ отображает идеал $\mathfrak{e}$ в себя, а из предложения 2 § 3 — что Δ определяет при переходе в фактор-алгебру некоторую деривацию D_X алгебры E. Ясно, что деривация D_X продолжает эндоморфизм X, а согласно следствию предложения 3, D_X — единственная деривация, продолжающая X. Пусть X и X' — эндоморфизмы пространства V, и пусть a — элемент поля K. Операторы $D_X + D_{X'}$, aD_X, $[D_X, D_{X'}]$ являются деривациями алгебры E (ср. следствие предложения 5 § 3), продолжающими эндоморфизмы $X + X'$, aX и $[X, X']$ соответственно. Следовательно, $D_X + D_{X'} = D_{X+X'}$, $aD_X = D_{aX}$ и $[D_X, D_{X'}] = D_{[X, X']}$.

Предложение 9. *Пусть V — векторное пространство, X — эндоморфизм пространства V и D_X — деривация внешней алгебры E над V, продолжающая эндоморфизм X. Отображение D_X однородно степени 0. Пусть U — конечномерное подпространство пространства V, и пусть u — произведение элементов некоторого базиса пространства U. Для того чтобы эндоморфизм X отображал пространство U в себя, необходимо и достаточно, чтобы элемент $D_X u$ был скалярным кратным элемента u. В этом случае $D_X u = su$, где s — след ограничения эндоморфизма X на пространство U.*

Первое утверждение непосредственно вытекает из следствия предложения 6 § 3. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис пространства U и $x_1 \ldots x_n = u$. Элемент $D_X u$ является тогда суммой n произведений $p_1, \ldots, p_n$, где p_i — произведение, получающееся из $x_1 \ldots x_n$ заменой i-го множителя x_i элементом Xx_i (предложение 10 § 3). Если эндоморфизм X отображает пространство U в себя, то можно положить $Xx_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j$, где a_{ji} — элементы основного поля. Вспоминая, что произведение элементов пространства V равно нулю, если два множителя равны между собой (следствие предложения 2), мы видим, что $p_i = a_{ii}u$, так что $D_X u = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) u$; при этом $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = s$. Предположим теперь, что элемент $D_X u$ является скалярным кратным элемента u. Тогда $x_i(D_X u) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $x_i p_j = 0$ для $j \neq i$, так что $x_i p_i = 0$. Отсюда вытекает, что элементы Xx_i, $x_1, \ldots, x_n$ линейно зависимы (теорема 3), т. е. $Xx_i \in U$. Так как это имеет место для $1 \leqslant i \leqslant n$, то эндоморфизм X отображает пространство U в себя.

Подобный, но немного менее точный результат можно получить для эндоморфизма алгебры E, продолжающего эндоморфизм X.

Предложение 10. *Пусть V — векторное пространство, X — обратимый эндоморфизм пространства V и $\tilde{X}$ — унитарный эндоморфизм внешней алгебры E над V, продолжающий эндоморфизм X. Пусть U — конечномерное подпространство пространства V и u — произведение элементов некоторого базиса пространства U. Для того чтобы эндоморфизм X отображал пространство U в себя, необходимо и достаточно, чтобы элемент $\tilde{X}u$ был скалярным кратным элемента u.*

Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис пространства U, для которого $x_1 \ldots x_n = u$. Имеем $\tilde{X}u = (Xx_1) \ldots (Xx_n)$. Если эндоморфизм X отображает пространство U в себя, то элементы Xx_i принадлежат пространству U и их произведение является скалярным кратным элемента u (предложение 6). Предположим, наоборот, что $\tilde{X}u = au$, где a — скаляр. Если Y — эндоморфизм, обратный эндоморфизму X, и $\tilde{Y}$ — унитарный эндоморфизм, продолжающий Y, то $\tilde{Y} \circ \tilde{X}$ и $\tilde{X} \circ \tilde{Y}$ продолжают тождественный эндоморфизм пространства V и совпадают, следовательно, с тождественным эндоморфизмом алгебры E. Это показывает, что $a \neq 0$. Пусть x — любой элемент из U. Тогда $xu = 0$, так что $(Xx)(\tilde{X}u) = 0$, и так как $a \neq 0$, то $(Xx)u = 0$, т. е. $Xx \in U$ (предложение 6), так что эндоморфизм X отображает пространство U в себя.

§ 6. Расширение основного поля

В этом параграфе мы будем обозначать через K некоторое поле и через L — некоторое надполе поля K. Если V — векторное пространство над K, то через V^L мы обозначим то векторное пространство, которое получается из V расширением основного поля до L (Бурбаки, Алгебра, гл. III, § 2, n° 1[1])). Так как V — векторное пространство, то его можно отождествить с подмножеством пространства V^L с помощью естественного отображения пространства V в V^L, что мы и сделаем. Тогда всякий базис пространства V будет также базисом пространства V^L. Если, кроме того, $(a_i)_{i \in I}$ — базис поля L над полем K, то всякий элемент y из V^L однозначным образом представим в виде

$$(1) \qquad y = \sum_{i \in I} a_i x_i \qquad (x_i \in V).$$

Пусть U — подпространство пространства V. Тождественное отображение пространства U в V может быть продолжено в изоморфизм пространства U^L в пространство V^L. Действительно, пусть B — базис пространства U. Линейное отображение U^L в V^L, продолжающее тождественное отображение U в V (Бурбаки, Алгебра, гл. III, § 2, n° 1, предложение 2), переводит B в линейно независимое семейство элементов из V^L, так как B является частью некоторого базиса пространства V. Это доказывает наше утверждение. В дальнейшем *мы всегда будем отождествлять пространство U^L с его образом в пространстве V^L* при помощи так определенного изоморфизма.

Если V — прямая сумма подпространств U_j, $j \in J$, то V^L является прямой суммой подпространств U_j^L. Действительно, если B_j — базис пространства U_j, а следовательно, и пространства U_j^L, то объединение множеств B_j является базисом пространства V и пространства V^L. Отсюда непосредственно вытекает, что если $(V_j)_{j \in J}$ — семейство векторных пространств над полем K, то тождественное отображение произведения $\prod_{j \in J} V_j$ этих пространств в $\left(\prod_{j \in J} V_j\right)^L$ может быть продолжено в изоморфизм произведения $\prod_{j \in J} V_j^L$ на $\left(\prod_{j \in J} V_j\right)^L$.

---

[1]) См. добавление переводчика, стр. 260. — *Прим. перев.*

Мы будем отождествлять $\left(\prod_{j \in J} V_j\right)^L$ *с пространством* $\prod_{j \in J} V_j^L$ посредством этого изоморфизма.

Пусть $V_1, \ldots, V_n, U$ — векторные пространства над полем K. Всякое n-линейное отображение f множества $V_1 \times \ldots \times V_n$ в пространство U может быть (и притом единственным образом) продолжено в n-линейное отображение множества $V_1^L \times \ldots \times V_n^L$ в U^L. Действительно, пусть B_i — базис пространства V_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Существует одно и только одно n-линейное отображение f^L множества $V_1^L \times \ldots \times V_n^L$ в пространство U^L, которое совпадает с отображением f на $B_1 \times \ldots \times B_n$. Легко видеть, что f^L продолжает f.

Определение 1. *Билинейное отображение f произведения $V \times V'$ двух векторных пространств V и V' над полем K называется невырожденным, если выполнены следующие условия:* а) *при $x \in V$ из равенства $f(x, x') = 0$ для всех $x' \in V'$ следует $x = 0$;* б) *при $x' \in V'$ из $f(x, x') = 0$ для всех $x \in V$ следует $x' = 0$.*

Предложение 1. *Пусть f — билинейное отображение произведения $V \times V'$ векторных пространств V и V' над полем K в векторное пространство U. Если отображение f невырожденное, то невырожденным является также отображение f^L произведения $V^L \times V'^L$ в U^L, продолжающее отображение f.*

Запишем элемент y из пространства V^L, для которого $f^L(y, y') = 0$ при всех $y' \in V'^L$, в виде $\sum_{i \in I} a_i x_i$, где $(a_i)_{i \in I}$ — базис поля L над полем K и где $x_i \in V$ для всех $i \in I$. Для $x' \in V'$ имеем $\sum_{i \in I} a_i f(x_i, x') = 0$ и $f(x_i, x') \in U$; следовательно, $f(x_i, x') = 0$ для всех $i \in I$, так что $x_i = 0$ и $y = 0$. Подобным же образом убеждаемся, что условие $y' \in V'^L$ и $f^L(y, y') = 0$ для всех $y \in V^L$ влечет за собой $y' = 0$.

Пусть $V_1, \ldots, V_n$ — векторные пространства над K, а U — тензорное произведение этих пространств. Тогда n-линейное отображение

$$(x_1, \ldots, x_n) \to x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$$

произведения $V_1 \times \ldots \times V_n$ в U может быть продолжено в n-линейное отображение f^L произведения $V_1^L \times \ldots \times V_n^L$ в пространство U^L; это же последнее, в свою очередь, определяет линейное отображение φ тензорного произведения $V_1^L \otimes \ldots \otimes V_n^L$ в U^L. Кроме того, если B_i — базис пространства V_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, а следовательно, и пространства V_i^L, то f^L взаимно однозначно отображает множество $B_1 \times \ldots \times B_n$ на некоторый базис пространства U^L. Отсюда вытекает, что φ является изоморфизмом пространства $V_1^L \otimes \ldots \otimes V_n^L$ на пространство U^L. *С помощью этого изоморфизма* φ *мы отождествим* $V_1^L \otimes \ldots \otimes V_n^L$ *с* $(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)^L$. Пусть g есть n-линейное отображение произведения $V_1 \times \ldots \times V_n$ в некоторое векторное пространство W, и пусть γ — соответствующее линейное отображение тензорного произведения $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ в W. Если g^L есть n-линейное отображение произведения $V_1^L \times \ldots \times V_n^L$ в W^L, продолжающее отображение g, то линейное отображение тензорного произведения $V_1^L \otimes \ldots \otimes V_n^L$ в W^L, соответствующее отображению g^L, является продолжением отображения γ.

Пусть A — алгебра над полем K. Билинейное отображение $(x, y) \to xy$ произведения $A \times A$ в A продолжается в билинейное отображение произведения $A^L \times A^L$ в A^L, определяющее умножение в пространстве A, так что A^L становится алгеброй. Если A — ассоциативная алгебра, то и алгебра A^L ассоциативна (ср. Бурбаки, Алгебра, гл. III, § 3, n° 4[1])). Если A — алгебра Ли (в этом случае мы обозначим умножение через $(x, y) \to [x, y]$), то и A^L является алгеброй Ли. Действительно, обозначим умножение в A^L знаком $[.., ..]$. Запишем элемент y из A^L в виде $\sum_{i \in I} a_i x_i$, где $(a_i)_{i \in I}$ — базис поля L над полем K и где $x_i \in A$ для всех $i \in I$. Тогда

$$[y, y] = \sum_{i, j \in J} a_i a_j [x_i, x_j] = 0,$$

так как $[x_i, x_i] = 0$ и $[x_i, x_j] + [x_j, x_i] = 0$. С другой стороны,

$$(x, y, z) \to [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]]$$

---

[1]) См. добавление переводчика, стр. 261. — *Прим. перев.*

— трилинейное отображение произведения $A^L \times A^L \times A^L$ в пространство A^L. Это отображение переводит множество $A \times A \times A$ в $\{0\}$. Следовательно, оно является нулевым отображением; это доказывает, что A^L — алгебра Ли.

Непосредственно очевидно, что если $\mathfrak{a}$ — левый идеал (или правый идеал, или идеал) алгебры A, то $\mathfrak{a}^L$ — левый идеал (правый идеал, идеал) алгебры A^L.

Пусть V — векторное пространство над полем K, V^* — дуальное к нему пространство. Естественное отображение $(x, f) \to F(x, f) = f(x)$ произведения $V \times V^*$ в поле K продолжается в билинейное отображение F^L произведения $V^L \times (V^*)^L$ в поле L. Так как отображение F невырожденное, то невырожденным будет также и отображение F^L (предложение 1). Из этого мы заключаем, что отображение F^L определяет изоморфизм φ пространства $(V^*)^L$ в пространство $(V^L)^*$, дуальное к пространству V^L, сопоставляющий элементу g из $(V^*)^L$ линейную функцию $y \to F^L(y, g)$ над V^L. Для $f \in V^*$ образ элемента f [рассматриваемый как элемент пространства $(V^*)^L$] при определенном выше изоморфизме является линейной функцией над пространством V^L, продолжающей отображение f. Мы будем называть изоморфизм φ *естественным изоморфизмом* $(V^*)^L$ *в* $(V^L)^*$. Следует отметить, что, вообще говоря, образ пространства $(V^*)^L$ в $(V^L)^*$ при этом не совпадает со всем пространством $(V^L)^*$. Но такое совпадение имеет место, если пространство V имеет конечную размерность n, так как в этом случае размерности пространств $(V^*)^L$ и $(V^L)^*$ равны n.

Пусть f — линейное отображение векторного пространства V над полем K в некоторое векторное пространство U над тем же полем, и пусть N — ядро отображения f. Тогда ядром N' линейного отображения f^L пространства V^L в U^L, продолжающего f, является подпространство N^L пространства V^L. Действительно, непосредственно видно, что N' содержит N^L. Пусть, наоборот, y — элемент пространства N'; положим $y = \sum_{i \in I} a_i x_i$, где $(a_i)_{i \in I}$ — базис поля L, а $x_i \in V$ для всех $i \in I$. Тогда $0 = f^L(y) = \sum_{i \in I} a_i f(x_i)$ и $f(x_i) \in U$; отсюда следует, что $f(x_i) = 0$ для всех $i \in I$, так что $x_i \in N$ и $y \in N^L$.

Пусть теперь N — подпространство векторного пространства V над полем K. Естественное отображение V на V/N

может быть продолжено в линейное отображение f^L пространства V^L на пространство $(V/N)^L$. Как мы видели, ядром отображения f^L является N^L, так что при переходе в фактор-пространство отображение f^L определяет изоморфизм g пространства V^L/N^L на пространство $(V/N)^L$. Если на пространстве V определена структура алгебры и N — идеал этой алгебры, то непосредственно видно, что g^L является изоморфизмом алгебры V^L/N^L на алгебру $(V/N)^L$. *Мы отождествим V^L/N^L с $(V/N)^L$ посредством изоморфизма g^L.*

Пусть A — градуированная алгебра над полем K, W — ее группа степеней. Для $w \in W$ обозначим через A_w пространство однородных элементов степени w алгебры A. Тогда алгебра A^L — прямая сумма подпространств A_w^L. Кроме того, если w и w' — элементы из W, то произведение всякого элемента x из A_w^L на всякий элемент y из $A_{w'}^L$ принадлежит пространству $A_{w+w'}^L$; в этом легко убедиться, если представить элементы x и y в виде линейных комбинаций с коэффициентами из L элементов из A_w и $A_{w'}$ соответственно. Отсюда вытекает, что разложение $A^L = \sum_{w \in W} A_w^L$ определяет в алгебре A^L градуировку, которую мы будем называть продолжением градуровки алгебры A. Пусть f — линейное отображение алгебры A в градуированную алгебру B с той же группой степеней W. Если f — однородное отображение степени z (где $z \in W$), то тем же свойством обладает линейное отображение алгебры A^L в B^L, продолжающее отображение f. Это видно непосредственно.

Предложение 2. *Пусть A и B — алгебры над полем K и f — гомоморфизм алгебры A в алгебру B; линейное отображение f^L пространства A^L в пространство B^L является гомоморфизмом. Пусть f и g — гомоморфизмы алгебры A в B и D — косая деривация типа (f, g) алгебры A в алгебру B; линейное отображение D^L алгебры A^L в алгебру B^L, продолжающее D, является косой деривацией типа (f^L, g^L).*

Билинейные отображения

$$(x, y) \to f^L(xy) - f^L(x) f^L(y)$$

и

$$(x, y) \to D^L(xy) - D^L(x) g^L(y) - f^L(x) D^L(y)$$

произведения $A^L \times A^L$ в пространство A^L переводят $A \times A$ в $\{0\}$ и являются, следовательно, нулевыми отображениями, что и доказывает предложение 2.

Пусть E — некоторое множество, а Λ — свободная ассоциативная алгебра множества E над полем K. Алгебра Λ^L содержит множество E; полугруппа, порожденная множеством E в алгебре Λ^L, совпадает с полугруппой, порожденной этим множеством в Λ, и является, следовательно, свободной полугруппой. Кроме того, эта полугруппа образует базис алгебры Λ^L. Поэтому алгебру Λ^L можно отождествить со свободной ассоциативной алгеброй множества E над полем L, что мы и сделаем.

Пусть V — векторное пространство над полем K. Построим свободную ассоциативную алгебру Λ^L множества V^L над полем L. Для элементов x и x' из V обозначим их сумму и разность в Λ^L соответственно через $x \dot{+} x'$ и $x \dot{-} x'$ (через $x + x'$ и $x - x'$ будем обозначать сумму и разность элементов x, x' в пространстве V^L); для $a \in K$ обозначим через $a \times x$ скалярное произведение элемента a на элемент x в Λ^L (ax — скалярное произведение элемента a на элемент x в V^L). Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал, порожденный в алгебре Λ элементами вида $(x \dot{+} x') \dot{-} (x + x')$ и $a \times x \dot{-} ax$ (для всех x, $x' \in V$ и $a \in K$). Тогда, как легко видеть, $\mathfrak{a}^L$ — идеал, порожденный элементами $(x \dot{+} x') \dot{-} (x + x')$, $a \times x \dot{-} ax$ для всех x, x' из V^L и всех a из L. Отсюда следует, что *если T — тензорная алгебра над пространством V, то тензорная алгебра над пространством V^L совпадает с алгеброй T^L.*

Символом $\otimes$ мы будем обозначать операцию умножения в алгебре T (или в алгебре T^L). Пусть $\mathfrak{s}$ — идеал, порожденный в T элементами вида $x \otimes x' - x' \otimes x$ (где x и x' принадлежат пространству V), а $\mathfrak{e}$ — идеал, порожденный элементами $x \otimes x$ ($x \in V$). Тогда очевидно, что $\mathfrak{s}^L$ — идеал, порожденный элементами $x \otimes x' - x' \otimes x$ в алгебре T^L (для x и x' из V^L). С другой стороны, если $y = \sum\limits_{i \in I} a_i x_i$ — элемент из V^L (где $(a_i)_{i \in I}$ — базис поля L над полем K, а $x_i \in V$ для $i \in I$), то $y \otimes y = \sum\limits_{i,\, j \in I} a_i a_j x_i \otimes x_j$. Но элементы $x_i \otimes x_i$ принадлежат идеалу $\mathfrak{e}$, так же как и элементы $x_i \otimes x_j + x_j \otimes x_i$ (поскольку x_i и x_j антиперестановочны во внешней алгебре над V). Отсюда вытекает, что $\mathfrak{e}^L$ — идеал, порожденный в T^L элементами $y \otimes y$, где $y \in V^L$. Таким образом, если S и E — соответственно симметрическая и внешняя алгебры над V, то симметрическая алгебра над V^L совпадает с алгеброй S^L, а внешняя — с алгеброй E^L. Кроме того, мы видим, что градуировки тензорной алгебры T^L, симметрической алгебры S^L и внешней алгебры E^L над пространством V^L являются продолжением соответствующих градуировок алгебр T, S и E.

Предложение 3. *Пусть V и U — векторные пространства над полем K. Мы предположим, что поле K бесконечно, а V — конечномерное пространство. Всякое рациональное отображение R пространства V в пространство U одним и только одним способом продолжается в рациональное отображение R^L пространства V^L в пространство U^L [то, что R^L продолжает R, следует здесь понимать так: отображение R^L определено во всех точках $y \in V$, в которых определено отображение R, и $R^L(y) = R(y)$]. Если R — полиномиальное отображение, то и R^L — полиномиальное отображение. Если y — точка пространства V, в которой отображение R определено, а x — любая точка из V, то*

$$\left(dR^L\right)(y,\ x) = (dR)(y,\ x).$$

Рассмотрим сперва случай, когда $U = K$, так что $U^L = L$. Пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ — поля рациональных функций над пространствами V и V^L соответственно. Пусть $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}'$ — алгебры полиномиальных функций над теми же пространствами. $\mathfrak{P}$ — симметрическая алгебра над V^* — пространством, дуальным к V, $\mathfrak{P}'$ — симметрическая алгебра над $\left(V^L\right)^*$ — пространством, дуальным к V^L. Мы определили выше изоморфизм $(V^*)^L$ на $\left(V^L\right)^*$ (на все пространство $\left(V^L\right)^*$, так как размерность пространства V конечна). Этот изоморфизм может быть продолжен в изоморфизм φ симметрической алгебры $\mathfrak{P}^L$ над $(V^*)^L$ на алгебру $\mathfrak{P}'$. Если f — линейная функция над V, то $\varphi(f)$ — линейная функция над V^L, продолжающая отображение f. Отсюда мы непосредственно заключаем, что образ $\varphi(P)$ любого элемента P из $\mathfrak{P}$ является некоторым элементом P^L из алгебры $\mathfrak{P}'$, продолжающим полиномиальную функцию P. Чтобы доказать, что P^L —

единственная полиномиальная функция над V^L, обладающая этим свойством, достаточно убедиться в том, что полиномиальная функция P' над V^L тождественно равна нулю, если она равна нулю в пространстве V. Итак, пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — базис пространства V^*. Линейные функции $\lambda_1^L, \ldots, \lambda_n^L$ над пространством V^L, продолжающие соответственно $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, образуют базис для пространства $(V^L)^*$, и полиномиальная функция P' может быть представлена в виде $\tilde{P}'(\lambda_1^L, \ldots, \lambda_n^L)$, где $\tilde{P}'$ — некоторый полином с коэффициентами из L. По предположению,

$$\tilde{P}'(\lambda_1(y), \ldots, \lambda_n(y)) = 0$$

для $y \in V$. Но для n любых заданных элементов $a_1, \ldots, a_n$ из K всегда можно найти точку $y \in V$, для которой $\lambda_i(y) = a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Отсюда следует, что полином $\tilde{P}'$ равен нулю, когда все его аргументы принимают значения в поле K. Поэтому $\tilde{P}' = 0$, так как поле K бесконечно.

Изоморфизм $P \to P^L$ кольца $\mathfrak{P}$ в кольцо $\mathfrak{P}'$ продолжается в изоморфизм $R \to R^L$ поля отношений $\mathfrak{R}$ кольца $\mathfrak{P}$ в поле отношений $\mathfrak{R}'$ кольца $\mathfrak{P}'$. Покажем, что если $R \in \mathfrak{R}$, то R^L — продолжение отображения R. Пусть y — точка пространства V, в которой определено отображение R. Можно положить $R = FG^{-1}$, где $F \in \mathfrak{P}$, $G \in \mathfrak{P}$ и $G(y) \neq 0$. Имеем $R^L = F^L(G^L)^{-1}$, и известно, что F^L и G^L соответственно продолжают отображения $F \in \mathfrak{P}$ и $G \in \mathfrak{P}$. Следовательно, $G^L(y) \neq 0$ и $R^L(y) = R(y)$, что и доказывает наше утверждение. Для доказательства однозначности продолжения достаточно показать, что если R' — элемент из $\mathfrak{R}'$, определенный на алгебраически плотном подмножестве E пространства V и принимающий во всех точках множества E значение 0, то $R' = 0$. Представим R' в виде частного двух полиномиальных функций F' и G' над пространством V^L, и пусть Q — полиномиальная функция $\neq 0$ над пространством V, обращающаяся в нуль на дополнении к множеству E в V. Непосредственно видно, что полиномиальная функция $F'G'Q^L$ над V^L обращается в нуль во всех точках пространства V и поэтому равна нулю. Но $G' \neq 0$ и $Q^L \neq 0$, так что $F' = 0$, т. е. $R' = 0$. Пусть x — элемент пространства V, и пусть D_x — деривация алгебры $\mathfrak{R}$, продолжающая отображение $\lambda \to \lambda(x)$ пространства V^* в поле K. Ограничение отображения D_x на множество $\mathfrak{P}$ может быть продолжено в деривацию алгебры $\mathfrak{P}^L$; определенный выше изоморфизм φ алгебры $\mathfrak{P}^L$ на алгебру $\mathfrak{P}'$ относит этой деривации некоторую деривацию D'_x алгебры $\mathfrak{P}'$. Для $\lambda \in V^*$ имеем $\varphi(\lambda) = \lambda^L$, так что $D'_x(\lambda^L) = \lambda(x)$. В силу линейности отображения D'_x отсюда вытекает, что $D'_x(\lambda') = \lambda'(x)$ для всякой линейной функции λ' над V^L. Существует одна и только одна деривация поля $\mathfrak{R}'$, продолжающая D'_x; мы обозначим ее также через D'_x. Поле $\mathfrak{R}$ является полем отношений кольца $\mathfrak{P}$, так что $D'_x(R^L) = (D_x(R))^L$ для всех $R \in \mathfrak{R}$. Пусть теперь R — элемент поля $\mathfrak{R}$, а y — точка, в которой отображение R определено. По определению имеем

$$(dR)(y, x) = (D_x(R))(y).$$

Так как D'_x — деривация поля $\mathfrak{R}'$, продолжающая отображение $\lambda' \to \lambda'(x)$ $(\lambda' \in (V^L)^*)$, то

$$(dR^L)(y, x) = (D'_x(R^L))(y) = (dR)(y, x).$$

Предложение 3 доказано для случая $U = K$. Чтобы перейти к общему случаю, выберем базис $(u_i)_{i \in I}$ пространства U, который будет, конечно, также базисом пространства U^L. Всякое рациональное отображение R пространства V в пространство U можно записать в виде $\sum_{i \in I} H_i u_i$, где H_i — рациональные функции над V. Положим $R^L = \sum_{i \in I} H_i^L u_i$. Если y — точка пространства V, в которой отображение R определено, то в ней также определены и функции H_i. Отсюда заключаем, что отображение R^L определено в y и что $R^L(y) = R(y)$. Пусть, наоборот, $R' = \sum_{i \in I} H'_i u_i$ — рациональное отображение пространства V^L в пространство U^L, продолжающее отображение R. Если R определено в некоторой точке y пространства V, то и функции H_i, и функции H'_i определены в точке y, причем

$$H'_i(y) = H_i(y) = H_i^L(y) \text{ для всех } i \in I.$$

Но, как мы видели выше, две рациональные функции над пространством V^L, определенные на одном и том же алгебраически плотном подмножестве пространства V и равные на этом подмножестве, равны на всем пространстве V^L; поэтому $H'_i = H_i^L$ для $i \in I$, так что $R' = R^L$. Пусть y — точка пространства V, в которой отображение R определено, и пусть x — любая точка из V. Тогда

$$(dR^L)(y, x) = \sum_{i \in I} ((dH_i^L)(y, x))\, u_i = \\ = \sum_{i \in I} ((dH_i)(y, x))\, u_i = (dR)(y, x).$$

Предложение 3 полностью доказано.

Замечания. 1. Из нашего доказательства следует, что два рациональных отображения пространства V^L в пространство U^L, равные на некотором алгебраически плотном подмножестве пространства V, совпадают.

2. Предложение 3 остается справедливым, если отбросить предположение, что пространство V конечномерно; но доказательство в этом случае несколько усложняется. Этот более общий результат нам не понадобится.

3. При тех же обозначениях, что и в предложении 3, нетрудно убедиться, что отображение R^L определено только в тех точках пространства V, в которых определено и отображение R.

Пусть V — векторное пространство над полем K, S и E — соответственно симметрическая и внешняя алгебры над V, X — эндоморфизм пространства V. Эндоморфизм X может быть продолжен в эндоморфизм X^L пространства V^L. Унитарные эндоморфизмы алгебр S^L и E^L, продолжающие эндоморфизм X^L, совпадают с продолжением на алгебры S^L и E^L унитарных эндоморфизмов алгебр S и E, продолжающих эндоморфизм X. Это непосредственно вытекает из предложения 2. Также легко убедиться, что деривации алгебр S^L и E^L, продолжающие эндоморфизм X^L, являются продолжениями на алгебры S^L и E^L дериваций алгебр S и E, продолжающих эндоморфизм X. Обозначим через V^* пространство, дуальное к V, через f — линейную функцию над V и через f^L — линейную функцию над V^L, продолжающую f. Легко усмотреть, что отображение $-{}^t(X^L)$ переводит f^L в линейную функцию, продолжающую функцию $(-{}^tX)(f)$ над пространством V. Пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ — поля рациональных функций над пространствами V и V^L соответственно (мы предполагаем, что поле K бесконечно). Для $R \in \mathfrak{R}$ обозначим через R^L рациональную функцию над V^L, продолжающую функцию R. Обозначим через D и D' деривации полей $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$, естественно соответствующие эндоморфизмам X и X^L (определение 5 § 4). Из сказанного следует, что

$$D'(R^L) = (D(R))^L.$$

Пусть φ — естественный изоморфизм пространства $(V^*)^L$ в пространство $(V^L)^*$. Обозначим через E^* внешнюю алгебру над V^*, через E' — внешнюю алгебру над $(V^L)^*$. Изоморфизм φ может быть продолжен в изоморфизм алгебры $(E^*)^L$ на некоторую подалгебру алгебры E'; этот продолженный изоморфизм мы будем называть *естественным изоморфизмом алгебры* $(E^*)^L$ *в алгебру* E'.

Предложение 4. *Пусть V — векторное пространство над полем K, V^* — дуальное к нему пространство, E и E^* — внешние алгебры над V и V^* соответственно, E' — внешняя алгебра над пространством $(V^L)^*$, дуальным к пространству V^L, и φ — естественный изоморфизм алгебры $(E^*)^L$ в алгебру E'. Пусть u и u^* — элементы алгебр E и E^* соответственно. Копроизведение элемента u^* на элемент u равняется копроизведению элемента $\varphi(u^*)$ на элемент u (во втором случае u рассматривается как элемент алгебры E^L).*

Для любого элемента u^* алгебры E^* через $\iota(u^*)$ обозначим операцию коумножения на u^* в алгебре E, а через $\iota^L(u^*)$ — линейное отображение алгебры E^L в себя, продолжающее оператор $\iota(u^*)$. Для u^* и v^* из E^* и для a из K, очевидно,

$$\iota^L(u^* + v^*) = \iota^L(u^*) + \iota^L(v^*), \qquad \iota^L(u^* v^*) = \iota^L(u^*) \circ \iota^L(v^*),$$
$$\iota^L(au^*) = a\iota^L(u^*).$$

Обозначим через E_0^* множество тех элементов u^*, для которых $\iota^L(u^*)$ совпадает с операцией коумножения на элемент $\varphi(u^*)$ в алгебре E^L; из сказанного следует, что E_0^* — подалгебра алгебры E^*. Эта подалгебра содержит 1, так как операция коумножения на единицу эквивалентна тождественному отображению. Пусть x^* — элемент из V^*. Тогда $\iota(x^*)$ — антидеривация алгебры E и, следовательно, $\iota^L(x^*)$ — антидеривация алгебры E^L (предложение 2). Кроме того, $(\iota(x^*))(x) = x^*(x)$ для $x \in V$. В силу линейности, заключаем, что $\iota^L(x^*)$ отображает всякий $x \in V^L$ на $(x^*)^L(x)$, где $(x^*)^L$ — линейная функция над пространством V^L, продолжающая x^*. Но $(x^*)^L = \varphi(x^*)$, так что $x^* \in E_0^*$. Отсюда вытекает, что $E_0^* = E^*$, и предложение 4 доказано.

§ 7. Специализации

Пусть V — векторное пространство над бесконечным полем K, L — надполе поля K. Всякая полиномиальная (или рациональная) функция над пространством V одним и только одним способом продолжается в некоторую полиномиальную (или рациональную) функцию над пространством V^L. Условимся в этом параграфе обозначать одной и той же буквой как заданную функцию, так и ее продолжение на пространство V^L. Равным образом, если R — рациональное отображение пространства V в векторное пространство U над K, то той же буквой R мы будем обозначать отображение пространства V^L в пространство U^L, продолжающее отображение R.

Если s — точка пространства V^L, а P пробегает множество полиномиальных функций над пространством V, то совокупность элементов поля L, представимых в виде $P(s)$, образует подкольцо поля L, которое мы обозначим через $K[s]$; это кольцо, очевидно, порождается элементами поля K и значениями линейных функций над пространством V в точке s (эти линейные функции продолжаются в линейные функции над V^L). Далее, обозначим через $K(s)$ поле отношений кольца $K[s]$; поле $K(s)$ состоит из всех значений, принимаемых в точке s всеми рациональными функциями над V, определенными в s. Для $s \in V$ имеем $K[s] = K(s) = K$.

6 Зак. 2604. Клод Шевалле

Определение 1. *Пусть V — векторное пространство над бесконечным полем K, L и L' — два его надполя; пусть s — точка пространства V^L и s' — точка пространства $V^{L'}$. Мы будем называть точку s' специализацией точки s по отношению к полю K, если выполняется следующее условие: для всех полиномиальных функций P над V, для которых $P(s)=0$, имеет место также равенство $P(s')=0$. Если из двух точек s и s' каждая является специализацией другой, то мы называем s' общей специализацией точки s (и s — общей специализацией точки s').*

Совершенно очевидно, что если s' — специализация точки s по отношению к полю K, а точка $s''\in V^{L''}$ (где L'' — также надполе поля K) — специализация точки s', то s'' — специализация точки s. Пусть M — подполе поля $L\cap L'$ и $M\supset K$; если s' — специализация точки s по отношению к полю M [это выражение имеет смысл, так как $s\in (V^M)^L$ и $s'\in (V^M)^{L'}$], то точка s' также является специализацией точки s по отношению к полю K; обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Предположим, что точка s' — специализация точки s по отношению к полю K. Для всякой полиномиальной функции P над пространством V значение $P(s')$, принимаемое функцией P в точке s', зависит только от значения $P(s)$ функции P в точке s. Таким образом определяется отображение φ кольца $K[s]$ в кольцо $K[s']$, для которого $\varphi(P(s))=P(s')$ для всех полиномиальных функций P над V. Очевидно, что это отображение является гомоморфизмом кольца $K[s]$ на кольцо $K[s']$; гомоморфизм φ будет изоморфизмом тогда и только тогда, когда s' — общая специализация точки s. Часто оказывается удобным продолжить гомоморфизм φ, используя следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{o}$ — подкольцо поля L и φ — гомоморфизм кольца $\mathfrak{o}$ в поле L'. Пусть $\mathfrak{r}$ — множество элементов поля L, представимых в виде xy^{-1}, где x и y — элементы из $\mathfrak{o}$ и где $\varphi(y)\neq 0$. Тогда множество $\mathfrak{r}$ — кольцо и гомоморфизм φ может быть продолжен в однозначно определенный гомоморфизм φ' кольца $\mathfrak{r}$ в поле L'.*

Пусть x, y, x', y' — элементы из $\mathfrak{o}$, такие, что $\varphi(y)\neq 0$ и $\varphi(y')\neq 0$. Тогда $\varphi(yy')\neq 0$ и

$$xy^{-1}-x'y'^{-1}=(xy'-x'y)(yy')^{-1},$$
$$(xy^{-1})(x'y'^{-1})=(xx')(yy')^{-1}.$$

Следовательно, $\mathfrak{r}$ — кольцо. Кроме того, если $xy^{-1}=x'y'^{-1}$, то $xy'-x'y=0$, так что

$$\varphi(x)\varphi(y')=\varphi(x')\varphi(y) \quad \text{и} \quad \varphi(x)(\varphi(y))^{-1}=\varphi(x')(\varphi(y'))^{-1}.$$

Поэтому гомоморфизм φ можно продолжить в отображение φ' кольца $\mathfrak{r}$ в поле L', положив

$$\varphi'(xy^{-1})=\varphi(x)(\varphi(y))^{-1} \quad \text{для} \quad x\in\mathfrak{o},\ y\in\mathfrak{o},\ \varphi(y)\neq 0.$$

Выведенные формулы показывают, что φ' — гомоморфизм, и легко убедиться, что это единственный гомоморфизм кольца $\mathfrak{r}$ в поле L', продолжающий гомоморфизм φ.

Определение 2. *При тех же обозначениях, что и в определении 1, предположим, что точка s' является специализацией точки s по отношению к полю K. Кольцо $\mathfrak{r}$ элементов из $K(s)$ вида $P(s)(Q(s))^{-1}$, где P и Q — полиномиальные функции над пространством V и где $Q(s')\neq 0$, называется кольцом специализации $s\to s'$; гомоморфизм этого кольца в $K(s')$, отображающий элемент $P(s)(Q(s))^{-1}$ на элемент $P(s')(Q(s'))^{-1}$, называется гомоморфизмом, соответствующим специализации $s\to s'$.*

Заметим, что в случае общей специализации $s\to s'$ кольцо специализации совпадает с полем $K(s)$, а соответствующий гомоморфизм оказывается изоморфизмом поля $K(s)$ на поле $K(s')$.

Определение 3. *Пусть V — векторное пространство над полем K, L — надполе поля K и s — точка пространства V^L. Степень трасцендентности поля $K(s)$ над полем K называется алгебраической размерностью точки s над полем K.*

Предложение 1. *Пусть V — векторное пространство над бесконечным полем K, L и L' — два его надполя, s — точка пространства V^L, s' — точка пространства $V^{L'}$, являющаяся специализацией точки s по отношению к полю K. Тогда алгебраическая размерность d' точки s' не больше алгебраической размерности d точки s; равенство $d=d'$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы точка s' была общей специализацией точки s.*

Известно, что всякое подмножество A' поля $K(s')$, порождающее поле $K(s')$ над полем K, содержит базис трансцендентности поля $K(s')$ относительно K (Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 5, n° 2, теорема 2[1])). Кольцо $K[s']$ содержит, следовательно, d' элементов z'_i $(1 \leqslant i \leqslant d')$, алгебраически независимых относительно K. Если φ гомоморфизм, соответствующий специализации $s \to s'$, то φ отображает кольцо $K[s]$ на кольцо $K[s']$. Пусть z_i $(1 \leqslant i \leqslant d')$ — элементы из $K[s]$, для которых $\varphi(z_i) = z'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d')$. Для любого полинома F от d' переменных с коэффициентами из K имеем

$$\varphi(F(z_1, \ldots, z_{d'})) = F(z'_1, \ldots, z'_{d'}).$$

Отсюда вытекает, что $F(z_1, \ldots, z_{d'}) \neq 0$ для $F \neq 0$, так что элементы z_i $(1 \leqslant i \leqslant d')$ поля $K(s)$ алгебраически независимы относительно K, что доказывает неравенство $d' \leqslant d$. Кроме того, мы видим, что ограничение гомоморфизма φ на кольцо $K[z_1, \ldots, z_{d'}]$ оказывается изоморфизмом этого кольца в кольцо $K[s']$; отсюда непосредственно следует, что поле отношений Z кольца $K[z_1, \ldots, z_{d'}]$ содержится в кольце специализации $s \to s'$ и что φ индуцирует изоморфизм поля Z на некоторое подполе поля $K(s')$. Если $s \to s'$ — общая специализация, то φ — изоморфизм поля $K(s)$ на поле $K(s')$, так что $d = d'$. Предположим, наоборот, что $d = d'$. Так как элементы $z_1, \ldots, z_d$ алгебраически независимы, то поле $K(s)$ — алгебраическое расширение поля Z. Пусть x — элемент поля $K(s)$, отличный от нуля; тогда x является корнем неприводимого уравнения $G(X) = 0$, где G — полином с коэффициентами из Z со свободным членом, отличным от нуля. Пусть G' — полином, получающийся из G заменой коэффициентов их образами при гомоморфизме φ. Для $x \in K[s]$ имеем $G'(\varphi(x)) = 0$, так что $\varphi(x) \neq 0$, поскольку свободный член полинома G' отличен от нуля. Мы видим, что гомоморфизм φ индуцирует изоморфизм поля $K[s]$ и что, следовательно, s' — общая специализация точки s.

Предложение 2. *Пусть V и V' — векторные пространства конечной размерности над алгебраически замкнутым полем K, L — надполе поля K и (s, s') — точка произведения $V^L \times V'^L$. Пусть Q — полиномиальная функция над $V \times V'$, для которой $Q(s, s') \neq 0$. Тогда существует полиномиальная функция P над V, для которой $P(s) \neq 0$, обладающая*

[1]) См. добавление переводчика, стр. 263. — *Прим. перев.*

следующим свойством: если $s_0 \in V$ — специализация точки s и если $P(s_0) \neq 0$, то существует точка $s'_0 \in V'$, для которой $Q(s_0, s'_0) \neq 0$, такая, что (s_0, s'_0) — специализация точки (s, s').

Докажем сначала следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле, L — надполе поля K, $\mathfrak{o}$ — подкольцо в L, $u_1, \ldots, u_h$ — элементы из L, $\mathfrak{o}'$ — кольцо $\mathfrak{o}[u_1, \ldots, u_h]$ и z — элемент $\neq 0$ из $\mathfrak{o}'$. Тогда существует элемент $x \neq 0$ из $\mathfrak{o}$, обладающий следующим свойством: всякий гомоморфизм f кольца $\mathfrak{o}$ в поле K, для которого $f(x) \neq 0$, может быть продолжен в гомоморфизм f' кольца $\mathfrak{o}'$ в поле K, для которого $f'(z) \neq 0$.*

Рассмотрим сперва случай $h = 1$ и положим $u_1 = u$. Введем алгебру $L[X]$ полиномов от переменной X с коэффициентами из поля L и подкольцо $\mathfrak{o}[X]$ алгебры $L[X]$. Существует гомоморфизм g кольца $\mathfrak{o}[X]$ на кольцо $\mathfrak{o}'$, отображающий элементы из $\mathfrak{o}$ в себя и X в u. Пусть $\mathfrak{p}$ — ядро гомоморфизма g. Кроме того, для всякого элемента a поля K каждый гомоморфизм f кольца $\mathfrak{o}$ в поле K продолжается в гомоморфизм f^*_a кольца $\mathfrak{o}[X]$ в поле K, для которого $f^*_a(X) = a$. Если f^*_a переводит идеал $\mathfrak{p}$ в $\{0\}$, то он индуцирует при переходе в фактор-кольцо гомоморфизм кольца $\mathfrak{o}[X]/\mathfrak{p}$ в поле K. Тогда существует гомоморфизм f'_a кольца $\mathfrak{o}'$ в поле K, продолжающий отображение f и переводящий элемент u в элемент a. Пусть $P \in \mathfrak{o}[X]$, и пусть f — некоторый гомоморфизм кольца $\mathfrak{o}$ в поле K. Обозначим через P^f полином, получающийся из полинома P заменой коэффициентов их образами при гомоморфизме f. Предположим теперь сначала, что u — трансцендентный элемент над полем отношений M кольца $\mathfrak{o}$; пусть $z = \sum_{i=0}^{m} z_i u^i$, где $z_i \in \mathfrak{o}$ $(0 \leqslant i \leqslant m)$. По меньшей мере один из элементов z_i, например z_{i_0}, не равен нулю. Положим $x = z_{i_0}$, и пусть f — гомоморфизм кольца $\mathfrak{o}$ в поле K, для которого $f(x) \neq 0$. Всегда можно найти элемент $a \in K$, для которого $\sum_{i=0}^{m} f(z_i) a^i \neq 0$, и так как в этом случае $\mathfrak{p} = \{0\}$, то существует гомоморфизм f'_a кольца $\mathfrak{o}'$ в K, продолжающий гомоморфизм f и переводящий элемент u в a. Тогда ясно, что $f'_a(z) \neq 0$. Пусть теперь u — алгебраический элемент над M. Тогда существует неприводимый полином G

из $M[X]$, для которого $G(u)=0$. Мы можем предположить, что G принадлежит кольцу $\mathfrak{o}[X]$; в противном случае этого можно достигнуть умножением G на подходящий элемент из $\mathfrak{o}$. Пусть x_1—коэффициент при наивысшей степени X в полиноме G. С другой стороны, z — алгебраический элемент относительно M и является, следовательно, корнем некоторого уравнения $H(X)=0$, где H — неприводимый полином из $M[X]$, о котором можно предположить, что он принадлежит к кольцу $\mathfrak{o}[X]$. Так как $z \neq 0$, то элемент $x_2 = H(0)$ кольца $\mathfrak{o}$ не равен нулю; положим $x = x_1 x_2$. Пусть f — гомоморфизм кольца $\mathfrak{o}$ в поле K, такой, что $f(x) \neq 0$. Полином G^f тогда не сводится к постоянной, и, так как K — алгебраически замкнутое поле, существует элемент a из K, для которого $G^f(a)=0$. Покажем, что f_a^* отображает идеал $\mathfrak{p}$ в $\{0\}$. Если $P \in \mathfrak{p}$, то P делится на полином G в $M[X]$; известно, что из этого вытекает существование такого показателя $k \geqslant 0$, для которого $x_1^k P$ делится на полином G в кольце $\mathfrak{o}[X]$. Отсюда непосредственно следует, что $(f(x_1))^k P^f$ делится на полином G^f, так что $(f(x_1))^k P^f(a)=0$ и, так как $f(x_1) \neq 0$, $f_a^*(P) = P^f(a) = 0$, что и доказывает наше утверждение. Следовательно, существует гомоморфизм f' кольца $\mathfrak{o}'$ в поле K, продолжающий гомоморфизм f и переводящий элемент u в элемент a. Но тогда $H^f(f'(z)) = 0$, так что $f'(z) \neq 0$, поскольку

$$H^f(0) = f(x_2) \neq 0.$$

Лемма 2 доказана, таким образом, для случая $h=1$. Предположим теперь, что $h > 1$. Положим

$$\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{o}, \qquad \mathfrak{o}_i = \mathfrak{o}[u_1, \ldots, u_i] \quad (1 \leqslant i \leqslant h),$$

так что

$$\mathfrak{o}_h = \mathfrak{o}' \quad \text{и} \quad \mathfrak{o}_i = \mathfrak{o}_{i-1}[u_i] \quad (1 \leqslant i \leqslant h).$$

Используя результат, доказанный для случая $h=1$, мы видим, что можно последовательно находить элементы $z_0, \ldots, z_h$ со следующими свойствами: $z_h = z$; z_i — отличный от 0 элемент из $\mathfrak{o}_i$; для $i \geqslant 1$ каждый гомоморфизм кольца $\mathfrak{o}_{i-1}$, не переводящий элемент z_{i-1} в нуль, может быть продолжен в гомоморфизм кольца $\mathfrak{o}_i$ в поле K, не переводящий элемент z_i в 0. Тогда ясно, что элемент $x = z_0$ кольца $\mathfrak{o}$ обладает требуемыми свойствами. Лемма 2 полностью доказана.

Опираясь на эту лемму, мы можем теперь доказать предложение 2. Ясно, что можно построить кольцо $K[(s, s')]$, присоединяя конечное число элементов к кольцу $K[s]$ (в качестве таких элементов можно, например, взять координаты элемента s' относительно некоторого базиса пространства V'). Положим $z = Q(s, s')$. Тогда существует элемент $x \neq 0$ из $K[s]$, такой, что всякий гомоморфизм кольца $K[s]$ в поле K, не отображающий элемент x в 0, продолжается в гомоморфизм кольца $K[s, s']$ в поле K, не переводящий в 0 элемент z. Так как $x \in K[s]$, то x представим в виде $P(s)$, где P — полиномиальная функция над V. Если точка s_0 пространства V — специализация точки s, то существует гомоморфизм кольца $K[s]$ в поле K, отображающий элемент $F(s)$ на $F(s_0)$ (где F — любая полиномиальная функция над V). Если $P(s_0) \neq 0$, то этот гомоморфизм продолжается в гомоморфизм кольца $K[(s, s')]$ в поле K, не переводящий элемент $Q(s, s')$ в нуль. Этот гомоморфизм отображает координаты элемента s' (относительно некоторого базиса пространства V') в элементы поля K, являющиеся координатами некоторой точки s'_0. Тогда ясно, что (s_0, s'_0) — специализация точки (s, s') и что $Q(s_0, s'_0) \neq 0$. Предложение 2 доказано.

§ 8. Векторные пространства с операторами

Векторным пространством с операторами над полем K мы будем называть структуру, состоящую из векторного пространства V над полем K и отображения ρ некоторого множества E в множество эндоморфизмов пространства V. Множество E называется *областью операторов*. Эндоморфизмы $\rho(X)$ для $X \in E$ называются *операторами* этой структуры. Векторное пространство с операторами мы обыкновенно будем обозначать той же буквой, что и само векторное пространство, в котором операторы определены; но в случае, когда такое обозначение может привести к недоразумению, мы будем пользоваться также записью (V, ρ), где V — векторное пространство (без операторов), а ρ — отображение области операторов в множество эндоморфизмов пространства V.

Понятие векторного пространства с операторами отличается от понятия модуля, определенного в томе I (гл. VI, § 1), только тем, что здесь не предполагается конечномерность пространства V. Так как термин „модуль“ в книге Бурбаки имеет совершенно иной смысл, то нам кажется предпочтительным заменить его здесь термином „векторное пространство с операторами".

Определение 1. *Пусть V — векторное пространство с операторами. Подпространство U пространства V называется допустимым, если оно отображается в себя всеми операторами пространства V.*

Пусть U — допустимое подпространство пространства V. Пусть E — область операторов пространства V, и для $X \in E$ пусть $\rho(X)$ — оператор, соответствующий элементу X. Через $\rho_U(X)$ и $\bar{\rho}(X)$ обозначим соответственно ограничение оператора $\rho(X)$ на пространство U и эндоморфизм пространства V/U, индуцированный оператором $\rho(X)$ (при переходе в фактор-пространство). Векторное пространство с операторами (U, ρ_U) называется подпространством пространства (V, ρ), а $(V/U, \bar{\rho})$ — фактор-пространством пространства (V, ρ).

Векторное пространство с операторами можно рассматривать как абелеву группу с операторами, допускающую две области операторов, а именно: умножение $(a, x) \to ax$ (где a пробегает элементы основного поля, а x — элементы пространства) и умножение $(X, x) \to \rho(X)x$ (где X пробегает элементы области операторов). Допустимые подпространства идентичны тогда с допустимыми подгруппами, определенными у Бурбаки (Алгебра, гл I, § 6, n° 11). Из этого следует, что общие теоремы относительно абелевых групп с операторами — в частности теорема о гомоморфизме Э. Нётер (Бурбаки, Алгебра, гл. I, § 6, n° 13) и теорема Жордана — Гёльдера (Бурбаки, Алгебра, гл. I, § 6, n° 14) — применимы к векторным пространствам с операторами.

Ясно, что сумма и пересечение какого-нибудь семейства допустимых подпространств векторного пространства V с операторами также являются допустимыми подпространствами пространства V.

Определение 2. *Векторное пространство V с операторами называется простым, если оно отлично от $\{0\}$ и не содержит допустимых подпространств, отличных от V и $\{0\}$. Пространство V называется полупростым, если оно представимо в виде суммы допустимых простых подпространств.*

Эти определения несколько отличаются от соответствующих определений у Бурбаки для операторных групп: с одной стороны, мы требуем, чтобы простое пространство содержало элементы, отличные от 0, с другой — называем полупростыми и пространства, которые являются бесконечными суммами простых пространств.

Заметим, что векторное пространство с операторами, состоящее из одного элемента 0, — полупростое, так как оно является суммой пустого множества простых подпространств.

Теорема 5. *Для того чтобы векторное пространство V с операторами было полупростым, необходимо и достаточно, чтобы всякое его допустимое подпространство обладало дополнительным подпространством в V, которое бы также было допустимым. Если U — допустимое подпространство полупростого пространства V, то само подпространство U и фактор-пространство V/U являются полупростыми векторными пространствами с операторами. Если, кроме того, пространство V является суммой допустимых простых подпространств S_i, $i \in I$, то существует подмножество I' множества индексов I, такое, что V — прямая сумма пространства U и всех пространств S_i, для которых $i \in I'$.*

Предположим, что V является суммой простых допустимых подпространств $S_i, i \in I$. Рассмотрим подмножества J множества I, обладающие тем свойством, что сумма пространства U и пространств S_j для $j \in J$ — прямая. Для того чтобы множество J обладало этим свойством, необходимо и достаточно, чтобы тем же свойством обладали все конечные подмножества множества J. (Известно, что сумма некоторого семейства подпространств прямая, если все конечные суммы подпространств из этого семейства прямые.) С другой стороны, ясно, что пустое подмножество множества I этим свойством обладает. Следовательно, существует максимальное подмножество I' множества I, для которого это свойство выполнено. Пусть V' — сумма пространства U и всех пространств S_i для $i \in I'$. Если i — любой элемент множества I, то сумма $V' + S_i$ не прямая. Это очевидно для случая $i \in I'$, так как тогда S_i содержится в пространстве V' и $S_i \neq \{0\}$. Для $i \notin I'$ утверждение непосредственно вытекает из того факта, что множество, получающееся из I' присоединением индекса i, уже больше не обладает отмеченным свойством. Мы видим, что для $i \in I$ пересечение $S_i \cap V'$ всегда содержит элемент $\neq 0$. Но $S_i \cap V'$ — допустимое подпространство пространства S_i; так как пространство S_i простое, то $S_i \cap V' = S_i$, т. е. $S_i \subset V'$. Так как утверждение справедливо для всех $i \in I$, то $V' = V$. Пусть U' — сумма пространств S_i для $i \in I'$; так как сумма $U + U' = V$ прямая, то U' — допустимое дополнительное пространство для пространства U. Векторное пространство с операторами V/U изоморфно пространству U' и является поэтому полупростым. Но пространство U изоморфно пространству V/U', и, применяя то же заключение (к U' вместо U), мы видим, что U — полупростое пространство.

Пусть теперь V — векторное пространство с операторами, в котором каждое допустимое подпространство обладает допустимым дополнением. Пусть V' — сумма всех допустимых простых подпространств пространства V, а U' — допустимое дополнение V' в пространстве V. Покажем, что $U' = \{0\}$, откуда будет следовать, что $V' = V$, т. е. что пространство V полупростое. Предположим, что $U' \neq \{0\}$, и пусть x — отличный от 0 элемент из U'. Пусть $\mathfrak{U}$ — множество всех допустимых подпространств пространства U', не содержащих x; это множество не пусто, так как оно содержит пространство $\{0\}$. Пусть $\mathfrak{U}_1$ — подмножество множества $\mathfrak{U}$, вполне упорядоченное по включению, и пусть U'_1 — сумма пространств из $\mathfrak{U}_1$. Каждый элемент из U'_1 является суммой конечного числа элементов из подпространств, принадлежащих к $\mathfrak{U}_1$; так как множество $\mathfrak{U}_1$ вполне упорядочено по включению, то все эти подпространства содержатся в максимальном, так что U'_1 является объединением всех пространств из $\mathfrak{U}_1$. Отсюда следует, что x не содержится в U'_1, так что $U'_1 \in \mathfrak{U}$. С помощью теоремы Цорна заключаем, что $\mathfrak{U}$ содержит максимальный элемент U''. Пусть V'' — допустимое дополнение пространства U'', и пусть y — элемент из V'', который $\equiv x \pmod{U''}$. Мы имеем $y \neq 0$, поскольку элемент x не принадлежит пространству U''; так как $U'' \subset U'$ и $x \in U'$, то $y \in U'$. Пусть Y — наименьшее допустимое подпространство пространства V, содержащее элемент y (это пересечение всех допустимых подпространств, содержащих элемент y). Ясно, что $Y \subseteq U'$. Пусть Z — допустимое подпространство пространства Y. Если $y \in Z$, то $Z = Y$. Если y не принадлежит пространству Z, то он также не принадлежит пространству $U'' + Z$. Действительно, имеет место включение $Z \subset Y \subset V''$, и наше утверждение непосредственно следует из того, что сумма $U'' + V''$ прямая. Так как $x \equiv y \pmod{U''}$, то элемент x не принадлежит пространству $U'' + Z$. Но $U'' + Z$ содержится в пространстве U', и так как U'' — максимальный элемент множества $\mathfrak{U}$, то $U''+Z=U''$. Отсюда следует, что $Z\subset U''$, так что $Z=\{0\}$, поскольку сумма $U''+Y$ прямая. Это показывает, что Y — простое допустимое подпространство, так что $Y\subset V'$ и, следовательно, $y\in U'\cap V'=\{0\}$; но это противоречит тому факту, что $y\neq 0$. Предположение $U'\neq\{0\}$ приводит, таким образом, к противоречию. Следовательно, пространство V — полупростое. Теорема 5 доказана.

Пусть V — векторное пространство с операторами над полем K, и пусть L — надполе поля K. Обозначим через V^L векторное пространство, получающееся из V расширением основного поля до L. Пусть E — область операторов пространства V. Для $X\in E$ обозначим через $\rho(X)$ оператор, соответствующий элементу X. Этот оператор может быть продолжен в эндоморфизм $\rho^L(X)$ пространства V^L. Таким образом, (V^L, ρ^L) является векторным пространством с операторами. Мы будем говорить, что оно получается из векторного пространства V с операторами расширением основного поля до поля L. Векторное пространство с операторами (V^L, ρ^L) мы также будем обозначать через V^L, когда это не может привести к недоразумению.

Теорема 6. *Пусть V — векторное пространство с операторами над полем K и L — надполе поля K. Если V^L — полупростое векторное пространство с операторами, то полупростым является также и V. Если, наоборот, V — полупростое конечномерное векторное пространство с операторами и если поле K совершенно, то и пространство V^L полупростое.*

Предположим, что пространство V^L полупростое. Пусть U — допустимое подпространство пространства V; тогда, как легко видеть, U^L — допустимое подпространство пространства V^L. Это подпространство обладает допустимым дополнением W' в пространстве V^L. Пусть U' — некоторое (не обязательно допустимое) дополнение подпространства U в пространстве V. Обозначим через E область операторов пространства V, а через $\rho(X)$ для $X\in E$ — эндоморфизм пространства V, соответствующий элементу X. Для $u'\in U'$ положим $\rho(X)u'=\varphi(X)u'+\bar\rho(X)u'$, где $\varphi(X)u'\in U$ и $\bar\rho(X)u'\in U'$; $\varphi(X)$ — линейное отображение пространства U' в U,

$\bar{\rho}(X)$ — линейное отображение пространства U' в себя. Обозначим через $\rho^L(X)$ эндоморфизм пространства V^L, продолжающий эндоморфизм $\rho(X)$, через $\varphi^L(X)$ — линейное отображение пространства U'^L в пространство U^L, продолжающее отображение $\varphi(X)$, и через $\bar{\rho}^L(X)$ — эндоморфизм пространства U'^L, продолжающий эндоморфизм $\bar{\rho}(X)$. Для $u' \in U'^L$ имеем

$$\rho^L(X)\,u' = \varphi^L(X)\,u' + \bar{\rho}^L(X)\,u', \quad \varphi^L(X)\,u' \in U^L, \ \bar{\rho}^L(X)\,u' \in U'^L.$$

С другой стороны, каждый элемент u' из U'^L сравним (mod W') с (однозначно определенным) элементом $\psi'(u')$ из U^L; при этом ψ' — линейное отображение пространства U'^L в пространство U^L. Так как пространство W' допустимо, то элемент

$$\rho^L(X)\,(u' - \psi'(u')) = \varphi^L(X)\,u' + \bar{\rho}^L(X)\,u' - \rho^L(X)\,(\psi'(u'))$$

также принадлежит к W', так что

$$\psi'\left(\bar{\rho}^L(X)\,u'\right) = \rho^L(X)\,(\psi'(u')) - \varphi^L(X)\,u' \qquad (u' \in U'^L).$$

Пусть $(a_i)_{i \in I}$ — базис поля L над полем K, содержащий элемент $1 = a_{i_0}$ из K. Если $u' \in U'$, то имеет место равенство $\psi'(u') = \sum_{i \in I} (\psi_i(u'))\,a_i$, где $\psi_i(u') \in U$ для всех $i \in I$. При этом ясно, что ψ_i является линейным отображением U' в U. Положим $\psi = \psi_{i_0}$; если u' — элемент пространства U', то элементы $\bar{\rho}^L(X)\,u'$, $\rho^L(X)(\psi(u'))$ и $\varphi^L(X)\,u'$ принадлежат пространству V. Отсюда следует, что

$$\psi\left(\bar{\rho}(X)\,u'\right) = \rho(X)\,(\psi(u')) - \varphi(X)\,u'.$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\rho(X)\,(u' - \psi(u')) = \bar{\rho}(X)\,u' - \psi\left(\bar{\rho}(X)\,u'\right).$$

Пусть W — множество элементов вида $u' - \psi(u')$ для всех $u' \in U'$. Приведенная выше формула показывает, что оператор $\rho(X)$ отображает множество W в себя при всех $X \in E$. С другой стороны, W является образом пространства U' при отображении $u' \to u' - \psi(u')$ пространства U' в пространство V. Это отображение, очевидно, линейно, и, следовательно, множество W — векторное подпространство пространства V. Так как сумма $U + U'$ прямая, то $u' - \psi(u') \in U$ только в случае $u' = 0$, так что $\psi(u') = 0$. Это показывает, что сумма $U + W$ прямая. Наконец, ясно, что все элементы пространства U' содержатся в $U + W$, так что $U + W = V$. Мы видим, что W — допустимое дополнение подпространства U в пространстве V. Согласно теореме 5, пространство V полупростое.

Предположим теперь, что K — совершенное поле, а V — конечномерное полупростое пространство. Если V является суммой допустимых подпространств S_i $(i \in I)$, то пространство V^L оказывается суммой подпространств S_i^L; если все слагаемые S_i^L суть полупростые пространства, то и пространство V^L полупростое. Мы видим, что, не ограничивая общности, можно предположить пространство V простым. Пусть, с другой стороны, L' — надполе поля L; легко видеть, что пространство $V^{L'}$ можно отождествить с пространством $(V^L)^{L'}$ (ср. Бурбаки, Алгебра, гл. III, § 2, n° 1, предложение 4 [1])). Если мы докажем, что пространство $V^{L'}$ полупростое, то из первой части доказательства будет следовать полупростота пространства V^L. Это замечание показывает, что поле L можно предположить алгебраически замкнутым. Обозначим через G группу автоморфизмов поля L, оставляющих неизменными элементы поля K. Так как поле K совершенно, то всякий элемент поля L, остающийся неизменным при всех автоморфизмах из G, принадлежит K (Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 7, n° 3, определение 2 [2])). Пусть (x_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — базис пространства V; он будет также базисом пространства V^L. Каждому элементу s группы G можно сопоставить отображение s^* пространства V^L в себя, определенное равенством

$$s^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (sa_i)\, x_i \quad (\text{где } a_i \in L,\ 1 \leqslant i \leqslant n).$$

Для x и x' из V^L имеем

$$s^*(x + x') = s^*x + s^*x',$$

---

[1]) См. добавление переводчика, стр. 261. — *Прим. перев.*

[2]) См. добавление переводчика, стр. 266. — *Прим. перев.*

и если $a \in L$, то

$$s^*(ax) = (sa)(s^*x).$$

Так как s отображает поле L *на* себя, то отображение s^* переводит всякое подпространство пространства V^L в некоторое подпространство пространства V^L. Пусть символы E $\rho(X)$ и $\rho^L(X)$ и для $X \in E$ имеют то же значение, что и выше. Отображение s^* перестановочно с оператором $\rho^L(X)$, так как

$$(s^* \circ \rho^L(X))\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (sa_i)(\rho(X)x_i) =$$

$$= (\rho^L(X) \circ s^*)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \qquad (a_i \in L;\ 1 \leqslant i \leqslant n).$$

Следовательно, отображение s^* переводит допустимое подпространство пространства V^L опять в допустимое подпространство. Наконец, легко видеть, что для любых элементов s и t из группы G имеет место равенство $(st)^* = s^* \circ t^*$. Покажем теперь, что пространство V^L содержит по крайней мере одно допустимое простое подпространство S'. Действительно, так как пространство V простое, то $n > 0$. В качестве S' можно поэтому выбрать любое минимальное отличное от 0 допустимое подпространство пространства V^L. Образуем сумму V' подпространств $s^*(S')$, где s пробегает все автоморфизмы из группы G. Очевидно, что V' — допустимое полупростое подпространство пространства V^L. Кроме того, для $t \in G$ оператор t^* переставляет пространства $s^*(S')$ между собой, так что $t^*(V') = V'$. Из результатов Н. Бурбаки (Алгебра, гл. II, § 5, n° 6, следствие предложения 10 [1])) следует, что подполе поля L, принадлежащее подпространству V', содержится в поле K, так что V' (рассматриваемое как векторное пространство над полем L) порождается элементами из $V' \cap V$ (Бурбаки, Алгебра, гл. II, § 5, n° 5, теорема 2). Но $V' \cap V$ — допустимое подпространство пространства V, не равное $\{0\}$, так как $V' \neq \{0\}$. Однако мы предположили, что пространство V — простое, так что $V \subset V'$, т. е. $V' = V^L$. Это показывает, что пространство V^L полупростое. Теорема 6 доказана.

Пусть V — векторное пространство, а X — его эндоморфизм. Тождественное отображение одноэлементного множества

---

[1]) См. добавление переводчика, стр. 268 — *Прим. перев.*

$\{X\}$ в множество эндоморфизмов пространства V определяет над V структуру векторного пространства с операторами. Если при этом пространство V оказывается полупростым, то мы будем называть X *полупростым эндоморфизмом.* Для того чтобы эндоморфизм X был полупростым, необходимо и достаточно, чтобы всякое подпространство пространства V, отображающееся эндоморфизмом X в себя, обладало дополнением с таким же свойством (теорема 5). Из теоремы 6 легко вытекает следующее утверждение:

Предложение 1. *Пусть X — эндоморфизм векторного пространства V, L — надполе поля K и X^L — эндоморфизм пространства V^L, продолжающий X. Если X^L — полупростой эндоморфизм, то и эндоморфизм X полупростой. Предполагая, что эндоморфизм X полупростой, поле K совершенно и размерность пространства V конечна, можно заключить, что X^L — полупростой эндоморфизм.*

Напомним, что элемент x векторного пространства V называется собственным вектором эндоморфизма X пространства V, если Xx является скалярным кратным вектора x; x называется собственным вектором некоторого семейства эндоморфизмов пространства V, если он есть собственный вектор всех эндоморфизмов семейства.

Предложение 2. *Пусть V — векторное пространство с операторами над алгебраически замкнутым полем K; предположим, что операторы пространства V перестановочны между собой и размерность пространства V конечна. Для того чтобы V было полупростым, необходимо и достаточно, чтобы все операторы этого пространства были полупростыми. В этом случае V порождается собственными векторами семейства своих операторов.*

Предположим, что U — простое подпространство пространства V, и покажем, что размерность пространства U равна 1. Пусть Y — некоторый оператор пространства V. Так как поле K алгебраически замкнуто, то ограничение эндоморфизма Y на пространство U обладает собственным вектором $x \neq 0$: $Yx = ax$, где $a \in K$. Пусть U' — множество всех векторов $x' \in U$, для которых $Yx' = ax'$. Любой оператор Z пространства V, по предположению, перестановочен с оператором Y и отображает пространство U в себя. Следовательно, для $x' \in U'$ имеем

$Zx' \in U$ и

$$YZx' = ZYx' = aZx',$$

так что $Zx' \in U'$. Это показывает, что множество U', очевидно являющееся векторным пространством, допустимо. Так как $U' \neq \{0\}$ и так как пространство U простое, то $U' = U$. Таким образом, все операторы пространства V совпадают на U со скалярными кратными тождественного отображения. Отсюда заключаем, что все подпространства пространства U допустимы, и, так как само пространство U простое, то его размерность равна 1. Пространство U, следовательно, порождается некоторым собственным вектором семейства операторов пространства V. Если V — полупростое пространство, то оно является прямой суммой простых допустимых подпространств и тем самым порождается собственными векторами семейства своих операторов. Отсюда мы непосредственно заключаем, что все операторы пространства V полупростые. Предположим, наоборот, что все операторы пространства V полупростые. Доказательство полупростоты пространства V будем вести индукцией по размерности n. Утверждение очевидно для $n = 0$. Пусть $n > 0$, и пусть утверждение справедливо для пространств размерности, меньшей n. Если все операторы являются скалярными кратными тождественного отображения, то пространство V, очевидно, полупростое. Предположим, что оператор Y не является скалярным кратным тождественного отображения. Так как оператор Y полупростой, то из первой части доказательства вытекает, что V порождается собственными векторами оператора Y. Мы видим, что пространство V можно представить в виде прямой суммы подпространств $U_1, \ldots, U_h$, таких, что $Yx = a_i x$ для всех $x \in U_i$, где $a_1, \ldots, a_h$ — элементы поля K, причем можно предположить все a_i попарно различными. Кроме того, можно предположить, что все U_i отличны от $\{0\}$. Так как $h > 1$ (в противном случае оператор Y был бы скалярным кратным тождественного отображения), то размерность всех пространств U_i будет $< n$. Из предложения 6 § 2 следует, что все элементы $x \in V$, для которых $Yx = a_i x$, принадлежат U_i. Пусть Z — любой оператор пространства V; для $x \in U_i$ имеем

$$YZx = ZYx = a_i Zx,$$

т. е. $Zx \in U_i$; следовательно, все пространства U_i допустимы. Ограничения на U_i операторов пространства V полупросты.

Согласно предположению индукции, все U_i должны быть полупростыми; но тогда и V оказывается полупростым.

Следствие. *Пусть V — векторное пространство с операторами, имеющее конечную размерность над совершенным полем K. Предположим, что операторы пространства V перестановочны друг с другом. Для того чтобы V было полупростым, необходимо и достаточно, чтобы все операторы были полупростыми.*

Пусть L — алгебраически замкнутое надполе поля K. Операторы векторного пространства V^L с операторами являются продолжениями операторов пространства V. Следовательно, они перестановочны между собой. Следствие вытекает теперь из теоремы 6 и предложений 1 и 2.

Предложение 3. *Пусть A — ассоциативная унитарная алгебра над совершенным полем K, и пусть V — конечномерное подпространство в A, являющееся системой почти-образующих алгебры A. Пусть f — отображение алгебры A в себя, которое является или унитарным эндоморфизмом алгебры A, или деривацией. Предположим, что f отображает пространство V в себя и что ограничение отображения f на пространство V полупростое; тогда f — полупростое отображение.*

Обозначим через A_0 пространство скаляров алгебры A, а через A_n — подпространство, порожденное произведениями из n элементов пространства V. Пространство A является суммой пространств A_n, $0 \leqslant n < \infty$. Пусть L — алгебраически замкнутое надполе поля K. Линейное отображение f^L алгебры A^L, продолжающее отображение f, будет или унитарным эндоморфизмом, или деривацией алгебры A^L (предложение 2 из § 6). Имеем $f^L(V^L) \subset V^L$; так как поле K совершенно, а пространство V — конечной размерности, то ограничение f^L является полупростым отображением пространства V^L (предложение 1). Поэтому существует базис B пространства V^L, состоящий из собственных векторов отображения f^L (предложение 2). Очевидно, что A_n^L порождается (как векторное пространство) произведениями из n элементов пространства V^L и, следовательно, также произведениями из n элементов базиса B. Пространство A_0^L, размерности 1, отображается в себя в случае, если f^L — унитарный эндоморфизм алгебры A^L, и переходит в $\{0\}$, если f^L — деривация алгебры A^L (предложение 4 из § 3); в обоих случаях ограничение отображения f^L на A_0^L является полупростым эндоморфизмом пространства A_0^L. Пусть теперь $n > 0$, и пусть $x_1, \ldots, x_n$ — элементы базиса B. Положим

$$f^L(x_i) = a_i x_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Если f^L — унитарный эндоморфизм алгебры A^L, то

$$f^L(x_1 \ldots x_n) = (a_1 \ldots a_n)(x_1 \ldots x_n);$$

если f^Lдеривация алгебры A^L, то

$$f^L(x_1 \ldots x_n) = (a_1 + \ldots + a_n)(x_1 \ldots x_n).$$

(предложение 10 из § 3). В обоих случаях A_n^L порождается собственными векторами отображения f^L. Отсюда вытекает, что A^L — сумма одномерных пространств, допустимых относительно отображения f^L, так что f^L есть полупростое отображение. Но тогда и отображение f полупростое (предложение 1).

Определение 3. *Эндоморфизм X векторного пространства V называется нильпотентным, если для некоторого целого $k > 0$ имеет место равенство $X^k = 0$.*

Предположим, что это условие выполнено, и пусть U — подпространство пространства V, отображающееся в себя эндоморфизмом X. Тогда ясно, что эндоморфизмы, индуцируемые в подпространстве U и в фактор-пространстве V/U эндоморфизмом X, также нильпотентны.

Лемма 1. *Пусть X — нильпотентный эндоморфизм векторного пространства $V \neq \{0\}$; тогда существует элемент $x \neq 0$ из V, для которого $Xx = 0$.*

Пусть k — наименьшее целое > 0, для которого $X^k = 0$. Наше утверждение тривиально, если $k = 1$. Если $k > 1$, то X^{k-1} отображает пространство V на подпространство $V' \neq \{0\}$, и в качестве элемента x можно взять любой элемент $x \neq 0$ из V'.

Лемма 2. *Эндоморфизм X векторного пространства V, который является одновременно и нильпотентным и полупростым, совпадает с нулевым эндоморфизмом.*

Пусть U — подпространство пространства V, состоящее из элементов $x \in V$, для которых $Xx=0$; X отображает пространство U в себя, так что пространство V является прямой суммой пространства U и некоторого пространства U', допустимого относительно отображения X. Ограничение эндоморфизма X на пространство U' нильпотентно, но ни один отличный от 0 элемент из U' не переходит в 0 при эндоморфизме X. Из леммы 1 следует, что $U'=\{0\}$, так что $U=V$ и $X=0$.

Предложение 4. *Пусть $X_1, \ldots, X_h$ — попарно перестановочные эндоморфизмы векторного пространства V, и пусть $\mathfrak{X}$ — подалгебра ассоциативной алгебры всех эндоморфизмов пространства V, порожденная эндоморфизмами $X_1, \ldots, X_h$. Если все эндоморфизмы X_i нильпотентны, то и все элементы алгебры $\mathfrak{X}$ нильпотентны. Если размерность векторного пространства V конечна и его основное поле K совершенно, то из полупростоты эндоморфизмов $X_1, \ldots, X_h$ следует полупростота всех элементов алгебры $\mathfrak{X}$.*

Ясно, что $\mathfrak{X}$ — коммутативная алгебра (ср. лемму 1 из § 4). Пусть $\mathfrak{X}'$ — множество нильпотентных элементов из $\mathfrak{X}$; пусть, далее, X и X' — элементы из $\mathfrak{X}'$ и k и k' — целые числа >0, для которых $X^k=0$ и $X'^{k'}=0$. Для $a \in K$ имеем $(aX)^k=0$. Так как X и X' перестановочны, то выражение $(X+X')^{k+k'}$ можно разложить по формуле бинома; каждый член разложения будет вида $cX^m X'^{m'}$, где m и m' — целые числа $\geqslant 0$, такие, что $m+m'=k+k'$. Следовательно, $m \geqslant k$ или $m' \geqslant k'$, так что $X^m X'^{m'}=0$ и $(X+X')^{k+k'}=0$. Наконец,

$$(XX')^{k+k'}=X^{k+k'}X'^{k+k'}=0.$$

Множество $\mathfrak{X}'$, как мы видим, образует подалгебру алгебры $\mathfrak{X}$; так как эта подалгебра содержит элементы $X_1, \ldots, X_h$, то она совпадает с алгеброй $\mathfrak{X}$.

Предположим теперь, что основное поле K совершенно, что пространство V — конечной размерности и что все X_i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ — полупростые эндоморфизмы. Обозначим через E множество этих эндоморфизмов; тождественное отображение множества E в множество эндоморфизмов пространства V определяет на V структуру векторного пространства с операторами. Согласно следствию предложения 2, это векторное пространство с операторами полупростое. Предложение 4 вытекает теперь из следующей леммы:

Лемма 3. *Пусть V — векторное пространство с операторами, и пусть $\mathfrak{X}$ — подалгебра ассоциативной алгебры всех эндоморфизмов, порожденная операторами пространства V. Пусть ρ' — тождественное отображение алгебры $\mathfrak{X}$ в пространство эндоморфизмов пространства V. Тогда (V, ρ') — векторное пространство с операторами, для которого алгебра $\mathfrak{X}$ является областью операторов. Для того чтобы V было полупростым, необходимо и достаточно, чтобы полупростым было пространство (V, ρ').*

Совершенно ясно, что эндоморфизмы пространства V, отображающие в себя некоторое подпространство U пространства V, образуют подалгебру алгебры всех эндоморфизмов пространства V. Таким образом, всякое допустимое подпространство пространства V отображается в себя операторами пространства (V, ρ'), т. е. является допустимым подпространством пространства (V, ρ'). Обратное утверждение также очевидно. Это доказывает лемму 3.

Замечание. Заключение леммы 3 остается, очевидно, справедливым для случая, когда $\mathfrak{X}$ означает алгебру, порожденную операторами пространства V и тождественным отображением.

Предложение 5. *Пусть X — эндоморфизм конечномерного векторного пространства V над совершенным полем K. Для того чтобы эндоморфизм X был полупростым, необходимо и достаточно, чтобы существовал полином f с коэффициентами из K, взаимно простой со своей производной, для которого $f(X)=0$.*

Предположим сперва, что эндоморфизм X полупростой. Так как пространство эндоморфизмов пространства V имеет конечную размерность, то существует по крайней мере один полином $F \neq 0$ с коэффициентами из K, для которого $F(X)=0$. Положим

$$F = cF_1^{e_1} \dots F_h^{e_h},$$

где $c \in K$, $F_1, \dots, F_h$ — неприводимые попарно взаимно простые полиномы, а $e_1, \dots, e_h$ — показатели >0. Пусть $f = F_1 \dots F_h$, и пусть e — наибольший из показателей e_i $(1 \leqslant i \leqslant h)$. Полином f^e делится на F, так что $(f(X))^e = 0$. Но согласно лемме 3, $f(X)$ — полупростой эндоморфизм, а лемма 2 показывает, что тогда $f(X)=0$. Кроме того, так как поле K предположено совершенным, то неприводимые полиномы F_i имеют в алгебраическом замыкании поля K только простые корни. Так как полиномы F_i попарно взаимно просты, то полином f вообще не имеет кратных корней и поэтому взаимно прост со своей производной.

Предположим, наоборот, что для некоторого полинома f, взаимно простого со своей производной, $f(X)=0$. Пусть L — алгебраически замкнутое надполе поля K. Тогда

$$f(U)=c(U-a_1)\ldots(U-a_h),$$

где U — переменная, $a_1, \ldots, a_h$ — различные элементы поля L и $c \in K$. Положим

$$f_i(U)=(U-a_i)^{-1}f(U) \qquad (1 \leqslant i \leqslant h).$$

Полиномы f_i — взаимно простые в совокупности, так что идеал, который они порождают в кольце всех полиномов, является единичным идеалом. Отсюда мы заключаем, что существуют такие полиномы g_i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ с коэффициентами из L, для которых $\sum\limits_{i=1}^{h} g_i f_i = 1$. Пусть X^L — эндоморфизм пространства V^L, продолжающий эндоморфизм X; очевидно, что $f(X^L)=0$. Обозначим через U_i' множество всех $x \in V^L$, для которых

$$X^L x = a_i x \qquad (1 \leqslant i \leqslant h);$$

U_i' — подпространство пространства V^L, допустимое относительно отображения X^L. Совершенно очевидно, что ограничение отображения X^L на это подпространство является полупростым эндоморфизмом. Мы покажем, что пространство V^L представимо в виде прямой суммы пространств U_i'. Отсюда будет непосредственно следовать, что X^L и (согласно предложению 1) также X — полупростые эндоморфизмы. Пусть x — элемент пространства V^L. Формула $\sum\limits_{i=1}^{h} g_i f_i = 1$ показывает, что отображение

$$\sum_{i=1}^{h} g_i(X^L) f_i(X^L)$$

является тождественным эндоморфизмом I пространства V^L. Положим

$$x_i = g_i(X^L) f_i(X^L)\, x;$$

тогда $\sum_{i=1}^{h} x_i = x$. С другой стороны,

$$(U - a_i)\, g_i(U)\, f_i(U) = g_i(U)\, f(U) \quad \text{и} \quad f(X^L) = 0,$$

так что $(X^L - a_i I)\, x_i = 0$. Но тогда $x_i \in U_i'$, так что $x \in \sum_{i=1}^{h} U_i'$. Предложение 5 доказано.

Теорема 7. *Пусть X — эндоморфизм конечномерного пространства V над совершенным полем K. Эндоморфизм X можно одним и только одним способом представить в виде суммы полупростого эндоморфизма S и нильпотентного эндоморфизма N. Эндоморфизмы S и N перестановочны друг с другом и могут быть представлены в виде полиномов от эндоморфизма X с коэффициентами из поля K.*

Пусть P — алгебра полиномов от переменной U с коэффициентами из поля K. Так же как и в доказательстве предложения 5, мы находим полином $f \in P$, взаимно простой со своей производной f', и некоторый показатель $e > 0$, для которого $(f(X))^e = 0$. Тогда существуют полиномы h и h_1 с коэффициентами из K, для которых $f'h + fh_1 = 1$, так что $f'h \equiv 1 \pmod{f}$. Для каждого $p = p(U)$ из P положим

$$s(p) = p(U - f(U)\, h(U)).$$

Очевидно, что s является гомоморфизмом алгебры P в себя. С помощью формулы Тейлора находим

$$\begin{aligned} s(f) &\equiv f(U) - f'(U)\, f(U)\, h(U) = \\ &= f(U)(1 - f'(U)\, h(U)) \pmod{(f(U)\, h(U))^2}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $s(f) \equiv 0 \pmod{f^2}$. Итерируя последнее соотношение, получаем

$$s^m(f) \equiv 0 \pmod{f^{2^m}}.$$

Выберем число m так, что $2^m \geqslant e$; тогда будем иметь

$$s^m(f) \equiv 0 \pmod{f^e}.$$

Так как $s(U) = U - f(U)\, h(U)$, то для каждого $p \in P$ имеем $s(p) = p(s(U))$ и, следовательно, $s^k(p) = p(s^k(U))$ для всех целых $k > 0$. Из того, что $s(U) \equiv U \pmod{f}$, заключаем по индукции, что

$$s^k(U) \equiv U \pmod{f} \quad \text{для всех } k > 0.$$

Положим теперь $S=(s^m(U))(X)$; тогда

$$f(S)=(f(s^m(U)))(X)=(s^m(f))(X)$$

и $f(S)=0$, поскольку $s^m(f)$ делится на полином f^e. Так как $U-s^m(U)$ делится на f, то $(X-S)^e=0$. Положив $N=X-S$, убеждаемся, что эндоморфизм N нильпотентен. Эндоморфизмы S и N являются полиномами от эндоморфизма X и, следовательно, перестановочны между собой. Согласно предложению 5, эндоморфизм S полупростой.

Пусть теперь S' — полупростой эндоморфизм, N' — нильпотентный эндоморфизм, перестановочный с эндоморфизмом S', и пусть $X=S'+N'$. Тогда $S-S'=N'-N$. Так как S' перестановочен с N', то он перестановочен с эндоморфизмом $X=S'+N'$ и также с эндоморфизмом S, который, как мы видели, является полиномом от X. Аналогичным образом заключаем, что N' перестановочен с N. Из предложения 4 следует, что эндоморфизм $S-S'=N'-N$ и полупрост и нильпотентен. Из леммы 2 вытекает, что $S-S'=N'-N=0$. Теорема 7 доказана.

Определение 4. *При тех же обозначениях, что и в формулировке теоремы 7, эндоморфизмы S и N называются соответственно полупростой и нильпотентной компонентами эндоморфизма X.*

Предложение 6. *Пусть X — эндоморфизм конечномерного векторного пространства V над совершенным полем K; S и N — соответственно полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма X; U — подпространство пространства V, допустимое относительно эндоморфизма X; X_U — ограничение эндоморфизма X на пространство U; $\overline{X}$ — эндоморфизм, индуцируемый X в фактор-пространстве V/U. Тогда эндоморфизмы S и N отображают подпространство U в себя; их ограничения S_U и N_U на пространство U являются соответственно полупростой и нильпотентной компонентами эндоморфизма X_U; эндоморфизмы $\overline{S}$ и $\overline{N}$, индуцируемые эндоморфизмами S и N в фактор-пространстве V/U, суть соответственно полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма $\overline{X}$.*

Первое утверждение непосредственно вытекает из того факта, что S и N записываются в виде полиномов от X. Очевидно, что $X_U = S_U + N_U$ и $\bar{X} = \bar{S} + \bar{N}$; кроме того, S_U перестановочен с N_U, а $\bar{S}$ — с $\bar{N}$. Согласно теореме 5, эндоморфизмы S_U и $\bar{S}$ — полупростые; то, что N_U и $\bar{N}$ нильпотентны, тривиально. Отсюда следуют остальные утверждения предложения 6.

Предложение 7. *Пусть X — эндоморфизм конечномерного векторного пространства V над совершенным полем K, и пусть L — совершенное надполе поля K. Полупростой и нильпотентной компонентами эндоморфизма X^L пространства V^L, продолжающего эндоморфизм X, являются соответственно эндоморфизмы S^L и N^L, продолжающие соответствующие эндоморфизмы S и N.*

Ясно, что $X^L = S^L + N^L$ и что эндоморфизмы S^L и N^L перестановочны. Согласно предложению 1, эндоморфизм S^L полупростой, а эндоморфизм N^L, очевидно, нильпотентен. Тем самым предложение 7 доказано.

Напомним, что представлением ρ группы G называется гомоморфизм группы G в группу обратимых эндоморфизмов конечномерного векторного пространства V. Задавая представление группы G с пространством представления V, мы определяем над пространством V структуру векторного пространства с операторами. Мы будем называть представление ρ простым (соответственно полупростым), если так определенное векторное пространство V с операторами простое (соответственно полупростое). Пусть теперь L — надполе основного поля K. Пространство V^L является естественным образом также векторным пространством с операторами, имеющим группу G областью операторов: а именно, каждому $s \in G$ сопоставляется эндоморфизм $\rho^L(s)$ пространства V^L, продолжающий эндоморфизм $\rho(s)$. Очевидно, что ρ^L также является представлением; мы будем говорить, что это представление получается из представления ρ расширением основного поля. Если поле K совершенно, то необходимым и достаточным условием полупростоты представления ρ^L является полупростота представления ρ (теорема 6); с другой стороны, существуют многочисленные примеры, показывающие, что представление ρ может быть простым, в то время как представление ρ^L не простое.

Если V — конечномерное векторное пространство, то множество эндоморфизмов пространства V можно превратить в алгебру Ли, введя умножение по формуле

$$(X, X') \to [X, X'] = XX' - X'X.$$

Такую алгебру Ли мы будем обозначать через $\mathfrak{gl}(V)$. Пусть $\mathfrak{g}$ — любая алгебра Ли над тем же основным полем, что и V. Как известно, представлением алгебры Ли называется гомоморфизм ρ алгебры $\mathfrak{g}$ в алгебру $\mathfrak{gl}(V)$. При этом V называется пространством представления ρ. Заданием представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на пространстве V определяется структура пространства с операторами с множеством $\mathfrak{g}$ в качестве области операторов. О представлении ρ говорят, что оно простое (соответственно полупростое), если простым (соответственно полупростым) является пространство с операторами (V, ρ). Предположим, что дано надполе L основного поля K пространства V; в пространстве V^L, определена структура пространства с операторами (V^L, ρ^L) с множеством $\mathfrak{g}$ в качестве области операторов. Но область операторов можно естественным образом расширить до алгебры $\mathfrak{g}^L$, получающейся из алгебры $\mathfrak{g}$ расширением основного поля. Действительно, пусть $\mathfrak{E}(V^L)$ — пространство всех эндоморфизмов пространства V^L, и пусть B — базис пространства $\mathfrak{g}$. B является также базисом пространства $\mathfrak{g}^L$. Как известно, существует линейное отображение ρ_0^L пространства $\mathfrak{g}^L$ в пространство $\mathfrak{E}(V^L)$, совпадающее с отображением ρ^L на базисе B. Так как отображение ρ алгебры $\mathfrak{g}$ в пространство эндоморфизмов пространства V линейно, легко заключить, что отображение ρ_0^L совпадает с ρ^L на алгебре $\mathfrak{g}$, т. е. является продолжением ρ. Кроме того, ρ_0^L — представление алгебры $\mathfrak{g}^L$. Действительно, билинейное отображение

$$(X, Y) \to \rho_0^L([X, Y]) - [\rho_0^L(X), \rho_0^L(Y)]$$

произведения $\mathfrak{g}^L \times \mathfrak{g}^L$ в пространство $\mathfrak{E}(V^L)$ равно нулю на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, а следовательно, и на $\mathfrak{g}^L \times \mathfrak{g}^L$. Мы будем говорить, что ρ_0^L — представление, получающееся из представления ρ расширением основного поля. Операторы векторного пространства (V^L, ρ^L) с операторами — линейные комбинации с коэффициентами из L операторов пространства (V^L, ρ^L). Отсюда можно заключить, что пространство (V^L, ρ_0^L) полупростое тогда и только тогда, когда (V^L, ρ^L) полупростое. При помощи теоремы

6 мы убеждаемся, что если представление ρ_0^L алгебры $\mathfrak{g}^L$ полупростое, то то же верно и для представления ρ алгебры $\mathfrak{g}$. Обратно, если ρ полупростое и если поле K совершенно, то и представление ρ_0^L полупростое.

Пусть дано конечномерное векторное пространство V над полем R вещественных чисел. Задание некоторого базиса B пространства V устанавливает изоморфизм I_B пространства V на векторное пространство R^n (где $n = \dim V$). Изоморфизм I_B определяет топологию в пространстве V, а именно ту, при которой отображение I_B является гомеоморфизмом пространства V на пространство R^n. Всякий эндоморфизм пространства V непрерывен в этой топологии. Если вместо B выбрать другой базис, то изоморфизм I_B переходит в некоторый изоморфизм вида $U \circ I_B$, где U — автоморфизм пространства R^n. Это показывает, что наша топология в пространстве V не зависит от выбора базиса. Пусть теперь $\mathfrak{E}(V)$ — пространство эндоморфизмов пространства V. Так как $\mathfrak{E}(V)$ — конечномерное пространство, то на нем определена указанная выше топология. Легко видеть, что эта топология совпадает с топологией простой сходимости: последовательность (X_n) сходится в $\mathfrak{E}(V)$ к X тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ последовательность $X_n x$ сходится к Xx в пространстве V. Пусть $\mathrm{GL}(V)$ — группа автоморфизмов пространства V; топология пространства $\mathfrak{E}(V)$ индуцирует топологию в группе $\mathrm{GL}(V)$, для которой $\mathrm{GL}(V)$ оказывается топологической группой. Каждому выбору базиса в пространстве V соответствует изоморфизм топологической группы $\mathrm{GL}(V)$ на группу $\mathrm{GL}(n; R)$ обратимых матриц степени n с вещественными коэффициентами. Это показывает, что $\mathrm{GL}(V)$ — группа Ли. Алгебра Ли группы $\mathrm{GL}(V)$ — это алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n; R)$ вещественных матриц степени n; она, очевидно, изоморфна определенной выше алгебре $\mathfrak{gl}(V)$. Итак, каждому базису B пространства V соответствует изоморфизм алгебры Ли группы $\mathrm{GL}(V)$ на алгебру Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Пусть X — элемент алгебры Ли группы $\mathrm{GL}(V)$, а X' — соответствующий элемент из $\mathfrak{gl}(V)$. Очевидно, что элемент $\exp X$ из $\mathrm{GL}(V)$ (ср. том I, гл. IV, § VIII) как раз является суммой ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} X'^n$, сходящегося в пространстве $\mathfrak{E}(V)$. Это показывает, что изоморфизм алгебры Ли группы $\mathrm{GL}(V)$ на $\mathfrak{gl}(V)$ не зависит от выбора базиса. Посредством этого изоморфизма мы отождествим алгебры Ли группы $\mathrm{GL}(V)$ и $\mathfrak{gl}(V)$.

Пусть теперь G — группа Ли, и пусть ρ — вещественное представление группы G (т. е. основным полем пространства представления ρ является поле вещественных чисел). Представлению ρ соответствует представление $d\rho$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G с тем же самым пространством представления V (ср. том I, гл. IV, § VI).

Предложение 8. *Пусть G — связная группа Ли, ρ — вещественное представление группы G, V — пространство представления ρ и $d\rho$ — соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Пространство представления (V, ρ) группы G и пространство представления $(V, d\rho)$ алгебры $\mathfrak{g}$ имеют одни и те же допустимые подпространства. В частности, представление ρ — простое (соответственно полупростое) тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает представление $d\rho$.*

Пусть U — подпространство пространства V. Предположим сначала, что U отображается в себя операторами $\rho(s)$, $s \in G$. Пусть X — элемент алгебры $\mathfrak{g}$, а x — элемент из U. Для всякого вещественного числа t имеем

$$(\exp t\, d\rho(X))\, x = x + t\, d\rho(X)\, x + \sum_{n=2}^{\infty} (n!)^{-1} t^n (d\rho(X))^n x,$$

так что

$$d\rho(X)\, x = \lim_{t \neq 0, \to 0} t^{-1}((\exp t\, d\rho(X))\, x - x).$$

Но $(\exp t\, d\rho(X))\, x \in U$ для всех вещественных t. Так как все подпространства U пространства V замкнуты, то отсюда следует, что $(d\rho(X))\, x \in U$. Это показывает, что пространство U, допустимо относительно операторов $d\rho(X)\,(X \in \mathfrak{g})$. Предположим, наоборот, что выполнено последнее условие. Если $x \in U$, то $(d\rho(X))^n x \in U$ для всех n, так что $(\exp t\, d\rho(X))x \in U$, поскольку подпространство U замкнуто. Мы видим, что для элементов s из G вида $\exp X$, где $X \in \mathfrak{g}$, операторы $\rho(s)$ отображают пространство U в себя. Но множество элементов этого вида образует окрестность единицы группы и, так как G связна, является системой образующих группы G. Отсюда непосредственно следует, что для всех $s \in G$ оператор $\rho(s)$ отображает пространство U в себя. Предложение 8 доказано.

Глава II

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Обозначения. На протяжении всей главы мы будем употреблять следующие обозначения:

K — поле с бесконечным числом элементов;

V — конечномерное векторное пространство над полем K;

$\mathfrak{E}$ — векторное пространство эндоморфизмов пространства V;

$\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ — алгебра полиномиальных функций над $\mathfrak{E}$ (ср. гл. I, § 4).

Если L — надполе поля K, то V^L будет обозначать векторное пространство, получающееся из V расширением основного поля. Если X — эндоморфизм пространства V, то той же буквой X мы обозначим эндоморфизм пространства V^L, продолжающий X; иначе говоря, мы отождествим множество $\mathfrak{E}$ с подмножеством пространства эндоморфизмов пространства V^L. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$—базис пространства V, и пусть X_{ij}—эндоморфизм пространства V, отображающий элемент x_j в x_i, а x_k в 0 при $k \neq j$. Тогда любой элемент s из $\mathfrak{E}$ представим в виде $\sum_{i,j=1}^{n} u_{ij}(s) X_{ij}$, где $u_{ij}(s) \in K$. Мы будем называть элементы $u_{ij}(s)$ координатами эндоморфизма s [относительно базиса $\{x_1, \ldots, x_n\}$] и будем говорить, что n^2 линейных функций $u_{ij}(s)$, определенных на $\mathfrak{E}$, образуют систему координатных функций. Алгебру $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ можно рассматривать как алгебру полиномов от u_{ij} (гл. I, § 4, следствие 1 предложения 4). Если L — надполе поля K, то эндоморфизмы X_{ij} также образуют базис для пространства эндоморфизмов пространства V^L. Мы можем, следовательно, отождествить это пространство эндоморфизмов с пространством $\mathfrak{E}^L$, получающимся из пространства $\mathfrak{E}$ расширением основного поля до поля L. Если R — рациональная функция над пространством $\mathfrak{E}$, то той же буквой R мы обозначим рациональную функцию над пространством $\mathfrak{E}^L$, продолжающую функцию R. В частности, совокупность эндоморфизмов u_{ij} можно рассматривать как систему координатных функций для $\mathfrak{E}^L$. Алгебра $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}^L)$ полиномиальных функций над пространством $\mathfrak{E}^L$ совпадает с алгеброй полиномов от u_{ij} с коэффициентами из L; мы отождествим эту алгебру с алгеброй, получающейся из $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ расширением основного поля. Пусть s — элемент пространства $\mathfrak{E}^L$; подкольцо поля L, получающееся присоединением координат эндоморфизма s (по отношению к какому-нибудь базису пространства V), будет обозначаться через $K[s]$ (ясно, что это кольцо от выбора базиса пространства V не зависит); поле отношений кольца $K[s]$ обозначим через $K(s)$.

§ 1. Определение алгебраической группы

Определение 1. *Пусть G — подгруппа группы всех автоморфизмов векторного пространства V. Группа G называется алгебраической группой, если существует множество S полиномиальных функций над пространством $\mathfrak{E}$, такое, что G состоит из всех автоморфизмов s пространства V, удовлетворяющих условию $P(s)=0$ для всех $P \in S$. Множество S называется определяющим множеством группы G.*

Примеры. 1. Множество всех автоморфизмов пространства V является алгебраической группой.

2. Пусть s_0 — эндоморфизм пространства V и G — группа всех автоморфизмов s пространства V, перестановочных с s_0. Тогда G—алгебраическая группа. Действительно, пусть (u_{ij}) — система координатных функций на пространстве $\mathfrak{E}$. Отображения $s \to u_{ij}(s_0 s)$ и $s \to u_{ij}(s s_0)$ являются линейными отображениями пространства $\mathfrak{E}$ в поле K. G состоит из всех обратимых автоморфизмов s, удовлетворяющих условиям

$$u_{ij}(ss_0) - u_{ij}(s_0 s) = 0 \qquad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n).$$

3. Пусть U и U' — два подпространства пространства V, причем $U' \subset U$. Рассмотрим группу G автоморфизмов s пространства V, для которых $sx \equiv x \pmod{U'}$ при всех $x \in U$. Эта группа — алгебраическая. Действительно, выберем такой базис $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ пространства V, что $\{x_1, \ldots, x_{m'}\}$

— базис пространства U', а $\{x_1, \ldots, x_m\}$ — базис пространства U (m', m — целые числа, причем $0 \leqslant m' \leqslant m \leqslant n$). К группе G принадлежат те и только те автоморфизмы s из пространства $\mathfrak{E}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$u_{ji}(s) = 0 \quad \text{для} \quad j > m, \; i \leqslant m;$$

$$u_{ii}(s) = 1 \quad \text{для} \quad m' < i \leqslant m;$$

$$u_{ji}(s) = 0 \text{ для } j > m' \text{ и } i \leqslant m' \text{ или } j > m' \text{ и } m' < i \leqslant m, \; i \neq j.$$

4. Пусть Q — элемент алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$. Q называется *инвариантом элемента* s *из* $\mathfrak{E}$, если выполняется равенство $Q(st) = Q(t)$ для всех $t \in \mathfrak{E}$; мы будем говорить, что Q—*инвариант некоторого подмножества* пространства $\mathfrak{E}$, если он является инвариантом всех элементов этого подмножества. Совокупность автоморфизмов s пространства V, для которых Q — инвариант, является алгебраической группой. Это следует непосредственно из того, что для всех $t \in \mathfrak{E}$ отображение

$$s \to Q(st) - Q(t)$$

есть полиномиальная функция.

5. Подобным же образом мы будем называть полиномиальную функцию P над пространством V *инвариантом автоморфизма* s, если она удовлетворяет условию $P(sx) = P(x)$ для всех $x \in V$. Полиномиальная функция P называется инвариантом некоторого множества автоморфизмов пространства V, если она — инвариант каждого элемента этого множества. Множество автоморфизмов пространства V, для которых функция P — инвариант, является алгебраической группой.

6. Пересечение $\bigcap\limits_{i \in I} G_i$ алгебраических групп G_i само является алгебраической группой. Действительно, если S_i — определяющее множество группы G_i, то множество $\bigcap\limits_{i \in I} G_i$ состоит из всех автоморфизмов s пространства V, для которых $P(s) = 0$ при всех $P \in \bigcup\limits_{i \in I} S_i$. В частности, если E — некоторое множество автоморфизмов пространства V, то существует наименьшая алгебраическая группа, содержащая E, а именно пересечение всех алгебраических групп, содержащих E.

7. Пусть V — векторное пространство размерности 2 над полем вещественных чисел, и пусть $\{x, y\}$ — базис пространства V. Пусть e — иррациональное число. Множество эндоморфизмов пространства V, представимых (в базисе $\{x, y\}$) матрицами вида

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^e \end{pmatrix},$$

где u — вещественное число > 0, есть группа Ли, но эта группа не является алгебраической группой.

Множество всех полиномиальных функций над пространством $\mathfrak{E}$, равных нулю на некотором заданном подмножестве пространства $\mathfrak{E}$, очевидно, является идеалом алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$.

Определение 2. *Идеал, состоящий из всех полиномиальных функций, равных нулю на подмножестве E пространства $\mathfrak{E}$, будем называть идеалом, соответствующим множеству E.*

Очевидно, что идеал, соответствующий алгебраической группе, является определяющим множеством этой группы.

Определение 3. *Пусть s_0—элемент пространства $\mathfrak{E}$. Если P — полиномиальная функция, то через $\eta(s_0)P$ мы обозначим функцию $s \to P(s_0 s)$.*

Совершенно ясно, что $\eta(s_0)P$ — полиномиальное отображение пространства $\mathfrak{E}$ в поле K, получающееся в результате последовательного выполнения линейного отображения $s \to s_0 s$ пространства $\mathfrak{E}$ в себя и отображения P (ср. гл. I, § 4). Очевидно, $\eta(s_0)$ является эндоморфизмом алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$. Если s_0 и t_0 — эндоморфизмы пространства V, то

$$\eta(s_0 t_0) = \eta(t_0) \circ \eta(s_0).$$

Кроме того, если s_0 — тождественный эндоморфизм пространства V на себя, то $\eta(s_0)$ — тождественный эндоморфизм алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$. Отсюда следует, что для обратимого эндоморфизма s_0 имеет место равенство

$$\eta\left(s_0^{-1}\right) = \left(\eta(s_0)\right)^{-1}.$$

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{a}$ — векторное подпространство алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, и пусть s_0 — обратимый элемент из $\mathfrak{E}$, такой, что $\eta(s_0)$ отображает пространство $\mathfrak{a}$ в себя; тогда $\eta(s_0)$ отображает пространство $\mathfrak{a}$ на себя.*

Алгебра $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ является симметрической алгеброй над пространством $\mathfrak{E}^*$, дуальным к пространству $\mathfrak{E}$, и обладает градуировкой, для которой однородные элементы степени $n \geqslant 0$ суть линейные комбинации произведений из n элементов пространства $\mathfrak{E}^*$. Очевидно, что $\eta(s_0)$ отображает пространство $\mathfrak{E}^*$ в себя и поэтому является однородным отображением степени 0 алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ в себя. Обозначим через $\mathfrak{o}_n$ пространство однородных элементов степени n пространства $\mathfrak{o}$, а через $\mathfrak{o}'_n$ — пространство $\sum\limits_{n' \leqslant n} \mathfrak{o}_{n'}$. Так как пространство V конечномерно, то конечномерно и пространство $\mathfrak{o}'_n$. Отображение $\eta(s_0)$ переводит, очевидно, пространство $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{o}'_n$ в себя. Так как отображение $\eta(s_0)$ обратимо, то никакой элемент из $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, не равный нулю, не переходит в 0. Так как размерность пространства $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{o}'_n$ конечна, то оно отображается при $\eta(s_0)$ *на* себя. Лемма 1 вытекает теперь из того, что пространство $\mathfrak{a}$ является объединением пространств $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{o}'_n$ $(0 \leqslant n < \infty)$.

Пусть V' — конечномерное векторное пространство над тем же полем K, что и V. Обозначим через $\mathfrak{E}'$ пространство эндоморфизмов пространства V', а через $\mathfrak{F}$ — пространство эндоморфизмов пространства $V \times V'$. Каждому элементу (s, s') произведения $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'$ сопоставим элемент из $\mathfrak{F}$, отображающий элемент (x, x') в $(sx, s'x')$ [для всех $(x, x') \in V \times V'$]. Таким образом мы получаем изоморфизм векторного пространства $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'$ на некоторое подпространство пространства $\mathfrak{F}$; *мы отождествим пространство $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'$ с его образом в пространстве $\mathfrak{F}$ при этом изоморфизме*. Для s и t из $\mathfrak{E}$ и s' и t' из $\mathfrak{E}'$, очевидно, имеет место равенство $(s, s')(t, t') = (st, s't')$. Отсюда следует, что если G и G' — группы автоморфизмов соответственно пространств V и V', то $G \times G'$ — группа автоморфизмов пространства $V \times V'$.

Обозначим через $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}')$ и $\mathfrak{o}(\mathfrak{F})$ кольца полиномиальных функций над пространствами $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, а через $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')$ — кольцо полиномиальных функций над $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'$. Ограничение на $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'$ некоторого элемента из $\mathfrak{o}(\mathfrak{F})$ будет, конечно, элементом алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')$, и каждый элемент из $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')$ может быть получен таким образом. Как мы видим, существует естественный изоморфизм кольца $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')$ на фактор-кольцо $\mathfrak{o}(\mathfrak{F})/\mathfrak{L}$, где $\mathfrak{L}$ — идеал полиномиальных функций над пространством $\mathfrak{F}$, равных нулю на произведении $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'$. (Этот идеал порождается линейными функциями над $\mathfrak{F}$, равными нулю на $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'$.) Всякий идеал $\mathfrak{m}$ кольца $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')$ можно представить в виде $\mathfrak{M}/\mathfrak{L}$, где $\mathfrak{M}$ — некоторый идеал алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{F})$; если $\mathfrak{m}$ — идеал алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')$, соответствующий некоторому подмножеству пространства $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'$, то $\mathfrak{M}$ — идеал в $\mathfrak{o}(\mathfrak{F})$, соответствующий тому же подмножеству. Множество всех точек пространства $\mathfrak{F}$, в котором все элементы идеала $\mathfrak{M}$ равны нулю, совпадает с множеством всех элементов пространства $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'$, для которых равны нулю все элементы идеала $\mathfrak{m}$.

Заметим, что существует изоморфизм тензорного произведения алгебр $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ и $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}')$ на алгебру $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')$, сопоставляющий всякому элементу вида $P \otimes P'$ (где $P \in \mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, $P' \in \mathfrak{o}(\mathfrak{E}')$) отображение $(s, s') \to P(s) P'(s')$ (ср. гл. I, § 4, предложение 8). *Мы отождествим алгебру* $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')$ *с алгеброй* $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}) \otimes \mathfrak{o}(\mathfrak{E}')$ *при помощи этого изоморфизма.*

Лемма 2. *Пусть V' — конечномерное векторное пространство над тем же основным полем K, что и пространство V, $\mathfrak{E}'$ — пространство эндоморфизмов пространства V', $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}')$ и $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')$ — алгебры полиномиальных функций над пространствами $\mathfrak{E}'$ и $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'$ соответственно. Пусть, далее, E — подмножество пространства $\mathfrak{E}$, E' — подмножество в $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ — соответствующие им идеалы в алгебрах $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ и $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}')$. Подмножеству $E \times E'$ пространства $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'$ соответствует тогда в алгебре $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')$ идеал*

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{o}(\mathfrak{E}) \otimes \mathfrak{a}' + \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{o}(\mathfrak{E}').$$

Если при этом E и E' являются множествами всех точек, в которых равны нулю все функции из идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ соответственно, то $E \times E'$ — множество всех точек, в которых равны нулю все функции из $\mathfrak{m}$.

Выберем базис B пространства $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, содержащий базис A пространства $\mathfrak{a}$, и пусть C — дополнение множества A в множестве B. Тогда всякая полиномиальная функция M над пространством $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}'$ представима в виде

$$M = \sum_{i=1}^{m} P_i \otimes A_i + \sum_{j=1}^{m'} Q_j \otimes U_j,$$

где $P_1, \ldots, P_m$ — различные элементы множества A, $Q_1, \ldots, Q_{m'}$ — различные элементы множества C, а $A_1, \ldots, A_{m'}$,

$U_1, \ldots, U_{m'}$ — элементы из $\mathfrak{o}(\mathfrak{G}')$. Для $(s, s') \in \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}'$ имеем

$$M(s, s') = \sum_{i=1}^{m} P_i(s) A_i(s') + \sum_{j=1}^{m'} Q_j(s) U_j(s').$$

Предположим теперь, что функция M равна нулю на множестве $E \times E'$. Если $s'_0 \in E'$, то для каждого $s \in E$ $M(s, s'_0) = 0$ и $P_i(s) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, так что

$$\sum_{j=1}^{m'} Q_j(s) U_j(s'_0) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{m'} U_j(s'_0) Q_j \in \mathfrak{a}.$$

Но так как элементы Q_j линейно независимы $(\operatorname{mod} \mathfrak{a})$, то отсюда следует, что $U_j(s'_0) = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m')$.

Так как последнее утверждение верно для всех $s'_0 \in E'$, то элементы U_j принадлежат идеалу $\mathfrak{a}'$. Это показывает, что $M \in \mathfrak{m}$. С другой стороны, очевидно, что все элементы из $\mathfrak{m}$ обращаются в нуль на множестве $E \times E'$.

Предположим теперь, что все точки из $\mathfrak{G}$, в которых равны нулю все функции из $\mathfrak{a}$, содержатся в E и что все точки из $\mathfrak{G}'$, в которых равны нулю все функции из $\mathfrak{a}'$, находятся в E'. Пусть теперь (s, s') — точка пространства $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}'$, в которой равны нулю все функции из $\mathfrak{m}$. Тогда, если $P \in \mathfrak{a}$, то

$$0 = (P \otimes 1)(s, s') = P(s),$$

а если $P' \in \mathfrak{a}'$, то

$$0 = (1 \otimes P')(s, s') = P'(s').$$

Отсюда следует, что $s \in E$ и $s' \in E'$. Лемма 2 доказана.

Предложение 1. *Пусть V и V' — конечномерные векторные пространства над одним и тем же полем K, G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V и G' — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V'. Тогда группа $G \times G'$ — алгебраическая группа автоморфизмов пространства $V \times V'$.*

Это предложение непосредственно вытекает из леммы 2.

Рассмотрим теперь случай $V = V'$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$. Отображение $(s, t) \to st$ пространства $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ в пространство $\mathfrak{G}$ является полиномиальным отображением. Действительно, если выбрать координатные функции u_{ij} для пространства $\mathfrak{G}$, то элементы

$u_{ij}(st)$ можно представить в виде билинейных функций координат элементов s и t. Отсюда можно заключить, что для $P \in \mathfrak{o}(\mathfrak{G})$ отображение $(s, t) \to P(st)$ — полиномиальная функция над пространством $\mathfrak{o}(\mathfrak{G} \times \mathfrak{G})$.

Предложение 2. *Пусть G_0 — множество автоморфизмов пространства V, содержащее вместе с любыми двумя элементами их произведение. Если P — элемент из идеала $\mathfrak{a}$, соответствующего множеству G_0, то имеет место следующее тождество:*

$$P(st) = \sum_{i=1}^{m} P_i(s) A_i(t) + \sum_{i=1}^{m} A'_i(s) P_i(t) \qquad (s \in \mathfrak{G},\ t \in \mathfrak{G}),$$

где $A_1, \ldots, A_m, A'_1, \ldots, A'_m$ — элементы из $\mathfrak{o}(\mathfrak{G})$, а $P_1, \ldots, P_m$ принадлежат идеалу $\mathfrak{a}$. Множество G всех автоморфизмов s пространства V, таких, что $P(s) = 0$ для всех $P \in \mathfrak{a}$, является алгебраической группой, для которой $\mathfrak{a}$ — соответствующий идеал. Для того чтобы автоморфизм s пространства V принадлежал группе G, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\eta(s)$ отображал идеал $\mathfrak{a}$ в себя.

Для $P \in \mathfrak{a}$ полиномиальная функция $(s, t) \to P(st)$, определенная на пространстве $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$, обращается в нуль на множестве $G_0 \times G_0$ и, согласно лемме 2, принадлежит идеалу $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{o}(\mathfrak{G}) + \mathfrak{o}(\mathfrak{G}) \otimes \mathfrak{a}$, что доказывает первое утверждение предложения. Пусть s — элемент множества G. Тогда $P_i(s) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, и из нашего тождества следует, что оператор $\eta(s)$ отображает идеал $\mathfrak{a}$ в себя. Таким образом, если $P \in \mathfrak{a}$, то существует элемент $P' \in \mathfrak{a}$, для которого $P'(st) = P(t)$ при всех $t \in \mathfrak{G}$. (В силу леммы 1 $\eta(s)$ отображает идеал $\mathfrak{a}$ *на* себя.) Пусть I — тождественный автоморфизм пространства V, тогда $P(I) = P'(s) = 0$, так что все функции из $\mathfrak{a}$ равны нулю в точке I. Пусть, наоборот, s — автоморфизм пространства V, такой, что $\eta(s)$ отображает идеал $\mathfrak{a}$ в себя. Тогда $P(s) = (\eta(s) P)(I) = 0$ для всех $P \in \mathfrak{a}$, так что $s \in G$. Но совершенно очевидно, что множество всех автоморфизмов s пространства V, для которых $\eta(s)$ отображает идеал $\mathfrak{a}$ на себя, есть группа, так что G — алгебраическая группа. Так как группа G содержит множество G_0, то ей соответствует идеал $\mathfrak{a}$.

§ 2. Полуинварианты

Определение 1. *Элемент P алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ называется полуинвариантом множества G эндоморфизмов пространства V, если P — собственный вектор семейства $(\eta(s))_{s\in G}$ эндоморфизмов пространства $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, т. е. если для $s \in G$ имеет место равенство $\eta(s)P = p(s)P$, где p — функция, определенная на множестве G, со значениями в поле K. При этом говорят также, что P — полуинвариант веса p.*

Очевидно, что 0 является полуинвариантом любого веса; напротив, полуинвариант, отличный от нуля, имеет определенный вес.

В случае, когда множество $G = \{s\}$ содержит один единственный элемент, полуинвариант множества G называется также полуинвариантом элемента s. Если G — любое множество, то полуинварианты множества G — это те элементы из $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, которые являются полуинвариантами всех элементов из G.

Предложение 1. *Пусть P — отличный от 0 полуинвариант некоторой группы G автоморфизмов пространства V, и пусть p — вес этого полуинварианта. Функция p является тогда ограничением на G некоторой полиномиальной функции. Эта функция осуществляет гомоморфизм группы G в мультипликативную группу K^* отличных от 0 элементов поля K; значение этой функции на всех элементах коммутанта группы G равно 1.*

Пусть s_0 — точка пространства $\mathfrak{E}$, для которой $P(s_0) \neq 0$. Тогда для $s \in G$ имеет место равенство

$$p(s) = (P(s_0))^{-1} P(ss_0),$$

которое показывает, что p — ограничение на G полиномиальной функции. Так как $\eta(s)$ (для $s \in G$) — автоморфизм пространства $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, то $p(s) \neq 0$. Для s и t из G имеем

$$\eta(st)P = (\eta(t))(\eta(s)P) = p(s)\cdot\eta(t)P = p(s)p(t)P,$$

так что $p(st) = p(s)p(t)$. Последнее утверждение предложения вытекает из того, что группа K^* абелева.

Замечание. Если Q — полиномиальная функция, ограничение которой на G совпадает с p, то иногда говорят, что P — полуинвариант веса Q.

Если s — автоморфизм пространства V, то автоморфизм $\eta(s)$ кольца $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ может быть продолжен в автоморфизм поля отношений $\mathfrak{R}$ кольца $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, т. е. в поле рациональных функций над пространством $\mathfrak{E}$. Этот автоморфизм мы также будем обозначать через $\eta(s)$. Совершенно ясно, что если s и t — автоморфизмы пространства V, то

$$\eta(st) = \eta(t) \circ \eta(s) \quad \text{и} \quad \eta(s^{-1}) = (\eta(s))^{-1}.$$

Определение 2. *Рациональная функция R над пространством $\mathfrak{E}$ называется инвариантом множества G автоморфизмов пространства V, если $\eta(s) R = R$ для всех $s \in G$.*

Если при этом множество G состоит из единственного элемента s, то инвариант множества G называется инвариантом элемента s.

Предложение 2. *Пусть G — множество автоморфизмов пространства V. Для того чтобы рациональная функция R над пространством $\mathfrak{E}$ была инвариантом множества G, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде частного двух полуинвариантов одинакового веса.*

Условие, очевидно, достаточно. Предположим, наоборот, что R — инвариант. Выберем систему координатных функций u_{ij} пространства $\mathfrak{E}$. Тогда мы можем представить функцию R в виде PQ^{-1}, где P, Q — элементы кольца $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, причем такие, что если представить эти элементы в виде полиномов $P = \tilde{P}(\ldots, u_{ij}, \ldots)$ и $Q = \tilde{Q}(\ldots, u_{ij}, \ldots)$ от u_{ij}, то полиномы $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ будут взаимно простыми. Пусть s — любой элемент из G; тогда

$$(\eta(s) Q) P = (\eta(s) P) Q.$$

Ввиду условия, наложенного на полиномиальные функции P и Q, функция Q должна делить $\eta(s) Q$ в кольце $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$. Но R является также инвариантом элемента s^{-1}, так что Q делит $\eta(s^{-1}) Q$ и, следовательно, $\eta(s) Q$ делит Q. Мы видим, что $\eta(s) Q$ — произведение элемента Q на обратимый элемент кольца $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, т. е. на некоторый скаляр $p(s)$. Тогда $\eta(s) P = p(s) P$, так что P и Q — полуинварианты одинакового веса.

Теорема 1. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Тогда существует конечное* *множество $\mathfrak{J}$ полиномиальных функций над пространством $\mathfrak{E}$ эндоморфизмов пространства V и конечное множество $\mathfrak{S}$ рациональных функций над $\mathfrak{E}$ со следующими свойствами:* 1) *G состоит из всех автоморфизмов пространства V, для которых все элементы из $\mathfrak{J}$ — полуинварианты*; 2) *G состоит из всех автоморфизмов пространства V, для которых элементы из $\mathfrak{S}$ — инварианты.*

Для всех целых $n \geqslant 0$ обозначим через $\mathfrak{o}_n$ пространство однородных элементов степени n алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, а через $\mathfrak{o}'_n$ — сумму пространств $\mathfrak{o}_{n'}$ для $n' \leqslant n$. Каждое $\mathfrak{o}'_n$ — конечномерное пространство, и каждый элемент из $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ принадлежит некоторому пространству $\mathfrak{o}'_n$ для достаточно большого n. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал, соответствующий группе G; положим $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{o}'_n$. Так как алгебра $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ изоморфна алгебре полиномов от некоторого конечного числа переменных, то идеал $\mathfrak{a}$ обладает конечной системой образующих. Выберем раз навсегда $n > 0$ настолько большим, что $\mathfrak{a}_n$ содержит систему образующих идеала $\mathfrak{a}$. Если s — автоморфизм пространства V, то $\eta(s)$ отображает каждое пространство $\mathfrak{o}_{n'}$, а следовательно, также каждое пространство $\mathfrak{o}'_n$ в себя. Множество $\eta(s)(\mathfrak{a})$ является идеалом алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$; элемент $s \in G$ принадлежит группе G тогда и только тогда, когда этот идеал содержится в идеале $\mathfrak{a}$ (предложение 2 из § 1). В этом случае $\eta(s)$ отображает пространство $\mathfrak{a}_n$ в себя; если, наоборот, выполнено это последнее условие, то $\eta(s)$ переводит идеал $\mathfrak{a}$ в себя, так как $\mathfrak{a}_n$ содержит систему образующих идеала $\mathfrak{a}$. Мы видим, что G является множеством всех автоморфизмов s пространства V, таких, что $\eta(s)$ отображает пространство $\mathfrak{a}_n$ в себя.

Пусть E — внешняя алгебра над пространством $\mathfrak{o}'_n$, и пусть u — произведение в алгебре E элементов некоторого базиса пространства $\mathfrak{a}_n$. Если размерность пространства $\mathfrak{a}_n$ равна d, то u принадлежит пространству E_d однородных элементов степени d пространства E. Выберем базис $\{u_1, \ldots, u_N\}$ пространства E_d, первый элемент u_1 которого равен u.

Если s — эндоморфизм пространства V, то ограничение отображения $\eta(s)$ на пространство $\mathfrak{o}'_n$ может быть продолжено в унитарный эндоморфизм $\zeta'(s)$ алгебры E, причем этот эндоморфизм — однородный степени 0. Обозначим через $\zeta(s)$ его ограничение на пространство E_d и положим

$$\zeta(s)\,u_i = \sum_{j=1}^{N} U_{ij}(s)\,u_j.$$

Если s и s' — элементы пространства $\mathfrak{E}$, то $\eta(ss') = \eta(s') \circ \eta(s)$, так что $\zeta(ss') = \zeta(s') \circ \zeta(s)$. Отсюда, в частности, следует, что

$$(1) \qquad U_{1i}(ss') = \sum_{j=1}^{n} U_{1j}(s)\,U_{ji}(s') \qquad (1 \leqslant i \leqslant N).$$

Применяя два раза предложение 10 § 4 гл. I, мы убеждаемся, что U_{ij} — полиномиальные функции над пространством $\mathfrak{E}$. Обозначим через $\mathfrak{J}$ множество функций U_{1i} $(1 \leqslant i \leqslant N)$. Если I — тождественный эндоморфизм пространства V, то, конечно, $U_{11}(I) = 1$, так что $U_{11} \neq 0$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество рациональных функций $U_{11}^{-1}U_{1i}$.

Если s — автоморфизм пространства V, то $\eta(s)$ отображает пространство $\mathfrak{a}_n$ в себя тогда и только тогда, когда u — собственный вектор эндоморфизма $\zeta(s)$ (гл. I, § 5, предложение 10), т. е. когда $U_{1i}(s) = 0$ для $i > 1$. В этом случае из (1) сразу следует, что для всех $s' \in \mathfrak{E}$ выполняется равенство

$$U_{1i}(ss') = U_{11}(s)\,U_{1i}(s'),$$

т. е. элементы из $\mathfrak{J}$ — полуинварианты веса U_{11}, а элементы из $\mathfrak{S}$ — инварианты. Пусть, наоборот, s — автоморфизм пространства V, для которого элементы множества $\mathfrak{J}$ являются полуинвариантами. Тогда существуют скаляры a_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$, такие, что $U_{1i}(ss') = a_i U_{1i}(s')$ для всех $s' \in \mathfrak{E}$. Положив, в частности, $s' = I$, получаем $U_{1i}(s) = 0$ $(1 < i \leqslant N)$. Отсюда следует, что $\eta(s)$ отображает пространство $\mathfrak{a}_n$ в себя, т. е. что $s \in G$. Предположим, что s — автоморфизм пространства V, для которого элементы множества $\mathfrak{S}$ — инварианты. Тогда

$$U_{1i}(ss')\,U_{11}(s') = U_{11}(ss')\,U_{1i}(s')$$

для всех $s' \in \mathfrak{E}$ и, следовательно, $U_{1i}(s) = 0$ для $i > 1$, откуда, как выше, вытекает, что $s \in G$. Теорема 1 доказана.

Следствие. *Пусть G и G' — алгебраические группы автоморфизмов пространства V. Если всякий элемент из $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, являющийся полуинвариантом группы G, есть* *также полуинвариант группы G', то $G \supset G'$. Если всякая рациональная функция над $\mathfrak{E}$, являющаяся инвариантом группы G, есть также инвариант группы G', то $G \supset G'$.*

Это непосредственно следует из теоремы 1.

§ 3. Неприводимые группы

Определение 1. *Алгебраическая группа автоморфизмов пространства V называется неприводимой, если соответствующий ей идеал — простой.*

Теорема 2. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов векторного пространства V. Существует одна и только одна алгебраическая подгруппа G_1 группы G, неприводимая и конечного индекса в G. Группа G_1 — нормальный делитель группы G. Пусть I — единица группы G. Если P и Q — две полиномиальные функции над пространством $\mathfrak{E}$, такие, что функция PQ равна нулю на G, но $Q(I) \neq 0$, то функция P равна нулю на G_1. Кроме того, существует полиномиальная функция Q_0, для которой $Q_0(I) \neq 0$, такая, что идеал, соответствующий группе G_1, состоит из всех функций P, таких, что PQ_0 обращается в нуль на G.*

Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал, соответствующий группе G. Обозначим через $\mathfrak{p}$ множество всех полиномиальных функций P, для которых существует некоторая полиномиальная функция Q со следующими свойствами: $Q(I) \neq 0$; PQ обращается в нуль на группе G. Покажем, что $\mathfrak{p}$ — идеал в $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$. Совершенно ясно, что произведение какого-нибудь элемента из $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ на элемент из $\mathfrak{p}$ принадлежит $\mathfrak{p}$. Пусть, с другой стороны, P и P' — элементы множества $\mathfrak{p}$, и пусть Q и Q' — полиномиальные функции, для которых $Q(I) \neq 0$, $Q'(I) \neq 0$, $PQ \in \mathfrak{a}$, $P'Q' \in \mathfrak{a}$; тогда $(QQ')(I) \neq 0$ и $(P-P')QQ' \in \mathfrak{a}$, так что $P-P' \in \mathfrak{p}$, что и доказывает наше утверждение. Идеал $\mathfrak{p}$, очевидно, содержит идеал $\mathfrak{a}$.

Так как алгебра $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ изоморфна алгебре полиномов от конечного числа переменных с коэффициентами из K, то всякий ее идеал обладает конечной системой образующих. Пусть $\{P_1, \ldots, P_h\}$ — система образующих идеала $\mathfrak{p}$; пусть для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ Q_i — полиномиальная функция, такая, что $Q_i(I) \neq 0$ и $P_iQ_i \in \mathfrak{a}$. Положим $Q_0 = Q_1 \ldots Q_h$. Тогда имеем $Q_0(I) \neq 0$. Кроме того, всякий элемент P из $\mathfrak{p}$ записывается в виде $A_1P_1 + \ldots + A_hP_h$, где $A_1, \ldots, A_h$ принадлежат $\mathfrak{o}(\mathfrak{G})$. Отсюда следует, что $PQ_0 \in \mathfrak{a}$. Таким образом, идеал $\mathfrak{p}$ состоит из всех $P \in \mathfrak{o}(\mathfrak{G})$, для которых $PQ_0 \in \mathfrak{a}$.

Пусть G_1 — множество всех автоморфизмов s пространства V, таких, что $P(s)=0$ для всех $P \in \mathfrak{p}$. Так как $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$, то G_1 — подмножество группы G. Покажем, что G_1 — группа; тогда она будет, конечно, и алгебраической группой. Пусть s_0 — элемент из G и P — элемент из $\mathfrak{p}$. Тогда $PQ_0 \in \mathfrak{a}$, так что $(\eta(s_0)P)(\eta(s_0)Q_0) \in \mathfrak{a}$ (ср. определение 3 и предложение 2 § 1). Если $Q_0(s_0) \neq 0$, то $(\eta(s_0)Q_0)(I) \neq 0$, так что $\eta(s_0)P \in \mathfrak{p}$. Итак, для всякого $s_0 \in G$ функция $Q_0(s_0)(\eta(s_0)P)$ принадлежит идеалу $\mathfrak{p}$ и тем самым равна нулю на G_1. Если теперь $s_1 \in G_1$, то отображение $s \to Q_0(s)P(ss_1)$ принадлежит идеалу $\mathfrak{a}$; так как $Q_0(I) \neq 0$, то это означает, что функция $s \to P(ss_1)$ принадлежит идеалу $\mathfrak{p}$ и, следовательно, равна нулю на множестве G_1. Отсюда мы непосредственно заключаем, что произведение двух элементов множества G_1 опять принадлежит множеству G_1. Используя предложение 2 из § 1 и учитывая, что G_1 состоит из всех точек, в которых равны нулю все функции, содержащиеся в идеале $\mathfrak{p}$, мы убеждаемся, что G_1 — алгебраическая группа. Если s_1 — элемент группы G, для которого $Q_0(s_1) \neq 0$, то $P(s_1)=0$ для всех $P \in \mathfrak{p}$, так что $s_1 \in G_1$. Отсюда следует, что если полиномиальная функция P' равна нулю на группе G_1, то $P'Q_0$ равна нулю в каждой точке группы G, так что $P' \in \mathfrak{p}$. Это показывает, что $\mathfrak{p}$ — идеал, соответствующий группе G_1.

Покажем теперь, что идеал $\mathfrak{p}$ простой. Пусть P_1 и P_2 — полиномиальные функции, для которых $P_1P_2 \in \mathfrak{p}$, и $P_2 \overline{\in} \mathfrak{p}$. Тогда $P_2(s_2) \neq 0$ для некоторого $s_2 \in G_1$. Функция $(\eta(s_2)P_1)(\eta(s_2)P_2)$ принадлежит $\mathfrak{p}$. Функция $Q_0(\eta(s_2)P_2)$ не равна нулю в точке I, а произведение этой функции на $\eta(s_2)P_1$ принадлежит идеалу $\mathfrak{a}$, согласно определению идеала $\mathfrak{p}$. Следовательно, $\eta(s_2)P_1 \in \mathfrak{p}$. Но тогда и $P_1 = \eta(s_2^{-1})(\eta(s_2)P_1)$ принадлежит $\mathfrak{p}$. Этим доказано, что $\mathfrak{p}$ — простой идеал и G_1 — неприводимая группа.

Пусть $\mathfrak{q}$ — идеал, порожденный в алгебре $\mathfrak{o}(\mathfrak{G})$ всеми функциями вида $\eta(t^{-1})Q_0$, где t пробегает элементы группы G. Идеал $\mathfrak{q}$ обладает конечной системой образующих $\{M_1, \ldots, M_k\}$. Положим $M_i = \sum_{j=1}^{k'} A_{ij}(\eta(t_j^{-1})Q_0)$, где $A_{ij} \in \mathfrak{o}(\mathfrak{G})$, а $t_1, \ldots, t_{k'}$ — точки группы G. Так как $Q_0(I) \neq 0$, то функция $\eta(t^{-1})Q_0$ не равна нулю в точке t. Следовательно, ни в одной точке группы G все функции из идеала $\mathfrak{q}$ не могут быть одновременно равны нулю. Значит, в каждой точке группы G по крайней мере одна из функций $M_1, \ldots, M_k$ не равна нулю, так что для $t \in G$ не равен нулю по меньшей мере один из элементов $Q_0(t_j^{-1}t)$. Но, как мы видели выше, всякая точка группы G, в которой Q_0 не равна нулю, принадлежит группе G_1. Отсюда следует, что любая точка группы G принадлежит по меньшей мере одному из классов t_jG_1 $(1 \leqslant j \leqslant k')$, так что группа G_1 — конечного индекса в группе G.

Пусть, наоборот, G_1' — неприводимая алгебраическая подгруппа конечного индекса группы G, и пусть $\mathfrak{p}'$ — соответствующий группе G_1' идеал. Очевидно, что $\mathfrak{p}'$ содержит $\mathfrak{a}$, но не содержит Q_0 (так как $Q_0(I) \neq 0$). Если $P \in \mathfrak{p}$, то $PQ_0 \in \mathfrak{a}$, так что $PQ_0 \in \mathfrak{p}'$ и, следовательно, $P \in \mathfrak{p}'$, поскольку $\mathfrak{p}'$ — простой идеал. Таким образом, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$. Пусть теперь $G_1', t_1'G_1', \ldots$ $\ldots, t_m'G_1'$ — все различные правые классы группы G по подгруппе G_1'. Для $1 \leqslant j \leqslant m$ точка t_j' не принадлежит группе G_1', и поэтому существует функция $Q_j' \in \mathfrak{p}'$, такая, что $Q_j'(t_j') \neq 0$. Пусть Q' — произведение всех функций $\eta\left(t_j'^{-1}\right) Q_j'$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$; тогда, с одной стороны, $Q'(I) \neq 0$, а с другой — Q' обращается в нуль на всех множествах $t_j'G_1'$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Пусть P' — элемент идеала $\mathfrak{p}'$; так как P' равен нулю на G_1', то $P'Q'$ равен нулю на G. Из определения идеала $\mathfrak{p}$ следует, что $P' \in \mathfrak{p}$. Таким образом, $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$, так что $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ и $G_1' = G_1$.

Пусть s_0 — любой элемент группы G. Если P — некоторый элемент алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, то функция

$$P'\colon \quad s \to P(s_0 s s_0^{-1}),$$

очевидно, есть полиномиальная функция на $\mathfrak{E}$ и ясно, что отображение $P \to P'$ является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$. Этот автоморфизм переводит идеал $\mathfrak{p}$ в простой идеал $\mathfrak{p}'$, соответствующий подгруппе $s_0^{-1}G_1s_0$, и, наоборот, все точки группы G, в которых обращаются в нуль все функции из $\mathfrak{p}'$, принадлежат группе $s_0^{-1}G_1s_0$. Таким образом, $s_0^{-1}G_1s_0$ — алгебраическая неприводимая подгруппа конечного индекса группы G и, следовательно, совпадает с подгруппой G_1. Это показывает, что G_1 — нормальный делитель группы G.

Определение 2. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Неприводимая подгруппа G_1 конечного индекса группы G называется алгебраической компонентой единицы группы G, а классы смежности группы G по нормальному делителю G_1 называются алгебраическими компонентами группы G.*

Предложение 1. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов векторного пространства V, и пусть основное поле K пространства V будет или полем вещественных, или полем комплексных чисел. Алгебраическая компонента G_1 единицы группы G содержит тогда связную компоненту единицы G_0 (в смысле естественной топологии пространства $\mathfrak{E}$).*

Всякая алгебраическая группа является, очевидно, замкнутой подгруппой группы $\mathrm{GL}(V)$ всех автоморфизмов пространства V. Отсюда вытекает, что G_1 — замкнутая подгруппа группы G и что всякий класс группы G по подгруппе G_1 замкнут в G. Так как G_1 — подгруппа конечного индекса, то она является дополнением в G объединения конечного числа замкнутых множеств. Это показывает, что G_1 — не только замкнутая, но и открытая подгруппа, откуда непосредственно следует, что она содержит группу G_0.

Если K — поле вещественных чисел, то возможен случай $G_1 \neq G_0$. Примером может служить $G = \mathrm{GL}(V)$. Действительно, группе $\mathrm{GL}(V)$ соответствует нулевой идеал, и так как этот идеал простой, то в этом случае имеем $G_1 = G$. С другой стороны, известно, что G_0 — это группа автоморфизмов с определителем > 0.

Напротив, в случае, когда K — поле комплексных чисел, можно доказать, что $G_0 = G_1$.

Предложение 2. *Пусть V' и V — конечномерные векторные пространства над одним и тем же основным полем. Пусть G и G' — алгебраические неприводимые группы автоморфизмов пространств V и V' соответственно. Тогда алгебраическая группа $G \times G'$ автоморфизмов пространства $V \times V'$ неприводима.*

Утверждение предложения 2 легко вытекает из следующей леммы:

Лемма 1. *При таких же обозначениях, как в лемме 2 § 1, предположим, что идеалы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ — простые; тогда и $\mathfrak{m}$ — простой идеал.*

Пусть M и M' — элементы алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')$, такие, что $MM' \in \mathfrak{m}$, а $M' \notin \mathfrak{m}$. Для элемента M используем те же обозначения, что и в доказательстве леммы 2 § 1. Для некоторой точки (s_0, s'_0) из $E \times E'$ имеем $M'(s_0, s'_0) \neq 0$. Полиномиальная функция $s \to M(s, s'_0) M'(s, s'_0)$ обращается в нуль на множестве E, т. е. принадлежит идеалу $\mathfrak{a}$, между тем как функция $s \to M'(s, s'_0)$ этому идеалу не принадлежит. Отсюда следует, что если $(s_0, s'_0) \in E \times E'$ и $M'(s_0, s'_0) \neq 0$, то функция $\sum_{j=1}^{m'} U_j(s'_0) Q_j$ принадлежит идеалу $\mathfrak{a}$, так что $U_j(s'_0) = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m')$. Поэтому все полиномиальные функции $(s, s') \to \to U_j(s') M'(s, s')$ — элементы идеала $\mathfrak{m}$. Если теперь s_0 — любая точка множества E, то функция $s' \to U_j(s') M'(s_0, s')$ принадлежит идеалу $\mathfrak{a}'$. Но если (s_0, s'_0) — точка пространства $E \times E'$, в которой функция M' не равна нулю, то функция $s' \to M'(s_0, s')$ не содержится в $\mathfrak{a}'$. Отсюда заключаем, что функции U_j принадлежат $\mathfrak{a}'$, так что $M \in \mathfrak{m}$. Этим доказано, что $\mathfrak{m}$ — простой идеал.

Предложение 3. *Пусть G — группа автоморфизмов пространства V. Предположим, что G содержит алгебраическую подгруппу G_1 конечного индекса. Тогда G — алгебраическая группа.*

Действительно, пусть $\mathfrak{a}$ — идеал, соответствующий группе G, и пусть s — автоморфизм пространства V, такой, что $P(s) = 0$ для всех $P \in \mathfrak{a}$. Покажем, что $s \in G$. Пусть $t_1 G_1, \ldots, t_m G_1$ — правые классы группы G по подгруппе G_1. Если s не принадлежит группе G, то ни один из элементов $t_i^{-1}s$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ не содержится в G_1 и для каждого i существует полиномиальная функция P_i, равная нулю на G_1 и такая, что $P_i(t_i^{-1}s) \neq 0$. Положим $P = \prod_{i=1}^{m} \eta(t_i^{-1}) P_i$. Тогда ясно, что P обращается в нуль на группе G, но $P(s) \neq 0$, что невозможно. Это противоречие доказывает предложение 3.

Следствие. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть G_1 — алгебраическая компонента единицы группы G. Для того чтобы подгруппа H группы G была алгебраической группой, необходимо* *и достаточно, чтобы пересечение $H \cap G_1$ было алгебраической группой.*

Это утверждение непосредственно вытекает из предложения 3.

§ 4. Рациональные функции

Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть $\mathfrak{a}$ — соответствующий ей идеал алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$. Функции, определенные на G, со значениями в поле K, которые являются ограничениями на множество G полиномиальных функций над пространством $\mathfrak{E}$, мы будем называть *полиномиальными функциями на* G. Они, очевидно, образуют кольцо, изоморфное фактор-кольцу $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})/\mathfrak{a}$, с которым мы его и отождествим, отождествив каждый класс кольца $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}) \bmod \mathfrak{a}$ с функцией на G, индуцированной любым представителем этого класса. Кольцо полиномиальных функций на группе G мы обозначим через $\mathfrak{o}(G)$. Это кольцо является также алгеброй над K.

Предложение 1. *Пусть V' и V — конечномерные пространства над одним и тем же полем K. Пусть G и G' — алгебраические группы автоморфизмов пространств V и V' соответственно. Тогда существует изоморфизм тензорного произведения $\mathfrak{o}(G) \otimes \mathfrak{o}(G')$ алгебр полиномиальных функций соответственно над группами G и G' на алгебру $\mathfrak{o}(G \times G')$, который отображает элемент $P \otimes P'$ ($P \in \mathfrak{o}(G)$, $P' \in \mathfrak{o}(G')$) в функцию $(s, s') \to P(s)P'(s')$ (где $s \in G$ и $s' \in G'$).*

При доказательстве этого предложения мы будем пользоваться обозначениями леммы 2 из § 1, заменив только множества E и E' группами G и G' соответственно. Кольцо $\mathfrak{o}(G \times G')$ можно, очевидно, отождествить с фактор-кольцом $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')/\mathfrak{m}$ (при этом можно использовать рассмотрения, предшествующие формулировке леммы 2). С другой стороны, алгебра $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')$ была отождествлена с $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}) \otimes \mathfrak{o}(\mathfrak{E}')$, а идеал $\mathfrak{m}$ с $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{o}(\mathfrak{E}') + \mathfrak{o}(\mathfrak{E}) \otimes \mathfrak{a}'$. Теперь можно воспользоваться одним предложением Бурбаки (Алгебра, гл. III, § 3, n°1, предложение 1), устанавливающим изоморфизм алгебры $(\mathfrak{o}(\mathfrak{E})/\mathfrak{a}) \otimes (\mathfrak{o}(\mathfrak{E}')/\mathfrak{a}')$, т. е. алгебры $\mathfrak{o}(G) \otimes \mathfrak{o}(G')$, на алгебру $\mathfrak{o}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}')/\mathfrak{m}$, т. е. на $\mathfrak{o}(G \times G')$. Легко убедиться, что этот изоморфизм обладает требуемыми свойствами.

В случае, когда G — неприводимая группа, кольцо $\mathfrak{o}(G)$ не имеет отличных от 0 делителей нуля и может быть, следовательно, погружено в поле отношений $\mathfrak{R}$. Нижеследующим образом каждому элементу R из $\mathfrak{R}$ мы сопоставим отображение некоторого подмножества E группы G в поле K. Пусть s — элемент группы G; мы будем говорить, что элемент R *определен в точке* s, если он представим в виде PQ^{-1}, где P и Q — элементы из $\mathfrak{o}(G)$ и $Q(s) \neq 0$. В этом случае элемент $P(s)(Q(s))^{-1}$ не зависит от выбранного представления элемента R. Действительно, если $R = P_1 Q_1^{-1}$, где P_1 и Q_1 — элементы из $\mathfrak{o}(G)$ и $Q_1(s) \neq 0$, то $PQ_1 = QP_1$, так что

$$P(s)(Q(s))^{-1} = P_1(s)(Q_1(s))^{-1}.$$

Элемент $P(s)(Q(s))^{-1}$ мы будем называть *значением элемента* R *в точке* s и обозначать $R(s)$. Отображение ρ некоторого подмножества E группы G в поле K будем называть *рациональной функцией на группе* G, если существует элемент $R \in \mathfrak{R}$, такой, что E является совокупностью точек, на которых элемент R определен, и $R(s) = \rho(s)$ для всех $s \in E$. Как мы скоро докажем, в этом случае R определен однозначно.

Определение 1. *Подмножество A неприводимой группы G мы будем называть областью единственности, если всякая полиномиальная функция на G, равная нулю на множестве A, тождественно равна нулю на всей группе G; мы будем говорить, что подмножество E группы G алгебраически плотно, если существует полиномиальная функция на G, не равная тождественно нулю, но обращающаяся в нуль во всех точках дополнения к E в G.*

Пересечение конечного числа алгебраически плотных подмножеств группы G само алгебраически плотно (доказательство такое же, как доказательство леммы 2 § 4 гл. I). Пересечение алгебраически плотного подмножества E и области единственности A является областью единственности. Действительно, пусть Q — полиномиальная функция $\neq 0$ на G, обращающаяся в нуль на дополнении к E, и пусть P — полиномиальная функция, равная нулю на $E \cap A$. Функция PQ равна тождественно нулю на A, так что $PQ = 0$. Так как $\mathfrak{o}(G)$ — кольцо без делителей нуля, то $P = 0$. Последнее утверждение показывает, что всякое алгебраически плотное подмножество группы G является областью единственности. Множество точек группы G, на котором определен некоторый элемент R из $\mathfrak{R}$, очевидно, алгебраически плотно. Отсюда заключаем, что если A — область единственности, а $R_1, \ldots, R_h$ — элементы из $\mathfrak{R}$, то совокупность всех точек из A, на которых все элементы $R_1, \ldots, R_h$ определены, образует область единственности.

Если два элемента R и R' из $\mathfrak{R}$ принимают одинаковые значения во всех точках некоторой области единственности A, на которой они оба определены, то $R = R'$. Действительно, положим $R = PQ^{-1}$, $R' = P'Q'^{-1}$, где P, Q, P', Q' — полиномиальные функции на G и, конечно, $Q \neq 0$, $Q' \neq 0$. Тогда функция $QQ'(PQ' - QP')$ обращается в нуль на A и поэтому равна нулю, так что $PQ' - QP' = 0$ и $R = R'$.

Из сказанного вытекает, что между элементами поля $\mathfrak{R}$ и рациональными функциями на группе G, определяемыми этими элементами, существует взаимно однозначное соответствие. *В дальнейшем мы отождествим поле $\mathfrak{R}$ с множеством рациональных функций на группе G и будем называть $\mathfrak{R}$ полем рациональных функций на G.*

Непосредственно видно, что если s — любой элемент группы G, то множество рациональных функций, определенных в точке s, является подкольцом поля $\mathfrak{R}$.

Пусть $\tilde{R}$ — рациональная функция над пространством $\mathfrak{E}$. Предположим, что $\tilde{R}$ определена в точке $s_0 \in G$. Тогда множество E точек из G, в которых определена функция $\tilde{R}$, алгебраически плотно, и существует одна и только одна рациональная функция R на G, которая определена на множестве E и совпадает на этом множестве с функцией $\tilde{R}$. Действительно, положим $\tilde{R} = \tilde{P}\tilde{Q}^{-1}$, где $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ принадлежат $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ и $\tilde{Q}(s_0) \neq 0$. Пусть P и Q — функции, индуцированные функциями $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ на G; тогда $Q(s_0) \neq 0$, так что $Q \neq 0$. Рациональная функция $R_0 = PQ^{-1}$ определена на множестве E_0 всех точек из G, в которых функция Q не равна нулю, и $R_0(s) = R(s)$ для всех $s \in E_0$. Имеет место включение $E_0 \subset E$, которое показывает, что множество E алгебраически плотно. Для любой точки s_1 из E аналогичным образом можно убедиться, что существует алгебраически плотное подмножество E_1, $E_1 \subset E$, группы G, содержащее точку s_1, и рациональная функция R_1 на G, определенная на множестве E_1 и принимающая во всех точках этого множества те же значения, что и функция R. Во всех точках s множества $E_0 \cap E_1$ имеет место равенство $R_0(s) = R_1(s)$; так как пересечение $E_0 \cap E_1$ алгебраически плотно, то $R_0 = R_1$. Отсюда следует, что функция R_0 определена во всех точках множества E и принимает в них те же значения, что и функция $\tilde{R}$; очевидно, существует только одна рациональная функция R на G, удовлетворяющая этому условию. Важно отметить, что функция R может быть определена в точках группы G, в которых функция $\tilde{R}$ не определена. Так, например, может случиться, что $R = 0$, между тем как функция $\tilde{R}$ не определена во всех точках группы G. Мы будем называть функцию R *следом на группе* G рациональной функции $\tilde{R}$ на $\mathfrak{E}$. Если $\tilde{R}$ и $\tilde{S}$ — рациональные функции над пространством $\mathfrak{E}$, которые одновременно определены по крайней мере в одной общей точке s_0 группы G, и если R и S — следы этих функций на группе G, то следами на группе G функций $\tilde{R}+\tilde{S}$, $\tilde{R}\tilde{S}$ и (в случае $\tilde{S}(s_0) \neq 0$) $\tilde{S}^{-1}$ соответственно будут $R+S$, RS и S^{-1}. Предположим теперь, что нам дана рациональная функция R на группе G, и пусть s — точка группы G, в которой функция R определена. Тогда существует рациональная функция $\tilde{R}$ на $\mathfrak{E}$, определенная в s, для которой функция R является следом. Действительно, представим функцию R в виде $R = PQ^{-1}$, где P и Q — полиномиальные функции на G и $Q(s) \neq 0$. Пусть $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ — полиномиальные функции на $\mathfrak{E}$, для которых P и Q являются ограничениями на G. Функция $\tilde{R} = \tilde{P}\tilde{Q}^{-1}$ обладает требуемыми свойствами.

Пусть опять G — неприводимая группа и $\mathfrak{a}$ — соответствующий ей идеал. Если s — элемент группы G, то автоморфизм $\eta(s)$ кольца $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ отображает идеал $\mathfrak{a}$ на себя и определяет (при переходе в фактор-кольцо) автоморфизм алгебры $\mathfrak{o}(G) = \mathfrak{o}(\mathfrak{E})/\mathfrak{a}$, который мы опять обозначим через $\eta(s)$. Этот автоморфизм продолжается однозначным образом в автоморфизм поля $\mathfrak{R}$ рациональных функций на G; и этот продолженный автоморфизм мы обозначим через $\eta(s)$. Если $R \in \mathfrak{R}$, то для того, чтобы функция $\eta(s)R$ была определена в точке t группы G, достаточно [1]), чтобы функция R была определена в точке st, и тогда $(\eta(s)R)(t) = R(st)$. Легко видеть, что для элементов s и s' группы G выполняются равенства $\eta(ss') = \eta(s') \circ \eta(s)$ и $(\eta(s))^{-1} = \eta(s^{-1})$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть V' — конечномерное векторное пространство над полем K, и пусть G и G' — неприводимые алгебраические группы автоморфизмов пространств*

[1]) Как будет показано ниже, это условие также необходимо.

V и V' соответственно. Пусть $\mathfrak{R}(G)$, $\mathfrak{R}(G')$ и $\mathfrak{R}(G \times G')$ — поля рациональных функций соответственно на группах G, G' и $G \times G'$. Тогда существует изоморфизм φ тензорного произведения $\mathfrak{R}(G) \otimes \mathfrak{R}(G')$ полей $\mathfrak{R}(G)$ и $\mathfrak{R}(G')$, рассматриваемых как алгебры над полем K, на некоторое подкольцо поля $\mathfrak{R}(G \times G')$, обладающий следующими свойствами:

1) *$\mathfrak{R}(G \times G')$ является полем отношений кольца $\varphi(\mathfrak{R}(G) \otimes \mathfrak{R}(G'))$;*

2) *если $R \in \mathfrak{R}(G)$, $R' \in \mathfrak{R}(G')$ и если (s, s') — точка группы $G \times G'$, такая, что R определена в точке s, а R' — в точке s', то функция $\varphi(R \otimes R')$ определена в точке (s, s') и принимает в ней значение $R(s) R'(s')$.*

Мы будем пользоваться обозначениями предложения 1. Из этого предложения следует существование изоморфизма φ_0 алгебры $\mathfrak{o}(G) \otimes \mathfrak{o}(G')$ на $\mathfrak{o}(G \times G')$, при котором $\varphi_0(P \otimes P')$ является функцией $(s, s') \to P(s) P'(s')$ [для $P \in \mathfrak{o}(G)$ и $P' \in \mathfrak{o}(G')$]. Так как $\mathfrak{o}(G \times G')$ содержится в поле $\mathfrak{R}(G \times G')$, то это кольцо не имеет нетривиальных делителей нуля. Следовательно, и $\mathfrak{o}(G) \otimes \mathfrak{o}(G')$ — кольцо без делителей нуля. Ясно, что $\mathfrak{o}(G) \otimes \mathfrak{o}(G')$ — подкольцо кольца $\mathfrak{R}(G) \otimes \mathfrak{R}(G')$ и что $\mathfrak{R}(G) \otimes \mathfrak{R}(G')$ содержится в поле отношений кольца $\mathfrak{o}(G) \otimes \mathfrak{o}(G')$. Следовательно, изоморфизм φ_0 можно продолжить в изоморфизм φ кольца $\mathfrak{R}(G) \otimes \mathfrak{R}(G')$ на некоторое подкольцо поля $\mathfrak{R}(G \times G')$. Предположим теперь, что $R \in \mathfrak{R}(G)$, $R' \in \mathfrak{R}(G')$ и что функция R определена в точке s, а R' — в точке s'. Положим $R = PQ^{-1}$, $R' = P'Q'^{-1}$, где P, Q принадлежат $\mathfrak{o}(G)$, P', Q' принадлежат $\mathfrak{o}(G')$ и $Q(s) \neq 0$, $Q'(s') \neq 0$. Тогда

$$\varphi(R \otimes R') = \varphi(P \otimes P')(\varphi(Q \otimes Q'))^{-1}$$

и $\varphi(Q \otimes Q')$ принимает значение $Q(s) Q'(s') \neq 0$ в точке (s, s'). Отсюда следует, что функция $\varphi(R \otimes R')$ определена в точке (s, s'), и так как в точке (s, s') функция $\varphi(P \otimes P')$ принимает значение $P(s) P'(s')$, то $\varphi(R \otimes R')$ принимает в ней значение $R(s) R'(s')$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — векторное пространство над основным полем K пространства V. Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, $\mathfrak{R}$ — поле рациональных функций на G и $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{F}$ — тензорное произведение векторных пространств $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{F}$ над K. Каждому элементу $R \in \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{F}$ мы сопоставим нижеследующим образом отображение некоторого подмножества группы G в пространство $\mathfrak{F}$. Для $s \in G$ пусть $\mathfrak{R}_s$ — множество рациональных функций на G, определенных в точке s; мы будем говорить, что функция R определена в точке s, если она принадлежит $\mathfrak{R}_s \otimes \mathfrak{F}$. Отображение $(H, u) \to H(s)u$ — билинейное отображение произведения $\mathfrak{R}_s \times \mathfrak{F}$ в $\mathfrak{F}$; оно определяет линейное отображение пространства $\mathfrak{R}_s \otimes \mathfrak{F}$ в $\mathfrak{F}$. Если элемент R определен в точке s, то его образ при этом отображении мы обозначим через $R(s)$ и будем говорить, что $R(s)$ — значение элемента R в точке s. Отображение ρ некоторого подмножества E группы G в пространство $\mathfrak{F}$ мы будем называть *рациональным отображением*, если существует элемент $R \in \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{F}$, такой, что E состоит из всех точек s группы G, в которых элемент R определен, и $R(s) = \rho(s)$ для всех $s \in E$.

Лемма 1. *Множество точек группы G, на котором определен некоторый заданный элемент R из $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{F}$, алгебраически плотно.*

Действительно, R можно представить в виде конечной суммы $\sum_{i=1}^{h} H_i \otimes u_i$, где $H_i \in \mathfrak{R}$, $u_i \in \mathfrak{F}$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$; ясно, что элемент R определен во всех точках группы G, в которых одновременно определены все функции H_i.

Лемма 2. *Пусть A — область единственности группы G, и пусть R и R' — элементы из $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{F}$, такие, что $R(s) = R'(s)$ во всех точках s множества A', $A' \subset A$, на котором одновременно определены отображения R и R'. Тогда $R = R'$.*

Множество точек группы G, в которых определены одновременно R и R', является пересечением двух алгебраически плотных подмножеств (лемма 1), и поэтому само алгебраически плотно. Отсюда следует, что A' — область единственности (как было показано выше). Пусть $(u_i)_{i \in I}$ — базис пространства $\mathfrak{F}$; положим

$$R = \sum_{i \in I} R_i \otimes u_i, \qquad R' = \sum_{i \in I} R'_i \otimes u_i,$$

где R_i и R'_i — рациональные функции на G. Для каждого i функции R_i и R'_i определены во всех точках $s \in A'$ и принимают в них одинаковые значения, так что $R_i = R'_i$ и, следовательно, $R = R'$.

Мы видим, что между элементами пространства $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{F}$ и определяемыми ими рациональными отображениями группы G

в пространство $\mathfrak{F}$ имеется взаимно однозначное соответствие. *В дальнейшем мы будем отождествлять множество $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{F}$ с множеством рациональных отображений группы G в пространство $\mathfrak{F}$.*

Пусть $\tilde{R}$ — рациональное отображение пространства $\mathfrak{E}$ в пространство $\mathfrak{F}$, определенное по крайней мере в одной точке группы G. Множество E точек группы G, в которых определено $\tilde{R}$, алгебраически плотно, и существует одно и только одно рациональное отображение R группы G в $\mathfrak{F}$, определенное во всех точках множества E и принимающее в них те же значения, что и $\tilde{R}$. Действительно, пусть $(u_i)_{i \in I}$ — базис пространства $\mathfrak{F}$. Положим $\tilde{R} = \sum_{i \in I} \tilde{R}_i \otimes u_i$, где $\tilde{R}_i$ — рациональные функции на $\mathfrak{E}$. Существует точка группы G, в которой определены все функции $\tilde{R}_i$. Для каждого i обозначим через R_i след функции $\tilde{R}_i$ на группе G, и пусть E_i — множество всех точек группы G, в которых функция $\tilde{R}_i$ определена. Тогда $E = \bigcap_{i \in I} E_i$. Но $\tilde{R}_i \neq 0$ только для конечного числа индексов i, а если $\tilde{R}_i = 0$, то $E_i = G$. Отсюда следует, что множество E алгебраически плотно. Положим $R = \sum_{i \in I} R_i \otimes u_i$; отображение R определено и совпадает с $\tilde{R}$ во всех точках множества E. Так как E алгебраически плотно, то этими условиями отображение R однозначно определено.

Определение 2. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть $\tilde{R}$ — рациональное отображение пространства $\mathfrak{E}$ в пространство $\mathfrak{F}$ над полем K. Предположим, что $\tilde{R}$ определено по крайней мере в одной точке группы G. Рациональное отображение R группы G в пространство $\mathfrak{F}$, определенное во всех точках группы G, в которых определено отображение $\tilde{R}$, и совпадающее в этих точках с R, называется следом отображения $\tilde{R}$ на группе G.*

Для того чтобы отображение R было следом отображения $\tilde{R}$, очевидно, достаточно, чтобы существовала область единственности A в группе G, такая, что $R(s) = \tilde{R}(s)$ во всех точках $s \in A$, в которых одновременно определены R и $\tilde{R}$.

Если R и S — следы рациональных отображений $\tilde{R}$ и $\tilde{S}$ пространства $\mathfrak{E}$ в пространство $\mathfrak{F}$ и если a и b — элементы поля K, то $aR+bS$ — след отображения $a\tilde{R}+b\tilde{S}$. Если R — рациональное отображение группы G в пространство $\mathfrak{F}$ и s — точка из G, в которой отображение R определено, то существует рациональное отображение $\tilde{R}$ пространства $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{F}$, определенное в точке s, для которого отображение R является следом. Это утверждение легко вытекает из аналогичного утверждения относительно рациональных функций.

Заметим, что пространство $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{F}$ можно рассматривать как векторное пространство над полем $\mathfrak{R}$ (это векторное пространство над полем $\mathfrak{R}$, получающееся из пространства $\mathfrak{F}$ расширением основного поля). Если $S \in \mathfrak{R}$ и $R \in \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{F}$, то можно, следовательно, говорить о произведении рациональной функции S на рациональное отображение R. Для всех точек s группы G, в которых одновременно определены S и R, имеет место равенство $(SR)(s) = S(s)R(s)$. Если S — след на G рациональной функции $\tilde{S}$ на $\mathfrak{E}$, а R — след на G рационального отображения $\tilde{R}$ пространства $\mathfrak{E}$ в пространство $\mathfrak{F}$, то SR — след на G отображения $\tilde{S}\tilde{R}$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F}$ — пространство эндоморфизмов конечномерного векторного пространства U над полем K. На пространстве $\mathfrak{F}$ определена тогда структура ассоциативной алгебры над полем K; структура ассоциативной алгебры определена тогда также и на пространстве $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{F}$, которое является тензорным произведением двух ассоциативных алгебр над полем K. В этом случае мы можем говорить о произведении RR' двух рациональных отображений R и R' группы G в пространство $\mathfrak{F}$. Легко убедиться, что если s — точка группы G, в которой одновременно определены R и R', то и произведение RR' определено в точке s и принимает в ней значение $R(s)R'(s)$. В то же время произведение RR' может быть определено в точках, в которых отображения R и R' не определены одновременно.

Предположим опять, что $\mathfrak{F}$ — пространство эндоморфизмов пространства U, и пусть H — алгебраическая группа автоморфизмов пространства U. Будем называть рациональным отображением группы G в группу H рациональное отображение R группы G в $\mathfrak{F}$, такое, что $R(s) \in H$ для всех точек $s \in G$, в которых отображение R определено. Предположим, что группа H неприводима. Пусть R — рациональное отображение группы G в группу H, а S — рациональное отображение группы H

в векторное пространство $\mathfrak{G}$ над K. *Если множество E точек $s \in G$, таких, что R определено в s, а S — в $R(s)$, не пусто, то E — алгебраически плотное подмножество группы G и существует одно и только одно отображение M группы G в пространство $\mathfrak{G}$, такое, что $M(s) = S(R(s))$ для всех $s \in E$.* Действительно, пусть s_0 — точка из E. Существует рациональное отображение $\tilde{R}$ пространства $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{F}$, определенное в точке s_0 и такое, что R является следом отображения $\tilde{R}$ на G, и существует рациональное отображение $\tilde{S}$ пространства $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{G}$, определенное в точке $R(s_0) = \tilde{R}(s_0)$, следом которого на группе H является отображение S. Но тогда существует и композиция $\tilde{M} = \tilde{S} \circ \tilde{R}$, обладающая следом M_{s_0} на G (так как она определена в точке s_0). Можно найти полиномиальную функцию $\tilde{P}$ на $\mathfrak{E}$, не равную нулю в точке s_0, такую, что если $\tilde{P}(s) \neq 0$ для $s \in \mathfrak{E}$, то отображения $\tilde{R}(s)$ и $\tilde{S}(\tilde{R}(s))$ одновременно определены (гл. 1, § 4, лемма 6). Множество E_{s_0} точек $s \in G$, для которых $\tilde{P}(s) \neq 0$, алгебраически плотно, и для $s \in E_{s_0}$ имеем $s \in E$ и $M_{s_0}(s) = S(R(s))$.

Мы видим, что для заданной точки $s_0 \in E$ существуют алгебраически плотное подмножество E_{s_0} группы G, содержащееся в E и содержащее точку s_0, и рациональное отображение M_{s_0} группы G в $\mathfrak{G}$, такие, что

$$M_{s_0}(s) = S(R(s))$$

для всех $s \in E_{s_0}$. Из леммы 2 следует, что все отображения M_{s_0} совпадают друг с другом, что и доказывает наше утверждение. Если множество E непусто, то мы будем говорить, что *композиция отображений S и R существует* и равняется M, и писать $M = S \circ R$. Ясно, что композиция $S \circ R$ существует, если S определено во всех точках группы H, а также если образ G при отображении R является областью единственности в H (так как пересечение области единственности и алгебраически плотного подмножества никогда не пусто).

Если G — неприводимая алгебраическая группа, то $s \to s^{-1}$ — рациональное отображение группы G в себя, определенное на всей группе G.

Действительно, пусть (u_{ij}) — система координатных функций на $\mathfrak{E}$. Обозначим через $D(s)$ определитель элемента $s \in G$. D — полиномиальная функция над $\mathfrak{E}$, не равная 0 ни в одной точке группы G, и функции $s \to D(s) u_{ij}(s^{-1})$ — полиномиальные функции. Это доказывает наше утверждение.

Пусть R — рациональное отображение группы G в векторное пространство $\mathfrak{F}$. Выполняя последовательно отображения $s \to s^{-1}$ и R, мы получаем новое рациональное отображение R' группы G в $\mathfrak{F}$. Отображение R' определено в точке $s \in G$, если R определено в точке s^{-1} и $R'(s) = R(s^{-1})$. Мы можем вновь применить ту же операцию к отображению R'; при этом мы получим рациональное отображение, определенное в тех же точках, что и R, и принимающее в них те же значения, т. е. это новое отображение совпадает с R. Отсюда мы заключаем, что область определения отображения R' состоит как раз из обратных элементов области определения отображения R.

Пусть s_0 — точка группы G. Построим композицию (очевидно, рационального) отображения $t \to s_0 t$ группы G на себя и некоторого данного рационального отображения R группы G в векторное пространство $\mathfrak{F}$. Обозначим эту композицию через R_{s_0}. Если $t \in G$ — такая точка группы G, что R определено в точке $s_0 t$, то R_{s_0} определена в точке t и принимает в ней значение $R(s_0 t)$. Отображение R_{s_0} можно определить и иным образом. Несколько выше мы сопоставили элементу $s_0 \in G$ автоморфизм $\eta(s_0)$ поля $\mathfrak{R}$ рациональных функций на G. Пространством рациональных отображений группы G в пространство $\mathfrak{F}$ является тензорное произведение $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{F}$. Определим линейное отображение этого пространства в себя как тензорное произведение отображения $\eta(s_0)$ поля $\mathfrak{R}$ в себя и тождественного отображения пространства $\mathfrak{F}$; это линейное отображение мы вновь обозначим через $\eta(s_0)$. Тогда оказывается, что $R_{s_0} = \eta(s_0) R$. Действительно, запишем R в виде $\sum_{i=1}^{h} T_i \otimes u_i$, где $T_i \in \mathfrak{R}$, а u_i — линейно независимые элементы из $\mathfrak{F}$; тогда

$$\eta(s_0) R = \sum_{i=1}^{h} \eta(s_0) T_i \otimes u_i.$$

Если отображение R определено в точке $s_0 t$, то в ней также определены функции T_i; тогда функция $\eta(s_0) T_i$ определена в точке t и принимает в ней значение $T_i(s_0 t)$. Это показывает, что $\eta(s_0) R$ определено в точке t и принимает в ней значение $R(s_0 t)$, так что $\eta(s_0) R = R_{s_0}$. Отображения $\eta(s)$ пространства $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{F}$ в себя, как легко видеть, удовлетворяют условиям

$$\eta(ss') = \eta(s') \circ \eta(s), \qquad \eta(s^{-1}) = (\eta(s))^{-1}$$

(для s и s' из G). В частности, $R = \eta(s_0^{-1})(\eta(s_0)R)$; отсюда вытекает, что для того, чтобы $\eta(s_0)R$ было определено в точке t, не только достаточно, но и необходимо, чтобы отображение R было определено в точке s_0t.

Если G — неприводимая группа, то $(s, t) \to st$ — рациональное отображение группы $G \times G$ в группу G. Действительно, если (u_{ij}) — система координатных функций для $\mathfrak{G}$, то координаты элемента st могут быть выражены в виде полиномов от координат элементов s и t. Последовательно применяя отображение $(s, t) \to st$ и некоторое заданное отображение R группы G в пространство $\mathfrak{F}$, мы получаем рациональное отображение M группы $G \times G$ в $\mathfrak{F}$. Если (s_0, t_0) — такая точка группы $G \times G$, что отображение R определено в точке s_0t_0, то M определено в точке (s_0, t_0) и $M(s_0, t_0) = R(s_0t_0)$. Обратно, если M определено в (s_0, t_0), то R определено в s_0t_0. Действительно, построим композицию (рационального) отображения $t \to (s_0, t)$ группы G в $G \times G$ и отображения M. В результате получим рациональное отображение R_0 группы G в пространство $\mathfrak{F}$. Если $t \in G$ — такой элемент группы G, что R определено в точке s_0t, то R_0 определено в точке t и принимает в ней значение $R(s_0t)$, так что $R_0 = \eta(s_0)R$. С другой стороны, R_0 определено в точке t_0; как было показано выше, отсюда следует, что R определено в точке s_0t_0.

Лемма 3. *Пусть E — алгебраически плотное подмножество (соответственно область единственности) неприводимой алгебраической группы G. Если $s_0 \in G$, то s_0E — алгебраически плотное подмножество (соответственно область единственности) группы G. Множество E^{-1} обратных элементов множества E — также алгебраически плотное подмножество (соответственно область единственности) в G.*

Если E — алгебраически плотное подмножество, то пусть Q — полиномиальная функция $\neq 0$, обращающаяся в нуль на дополнении множества E в G. Функция $\eta(s_0^{-1})Q$ равна нулю на дополнении к множеству s_0E и, очевидно, $\neq 0$. Применив последовательно отображение $s \to s^{-1}$ группы G на себя и отображение Q, мы получим рациональную всюду определенную функцию R, равную нулю на дополнении к E^{-1}; кроме того, $R \neq 0$. Множество E^{-1} содержит множество точек, в которых определена функция R^{-1}, что и показывает, что E^{-1} алгебраически плотно. Предположим теперь, что

E — область единственности. Пусть P — полиномиальная функция, равная нулю на множестве s_0E; тогда $\eta(s_0)P$ — функция, равная нулю на E, так что $\eta(s_0)P=0$ и $P=0$. Если Q — полиномиальная функция, обращающаяся в нуль на E^{-1}, то последовательное применение отображения $s\to s^{-1}$ и Q определяет рациональную функцию Q', равную нулю на E, так что $Q'=0$ (лемма 2) и, следовательно, $Q=0$.

Лемма 4. *Пусть E — алгебраически плотное подмножество неприводимой алгебраической группы G. Тогда каждый элемент из G представим в виде произведения двух элементов из E.*

Пусть s — элемент из G. Множество sE^{-1} алгебраически плотно (лемма 3) и имеет поэтому общий элемент s' с множеством E. Тогда для некоторого $t'\in E$ имеем $st'^{-1}=s'$, так что $s=s't'$.

Лемма 5. *Пусть V' — конечномерное векторное пространство над полем K. Пусть G и G' — неприводимые алгебраические группы автоморфизмов пространств V и V' соответственно. Пусть E и E' — алгебраически плотные подмножества (соответственно области единственности) групп G и G' соответственно. Тогда $E\times E'$ — алгебраически плотное подмножество (соответственно область единственности) группы $G\times G'$.*

Предположим, что E и E' — алгебраически плотные подмножества; пусть Q и Q' — полиномиальные функции $\neq 0$ на G и G', обращающиеся в нуль на дополнениях множеств E и E' в G и G' соответственно. Тогда $(s, s')\to Q(s)Q'(s')$ — полиномиальная функция $\neq 0$ на $G\times G'$, равная нулю на дополнении множества $E\times E'$. Предположим теперь, что E и E' — области единственности. Пусть M — полиномиальная функция на $G\times G'$, равная нулю на $E\times E'$. При $s_0'\in E'$ полиномиальная функция $s\to M(s, s_0')$ на G тождественно равна нулю на E, т. е. является нулевой функцией. Следовательно, для $s_0\in G$ полиномиальная функция $s'\to M(s_0, s')$ на G' обращается в нуль на E' и, значит, всюду. Отсюда заключаем, что $M=0$ и что $E\times E'$ — область единственности.

Лемма 6. *Пусть V' — конечномерное векторное пространство над полем K, и пусть G и G' — неприводимые* *алгебраические группы автоморфизмов пространств V и V' соответственно. Отображения $(s, s') \to s$ и $(s, s') \to s'$ группы $G \times G'$ в группы G и G' соответственно — рациональные отображения. Пусть R и R' — рациональные отображения групп G и G' в пространства $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ над полем K. Тогда существует одно и только одно отображение S группы $G \times G'$ в пространство $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}'$, определенное и принимающее значение $(R(s), R'(s'))$ во всякой точке $(s, s') \in G \times G'$, такой, что R определено в s, а R' — в s'.*

Из предложения 1 следует, что для полиномиальной функции P на G функция $(s, s') \to P(s)$ есть полиномиальная функция на $G \times G'$. Отсюда мы заключаем, что $(s, s') \to s$ — рациональное отображение, и аналогично убеждаемся, что отображение $(s, s') \to s'$ рационально. Наконец, рациональным является также отображение $u \to (u, 0)$ пространства $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}'$. Выполняя последовательно отображения $(s, s') \to s$ группы $G \times G'$ в группу G, отображение R и отображение $v \to (v, 0)$ пространства $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}'$, мы получаем рациональное отображение S_1 группы $G \times G'$ в пространство $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}'$, причем если R определено в точке s, то S_1' определено в точке (s, s') и принимает в ней значение $(R(s), 0)$. Аналогично строится рациональное отображение S_2 группы $G \times G'$ в пространство $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}'$, определенное в точках (s, s'), для которых R' определено в s', и принимающее в них значение $(0, R'(s'))$. Рациональное отображение $S = S_1 + S_2$ обладает требуемыми свойствами. Единственность этого отображения следует непосредственно из лемм 2 и 5.

При тех же обозначениях, что в лемме 6, отображение S называется *декартовым произведением отображений R и R'* и обозначается через $R \times R'$.

Определение 3. *Пусть U — конечномерное векторное пространство над полем K, $\mathfrak{F}$ — пространство эндоморфизмов пространства U, G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V и ρ — рациональное отображение группы G в пространство $\mathfrak{F}$. Мы будем называть отображение ρ рациональным представлением группы G, если выполнены следующие условия: ρ определено во всех точках группы G; $\rho(s)$ для каждого $s \in G$* есть *обратимый эндоморфизм пространства U; для s и t из G имеет место равенство $\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$.*

Лемма 7. *При тех же обозначениях, что и в определении 3, предположим, что выполнено одно из двух следующих условий:*

I. *Существует алгебраически плотное подмножество E группы G со следующими свойствами: отображение ρ определено на E; для $s \in E$ элемент $\rho(s)$ обратим; для s и t из E выполняется условие $\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$,*

II. *Существует область единственности A в группе G со следующими свойствами: A — подгруппа группы G; отображение ρ определено на A; $\rho(s)$ для $s \in A$ — обратимый эндоморфизм; $\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$ для s и t из A.*

Тогда ρ — рациональное представление.

Построим три композиции рациональных отображений группы $G \times G$ в пространство $\mathfrak{F}$, выполняя последовательно сначала одно из отображений $(s, t) \to st$, $(s, t) \to s$, $(s, t) \to t$ группы $G \times G$ в группу G, а затем отображение ρ. Обозначим эти композиции рациональных отображений соответственно через R_1, R_2, R_3. Предположим сначала, что выполняется условие I. Подмножества $E \times G$, $G \times E$ множества $G \times G$ алгебраически плотны (лемма 5). Плотным является также множество B точек (s, t), для которых $st \in E$. Действительно, если полиномиальная функция Q, отличная от 0 на G, равняется нулю на дополнении множества E, то полиномиальная функция $(s, t) \to Q(st)$ на $G \times G$ не равна нулю и обращается в нуль на дополнении множества B. Отсюда можно заключить, что множество $B_1 = B \cap (E \times G) \cap (G \times E)$ алгебраически плотно. Для $(s, t) \in B_1$ отображения R_1, R_2 и R_3 определены в точке (s, t) и $R_1(s, t) = R_2(s, t) R_3(s, t)$. Отсюда следует, что рациональные отображения R_1 и R_2R_3 группы $G \times G$ в пространство $\mathfrak{F}$ совпадают (лемма 2), так что отображение R_1 определено на множестве $E' \times E'$, где E' — множество точек, в которых определено отображение ρ. Но, как нам известно, если R_1 определено в точке (s, t), то ρ определено в точке st. Отсюда следует, что произведение двух элементов из E' в свою очередь принадлежит E', так что $E' = G$ (лемма 4). Формула $R_1 = R_2R_3$ показывает, что $\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$ для всех s и t из G. Таким образом, произведение двух элементов из E'', где E'' — множество элементов $s \in G$, для которых эндоморфизм $\rho(s)$ обратим, опять принадлежит E'', так что $E'' = G$. Этим доказано, что ρ — рациональное представление. Предположим теперь, что выполнено условие II. Отображения R_1 и R_2R_3 определены во всех точках множества $A \times A$ и принимают в них одинаковые значения. Но $A \times A$ — область единственности группы $G \times G$ (лемма 5), и, следовательно, отображения R_1 и R_2R_3 совпадают. Как и в первой части доказательства, отсюда мы заключаем, что отображение ρ определено всюду и что $\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$ для всех $(s, t) \in G \times G$. Для $s \in G$ имеем $\rho(s)\rho(s^{-1}) = \rho(I)$ (где I — единица группы G). Так как $I \in A$ обратимо, то и $\rho(I)$ — обратимый эндоморфизм. Таким образом, $\rho(s)$ — обратимый элемент и ρ — рациональное представление.

Определение 4. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть G_1 — алгебраическая компонента единицы группы G. Пусть U — конечномерное векторное пространство над полем K. Гомоморфизм ρ группы G в группу автоморфизмов пространства U называется рациональным представлением группы G, если ограничение отображения ρ на G_1 является рациональным представлением группы G_1.*

Предложение 3. *Пусть ρ — рациональное представление алгебраической группы G автоморфизмов пространства V автоморфизмами конечномерного векторного пространства U над полем K, и пусть H — алгебраическая группа автоморфизмов пространства U. Тогда множество N элементов s из G, таких, что $\rho(s) \in H$, является алгебраической подгруппой группы G* [1].

Следствие предложения 3 § 3 показывает, что можно ограничиться рассмотрением случая, когда G — неприводимая группа. Обозначим через N' наименьшую алгебраическую группу автоморфизмов пространства V, содержащую группу N, и пусть s — элемент из N'. Пусть P — полиномиальная функция над пространством эндоморфизмов пространства U, обращающаяся в нуль на группе H; тогда $P \circ \rho$ является некоторой рациональной функцией R, определенной на всей группе G и равной нулю на N. Имеем $N' \subset G$, и ограничение отображения R на N' — рациональная функция на N' [2]. Множество N является,

[1] Отсюда непосредственно следует, что ядро представления ρ — алгебраическая подгруппа. Из теоремы 1 § 2 легко заключить и обратное: всякий алгебраический нормальный делитель группы G является ядром некоторого рационального представления группы G.

[2] Это ограничение может быть получено последовательным применением тождественного отображения группы N' в группу G (оно, очевидно, рационально) и данного отображения R.

очевидно, областью единственности группы N'; следовательно, ограничение функции R на N' тождественно равно нулю, так что $R(s)=0$ и $P(\rho(s))=0$. Так как это свойство имеет место для всех полиномиальных функций P, обращающихся в нуль на H, то $\rho(s)\in H$ и $s\in N$. Следовательно, $N=N'$.

Определение 5. *Пусть ρ — рациональное представление алгебраической группы G автоморфизмов пространства V автоморфизмами конечномерного пространства U над полем K, и пусть $\mathfrak{F}$ — пространство эндоморфизмов пространства U. Множество Γ точек из $\mathfrak{E}\times\mathfrak{F}$ вида $(s, \rho(s))$, где $s\in G$, называется графиком представления ρ.*

Предложение 4. *При тех же обозначениях, что и в определении 5, множество Γ является алгебраической группой автоморфизмов пространства $V\times U$ и отображение $s\to(s, \rho(s))$ — рациональное представление группы G; мы обозначим его через $\bar\rho$.*

Легко убедиться, что Γ — группа, содержащая в качестве подгруппы конечного индекса образ алгебраической компоненты единицы группы G при отображении $s\to(s, \rho(s))$. В силу предложения 3 § 3 мы можем ограничиться рассмотрением случая неприводимой группы G. Наименьшая алгебраическая группа H автоморфизмов пространства $V\times U$, содержащая группу Γ, очевидно, содержится в $\mathfrak{E}\times\mathfrak{F}$. Пусть (s_0, t_0) — точка группы H. Если P — полиномиальная функция на $\mathfrak{E}$, равная нулю на G, то $(s, t)\to P(s)$ — полиномиальная функция, равная нулю на Γ и, следовательно, на группе H. Таким образом, $P(s_0)=0$; так как G — алгебраическая группа, то $s_0\in G$. Пусть теперь L — линейная функция на $\mathfrak{F}$. Функция $L\circ\rho$ — рациональная функция на G, определенная на всей группе. Мы можем ее представить в виде PQ^{-1}, где P и Q — ограничения на G полиномиальных функций $\tilde P$ и $\tilde Q$ на $\mathfrak{E}$ и где $\tilde Q(s_0)=Q(s_0)\neq 0$. Отображение $(s, t)\to\tilde P(s)-L(t)\tilde Q(s)$, очевидно, является полиномиальной функцией на $\mathfrak{E}\times\mathfrak{F}$, обращающейся в нуль на Γ. Следовательно, $P(s_0)=L(t_0)Q(s_0)$, так что $L(t_0)=L(\rho(s_0))$. Так как это свойство имеет место для всех линейных функций L над $\mathfrak{F}$, то $t_0=\rho(s_0)$, так что $(s_0, t_0)\in\Gamma$. Это показывает, что Γ — алгебраическая группа. Если для $s\in G$ положить $\bar\rho(s)=(s, \rho(s))$ и если L' — линейная функция на $\mathfrak{E}\times\mathfrak{F}$, то отображение $s\to L'(\bar\rho(s))$ — рациональная функция на группе G. Действительно, мы можем положить $L' = L_1' + L_2'$, где L_1' — композиция отображения $(s, t) \to s$ и линейной функции L_1 на $\mathfrak{E}$, а L_2' составлена из отображения $(s, t) \to t$ и некоторой линейной функции L_2 на $\mathfrak{F}$. Наше утверждение следует теперь из того факта, что $s \to L_1(s)$ и $s \to L_2(\rho(s))$ — рациональные функции на G. Отсюда непосредственно вытекает, что ρ — рациональное представление группы G.

Определение 6. *При таких же обозначениях, как в формулировке предложения 4, рациональное представление $s \to (s, \rho(s))$ называется увеличенным представлением для представления ρ.*

§ 5. Расширение основного поля

На протяжении всего параграфа мы будем обозначать через L некоторое надполе поля K. Напомним, что мы условились отождествлять всякий эндоморфизм пространства V с его продолжением в эндоморфизм пространства V^L. При этом отождествлении пространством эндоморфизмов пространства V^L является пространство $\mathfrak{E}^L$, получающееся из пространства $\mathfrak{E}$ расширением основного поля. Кроме того, мы отождествили всякую полиномиальную функцию на $\mathfrak{E}$ с ее продолжением на пространство $\mathfrak{E}^L$.

Лемма 1. *Пусть G' — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V^L. Тогда множество $G = \mathfrak{E} \cap G'$ является алгебраической группой автоморфизмов пространства V.*

Пусть $(a_i)_{i \in I}$ — базис поля L над полем K. Всякая полиномиальная функция P на $\mathfrak{E}^L$ представима тогда одним и только одним способом в виде суммы $\sum_{i \in I} a_i P_i$, где P_i — полиномиальные функции над $\mathfrak{E}$. Если $s \in \mathfrak{E}$, то $P_i(s)$ принадлежат полю K, и, следовательно, для того чтобы $P(s) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $P_i(s) = 0$ при всех $i \in I$. Если $\mathfrak{a}'$ — идеал, соответствующий группе G', то через $\mathfrak{a}$ мы обозначим множество всех полиномиальных функций над $\mathfrak{E}$, которые участвуют в представлении элементов P из $\mathfrak{a}'$ в виде $\sum_{i \in I} a_i P_i$.

Элементами множества G являются тогда все те автоморфизмы пространства V, для которых $P(s)=0$ при всех $P \in \mathfrak{a}$. Очевидно, что множество G есть группа; последнее утверждение показывает, что это — алгебраическая группа.

Пусть теперь нам дана некоторая алгебраическая группа G автоморфизмов пространства V. Мы сопоставим ей некоторую группу автоморфизмов пространства V^L. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть A — подмножество в $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{a}$ — соответствующий этому множеству идеал алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$. Пусть $(a_i)_{i \in I}$ — базис поля L над полем K, и пусть $P=\sum\limits_{i \in I} a_i P_i$ — элемент из $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}^L)$, причем P_i — элементы из $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$. Для того чтобы полиномиальная функция P обращалась в нуль на множестве A, необходимо и достаточно, чтобы все P_i принадлежали идеалу $\mathfrak{a}$. Идеал, соответствующий множеству A в кольце $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}^L)$, является множеством $\mathfrak{a}^L$ линейных комбинаций с коэффициентами из L элементов из $\mathfrak{a}$. Идеал $\mathfrak{a}^L$ — простой в том и только в том случае, если $\mathfrak{a}$ — простой идеал.*

Пусть $s \in A$; так как $P_i(s)$ принадлежат полю K, то $P(s)=0$ тогда и только тогда, когда $P_i(s)=0$ для всех $i \in I$. Таким образом, множеству A соответствует в алгебре $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}^L)$ идеал $\mathfrak{a}^L$. Очевидно, $\mathfrak{a}^L \cap \mathfrak{o}(\mathfrak{E})=\mathfrak{a}$, и, следовательно, если $\mathfrak{a}^L$ — простой идеал, то тем же свойством обладает и идеал $\mathfrak{a}$. Обратно, предположим, что $\mathfrak{a}$ — простой идеал. Пусть $Q=\sum\limits_{i \in I} a_i Q_i$ (где $Q_i \in \mathfrak{o}(\mathfrak{E})$) — элемент алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}^L)$, такой, что PQ принадлежит идеалу $\mathfrak{a}^L$, в то время как $Q \notin \mathfrak{a}^L$. Покажем, что тогда $P \in \mathfrak{a}^L$ и что, следовательно, $\mathfrak{a}^L$ — простой идеал. Действительно, для некоторого индекса i_0 функция Q_{i_0} не принадлежит идеалу $\mathfrak{a}$. Если s — точка множества A, для которой $Q_{i_0}(s) \neq 0$, то $Q(s) \neq 0$. Но так как $P(s)Q(s)=0$, то $P(s)=0$, и, следовательно, $P_i(s)=0$ для всех $i \in I$. Мы видим, что все функции $P_i Q_{i_0}$ тождественно равны нулю на множестве A и поэтому принадлежат $\mathfrak{a}$. Так как Q_{i_0} не содержится в $\mathfrak{a}$, то все $P_i \in \mathfrak{a}$, так что $P \in \mathfrak{a}^L$. Лемма 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть G^L — наименьшая* *алгебраическая группа автоморфизмов пространства* V^L, *содержащая* G. *Если в алгебре* $\mathfrak{o}(\mathfrak{G})$ *группе* G *соответствует идеал* $\mathfrak{a}$, *то группе* G^L *соответствует в* $\mathfrak{o}(\mathfrak{G}^L)$ *идеал* $\mathfrak{a}^L$, *состоящий из линейных комбинаций с коэффициентами из* L *элементов идеала* $\mathfrak{a}$. *Далее,* $G = G^L \cap \mathfrak{G}$, *и* G — *область единственности группы* G^L [1]. *Пусть* G_1 — *алгебраическая компонента единицы группы* G. *Алгебраической компонентой единицы группы* G^L *является тогда наименьшая алгебраическая группа* G_1^L *автоморфизмов пространства* V^L, *содержащая группу* G_1. *Пусть* t_iG_1 $(1 \leqslant i \leqslant h)$ — *все различные классы смежности группы* G *по подгруппе* G_1; *тогда множества* $t_iG_1^L$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$ *суть все различные классы группы* G^L *по подгруппе* G_1^L.

Из леммы 2 следует, что $\mathfrak{a}^L$ — идеал, соответствующий группе G в алгебре $\mathfrak{o}(\mathfrak{G}^L)$. Так как произведение элементов из G принадлежит G, то, согласно предложению 2 § 1, множество G' автоморфизмов s пространства V^L, удовлетворяющих условию $P(s) = 0$ для всех $P \in \mathfrak{a}^L$, является алгебраической группой. Так как $G \subset G'$, то всякая полиномиальная функция на $\mathfrak{G}^L$, обращающаяся в нуль на G', принадлежит $\mathfrak{a}^L$, и, следовательно, $\mathfrak{a}^L$ — идеал, соответствующий группе G' в алгебре $\mathfrak{o}(\mathfrak{G}^L)$. Очевидно, что всякая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V^L, содержащая группу G, содержит также группу G', так что $G' = G^L$. Группа $G^L \cap \mathfrak{G}$ является алгебраической группой автоморфизмов пространства V и содержит группу G_1 (лемма 1). Кроме того, каждая функция из $\mathfrak{a}$ равна нулю на $G^L \cap \mathfrak{G}$, так что $G = G \cap {}^L\mathfrak{G}$. То, что G — область единственности в группе G^L, вытекает непосредственно из того факта, что $\mathfrak{a}^L$ — идеал, соответствующий группе G в алгебре $\mathfrak{o}(\mathfrak{G}^L)$. Так как группе G_1 соответствует в алгебре $\mathfrak{o}(\mathfrak{G})$ простой идеал, то, согласно лемме 2, группа G_1^L неприводима. Множества $t_iG_1^L$, очевидно, содержатся

[1]) Понятие области единственности было введено в § 4 только для неприводимых групп. Но это определение дословно распространяется на случай любой алгебраической группы G: подмножество E группы G есть область единственности, если всякая полиномиальная функция, равная нулю на множестве E, равна нулю на группе G.

в группе G^L. Если s и s' — элементы из G_1^L и если $t_i s = t_j s'$, то

$$t_j^{-1} t_i = s' s^{-1} \in G_1^L \cap \mathfrak{E} = G_1,$$

так что $i = j$. Это показывает, что множества $t_i G_1^L$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$ попарно не имеют общих элементов. Пусть s — автоморфизм пространства V^L, не принадлежащий ни одному из этих множеств. Для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ найдется тогда полиномиальная функция P_i над пространством $\mathfrak{E}^L$, равная нулю на G_1^L, но не равная нулю в точке $t_i^{-1}s$. Так как G — объединение множеств $t_i G_1$, то функция $\prod_{i=1}^{h} \eta(t_i^{-1}) P_i$ обращается в нуль на G и, следовательно, также на G^L. Но, с другой стороны, эта функция не равна нулю в точке s, так что $s \overline{\in} G^L$. Мы видим, что G^L совпадает с объединением множеств $t_i G_1^L$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$. Группа G_1^L, таким образом, — конечного индекса в группе G^L и ввиду своей неприводимости является алгебраической компонентой единицы группы G^L. Теорема 3 доказана.

Определение 1. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Про наименьшую алгебраическую группу автоморфизмов пространства V^L, содержащую группу G, мы будем говорить, что она получается из группы G расширением основного поля до поля L, и условимся обозначать эту группу через G^L.*

Предложение 1. *Пусть V' — конечномерное векторное пространство над полем K, и пусть G и G' — алгебраические группы автоморфизмов пространств V и V' соответственно. Тогда*

$$(G \times G')^L = G^L \times G'^L.$$

Группа $G^L \times G'^L$ есть алгебраическая группа, содержащая $G \times G'$; следовательно, она содержит также группу $(G \times G')^L$. Пусть P — полиномиальная функция на пространстве эндоморфизмов пространства $V^L \times V'^L$, равная нулю на $G \times G'$. При $s' \in G'$ полиномиальная функция $s \to P(s, s')$ на пространстве эндоморфизмов пространства V^L равна нулю на G и, следовательно, на G^L. Пусть теперь s — точка группы G^L; мы знаем, что полиномиальная функция $s' \to P(s, s')$ на пространстве эндоморфизмов пространства V'^L обращается в нуль на G'. Но тогда она также обращается в нуль на G'^L, так что P обращается в нуль на $G^L \times G'^L$. Отсюда вытекает, что

$$G^L \times G'^L \subset (G \times G')^L,$$

и предложение 1 доказано.

Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть P — полиномиальная функция на G. Функция P является ограничением на G некоторой полиномиальной функции $\tilde{P}$ над пространством $\mathfrak{E}$. Но $\tilde{P}$ можно также рассматривать как полиномиальную функцию над пространством $\mathfrak{E}^L$, и ее ограничение на G^L — полиномиальная функция на G^L, продолжающая функцию P. Так как G — область единственности в G^L, то существует не более одной полиномиальной функции на G^L, продолжающей функцию P. *В дальнейшем мы будем отождествлять полиномиальные функции на G с продолжающими их полиномиальными функциями на G^L. Кольцо $\mathfrak{o}(G)$ полиномиальных функций на G отождествляется тем самым с некоторым подкольцом кольца $\mathfrak{o}(G^L)$ полиномиальных функций на G^L.* Очевидно, что любой элемент из $\mathfrak{o}(G^L)$ представим в виде линейной комбинации с коэффициентами из L элементов кольца $\mathfrak{o}(G)$. Покажем, что алгебру $\mathfrak{o}(G^L)$ можно отождествить с алгеброй, получающейся из $\mathfrak{o}(G)$ расширением основного поля до поля L. Достаточно показать, что если $a_1, \ldots, a_p$ — элементы поля L, линейно независимые относительно поля K, а $P_1, \ldots, P_q$ — элементы алгебры $\mathfrak{o}(G)$, линейно независимые над K, то элементы a_iP_j $(1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant q)$ также линейно независимы над K. Пусть для некоторых элементов c_{ij} из K имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} c_{ij} a_i P_j = 0,$$

и пусть s — любой элемент из G. Тогда

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{q} c_{ij} P_j(s) \right) a_i = 0.$$

Элементы $\sum_{j=1}^{q} c_{ij}P_j(s)$ принадлежат полю K и, следовательно, все равны нулю. Так как это имеет место для всех $s \in G$, то

$$\sum_{j=1}^{q} c_{ij}P_j = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant p),$$

так что

$$c_{ij} = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant p, \ 1 \leqslant j \leqslant q),$$

что и доказывает наше утверждение.

Предположим теперь, что группа G неприводима; тогда тем же свойством обладает и группа G^L. Пусть $\mathfrak{R}(G)$ и $\mathfrak{R}(G^L)$ — поля рациональных функций над группами G и G^L соответственно; они являются полями отношений колец $\mathfrak{o}(G)$ и $\mathfrak{o}(G^L)$. Так как кольцо $\mathfrak{o}(G)$ отождествлено с подкольцом кольца $\mathfrak{o}(G^L)$, то $\mathfrak{R}(G)$ — подполе поля $\mathfrak{R}(G^L)$. Если R — элемент поля $\mathfrak{R}(G)$, то рациональная функция R на группе G^L продолжает рациональную функцию R на группе G. Иначе говоря, функция R, рассматриваемая как элемент поля $\mathfrak{R}(G^L)$, определена в тех же точках группы G, что и функция R, рассматриваемая как элемент поля $\mathfrak{R}(G)$, и значения, принимаемые функцией R на G, не зависят от того, рассматривается ли она как рациональная функция на G или же как рациональная функция на G^L.

Лемма 3. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, R — рациональная функция на G и L — надполе поля K. Предположим, что функция R определена в некоторой точке s группы G^L. Тогда функцию R можно представить в виде PQ^{-1}, где P и Q — рациональные функции на G и $Q(s) \neq 0$.*

Пусть P' и Q' — рациональные функции на группе G^L, такие, что $R = P'Q'^{-1}$ и $Q'(s) \neq 0$. Если $(a_i)_{i \in I}$ — базис поля L над полем K, то пусть

$$P' = \sum_{i \in I} a_i P_i, \qquad Q' = \sum_{i \in I} a_i Q_i,$$

где P_i и Q_i — полиномиальные функции на группе G. С другой стороны, функцию R можно представить в виде $P''Q''^{-1}$

где P'' и Q'' — полиномиальные функции на G. Имеем

$$\sum_{i \in I} a_i (P_i Q'' - Q_i P'') = 0.$$

Так как $\mathfrak{o}(G^L)$ отождествляется с алгеброй, получающейся из алгебры $\mathfrak{o}(G)$ расширением основного поля, т. е. с алгеброй $\mathfrak{o}(G) \otimes L$, то $P_i Q'' - Q_i P'' = 0$ для всех i. Но по меньшей мере для одного индекса i имеем $Q_i(s) \neq 0$, так что $R = P_i Q_i^{-1}$, что и доказывает лемму 3.

Из этой леммы непосредственно следует, что если функция R, рассматриваемая как рациональная функция на G^L, определена в точке $s \in G$, то она определена в этой точке также как функция на G.

Предложение 2. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Пусть $\mathfrak{R}(G)$ и $\mathfrak{R}(G^L)$ — поля рациональных функций над группами G и G^L соответственно. Поле $\mathfrak{R}(G^L)$ получается присоединением к полю L элементов поля $\mathfrak{R}(G)$. Подполя L и $\mathfrak{R}(G)$ поля $\mathfrak{R}(G^L)$ линейно свободны* [1]) *относительно поля K.*

Первое утверждение легко следует из того, что элементы алгебры $\mathfrak{o}(G^L)$ являются линейными комбинациями с коэффициентами из L элементов из $\mathfrak{o}(G)$. С другой стороны, как было показано выше, алгебра $\mathfrak{o}(G^L)$ над полем K есть тензорное произведение алгебр $\mathfrak{o}(G)$ и L над K. Отсюда легко усмотреть второе утверждение предложения 2 (ср. Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 2, n° 3, предложение 5 [1])).

Следствие. *Поле $\mathfrak{R}(G)$ рациональных функций на неприводимой алгебраической группе G автоморфизмов пространства V является всегда сепарабельным расширением поля K.*

Действительно, пусть K' — алгебраически замкнутое расширение поля K, и пусть Ω — алгебраически замкнутое надполе поля $\mathfrak{R}(G)$. Поле $\mathfrak{R}(G^{K'})$ — алгебраическое расширение поля $\mathfrak{R}(G)$. Существует изоморфизм этого поля на некоторое подполе поля Ω, совпадающий с тождественным автоморфизмом

[1]) См. добавление переводчика в конце настоящей книги, стр. 262. — *Прим. перев.*

на $\mathfrak{R}(G)$. При этом изоморфизме поле K' переходит в некоторое алгебраически замкнутое подполе K'' поля Ω. Подполя $\mathfrak{R}(G)$ и K'' поля Ω линейно свободны, что и доказывает сепарабельность поля $\mathfrak{R}(G)$ над полем K (Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 8, n° 2, предложение 3 [1])).

Предложение 3. *Пусть R — рациональное отображение неприводимой алгебраической группы G автоморфизмов пространства V в векторное пространство $\mathfrak{F}$ над полем K. Тогда существует одно и только одно рациональное отображение группы G^L в пространство $\mathfrak{F}^L$, продолжающее отображение R.*

Пусть E — множество точек группы G, на которых определено отображение R, и пусть s — точка из E. Существует рациональное отображение $\tilde{R}$ пространства $\mathfrak{E}$ в пространство $\mathfrak{F}$, определенное в точке s и такое, что R — след отображения $\tilde{R}$ на группе G. Отображение $\tilde{R}$ можно продолжить в рациональное отображение $\tilde{R}^L$ пространства $\mathfrak{E}^L$ в $\mathfrak{F}^L$ (гл. I, § 6, предложение 3). Так как $\tilde{R}^L$ определено в точке s, то существует след R_s^L этого отображения на группе G^L и $R_s^L(t) = R(t)$ во всех точках t группы G, в которых определено отображение $\tilde{R}$, т. е. во всех точках некоторого алгебраически плотного подмножества группы G. Если провести аналогичное построение с помощью некоторой другой точки $s' \in E$ или другого рационального отображения $\tilde{R}'$ над $\mathfrak{E}$, удовлетворяющего тем же условиям, что и $\tilde{R}$, то получается рациональное отображение $R_{s'}'^L$ группы G^L в пространство $\mathfrak{F}^L$, определенное и совпадающее с R во всех точках некоторого алгебраически плотного подмножества $E'_{s'}$ группы G, содержащегося в E и содержащего точку s'. Так как G — область единственности в G^L, то $R_{s'}'^L = R_s^L$. Это показывает, что R_s^L продолжает R. Так как G — область единственности в группе G^L, то R_s^L — единственное рациональное отображение группы G^L в пространство $\mathfrak{F}^L$, продолжающее отображение R.

Замечание. Наше доказательство показывает, что если R — след на G рационального отображения $\tilde{R}$ пространства $\mathfrak{E}$

[1]) См. добавление переводчика, стр. 266. — *Прим. перев.*

в $\mathfrak{F}$, то рациональное отображение группы G^L в $\mathfrak{F}^L$, продолжающее R, является следом на G^L рационального отображения пространства $\mathfrak{E}^L$ в $\mathfrak{F}^L$, продолжающего отображение $\tilde{R}$.

Пусть V' — конечномерное векторное пространство над полем K, и пусть G и G' — неприводимые алгебраические группы автоморфизмов пространств V и V' соответственно. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ — векторные пространства над полем K, ρ — рациональное отображение группы G в $\mathfrak{F}$ и ρ' — рациональное отображение группы G' в $\mathfrak{F}'$. Пусть, наконец, ρ^L и ρ'^L — рациональные отображения группы G^L в $\mathfrak{F}^L$ и группы G'^L в $\mathfrak{F}'^L$, продолжающие ρ и ρ' соответственно. Тогда рациональное отображение $(\rho \times \rho')^L$ группы $(G \times G')^L$ в $\mathfrak{F}^L \times \mathfrak{F}'^L$, продолжающее декартово произведение $\rho \times \rho'$ отображений ρ и ρ', совпадает с отображением $\rho^L \times \rho'^L$ на группе $G \times G'$. Так как $G \times G'$ — область единственности в $(G \times G')^L = G^L \times G'^L$, то отсюда следует, что

$$(\rho \times \rho')^L = \rho^L \times \rho'^L.$$

Предложение 4. *Пусть ρ — рациональное представление алгебраической группы G автоморфизмов пространства V автоморфизмами некоторого конечномерного пространства U над полем K. Пусть H — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства U, содержащая группу $\rho(G)$. Тогда существует одно и только одно рациональное представление ρ^L группы G^L автоморфизмами пространства U^L, продолжающее представление ρ. При этом H^L — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства U^L, содержащая группу $\rho^L(G^L)$.*

Пусть G_1 — алгебраическая компонента единицы группы G, и пусть $t_i G_1$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$ — все различные классы группы G по подгруппе G_1. Как нам известно, G_1^L — алгебраическая компонента единицы группы G^L, и $t_i G_1^L$ — классы группы G^L по подгруппе G_1^L (теорема 3). Ограничение ρ_1 отображения ρ на группу G_1 является рациональным представлением группы G_1. Это представление может быть продолжено в рациональное представление ρ_1^L группы G_1^L в пространство эндоморфизмов пространства U^L (предложение 3). Так как G_1 — область единственности в группе G_1^L, то из леммы 7 § 4 следует, что

ρ_1^L — рациональное представление группы G_1^L. Представим элемент s из G^L в виде $t_i s'$, где $s' \in G_1^L$, и положим

$$\rho^L(s) = \rho(t_i)\,\rho_1^L(s');$$

тогда $\rho^L(s)$ — обратимый эндоморфизм пространства U^L. Пусть $t_i s'$ и $t_j s''$ — элементы группы G^L (где s' и s'' принадлежат G_1^L); тогда

$$t_i s' t_j s'' = t_i t_j (t_j^{-1} s' t_j)\, s''.$$

Элемент $t_j^{-1} s' t_j$ принадлежит группе G_1^L (так как G_1^L — нормальный делитель группы G^L; теорема 2 из § 3). С другой стороны, для некоторого индекса k имеем $t_i t_j = t_k u$, где $u \in G_1$. Отображения

$$s \to \rho_1^L(t_j^{-1} s t_j) \quad \text{и} \quad s \to (\rho(t_j))^{-1}\,\rho_1^L(s)\,\rho(t_j),$$

очевидно, являются рациональными представлениями группы G_1^L (так как $s \to t_j^{-1} s t_j$ — рациональное отображение). Эти представления совпадают на G_1 и, следовательно, также на G_1^L (предложение 3). Отсюда

$$\rho^L(t_i s' t_j s'') = \rho(t_k)\,\rho(u)\,(\rho(t_j))^{-1}\,\rho_1^L(s')\,\rho(t_j)\,\rho_1^L(s''),$$

а с другой стороны,

$$\rho(t_i)\,\rho(t_j) = \rho(t_k)\,\rho(u).$$

Отсюда сразу вытекает равенство

$$\rho^L(t_i s')\,\rho^L(t_j s'') = \rho^L(t_i s' t_j s''),$$

которое показывает, что ρ^L — представление (очевидно, рациональное) группы G^L. Ясно, что ρ^L продолжает ρ. Пусть, наоборот, ρ' — рациональное представление группы G^L автоморфизмами пространства U^L, продолжающее представление ρ. Ограничение ρ' на G_1^L — рациональное отображение группы G_1^L, продолжающее ρ_1 и, следовательно, совпадающее с ρ_1^L (предложение 3). Поэтому для $1 \leqslant i \leqslant h$ и $s' \in G_1^L$ имеем

$$\rho'(t_i s') = \rho'(t_i)\,\rho'(s') = \rho(t_i)\,\rho_1^L(s') = \rho^L(t_i s'),$$

так что $\rho' = \rho^L$.

Пусть H' — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства U^L, содержащая группу $\rho^L(G^L)$. Автоморфизмы пространства U, содержащиеся в H', образуют алгебраическую группу (лемма 1), содержащую группу $\rho(G)$. Эта группа содержит, следовательно, и группу H, так что $H^L \subset H'$. Покажем, что H^L содержит $\rho^L(G^L)$, откуда будет следовать, что $H^L \supset H'$, так что $H^L = H'$. Каждый элемент из $\rho^L(G^L)$ является произведением одного из элементов $\rho(t_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$ на элемент из $\rho_1^L(G_1^L)$. Так как элементы $\rho(t_i)$ содержатся в группе H, то достаточно показать, что $\rho_1^L(G_1^L) \subset H^L$, т. е. что всякая полиномиальная функция P на пространстве эндоморфизмов пространства U, равная нулю на H, равна нулю на $\rho_1^L(G_1^L)$. Но композиция отображений $P \circ \rho_1^L$ является рациональной функцией на G_1^L, и эта функция обращается в нуль на G_1, так как $\rho_1(G_1) \subset H$. Отсюда следует, что $P \circ \rho_1^L = 0$, что и доказывает наше утверждение.

Условимся в дальнейшем отождествлять рациональные отображения неприводимых алгебраических групп G автоморфизмов пространства V в векторные пространства над полем K с их продолжениями в рациональные отображения группы G^L.

§ 6. Общие точки

Определение 1. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Если L — надполе поля K и s — точка группы G^L, то мы будем называть s обобщенной точкой группы G. Если s — обобщенная точка группы G, такая, что всякая точка группы G является ее специализацией по отношению к полю K, то она называется общей точкой группы G.*

Теорема 4. *Алгебраическая группа G автоморфизмов пространства V обладает общей точкой тогда и только тогда, когда она неприводима.*

Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал, соответствующий группе G. Предположим сначала, что G имеет общую точку s. Очевидно, что $P(s) = 0$ для всех $P \in \mathfrak{a}$. Если же, наоборот, P — полиномиальная функция на $\mathfrak{E}$, не содержащаяся в $\mathfrak{a}$, то существует точка $s_0 \in G$, для которой $P(s_0) \neq 0$; так как s_0 — специализация точки s по отношению к полю K, то также $P(s) \neq 0$. Мы видим, что $\mathfrak{a}$ — ядро гомоморфизма $P \to P(s)$ кольца $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ в поле $K(s)$. Отсюда заключаем, что $\mathfrak{a}$ — простой идеал и, следовательно, G — неприводимая группа. Предположим, наоборот, что G — неприводимая группа, и пусть $L = \mathfrak{R}(G)$ — поле рациональных функций на G. Пусть $(u_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ — система координатных функций на $\mathfrak{E}$, и пусть u^*_{ij} — функции на G, индуцированные функциями u_{ij}; тогда $u^*_{ij} \in L$ $(1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$. Множество элементов u_{ij} можно также рассматривать как систему координатных функций на $\mathfrak{E}^L$. Для некоторой точки $s \in \mathfrak{E}^L$ имеем

$$u_{ij}(s) = u^*_{ij} \qquad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n).$$

Если $P \in \mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, то, очевидно, функция P индуцирует на группе G функцию $P(s)$. Равенство $P(s) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда P обращается в нуль на G. Отсюда следует, что все точки группы G являются специализациями по отношению к полю K точки s. Для $t \in \mathfrak{E}^L$ обозначим через $D(t)$ определитель эндоморфизма t; D — полиномиальная функция, не обращающаяся в нуль на группе G, так что $D(s) \neq 0$, что доказывает обратимость элемента s. Группе G^L соответствует идеал, состоящий из линейных комбинаций с коэффициентами из L элементов из идеала $\mathfrak{a}$; следовательно, всякая функция, принадлежащая этому идеалу, равна нулю в точке s, так что s — обобщенная точка группы G. Отсюда следует, что s — общая точка группы G.

Замечание. Пусть $\mathfrak{R}$ — поле рациональных функций на группе G. Если s — построенная нами общая точка группы G в пространстве $\mathfrak{E}^{\mathfrak{R}}$, то $R = R(s)$ для всех $R \in \mathfrak{R}$. Действительно, это равенство справедливо, если R — одна из функций u^*_{ij}. Так как отображение $P \to P(s)$ кольца рациональных функций на G является гомоморфизмом, то указанное равенство остается верным для случая, когда R — полиномиальная функция; но тогда оно также справедливо и для всех рациональных функций. Точка s, как легко видеть, однозначно определена вышеуказанным свойством.

Предложение 1. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть s — общая точка группы G. Всякая обобщенная точка s' группы G является тогда специализацией точки s по отношению к полю K; для того чтобы s' была общей точкой группы G, необходимо и достаточно, чтобы она была общей* *специализацией точки s. Если L — надполе поля K, то точка $t \in \mathfrak{E}^L$ принадлежит группе G^L тогда и только тогда, когда t — специализация точки s по отношению к полю K и t — обратимый эндоморфизм.*

Если полиномиальная функция P на $\mathfrak{E}$ равна нулю в точке s, то P обращается в нуль на группе G и принадлежит идеалу, соответствующему группе G. Но тогда $P(s') = 0$, что показывает, что s' — специализация точки s по отношению к полю K. Если s' — общая точка, то s — также специализация точки s', так что s' — общая специализация точки s. Если, наоборот, это условие выполнено, то всякая точка группы G — специализация точки s' и s' — общая точка. Если t — специализация точки s, то $P(t) = 0$ для всех функций P из идеала $\mathfrak{a}$, соответствующего группе G, и также для всех $P \in \mathfrak{a}^L$. Следовательно, если, кроме того, элемент t обратим, то $t \in G^L$. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть R — рациональное отображение группы G в векторное пространство $\mathfrak{F}$ над полем K. Пусть s и s' — обобщенные точки группы G, такие, что s' — специализация точки s по отношению к полю K. Тогда, если отображение R определено в точке s', то оно также определено в точке s и $R(s')$ — специализация точки $R(s)$ по отношению к полю K.*

Пусть F — полиномиальная функция над пространством $\mathfrak{F}$. Если R определено в точке s', то и функция $F \circ R$ определена в s' и представима в виде PQ^{-1}, где P и Q — полиномиальные функции на G, причем $Q(s') \neq 0$ (лемма 3 из § 5). Так как s' — специализация точки s, то $Q(s) \neq 0$ и функция $F \circ R$ определена в точке s. Пусть $(u_i)_{i \in I}$ — базис пространства $\mathfrak{F}$; положим

$$R = \sum_{i \in I} R_i \otimes u_i,$$

где R_i — рациональная функция на G. Выбрав в качестве функции F линейную функцию, определенную условиями $F(u_i) = 1$, $F(u_j) = 0$ для $j \neq i$, имеем $F \circ R = R_i$; мы видим, что в точке s определены все функции R_i и, следовательно, также отображение R. Если теперь F — полиномиальная функция на $\mathfrak{F}$, такая, что $F(R(s)) = 0$, то $P(s) = 0$, так что

$P(s')=0$ и $F(R(s'))=0$. Это показывает, что $R(s')$ — специализация точки $R(s)$ по отношению к полю K.

Определение 2. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Размерностью группы G называют степень трансцендентности поля рациональных функций над G по отношению к полю K. Под размерностью любой (не обязательно неприводимой) алгебраической группы G автоморфизмов пространства V мы будем понимать размерность алгебраической компоненты ее единицы.*

Замечание. Если K — поле вещественных чисел, то G — группа Ли. Несколько позже мы покажем, что размерность группы G, рассматриваемой как группа Ли, совпадает с размерностью группы G в смысле определения 2.

Предложение 3. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Если s — обобщенная точка группы G, то алгебраическая размерность d_s точки s по отношению к полю K не больше размерности d группы G. Если группа G неприводима, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы s была общей точкой, является равенство $d_s=d$.*

Пусть G_1 — алгебраическая компонента единицы группы G, и пусть t_iG_1 $(1\leqslant i\leqslant h)$ — классы группы G по подгруппе G_1. Из теоремы 3 § 5 следует, что всякая обобщенная точка s группы G представима в виде t_is', где i — один из индексов $1, \ldots, h$, а s' — обобщенная точка группы G_1. Очевидно, что $K(s)=K(s')$ и d_s равняется алгебраической размерности точки s'.

Как мы видели, существует общая точка s_1 группы G_1, такая, что $K(s_1)$ является полем рациональных функций на группе G_1. Точка s' — специализация точки s_1, и если группа G неприводима, то s — общая точка тогда и только тогда, когда она является общей специализацией точки s_1 (предложение 1). Предложение 3 вытекает теперь из предложения 1 § 7 гл. I.

Предложение 4. *Если G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, а H — алгебраическая подгруппа группы G, то размерность d' группы H не больше размерности d группы G; H — подгруппа конечного индекса в группе G тогда и только тогда, когда $d'=d$.*

Пусть G_1 и H_1 — алгебраические компоненты единиц групп G и H соответственно. Легко усмотреть, что $G_1 \cap H$ — алгебраическая подгруппа конечного индекса в группе H и, следовательно, содержит группу H_1, Общая точка группы H_1 является обобщенной точкой группы G_1, так что $d' \leqslant d$. Если $d' = d$, то общая точка группы H_1 будет также общей точкой группы G_1, так что $G_1 = H_1$. С другой стороны, очевидно, что условие $G_1 = H_1$ необходимо и достаточно для того, чтобы подгруппа H была подгруппой конечного индекса группы G. Предложение 4 доказано.

Предложение 5. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, L — надполе поля K. Тогда размерность группы G^L равна размерности группы G.*

Пусть G_1 — алгебраическая компонента единицы группы G. Группа G_1^L является алгебраической компонентой единицы группы G^L. Пусть $\mathfrak{R}(G_1)$ и $\mathfrak{R}(G_1^L)$ — поля рациональных функций над группами G_1 и G_1^L соответственно. Как нам известно, поле $\mathfrak{R}(G_1^L)$ получается присоединением к полю L элементов поля $\mathfrak{R}(G_1)$, и подполя L и $\mathfrak{R}(G_1)$ поля $\mathfrak{R}(G_1^L)$ линейно свободны в поле $\mathfrak{R}(G_1^L)$ относительно поля K (ср. предложение 2 § 5). Предложение 5 является теперь следствием одного предложения Н. Бурбаки (Алгебра, гл. V, § 5, n°4[1])).

Предложение 6. *Пусть V' — конечномерное векторное пространство над полем K, G и G' — алгебраические группы автоморфизмов пространств V и V' соответственно. Размерность группы $G \times G'$ равняется сумме размерностей групп G и G'.*

Пусть G_1 и G_1' — алгебраические компоненты единиц групп G и G' соответственно. Как известно, группа $G_1 \times G_1'$ неприводима, и очевидно, что она является подгруппой конечного индекса в группе $G \times G'$. Следовательно, $G_1 \times G_1'$ — алгебраическая компонента единицы группы $G \times G'$, так что предложение 6 достаточно доказать для случая неприводимых групп G и G'.

В этом случае мы можем воспользоваться предложением 2 § 4, которое показывает, что поле $\mathfrak{R}(G \times G')$ рациональных

---

1) См. добавление переводчика в конце книги, стр. 265. — *Прим. перев.*

функций над группой $G \times G'$ порождается двумя подполями, соответственно изоморфными полям рациональных функций над группами G и G', причем эти два подполя линейно свободны относительно поля K (ср. Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 2, n° 3 [1])).

Отсюда можно заключить, что степень трансцендентности поля $\mathfrak{R}(G \times G')$ относительно поля K равна сумме степеней трансцендентности полей рациональных функций над группами G и G' (Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 5, n° 4, предложение 10 [2])). Предложение 6 доказано.

Пусть V_i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ — конечномерные векторные пространства над K. Предположим, что для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ задан эндоморфизм s_i пространства V_i. Так же как и в случае $h = 2$, условимся отождествлять элемент $(s_1, \ldots, s_h)$ произведения пространств эндоморфизмов пространств V_i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ с эндоморфизмом пространства $V_1 \times \ldots \times V_h$, переводящим элемент $(x_1, \ldots, x_h)$ в элемент $(s_1 x_1, \ldots, s_h x_h)$. Для $h = 1$ имеем $(s_1) = s_1$; если $h > 1$, то

$$(s_1, \ldots, s_h) = ((s_1, \ldots, s_{h-1}), s_h)$$

[как обычно, пространство $V_1 \times \ldots \times V_h$ отождествляется с пространством

$$(V_1 \times \ldots \times V_{h-1}) \times V_h].$$

Пусть для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ G_i — группа автоморфизмов пространства V_i. Множество $G_1 \times \ldots \times G_h$ элементов вида $(s_1, \ldots, s_h)$, где $s_i \in G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$, является группой автоморфизмов пространства $V_1 \times \ldots \times V_h$. Индукцией по h можно непосредственно доказать следующие свойства:

Если все G_i — алгебраические группы, то и произведение $G_1 \times \ldots \times G_h$ — алгебраическая группа (ср. предложение 1 § 1).

Если все группы G_i — неприводимые алгебраические группы, то тем же свойством обладает и их произведение (ср. предложение 2 § 3) и размерность произведения равняется сумме размерностей групп G_i (ср. предложение 6).

Если L — надполе поля K, то группа $(G_1 \times \ldots \times G_h)^L$ совпадает с группой $G_1^L \times \ldots \times G_h^L$ (ср. предложение 1 § 5).

Пусть $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_h$ — векторные пространства над полем K, и пусть для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ R_i — рациональное отобра-

---

[1]) См. добавление переводчика, стр. 262. — *Прим. перев.*

[2]) См. добавление переводчика, стр. 265. — *Прим. перев.*

жение группы G_i в пространство $\mathfrak{F}_i$. Существует одно и только одно рациональное отображение R группы $G_1 \times \ldots \times G_h$ в пространство $\mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_h$, при котором

$$R(s_1, \ldots, s_h) = (R_1(s_1), \ldots, R_h(s_h))$$

для всех точек $(s_1, \ldots, s_h)$ группы $G_1 \times \ldots \times G_h$, таких, что каждое отображение R_i определено в соответствующей точке s_i (ср. лемму 6 из § 4). Отображение R называется декартовым произведением отображений $R_1, \ldots, R_h$. Если L — надполе поля K, то отображение группы $G_1^L \times \ldots \times G_h^L$, продолжающее отображение R, является декартовым произведением рациональных отображений групп G_i^L $(1 \leqslant i \leqslant h)$, продолжающих отображения R_i. Наконец, очевидно, что при отождествлениях, обычных для произведений векторных пространств, для $1 \leqslant k \leqslant h$ имеет место равенство

$$G_1 \times \ldots \times G_h = (G_1 \times \ldots \times G_k) \times (G_{k+1} \times \ldots \times G_h).$$

Предложение 7. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть R — рациональное отображение группы G в пространство $\mathfrak{F}$ эндоморфизмов конечномерного векторного пространства U над полем K. Мы предположим, что отображение R определено во всех точках s группы G, что $R(s)$ — автоморфизм пространства U и что образом при R тождественного автоморфизма пространства V является тождественный автоморфизм пространства U. Пусть H — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства U, содержащая элементы $R(s)$ для всех $s \in G$. Тогда группа H неприводима. Кроме того, существуют надполе L поля K и конечное число точек $s_1, \ldots, s_k$ из G^L, такие, что отображение R определено во всех этих точках и $R(s_1) \ldots R(s_k)$ — общая точка группы H.*

Пусть h — целое число > 0; обозначим через G^h произведение h экземпляров группы G, через $\mathfrak{F}^h$ — произведение h экземпляров пространства $\mathfrak{F}$ и через R^h — отображение G^h в $\mathfrak{F}^h$, которое является произведением h отображений R. Очевидно, $(u_1, \ldots, u_h) \to u_1 \ldots u_h$ — рациональное отображение пространства $\mathfrak{F}^h$ в пространство $\mathfrak{F}$. Следовательно, существует рациональное отображение S_h группы G^h в пространство $\mathfrak{F}$, такое, что

$$S_h(t_1, \ldots, t_h) = R(t_1) \ldots R(t_h)$$

для всех $(t_1, \ldots, t_h) \in G^h$. Пусть $(s_{1,h}, \ldots, s_{h,h})$ — общая точка группы G^h. Предложение 2 показывает, что отображение S_h определено в этой точке; положим

$$v_h = S_h(s_{1,h}, \ldots, s_{h,h}).$$

Если $t_1, \ldots, t_h$ — элементы группы G, то $R(t_1) \ldots R(t_h)$ — специализация точки v_h по отношению к полю K. Действительно, точка $(t_1, \ldots, t_h)$ принадлежит группе G^h и является специализацией точки $(s_{1,h}, \ldots, s_{h,h})$; наше утверждение следует из предложения 2.

Покажем теперь, что v_h — специализация точки v_{h+1} по отношению к полю K. Пусть I — единица группы G. Очевидно, $s_{i,h}$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$ — обобщенные точки группы G. Отсюда следует, что $(s_{1,h}, \ldots, s_{h,h}, I)$ — специализация точки $(s_{1,h+1}, \ldots$ $\ldots, s_{h+1,h+1})$. Но отображение R определено во всех точках $s_{i,h}$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$ и в точке I, так что R^{h+1} и, следовательно, отображение S_{h+1} определены в точке $(s_{1,h}, \ldots, s_{h,h}, I)$ и

$$S_{h+1}(s_{1,h}, \ldots, s_{h,h}, I) = R(s_{1,h}) \ldots R(s_{h,h}) = v_h,$$

поскольку $R(I)$ — тождественный автоморфизм пространства U. Наше утверждение, что точка v_h — специализация точки v_{h+1}, следует теперь из предложения 2.

Из сказанного вытекает, что алгебраические размерности точек v_h $(1 \leqslant h < \infty)$ образуют неубывающую последовательность целых чисел. С другой стороны, алгебраическая размерность точки v_h не может быть больше размерности пространства $\mathfrak{F}$ [так как $K(v_h)$ получается из поля K присоединением координат точки v_h относительно некоторой системы координатных функций пространства $\mathfrak{F}$]. Поэтому существует целое число $k > 0$, такое, что все точки v_h с индексом $h \geqslant k$ имеют одну и ту же алгебраическую размерность. Но тогда для $h \geqslant k$ точка v_h — общая специализация точки v_{h+1} (гл. I, § 7, предложение 1), так что v_{h+1} — специализация точки v_h и, вообще, для $h \geqslant k$ точка v_h — специализация точки v_k по отношению к полю K.

Пусть E — множество произведений конечного числа элементов вида $R(s)$, где $s \in G$. Так как $R(I)$ — тождественный автоморфизм, то каждый элемент из E можно представить в виде произведения по меньшей мере из k элементов вида $R(s)$, $s \in G$, и, в силу доказанного выше утверждения, каждый элемент из E является специализацией точки v_k. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал полиномиальных функций над $\mathfrak{F}$, равных нулю на E. Этот идеал содержит совокупность полиномиальных функций P над $\mathfrak{F}$, для которых $P(v_k)=0$. Пусть, наоборот, P — элемент из $\mathfrak{a}$. Композиция $P \circ S_k$ является рациональной функцией на G^k. Эта функция всюду определена и обращается в нуль на G^k. Следовательно, она тождественно равна нулю не только на группе G^k, но также и на группе $(G^k)^L$ для любого надполя L поля K. В частности, эта функция определена и равна нулю в точке $(s_{1,k}, \ldots, s_{k,k})$, так что $P(v_k)=0$. Мы видим, что $\mathfrak{a}$ — идеал всех полиномиальных функций P над $\mathfrak{F}$, для которых $P(v_k)=0$.

Произведение любых двух элементов из E принадлежит E, и предложение 2 § 1 показывает, что $\mathfrak{a}$ — идеал, соответствующий наименьшей алгебраической группе автоморфизмов пространства U, содержащей E; этой группой как раз является группа H. Мы видим, что v_k — общая точка группы H и что, следовательно, группа H неприводима. Предложение 7 доказано.

Замечание 1. Доказательство предложения 7 показывает, что точки $s_1, \ldots, s_k$, о которых говорится в формулировке предложения, могут быть выбраны так, что $(s_1, \ldots, s_k)$ будет общей точкой группы G^k.

Замечание 2. При таких же обозначениях, как в предложении 7, пусть M — некоторое надполе поля K. Пусть, далее, H' — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства U^M, содержащая точки $R(s)$, где s пробегает те точки группы G^M, в которых отображение R определено и $R(s)$ — обратимый эндоморфизм. Тогда группа H' совпадает с группой H^M. Действительно, пусть s — точка группы G^M, в которой отображение R определено, и пусть P — полиномиальная функция на $\mathfrak{F}$, равная нулю на H. В точке s функция $P \circ R$ принимает значение $P(R(s))$; эта функция обращается в нуль на группе G и, следовательно, также на группе G^M, так что $P(R(s))=0$. Отсюда следует, что если элемент $R(s)$ обратим, то он принадлежит H^M, так что H' содержится в H^M. С другой стороны, так как множество H' — группа, то оно содержит группу H_0, порожденную элементами из $R(G)$. Так как $H' \cap \mathfrak{F}$ — алгебраическая группа (лемма 1 из § 5), содержащая группу H, то $H^M \subset H'$ и, следовательно, $H^M = H'$.

Предложение 8. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V и ρ — ее рациональное представление автоморфизмами конечномерного пространства U над полем K. Если s — общая точка группы G, то $\rho(s)$ — общая точка наименьшей алгебраической группы H автоморфизмов пространства U, содержащей группу $\rho(G)$. Если e — размерность группы H, то существует обобщенная точка t размерности e группы G, такая, что $\rho(t) = \rho(s)$. Если размерность группы G равна d, то размерность ядра N гомоморфизма ρ всегда $\leqslant d - e$.*

Из предложения 7 следует существование обобщенных точек $s_1, \ldots, s_k$ группы G, для которых

$$\rho(s_1) \ldots \rho(s_k) = \rho(s_1 \ldots s_k)$$

— общая точка группы H. Но произведение $s_1 \ldots s_k$ — обобщенная точка группы G и является, следовательно, специализацией точки s по отношению к полю K. Отсюда заключаем, что $\rho(s_1 \ldots s_k)$ — специализация точки $\rho(s)$ по отношению к полю K (предложение 2). С другой стороны, предложение 7 показывает, что $\rho(s)$ — обобщенная точка группы H и, следовательно, специализация по отношению к полю K точки $\rho(s_1 \ldots s_k)$. Отсюда сразу следует, что $\rho(s)$ — общая точка группы H. Пусть Ω — алгебраически замкнутое алгебраическое расширение поля $K(\rho(s))$. Согласно предложению 2 § 7 гл. I, существует обратимый элемент t из $\mathfrak{E}^{\Omega}$, такой, что $(t, \rho(s))$ — специализация точки $(s, \rho(s))$ по отношению к полю Ω. Ясно, что t — специализация точки s по отношению к полю K; так как точка t — обратимый элемент, то она является обобщенной точкой группы G. Отображение

$$(s', u) \to u - \rho(s')$$

— рациональное отображение группы $G \times H$ в пространство $\mathfrak{F}$ эндоморфизмов пространства U. Это отображение определено в точке $(t, \rho(s))$ и переводит точку $(s, \rho(s))$ в 0. Из предложения 2 следует, что $\rho(t) = \rho(s)$. Поле $K(t)$ содержит, очевидно, поле $K(\rho(t)) = K(\rho(s))$. Так как $\rho(s)$ — общая точка группы H, то степень трансцендентности поля $K(\rho(s))$ относительно поля K равна e, в то время как степень трансцендентности поля $K(t)$ не меньше e. С другой стороны, $K(t) \subset \Omega$. Так как Ω — алгебраическое расширение поля $K(\rho(s))$, то его степень трансцендентности относительно поля K равна e, так что степень трансцендентности поля $K(t)$ относительно поля K

должна быть $\leqslant e$. Отсюда заключаем, что алгебраическая размерность точки t относительно поля K равна e. Пусть теперь f — размерность группы N. Тогда и размерность группы $N^{K(t)}$ равна f и найдется обобщенная точка u этой группы, алгебраическая размерность которой относительно $K(t)$ будет равна f. Точка tu есть обобщенная точка группы G; покажем, что ее алгебраическая размерность относительно K равна $e+f$. Ограничение на группу $N^{K(u)}$ рационального представления ρ группы $G^{K(u)}$, очевидно, есть рациональное представление, продолжающее ограничение представления ρ на группу N. Но ограничение представления ρ на N переводит группу N в множество $\{J\}$, состоящее из одного тождественного автоморфизма J пространства $\mathfrak{F}$. Так как рациональное представление группы $N^{K(u)}$, продолжающее ограничение представления ρ на группу N, определено однозначно, то $\rho(u)=J$, так что $\rho(tu)=\rho(t)=\rho(s)$. С другой стороны, ясно, что $K(\rho(tu))\subset \subset K(tu)$, так что $K(\rho(t))\subset K(tu)$. Имеем $K(\rho(t))\subset K(t)$, и точки t и $\rho(t)$ имеют одну и ту же алгебраическую размерность e относительно поля K. Отсюда следует, что поле $K(t)$ — алгебраическое расширение поля $K(\rho(t))$, а $K(t, tu)$ — алгебраическое расширение поля $K(tu)$. Но $K(t, tu)=K(t, u)$. Степень трансцендентности поля $K(t, u)$ относительно $K(t)$ равна f; его степень трансцендентности относительно K равна $e+f$. Это показывает, что алгебраическая размерность точки tu относительно поля K равна $e+f$. Так как tu — обобщенная точка группы G, то $e+f\leqslant d$.

Следствие. *При обозначениях предложения* 8 *предположим дополнительно, что поле K алгебраически замкнуто. Тогда размерность группы N равна $d-e$.*

Положим $v=st^{-1}$; тогда $K(s)=K(v, t)$ и степень трансцендентности поля $K(v, t)$ относительно поля K не больше, чем сумма числа e и алгебраической размерности точки v относительно поля K; таким образом, эта последняя степень по меньшей мере равна $d-e$, и следствие будет доказано, если мы установим, что v — обобщенная точка группы N. Для этого достаточно показать, что если F — полиномиальная функция на $\mathfrak{E}$, для которой $F(v)\neq 0$, то всегда найдется точка $\bar{v}$ из N, для которой $F(\bar{v})\neq 0$. Обозначим через D полиномиальную функцию на $\mathfrak{E}$, для которой $D(s')$ равно определителю точки s'

для всех $s' \in \mathfrak{C}$ и, следовательно, также для всех точек $s' \in \mathfrak{C}^L$, где L — любое надполе поля K. С помощью предложения 2 § 7 гл. I мы заключаем, что существует специализация $(\bar{v}, \bar{s}, \bar{t})$ точки (v, s, t), такая, что точки $\bar{v}, \bar{s}, \bar{t}$ принадлежат пространству $\mathfrak{C}$, $F(\bar{v}) \neq 0$ и $D(\bar{s}) \neq 0$, $D(\bar{t}) \neq 0$. Отображения $(v', s', t') \to t'v' - s'$ и $(v', s', t') \to \rho(s') - \rho(t')$ суть рациональные отображения группы $G \times G \times G$ в пространства $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Кроме того, они переводят точку (v, s, t) в 0. Из предложения 2 следует, что $\bar{t}\bar{v} = \bar{s}$ и $\rho(\bar{s}) = \rho(\bar{t})$. Мы видим, что $\rho(\bar{v})$ — тождественный автоморфизм пространства U, так что $\bar{v} \in N$. Следствие доказано.

При тех же обозначениях, что и в предложении 8, мы докажем позже, что размерность группы N всегда равна $d - e$, если K — поле характеристики $p = 0$. Это утверждение, вообще говоря, неверно в случае поля K характеристики $p \neq 0$. Действительно, пусть K — несовершенное поле характеристики $p > 0$, и пусть c — элемент поля K, не являющийся p-й степенью в K. Пусть V — векторное пространство размерности 2 над K, а $\{x, y\}$ — базис пространства V. Для $a \in K$ обозначим через $s(a)$ автоморфизм пространства V, определенный формулами $s(a)x = x + ay$, $s(a)y = y$. Легко заметить, что совокупность преобразований $s(a)$ для $a \in K$ представляет собой неприводимую алгебраическую группу Γ автоморфизмов пространства V, изоморфную аддитивной группе элементов поля K. Пусть G — группа $\Gamma \times \Gamma$. Для a и b из K положим $\rho(s(a), s(b)) = s(a^p - cb^p)$. Очевидно, ρ — рациональное представление группы G. Наименьшей алгебраической группой автоморфизмов пространства V, содержащей группу $\rho(G)$, является группа Γ. Размерность ее равна 1, между тем как размерность группы G равна 2. Ядро представления ρ состоит из тех элементов $(s(a), s(b))$, для которых $a^p - cb^p = 0$. Так как c не является p-й степенью в K, то это последнее условие выполняется только при $a = b = 0$. Это показывает, что ядро представления ρ содержит только единицу группы G и размерность его, следовательно, равна 0.

Вопрос, можно ли в формулировке следствия предложения 8 ослабить условие, заменив требование алгебраической замкнутости поля K требованием, чтобы оно было совершенным, остается пока открытым.

§ 7. Параметрические представления

На протяжении всего параграфа мы будем предполагать, что в пространстве $\mathfrak{E}$ раз навсегда выбрана система координатных функций $(u_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$.

Определение 1. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V и L — надполе поля K, такое, что группа G^L содержит общую точку s группы G. Предположим, что поле L можно получить присоединением к полю K конечного числа элементов $\xi_1, \ldots, \xi_d$ и что заданы n^2 рациональных дробей U_{ij} от d переменных с коэффициентами из поля K, определенных для значений $\xi_1, \ldots, \xi_d$ своих аргументов и таких, что*

$$u_{ij}(s) = U_{ij}(\xi_1, \ldots, \xi_d) \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant n). \tag{1}$$

В этом случае мы будем говорить, что формулой (1) *задается параметрическое представление группы G, и называть $\xi_1, \ldots, \xi_d$ параметрами этого параметрического представления. Если поле L совпадает с полем $K(s)$, то параметрическое представление называется собственным. Если $\xi_1, \ldots, \xi_d$ алгебраически независимы над K, то параметрическое представление называется рациональным. Пусть $a_1, \ldots, a_d$ — элементы некоторого надполя L' поля K, удовлетворяющие следующим условиям:* а) *существует гомоморфизм кольца $K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$ в поле L', отображающий элементы поля K в себя, а элементы ξ_i в a_i $(1 \leqslant i \leqslant d)$;* б) *рациональные дроби U_{ij} определены для значений $a_1, \ldots, a_d$ своих аргументов;* в) *определитель матрицы $(U_{ij}(a_1, \ldots, a_d))$ не равен* 0. *В этом случае мы будем говорить, что элементы $a_1, \ldots, a_d$ образуют систему допустимых значений параметров.*

Предположим, что элементы $a_1, \ldots, a_d$ образуют систему допустимых значений параметров, и пусть φ — гомоморфизм кольца $K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$ в поле L', оставляющий на месте элементы поля K и переводящий элементы ξ_i в элементы a_i $(1 \leqslant i \leqslant d)$. Элементы поля L, представимые в виде xy^{-1}, где x и y — элементы из $K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$, такие, что $\varphi(y) \neq 0$, образуют подкольцо $\mathfrak{r}$ поля L, и гомоморфизм φ может быть продолжен (одним единственным способом) в некоторый гомоморфизм φ' кольца $\mathfrak{r}$ в поле L' (гл. I, § 7, лемма 1). Кольцо $\mathfrak{r}$ будет называться *подкольцом поля L, соответствующим* *системе значений* $(a_1, \ldots, a_d)$ *параметров, а* φ' — *гомоморфизмом, соответствующим этой системе.* Так как $(a_1, \ldots, a_d)$ образуют допустимую систему значений параметров, то элементы $U_{ij}(\xi_1, \ldots, \xi_d) = u_{ij}(s)$ принадлежат $\mathfrak{r}$. Таким образом, $K[s] \subset \mathfrak{r}$ и φ' индуцирует гомоморфизм кольца $K[s]$ в поле L'. Этот гомоморфизм переводит элементы $u_{ij}(s)$ в $U_{ij}(a_1, \ldots, a_d)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Пусть s' — такой элемент пространства $\mathfrak{C}^{L'}$, что

$$u_{ij}(s') = \varphi'(u_{ij}(s)).$$

Тогда ясно, что s' — обратимый элемент, который принадлежит группе $G^{L'}$ (так как является специализацией точки s по отношению к полю K).

Определение 2. *При таких же обозначениях, как в определении* 1, *предположим, что элементы* $a_1, \ldots, a_d$ *образуют допустимую систему значений параметров. Если* s' — *точка группы* $G^{L'}$, *такая, что*

$$u_{ij}(s') = U_{ij}(a_1, \ldots, a_d),$$

то мы будем говорить, что точка s' *накрывается параметрическим представлением и что она получается для значений* $a_1, \ldots, a_d$ *параметров.*

Замечание. Если, например, мы будем говорить, что точка s' группы G накрывается параметрическим представлением, то под этим мы будем подразумевать, что она получается при системе значений параметров, лежащей *в самом поле* K.

Предложение 1. *При обозначениях, введенных в определении* 1, *предположим, что выполнено одно из следующих двух условий:* а) *заданное параметрическое представление — собственное;* б) *поле* K *алгебраически замкнуто. Пусть* H — *полином от* d *переменных с коэффициентами из поля* K, *для которого* $H(\xi_1, \ldots, \xi_d) \neq 0$. *Множество* E *точек группы* G, *накрываемых рассматриваемым параметрическим представлением и получающихся при значениях* $a_1, \ldots, a_d$ *параметров, для которых* $H(a_1, \ldots, a_d) \neq 0$, *алгебраически плотно. Каждый элемент группы* G *может быть представлен в виде произведения двух элементов множества* E.

Запишем рациональные дроби U_{ij}, о которых говорится в определении 1, в виде частного двух взаимно простых полиномов, и пусть H' — произведение знаменателей всех этих выражений. Тогда

$$(HH')(\xi_1, \ldots, \xi_d) \neq 0.$$

В случае а) из леммы 2 § 7 гл. I следует существование полиномиальной функции P на $\mathfrak{C}$, для которой $P(s) \neq 0$, такой, что всякий гомоморфизм кольца $K[s]$ в поле K, не переводящий $P(s)$ в нуль, может быть продолжен в гомоморфизм кольца $K[s][\xi_1, \ldots, \xi_d]$ в поле K, не отображающий в 0 элемент $(HH')(\xi_1, \ldots, \xi_d)$. Функция такого рода существует также и в случае б). Действительно, элемент $(HH')(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ принадлежит тогда полю $K(s)$ и может быть представлен в виде $P_1(s)(P_2(s))^{-1}$, где P_1 и P_2 — полиномиальные функции на $\mathfrak{C}$ и $P_1(s) \neq 0$, $P_2(s) \neq 0$. Положим $P = P_1P_2$. Лемма 1 из § 7 гл. I показывает, что функция P обладает требуемыми свойствами. Множество E_0 точек группы G, для которых $P(s_0) \neq 0$, алгебраически плотно в G. Пусть s_0 — точка из E_0. Ограничение на $K[s]$ гомоморфизма специализации $s \to s_0$ продолжается в гомоморфизм φ кольца $K[s][\xi_1, \ldots, \xi_d]$ в поле K, такой, что

$$\varphi((HH')(\xi_1, \ldots, \xi_d)) \neq 0.$$

Положим $a_i = \varphi(\xi_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$. Так как $(HH')(a_1, \ldots, a_d) \neq 0$, то функции U_{ij} определены для значений $a_1, \ldots, a_d$ своих аргументов. Имеем

$$u_{ij}(s_0) = U_{ij}(a_1, \ldots, a_d),$$

и условие в) определения 1 удовлетворяется, так как $s_0 \in G$. Поэтому $s_0 \in E$, чем и доказывается алгебраическая плотность множества E. Последнее утверждение предложения 1 вытекает из леммы 4 § 4.

Предложение 2. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле. Пусть, далее, G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть R — всюду определенное рациональное отображение группы G в пространство эндоморфизмов конечномерного векторного пространства U над полем K. Предположим, что R переводит группу G в множество $R(G)$ автоморфизмов пространства U и, в частности, единицу группы G в тождественный автоморфизм пространства U. Группа H, порождаемая элементами множества $R(G)$, является неприводимой алгебраической группой. При этом существует целое число*

$m > 0$, *такое, что каждый элемент группы H представим в виде произведения m элементов множества $R(G)$.*

Пусть H' — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства U, содержащая множество $R(G)$. Как известно, группа H' неприводима и существуют такие обобщенные точки $s_1, \ldots, s_k$ группы G, что

$$v = R(s_1) \ldots R(s_k)$$

является общей точкой группы H' (предложение 7 из § 6). Для элементов $t_1, \ldots, t_k$ пространства $\mathfrak{E}$ обозначим через $D(t_1, \ldots, t_k)$ произведение определителей элементов $t_1, \ldots, t_k$. Функция D индуцирует полиномиальную функцию $\neq 0$ на произведении G^k из k экземпляров группы G. Согласно предложению 2 § 7 гл. I, существует полиномиальная функция P на пространстве $\mathfrak{F}$ эндоморфизмов пространства U, обладающая следующими свойствами: если u — точка группы H', такая, что $P(u) \neq 0$, то существует специализация $(t_1, \ldots, t_k)$ точки $(s_1, \ldots, s_k)$, такая, что $(u, t_1, \ldots, t_k)$ — специализация точки $(v, s_1, \ldots, s_k)$ и

$$D(t_1, \ldots, t_k) \neq 0.$$

Ясно, что точки t_j являются специализациями точек s_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ и что определители точек t_j не равны нулю, так что $t_j \in G$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$. Отображение

$$(u', t'_1, \ldots, t'_k) \to u'^{-1} R(t'_1) \ldots R(t'_k)$$

произведения $H' \times G^k$ в пространство $\mathfrak{F}$ — рациональное, всюду определенное отображение. Его значение в точке $(v, s_1, \ldots, s_k)$ — тождественный автоморфизм. Из предложения 2 § 5 следует, что

$$u = R(t_1) \ldots R(t_k).$$

Множество F точек u группы H', для которых $P(u) \neq 0$, алгебраически плотно, и, как мы видели, каждый элемент из F является произведением k элементов множества $R(G)$. Из леммы 4 § 4 вытекает, что каждый элемент из группы H' представим в виде произведения $2k$ элементов множества $R(G)$. Это показывает, что $H' = H$, и предложение 2 доказано.

Следствие 1. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, а ρ — рациональное представление группы G автоморфизмами некоторого конечномер-*

ного векторного пространства над полем K. Если поле K алгебраически замкнуто, то $\rho(G)$ — алгебраическая группа.

Пусть G_1 — алгебраическая компонента единицы группы G. Предложение 2 показывает, что $\rho(G_1)$ — алгебраическая группа. С другой стороны, индекс группы $\rho(G_1)$ в группе $\rho(G)$ конечен, и, следовательно, $\rho(G)$ — алгебраическая группа (предложение 3 из § 3).

Следствие 2. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Если основное поле K алгебраически замкнуто, то коммутант H группы G является алгебраической неприводимой группой. При этом существует такое целое число $m > 0$, что каждый элемент группы H представим в виде произведения коммутаторов от m пар элементов группы G.*

Для доказательства этого утверждения достаточно применить предложение 2 к группе $G \times G$ и рациональному отображению $(s, t) \to sts^{-1}t^{-1}$ этой группы в пространство $\mathfrak{E}$.

Следствие 3. *Пусть $G_1, \ldots, G_h$ — неприводимые алгебраические группы автоморфизмов пространства V. Если основное поле K алгебраически замкнуто, то группа H, порождаемая группами $G_1, \ldots, G_h$, — неприводимая алгебраическая группа и существует такое целое число $m > 0$, что всякий элемент группы H записывается в виде произведения m элементов, каждый из которых принадлежит одной из групп G_i.*

Для доказательства достаточно применить предложение 2 к группе $G_1 \times \ldots \times G_h$ и к рациональному отображению $(s_1, \ldots, s_h) \to s_1 \ldots s_h$ этой группы в пространство $\mathfrak{E}$.

Замечание. Следствие 3 перестает быть справедливым, если опустить условие неприводимости групп $G_1, \ldots, G_h$. Действительно, если V — векторное пространство размерности $\geqslant 2$ и основное поле K — поле комплексных чисел, то нетрудно указать два автоморфизма порядка 2 пространства V, порождающие незамкнутую и поэтому не алгебраическую группу.

Пусть теперь K — некоторое бесконечное поле характеристики $\neq 2$, и пусть B — невырожденная билинейная форма над произведением $V \times V$. Пусть G — множество эндоморфизмов s пространства V, оставляющих неизменной форму B, т. е. таких, что

$$B(sx, sy) = B(x, y) \text{ для всех } (x, y) \in V \times V.$$

Если $s \in G$ и $x \in V$, то из условия $sx = 0$ следует $B(x, y) = 0$ для всех $y \in V$, так что $x = 0$; таким образом, элементы множества G обратимы. Кроме того, легко видеть, что множество G есть группа. Для данных элементов x и y пространства V отображение $s \to B(sx, sy)$, очевидно, является полиномиальной функцией над пространством $\mathfrak{E}$, так что G — алгебраическая группа. Выберем базис $(x_1, \ldots, x_n)$ пространства V и условимся обозначать одной и той же буквой эндоморфизм пространства V и матрицу, соответствующую этому эндоморфизму в выбранном базисе. Кроме того, условимся обозначать буквой B также и матрицу $(B(x_i, x_j))_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$. При этих обозначениях эндоморфизм s принадлежит группе G в том и только в том случае, если ${}^t s \cdot B \cdot s = B$ (где ${}^t A$ обозначает матрицу, которая получается из A транспонированием).

Построим некоторое параметрическое представление группы G_1 — алгебраической компоненты единицы группы G. Обозначим через $\mathfrak{X}$ подпространство пространства $\mathfrak{E}$, состоящее из тех элементов $X \in \mathfrak{E}$, для которых ${}^t X \cdot B + B \cdot X = 0$, и пусть $\{X_1, \ldots, X_d\}$ — базис пространства $\mathfrak{X}$. Пусть L — надполе поля K, получающееся присоединением к полю K d элементов $\xi_1, \ldots, \xi_d$, алгебраически независимых над K. Положим

$$X^* = \sum_{i=1}^{d} \xi_i X_i.$$

Обозначим через $D(A)$ определитель матрицы A и через I единичную матрицу. Элемент $D(I - X^*)$ принадлежит кольцу $K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$ и отличен от 0, так как он принимает значение 1, если вместо всех ξ_i подставить 0 $(1 \leqslant i \leqslant d)$. Положим

$$s^* = (I + X^*)(I - X^*)^{-1}.$$

Тогда

$$(I - {}^t X^*) \cdot {}^t s^* \cdot B \cdot s^* \cdot (I - X^*) = (I + {}^t X^*) \cdot B (I + X^*) =$$
$$= B + {}^t X^* \cdot B \cdot X^* = (I - {}^t X^*) \cdot B (I - X^*),$$

так как, очевидно, ${}^t X^* \cdot B + B \cdot X^* = 0$. Определители матриц $I - {}^t X^*$ и $I - X^*$ не равны нулю, так что ${}^t s^* \cdot B \cdot s^* = B$. Это показывает, что s^* — обобщенная точка группы G. Мы можем даже утверждать, что s^* — обобщенная точка группы G_1. Действительно, пусть P — полиномиальная функция над пространством $\mathfrak{C}$, равная нулю на G_1. Тогда существует полиномиальная функция Q на $\mathfrak{C}$, такая, что PQ обращается в нуль на группе G и $Q(I) \neq 0$. Имеем, следовательно, $P(s^*)Q(s^*) = 0$. Легко видеть, что I — специализация точки s^* (так как коэффициенты матрицы s^* являются рациональными функциями от $\xi_1, \ldots, \xi_d$, определенными при значениях $0, \ldots, 0$ своих аргументов и принимающими при этих значениях аргументов значения, равные коэффициентам матрицы I). Поэтому $Q(s^*) \neq 0$, так что $P(s^*) = 0$, что и доказывает наше утверждение.

Имеют место равенства

$$(I - s^*)(I - X^*) = -2X^*, \quad (I + s^*)(I - X^*) = 2I;$$

отсюда $D(I + s^*) \neq 0$ и $X^* = -(I - s^*)(I + s^*)^{-1}$. Это показывает, что $K(s^*) = K(X^*)$.

Пусть s — элемент группы G, для которого $D(I + s) \neq 0$. Как легко видеть, если положить

$$X = -(I - s)(I + s)^{-1},$$

то ${}^tX \cdot B + B \cdot X = 0$ и $s = (I + X)(I - X)^{-1}$. Отсюда вытекает, что s — специализация точки s^*. Пусть P — полиномиальная функция над пространством $\mathfrak{C}$, такая, что $P(s^*) = 0$; тогда функция $s \to P(s)D(I + s)$ обращается в нуль на группе G и, следовательно, на группе G_1. Но функция $s \to D(I + s)$ на группе G_1 не обращается в нуль (так как $D(2I) \neq 0$). Так как группа G_1 неприводима, то мы можем заключить, что функция P равна нулю на группе G_1. Это показывает, что s^* — общая точка группы G_1. Если представить координаты точки s^* в виде рациональных дробей от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_d$, то получается собственное рациональное параметрическое представление, называемое *параметрическим представлением Кэли*.

Рассмотрим теперь случай, когда билинейная форма B симметрична или кососимметрична. Предположим сначала, что форма B симметрична, так что ${}^tB = B$. Условие ${}^tX \cdot B + B \cdot X = 0$ записывается тогда в виде ${}^t(BX) = -(BX)$. Последнее равенство означает, что матрица $Z = BX$ кососимметрична. Так как, по предположению, форма B не вырождена, то $D(B) \neq 0$ и размерность d пространства $\mathfrak{X}$ равна размерности пространства кососимметрических матриц порядка n (где n — размерность пространства V), так что $d = n(n-1)/2$. Но число d равно также размерности группы G [так как $K(s^*) = K(X^*)$]. Таким образом, в случае симметричной формы B размерность группы G равна $n(n-1)/2$. Из условия ${}^t s \cdot B \cdot s = B$ вытекает, что $(D(s))^2 = 1$, так что $D(s) = \pm 1$. Функция

$$s \to (D(s)-1)(D(s)+1)$$

равна нулю на G, но функция $s \to D(s)+1$ не равна нулю на G_1. Следовательно, определитель каждого элемента из G_1 равен 1. Обратно, все элементы из G с определителем, равным 1, принадлежат группе G_1. Действительно, всякий элемент s группы G может быть представлен в виде произведения конечного числа симметрий (ср. Dieudonné, Sur les groupes classiques, Hermann, Paris, 1948, предложение 8, стр. 20). Определитель симметрий равен -1; если $D(s) = 1$, то s является произведением четного числа симметрий. Достаточно показать, что произведение двух симметрий всегда принадлежит группе G_1. Пусть s_1 и s_2 — симметрии по отношению к двум неизотропным гиперплоскостям W_1 и W_2, и пусть $s = s_1 s_2$. Покажем, что если $D(I+s) = 0$, то гиперплоскости W_1 и W_2 ортогональны. Пусть x — элемент $\neq 0$ из V, для которого $sx = -x$. Точка $(x + s_2 x)/2$ принадлежит гиперплоскости W_2; с другой стороны, эта точка совпадает с точкой $(s_2 x - s_1 s_2 x)/2$ и тем самым ортогональна гиперплоскости W_1. Наше утверждение доказано для случая $s_2 x \neq -x$. Если $s_2 x = -x$, то x ортогональна к W_2 и принадлежит W_1, так как

$$s_1 s_2 x = sx = -x = s_2 x;$$

поскольку $x \neq 0$, мы вновь можем заключить, что гиперплоскости W_1 и W_2 ортогональны. Но всегда можно найти неизотропную гиперплоскость W_3, не ортогональную ни к W_1, ни к W_2. Пусть s_3 — симметрия относительно W_3; тогда

$$s = s_1 s_2 = (s_1 s_3)(s_3 s_2) \text{ и } D(I + s_1 s_3) \neq 0, \quad D(I + s_3 s_2) \neq 0.$$

Но тогда $s_1 s_3$ и $s_3 s_2$ — специализации точки s^* и принадлежат, следовательно, группе G_1, так что $s \in G_1$.

Пусть теперь форма B кососимметрична. Условие ${}^t X \cdot B + B \cdot X = 0$ равносильно тогда тому, что матрица BX симметрична. Как и выше, мы можем заключить, что размерность группы G равна тогда размерности пространства симметрических матриц порядка n, т. е. $n(n+1)/2$. В рассматриваемом случае группа G_1 совпадает с группой G. Действительно, так как поле K бесконечно, то всякий нормальный делитель группы G, отличный от самой группы G, содержится в центре группы G, который является конечной группой порядка 2 (Dieudonné, там же, теорема 1, стр. 12). Наше утверждение вытекает теперь из того факта, что для $n > 1$ группа G_1 не может быть конечной.

§ 8. Алгебра Ли алгебраической группы

Пространство $\mathfrak{E}$ эндоморфизмов пространства V можно рассматривать как алгебру Ли над полем K, операция в которой определена формулой $[X, Y] = XY - YX$. Эту алгебру Ли мы будем обозначать через $\mathfrak{gl}(V)$. Если L — надполе поля K, то алгебра $(\mathfrak{gl}(V))^L$, получающаяся из алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ расширением основного поля, очевидно, совпадает с алгеброй $\mathfrak{gl}(V^L)$.

В дальнейшем нам придется рассматривать различные поля и кольца, содержащие поле K в качестве подполя. Условимся раз навсегда, говоря о деривациях такого поля или кольца, подразумевать их деривации как алгебр над полем K. Так как всякая деривация переводит элемент 1 в 0, то все рассматриваемые нами деривации отображают элементы поля K в 0.

Каждому элементу $X \in \mathfrak{E}$ можно поставить в соответствие эндоморфизм f_X пространства $\mathfrak{E}$, определенный формулой $f_X(s) = Xs$ $(s \in \mathfrak{E})$. Отображение $X \to f_X$ линейно, и для любых X и Y из $\mathfrak{E}$ мы имеем $f_{[X, Y]} = [f_X, f_Y]$. С другой стороны, каждому эндоморфизму пространства $\mathfrak{E}$ можно сопоставить деривацию поля $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$ рациональных функций над пространством $\mathfrak{E}$, естественно соответствующую этому эндоморфизму (гл. I, § 4, определение 5).

Определение 1. *Если $X \in \mathfrak{E}$, то через $\delta(X)$ мы обозначим деривацию поля рациональных функций над пространством $\mathfrak{E}$, естественно соответствующую эндоморфизму $s \to Xs$ пространства $\mathfrak{E}$.*

Отображение $X \to \delta(X)$ пространства $\mathfrak{E}$ в пространство дериваций поля $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$ линейно, и для элементов X и Y из $\mathfrak{E}$ имеем

$$\delta[X, Y] = [\delta(X), \delta(Y)].$$

Эти свойства вытекают из соответствующих свойств отображения $X \to f$ и из результатов § 4 гл. I.

Если R — рациональная функция над пространством $\mathfrak{G}$, определенная в точке s, и если $X \in \mathfrak{G}$, то функция $\delta(X)R$ также определена в точке s и

$$(1) \qquad (\delta(X)R)(s) = -(dR)(s, Xs)$$

(ср. гл. I, § 4, предложение 9); в частности, для линейной функции u над $\mathfrak{G}$ имеем

$$(2) \qquad (\delta(X)u)(s) = -u(Xs).$$

Пусть L — надполе поля K и R — рациональная функция над $\mathfrak{G}$. Временно обозначим через R^L рациональную функцию над пространством $\mathfrak{G}^L$, продолжающую функцию R. Пусть X — элемент пространства $\mathfrak{G}$; он является также и элементом пространства $\mathfrak{G}^L$. Покажем, что рациональная функция $\delta(X)R^L$ над пространством $\mathfrak{G}^L$ продолжает рациональную функцию $\delta(X)R$ над $\mathfrak{G}$. Действительно, пусть s — точка пространства $\mathfrak{G}$, в которой функция R определена. Функции $\delta(X)R$ и $\delta(X)R^L$ принимают в точке s значения $-(dR)(s, Xs)$ и $-(dR^L)(s, Xs)$ соответственно. Согласно предложению 3 § 6 гл. I, эти значения совпадают, что и доказывает наше утверждение. Следовательно, ничто нам не препятствует и впредь отождествлять рациональные функции над пространством $\mathfrak{G}$ с продолжающими их функциями над пространством $\mathfrak{G}^L$. При таком отождествлении формулы (1) и (2) остаются справедливыми для точек s пространства $\mathfrak{G}^L$ [при условии, что в случае формулы (1) функция R определена в точке s]; эти формулы также справедливы, если X — элемент пространства $\mathfrak{G}^L$.

Пусть t — автоморфизм пространства V. В § 1 мы сопоставили автоморфизму t автоморфизм $\eta(t)$ поля $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$, определяемый следующим образом: $\eta(t)R$ для $R \in \mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ обозначает ту функцию, которая получается последовательным применением отображения $s \to ts$ пространства $\mathfrak{G}$ в себя и отображения R. Подобным же образом можно определить автоморфизм $\eta'(t)$ поля $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$, который переводит всякую функцию R в функцию, получающуюся в результате последовательного выполнения отображения $s \to st$ и R. Покажем, что для $X \in \mathfrak{G}$ и для автоморфизма t пространства V имеют место следующие соотношения:

$$(3) \qquad (\eta(t))^{-1}\delta(X)\eta(t) = \delta(tXt^{-1}),$$

$$(4) \qquad (\eta'(t))^{-1}\delta(X)\eta'(t) = \delta(X).$$

Так как $\eta(t)$ и $\eta'(t)$ — автоморфизмы поля $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$, то обе части каждого из этих равенств представляют собой деривации поля $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$. Так как поле $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ порождается полем K и линейными функциями над $\mathfrak{G}$, то достаточно проверить для каждой из этих формул, что обе ее части приводят к одному и тому же результату при применении к линейным функциям u пространства $\mathfrak{G}$. Такую проверку легко произвести с помощью формулы (2) и формул

$$(\eta(t)u)(s) = u(ts), \qquad (\eta'(t)u)(s) = u(st).$$

Заметим, что формулы (3) и (4) остаются справедливыми для случая, когда $X \in \mathfrak{G}^L$ и t — автоморфизм пространства V^L, где L — надполе поля K.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — векторное пространство над K. Пространство рациональных отображений пространства $\mathfrak{G}$ в пространство $\mathfrak{F}$ является тензорным произведением $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \otimes \mathfrak{F}$. Для $X \in \mathfrak{G}$ мы будем обозначать через $\delta(X)$ также эндоморфизм пространства $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \otimes \mathfrak{F}$, равный тензорному произведению эндоморфизма $\delta(X)$ пространства $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ и тождественного отображения пространства $\mathfrak{F}$. Пусть $(u_i)_{i \in I}$ — базис пространства $\mathfrak{F}$. Представим элемент R из $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \otimes \mathfrak{F}$ в виде $\sum\limits_{i \in I} R_i \otimes u_i$, где $R_i \in \mathfrak{R}(\mathfrak{G})$; тогда $\delta(X)R = \sum\limits_{i \in I} \delta(X) R_i \otimes u_i$. Исходя из этого равенства, легко доказать следующие результаты: отображение $X \to \delta(X)$ пространства $\mathfrak{G}$ в пространство эндоморфизмов пространства $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \otimes \mathfrak{F}$ линейно; для X и Y из $\mathfrak{G}$ имеет место равенство $\delta([X, Y]) = [\delta(X), \delta(Y)]$; формулы (1), (2), (3), (4) остаются справедливыми [при этом в (1) R обозначает рациональное отображение пространства $\mathfrak{G}$ в пространство $\mathfrak{F}$, определенное в точке s; в (2) u — линейное отображение пространства $\mathfrak{G}$ в пространство $\mathfrak{F}$; в (3) и (4) $\eta(t)$ и $\eta'(t)$ — соответственно тензорные произведения автоморфизмов $\eta(t)$ и $\eta'(t)$ пространства $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ на тождественное отображение пространства $\mathfrak{F}$]. С другой стороны, если L — надполе поля K, X — точка пространства $\mathfrak{G}^L$, s — точка пространства $\mathfrak{G}^L$, t — автоморфизм пространства V^L, то формула (1) остается справедливой, если функция R определена в точке s; справедливыми остаются также формулы (3) и (4).

Если $\mathfrak{a}$ — векторное подпространство алгебры $\mathfrak{o}(\mathfrak{G})$, то из формулы

$$\delta([X, Y]) = [\delta(X), \delta(Y)]$$

непосредственно следует, что совокупность $X \in \mathfrak{E}$, для которых $\delta(X)$ отображает пространство $\mathfrak{a}$ в себя, является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$.

Определение 2. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть $\mathfrak{a}$ — идеал, соответствующий группе G. Подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, состоящая из тех элементов X, для которых $\delta(X)$ отображает идеал $\mathfrak{a}$ в себя, называется алгеброй Ли группы G.*

Предложение 1. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V и s — обобщенная точка группы G. Каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы элемент X пространства $\mathfrak{E}$ принадлежал алгебре Ли группы G:*

а) $(dP)(s, Xs) = 0$ *для всех элементов P идеала $\mathfrak{a}$, соответствующего группе G;*

б) $(dP)(s, sX) = 0$ *для всех $P \in \mathfrak{a}$.*

Имеем $(dP)(s, Xs) = -(\delta(X)P)(s)$; если X принадлежит алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G и если $P \in \mathfrak{a}$, то $\delta(X)P \in \mathfrak{a}$, так что $(\delta(X)P)(s) = 0$. Это показывает, что условие а) необходимо. Обратно, предположим, что это условие выполнено. Пусть L — надполе поля K, такое, что $s \in G^L$, и пусть t — точка группы G^L. Из формулы (4) следует, что

$$\eta'(t)\,\delta(X)P = \delta(X)\,\eta'(t)P.$$

Если $P \in \mathfrak{a}$, то, очевидно, $\eta'(t)P$ принадлежит идеалу $\mathfrak{a}^L$, соответствующему группе G^L, состоящему из линейных комбинаций элементов из $\mathfrak{a}$ с коэффициентами из поля L. Из условия а) вытекает, что $(\delta(X)\,\eta'(t)P)(s) = 0$, так что

$$(\eta'(t)\,\delta(X)P)(s) = 0 \text{ и } (\delta(X)P)(st) = 0.$$

Но каждая точка группы G может быть представлена как произведение вида st, где $t \in G^L$. Следовательно, функция $\delta(X)P$ равна нулю в каждой точке группы G и принадлежит идеалу $\mathfrak{a}$, так что $X \in \mathfrak{g}$. Так как функция $\eta(s)P$ получается последовательным применением отображения $u \to su$ и отображения P, то из формулы (7) § 4 гл. I следует, что

$$(d\eta(s)P)(I, X) = (dP)(s, sX).$$

Но автоморфизм $\eta(s)$ отображает идеал $\mathfrak{a}^L$ в себя. Для того чтобы было выполнено условие б), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $(dP)(I, X) = 0$ при всех $P \in \mathfrak{a}$ (здесь I обозначает единицу группы G). Однако при изучении условия а) мы видели, что это условие равносильно тому, что X принадлежит алгебре $\mathfrak{g}$.

Следствие. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть H — алгебраическая подгруппа группы G. Тогда алгебра Ли группы H содержится в алгебре Ли группы G.*

Пусть I — единица группы G. Если X — элемент алгебры Ли группы H, то $(dP)(I, X) = 0$ для всех полиномиальных функций P над $\mathfrak{E}$, равных нулю на группе H, и тем самым для всех полиномиальных функций, равных нулю на группе G. Это показывает, что X принадлежит алгебре Ли группы G.

Предложение 2. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G и L — надполе поля K. Алгеброй Ли группы G^L является тогда алгебра $\mathfrak{g}^L$, получающаяся из алгебры $\mathfrak{g}$ расширением основного поля.*

Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал, соответствующий группе G; идеал, соответствующий группе G^L, состоит из линейных комбинаций элементов из $\mathfrak{a}$ с коэффициентами из поля L. Для того чтобы элемент X из $\mathfrak{E}^L$ принадлежал алгебре Ли группы G^L, необходимо и достаточно, чтобы $(dP)(I, X) = 0$ для всех $P \in \mathfrak{a}$ (где I — единица группы G). Но для $P \in \mathfrak{a}$ линейная функция $X \to (dP)(I, X)$ на пространстве $\mathfrak{E}^L$ является продолжением некоторой линейной функции на пространстве $\mathfrak{E}$. Решения в $\mathfrak{E}^L$ системы уравнений $(dP)(I, X) = 0$ (для $P \in \mathfrak{a}$) — линейные комбинации с коэффициентами из L решений этой системы, принадлежащих пространству $\mathfrak{E}$, что и доказывает предложение 2.

Предложение 3. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V и G_1 — алгебраическая компонента единицы группы G. Тогда алгебра Ли группы G_1 совпадает с алгеброй Ли группы G.*

Из следствия предложения 1 вытекает, что алгебра Ли группы G_1 содержится в алгебре Ли группы G. Пусть X — элемент алгебры Ли группы G, и пусть P — полиномиальная функция над $\mathfrak{E}$, равная нулю на G_1. Пусть I — единица группы G. Тогда существует полиномиальная функция Q на пространстве $\mathfrak{E}$, такая, что PQ обращается в нуль на G и $Q(I) \neq 0$ (теорема 2 из § 3). Имеет место равенство

$$0 = (dPQ)(I, X) = ((dP)(I, X))Q(I) + P(I)((dQ)(I, X)).$$

Так как $P(I) = 0$, $Q(I) \neq 0$, то $(dP)(I, X) = 0$. Это показывает, что X принадлежит алгебре Ли группы G_1.

Пусть теперь G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Пусть $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$ — поле рациональных функций над пространством $\mathfrak{E}$, и пусть $\mathfrak{A}$ — множество рациональных функций над $\mathfrak{E}$, имеющих след на группе G (т. е. таких функций, которые определены по крайней мере в одной точке группы G). Если R и S принадлежат $\mathfrak{A}$, то по меньшей мере в одной точке группы G функции R и S определены одновременно. Отсюда легко заключить, что множество $\mathfrak{A}$ — подкольцо поля $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$. Отображение, сопоставляющее каждому элементу кольца $\mathfrak{A}$ его след на группе G, является, очевидно, гомоморфизмом кольца $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{R}(G)$ рациональных функций на группе G. Пусть $\mathfrak{N}$ — ядро этого гомоморфизма. Разумеется, пересечение $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ — идеал $\mathfrak{a}$, соответствующий группе G. Пусть R — элемент из $\mathfrak{N}$; его можно представить в виде $R = PQ^{-1}$, где P и Q принадлежат $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$ и $Q \bar{\in} \mathfrak{a}$. Тогда $P = RQ \in \mathfrak{N}$, так что $P \in \mathfrak{a}$ и $Q^{-1} \in \mathfrak{A}$. Мы видим, что $\mathfrak{N}$ — идеал, порожденный идеалом $\mathfrak{a}$ в кольце $\mathfrak{A}$. Пусть X — элемент алгебры Ли группы G. Деривация $\delta(X)$ поля $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$ отображает кольцо $\mathfrak{A}$ в себя [так как если функция R определена в точке $s \in G$, то в той же точке определена и функция $\delta(X)R$]. Кроме того, $\delta(X)$ отображает в себя идеал $\mathfrak{a}$ и, следовательно, также идеал $\mathfrak{N}$. Так как $\mathfrak{R}(G)$ изоморфно $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$, мы получаем деривацию $\delta(X)$ поля $\mathfrak{R}(G)$ со следующим свойством: если элемент R из $\mathfrak{R}(G)$ — след на группе G элемента $\tilde{R}$ из $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$, то $\delta(X)R$ — след на G элемента $\delta(X)\tilde{R}$. Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — векторное пространство над полем K. Пространство рациональных отображений группы G в $\mathfrak{F}$ является тензорным произведением $\mathfrak{R}(G) \otimes \mathfrak{F}$. Для элемента X алгебры Ли группы G через $\delta(X)$ мы обозначим также линейное отображение пространства $\mathfrak{R}(G) \otimes \mathfrak{F}$ в себя, являющееся тензорным произведением построенной нами деривации $\delta(X)$ поля $\mathfrak{R}(G)$ на тождественное отображение пространства $\mathfrak{F}$. Легко доказать следующие свойства оператора $\delta(X)$:

Отображение $X \to \delta(X)$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *группы* G *в пространство эндоморфизмов пространства* $\mathfrak{R}(G) \otimes \mathfrak{F}$ *линейно, и для* X *и* Y *из* $\mathfrak{g}$ *имеет место равенство* $\delta([X, Y]) = [\delta(X), \delta(Y)]$;

если рациональное отображение R *группы* G *в пространство* $\mathfrak{F}$ *определено в точке* s *группы* G, *то в той же точке определено отображение* $\delta(X)R$;

если рациональное отображение R *группы* G *в пространство* $\mathfrak{F}$ *является следом рационального отображения* $\tilde{R}$ *пространства* $\mathfrak{E}$ *в* $\mathfrak{F}$, *то* $\delta(X)R$ — *след на* G *отображения* $\delta(X)\tilde{R}$;

пусть t — *точка группы* G; *для рационального отображения* R *группы* G *в пространство* $\mathfrak{F}$ *обозначим через* $\eta(t)R$ *и* $\eta'(t)R$ *отображения, получаемые последовательными применениями отображений* $s \to ts$ *и* $s \to st$ *группы* G *в себя и отображения* R; *тогда указанные выше формулы* (3) *и* (4) *остаются верными для отображения* $\delta(X)$ *пространства* $\mathfrak{R}(G) \otimes \mathfrak{F}$ *в себя, соответствующего элементу* X *алгебры* $\mathfrak{g}$ [заметим, что из формулы (4), примененной к оператору $\delta(X)$ в $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})$, непосредственно следует, что $tXt^{-1} \in \mathfrak{g}$ для $X \in \mathfrak{g}$ и $t \in G$].

Пусть, с другой стороны, L — надполе поля K и R^L — рациональное отображение группы G^L в пространство $\mathfrak{F}^L$, продолжающее рациональное отображение R группы G в $\mathfrak{F}$. Всякий элемент X алгебры $\mathfrak{g}$ принадлежит также алгебре Ли $\mathfrak{g}^L$ группы G^L, и, как непосредственно видно, отображение $\delta(X)R^L$ продолжает отображение $\delta(X)R$. Ничто, следовательно, не мешает отождествлять отображение R с отображением R^L. При этом формулы (3) и (4) остаются справедливыми для $t \in G^L$ и $X \in \mathfrak{g}^L$.

Пусть теперь L — надполе поля K и x — точка пространства V^L. Пусть D — заданная деривация поля L. Тогда существует одна и только одна точка Dx пространства V^L, такая, что $u(Dx) = D(u(x))$ для всех линейных функций u над пространством V (при этом мы отождествляем u с линейной функцией над V^L, продолжающей линейную функцию u над V). Действительно, в качестве Dx можно выбрать образ точки x при отображении пространства V^L, которое является тензорным произведением отображения D поля L и тождественного отображения пространства V в себя. Единственность точки Dx очевидна.

Определение 3. *Пусть L — надполе поля K, x — точка пространства V^L и D — деривация поля L. Через Dx мы будем обозначать точку пространства V^L, такую, что $u(Dx) = D(u(x))$ для всех линейных функций u над пространством V.*

Легко заметить, что $Dx = 0$ для всех $x \in V$.

Лемма 1. *При таких же обозначениях, как в определении 3, пусть R — рациональная функция над пространством V; отождествим эту функцию с продолжающей ее рациональной функцией над V^L. Если функция R определена в точке x, то $D(R(x)) = (dR)(x, Dx)$.*

Рациональные функции над пространством V, определенные в точке x, образуют подкольцо $\mathfrak{R}_x$ поля рациональных функций над V, и отображение φ: $S \to S(x)$ является гомоморфизмом кольца $\mathfrak{R}_x$ в поле L. Из определения дифференциалов следует, что отображение $S \to (dS)(x, Dx)$ является косой деривацией типа (φ, φ) кольца $\mathfrak{R}_x$ в поле L. То же самое, очевидно, имеет место и для отображения $S \to D(S(x))$. Обе эти косые деривации совпадают на множестве линейных функций над пространством V и, следовательно, также на алгебре $\mathfrak{p}(V)$ полиномиальных функций над V (следствие предложения 3 § 3 гл. I). Существуют элементы P и Q из $\mathfrak{p}(V)$, такие, что $RQ = P$ и $Q(s) \neq 0$[1]. Отсюда

$$D(R(x))Q(x) + R(x)D(Q(x)) = D(P(x)),$$

$$((dR)(x, Dx))Q(x) + R(x)((dQ)(x, Dx)) = (dP)(x, Dx)$$

и

$$(dP)(x, Dx) = D(P(x)), \qquad (dQ)(x, Dx) = D(Q(x)).$$

Из этого непосредственно следует, что $D(R(x)) = (dR)(x, Dx)$.

Из определения легко вытекает, что для $a \in L$ и $x \in V$ имеет место равенство $D(ax) = (Da)x$. При $x \in V^L$ можно положить $x = \sum_{i=1}^{h} a_i x_i$, где $a_i \in L$ и $x_i \in V$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$, так что $ax = \sum_{i=1}^{h} (aa_i) x_i$. Но тогда легко заключить, что $D(ax) = (Da)x + a\,Dx$.

[1]) Это доказывается точно так же, как лемма 3 § 5.

Лемма 2. *При тех же обозначениях, что и в определении* 3, *предположим, что на пространстве V определена структура алгебры над полем K; тогда V^L — алгебра над полем L. Для x и y из V^L имеем*

$$D(xy) = (Dx)\,y + x\,(Dy).$$

Если V — алгебра с единицей и если x — обратимый элемент в V^L, то $D(x^{-1}) = -x^{-1}\cdot Dx\cdot x^{-1}$.

Положим $x = \sum_{i=1}^{h} a_i x_i$, $y = \sum_{j=1}^{h'} b_j y_j$, где a_i, b_j принадлежат полю L, а x_i, y_j — алгебре V. Тогда

$$xy = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{h'} a_i b_j x_i y_j,$$

так что

$$D(xy) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{h'} (Da_i)\, b_j x_i y_j + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{h'} a_i\,(Db_j)\, x_i y_j = \\ = (Dx)\,y + x\,(Dy).$$

Если x — обратимый элемент, то $0 = D(1) = (Dx)\,x^{-1} + x\,(D(x^{-1}))$, и мы получаем вторую формулу леммы 2.

Замечание. Если $y \in V$, то $Dy = 0$ и из леммы 2 следует, что $D(xy) = (Dx)\,y$, $D(yx) = y\,Dx$.

Деривации D поля L соответствует также отображение пространства $\mathfrak{G}^L$ в себя.

Лемма 3. *Пусть L — надполе поля K, D — деривация поля L, X — элемент пространства $\mathfrak{G}^L$ и x — элемент пространства V^L. Тогда*

$$D(Xx) = (DX)\,x + X\,(Dx).$$

Пусть сперва $x \in V$. Если u — линейная функция над пространством V, то отображение $Y \to u(Yx)$ — линейная функция w над пространством $\mathfrak{G}$ и $w(Y) = u(Yx)$ для всех $Y \in \mathfrak{G}^L$. Имеем

$$u(D(Xx)) = D(u(Xx)) = D(w(X)) = w(DX) = u((DX)\,x),$$

так что $D(Xx) = (DX)\,x$. Так как $Dx = 0$, то лемма 3 доказана для этого частного случая. В общем случае положим

$x=\sum_{i=1}^{h} a_i x_i$, где $a_i \in L$ и $x_i \in V$. Тогда $Xx=\sum_{i=1}^{h} a_i X x_i$, так что

$$D(Xx)=\sum_{i=1}^{h} a_i (DX) x_i + \sum_{i=1}^{h} (Da_i) X x_i =$$
$$=(DX)x + X\left(\sum_{i=1}^{h} (Da_i) x_i\right) = (DX)x + X(Dx).$$

Предложение 4. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, L — надполе поля K и s — точка группы G^L. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Если D — деривация поля L, то точка $(Ds)s^{-1}$ принадлежит алгебре Ли $\mathfrak{g}^L$ группы G^L. Предположим, кроме того, что группа G неприводима и что s — общая точка группы G. Тогда для каждого $X \in \mathfrak{g}^{K(s)}$ существует одна и только одна деривация D_X поля $K(s)$, для которой $D_X s = Xs$.*

Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал, соответствующий группе G, и пусть P — любой элемент из $\mathfrak{a}$. Имеем $(dP)(s, Ds)=0$ [это вытекает из леммы 1 и из того, что $P(s)=0$]. Согласно предложению 1, отсюда следует, что $(Ds)s^{-1}$ принадлежит алгебре $\mathfrak{g}^L$. Предположим теперь, что группа G неприводима и что s — общая точка группы G. Пусть $\mathfrak{R}$ — поле рациональных функций над G. Отображение $R \to R(s)$ является тогда изоморфизмом φ поля $\mathfrak{R}$ на поле $K(s)$. Пусть X — элемент из $\mathfrak{g}$. Оператор $-\delta(X)$ есть деривация поля $\mathfrak{R}$. Изоморфизм φ сопоставляет ему деривацию D_X поля $K(s)$. Если u — линейная функция над пространством $\mathfrak{E}$, то $(\delta(X)u)(s)=-u(Xs)$ [ср. формулу (2)]. Поэтому имеем $D_X(u(s))=u(Xs)$, так что $Ds=Xs$. Но деривации поля $K(s)$ образуют векторное пространство над полем $K(s)$. Отсюда заключаем, что для каждого $X \in \mathfrak{g}^{K(s)}$ существует деривация D_X поля $K(s)$, для которой $D_X s = Xs$. Эта деривация однозначно определена. Действительно, из равенства $Ds=Xs$ вытекает, что $D(u(s))=u(Xs)$ для всех линейных функций u над $\mathfrak{E}$, и наше утверждение следует из того, что поле $K(s)$ порождается полем K и элементами вида $u(s)$.

Теорема 5. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Тогда размерность алгебры Ли группы G равна размерности группы G.*

Пусть G_1 — алгебраическая компонента единицы группы G. Группы G и G_1 имеют, по определению, одинаковую размерность, а алгебры Ли этих групп совпадают (предложение 3). Следовательно, теорему 5 достаточно доказать для случая неприводимой группы G. Пусть s — общая точка группы G. Используя обозначения и результаты предложения 4, мы убеждаемся, что отображение $X \to D_X$ — изоморфизм пространства $\mathfrak{g}^{K(s)}$ на векторное пространство над полем $K(s)$, состоящее из дериваций поля $K(s)$. Но поле $K(s)$ изоморфно полю рациональных функций над группой G и поэтому сепарабельно над полем K (следствие предложения 2 из § 5). Размерность пространства дериваций поля $K(s)$ равна, следовательно, степени трансцендентности поля $K(s)$ над полем K (Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 9, n° 3, теорема 2[1])), т. е. равна размерности группы G. Это доказывает теорему 5.

Следствие. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, а H — алгебраическая подгруппа группы G. Для того чтобы индекс подгруппы H в группе G был конечен, необходимо и достаточно, чтобы алгебра Ли подгруппы H совпадала с алгеброй Ли всей группы G.*

Подгруппа H — конечного индекса в группе G тогда и только тогда, когда ее размерность равна размерности группы G (предложение 4 § 6). Следствие сразу вытекает теперь из теоремы 5 и из того факта, что алгебра Ли группы H является подалгеброй алгебры Ли группы G (следствие предложения 1).

Предложение 5. *Пусть V' — конечномерное векторное пространство над полем K, и пусть G и G' — алгебраические группы автоморфизмов пространств V и V' соответственно. Алгебра Ли группы $G \times G'$ является тогда произведением $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ групп G и G'.*

Замечание. В этой формулировке произведение $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ отождествляется с множеством эндоморфизмов пространства $V \times V'$ вида (X, X'), где $X \in \mathfrak{g}$ и $X' \in \mathfrak{g}'$.

Пусть G_1 и G_1' — алгебраические компоненты единиц групп G и G'. Группа $G_1 \times G_1'$ неприводима (предложение 2 § 3) и, разумеется, является подгруппой конечного индекса в группе $G \times G'$; следовательно, это алгебраическая компо-

1) См. добавление переводчика в конце книги, стр. 267. — *Прим. перев.*

нента единицы группы $G \times G'$ (теорема 2 § 3). Предложение 3 показывает, что предложение 5 достаточно доказать для случая неприводимых групп G и G'. Пусть в этом случае $\mathfrak{R}(G)$ и $\mathfrak{R}(G')$ — поля рациональных функций над группами G и G'. Пусть X — элемент алгебры $\mathfrak{g}$; этому элементу соответствует деривация $\delta(X)$ поля $\mathfrak{R}(G)$. Пусть $\Delta(X)$ — линейное отображение произведения $\mathfrak{R}(G) \otimes \mathfrak{R}(G')$ в себя, являющееся тензорным произведением отображения $\delta(X)$ и тождественного отображения поля $\mathfrak{R}(G')$ на себя; тогда, если $R \in \mathfrak{R}(G)$ и $R' \in \mathfrak{R}(G')$, то

$$\Delta(X)(R \otimes R') = (\delta(X) R) \otimes R'.$$

Легко проверить, что ΔX — деривация алгебры $\mathfrak{R}(G) \otimes \mathfrak{R}(G')$. Пусть $\mathfrak{R}(G \times G')$ — поле рациональных функций над группой $G \times G'$. Временно отождествим тензорное произведение $\mathfrak{R}(G) \otimes \mathfrak{R}(G')$ с подалгеброй поля $\mathfrak{R}(G \times G')$, соответствующей ему при изоморфизме φ предложения 2 § 4; $\mathfrak{R}(G \times G')$ является тогда полем отношений алгебры $\mathfrak{R}(G) \otimes \mathfrak{R}(G')$, и деривация $\Delta(X)$ может быть продолжена в деривацию поля $\mathfrak{R}(G \times G')$, которую мы вновь обозначим через $\Delta(X)$. Существует общая точка (s, s') группы $G \times G'$ в пространстве $\mathfrak{E}^{\mathfrak{R}(G \times G')}$, для которой $S = S(s, s')$ при всех $S \in \mathfrak{R}(G \times G')$ (см. замечание к доказательству теоремы 4 из § 6). Пусть u — линейная функция над пространством $\mathfrak{E}$ и $\bar{u}$ — функция, индуцированная функцией u на группе G. Тогда

$$\Delta(X)(\bar{u} \otimes 1) = \delta(X)\bar{u} \otimes 1 \quad \text{и} \quad (\delta(X)\bar{u})(s) = -u(Xs)$$

и, следовательно, $(\Delta(X)(\bar{u} \otimes 1))(s, s') = -u(Xs)$. С другой стороны, если u' — линейная функция над пространством $\mathfrak{E}'$ эндоморфизмов пространства V', то $\Delta(X)(1 \otimes \bar{u}') = 0$. Но для всякой линейной функции v над пространством эндоморфизмов пространства $V \times V'$ ее ограничение $\bar{v}$ на группу $G \times G'$ является суммой выражений вида $\bar{u} \otimes 1$ и $1 \otimes \bar{u}'$. Отсюда заключаем, что

$$(\Delta(X)\bar{v})(s, s') = -v(Xs, 0)$$

и, следовательно,

$$(\Delta(X))(s, s') = -(Xs, 0) = -(X, 0)(s, s').$$

Если $\mathfrak{g}''$ — алгебра Ли группы $G \times G'$, то из предложения 4 следует, что элемент $(X, 0)$ принадлежит алгебре $(\mathfrak{g}'')^{K(s, s')}$.

Так как элемент $(X, 0)$ принадлежит пространству эндоморфизмов пространства $V \times V'$, то он лежит в $\mathfrak{g}''$. Равным образом $(0, X') \in \mathfrak{g}''$ для всех $X' \in \mathfrak{g}'$. Так как $(X, X') = (X, 0) + (0, X')$, то $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}''$. Но из теоремы 5 следует, что размерности алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ равны размерностям групп G и G' соответственно, а предложение 6 § 6 показывает, что размерность группы $G \times G'$ равна сумме размерностей групп G и G'. Так как размерность алгебры $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ — сумма размерностей алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$, то алгебры $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ и $\mathfrak{g}''$ имеют одну и ту же размерность и, следовательно, $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}''$.

Если G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, то элементы из $\mathfrak{E}$, представимые в виде линейных комбинаций элементов из G, образуют подалгебру ассоциативной алгебры $\mathfrak{E}$.

Определение 4. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Под оболочкой группы G мы будем понимать совокупность линейных комбинаций элементов группы G.*

Предложение 6. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Алгебра Ли группы G содержится тогда в оболочке группы G.*

Обозначим через A оболочку группы G. Пусть L — надполе поля K. Покажем сперва, что оболочка группы G^L совпадает с алгеброй A^L, получающейся из алгебры A расширением основного поля. Так как G содержится в алгебре A^L, то ясно, что A^L содержится в оболочке группы G^L. Пусть теперь u — линейная функция на $\mathfrak{E}$, обращающаяся в нуль на A. Тогда u принадлежит идеалу, соответствующему группе G. Отсюда следует, что функция u, рассматриваемая как линейная функция над пространством $\mathfrak{E}^L$, обращается в нуль на группе G^L и, следовательно, на оболочке группы G^L. Это показывает, что оболочка группы G^L совпадает с алгеброй A^L. Выберем теперь общую точку s алгебраической компоненты единицы группы G, и пусть $L = K(s)$. Если X — элемент алгебры Ли группы G, то существует деривация D_X поля L, такая, что $D_X s = Xs$. Так как $s \in A^L$, то можно положить $s = \sum_{i=1}^{h} a_i s_i$, где $a_i \in L$ и $s_i \in G$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$.

Имеем $D_X s = \sum_{i=1}^{h} (D_X a_i) s_i$, так что $D_X s \in A^L$ и, следовательно, $X = (D_X s) s^{-1} \in A^L$. Но тогда $\dot{X} \in A^L \cap \mathfrak{E} = A$, что и доказывает предложение 6.

Позже мы докажем, что в случае поля K характеристики нуль и неприводимой группы G оболочка группы G порождается (как ассоциативная алгебра) элементом 1 и элементами алгебры Ли группы G. Этот результат не всегда имеет место в случае полей характеристики $\neq 0$.

§ 9. Дифференциал рационального представления

Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть R — рациональное отображение группы G в векторное пространство $\mathfrak{F}$ над полем K. Пусть $\tilde{R}$ — такое рациональное отображение пространства $\mathfrak{E}$ в пространство $\mathfrak{F}$, что R — след отображения $\tilde{R}$ на группе G, и пусть s — точка группы G, в которой отображение $\tilde{R}$ определено. Пусть X — элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Как мы знаем, отображение $\delta(X) R$ — след на G отображения $\delta(X) \tilde{R}$ и

$$(\delta(X) \tilde{R})(s) = -(d\tilde{R})(s, Xs).$$

Естественно обозначить значение, принимаемое в точке s отображением $-\delta(X) R$, символом $(dR)(s, Xs)$. Символ $(dR)(s, Y)$ определен, следовательно, если рациональное отображение R определено в точке s и если Y — элемент множества $\mathfrak{g}s$.

Предложение 1. *Пусть R — рациональное отображение неприводимой алгебраической группы G автоморфизмов пространства V в алгебраическую группу H автоморфизмов некоторого конечномерного пространства U над полем K. Пусть s — точка из G, в которой отображение R определено, а X — элемент алгебры Ли группы G. Тогда*

$$(dR)(s, Xs) = YR(s),$$

где Y — элемент алгебры Ли группы H.

Пусть $\mathfrak{F}$ — пространство эндоморфизмов пространства U. Положим

$$Y = ((dR)(s, Xs))(R(s))^{-1}.$$

Для доказательства того, что элемент Y принадлежит алгебре Ли группы H, достаточно установить равенство

$(dF)(R(s), YR(s))=0$ для всех полиномиальных функций F над пространством $\mathfrak{F}$, обращающихся в нуль на группе H (предложение 1 § 8). Пусть $\tilde{R}$ — рациональное отображение пространства $\mathfrak{E}$ в пространство $\mathfrak{F}$, определенное в точке s, такое, что R — след отображения $\tilde{R}$ на группе G. Тогда $(dR)(s, Xs) = YR(s) = Y\tilde{R}(s)$. С другой стороны, легко заметить, что композиция $F \circ R$ является следом на G для $F \circ \tilde{R}$ и что эта композиция совпадает с нулевым отображением группы G в пространство $\mathfrak{F}$. Так как $s \in G$, то $(d(F \circ \tilde{R}))(s, Xs)=0$. Из формулы (7) § 4 гл. 1 следует, что $(d(F \circ \tilde{R}))(s, Xs) = (dF)(\tilde{R}(s), Y\tilde{R}(s))$. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. *При таких же обозначениях, как в предложении* 1, *предположим дополнительно, что группа H неприводима и что дано рациональное отображение S группы H в векторное пространство $\mathfrak{G}$ над полем K, причем S определено в точке $R(s)$. Тогда*

$$(d(S \circ R))(s, Xs) = (dS)(R(s), YR(s)).$$

При тех же обозначениях, что и в доказательстве предложения 1, пусть $\tilde{S}$ — рациональное отображение пространства $\mathfrak{F}$ в пространство $\mathfrak{G}$, определенное в точке $R(s)$ и такое, что S — след отображения $\tilde{S}$ на группе H. Тогда, как нам известно, существует композиция $\tilde{S} \circ \tilde{R}$, следом которой на группе G является композиция $S \circ R$. Предложение 2 вытекает теперь непосредственно из формулы (7) § 4 гл. I.

Пусть R — рациональное отображение группы G в векторное пространство $\mathfrak{F}$, и пусть s — общая точка группы G. Положим $L=K(s)$; если X — элемент алгебры Ли группы G, то существует деривация D_X поля L, для которой $D_X s = Xs$ (предложение 4 из § 8). Очевидно, отображение R определено в точке s и $R(s)$ — точка пространства $\mathfrak{F}^L$. Символ $D_X R(s)$ — представляет также точку пространства $\mathfrak{F}^L$ (определение 3 из § 8). Докажем равенство

$$\boxed{D_X R(s) = (dR)(s, Xs).} \tag{1}$$

Пусть, действительно, u — линейная функция над пространством $\mathfrak{F}$. Имеем

$$u(D_X R(s)) = D_X(u(R(s))) = D_X((u \circ R)(s)) = (d(u \circ R))(s, Xs)$$

(лемма 1 § 8). Из предложения 2 следует, что

$$(d(u \circ R))(s, Xs) = (du)(R(s), (dR)(s, Xs)).$$

В силу линейности функции u, последнее выражение равно $u((dR)(s, Xs))$. Поэтому $u(D_X R(s)) = u((dR)(s, Xs))$ для всех линейных функций u над пространством $\mathfrak{F}$, что и доказывает формулу (1).

Теорема 6. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V и ρ — рациональное представление группы G автоморфизмами конечномерного пространства U над полем K. Пусть H — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов, содержащая группу $\rho(G)$. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G. Если X — элемент алгебры $\mathfrak{g}$, а s — обобщенная точка группы G, то*

$$(d\rho)(s, Xs) = ((d\rho)(I, X))\rho(s),$$

где I — единица группы G. Если s — общая точка группы G и D_X — деривация поля $K(s)$, для которой $D_X s = Xs$, то

$$D_X \rho(s) = ((d\rho)(I, X))\rho(s)$$

и D_X отображает поле $K(\rho(s))$ в себя. Отображение $X \to (d\rho)(I, X)$ является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли группы H.

Пусть L — надполе поля K, для которого $s \in G^L$. Рациональное отображение группы G^L, продолжающее отображение ρ, является рациональным представлением группы G^L (предложение 4 из § 5). Введя в рассмотрение группу G^L вместо группы G, мы видим, что первое утверждение теоремы 6 достаточно доказать для случая $s \in G$. Обозначим через M рациональное отображение $t \to ts$ группы G в себя, а через M' — отображение $u \to u\rho(s)$ группы H в себя. Отображение M является следом на группе G отображения $\tilde{M}: t \to ts$ пространства $\mathfrak{E}$ в себя. Так как $\tilde{M}$ — линейное отображение, то

$$(d\tilde{M})(I, X) = (d\tilde{M})(I, X) = M(X) = Xs.$$

Равным образом

$$(dM')(\rho(I), (d\rho)(I, X)) = ((d\rho)(I, X))\rho(s).$$

С помощью предложения 2 мы заключаем, что

$$(d(\rho \circ M))(I,\ X) = (d\rho)(s,\ Xs),$$

$$(d(M' \circ \rho))(I,\ X) = ((d\rho)(I,\ X))\,\rho(s).$$

Но так как отображение ρ — представление, то $\rho \circ M = M' \circ \rho$. Первое утверждение теоремы вытекает теперь из двух последних формул.

Предположим теперь, что s—общая точка группы G. Положим $Y_X = (d\rho)(I,\ X)$. Из формулы (1) и из первого утверждения теоремы 6 следует, что $D_X\rho(s) = Y_X\rho(s)$. Если выбрать систему координатных функций для пространства $\mathfrak{J}$ эндоморфизмов пространства U, то координаты элемента Y_X будут принадлежать полю K. Тогда образы при отображении D_X координат элемента $\rho(s)$ принадлежат полю $K(\rho(s))$. Но D_X индуцирует деривацию поля $K(\rho(s))$ в поле $K(s)$, и поле $K(\rho(s))$ порождается полем K и координатами элемента $\rho(s)$. Это показывает, что D_X отображает поле $K(\rho(s))$ в себя. Отображение $X \to Y_X$ алгебры $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли группы H, очевидно, линейно. Для X и X' из $\mathfrak{g}$ имеем

$$[D_X,\ D_{X'}]\,s = D_X X's - D_{X'} Xs = X'D_Xs - XD_{X'}s$$

(ср. замечание к доказательству леммы 2 из § 8), так что

$$[D_X,\ D_{X'}]\,s = -[X,\ X']\,s$$

и, следовательно,

$$D_{[X,\,X']} = -[D_X,\ D_{X'}].$$

Легко также убедиться, что

$$[D_X,\ D_{X'}]\,\rho(s) = -[Y_X,\ Y_{X'}]\,\rho(s),$$

так что

$$Y_{[X,\,X']} = [Y_X,\ Y_{X'}].$$

Это показывает, что отображение $X \to Y_X$ — гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Теорема 6 доказана.

Определение 1. *Пусть G—алгебраическая группа автоморфизмов пространства V и ρ — рациональное представление группы G автоморфизмами конечномерного векторного пространства U над полем K. Пусть G_1 — алгебраическая компонента единицы группы G, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G (и группы G_1) и ρ_1 — ограничение представления ρ на группу G_1.*

Гомоморфизм $X \to (d\rho_1)(I, X)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (где I — единица группы G) называется дифференциалом представления ρ и обозначается через $d\rho$.

Заметим, что если L — надполе поля K, то дифференциал представления ρ, рассматриваемого как рациональное представление группы G^L (ср. предложение 4 § 5), является гомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}^L$ группы G^L, продолжающим дифференциал представления ρ, рассматриваемого как рациональное представление группы G.

Предложение 3. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, ρ — рациональное представление группы G в алгебраическую группу H автоморфизмов конечномерного векторного пространства U над полем K и σ — рациональное представление группы H. Тогда*

$$d(\sigma \circ \rho) = d\sigma \circ d\rho.$$

Пусть G_1 — алгебраическая компонента единицы группы G. Из предложения 7 § 6 следует, что представление ρ отображает группу G_1 в алгебраическую компоненту единицы группы H. Предложение 3 поэтому достаточно доказать для случая неприводимых групп G и H. Но в этом случае оно непосредственно следует из предложения 2 и из того факта, что отображение ρ переводит единицу группы G в единицу группы H.

Если H — алгебраическая подгруппа алгебраической группы G автоморфизмов пространства V, то дифференциал тождественного отображения группы H в G является, очевидно, тождественным отображением алгебры Ли группы H в алгебру Ли группы G. Из этого замечания и из предложения 3 вытекает, что если ρ — рациональное представление группы G, то ограничение дифференциала $d\rho$ на алгебру Ли группы H является дифференциалом ограничения ρ на группу H.

Если рациональное представление ρ группы G автоморфизмами конечномерного векторного пространства U переводит все элементы группы G в тождественный автоморфизм J пространства U, то дифференциал $d\rho$ этого представления отображает все элементы алгебры Ли группы G в 0. Это утверждение достаточно доказать для случая неприводимой группы G. Пусть s — общая точка группы G, так что $\rho(s) = J$. При обозначениях теоремы 6 для $X \in \mathfrak{g}$ имеем

$$((d\rho)(X))\,J = D_X J = 0,$$

так как координаты элемента J (относительно некоторой системы координатных функций для пространства эндоморфизмов пространства U) принадлежат полю K. Поэтому $(d\rho)(X)=0$. Отсюда получаем следующий результат:

Предложение 4. *Пусть ρ — рациональное представление алгебраической группы G, и пусть N — ядро представления ρ. Тогда $(d\rho)(X)=0$ для всех элементов X алгебры Ли группы N.*

Несколько позже мы убедимся, что и, обратно, в случае поля K характеристики 0 из условия $(d\rho)(X)=0$ следует, что эндоморфизм X принадлежит алгебре Ли группы N. Мы также увидим, что для полей характеристики, отличной от 0, это обратное утверждение не всегда верно.

Предложение 5. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V и ρ — рациональное представление группы G автоморфизмами конечномерного пространства U над полем K. Пусть H — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства U, содержащая группу $\rho(G)$. Пусть s — общая точка алгебраической компоненты единицы группы G. Если поле $K(s)$ — сепарабельное расширение поля $K(\rho(s))$, то $d\rho$ отображает алгебру Ли группы G на алгебру Ли группы H.*

Пусть G_1 и H_1 — алгебраические компоненты единиц групп G и H соответственно. Наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства U, содержащая $\rho(G_1)$, неприводима (предложение 7 § 6); так как она содержится в H, то она содержится также и в H_1. Обозначим эту группу через H_1'. Если t_iG_1 $(1 \leqslant i \leqslant h)$ — классы смежности группы G по подгруппе G_1, то объединение множеств $\rho(t_i)H_1'$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$ представляет собой группу, содержащую группу $\rho(G)$, а H_1' — подгруппа конечного индекса этой группы. Так как эта группа алгебраическая (предложение 3 из § 3), то она содержит группу H. Отсюда следует, что H_1' — подгруппа конечного индекса группы H, так что $H_1'=H_1$ (теорема 2 § 3). Мы видим, что предложение 5 достаточно доказать для случая неприводимых групп G и H. Но в этом случае, как известно, $\rho(s)$ — общая точка группы H (предложение 8 из § 6). Если Y — элемент алгебры Ли группы H, то существует деривация D поля $K(\rho(s))$, для которой $D\rho(s)=Y\rho(s)$. Так как мы предположили поле $K(s)$ сепарабельным над полем $K(\rho(s))$, то деривацию D можно продолжить в деривацию D' поля $K(s)$ (Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 9, n°1, предложение 5 [1])). Положим $L = K(s)$. Тогда $D's = X's$, где X' — элемент алгебры $\mathfrak{g}^L$, а $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G (предложение 4 § 8). Пусть $(a_i)_{i \in I}$ — базис поля L относительно K, содержащий элемент $1 = a_{i_0}$. Элемент X' можно представить в виде $\sum\limits_{i \in I} a_i X_i$, где $X_i \in \mathfrak{g}$ для $i \in I$. Обозначим через D_i деривацию поля $K(s)$, для которой $D_i s = X_i s$. Тогда $D' = \sum\limits_{i \in I} a_i D_i$, так что $Y\rho(s) = \sum\limits_{i \in I} a_i Y_i \rho(s)$ для $Y_i = (d\rho)(X_i)$. Так как элемент Y принадлежит алгебре Ли группы H, то $Y = Y_{i_0}$, $Y_i = 0$ для $i \neq i_0$. Отсюда следует, что элемент Y лежит в алгебре $(d\rho)(\mathfrak{g})$, что и доказывает предложение 5.

Несколько позже мы покажем на примерах, что если $K(s)$ — несепарабельное расширение поля $K(\rho(s))$, то утверждение, что дифференциал $d\rho$ отображает алгебру Ли группы G на алгебру Ли группы H, вообще говоря, неверно.

Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Для $s \in G$ обозначим через $\rho(s)$ автоморфизм $t \to sts^{-1}$ пространства $\mathfrak{E}$. Ясно, что ρ — представление группы G. Если u — линейная функция над пространством $\mathfrak{E}$ и если $t \in \mathfrak{E}$, то функция $v_{u,t}$, определенная равенством $v_{u,t}(\sigma) = u(\sigma(t))$ (где σ — эндоморфизм пространства $\mathfrak{E}$), является линейной функцией над пространством $\mathfrak{E}_1$ эндоморфизмов пространства $\mathfrak{E}$ и всякая линейная функция над $\mathfrak{E}_1$ является линейной комбинацией функций вида $v_{u,t}$. Если $t \in \mathfrak{E}$, то отображение $s \to u(sts^{-1})$, как легко убедиться, есть рациональная функция на группе G. Отсюда можно заключить, что для всякой линейной функции w над пространством $\mathfrak{E}_1$ отображение $s \to w(\rho(s))$ — рациональная функция на группе G и что, следовательно, ρ — рациональное представление группы G. Найдем теперь дифференциал этого представления. Пусть X — элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, и пусть s — общая точка группы G. Обозначим через D_X деривацию поля $K(s)$, для которой $D_X s = Xs$. Согласно теореме 6, для определения $(d\rho)(X)$

[1]) См. добавление переводчика, стр. 268. — *Прим. перев.*

достаточно вычислить $D_X\rho(s)$. При тех же обозначениях, что и выше, имеем

$$v_{u,t}(D_X\rho(s)) = D_X(v_{u,t}(\rho(s)) = \\ = D_X(u(sts^{-1})) = u(D_X(sts^{-1})).$$

Так как координаты точки t (относительно некоторой системы координатных функций пространства $\mathfrak{E}$) принадлежат полю K, то $D_X t = 0$. Поэтому из леммы 2 § 8 следует, что

$$D_X(sts^{-1}) = (D_X s)ts^{-1} - sts^{-1}(D_X s)s^{-1} = \\ = X(\rho(s)t) - (\rho(s)t)X.$$

Обозначим через Y_X эндоморфизм $t' \to [X, t']$ пространства $\mathfrak{E}$. Тогда

$$v_{u,t}(D_X\rho(s)) = u(Y_X\rho(s)t) = v_{u,t}(Y_X\rho(s)),$$

так что $D_X\rho(s) = Y_X\rho(s)$ и, следовательно, $(d\rho)(X) = Y_X$ (теорема 6). Мы получили следующий результат:

Предложение 6. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Если каждой точке $s \in G$ сопоставить автоморфизм $t \to sts^{-1}$ пространства $\mathfrak{E}$, то тем самым определяется рациональное представление группы G, дифференциал которого переводит каждый элемент $X \in \mathfrak{g}$ в эндоморфизм $t \to [X, t]$ пространства $\mathfrak{E}$.*

Заметим теперь, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G является подпространством пространства $\mathfrak{E}$ и что $s\mathfrak{g}s^{-1} \subset \mathfrak{g}$ для всех $s \in G$. Действительно, пусть X — элемент из $\mathfrak{g}$. Автоморфизм $\eta(s)$ отображает в себя идеал $\mathfrak{a}$, соответствующий группе G. Но тогда, согласно формуле (3) § 8, и отображение $\delta(sXs^{-1})$ переводит идеал $\mathfrak{a}$ в себя, так что $sXs^{-1} \in \mathfrak{g}$. По аналогии с терминологией, относящейся к группам Ли, мы введем следующее определение:

Определение 2. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Для $s \in G$ мы назовем отображение $X \to sXs^{-1}$ алгебры $\mathfrak{g}$ в себя присоединенным оператором точки s и будем его обозначать через* $\mathrm{Ad}\, s$. *Отображение $s \to \mathrm{Ad}\, s$ $(s \in G)$ называется присоединенным представлением группы G.*

Напомним, что для элемента X алгебры Ли $\mathfrak{g}$ под присоединенным оператором элемента X мы понимаем отображение

$Y \to [X, Y]$ алгебры $\mathfrak{g}$ в себя и что мы обозначаем этот оператор через $\operatorname{ad} X$. Отображение $X \to \operatorname{ad} X$ является представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и называется присоединенным представлением.

Предложение 7. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Присоединенное представление группы G есть рациональное представление, дифференциалом которого является присоединенное представление алгебры Ли группы G.*

Это непосредственно следует из предложения 6.

Предложение 8. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Ядро присоединенного представления группы G содержит центр группы G.*

Действительно, пусть s — элемент из центра группы G. Тогда этот элемент перестановочен со всеми элементами оболочки группы G и, следовательно, также со всеми элементами алгебры Ли группы G (предложение 6 § 8); это показывает, что $\operatorname{Ad} s$ является тождественным автоморфизмом алгебры Ли группы G.

Несколько позже мы увидим, что в случае поля K характеристики 0 ядро присоединенного представления совпадает с центром группы G. Мы также покажем, что такое совпадение в случае полей K характеристики $\neq 0$ не всегда имеет место.

§ 10. Примеры

I. Пусть K — поле характеристики $\neq 2$, и пусть B — невырожденная билинейная форма над $V \times V$. Обозначим через G группу автоморфизмов пространства V, оставляющих форму B инвариантной. Так же как и в § 7, выберем базис пространства V и отождествим точки пространства $\mathfrak{E}$ (или же $\mathfrak{E}^L$, где L — некоторое надполе поля K) с матрицами, соответствующими этим точкам в выбранном базисе. Так же как и в § 7, представим и билинейную форму матрицей; будем обозначать ее той же буквой B. Пусть $\mathfrak{X}$ — пространство элементов X из $\mathfrak{E}$, удовлетворяющих уравнению ${}^tX \cdot B + B \cdot X = 0$. В § 7 мы показали, что размерность этого пространства равна размерности группы G. Покажем теперь, что $\mathfrak{X}$ — алгебра Ли группы G. Пусть s — общая точка алгебраической компоненты единицы группы G, и пусть $L = K(s)$. Если X — элемент алгебры

Ли $\mathfrak{g}$ группы G, то существует деривация D поля L, для которой $Ds = Xs$. Так как коэффициенты матрицы B принадлежат полю K, то $D(B) = 0$; с другой стороны, ясно, что

$$D({}^ts) = {}^t(Ds) = {}^ts \cdot {}^tX.$$

Так как s — обобщенная точка группы G, то ${}^ts \cdot B \cdot s = B$; из леммы 2 § 8 следует, что

$${}^ts \cdot {}^tX \cdot Bs + {}^ts \cdot BXs = 0.$$

Так как s и ${}^ts$ — обратимые эндоморфизмы, то ${}^tX \cdot B + B \cdot X = 0$, т. е. $X \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}$. Но размерность алгебры $\mathfrak{g}$ равна размерности группы G и тем самым размерности пространства $\mathfrak{X}$. Отсюда заключаем, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{X}$.

II. Предположим теперь, что на пространстве V определена структура алгебры (ассоциативной или неассоциативной). Пусть G — группа автоморфизмов этой алгебры. Чтобы автоморфизм s пространства V принадлежал группе G, необходимо и достаточно, чтобы $u((sx)(sy) - s(xy)) = 0$ для всех линейных функций u над пространством $\mathfrak{E}$ и для всех пар (x, y) элементов пространства V. Но для заданных элементов x, y и u отображение $s \to u((sx)(sy) - s(xy))$ есть, очевидно, полиномиальная функция над $\mathfrak{E}$. Следовательно, G — алгебраическая группа. Пусть X — элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Пусть s — общая точка алгебраической компоненты единицы группы G, и пусть $L = K(s)$. Далее, пусть D — деривация поля L, для которой $Ds = Xs$, а x и y — точки пространства V. Имеем $(sx)(sy) = s(xy)$. Как легко видеть, $D(sz) = (Ds)z$ для всех $z \in V$. Кроме того, если z и z' — точки пространства V^L, то $D(zz') = (Dz)z' + z(Dz')$, как это непосредственно следует из того факта, что координаты точки zz' (относительно некоторого базиса) выражаются в виде билинейных функций координат точек z и z'. Следовательно,

$$(Xsx)(sy) + (sx)(Xsy) = Xs(xy).$$

Последняя формула справедлива для любых точек x и y пространства V^L [так как обе части равенства билинейно зависят от пары (x, y)]. Но для заданных точек x' и y' пространства V^L всегда можно найти такие точки x и y из V^L, что $sx = x'$, $sy = y'$. Отсюда получаем равенство

$$(Xx')y' + x'(Xy') = X(x'y'),$$

которое показывает, что X — деривация алгебры V. Позже мы покажем, что в случае поля K характеристики 0 всякая деривация алгебры V принадлежит алгебре Ли группы G. Но в случае поля K характеристики $p \neq 0$ последнее утверждение не всегда верно. Действительно, пусть K — несовершенное поле, и пусть a — элемент поля K, не являющийся p-й степенью в K. Положим $V = K(a^{1/p})$. Хорошо известно, что так определенная алгебра V обладает деривациями $\neq 0$, но что, с другой стороны, единственный автоморфизм этой алгебры — тождественное отображение. Мы видим, что в рассматриваемом случае алгебра дериваций алгебры V не может быть алгеброй Ли группы автоморфизмов алгебры V.

III. Очевидно, что алгебра Ли группы всех автоморфизмов пространства V совпадает со всем пространством $\mathfrak{E}$. Пусть теперь $\mathrm{SL}(V)$ — группа унимодулярных автоморфизмов (т. е. автоморфизмов с определителем 1) пространства V. Ясно, что $\mathrm{SL}(V)$ — алгебраическая группа. Покажем, что ее алгебра Ли состоит из эндоморфизмов пространства V, след которых равен 0. Пусть E — внешняя алгебра над V. Всякий автоморфизм s пространства V продолжается в унитарный автоморфизм $\rho(s)$ алгебры E, и отображение $s \to \rho(s)$ — рациональное представление группы $\mathrm{GL}(V)$ автоморфизмов пространства V (ср. предложение 10 § 4 гл. I). Пусть X — элемент алгебры Ли группы $\mathrm{SL}(V)$; тогда оператор $(d\rho)(X)$ — элемент алгебры Ли группы автоморфизмов алгебры E. Следовательно, это деривация алгебры E (ср. рассмотренный выше пример II). Пусть s — общая точка алгебраической компоненты единицы группы $\mathrm{SL}(V)$. Обозначим через n размерность векторного пространства V, а через u — базисный элемент пространства однородных элементов степени n алгебры E. Определитель элемента s равен 1, так что $\rho(s)u = u$. Если D — деривация поля $K(s)$, для которой $Ds = Xs$, то $D\rho(s) = ((d\rho)(X))\rho(s)$ (теорема 6 § 9). С другой стороны, имеем $0 = Du = D\rho(s)u$, так что $(d\rho)(X)u = 0$. Но легко убедиться, что $(d\rho)(X)$ — деривация алгебры E, продолжающая эндоморфизм X. В силу предложения 9 § 5 гл. I, имеем $\mathrm{Tr}\, X = 0$. С другой стороны, размерность группы $\mathrm{SL}(V)$ будет $\geqslant n^2 - 1$. Действительно, пусть t — общая точка группы всех автоморфизмов пространства V, и пусть a — определитель элемента t. Можно найти алгебраическое расширение поля $K(t)$, в котором a является n-й степенью некоторого элемента b; при этом ясно, что $b^{-1}t$ — обобщенная точка группы $\mathrm{SL}(V)$. Так как $K(t) \subset \subset (K(b^{-1}t))(b)$, то алгебраическая размерность точки t, равная n^2, превосходит размерность точки $b^{-1}t$ самое большее на единицу, что и доказывает наше утверждение. Так как, с другой стороны, размерность пространства тех автоморфизмов, след которых равен 0, как раз равна $n^2 - 1$, то отсюда вытекает, что это пространство совпадает с алгеброй Ли группы $\mathrm{SL}(V)$.

IV. Пусть V_1 и V_2 — подпространства пространства V, причем $V_2 \subset V_1$. Автоморфизмы s пространства V, для которых $sx \equiv x \pmod{V_2}$ при всех $x \in V_1$, очевидно, образуют некоторую группу G. Если λ — линейная функция над V, равная нулю на пространстве V_2, и если $x \in V_1$, то $s \to \lambda(sx)$, очевидно, есть линейная функция над пространством $\mathfrak{E}$; обозначим ее через $u_{\lambda,x}$. Элементами группы G являются те автоморфизмы s пространства V, для которых $u_{\lambda,x}(s) - \lambda(x) = 0$ для всех функций $u_{\lambda,x}$. Следовательно, группа G — алгебраическая. Выберем базис $u_1, \ldots, u_{n^2}$ пространства линейных функций над $\mathfrak{E}$, содержащий базис $\{u_1, \ldots, u_h\}$ подпространства, порожденного функциями $u_{\lambda,x}$. Тогда всякую полиномиальную функцию над пространством $\mathfrak{E}$ можно представить в виде полинома от функций u_i $(1 \leqslant i \leqslant n^2)$. Кроме того, для любых n^2 заданных элементов a_i $(1 \leqslant i \leqslant n^2)$ поля K всегда существует эндоморфизм s пространства V, для которого $u_i(s) = a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n^2)$. Отсюда легко заключить, что идеал, соответствующий группе G, порождается функциями $u_{\lambda,x} - \lambda(x)$. Если X — элемент алгебры Ли группы G, то отображение $\delta(X)u_{\lambda,x}$ является функцией $s \to -\lambda(Xsx)$. Так как эта функция принадлежит идеалу, соответствующему группе G, то она принимает значение 0 для $s = I$ (где I — тождественный автоморфизм пространства V). Но тогда $\lambda(Xx) = 0$ для всех $x \in V_1$ и для всех линейных функций λ над V, обращающихся в нуль на подпространстве V_2. Отсюда непосредственно вытекает, что эндоморфизм X отображает пространство V_1 в пространство V_2. Пусть, наоборот, X — эндоморфизм пространства V, отображающий пространство V_1 в V_2. Если $x \in V_1$ и $s \in G$, то $sx \in V_1$, так что $\lambda(Xsx) = 0$ для всех функций λ, равных нулю на пространстве V_2. Отсюда следует, что элемент

$$\delta(X)(u_{\lambda,x} - \lambda(x)) = \delta(X)u_{\lambda,x}$$

принадлежит идеалу $\mathfrak{a}$, соответствующему группе G, и, следовательно, элемент $\delta(X)$ отображает идеал $\mathfrak{a}$ в себя (предложение 3 § 3 гл. I), так что X принадлежит алгебре Ли группы G. Мы видим, что алгебра Ли группы G состоит из всех эндоморфизмов X пространства V, отображающих пространство V_1 в пространство V_2.

V. Предположим теперь, что характеристика p основного поля K отлична от нуля. Пусть V — трехмерное векторное пространство над K, и пусть $\{x, y, z\}$ — базис этого пространства. Для элементов a и b некоторого надполя L поля K определим эндоморфизм $s(a, b)$ пространства V^L условиями

$$s(a, b)x = ax, \qquad s(a, b)y = a^p y, \qquad s(a, b)z = by + z.$$

Для элементов a, b, a', b' из L имеем

$$s(a, b)s(a', b') = s(aa', b + b'a^p).$$

Эндоморфизмы $s(a, b)$, соответствующие элементам a и b из K, для которых $a \neq 0$, очевидно, образуют группу G автоморфизмов пространства V. Легко убедиться, что G неприводима и обладает общей точкой $s(\alpha, \beta)$, где α и β — элементы некоторого надполя поля K, алгебраически независимые относительно K. Пусть X и Y — эндоморфизмы пространства V, определенные формулами

$$Xx = x, \qquad Xy = Xz = 0; \qquad Yx = Yy = 0, \qquad Yz = y.$$

Если D_α и D_β — частные деривации по α и β в поле $K(\alpha, \beta)$, то

$$\alpha D_\alpha s(\alpha, \beta) = Xs(\alpha, \beta), \qquad D_\beta s(\alpha, \beta) = Ys(\alpha, \beta);$$

из последних равенств вытекает, что эндоморфизмы X и Y принадлежат алгебре Ли группы G. Так как размерность группы G равна 2, то алгебра Ли этой группы состоит из линейных комбинаций элементов X и Y. Но эндоморфизмы X и Y перестановочны, так что порождаемая ими и элементом 1 ассоциативная алгебра коммутативна. С другой стороны, группа G — не абелева, так что оболочка группы G заведомо отлична от ассоциативной алгебры, порожденной 1 и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (ср. замечание к доказательству предложения 6 § 8). Заметим, что эндоморфизм $s(\alpha, \beta)$ перестановочен с эндоморфизмом X и что $s(\alpha, \beta)Y(s(\alpha, \beta))^{-1} = \alpha^p Y$. Таким образом, наименьшая алгебраическая группа, содержащая образ группы G при присоединенном представлении, имеет размерность 1, тогда как образ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ при присоединенном представлении совпадает с $\{0\}$. Мы видим, что ядро присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$ содержит элементы, не принадлежащие алгебре Ли ядра присоединенного представления группы G (ср. предложение 4 § 9). Кроме того, присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ не отображает эту алгебру на алгебру Ли наименьшей алгебраической группы, содержащей образ группы G при присоединенном представлении (ср. предложение 5 § 9). Наконец, элементы вида $s(1, b)$ не принадлежат центру группы G, между тем как они находятся в ядре присоединенного представления группы G (ср. предложение 8 из § 9). Обозначим через $t(a, b)$ эндоморфизм пространства V, определенный условиями

$$t(a, b)x = ax, \quad t(a, b)y = y, \quad t(a, b)z = z + by.$$

Тогда легко проверить, что эндоморфизмы $t(a, b)$ для a и b из K и $a \neq 0$ образуют неприводимую группу G' автоморфизмов пространства V и что алгебра Ли группы G' совпадает с алгеброй Ли группы G. Позже мы покажем, что две неприводимые алгебраические группы автоморфизмов конечномерного пространства над полем характеристики 0, имеющие одну и ту же алгебру Ли, совпадают.

§ 11. Экспоненциалы

Начиная с этого места и до конца главы мы будем предполагать, что характеристика поля K равна 0.

Пусть $\mathfrak{t}$ — кольцо формальных степенных рядов от переменных $T_1, \ldots, T_h$ с коэффициентами из K. Элемент a из $\mathfrak{t}$ определяется заданием последовательности $(P_j(T_1, \ldots, T_h))_{0 \leqslant j < \infty}$, где P_j — однородный полином степени j с коэффициентами из поля K. Если $a \neq 0$ (т. е. если по меньшей мере один из полиномов P_j не равен нулю), то через $|a|$ мы обозначим число 2^{-m}, где m — наименьшее целое число $\geqslant 0$, для которого $P_m \neq 0$; для $a = 0$ положим $|a| = 0$. Легко проверяется, что функция $a \to |a|$ обладает следующими свойствами:

Для всех $a \in \mathfrak{t}$ имеет место неравенство $0 \leqslant |a| \leqslant 1$; равенство $|a| = 0$ выполняется только тогда, когда $a = 0$; для элемента $a \neq 0$ из K имеет место равенство $|a| = 1$; для a и b из $\mathfrak{t}$ справедливы соотношения

$$|a + b| \leqslant \max\{|a|, |b|\}, \qquad |ab| = |a||b|.$$

Для a и b из $\mathfrak{k}$ положим $\rho(a, b) = |a - b|$. Тогда $\rho(b, a) = \rho(a, b)$ и равенство $\rho(a, b) = 0$ эквивалентно $a = b$; для a, b и c из $\mathfrak{k}$ имеем

$$\rho(a, c) \leqslant \max\{\rho(a, b), \rho(b, c)\}$$

и тем более

$$\rho(a, c) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, c).$$

Функция ρ имеет все свойства расстояния на множестве $\mathfrak{k}$ (Бурбаки, Общая топология, гл. IX, § 2, n° 1, определение 1); она определяет на множестве $\mathfrak{k}$ структуру метрического пространства и тем самым топологию. Согласно одному предложению Бурбаки (Общая топология, гл. IX, § 3, n° 2, предложение 3), эта топология определяет на аддитивной группе кольца $\mathfrak{k}$ структуру метризуемой группы. *Так определенная метризуемая группа полна.* Действительно, в кольце $\mathfrak{k}$ выполняется следующее условие, из которого вытекает полнота метризуемой аддитивной группы, но которое значительно сильнее: если последовательность элементов $(a_k)_{1 \leqslant k < \infty}$ из $\mathfrak{k}$ такова, что расстояние $\rho(a_k, a_{k+1})$ стремится к 0 при $k \to \infty$, то последовательность (a_k) сходится. Действительно, пусть $(P_{k,j})_{0 \leqslant j < \infty}$ — последовательность полиномов, определяющая элемент a_k. Для каждого индекса j существует такой индекс $k(j)$, что $|a_{k+1} - a_k| < 2^{-j}$ при $k \geqslant k(j)$. Таким образом, $P_{k,j} = P_{k+1,j}$ для $k \geqslant k(j)$. Положим $P_j = P_{k(j),j}$; тогда $P_{k,j} = P_j$ для $k \geqslant k(j)$. Последовательность $(P_j)_{0 \leqslant j < \infty}$ определяет некоторый элемент a из $\mathfrak{k}$. Пусть m — целое число $\geqslant 0$; если k по меньшей мере равно наибольшему из чисел $k(j)$ для $0 \leqslant j \leqslant m$, то $|a - a_k| \leqslant 2^{-m}$, что и доказывает сходимость последовательности (a_k) к элементу a.

Заметим, что если $b_1, \ldots, b_p$ — элементы из $\mathfrak{k}$, то

$$|b_1 + \ldots + b_p| \leqslant \max\{|b_1|, \ldots, |b_p|\};$$

действительно, это неравенство имеет место при $p = 2$ и доказывается немедленно для общего случая индукцией по p. Покажем, что каждая сходящаяся к нулю последовательность $(a_k)_{0 \leqslant k < \infty}$ элементов из $\mathfrak{k}$ *суммируема в* $\mathfrak{k}$ (ср. Бурбаки, Общая топология, гл. III, § 4. n° 1, определение 1). Действительно, для каждого целого $m \geqslant 0$ существует по условию целое число k_0, такое, что $|a_k| \leqslant 2^{-m}$ при $k \geqslant k_0$. Если $k_1, \ldots, k_p$ — целые числа $\geqslant k_0$, то

$$|a_{k_1} + \ldots + a_{k_p}| \leqslant 2^{-m};$$

суммируемость последовательности (a_k) вытекает отсюда в силу признака Коши (Бурбаки, Общая топология, III, § 4, n° 2, теорема 1). В частности, если элемент a из $\mathfrak{t}$ определяется последовательностью $(P_j)_{0 \leqslant j < \infty}$ полиномов, то последовательность (P_j) суммируема и сумма ее, очевидно, равна a, так что мы можем употреблять запись

$$a = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(T_1, \ldots, T_h).$$

Заметим, наконец, что для элементов a, b, c и d из $\mathfrak{t}$ имеет место соотношение

$$|ab - cd| = |(a-c)d + a(b-d)| \leqslant \max\{|a-c|, |b-d|\}.$$

Это показывает, что топология в кольце $\mathfrak{t}$ согласована с умножением, так что $\mathfrak{t}$ — топологическое кольцо.

Напомним, что мы условились через V обозначать конечномерное векторное пространство над полем K. Пусть L — поле отношений кольца $\mathfrak{t}$; через $V^{\mathfrak{t}}$ мы обозначим множество элементов из V^L, представимых в виде линейных комбинаций элементов из V с коэффициентами из $\mathfrak{t}$. Пусть V^* — пространство, дуальное к V; каждая линейная функция $u \in V^*$ может быть продолжена в линейную функцию над V^L; мы вновь обозначим ее через u. Ясно, что u отображает пространство $V^{\mathfrak{t}}$ в $\mathfrak{t}$. Пусть x — элемент из $V^{\mathfrak{t}}$; если u — любой элемент из V^*, то $|u(x)|$ или равен 0, или имеет вид 2^{-m}, где m — некоторое целое число $\geqslant 0$. Отсюда следует, что в совокупности элементов $|u(x)|$ для всех $u \in V^*$ имеется наибольший элемент; мы обозначим его через $|x|$. Если мы представим x в виде линейной комбинации $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i$ элементов из V с коэффициентами $a_1, \ldots, a_r$ из $\mathfrak{t}$, то для $u \in V^*$ будем иметь

$$u(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i u(x_i),$$

так что

$$|u(x)| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant r} |a_i|.$$

Отсюда следует, что $|x|$ самое большее равно наибольшему из чисел $|a_1|, \ldots, |a_r|$. Кроме того, если $x_1, \ldots, x_r$ линейно независимы, то $|x|$ точно равно наибольшему из чисел $|a_1|, \ldots, |a_r|$. В самом деле, в этом случае для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ существует элемент $u_i \in V^*$, для которого $u_i(x_i) = 1$ и $u_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$; тогда $u_i(x) = a_i$, откуда $|x| \geqslant |a_i|$, что и доказывает наше утверждение.

Функция $x \to |x|$ на $V^{\mathfrak{t}}$, очевидно, обладает следующими свойствами:

$0 \leqslant |x| \leqslant 1$; *равенство* $|x| = 0$ *эквивалентно равенству* $x = 0$; *если* x — *элемент* $\neq 0$ *из* V, *то* $|x| = 1$;

для x *и* y *из* $V^{\mathfrak{t}}$ *имеем* $|x + y| \leqslant \max\{|x|, |y|\}$; *если* $a \in \mathfrak{t}$, *то* $|ax| = |a||x|$.

Отображение $(x, y) \to |x - y|$ произведения $V^{\mathfrak{t}} \times V^{\mathfrak{t}}$ в множество вещественных чисел, как мы видим, является расстоянием на множестве $V^{\mathfrak{t}}$; на аддитивной группе $V^{\mathfrak{t}}$ она определяет структуру топологической метризуемой группы. Пусть $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис пространства V. Представим элемент $x \in V^{\mathfrak{t}}$ в виде

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, x_i, \text{ где } a_i(x) \in \mathfrak{t}.$$

Тогда $|x| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i(x)|$. Для того чтобы $|x| < \alpha$ (где α — вещественное число > 0), необходимо и достаточно, чтобы $|a_i(x)| < \alpha$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Отсюда непосредственно следует, что отображение $x \to (a_1(x), \ldots, a_n(x))$ — изоморфизм топологической группы $V^{\mathfrak{t}}$ на произведение n экземпляров топологической группы $\mathfrak{t}$. Отсюда мы сразу заключаем, что $V^{\mathfrak{t}}$ — полная топологическая группа (Бурбаки, Общая топология, гл. II, § 5, предложение 4). Рассуждая так же, как и в случае группы $\mathfrak{t}$, мы убеждаемся, что всякая последовательность $(y_k)_{0 \leqslant k < \infty}$ элементов из $V^{\mathfrak{t}}$, сходящаяся к 0, суммируема в $V^{\mathfrak{t}}$.

Если D — деривация поля L, то ей соответствует отображение D пространства V^L в себя, определенное условием $u(Dx) = D(u(x))$ при $x \in V^L$ и $u \in V^*$ (определение 3 § 8). Если D отображает $\mathfrak{t}$ в себя, то оператор D пространства V^L отображает подмножество $V^{\mathfrak{t}}$ в себя; если D индуцирует непрерывное отображение множества $\mathfrak{t}$ в себя, то и отображение D модуля $V^{\mathfrak{t}}$ в себя непрерывно. В этом легко убедиться, рассмотрев при тех же обозначениях, что и выше, представление

$$Dx = \sum_{i=1}^{n} D(a_i(x))\, x_i.$$

В частности, для $h=1$ (в этом случае мы положим $T_1=T$) кольцо $\mathfrak{t}$ обладает непрерывной деривацией D_T, отображающей T в 1; эта деривация определяется формулой

$$D_T\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j T^j\right)=\sum_{j=1}^{\infty} j a_j T^{j-1} \quad (\text{где } a_j \in K,\ 0 \leqslant j < \infty).$$

Так определенную деривацию D_T мы будем называть *деривацией по T в кольце* $\mathfrak{t}$.

Предположим теперь, что на пространстве V определена структура алгебры над полем K. При расширении основного поля до поля L она определяет структуру алгебры над полем L на векторном пространстве V^L; при этом ясно, что подмодуль $V^{\mathfrak{t}}$ замкнут по отношению к умножению в алгебре V^L. Покажем, что для x и y из $V^{\mathfrak{t}}$ имеет место неравенство

$$(1) \qquad |xy| \leqslant |x||y|.$$

Пусть $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис пространства V. Положим

$$x=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad y=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i,$$

где коэффициенты a_i и b_i принадлежат кольцу $\mathfrak{t}$. Тогда

$$xy=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j x_i x_j,$$

причем элементы $x_i x_j$ принадлежат алгебре V, так что

$$|xy| \leqslant \max_{1 \leqslant i,\ j \leqslant n} \{|a_i||b_j|\}.$$

Но $|a_i| \leqslant |x|$, $|b_j| \leqslant |y|$, так что $|xy| \leqslant |x||y|$. Из формулы (1) и из неравенства $|z| \leqslant 1$ для всех $z \in V^{\mathfrak{t}}$ следует, что

$$|x'y'-xy| \leqslant \max\{|x'-x|, |y'-y|\}$$

для x, y, x' и y' из $V^{\mathfrak{t}}$; следовательно, умножение в алгебре $V^{\mathfrak{t}}$ непрерывно.

Предположим, что алгебра V обладает единицей и ассоциативна. Если $x \in V^{\mathfrak{t}}$, то $|x^n| \leqslant |x|^n$ для всех целых n. Поэтому для $|x|<1$ последовательность $(x^n)_{1 \leqslant n < \infty}$ суммируема. Как обычно, положим $x^0=1$ для всех $x \in V^{\mathfrak{t}}$. Положим теперь для всех элементов x из $V^{\mathfrak{t}}$, для которых $|x|<1$,

$$\boxed{\exp x=\sum_{k=0}^{\infty}(k!)^{-1}x^k}.$$

Покажем, что для элементов x и y из $V^{\mathfrak{t}}$, для которых $|x| < 1$, $|y| < 1$ и $xy = yx$, имеет место равенство

$$\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y). \tag{2}$$

Произведение $(\exp x)(\exp y)$ является суммой суммируемого семейства

$$\left((p!)^{-1} x^p (q!)^{-1} y^q\right)_{0 \leqslant p,\, q < \infty}.$$

Но так как $xy = yx$, то для всех $r \geqslant 0$ имеем

$$(r!)^{-1}(x+y)^r = \sum_{p+q=r} (p!)^{-1} (q!)^{-1} x^p y^q.$$

Отсюда следует, что

$$(\exp x)(\exp y) = \sum_{0 \leqslant r < \infty} (r!)^{-1} (x+y)^r = \exp(x+y);$$

это и доказывает формулу (2). В частности, если $|x| < 1$, то $(\exp x)(\exp(-x)) = 1$. Это показывает, что элемент $\exp x$ обратим.

Пусть теперь D — деривация кольца $\mathfrak{t}$. Покажем, что если $|x| < 1$ и элемент x перестановочен с элементом Dx, то

$$\boxed{D(\exp x) = (\exp x)\, Dx = (Dx)(\exp x)}\,. \tag{3}$$

Действительно, так как элементы x и Dx перестановочны, то из леммы 2 § 8 мы немедленно заключаем, что

$$Dx^k = kx^{k-1} Dx = k(Dx)x^{k-1} \text{ для всех } k > 0;$$

с другой стороны, имеем $D(1) = 0$. Отсюда вытекает формула (3).

Пусть теперь $\mathfrak{E}$ — пространство эндоморфизмов векторного пространства V. На $\mathfrak{E}$ определена структура ассоциативной алгебры. Пространство $\mathfrak{E}^L$ мы отождествили с пространством эндоморфизмов пространства V^L. Ясно, что $\mathfrak{E}^{\mathfrak{t}}$ состоит из тех эндоморфизмов пространства V^L, которые отображают модуль $V^{\mathfrak{t}}$ в себя. Для $X \in \mathfrak{E}^{\mathfrak{t}}$ и $x \in V^{\mathfrak{t}}$ имеем $|Xx| \leqslant |X||x|$. Действительно, положим

$$X = \sum_{i=1}^{p} a_i X_i, \qquad x = \sum_{j=1}^{q} b_j x_j,$$

где

$$a_i \text{ и } b_j \in \mathfrak{t}, \quad X_i \in \mathfrak{E} \text{ и } x_j \in V.$$

Тогда

$$Xx = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_i b_j X_i x_j,$$

причем элементы $X_i x_j$ принадлежат пространству V. Отсюда можно заключить, что $|Xx|$ не больше наибольшего из чисел $|a_i| \cdot |b_j|$. Но мы можем предположить элементы $X_1, \ldots, X_p$ линейно независимыми, и тогда $|a_i| \leqslant |X|$; равным образом, если предположить элементы $x_1, \ldots, x_q$ линейно независимыми, то $|b_j| \leqslant |x|$, откуда $|Xx| \leqslant |X|\,|x|$. Из всего этого можно вывести, что если X и X' принадлежат $\mathfrak{G}^t$ и x и x' принадлежат V^t, то $|X'x' - Xx| \leqslant \max\{|X'-X|, |x'-x|\}$, а это показывает, что отображение $(X, x) \to Xx$ произведения $\mathfrak{G}^t \times V^t$ в V^t непрерывно.

Мы выведем сейчас несколько свойств для случая $h=1$, которые нам понадобятся в дальнейшем. Итак, пусть $\mathfrak{t}$ обозначает кольцо формальных степенных рядов от одной переменной T с коэффициентами из поля K.

Лемма 1. *Если $\mathfrak{a}$ — идеал $\neq \{0\}$ в $\mathfrak{t}$, то для некоторого $m \geqslant 0$ имеет место равенство $\mathfrak{a} = T^m \mathfrak{t}$.*

Все числа $|a|$, $a \neq 0$, из $\mathfrak{a}$ имеют вид 2^{-k}, где k — целое число $\geqslant 0$. Пусть 2^{-m} — наибольшее из этих чисел, и пусть a — элемент из $\mathfrak{a}$, для которого $|a| = 2^{-m}$. Тогда, как легко видеть, $a = bT^m(1+c)$, где c — элемент из $\mathfrak{t}$, для которого $|c| < 1$, а $b \in K$, $b \neq 0$. Семейство $(c^k)_{1 \leqslant k < \infty}$ суммируемо в $\mathfrak{t}$, и, очевидно,

$$b(1+c)\,b^{-1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c^k\right) = 1;$$

отсюда следует, что $T^m \in \mathfrak{a}$. Для всех $a' \in \mathfrak{a}$ имеем $|a'| \leqslant 2^{-m}$; элементы a' делимы на T^m в кольце $\mathfrak{t}$, и, следовательно, $\mathfrak{a} = T^m \mathfrak{t}$.

Лемма 2. *Пусть $a_1, \ldots, a_r$ — элементы из поля K, и пусть*

$$z_i = \exp Ta_i \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Пусть $\{b_1, \ldots, b_s\}$ — базис аддитивной группы, порожденной в поле K элементами $a_1, \ldots, a_r$. Положим

$$w_j = \exp Tb_j \quad (1 \leqslant j \leqslant s).$$

Элементы $z_1, \ldots, z_r$ порождают подгруппу мультипликативной группы обратимых элементов кольца $\mathfrak{k}$, а $w_1, \ldots, w_s$ образуют базис этой подгруппы. Элементы $T, w_1, \ldots, w_s$ алгебраически независимы над K.

Как нам известно, элементы $z_1, \ldots, z_r$ обратимы и

$$z_i^{-1} = \exp T(-a_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant r);$$

тем самым эти элементы порождают в мультипликативной группе обратимых элементов кольца $\mathfrak{k}$ некоторую подгруппу. Для любых целых чисел $m_1, \ldots, m_r$ имеет место равенство

$$\exp T\left(\sum_{i=1}^{r} m_i a_i\right) = \prod_{i=1}^{r} z_i^{m_i},$$

как это легко следует из формулы (2). Но каждый элемент b_j является линейной комбинацией с целыми коэффициентами от элементов $a_1, \ldots, a_r$, и, обратно, каждый элемент a_i представим в виде линейной комбинации элементов $b_1, \ldots, b_s$ с целыми коэффициентами; поэтому элементы $z_1, \ldots, z_r$, с одной стороны, и элементы $w_1, \ldots, w_s$, с другой, порождают одну и ту же мультипликативную группу. Прежде чем доказывать утверждение, что $w_1, \ldots, w_s$ образуют базис этой группы, установим алгебраическую независимость элементов $w_1, \ldots, w_s, T$ относительно поля K. Для любой последовательности целых чисел $p_1, \ldots, p_s$ имеем

$$\prod_{j=1}^{s} w_j^{p_j} = \exp T\left(\sum_{j=1}^{s} p_j b_j\right).$$

С другой стороны, если для двух систем целых чисел $(p_1, \ldots, p_s)$ и $(p_1', \ldots, p_s')$ имеет место равенство $\sum_{j=1}^{s} p_j b_j = \sum_{j=1}^{s} p_j' b_j$, то $p_j = p_j'$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Достаточно поэтому показать, что если $d_1, \ldots, d_t$ — *различные* элементы поля K, а $P_1, \ldots, P_t$ — полиномы с коэффициентами из K, то из

$$\sum_{k=1}^{t} P_k(T) \exp Td_k = 0$$

следует

$$P_k = 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant t).$$

Последнее утверждение будем доказывать индукцией по t. Для $t=1$ оно очевидно. Пусть $t>1$, и предположим, что утверждение уже доказано для $t-1$. Запишем наше равенство в виде

$$P_t(T)+\sum_{k=1}^{t-1} P_k(T)\exp T(d_k-d_t)=0.$$

Пусть D — определенная выше деривация по T в кольце $\mathfrak{k}$. Если P — полином степени k, то полином $D(P(T))$ или имеет степень $k-1$, или равен нулю. Кроме того, в силу формулы (3),

$$D(\exp T(d_k-d_t))=(d_k-d_t)\exp T(d_k-d_t),$$

так что

$$D(P_k(T)\exp T(d_k-d_t))=P'_k(T)\exp T(d_k-d_t),$$

где P'_k — такой полином, что полином $P'_k-(d_k-d_t)P_k$ имеет меньшую степень, чем полином P_k (если $P_k\neq 0$), или равен нулю. Но для достаточно большого показателя h имеет место равенство $D^hP_t(T)=0$. Следовательно, выполняется равенство вида

$$\sum_{k=1}^{t-1} Q_k(T)\exp T(d_k-d_t)=0,$$

где Q_k — такой полином, что полином $Q_k-(d_k-d_t)^hP_k$ (в случае $P_k\neq 0$) имеет меньшую степень, чем P_k, или же равен нулю. Но элементы

$$d_k-d_t \qquad (1\leqslant k\leqslant t-1)$$

все различны, и из предположения индукции следует, что $Q_k=0$ $(1\leqslant k\leqslant t-1)$. Так как

$$d_k-d_t\neq 0 \qquad (1\leqslant k\leqslant t-1),$$

то это означает, что $P_k=0$ [в случае $P_k\neq 0$ старший коэффициент полинома Q_k совпадал бы со старшим коэффициентом полинома $(d_k-d_t)^hP_k$]. Так как $P_k=0$ $(1\leqslant k\leqslant t-1)$, то $P_t=0$, что и доказывает наше утверждение для t. Пусть теперь $e_1, \ldots, e_s$ — целые числа, для которых $\prod_{j=1}^{s} w_j^{e_j}=1$. Положим

$$e'_j=\max\{0, e_j\}, \qquad e''_j=\max\{0, -e_j\};$$

тогда $\prod_{j=1}^{s} w_j^{e'_j} = \prod_{j=1}^{s} w_j^{e''_j}$, причем для каждого j один из неотрицательных показателей e'_j и e''_j равен нулю. Из алгебраической независимости элементов w_j относительно поля K следует, что $e'_j = e''_j = 0$ для всех j, так что $e_j = 0$. Этим доказано, что элементы $w_1, \ldots, w_s$ образуют базис мультипликативной группы, порожденной элементами $z_1, z_2, \ldots, z_r$.

Лемма 3. *При тех же обозначениях, что и в лемме 2, существует гомоморфизм кольца $K[T, z_1, \ldots, z_r]$ на кольцо $K[T]$, переводящий T и элементы поля K в себя, а элементы z_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ — в единицу.*

Так как элементы $T, w_1, \ldots, w_s$ алгебраически независимы над полем K, то существует гомоморфизм кольца $K[T, w_1, \ldots, w_s]$ на $K[T]$, отображающий T и элементы поля K в себя, а элементы w_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ — в 1. Этот гомоморфизм может быть продолжен в гомоморфизм кольца

$$K\left[T, w_1, \ldots, w_s, w_1^{-1}, \ldots, w_s^{-1}\right]$$

(гл. I, § 7, лемма 1); ограничение этого последнего гомоморфизма на кольцо $K[T, z_1, \ldots, z_r]$ обладает, очевидно, требуемыми свойствами.

Лемма 4. *При тех же обозначениях, что и в лемме 2, пусть $K(Z_1, \ldots, Z_r)$ — поле рациональных функций от r переменных $Z_1, \ldots, Z_r$ с коэффициентами из поля K. Пусть $\mathfrak{p}$ — идеал кольца*

$$\mathfrak{Z} = K\left[Z_1, \ldots, Z_r, Z_1^{-1}, \ldots, Z_r^{-1}\right],$$

состоящий из рациональных функций R этого кольца, для которых $R(z_1, \ldots, z_r) = 0$. Тогда идеал $\mathfrak{p}$ порождается элементами вида $Z_1^{e_1} \ldots Z_r^{e_r} - 1$, где $(e_1, \ldots, e_r)$ пробегает множество систем из r целых чисел, для которых $\sum_{i=1}^{r} e_i a_i = 0$.

Пусть $e_1, \ldots, e_r$ — целые числа, удовлетворяющие уравнению $\sum_{i=1}^{r} e_i a_i = 0$. Тогда

$$z_1^{e_1} \ldots z_r^{e_r} = \exp T\left(\sum_{i=1}^{r} e_i a_i\right) = 1,$$

так что $Z_1^{e_1} \ldots Z_r^{e_r} - 1 \in \mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{p}'$ — идеал, порожденный элементами указанного вида. Обозначим через z_i' класс элемента $Z_i \bmod \mathfrak{p}'$. Идеал $\mathfrak{p}'$ содержится в идеале $\mathfrak{p}$; с другой стороны, $\mathfrak{p}$ — ядро гомоморфизма $R \to R(z_1, \ldots, z_r)$ кольца $\mathfrak{Z}$ на кольцо

$$\mathfrak{z} = K[z_1, \ldots, z_r, z_1^{-1}, \ldots, z_r^{-1}].$$

Но тогда существует гомоморфизм φ кольца $\mathfrak{Z}/\mathfrak{p}'$ на $\mathfrak{z}$, отображающий элементы поля K в себя, а z_i' в z_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Для доказательства того, что $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$, достаточно убедиться, что φ — изоморфизм. Так как $Z_i^{-1} \in \mathfrak{Z}$, то z_i' — обратимый элемент в $\mathfrak{Z}/\mathfrak{p}'$. Пусть M' — подгруппа мультипликативной группы обратимых элементов кольца $\mathfrak{Z}/\mathfrak{p}'$, порожденная элементами $z_1', \ldots, z_r'$, и пусть M — аналогичная группа в кольце $\mathfrak{z}$, порожденная элементами $z_1, \ldots, z_r$. Если для целых $e_1, \ldots, e_r$ выполняется соотношение $z_1^{e_1} \ldots z_r^{e_r} = 1$, то также $z_1'^{e_1} \ldots z_r'^{e_r} = 1$; таким образом, гомоморфизм φ индуцирует изоморфизм группы M' на группу M. Но группа M порождается также элементами $w_1, \ldots, w_s$; из алгебраической независимости элементов $w_1, \ldots, w_s$ относительно поля K непосредственно следует линейная независимость относительно K элементов порожденной ими группы M. Для каждого $w \in M$ пусть $\psi(w)$ — элемент группы M', отображаемый на w гомоморфизмом φ. Ясно, что все элементы кольца $\mathfrak{Z}/\mathfrak{p}'$ являются линейными комбинациями с коэффициентами из K элементов вида $\psi(w)$ (для $w \in M$). Так как элементы w группы M линейно независимы относительно поля K в кольце $\mathfrak{z}$, то отсюда сразу следует, что отображение φ — изоморфизм, и лемма 4 доказана.

Лемма 5. *При таких же обозначениях, как в лемме* 4, *идеал* $\mathfrak{p}$ *может быть охарактеризован как совокупность элементов* R *кольца* $\mathfrak{Z}$, *таких, что* $R(c_1, \ldots, c_r) = 0$ *для всех систем* $(c_1, \ldots, c_r)$ *из* r *элементов поля* K, *обладающих следующим свойством*: $c_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ и $\prod_{i=1}^{r} c_i^{e_i} = 1$ *для всех систем* $(e_1, \ldots, e_r)$ *целых чисел, таких, что* $\sum_{i=1}^{r} e_i a_i = 0$.

Ясно, что для всех систем $(c_1, \ldots, c_r)$ элементов из K, обладающих указанным свойством, имеет место равенство $R(c_1, \ldots, c_r) = 0$ при всех $R \in \mathfrak{p}$. Пусть теперь R — элемент кольца $\mathfrak{Z}$, не принадлежащий идеалу $\mathfrak{p}$. Существует изоморфизм φ кольца $\mathfrak{Z}/\mathfrak{p}$ на кольцо

$$\mathfrak{z} = K\left[z_1, \ldots, z_r, z_1^{-1}, \ldots, z_r^{-1}\right],$$

отображающий элементы поля K в себя, а элементы Z_i в z_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$. С другой стороны, согласно лемме 2,

$$\mathfrak{z} = K\left[w_1, \ldots, w_s, w_1^{-1}, \ldots, w_s^{-1}\right].$$

Следовательно, можно положить $\varphi(R) = R'(w_1, \ldots, w_s)$, где R' — рациональная функция с коэффициентами из K от s переменных $W_1, \ldots, W_s$, принадлежащая кольцу

$$K\left[W_1, \ldots, W_s, W_1^{-1}, \ldots, W_s^{-1}\right].$$

Так как K — бесконечное поле, то всегда можно найти s отличных от нуля элементов $f_1, \ldots, f_s$ из K, таких, что $R'(f_1, \ldots, f_s) \neq 0$ (так как $R \,\bar{\in}\, \mathfrak{p}$, то, конечно, $R' \neq 0$). Элементы $w_1, \ldots, w_s$ алгебраически независимы над K, и поэтому существует гомоморфизм кольца $K[w_1, \ldots, w_s]$ в поле K, отображающий элемент w_j в f_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$, а элементы K в себя. Этот гомоморфизм может быть продолжен, в силу леммы 1 § 7 гл. I, в гомоморфизм кольца $\mathfrak{z}$ в поле K. Пусть $c_1, \ldots, c_r$ — образы элементов $z_1, \ldots, z_r$ при этом гомоморфизме. Тогда $c_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Образ $R(c_1, \ldots, c_r)$ элемента $\varphi(R)$ равен $R'(f_1, \ldots, f_s)$ и поэтому $\neq 0$. С другой стороны, если $e_1, \ldots, e_r$ — целые числа, для которых $\sum_{i=1}^{r} e_i a_i = 0$, то $\prod_{i=1}^{r} z_i^{e_i} = 1$ и $\prod_{i=1}^{r} c_i^{e_i} = 1$. Лемма 5 доказана.

§ 12. Применение к алгебраическим группам

Мы напоминаем, что характеристика основного поля K, по предположению, равна нулю.

Теорема 7. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Пусть $\mathfrak{t}$ — кольцо формальных рядов от переменной T с коэффициентами из поля K. Эндо-*

морфизм X пространства V принадлежит алгебре Ли группы G тогда и только тогда, когда $\exp TX$ — *обобщенная точка группы G.*

Предположим сначала, что $\exp TX$ — обобщенная точка группы G. Пусть L — поле отношений кольца $\mathfrak{t}$. Деривация по T в кольце $\mathfrak{t}$ продолжается в деривацию D поля L. С другой стороны, $D(TX) = X$, так что

$$D(\exp TX) = X \exp TX$$

[формула (3) § 11]. Из предложения 4 § 8 мы, следовательно, можем заключить, что $X \in \mathfrak{g}^L$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Но так как $X \in \mathfrak{E}$, то $X \in \mathfrak{g}$. Предположим теперь, наоборот, что $X \in \mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал, соответствующий группе G. Обозначим через $\mathfrak{a}'$ идеал, порожденный в кольце $\mathfrak{t}$ элементами $P(\exp TX)$, где $P \in \mathfrak{a}$; мы покажем, что деривация D отображает идеал $\mathfrak{a}'$ в себя. Для $P \in \mathfrak{a}$ имеем

$$D(P(\exp TX)) = (dP)(\exp TX, \ X \exp TX)$$

(лемма 1 из § 8). Но последнее выражение равно

$$-(\delta(X) P)(\exp TX)$$

[ср. определение 1 и формулу (1) § 8]. Так как $X \in \mathfrak{g}$, то $\delta(X) P \in \mathfrak{a}$, так что

$$(\delta(X) P)(\exp TX) \in \mathfrak{a}'.$$

Так как деривация D отображает систему образующих идеала $\mathfrak{a}'$ в $\mathfrak{a}'$, то D переводит и весь идеал $\mathfrak{a}'$ в себя (предложение 3 § 3 гл. I). Покажем теперь, что $\mathfrak{a}' = \{0\}$. Если бы это было не так, то идеал $\mathfrak{a}'$ порождался бы элементом вида T^m, где m — некоторое целое $\geqslant 0$ (лемма 1 § 11). Но $P(I) = 0$ для всех $P \in \mathfrak{a}$, если I — единица группы G. Кроме того,

$$\exp TX - I \in T\mathfrak{E}^{\mathfrak{t}};$$

отсюда немедленно следует, что $P(\exp TX) \in T\mathfrak{t}$ для всех $P \in \mathfrak{a}$, так что $\mathfrak{a}' \subset T\mathfrak{t}$ и $m \geqslant 1$. Но так как $T^m \in \mathfrak{a}'$, то также

$$mT^{m-1} = D(T^m) \in \mathfrak{a}',$$

что невозможно, так как $m \neq 0$ и характеристика поля K равна 0. Отсюда заключаем, что $\mathfrak{a}' = \{0\}$, так что $P(\exp TX) = 0$ для всех $P \in \mathfrak{a}$. Этим доказано, что $\exp TX$ — обобщенная точка группы G.

Следствие. *При таких же обозначениях, как в теореме 7, предположим, что K — поле вещественных чисел,*

14 Зак. 2604. Клод Шевалле

так что G — группа Ли. Алгебра Ли группы G, рассматриваемой как группа Ли, совпадает с алгеброй Ли этой группы, рассматриваемой как алгебраическая группа. Размерность группы Ли G равна размерности алгебраической группы G.

Как известно, для любого вещественного числа a и для любого эндоморфизма $X \in \mathfrak{E}$ ряд

$$I + \sum_{k=1}^{\infty} (k!)^{-1} a^k X^k$$

сходится (в смысле топологии векторного пространства $\mathfrak{E}$) к некоторому эндоморфизму, который обозначается через $\exp aX$ (том I, гл. I, §2). Кроме того, X принадлежит алгебре Ли группы G, рассматриваемой как группа Ли, тогда и только тогда, когда $\exp aX$ принадлежит группе G при всех a (это непосредственно вытекает из следствия 2 предложения 1 § 9 гл. IV тома I). Но для этого необходимо и достаточно, чтобы $P(\exp aX) = 0$ для всех a и для всех полиномиальных функций P над $\mathfrak{E}$, равных нулю на G, или, что то же самое, чтобы ряды $P(\exp TX)$ для таких функций были тождественно равны нулю. Первое утверждение следствия вытекает теперь из теоремы 7; второе непосредственно следует из первого, так как размерность группы G как группы Ли и размерность G как алгебраической группы равны размерности соответствующей алгебры Ли.

Теорема 8. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V и $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G; пусть $\{X_1, \ldots, X_d\}$ — базис $\mathfrak{g}$. Пусть L — поле отношений кольца $\mathfrak{k}$ формальных степенных рядов от переменных $T_1, \ldots, T_d$ с коэффициентами из поля K. Точка*

$$s = (\exp T_1 X_1) \ldots (\exp T_d X_d)$$

пространства $\mathfrak{E}^L$ является общей точкой группы G.

Из теоремы 7 следует, что точки $\exp T_i X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ — обобщенные точки группы G, так что и s — обобщенная точка группы G. Для того чтобы доказать, что s — общая точка, достаточно проверить, что степень трансцендентности поля $K(s)$ относительно поля K не меньше d. Но эта степень трансцендентности равна размерности относительно поля L векторного пространства дериваций поля $K(s)$ в поле L (Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 9, n° 3, теорема 2 [1])). Итак, достаточно пока-

[1]) См. добавление переводчика, стр. 267.— *Прим. перев.*

зать, что существуют деривации D_i $(1 \leqslant i \leqslant d)$ поля L, для которых точки $(D_i s) s^{-1}$ пространства $\mathfrak{G}^L$ линейно независимы.

Пусть L_i — поле отношений кольца формальных степенных рядов от переменных T_j для $j \neq i$. Тогда кольцо $\mathfrak{t}$ содержится в кольце $\mathfrak{t}_i$ формальных степенных рядов от T_i с коэффициентами из поля L_i (ведь всякий элемент кольца $\mathfrak{t}$ можно рассматривать как формальный степенной ряд от T_i, коэффициенты которого — степенные ряды от T_j, $j \neq i$). Деривация по T_i в кольце $\mathfrak{t}_i$ отображает, конечно, кольцо $\mathfrak{t}$ в себя и индуцирует в $\mathfrak{t}$ деривацию D_i, отображающую T_i в 1, а T_j, $j \neq i$, в 0. Эта деривация может быть продолжена в деривацию поля L; последнюю мы также обозначим буквой D_i. Из формулы (3) § 11 следует, что

$$D_i(\exp T_i X_i) = (\exp T_i X_i) X_i, \quad D_i(\exp T_j X_j) = 0 \text{ при } j \neq i.$$

Положим

$$s_i = \prod_{j \leqslant i} (\exp T_j X_j) \quad \text{и} \quad s'_i = \prod_{j > i} (\exp T_j X_j)$$

$(s'_i = I$, тождественный автоморфизм пространства V для $i = d)$. Из леммы 2 § 8 непосредственно следует, что $D_i s = s_i X_i s'_i$, так что $(D_i s) s^{-1} = s_i X_i s_i^{-1}$. Покажем теперь, что элементы $(D_i s) s^{-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ пространства $\mathfrak{G}^L$ линейно независимы. Так как L — поле отношений кольца $\mathfrak{t}$, то достаточно показать следующее: если $a_1, \ldots, a_d$ — элементы кольца $\mathfrak{t}$, не все равные нулю, то выражение

$$\left| \sum_{i=1}^{d} a_i \left(s_i X_i s_i^{-1}\right) \right|$$

равно наибольшему из чисел $|a_i|$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$. Имеем

$$|\exp(T_j X_j) - I| < 1$$

и

$$\left|(\exp T_j X_j)^{-1} - I\right| = |\exp(-T_j) X_j - I| < 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant d).$$

С другой стороны, напомним, что для t и t' из $\mathfrak{G}^t$

$$|tt' - I| = |tt' - I \cdot I| \leqslant \max\{|t - I|, |t' - I|\},$$

так что

$$|t_1 \ldots t_p - I| \leqslant \max\{|t_1 - I|, \ldots, |t_p - I|\}$$

для любой системы элементов $t_1, \ldots, t_p$ из $\mathfrak{E}^t$. Отсюда заключаем, что $|s_i - I| < 1$, $|s_i^{-1} - I| < 1$, так что $|s_i X_i s_i^{-1} - X_i| < 1$. Пусть 2^{-m} — наибольшее из чисел $|a_i|$. Если $t \in \mathfrak{E}^t$ и $a \in \mathfrak{t}$, то $|at| = |a||t|$, так что

$$|a_i(s_i X_i s_i^{-1}) - a_i X_i| < 2^{-m}.$$

Положим

$$u = \sum_{i=1}^{d} a_i (s_i X_i s_i^{-1}) \quad \text{и} \quad u' = \sum_{i=1}^{d} a_i X_i;$$

мы видим, что $|u' - u| < 2^{-m}$. С другой стороны, элементы $X_1, \ldots, X_d$, образующие базис алгебры $\mathfrak{g}$, линейно независимы в пространстве $\mathfrak{E}$; как мы знаем, отсюда следует, что $|u'| = 2^{-m}$. Но $|u'|$ самое большее равно наибольшему из чисел $|u' - u|$ и $|u|$; так как $|u' - u| < 2^{-m}$, то $|u| = 2^{-m}$. Теорема 8 доказана.

Следствие 1. *Пусть G и H — неприводимые алгебраические группы автоморфизмов пространства V, а $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — их алгебры Ли. Для включения $H \subset G$ необходимо и достаточно включение $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$; $H = G$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.*

В силу следствия предложения 1 § 8, условие $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ необходимо для $H \subset G$. Предположим, что это условие выполнено. Из теорем 7 и 8 тогда непосредственно вытекает существование общей точки s группы H, являющейся обобщенной точкой группы G. Каждая точка из H — специализация точки s и принадлежит группе G, так что $H \subset G$. Второе утверждение следствия 1 легко выводится из первого.

Отметим, что для справедливости следствия 1 предположение, что характеристика поля K равна 0, существенно (ср. пример V из § 10).

Следствие 2. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Тогда оболочка группы G совпадает с ассоциативной алгеброй A, порожденной тождественным автоморфизмом I пространства V и элементами алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G.*

Нам уже известно, что A содержится в оболочке группы G (предложение 6 § 8). Для доказательства обратного включения мы, используя обозначения теоремы 8, покажем сначала, что $s \in A^L$. Для того чтобы элемент t из $\mathfrak{E}^L$ принадлежал A^L, необходимо и достаточно, чтобы $u(t)=0$ для всех линейных функций u на $\mathfrak{G}$, равных нулю на A (линейная функция u, конечно, отождествляется с линейной функцией над пространством $\mathfrak{G}^L$, которая ее продолжает). Но функция u индуцирует непрерывное линейное отображение модуля $\mathfrak{G}^{\mathfrak{t}}$ в кольцо $\mathfrak{t}$. Так как u обращается в нуль на A, то $u(I)=0$ и $u(X_i^k)=0$ для $1 \leqslant i \leqslant d$, $1 \leqslant k < \infty$. Так как функция u непрерывна, то

$$u(\exp T_i X_i)=0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant d),$$

так что $\exp T_i X_i \in A^L$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$. Так как A^L — подалгебра алгебры $\mathfrak{G}^L$, то $u(s)=0$. Пусть теперь s' — любая точка группы G; эта точка есть специализация точки s по отношению к полю K. Из предложения 2 § 6 следует тогда, что $u(s')$ — специализация элемента $u(s)$, так что $u(s')=0$. Так как последнее утверждение справедливо для всех линейных функций u, равных нулю на алгебре A, то $s' \in A$, что и доказывает следствие 2.

Заметим, что и здесь для справедливости утверждения следствия 2 существенно, что характеристика поля K равна 0 (ср. пример V § 10).

Теорема 9. *Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V и ρ — рациональное представление группы G автоморфизмами конечномерного векторного пространства U над полем K. Пусть X — элемент алгебры Ли группы G. Построим кольцо формальных степенных рядов от переменной T с коэффициентами из поля K. Тогда*

$$\rho(\exp TX)=\exp T((d\rho)(X)).$$

Пусть $\mathfrak{t}$ — кольцо степенных рядов от T, и пусть L — поле отношений кольца $\mathfrak{t}$. Пусть D — деривация поля L, продолжающая деривацию по T в кольце $\mathfrak{t}$. Положим

$$s=\exp TX, \qquad Y=(d\rho)(X).$$

Из формулы (3) § 11 следует тогда, что $Ds=Xs$, из леммы 1 § 8 — что $D(\rho(s))=(d\rho)(s, Xs)$, а из теоремы 6 § 9 — что $D(\rho(s))= = Y\rho(s)$. Но каждый элемент из поля L можно представить в виде $T^{-h}a$, где $a \in \mathfrak{t}$. Действительно, представим данный элемент из поля L в виде $a'b'^{-1}$, где a' и b' принадлежат $\mathfrak{t}$ и $b' \neq 0$. Из леммы 1 § 11 следует существование показателя $h \geqslant 0$, для которого $b'\mathfrak{t}=T^h\mathfrak{t}$, так что $b'^{-1}=T^{-h}b''$, где $b'' \in \mathfrak{t}$, что доказывает наше утверждение. Таким образом, элемент $\rho(s)$ мы можем записать в виде $\sum\limits_{k=-h}^{\infty} T^k Z_k$, где h — целое число >0 и где Z_k — элементы пространства $\mathfrak{F}$ эндоморфизмов пространства U. Отображение D пространства $\mathfrak{F}^t$ в себя непрерывно, и

$$D(\rho(s)) = \sum_{k=-h}^{\infty} kT^{k-1}Z_k.$$

Этот элемент равен элементу $Y\rho(s)$, т. е. элементу $\sum\limits_{k=-h}^{\infty} T^k Y Z_k$. Поэтому $Z_{-h}=0$, и $kZ_k = YZ_{k-1}$ для $k > -h$. Это показывает, что

$$Z_k = 0 \text{ для } k<0 \text{ и } Z_k = (k!)^{-1} Y^k Z_0 \text{ для } k>0.$$

Теорема будет доказана, как только мы убедимся, что Z_0 — тождественный автоморфизм J пространства U. Мы видели, что $K[s, \rho(s)] \subset \mathfrak{t}$. Но существует непрерывный гомоморфизм кольца $\mathfrak{t}$ на поле K, отображающий T в 0 (это гомоморфизм, сопоставляющий каждому формальному ряду от T его постоянный член). Этот гомоморфизм определяет специализацию $(s, \rho(s)) \to (s', t')$ точки $(s, \rho(s))$. При этом ясно, что s' — тождественный автоморфизм I пространства V и что $t' = Z_0$. С другой стороны, $(s, \rho(s))$ — обобщенная точка графика Γ представления ρ. Так как элемент $\rho(s)$ обратим, то обратим также и элемент Z_0. Таким образом, (I, Z_0) — точка графика Γ, а это показывает, что $Z_0 = J$.

§ 13. О некоторых абелевых алгебраических группах

Напоминаем, что характеристика поля K все время предполагается равной нулю.

Рассмотрим сперва нильпотентный элемент N алгебры $\mathfrak{E}$. Пусть $\mathfrak{t}$ — кольцо формальных рядов от переменной T с коэффициентами из поля K. Если h — показатель, для которого $N^{h+1}=0$, то

$$\exp TN = I + \sum_{k=1}^{h} (k!)^{-1} T^k N^k.$$

Это показывает, что $K[\exp TN]$ содержится в подкольце $K[T]$ кольца $\mathfrak{t}$. В действительности даже $K[\exp TN] = K[T]$, если $N \neq 0$. В самом деле, пусть h — наименьший показатель >0, для которого $N^{h+1}=0$. Если $h=1$, то пусть x — такой элемент пространства V, что $Nx\neq 0$; если $h>1$, то пусть y — такой элемент пространства V, для которого $N^h y\neq 0$, и пусть $x=N^{h-1}y$; тогда $Nx\neq 0$, $N^2x=0$, так что

$$(\exp TN)\,x=x+T(Nx).$$

Пусть u — линейная функция над пространством V, для которой $u(Nx)=1$; тогда

$$T=u((\exp TN)\,x)-u(x),$$

откуда, очевидно, $T\in K[\exp TN]$. С другой стороны, для любого элемента a из поля K положим

$$\exp aN=I+\sum_{k=1}^{h}(k!)^{-1}\,a^kN^k.$$

Покажем, что для a и a' из K имеет место равенство

$$\exp(a+a')\,N=(\exp aN)(\exp a'N).$$

Пусть $\mathfrak{k}'$ — кольцо формальных рядов от двух переменных T и T' с коэффициентами из поля K. Из формулы (2) § 11 тогда следует, что

$$\exp(T+T')\,N=(\exp TN)(\exp T'N).$$

Пусть v — какая-нибудь линейная функция над пространством $\mathfrak{E}$. Тогда ясно, что $v(\exp TN)$ — полином от T и что $v(\exp aN)$ — значение этого полинома в точке a. Итак,

$$v(\exp(a+a')\,N)=v((\exp aN)(\exp a'N)).$$

Но так как эта формула справедлива для всех линейных функций v, то

$$\exp(a+a')\,N=(\exp aN)(\exp a'N).$$

Если $a=0$, то $\exp aN$ — тождественный автоморфизм пространства V. Поэтому $\exp(-a)\,N=(\exp aN)^{-1}$. Элементы $\exp aN$ для $a\in K$ образуют группу автоморфизмов пространства V, изоморфную аддитивной группе поля K.

Предложение 1. *Пусть N — нильпотентный эндоморфизм пространства V. Автоморфизмы* $\exp aN$ *для $a\in K$ образуют неприводимую алгебраическую группу G; алгеброй Ли этой группы является подпространство пространства $\mathfrak{E}$,* *порожденное эндоморфизмом N. Группа G содержится во всех алгебраических группах автоморфизмов пространства V, алгебра Ли которых содержит эндоморфизм N.*

Для того чтобы полиномиальная функция P над пространством $\mathfrak{E}$ обращалась в нуль во всех точках группы G, необходимо и достаточно, чтобы $P(\exp TN)=0$ (так как K — бесконечное поле). Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал, состоящий из функций P, удовлетворяющих этому условию, и пусть s — эндоморфизм пространства V, такой, что $P(s)=0$ для всех $P\in\mathfrak{a}$. Тогда точка s — специализация точки $\exp TN$. Если $N=0$, то $\exp TN=I$ (тождественный автоморфизм пространства V), так что в этом случае $s=I$. Предположим $N\neq 0$. Тогда, как мы видели,

$$K[\exp TN]=K[T].$$

Специализация $\exp TN\to s$ определяет гомоморфизм кольца $K[T]$ в поле K. Пусть a — образ элемента T при этом гомоморфизме. Если v — линейная функция над $\mathfrak{E}$, то $v(s)$ — образ элемента $v(\exp TN)$ — равен элементу $v(\exp aN)$. Отсюда следует, что $s=\exp aN$. Это показывает, что G — алгебраическая группа и что TN — общая точка группы G, так что группа G неприводима. Из теоремы 7 § 12 следует, что N содержится в алгебре Ли группы G. Если $N=0$, то размерность группы $G=\{I\}$ равна нулю; если $N\neq 0$, то $K(\exp TN)=K(T)$ и размерность группы G равна 1. В обоих случаях алгебра Ли группы G совпадает с векторным подпространством, порожденным эндоморфизмом N. Наконец, последнее утверждение предложения 1 вытекает из следствия 1 теоремы 8 § 12.

Пусть теперь X — любой элемент пространства $\mathfrak{E}$. Основная цель настоящего параграфа — доказать, что среди всех алгебраических групп, алгебры Ли которых содержат элемент X, существует наименьшая. Мы последовательно рассмотрим различные частные случаи.

Предложение 2. *Пусть S — эндоморфизм пространства V, такой, что существует базис $\{x_1, \ldots, x_n\}$ пространства V, состоящий из собственных векторов эндоморфизма S. Положим $Sx_i=a_ix_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. Если $c_1, \ldots, c_n$ — элементы поля K, то пусть $s(c_1, \ldots, c_n)$ — эндоморфизм пространства V, отображающий x_i в c_ix_i $(1\leqslant i\leqslant n)$. Обозначим через Λ множество систем $(e_1, \ldots, e_n)$ из n целых чисел,* *для которых* $\sum_{i=1}^{n} e_i a_i = 0$, *и через* G_S — *множество всех элементов* $s(c_1, \ldots, c_n)$, *где* $c_1, \ldots, c_n$ — *элементы из* K, *отличные от нуля и такие, что* $\prod_{i=1}^{n} c_i^{e_i} = 1$ *для всех* $(e_1, \ldots, e_n) \in \Lambda$. *Тогда множество* G_S — *неприводимая алгебраическая группа; алгебра Ли этой группы содержит эндоморфизм* S; *всякая алгебраическая группа автоморфизмов пространства* V, *алгебра Ли которой содержит элемент* S, *содержит группу* G_S; *если с помощью переменной* T *построить кольцо формальных степенных рядов с коэффициентами из поля* K, *то* $\exp TS$ — *общая точка группы* G_S. *Алгебра Ли группы* G_S *состоит из всех эндоморфизмов* $s(a_1', \ldots, a_n')$, *где* $a_1', \ldots, a_n'$ — *такие элементы поля* K, *для которых* $\sum_{i=1}^{n} e_i a_i' = 0$ *при всех* $(e_1, \ldots, e_n) \in \Lambda$.

Для всех $s \in \mathfrak{E}$ положим

$$sx_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ji}(s)\, x_j, \qquad u_{ji}(s) \in K.$$

Для того чтобы $s \in G_S$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия: $u_{ij}(s) = 0$ для $i \neq j$; $u_{ii}(s) \neq 0$ и $\prod_{i=1}^{n} u_{ii}^{e_i}(s) = 1$ для всех $(e_1, \ldots, e_n) \in \Lambda$. Это показывает, что G_S — алгебраическая группа. Совершенно очевидно, что $S^k x_i = a_i^k x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ для всех целых $k > 0$. Отсюда мы заключаем, что

$$(\exp TS) x_i = z_i x_i, \text{ где } z_i = \exp Ta_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Если P — полиномиальная функция над пространством $\mathfrak{E}$, то $P(s(c_1, \ldots, c_n)) = Q(c_1, \ldots, c_n)$, где Q — полином с коэффициентами из поля K. Из леммы 5 § 11 сразу следует, что P обращается в нуль на группе G_S тогда и только тогда, когда $K(z_1, \ldots, z_n) = 0$; но $Q(z_1, \ldots, z_n)$ равен $P(\exp TS)$. Как мы видим, $\exp TS$ — общая точка группы G_S, и, следовательно, группа G_S неприводима. Из теоремы 7 § 12 следует, что эндоморфизм S принадлежит алгебре Ли группы G_S. Если теперь G' — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, алгебра Ли которой содержит эндоморфизм S, то $\exp TS$ — обобщенная точка группы G'; каждая точка группы G_S принадлежит группе G', так как является специализацией точки $\exp TS$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_S$ группы G_S содержится в оболочке группы G_S (предложение 6 § 8). Отсюда следует, что все элементы алгебры $\mathfrak{g}_S$ имеют вид $s(a'_1, \ldots, a'_n)$, где $a'_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Положим $S' = s(a'_1, \ldots, a'_n)$; для того чтобы элемент S' принадлежал алгебре $\mathfrak{g}_S$, необходимо, чтобы элемент $\exp TS'$ был обобщенной точкой группы G_S. Пусть $z'_i = \exp Ta'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; если $S' \in \mathfrak{g}_S$, то $\prod_{i=1}^n z_i'^{e_i} = 1$ для всех $(e_1, \ldots, e_n) \in \Delta$. Но элемент $\prod_{i=1}^n z_i'^{e_i}$ равен элементу

$$\exp T\left(\sum_{i=1}^n e_i a'_i\right)$$

[согласно формуле (2) § 11]. Отсюда следует, что из условия $S' \in \mathfrak{g}_S$ вытекает равенство $\sum_{i=1}^n e_i a'_i = 0$. Предположим, наоборот, что выполнено последнее условие для всех $(e_1, \ldots, e_n) \in \Delta$. Тогда группа $G_{S'}$, состоящая из всех автоморфизмов $s(c_1, \ldots, c_n)$, где $c_1, \ldots, c_n$ — элементы $\neq 0$ из K, такие, что $\prod_{i=1}^n c_i^{e'_i} = 1$ для всех систем $(e'_1, \ldots, e'_n)$, для которых $\sum_{i=1}^n e'_i a'_i = 0$, содержится в группе G_S. Но алгебра Ли группы $G_{S'}$ содержит элемент S'; следовательно, $S' \in \mathfrak{g}_S$. Предложение 2 доказано.

Лемма 1. *При таких же обозначениях, как в предложении 2, пусть N — нильпотентный элемент алгебры $\mathfrak{E}$, перестановочный с элементом S; положим $X = S + N$. Элементы вида $s \exp aN$, где $s \in G_S$ и $a \in K$, образуют неприводимую алгебраическую абелеву группу G автоморфизмов пространства V. Алгебра Ли группы G содержит элемент X, и G содержится во всех алгебраических группах автоморфизмов пространства V, алгебры Ли которых содержат X. Точка $\exp TX$ — общая точка группы G. Группа G обладает таким собственным рациональным представлением, что всякая точка группы G накрывается этим параметрическим представлением.*

Так как элемент N перестановочен с элементом S, то он перестановочен также со всеми степенями элемента S и, следовательно, с элементом $\exp TS$. Так как

$$N(\exp TS) = (\exp TS) N,$$

то $Ns = sN$ для всех специализаций s точки $\exp TS$, в частности для всех $s \in G_S$. Отсюда следует, что для $a \in K$ элемент $\exp aN$ перестановочен со всеми элементами группы G_S, так что группа G — абелева. Покажем, что точками группы G являются все автоморфизмы пространства V, которые получаются специализацией точки $\exp TX$. Положим $\exp Ta_i = z_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; тогда

$$K[\exp TS] = K[z_1, \ldots, z_n].$$

Проверим, что кольцо $K[\exp TS]$ содержится в кольце $K[\exp TX]$. Пусть a — любой из элементов a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, и пусть V_a — пространство тех элементов $x \in V$, для которых $Sx = ax$. Тогда $V_a \neq \{0\}$. Для $x \in V_a$ имеем $SNx = NSx = aNx$, так что $Nx \in V_a$. Элемент N индуцирует тем самым нильпотентный эндоморфизм в пространстве V_a. Отсюда вытекает, что существует вектор $y \neq 0$ из V_a, для которого $Ny = 0$. Таким образом, $Xy = Sy = ay$ и

$$(\exp TX) y = (\exp Ta) y.$$

Элемент y можно включить в некоторый базис $\{y_1, \ldots, y_n\}$ пространства V; если положить

$$ty_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ji}(t) y_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \quad \text{для} \quad t \in \mathfrak{E},$$

то функции v_{ij} образуют систему координатных функций пространства $\mathfrak{E}$, и если $y = y_1$, то

$$v_{11}(\exp TX) = \exp Ta,$$

так что $\exp Ta \in K[\exp TX]$. Но тогда элементы z_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ принадлежат кольцу $K[\exp TX]$, так что

$$K[\exp TS] \subset K[\exp TX].$$

Положим $Z = K(z_1, \ldots, z_n)$ и покажем, что если $a \in K$, то $(\exp TS)(\exp aN)$ — специализация точки $\exp TX$ по отношению к полю Z. Элементы z_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ порождают подгруппу мультипликативной группы обратимых элементов кольца формальных рядов от T, и, как известно, эта группа обладает таким базисом $\{w_1, \ldots, w_d\}$, что элементы $T, w_1, \ldots, w_d$ алгебраически независимы относительно поля K (лемма 2 § 11). Ясно, что $Z = K(w_1, \ldots, w_d)$. С другой стороны,

$$K[\exp TN] \subset K[T].$$

Так как эндоморфизмы S и N перестановочны, то

$$\exp TX = (\exp TS)(\exp TN)$$

[формула (2) из § 11], так что $K[\exp TX] \subset Z[T]$. Но так как T — трансцендентный элемент по отношению к полю Z, то существует гомоморфизм кольца $Z[T]$ на Z, отображающий элементы из Z в себя, а элемент T в a. Этот гомоморфизм определяет специализацию

$$(\exp TX, \ \exp TS, \ \exp TN) \to (t, \ \exp TS, \ \exp aN)$$

точки $(\exp TX, \exp TS, \exp TN)$ по отношению к полю Z. Так как

$$\exp TX = (\exp TS)(\exp TN),$$

то $t = (\exp TS)(\exp aN)$, что и доказывает наше утверждение. Если $s \in G_S$, то s — специализация точки $\exp TS$ и, следовательно, $s \cdot \exp aN$ — специализация точки $\exp TX$. Пусть, наоборот, t — автоморфизм пространства V, являющийся специализацией точки $\exp TX$. Эта специализация определяет гомоморфизм кольца $K[\exp TX]$ в поле K и, следовательно [так как $K[\exp TS] \subset K(\exp TX)$], специализацию $(\exp TX, \exp TS) \to \to (t, s)$ точки $(\exp TX, \exp TS)$. Ясно, что $t^{-1}s$ — специализация точки

$$(\exp TX)^{-1}(\exp TS) = \exp(-T)N.$$

Это показывает, что существует такой элемент $a \in K$, для которого $t^{-1}s = \exp(-a)N = (\exp aN)^{-1}$, так что $t = s \cdot \exp aN$ (ср. предложение 1). Так как t и $\exp aN$ — обратимые элементы, то тем же свойством обладает и элемент s, так что $s \in G_S$ и $t \in G$. Таким образом, наше утверждение, что группа G состоит из автоморфизмов пространства V, являющихся специализациями точки $\exp TX$, доказано. Отсюда следует, что G есть неприводимая алгебраическая группа, а $\exp TX$ — ее общая точка. Из теоремы 7 § 12 следует, что эндоморфизм X принадлежит алгебре Ли группы G. Если G' — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, алгебра Ли которой содержит эндоморфизм X, то $\exp TX$ — обобщенная точка группы G', так что $G \subset G'$. Поле $K(\exp TX)$ содержит поле

$$Z = K(w_1, \ldots, w_d) = K(\exp TS).$$

Так как $\exp TN = (\exp TX) \cdot (\exp TS)^{-1}$, то также $K(\exp TN) \subset \subset K(\exp TX)$, так что $K(T) \subset K(\exp TX)$ для $N \neq 0$ (в начале этого параграфа мы видели, что $K[\exp TN] = K[T]$ для $N \neq 0$). Таким образом, если $N \neq 0$, то

$$K(\exp TX) = K(T, w_1, \ldots, w_d),$$

а если $N = 0$, то

$$K(\exp TX) = K(w_1, \ldots, w_d).$$

Тем самым мы получаем собственное рациональное представление группы G с параметрами T, $w_1 \ldots, w_d$ в случае $N \neq 0$ и с параметрами $w_1, \ldots, w_d$ при $N = 0$. Если теперь

$$s(c_1, \ldots, c_n) \cdot \exp aN$$

— точка группы G, то существует гомоморфизм группы, порожденной элементами $z_1, \ldots, z_n$, в мультипликативную группу элементов $\neq 0$ поля K, переводящий элементы z_i в элементы c_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Этот гомоморфизм отображает элемент w_j $(1 \leqslant j \leqslant d)$ в некоторый элемент b_j поля K. Существует гомоморфизм кольца $K[T, w_1, \ldots, w_d]$ на поле K, отображающий элементы поля K в себя, переменную T — в a и w_j — в b_j $(1 \leqslant i \leqslant d)$. Отсюда теперь легко заключить, что каждая точка группы G накрывается нашим параметрическим представлением.

Наша следующая цель — обобщить результаты леммы 1 на случай любого эндоморфизма X пространства V. Для этого нам понадобятся следующие рассмотрения.

Пусть σ — автоморфизм поля K, и пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис пространства V. Зафиксировав этот базис, автоморфизму σ можно следующим образом сопоставить отображение пространства V в себя, обозначаемое также буквой σ: для любого элемента $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ пространства V $(a_i \in K,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$ положим

$$\sigma x = \sum_{i=1}^{n} (\sigma a_i)\, x_i.$$

Если теперь s — эндоморфизм пространства V, то через σs мы обозначим эндоморфизм пространства V, отображающий x_i

в $\sigma(sx_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Отображение $s \to \sigma s$, очевидно, является автоморфизмом кольца $\mathfrak{E}$; но это не автоморфизм алгебры $\mathfrak{E}$ над полем K, так как для $a \in K$ имеем $\sigma(as) = (\sigma a)(\sigma s)$. Для полиномиальной функции P над $\mathfrak{E}$ через P^σ мы обозначим отображение $s \to \sigma^{-1}(P(\sigma s))$ пространства $\mathfrak{E}$ в поле K. Отображение P^σ — полиномиальная функция. Пусть, действительно, u_{ij} — координатные функции над $\mathfrak{E}$ относительно базиса $\{x_1, \ldots, x_n\}$. [Тогда для $s \in \mathfrak{E}$ имеем

$$sx_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ji}(s)\, x_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).]$$

Функцию P можно представить в виде полинома $\tilde{P}(\ldots, u_{ij}, \ldots)$ от функций u_{ij}. С другой стороны, для $s \in \mathfrak{E}$ имеем $u_{ij}(\sigma s) = \sigma(u_{ij}(s))$; отсюда мы заключаем, что

$$P^\sigma(s) = \tilde{P}'(\ldots, u_{ij}(s), \ldots),$$

где $\tilde{P}'$ — полином, получающийся из полинома $\tilde{P}$ заменой коэффициентов этого последнего их образами при автоморфизме σ^{-1}. Отображение $P \to P^\sigma$ — автоморфизм кольца $\mathfrak{o}(\mathfrak{E})$, но не автоморфизм структуры алгебры над полем K: для $a \in K$ имеем $(aP)^\sigma = (\sigma^{-1}a)\, P^\sigma$. Пусть теперь X — любой элемент из $\mathfrak{E}$. При тех же обозначениях, что и выше, обозначим через $\tilde{P}_{ij}$ частную производную полинома $\tilde{P}$ по переменной u_{ij}. Пусть I — тождественный автоморфизм пространства V. Тогда

$$(dP)(I, X) = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij}(\ldots, \delta_{ij}, \ldots)\, u_{ij}(X),$$

где $\delta_{ij} = u_{ij}(I)$. Отсюда непосредственно следует, что

$$\left(dP^\sigma\right)\left(I, \sigma^{-1}X\right) = \sigma^{-1}((dP)(I, X)).$$

Пусть теперь G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, $\mathfrak{a}$ — идеал, соответствующий группе G. Множество σG, очевидно, опять будет группой. Кроме того, эндоморфизм t принадлежит группе σG тогда и только тогда, когда $P^{\sigma^{-1}}(t) = 0$ для всех $P \in \mathfrak{a}$. Это показывает, что σG — алгебраическая группа с соответствующим идеалом $\mathfrak{a}^{\sigma^{-1}}$ — образом идеала $\mathfrak{a}$ при отображении $P \to P^{\sigma^{-1}}$. Для того чтобы элемент X пространства $\mathfrak{E}$ принадлежал алгебре Ли группы G, необходимо и достаточно, чтобы $(dP)(I, X)=0$ для всех $P \in \mathfrak{a}$ (предложение 1 § 8). Отсюда мы непосредственно заключаем, что алгеброй Ли группы σG является алгебра $\sigma\mathfrak{g}$.

Лемма 2. *Пусть L — расширение Галуа конечной степени поля K, и пусть Γ — группа Галуа поля L над полем K. Пусть r — порядок группы Γ, и пусть F и G — полиномы от $d \cdot r$ переменных $W_{j\sigma}$ $(1 \leqslant j \leqslant d,\ \sigma \in \Gamma)$ с коэффициентами из L. Предположим, что полиномы F и G обладают следующими свойствами: $G \neq 0$, и если $b_1, \ldots, b_d$ — элементы поля L, такие, что функция G не равна нулю при значениях $W_{j\sigma}=\sigma b_j$ своих аргументов, то полином F обращается в нуль при этих значениях. Тогда полином F тождественно равен нулю.*

Введя в рассмотрение полином FG вместо полинома F, мы видим, что, не ограничивая общности, можно предположить, что $G=1$. Пусть $\{a_1, \ldots, a_r\}$ — базис поля L над полем K. Как известно, определитель порядка r, строками которого являются векторы

$$(\sigma a_1, \ldots, \sigma a_r) \quad (\sigma \in \Gamma),$$

не равен нулю (Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 7, n° 2). Но тогда можно найти $d \cdot r$ линейно независимых комбинаций W'_{ji} $(1 \leqslant j \leqslant d,\ 1 \leqslant i \leqslant r)$ переменных $W_{j\sigma}$, таких, что

$$W_{j\sigma}=\sum_{i=1}^{r}(\sigma a_i) W'_{ji} \qquad (1 \leqslant j \leqslant d,\ \sigma \in \Gamma).$$

Тогда F можно представить в виде полинома $F'(\ldots, W'_{ji}, \ldots)$ от переменных W'_{ji}. Пусть b'_{ji} $(1 \leqslant j \leqslant d,\ 1 \leqslant i \leqslant r)$—любые элементы из поля K; положив

$$b_j=\sum_{i=1}^{r} a_i b'_{ji} \quad (1 \leqslant j \leqslant d),$$

имеем

$$\sum_{i=1}^{r}(\sigma a_i) b'_{ji}=\sigma b_j \text{ для всех } \sigma \in \Gamma.$$

Из наших предположений следует, что полином F' обращается в нуль при значениях $W'_{ji}=b'_{ji}$ своих аргументов. Так как поле K бесконечно, то из этого следует, что $F'=0$, откуда $F=0$.

Теорема 10. *Для любого эндоморфизма X пространства V обозначим через $G(X)$ пересечение всех алгебраических групп автоморфизмов, алгебры Ли которых содержат элемент X. Тогда $G(X)$ — неприводимая алгебраическая группа и ее алгебра Ли содержит эндоморфизм X; если образовать формальные степенные ряды от переменной T с коэффициентами из поля K, то точка* $\exp TX$ — *общая точка группы $G(X)$; всякий элемент из $G(X)$ представим в виде полинома от X с коэффициентами из поля K. Пусть S и N — полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма X. Тогда группы $G(S)$ и $G(N)$ содержатся в группе $G(X)$ и каждый элемент из $G(X)$ однозначным образом представим в виде произведения элемента из $G(S)$ на элемент из $G(N)$.*

Выберем некоторый эндоморфизм X пространства V, который останется неизменным на протяжении этого доказательства. Пусть S и N — его полупростая и нильпотентная компоненты. Пусть L^* — алгебраически замкнутое алгебраическое расширение поля K; мы знаем, что S и N также будут полупростой и нильпотентной компонентами эндоморфизма X пространства V^{L^*} (предложение 7 § 8 гл. I). Пространство V^{L^*} обладает базисом $\{y_1, \ldots, y_n\}$, состоящим из собственных векторов эндоморфизма S (предложение 2 § 8 гл. I). Пусть, с другой стороны, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис пространства V; тогда

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad a_{ij} \in L^*.$$

Пусть L — надполе поля K, получающееся присоединением к полю K элементов a_{ij} и им сопряженных по отношению к полю K. Поле L — конечное нормальное расширение поля K; обозначим через Γ его группу Галуа. Собственные векторы y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ эндоморфизма S принадлежат пространству V^L. Из леммы 1 следует существование алгебраической группы G' автоморфизмов пространства V^L, алгебра Ли которой содержит эндоморфизм X и которая является наименьшей группой, обладающей этими свойствами. Положим $G = G' \cap \mathfrak{G}$; тогда G — алгебраическая группа (лемма 1 § 5). Мы покажем, что $G^L = G'$.

Несколько выше мы объяснили, как с помощью базиса $\{x_1, \ldots, x_n\}$ пространства V каждому автоморфизму σ из группы Γ можно сопоставить отображение σ пространства $\mathfrak{G}^L$

в себя и автоморфизм $P \to P^{\sigma}$ кольца $\mathfrak{o}(\mathfrak{E}^L)$, состоящего из полиномиальных функций над $\mathfrak{E}^L$. Покажем, что $\sigma G' = G'$ для всех $\sigma \in \Gamma$. Пусть $\mathfrak{g}'$ — алгебра Ли группы G'; тогда, как известно, алгеброй Ли группы $\sigma G'$ будет алгебра $\sigma\mathfrak{g}'$. С другой стороны, так как $X \in \mathfrak{E}$, то $\sigma X = X$; следовательно, $X \in \sigma\mathfrak{g}$ и $G' \subset \sigma G'$. Так как $G' \subset \sigma^{-1} G'$, то также $\sigma G' \subset G'$, так что $\sigma G' = G'$. С другой стороны, из леммы 1 вытекает, что группа G' — абелева. Таким образом, мы можем говорить о произведении конечного семейства элементов из G' (без указания порядка сомножителей). Для s' из G' положим $s = \prod_{\sigma \in \Gamma} (\sigma s')$. Если τ — любой элемент группы Γ, то $\sigma \to \tau\sigma$ — взаимно однозначное отображение группы Γ на себя; отсюда заключаем, что $\tau s = s$. Последнее равенство справедливо для всех $\tau \in \Gamma$, так что $s \in \mathfrak{E}$ и $s \in G$. Для доказательства равенства $G^L = G'$, очевидно, достаточно показать, что всякая полиномиальная функция на $\mathfrak{E}^L$, которая обращается в нуль на группе G, обращается в нуль также на G'. Положим $G'_{\sigma} = G'$ для всех $\sigma \in \Gamma$ и образуем группу $\prod_{\sigma \in \Gamma} G'_{\sigma}$. Если P — полиномиальная функция на пространстве $\mathfrak{E}^L$, то

$$(t_{\sigma})_{\sigma \in \Gamma} \to P\Big(\prod_{\sigma \in \Gamma} t_{\sigma}\Big),$$

[где $(t_{\sigma})_{\sigma \in \Gamma}$ — любой элемент из $\prod_{\sigma \in \Gamma} G'_{\sigma}$, т. е. $t_{\sigma} \in G'$ для всех $\sigma \in \Gamma$] — полиномиальная функция на $\prod_{\sigma \in \Gamma} G'_{\sigma}$. Если P обращается в нуль на группе G, то построенная нами полиномиальная функция равна нулю на множестве E элементов из $\prod_{\sigma \in \Gamma} G'_{\sigma}$ вида $(\sigma s')_{\sigma \in \Gamma}$. Если мы убедимся, что E — область единственности в $\prod_{\sigma \in \Gamma} G'_{\sigma}$, то отсюда получим, что $P\Big(\prod_{\sigma \in \Gamma} t_{\sigma}\Big) = 0$ для всех элементов $(t_{\sigma})_{\sigma \in \Gamma}$ из $\prod_{\sigma \in \Gamma} G'_{\sigma}$. Отсюда уже будет следовать, что P обращается в нуль на G' (так как, конечно, можно выбрать $t_{\sigma} = I$, где I — единица группы G', для всех автоморфизмов σ, кроме одного). Итак, для доказательства того, что $G' = G^L$, достаточно показать, что E — область единственности в $\prod_{\sigma \in \Gamma} G'_{\sigma}$.

Мы знаем, что группа G' обладает рациональным параметрическим собственным представлением (лемма 1). Пусть u_{ij} —

15 Зак. 2604. Клод Шевалле

координатные функции на $\mathfrak{E}$, соответствующие базису $\{x_1, \ldots, x_n\}$ пространства V, и пусть $w_1, \ldots, w_d$ — параметры некоторого собственного рационального параметрического представления группы G'. Тогда существует общая точка s^* группы G', координаты которой $u_{ij}(s^*)$ являются рациональными функциями $U_{ij}(w_1, \ldots, w_d)$ от $w_1, \ldots, w_d$ с коэффициентами из поля L. Кроме того, элементы $w_1, \ldots, w_d$ алгебраически независимы относительно поля L и

$$L(s^*) = L(w_1, \ldots, w_d).$$

Образуем расширение M поля L присоединением $d \cdot r$ элементов $w_{j\sigma}$ $(1 \leqslant j \leqslant d,\ \sigma \in \Gamma)$, алгебраически независимых над полем L. Если $\sigma \in \Gamma$, то автоморфизм σ поля L можно продолжить в изоморфизм поля $L(w_1, \ldots, w_d)$ на поле $L(w_{1\sigma}, \ldots, w_{d\sigma})$, отображающий элемент w_j в элемент $w_{j\sigma}$ $(1 \leqslant j \leqslant d)$. Этот изоморфизм мы также будем обозначать через σ. Функции u_{ij} образуют также систему координатных функций над пространством $\mathfrak{E}^M$; пусть $\overset{*}{s}_\sigma$ — точка из $\mathfrak{E}^M$, для которой

$$u_{ij}(\overset{*}{s}_\sigma) = \sigma(U_{ij}(w_1, \ldots, w_d)).$$

Для любой полиномиальной функции P над $\mathfrak{E}^L$ имеем $P(\overset{*}{s}_\sigma) = \sigma(P^\sigma(s^*))$. Действительно, эта формула справедлива для случая, когда P — одна из координатных функций u_{ij} (так как $u^\sigma_{ij} = u_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$); она также справедлива, если P — постоянная функция со значением $a \in L$, так как тогда P^σ — постоянное отображение $s \to (\sigma^{-1}a)$. С другой стороны, если формула верна для полиномиальных функций P и P', то она также верна и для $P - P'$ и PP'. Отсюда сразу следует, что формула справедлива для всех полиномиальных функций. Если полиномиальная функция P обращается в нуль на группе G', то для $s \in G'$ имеем

$$P^\sigma(s) = \sigma^{-1}(P(\sigma s)) = 0,$$

так как $\sigma s \in G'$. Таким образом, и P^σ обращается в нуль на группе G', так что $P^\sigma(s^*) = 0$ и $P(s^*_\sigma) = 0$. Это показывает, что s^*_σ — обобщенная точка группы G', а $(s^*_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$ — обобщенная точка группы $\prod'_{\sigma \in \Gamma} G_\sigma$. С другой стороны, ясно, что

$$L(\overset{*}{s}_\sigma) = L(w_{1\sigma}, \ldots, w_{d\sigma}),$$

так что $L((s_\sigma^*)_{\sigma\in\Gamma}) = M$. Алгебраическая размерность точки $(s_\sigma^*)_{\sigma\in\Gamma}$ относительно поля L равна, следовательно, $d \cdot r$ (где r — порядок группы Γ), т. е. совпадает с размерностью группы $\prod\limits_{\sigma\in\Gamma} G'_\sigma$. Это показывает, что $(s_\sigma^*)_{\sigma\in\Gamma}$ — общая точка группы $\prod\limits_{\sigma\in\Gamma} G'_\sigma$. Пусть теперь P — полиномиальная функция, равная нулю на определенном выше множестве E; чтобы доказать, что $P = 0$, достаточно убедиться, что $P((s_\sigma^*)_{\sigma\in\Gamma}) = 0$. Но $P((s_\sigma^*)_{\sigma\in\Gamma})$ является рациональной функцией $R(\ldots, w_{j\sigma}, \ldots)$ от $w_{j\sigma}$ с коэффициентами из поля L. В силу леммы 2, чтобы доказать, что $R = 0$, достаточно доказать существование полинома Q от элементов $w_{j\sigma}$ со следующими свойствами: если $b_1, \ldots, b_d$ — элементы поля L, для которых

$$Q(\ldots, \sigma b_i, \ldots) \neq 0,$$

то функция R определена для значений $w_{j\sigma} = \sigma b_j$ и равна при этих значениях нулю.

Так как $w_1, \ldots, w_d$ алгебраически независимы относительно K, то для любых значений $b_1, \ldots, b_d$ из L существует гомоморфизм кольца $L[w_1, \ldots, w_d]$ на поле L, переводящий элементы L в себя, а элементы w_j в $b_j (1 \leqslant j \leqslant d)$. Из определения 1 § 7 непосредственно следует существование полинома $Q_1 \neq 0$ от d переменных с коэффициентами из поля L, такого, что всякая система $b_1, \ldots, b_d$ элементов из L, для которой $Q_1(b_1, \ldots, b_d) \neq 0$, есть допустимая система параметров нашего параметрического представления группы G'. В частности, из условия $Q_1(b_1, \ldots, b_d) \neq 0$ вытекает, что рациональные функции U_{ij} определены для значений $m_j = b_j$ своих аргументов. Но для $\sigma \in \Gamma$ имеем

$$u_{ij}(s_\sigma^*) = U_{ij}^\sigma(w_{1\sigma}, \ldots, w_{d\sigma}),$$

где U_{ij}^σ — рациональная функция, получающаяся из U_{ij} заменой коэффициентов их образами при σ. Следовательно, если $Q_1(b_1, \ldots, b_d) \neq 0$, то рациональные функции U_{ij} определены для значений $w_{j\sigma} = \sigma b_j$ своих аргументов. Отсюда вытекает, что функция R определена для значений $w_{j\sigma} = \sigma b_j$ $(1 \leqslant j \leqslant d, \sigma \in \Gamma)$ своих аргументов. Пусть, с другой стороны, s' — точка группы G', соответствующая значениям $b_1, \ldots, b_d$ параметров; тогда

$$u_{ij}(\sigma s') = U_{ij}^\sigma(\sigma b_1, \ldots, \sigma b_d).$$

Отсюда сразу заключаем, что

$$R(\ldots, \sigma b_j, \ldots) = P((\sigma s')_{\sigma \in \Gamma}) = 0,$$

так как, по предположению, функция P равна нулю на множестве E. Если ι — тождественный автоморфизм поля L, то, как видно, полином $Q = Q(w_{1\iota}, \ldots, w_{d\iota})$ обладает требуемыми свойствами.

Итак, мы доказали, что $G^L = G'$. Кольцо формальных рядов от T с коэффициентами из K можно рассматривать как подкольцо формальных рядов от T с коэффициентами из L. Из леммы 1 следует, что $\exp TX$ — общая точка группы G' и, тем самым, обобщенная точка группы G. Кроме того, всякая точка из G принадлежит группе G' и является, следовательно, специализацией точки $\exp TX$ по отношению к полю L и *тем более* по отношению к полю K. Мы заключаем, что $\exp TX$ — общая точка группы G, так что эндоморфизм X принадлежит алгебре Ли группы G. С другой стороны, если H — какая-либо алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, алгебра Ли которой содержит эндоморфизм X, то $\exp TX$ — обобщенная точка группы H. Так как каждая точка группы G — специализация точки $\exp TX$, то она принадлежит группе H. Итак, $G = G(X)$. Пусть A—ассоциативная подалгебра алгебры $\mathfrak{E}$, порожденная тождественным автоморфизмом I и эндоморфизмом X. Обозначим через $\mathfrak{t}$ кольцо формальных рядов от T с коэффициентами из поля K. Каждая линейная функция u на пространстве $\mathfrak{E}$, равная нулю на алгебре A, может быть продолжена в непрерывное линейное отображение пространства $\mathfrak{E}^{\mathfrak{t}}$ линейных комбинаций элементов из $\mathfrak{E}$ с коэффициентами из $\mathfrak{t}$ в кольцо $\mathfrak{t}$. При этом мы имеем $u(I) = 0$ и $u(X^k) = 0$ для всех $k > 0$; отсюда следует, что $u(\exp TX) = 0$, так что $u(s) = 0$ для всех $s \in G(X)$. Поэтому $s \in A$, а это означает, что точка s может быть представлена в виде полинома от X с коэффициентами из K. Из всего доказанного вытекает, что $(G(S))^L$ — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, алгебра Ли которой содержит полупростой эндоморфизм S, а $(G(N))^L$ — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V^L, алгебра Ли которой содержит эндоморфизм N. При этом группа $G(N)$ состоит из элементов вида $\exp aN$, где $a \in K$ (предложение 1). Пусть s — элемент группы $G(X)$; в силу леммы 1 элемент s можно представить в виде $t \cdot \exp aN$, где $t \in (G(S))^L$ и $a \in L$. Докажем, что такое представление единственно. Так как группа $(G(X))^L$ абелева, то достаточно показать, что из $\exp aN \in (G(S))^L$ следует $\exp aN = I$ (где I — тождественный автоморфизм). Но если это условие выполнено, то также

$$\exp kaN = (\exp aN)^k \in (G(S))^L$$

для всех целых k. Если P — полиномиальная функция на $\mathfrak{G}^L$, равная нулю на $(G(S))^L$, то $P(\exp TN)$ — полином от T, равный нулю для $T = ka$ при всех целых k. Если $a \neq 0$, то отсюда следует, что $P(\exp TN) = 0$. Тем самым $\exp TN$ — обобщенная точка группы $(G(S))^L$ и N принадлежит алгебре Ли группы $(G(S))^L$. Но из предложения 2 мы усматриваем, что все элементы алгебры Ли группы $(G(S))^L$ полупростые, так что в этом случае $N = 0$, что и доказывает наше утверждение. После всего сказанного имеем

$$s = \sigma s = (\sigma t)(\sigma(\exp aN))$$

для всех $\sigma \in \Gamma$ и

$$\sigma t \in (G(S))^L, \quad s(\exp aN) \in (G(N))^L.$$

Это показывает, что $\sigma t = t$ для всех $\sigma \in \Gamma$, так что $t \in (G(S))^L \cap \mathfrak{G} = G(S)$ и, следовательно, $\exp aN \in G(N)$. Теорема 10 полностью доказана.

Предложение 3. *Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис пространства V. Для элементов $c_1, \ldots, c_n$ поля K обозначим через $s(c_1, \ldots, c_n)$ эндоморфизм пространства V, отображающий x_i на $c_i x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Пусть Δ — множество эндоморфизмов пространства V вида $s(c_1, \ldots, c_n)$. Пусть Θ — произведение n экземпляров групп, изоморфных аддитивной группе целых чисел. Для $e = (e_1, \ldots, e_n) \in \Theta$ положим*

$$\langle e, s(c_1, \ldots, c_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i c_i$$

и, если при этом все $c_1, \ldots, c_n$ отличны от нуля,

$$\chi_e(s(c_1, \ldots, c_n)) = \prod_{i=1}^{n} c_i^{e_i}.$$

Пусть G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, содержащаяся в Δ, и пусть Λ — множество всех таких $e \in \Theta$, что $\chi_e(s) = 1$ для всех $s \in G$. Тогда группа G состоит из всех автоморфизмов s пространства V, содержащихся в Δ, для которых

$\chi_e(s) = 1$ при всех $e \in \Lambda$. Алгебра Ли группы G состоит из всех $X \in \Delta$, для которых $\langle e, X \rangle = 0$ при всех $e \in \Lambda$. Если обозначить через G_1 алгебраическую компоненту единицы группы G, то группа G/G_1 изоморфна подгруппе, состоящей из всех элементов конечного порядка группы Θ/Λ.

Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G. Как известно, алгебра $\mathfrak{g}$ содержится в оболочке группы G; так как Δ — подалгебра алгебры $\mathfrak{E}$, то $\mathfrak{g} \subset \Delta$. Характеристика поля K равна 0, так что простое подполе K_0 в поле K можно отождествить с полем рациональных чисел. Пусть Δ_0 — множество элементов вида $s(c_1, \ldots, c_n)$, где $c_1, \ldots, c_n$ — рациональные числа. Тогда $\Delta = \Delta_0^K$. Покажем, что существует такое подпространство $\mathfrak{g}_0$ в Δ_0, для которого $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^K$. Пусть X — любой элемент из $\mathfrak{g}$; обозначим через $G(X)$ наименьшую алгебраическую группу автоморфизмов, алгебра Ли которой содержит эндоморфизм X, а через $\mathfrak{g}(X)$ — алгебру Ли группы $G(X)$. Так как G — алгебраическая группа, то $G(X) \subset G$ и $\mathfrak{g}(X) \subset \mathfrak{g}$. С другой стороны, из предложения 4 следует, что $\mathfrak{g}(X)$ состоит из всех элементов X' множества Δ, таких, что $\langle e, X' \rangle = 0$ при всех $e \in \Theta$, для которых $\langle e, X \rangle = 0$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{g}(X)$ — векторное пространство, получающееся из пространства $\mathfrak{g}(X) \cap \Delta_0$ над полем K_0 расширением основного поля до поля K. Так как $\mathfrak{g}$ — сумма пространств $\mathfrak{g}(X)$ для всех $X \in \mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^K$, где $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \cap \Delta_0$. Пусть Λ' — подгруппа группы Θ, состоящая из всех элементов e, для которых $\langle e, X \rangle = 0$ при всех $X \in \mathfrak{g}$; тогда $\mathfrak{g}$ состоит из всех элементов $X \in \Delta$, для которых $\langle e, X \rangle = 0$ при всех $e \in \Lambda'$. Пусть G' — группа обратимых элементов s из Δ, для которых $\chi_e(s) = 1$ при всех $e \in \Lambda'$. Это, конечно, алгебраическая группа. Пусть $\mathfrak{g}'$ — ее алгебра Ли. Если X — какой-либо элемент из $\mathfrak{g}$, то, как известно, группа $G(X)$ состоит из обратимых элементов s из Δ, таких, что $\chi_e(s) = 1$ при всех $e \in \Theta$, для которых $\langle e, X \rangle = 0$. Итак, $G(X) \subset G'$, откуда вытекает, что $X \in \mathfrak{g}'$, так что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$. Докажем, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ и что группа G' неприводима. Пусть $\{X_1, \ldots, X_d\}$ — базис пространства $\mathfrak{g}$. Присоединим к полю K d элементов $z_1, \ldots, z_d$, алгебраически независимых относительно K, и обозначим это расширение через L. Пусть Ξ — элемент $\sum_{j=1}^{d} z_j X_j$ из $\mathfrak{E}^L$, а $G(\Xi)$ — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V^L, алгебра Ли которой содержит Ξ. Ясно, что единственными элементами из Θ, для которых $\langle e, \Xi \rangle = 0$, являются элементы из Λ'. Таким образом, $G(\Xi)$ состоит из всех автоморфизмов s пространства V^L, содержащихся в Δ, для которых $\chi_e(s) = 1$ при всех $e \in \Lambda'$. Отсюда $G' \subset G(\Xi)$; так как G' — область единственности в группе G'^L, то $G'^L \subset G(\Xi)$. Но G^L — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V^L, алгебра Ли которой содержит элемент Ξ. Таким образом, $G(\Xi) \subset G^L$; отсюда вытекает, что $G'^L \subset G^L$, $\mathfrak{g}'^L \subset \mathfrak{g}^L$, $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ и, следовательно, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. Кроме того, $G'^L = G(\Xi)$ — неприводимая группа, так что тем же свойством обладает и группа G' (теорема 3 § 5). Пусть e — элемент из Θ, для которого $\chi_e(s) = 1$ при всех $s \in G'$; тогда $\chi_e(\exp TX) = 1$

для всех $X \in \mathfrak{g}$ (здесь T — переменная, с помощью которой построены формальные ряды). Но

$$\chi_e(\exp TX) = \exp T\langle e, X\rangle;$$

отсюда вытекает, что $\langle e, X\rangle = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$, так что $e \in \Lambda'$. В силу следствия 1 теоремы 8 § 12, G' — алгебраическая компонента единицы группы G; так как $G' \subset G$, то $\Lambda \subset \Lambda'$. Пусть e — элемент из Λ'. Отображение $s \to \chi_e(s)$ — гомоморфизм группы G в мультипликативную группу элементов $\neq 0$ поля K; этот гомоморфизм отображает группу G' на $\{1\}$. Так как группа G/G' конечна, то для $s \in E$ элемент $\chi_e(s)$ является корнем из единицы. Таким образом, каждому $e \in \Lambda'$ сопоставляется характер ψ_e группы G/G'; этот характер оказывается единичным характером (т. е. сопоставляющим 1 всем элементам группы G/G') тогда и только тогда, когда $e \in \Lambda$. С другой стороны, отображение $e \to \psi_e$ — гомоморфизм группы Λ' в группу характеров группы G/G'. Итак, имеет место изоморфизм группы Λ'/Λ с некоторой группой Ψ характеров группы G/G', обладающий тем свойством, что элемент $\bar{s} \in G/G'$ — единичный элемент этой группы в том и только в том случае, если $\psi(\bar{s}) = 1$ для всех $\psi \in \Psi$. В силу хорошо известных свойств конечных абелевых групп отсюда вытекает, что Ψ есть группа всех характеров группы G/G' и тем самым изоморфна группе G/G'. Таким образом, группа Λ'/Λ изоморфна группе G/G'.

Пусть теперь G_1 — группа всех обратимых элементов s из Δ, для которых $\chi_e(s) = 1$ при всех $e \in \Lambda$. Тогда $G' \subset G \subset G_1$. Если $e \in \Lambda'$, то отображение $s_1 \to \chi_e(s_1)$ — гомоморфизм группы G_1 в мультипликативную группу элементов $\neq 0$ поля K, и этот гомоморфизм — тождественный, если $e \in \Lambda$. Но, как мы видели, группа Λ'/Λ конечна; отсюда вытекает, что $\chi_e(s_1)$ для $e \in \Lambda'$ и $s_1 \in G_1$ — корень из единицы. Как и выше, мы убеждаемся, что существует конечная группа Ψ_1 характеров группы G_1/G', изоморфная группе Λ'/Λ, такая, что единственным элементом $\bar{s}$ из G_1/G', для которого $\psi(\bar{s}_1) = 1$ при всех $\psi \in \Psi_1$, является единичный элемент. Отсюда следует, во-первых, что порядок всех элементов группы G_1/G' конечен и, во-вторых, что порядок любой конечной подгруппы группы G_1/G' не больше порядка группы Ψ_1. Отсюда немедленно заключаем, что G_1/G' — конечная группа; ее порядок равен порядку группы Λ'/Λ и тем самым порядку группы G/G'. Таким образом, $G = G_1$. Предложение 3 полностью доказано.

Пусть теперь поле L — конечное расширение поля K. Поле L можно тогда рассматривать также как конечномерное векторное пространство над полем K; обозначим это векторное пространство через V. Каждому элементу $z \neq 0$ поля L можно сопоставить автоморфизм M_z пространства V, определенный формулой $M_z z' = zz'$ для всех $z' \in L$. Таким образом, мы получаем изоморфизм мультипликативной группы L^* элементов $\neq 0$ поля L с некоторой группой автоморфизмов пространства V. Будем говорить, что подгруппа G^* группы L^* есть алгебраическая группа, если ее образ G — алгебраическая группа автоморфизмов пространства V. Пусть M — нормальное расширение конечной степени поля K, содержащее поле L, и пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — все различные изоморфизмы расширения L в поле M. Каждое из отображений σ_i является линейным отображением пространства V в поле M, рассматриваемое как векторное пространство над полем K. Оно может быть продолжено в линейную функцию (которую мы вновь обозначим через σ_i) на пространстве V^M, получающемся из пространства V расширением основного поля до поля M. Функции σ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ линейно независимы (Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 7, n°5, теорема 3[1])). Следовательно, существует базис $\{x_1, \ldots, x_n\}$ пространства V^M, для которого $\sigma_i(x_j) = \delta_{ij}$. Непосредственно видно, что $M_z x_i = \sigma_i(z) x_i$ для всех $z \in L$. Из предложения 3 вытекает, что если G^* — алгебраическая подгруппа группы L^*, то существует подгруппа Λ группы Θ, изоморфной произведению n экземпляров аддитивной группы целых чисел, такая, что G^* состоит из всех элементов $z \in L^*$, сопряженные к которым удовлетворяют условиям $\prod_{i=1}^{n} (\sigma_i z)^{e_i} = 1$ для всех $(e_1, \ldots, e_n) \in \Lambda$. Кроме того, алгебра Ли группы G^* состоит из операторов M_z, где z пробегает множество элементов поля L, удовлетворяющих условиям $\sum_{i=1}^{n} e_i(\sigma_i z) = 0$ для всех $(e_1, \ldots, e_n) \in \Lambda$. Предположим, в частности, что само L — нормальное расширение поля K; пусть Γ — его группа Галуа. Пусть $\mathfrak{g}$ — множество тех $z \in L$, для которых M_z принадлежит алгебре Ли рассматриваемой группы. Каждой системе $(r_1, \ldots, r_n)$ из рациональных чисел сопоставим элемент $\sum_{i=1}^{n} r_i \sigma_i$ групповой алгебры группы Γ над полем рациональных чисел. Множество $\mathfrak{r}$, состоящее из элементов $\sum_{i=1}^{n} r_i \sigma_i$ для всех систем $(r_1, \ldots, r_n)$, удовлетворяющих условиям $\sum_{i=1}^{n} r_i(\sigma_i y) = 0$ при всех $y \in \mathfrak{g}$, очевидно, представляет собой левый идеал групповой алгебры группы Γ, и, наоборот, каждый левый идеал этой алгебры определяет неприводимую алгебраическую группу элементов из L. Если, например, предположить, что L — циклическое расширение простого ранга над полем K, то указанным способом легко установить, что L^* содержит только следующие алгебраические подгруппы: саму группу L^*; мультипликативную группу элементов $\neq 0$ поля K; группу элементов из L^*, относительная норма которых по отношению к полю K равна 1.

§ 14. Алгебраические алгебры Ли

Мы напоминаем, что характеристика поля K предполагается равной нулю.

---

[1]) Автор ссылается здесь на известную лемму Дедекинда, согласно которой различные изоморфизмы $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ некоторого поля L в некоторое поле M линейно независимы над M, т. е. из $\sum_{i=1}^{r} a_i \sigma_i(x) = 0$ $(a_i \in M)$ для всех $x \in L$ следует, что все $a_i = 0$. — *Прим. перев.*

Определение 1. *Подалгебра* $\mathfrak{gl}$ *алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(V)$ *всех эндоморфизмов пространства* V *называется алгебраической, если она является алгеброй Ли алгебраической группы автоморфизмов пространства* V.

Теорема 11. *Пусть* $(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ — *семейство алгебраических подалгебр алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(V)$. *Тогда пересечение* $\mathfrak{g}=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{g}_i$ — *также алгебраическая подалгебра алгебры* $\mathfrak{gl}(V)$. *Если* G_i — *алгебраическая группа автоморфизмов пространства* V, *алгеброй Ли которой является алгебра* $\mathfrak{g}_i$ (*для* $i\in I$), *то* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли группы* $G=\bigcap_{i\in I}G_i$.

Так как группа G является пересечением алгебраических групп, то она сама — алгебраическая группа. Для всех $i\in I$ имеем $G\subset G_i$, и, следовательно, алгебра Ли группы G содержится во всех алгебрах Ли $\mathfrak{g}_i$, а потому и в алгебре $\mathfrak{g}$. Пусть, наоборот, X — элемент алгебры $\mathfrak{g}$, и пусть G_X — наименьшая группа автоморфизмов пространства V, алгебра Ли которой содержит эндоморфизм X (теорема 10 из § 13). Так как для всех $i\in I$ мы имеем $X\in\mathfrak{g}_i$, то $G_X\subset G_i$ и $G_X\subset G$. Это показывает, что эндоморфизм X принадлежит алгебре Ли группы G. Алгебра Ли группы G совпадает с алгеброй $\mathfrak{g}$.

Теорема 12. *Пусть* G — *алгебраическая группа автоморфизмов пространства* V *и* ρ — *рациональное представление группы* G *автоморфизмами конечномерного пространства* U *над полем* K. *Пусть* H — *алгебраическая группа автоморфизмов пространства* U, *а* N — *группа элементов* s *группы* G, *таких, что* $\rho(s)\in H$. *Тогда алгебра Ли группы* N *состоит из тех элементов* X *алгебры Ли группы* G, *для которых* $(d\rho)(X)$ *принадлежит алгебре Ли группы* H.

Как известно (предложение 3 § 4), группа N — алгебраическая. Ограничение представления ρ на группу N является рациональным представлением группы N, дифференциал которого есть ограничение дифференциала $d\rho$ на алгебру Ли группы N. Отсюда следует, что если X принадлежит алгебре Ли группы N, то $(d\rho)(X)$ принадлежит алгебре Ли группы H. Пусть, наоборот, X — такой элемент алгебры Ли группы G, для которого $(d\rho)(X)$ принадлежит алгебре Ли группы H. Построим кольцо формальных рядов от переменной T с коэффициентами из поля K. Тогда

$$\rho(\exp TX)=\exp T((d\rho)(X))$$

(теорема 9 § 12). В силу теоремы 7 § 12 отсюда следует, что $\rho(\exp TX)$ — обобщенная точка группы H. Пусть G_X — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, алгебра Ли которой содержит элемент X. Как известно, $\exp TX$ — общая точка группы G_X (теорема 10 § 13). Любая точка s группы G_X является специализацией точки $\exp TX$. Отсюда следует, что $\rho(s)$ — специализация точки $\rho(\exp TX)$ (предложение 2 из § 6) и принадлежит группе H. Итак, $G_X \subset N$. Это показывает, что X принадлежит алгебре Ли группы N. Теорема 12 доказана.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ — подпространства пространства $\mathfrak{E}$, причем $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$. Тогда множество элементов X пространства $\mathfrak{E}$, таких, что $[X, Y] \in \mathfrak{Q}$ для всех $Y \in \mathfrak{P}$, представляет собой алгебраическую подалгебру алгебры $\mathfrak{gl}(V)$. Это алгебра Ли группы G тех автоморфизмов s пространства V, для которых $sYs^{-1} \equiv Y \pmod{\mathfrak{Q}}$ при всех $Y \in \mathfrak{P}$.*

Пусть H — группа тех автоморфизмов u пространства $\mathfrak{E}$, для которых $u(Y) \equiv Y \pmod{\mathfrak{Q}}$ при всех $Y \in \mathfrak{P}$. Как мы знаем, H — алгебраическая группа и ее алгебра Ли состоит из эндоморфизмов пространства $\mathfrak{E}$, отображающих $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{Q}$ (пример IV § 10). Пусть ρ — присоединенное представление группы $GL(V)$ всех автоморфизмов пространства V; его дифференциал $d\rho$ сопоставляет каждому элементу $X \in \mathfrak{E}$ эндоморфизм $Y \to [X, Y]$ пространства $\mathfrak{E}$ (предложение 6 из § 9). Группа G состоит из элементов s группы $GL(V)$, для которых $\rho(s) \in H$; следствие теперь непосредственно вытекает из теоремы 12.

Теорема 13. *Пусть $\mathfrak{g}$ — некоторая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ всех эндоморфизмов пространства V. Тогда существует наименьшая алгебраическая подалгебра $\mathfrak{g}'$ алгебры $\mathfrak{gl}(V)$, содержащая $\mathfrak{g}$. Каждый идеал алгебры $\mathfrak{g}$ является также идеалом алгебры $\mathfrak{g}'$; производная алгебра алгебры $\mathfrak{g}$ оказывается также производной алгеброй алгебры $\mathfrak{g}'$.*

Пересечение $\mathfrak{g}'$ всех алгебраических подалгебр алгебры $\mathfrak{gl}(V)$, содержащих $\mathfrak{g}$, — алгебраическая алгебра (теорема 11); это, очевидно, наименьшая алгебраическая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, содержащая $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{a}$ — идеал алгебры $\mathfrak{g}$, то множество всех $X \in \mathfrak{gl}(V)$, для которых $[X, Y] \in \mathfrak{a}$ при всех $Y \in \mathfrak{a}$, — алгебраическая алгебра Ли (следствие теоремы 12), содержащая $\mathfrak{g}$. Следовательно, она также содержит алгебру $\mathfrak{g}'$, и поэтому $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}'$. Напомним, что производной алгеброй $\mathfrak{h}$

алгебры $\mathfrak{g}$ называется совокупность всех линейных комбинаций элементов вида $[X, Y]$, где X и Y — элементы из $\mathfrak{g}$. Множество всех $X \in \mathfrak{gl}(V)$, для которых $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ при всех $Y \in \mathfrak{g}$, есть алгебраическая алгебра Ли (следствие теоремы 12), содержащая алгебру $\mathfrak{g}$ и тем самым алгебру $\mathfrak{g}'$. Но, так как $[Y, X] = -[X, Y]$, алгебра $\mathfrak{g}$ содержится в множестве всех $X \in \mathfrak{gl}(V)$, для которых $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ при всех $Y \in \mathfrak{g}'$. Это последнее множество является алгебраической алгеброй Ли (следствие теоремы 12), содержащей, следовательно, алгебру $\mathfrak{g}'$. Отсюда, видно, что производная алгебра алгебры $\mathfrak{g}'$ содержится в алгебре $\mathfrak{h}$. Так как обратное включение очевидно, то обе производные алгебры совпадают.

Предложение 1. *Пусть G — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, и пусть R — рациональное отображение группы G в пространство $\mathfrak{F}$ эндоморфизмов конечномерного пространства U над полем K. Предположим, что отображение R всюду определено, что оно отображает тождественный автоморфизм пространства V в тождественный автоморфизм пространства U и что $R(s)$ при любом $s \in G$ — автоморфизм пространства U. Обозначим через H наименьшую алгебраическую группу автоморфизмов пространства U, содержащую множество $R(G)$. Пусть s^* — общая точка группы G. Если X — элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, то через D_X мы обозначим деривацию поля $K(s^*)$, для которой $D_X s^* = X s^*$, и положим*

$$Y_X^* = (D_X(R(s^*)))(R(s^*))^{-1}.$$

Тогда алгеброй Ли группы H будет наименьшее векторное подпространство $\mathfrak{h}$ пространства $\mathfrak{F}$, обладающее следующими свойствами: а) $Y_X^* \in \mathfrak{h}^{K(s^*)}$ *для всех* $X \in \mathfrak{g}$; б) $R(s)\,\mathfrak{h}\,(R(s))^{-1} \subset \mathfrak{h}$ *для всех* $s \in G$.

Заметим, что, в силу предложения 2 § 6, отображение $R(s)$ определено в точке s^* и элемент $R(s^*)$ обратим; это показывает, что данное в формулировке предложения определение элемента Y_X^* имеет смысл. С другой стороны, пересечение некоторого семейства подпространств пространства $\mathfrak{F}$, обладающих свойствами а) и б), также обладает этими свойствами; это оправдывает определение подпространства $\mathfrak{h}$, данное в формулировке предложения.

Пусть $\mathfrak{h}'$ — алгебра Ли группы H. Так как R — рациональное отображение группы G в группу H, то из предложения 1 § 9 следует, что элемент

$$((dR)(s^*, Xs^*))(Rs^*))^{-1}$$

принадлежит алгебре $(\mathfrak{h}')^{K(s^*)}$; с другой стороны,

$$(dR)(s^*, Xs^*) = D_X R(s^*)$$

[формула (1) § 9]. Это показывает, что пространство $\mathfrak{h}'$ обладает свойством а). Но, с другой стороны, $u\mathfrak{h}'u^{-1} \subset \mathfrak{h}'$ для всех $u \in H$ (ср. определение 2 из § 3), так что $\mathfrak{h}'$ удовлетворяет и условию б). Итак, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$.

Как мы знаем, можно всегда найти такие обобщенные точки $s_1, \ldots, s_k$ группы G, что $u = R(s_1) \ldots R(s_k)$ является общей точкой группы H (предложение 7 § 6); кроме того, можно предположить, что каждая точка s_i является общей точкой группы G (см. замечание после доказательства предложения 7 § 6). Пусть Y — любой элемент из $\mathfrak{h}'$; тогда существует деривация D поля $K(u)$, для которой $Du = Yu$. Поле $K(u)$ содержится в поле $K(s_1, \ldots, s_k)$, и так как K — поле характеристики 0, то D можно продолжить в деривацию (которую мы также обозначим через D) поля $L = K(s_1, \ldots, s_k)$. Положим $Ds_i = X_i s_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$; все эндоморфизмы X_i принадлежат алгебре $\mathfrak{g}^L$ (предложение 4 § 8). Положим $DR(s_i) = Y_i R(s_i)$ и покажем, что $Y_i \in \mathfrak{h}^L$. Так как s и s_i — общие точки группы G, то существует изоморфизм φ_i поля $K(s^*)$ на поле $K(s_i)$, отображающий элементы из K в себя, а координаты точки s^* (относительно некоторой системы координатных функций над $\mathfrak{K}$) в соответствующие координаты точки s_i. Если $X \in \mathfrak{g}$, то изоморфизм φ_i отображает координаты точки Y_X^* в координаты точки

$$Y'_X = (D'_X R(s_i))(R(s_i))^{-1}.$$

Здесь D'_X обозначает деривацию поля $K(s_i)$, для которой $D'_X s_i = X s_i$. Так как эндоморфизм Y_X^* принадлежит алгебре $\mathfrak{h}^{K(s^*)}$, то Y'_X содержится в $\mathfrak{h}^{K(s_i)}$ и, тем более, в $\mathfrak{h}^L$. Но X_i — линейная комбинация элементов из $\mathfrak{g}$ с коэффициентами из поля L. Отсюда следует, что ограничение деривации D на поле $K(s_i)$ является линейной комбинацией с коэффициентами из L дериваций вида D'_X [легко усмотреть, что деривация поля $K(s_i)$ в поле L определена единственным образом своим действием на элемент s_i]. Отсюда мы можем заключить, что Y_i — линейная комбинация с коэффициентами из L элементов вида Y'_X, где $X \in \mathfrak{g}$; итак, $Y_i \in \mathfrak{h}^L$. Покажем теперь, что точки $R(s_j) Y_i (R(s_j))^{-1}$ принадлежат пространству $\mathfrak{h}^L$. Пусть v — линейная функция на $\mathfrak{F}$, равная нулю на $\mathfrak{h}$. Тогда существует рациональная функция S на G^L, такая, что

$$S(s') = v(R(s') Y_i (R(s'))^{-1})$$

во всех точках s' из G^L, для которых элемент $R(s')$ определен и обратим. Но если $s' \in G$, то из того, что Y_i — линейная комбинация элементов из $\mathfrak{h}$, следует, что

$$v(R(s') Y_i (R(s'))^{-1}) = 0.$$

Функция S обращается в нуль во всех точках группы G и поэтому тождественно равна нулю, так что

$$v(R(s_j) Y_i (R(s_j))^{-1}) = 0.$$

Так как это верно для всех линейных функций v на $\mathfrak{F}$, обращающихся в нуль на $\mathfrak{h}$, то

$$R(s_j) Y_i (R(s_j))^{-1} \in \mathfrak{h}^L.$$

Положим теперь

$$u_i = \prod_{j<i} R(s_j), \qquad u'_j = \prod_{j \geqslant i} R(s_j)$$

(u_1 — тождественный автоморфизм пространства U). Из леммы 2 § 8 непосредственно следует, что

$$Du = \sum_{i=1}^{k} u_i Y_i u'_i = \left(\sum_{i=1}^{k} u_i Y_i u_i^{-1}\right) u,$$

так что $Y = \sum_{i=1}^{k} u_i Y_i u_i^{-1} \in \mathfrak{h}^L$. Так как $Y \in \mathfrak{F}$, то $Y \in \mathfrak{h}$, так что $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ и, следовательно, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Предложение 1 доказано.

Теорема 14. *Пусть $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ — семейство алгебраических подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}$, порожденная всеми алгебрами $\mathfrak{g}_i$, также будет алгебраической алгеброй. Пусть G_i — неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, для которой $\mathfrak{g}_i$ является алгеброй Ли. Тогда наименьшая алгебраическая группа G*

автоморфизмов пространства V, содержащая все группы G_i, сама оказывается неприводимой и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли.

Рассмотрим сперва случай, когда множество индексов I конечно; тогда можно предположить, что оно состоит из целых чисел $1, \ldots, h$. Пусть R — рациональное отображение

$$(t_1, \ldots, t_h) \to t_1 \ldots t_h$$

группы $\prod_{i=1}^{h} G_i$ в $\mathfrak{E}$. Совершенно очевидно, что G — это наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, содержащая образ группы $\prod_{i=1}^{h} G_i$ при отображении R; следовательно, группа G неприводима (предложение 7 § 6). Алгебра Ли группы G содержит все алгебры $\mathfrak{g}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$, а потому и алгебру $\mathfrak{g}$. Чтобы показать, что она совпадает с $\mathfrak{g}$, мы используем предложение 1. Заметим сперва, что если $t = t_1 \ldots t_h$ при $t_i \in G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$, то $t\mathfrak{g}t^{-1} \subset \mathfrak{g}$. Действительно, алгебра Ли $\mathfrak{h}$ группы H тех автоморфизмов t пространства V, для которых $t\mathfrak{g}t^{-1} \subset \mathfrak{g}$, состоит из тех эндоморфизмов $X \subset \mathfrak{E}$, для которых $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ при всех $Y \in \mathfrak{g}$ (следствие теоремы 12). Так как $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{h}$. Но так как группа G_i неприводима, то $G_i \subset H$ (следствие 1 теоремы 8 § 12) и, следовательно, $G \subset H$, что доказывает наше утверждение. Подобным же образом можно доказать и более общее утверждение: если L — надполе поля K, то $t\mathfrak{g}^L t^{-1} \subset \mathfrak{g}^L$ для всех $t \in G^L$. Пусть теперь $(s_1, \ldots, s_h)$ — общая точка группы $G_1 \times \ldots \times G_h$, и пусть L — поле $K(s_1, \ldots, s_h)$. Алгеброй Ли группы $G_1 \times \ldots \times G_h$ является алгебра $\mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{g}_h$ (предложение 5 § 8). Пусть $\Xi = (X_1, \ldots, X_h)$ — элемент этой алгебры Ли $(X_i \in \mathfrak{g}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant h)$. Пусть D — деривация поля L, для которой

$$D(s_1, \ldots, s_h) = \Xi(s_1, \ldots, s_h),$$

и пусть

$$Y = (D(s_1, \ldots, s_h))\,(s_1 \ldots s_h)^{-1}.$$

Мы покажем, что элемент Y принадлежит алгебре $\mathfrak{g}^L$. Очевидно, $Ds_i = X_i s_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$. С помощью леммы 2 из § 8 легко доказывается, что

$$D(s_1, \ldots, s_h) = \left(\sum_{i=1}^{h} u_i X_i u_i^{-1}\right) s_1 \ldots s_h,$$

где $u_i = \prod\limits_{j<i} s_j$ (u_1 — тождественный автоморфизм пространства V). Но имеет место включение $X_i \in \mathfrak{g}_i^L \subset \mathfrak{g}^L$ (предложение 4 из § 8). Из доказанного выше следует поэтому, что элемент

$$Y = \sum_{i=1}^{h} u_i X_i u_i^{-1}$$

принадлежит алгебре $\mathfrak{g}^L$. С помощью предложения 1 мы заключаем отсюда, что алгебра Ли группы G содержится в алгебре $\mathfrak{g}$ и, следовательно, совпадает с $\mathfrak{g}$. Теорема 14 доказана для случая конечных множеств I. Переходя к общему случаю, обозначим для конечного подмножества E множества I через $\mathfrak{g}_E$ алгебру Ли, порожденную всеми алгебрами $\mathfrak{g}_i$ при $i \in E$, а через G_E — наименьшую алгебраическую группу автоморфизмов пространства V, содержащую все группы G_i при $i \in E$. Как было показано, G_E — неприводимая группа и $\mathfrak{g}_E$ — ее алгебра Ли. Среди всех алгебр вида $\mathfrak{g}_E$ пусть $\mathfrak{g}_{E_0}$ — некоторая алгебра наибольшей размерности. Тогда ясно, что $\mathfrak{g}_E = \mathfrak{g}_{E_0}$ для всех конечных подмножеств E множества I, содержащих E_0; так как G_E и G_{E_0} — неприводимые группы, то отсюда следует, что $G_E = G_{E_0}$. Отсюда заключаем, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{E_0}$ и $G = G_{E_0}$. Теорема 14 полностью доказана.

Заметим, что в случае алгебраически замкнутого поля K группа G, о которой говорится в теореме 14, порождается группами G_i, $i \in I$, как это легко вытекает из следствия 3 предложения 2 § 7. Мы используем это замечание для доказательства того, что *в случае, когда поле K — поле комплексных чисел, всякая неприводимая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V топологически связна.* Пусть G — такая группа, и пусть $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Для $X \in \mathfrak{g}$ пусть $G(X)$ — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, алгебра Ли которой содержит элемент X. Ясно, что $G(X) \subset G$, и из теоремы 14 следует, что группа G порождается всеми группами $G(X)$ для всех $X \in \mathfrak{g}$. Легко видеть, что для доказательства связности группы G достаточно показать, что все группы $G(X)$ связны. Для доказательства же этого факта можно ограничиться случаем, когда эндоморфизм X либо полупростой, либо нильпотентный (теорема 10 из § 13). Если эндоморфизм X полупростой, то всегда можно подобрать базис $\{x_1, \ldots, x_n\}$ пространства V, такой, что

$$Xx_i = a_i x_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

где a_i — комплексные числа. Положим $z_i = \exp Ta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (где T — переменная, с помощью которой построено кольцо формальных рядов с коэффициентами из поля K). Группа, порожденная элементами $z_1, \ldots, z_n$, обладает базисом $\{w_1, \ldots, w_d\}$, состоящим из алгебраически независимых относительно поля K элементов. Эти элементы можно рассматривать как параметры некоторого собственного параметрического рационального представления группы $G(X)$. Каждая точка группы $G(X)$ накрывается этим параметрическим представлением, и системами допустимых значений параметров являются системы из d комплексных чисел, отличных от нуля (ср. доказательство леммы 1 § 13). Пусть s — элемент группы $G(X)$, получающейся при значениях $b_1, \ldots, b_d$ параметров; тогда $b_j \neq 0$ $(1 \leqslant j \leqslant d)$. Ясно, что можно подыскать d непрерывных комплексных функций $b_j(t)$ вещественного переменного t, определенных на отрезке $[0, 1]$, таких, что $b_j(0) = 1$, $b_j(1) = b_j$ и $b_j(t) \neq 0$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Если обозначить через $s(t)$ точку группы $G(X)$, соответствующую значениям параметров $b_j(t)$, то $s(0) = I$ (I — тождественный автоморфизм) и $s(1) = s$; кроме того, $s(t)$ непрерывно зависит от t. Отсюда непосредственно следует, что в случае полупростого эндоморфизма X группа $G(X)$ связна. Если эндоморфизм X нильпотентен, то группа $G(X)$ состоит из элементов вида $\exp aX$ для всех комплексных a (предложение 1 из § 13) и поэтому, очевидно, связна. Наше утверждение доказано.

Теорема 15. *Пусть $\mathfrak{g}$ — любая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Тогда производная алгебра алгебры $\mathfrak{g}$ — алгебраическая. Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли некоторой неприводимой группы G автоморфизмов пространства V, то производная алгебра алгебры $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли наименьшей алгебраической группы автоморфизмов пространства V, содержащей коммутант группы G.*

Производная алгебра $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ является также производной алгеброй наименьшей алгебраической подалгебры алгебры $\mathfrak{gl}(V)$, содержащей алгебру $\mathfrak{g}$ (теорема 13). Поэтому теорему 15 достаточно доказать для случая, когда сама алгебра $\mathfrak{g}$ — алгебраическая. Пусть тогда G — неприводимая алгебраическая группа, для которой $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, и пусть

H — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, содержащая коммутант группы G. Ясно, что H — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, содержащая образ множества $G \times G$ при рациональном отображении

$$(s, t) \to sts^{-1}t^{-1}$$

множества $G \times G$ в $\mathfrak{E}$. Пусть G' — группа всех автоморфизмов s пространства V, для которых $sXs^{-1} \equiv X \pmod{\mathfrak{h}}$ при всех $X \in \mathfrak{g}$. Алгебра Ли группы G' состоит тогда из всех эндоморфизмов $Y \in \mathfrak{E}$, для которых $[Y, X] \in \mathfrak{h}$ при всех $X \in \mathfrak{g}$. Она, следовательно, содержит алгебру $\mathfrak{g}$, откуда вытекает, что $G \subset G'$. Итак, мы имеем $sXs^{-1} \equiv X \pmod{\mathfrak{h}}$ для всех $s \in G$ и всех $X \in \mathfrak{g}$. Аналогичное рассуждение показывает, что если L — надполе поля K, то $sXs^{-1} \equiv X \pmod{\mathfrak{h}^L}$ для всех $s \in G^L$ и всех $X \in \mathfrak{g}^L$. Пусть теперь (s, t) — общая точка группы $G \times G$, и пусть (X, Y) — элемент алгебры Ли $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ группы $G \times G$. При этом s и t — общие точки группы G, а X и Y — элементы алгебры $\mathfrak{g}$. Положим $L = K(s, t)$, и пусть D — деривация поля L, для которой

$$D(s, t) = (X, Y)(s, t),$$

так что $Ds = Xs$, $Dt = Yt$. С помощью леммы 2 § 8 получаем

$$D(sts^{-1}t^{-1}) = Xsts^{-1}t^{-1} + sYts^{-1}t^{-1} - sts^{-1}Xt^{-1} - sts^{-1}t^{-1}Y =$$
$$= (X - uXu^{-1} + s(Y - vYv^{-1})s^{-1})\,sts^{-1}t^{-1},$$

где положено $u = sts^{-1}$, $v = ts^{-1}t^{-1}$. Но элементы $X - uXu^{-1}$ и $Y - vYv^{-1}$ принадлежат алгебре $\mathfrak{h}^L$; то же самое имеет место и для элемента $s(Y - vYv^{-1})s^{-1}$, а следовательно, и для

$$\left(D\left(sts^{-1}t^{-1}\right)\right)\left(sts^{-1}t^{-1}\right)^{-1}.$$

С помощью предложения 1 мы заключаем отсюда, что алгебра Ли группы H содержится в $\mathfrak{h}^L$. Кроме того, рассматривая случай $Y = 0$, мы видим, что если $\mathfrak{h}_1$ — алгебра Ли группы H, то эндоморфизм $X - uXu^{-1}$ содержится в $\mathfrak{h}_1^L$. Но u — общая точка группы G. Действительно, если I — тождественный автоморфизм пространства V, то (I, t) — обобщенная точка группы $G \times G$, т. е. специализация точки (s, t). Отсюда сразу следует, что t — специализация точки u; так как t — общая точка

16 Зак. 2604. Клод Шевалле

группы G, то тем же свойством обладает и точка u. Пусть Z — любой элемент алгебры $\mathfrak{g}$, и пусть Δ — деривация поля $K(u)$, для которой $\Delta u = Zu$. Тогда $\Delta X = 0$ и

$$\Delta(X - uXu^{-1}) = -ZuXu^{-1} + uXu^{-1}Z.$$

Если w — линейная функция на $\mathfrak{E}$, равная нулю на $\mathfrak{h}_1$, то $w(X - uXu^{-1}) = 0$, откуда следует, что

$$w(\Delta(X - uXu^{-1})) = \Delta(w(X - uXu^{-1})) = 0.$$

Но тогда немедленно можно заключить, что

$$-ZuXu^{-1} + uXu^{-1}Z = \Delta(X - uXu^{-1})$$

принадлежит $\mathfrak{h}_1^L$. Так как I — специализация элемента u, то $[X, Z] = -ZX + XZ$ — специализация элемента

$$-ZuXu^{-1} + uXu^{-1}Z.$$

Ясно, что всякая специализация в $\mathfrak{E}$ некоторой точки из $\mathfrak{h}_1^L$ принадлежит алгебре $\mathfrak{h}_1$. Поэтому $[X, Z] \in \mathfrak{h}_1$, так что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_1$. Но вместе с этим $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}^L \cap \mathfrak{E} = \mathfrak{h}$, и, следовательно, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$, что и доказывает теорему 15.

Теорема 16. *Предположим, что на пространстве V определена структура алгебры над полем K; пусть это будет алгебра A. Совокупность дериваций алгебры A является тогда алгебраической подалгеброй алгебры $\mathfrak{gl}(V)$; эта подалгебра — алгебра Ли группы автоморфизмов алгебры A.*

Мы уже знаем, что алгебра Ли группы G автоморфизмов алгебры A содержится в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ дериваций алгебры A. Пусть, наоборот, X — деривация алгебры A. Построим кольцо формальных рядов от переменной T с коэффициентами из поля K, и пусть L — поле отношений этого кольца. Мы покажем, что $\exp TX$ — автоморфизм алгебры A^L. Для этого достаточно убедиться, что

$$(\exp TX)(xy) = ((\exp TX)x)((\exp TX)y)$$

для всех пар (x, y) элементов из A. Так как X — деривация, то для каждого целого $k > 0$ индукцией по k доказывается формула

$$X^k(xy) = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} (X^i x)(X^j y),$$

где $X^0 = I$ (тождественный автоморфизм) и сумма распространяется на пары (i, j) целых чисел $\geqslant 0$ с суммой k. Так как семейство

$$\left(T^{i+j}(X^i x)(X^j y)\right)_{0 \leqslant i,\, j < \infty}$$

элементов пространства $V^{\mathfrak{t}}$ линейных комбинаций элементов из V с коэффициентами из кольца $\mathfrak{t}$ суммируемо (см. § 11), то

$$(\exp TX)(xy) = \sum_{0 \leqslant i,\, j < \infty} ((i+j)!)^{-1} \binom{i+j}{i} T^i (X^i x)\, T^j (X^j y),$$

и эта сумма, очевидно, равна $((\exp TX)\, x)\, ((\exp TX)\, y)$. Отсюда вытекает, что $\exp TX$ — обобщенная точка группы G. Но пусть $G(X)$ — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, алгебра Ли которой содержит эндоморфизм X. Каждый элемент группы $G(X)$ — специализация точки $\exp TX$ (теорема 10 § 13) и, следовательно, принадлежит группе G, так что $G(X) \subset G$. Так как X принадлежит алгебре Ли группы $G(X)$, то он также принадлежит алгебре Ли группы G. Доказательство теоремы 16 закончено.

Следствие. *При тех же обозначениях, что и в теореме* 16, *если X — деривация алгебры A, то полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма X также являются деривациями алгебры A.*

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 16 и из теоремы 10 § 13.

Пусть теперь X — любой элемент пространства $\mathfrak{E}$, и пусть $G(X)$ — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, алгебра Ли которой содержит эндоморфизм X. Обозначим через $\mathfrak{g}(X)$ алгебру Ли группы $G(X)$. Пусть L — надполе поля K. Мы покажем, что $(G(X))^L$ — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V^L, алгебра Ли которой содержит X. Что алгебра Ли группы $(G(X))^L$ содержит эндоморфизм X, совершенно ясно. С помощью переменной T построим формальные ряды с коэффициентами из поля L. Пусть $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}'$ — кольца формальных рядов от переменной T с коэффициентами из K и L соответственно. Следовательно, кольцо $\mathfrak{t}'$ содержит подполе L и подкольцо $\mathfrak{t}$, и существует линейное отображение φ тензорного произведения $L \otimes \mathfrak{t}$ векторных пространств L и $\mathfrak{t}$ над полем K в $\mathfrak{t}'$, для которого $\varphi(a \otimes z) = az$ при всех $(a, z) \in L \times \mathfrak{t}$. Покажем, что φ — изоморфизм. Для этого достаточно убедиться, что если $a_1, \ldots, a_h$ — элементы поля L, линейно независимые относительно поля K, а $z_1, \ldots, z_h$ — элементы из $\mathfrak{t}$, для которых $\sum_{i=1}^{h} a_i z_i = 0$, то

$$z_i = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant h).$$

Пусть

$$z_i = \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} T^j, \qquad \text{где } b_{ij} \in K.$$

Тогда $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{h} a_i b_{ij} \right) T^j = 0$, так что $\sum_{i=1}^{h} a_i b_{ij} = 0 \quad (0 \leqslant j < \infty)$.

Так как элементы b_{ij} принадлежат полю K, то

$$b_{ij} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant h,\ 0 \leqslant j < \infty).$$

Отсюда следует, что

$$z_i = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant h).$$

Из этого мы заключаем, что поле L и поле отношений кольца $\mathfrak{t}$ линейно свободны по отношению к полю K в поле отношений кольца $\mathfrak{t}'$ (Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 2, n° 3, предложение 5) и, следовательно, поле L и поле $K(\exp TX)$ линейно свободны по отношению к полю K в поле $L(\exp TX)$. Таким образом, алгебраическая размерность точки $\exp TX$ относительно поля L равна алгебраической размерности этой точки относительно поля K (Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 5, n° 4, предложение 10)[1]. Точка $\exp TX$ есть обобщенная точка группы $(G(X))^L$; так как алгебраическая размерность точки $\exp TX$ относительно поля L равна размерности группы $G(X)$ [поскольку $\exp TX$ заведомо является общей точкой группы $G(X)$] и тем самым равна размерности группы $(G(X))^L$, то $\exp TX$ — общая точка группы $(G(X))^L$. Но, с другой стороны, $\exp TX$ — общая точка наименьшей алгебраической группы G' автоморфизмов пространства V^L, алгебра Ли которой содержит эндоморфизм X. Поэтому $G' = (G(X))^L$, что и доказывает наше утверждение. Мы видим, что $(\mathfrak{g}(X))^L$ — алгебра Ли наименьшей алгебраической группы автоморфизмов пространства V^L, алгебра Ли которой содержит эндоморфизм X.

[1] См. добавление переводчика, стр. 262—265. — *Прим. перев.*

Определение 2. *Пусть X — элемент пространства $\mathfrak{E}$, и пусть $\mathfrak{g}(X)$ — наименьшая алгебраическая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, содержащая X. Элементы алгебры $\mathfrak{g}(X)$ называются репликами эндоморфизма X.*

Пусть L — надполе поля K. Из сказанного выше следует, что элемент X' пространства $\mathfrak{E}$ является репликой эндоморфизма X тогда и только тогда, когда он является репликой эндоморфизма X, если X и X' рассматриваются как элементы пространства $\mathfrak{E}^L$.

Предложение 2. *Для того чтобы подалгебра $\mathfrak{g}$ алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ была алгебраической, необходимо и достаточно, чтобы реплика всякого элемента из $\mathfrak{g}$ принадлежала алгебре $\mathfrak{g}$.*

Условие, очевидно, необходимо. Предположим, что оно выполнено. Если $X \in \mathfrak{g}$, то пусть $\mathfrak{g}(X)$ — наименьшая алгебраическая алгебра, содержащая X; тогда $\mathfrak{g}(X) \subset \mathfrak{g}$. Так как $X \in \mathfrak{g}(X)$, то алгебра $\mathfrak{g}$ порождается семейством всех алгебр $\mathfrak{g}(X)$ при $X \in \mathfrak{g}$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{g}$ — алгебраическая алгебра Ли (теорема 14).

Предложение 3. *Пусть X — элемент из $\mathfrak{E}$. Тогда каждая его реплика представима в виде полинома от X с коэффициентами из поля K с постоянным членом, равным нулю. Полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма X являются его репликами.*

Пусть $G(X)$ — наименьшая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, алгебра Ли которой содержит X. Мы знаем, что $G(X)$ содержится в ассоциативной подалгебре алгебры $\mathfrak{E}$, порожденной тождественным автоморфизмом I и эндоморфизмом X (теорема 10 § 13). Так как алгебра Ли группы $G(X)$ содержится в оболочке этой группы (предложение 6 § 8), то отсюда вытекает, что каждая реплика X' эндоморфизма X представима в виде полинома $F(X)$ от X с коэффициентами из K. Если X — обратимый эндоморфизм, то он удовлетворяет уравнению вида $A(X) = 0$, где A — полином с коэффициентами из K и постоянным членом $\neq 0$. Но тогда I и, следовательно, полином $F(X)$ представимы в виде полиномов от X с постоянным членом, равным нулю. Предположим теперь, что эндоморфизм X не обратим. Тогда существует вектор $x \neq 0$ из V, для которого $Xx = 0$. Алгебра Ли группы G всех автоморфизмов s пространства V, для которых $sx = x$, состоит из тех элементов Y пространства $\mathfrak{E}$, для которых $Yx = 0$

(пример IV § 10). Эта алгебра Ли, содержащая элемент X, содержит также $X' = F(X)$. Таким образом, $F(X)x = 0$, а это показывает, что постоянный член полинома F равен нулю. Второе утверждение предложения 3 непосредственно следует из теоремы 10 § 13.

Предложение 4. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(V)$, *и пусть* L *— надполе поля* K. *Для того чтобы алгебра* $\mathfrak{g}$ *была алгебраической, необходимо и достаточно, чтобы алгебраической была алгебра* $\mathfrak{g}^L$.

Условие, очевидно, необходимо. Предположим, что оно выполнено. Пусть X' — реплика некоторого элемента X алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда X' — реплика элемента X, если эндоморфизмы X и X' рассматривать как элементы пространства $\mathfrak{E}^L$. Следовательно, $X' \in \mathfrak{g}^L \cap \mathfrak{E} = \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}$ — алгебраическая алгебра в силу предложения 2.

Теорема 17. *Пусть* X *— элемент пространства* $\mathfrak{E}$. *Для того чтобы эндоморфизм* X *был нильпотентен, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{Tr} XX' = 0$ *для всех его реплик* X'.

Условие необходимо. Действительно, если X — нильпотентный эндоморфизм, то все его степени X^k для целых $k > 0$ также нильпотентны, так что $\operatorname{Tr} X^k = 0$. Отсюда и из предложения 3 следует, что для каждой реплики X' эндоморфизма X произведение XX' есть линейная комбинация степеней эндоморфизма X с показателями > 0. Предположим теперь, что условие выполнено. Пусть L — алгебраически замкнутое надполе поля K. Если $\mathfrak{g}(X)$ — наименьшая алгебраическая подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(V)$, содержащая X, то $(\mathfrak{g}(X))^L$ — наименьшая алгебраическая подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(VL)$, содержащая эндоморфизм X. Это показывает, что реплики эндоморфизма X в $\mathfrak{E}^L$ — линейные комбинации с коэффициентами из L реплик элемента X в пространстве $\mathfrak{E}$. Если условие теоремы выполнено, то $\operatorname{Tr} XX' = 0$ для всех реплик X' эндоморфизма X в пространстве $\mathfrak{E}^L$. Мы видим, что при доказательстве достаточности условия можно, не ограничивая общности, предположить основное поле K алгебраически замкнутым. Пусть тогда S и N — соответственно полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма X, и пусть S' — реплика эндоморфизма S. Так как S — реплика X, то и S' — реплика элемента X, так что

$$\operatorname{Tr}(S + N)S' = \operatorname{Tr} XS' = 0.$$

Эндоморфизм S' может быть представлен в виде полинома от S с коэффициентами из поля K; так как эндоморфизм S перестановочен с эндоморфизмом N, то тем же свойством обладает и эндоморфизм S'. Так как N — нильпотентный эндоморфизм, то и эндоморфизм NS' нильпотентен, так что $\operatorname{Tr} NS' = 0$ и $\operatorname{Tr} SS' = 0$. Но так как поле K алгебраически замкнуто, а эндоморфизм S полупростой, то существует базис $\{x_1, \ldots, x_n\}$ пространства V, состоящий из собственных векторов эндоморфизма S. Положим $Sx_i = a_i x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Если мы теперь покажем, что все $a_i = 0 \, (1 \leqslant i \leqslant n)$, то это будет означать, что $S = 0$ и $X = N$, и теорема будет доказана. Пусть K_0 — простое поле, содержащееся в поле K. Так как K — поле характеристики 0, то K_0 можно отождествить с полем рациональных чисел. Пусть Q — векторное пространство над полем K_0, порожденное элементами $a_1, \ldots, a_n$ поля K, и пусть λ — любая линейная функция над Q. Из предложения 2 § 13 следует, что эндоморфизм S' пространства V, определенный формулами $S'x_i = \lambda(a_i) x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, — реплика эндоморфизма S. Итак, мы имеем

$$0 = \operatorname{Tr} SS' = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(a_i).$$

Но элементы $a_1, \ldots, a_n$ можно представить в виде линейных комбинаций $a_i = \sum_{j=1}^{h} r_{ij} b_j$ с рациональными коэффициентами r_{ij} от некоторого числа элементов $b_1, \ldots, b_h$ поля K, линейно независимых над полем K_0. Для каждого индекса j $(1 \leqslant j \leqslant h)$ существует линейная функция λ_j над Q, для которой $\lambda_j(a_i) = r_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_j(a_i) = \sum_{k=1}^{h} \left(\sum_{i=1}^{n} r_{ik} r_{ij} \right) b_k,$$

так что $\sum_{i=1}^{n} r_{ik} r_{ij} = 0 \; (1 \leqslant k \leqslant h)$, поскольку элементы $b_1, \ldots, b_h$ линейно независимы над полем K_0. Но тогда $\sum_{i=1}^{n} r_{ij}^2 = 0$, так что $r_{ij} = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n, \; 1 \leqslant j \leqslant h)$ и, следовательно, $a_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что и доказывает теорему 17.

Предложение 5. *Пусть I — тождественный автоморфизм пространства V, а v — автоморфизм $\neq I$ пространства V, для которого эндоморфизм $v - I$ нильпотентен*

Тогда наименьшая алгебраическая группа G автоморфизмов пространства V, содержащая автоморфизм v, есть неприводимая группа размерности 1. Если r — наибольшее целое число > 0, для которого $(v-I)^r \neq 0$, то алгебра Ли группы G порождается нильпотентным эндоморфизмом

$$N = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} k^{-1} (v-I)^k$$

и $v = \exp N$.

Для каждого $p > 0$ положим

$$v^p = (I + v - I)^p = I + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (v-I)^k.$$

Известно, что для фиксированного k биномиальный коэффициент $\binom{p}{k}$ представим в виде полинома степени k от p. Постоянный член этого полинома равен нулю, а коэффициент при p равен $(-1)^{k-1}k^{-1}$. Можно поэтому положить

$$v^p \doteq I + pN + p^2N_2 + \ldots + p^rN_r,$$

где N — эндоморфизм, определенный в формулировке предложения 5, а $N_2, \ldots, N_r$ — некоторые эндоморфизмы пространства V. Пусть $L = K(T, T')$ — поле, получающееся из поля K присоединением двух алгебраически независимых над полем K элементов T и T'. Положим

$$P(T) = I + TN + T^2N_2 + \ldots + T^rN_r;$$

$P(T)$ — эндоморфизм пространства V^L, получающегося из пространства V расширением основного поля до поля L. Для каждого целого числа $p > 0$ имеем $P(p) = v^p$. Пусть x — элемент пространства V и λ — линейная функция над V; тогда

$$\lambda(P(T+T') \cdot x - P(T)P(T') \cdot x)$$

— полином $Q(T, T')$ от T и T' с коэффициентами из поля K. Если p и p' — целые числа > 0, то $P(p+p') = v^{p+p'} = v^p v^{p'} = P(p)P(p')$; полином $Q(T, T')$ принимает значение 0 всякий раз, когда его аргументы T и T' принимают целочисленные значения > 0. Отсюда можно заключить, что $Q = 0$. Действительно, для каждого целого p имеем $Q(p, T') = 0$, так как полином $Q(p, T')$ имеет бесконечно много корней. Коэффициенты полинома Q, рассматриваемые как полиномы от T' с коэффициентами из $K[T]$, являются полиномами от T, для которых все положительные целые числа — корни. Следовательно, все эти полиномы обращаются в нуль тождественно, так что $Q=0$. Используем, в частности, тот факт, что коэффициент при T' в полиноме $Q(T, T')$ равен нулю. Положив $N_0=I$, $N_1=N$, получаем

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda((kN_k - N_{k-1}N)\cdot x)\, T^{k-1} = 0,$$

так что

$$\lambda((kN_k - N_{k-1}N)\cdot x) = 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant r).$$

Последняя формула справедлива при любых λ и x; поэтому

$$kN_k = N_{k-1}N \qquad (1 \leqslant k \leqslant r),$$

так что $N_k = (k!)^{-1}N^k$ и $P(T) = \exp TN$. Отсюда, в частности, следует, что $v = \exp N$ и что группа G содержится в алгебраической группе G', алгебра Ли которой порождается элементом N. С другой стороны, если R — полиномиальная функция на $\mathfrak{E}$, равная нулю на G, то

$$R(\exp pN) = R(v^p) = 0$$

для всех целых $p > 0$. Так как $R(\exp TN)$ — полином от T, то этот полином тождественно равен нулю, и R обращается в нуль на группе G'. Это показывает, что $G' = G$.

Теорема 18. *Каждый автоморфизм s пространства V может быть однозначным образом представлен в виде произведения $s = uv$, где u и v — автоморфизмы, обладающие следующими свойствами: u — полупростой автоморфизм; $v - I$ — нильпотентный эндоморфизм (I — тождественный автоморфизм); автоморфизмы u и v перестановочны. При этом u и $u(v-I)$ — соответственно полупростая и нильпотентная компоненты автоморфизма s; u и v представимы в виде полиномов от автоморфизма s с коэффициентами из поля K. Всякая алгебраическая группа автоморфизмов пространства V, содержащая s, содержит также автоморфизмы u и v.*

Пусть u и w — соответственно полупростая и нильпотентная компоненты автоморфизма s. Покажем, что u — автоморфизм пространства V. Так как эндоморфизмы w и u перестановочны, то пространство V' тех $x \in V$, для которых $u \cdot x = 0$, допустимо по отношению к эндоморфизму w. Эндоморфизм w нильпотентен; если бы пространство V' было$\neq \{0\}$, то существовал бы такой вектор $x \in V'$, для которого $w \cdot x = 0$, $x \neq 0$. Но тогда $s \cdot x = u \cdot x + w \cdot x = 0$, что невозможно, так как s — автоморфизм. Таким образом, $V' = \{0\}$, что и показывает, что эндоморфизм u обратим. Если теперь положить $v = I + u^{-1}w$, то $s = uv$ и эндоморфизмы u и v обладают требуемыми свойствами. Обратно, если мы обозначим через u и v какие-нибудь автоморфизмы пространства V, удовлетворяющие условиям теоремы 18, то $s = u + u(v - I)$; автоморфизм u перестановочен с $v - I$, так что эндоморфизм $u(v - I)$ нильпотентен и также перестановочен с u. Из теоремы 7 § 8 гл. I тогда следует, что u и $u(v - I)$ — полупростая и нильпотентная компоненты автоморфизма s, т. е. что u и v однозначно определены и представимы в виде полиномов от s с коэффициентами из поля K.

Пусть $\mathfrak{u}$ — (ассоциативная и коммутативная) алгебра эндоморфизмов пространства V, представимых в виде полиномов от u с коэффициентами из поля K, и пусть G_1 — множество обратимых элементов из $\mathfrak{u}$. Для каждого $u_1 \in G_1$ умножение на u_1 в алгебре $\mathfrak{u}$ определяет эндоморфизм векторного пространства $\mathfrak{u}$, не отображающий ни один элемент $\neq 0$ в нуль; этот эндоморфизм отображает пространство $\mathfrak{u}$ *на* себя. Так как $I \in \mathfrak{u}$, то и $u_1^{-1} \in \mathfrak{u}$, так что множество G_1 — группа. Пространство $\mathfrak{u}$ обладает базисом вида $\{I, u, \ldots, u^{r-1}\}$; если $x_0, \ldots, x_{r-1}$ — алгебраически независимые относительно поля K элементы, то $\mathfrak{u}$ состоит из всех специализаций точки $\sum_{i=0}^{r-1} x_i u^i$. Отсюда мы непосредственно заключаем, что G_1 — неприводимая алгебраическая группа; ее алгебра Ли $\mathfrak{g}_1$ содержится в оболочке группы G_1 и, следовательно, в $\mathfrak{u}$. (Впрочем, легко убедиться, что $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{u}$.) Чтобы показать, что всякая алгебраическая группа, содержащая s, содержит также автоморфизмы u и v, конечно, можно ограничиться случаем $v \neq I$. Пусть теперь G_2 — наименьшая алгебраическая группа, содержащая v. Это неприводимая алгебраическая группа размерности 1, алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ которой порождается нильпотентным элементом N, представимым в виде полинома от v с коэффициентами из поля K (предложение 5). Так как размерность группы G_2 равна 1, то она не конечна, так что и порядок элемента v бесконечен.

Элементы алгебры $\mathfrak{g}_2$ перестановочны с элементами алгебры $\mathfrak{g}_1$; из теоремы 14 следует, что $\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2$ — алгебра Ли алгебраической группы H, содержащей элементы u и v и тем самым автоморфизм s. Все элементы алгебры $\mathfrak{u}$ — полупростые (предложение 4 § 8 гл. I); тем же свойством обладают, следовательно, и элементы группы G_1 и алгебры $\mathfrak{g}_1$. Пусть G — наименьшая алгебраическая группа, содержащая s; тогда $G \subset H$ и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G содержится в $\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2$. Покажем, что она не содержится в $\mathfrak{g}_1$. Пусть G' — компонента единицы группы G; группа G/G' конечна, и $s^p \in G'$ для некоторого $p>0$. Имеем $s^p = u^p v^p$, u^p — полупростой эндоморфизм, $v^p - I$ — нильпотентный эндоморфизм и v^p перестановочен с u^p. Кроме того, $v^p \neq I$, как мы уже отметили выше. Следовательно, эндоморфизм s^p не полупрост, так что G' не содержится в группе G_1, а потому и $\mathfrak{g}$ не содержится в алгебре $\mathfrak{g}_1$. Пусть X — элемент из $\mathfrak{g}$, не содержащийся в $\mathfrak{g}_1$. Имеем $X = X_1 + aN$, $X_1 \in \mathfrak{g}_1$, $a \in K$; X_1 — полупростой, aN — нильпотентный эндоморфизм, перестановочный с эндоморфизмом X_1. Отсюда следует, что aN — нильпотентная компонента эндоморфизма X, так что $aN \in \mathfrak{g}$, поскольку $\mathfrak{g}$ — алгебраическая алгебра. Но $a \neq 0$, так как X_1 не содержится в алгебре $\mathfrak{g}_1$. Поэтому $N \in \mathfrak{g}$, так что $v \in G$ и, следовательно, $u \in G$. Доказательство теоремы 18 закончено.

ДОБАВЛЕНИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Автор настоящей книги Клод Шевалле является участником коллектива французских математиков, издающих с 1936 г. под псевдонимом Н. Бурбаки многотомный энциклопедический трактат „Элементы математики“. Кроме автора, в коллективе участвуют французские математики А. Вейль, Р. Годеман, Ж. Диксмье, Ж. Дьёдонне, А. Картан, П. Самюель, Ж.-П. Серр, К. Шаботи, Л. Шварц и другие, а также американский математик С. Эйленберг. По замыслу авторов, „Элементы математики“ должны будут содержать полное, строгое и последовательное изложение начал всех основных современных дисциплин чистой математики с единой теоретико-множественной точки зрения. В настоящее время публикуется первая часть трактата „Основные структуры анализа“; план второй части еще не полностью выкристаллизовался. Трактат распадается на тома, посвященные отдельным дисциплинам — теории множеств, алгебре, топологии, функциям вещественной переменной, топологическим векторным пространствам, интегрированию и т. д.; каждый том, в свою очередь, распадается на главы. Публикация происходит отдельными выпусками, содержащими одну или несколько глав какого-нибудь тома. В среднем выходят 2—3 выпуска в год.

Как сам замысел, так и его выполнение встречают в настоящее время в кругах французских математиков очень различную реакцию — от восторженной до враждебной. Нужно отметить, что подбор и распределение материала, стиль изложения и терминология Н. Бурбаки оригинальны и своеобразны и зачастую значительно отличаются от общепринятых. Многое из предложенных новшеств, несомненно, спорно, многое очень естественно и войдет, по всей вероятности, в практику математиков с бо́льшими или меньшими изменениями. Но во всяком случае результаты работы большого коллектива крупных ученых — без преувеличения можно сказать, что в коллектив входит в настоящее время больше половины ведущих французских математиков, занимающих к тому же основные кафедры крупнейших университетов Франции, — десятилетиями упорно и организованно работающих над осуществлением одной общей идеи, не смогли не оказать серьезного влияния на широкие круги подрастающего поколения математиков, в первую очередь во Франции, но также и в других странах — в Германии, Италии, Бельгии, Швейцарии и др. Это влияние в первую очередь проявляется в форме изложения математических теорий, в употреблении специфической „бурбакистской“ терминологии, но также в систематическом использовании ряда понятий [как, например, тензорных и внешних произведений в алгебре, понятия „фильтра“ (центрированной системы множеств) в топологии и анализе и т. д.], возникших зачастую до и вне коллектива Бурбаки, но вошедших в повседневную практику многих математиков благодаря книгам Бурбаки. Не следует удивляться, что особенно широкое применение „бурбакистского“ стиля изложения встречается в книгах и работах непосредственных участников коллектива, в частности в книгах и работах К. Шевалле.

Настоящее добавление содержит краткое переизложение (без доказательств) тех результатов Н. Бурбаки, на которые ссылается автор, а также определения и описания некоторых „бурбакистских“ понятий. При этом мы будем иногда приводить соответствующие выдержки из трактата Н. Бурбаки. Критический разбор „Элементов математики“ Н. Бурбаки, разумеется, не является нашей задачей.

1. Понятие структуры

Как уже сказано, цель трактата Н. Бурбаки — дать строгое и последовательное изложение начал различных математических дисциплин на теоретико-множественной основе. Объектом изучения каждой математической дисциплины являются при этом некоторые структуры, т. е. множества с определенными в них отношениями (в широком смысле этого слова), специфическими для данной области математики. Мы остановимся на понятии структуры несколько более подробно, чем на других понятиях; оно занимает во всем изложении Н. Бурбаки центральное место.

Приведем выдержку из книги Бурбаки, в которой вводится понятие структуры (Н. Бурбаки, Теория множеств, Сводка результатов, § 8).

„1. Пусть, например, даны три различных множества E, F, G. Исходя из них, можно образовать новые множества: множества подмножеств каждого из этих множеств, произведения одного из множеств E, F, G на себя и, наконец, произведения двух из данных множеств, взятых в определенном порядке. Таким образом мы получаем двенадцать новых множеств; присоединяя их к трем множествам E, F, G, можно повторить над этими пятнадцатью множествами те же операции, опуская при этом множества, построенные ранее; и т. д. столько раз, сколько нам заблагорассудится. О всяком множестве, полученном таким способом (согласно явно определенной схеме), мы будем говорить, что оно принадлежит *лестнице множеств над базисом* E, F, G.

Пусть M, N, P — три множества этой лестницы и $R\{x, y, z\}$ — отношение между общими элементами этих множеств; отношение R определяет подмножество множества $M \times N \times P$, т. е. (в силу естественного соответствия) подмножество множества $(M \times N) \times P$ и, наконец, элемент множества $\mathfrak{P}((M \times N) \times P)$ [1]. Итак, задание некоторого *отношения* между элементами нескольких множеств одной и той же лестницы равносильно заданию *элемента* некоторого другого множества этой лестницы. Равным образом задание, например, некоторого отображения множества M в множество N сводится (если рассматривать представляющее множество этого отображения [2])) к заданию некоторого подмножества множества $M \times N$, т. е. к заданию некоторого элемента множества $\mathfrak{P}(M \times N)$, в свою очередь принадлежащего лестнице. Наконец, задание, например, пары элементов множества M сводится к заданию одного элемента множества-произведения $M \times M$. Итак, задание некоторого множества элементов, принадлежащих множествам лестницы, отношений между общими элементами множеств, отображений подмножеств этих множеств в другие множества, — все это сводится в конечном счете к заданию *одного единственного элемента* одного из множеств лестницы.

2... Задание некоторого элемента C множества $\mathfrak{P}(E \times E)$ определяет *структуру упорядоченного множества на* E [3]),

---

[1]) $\mathfrak{P}(E)$ обозначает множество подмножеств множества E.

[2]) То есть график этого отображения.

[3]) У Н. Бурбаки упорядоченностью называется отношение, которое часто называют частичной упорядоченностью: условие „или $a \leqslant b$, или $b \leqslant a$“ не обязательно имеет место для всех пар (a, b).

если выполняются следующие условия [1]):

$$\text{а) } C \circ C \subset C; \quad \text{б) } C \cap \overset{-1}{C} = \Delta.$$

В общем случае рассмотрим некоторое множество M, принадлежащее лестнице над базисом, состоящим, например, из трех множеств E, F, G; зададимся рядом явно сформулированных свойств общего элемента множества M, и пусть T — пересечение подмножеств множества M, определенных каждым из этих свойств. Мы будем говорить, что всякий элемент σ множества T определяет на E, F, G *структуру вида* T. Таким образом, структуры вида T характеризуются схемой построения множества M, исходя из множеств E, F, G, и определяющими свойствами T, называемыми аксиомами этих структур. Все структуры одного и того же вида обозначаются одним специфическим термином...

Наконец, для удобства изложения множеству, на котором определена структура определенного вида, дают часто особое название; так, например, говорят об *упорядоченных множествах*, а в продолжении настоящего трактата будут определены понятия *группы*, *кольца*, *поля*, *топологического пространства*, *равномерного пространства* и т. д. ... Все эти слова обозначают множества, на которых определены некоторые структуры.

3. Рассмотрим структуры одного и того же вида T, где T — подмножество некоторого множества M, принадлежащего лестнице множеств. Если добавить новые „аксиомы" к тем, которые определяют T, то получающаяся система аксиом определит некоторое подмножество U множества M, содержащееся в T. Мы будем говорить, что структуры вида U *богаче*, чем структуры вида T. Так, например, структуры *полностью*

---

[1]) Если A — бинарное отношение между множествами E и F (т. е. подмножество множества $E \times F$), B — бинарное отношение между множествами F и G, то через $B \circ A$ обозначается сложное бинарное отношение между E и G: $(x, z) \in B \circ A$ в том и только в том случае, если существует такой элемент $y \in F$, что одновременно $(x, y) \in A$ и $(y, z) \in B$. К. Шевалле употребляет это обозначение для произведения отображений (являющегося частным случаем бинарных отношений).

Через $\overset{-1}{A}$ обозначается обратное отношение между F и E: $(y, x) \in \overset{-1}{A}$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in A$.

Δ означает „диагональ" множества $E \times E$, т. е. отношение тождества в E.

упорядоченного множества[1]) богаче, чем структуры упорядоченного множества: элемент $C \in \mathfrak{P}(E \times E)$, определяющий такую структуру, удовлетворяет дополнительной аксиоме $C \cup \overset{-1}{C} = E \times E$".

Далее указывается, что, вообще говоря, структуры некоторого вида могут быть заданы различными системами аксиом. Две системы аксиом, определяющие структуры одного и того же вида, называются *эквивалентными*. Далее вводится понятие *изоморфизма* и, в частности, *автоморфизма* структур. После всего сказанного читатель без труда уяснит себе эти понятия.

При изучении некоторой структуры, определенной на множестве E, очень часто приходится рассматривать одновременно соответствующие более бедные структуры, определенные на E только некоторой частью заданных отношений. Так, например, если A — *алгебра* над полем K, то в множестве A тем самым определены более бедные структуры *векторного пространства над K, кольца, (аддитивной) абелевой группы* и т. д. При рассмотрении изоморфизмов и автоморфизмов в таких случаях нужно указывать, о какой структуре идет речь. Сюда относятся такие выражения, часто встречающиеся в изложении Н. Бурбаки, а также в книге К. Шевалле: „Пусть A — алгебра над полем K, и пусть σ — автоморфизм (или эндоморфизм) ее структуры векторного пространства". Ясно, что в данном случае речь идет об отображении множества A на (или в) себя, сохраняющем по меньшей мере операции векторного пространства, определенные на A. В переводе этой книги подобные фразы часто формулируются так: „Пусть A — алгебра над полем K, и пусть σ — автоморфизм векторного пространства A".

Нужно думать, что понятие структуры, введенное Н. Бурбаки, останется в математической науке. Даже оставив в стороне его роль в теоретико-множественном обосновании математики, можно заметить, что оно дает естественный принцип классификации абстрактных аксиоматически определенных математических объектов. Кроме того, его употребление удобно при изложении абстрактных математических дисциплин. В советской литературе термин „структура" имеет уже установившийся смысл, значительно более узкий и совершенно отличный

[1]) Полной упорядоченностью у Н. Бурбаки называется отношение, обычно называемое упорядоченностью: условие „если $a \neq b$, то либо $a < b$, либо $b < a$" предполагается выполненным.

от понятия „структуры“ у Н. Бурбаки. Возникает насущная необходимость ввести удобный русский термин для этого нового понятия.

2. Сопряженный эндоморфизм
(Н. Бурбаки, Алгебра, гл. II, § 4, n° 9)

Пусть V — векторное пространство над полем K; по определению, пространство V^*, дуальное к V, состоит из линейных отображений x^* пространства V в поле K. Бурбаки обозначает через $\langle x^*, x\rangle$ значение линейного отображения x^* (линйной формы) в точке x; $\langle x^*, x\rangle$ — линейная функция от x при фиксированном x^* и от x^* при фиксированном x; $\langle x^*, x\rangle$ называется *канонической билинейной формой над пространствами V и V^**. Если пространство V конечномерно, то оно изоморфно своему дуальному пространству V^*; кроме того, V можно в этом случае рассматривать, в свою очередь, как пространство, дуальное к V^*.

Пусть V и U — конечномерные пространства, V^* и U^* — дуальные к ним пространства, и пусть φ — линейное отображение V в U. Для каждого $y^* \in U^*$ выражение $\langle y^*, \varphi(x)\rangle$ есть линейная форма над V, т. е. некоторый элемент $x^* \in V^*$, зависящий от y^*: $x^* = {}^t\varphi(y^*)$, где ${}^t\varphi$ есть отображение U^* в V^*. Ясно, что ${}^t\varphi$ — линейное отображение U^* в V^*, зависящее от φ; оно называется *сопряженным* (*или транспонированым*) к φ. Согласно сказанному, ${}^t\varphi$ определяется тождеством

$$\langle y^*, \varphi(x)\rangle = \langle {}^t\varphi(y^*), x\rangle$$

относительно y^* и x. В частности, если $V = U$ и X — эндоморфизм V, то ${}^tX$ — эндоморфизм V^*, определенный формулой

$$\langle x^*, Xx\rangle = \langle {}^tXx^*, x\rangle.$$

Отсюда ясно, что ${}^t(X+Y) = {}^tX + {}^tY$, ${}^t(cX) = c\,{}^tX$ и ${}^t(XY) = {}^tY\,{}^tX$. Оператор ${}^t(\ )$ есть антиизоморфизм кольца эндоморфизмов пространства V в кольцо эндоморфизмов пространства V^*.

17 Зак. 2604. Клод Шевалле

3. Тензорные произведения векторных пространств

(Н. Бурбаки, Алгебра, гл. III, § 1)

Пусть U, V и W — векторные пространства над одним и тем же основным полем K. *Билинейное отображение пары пространств* (U, V) *в* W — это отображение $\varphi(x, y)$ декартова произведения $U \times V$ в W, линейное по каждому аргументу при фиксированном другом. Если $\varphi(x, y)$ — билинейное отображение (U, V) в W, а λ — линейное отображение W в некоторое пространство W', то $(\lambda \circ \varphi)(x, y)$ — билинейное отображение пары (U, V) в W'. Под *тензорным произведением* $U \otimes V$ *пространств* U *и* V понимается пара (M, τ), где M — векторное пространство над K, τ — билинейное отображение (U, V) в M, для которых выполняются следующие условия: 1) пространство M порождается всеми образами $\tau(x, y)$, когда x и y независимо друг от друга пробегают соответственно U и V; 2) для всякого билинейного отображения φ пары пространств (U, V) в некоторое пространство W существует линейное отображение $\bar{\varphi}$ пространства M в W, такое, что

$$\varphi(x, y) = (\bar{\varphi} \circ \tau)(x, y).$$

Нетрудно доказать существование такого пространства M и отображения τ. Согласно 2), тензорное произведение однозначно определено в следующем смысле: если (M, τ) и (M', τ') — два пространства и два билинейных отображения, удовлетворяющих условиям 1) и 2), то существует изоморфизм λ пространства M на M', такой, что $\tau' = \lambda \circ \tau$ $(\tau = \lambda^{-1} \circ \tau')$.

$\tau(x, y)$ удобно записывать как произведение элементов; $\tau(x, y) = x \otimes y$. При такой записи пространство M состоит из всевозможных конечных сумм вида $\sum x_i \otimes y_i$, где $x_i \in U$, $y_i \in V$.

Если пространства U и V конечномерны и если $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$ — соответственно базисы пространств U и V, то элементы $e_\nu \otimes f_\mu$ образуют базис M и для $x = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e_\nu$, $y = \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu f_\mu$ имеет место равенство

$$x \otimes y = \sum_{\nu, \mu = 1}^{\nu = n, \mu = m} x_\nu y_\mu e_\nu \otimes f_\mu.$$

Аналогично с помощью понятия полилинейного отображения определяется тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_r = M$ пространств $V_1, V_2, \ldots, V_r$. Оно состоит из конечных сумм элементов вида

$$x^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes \ldots \otimes x^{(r)},$$

где $x^{(\rho)} \in V_\rho$. При выбранных базисах $e_1^{(\rho)}, e_2^{(\rho)}, \ldots, e_{m_\rho}^{(\rho)}$ пространств V_ρ $(\rho = 1, 2, \ldots, r)$ пространство M имеет базис, состоящий из элементов вида

$$e_{i_1}^{(1)} \otimes e_{i_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{i_r}^{(2)} \qquad (1 \leqslant i_\rho \leqslant m_\rho).$$

В частности, если все V_ρ совпадают друг с другом, $V_\rho = V$, то говорят о *тензорной степени* $\bigotimes_1^r V$ *пространства* V. Элементы пространства $\bigotimes_1^r V$ суть *контравариантные тензоры степени r над V*. Пространство $\bigotimes_1^r V$ совпадает (в обозначениях К. Шевалле) с подпространством T_r однородных элементов степени r в тензорной алгебре T.

Заметим, что понятие тензорного произведения определяется у Н. Бурбаки аналогичным образом для модулей над коммутативными кольцами с единицей. В книге Шевалле это понятие в такой общей форме не используется.

4. Тензорное произведение алгебр (Н. Бурбаки, Алгебра, гл. III, § 3)

На основе понятия тензорного произведения векторных пространств (или даже, более обще, модулей) определяется понятие тензорного произведения алгебр. Обычно это произведение называется прямым или кронекеровским произведением алгебр.

Пусть E и F — две алгебры над некоторым полем K (или, более обще, над некоторым коммутативным кольцом A). На тензорном произведении $E \otimes F$ векторных пространств E и F естественным образом определяется структура алгебры. А именно, умножение на $E \otimes F$ достаточно определить для элементов вида $x \otimes y$, где $x \in E$, $y \in F$, так как они составляют систему образующих для структуры векторного пространства $E \otimes F$; умножение на всем $E \otimes F$ доопределяется тогда по линейности. Для элементов же вида $x \otimes y$ умножение определяется так:

$$(1) \qquad (x \otimes y) \cdot (x' \otimes y') = (xx') \otimes (yy').$$

Легко проверить, что при таком умножении на $E \otimes F$ определена структура алгебры; эта алгебра и называется *тензорным произведением алгебр E и F* и обозначается также $E \otimes F$.

Если $(e_i)_{i \in I}$ и $(f_j)_{j \in J}$ — базисы алгебр E и F над полем K, то элементы вида $e_i \otimes f_j$ образуют базис пространства $E \otimes F$; умножение в алгебре $E \otimes F$ вполне определяется таблицей умножения для этого базиса. Согласно (1), эта таблица умножения полностью определяется таблицей умножения элементов базиса $(e_i)_{i \in I}$ на элементы базиса $(f_j)_{j \in J}$.

Если E и F — алгебры с единицей (1_E, 1_F — единицы алгебр E и F соответственно), то и $E \otimes F$ — алгебра с единицей, причем единицей для $E \otimes F$ является $1_E \otimes 1_F$. В этом случае $x \to x \otimes 1_F$ и $y \to 1_E \otimes y$ — изоморфизмы алгебр E и F в $E \otimes F$.

В предположении, что E и F — алгебры с единицами, тензорное произведение $G = E \otimes F$ может быть (с точностью до изоморфизма) охарактеризовано следующим образом: 1) алгебра G содержит подалгебры E' и F', соответственно изоморфные алгебрам E и F; 2) подалгебры E' и F' поэлементно перестановочны (для всех $x' \in E'$ и $y' \in F'$ имеет место равенство $x' \cdot y' = y' \cdot x'$); 3) алгебра G порождается подалгебрами E' и F'; 4) всякая алгебра $\overline{G}$, обладающая свойствами 1) — 3), является гомоморфным образом алгебры $G = E \otimes F$.

5. Расширение основного поля векторного пространства

(Н. Бурбаки, Алгебра, гл. III, § 2)

Понятие тензорного произведения векторных пространств позволяет определить операцию расширения основного поля векторного пространства.

Пусть K — поле, V — векторное пространство над K, а L — расширение поля K. В частности, в L определена также структура векторного пространства над K; поле L, рассматриваемое как векторное пространство над K, условимся обозначать через L_K.

Рассмотрим тензорное произведение $L_K \otimes V$ векторных пространств L_K и V над K. В $L_K \otimes V$ можно определить структуру векторного пространства над полем L. Действительно, умножение на элементы из L достаточно определить для элементов из $L_K \otimes V$ вида $a \otimes x$, где $a \in L_K$, $x \in V$; для $t \in L$ положим $t \cdot (a \otimes x) = (ta) \otimes x$ (где произведение ta берется в поле L). Умножение на элементы из L доопределяется для всех элементов из $L_K \otimes V$ согласно дистрибутивному закону. С так определенным умножением тензорное произведение $L_K \otimes V$ становится векторным пространством над полем L; это пространство обозначается через V^L.

Для $x \in V$ отображение $x \to 1 \otimes x$ есть K-линейное отображение V в V^L, называемое каноническим отображением; образ V в V^L при этом отображении отождествляется с пространством V; после такого отождествления можно считать, что пространство V^L содержит V. Пространство V^L называется *векторным пространством, получаемым из V расширением основного поля до поля L.*

Легко усматривается, что операция расширения основного поля векторного пространства „транзитивна“; а именно если L' — расширение поля L, то $(V^L)^{L'} = V^{L'}$. Всякий базис B пространства V (над полем K) является одновременно базисом V^L (над полем L). Отсюда легко вытекает следующее предложение: пусть U, V — векторные пространства над полем K, и пусть σ есть K-линейное отображение U в V; тогда существует одно и только одно L-линейное отображение σ^L пространства U^L в V^L, продолжающее σ.

Заметим, что указанные понятия и результаты, связанные с расширением основного поля векторного пространства, являются частным случаем теории расширений кольца операторов модулей над коммутативными кольцами. Именно эта теория и рассматривается у Н. Бурбаки. В книге Шевалле используется только частный случай этой теории, относящийся к векторным пространствам.

Аналогично с помощью понятия тензорного произведения алгебр определяется расширение основного поля алгебры.

18 Зак. 2604. Клод Шевалле

6. Линейно свободные расширения (Н. Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 2, n° 3)

Пусть поле Ω — расширение поля K, и пусть A и B — два подкольца в Ω, содержащие поле K. Поле Ω обладает структурой алгебры над K, и кольца A и B можно рассматривать как ее подалгебры. Рассмотрим тензорное произведение $A \otimes B$ алгебр A и B над K. Сопоставляя элементам вида $x \otimes y$ ($x \in A$, $y \in B$) элемент $xy \in \Omega$, мы определяем представление φ алгебры $A \otimes B$ в Ω, для которого $\varphi(x \otimes y) = xy$. Пусть $\varphi(A \otimes B) = C$. Тогда C является подкольцом Ω, порожденным подкольцами A и B. Если $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{b_\mu\}_{\mu \in M}$ — соответственно базисы алгебр A и B, то C совпадает с каждым из нижеследующих множеств линейных комбинаций:

$$\left\{\sum_\mu \alpha_\mu b_\mu\right\} (\alpha_\mu \in A); \qquad \left\{\sum_\lambda \beta_\lambda a_\lambda\right\} (\beta_\lambda \in B);$$

$$\left\{\sum_{\lambda,\mu} \gamma_{\lambda,\mu} a_\lambda b_\mu\right\} (\gamma_{\lambda\mu} \in K).$$

Кольца A и B называются *линейно свободными* [1]) *над* K, если φ — точное представление, т. е. является изоморфизмом алгебры $A \otimes B$ в Ω. Ясно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы элементы из A (соответственно из B), линейно независимые над K, были линейно независимы над B (соответственно над A).

На стр. 147 автор использует следующее предложение (Н. Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 2, n° 3, предложение 5): *пусть в тех же обозначениях, как и выше, E и F — два расширения поля K, содержащихся в расширении Ω, и пусть E и F — соответственно поля отношений колец A и B. Для того чтобы E и F были линейно свободными над K, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладали кольца A и B.*

Это утверждение легко доказывается с помощью того факта, что элементы из Ω линейно независимы над F тогда и только тогда, когда они линейно независимы над B.

---

[1]) К. Шевалле, так же как и Н. Бурбаки, употребляет термин „extension linéairement disjointes“, дословно означающий „линейно разъединенные расширения“. Термин „линейно свободные“ встречается в нашей литературе, например в статье А. И. Узкова „Поле алгебраических функций одной переменной...“, УМН, VI, 69—155 (1951).

7. Трансцендентные расширения, базис трансцендентности, алгебраическая размерность
(Н. Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 5)

Пусть K — поле, а E — расширение поля K. Элемент x из E называется *трансцендентным над* K, если он не является корнем никакого полинома с коэффициентами из K; в противном случае он называется *алгебраическим*.

Понятие трансцендентного элемента обобщается следующим образом. Пусть $\{x_i\}_{i\in I}$ — некоторое семейство элементов из E. Рассматривается алгебра полиномов $K[\{X_i\}_{i\in I}]$ от переменных $\{X_i\}_{i\in I}$ с тем же множеством индексов I, что и у семейства $\{x_i\}_{i\in I}$. (Множество I может быть бесконечным, но, разумеется, в каждом полиноме только конечное число одночленов имеет коэффициенты $\neq 0$.) Всякий полином $f(\{X_i\}_{i\in I})$ из $K[\{X_i\}_{i\in I}]$, для которого $f(\{x_i\}_{i\in I})=0$, т. е. обращающийся в нуль при специализации $X_i\to x_i$, называется *алгебраическим соотношением над* K для семейства $\{x_i\}_{i\in I}$. Совокупность всех алгебраических соотношений семейства $\{x_i\}_{i\in I}$ представляет собой идеал в алгебре $K[\{X_i\}]_{i\in I}$; он называется *идеалом алгебраических соотношений* данного семейства. Семейство называется *алгебраически свободным над* K, если идеал его алгебраических соотношений над K есть идеал (0). Это требование равносильно тому, что все одночлены $\prod\limits_{i\in I} x_i^{\alpha_i}$ должны быть линейно независимыми над K. Если семейство $\{x_i\}_{i\in I}$ состоит из одного единственного элемента x, то x трансцендентен тогда и только тогда, когда семейство, состоящее из этого элемента, алгебраически свободно.

Расширение E поля K называется *чисто трансцендентным расширением* K, если для непустого I существует алгебраически свободное семейство $\{x_i\}_{i\in I}$, $x_i\in E$, над K, такое, что $E=K(\{x_i\}_{i\in I})$. В этом случае поле E изоморфно полю рациональных функций от переменных $\{X_i\}_{i\in I}$ с коэффициентами из K.

Если E — какое-нибудь расширение поля K, то с помощью леммы Цорна легко доказывается существование максимальных алгебраически свободных (над K) подмножеств в E. Такое максимальное алгебраически свободное подмножество называется *базисом трансцендентности поля E над K*. Все базисы трансцендентности поля E над K имеют одинаковую мощность; она называется *степенью трансцендентности* или *алгебраической размерностью E над K*. Если M — базис трансцендентности E над K, то $K(M)$ — чисто трансцендентное расширение, а $E/K(M)$ — алгебраическое расширение. При этом, если поле E получается из K присоединением некоторого множества A, т. е. $E=K(A)$, то всякое максимальное алгебраически свободное подмножество B, $B\subset A$, является базисом трансцендентности для E над K (Н. Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 5, n° 2, теорема 2). Этот факт легко доказывается с помощью леммы Цорна.

К понятию алгебраически свободного множества примыкает понятие алгебраической разобщенности двух расширений поля K.

Пусть Ω — расширение поля K, E/K и F/K — два подрасширения в Ω/K. Расширения E и F называются алгебраически разобщенными над K, если для любых двух алгебраически свободных (над K) подмножеств $A\subset E$, $B\subset F$ пересечение $A\cap B$ пусто, а объединение $A\cup B$ алгебраически свободно над K.

Понятие алгебраической разобщенности полей E и F, $K\subset E\subset\Omega$, $K\subset F\subset\Omega$, существенно зависит от поля K; расширения E/K и F/K, алгебраически разобщенные над K, не будут, вообще говоря, алгебраически разобщенными над подполем $K_0\subset K$. С другой стороны, E и F будут алгебраически разобщенными над K в том и только в том случае, если они обладают этим свойством как подрасширения поля $K(E\cup F)$.

Если по крайней мере одно из расширений E/K, F/K алгебраично, то E и F алгебраически разобщены над K. Если E/K и F/K — два подрасширения расширения Ω/K и если алгебраическая размерность $\dim_K F$ конечна, то легко доказывается неравенство

$$\dim_E E(F)\leqslant \dim_K F;$$

равенство

$$\dim_E E(F)=\dim_K F$$

справедливо тогда и только тогда, когда E и F алгебраически разобщены над K.

Если алгебраические размерности $\dim_K E$, $\dim_K F$ расширений E/K, F/K конечны, то для алгебраической размерности их композита $K(E\cup F)/K$ справедливо неравенство

$$\dim_K K(E\cup F)\leqslant \dim_K E+\dim_K F;$$

при этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда E/K и F/K алгебраически разобщены.

Легко убедиться, что линейно свободные расширения тем более алгебраически разобщены. (Обратное утверждение, вообще говоря, неверно; оно справедливо при дополнительном предположении, что одно из расширений E/K и F/K чисто трансцендентно.) Таким образом, если расширения E/K и F/K линейно свободны, то при $\dim_K(F) < \infty$ имеет место равенство

$$\dim_E E(F) = \dim_K F,$$

а при $\dim_K E < \infty$, $\dim_K F < \infty$ — равенство

$$\dim_K K(E \cup F) = \dim_K E + \dim_K F.$$

8. Сепарабельные и несепарабельные расширения
(Н. Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 7)

Для свойства сепарабельности у Н. Бурбаки дано определение, более общее, чем обычное; оно охватывает любые расширения полей, как алгебраические, так и трансцендентные.

Пусть Ω — поле и K — подполе в Ω. Обозначим через Ω_K структуру векторного пространства над K поля Ω. Пусть V — конечномерное векторное подпространство (над K), содержащееся в Ω_K; пусть n — размерность V. Обозначим через $\mathfrak{L}(V, \Omega_K)$ совокупность K-линейных отображений V в Ω_K; в $\mathfrak{L}(V, \Omega_K)$ естественным образом определена структура векторного пространства над Ω:

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x); \qquad (au)(x) = a(u(x));$$
$$u,\ v \in \mathfrak{L}(V, \Omega_K),\ x \in V,\ a \in \Omega.$$

Легко видеть, что размерность $\mathfrak{L}(V, \Omega_K)$ над Ω равна n, т. е. равна размерности V над K. Элементами $\mathfrak{L}(V, \Omega_K)$ являются, в частности, ограничения на V K-автоморфизмов поля Ω; совокупность этих ограничений порождает в $\mathfrak{L}(V, \Omega_K)$ некоторое подпространство, вообще говоря отличное от всего пространства $\mathfrak{L}(V, \Omega_K)$; это подпространство состоит из ограничений на V операторов вида $\sum\limits_{g \in G} a_g g$, где G — группа K-автоморфизмов поля Ω, $a_g \in \Omega$ и только конечное число $a_g \neq 0$.

Пусть теперь E — некоторое расширение поля K, а Ω — алгебраически замкнутое расширение поля E; $K \subset E \subset \Omega$. *Расширение E/K называется сепарабельным, если для каждого конечномерного векторного подпространства* (*над* K) $V \subset E$ *совокупность ограничений на V всех K-автоморфизмов поля Ω порождает все пространство* $\mathfrak{L}(V, \Omega_K)$. (В определении требуется, чтобы это свойство выполнялось для одного какого-нибудь алгебраически замкнутого Ω; но Н. Бурбаки показывает, что оно тогда выполняется для всех алгебраически замкнутых Ω, содержащих E, и, следовательно, зависит только от самого расширения E/K.) Можно показать, что для случая алгебраического расширения E/K это определение эквивалентно обычному, согласно которому расширение E/K сепарабельно, если содержит только сепарабельные элементы над K.

Если L — поле и G — некоторая группа автоморфизмов поля L, то элементы $a \in L$, остающиеся неизменными при всех $g \in G$ [т. е. $g(a) = a$], образуют подполе в L, называемое *полем инвариантов группы* G.

Пусть E/K — расширение поля K, а Ω_0 — алгебраическое замыкание поля E. Пусть G — группа всех K-автоморфизмов поля Ω_0, а $\overline{K} \subset \Omega_0$ — поле инвариантов G. Расширение E/K сепарабельно тогда и только тогда, когда E и $\overline{K}$ линейно свободны.

Поле K называется *совершенным*, если оно является полем инвариантов всех K-автоморфизмов своего алгебраического замыкания. Из сказанного выше легко следует, что совершенные поля и только они не обладают несепарабельными расширениями.

Все поля характеристики 0 совершенны; при характеристике $p \neq 0$ поле K совершенно в том и только в том случае, если $K^p = K$.

Для доказательства сепарабельности некоторого расширения часто пользуются следующим критерием Мак-Лэйна (Н. Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 8, n° 2, предложение 3). Пусть K — поле характеристики $p \neq 0$. Обозначим через $K^{p^{-e}}$ поле p^e-х корней из элементов поля K, а через $K^{p^{-\infty}}$ — объединение всех $K^{p^{-e}}$. Пусть E — расширение поля K, а Ω — алгебраически замкнутое расширение E. Для того чтобы E/K было сепарабельным, необходимо, чтобы E и $K^{p^{-\infty}} \subset \Omega$ были линейно свободными (над K), и достаточно, чтобы линейно свободными были E и $K^{p^{-1}}$.

9. Деривации и расширения полей (Н. Бурбаки, Алгебра, гл. V, § 9)

Пусть E — поле, содержащееся в поле Ω. *Деривацией* D *поля* E *в* Ω называется отображение E в Ω, для которого

$$D(x+y)=D(x)+D(y),$$
$$D(xy)=xD(y)+yD(x).$$

Если $\{D_i\}_{i \in I}$ — некоторое множество дериваций E в Ω, то совокупность всех $y \in E$, для которых $D_i(y)=0$, представляет собой подполе N в E; N называется *полем констант для данного множества дериваций*. При этом ясно, что для всех $a \in N$ и для всех $x \in E$ имеет место равенство $D(ax)=aD(x)$.

С другой стороны, если K — подполе в E, то можно рассматривать совокупность дериваций E в Ω, переводящих в 0 все элементы из K. Такие деривации называются *K-деривациями E в* Ω. K-деривации E в Ω образуют векторное пространство $\mathscr{D}$ над Ω. В частности, можно рассматривать K-деривации поля E в себя ($E=\Omega$). Тогда на векторном пространстве $\mathscr{D}$ (над E) K-дериваций можно определить структуру алгебры Ли над E с законом умножения

$$[D, D'] = DD' - D'D, \qquad D, D' \in \mathscr{D}.$$

(Действительно, коммутатор двух K-дериваций является опять K-деривацией.)

Из свойств векторного пространства (или алгебры Ли) $\mathscr{D}$ можно сделать ряд заключений о свойствах расширения E/K. Так, например, пусть Ω — некоторое расширение поля K, а E — подрасширение Ω ($K \subset E \subset \Omega$), сепарабельное и порождаемое конечным числом элементов $x_1, x_2, \ldots, x_r$:

$$E = K(x_1, x_2, \ldots, x_r);$$

далее, пусть $\mathscr{D}$ — векторное пространство (над Ω) K-дериваций поля E в Ω. Тогда алгебраическая размерность E над K равна размерности пространства $\mathscr{D}$ над Ω.

Относительно продолжения дериваций на некоторое расширение поля доказываются следующие утверждения.

Пусть E — подполе поля Ω, D — деривация E в Ω и $F = E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — расширение E, содержащееся в Ω и порождаемое над E конечным числом элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть, далее, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — заданные элементы из Ω. Спрашивается, в каком случае существует деривация $\bar{D}$ поля F в Ω, продолжающая D и такая, что $\bar{D}(x_i) = u_i$? Необходимым и достаточным условием оказывается следующее: если $\mathfrak{a}$ — идеал алгебраических соотношений между элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами из E [то есть совокупность всех полиномов $f(X_1, \ldots, X_n)$ с коэффициентами из E, таких, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$], то для всех $f \in \mathfrak{a}$ должно иметь место равенство

$$f^D(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i = 0,$$

где $f^D(x_1, \ldots, x_n)$ — полином, получаемый из $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ применением оператора D к коэффициентам. Если это условие выполнено, то деривация $\bar{D}$ с указанными выше свойствами существует и единственна.

Относительно продолжения дериваций на алгебраические расширения имеет место следующее предложение: пусть F — сепарабельное алгебраическое расширение поля E, содержащееся в некотором расширении Ω, $E \subset F \subset \Omega$. Тогда всякая деривация E в Ω продолжается, и притом одним единственным образом, в деривацию поля F в Ω.

Из сказанного, в частности, следует, что единственной K-деривацией в Ω алгебраического сепарабельного расширения E поля K является нулевая деривация. Справедливо и обратное утверждение, согласно которому указанное свойство характерно для сепарабельных алгебраических расширений E/K, если E порождается над K конечным числом элементов.

10. Подполе, принадлежащее подпространству (Н. Бурбаки, Алгебра, гл. II, n° 5 и n° 6)

Пусть E — векторное пространство над полем K, $A = (a_i)_{i \in I}$ — базис пространства E и V — подпространство в E. Тогда тройке (E, V, A) естественным образом соответствует некоторое подполе K_0 поля K, называемое *полем, принадлежащим подпространству V относительно базиса A*. Поле K_0 характеризуется следующими двумя различными свойствами, эквивалентность которых может быть доказана:

1) K_0 есть наименьшее поле, такое, что подпространство V порождается векторами, все координаты которых в базисе A принадлежат полю K_0.

2) Известно, что при выбранном базисе A для всякого подпространства $V \subset E$ существует система однородных линейных уравнений

$$(S) \quad \sum \xi_i a_{i\lambda} = 0 \quad (i \in I,\ \lambda \in L,\ a_{i\lambda} \in K),$$

такая, что V состоит из всех векторов $\sum_{i \in I} \xi_i a_i$, где $(\xi_i)_{i \in I}$ — решение системы (S). Назовем всякую такую систему (S) *определяющей системой уравнений для подпространства V относительно базиса A*. Если, как выше, A — базис E, а V — векторное подпространство в E, то существует наименьшее поле K_0, такое, что для V относительно A найдется определяющая система уравнений (S) с коэффициентами $a_{i\lambda}$ из K_0; K_0 — поле, принадлежащее подпространству V относительно базиса A.

К. Шевалле пользуется следующим предложением. Пусть L — поле, E — векторное пространство над L, $A = (a_i)_{i \in I}$ — базис пространства E и G — некоторая группа автоморфизмов поля L. Для каждого $g \in G$ определим следующим образом отображение $\bar{g}$ пространства E в себя: для $x = \sum_{i \in I} \xi_i a_i$ положим

$$\bar{g}(x) = \bar{g}\Big(\sum_{i \in I} \xi_i a_i\Big) = \sum_{i \in I} g(\xi_i)\, a_i.$$

Назовем подпространство $V \subset E$ допустимым относительно G [при базисе $A = (a_i)_{i \in I}$], если $\bar{G}(V) \subseteq V$ для всех $g \in G$. Тогда оказывается, что подполе $K_0 \subset L$, принадлежащее подпространству V относительно A, содержится в поле инвариантов группы G. Из свойства 1) поля K_0 вытекает, что V обладает системой образующих, все координаты которых в базисе A инварианты относительно G.

Заметим, что все вышеуказанные свойства имеют место также в бесконечномерных векторных пространствах над телами; в такой общности они и излагаются у Н. Бурбаки.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Клод Шевалле
ТЕОРИЯ ГРУПП ЛИ
том II

Редактор *М. С. АГРАНОВИЧ*
Художник *Г. М. Рихтин*
Технический редактор *Н. И. Смирнова*

Сдано в производство 13/XI 1957 г.
Подписано к печати 24/III 1958 г.
Бумага $84 \times 108^{1}/_{32}$=8,6 бум. л.
17,2 печ. л.
Уч.-изд. л. 14,6. Изд. № 1/3132
Цена 12 р. 20 к. Заказ № 2604.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.