Ю. А. ШИХАНОВИЧ

ВВЕДЕНИЕ В СОВРЕМЕННУЮ МАТЕМАТИКУ

НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

517
Ш 65
УДК 510(022)

Юрий Александрович Шиханович

ВВЕДЕНИЕ В СОВРЕМЕННУЮ МАТЕМАТИКУ
(Начальные понятия)

М., 1965 г., 376 стр. с илл.

Редактор *Г. В. Дорофеев*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр* Корректор *Л. О. Сечейко*

Сдано в набор 19/VI 1965 г. Подписано к печати 28/IX 1965 г.
Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 11,75. Условн. печ. л. 19,74.
Уч.-изд. л. 16,93. Тираж 16 000 экз. Т-10788. Цена 1 руб. Заказ 1112.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати.
Москва, Трехпрудный пер., 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Б. НЕКОТОРЫЕ «ШКОЛЬНЫЕ» ТЕРМИНЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ К КНИГЕ Ю. А. ШИХАНОВИЧА «ВВЕДЕНИЕ В СОВРЕМЕННУЮ МАТЕМАТИКУ»*)

I

Во взаимоотношениях математики с ее приложениями сравнительно недавно наступил глубокий перелом. Раньше можно было более или менее четко указать пограничные, „прикладные" области математики и глубинные, „чисто теоретические" ее недра. Эти недра не имели непосредственного выхода на поверхность, в них осуществлялись свои собственные процессы (конечно, не без влияния периферии). Так, в античные времена математика сносилась с практикой через элементарную геометрию и искусство счета — в то время как „в глубине" создавались «Начала» Евклида с их дедуктивной организацией геометрии, с геометрическими построениями, с основами теории чисел. В новое время прикладное значение имело исчисление бесконечно малых, для обоснования которого „в недрах" развивалась общая теория множеств и функций, вызвавшая в свою очередь к жизни математическую логику.

В XX веке положение начало меняться. Неевклидовы геометрии, открытые в связи с казалось бы чисто умозрительным вопросом о пятом постулате Евклида, оказались теоретическим фундаментом теории относительности. Теория групп стала применяться в физике. Абстрактная теория меры, возникшая из потребности логического уточнения понятий длины, площади и объема, легла в основу теории вероятностей, а через нее — и математической статистики.

*) Есть некоторая разница между введением в современную математику и современным введением в математику. Последнее словосочетание больше отвечает содержанию книги; а ещё лучше было бы озаглавить ее просто «Введение в математику».

Но подлинный переворот наступил в середине века, когда математические методы стали активно вторгаться в самые различные сферы науки и практики. Оказалось, что математическая логика, которая раньше заботила лишь лиц, специально интересующихся проблемами обоснования, есть не чисто теоретическая, но и прикладная наука, тесно связанная с вычислительной математикой и всей современной кибернетикой. Оказалось, далее, что теоретико-множественная концепция, возникшая первоначально для обоснования исчисления бесконечно малых, располагает столь мощным аппаратом понятий и методов, что может не только служить фундаментом всей современной математики, но и непосредственно употребляться для описания явлений самых различных наук — от биологии до лингвистики.

Все чаще представители самых различных и прежде далеких от математики областей знания обращаются к математикам с вопросом «Что почитать для начала?», имея при этом в виду вовсе не втузовские учебники по дифференциальному и интегральному исчислению, а именно начальное пособие по теории множеств и языку математической логики. Однако им почти нечего порекомендовать — во всяком случае на русском языке. Нужные сведения не собраны воедино, а разбросаны по разным книгам *). Как правило, начальные сведения по теории множеств составляют содержание первых, вспомогательных глав или специальных приложений **) в руководствах по теории функций, топологии, алгебре и т. п. Такое положение едва ли можно признать нормальным и с точки зрения самой математики, даже если не думать о запросах представителей других наук. Представляется целесообразным поэтому собрать начальные сведения о базисных теоретико-множественных понятиях и элементах математического языка вместе и изложить их отдельно от их использования. Такая задача ставится и выполняется в книге Ю. А. Шихановича.

---

*) Некоторое исключение, пожалуй, представляет переводная книга Дж. Кемени, Дж. Снелла, и Дж. Томпсона «Введение в конечную математику» (пер. с англ., М., ИЛ., 1963), содержащая существенную часть таких сведений.

**) Лучшее из которых — приложение под названием «Простейшие понятия теории множеств» в книге: П. С. Александров, Введение в теорию групп, изд. 2-е, М., Учпедгиз, 1951, стр. 109—122.

II

В книге систематически излагаются такие фундаментальные понятия, как „множество“, „кортеж“, „соответствие“, „функция“, „отношение“. Эти понятия, на базе которых и осуществляется, собственно говоря, все теоретико-множественное построение математики, с полным правом названы в книге „начальными понятиями математики“ *). Наряду с ними в книге излагаются и элементы математического языка: разбираются понятия переменной, операции над высказываниями и т. д.

Подобная направленность книги делает ее весьма актуальной. Действительно, сейчас, как никогда, становится ясным, что математика — это не только совокупность фактов, изложенных в виде теорем, но прежде всего — арсенал методов, и даже еще прежде того — я з ы к для описания фактов и методов самых разных областей науки и практической деятельности. Именно этим обстоятельством и обусловливается универсальный характер применимости математики — причем применимости ее не только к техническим, физическим и другим дисциплинам, требующим часто значительного математического аппарата (и иногда с трудом отделимым от пограничных прикладных областей самой математики), а ко всем отраслям науки (если можно так сказать, к Науке в Целом), да и не только науки **). Лингвисту, например, или биологу, по моему убеждению, лишь во вторую очередь нужны математические теоремы, а в первую — математические методы исследований и язык для описания исследуемых явлений.

---

*) Их можно было бы назвать также «предварительными понятиями математики», поскольку математика не столько посвящена и з у ч е н и ю этих понятий, сколько с т р о и т с я на их основе. Именно поэтому для данной книги уместно название «Введение в математику»: ведь, как написано в одном старом учебнике, «предметом для введения в науку обыкновенно назначают *предварительные* о ней *понятия*, т. е. такие понятия, которые не могут войти в состав науки, однакож существенно к ней относятся и необходимо ею предполагаются».

**) Эта общекультурная роль математики при всей ее очевидности подчеркивается недостаточно часто. Более того, нередко можно слышать и даже читать, например, что главная цель обучения математике в средней школе — подготовка к дальнейшему обучению в вузах технического и сходного с ними профиля.

Если попытаться сформулировать некоторые общие цели обучения математике представителей других наук (общие для самых разных наук), то можно выделить — с известной долей условности, как всегда в подобных случаях — три такие цели:

1. Овладение математическими методами исследования, включающими прежде всего по возможности четкое выделение основных абстракций, сознательную идеализацию, разграничение между определяемым и неопределяемым и между установленным и гипотетическим, дедуктивное получение одних фактов из других и т. п.

2. Овладение „математическим языком"— языком основных математических понятий, столь общих, что с их помощью могут быть выражены многие факты действительности; примерами таких понятий служат понятия множества, отображения (функции), упорядочения, изоморфизма, вероятности, энтропии, алгоритма, исчисления и т. п.; к этому примыкает знакомство с основными понятиями логики, уточняемыми посредством математической логики, и кибернетики.

3. Овладение минимумом математических сведений, нужных для того, чтобы

а) можно было самостоятельно применять математические результаты к исследуемому кругу явлений;

б) можно было самостоятельно читать литературу по приложениям математики к изучаемой области знания;

в) можно было самостоятельно заниматься повышением своей математической квалификации.

Третья из этих целей не случайно поставлена на последнее место, ибо, как уже отмечалось, она — при всей своей значительности — представляется менее важной, чем две другие.

Что же касается первых двух целей, то среди них трудно установить какой-нибудь приоритет. При всей привлекательности того, чтобы считать первую цель (овладение методом) более важной, она вряд ли достижима без осуществления второй (овладения языком). Математические методы исследования неизбежно начинаются с — явного или неявного — уточнения языка. Причем главное в этом языке — не системы дифференциальных уравнений (которые суть уже „вторичные" образования, так сказать, высшие этажи), а прежде всего — фундамент, язык начальных понятий. К их числу — во всяком случае при теоретико-множественном изложении математики — и относятся прежде всего уже упоминавшиеся понятия „множество", „кортеж", „соответствие", „функция", „отношение". Их рассмотрению и посвящен основной раздел (раздел А) этой книги.

Понятия множества, кортежа, соответствия, функции, отношения — это не только начальные понятия математики; это (так же, как, например, понятие натурального числа), по существу, начальные понятия любого научного языка, начальные понятия науки вообще. В специальном «Приложении» к настоящему предисловию дается беглый обзор этих понятий. Этот обзор имеет своей целью

1) показать широкую применимость перечисленных начальных понятий;

2) продемонстрировать известные трудности, возникающие при попытке дать им строгие определения;

3) оправдать те определения (или тот выбор неопределяемых понятий), которые избрал автор данной книги.

III

Комментарии, содержащиеся в приложении к предисловию, представляются тем более уместными, что в книге не излагаются никакие приложения рассматриваемых в ней начальных понятий к каким-либо конкретным отраслям математики или других наук, за исключением приложений к комбинаторике *) (которую естественно считать просто теорией конечных множеств) и одного приложения к лингвистике **). Это обстоятельство вряд ли может считаться недостатком книги: ведь не требуют же от учебника какого-либо языка, чтобы он содержал хотя бы основы излагаемых с помощью этого языка научных теорий. Зато сам язык, конечно, должен быть изложен с большим тщанием — с каким и изложен в предлагаемой книге язык начальных понятий математики. Уточнению языка придается в книге большое значение (и это одна из ее наиболее характерных

---

*) В § 3 гл. III и отчасти в § 5 гл. VII (см. теорему на стр. 271).
**) См. пример 40 в § 5 гл. VII.

черт): уже в первом параграфе уточняется смысл союзов и составленных с их помощью сложных высказываний; в следующем параграфе вводится понятие переменной; еще в следующем — разъясняется смысл знака „$=$“.

Этой же целью обусловлено и включение в книгу раздела Б, излагающего уточнения некоторых „школьных“ терминов и обозначений. Дело в том, что математический язык неизбежно включает в себя ряд терминов и обозначений, формально долженствующих быть известными из средней школы. Многие из них на самом деле усваиваются в школе очень плохо. Так, подавляющее большинство школьников и учителей, с которыми приходилось иметь дело автору этих строк, не знало правильного употребления знака „$\leqslant$“. Они считали, что „$3 \leqslant 3$“ неверно и „$3 \leqslant 5$“ тоже неверно; и вообще, если a и b — произвольные, но фиксированные числа, высказывание „$a \leqslant b$“ не может быть верным; утверждение же „$\sin x \leqslant 1$“, по их мнению, верно, но лишь потому, что для некоторых значений x имеет место неравенство $\sin x < 1$, а для некоторых — равенство $\sin x = 1$ *). Далеко не все правильно понимают смысл выражения $a^{\frac{m}{n}}$.

Приучить читателя к необходимости и важности уточнения языка — это представляется мне одной из самостоятельных и существенных целей книги. Уточнение научного (да и не только научного) языка является на самом деле важной проблемой, не получившей еще, к сожалению, должного признания. Между тем эта проблема имеет не только научное, но совершенно практическое значение: ясно, сколь большую роль, например, играет точность языка в юридических документах **); известно, что применение математических методов в экономике в значительной степени затруднено именно недостаточной разработанностью языка описания экономических явлений.

---

*) Таким образом, в обозначениях настоящей книги выражение $\sin x \leqslant 1$ расшифровывается имн так:

$$(\forall x)[\sin x < 1 \vee \sin x = 1] \mathbin{\&} (\exists x)[\sin x < 1] \mathbin{\&} (\exists x)[\sin x = 1].$$

**) См., например, по этому поводу: А. С. Пиголкин, Толкование нормативных актов в СССР, М., Госюриздат, 1962, гл. II, § 2 («Грамматическое толкование»).

С уточнением языка тесно связано повышение культуры мышления, чего настоятельно требуют интересы науки и народного хозяйства. В объем понятия „высокая культура мышления“ входит умение мыслить формально. Формальное мышление не следует смешивать с неумением мыслить неформально, содержательно; формальное мышление — не нехватка чего-то, а особое искусство. Предлагаемая книга может служить пособием по обучению этому важному искусству.

IV

Думается, что книга Ю. А. Шихановича, заполняющая существенный пробел в нашей литературе, будет встречена с интересом. Ведь подобное изложение предпринято в нашей литературе впервые. Впервые воедино и обособленно собран такой материал, впервые встречаются и многие детали изложения (например, впервые приводится аккуратная формулировка одной из „самых главных теорем“ математики — теоремы о связи между отношениями эквивалентности и разбиениями *)). Можно рассчитывать, что книга Ю. А. Шихановича окажется также полезным материалом и одновременно „участником“ того интенсивного обсуждения, которому подвергается сейчас все преподавание математики сверху донизу — от вуза до начальной школы.

Среди читателей-математиков немало, вероятно, найдется тех, кто придет к заключению, что он изложил бы по-другому отдельные места этой книги или даже всю книгу в целом. Автор этого предисловия, если бы он писал такую книгу, также написал бы ее иначе. Ясно, что различие вкусов и стилей проявляется тем сильнее, чем более первоначальных предметов касается изложение. Однако мне представляется бесспорным, что реальный автор книги имеет не меньшее право на проявление своего личного стиля и вкуса, чем авторы потенциальные.

Таким образом, я считаю, что книга Ю. А. Шихановича сможет быть полезной самым различным читателям — как нематематикам, заинтересованным в овладении языком начальных математических понятий (понятий столь

---

*) В книге эта теорема разделена на три теоремы — теоремы 1, 2 и 3 из § 4 гл. VII.

универсальных, что на их базе могут описываться явления из самых различных областей науки и жизни), так и математикам, заинтересованным в уточнении собственного языка (хотя бы для того, чтобы нести свой уточненный язык нематематикам). Математику нередко по разным поводам сравнивают со спортом, и это сравнение верно по крайней мере в одном: в математике бывают заметны иногда те недостатки, которые проявляются (опять-таки иногда) в спорте: выращивая рекорды, подчас забывают о будничной гигиенической гимнастике, о *массовой* физической *культуре*.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О понятиях „множество“, „кортеж“, „соответствие“, „функция“, „отношение“

Понятия множества и кортежа трактуются в данной книге как первичные, неопределяемые понятия. Понятия же соответствия, функции и отношения определяются в ней через понятия множества и кортежа *).

Множество

Понятие множества является не только первым, но и самым главным из перечисленных понятий. Заметим сразу же, что рассматриваемые в школьном курсе алгебры сочетания суть не что иное, как конечные множества.

Вот что говорят о понятии множества и о самом термине „множество“ П. С. Александров и Н. Н. Лузин:

«На каждом шагу нам приходится сталкиваться с тем трудно определимым понятием, которое выражается словом совокупность. Например, можно говорить о совокупности людей, присутствующих в данный момент в данной комнате, о совокупности гусей, плавающих на пруду, страусов, живущих в Сахаре, и т. п.

В каждом из этих случаев можно было бы вместо слова совокупность употребить слово множество» **).

*) Возможны и другие решения вопроса о том, какие понятия назначить исходными неопределяемыми, а какие определять через первые.

**) П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., Гостехиздат, 1948, гл. 1, § 1, стр. 13.

«Что такое „множество“? Мы не станем доискиваться ответа на этот вопрос, потому что понятие множества является столь первоначальным, что затруднительно, по крайней мере на сегодняшний день, определить его при помощи более простых понятий.

Читателя это обстоятельство не должно удивлять. Действительно, когда некоторое понятие P определяется при помощи более простого понятия D, то само это понятие D также нуждается в определении посредством более простого понятия C, а оно, в свою очередь, нуждается в определении посредством еще более простого понятия B, и так далее. Таким образом, в конце концов мы должны будем прийти к столь первоначальному понятию A, которое не удается определить с помощью более простых понятий; все, что можно здесь сделать,— это только разъяснить на *ряде примеров* смысл такого понятия A.

Итак, мы не станем искать определения слова „множество“. Можно, разумеется, было бы сказать, что множество есть „собрание“, „коллекция“, „класс“, „система“, „семейство“, „комплекс“, „ансамбль“, и т. д. Но такая замена одного слова другим никогда не может дать самую *идею* множества тому, кто раньше не приобрел ее каким-нибудь образом. Поэтому мы предпочитаем обратиться к *примерам*, разъясняющим смысл слова *множество*. Понимая под этим словом *совокупность, составленную из каких-нибудь предметов*, мы можем говорить *о множестве всех букв на данной странице, о множестве всех атомов серебра в данной монете, о множестве всех корней данного уравнения, о множестве всех положительных чисел, о множестве всех многочленов, о множестве всех непрерывных функций, о множестве всех точек на данной окружности, о множестве всех углов, имеющих иррациональное значение синуса, и так далее.*

Предметы, составляющие данное множество, называются его *элементами*» *).

И далее:

«Из приведенных примеров видно, что элементами множества могут быть самые разнообразные предметы: буквы, атомы, числа, функции, точки, углы и так далее. Отсюда

---

*) Н. Н. Лузин, Теория функций действительного переменного, М., Учпедгиз, 1948, § 1, стр. 7.

с самого начала ясна чрезвычайная широта *теории множеств* и ее приложимость к очень многим областям знания (математике, механике, физике)» *).

Надо иметь в виду, что список областей знания, приведенный в скобках Н. Н. Лузиным, не является не только исчерпывающим, но даже достаточно представительным; этот список, по существу, мог бы состоять из в с е х областей знания.

Кортеж

Понятие кортежа несколько менее популярно, чем понятие множества, но почти столь же фундаментально. Так же, как понятие множества, оно заимствуется непосредственно из опыта (хотя это понятие и можно формально определить через понятие множества, но лишь весьма искусственно); сам термин „кортеж", как и термин „множество", допускает ряд синонимов, ничего не разъясняющих по существу, но служащих некоторым психологическим подспорьем для понимания. Такими синонимами в данном случае являются „упорядоченный набор", „конечная последовательность", „вектор" **). Вот что пишет, например, о понятии „вектор" У. Р. Эшби (у которого это понятие полностью совпадает с нашим понятием „кортеж"):

«...Предположим, что радиопередача должна дать нам отчет о „состоянии" (в определенный момент времени) проходящего сейчас марафонского бега. Для этого она должна сообщить положение каждого бегуна в данный момент времени. Множество этих положений определит „состояние" бега. Итак, состояние бега в целом задается различными состояниями (положениями) различных бегунов, взятыми одновременно....

Такое состояние есть **вектор**, т. е. составной объект, имеющий определенное число **компонентов**, или **составляющих**. Удобно записывать его в виде $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; это означает, что первая составляющая имеет значение a_1, вторая — значение a_2 и т. д.

...„Положение" корабля в любой момент не может быть описано одним числом; необходимы два числа: широта

*) Там же, стр. 8.

**) Термин „вектор" имеет и другое, чисто геометрическое значение: направленный отрезок.

и долгота. Таким образом, „положение“ есть вектор с двумя составляющими» *).

Существенно подчеркнуть, что

1) составляющие вектора стоят на определенных местах, причем указано, какое место является первым, какое вторым и т. д. (бегунов нумеруют; договариваются, какую из координат — широту или долготу — указывать первой);

2) составляющие, стоящие в векторе на разных местах, могут совпадать: два бегуна могут иметь одинаковое положение, широта и долгота корабля могут также оказаться одинаковыми (если указывать широты и долготы просто числами со знаком плюс или минус, не прибегая к таким словам, как, скажем, „западная долгота“).

В книге Ю. А. Шихановича вместо термина „вектор“ употребляется термин „кортеж“, вместо термина „компонент“— термин „компонента“, а записывается кортеж в угловых скобках:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle.$$

Вот еще примеры кортежей: можно говорить о кортеже автомобилей в церемониальной процессии; о кортеже букв в слове; о кортеже слов во фразе; о кортеже фраз в абзаце; о кортеже абзацев в тексте; о кортеже азотистых (пуриновых и пиримидиновых) оснований в каждой из двух „нитей“ молекулы дезоксирибонуклеиновой кислоты; знакомые, которые последовательно встретились Вам сегодня на улице (при условии, что никакие двое знакомых не появлялись одновременно), также образуют кортеж. Во всех этих примерах, кроме первого, компоненты кортежа, стоящие на разных местах, могут и совпадать. Кортежи с несовпадающими элементами суть не что иное, как рассматриваемые в школьном курсе алгебры размещения.

Соответствие

Чтобы подойти к определению математического понятия соответствия, начнем с примеров употребления этого понятия.

Пример 1. Будем измерять рост людей в сантиметрах, а их вес — в килограммах. Каждому возможному для

*) У. Р. Эшби, Введение в кибернетику, пер. с англ. М., ИЛ, 1959, § 3/5, стр. 52.

человека значению роста соответствуют некоторые значения веса — те значения, которые может иметь вес при данном значении роста.

Пример 2. С другой стороны, каждому возможному значению веса человеческого тела соответствуют определенные значения роста человека — те значения, которые рост может иметь при данном весе.

Пример 3. Каждому человеку либо соответствует некоторый цвет — цвет его волос, либо ничего не соответствует, если он лыс.

Пример 4. Каждому цвету либо соответствуют люди с этим цветом волос, либо (как, например, зеленому цвету) никто не соответствует (если иметь в виду естественный цвет волос).

Пример 5. Каждому русскому существительному соответствуют окончания, возникающие при склонении этого существительного (а несклоняемому существительному ничего не соответствует, если только не считать отсутствие окончания особым „нулевым" окончанием).

Пример 6. Каждому окончанию соответствуют некоторые существительные, а именно те, которые имеют хотя бы одну форму с данным окончанием, или ничего не соответствует, если такое окончание невозможно для существительных.

Пример 7. Каждому слову одного языка, если оно имеет слова-переводы в другом языке, соответствуют эти переводы.

Во всех этих примерах мы имеем дело с соответствиями (причем в примерах 2, 4, 6,— с соответствиями, обратными для соответствий из примеров 1, 3, 5). Соответствие, таким образом, предполагает наличие двух множеств (множества ростов и множества весов в первом примере, множества окончаний и множества существительных — в предпоследнем), причем для каждого элемента первого множества либо не указано соответствующих ему элементов второго множества (как для зеленого цвета в примере 4), либо такие элементы второго множества указаны (как для черного цвета в том же примере). Первое из этих множеств называется областью отправления, а второе — областью прибытия соответствия. Областями отправления в приведенных примерах служили, последовательно, множество возможных ростов, множество возможных весов, множество всех людей, множество всех цветов, множество всех существительных, множество всех окончаний, множество всех слов некоторого языка. Областями прибытия: множество возможных весов, множество возможных ростов, множество всех цветов, множество всех людей, множество всех окончаний, множество всех существительных, множество всех слов некоторого языка *).

Чтобы задать соответствие, недостаточно, конечно, указать область отправления и область прибытия; надо еще указать, какие элементы области прибытия каким элементам области отправления соответствуют. Если взять наугад какой-то элемент a из области отправления и какой-то элемент b из области прибытия, то элемент b, конечно, может и не соответствовать элементу a. Чтобы указать, какие элементы каким соответствуют, надо, следовательно, из всех пар $\langle a, b\rangle$, где a — элемент области отправления, а b — элемент области прибытия, выделить такие, в которых b соответствует a. Для этого достаточно, очевидно, указать множество таких „хороших" пар. Заданием этого множества (вместе с заданием областей отправления и прибытия) соответствие полностью определяется. Поэтому соответствие естественно определить (как это и делается при уточнении этого понятия в математике) просто как тройку множеств: область отправления, область прибытия и некоторое множество пар элементов из этих областей (первый член пары должен быть из области отправления, а второй — из области прибытия). Такое определение и принимается в данной книге (с той только разницей, что в определении на стр. 171 множество пар — как „главная компонента" — ставится в тройке на первое место). Поскольку пары и тройки суть просто частного вида кортежи, понятие соответствия оказалось выраженным через понятие множества и понятие кортежа.

---

*) Для простоты мы чуть-чуть огрубляем истинное положение вещей. На самом деле области отправления и прибытия еще не вытекают однозначно из формулировок наших примеров. Так, в примере 3 мы могли бы считать областью прибытия и множество не всех, а лишь возможных цветов; областью отправления в примере 1 мы могли бы считать множество всех действительных чисел, а не только тех, которые служат значениями человеческого роста.

Функция

Само слово „функция" встречается уже в школьном курсе математики. Однако расшифровка этого слова оказывается не таким простым делом, поскольку, как можно заметить, слово «функция» употребляется в несколько различающихся смыслах.

В классической математике известны два основных направления, по которым происходит осмысление понятия функции *). Первое направление — исторически более ранее и, пожалуй, даже сейчас более распространенное — ориентировано в основном на традиционно трактуемые технические и естественнонаучные приложения математики и опирается на понятие *переменной величины*; второе — более современное и более точное — не использует этого понятия вовсе (в то же время второе направление способно обслужить как все традиционные приложения математики, так и еще много новых, возникших за последнее время).

Первое направление. Именно первое направление отражено, например, во втором издании Большой советской энциклопедии, статья «Функция» **) в которой начинается со следующей дефиниции: «Функция — одно из основных понятий математики, выражающее зависимость одних переменных величин от других».

В рамках данного направления в свою очередь можно выделить два подхода, первый из которых (опять-таки более ранний и, возможно, более распространенный) скорее соответствует точке зрения физиков, второй — точке зрения математиков ***).

Первый подход состоит в истолковании функции как переменной величины. Именно такое истолкование принято в средней школе. *«Та переменная величина, числовые*

---

*) Мы не касаемся здесь осмысления этого понятия в конструктивной математике.

**) И. П. Натансон, Функция, БСЭ², т. 45 (1956 г.), стр. 657.

***) См. об этом в книге: Р. Курант, Г. Роббинс, Что такое математика, пер. с англ., М.— Л., Гостехиздат, 1947, гл. VI, § 1, стр. 365—366.

значения которой изменяются в зависимости от числовых значений другой, называется зависимой переменной, или функцией этой другой переменной величины» *). Подобное определение функции принято и в ряде авторитетных вузовских учебников **) и в Большой советской энциклопедии, где следующая за дефиницией фраза в только что упоминавшейся статье «Функция» гласит: «Если величины x и y связаны так, что каждому значению x соответствует определенное значение y, то y называют (однозначной) функцией аргумента x»; как видно из исторического обзора в конце названной статьи, аналогичные формулировки встречались еще в прошлом веке и восходят к еще более ранним представлениям.

Второй подход состоит в истолковании функции как закона, но также связанного с понятием переменной величины (и с разделением переменных величин на „зависимые“ и „независимые“): «*Закон* (*правило*), *по которому значениям независимых переменных отвечают* (*соответствуют*) *значения рассматриваемой зависимой переменной, называется функцией*» ***).

Приведенные формулировки нельзя, конечно, считать отчетливыми. Для их уточнения требуется предварительное создание достаточно нерасплывчатой системы представлений о переменных величинах. Создание такой системы если и возможно, то, по-видимому, лишь на основе использования в качестве исходных таких понятий, как „величина“

---

*) А. П. Киселев, Алгебра, ч. II, изд. 41-е, М., Учпедгиз, 1964, § 25, стр. 25.

**) «*Величина y называется функцией величины x, определенной на множестве $\mathcal{M}$, если каждому значению величины x, определенной на множестве $\mathcal{M}$, соответствует единственное определенное значение величины y*» (А. Я. Хинчин, Краткий курс математического анализа, М., Гостехиздат, 1953, § 3, стр. 15; ср. также § 2); «*переменная y называется функцией от переменной x в области ее изменения $\mathcal{X}$, если по некоторому правилу или закону каждому значению x из $\mathcal{X}$ ставится в соответствие одно определенное значение y*» (Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, т. 1, изд. 5-е, М., «Наука», 1964, § 17, стр. 40).

***) А. Д. Мышкис, Лекции по высшей математике, М., «Наука», 1964, гл. II, § 1, п. 1, стр. 37.

и „изменение во времени“ *), т. е. вне рамок теоретико-множественной концепции **).

Второе направление. Принципиально иной путь связан с отказом от переменных величин. Он приводит к более широкому понятию функции, поскольку разрешает рассматривать функции не только от „величин“ (заметим вскользь, что попытки уточнить, что такое „величина вообще“, приводят к значительным трудностям). В рамках этого второго направления можно опять-таки различить несколько подходов, а именно по меньшей мере три. *Первый подход* определяет не самое функцию, а лишь, так сказать, «функциональную ситуацию», т. е. ситуацию, при которой разрешено говорить, что имеет место функция; *второй подход* трактует функцию как правило, или закон; *третий* — как соответствие.

Первый подход характерен для руководств по общей теории функций и теории функций действительного переменного. Вот, например, что говорит о функции П. С. Александров в своей уже цитированной нами книге: *«если каким-нибудь образом каждому элементу x некоторого множества X поставлен в соответствие определенный элемент y некоторого множества Y, то мы говорим, что имеется отображение множества X во множество Y или функция f, аргумент которой пробегает множество X, а значения принадлежат множеству Y»* ***).

А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин пишут:

«В анализе понятие функции вводится следующим образом. Пусть X — некоторое множество на числовой прямой. Говорят, что на этом множестве определена функция f, если каждому числу $x \in X$ ****) поставлено в соответствие определенное число $y = f(x)$. При этом X называется

*) См. А. Н. Колмогоров, Величина, БСЭ[2] т. 7 (1951 г.); см. также статью «Переменные и постоянные величины» в 32-м томе (1955 г.) этой же энциклопедии.

**) В книге Ю. А. Шихановича нет понятия переменной величины. Переменная понимается в ней (как это принято в современной математической логике) просто как буква, сопряженная с определенным способом ее использования.

***) П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., Гостехиздат, 1948, стр. 21.

****) Не знакомые со знаком „$\in$“ могут понимать его в данном случае просто как синоним предлога „из“ — *В. У.*

областью определения данной функции, а Y — совокупность всех значений, принимаемых этой функцией,— ее областью изменения.

Если теперь вместо числовых множеств рассматривать множества какой угодно природы, то мы придем к самому общему понятию функции, а именно: пусть M и N — два произвольных множества. Говорят, что на M определена функция f, принимающая значения из N, если каждому элементу $x \in M$ поставлен в соответствие один и только один элемент из N. В случае множеств произвольной природы вместо термина „функция" часто пользуются термином „отображение", говоря об отображении одного множества в другое» *).

Как мы уже говорили, приведенные (и широко распространенные подобные им **)) формулировки оставляют само понятие функции неопределяемым. Здесь определяется не что такое функция, а лишь некоторое правило употребления этого термина. Что же такое функция и когда про две функции можно говорить как об одной и той же функции — это остается неопределенным. Разумеется, такая точка зрения вполне правомерна ***).

Однако правомерно и стремление определить самое функцию (причем без понятия переменной величины). Попытки определить функцию как правило, или закон ****),

---

*) А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, вып. 1, Метрические и нормированные пространства, Изд-во МГУ, 1954, § 7, стр. 19—20.

**) См., например, И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, М.— Л., Гостехиздат, 1950, гл. IV, § 1, стр. 80.

***) Вот что сказано по этому поводу в двух сочинениях, которые можно, пожалуй, назвать классическими: «Понятие функции такое же основное и первоначальное, как и понятие множества» (Ф. Хаусдорф, Теория множеств, Пер. с нем., М.— Л., ОНТИ, 1937, § 2, стр. 12); «В конечном счете понятие функции — или какое-либо сходное понятие, например понятие класса,— приходится считать первоначальным, или неопределяемым» (А. Черч, Введение в математическую логику, т. 1, пер. с англ., М., ИЛ, 1960, примечание 39, стр. 351).

****) Вот, например, как определяется функция в § 6 главы I упоминавшейся уже книги «Введение в конечную математику», (стр. 95): «Пусть дано множество D, которое называется *областью определения* функции, и правило f, которое каждому элементу множества D ставит в соответствие некоторый объект... Тогда f

посредством которого для каждого элемента одного множества указывается некоторый элемент второго, приводят к потребности уточнить, что такое правило, или закон. Такие уточнения приводили до сих пор к слишком узким классам функций — как, например, классу вычислимых функций, когда слово „закон“ уточняется посредством понятия алгоритма. Попытки же найти слову „закон“ максимально общее уточнение оказываются — и, по-видимому, неизбежно (во всяком случае при наших сегодняшних представлениях) — связанными с необходимостью максимально широко и одновременно совершенно отчетливо очертить язык (или языки) записи законов, что вряд ли когда-нибудь удастся; считать же понятие „закон“ первичным и неопределяемым вряд ли целесообразно.

Наиболее законченное представление о функции заключается в рассмотрении ее как соответствия. «Функция.., определенная на множестве M, есть не что иное, как просто *соответствие* f различным элементам множества M некоторых элементов (различных или тождественных) множества N» *). Или, более точно: «В самом общем смысле (однозначная) *функция*... — это соответствие, в силу которого каждому элементу x некоторого множества X отвечает единственный элемент y некоторого множества Y» **). Если понимать соответствие так, как мы уже условились выше его понимать, и считать, что в приведенной только что формулировке X и Y служат областью отправления и областью прибытия соответствия, то станет очевидным, что эта формулировка выделяет функцию — среди прочих соответствий — посредством следующего требования: каждому элементу области отправления должен соответствовать ровно один элемент области прибытия. Именно такое определение функции — как соответствия

называется *функцией*, определенной на множестве D». Сравнение с приведенной выше цитатой из А. Д. Мышкиса показывает, что этот „второй подход второго направления“ весьма, по существу, близок ко „второму подходу первого направления“, поскольку в этом последнем обращение к понятию переменной величины является на самом деле совершенно необязательным.

*) Н. Н. Лузин, Теория функций действительного переменного, М., Учпедгиз, 1948, § 36, стр. 126.

**) С. К. Клини, Введение в метаматематику, пер. с англ., М., ИЛ, 1957, § 10, стр. 36.

(понимаемого как тройка множеств), при котором каждому элементу области отправления соответствует ровно один элемент области прибытия — принято в «Началах математики» Н. Бурбаки *). Можно теперь сделать шаг в сторону обобщения, потребовав меньшего, а именно, потребовав, чтобы в случае функции каждому элементу области отправления соответствовало не более одного элемента области прибытия. Так, если рассматривать функции действительного переменного, т. е. функции, у которых область отправления и область прибытия совпадают каждая с множеством действительных чисел, то

1) функция $y = x^2$ каждому действительному числу a ставит в соответствие ровно одно действительное число — a^2;

2) функция $y = \sqrt{x}$ каждому неотрицательному действительному числу a ставит в соответствие ровно одно действительное число $\sqrt{a}$, а любому отрицательному действительному числу — ничего не ставит в соответствие.

В приведенных выше примерах соответствий лишь пример 3 дает функцию (если считать, что у каждого нелысого человека — вполне определенный цвет волос).

Изложенное определение функции — как соответствия, у которого каждому элементу области отправления соответствует не более одного элемента области прибытия — и принято в настоящей книге.

Отношение

Последним из начальных понятий нашего списка является понятие отношения. Начнем с примеров. Говорят об отношении родства среди людей; об отношении „меньше" среди чисел; об отношении старшинства среди военнослужащих; об отношении синонимии среди слов языка; об отношении паразитирования среди животных; об отношении совместимости среди групп крови; об отношении подобия среди геометрических фигур; об отношении подчинения среди слов в предложении. Мы видим, что каждый из этих примеров устроен следующим образом: имеется некоторое множество (людей, слов, фигур и т. д.), и для

*) См. Н. Бурбаки, Теория множеств, пер. с франц., М., «Мир», 1965, гл. II, § 3, п. 4, стр. 90.

любой пары элементов из этого множества указано, находится ли первый член этой пары в данном отношении ко второму или нет (например, для каждой пары военнослужащих указано, является ли первый из них старшим по отношению ко второму; для каждой пары чисел указано, является ли первое из них меньшим, чем второе), причем из рассмотрения не исключаются пары, у которых первый и второй члены совпадают (так, для любой пары, составленной из совпадающих чисел, указано, что первый член пары не находится в отношении „меньше" ко второму; для любой пары, составленной из совпадающих геометрических фигур, указано, что первый член находится в отношении подобия ко второму). Чтобы задать отношение, достаточно, следовательно, задать некоторое исходное множество — „область задания отношения" и некоторое множество пар его элементов — „график отношения", состоящий из тех пар, у которых первый член находится в рассматриваемом отношении ко второму. Естественно поэтому само отношение *отождествить* с парой, составленной из его графика и его области задания. Такое отождествление и принято в данной книге в качестве *определения* понятия „отношение"; отношение, следовательно, *есть* пара, составленная из двух множеств, причем элементами первого из этих множеств служат некоторые пары элементов второго.

В. Успенский

17 апреля 1965 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Данная книга является сводным (и, по возможности, строгим) изложением начальных математических понятий: „множество“, „кортеж“, „соответствие“ (в частности —„функция“), „отношение“. При помощи этих понятий по существу строится или может быть построена любая математическая дисциплина. Впрочем, упомянутые понятия являются, по-видимому, удобными при построении любой (не только математической) научной дисциплины, достигшей достаточно высокого уровня зрелости.

Книга состоит из двух разделов: А и Б. Основной теме книги — начальным математическим понятиям — посвящен раздел А. Правда, при чтении § 2 гл. II раздела А и § 3 гл. III раздела А предполагается знакомство с содержанием § 7 раздела Б, а при чтении гл. VII раздела А (особенно § 5) — с содержанием § 1 раздела Б.

Читателям, интересующимся уточнением некоторых „школьных“ терминов и обозначений (например, школьникам-выпускникам), адресованы гл. I раздела А и §§ 1—7 раздела Б. Читателям этого вида полезны также § 3 гл. III раздела А (однако он опирается на §§ 1, 2 гл. II и §§ 1, 2 гл. III) и § 8 раздела Б (он опирается на гл. IV раздела А).

Возможна, наконец, еще одна категория читателей. В книге излагаются логико-математическая терминология и символика, упрощающие и уточняющие изложение опять-таки любой математической или математизированной дисциплины. Читателям, интересующимся только этим аспектом книги, достаточно прочесть главы I и IV раздела А.

По первоначальному замыслу книга предназначалась в качестве учебного пособия к курсу «Введение в математику» для студентов отделений структурной и прикладной лингвистики *). Именно к этой группе читателей обращены имеющиеся в книге советы типа „Это надо запомнить активно", „Это можно помнить только пассивно", „Это можно не запоминать" и т. п. В первую очередь для читателей этой категории предназначено приложение 4 — «Программа», являющееся программой курса «Введение в математику». Оно может оказаться им полезным при подготовке к экзамену. Однако для целей самопроверки это приложение, являющееся фактически подробным оглавлением, подробным указателем содержания, может быть полезным любому читателю.

В конце почти каждого параграфа раздела А и некоторых параграфов раздела Б имеются задачи. Все эти задачи, кроме двух, более трудных, отмеченных звездочкой, являются неотъемлемой составной частью книги. На них, на указанные в них теоремы, часто опирается дальнейший текст книги. Умение их решить является необходимым (и, возможно, достаточным) признаком усвоения материала книги. Для читателей указанной выше специальной категории (т. е. для студентов) обязательным также является умение доказать любое утверждение, сформулированное, но не доказанное в книге — всевозможные „легко видеть", „легко доказать", „очевидно" и т. п.

В книге имеются примечания двух видов — подстрочные примечания, или сноски, и примечания в конце книги. Сноски нумеруются звездочками, примечания, помещенные в конце книги,— арабскими цифрами. Примечания, помещенные в конце книги, содержат менее обязательный материал; игнорирование их не помешает чтению дальнейшего текста.

В книге принята следующая система нумерации и ссылок. Рисунки нумеруются сплошь в пределах всей книги; все остальное (кроме сносок) нумеруется в пределах каждого параграфа. В частности, некоторые строчки нумеруются числом в скобках на полях: (1), (2), (3) и т. д. В ссылках на примеры другого раздела обязательно указывается наи-

*) По учебному плану специальности «Структурная и прикладная лингвистика» указанный курс читается в течение первого семестра. На этот курс, содержание которого совпадает с содержанием данной книги, у меня уходило приблизительно 70 двухчасовых лекций.

менование (А или Б) этого другого раздела. В ссылках на примеры того же раздела наименование раздела опускается. Аналогично, в ссылках на примеры другой главы обязательно указывается номер этой главы; в ссылках на примеры той же главы номер главы опускается; в ссылках на примеры другого параграфа обязательно указывается номер этого параграфа; в ссылках на примеры того же параграфа номер параграфа опускается. Аналогичным образом делаются ссылки на все остальное (кроме рисунков и сносок).

Таким образом, если в § 5 гл. III раздела А написано: „См. (13), (6), (8) из § 3 и примеры 9, 7 из § 2 гл. II, 3 из § 3 раздела Б“, то это означает: „См. (13) из § 5 гл. III раздела А, (6) из § 5 гл. III раздела А, (8) из § 3 гл. III раздела А и пример 9 из § 5 гл. III раздела А, прнмер 7 из § 2 гл. II раздела А, пример 3 из § 3 раздела Б“.

На содержание настоящей книги наибольшее влияние оказали Владимир Андреевич Успенский, впервые прочитавший в 1960/61 уч. году на Отделении теоретической и прикладной лингвистики филологического факультета Московского университета курс «Введение в математику», и N. Bourbaki, книга «Théorie des ensembles» которого привела к довольно радикальной переработке первоначального варианта курса. Названным лицам приношу свою глубокую благодарность.

Ю. Шиханович

11 сентября 1963 года

А. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИКИ

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК

§ 1. Логические союзы

Введем термин „*высказывание*". Высказываниями мы будем называть такие предложения, про которые разумно говорить, разумно считать, что они являются истинными или ложными. Разумеется, неуточненность понятий „истинное", „ложное" делает понятие высказывания расплывчатым. Тем не менее очевидно, что фразы „Пойдешь ли ты в кино?", „Да здравствуют музы!" (как и любое вопросительное или восклицательное предложение) не являются высказываниями. Определение „Треугольник *называется* равносторонним, если все его стороны равны между собой" (как и любое другое определение) также не является высказыванием. Фраза „Если все стороны треугольника равны, то этот треугольник является равносторонним" — высказывание (а именно, истинное, в силу только что приведенного определения, высказывание). Фразы „$2 \times 2 = 4$" и „$3 > 5$" также являются высказываниями (первое — истинное, второе — ложное). Фраза „В повести «Капитанская дочка» 200775 букв" является, очевидно, высказыванием, хотя, вероятно, никому не известно, истинно оно или ложно. Фразы „Сегодня плохая погода" или „Эта книга — хорошая" не следует, по-видимому, относить к высказываниям ввиду недостаточной уточненности; чрезмерной субъективности понятий „хорошая погода" или „хорошая книга". Ограничимся приведенными примерами. Полезно заметить, что слово „утверждение" фактически является синонимом термина „высказывание". Слово „теорема" почти равнозначно в математике словам „утверждение", „высказывание" и употребляется вместо них преимущественно в тех случаях, когда соответствующее предложение надо доказать. Подчеркну еще раз, что высказывания бывают истинные и ложные, причем каждое высказывание истинно или ложно.

Условимся составное высказывание вида „A **или** B“, где A и B — высказывания, считать ложным в тех случаях, когда оба высказывания A и B ложны. Во всех остальных случаях мы, следовательно, будем считать высказывание „A или B“ истинным. Таким образом, после этого соглашения высказывание „$2 > 3$ или 5 — четное число“ следует считать ложным, а высказывания „$2 < 3$ или 5 — четное число“, „$2 < 3$ или 4 — четное число“ — истинными. На всякий случай хочу поспорить с предполагаемым читателем, который придерется к словам „следует считать“. «Как это „после соглашения... следует считать“? А разве высказывание „$2 < 3$ или 4 — четное число“ само по себе, без всяких соглашений не имеет какого-то смысла?» Такому читателю я возражу, что наши слова, слова нашего обычного, повседневного языка вовсе не имеют какого-то внутреннего, изначального смысла. Смысл слов, а следовательно, и смысл предложений, составленных из этих слов, либо — в повседневном языке — создается стихийно, в практике речевого общения и поэтому этот смысл расплывчат и неопределенен, либо — в математическом языке — создается специальными, явными соглашениями. Вполне возможно, между прочим, что вытекающая из нашего соглашения о смысле союза „или“ истинность высказывания „$2 < 3$ или 4 — четное число“ будет противоречить языковой интуиции некоторых читателей. Им будет хотеться считать это высказывание ложным. Таким читателям я дам два ответа. Во-первых, таково наше соглашение — и точка. Всюду дальше, где не оговорено противное, соединяя два высказывания союзом „или“, мы будем автоматически предполагать, что этот союз употребляется в смысле нашего соглашения. А во-вторых, то „или“, к которому они тяготеют, это так называемое „разделительное или“ („или“ в смысле „истинно одно и только одно из двух утверждений“). Такое „или“, „или“ в таком смысле тоже употребляется в языке. Но в языке употребляется также и „неразделительное или“, „или“ в неразделительном смысле („истинно, по крайней мере, одно из двух, а может быть, оба“). Наше „или“ является уточнением именно этого, неразделительного „или". Если нам в дальнейшем понадобится где-нибудь употребить „или" в разделительном смысле, мы это будем оговаривать, подчеркивать специально, укажем на этот „разделительный" смысл какими-нибудь дополнительными словами. Сделаем еще одно замечание о союзе „или" (оно, впрочем, в равной степени относится и к союзу „и", к которому мы сейчас перейдем). Рассмотрим предложение: „Корнем, или решением, уравнения называется такое число, подстановка которого в уравнение вместо неизвестного превращает обе части уравнения в одно и то же число". В каком смысле употреблен в этом предложении союз „или"? В смысле нашего соглашения? Ну, разумеется, нет. Наше соглашение относится к союзу „или", поставленному между двумя высказываниями. А в рассматриваемом предложении „или" стоит между двумя терминами и указывает, что они объявляются синонимами.

Условимся составное высказывание вида „A и B", где A и B — высказывания, считать истинным в тех случаях, когда оба высказывания A и B истинны. Во всех остальных случаях мы, следовательно, будем считать высказывание „A и B" ложным. Таким образом, высказывание „$2 < 3$ и 4 — четное число" истинно, а высказывания: „$2<3$ и 5—четное число", „$2 > 3$ и 5 — четное число" — ложны.

Перейдем к наиболее важному из логических союзов, употребляемых в математике, союзу „если.., то". Условимся составное высказывание вида „**Если** A, **то** B", где A и B — высказывания, считать ложным в тех случаях, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно. Таким образом, в частности, высказывание „Если A, то B" с ложным A и любым B в силу нашего соглашения истинно. Истинными являются, например, высказывания „Если $2^2 = 5$, то $3^2 = 9$", „Если $2^2 = 5$, то $3^2 = 10$". Эта часть нашего соглашения, вероятно, опять-таки вызовет внутреннее противодействие у части читателей. «Почему это вдруг высказывание „Если A, то B" с ложным A и, например, истинным B истинно?» На это я, несколько повторяясь, отвечу следующим образом. Прежде всего, наше соглашение или, лучше, обсуждаемая часть нашего соглашения ничему не противоречит. В повседневном языке утверждения вида „Если A, то B“ с ложным A не употребляются *). Место для любого соглашения, так сказать, „свободно“. Сразу же может последовать вопрос-возражение: а нельзя ли было согласиться при ложном A считать высказывание „Если A, то B“ ложным? Можно было, конечно. Но математическая практика показывает, что принятое нами соглашение удобнее. Оно чрезвычайно сильно сокращает речь. В дальнейшем мы увидим этому многочисленные примеры, пока же приведем один пример из школьной математики. Этот пример покажет, в частности, что даже в школьном курсе принятое нами только что соглашение незримо присутствовало. Любой окончивший школу знает, что при возведении обеих частей уравнения в квадрат могут прибавиться лишние („посторонние“) корни. При этом обычно не говорится, но подразумевается, что потеряться при возведении в квадрат корни не могут. Вы согласны с этим, читатель? Но что значит „не могут потеряться“? Это значит, что любой корень уравнения

$$f(x)=g(x) \tag{1}$$

является также корнем и для уравнения

$$[f(x)]^2=[g(x)]^2. \tag{2}$$

Это высказывание мы считаем верным, несмотря на то, что уравнение (1) может вовсе не иметь корней. Если высказывание „Любой корень уравнения (1) является также корнем и для уравнения (2)“ переписать в форме „Если число a является корнем уравнения (1), то a является корнем уравнения (2)“, становится ясным, что наша уверенность в истинности этого высказывания (независимо от того, имеет ли уравнение (1) корни) основана на бессознательном применении введенного выше соглашения. Если бы мы хотели сформулировать утверждение об уравнениях (1), (2) без учета этого соглашения, нам пришлось бы формулировать так: если уравнение (1) имеет корни, то любой корень уравнения (1) является также корнем уравнения (2).

*) Пример типа „Если бы я был космонавтом, то я бы полетел на Юпитер“ не опровергает сказанного. Здесь мы имеем дело не с союзом „Если..., то“, а с союзом „Если бы..., то бы“. А кроме того, опровергать, считать ложным подобное утверждение нет никакой нужды.

Как уже указывалось выше, принятое соглашение сокращает речь.

В дальнейшем мы о высказываниях вида „Если A, то B" с ложным A часто будем говорить, что они истинны *тривиальным образом*, т. е. истинны не в силу внутренней, содержательной связи между высказываниями A и B, а вследствие нашего понимания союза „если ..., то" *). «Нередко применяемые в расчете на внешний эффект формулировки вроде „из лжи следует все, что угодно" или „если $2 \times 2 = 5$, то существуют ведьмы" надлежит воспринимать как тривиальные следствия из соглашений об употреблении слов „если.., то" и „следует", облеченные в нарочито парадоксальную форму» ([20] **), стр. 58) [1]).

Истинность высказывания „Если A, то B" выражают также словами: из A *следует* B, A *влечет* B, из A *вытекает* B.

Возьмем два высказывания A и B и составим из них теорему:

$$\text{Если } A, \text{ то } B. \tag{3}$$

В теореме вида (3) высказывание A называется *условием*, или *посылкой*, высказывание B — *заключением*. Образуем теперь из высказываний A, B еще три теоремы:

$$\text{Если } B, \text{ то } A, \tag{4}$$

$$\text{Если не } A, \text{ то не } B, \tag{5}$$

$$\text{Если не } B, \text{ то не } A. \tag{6}$$

Теоремы (3), (4) (и, соответственно, теоремы (5), (6)) называются *взаимно обратными* теоремами: теорема (4) — это теорема, обратная теореме (3), и наоборот, теорема (3) — теорема, обратная теореме (4). Вопрос, который иногда задают — какая из теорем (3), (4) „прямая", а какая „обратная" — не имеет смысла: термина „обратная теорема" нет; есть термин „теорема, обратная данной теореме", и любая из теорем (3), (4) является (по определению) обратной по отношению к другой теореме [2]).

---

*) Слово „тривиально", которое часто будет встречаться в этой книге, в математике обычно употребляется, по-видимому, в одном из следующих смыслов: „бессодержательно", „неглубоко", „очевидно".

**) Число в квадратных скобках отсылает к списку «Упомянутая литература» в конце книги.

Теоремы (3), (5) (и, соответственно, теоремы (4), (6)) называются *взаимно противоположными* теоремами: теорема (5) — теорема, противоположная теореме (3), и наоборот, теорема (3) — теорема, противоположная теореме (5).

Существует ли какая-нибудь зависимость между теоремами (3) — (6)? Можно ли из истинности или ложности какой-нибудь из этих теорем делать автоматический вывод об истинности или ложности какой-нибудь другой из этих теорем?

Взаимно обратные теоремы (3), (4) почти не зависят друг от друга: истинность любой из них не влечет ни истинности, ни ложности другой теоремы; слово «почти» поставлено потому, что некоторая небольшая зависимость между теоремами (3), (4) все-таки есть: они не могут быть одновременно ложными. Взаимно противоположные теоремы (3), (5) зависят друг от друга так же, как теоремы (3), (4): истинность любой из них не влечет ни истинности, ни ложности другой теоремы, но ложными одновременно они быть не могут *).

Однако теоремы (3), (6) (а также, разумеется, и теоремы (4), (5)) тесно связаны между собой: истинность (а следовательно, и ложность) любой из них автоматически влечет истинность (соответственно — ложность) другой теоремы. Теоремы (3), (6) равносильны. Это утверждение:

Теорема „Если A, то B“
равносильна
теореме „Если не B, то не A“

называется *законом контрапозиции*. Докажем его.

Допустим, что теорема (3) истинна. Докажем, что в этом случае и теорема (6) истинна. Предположим противное: предположим, что теорема (6) ложна. В силу нашего понимания, нашего уточнения смысла союза „если ..., то“, это означает, что ее условие „не B“ истинно, а ее заключение „не A“ ложно, т. е. что B ложно, а A истинно, но это противоречит истинности теоремы (3). Таким образом, допущение о ложности теоремы (6) привело нас к противоречию. Следовательно, теорема (6) истинна.

---

*) К термину „взаимно обратные (взаимно противоположные) теоремы“ и к зависимости между взаимно обратными (взаимно противоположными) теоремами мы еще вернемся в § 3 гл. IV.

Допустим теперь, что теорема (6) истинна. Докажем, что тогда и теорема (3) истинна. Рассуждая опять от противного, предположим, что теорема (3) ложна, т. е. A истинно, а B ложно. Следовательно, „не A“ ложно, а „не B“ истинно, что противоречит истинности теоремы (6). Закон контрапозиции доказан.

Очень часто встречается такая ситуация, когда обе взаимно обратные теоремы (3), (4) истинны. Для сжатой словесной передачи этого факта в математике употребляются „парные“ союзы: „необходимо и достаточно“ и „тогда и только тогда“ *). Таким образом, каждое из высказываний

Для того, чтобы A, необходимо и достаточно, чтобы B (7)

A тогда и только тогда, когда B (8)

означает: истинны обе взаимно обратные теоремы (3) и (4). Предложения (7) и (8) мы часто для краткости будем записывать в виде $A \rightleftarrows B$. К знаку $\rightleftarrows$ мы еще вернемся в гл. IV.

Хотя и редко, но все же „половины“ этих „парных“ союзов: „необходимо“, „достаточно“, „тогда“, „только тогда“ — иногда употребляются отдельно. Поэтому полезно знать, какой именно из двух взаимно обратных теорем: (3) или (4) — соответствует употребление каждого из этих союзов.

A тогда, когда B (9)

Это — теорема (4). Почему? Как доказать, что теорема (9) — это именно теорема (4), а не (3)? Я думаю, что теперь уже читатель сразу понимает: *доказать* это невозможно. Так *уславливаются* употреблять союз „тогда“. С другой стороны, стоит лишь теорему (9) высказать в виде: „Когда B, тогда A“, как это соглашение становится вполне естественным. Употребление союза „только тогда“ означает теорему (3).

Для того, чтобы A, достаточно, чтобы B.

Этой фразой подается теорема (4), что довольно хорошо соответствует языковой интуиции. Таким образом, на долю союза „необходимо“ остается теорема (3).

*) В английском и французском языках в этом случае употребляется союз „если и только если“ (if and only if, si et seulement si), в немецком — «тогда и только тогда» (dann und nur dann).

Для доказательства теоремы (7) нужно, в силу вышесказанного, доказать теорему (3) и теорему (4). Поэтому доказательство теоремы (7) естественно распадается на две части. Одну из этих частей называют „Необходимость", другую — „Достаточность". В соответствии с указанным выше смыслом союзов „необходимо" и „достаточно" „необходимостью" называют ту половину доказательства теоремы (7), в которой доказывается теорема (3), „достаточностью" — теорема (4). Заметим, что в то время как теорема (7) и теорема

Для того, чтобы B, необходимо и достаточно, чтобы A (10)

очевидно, равносильны, „необходимостью" в доказательстве теоремы (10) является то, что в доказательстве теоремы (7) является „достаточностью". Соответственно, „достаточность" в (10) совпадает с „необходимостью" в (7).

Слова „необходимо" и „достаточно" входят также в термины „необходимое условие", „достаточное условие". Высказывание A называют *необходимым условием* для B, если истинна теорема (4). Высказывание A называют *достаточным условием* для B, если истинна теорема (3). Заметим, что в то время как достаточное условие для B естественно называть «условием», так как из него вытекает B, необходимое условие для B приятнее было бы называть следствием, так как не из него следует B, а оно следует из B. В силу принятых выше соглашений произвольное ложное высказывание является достаточным условием для любого высказывания B, произвольное истинное высказывание является необходимым условием для любого B.

Укажем на несколько специфический смысл союза „если", стоящего в определении. Рассмотрим, например, определение четного числа: „целое число называется четным, если оно делится на 2". Из этого определения (как, впрочем, и из любого другого) автоматически вытекают две взаимно обратные теоремы: „если целое число — четное, то оно делится на 2", „если целое число делится на 2, то оно четное", а следовательно, и теорема „целое число тогда и только тогда является четным, когда оно делится на 2". Таким образом, „если" в определении означает приблизительно то же, что и „тогда и только тогда". Желая подчеркнуть этот смысл слова „если", стоящего в определении, некоторые авторы иногда определение формулируют так: „целое число тогда и только тогда называется четным, когда оно делится на 2“*).

Заметим в заключение, что теорема не обязана, разумеется, иметь вид (3). Например: „существуют параллельные прямые“, „простых чисел бесконечно много“, „целое число тогда и только тогда делится на 6, когда оно делится на 2 и на 3“. Термины: „условие“ („посылка“), „заключение“, „обратная теорема“, “противоположная теорема“ были введены нами для теорем вида (3) и только к ним применимы.

§ 2. Переменная

Рассмотрим некоторые вопросы, относящиеся к изучению *письменного* математического языка.

Прежде всего введем в новом, отличном от традиционного, обобщенном смысле термины „буква“, „алфавит“, „слово“. Эти термины в излагаемом аспекте взяты мною у А. А. Маркова ([9], гл. I). Начнем с цитаты из указанной монографии А. А. Маркова.

«*Буквами* мы называем знаки, которые в данном их применении рассматриваем только как целые.

При чтении книги нас не интересуют, например, части знаков *a*, а лишь целые такие знаки. В этом смысле типографские знаки являются буквами.

Необходимо подчеркнуть условность этого понятия, зависимость его объема от принятых соглашений. Например, знак a' можно рассматривать и как букву и как знак, состоящий из двух частей: a и $'$, смотря по принятым на этот счет соглашениям» ([9], стр. 7).

Приведем несколько примеров знаков, которые при обычном их применении рассматриваются как буквы, т. е. как нерасчленяемые целые: ы, 2, ! , =, (. Буквами можно также, разумеется, считать любые заранее оговоренные, имеющие достаточно ясную форму знаки. Например, ⊠, ∀, ‖ и т. д.

Конечный набор букв мы будем называть *алфавитом*. Желательно, чтобы буквы, входящие в алфавит, отчетливо

*) Аналогичное утверждение можно сделать о словах «в тех случаях» на стр. 30,31 и вообще в любом определении.

отличались по форме друг от друга. Неудобен, например, в употреблении алфавит, содержащий как букву C, так и букву С. Отсюда, в частности, следует, что практически применяемый алфавит должен содержать не очень большое число букв, так как «при естественной ограниченности размеров букв и большом числе их форм обязательно появляются различные, но трудно отличимые буквы — одинаковость и различие букв теряют свою четкость» ([9], стр. 8).

Слово — это ряд написанных друг за другом букв. Слово *в данном алфавите* — это слово, каждая буква которого принадлежит данному алфавиту *).

К написанию слов в данном алфавите мы предъявляем ряд требований отчетливости.

Так как порядок следования букв, составляющих слово, играет существенную роль, он должен быть ясным в том смысле, что для любых двух таких букв должно быть ясно видно, которая из них стоит левее (предшествует) и которая правее (следует). Должны быть отчетливо указаны начало и конец слова.

Очень важное дальнейшее требование состоит в единственности разложения слова на буквы данного алфавита — требование невозможности „разночтений".

Оно отнюдь не всегда соблюдается. Например, слово $a'a$ в алфавите $\{a, a', 'a\}$ можно рассматривать и как ряд двух букв „a" и „$'a$" этого алфавита и как ряд двух букв „a'" и „a".

Необходимо полностью исключить возможность таких разночтений слов, что может быть достигнуто наложением надлежащих ограничений на рассматриваемые алфавиты и на способы написания слов в них.

Можно, например, выставить следующие два требования:

а) всякая буква алфавита должна быть связной, т. е. должна быть изобразимой без отрыва карандаша от бумаги;

б) при писании слов следует оставлять промежуток между всякими двумя соседними буквами.

Первое из этих требований налагает ограничение на рассматриваемые алфавиты, а второе — на способ написания

*) Следующие 10 абзацев представляют почти точную цитату из монографии А. А. Маркова [9] (стр. 12—13). Поскольку, однако, я счел нужным внести в их текст легкие изменения, кавычки мне пришлось опустить.

слов. Ясно, что при соблюдении этих требований всякое слово в рассматриваемом алфавите будет разлагаться на буквы единственным образом.

Условия а) и б) являются достаточными, но отнюдь *не необходимыми* для единственности чтения слова. Например, несмотря на то, что русский печатный алфавит из-за несвязной буквы „ы“ не удовлетворяет условию а), разложение слов в этом алфавите на буквы однозначно.

Из каких букв состоит алфавит математического языка? Я не собираюсь перечислять сейчас весь алфавит, принимая тем самым обязательство не употреблять никаких других букв, хотя, разумеется, в принципе мог бы это сделать. Тем не менее бросить хотя бы приблизительный взгляд на этот алфавит полезно. В него входят, прежде всего, все буквы (в узком смысле слова) русского алфавита (прописные и строчные, печатные и рукописные): ведь доказательства, их текст, как, впрочем, и формулировки, мы пишем на русском языке. Для удобства обозначений включим в рассматриваемый алфавит также буквы латинского, готического и греческого алфавитов (см. приложение 3). Затем в него, конечно, войдут цифры, знаки препинания и собственно математические знаки ($+$, $\times$, $\sqrt{}$, $\triangle$, $\|$, $\perp$ и т. п.). На этом я закончу перечисление части математического алфавита. В дальнейшем нам не раз придется вводить новые, не указанные здесь буквы, присоединяя их к математическому алфавиту *).

В математических текстах часто встречаются выражения, написанные не в одну строчку, не линейно; эти выражения не являются, следовательно, словами. Например, $\frac{ax+b}{cx+d}$. Хотя все такие выражения, приняв дополнительные соглашения, легко можно было бы „линеаризовать“, вытянуть в строчку, превратить в слова, мы, следуя обычной математической практике, не будем этого делать. Ввиду этого, во всем дальнейшем нам придется говорить не о словах, а о выражениях более общего вида, которые

---

*) Любопытно заметить, что можно было бы, ничего не теряя по существу, ограничить математический алфавит всего *двумя* буквами (о соответствующей идее можно прочесть в § 6 гл. I монографии А. А. Маркова [9]).

мы, не вводя никакого особого термина, так прямо и будем называть *выражениями*. Мы не будем никак уточнять смысл этого термина. Это потребует от нас, разумеется, некоторой осторожности в обращении с ним. Мы не сможем, в частности, доказывать никаких теорем о выражениях вообще *). Заметим лишь, что выражение — это написанная в каком-нибудь разумном, понятном порядке совокупность букв математического алфавита. От частного случая выражений — слов — выражения вообще отличаются возможной нелинейностью записи.

Перейдем к центральному понятию параграфа — понятию *переменной*. Прежде всего, еще до объяснения этого термина заметим, что слово „переменная" у нас будет самостоятельным словом, существительным, а не прилагательным, определением к какому-нибудь другому существительному. Никаких терминов вроде „переменная величина" у нас не будет [1]). Что же такое *переменная*? Поскольку ответ на этот вопрос будет иметь несколько непривычный, не стандартный характер (он не будет, в частности, иметь вид обычного математического определения), мы будем подходить к нему постепенно. Прежде всего, переменная — это просто буква. Некоторые буквы в выражении называются переменными. Какие же буквы в выражении называются переменными? Те, вместо которых можно что-нибудь (например, числа, многочлены и т. д.) подставлять. Следующий вопрос: что значит „можно"? Предварительный ответ на этот вопрос такой: „можно" — это значит, что после подстановки выражение должно иметь смысл **). Чуть ниже на этот же вопрос будет дан другой, окончательный, едва ли не противоположный ответ. (Точнее говоря, ниже этот вопрос будет просто снят.) Рассмотрим, например, выраже-

---

*) В отличие от слов, линейность записи которых позволяет строить некую теорию (см., например, гл. I монографии [9]).

**) У читателя, очень вероятно, возникнет вопрос: что такое „смысл"? В общем виде на этот вопрос я отвечать не буду: не могу. Для математики, строящейся в том плане, в котором она строится в этой книге, это, пожалуй, невозможно [2]). Однако для каждого конкретного выражения я могу, конечно, указать, осмысленно оно или нет. Например, выражение $\frac{1}{x}$ осмысленно, если вместо x подставить 3, и бессмысленно, если вместо x подставить 0 или „стол".

ние: $a+x$. Это выражение представляет собой слово из трех букв. Какие же буквы в этом выражении являются переменными? По-видимому, читатель прежде всего назовет букву x. Ведь общеизвестно, что x это переменная. Если вместо x подставлять числа, то выражение, полученное после подстановки, будет иметь смысл. Но если подставлять числа вместо буквы a, то выражение, по-видимому, тоже будет сохранять смысл? Значит, буква a тоже является переменной? А если, наконец, вместо буквы $+$ подставить какой-нибудь из знаков $-$, $\times$, $:$, выражение, очевидно, тоже будет осмысленным. Значит, $+$ тоже переменная? Какие же все-таки буквы в выражении $a+x$ являются переменными?

После всего этого предварительного разговора перейдем к окончательному ответу на вопрос: что такое переменная? Впрочем, он тоже не уложится в одну фразу. *Переменными* в некотором данном выражении мы будем называть те буквы, которые... специальным указанием (высказанным в момент задания выражения) будут объявлены таковыми. Таким образом, если это специально не указано, никакого ответа на вопрос „какие буквы являются переменными в выражении $a+x$?“ дать нельзя. Может показаться, что при таком понимании термина „переменная“ („Собственно, ведь нет никакого понимания. Какую букву хотим, такую назовем переменной“.) никакой пользы от этого термина не будет. Это не так. Переменными мы будем обычно называть, объявлять в некотором рассматриваемом выражении такие буквы, вместо которых можно, вместо которых мы собираемся подставлять те или иные числа, выражения и т. п. Объявляя букву переменной, мы тем самым привлекаем к ней внимание, предупреждаем, как мы собираемся использовать эту букву при дальнейшем обращении с рассматриваемым выражением, разрешаем применять к этой букве (и ко всему выражению, содержащему эту букву) весь комплекс терминов и обозначений, который мы для понятия „переменная“ введем. Объявляя букву переменной, полагается одновременно задавать *область значений* (*область определения*) этой переменной. Опять-таки, содержательно под областью значений переменной понимается совокупность, из которой мы собираемся черпать *значения переменной* для подстановки их на место переменной. Областью значений данной переменной обычно объявляется такая совокупность, объекты которой *естественно* подставлять в рассматриваемое выражение вместо этой переменной. (Разумеется, слово «естественно» употреблено в совершенно не формальном, интуитивном смысле. Тем не менее понятно, что символы арифметических действий подставлять в выражение $a+x$ вместо буквы $+$ естественно, а тригонометрические функции неестественно.) Однако формально областью значений данной переменной может быть объявлена любая совокупность объектов. Подчеркиваю, что переменная считается полностью заданной (так сказать, конституированной в качестве *переменной*) лишь тогда, когда ей приписана какая-нибудь область значений. Переменную, в область значений которой входят только числа, мы будем называть *числовой переменной*. При написании выражений в качестве букв, которые мы будем намереваться использовать как числовые переменные, мы будем обычно использовать наиболее привычные для этой цели последние буквы латинского алфавита[3]).

Выражение, содержащее переменные, мы будем называть *формой*; выражение не содержащее переменных — *константой*. Из вышесказанного вытекает, что одно и то же выражение в одном случае, при одном своем употреблении может быть формой, в другом — константой. Форма называется *s-местной*, если она содержит s переменных. Формы могут быть одноместными, двухместными, трехместными и т. д. Если в выражении $(ax+by)\,x$ объявить переменными буквы x и y, такая форма будет, разумеется, двухместной, а не трехместной. *Допустимыми значениями* данной переменной относительно данной одноместной формы называются те ее значения (из области значений переменной), подстановка которых вместо переменной превращает форму в осмысленное выражение. Одноместная форма называется *всюду определенной*, если любое значение ее переменной является допустимым. Одноместная форма называется *нигде не определенной*, если никакое значение ее переменной не является допустимым.

Примеры: 1) Пусть в выражении $\frac{1}{x}$ переменной будет буква x с областью значений $\{\sqrt{\ }, +, 3, 5, 0\}$. Допустимыми значениями переменной x в этом случае являются

3 и 5. Форма не является ни всюду определенной, ни нигде не определенной. Переменная x не является числовой.

2) Пусть в выражении $\frac{1}{x}$ переменной будет буква x с областью значений $\{3, 5, 0\}$. Допустимыми значениями переменной x в этом случае опять являются 3 и 5. Форма снова не является ни всюду определенной, ни нигде определенной. Зато переменная x на этот раз является числовой.

3) Пусть в выражении $\frac{1}{x}$ переменной будет буква x с областью значений $\{3, 5\}$. Форма является всюду определенной. Переменная является числовой.

4) Пусть в выражении $\frac{1}{x}$ переменной будет буква x с областью значений, состоящей из одного числа 0. В этом случае рассматриваемая форма будет нигде не определенной. Переменная снова будет числовой.

5) Рассмотрим, наконец, выражение $\frac{1}{x}$ с переменной x, область значения которой состоит из $\sqrt{\ }$ и $+$. Форма будет нигде не определенной. Переменная не является числовой. Разумеется, в практической работе нам не придется иметь дело с примерами, в которых переменная имела бы такую „дикую", такую неподходящую область значений.

s-местная форма называется *всюду определенной*, если при любых значениях своих переменных (из соответствующих областей значения) она имеет смысл. s-местная форма называется *нигде не определенной*, если при любом наборе значений своих переменных она не имеет смысла.

Пусть $\mathfrak{A}$ — форма *), x, y, z — переменные. Запись $\mathfrak{A}(x, y, z)$ будет означать, что в форме $\mathfrak{A}$ нет никаких переменных, отличных от x, y, z. Мы не требуем при этом, чтобы каждая из переменных x, y, z действительно присутствовала в $\mathfrak{A}$ (хотя бы одна из этих переменных должна, конечно, присутствовать, так как $\mathfrak{A}$ — форма). Таким образом, двухместную форму $x(a+y)$ с переменными x и y можно обозначать как просто $\mathfrak{A}$, так и $\mathfrak{A}(x, y)$, $\mathfrak{A}(x, y, z)$, $\mathfrak{A}(x, y, z, u)$, но не $\mathfrak{A}(x)$. Разумеется, если

---

*) $\mathfrak{A}$ — прописная готическая буква „а" (см. приложение 3). Формы мы будем в основном обозначать прописными готическими буквами.

сказано, что $\mathfrak{A}(x, y, z)$ — *трехместная* форма, то каждая из переменных x, y, z действительно присутствует в $\mathfrak{A}$. Иногда вместо того, чтобы говорить, что $\mathfrak{A}$ — форма с переменными x, y, z, мы будем говорить, что $\mathfrak{A}$ *зависит* от x, y, z. Соответственно, „$\mathfrak{A}$ *не зависит* от x“ означает, что буква x не является переменной в форме $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{A}(x, y, z)$ — форма, объекты a, b и c принадлежат областям значений, соответственно, переменных x, y и z. Результат подстановки в форму $\mathfrak{A}$ объектов a, b и c вместо, соответственно, переменных x, y и z мы будем обозначать через $\mathfrak{A}(a, b, c)$. Разумеется, обозначение $\mathfrak{A}(a, b, c)$ только тогда имеет однозначный смысл, когда *сказано явно* или *ясно из контекста*, вместо какой из переменных x, y, z какой из объектов a, b, c подставляется.

Пусть $\mathfrak{A}(x, y, z)$ — форма, объекты a, b, c принадлежат областям значений, соответственно, переменных x, y, z. Выражение $\mathfrak{A}(a, b, c)$ либо осмысленно, либо нет. Если $\mathfrak{A}(a, b, c)$ осмысленно, мы будем обозначать это так: $!\,\mathfrak{A}(a, b, c)$ и говорить в этом случае либо „$\mathfrak{A}(a, b, c)$ *определено*“, либо „*форма* $\mathfrak{A}(x, y, z)$ *определена при* $x = a$, $y = b$, $z = c$“.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две формы (быть может, от одних и тех же, быть может, от различных — полностью или частично — переменных). Разумеется, если какая-то буква входит в обе рассматриваемые формы, то мы будем считать, что она обозначает в них одно и то же. В частности, если какая-то буква входит в обе формы и является переменной, то она имеет одинаковую (для обеих форм) область значений. При этом предположении назовем формы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ *равносильными*, если при любом наборе значений всех переменных, входящих в обе эти формы, либо они обе не определены, либо обе определены и обозначают одно и то же (имеют одинаковое значение). Обозначать равносильность форм $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ мы будем символом „$\simeq$“ (новая буква математического алфавита!): $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$. Обозначать *неравносильность* мы будем символом „$\not\simeq$“ (еще одна новая буква): $\mathfrak{A} \not\simeq \mathfrak{B}$. При тех же предположениях форму $\mathfrak{A}$ назовем *равносильной* константе A, если при любом наборе значений переменных формы $\mathfrak{A}$ она на этом наборе означает то же, что и константа A. В символах: $\mathfrak{A} \simeq A$. Назовем, наконец, константы A и B *равносильными*, если они обозначают одно и то же.

В символах: $A \simeq B$. Кроме общего для всех форм (и констант) знака равносильности $\simeq$, для отдельных классов форм (и констант) вводятся часто свои, специфические знаки. Чуть ниже мы рассмотрим два таких класса.

Заметим, что для любых форм $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$: $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}$; если $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$; если $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}$, то $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}$. Сама по себе верность этих трех утверждений, вероятно, читателю очевидна. С другой стороны, столь же вероятно, что на данном этапе чтения книги ему останется не ясным, зачем нужны эти три утверждения, чем именно они интересны, почему из всевозможных очевидных утверждений я фиксировал его внимание именно на этих трех утверждениях. Ответ на эти вопросы читатель получит лишь в § 4 гл. VII.

П р и м е р ы: 6) Формы $(x+1)^2$ и x^2+2x+1 равносильны. Разумеется, полагалось бы сначала объявить, что переменной в этих выражениях мы считаем букву x (и только ее), и задать ее область значений. В большинстве случаев мы будем, как это и делается на практике, своими обозначениями молчаливо объявлять те или иные буквы переменными. *Областью значений числовой переменной мы будем, если противное не оговорено, считать совокупность всех действительных чисел.* Итак, $(x+1)^2 \simeq$ $\simeq x^2+2x+1$.

7) $(x+1)^2+y-y \simeq x^2+2x+1+z-z$.

8) Но $(x+1)^2+1 \not\simeq x^2+2x+1+\frac{y}{y}$, так как при $x=2$, $y=0$ форма $(x+1)^2+1$ определена, а форма x^2+2x+ $+1+\frac{y}{y}$ — нет.

9) Пусть n — переменная с областью значений — натуральными числами. $(\sqrt[n]{x})^n \not\simeq x$, так как при $n=2$, $x=-1$ форма $(\sqrt[n]{x})^n$ не определена, а форма x определена. $\sqrt[n]{x^n} \not\simeq x$, так как при $n=2$, $x=-2$, хотя обе формы определены, они принимают разное значение: $\sqrt{(-2)^2}=2 \neq -2$. $\sqrt[n]{x^n} \not\simeq |x|$, так как при $n=3$, $x=-2$ формы принимают разное значение: $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2 \neq |-2|$. $x\sqrt[n]{y} \not\simeq$ $\not\simeq \sqrt[n]{x^n y}$ и т. д.

10) $\operatorname{tg} x \simeq \frac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{ctg} x \simeq \frac{\cos x}{\sin x}$; но $\operatorname{ctg} x \not\simeq \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, так как при $x = \frac{\pi}{2}$ форма $\operatorname{ctg} x$ определена $\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0\right)$, а форма $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ не определена. Более общо: $\frac{x}{y} \not\simeq \frac{1}{\frac{y}{x}}$, так как при $x = 0$, $y = 1$ форма $\frac{x}{y}$ определена, а форма $\frac{1}{\frac{y}{x}}$ — нет.

11) Форма $\sin^2 x + \cos^2 x$ равносильна константе 1. $\sin^2 x + \cos^2 x \simeq 1$. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x \not\simeq 1$, так как при $x = 0$ форма $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ не определена. $\frac{x}{x} \not\simeq 1$ по той же причине. $y - y \simeq 0$.

12) Константы $3 + 5$ и 8 равносильны. $3 + 5 \simeq 8$.

Важнейшими классами форм являются класс числовых форм и класс высказывательных форм. Форма называется *числовой*, если при любом наборе значений своих переменных, на котором она определена, она обозначает число (является числом). Все приведенные выше, в качестве примеров, формы были числовыми формами. Если считать (что довольно естественно, но не обязательно — см. ниже), что выражения „$1 + i > 3$“, „$+ > 3$“, „$! > 3$“ не имеют смысла, то форма $x > 3$ с областью значений переменной $\{1 + i, +, !\}$ также будет числовой, так при любом из трех возможных значений переменной x она не определена. Здесь, в этом примере, едва ли не впервые, работает наше соглашение о «ложности посылки» (см. § 1). При любом значении a переменной x посылка утверждения: „Если форма $x > 3$ определена при $x = a$, то она обозначает число“ ложна и, следовательно, само утверждение истинно. Так как при любом значении переменной x утверждение, стоящее в кавычках, истинно, рассматриваемая форма (с такой „дикой“ областью значений переменной) является числовой.

Не следует путать понятия числовой переменной и числовой формы. Например, в только что приведенном примере переменная не является числовой, форма же — числовая. Если рассмотреть форму $x > 3$ с естественной областью значений переменной x (действительные числа), то, наоборот, переменная будет числовой, форма не будет числовой. Еще пример. Форма «число букв слова „x“» с областью значений переменной x, состоящей из русских слов, является числовой; переменная в этом примере — не числовая.

Для обозначения равносильности числовых форм и числовых констант (чисел), помимо общего для всех форм и констант знака $\simeq$, используется чаще свой, специфический знак „$=$“.

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,\ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$
$$3 + 5 = 8.\ ^{*})$$

Соответственно, неравносильность обозначается знаком „$\neq$“.

Вторым важнейшим классом форм является класс высказывательных форм. Форма называется *высказывательной*, если при любом наборе значений своих переменных, на котором она определена, она обозначает высказывание (является высказыванием).

Вместо того, чтобы говорить: „высказывание A истинно“ или „высказывание B ложно“, удобно ввести для слов „истина“ „ложь“ объединяющий термин „истинностное значение“ и говорить длиннее, но единообразнее: «высказывание A имеет (принимает) *истинностное значение* „истина“», «высказывание B имеет (принимает) *истинностное значение* „ложь“». *Условимся значением высказывания считать его истинностное значение* (как бы отождествляя все истинные высказывания и, отдельно, все ложные высказывания). Тем самым мы делаем равносильными (в смысле введенного выше термина „равносильные константы“) все истинные высказывания и, отдельно, все ложные высказывания. Приведем примеры высказывательных форм. Прежде всего, форма $x > 3$, в которой переменная x имеет естественную область значений, является высказывательной формой. Если в выражении $2 \times 2 = x$ буква x — переменная, это выражение является высказывательной формой; если же в этом выражении буква x не является пере-

*) О разных смыслах буквы „$=$“ мы будем еще специально говорить в § 3.

менной (скажем, буквой x мы пожелали обозначить число 5), то это выражение не является, разумеется, формой вообще (мы имеем в виду, что остальные буквы, входящие в рассматриваемое выражение, имеют свой обычный смысл и не являются, следовательно, переменными). Еще примеры высказывательных форм: $2x^2-3x+5=0$, $2^x=x^2$, $\sin x=2$, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, «число букв в слове „x“ равно пяти» (в последнем примере областью значений переменной x являются русские слова). Форма $\sin x=2$ при любом значении переменной x (короче: при любом x) превращается в ложное высказывание. Форма $\sin^2 x+$ $+\cos^2 x=1$ при любом x превращается в истинное высказывание.

Остановимся на одном деликатном вопросе. Все только что приведенные высказывательные формы были всюду определенными. Существуют ли высказывательные формы, не являющиеся всюду определенными? Определена ли, скажем, форма $\frac{x}{x}=1$ при $x=0$ или нет? Ответ на этот вопрос зависит от соглашения. Мы не будем пока принимать никакого соглашения по этому вопросу и вернемся к нему в § 2 гл. IV и в § 1 гл. VI.

Для обозначения равносильности (или неравносильности) высказывательных форм и высказывательных констант (высказываний) мы, наряду с общим для всех форм и констант знаком $\simeq$ (соответственно, $\not\simeq$), будем также использовать свой, специфический знак „$\equiv$“ („$\not\equiv$“). Например,

$$[2x-3>3x+5]\equiv[2x-3x>3+5],$$

$$[2x-3x>3+5]\equiv[-x>8],$$

$$[-x>8]\equiv[x<-8],\quad [2x-3>3x+5]\equiv[x<-8]$$

(для удобства чтения мы заключили высказывательные формы в квадратные скобки). Ввиду принятого выше соглашения о „значении“ высказывания, $[\sin^2 x+\cos^2 x=1]\equiv$ $\equiv[x^2\geqslant 0]$, $[\sin x=2]\equiv[x^2<0]$, $[x^2\geqslant 0]\equiv[y^2\geqslant 0]$, $[\sin^2 x+\cos^2 x=1]\equiv[2\times 2=4]$, $[\sin x=2]\equiv[2\times$ $\times 2=5]$, $[2\times 2=4]\equiv[3\times 3=9]$, $[2\times 2=5]\equiv$ $\equiv[3\times 3=10]$.

Ко всем расплывчатым, полуинтуитивным терминам этого параграфа добавим два еще более расплывчатых термина: „связанная переменная“ и „свободная переменная“. Встречаются в математике такие выражения, в которых некоторая буква не является переменной (точнее: некоторую букву неразумно считать переменной, так как подстановка вместо нее не имеет смысла или не интересна), но на некотором этапе образования рассматриваемого выражения из более простых выражений она была переменной (ее естественно было считать переменной). Такую букву называют *связанной переменной*. Подчеркнем, что те буквы, к которым мы будем иногда применять этот термин, мы *не будем* считать переменными. Для нас (и это, конечно, противоречит законам образования терминов в русском языке) связанная переменная *не будет* переменной. Для того чтобы просто „переменную“, переменную в полном смысле слова, противопоставить „связанной переменной“ (не являющейся, как указано выше, по предлагаемой здесь терминологии переменной), мы, в тех случаях, когда будем использовать термин „связанная переменная“, просто „переменную“ будем называть также *свободной переменной*. Таким образом, у нас связанная переменная — это не переменная, а свободная переменная — то же самое, что просто переменная [4]).

Разумеется, для того чтобы понятие связанной переменной стало хоть немного ощутимым, надо привести пример. В выражении „$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$“ (являющемся высказыванием) букву n неразумно считать переменной, так как вместо нее подставлять числа нельзя. „$\lim\limits_{3\to+\infty}\frac{1}{3}=0$“ — бессмыслица. Но в выражении $\frac{1}{n}$, из которого — в интуитивном смысле — образовано выражение „$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$“, букву n естественно считать переменной. Поэтому в выражении „$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$“ буква n является *связанной переменной*. В выражении „$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=x$“ буква n является связанной переменной, буква x — *свободной переменной.*

Чтобы привести еще один пример, определим „*оператор суммирования*“ $\sum$. Пусть $\mathfrak{A}(i)$ — одноместная числовая форма, областью значений переменной i пусть будут целые числа. Пусть a и b — два целых числа. Обозначим через $\sum\limits_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i)$ число $\mathfrak{A}(a)+\mathfrak{A}(a+1)+\mathfrak{A}(a+2)+\ldots+\mathfrak{A}(b)$, если $b>a$, число $\mathfrak{A}(a)$, если $b=a$, и число 0, если $b<a$. Тогда выражение $\sum\limits_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i)$ является числом, от i оно уже не зависит, вместо i подставлять числа бессмысленно (например, $\sum\limits_{3=a}^{b} \mathfrak{A}(3)$) и поэтому i уже не является — в выражении $\sum\limits_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i)$ — переменной (i неразумно считать переменной). В выражении $\sum\limits_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i)$ буква i является связанной переменной. Буква i в выражении $\sum\limits_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i)$ называется *индексом суммирования*. Само выражение $\sum\limits_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i)$ читается так: „сумма $\mathfrak{A}(i)$ по i от a до b". Например, $\sum\limits_{i=1}^{4} \frac{1}{i+3}$ — это „сумма $\frac{1}{i+3}$ по i от 1 до 4". Очевидно, $\sum\limits_{i=1}^{4} \frac{1}{i+3}=\frac{319}{420}$. Если a — натуральное число, а b — переменная с областью значений — целыми числами, то выражение $\sum\limits_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i)$ является не числом, а одноместной числовой формой, зависящей от b (т. е. со свободной переменной b). Если и a и b — переменные с той же областью значений, то $\sum\limits_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i)$ — двухместная числовая форма со свободными переменными a и b. Если $\mathfrak{A}(i, j)$ — двухместная числовая форма, то в форме $\sum\limits_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i, j)$ свободной переменной является еще и j. Индекс суммирования i во всех случаях является

связанной переменной. Оператор *) суммирования $\sum$ (превращающий одноместные числовые формы в числа) широко используется в математике, однако в данной книжке не будет серьезного повода для встречи с ним. Подобно оператору суммирования $\sum$, определяется и „*оператор перемножения*“ $\prod$.

$$\prod_{i=a}^{b}\mathfrak{A}(i)=\begin{cases}\mathfrak{A}(a)\cdot\mathfrak{A}(a+1)\cdot\mathfrak{A}(a+2)\cdot\ldots\cdot\mathfrak{A}(b) & b>a,\\ \mathfrak{A}(a) & b=a,\\ 1 & b<a.\end{cases}$$

В выражении $\prod_{i=a}^{b}\mathfrak{A}(i)$ индекс перемножения i является связанной переменной **).

Для читателей, знакомых с понятием определенного интеграла, укажем, что в выражении $\int_a^b f(x)\,dx$ буква x, разумеется, является связанной переменной.

В § 3 гл. IV мы столкнемся еще с двумя чрезвычайно важными примерами операторов, связывающих переменные (так называемые кванторы).

Читатель, желающий ознакомиться с более глубоким освещением вопросов, затронутых в этом параграфе (правда, иногда с несколько другой точки зрения), может это сделать по Введению к книге А. Черча [21]. В связи с затронутыми здесь вопросами полезно также прочитать пп. 1—3 из § 3 книги В. А. Успенского [20].

§ 3. =

Буква

$$=$$

читается „равно“ или „равняется“. В математике буква = употребляется, к сожалению, во многих разных смыслах.

---

*) Слово „оператор“ здесь и далее употребляется в совершенно неопределенном смысле. Читатель вполне может игнорировать это слово, не вдумываться в него. Ни в каких серьезных построениях, ни в каких теоремах оно встречаться не будет.

**) Операторы $\sum$ и $\prod$ мы используем в § 3 гл. III. Важнейшие свойства этих операторов указаны в приложении 1.

Укажем для примера несколько разных употреблений буквы $=$.

1) Чаще всего буква $=$ употребляется в смысле, который можно, пожалуй, описать такими словами: два имени (обозначения, названия) одного и того же. Например, выражение „$2 \times 6 = 3 \times 4$" означает, что 2×6 и 3×4 — имена одного и того же числа (или, короче, одно и то же число). Этот смысл буквы $=$ мы будем считать ее главным, ее, так сказать, законным смыслом. Ниже мы остановимся чуть подробнее и на этом смысле буквы $=$ и на понятии имени.

2) В другом, очевидно, смысле буква $=$ употребляется в уравнениях *). Когда дается уравнение: $\mathfrak{A}(x) = \mathfrak{B}(x)$, то вовсе не утверждается, что $\mathfrak{A}(x)$ и $\mathfrak{B}(x)$ — два имени одного и того же. Просто ставится задача: найти такие x, что...

3) Как было указано в § 2, буква $=$ часто употребляется для обозначения равносильности числовых (а ниже, в § 3 гл. II, мы увидим, что не только числовых) форм. Например, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

4) Иногда буква $=$ употребляется просто для образования высказывательных форм специального вида: $\mathfrak{A}(x) = \mathfrak{B}(x)$. В этом случае буква $=$ употребляется, так сказать, без всякого смысла. Ее использование ничего не утверждает. При замене всех переменных их значениями высказывательная форма превращается в высказывание (истинное или ложное) и буква $=$ приобретает первый смысл („два имени одного и того же").

5) Рассмотрим выражение

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \qquad (1)$$

В каком смысле здесь употреблена буква $=$? С одной стороны, она, конечно, утверждает, что слева и справа от нее стоят два имени одного и того же числа. Но, с другой стороны, *почему* $n!$ и $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ — два имени одного и того же числа? Как доказать, что $n!$ и $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ — два имени одного и того же числа? Очевидно, все доказательство исчерпывается словами: „по определению". Ведь равенство (1) просто является определением (для $n \geqslant 2$) того

*) См. § 4 раздела Б.

выражения, которое стоит слева от буквы $=$. Еще, так сказать, минуту назад, до того, как мы дали это определение, $n!$ и $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ не были именами одного и того же (выражение $n!$ „минуту назад“ не имело никакого смысла). Но вот мы дали это определение, и выражения $n!$ и $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ превратились в имена одного и того же. Легко видеть, что хотя в (1) буква $=$ и утверждает два имени одного и того же, ее смысл здесь несколько отличен от первого смысла буквы $=$. Такой же „несколько иной“ смысл буква $=$ имеет в любом определении.

6) Функции вводят очень часто при помощи выражений вида: $y = x^2$, $y = \sin x$, $y = 2^x$ и т. п. (см. § 1 гл. VI). В этом случае опять-таки буква $=$ имеет особый, специфический смысл. Впрочем, об этом употреблении буквы $=$ больше, чем о каком-либо другом, мне хочется сказать, что в нем нет никакого смысла. В этом случае больше, чем в каком-нибудь другом, „ничто ничему не равно“. Недаром, Бурбаки в [3] предложил вводить функции выражениями вида $x \to x^2$, $x \to \sin x, x \to 2^x$ и т. п. *).

7) Выражение „$f(x) = o(g(x))$ (при $x \to a$)“, как известно, означает, что $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

8) Выражение $\int f(x)\,dx = g(x)$, как известно, означает, что $g'(x) = f(x)$.

9) Наконец, часто буква $=$ употребляется для указания *отождествления* в силу *изоморфного вложения*. Например, $3 = \frac{3}{1}$; $\frac{1}{3} = 0{,}(3)$; $2{,}5 = 2{,}5 + 0i$. Впрочем, при таком отождествлении 3 и $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{3}$ и $0{,}(3)$ и т. д. оказываются именами одного и того же [ср. 1)].

---

*) Бурбаки (N. Bourbaki) — псевдоним группы французских математиков, поставившей себе целью с *современной* и *единой*, наиболее общей точки зрения изложить в одном трактате *всю* математику. Бурбаки, стараясь, с одной стороны, не изменять по возможности существующую терминологию и символику, с другой стороны, пытается избавить математику от всевозможных исторически возникших несообразностей.

Трактат Бурбаки продолжает писаться и выходить во Франции и переводится постепенно на русский язык. О Бурбаки полезно прочитать в [12]. Следует подчеркнуть, что концепция математики у Бурбаки отлична от обычной для нашего читателя и принятой в этой книге концепции (см. примечание [2]) к § 2).

Многое в терминологии и символике этой книги заимствовано у Н. Бурбаки [3].

Возможно, было бы лучше для каждого смысла буквы $=$ ввести свой особый знак. Мы не будем столь радикально менять существующую символику, однако один смысл буквы $=$ (пятый из перечисленных выше) мы все-таки выделим своим, особым знаком.

Введем в алфавит новую букву: „$\underset{\mathrm{Df}}{=}$“. Выражение $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ мы рассматриваем именно как букву, т. е. как единый нерасчленяемый символ (см. § 2)*). Букву $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ рекомендуется читать одним из следующих двух способов: „равно по определению“ („равняется по определению“) или „обозначим через“. Из рекомендуемых „чтений“ буквы $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ ясно ее предлагаемое использование. Букву $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ рекомендуется использовать вместо буквы $=$, во-первых, в определениях и, во-вторых, во всевозможных „вре́менных обозначениях“ типа „обозначим число x_0y_0 через u_0“, также являющихся по существу определениями, только — временными определениями, „определениями на час“, определениями, вводимыми только на время того или иного рассуждения или доказательства. Итак, для $n \geqslant 2$

$$n! \underset{\mathrm{Df}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Или $u_0 \underset{\mathrm{Df}}{=} x_0y_0$.

Введем в алфавит еще одну букву: „$\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$“. Рекомендуемые чтения: „равносильно по определению“ или „обозначим через“. Буква $\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ имеет смысл, аналогичный смыслу введенной только что буквы $\underset{\mathrm{Df}}{=}$, но ставится только между высказывательными формами. Например,

$$x \leqslant y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x < y \text{ или } x = y$$

(определение смысла буквы $\leqslant$);

$$x > y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} y < x$$

---

*) „Df“ — две буквы из слов „definition“, „Definition“, „définition“ („определение“ — по-английски, немецки, французски).

(определение смысла буквы $>$); если n — четное натуральное число, то

$$b = \sqrt[n]{a} \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} b^n = a \text{ и } b \geqslant 0$$

(определение смысла буквы $\sqrt{\ }$).

Если буква $=$ употребляется в своем главном, первом смысле, то, очевидно, справедливы три следующих утверждения. Пусть a, b, c — имена каких-то объектов. Тогда

$$a = a. \tag{1}$$

$$\text{Если } a = b, \text{ то } b = a. \tag{2}$$

$$\text{Если } a = b \text{ и } b = c, \text{ то } a = c. \tag{3}$$

Для некоторых из указанных выше смыслов буквы $=$ эти „очевидные“ утверждения не верны или бессмысленны (например, для второго, четвертого, шестого, седьмого, восьмого смыслов).

Поговорим немного о термине „имя“. Смысл термина „имя“ делается более ясным после указания его синонимов: „обозначение“, „название“. Теория понятия „имя“, теория имён — это отнюдь не тривиальная теория. Желающие могут ознакомиться с элементами этой теории по уже упоминавшемуся в § 2 Введению к книге А. Черча [21]. Здесь мы ограничимся лишь тремя замечаниями. Во-первых, следует отличать имя предмета от самого предмета. Это предупреждение, разумеется, совершенно излишне в реальной жизни (никто не спутает слово „торт“ с весьма вкусным предметом, обозначенным этим именем), но вовсе не бесполезно в математике, среди предметов изучения которой имеются также и *выражения* (т. е. нечто, написанное на бумаге). $\sqrt{2}$ — это имя некоторого действительного числа, но не само число *).

---

*) На естественно возникающий вопрос: «а что же такое „само“ действительное число, обозначенное символом $\sqrt{2}$?», можно дать не один ответ — существует несколько определений понятия „действительное число“. Желающие могут ознакомиться с ними либо по п. 1 § 12 книги [20], либо по статьям в [11].

Во-вторых, в математике чаще всего (но не всегда!) мы оперируем с именами предметов, а не с самими предметами.

И наконец, в-третьих, в математике иногда в качестве имени предмета употребляется сам „именуемый“ предмет. Например, именем многочлена „$2x+3$“ (а многочлен — это форма, т. е. нечто, написанное на бумаге — см. § 4 раздела Б) чаще всего служит само выражение $2x+3$.

ГЛАВА II

МНОЖЕСТВО

§ 1. Множество

Введем термин „*множество*“. Понятие множества будет у нас исходным, первоначальным, *неопределяемым* понятием. Дальнейший текст этого параграфа является не определением понятия множества, а описанием того, как мы будем с этим неопределяемым понятием обращаться, приучением к употреблению этого неопределяемого понятия [1]).

Начнем с примеров. Можно говорить о множестве стульев в данной комнате; множестве людей, живущих в настоящее время в Гренландии; множестве букв русского алфавита; множестве натуральных чисел; множестве точек плоскости, равноудаленных от двух данных точек.

Синонимами к термину „множество“ являются употребляемые в повседневной практике слова „совокупность“, „коллекция“, „собрание“. Мы употребляли уже в § 2 гл. I некоторые из этих слов в указанном смысле. Известный читателю из курса средней школы термин „геометрическое место точек“ также является синонимом термина „множество“ и употребляется в школе именно в этом смысле. В математике употребляются также следующие синонимы термина „множество“: семейство, класс, система, область. Например, в § 2 гл. I мы ввели и использовали термин „*область* значений переменной“.

Вместе с термином „множество“ вводится (также неопределяемый) термин „*принадлежит*“ (синоним: „лежит в“).

Например, число 3 принадлежит множеству натуральных чисел. Буква Б принадлежит множеству букв русского алфавита. Середина отрезка, соединяющего две данные точки, лежит в множестве точек, равноудаленных от данных точек.

Вместо того, чтобы говорить „принадлежит“, говорят также „является *элементом*“ (членом, точкой).

Множества мы чаще всего будем обозначать прописными буквами латинского алфавита. Элементы множеств — строчными буквами.

Если объект a принадлежит множеству A (объект a является элементом множества A), то это записывается так:

$$a \in A. \tag{1}$$

Если же a не является элементом множества A, мы записываем это так:

$$a \notin A \tag{2}$$

($\in$ и $\notin$ — новые буквы математического алфавита). Если A — имя некоторого множества, а a — имя объекта, то (1) и (2) — высказывания. Если же A — имя множества, а a — переменная, то (1) и (2) — одноместные высказывательные формы. Если, наконец, и a и A — переменные, то (1) и (2) — двухместные высказывательные формы. Буква $\in$ называется *знаком принадлежности*.

Для наиболее важных числовых множеств фиксируем постоянные обозначения. Множество натуральных чисел обозначим буквой $\mathbf{N}$, множество целых чисел — буквой $\mathbf{C}$, множество рациональных чисел — буквой $\mathbf{R}$, множество действительных чисел — буквой $\mathbf{D}$ и множество комплексных чисел — буквой $\mathbf{K}$.

Тогда $3 \in \mathbf{N}$ — истинное высказывание, $3 \in \mathbf{D}$ — истинное высказывание, $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$ — ложное высказывание, $\sqrt{2} \notin \mathbf{R}$ — истинное высказывание, $x \in \mathbf{N}$ (с переменной x) — одноместная высказывательная форма.

Поскольку понятие множества является неопределяемым, с ним надо обращаться осторожно. Рекомендуется говорить лишь о таких множествах, возможные элементы которых были бы достаточно четко очерченными, неизменяемыми объектами, лишь о таких множествах, относительно которых можно быть уверенными, что любой достаточно „понятный“ объект либо принадлежит, либо не принадлежит рассматриваемому кандидату в „множества“. Например, вряд ли разумно рассматривать множество добродетелей (самолюбие — добродетель или порок?), множество идей, множество капель воды в стакане и т. п. Так как само понятие множества не является достаточно четким, нельзя рассматривать также и множество всех множеств *).

Множества бывают *конечные* и *бесконечные*. Конечное множество — это такое множество, число элементов которого конечно, т. е. такое множество, для которого существует натуральное число, являющееся числом его элементов **). Множество называется бесконечным, если оно не является конечным.

Как задаются множества? Существуют два главных способа задания множеств: *перечисление и описание*. Множество можно задать, перечислив все его элементы. А можно задать множество, описав его элементы при помощи характеристического свойства, устанавливающего, какие элементы принадлежат, какие — не принадлежат задаваемому множеству. Опять-таки заметим, что характеристическое свойство, объединяющее объекты в множество, должно быть достаточно четким, так, чтобы было ясно, что любой достаточно определенный объект либо обладает, либо не обладает указанным свойством. Примером свойства, не удовлетворяющего этому условию, является свойство „быть таким числом n, что n-й удар моего сердца происходил еще в моем детстве". Поскольку понятие „детство" является недостаточно точным понятием, не верно утверждать, что „либо число $80 \times 60 \times 24 \times 365 \times 15$ обладает указанным свойством, либо не обладает". Разумеется, перечислением могут быть заданы только конечные множества и *в принципе* [2]) любое конечное множество может быть задано перечислением его элементов. Однако и конечное множество часто бывает удобнее задать описанием, чем перечислением. Трудновато, например, перечислить натуральные числа от 1 до 1 000 000 000, а описание соответствующего множества уже содержится в предыдущих

---

*) Известно, что рассмотрение множеств, подобных „множеству всех множеств", может быстро привести к противоречию (см., например, стр. 137—138 книги [8]).

**) Определяя понятие конечного множества, мы опираемся на считающееся интуитивно ясным понятие „число элементов множества". Однако это не обязательно (см., например, задачу 10 к § 3 гл. V).

словах. Бесконечные множества можно, разумеется, задавать лишь описанием.

Когда хотят указать, что множество состоит, скажем, из элементов a, b и c, их объединяют в фигурные скобки. Таким образом, выражение $\{a, b, c\}$ обозначает трехэлементное множество, элементами которого являются a, b и c. Это обозначение применяется, в основном, к конечным множествам. Однако часто используют „картинки" вроде $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, чтобы изобразить, обозначить бесконечное множество. Разумеется, такой способ обозначения бесконечных множеств допустим лишь, если из нарисованной части „картинки" ясен смысл скрывающегося под многоточием „и т. д.".

Введем еще один способ обозначения множеств, который нам будет очень полезен в дальнейшем. Пусть M — множество, $\mathfrak{A}(x)$ — одноместная высказывательная форма и область значений переменной x — множество M. Тогда через

$$\mathscr{E}\{x \in M \mid \mathfrak{A}(x)\} \tag{3}$$

мы обозначим множество, состоящее из всех тех и только тех элементов a множества M, для которых $\mathfrak{A}(a)$ истинно *). Таким образом,

$$a \in \mathscr{E}\{x \in M \mid \mathfrak{A}(x)\} \rightleftarrows a \in M \text{ и } \mathfrak{A}(a). \tag{4}$$

Например, $\mathscr{E}\{x \in \mathbf{N} \mid x > 3\}$ состоит из чисел $4, 5, 6, \ldots$ Буква x в выражении (3) является связанной переменной. От x выражение (3) не зависит.

Когда вводится какое-нибудь новое неопределяемое понятие, нужно каждый раз специально подумать, собираемся ли мы отождествлять и различать два „представителя этого понятия", а если собираемся, то в каких случаях: в каком случае мы будем считать, что перед нами два экземпляра одного и того же объекта или, короче, „один и тот же объект", а в каком случае мы будем считать, что перед нами экземпляры различных объектов или, короче, „различные объекты". Подчеркнем, что излагаемое ниже соглашение является неотъемлемой частью все еще продолжающегося описания неопределяемого понятия „множество".

---

*) $\mathscr{E}$ — это первая буква французского слова ensemble (множество). По-английски „множество" — set, по-немецки — die Menge.

Условимся говорить, что множества A и B *равны*, и писать: $A = B$, если A и B состоят из одних и тех же элементов. О равных множествах A и B мы будем также говорить, что A и B — *одинаковые* множества или что A и B — *одно и то же* множество. Таким образом, множества A и B считаются не равными (пишем: $A \neq B$), если либо в множестве A есть элемент, не принадлежащий B, либо, наоборот, в B есть элемент, не принадлежащий A.

Легко видеть, что для любых множеств A, B, C

$$A = A;$$

$$\text{если } A = B, \quad \text{то} \quad B = A;$$

$$\text{если } A = B \quad \text{и} \quad B = C, \text{ то } A = C.$$

Из нашего понимания равенства множеств вытекает, что порядок элементов в множестве несуществен, т. е., например, $\{3, 4, 5, 6\}$ и $\{4, 5, 6, 3\}$ — одно и то же множество:

$$\{3, 4, 5, 6\} = \{4, 5, 6, 3\}.$$

Мы считаем, что в множестве элементы расположены „в беспорядке". Множество — это, так сказать, *мешок* с элементами. Поэтому, в частности, говорить о первом, втором, третьем, ... элементе данного множества можно *лишь тогда*, когда предварительно элементы множества как-нибудь перенумерованы *).

Для того чтобы понятие „число элементов множества" было вполне определенным, нужно — при нашем понимании равенства множеств — очевидно, условиться, что в множестве не бывает *одинаковых* (неразличимых) *элементов*. Запись $\{2, 2, 3, 5\}$ мы будем считать не корректной и будем заменять ее на $\{2, 3, 5\}$. Например, множество простых делителей числа 60 равно $\{2, 3, 5\}$.

Условимся считать, что существует множество, не имеющее элементов. Это множество мы будем называть *пустым множеством* и будет обозначать его буквой $\varnothing$ (еще одна новая буква) [3]). Из нашего понимания равенства множеств вытекает, что существует только одно пустое множество или (то же самое — по другому) что все пустые множества равны. Мы будем, естественно, считать, что

*) Если это возможно (см. § 3 гл. V).

число элементов пустого множества равно нулю. Для любого a высказывание $a \in \varnothing$ ложно. Эта фраза, собственно, полностью характеризует понятие пустого множества. Несколько обобщая понятие конечного множества, пустое множество мы также будем относить к конечным множествам. Необходимость введения понятия „пустое множество“ видна хотя бы из того, что, задавая множество описанием, характеристическим свойством его элементов, мы можем и не знать заранее, существует ли хотя бы один объект, обладающий вышеупомянутым свойством. Иначе мы не могли бы, скажем, говорить о множестве корней произвольного уравнения, не убедившись предварительно, что данное уравнение имеет хотя бы один корень. Мы увидим ниже, что существование понятия „пустое множество“ будет сокращать и упрощать нам многие формулировки теорем, будет облегчать нам введение новых понятий и т. д.

Следующим по количеству элементов за пустым множеством идет *одноэлементное множество* или, точнее, одноэлементные множества. Как явствует из названия, одноэлементное множество — это множество, число элементов которого равно 1. Например, множество простых делителей числа 64 — одноэлементное множество, единственным элементом которого является число 2. Следует различать одноэлементное множество $\{a\}$, единственным элементом которого является a, и сам объект a. На вопрос, который иногда ставят: „а какая разница между a и $\{a\}$?“, могу ответить лишь, что „множество“ — это некая новая категория, новая сущность, новое качество. $\{2\}$ — это множество. О множестве $\{2\}$ нельзя задавать вопрос, четное ли оно. Множество не бывает четным или нечетным. Множество бывает одноэлементным или двухэлементным (не только), конечным или бесконечным, пустым или не пустым. 2 — это число. Наоборот, о числе 2 нельзя спрашивать, одноэлементное оно или двухэлементное. Число бывает четным или нечетным, простым или составным (не только) и т. д. 2 — четное простое число. $\{2\}$ — одноэлементное конечное множество. Очевидно, $a \in \{a\}$. Очевидно также, что

$$b \in \{a\} \rightleftarrows b = a.$$

Полезно отметить, что $\mathscr{E}\,\{x \in M \mid x = x\} = M$, $\mathscr{E}\,\{x \in M \mid x \neq x\} = \varnothing$ и, если $a \in M$, $\mathscr{E}\,\{x \in M \mid x = a\} = \{a\}$.

В заключение параграфа замечу, что изложенное здесь понятие множества является одним из основных понятий современной математики. На базе теории множеств построено большинство разделов современной математической науки [4]). Язык этой теории чрезвычайно удобен не только для математики, но и для многих других наук.

§ 2. Подмножество

Множество A называется *подмножеством* множества B, если любой элемент множества A принадлежит множеству B. Если множество A является подмножеством множества B, то пишут: $A \subseteq B$ ($\subseteq$ — новая буква, называемая *знаком включения*). Если $A \subseteq B$, то говорят также, что множество B является *надмножеством* множества A. Если не верно, что $A \subseteq B$, пишут: $A \not\subseteq B$ ($\not\subseteq$ — еще одна новая буква). Стоит, пожалуй, подчеркнуть, что у нас нет понятия „подмножество", а есть понятие „подмножество данного множества". Вопрос: „является ли множество A подмножеством?" — бессмысленный. Разумный вопрос: „является ли множество A подмножеством данного множества?"

Легко видеть, что для любого множества M

$$M \subseteq M. \tag{1}$$

Чуть более трудно видеть, что для любого множества M

$$\varnothing \subseteq M. \tag{2}$$

Утверждение (2) вытекает тривиальным образом из нашего соглашения, принятого в § 1 гл. I, о смысле союза «если..., то...» и нашего понимания наших собственных слов, стоящих в определении подмножества *). Слова „любой элемент множества A принадлежит множеству B" мы понимаем так: для любого объекта a верно утверждение „если $a \in A$, то $a \in B$". Но в утверждении „если $a \in \varnothing$, то $a \in M$" посылка — при любом a — ложна и, значит, само утверждение „если $a \in \varnothing$, то $a \in M$" верно для любого a. Вот еще один пример ситуации, в которой наше соглашение о „ложности посылки" сократило нам речь. Если бы

*) Я пишу здесь и дальше „в определении подмножества", хотя точнее было бы (см. выше) говорить „в определении подмножества данного множества".

мы не приняли соглашения о „ложности посылки“, но все-таки хотели бы, чтобы утверждение (2) было верным, нам пришлось бы определение подмножества формулировать длиннее: „множество A называется подмножеством множества B, если либо $A = \varnothing$, либо любой элемент множества A принадлежит B“.

Таким образом, у любого множества M есть, по крайней мере, два подмножества: само M и пустое множество $\varnothing$. Впрочем, у пустого множества $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \varnothing$ эти два подмножества, очевидно, совпадают: $M = \varnothing$. Подмножества M и $\varnothing$ множества M называются *несобственными подмножествами* множества M. Все остальные подмножества множества M, если такие есть, называются его *собственными подмножествами*. Очевидно, у пустого множества и у (любого) одноэлементного множества собственных подмножеств нет. У одноэлементного множества $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a\}$ всего два подмножества: M и $\varnothing$. У (любого) двухэлементного множества уже есть два собственных (одноэлементных) подмножества.

Очевидно,

$$\mathscr{E}\{x \in M \mid \mathfrak{A}(x)\} \subseteq M, \tag{3}$$

$$a \in M \rightleftarrows \{a\} \subseteq M. \tag{4}$$

Фундаментальную роль во всем дальнейшем будет играть очевидное, непосредственно вытекающее из определений подмножества и равенства множеств, утверждение

$$A = B \rightleftarrows A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A. \tag{5}$$

Отметим еще, что

$$\text{если } A \subseteq B \text{ и } B \subseteq C, \text{ то } A \subseteq C. \tag{6}$$

Множество A называется *истинным подмножеством* множества B, если $A \subseteq B$ и $A \neq B$. Если множество A является истинным подмножеством множества B, мы будем писать: $A \subset B$. В противном случае мы будем писать: $A \not\subset B$ ($\subset$ и $\not\subset$ — две новые буквы; буква $\subset$ называется *знаком строгого включения*). Таким образом,

$$A \subset B \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} A \subseteq B \text{ и } A \neq B. \tag{7}$$

Из определения (7), как обычно, вытекает теорема

$$A \subset B \rightleftarrows A \subseteq B \text{ и } A \neq B. \tag{8}$$

Очевидно,

$$A \subseteq B \rightleftarrows A \subset B \text{ или } A = B. \tag{9}$$

Из (8) или (7) вытекает, что

$$\text{если } A \subset B, \quad \text{то} \quad A \subseteq B, \tag{10}$$

$$\text{если } A \subset B, \quad \text{то} \quad A \neq B. \tag{11}$$

Легко доказать, что

$$\text{если } A \subset B \text{ и } B \subset C, \text{ то } A \subset C. \tag{12}$$

Примером «смешанного» свойства является утверждение

$$\text{если } A \subseteq B \text{ и } B \subset C, \text{ то } A \subset C. \tag{13}$$

Наряду с (13) справедливо, разумеется, и более слабое утверждение:

$$\text{если } A \subseteq B \text{ и } B \subset C, \text{ то } A \subseteq C. \tag{14}$$

Утверждение (14) легко следует из (13) и (10). Докажем для примера утверждение (13).

Итак, пусть $A \subseteq B$ и $B \subset C$. Докажем, что $A \subset C$. Для того чтобы доказать $A \subset C$, надо, в силу определения (7), доказать $A \subseteq C$ и $A \neq C$. Из $B \subset C$ по (10) следует $B \subseteq C$. А из $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ по (6) следует $A \subseteq C$. В силу $B \subset C$ и (11) имеем $B \neq C$. Из $B \subseteq C$ и $B \neq C$ вытекает, что существует такой элемент d в множестве C, который не принадлежит множеству B. Тогда $d \notin A$, так как из $d \in A$ и $A \subseteq B$ следовало бы $d \in B$. Итак, $d \in C$ и $d \notin A$. Значит, $A \neq C$.

У пустого множества нет истинных подмножеств. Если M — непустое множество, $M \neq \varnothing$, то $\varnothing \subset M$. Пустое множество является истинным подмножеством любого непустого множества. У одноэлементного множества $\{a\}$, очевидно, других истинных подмножеств нет. У двухэлементного множества $\{a, b\}$ уже три истинных подмножества: $\varnothing$, $\{a\}$ и $\{b\}$.

Ничто из сказанного выше не запрещает, чтобы элементами множества были множества. Например,

$M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$ — двухэлементное множество, элементами которого являются, в свою очередь, два множества. Множество $K \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, 6, 7\}$ — четырехэлементное множество, элементами которого являются два множества и два числа. Очевидно, $M \subseteq K$. Приведем еще более „дикий" пример. Пусть $L \underset{\mathrm{Df}}{=}$ $\underset{\mathrm{Df}}{=} \{1, 2, \{1, 2\}\}$. Тогда, очевидно, верны оба утверждения:

$$\{1, 2\} \in L,$$
$$\{1, 2\} \subseteq L.$$

Если $N \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\{a\}\}$, т. е. N — одноэлементное множество, единственным элементом которого является одноэлементное множество $\{a\}$, то $\{a\} \in N$ верно, а $\{a\} \subseteq N$ не верно.

Нам часто придется рассматривать *множества множеств*, т. е. множества, каждый элемент которых снова является множеством. Желая избежать неприятного „масла масленного", мы будем, используя указанный в § 1 синоним, вместо множества множеств предпочитать говорить о *системе множеств*. Заметим, что по нашему словопониманию пустое множество также является системой множеств.

Пусть M — множество. Обозначим через $\mathfrak{P}(M)$ (читается: «„пэ" от M») систему всех подмножеств множества M*). Таким образом, если $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \varnothing$, то $\mathfrak{P}(M) =$ $= \{\varnothing\} = \{M\}$. Если $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a\}$, то $\mathfrak{P}(M) = \{\varnothing, M\}$. Если $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, b\}$, то $\mathfrak{P}(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{M\}\}$. Очевидно,

$$A \in \mathfrak{P}(M) \rightleftarrows A \subseteq M.$$

Если M — бесконечное множество, то и $\mathfrak{P}(M)$, очевидно, бесконечное множество.

Для любых целых неотрицательных чисел n и k обозначим через C_n^k (читается: «„це" из n по k») число

*) $\mathfrak{P}$ — первая буква французского слова „partie" (часть), синонима слова „sous-ensemble" (подмножество).

k-элементных подмножеств произвольного n-элементного множества *) [1]). Таким образом, выражение C_n^k представляет собой двухместную числовую форму, зависящую от n и k. Область значений переменных n и k — целые неотрицательные числа (в том числе и 0).

Научимся вычислять C_n^k. Докажем, что

$$C_n^k = \begin{cases} 0 & k > n, \\ \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & k \leqslant n. \end{cases} \tag{15}$$

Впрочем, верхняя часть утверждения (15) очевидна. Очевидно, что если $k > n$, то у n-элементного множества нет ни одного k-элементного подмножества. Докажем теперь, что при $k \leqslant n$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{16}$$

Докажем это утверждение, фиксировав произвольное n, индукцией по k. Базис индукции: $k=0$. При $k=0$ (16) превращается в $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!\,(n-0)!}$, т. е. в $C_n^0 = 1$. Но это очевидно. Очевидно, что 0-элементных, т. е. пустых подмножеств у n-элементного множества одно, так как всего существует одно пустое множество. Прежде чем проводить индукционный шаг **), докажем *лемму*: при $k < n$

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k \tag{17}$$

---

*) Для простоты изложения я предполагаю в этой книге, что читатель *совершенно* не знаком со школьной комбинаторикой. Вся школьная (а также некоторая другая) комбинаторика будет изложена здесь — в несколько измененной и уточненной форме — заново. В частности, никакого термина „сочетание" (и следовательно, „число сочетаний") у нас не будет. Распространенный в школе термин „сочетание" синонимичен фактически с нашим термином „подмножество" (точнее: „конечное подмножество").

**) Я предполагаю, что с методом математической индукции и связанной с ним терминологией читатель знаком (в случае нужды рекомендую брошюру [5]). Впрочем, в § 8 раздела Б мы рассмотрим их снова.

(Это утверждение получилось (эвристически *)) следующим образом. Если (16) верно при любых $k \leqslant n$, то (при $k+1 \leqslant n$)

$$C_n^{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!\,[n-(k+1)]!}\,. \tag{18}$$

Разделив почленно (18) на (16), получаем $\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n-k}{k+1}$ или (17).) Лемму (17) мы докажем в виде

$$(k+1)\,C_n^{k+1} = (n-k)C_n^k. \tag{19}$$

Допустим, у нас переписаны в столбик все k-элементные подмножества n-элементного множества $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (см. табл. 1). Согласно нашим обозначениям, их C_n^k. Следовательно, в табл. 1 C_n^k строчек. Из каждого k-элементного подмножества A множества M, добавляя к A $n-k$ недостающих в нем элементов, изготовим $n-k$ $(k+1)$-элементных подмножеств множества M и расположим их в строчку напротив множества A. Получим таблицу (см. табл. 2), в левой части которой расположены в столбик

Таблица 1

1) { }
2) { }
$\vdots$
C_n^k) { }

Таблица 2

1) { }	{ }, { }, ..., { }
2) { }	{ }, { }, ..., { }
$\vdots$	
C_n^k) { }	{ }, { }, ..., { }

все C_n^k k-элементных подмножеств множества M, в правой — $(k+1)$-элементные подмножества (я пока не утверждаю, что все) множества M. В левой части таблицы C_n^k строк и один столбец. В правой части таблицы,

---

*) От греческого „эврика“ („нашел“). Эвристика — это наука (впрочем, лучше сказать „искусство“) о „нахождении“, методика поиска доказательств и путей решения задачи. Эвристике посвящены две великолепные книги Пойа [16] и [17]. Замечу, что рассуждая эвристически, можно рассуждать не строго. Не на всякое „почему“ обязательно отвечать *во время эвристического рассуждения*.

разумеется, также C_n^k строк и $n-k$ столбцов. Таким образом, с одной стороны, в правой части табл. 2 расположено $(n-k)\,C_n^k$ $(k+1)$-элементных подмножеств множества M (ср. с (19)). Докажем, что в правой части табл. 2 имеется *каждое* $(k+1)$-элементное подмножество A множества M, причем каждое $(k+1)$-элементное подмножество A множества M встречается в правой части табл. 2 *ровно* $k+1$ *раз*. Поскольку, согласно нашим обозначениям, всего в множестве M имеется C_n^{k+1} $(k+1)$-элементных подмножеств, отсюда будет следовать, что, с другой стороны, в правой части табл. 2 расположено $(k+1)\,C_n^{k+1}$ $(k+1)$-элементных подмножеств множества M, что и дает (19). Рассмотрим произвольное $(k+1)$-элементное подмножество A множества M. Упорядочим произвольным образом элементы множества A:

$$A=\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}, a_{i_{k+1}}\}.$$

Пусть $B \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$. B — k-элементное подмножество множества M. Значит, оно расположено в какой-то из строк левой части табл. 2. Но мы образовывали $(k+1)$-элементные подмножества, добавляя к каждому k-элементному подмножеству, в том числе — к B, *все* недостающие в нем элементы. $a_{i_{k+1}} \notin B$. Следовательно, образовывая из B $(k+1)$-элементные подмножества, мы в какой-то момент добавили к B и $a_{i_{k+1}}$. Следовательно, множество A имеется в правой части табл. 2 (причем в той строке, в которой слева расположено множество B). Докажем теперь, что множество A расположено в правой части табл. 2 ровно $k+1$ раз. Этим доказательство леммы будет закончено. Обозначим через C_s k-элементное подмножество множества M, получающееся выбрасыванием из A элемента a_{i_s}. (Таким образом, $C_{k+1}=B$.) $C_1, C_2, \ldots, C_{k+1}$ — это $k+1$ различных k-элементных подмножеств множества M. Следовательно, они занимают в левой части табл. 2 ровно $k+1$ строк. Назовем эти строчки *хорошими*. Докажем, что в каждой плохой (т. е. не хорошей) строке табл. 2 нет множества A, а в каждой хорошей — есть и по одному разу. Этим опять-таки лемма будет доказана.

Допустим, что A есть в плохой строчке. Значит, A получилось добавлением какого-то элемента $d \in M$ к k-элементному подмножеству D множества M, стоящему в левой части рассматриваемой плохой строки. Но если A получается добавлением элемента d к множеству D, то, очевидно, множество D получается выкидыванием из множества A элемента d. Но тогда D есть одно из C_s. Противоречие с тем, что строчка плохая. Рассмотрим произвольную хорошую строчку. В ней слева стоит какое-то C_s. Тогда A, очевидно, расположено в правой части той же строчки ($a_{i_s} \notin C_s$ и A получается добавлением a_{i_s} к C_s), причем расположено ровно один раз, так как все $(k+1)$-элементные подмножества данной строчки отличаются друг от друга только „последним“ элементом, а в качестве „последних“ элементов мы добавляли каждый раз новый элемент. *Лемма доказана.* Мы доказали (17) при $k<n$ (только при таких k оно нам понадобится). Мы использовали в нашем доказательстве, что $k<n$ (если бы было $k \geqslant n$, нельзя было бы образовывать $(k+1)$-элементные подмножества). Любопытно заметить, что (17) верно и при $k \geqslant n$.

Закончим доказательство утверждения (16). Нам осталось проделать индукционный шаг. В качестве предположения индукции допустим, что (16) верно для некоторого k такого, что $0 \leqslant k < n$. Докажем, что тогда (16) верно и для $k+1$, т. е. что верно (18). Так как $k<n$, имеет место (по лемме) (17). Из (17) и выполняющегося по предположению индукции (16) очевидным образом следует (18). Итак, (15) доказано.

Из (15) вытекают, в частности, очевидные и непосредственно по смыслу выражения C_n^k утверждения

$$C_n^0 = 1, \tag{20}$$

$$C_n^1 = n, \tag{21}$$

$$C_n^n = 1. \tag{22}$$

Из формулы бинома Ньютона *)

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i \tag{23}$$

*) Доказательство — в приложении 2.

вытекает $(a=b=1)$, что

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n. \tag{24}$$

С другой стороны, из смысла выражения C_n^k очевидно, что $\sum_{i=0}^{n} C_n^i$ есть число всех подмножеств n-элементного множества M, т. е. число элементов множества $\mathfrak{P}(M)$. Из (24) получаем, что число подмножеств n-элементного множества равно

$$2^n. \tag{25}$$

ЗАДАЧИ

1. Верно ли, что $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$? нет Верно ли, что $\{1, 2\} \subseteq \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$? да

2. Привести пример таких множеств A, B и C, что $A \in B$, $B \in C$ и $A \notin C$.

3. Привести пример такого *одноэлементного* множества B, что для некоторого A одновременно $A \in B$ и $A \subseteq B$. $B=\{\emptyset\}$

4. Привести пример таких множеств A, B, C, D, E, что $A \subset B$, $B \in C$, $C \subset D$ и $D \subseteq E$.

5. Доказать или опровергнуть каждое из следующих утверждений: для любых множеств A, B, C

a) если $A \notin B$ и $B \notin C$, то $A \notin C$;

b) если $A \neq B$ и $B \neq C$, то $A \neq C$;

c) если $A \in B$ и $B \not\subseteq C$, то $A \notin C$; да

d) если $A \subset B$ и $B \subseteq C$, то $C \not\subseteq A$; да

e) если $A \subseteq B$ и $B \in C$, то $A \notin C$. нет

6. Доказать, не используя (23), что число подмножеств n-элементного множества равно 2^n. (Отсюда получается новое, не использующее формулы (23), доказательство утверждения (24).)

7. Не используя (15), доказать, что

a) $C_n^k = C_n^{n-k}$,

b) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$.

§ 3. Операции над множествами

Соединением (*объединением*) множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B, т. е. принадлежат A или принадлежат B. Соединение множеств A и B обозначается через $A \cup B$ [1]. Таким образом,

$$x \in A \cup B \rightleftarrows x \in A \text{ или } x \in B. \tag{1}$$

Примеры: 1) Если $A \underset{\mathrm{Df}}{=} \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а $B \underset{\mathrm{Df}}{=} \{2, 4, 6, 7\}$, то $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2) Если A — множество точек левого, а B — множество точек правого круга на рис. 1, то заштрихованная фигура на рис. 2 есть $A \cup B$.

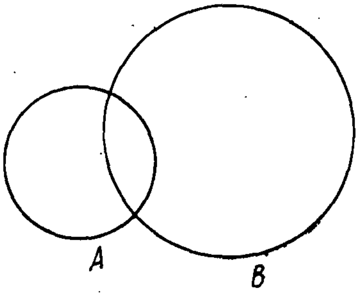


Рис. 1.

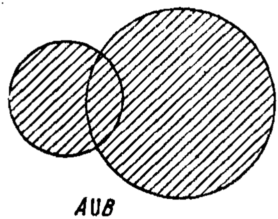


Рис. 2.

Аналогично определяется соединение (объединение) трех, четырех и вообще n множеств: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Множество $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ или $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ — это множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Пример 3). Если M_1 — множество нечетных целых чисел, не делящихся на 3, M_2 — множество четных целых чисел и M_3 — множество целых чисел, делящихся на 3, то

$$M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \bigcup_{i=1}^{3} M_i = \mathbf{C}.$$

Пусть, наконец, $\mathfrak{M}$ — произвольная (конечная или бесконечная) система множеств. Тогда *соединением* (*объединением*) *множеств из* $\mathfrak{M}$ или *соединением* (*объединением*) *системы множеств* $\mathfrak{M}$ называется и через $\bigcup\limits_{X\in\mathfrak{M}} X$ обозначается множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств системы $\mathfrak{M}$. Если множества системы $\mathfrak{M}$ перенумерованы всеми натуральными числами, то $\bigcup\limits_{X\in\mathfrak{M}} X$ обозначается также через $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. В выражении $\bigcup\limits_{X\in\mathfrak{M}} X$ буква X является связанной переменной, от X оно не зависит. Поэтому $\bigcup\limits_{X\in\mathfrak{M}} X = \bigcup\limits_{A\in\mathfrak{M}} A = \bigcup\limits_{B\in\mathfrak{M}} B$ и т. д. Аналогичное замечание справедливо для буквы i и выражения $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Если $\mathfrak{M}$ — имя какой-то фиксированной системы множеств, то $\bigcup\limits_{X\in\mathfrak{M}} X$ — множество. Букву $\mathfrak{M}$ можно считать и переменной. Тогда $\bigcup\limits_{X\in\mathfrak{M}} X$ будет одноместной формой, зависящей от $\mathfrak{M}$ (но не от X). Легко видеть, что если $\mathfrak{M} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{A, B\}$, то $\bigcup\limits_{X\in\mathfrak{M}} X = A \cup B$; если $\mathfrak{M} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{A, B, C\}$, то $\bigcup\limits_{X\in\mathfrak{M}} X = A \cup B \cup C$ и т. д. Из нашего определения соединения системы множеств вытекает, что если $\mathfrak{M} \underset{\mathrm{Df}}{=} \varnothing$, то $\bigcup\limits_{X\in\mathfrak{M}} X = \varnothing$. Итак,

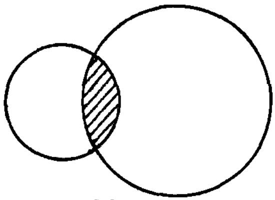
$$\bigcup_{X\in\varnothing} X = \varnothing. \tag{2}$$

Перейдем к следующей операции. *Пересечением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из множеств A, B, т. е. принадлежат A и принадлежат B. Пересечение множеств A и B обозначается через $A \cap B$[2]) *). Таким образом,

$$x \in A \cap B \rightleftarrows x \in A \text{ и } x \in B \tag{3}$$

*) Первая буква слова Union („объединение") помогает вспомнить, что из знаков $\cup$, $\cap$ объединение множеств обозначается знаком $\cup$.

Если A и B — множества из примера 1, то $A \cap B = \{2, 4\}$. Если A и B — множества из примера 2, то $A \cap B$ есть заштрихованная фигура на рис. 3. Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B *не пересекаются* или что A и B — *непересекающиеся* множества. В противном случае, т. е. если $A \cap B \neq \varnothing$, говорят, что множества A и B *пересекаются*. Следует подчеркнуть, что пересечение существует у любых двух множеств, в том числе — у непересекающихся, только у непересекающихся множеств оно равно пустому множеству *).



$A \cap B$

Рис. 3.

Условимся говорить, что множества A и B находятся *в общем положении*, если выполняются три условия: 1) существует элемент множества A, не принадлежащий B; 2) существует элемент множества B, не принадлежащий A; 3) существует элемент, принадлежащий как A, так и B. Множества A и B на рис. 1 находятся в общем положении. Термин „в общем положении“ понадобится нам лишь в следующей теореме:

Теорема о пяти возможностях. *Для любых двух множеств A, B*

$$[A = B] \text{ или } [A \subset B], \text{ или } [B \subset A], \text{ или } [A \cap B = \varnothing],$$
$$\text{или } [A \text{ и } B \text{ находятся в общем положении}]. \qquad (4)$$

Доказательство. Допустим, что $A \neq B$, $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ и $A \cap B \neq \varnothing$. Докажем, что тогда A и B находятся в общем положении. В самом деле, если бы не существовало элемента множества A, не принадлежащего B, то всякий элемент множества A принадлежал бы B, и мы имели бы $A \subseteq B$, что, в силу $A \neq B$ и $A \not\subset B$,

*) Слово „существует“ в этой фразе да и вообще вся фраза означают, конечно, не утверждение о реальной действительности, которое можно проверить опытом, и даже не математическое предложение, которое можно получить логически, а соглашение о словоупотреблении. Между прочим, если бы мы не ввели выше пустое множество, нам пришлось бы изменить словоупотребление: не у любых бы двух множеств существовало пересечение, что, конечно, менее удобно.

противоречило бы (9) из § 2. Аналогично, при помощи $A \neq B$ и $B \not\subset A$ доказывается условие 2. Если бы не существовало элемента, принадлежащего как A, так и B, мы бы имели противоречие с $A \cap B \neq \varnothing$. Теорема доказана.

Полезно заметить, что если множества A и B оба не пусты, то „случаи“, указанные в формулировке теоремы, попарно не совместны.

Подобно тому, как это делалось для соединения, определяются пересечение n множеств $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$ $\ldots \cap A_n$ и пересечение системы множеств $\bigcap\limits_{X \in \mathfrak{M}} X$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Если M_1, M_2, M_3 — множества из примера 3, то $\bigcap\limits_{i=1}^{3} M_i = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \varnothing$. Если $\mathfrak{M} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{A, B\}$, $\bigcap\limits_{X \in \mathfrak{M}} X = A \cap B$; если $\mathfrak{M} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{A, B, C\}$, $\bigcap\limits_{X \in \mathfrak{M}} X = A \cap B \cap C$, и т. д.

Рассмотрим еще одну операцию над множествами. В отличие от операций соединения и пересечения, эта операция определяется только для двух множеств. *Разностью* множества A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат A и не принадлежат B. Разность множеств A и B обозначается через $A \setminus B$ [3]). Таким образом,

$$x \in A \setminus B \rightleftarrows x \in A \text{ и } x \notin B. \tag{5}$$

Если A и B — множества из примера 1, то $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$, $B \setminus A = \{6, 7\}$. Если A и B — множества из примера 2, то $A \setminus B$ — это заштрихованная фигура на рис. 4, а $B \setminus A$ — заштрихованная фигура на рис. 5. Если в некотором рассмотрении участвуют только подмножества некоторого фиксированного, так сказать, самого большого, универсального множества M, то разность $M \setminus A$ называется также *дополнением множества* A (до множества M) и обозначается одним из способов: $C_M A$, CA, $\overline{A}$, A'. Разумеется, если „универсум“ M не указан или не ясен из контекста, то три последних обозначения недопустимы и термин „дополнение“ (до чего?) не понятен.

Нужно научиться хорошо решать задачи на доказательство „равенств с множествами“. Этот тип задач является весьма важным, так как „равенства с множествами“ встречаются в математике очень часто. „Равенства с множествами“ имеют либо вид

$$\mathfrak{A}(A, B, C, \ldots) = \mathfrak{B}(A, B, C, \ldots), \tag{6}$$

либо вид

$$\mathfrak{A}(A, B, C, \ldots) = \varnothing. \tag{7}$$

Универсальным методом доказательства равенств вида (6) является доказательство, основанное на теореме (5)

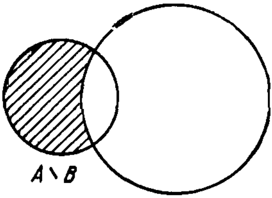


Рис. 4.

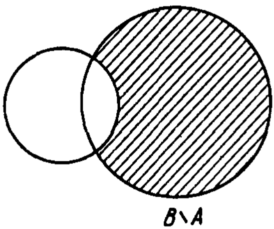


Рис. 5.

из § 2. Чтобы доказать, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, достаточно — по (5) из § 2 — доказать, что $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и что $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Любое равенство вида (6) может быть в принципе доказано этим методом. Универсальным методом доказательства равенств вида (7) является приведение к противоречию предположения, что $\mathfrak{A} \neq \varnothing$, т. е. предположения о существовании такого a, что $a \in \mathfrak{A}$. Любое равенство вида (7) может быть в принципе доказано этим методом. Ввиду особой важности указанного типа задач разберем подробно несколько примеров.

Пример 4). Докажем, что для любых множеств A, B, C

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C). \tag{8}$$

Пусть $D \underset{\mathrm{Df}}{=} (A \cup B) \cap C$, $E \underset{\mathrm{Df}}{=} (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Чтобы доказать (8) или $D = E$, нужно, в силу вышесказанного, доказать два „включения“: $D \subseteq E$ и $E \subseteq D$. Докажем, что

$D \subseteq E$. Доказать „включение" $D \subseteq E$ — это значит из предположения, что $a \in D$, вывести, что $a \in E$. Допустим, что $a \in D$. D есть пересечение множеств $A \bigcup B$ и C. Следовательно, по определению пересечения, $a \in A \bigcup B$ и $a \in C$. Так как $a \in A \bigcup B$, по определению соединения $a \in A$ или $a \in B$. Рассмотрим два случая: 1) $a \in A$ и 2) $a \in B$. Пусть $a \in A$. Выше мы получили, что $a \in C$. Итак, мы имеем $a \in A$ и $a \in C$. До сих пор мы делали всевозможные выводы из условия $a \in D$, всячески элиминировали, устраняли все знаки операций. Теперь мы дошли до предельно простых заключений, уже не содержащих знаков операций. Куда идти дальше? Какие теперь делать выводы? Из того, что $a \in A$ и $a \in C$, можно делать много разных выводов.

Займемся эвристикой. Посмотрим „направо", на то, что нужно доказать. Что нужно доказать для того, чтобы иметь право сделать вывод: $a \in E$? Для этого нужно, очевидно, доказать, что $a \in A \bigcap C$ или что $a \in B \bigcap C$, т. е. что $a \in A$ и $a \in C$ или что $a \in B$ и $a \in C$. У нас сейчас $a \in A$ и $a \in C$. Следовательно, дальнейшее доказательство проходит так.

Так как $a \in A$ и $a \in C$, по определению пересечения $a \in A \bigcap C$, а значит, по определению соединения, $a \in (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$, т. е. $a \in E$. Рассмотрим второй случай. Пусть $a \in B$. Тогда опять-таки сначала заключаем, что $a \in B \bigcap C$, а затем, что $a \in (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$, т. е. $a \in E$. Итак, $D \subseteq E$. Докажем теперь, что $E \subseteq D$. Допустим, что $a \in E$. E — это соединение. По определению соединения, $a \in A \bigcap C$ или $a \in B \bigcap C$. Рассмотрим два случая: 1) $a \in A \bigcap C$ и 2) $a \in B \bigcap C$. Пусть $a \in A \bigcap C$. По определению пересечения $a \in A$ и $a \in C$.

Опять займемся эвристикой. Нам нужно доказать, что $a \in D$, т. е. что $a \in A \bigcup B$ и $a \in C$. Для $a \in A \bigcup B$ надо доказать, что $a \in A$ или что $a \in B$. Но у нас как раз $a \in A$.

Итак, поскольку $a \in A$, по определению соединения $a \in A \bigcup B$. Из $a \in A \bigcup B$ и $a \in C$ следует, по определению пересечения, что $a \in (A \bigcup B) \bigcap C$, т. е. $a \in D$. Рассмотрим второй случай: $a \in B \bigcap C$. Тогда $a \in B$ и $a \in C$. Из $a \in B$ вытекает, что $a \in A \bigcup B$. И, наконец, из $a \in A \bigcup B$ и $a \in C$ получаем, что $a \in (A \bigcup B) \bigcap C$, т. е. $a \in D$. Итак, $E \subseteq D$. Равенство (8) доказано.

Пример 5). Пусть A, B, C — подмножества множества M. Докажем, что

$$\overline{[\bar{A}\cup(A\cap B)]\cap[\bar{B}\cup(A\cap B)]}\cap C=$$
$$=[(A\cap C)\setminus(B\cap C)]\cup[(B\cap C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})] \quad (9)$$

($\bar{A}$, $\bar{B}$ и т. д. означает здесь дополнение до множества M). Пусть

$$D \underset{\mathrm{Df}}{=} \overline{[\bar{A}\cup(A\cap B)]\cap[\bar{B}\cup(A\cap B)]}\cap C,$$

$$E \underset{\mathrm{Df}}{=} [(A\cap C)\setminus(B\cap C)]\cup[(B\cap C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})].$$

Нам надо доказать, что $D=E$. Докажем, что $D\subseteq E$. Допустим, что $a\in D$. Тогда

$$a\in\overline{[\bar{A}\cup(A\cap B)]\cap[\bar{B}\cup(A\cap B)]} \quad (10)$$

и

$$a\in C. \quad (11)$$

Из (10) следует, что

$$a\notin[\bar{A}\cup(A\cap B)]\cap[\bar{B}\cup(A\cap B)]. \quad (12)$$

Из (12) и определения пересечения вытекает, что

$$a\notin\bar{A}\cup(A\cap B) \quad \text{или} \quad a\notin\bar{B}\cup(A\cap B).$$

Рассмотрим два случая. Пусть сначала

$$a\notin\bar{A}\cup(A\cap B). \quad (13)$$

Из (13) и определения соединения вытекает, что $a\notin\bar{A}$ и $a\notin A\cap B$. Так как $a\notin\bar{A}$, $a\in A$. Так как $a\notin A\cap B$, $a\notin A$ или $a\notin B$. Но $a\in A$. Следовательно, $a\notin B$. Итак, в рассматриваемом случае $a\in A$, $a\notin B$ и — см. (11) — $a\in C$.

Чтобы знать, куда идти дальше, займемся эвристикой. Нам надо доказать, что $a\in E$, т. е. что $a\in(A\cap C)\setminus(B\cap C)$ или что $a\in(B\cap C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})$. Чтобы доказать $a\in$ $\in(A\cap C)\setminus(B\cap C)$, надо иметь $a\in A\cap C$ и $a\notin B\cap C$. Для $a\in A\cap C$ нужно $a\in A$ и $a\in C$. Для $a\notin B\cap C$ нужно $a\notin B$ или $a\notin C$. Итак, для $a\in(A\cap C)\setminus(B\cap C)$ нужно, с одной стороны, $a \in A$ и $a \in C$, с другой, $a \notin B$ или $a \notin C$. Оба эти условия могут выполняться только, когда $a \in A$, $a \notin B$ и $a \in C$. Мы уже пришли, занимаясь эвристикой, к тому, до чего дошли в доказательстве. Следовательно, можно возвращаться к доказательству и не анализировать, что нужно для $a \in (B \cap C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$. Однако, чтобы не возвращаться потом еще раз к эвристике, на всякий случай сообразим, что нужно иметь для того, чтобы прийти ко второму возможному *предпоследнему шагу доказательства*. Для $a \in (B \cap C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$ нужно $a \in B \cap C$ и $a \in \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$, т. е., с одной стороны, $a \in B$ и $a \in C$ и, с другой стороны, $a \in \bar{A}$ или $a \in \bar{B}$ или $a \in \bar{C}$. Оба эти условия могут выполняться только при $a \in \bar{A}$, $a \in B$ и $a \in C$ или при $a \notin A$, $a \in B$ и $a \in C$. Эвристика закончена. Вернемся к доказательству.

Из $a \in A$ и $a \in C$ вытекает $a \in A \cap C$. Так как $a \notin B$, $a \notin B \cap C$. Следовательно, $a \in (A \cap C) \setminus (B \cap C)$, а значит, $a \in [(A \cap C) \setminus (B \cap C)] \cup [(B \cap C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})]$, т. е. $a \in E$. Рассмотрим второй случай. Пусть

$$a \notin \bar{B} \cup (A \cap B).$$

Тогда $a \notin \bar{B}$ и $a \notin A \cap B$. Из $a \notin \bar{B}$ следует, что $a \in B$. Поскольку $a \notin A \cap B$, $a \notin A$ или $a \notin B$. Но $a \in B$. Следовательно, $a \notin A$. Итак, в рассматриваемом случае $a \notin A$, $a \in B$ и $a \in C$. Мы пришли к тому, до чего дошли в эвристической части. Следовательно, доказательство дальше идет „обратно по эвристике". Из $a \in B$ и $a \in C$ следует $a \in B \cap C$. Из $a \notin A$ вытекает $a \in \bar{A}$, а значит, $a \in \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$. Из $a \in B \cap C$ и $a \in \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ получаем $a \in (B \cap C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$, а значит, и $a \in [(A \cap C) \setminus (B \cap C)] \cup [(B \cap C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})]$, т. е. $a \in E$. Докажем теперь, что $E \subseteq D$. Допустим, $a \in E$. Тогда

$$a \in (A \cap C) \setminus (B \cap C) \tag{14}$$

или

$$a \in (B \cap C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}). \tag{15}$$

Рассмотрим два случая. Если имеет место (14), то

$$a \in A \cap C \tag{16}$$

и

$$a \notin B \cap C. \tag{17}$$

Из (16) следует, что $a \in A$ и $a \in C$. Из (17) следует, что $a \notin B$ или $a \notin C$. Но $a \in C$. Значит, $a \notin B$. Итак, в рассматриваемом случае $a \in A$, $a \notin B$ и $a \in C$.

Займемся опять эвристикой. Нам надо доказать $a \in D$, т. е. $a \in \overline{[\bar{A} \cup (A \cap B)] \cap [\bar{B} \cup (A \cap B)]}$ и $a \in C$. Для первого заключения нужно $a \notin [\bar{A} \cup (A \cap B)] \cap [\bar{B} \cup (A \cap B)]$, т. е. $a \notin \bar{A} \cup (A \cap B)$ или $a \notin \bar{B} \cup (A \cap B)$. Для $a \notin \bar{A} \cup (A \cap B)$ нужно $a \notin \bar{A}$ и $a \notin A \cap B$, т. е., с одной стороны, $a \in A$ и, с другой стороны, $a \notin A$ или $a \notin B$, что возможно только при $a \in A$ и $a \notin B$. Для $a \notin \bar{B} \cup (A \cap B)$ нужно $a \notin \bar{B}$ и $a \notin A \cap B$, т. е., с одной стороны, $a \in B$ и, с другой стороны, $a \notin A$ или $a \notin B$, что возможно только при $a \notin A$ и $a \in B$. Вернемся к доказательству.

Так как $a \in A$, $a \notin \bar{A}$. Так как $a \notin B$, $a \notin A \cap B$. Из $a \notin \bar{A}$ и $a \notin A \cap B$ вытекает $a \notin \bar{A} \cup (A \cap B)$, а следовательно, и $a \notin [\bar{A} \cup (A \cap B)] \cap [\bar{B} \cup (A \cap B)]$. Тогда

$$a \in \overline{[\bar{A} \cup (A \cap B)] \cap [\bar{B} \cup (A \cap B)]}.$$

Но $a \in C$. Значит, $a \in \overline{[\bar{A} \cup (A \cap B)] \cap [\bar{B} \cup (A \cap B)]} \cap C$, т. е. $a \in D$. Рассмотрим второй случай. Пусть имеет место (15). Тогда

$$a \in B \cap C \tag{18}$$

и

$$a \in \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}. \tag{19}$$

Из (18) получаем, что $a \in B$ и $a \in C$. Из (19) следует, что $a \in \bar{A}$ или $a \in \bar{B}$ или $a \in \bar{C}$. Но $a \in B$ и $a \in C$. Следовательно, $a \in \bar{A}$, т. е. $a \notin A$. Итак, в рассматриваемом случае $a \notin A$, $a \in B$ и $a \in C$. Предыдущая эвристика указывает путь продолжения доказательства. Из $a \in B$ следует $a \notin \bar{B}$. Из $a \notin A$ следует $a \notin A \cap B$. Из $a \notin \bar{B}$ и $a \notin A \cap B$ следует $a \notin \bar{B} \cup (A \cap B)$, а значит $a \notin [\bar{A} \cup (A \cap B)] \cap [\bar{B} \cup (A \cap B)]$. Тогда $a \in \overline{[\bar{A} \cup (A \cap B)] \cap [\bar{B} \cup (A \cap B)]}$. Но, кроме того, $a \in C$.

Значит, $a \in \overline{[\bar{A} \cup (A \cap B)] \cap [\bar{B} \cup (A \cap B)] \cap C}$, т. е. $a \in D$. Итак, $E \subseteq D$. Равенство (9) доказано. Ниже мы докажем (9) еще раз, более изящным способом.

Пример 6). Приведем пример доказательства равенства вида (7).

Докажем, что для любых множеств A, B

$$A \setminus [(A \cap B) \cup (A \setminus B)] = \varnothing. \tag{20}$$

Допустим, что $A \setminus [(A \cap B) \cup (A \setminus B)] \neq \varnothing$, т. е. что существует такое a, что

$$a \in A \setminus [(A \cap B) \cup (A \setminus B)]. \tag{21}$$

Из (21) и определения разности вытекает, что

$$a \in A \tag{22}$$

и

$$a \notin (A \cap B) \cup (A \setminus B). \tag{23}$$

Из (23)

$$a \notin A \cap B \tag{24}$$

и

$$a \notin A \setminus B. \tag{25}$$

Из (24) вытекает, что $a \notin A$ или $a \notin B$. В силу (22),

$$a \notin B. \tag{26}$$

Из (25) вытекает, что $a \notin A$ или $a \in B$. Первый случай противоречит (22), второй — (26).

В дальнейшем доказательства „равенств с множествами" мы чаще всего будем предоставлять читателю. Эти доказательства нужно научиться проводить легко и свободно.

При доказательстве „равенств с множествами" доказывающий из $a \in A \cup B$ иногда делает вывод: либо $a \in A$ и $a \notin B$, либо $a \in B$ и $a \notin A$, либо $a \in A$ и $a \in B$. Это, конечно, верный вывод. Разумеется, наряду с (1), верно и утверждение

$$x \in A \cup B \rightleftarrows x \in A \setminus B \text{ или } x \in B \setminus A \text{ или } x \in A \cap B.$$

Однако эта замена двух „случаев": 1) $a \in A$ и 2) $a \in B$ — тремя взаимно исключающими „случаями" 1) $a \in A \setminus B$,

2) $a \in B \setminus A$ и 3) $a \in A \cap B$ — обычно нисколько не помогает в доказательстве и совершенно не нужна.

Приведем примеры наиболее важных „тождеств с множествами“ (в них A, B, C — произвольные множества).

$$\text{(I)} \qquad A \cup B = B \cup A,$$
$$\text{(II)} \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C,$$
$$\text{(III)} \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$\text{(IV)} \qquad A \cup (A \cap B) = A,$$
$$\text{(V)} \qquad A \cup A = A.$$

Следующие пять тождеств получаются из (I) — (V) заменой $\bigcup$ на $\bigcap$ и наоборот:

$$\text{(I}'\text{)} \qquad A \cap B = B \cap A,$$
$$\text{(II}'\text{)} \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C,$$
$$\text{(III}'\text{)} \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$\text{(IV}'\text{)} \qquad A \cap (A \cup B) = A,$$
$$\text{(V}'\text{)} \qquad A \cap A = A.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная система множеств, E — произвольное множество. Тогда

$$\text{(VI)} \qquad E \setminus \bigcup_{X \in \mathfrak{M}} X = \bigcap_{X \in \mathfrak{M}} (E \setminus X),$$

$$\text{(VI}'\text{)} \qquad E \setminus \bigcap_{X \in \mathfrak{M}} X = \bigcup_{X \in \mathfrak{M}} (E \setminus X).$$

В частности,

$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B), \tag{27}$$
$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B). \tag{28}$$

Обычно свойства VI, VI′ формулируют для того случая, когда каждое из множеств системы $\mathfrak{M}$ есть подмножество

„универсума“ E. Тогда VI, VI′ пишут в виде

$$\overline{\bigcup_{X\in\mathfrak{M}} X} = \bigcap_{X\in\mathfrak{M}} \overline{X}, \tag{29}$$

$$\overline{\bigcap_{X\in\mathfrak{M}} X} = \bigcup_{X\in\mathfrak{M}} \overline{X} \tag{30}$$

и читают так: „дополнение к соединению есть пересечение дополнений“ и „дополнение к пересечению есть соединение дополнений“. Тождества (27), (28) в аналогичном случае принимают вид

$$\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}, \tag{31}$$

$$\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}. \tag{32}$$

Из VI, VI′ можно вывести так называемый *принцип двойственности*: если в некотором „тождестве с множествами“, содержащем только символы $\cup$, $\cap$, заменить $\cup$ на $\cap$ и наоборот, то мы получим снова верное утверждение. Если в „тождестве с множествами“, относящемся к подмножествам некоторого „универсума“ M и содержащем символы $\cup$, $\cap$, $\varnothing$, M, $^-$, заменить $\cup$ на $\cap$, $\varnothing$ на M и наоборот, то получится снова верное утверждение. Я не буду доказывать здесь и использовать дальше этот принцип и оставлю его лишь как эвристическое указание (ср. I—V и I′—V′). Отметим еще, что

(VII) $\quad A\setminus B = A\setminus(A\cap B),$

(VIII) $\quad A = (A\cap B)\cup(A\setminus B),$

(IX) $\quad (A\setminus B)\cap C = (A\cap C)\setminus(B\cap C).$

Тождества (I—IX) выражают наиболее важные свойства операций соединения, пересечения, разности. Любое из этих тождеств может быть доказано тем же методом „двух включений“, т. е. использованием теоремы (5) из § 2. Запоминать активно эти „основные тождества“ не требуется, но знание их позволяет использовать их при доказательстве других „равенств с множествами“ и доказывать эти „другие“ равенства не прямо, в лоб, двумя включениями, а более изящно.

Пример 7) Докажем еще раз (9) (см. пример 5). Сохраняя обозначения примера 5, преобразуем отдельно D и E

$$
\begin{aligned}
D &= \overline{[\bar{A}\cup(A\cap B)]\cap[\bar{B}\cup(A\cap B)]}\cap C = \\
&= \overline{[(\bar{A}\cup A)\cap(\bar{A}\cup B)]\cap[(\bar{B}\cup A)\cap(\bar{B}\cup B)]}\cap C = \\
&= \overline{[M\cap(\bar{A}\cup B)]\cap[(\bar{B}\cup A)\cap M]}\cap C = \\
&= \overline{[\bar{A}\cup B]\cap[\bar{B}\cup A]}\cap C = \\
&= \{\overline{[\bar{A}\cup B]}\cup\overline{[\bar{B}\cup A]}\}\cap C = \\
&= \{[\bar{\bar{A}}\cap\bar{B}]\cup[\bar{\bar{B}}\cap\bar{A}]\}\cap C = \\
&= \{[A\cap\bar{B}]\cup[B\cap\bar{A}]\}\cap C = \\
&= \{[A\cap\bar{B}]\cap C\}\cup\{[B\cap\bar{A}]\cap C\} = \\
&= (A\cap\bar{B}\cap C)\cup(B\cap\bar{A}\cap C) = \\
&= (A\cap\bar{B}\cap C)\cup(\bar{A}\cap B\cap C).
\end{aligned}
$$

В этой выкладке, кроме указанных выше свойств, мы использовали также, что

$$A\cup\bar{A} = M, \tag{33}$$

$$A\cap M = A \tag{34}$$

(Напомним, что в нашем примере $A\subseteq M$.),

$$\bar{\bar{A}} = A. \tag{35}$$

$E = [(A\cap C)\setminus(B\cap C)]\cup[(B\cap C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})]$. Преобразуем отдельно $(A\cap C)\setminus(B\cap C)$ и $(B\cap C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})$.

$$
\begin{aligned}
(A\cap C)\setminus(B\cap C) &= (A\setminus B)\cap C = \\
&= (A\cap\bar{B})\cap C = \\
&= A\cap\bar{B}\cap C.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&(B\cap C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})= \\
&=[(B\cap C)\cap\bar{A}]\cup[(B\cap C)\cap\bar{B}]\cup[(B\cap C)\cap\bar{C}]= \\
&=(B\cap C\cap\bar{A})\cup[(C\cap B)\cap\bar{B}]\cup[(B\cap C)\cap\bar{C}]= \\
&=(B\cap C\cap\bar{A})\cup[C\cap(B\cap\bar{B})]\cup[B\cap(C\cap\bar{C})]= \\
&=(B\cap C\cap\bar{A})\cup[C\cap\varnothing]\cup[B\cap\varnothing]= \\
&=(B\cap C\cap\bar{A})\cup\varnothing\cup\varnothing= \\
&=B\cap C\cap\bar{A}= \\
&=\bar{A}\cap B\cap C.
\end{aligned}$$

Мы использовали в преобразованиях, кроме вышеуказанных, тождества

$$A\setminus B=A\cap\bar{B}, \tag{36}$$

$$A\cap\bar{A}=\varnothing, \tag{37}$$

$$A\cap\varnothing=\varnothing, \tag{38}$$

$$A\cup\varnothing=A. \tag{39}$$

Итак, $E=(A\cap\bar{B}\cap C)\cup(\bar{A}\cap B\cap C)$. Следовательно, $D=E$. (9) доказано. Это доказательство равенства (9), конечно, изящнее, чем первое доказательство. Однако вряд ли верно утверждать, что оно короче, так как в полное доказательство следует, кроме проделанных преобразований, включить также доказательство всех тождеств, которые мы использовали в выкладках. Первое доказательство имеет то преимущество, что оно проводится универсальным методом, не требующим смекалки и памяти, в то время как второе существенно использует нашу инициативу (выбор пути в выкладках) и память. Я рекомендую читателю сравнить две „скобки“, к которым мы привели D и E во втором доказательстве, с двумя „случаями“, к которым мы приходили, доказывая каждое из „включений“, в первом доказательстве.

ЗАДАЧИ

Введем для сокращения следующие обозначения:

$$[a,\ b] \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\,\{x \in \mathbf{D} \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

$$(a,\ b) \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\,\{x \in \mathbf{D} \mid a < x < b\},$$

$$[a,\ b) \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\,\{x \in \mathbf{D} \mid a \leqslant x < b\},$$

$$(a,\ b] \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\,\{x \in \mathbf{D} \mid a < x \leqslant b\}.$$

1. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если

   a) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [3,\ 5]$, $\quad B \underset{\mathrm{Df}}{=} [2,\ 4]$,

   b) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [3,\ 5]$, $\quad B \underset{\mathrm{Df}}{=} (2,\ 4)$,

   c) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [3,\ 5]$, $\quad B \underset{\mathrm{Df}}{=} [2,\ 4)$,

   d) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [3,\ 5]$, $\quad B \underset{\mathrm{Df}}{=} (2,\ 4]$,

   e) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} (3,\ 5)$, $\quad B \underset{\mathrm{Df}}{=} (2,\ 4)$,

   f) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} (3,\ 5)$, $\quad B \underset{\mathrm{Df}}{=} [2,\ 4)$,

   g) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} (3,\ 5)$, $\quad B \underset{\mathrm{Df}}{=} (2,\ 4]$,

   h) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [3,\ 5)$, $\quad B \underset{\mathrm{Df}}{=} [2,\ 4)$,

   i) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [3,\ 5)$, $\quad B \underset{\mathrm{Df}}{=} (2,\ 4]$,

   j) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} (3,\ 5]$, $\quad B \underset{\mathrm{Df}}{=} (2,\ 4]$.

2. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если

   a) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\,\{x \in \mathbf{C} \mid x$ делится на $4\}$,

      $B \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\,\{x \in \mathbf{C} \mid x$ делится на $5\}$,

   b) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\,\{x \in \mathbf{C} \mid x$ делится на $4\}$,

      $B \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\,\{x \in \mathbf{C} \mid x$ делится на $6\}$.

3. Найти $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, если

a) $X_n \underset{\mathrm{Df}}{=} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$,

b) $X_n \underset{\mathrm{Df}}{=} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$,

c) $X_n \underset{\mathrm{Df}}{=} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$,

d) $X_n \underset{\mathrm{Df}}{=} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

4. Найти $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, если

a) $X_n \underset{\mathrm{Df}}{=} \left[0, \frac{1}{n}\right]$,

b) $X_n \underset{\mathrm{Df}}{=} \left(0, \frac{1}{n}\right)$,

c) $X_n \underset{\mathrm{Df}}{=} \left[0, \frac{1}{n}\right)$,

d) $X_n \underset{\mathrm{Df}}{=} \left(0, \frac{1}{n}\right]$.

5. Найти $\bigcup_{X \in \mathfrak{M}} X$ и $\bigcap_{X \in \mathfrak{M}} X$, если

a) $\mathfrak{M}$ — множество всех треугольников, вписанных в данный круг. (Каждый треугольник рассматривается как множество точек, лежащих внутри треугольника и на его контуре.)

b) $\mathfrak{M}$ — множество правильных треугольников, вписанных в данный круг.

6. Доказать, что пересечение произвольной системы выпуклых множеств на плоскости есть снова выпуклое множество. (Множество точек на плоскости называется *выпуклым*, если наряду с любыми двумя своими точками оно содержит каждую точку соединяющего их отрезка.) Верно ли аналогичное утверждение для соединения?

7. Доказать, что

a) $(A\cup B)\cap(C\cup D)=$
$=(A\cap C)\cup(A\cap D)\cup(B\cap C)\cup(B\cap D)$,

b) $A\cap(B\cup C\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)$,

c) $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$,

d) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

8. Пусть A, B, C — подмножества множества M. Доказать, что

a) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})$,

b) $\overline{A\setminus B}=\bar{A}\cup(A\cap B)$,

c) $\overline{(C\setminus A)\cap(C\setminus B)}=A\cup B\cup\bar{C}$.

9. Доказать, что

a) $A\subseteq B\rightleftarrows A\cup B=B$,

b) $A\subseteq B\rightleftarrows A\cap B=A$,

c) $A\setminus B=A\rightleftarrows A\cap B=\varnothing$,

d) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=\varnothing\rightleftarrows A=B$.

10. Найти необходимое и достаточное условие для

a) $(A\setminus B)\cup B=A$,

b) $(A\cup B)\setminus B=A$.

11. Доказать или опровергнуть, что

a) $(A\setminus B)\cup C=(A\cup C)\setminus(B\cup C)$,

b) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus B$,

c) $A\setminus B=C\rightleftarrows B\cup C=A$.

12. Чему равно $A\setminus(A\setminus B)$? $= A\cap B$

ГЛАВА III

КОРТЕЖ

§ 1. Кортеж

Введем термин „*кортеж*". Как и понятие множества, понятие кортежа будет у нас исходным, *неопределяемым* понятием. Половина дальнейшего текста этого параграфа (до определения понятия „кортеж над данным множеством") является описанием этого неопределяемого понятия.

Начнем с примеров. Можно говорить о кортеже людей, стоящих в очереди, о кортеже машин, о кортеже патронов в обойме, о кортеже букв в слове.

Вместо термина „кортеж" употребляют также, в качестве синонимов, термины „вектор", „набор".

Вместе с термином „кортеж" вводится (также неопределяемый) термин „*компонента*" (синоним: „координата"), точнее — первая, вторая и вообще i-я компонента. Число компонент кортежа называется его *длиной*. Кортеж длины s, первая компонента которого есть a_1, вторая — a_2, ..., s-я, последняя компонента — a_s, мы будем обозначать через

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle$$

($\langle$, $\rangle$ — две новые буквы: левая и правая „угловые скобки").

Компонентами кортежей могут быть любые „понятные" объекты, в том числе — множества и кортежи. Приведем несколько примеров кортежей.

$$\langle 8, 8, 8, 8, 8 \rangle$$

есть кортеж длины 5, каждая из пяти компонент которого есть число 8. Таким образом, в отличие от элементов множества, компоненты кортежа могут — полностью или частично — совпадать.

$$\langle 3,\ \varnothing,\ 2x-5,\ \{2,\ 1\},\ \langle 3,\ 6\rangle\rangle$$

есть также кортеж длины 5. Первая компонента этого кортежа — число 3, вторая — пустое множество, третья — многочлен $2x-5$, четвертая — двухэлементное множество $\{2, 1\}$, пятая — кортеж длины 2 с компонентами 3,6.

Кортежи длины 2 мы будем называть *парами* (иногда говорят — упорядоченными парами), кортежи длины 3 — *тройками*, длины 4 — *четверками* и т. д. Наряду с кортежами длины 2, 3, 4, ..., мы будем говорить также о кортежах длины 1

$$\langle a\rangle$$

и о *пустом кортеже*, кортеже длины 0. Пустой кортеж мы будем обозначать буквой Λ или просто

$$\langle\ \rangle.$$

Таким образом, длиной кортежа может быть у нас любое целое неотрицательное число (в том числе 0). Никаких „кортежей бесконечной длины“ у нас не будет.

Кортежи мы чаще всего будем обозначать строчными греческими буквами, компоненты кортежей — строчными латинскими буквами.

Условимся говорить, что кортежи α и β *равны*, и писать: $\alpha=\beta$, если α и β имеют одинаковую длину и каждая компонента кортежа α совпадает (равна) с компонентой кортежа β с тем же номером. О равных кортежах α и β мы будем также говорить, что α и β — *одинаковые* кортежи или что α и β — *один и тот же* кортеж. Если кортежи α и β не равны (т. е. либо имеют разную длину, либо какая-то компонента кортежа α отлична от соответствующей компоненты кортежа β), мы будем писать: $\alpha \neq \beta$.

Легко видеть, что для любых кортежей α, β, γ

$$\alpha=\alpha,$$

$$\text{если } \alpha=\beta, \text{ то } \beta=\alpha,$$

$$\text{если } \alpha=\beta \text{ и } \beta=\gamma, \text{ то } \alpha=\gamma.$$

Из нашего понимания равенства кортежей вытекает, что $\langle 3,5\rangle \neq \langle 5,3\rangle$; в отличие от множеств, порядок компонент в кортеже очень существен *). Очевидно,

$$\langle 3,\ \varnothing,\ 2x-5,\ \{2,\ 1\},\ \langle 3,\ 6\rangle\rangle = \langle 3,\ \varnothing,\ 2x-5,\ \{1,\ 2\},\ \langle 3,\ 6\rangle\rangle,$$

но

$$\langle 3,\ \varnothing,\ 2x-5,\ \{2,\ 1\},\ \langle 3,6\rangle\rangle \neq \langle 3,\ \varnothing,\ 2x-5,\ \{2,\ 1\},\ \langle 6,3\rangle\rangle.$$

Разумеется, следует различать a, $\langle a\rangle$ и $\{a\}$; $\langle a,\ b\rangle$ и $\{a,\ b\}$; $\langle a,\ b,\ c\rangle$ и $\{a,\ b,\ c\}$ и т. д. **). Заметим еще, что у нас, конечно, $\langle a,\ b,\ c\rangle \neq \langle a,\ \langle b,\ c\rangle\rangle$, $\langle a,\ b,\ c\rangle \neq \langle\langle a,\ b\rangle,\ c\rangle$, $\langle a,\ \langle b,\ c\rangle\rangle \neq \langle\langle a,\ b\rangle,\ c\rangle$, $\langle a,\ b,\ c,\ d\rangle \neq \langle a,\ \langle b,\ c,\ d\rangle\rangle$, $\langle a,\ b,\ c,\ d\rangle \neq \langle\langle a,\ b,\ c\rangle,\ d\rangle$ и т. д. [2]). При нашем понимании равенства кортежей

$$\langle a,\ b\rangle = \langle c,\ d\rangle \rightleftarrows a = c \text{ и } b = d, \tag{1}$$

$$\langle a_1,\ a_2,\ a_3\rangle = \langle b_1,\ b_2,\ b_3\rangle \rightleftarrows a_1 = b_1 \text{ и } a_2 = b_2 \text{ и } a_3 = b_3. \tag{2}$$

Кортеж α называется *кортежем* ***над*** *множеством* M, если каждая компонента кортежа α принадлежит M. Согласно обычному нашему словопониманию, пустой кортеж $\Lambda = \langle\ \ \rangle$ есть кортеж над *любым* (в том числе и пустым!) множеством.

Для любых целых неотрицательных n и k обозначим через $\mathfrak{A}_n^k$ (читается: «„а“ из n по k») число кортежей длины k над произвольным n-элементным множеством. Таким образом, выражение $\mathfrak{A}_n^k$ представляет собой двухместную числовую форму, зависящую от n и k. Область значений переменных n и k — целые неотрицательные числа, т. е. множество $\mathbf{N} \cup \{0\}$.

Поскольку у нас существует всего один кортеж длины 0, пустой кортеж Λ, причем этот кортеж является кортежем над любым множеством, при любом n

$$\mathfrak{A}_n^0 = 1. \tag{3}$$

---

*) Поэтому иногда кортежи называют „конечными упорядоченными множествами“, что не очень хорошо, так как компоненты кортежа, в отличие от элементов множества, могут повторяться.

**) Если a и b — действительные числа, то все выражения $\langle a,\ b\rangle$, $\{a,\ b\}$, $[a,\ b]$, $(a,\ b)$, $[a,\ b)$ и $(a,\ b]$ имеют различный смысл [1]).

Индукцией по k (при фиксированном n) легко доказать, что

$$\text{если } k \neq 0, \ \mathfrak{A}_n^k = n^k. \tag{4}$$

Базисом индукции является вытекающее непосредственно из смысла выражения $\mathfrak{A}_n^k$ утверждение

$$\mathfrak{A}_n^1 = n. \tag{5}$$

Итак, окончательно,

$$\mathfrak{A}_n^k = \begin{cases} 1 & k = 0, \\ n^k & k \neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Это же можно переписать и так:

$$\mathfrak{A}_n^k = \begin{cases} 1 & n = 0 \text{ и } k = 0, \\ n^k & n \neq 0 \text{ или } k \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Замечу в заключение, что понятие пары можно определить через понятие множества! Попробуйте придумать такое определение так, чтобы при этом осталось верным утверждение (1) *).

Задача. Доказать, что произвольное множество кортежей M является множеством кортежей над некоторым множеством L.

§ 2. Прямое произведение

Введем еще одну операцию над множествами. Эта операция будет несколько другой природы, чем операции, введенные в § 3 гл. II. Она будет использовать, в частности, понятие кортежа.

Прямым произведением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех *пар*, первая компонента которых принадлежит A, вторая принадлежит B. Прямое произведение множеств A и B обозначается через $A \times B$ (но не через $A \cdot B$ или AB) [1]).

---

*) Разумеется, и при этом уточнении постановки задачи задача остается очень неопределенной (что значит „определить одно понятие через другое“?).

Примеры: 1) Пусть $A \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, b\}$, $B \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, c, d\}$. Тогда

$$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle\}.$$

2) Как известно, пару чисел $\langle a, b\rangle$ *условились изображать* на координатной плоскости точкой, *абсцисса* которой равна *первой* компоненте пары, а *ордината* —

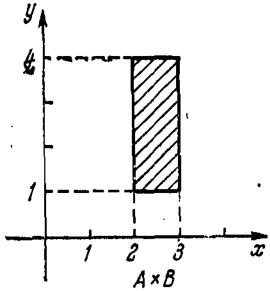


Рис. 6.

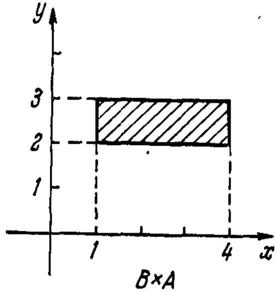


Рис. 7.

второй компоненте пары (можно было условиться наоборот). Поэтому, если $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [2, 3]$, а $B \underset{\mathrm{Df}}{=} [1, 4]$, то $A \times B$ на координатной плоскости изображается заштрихованным прямоугольником на рис. 6, а $B \times A$ — заштрихованным прямоугольником на рис. 7.

3) Если $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [2, 3]$, то $A \times \mathbf{D}$ на координатной плоскости изображается заштрихованной „полосой" на рис. 8, а $\mathbf{D} \times A$ — заштрихованной „полосой" на рис. 9.

Аналогично определяется прямое произведение трех, четырех и т. д. множеств. *Прямым произведением* множеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$ называется и через $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$ обозначается множество, состоящее из всех тех и только тех *кортежей* длины r, первая компонента которых принадлежит A_1, вторая принадлежит A_2, третья — A_3, ..., r-я компонента принадлежит A_r.

Легко видеть, что

$$A \times B = \varnothing \rightleftarrows A = \varnothing \text{ или } B = \varnothing. \qquad (1)$$

В частности, $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$. Аналогичное утверждение верно и для прямого произведения r множеств:

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r = \varnothing$ тогда и только тогда, когда хотя бы одно из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$ пусто.

Следует быть осторожным с интуицией, вызванной словом „произведение" в термине „прямое произведение". Большинство привычных нам из арифметики свойств умножения чисел не верны для прямого произведения множеств. Так, вообще говоря, $A \times B \neq B \times A$ и $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C \neq A \times B \times C$.

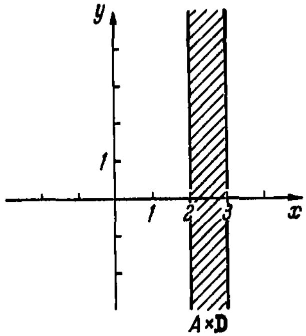


Рис. 8.

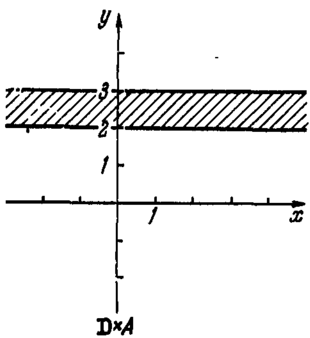


Рис. 9.

Используем операцию прямого произведения для определения *степеней* множества. Пусть M — произвольное множество. Для $s = 2, 3, 4, \ldots$ назовем *s-й степенью множества* M и обозначим через M^s прямое произведение s одинаковых множеств, равных M.

$$M^s \underset{\mathrm{Df}}{=} \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{s \text{ сомножителей}}. \qquad (2)$$

Специальными определениями положим

$$M^1 \underset{\mathrm{Df}}{=} M, \qquad (3)$$

$$M^0 \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\Lambda\}. \qquad (4)$$

Таким образом, выражение M^s определено у нас для любого целого неотрицательного s и любого множества M.

Из (2) и (3) вытекает, что

$$\text{если } s > 0, \quad \varnothing^s = \varnothing. \tag{5}$$

Из (4)

$$\varnothing^0 = \{\Lambda\}. \tag{6}$$

При $s \geqslant 2$ M^s — множество всех кортежей длины s над M. Значит, если M — n-элементное множество и $s \geqslant 2$, число элементов множества M^s равно $\mathfrak{A}_n^s = n^s$.

Пример. Если $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, b\}$, то $M^0 = \{\Lambda\}$, $M^1 = M = \{a, b\}$,

$$M^2 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\},$$

$$M^3 = \{\langle a, a, a\rangle, \langle a, a, b\rangle, \langle a, b, a\rangle, \langle a, b, b\rangle,$$
$$\langle b, a, a\rangle, \langle b, a, b\rangle, \langle b, b, a\rangle, \langle b, b, b\rangle\}.$$

Заметим, что если $M \neq \varnothing$, то $M^s \times M^t \neq M^{s+t}$. Если $M \neq \varnothing$ и $s \neq t$, то $M^s \times M^t \neq M^t \times M^s$. В частности,

$$M^2 \times M = (M \times M) \times M \neq M \times (M \times M) = M \times M^2.$$

Заметим еще, что если $A \subseteq M^s$, $B \subseteq M^t$ и $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, то $A \times B \nsubseteq M^{s+t}$.

Для произвольного множества M введем еще следующее обозначение:

$$M^\infty \underset{\mathrm{Df}}{=} \bigcup_{s=0}^{\infty} M^s. \tag{7}$$

Допуская некоторую вольность, можно сказать, что M^∞ — множество *всех* кортежей над M. Вольность состоит в том, что $M^1 = M$ *не есть* множество кортежей длины 1 над M.

Связь умножения чисел и прямого произведения множеств проявляется в следующем утверждении:

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_r$ — конечные множества. Пусть множество A_1 содержит n_1 элементов, множество A_2 содержит n_2 элементов, ..., множество A_r содержит n_r элементов. Тогда прямое произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$ множеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$ содержит

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r \tag{8}$$

элементов.

Это утверждение легко доказывается индукцией по r. Доказательство предоставляю читателю. Из (2) и (8) вытекает (для $k \geqslant 2$) (4) из § 1.

ЗАДАЧИ

1. Найти необходимое и достаточное условие для

a) $A \times B = B \times A$,
b) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$,
c) $(A \times B) \times C = A \times B \times C$,
d) $A \times (B \times C) = A \times B \times C$.

2. Доказать, что

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

3. Доказать, что если $A \subseteq M$ и $B \subseteq M$, то

$$A \times B = (A \times M) \cap (M \times B).$$

Изобразить это равенство на координатной плоскости для случая $M = \mathbf{D}$.

§ 3. Комбинаторика

Введем еще два термина. Кортеж α называется *размещением*, если все его компоненты различны. Таким образом, в частности, пустой кортеж и любой кортеж длины 1 являются размещениями. Из предыдущих определений вытекает смысл словосочетания „размещение над данным множеством". Размещение над данным множеством — это такой кортеж, который, во-первых, является размещением и, во-вторых, является кортежем над данным множеством (см. § 1).

Пусть M — *конечное* множество. Кортеж α называется *перестановкой над множеством* M, если он является размещением и его длина равна числу элементов множества M. Таким образом, перестановка над n-элементным множеством M — это кортеж длины n над множеством M, все компоненты которого различны. Полезно отметить, что у нас есть термины „кортеж“ и „кортеж над данным множеством“, „размещение“ и „размещение над данным множеством“, но у нас нет термина „перестановка“ и есть термин „перестановка над данным множеством“, причем этот последний термин имеет у нас смысл только в том случае, когда „данное множество“ конечно.

Для любых целых неотрицательных n и k обозначим через A_n^k (читается: «„а“ из n по k» *)) число размещений длины k над произвольным n-элементным множеством. Очевидно, при любом n

$$A_n^0 = 1 \tag{1}$$

и

$$\text{если } k > n, \ A_n^k = 0. \tag{2}$$

Непосредственно из смысла выражения A_n^k вытекает, что

$$A_n^1 = n. \tag{3}$$

Индукцией по k (при фиксированном n) легко доказывается, что

$$\text{если } 1 \leqslant k \leqslant n, \ A_n^k = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i). \tag{4}$$

Базисом индукции является утверждение (3). Итак, окончательно

$$A_n^k = \begin{cases} 1 & k = 0. \\ \prod\limits_{i=0}^{k-1} (n-i) & 1 \leqslant k \leqslant n. \\ 0 & k > n. \end{cases} \tag{5}$$

Впрочем, при $k = 0$ выражение $\prod\limits_{i=0}^{k-1} (n-i)$ превращается в $\prod\limits_{i=0}^{-1} (n-i)$, что по определению оператора $\prod$ (§ 2 гл. I)

*) Поскольку выражения $\mathfrak{A}_n^k$ и A_n^k читаются одинаково, приходится иногда читать их «„А готическое“ из n по k» и «„А латинское“ из n по k».

как раз и равно 1; при $k>n$ выражение $\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$ равно как раз 0, так как среди множителей $n-i$ будет в этом случае $n-n$. Следовательно, (5) можно переписать в виде

$$A_n^k=\prod_{i=0}^{k-1}(n-i). \tag{6}$$

Для любого целого неотрицательного n обозначим через P_n число перестановок над произвольным n-элементным множеством. Очевидно, $P_n=A_n^n$. Следовательно, из (6) получаем, что

$$P_n=n!. \tag{7}$$

Из (6), (7) и (15) из § 2 гл. II легко получить, что при любых n и k

$$A_n^k=C_n^k\cdot P_k. \tag{8}$$

Перейдем к комбинаторным задачам. В комбинаторной задаче обычно требуется подсчитать, выразить формулой [1]) число элементов некоторого конечного множества A. [Выше мы это уже проделали для множества k-элементных подмножеств n-элементного множества ((15) в § 2 гл. II), множества всех подмножеств n-элементного множества ((25) в § 2 гл. II), множества кортежей длины k над n-элементным множеством ((6) в § 1), прямого произведения r конечных множеств ((8) в § 2), множества размещений длины k над n-элементным множеством (6) и множества перестановок над n-элементным множеством (7).] Главным методом решения такой задачи является метод установления *взаимно-однозначного соответствия* между данным множеством A и некоторым вспомогательным множеством B, число элементов которого уже известно.

Что такое взаимно-однозначное соответствие? Вполне строго это понятие будет определено в § 2 гл. V. Пока же мы ограничимся только интуитивным описанием, вполне достаточным для решения задач. Если *каждому* элементу множества A поставлен в соответствие, соотнесен *один* элемент множества B так, что при этом

1) *разным* элементам множества A поставлены в соответствие *разные* элементы множества B и

2) *каждый* элемент множества B поставлен в соответствие хотя бы одному элементу множества A,

то говорят, что между множествами A и B *установлено взаимно-однозначное соответствие*. Очевидно, что если между двумя конечными множествами A и B удалось установить взаимно-однозначное соответствие, то число элементов множества A равно числу элементов множества B.

Таким образом, если мы сумеем установить взаимно-однозначное соответствие между данным множеством A, число элементов которого ищется, и вспомогательным множеством B, число элементов которого известно (скажем, равно t), то мы решим поставленную задачу, найдем число элементов множества A: оно будет тоже равно t.

Как уже было сказано выше, этот метод, метод введения вспомогательного множества B и установления взаимно-однозначного соответствия между данным множеством A и множеством B, является главным методом решения комбинаторных задач.

Решим две задачи. Эти задачи имеют — для комбинаторики — самостоятельный интерес.

Задача 1. Пусть имеется r (различных) объектов: $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и r (не обязательно различных) целых неотрицательных чисел: $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Обозначим через $\mathfrak{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ число кортежей, имеющих, в качестве компонент, n_1 раз — элемент a_1, n_2 раз — элемент a_2, ..., n_r раз — элемент a_r [2]). Таким образом, каждый из кортежей, число которых мы хотим сосчитать, имеет длину $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i$. Докажем, что

$$\mathfrak{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{r} n_i\right)!}{\prod\limits_{i=1}^{r} (n_i!)}. \tag{9}$$

Докажем сначала индукцией по r, что

$$\mathfrak{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \prod_{j=1}^{r} C^{n_j}_{\sum\limits_{i=j}^{r} n_i}, \tag{10}$$

а затем, что

$$\prod_{j=1}^{r} C^{n_j}_{\sum\limits_{i=j}^{r} n_i} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{r} n_i\right)!}{\prod\limits_{i=1}^{r} (n_i!)}. \tag{11}$$

При $r=1$ (базис индукции) правая часть формулы (10) дает

$$\prod_{j=1}^{1} C^{n_j}_{\sum\limits_{i=j}^{1} n_i} = C^{n_1}_{\sum\limits_{i=1}^{1} n_i} = C^{n_1}_{n_1} = 1,$$

но очевидно, что число $\mathfrak{P}_{n_1}$ кортежей, имеющих, в качестве компонент, n_1 раз — элемент a_1, равно 1 (такой кортеж один; это либо пустой кортеж, если $n_1=0$, либо кортеж $\langle \underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{n_1 \text{ раз}} \rangle$). Таким образом, при $r=1$ утверждение (10) справедливо. Допустим (предположение индукции), что утверждение (10) верно для некоторого $r \geqslant 1$, и докажем, что оно верно для $r+1$, т. е. что число $\mathfrak{P}_{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_r}$ кортежей, имеющих, в качестве компонент, n_0 раз — некоторый элемент a_0, n_1 раз — элемент a_1, n_2 раз — элемент a_2, ..., n_r раз — элемент a_r, может быть найдено по закону (10). Итак, нам надо доказать, что

$$\mathfrak{P}_{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_r} = \prod_{j=0}^{r} C^{n_j}_{\sum\limits_{i=j}^{r} n_i}. \tag{12}$$

Чтобы воспользоваться предположением индукции, «отщепим» от правой части (12) первый множитель.

Тогда равенство (12), которое нам надо доказать, перепишется в виде

$$\mathfrak{P}_{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_r} = C^{n_0}_{\sum\limits_{i=0}^{r} n_i} \cdot \prod_{j=1}^{r} C^{n_j}_{\sum\limits_{i=j}^{r} n_i}. \tag{13}$$

Но по предположению индукции верно (10). Следовательно, (13) можно переписать в виде

$$\mathfrak{P}_{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_r} = C^{n_0}_{\sum\limits_{i=0}^{r} n_i} \cdot \mathfrak{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}. \tag{14}$$

Вот в виде-то (14) мы и будем доказывать равенство (12). Если $\sum\limits_{i=0}^{r} n_i = 0$, т. е. $n_0 = n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 0$, утверждение (14) очевидно. Пусть $\sum\limits_{i=0}^{r} n_i > 0$. Обозначим через A множество кортежей, имеющих, в качестве компонент, n_0 раз — элемент a_0, n_1 раз — элемент a_1, n_2 раз — элемент $a_2, \ldots, n_r$ раз — элемент a_r. Таким образом, кортежи из A имеют длину $\sum\limits_{i=0}^{r} n_i$. Согласно нашим обозначениям, число элементов множества A равно $\mathfrak{P}_{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_r}$. Пусть $B \underset{\mathrm{Df}}{=} \{1, 2, 3, 4, \ldots, \sum\limits_{i=0}^{r} n_i\}$. Множество B содержит $\sum\limits_{i=0}^{r} n_i$ элементов. Элементы множества B мы будем ниже интерпретировать как номера компонент кортежей из A. Обозначим через D множество n_0-элементных подмножеств множества B. Согласно нашим обозначениям, множество D имеет $C^{n_0}_{\sum\limits_{i=0}^{r} n_i}$ элементов. Обозначим, далее, через E множество кортежей, имеющих, в качестве компонент, n_1 раз—элемент a_1, n_2 раз — элемент $a_2, \ldots, n_r$ раз — элемент a_r. Таким образом, кортежи из E имеют длину $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i$. Согласно нашим обозначениям, число элементов множества E равно $\mathfrak{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$. Положим, наконец, $F \underset{\mathrm{Df}}{=} D \times E$. В силу (8) из § 2, число элементов множества F равно $C^{n_0}_{\sum\limits_{i=0}^{r} n_i} \cdot \mathfrak{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$. Установим взаимно-однозначное соответствие между множествами A и F. Этим равенство (14) будет доказано.

Возьмем произвольный кортеж α из A. Поставим ему в соответствие пару $\langle K, \beta\rangle$, где K — множество номеров тех компонент кортежа α, которые равны a_0, а β — кортеж, который получается из α выбрасыванием всех элементов a_0 и стягиванием, с сохранением взаимного порядка, остальных элементов. Если, например, $r=2$, $n_0=3$, $n_1=2$, $n_2=4$ и

$$\alpha \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle a_0, a_2, a_2, a_1, a_0, a_2, a_0, a_2, a_1\rangle,$$

то

$$K=\{1, 5, 7\}, \ \beta=\langle a_2, a_2, a_1, a_2, a_2, a_1\rangle.$$

Очевидно, $\langle K, \beta\rangle \in F$. Итак, мы каждому элементу множества A поставили в соответствие один элемент множества F. Докажем теперь, что разные элементы множества A соответствуют (при нашем соответствии) разным элементам множества F. Пусть $\alpha_1 \in A$, $\alpha_2 \in A$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Пусть кортежу α_1 соответствует при нашем соответствии пара $\sigma_1 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle K_1, \beta_1\rangle$, кортежу α_2 — пара $\sigma_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle K_2, \beta_2\rangle$. Докажем, что $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Если $K_1 \neq K_2$, то $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Пусть теперь $K_1 = K_2$. Докажем, что тогда $\beta_1 \neq \beta_2$. Так как $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и кортежи α_1, α_2 имеют одинаковую длину, по крайней мере одна из компонент кортежа α_1 отлична от компоненты кортежа α_2 с тем же номером. Обозначим через s любое такое число, что s-я компонента кортежа α_1 отлична от s-й компоненты кортежа α_2. Так как $K_1 = K_2$, s-я компонента как кортежа α_1, так и кортежа α_2 отлична от a_0. Поскольку в кортежах α_1, α_2 левее s-й компоненты одинаковое число элементов a_0, а на s-х местах стоят разные элементы, отличные от a_0, $\beta_1 \neq \beta_2$. Докажем, наконец, что каждый элемент множества F поставлен нами в соответствие хотя бы одному элементу множества A. Пусть $\sigma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle K, \beta\rangle \in F$. Тогда кортежу $\alpha \in A$, у которого на местах с номерами из K стоит a_0, а на местах с номерами из $B \setminus K$ стоят в том же порядке компоненты кортежа β, соответствует, очевидно, по нашему закону именно σ. Равенство (14), а значит, и (10) доказано.

Докажем теперь (11). При доказательстве мы будем опираться на свойства оператора П, указанные в приложении 1.

$$\prod_{j=1}^{r} C^{n_j}_{\sum\limits_{i=j}^{r} n_i} = \prod_{j=1}^{r} \frac{\left(\sum\limits_{i=j}^{r} n_i\right)!}{n_j! \cdot \left(\sum\limits_{i=j}^{r} n_i - n_j\right)!} = \prod_{j=1}^{r} \frac{\left(\sum\limits_{i=j}^{r} n_i\right)!}{n_j! \cdot \left(\sum\limits_{i=j+1}^{r} n_i\right)!} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{j=1}^{r} \left[\left(\sum\limits_{i=j}^{r} n_i\right)!\right]}{\prod\limits_{j=1}^{r} (n_j!) \cdot \prod\limits_{j=1}^{r} \left[\left(\sum\limits_{i=j+1}^{r} n_i\right)!\right]} =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{r} n_i\right)! \cdot \prod\limits_{j=2}^{r} \left[\left(\sum\limits_{i=j}^{r} n_i\right)!\right]}{\prod\limits_{j=1}^{r} (n_j!) \cdot \prod\limits_{j=1}^{r-1} \left[\left(\sum\limits_{i=j+1}^{r} n_i\right)!\right] \cdot \left(\sum\limits_{i=r+1}^{r} n_i\right)!} =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{r} n_i\right)! \cdot \prod\limits_{j=2}^{r} \left[\left(\sum\limits_{i=j}^{r} n_i\right)!\right]}{\prod\limits_{j=1}^{r} (n_j!) \cdot \prod\limits_{j=1}^{r-1} \left[\left(\sum\limits_{i=j+1}^{r} n_i\right)!\right] \cdot 0!} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{r} n_i\right)! \cdot \prod\limits_{j=2}^{r} \left[\left(\sum\limits_{i=j}^{r} n_i\right)!\right]}{\prod\limits_{j=1}^{r} (n_j!) \cdot \prod\limits_{j=1}^{r-1} \left[\left(\sum\limits_{i=j+1}^{r} n_i\right)!\right]} =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{r} n_i\right)! \cdot \prod\limits_{j=2}^{r} \left[\left(\sum\limits_{i=j}^{r} n_i\right)!\right]}{\prod\limits_{j=1}^{r} (n_j!) \cdot \prod\limits_{j=2}^{r} \left[\left(\sum\limits_{i=(j-1)+1}^{r} n_i\right)!\right]} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{r} n_i\right)!}{\prod\limits_{j=1}^{r} (n_j!)} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{r} n_i\right)!}{\prod\limits_{i=1}^{r} (n_i!)}.$$

Пример. Пусть $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{3} n_i = 9$.

$$\mathfrak{P}_{n_1, n_2, n_3} = \mathfrak{P}_{3, 2, 4} = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = 1260.$$

Задача 2. Пусть имеется r ящиков и r (не обязательно различных) целых неотрицательных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Пусть имеется также $\sum_{i=1}^{r} n_i$ (различных) предметов. Пусть в первый ящик можно поместить n_1 предметов, во второй — n_2 предметов, ..., в r-й ящик — n_r предметов. Найдем число распределений $\sum_{i=1}^{r} n_i$ данных предметов по r ящикам. При этом два распределения считаются, естественно, различными, если хотя бы один из данных предметов при одном из этих распределений находится в одном ящике, а при другом из этих распределений — в каком-то другом ящике. Оказывается, искомое число равно $\mathfrak{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.

Указанный мною ответ подсказывает путь доказательства. Надо ввести какие-то объекты $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и установить взаимно-однозначное соответствие между множеством A распределений $\sum_{i=1}^{r} n_i$ предметов по r ящикам вместимостью, соответственно, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ и множеством B кортежей, имеющих, в качестве компонент, n_1 раз — элемент a_1, n_2 раз — элемент $a_2, \ldots, n_r$ раз — элемент a_r. В качестве объектов $a_1, a_2, \ldots, a_r$ возьмем числа $1, 2, \ldots, r$. Перенумеруем данные предметы (ящики условием задачи уже предполагаются перенумерованными). Возьмем произвольное распределение $\sigma \in A$. Поставим ему в соответствие такой кортеж α длины $\sum_{i=1}^{r} n_i$ над $\mathbf{N}$, у которого i-я компонента равна j тогда и только тогда, когда i-й предмет при распределении σ находится в j-м ящике. Очевидно, $\alpha \in B$. Очевидно также, что если $\sigma_1 \neq \sigma_2$, то для соответствующих кортежей $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Легко видеть, что произвольный кортеж $\alpha \in B$ соответствует в нашем соответствии такому распределению $\sigma \in A$, при котором i-й предмет находится в j-м ящике тогда и только тогда, когда i-я компонента кортежа α равна j (поскольку $\alpha \in B$, число, например, 1 имеется в α в качестве компоненты ровно n_1 раз, и поэтому ровно n_1 предметов попадут при распределении σ в первый ящик, и т. д.).

Многие комбинаторные задачи укладываются в „схему“ двух только что разобранных задач.

Задача 3. Подсчитаем коэффициент при $x_1^{s_1} \cdot x_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{s_k}$, получающийся после раскрытия скобок в выражении $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$. Перемножим n множителей $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, выбирая всеми возможными способами из первого множителя какое-нибудь x_{i_1}, из второго множителя какое-нибудь x_{i_2}, ..., из n-го множителя какое-нибудь x_{i_n} и *не переставляя* пока неизвестные, взятые из разных множителей. Выражение $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$ представится тогда в виде суммы произведений вида $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}$ (в каждом произведении n множителей). Искомый коэффициент равен, очевидно, числу тех произведений вида $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}$, в которых s_1 раз имеется множитель x_1, s_2 раз — множитель x_2, ..., s_k раз — множитель x_k $\left(\sum_{i=1}^{k} s_i = n\right)$. А это последнее число равно, очевидно, числу кортежей, имеющих, в качестве компонент, s_1 раз — символ x_1, s_2 раз — символ x_2, ..., s_k раз — символ x_k, т. е. равно $\mathfrak{P}_{s_1, s_2, \ldots, s_k}$.

Задача 4. Число раздач 36-карточной колоды четырем игрокам по 6 карт равно, очевидно, числу распределений 36 карт по 5 ящикам вместимостью, соответственно, 6, 6, 6, 6 и 12 (пятый ящик — оставшиеся карты), т. е. равно $\mathfrak{P}_{6, 6, 6, 6, 12}$.

Подытожим еще раз наш комбинаторный арсенал. В него входят:

1) формула для числа C_n^k k-элементных подмножеств n-элементного множества;

2) формула для числа всех подмножеств n-элементного множества;

3) формула для числа $\mathfrak{A}_n^k$ кортежей длины k над n-элементным множеством;

4) формула для числа A_n^k размещений длины k над n-элементным множеством;

5) формула для числа P_n перестановок над n-элементным множеством;

6) формула для числа элементов прямого произведения r конечных множеств;

7) формула для числа $\mathfrak{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ кортежей, имеющих, в качестве компонент, n_1 раз — элемент a_1, n_2 раз — элемент a_2, ..., n_r раз — элемент a_r;

8) формула для числа распределений $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i$ предметов по r ящикам вместимостью, соответственно, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ *).

Я ни в малейшей степени не утверждаю, конечно, что этот арсенал достаточен для решения *любой* комбинаторной задачи [3]). Однако при его помощи можно решать уже довольно много задач. Приведем несколько примеров.

Задача 5. Найти число размещений длины r над p-элементным множеством A, в каждом из которых, в качестве компонент, имеется каждый из q „выделенных" элементов множества A (и, возможно, другие элементы множества A).

Из условия задачи вытекает, что $q \leqslant p$ и что при $r < q$ или $r > p$ искомое число равно 0. Задача представляет интерес при $q \leqslant r \leqslant p$. Дадим три изложения решения этой задачи.

Первое изложение. Из r мест q мест для выделенных элементов могут быть выбраны C_r^q способами. Когда q мест для выделенных элементов выбраны, то q выделенных элементов на эти q выбранных мест могут быть поставлены P_q способами. И наконец, на оставшиеся $r-q$ мест $p-q$ невыделенных элементов могут быть поставлены A_{p-q}^{r-q} способами. Поскольку эти три „выбора": выбор мест для выделенных элементов, выбор порядка, в котором выделенные элементы ставятся на выбранные для них места, и выбор невыделенных элементов на оставшиеся места — могут быть проделаны независимо друг от друга, ответ задачи получается перемножением указанных выше трех чисел. Итак, искомое число размещений равно $C_r^q \cdot P_q \cdot A_{p-q}^{r-q}$. Как и полагается, найденная нами формула при $r < q$ и при $r > p$ дает 0.

*) Несмотря на то, что это число тоже равно $\mathfrak{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, удобно *отдельно* осознать наличие в своем арсенале этой формулы, так как многие задачи гораздо естественнее укладываются в „схему распределений по ящикам", чем в „схему кортежей с повторяющимися компонентами".

Равенство (8) позволяет записать ответ более компактно: $A_r^q \cdot A_{p-q}^{r-q}$. Назовем первое изложение изложением *„на первом уровне подробности“*.

Второе изложение. Пусть $A \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, $B \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ — множество выделенных элементов, $C \underset{\mathrm{Df}}{=} A \setminus B$ — множество „невыделенных“ $D \underset{\mathrm{Df}}{=} \{1,2, \ldots, r\}$, E — множество q-элементных подмножеств множества D, F — множество перестановок над множеством B, G — множество размещений длины $r-q$ над множеством C, $H \underset{\mathrm{Df}}{=} E \times F \times G$, I — множество размещений длины r над множеством A, в каждом из которых, в качестве компонент, имеется каждый из элементов множества B, т. е. множество, число элементов которого надо сосчитать. *Можно установить* взаимно однозначное соответствие между множествами I и H, поэтому множество I имеет столько же элементов, сколько множество H, т. е. $C_r^q \cdot P_q \cdot A_{p-q}^{r-q}$ элементов. Назовем второе изложение изложением *„на втором уровне подробности“*.

Третье изложение, или изложение *„на третьем уровне подробности“*, отличается от изложения „на втором уровне подробности“ тем, что декларированное во втором изложении „можно установить“ в третьем изложении действительно осуществляется. Итак, установим взаимно-однозначное соответствие между I и H. Возьмем произвольное размещение $\alpha \in I$. Поставим ему в соответствие тройку $\sigma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle K, \beta, \gamma \rangle$, где K — множество номеров тех компонент кортежа α, которые являются элементами множества B (т. е. выделенными элементами), β — перестановка над B, которая получается из α выбрасыванием всех элементов из C (т. е. невыделенных элементов) и стягиванием, с сохранением взаимного порядка, остальных элементов, и γ — размещение над C, которое получается из α выбрасыванием всех элементов из B и стягиванием, с сохранением взаимного порядка, остальных элементов. Если, например, $p=5$, $q=2$, $r=4$ и $\alpha \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle a_5, a_2, a_3, a_1 \rangle$, то $K=\{2,4\}$, $\beta=\langle a_2, a_1 \rangle$, $\gamma=\langle a_5, a_3 \rangle$. Очевидно, $\sigma \in H$. Пусть теперь кортежу $\alpha_1 \in I$ соответствует тройка

$\sigma_1 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle K_1, \beta_1, \gamma_1 \rangle$, кортежу $\alpha_2 \in I$ соответствует тройка $\sigma_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle K_2, \beta_2, \gamma_2 \rangle$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Докажем, что $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Если $K_1 \neq K_2$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Если $\beta_1 \neq \beta_2$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Допустим, что $K_1 = K_2$ и $\beta_1 = \beta_2$. Докажем, что тогда $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Так как $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и кортежи α_1, α_2 имеют одинаковую длину, по крайней мере одна из компонент кортежа α_1 отлична от компоненты кортежа α_2 с тем же номером. Обозначим через s любое такое число, что s-я компонента кортежа α_1 отлична от s-й компоненты кортежа α_2. Так как $K_1 = K_2$ и $\beta_1 = \beta_2$, s-я компонента как кортежа α_1, так и кортежа α_2 принадлежит C. Поскольку в кортежах α_1, α_2 левее s-й компоненты одинаковое число элементов из B, а на s-х местах стоят разные элементы из C, $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Возьмем, наконец, произвольную тройку $\sigma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle K, \beta, \gamma \rangle$ из H. Пусть α — такой кортеж над A длины r, у которого на местах с номерами из K стоят — в том же порядке, что и в β — элементы из B, а на остальных $r - q$ местах стоят — в том же порядке, что в γ — те элементы из C, которые являются компонентами размещения γ. Очевидно, что $\alpha \in I$ и что в нашем соответствии кортежу α соответствует как раз σ. Доказательство закончено.

Сделаем два близких по содержанию принципиальных замечания. Является ли изложение „на первом уровне подробности“ доказательством или оно является чем-то вроде „идеи доказательства“? Во-первых, подобный же вопрос можно поставить и по поводу второго и третьего изложения. Во-вторых, ни на какой из этих вопросов *нельзя дать однозначного ответа*, так как у нас нет строгого понятия доказательства, нет определения термина «доказательство». Современная математика умеет уточнять понятие доказательства, делать его более строгим. Однако в нашем изложении мы останемся на том уровне употребления этого понятия, на котором века стояло и чаще всего и сейчас стоит бо́льшая часть математиков. ***Доказательство — это рассуждение, которое убеждает.*** Этой не очень определенной концепции в большинстве случаев оказывается достаточно.

Второе замечание. Являются ли три наших изложения тремя *разными решениями* одной и той же задачи или тремя *разными изложениями* одного и того же решения? Очевидно, до тех пор, пока у нас не уточнено понятие решения, до тех пор, пока не определено, что такое „одинаковые" и что такое „разные" решения, поставленный вопрос является схоластическим и никакого *однозначного ответа не допускает*. Как ясно из написанного выше, в данном конкретном случае мне больше импонирует считать их тремя разными изложениями одного решения. Это замечание следует иметь в виду и впредь, когда будет говориться о „разных решениях" и „разных изложениях".

Ниже, после задачи 6, будет указано второе решение задачи 5 (которое также можно изложить „на трех уровнях подробности"). Любопытно, что если в условии задачи 5 слово „размещений" заменить на слово „кортежей", задача сразу станет намного более трудной. Попробуйте решить!

Задача 6. Каким числом способов на собрании, на котором присутствует n человек, может быть выбран президиум, состоящий из председателя, секретаря и еще $k-2$ человек? Президиумы, состоящие из одних и тех же k человек, но имеющие разных председателей или разных секретарей, считаются, разумеется, разными президиумами. Несмотря на то, что эта задача явно легче предыдущей, ее трудно, по-видимому, решить по „схеме прямого произведения". Мы решим ее по „схеме разбиения на классы". Дадим два изложения решения: на первом и на втором уровне подробности.

Первое изложение. Из n человек президиум в k человек можно выбрать C_n^k способами. Из каждого президиума председателя и секретаря можно выбрать A_k^2 способами. Следовательно, искомое число президиумов равно $C_n^k \cdot A_k^2$.

Второе изложение. Обозначим множество президиумов, число элементов которого надо сосчитать, через A. Разобьем множество A на подмножества, или, как мы предпочтем в подобных случаях говорить, на классы, по следующему принципу: два президиума мы отнесем в один класс, если они состоят из одних и тех же k человек (и следовательно, отличаются только председателем или секретарем). *Легко установить* взаимно-однозначное соответствие между множеством $\mathfrak{M}$ классов и множеством k-элементных подмножеств n-элементного множества людей, присутствовавших на собрании. Следовательно, в множество $\mathfrak{M}$ входит C_n^k элементов-классов. Рассмотрим произвольный класс из $\mathfrak{M}$. Президиумы этого класса состоят из одних и тех же k человек и отличаются только председателем или секретарем, причем все президиумы, состоящие из тех же k человек, входят в рассматриваемый класс. *Легко установить* взаимно-однозначное соответствие между рассматриваемым классом президиумов и множеством размещений длины 2 над множеством из тех k человек, из которых состоят президиумы рассматриваемого класса. Следовательно, в рассматриваемый класс входит A_k^2 президиумов. Но мы рассматривали произвольный класс из $\mathfrak{M}$. Значит, в каждый класс из $\mathfrak{M}$ входит A_k^2 президиумов. Итак, мы разделили множество $\mathfrak{M}$ на C_n^k (непересекающихся!) классов, в каждый из которых входит A_k^2 президиумов. Следовательно, всего в $\mathfrak{M}$ входит $C_n^k \cdot A_k^2$ президиумов.

Метод „разбиения на классы“ является одним из главных методов решения комбинаторных задач. Например, предыдущую задачу также можно было решать „разбиением на классы“, разбивая множество размещений I (я сохраняю обозначения второго изложения) на классы таких размещений, в которых элементы из B стоят на одинаковых местах (всего будет C_r^q классов), и разбивая затем каждый класс на подклассы таких размещений, в которых элементы из B на „местах своего класса“ стоят в одинаковом порядке (в каждом классе будет P_q подклассов, в каждом подклассе A_{p-q}^{r-q} размещений). Можно также ухитриться решить задачу 5 одним разбиением, обойдясь без подклассов (см. более компактную форму ответа: $A_r^q \cdot A_{p-q}^{r-q}$ в конце первого изложения). Иногда, когда приходится при решении много раз разбивать на классы, подклассы и т. д., трудно обойтись рафинированной математической терминологией (классы, подклассы). В этих случаях приходится привлекать более вольную терминологию.

Задача 7. Найти число таких раздач 36-карточной колоды четырем игрокам: A, B, C, D по 9 карт, при которых у игрока A — a пик, у игрока B — b пик, у игрока C — c пик и у игрока D — d пик. (Следовательно, $a+b+c+$ $+d=9$.) Изложим решение этой задачи сразу на втором уровне подробности.

Обозначим множество раздач, число элементов которого надо сосчитать, через K. Разобьем множество K на „улицы“, относя две раздачи к одной „улице“, если при этих раздачах A имеет одни и те же a пик. „Улиц“ будет C_9^a. Фиксируем произвольную „улицу“. Разобьем ее на „кварталы“, относя две раздачи рассматриваемой „улицы“ к одному „кварталу“, если при этих раздачах A имеет одинаковые карты. Так как во всех раздачах рассматриваемой „улицы“ у A a карт одни и те же (пики), а остальные $9-a$ карт — не пики, „кварталов“ в рассматриваемой „улице“ будет $C_{36-9}^{9-a}=C_{27}^{9-a}$. Итак, в каждой „улице“ C_{27}^{9-a} „кварталов“. Следовательно, всего $C_9^a \cdot C_{27}^{9-a}$ „кварталов“. Фиксируем произвольный „квартал“. Разобьем его на „дома“, относя две раздачи рассматриваемого „квартала“ к одному „дому“, если при этих раздачах B имеет одни и те же b пик. Так как во всех раздачах рассматриваемого „квартала“ у A a пик одни и те же (и даже все 9 карт одни и те же), „домов“ в рассматриваемом „квартале“ будет C_{9-a}^b. Итак, в каждом „квартале“ C_{9-a}^b „домов“. Следовательно, всего $C_9^a \cdot C_{27}^{9-a} \cdot C_{9-a}^b$ „домов“. Фиксируем произвольный „дом“. Разобьем его на „квартиры“, относя две раздачи рассматриваемого „дома“ к одной „квартире“, если при этих раздачах B имеет одинаковые карты. Так как во всех раздачах рассматриваемого „дома“ у A одни и те же $9-a$ не пик (как, впрочем, и остальные a пик), а у B одни и те же b пик, „квартир“ в рассматриваемом „доме“ будет $C_{27-(9-a)}^{9-b}=C_{18+a}^{9-b}$. Итак, в каждом „доме“ C_{18+a}^{9-b} „квартир“. Следовательно, всего $C_9^a \cdot C_{27}^{9-a} \cdot C_{9-a}^b \cdot C_{18+a}^{9-b}$ „квартир“. Фиксируем, наконец, произвольную „квартиру“ и разобьем ее на „комнаты“, относя две раздачи рассматриваемой „квартиры“ к одной „комнате“, если при этих раздачах C имеет одни и те же c пик. Так как во всех раздачах рассматриваемой „квартиры“ A имеет одни и те же a пик и B имеет одни и те же b пик (впрочем, остальные $9-a$ карт у A и $9-b$ карт у B во всех раздачах рассматриваемой „квартиры“ тоже одни и те же), „комнат“ в рассматриваемой „квартире“ будет $C_{9-(a+b)}^c=C_{9-a-b}^c$. Итак, в каждой „квартире“ C_{9-a-b}^c

„комнат“. Следовательно, всего $C_9^a \cdot C_{27}^{9-a} \cdot C_{9-a}^b \cdot C_{18+a}^{9-b} \cdot C_{9-a-b}^c$ „комнат“. Фиксируем произвольную „комнату“. Во всех раздачах рассматриваемой „комнаты“ у A и B — одни и те же карты (в частности, одни и те же $9-a$ и $9-b$ не пик) и одни и те же c пик у C. Легко установить взаимно-однозначное соответствие между рассматриваемой „комнатой“ раздач и множеством $(9-c)$-элементных подмножеств множества из $27-[(9-a)+(9-b)]=9+a+b$ не пик (тех не пик, которые входят в раздачи игроков C и D в рассматриваемой „комнате“). Значит, в каждой „комнате“ C_{9+a+b}^{9-c} раздач. Следовательно, всего раздач во всех „комнатах“, т. е. в множестве K

$$C_9^a \cdot C_{27}^{9-a} \cdot C_{9-a}^b \cdot C_{18+a}^{9-b} \cdot C_{9-a-b}^c \cdot C_{9+a+b}^{9-c}.$$

Впрочем, решая задачу по-другому, можно по „схеме прямого произведения“ *сразу* получить ответ

$$\mathfrak{P}_{a,\, b,\, c,\, d} \cdot \mathfrak{P}_{9-a,\, 9-b,\, 9-c,\, 9-d}.$$

В двух предыдущих задачах при разбиении на классы каждый класс состоял из одинакового количества подклассов, каждый подкласс — из одинакового количества подподклассов и т. д. Поэтому мы числа классов и подклассов в классе *перемножали*. В противном случае умножение уступает место сложению.

З а д а ч а 8. Из коллектива, в который входит s мальчиков и s девочек, надо выбрать делегацию из равного количества мальчиков и девочек (количество мальчиков и, равное ему, количество девочек в делегации может быть любым — от 0 до s; крайние случаи: 0 и s — также не исключаются). Каким числом способов это можно сделать?

Разобьем множество A делегаций на классы, относя две делегации к одному классу, если в них одинаковое количество мальчиков (и, следовательно, одинаковое количество девочек). Поскольку возможное число мальчиков в делегации равно любому числу от 0 до s, классов будет $s+1$. Фиксируем произвольное i: $0 \leqslant i \leqslant s$ и рассмотрим класс, в который входят делегации с i мальчиками и i девочками. Легко установить взаимно-однозначное соответствие между рассматриваемым классом делегаций и прямым произведением $B \times C$ множества B i-элементных подмножеств s-элементного множества мальчиков и множества C i-элементных подмножеств s-элементного множества девочек. Следовательно, в рассматриваемом классе $(C_s^i)^2$ делегаций. В классе, в который входят делегации с i мальчиками (и i девочками), $(C_s^i)^2$ делегаций. Это верно для любого i от 0 до s. Значит, всего в множестве A $\sum_{i=0}^{s} (C_s^i)^2$ делегаций.

Решая задачу по другой логической схеме, можно *сразу* получить ответ в другой форме: C_{2s}^s.

Следовательно, для любого s имеет место такое „комбинаторное равенство":

$$\sum_{i=0}^{s} (C_s^i)^2 = C_{2s}^s. \tag{15}$$

Равенство (15) можно, конечно, доказать и по-другому. Путь доказательства „комбинаторных равенств" при помощи двух решений какой-нибудь специально подобранной комбинаторной задачи является чрезвычайно плодотворным и очень изящным путем.

На этом я закончу рассмотрение отдельных комбинаторных задач. Рассматривая их, я ни в малейшей степени не ставил себе целью перечислить *все* типы комбинаторных задач или указать какой-нибудь универсальный метод решения *любой* комбинаторной задачи, что, конечно, невозможно. Я хотел лишь указать *некоторые важные* виды рассуждений и доказательств, полезные в комбинаторике.

§ 4. Проекция

Введем еще одну операцию над множествами — операцию проектирования. В отличие от ранее введенных операций, эта операция будет одноместной: она будет применяться не к двум множествам, не к парам множеств, а к одному отдельно взятому множеству. Кроме того, эта операция не всегда, не к любому множеству будет применима: она будет применима только к множествам кортежей одинаковой длины. Проекция множества определяется через проекцию кортежа.

Определим понятие „*проекция кортежа*“. Определение будет многоступенчатым.

I. Пусть $\alpha \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle$ — кортеж длины $s > 0$.

1) Пусть $1 \leqslant i \leqslant s$. *Проекцией кортежа* α *на* i*-ю ось* называется и через $\text{пр}_i\alpha$ обозначается i-я компонента кортежа α, т. е. a_i. Таким образом,

$$\text{пр}_i\alpha \underset{\mathrm{Df}}{=} a_i. \tag{1}$$

2) Пусть $2 \leqslant q \leqslant s$ и $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{q-1} < i_q \leqslant s$. *Проекцией кортежа* α *на оси с номерами* $i_1, i_2, \ldots, i_{q-1}, i_q$ называется и через $\text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q}\alpha$ обозначается кортеж $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_q} \rangle$. Таким образом,

$$\text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q}\alpha \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_q} \rangle. \tag{2}$$

3) *Проекцией кортежа* α *на пустое множество осей* называется и через $\text{пр}_{\varnothing}\alpha$ обозначается пустой кортеж Λ. Таким образом,

$$\text{пр}_{\varnothing}\alpha \underset{\mathrm{Df}}{=} \Lambda. \tag{3}$$

II. *Проекцией* пустого *кортежа* Λ *на пустое множество осей* называется и через $\text{пр}_{\varnothing}\Lambda$ обозначается пустой кортеж Λ. Таким образом,

$$\text{пр}_{\varnothing}\Lambda \underset{\mathrm{Df}}{=} \Lambda. \tag{4}$$

Определения I3 и II можно, конечно, объединить. *Проекцией* произвольного *кортежа* α (пустого или нет) *на пустое множество осей* называется и через $\text{пр}_{\varnothing}\alpha$ обозначается пустой кортеж Λ. Таким образом, для любого кортежа α, в том числе и для пустого, имеет место (3).

Если, например,

$$\alpha \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle 1, 3, 2, 3, 5, 4 \rangle,$$

то $\text{пр}_1\alpha = 1$, $\text{пр}_2\alpha = \text{пр}_4\alpha = 3$; $\text{пр}_{1,3}\alpha = \langle 1, 2 \rangle$, $\text{пр}_{1,2}\alpha = \text{пр}_{1,4}\alpha = \langle 1, 3 \rangle$, $\text{пр}_{2,6}\alpha = \langle 3, 4 \rangle$; выражение $\text{пр}_{6,2}\alpha$ смысла не имеет и ничего не обозначает! Выражения $\text{пр}_{2,6,6}\alpha$

или $\text{пр}_{2,7}\alpha$ также смысла не имеют. Отметим еще, что $\text{пр}_{1,2,3,4,5,6}\alpha=\alpha$. И вообще, если α — кортеж длины $s>0$, то

$$\text{пр}_{1,2,3,\ldots,s}\alpha=\alpha.$$

Определим теперь понятие „*проекция множества*". Как уже было указано выше, это понятие нами будет определено только для того случая, когда проектируемое множество состоит из кортежей, причем все эти кортежи имеют одинаковую длину. Хотя мы вынуждены определить понятие проекции множества по столь же многоступенчатой схеме, как и понятие проекции кортежа, суть его не формально можно выразить очень коротко: проекция множества M — это множество проекций кортежей из M. Дадим теперь формальное определение.

I. Пусть M — множество кортежей длины $s>0$.

1) Пусть $1\leqslant i\leqslant s$. *Проекцией множества M на i-ю ось* называется и через $\text{пр}_i M$ обозначается множество проекций кортежей из M на i-ю ось.

2) Пусть $2\leqslant q\leqslant s$ и $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_{q-1}<i_q\leqslant s$. *Проекцией множества M на оси с номерами $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_{q-1}, i_q$* называется и через $\text{пр}_{i_1,i_2,\ldots,i_q}M$ обозначается множество проекций кортежей из M на оси с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_q$.

3) *Проекцией множества M на пустое множество осей* называется и через $\text{пр}_{\varnothing}M$ обозначается множество проекций кортежей из M на пустое множество осей.

II. Пусть M — множество кортежей длины 0, т. е. множество пустых кортежей (это *не означает*, что $M=\{\Lambda\}$ — см. ниже). *Проекцией множества M на пустое множество осей* называется и через $\text{пр}_{\varnothing}M$ обозначается множество проекций кортежей из M на пустое множество осей.

Как и выше, определения I3 и II можно объединить. *Проекцией* произвольного *множества M* кортежей длины s ($s\geqslant 0$) *на пустое множество осей* называется и через $\text{пр}_{\varnothing}M$ обозначается множество проекций кортежей из M на пустое множество осей.

Согласно нашему словопониманию, пустое множество $\varnothing$ является множеством кортежей длины 0, множеством кортежей длины 1, множеством кортежей длины 2 и т. д. Поэтому для любого натурального числа i осмысленно выражение $\text{пр}_i\varnothing$; для любых $q\ (q \geqslant 2)$ натуральных чисел $i_1, i_2, \ldots, i_q$ таких, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_q$, осмысленно выражение $\text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q}\varnothing$; осмысленно также выражение $\text{пр}_\varnothing \varnothing$. Легко видеть, что, грубо говоря, $\text{пр}\,\varnothing = \varnothing$. Точнее

$$\text{пр}_i\varnothing = \varnothing, \tag{5}$$

$$\text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q}\varnothing = \varnothing, \tag{6}$$

$$\text{пр}_\varnothing\varnothing = \varnothing. \tag{7}$$

Если в (6) допускать $q = 1$, то (5) будет частным случаем (6). Рассмотрим второй крайний случай: проекцию на пустое множество осей. Очевидно, если $M \neq \varnothing$, то $\text{пр}_\varnothing M = \{\Lambda\}$. В частности, когда M — *не пустое* множество кортежей длины 0, т. е. $M \underset{\text{Df}}{=} \{\Lambda\}$, также $\text{пр}_\varnothing M = \{\Lambda\}$ (см. (4)). Если же $M \underset{\text{Df}}{=} \varnothing$, то $\text{пр}_\varnothing M = \varnothing$ (см. (7)). Итак,

$$\text{пр}_\varnothing M = \begin{cases} \{\Lambda\}, & M \neq \varnothing, \\ \varnothing, & M = \varnothing. \end{cases} \tag{8}$$

В равенстве (7) „скрещиваются“ оба крайних случая.

Пусть для примера

$$M \underset{\text{Df}}{=} \{\langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle, \langle 2, 1, 3, 5, 5\rangle, \langle 3, 3, 3, 3, 3\rangle, \\ \langle 3, 2, 3, 4, 3\rangle, \langle a, b, a, 1, a\rangle\}.$$

Тогда $\text{пр}_2 M = \{2, 1, 3, b\}$; $\text{пр}_{2,4} M = \{\langle 2, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle b, 1\rangle\}$; выражение $\text{пр}_{4,2} M$ смысла не имеет и ничего не обозначает! Не верно, в частности, что $\text{пр}_{4,2} M = \varnothing$. Выражения $\text{пр}_{2,5,5} M$ и $\text{пр}_{2,6} M$ также смысла не имеют. Отметим еще, что $\text{пр}_{1,2,3,4,5} M = M$. И вообще, если M — множество кортежей длины $s > 0$, то

$$\text{пр}_{1, 2, 3, \ldots, s} M = M.$$

Если $M \underset{\text{Df}}{=} \{\langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle, \langle 2, 1, 3, 5, 5\rangle, \langle 3, 3, 3, 3\rangle\}$, то выражения $\text{пр}_2 M$, $\text{пр}_{2,4} M$ и т. д. смысла не имеют (!), так как понятие проекции множества определялось у нас только для того случая, когда проектируемое множество состоит из кортежей *одинаковой* длины. Если $\alpha \underset{\text{Df}}{=} \langle 2, 1, 3, 5, 5\rangle$ и $M \underset{\text{Df}}{=} \{\alpha\}$, то $\text{пр}_{2,4}\alpha = \langle 1, 5\rangle$, $\text{пр}_{2,4}M = \{\langle 1, 5\rangle\}$. Разумеется, не верно, что $\text{пр}_{2,4}\alpha = \text{пр}_{2,4}M$.

Отметим еще такое тривиальное утверждение: $\alpha \in \text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q} M$ тогда и только тогда, когда существует такое $\beta \in M$, что $\alpha = \text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q}\beta$; аналогично — для проекций на одну ось.

Пусть M — произвольное множество, $s \geqslant 2$. Тогда множество M^s состоит из кортежей длины s и, следовательно, его можно проектировать. Легко видеть, что для любого натурального числа i такого, что $1 \leqslant i \leqslant s$,

$$\text{пр}_i M^s = M; \tag{9}$$

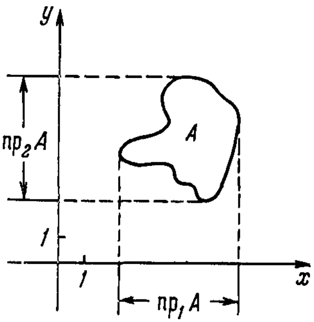


Рис. 10.

для любых $q\,(q \geqslant 2)$ натуральных чисел $i_1, i_2, \ldots, i_q$ таких, что $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leqslant s$,

$$\text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q} M^s = M^q. \tag{10}$$

В тех же обозначениях

$$\text{если } A \subseteq M^s, \text{ то } \text{пр}_i A \subseteq M, \tag{11}$$

$$\text{если } A \subseteq M^s, \text{ то } \text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q} A \subseteq M^q.$$

На рис. 10 показано множество $A \subseteq \mathbf{D}^2$ и его проекции на первую и вторую оси.

ЗАДАЧИ

1. Пусть A и B — множества кортежей длины s и $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leqslant s$. Доказать или опровергнуть, что

a) $\text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q}(A \cup B) = \text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q} A \cup \text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q} B$,

b) $\text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q}(A \cap B) = \text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q} A \cap \text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q} B$,

c) $\text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q}(A \setminus B) = \text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q} A \setminus \text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_q} B$.

2. Пусть M — произвольное множество и s — целое неотрицательное число. Найти необходимое и достаточное условие для

$$\text{пр}_{\varnothing} M^s = M^0.$$

3. Чему равно $\text{пр}_{2,4}(M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4 \times M_5)$?

4. Доказать или опровергнуть, что

a) $\text{пр}_1(A \times B) = A$,

b) $\text{пр}_2(A \times B) = B$,

c) если $C \subseteq A \times B$, то $\text{пр}_1 C \subseteq A$,

d) если $C \subseteq A \times B$, то $\text{пр}_2 C \subseteq B$.

5. Чему равно число всевозможных проекций (на любое число осей) кортежа длины s?

6. Чему равно число всевозможных проекций размещения длины s?

7. Чему равно число проекций конечного множества кортежей длины s на заданные оси?

§ 5. График

Одним из важнейших понятий является понятие графика. Оно будет очень интенсивно использоваться в гл. V—VII.

График — это множество пар, т. е. множество, каждый элемент которого является парой. Еще раз, по-другому: множество P называется *графиком*, если каждый его элемент есть пара.

Графиками, например, являются множества $\varnothing$ (*пустой график*), $\{\langle a, b\rangle\}$, $\{\langle a, 1\rangle, \langle\varnothing, b\rangle, \langle 2, \Lambda\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$. Если M — произвольное множество, то M^2 и любое $C \subseteq M^2$ являются графиками. В частности, графиком является множество $\mathbf{D}^2$ и любое его подмножество. На рис. 11—16 изображены примеры графиков, являющихся подмножествами множества $\mathbf{D}^2$. Из этих рисунков видно, что наше понятие графика является обобщением известного из школы понятия графика функции*). Если A и B — произвольные

*) Еще более „видно" это станет в гл. V—VI.

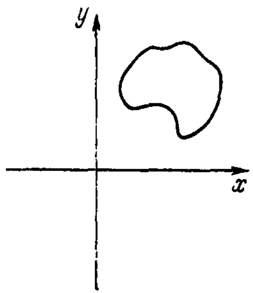


Рис. 11.

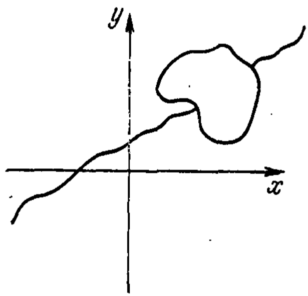


Рис. 12.

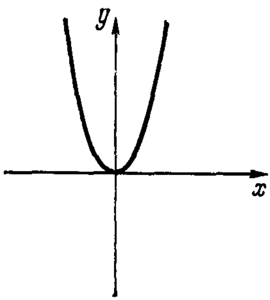


Рис. 13.

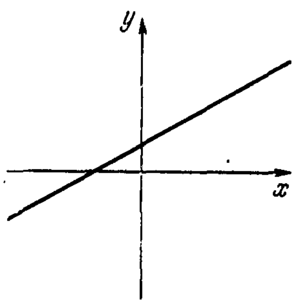


Рис. 14.

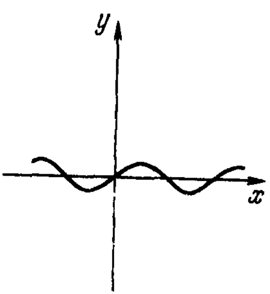


Рис. 15

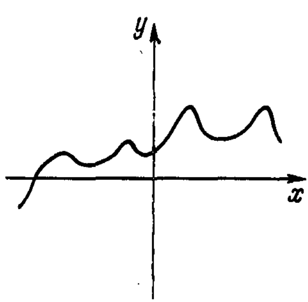


Рис. 16.

множества, то $A \times B$ и любое $C \subseteq A \times B$ являются графиками.

Областью определения графика P называется множество $\text{пр}_1 P$. *Областью значений графика* P называется множество $\text{пр}_2 P$ *). На рис. 10 изображены область определения и область значений некоторого графика $A \subseteq \mathbf{D}^2$. Областью определения и областью значений трех приведенных выше для примера графиков являются соответственно $\varnothing$ и $\varnothing$; $\{a\}$ и $\{b\}$; $\{a, \varnothing, 2, 3\}$ и $\{b, 1, \Lambda, 3\}$. Легко видеть, что если P — график, то

$$P = \varnothing \rightleftarrows \text{пр}_1 P = \varnothing \text{ или } \text{пр}_2 P = \varnothing. \qquad (1)$$

Впрочем, наряду с (1), верно также, что

$$P = \varnothing \rightleftarrows \text{пр}_1 P = \varnothing \text{ и } \text{пр}_2 P = \varnothing. \qquad (2)$$

Введем две операции над графиками. Одна из этих операций (инверсия графика) будет одноместной, другая (композиция графиков) — двухместной.

Инверсия графика определяется через инверсию пары. Пара $\langle c, d\rangle$ называется *инверсией пары* $\langle a, b\rangle$, если $c = b$, $d = a$. Инверсия пары α обозначается через α^{-1} (читается: „α в минус первой“). Таким образом, если $\alpha \underset{\text{Df}}{=} \langle a, b\rangle$, то $\alpha^{-1} = \langle b, a\rangle$. Очевидно,

$$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha. \qquad (3)$$

Инверсией графика P называется множество инверсий пар из P. По-другому: график Q называется *инверсией графика* P, если $\alpha \in Q$ тогда и только тогда, когда $\alpha^{-1} \in P$. Инверсия графика P обозначается через P^{-1}. Таким образом,

$$\alpha \in P^{-1} \rightleftarrows \alpha^{-1} \in P. \qquad (4)$$

Верно, конечно, также, что

$$\alpha \in P \rightleftarrows \alpha^{-1} \in P^{-1}. \qquad (5)$$

Полезно дать еще такую тривиальную переформулировку: $\alpha \in P^{-1}$ тогда и только тогда, когда существует такое

*) Словосочетания „область определения“, „область значений“ уже употреблялись нами в § 2 гл. I как часть других терминов,

$\beta \in P$, что $\alpha = \beta^{-1}$. Из (3) вытекает, что

$$(P^{-1})^{-1} = P. \tag{6}$$

Легко видеть, что

$$\text{пр}_1(P^{-1}) = \text{пр}_2 P, \tag{7}$$

$$\text{пр}_2(P^{-1}) = \text{пр}_1 P, \tag{8}$$

т. е. область определения инверсии графика P равна области значений графика P и область значений инверсии графика P равна области определения графика P.

График P называется *симметричным*, если он наряду с любой своей парой содержит ее инверсию, т. е. если из $\alpha \in P$ всегда следует $\alpha^{-1} \in P$. Примерами симметричного графика могут служить $\varnothing$, $\{\langle a, a\rangle\}$, $\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$. Легко видеть, что, каково бы ни было множество M, M^2 является симметричным графиком. Если P — произвольный график, то $P \bigcup P^{-1}$ и $P \bigcap P^{-1}$ являются симметричными графиками.

Введем одно простое обозначение, которое нам часто будет полезно в дальнейшем. Пусть M — произвольное множество. Обозначим через Δ_M множество пар вида $\langle x, x\rangle$, где x пробегает все множество M. Таким образом, $\Delta_\varnothing = \varnothing$; если $M \underset{\text{Df}}{=} \{a\}$, $\Delta_M = \{\langle a, a\rangle\}$; если $M \underset{\text{Df}}{=} \{a, b\}$, $\Delta_M = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$. Очевидно, $\Delta_M \subseteq M^2$. Множество Δ_M является графиком, причем симметричным графиком. Множество Δ_M мы будем иногда называть *диагональю* (множества M или множества M^2 — на выбор читателя).

Слово „симметричный“ в термине „симметричный график“ вызвано следующим. Легко доказать, что если $\alpha \in \mathbf{D}^2$, то точки на координатной плоскости, изображающие пары α и α^{-1}, симметричны относительно прямой $y = x$. Отсюда вытекает, что график $P \subseteq \mathbf{D}^2$ тогда и только тогда является симметричным графиком, когда соответствующее множество точек на координатной плоскости симметрично относительно прямой $y = x$. Отсюда вытекает также, что инверсия P^{-1} графика $P \subseteq \mathbf{D}^2$ получается зеркальным отражением графика P в прямой $y = x$. Многие свойства произвольных симметричных графиков легко усматриваются на координатной плоскости.

Легко видеть, что для графика P

$$P\text{ — симметричный} \rightleftarrows P^{-1}=P, \tag{9}$$

$$P\text{ — симметричный} \rightleftarrows P^{-1}\text{ — симметричный}. \tag{10}$$

Перейдем к операции композиции. График R называется *композицией графиков P и Q*, если $\langle x, y\rangle \in R$ тогда и только тогда, когда существует такое z, что $\langle x, z\rangle \in P$ и $\langle z, y\rangle \in Q$. Композицию графиков P и Q мы будем обозначать через $P \circ Q$ (читается: «„пэ“ кружочек „ку“» или, короче, «пэ — ку»)[1]. Переход от графиков P, Q к их композиции $P \circ Q$ мы будем также называть *компонированием* графиков P и Q. Если, например,

$$P \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\},$$

$$Q \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle\},$$

то $P \circ Q = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, a\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$. Очевидно,

$$P \circ Q = \varnothing \rightleftarrows \text{пр}_2 P \bigcap \text{пр}_1 Q = \varnothing. \tag{11}$$

Следовательно, для любого графика P

$$P \circ \varnothing = \varnothing \circ P = \varnothing. \tag{12}$$

Если M — произвольное множество и $P \subseteq M^2$, то

$$P \circ \Delta_M = \Delta_M \circ P = P. \tag{13}$$

Если композицию графиков сопоставить с умножением чисел, то роль нуля в этом „умножении“ будет, в силу (12), играть пустой график $\varnothing$, роль, аналогичную роли единицы, в силу (13), — диагональ Δ_M. Сходство усиливается свойством (14) — „умножение“ графиков ассоциативно.

Легко доказать, что для любых трех графиков

$$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R). \tag{14}$$

Определение композиции графиков давалось сначала для *двух* графиков. Равенство (14) позволяет определить композицию $P \circ Q \circ R$ *трех* графиков, понимая под $P \circ Q \circ R$ результат любой расстановки скобок, приводящей к последовательному попарному компонированию графиков. Таких расстановок скобок в данном случае (когда компонируются три графика) возможно только две. В силу (14) они приводят к одинаковому результату. Оказывается, аналогичное утверждение верно и для любого (конечного) числа графиков. Индукцией по n докажем, что при любом $n \geqslant 3$ результаты двух произвольных расстановок скобок в выражении $P_1 \circ P_2 \circ \dots \circ P_n$, приводящих к последовательному попарному компонированию графиков, дают один и тот же график.

Базисом индукции ($n=3$) является утверждение (14). Допустим (предположение индукции), что для некоторого $n \geqslant 3$ и для всех k: $3 \leqslant k < n$ наше утверждение верно *). Докажем, что тогда оно верно и для $n+1$. Для того чтобы доказать, что результаты двух произвольных расстановок скобок в выражении $P_1 \circ P_2 \circ \dots \circ P_n \circ P_{n+1}$ **) дают один и тот же график, введем вспомогательное понятие. Назовем *простейшей расстановкой* следующую расстановку скобок:

$$(\dots(((P_1 \circ P_2) \circ P_3) \circ P_4) \circ \dots) \circ P_n.$$

Если мы докажем, что произвольная расстановка скобок в выражении $P_1 \circ P_2 \circ \dots \circ P_n \circ P_{n+1}$ дает то же самое, что и простейшая расстановка скобок, тем самым, очевидно, все будет доказано. Итак, пусть в выражении $P_1 \circ P \circ \dots$ $\dots \circ P_n \circ P_{n+1}$ произвольно расставлены скобки. Обозначим выражение $P_1 \circ P_2 \circ \dots \circ P_n \circ P_{n+1}$ с фиксированной нами исходной произвольной расстановкой скобок через

$$\underbrace{P_1 \circ P_2 \circ \dots \circ P_n \circ P_{n+1}}. \tag{15}$$

Очевидно, выражение (15), в зависимости от того, где „в последний раз" расставлены скобки, имеет один из трех видов:

$$(\underbrace{P_1 \circ \dots \circ P_l}) \circ (\underbrace{P_{l+1} \circ \dots \circ P_{n+1}}), \tag{16}$$

где $1 \leqslant l \leqslant n-2$,

$$(\underbrace{P_1 \circ \dots \circ P_{n-1}}) \circ (P_n \circ P_{n+1}) \tag{17}$$

---

*) Это так называемая *возвратная индукция* (см. § 8 раздела Б).

**) Слова „приводящих к последовательному попарному компонированию графиков" здесь и далее будем подразумевать.

$(l=n-1)$ или

$$\underbrace{(P_1 \circ \ldots \circ P_n)} \circ P_{n+1} \tag{18}$$

$(l=n)$. Рассмотрим отдельно эти случаи.

В случае (16) сначала, используя предположение индукции, заменим $\underbrace{(P_{l+1} \circ \ldots \circ P_{n+1})}$ на простейшую расстановку скобок: $((\ldots(P_{l+1} \circ P_{l+2}) \circ \ldots) \circ P_n) \circ P_{n+1}$. Так как в „правой скобке“ выражения (16) меньше, чем $n+1$ графиков $(l \geqslant 1)$, предположение индукции применимо. Таким образом, график (16) равен

$$\underbrace{(P_1 \circ \ldots \circ P_l)} \circ [((\ldots(P_{l+1} \circ P_{l+2}) \circ \ldots) \circ P_n) \circ P_{n+1}]. \tag{19}$$

В силу (14), где $P \underset{\mathrm{Df}}{=} \underbrace{(P_1 \circ \ldots \circ P_l)}$, $Q \underset{\mathrm{Df}}{=} ((\ldots(P_{l+1} \circ P_{l+2}) \circ \ldots$ $\ldots) \circ P_n)$, $R \underset{\mathrm{Df}}{=} P_{n+1}$, график (19) равен

$$[\underbrace{(P_1 \circ \ldots \circ P_l)} \circ ((\ldots(P_{l+1} \circ P_{l+2}) \circ \ldots) \circ P_n)] \circ P_{n+1}. \tag{20}$$

В левой квадратной скобке выражения (20) компонируется n графиков. Следовательно, по предположению индукции результат их компонирования равен результату простейшей расстановки скобок: $(\ldots((P_1 \circ P_2) \circ P_3) \circ \ldots) \circ P_n$. Значит, график (20) равен

$$[(\ldots((P_1 \circ P_2) \circ P_3) \circ \ldots) \circ P_n] \circ P_{n+1}. \tag{21}$$

Но (21) есть простейшая расстановка скобок.

Случай (17) потребует на одно преобразование меньше. В силу (14), где $P \underset{\mathrm{Df}}{=} \underbrace{(P_1 \circ \ldots \circ P_{n-1})}$, $Q \underset{\mathrm{Df}}{=} P_n$, $R \underset{\mathrm{Df}}{=} P_{n+1}$, график (17) равен

$$[\underbrace{(P_1 \circ \ldots \circ P_{n-1})} \circ P_n] \circ P_{n+1}. \tag{22}$$

Переход от (22) к (23) абсолютно аналогичен переходу от (20) к (21). Используя предположение индукции, утверждаем, что график (22) равен

$$[(\ldots((P_1 \circ P_2) \circ P_3) \circ \ldots) \circ P_n] \circ P_{n+1}. \tag{23}$$

Но (23) есть простейшая расстановка скобок.

Случай (18) требует еще на одно преобразование меньше. Подобно переходам от (20) к (21) и от (22) к (23), заменяем, используя предположение индукции, график (18) на равный ему график

$$[(\ldots((P_1 \circ P_2) \circ P_3) \circ \ldots) \circ P_n] \circ P_{n+1}. \tag{24}$$

Но (24) есть простейшая расстановка скобок.

Наше утверждение полностью доказано. Заметим, что „возвратность" индукции, верность предположения индукции не только для n графиков, но и для меньшего числа графиков мы использовали только один раз, при переходе от (16) к (19).

Доказанное утверждение позволяет определить композицию $P_1 \circ P_2 \circ \ldots \circ P_n$ произвольного (конечного) числа графиков как результат последовательного попарного компонирования графиков P_1, P_2, $\ldots$, P_n *при любой* (например, простейшей) *расстановке скобок*.

Операции композиции к инверсии связаны следующим равенством:

$$(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}. \tag{25}$$

Отсюда и из только что доказанного утверждения о независимости результата композиции от порядка расстановки скобок легко следует, что

$$(P_1 \circ P_2 \circ \ldots \circ P_n)^{-1} = P_n^{-1} \circ \ldots \circ P_2^{-1} \circ P_1^{-1}. \tag{26}$$

Рассмотрим два свойства графиков*). График P называется *функциональным*, если в нем нет пар с одинаковыми первыми и различными вторыми компонентами. График P

---

*) Слово „свойство" используется в этой книге в двух смыслах: как что-то присущее всем объектам данного рода [например, свойства неравенств (§ 1 раздела Б), абсолютной величины (§ 2 раздела Б), степеней (§ 3 раздела Б), корней (§ 3 раздела Б)] и как что-то, чем может обладать или не обладать каждый объект данного рода [например, в этом параграфе (график может быть и не быть функциональным, быть и не быть инъективным, быть и не быть симметричным), в § 2 гл. V, в § 2 гл. VII].

называется *инъективным*, если в нем нет пар с различными первыми и одинаковыми вторыми компонентами *).

Пустой график $\varnothing$ и любой одноэлементный график тривиальным образом функциональны и инъективны. Если множество M содержит больше одного элемента, то график M^2 не функционален и не инъективен, график $\{a\} \times M$ — инъективен, но не функционален, а график $M \times \{a\}$ функционален, но не инъективен.

Заметим еще, что если график P функционален и $Q \subseteq P$, то и график Q функционален (раз в P нет „запрещенных" пар, то тем более их нет в Q). Аналогичное утверждение (по той же причине) верно и для инъективности.

Чрезвычайно полезными будут нам в дальнейшем два следующих простых утверждения: *композиция функциональных графиков есть снова функциональный график* (по-другому: композиция сохраняет функциональность), *композиция инъективных графиков инъективна.*

Докажем, например, второе утверждение. Мы хотим доказать теорему: если график P инъективен и график Q инъективен, то и график $P \circ Q$ инъективен. Используем закон контрапозиции (§ 1 гл. I). Докажем вместо сформулированной теоремы равносильное ей утверждение: если график $P \circ Q$ не инъективен, то не верно, что график P инъективен и график Q инъективен. Итак, пусть график $P \circ Q$ не инъективен. Тогда в нем есть пары с различными первыми и одинаковыми вторыми компонентами. Пусть это будут пары $\langle b, a\rangle$, $\langle c, a\rangle$. Имеем

$$\langle b, a\rangle \in P \circ Q, \tag{27}$$

$$\langle c, a\rangle \in P \circ Q, \tag{28}$$

$$b \neq c. \tag{29}$$

---

*) Введенные термины удобно запомнить при помощи рисунков. Фуикциональный график — это график, не содержащий пар вида (функция не должна иа одном элементе принимать более одного значения — см. § 2 гл. V и § 1 гл. VI). Инъективный график — это график, не содержащий пар вида .

Из (27) и определения композиции следует, что существует такое d, что

$$\langle b, d\rangle \in P, \tag{30}$$

$$\langle d, a\rangle \in Q. \tag{31}$$

Аналогично из (28) получаем, что существует такое e, что

$$\langle c, e\rangle \in P, \tag{32}$$

$$\langle e, a\rangle \in Q. \tag{33}$$

Если $d = e$, (29), (30) и (32) влекут, что график P не инъективен. Если $d \neq e$, то (31) и (33) влекут, что график Q не инъективен.

Композиция сохраняет как функциональность, так и инъективность. Инверсия переводит функциональный график в инъективный и наоборот. Более того, *график P функционален тогда и только тогда, когда график P^{-1} инъективен. График P инъективен тогда и только тогда, когда график P^{-1} функционален.* Оба эти утверждения становятся очевидными, если вспомнить указанное в сноске на стр. 126 „рисуночное определение" функциональности и инъективности. Доказательство оставляем читателю.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что для любых графиков P, Q

a) $(P \cup Q)^{-1} = P^{-1} \cup Q^{-1}$,
b) $(P \cap Q)^{-1} = P^{-1} \cap Q^{-1}$,
c) $(P \setminus Q)^{-1} = P^{-1} \setminus Q^{-1}$,
d) если $P \subseteq Q$, то $P^{-1} \subseteq Q^{-1}$.

2. Доказать, что для любых множеств A, B

$$(A \times B)^{-1} = B \times A.$$

3. Доказать или опровергнуть, что для любых графиков P, Q, R

a) $(P \cup Q) \circ R = (P \circ R) \cup (Q \circ R)$,
b) $(P \cap Q) \circ R = (P \circ R) \cap (Q \circ R)$,
c) $(P \setminus Q) \circ R = (P \circ R) \setminus (Q \circ R)$,
d) если $P \subseteq Q$, то $P \circ R \subseteq Q \circ R$.

4. Доказать или опровергнуть, что для любых графиков P и Q

$$P \circ Q = Q \circ P.$$

5. Исследовать, как операция композиции влияет на свойство симметричности графика (т. е., *например*, доказать или опровергнуть, что композиция симметричных графиков симметрична).

6. Верно ли утверждение, что любой график P является подмножеством прямого произведения $A \times B$ двух каких-то множеств A и B?

7. Что можно сказать о числе элементов композиции двух конечных графиков?

8. Доказать, что для любого множества M

$$M^2 \circ M^2 = M^2.$$

ГЛАВА IV

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

§ 1. Высказывание

В главе I был введен и по мере сил разъяснен термин „*высказывание*“ и определен термин „*высказывательная форма*“. Там же мы ввели объединяющий слова „истина“ (сокращенно — „***и***“), „ложь“ (сокращенно — „***л***“) термин „истинностное значение“ и условились значением высказывания считать его истинностное значение. Тем самым мы сделали равносильными все истинные высказывания и, отдельно, все ложные высказывания.

Переменную, в область значений которой входят только высказывания (впрочем, лучше сказать, не высказывания, а истинностные значения: ***и***, ***л***), мы будем называть *высказывательной переменной*. Высказывания и высказывательные переменные мы будем в основном обозначать прописными латинскими буквами, высказывательные формы — прописными готическими буквами. Любая высказывательная переменная A является, конечно, высказывательной формой.

Рассмотрим важнейшие операции над высказываниями [1]). Бóльшую часть этих операций мы уже рассматривали в § 1 гл. I, не вводя для них специального термина и обозначения.

Отрицание высказывания A обозначается $\neg A$ и означает высказывание, имеющее истинностное значение, противоположное к истинностному значению высказывания A (см. табл. 1). Таким образом, $\neg A$ истинно, если A ложно, и $\neg A$ ложно, если A истинно. Отрицание $\neg A$ высказывания A означает то же, что высказывания „не A“, „неверно, что A“, „A ложно“. Операция отрицания соответствует логическому союзу „не“.

Конъюнкция высказываний A и B обозначается $A \& B$ и означает высказывание, истинное в том и только в том случае, когда истинно каждое из высказываний A и B

Таблица 1

A	$\urcorner A$
и	*л*
л	*и*

Таблица 2

A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \rightleftarrows B$
и	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*и*	*л*	*л*
л	*и*	*л*	*и*	*и*	*л*
л	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*

(см. табл. 2). Конъюнкция $A \& B$ высказываний A и B означает то же, что высказывания „A и B", „оба высказывания A и B истинны". Операция конъюнкции соответствует логическому союзу „и".

Дизъюнкция высказываний A и B обозначается $A \vee B$ и означает высказывание, истинное в том и только в том случае, когда истинно хотя бы одно из высказываний A и B (см. табл. 2). Дизъюнкция $A \vee B$ высказываний A и B означает то же, что высказывания „A или B", „хотя бы одно из высказываний A и B истинно". Операция дизъюнкции соответствует логическому союзу „или" *).

Импликация высказываний A и B обозначается $A \rightarrow B$ и означает высказывание, ложное в том и только в том случае, когда посылка A истинна и заключение B ложно (см. табл. 2). Импликация $A \rightarrow B$ высказываний A и B означает то же, что высказывания „если A, то B", „из A следует B", „A влечет B". Высказывание $A \rightarrow B$ читают также „A *имплицирует* B". Операция импликации соответствует логическому союзу „если..., то" *).

Эквиваленция высказываний A и B обозначается $A \rightleftarrows B$ и означает высказывание, истинное в том и только в том случае, когда высказывания A и B имеют одинаковое истинностное значение (см. табл. 2) **) [2]. Эквиваленция $A \rightleftarrows B$ высказываний A и B означает то же, что высказы-

*) Употребляемому в том смысле, который был зафиксирован в § 1 гл. I.

**) Знак „$\rightleftarrows$" мы ввели еще в § 1 гл. I.

вания „A тогда и только тогда, когда B“, „Для того, чтобы A, необходимо и достаточно, чтобы B“.

Таблицы 1, 2 и им подобные называются *истинностными таблицами*.

Операция отрицания — одноместная, операции конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции — двухместные. Впрочем, определения конъюнкции, дизъюнкции и эквиваленции естественно обобщаются на любое (конечное) число высказываний. *Конъюнкция* высказываний A_1, A_2, ..., A_n обозначается $A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n$ и означает высказывание, истинное в том и только в том случае, когда истинно каждое из высказываний A_1, A_2, ..., A_n. *Дизъюнкция* высказываний A_1, A_2, ..., A_n обозначается $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ и означает высказывание, истинное в том и только в том случае, когда истинно хотя бы одно из высказываний A_1, A_2, ..., A_n. *Эквиваленция* высказываний A_1, A_2, ..., A_n обозначается $A_1 \rightleftarrows A_2 \rightleftarrows \ldots \rightleftarrows A_n$ и означает высказывание, истинное в том и только в том случае, когда высказывания A_1, A_2, ..., A_n имеют одинаковое истинностное значение.

Если A и B — высказывания, то $\neg A$, $A \,\&\, B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \rightleftarrows B$, очевидно, высказывания. Если же хотя бы одна из букв A и B является высказывательной переменной, то перечисленные выше выражения являются высказывательными формами. Рассмотрим теперь, например, выражение

$$\neg\,[(B \,\&\, \neg A) \vee \neg\,(C \vee \neg A)]. \tag{1}$$

Выражение (1) также является либо высказыванием, если A, B, C — высказывания, либо высказывательной формой, если хотя бы одна из букв A, B, C является высказывательной переменной. Предположим, что A, B, C в (1) являются высказывательными переменными и составим истинностную таблицу высказывательной формы (1). При этом удобно предварительно составить истинностные таблицы всех высказывательных форм, из которых построена форма (1). Удобно также все эти вычисления свести в одну таблицу. Результатом является табл. 3. Если бы мы составили истинностную таблицу для высказывательной формы

$$(A \,\&\, C) \vee (C \,\&\, \neg B) \vee (\neg A \,\&\, \neg B) \tag{2}$$

с высказывательными переменными A, B, C, мы бы увидели, что высказывательные формы (1), (2) равносильны. *Метод истинностных таблиц* является универсальным

Таблица 3

A	B	C	$\neg A$	$B \& \neg A$	$C \vee \neg A$	$\neg(C \vee \neg A)$	$(B \& \neg A) \vee \neg(C \vee A)$	$\neg[(B \& \neg A) \vee \neg(C \vee \neg A)]$
и	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*	*л*	*л*	*и*
и	*и*	*л*	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*	*л*
и	*л*	*и*	*л*	*л*	*и*	*л*	*л*	*и*
и	*л*	*л*	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*	*л*
л	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*л*	*и*	*л*
л	*и*	*л*	*и*	*и*	*и*	*л*	*и*	*л*
л	*л*	*и*	*и*	*л*	*и*	*л*	*л*	*и*
л	*л*	*л*	*и*	*л*	*и*	*л*	*л*	*и*

методом установления равносильности (или не равносильности) высказывательных форм *с высказывательными переменными* *).

Остановимся на одном деликатном и хитроумном вопросе: Что такое „одинаковые" и что такое „различные" высказывания? Например, одинаковы или различны высказывания

$$2+2=4, \tag{3}$$

$$2\times 2=4, \tag{4}$$

$$2^2=4, \tag{5}$$

$$4=2\times 2, \tag{6}$$

„дважды два — четыре"? (7)

---

*) Для высказывательных форм с невысказывательными переменными (см. §§ 2, 3) этот метод, вообще говоря, не годится. Для таких форм „вычисления", подсчет истинностных значений уступают место „рассуждениям" (см. § 3).

Поставим еще один близкий вопрос: сколько отрицаний имеет данное высказывание A? Например, для высказывания

2 — четное число, (8)

по-видимому, каждое из высказываний

2 не является четным числом, (9)

неверно, что 2 — четное число, (10)

ложно, что 2 — четное число, (11)

2 — не четное число, (12)

2 — нечетное число, (13)

$\neg$ [2 — четное число] (14)

является отрицанием. Значит, у одного высказывания может быть *много* отрицаний?

Мой ответ на эти вопросы такой. Мы ***не будем уславливаться*** о том, какие высказывания мы будем считать одинаковыми, какие — различными. У нас не будет таких понятий: одинаковые высказывания, различные высказывания.

Отсюда вытекает, что у нас не будут иметь точного смысла словосочетания вроде „различные высказывания“, „два высказывания“, „три высказывания“, „сколько отрицаний“, „много отрицаний“. Нельзя *считать* то, к чему неприменимы понятия „одинаковости“ или „различности“. (Сколько идей в данной книге? Сколько капель воды в стакане?)

В частности, не имеют у нас точного смысла всевозможные „три теоремы“ („теорема“ и „высказывание“ — почти синонимы), „три формы одной теоремы“, „шесть основных свойств“ (§ 1 раздела Б) и т. п.

Отсюда вытекает также, что, вообще говоря, без дополнительных соглашений нельзя говорить о множествах высказываний (но можно, конечно,— о двухэлементном множестве истинностных значений).

С другой стороны, у нас есть понятие — *равносильные высказывания* (§ 2 гл. I). Высказывания (3)—(7) равносильны. Высказывание (8) истинно. Следовательно, *любое ложное* высказывание, в частности (9)—(14), имеет право называться отрицанием высказывания (8) [3].

Условимся, что знак $\neg$ связывает теснее знаков &, $\vee$, $\to$, $\rightleftarrows$, $\equiv$, знаки &, $\vee$ связывают теснее знаков $\to$, $\rightleftarrows$, $\equiv$, а знаки $\to$, $\rightleftarrows$ связывают теснее знака $\equiv$. Таким образом, выражение

$$\neg A \,\&\, \neg B \to C \equiv \neg (A \vee B) \to C$$

означает

$$\{[(\neg A) \,\&\, (\neg B)] \to C\} \equiv \{[\neg(A \vee B)] \to C\}.$$

Выражения $A \,\&\, B \vee C$ или $A \to B \rightleftarrows C$ [в отличие от выражений $(A \,\&\, B) \vee C$, $A \,\&\, (B \vee C)$, $(A \to B) \rightleftarrows C$, $A \to (B \rightleftarrows C)$] мы считаем непонятными и недопустимыми.

Приведем примеры наиболее важных „равносильностей" высказывательных форм с высказывательными переменными. Эти „равносильности" показывают, в частности, важнейшие соотношения между введенными выше логическими операциями. Для удобства обозрения и запоминания разобьем предлагаемые „равносильности" на четыре группы:

Первая группа

(I) $A \vee B \equiv B \vee A$,

(II) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \equiv A \vee B \vee C$,

(III) $A \vee (B \,\&\, C) \equiv (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$,

(IV) $A \vee (A \,\&\, B) \equiv A$,

(V) $A \vee A \equiv A$.

Следующие пять равносильностей получаются из (I)—(V) заменой $\vee$ на & и наоборот:

(I′) $A \,\&\, B \equiv B \,\&\, A$,

(II′) $(A \,\&\, B) \,\&\, C \equiv A \,\&\, (B \,\&\, C) \equiv A \,\&\, B \,\&\, C$,

(III′) $A \,\&\, (B \vee C) \equiv (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$,

(IV′) $A \,\&\, (A \vee B) \equiv A$,

(V′) $A \,\&\, A \equiv A$.

Сравните эти равносильности с тождествами (I)—(V), (I′)—(V′) из § 3 гл. II. Мы оставим эту аналогию лишь в качестве эвристического подспорья. Каждая из равносильностей (I′)—(V′) называется *двойственной* к соответствующей из равносильностей (I)—(V).

Вторая группа

(I)	$A \& \boldsymbol{u} \equiv A$	$A \& \boldsymbol{л} \equiv \boldsymbol{л}$,
(II)	$A \vee \boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}$	$A \vee \boldsymbol{л} \equiv A$,
(III)	$A \rightarrow \boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{л} \rightarrow A \equiv \boldsymbol{u}$.

К равносильностям (III) естественно примыкают равносильности

$$\boldsymbol{u} \rightarrow A \equiv A \qquad A \rightarrow \boldsymbol{л} \equiv \neg A.$$

Однако они менее интересны для дальнейшего.

Третья группа

(I) $\neg\neg A \equiv A$,

(II) $\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$,

(III) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$,

(IV) $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \& \neg B$.

Равносильности (II), (III) называются *законами де Моргана* *). Сравните их с (31), (32) из § 3 гл. II. Равносильность (I) словами часто передают так: „двойное отрицание можно снять“. К равносильностям третьей группы естественно примыкают равносильности (9), (10) из § 3.

В четвертую группу войдут три отдельные равносильности, не связанные, как равносильности каждой из трех рассмотренных групп, внутренним единством.

Четвертая группа

Во-первых, у нас нет еще ни одной равносильности, в которую входила бы эквиваленция. Достаточно ввести одну такую равносильность.

(I) $A \rightleftarrows B \equiv (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$.

Если в выражение входит знак эквиваленции, его всегда можно элиминировать при помощи равносильности (I). Если вспомнить, что эквиваленция означает „тогда

*) A. de Morgan — английский логик середины XIX века.

и только тогда", равносильность (I) становится очевидной (см. § 1 гл. I).

(II) $$A \to B \equiv \neg B \to \neg A.$$

Равносильность (II), очевидно, выражает рассмотренный и доказанный нами в § 1 гл. I *закон контрапозиции*.

(III) $$A \vee B \equiv \neg A \to B.$$

Назначение равносильности (III) мы рассмотрим чуть позже.

Перечисленные равносильности выражают наиболее важные (для практического применения в математике) свойства операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции. Любая из этих равносильностей может быть доказана методом истинностных таблиц *). Равносильности третьей и четвертой группы следует очень хорошо запомнить. Равносильности второй группы следует научиться в нужный момент мгновенно „соображать". Помнить активно равносильности первой группы нет нужды, однако знание их позволяет использовать их при доказательстве других равносильностей и доказывать эти „другие" равносильности не скучным составлением истинностной таблицы, а более изящно — „преобразованиями".

Например, равносильность форм (1), (2), которую мы раньше установили методом истинностных таблиц, можно установить так:

$$\begin{aligned}
&\neg[(B \& \neg A) \vee \neg(C \vee \neg A)] \equiv \\
&\equiv \neg(B \& \neg A) \& \neg\neg(C \vee \neg A) \equiv \\
&\equiv \neg(B \& \neg A) \& (C \vee \neg A) \equiv \\
&\equiv (\neg B \vee \neg\neg A) \& (C \vee \neg A) \equiv \\
&\equiv (\neg B \vee A) \& (C \vee \neg A) \equiv \\
&\equiv [(\neg B \vee A) \& C] \vee [(\neg B \vee A) \& \neg A] \equiv \\
&\equiv [(\neg B \& C) \vee (A \& C)] \vee [(\neg B \& \neg A) \vee (A \& \neg A)] \equiv
\end{aligned}$$

*) Не разъясняя этого подробно, замечу, что „равенства с множествами" (§ 3 гл. II) можно доказывать аналогичным, табличным методом.

$$\equiv [(\neg B \& C) \vee (A \& C)] \vee [(\neg B \& \neg A) \vee \text{л}] \equiv$$
$$\equiv [(\neg B \& C) \vee (A \& C)] \vee (\neg B \& \neg A) \equiv$$
$$\equiv (\neg B \& C) \vee (A \& C) \vee (\neg B \& \neg A) \equiv$$
$$\equiv (A \& C) \vee (\neg B \& C) \vee (\neg B \& \neg A) \equiv$$
$$\equiv (A \& C) \vee (C \& \neg B) \vee (\neg A \& \neg B).$$

В этом преобразовании мы воспользовались, в частности, тем, что

$$A \& \neg A \equiv \text{л}. \tag{15}$$

Отметим заодно, что

$$A \vee \neg A \equiv \text{и}. \tag{16}$$

Равносильность (16) называется *законом исключенного третьего*.

Полезно отметить две вытекающие из табл. 2 тривиальные равносильности:

$$A \vee B \text{ истинно} \equiv (A \text{ истинно}) \vee (B \text{ истинно}), \tag{17}$$
$$(A \to B) \text{ истинно} \equiv (A \text{ ложно}) \vee (B \text{ истинно}). \tag{18}$$

Рассмотрим теорему вида

$$A \to B. \tag{19}$$

Чтобы доказать теорему (19), достаточно доказать, например, что посылка A ложна. В этом случае (см. табл. 2) теорема (19) будет истинна тривиальным образом (см. § 1 гл. I). Достаточно также доказать, что заключение B истинно. В этом случае, в силу определения импликации, теорема (19) также будет истинной. Однако случаи, когда верность теоремы (19) удается доказать одним из двух указанных путей, сравнительно редки. Главным, наиболее часто встречающимся на практике, наиболее естественным путем доказательства теоремы (19) является следующий путь. Чтобы доказать, что теорема (19) истинна, докажем, что она не ложна. Но импликация (19) ложна только в том случае, когда одновременно посылка A истинна и заключение B ложно. Давайте докажем, что этот единственный возможный случай ложности импликации (см. табл. 2) не имеет места. Давайте докажем, что если посылка A истинна, то заключение B не ложно, т. е. истинно. Итак, повторяю, наиболее естественный и часто встречающийся путь доказательства теоремы вида (19) следующий: *предполо-*

жим, что посылка A истинна, и попробуем вывести из этого предположения, что заключение B тоже истинно. Если нам это удастся, мы тем самым докажем, что не имеет места единственный случай ложности импликации (A истинно и B ложно) и что, следовательно, теорема (19) истинна. Разумеется, если нам *не удастся* из предположения об истинности A вывести истинность B, то отсюда еще *не следует*, что теорема (19) ложна. Отсюда следует только одно из двух: или теорема (19) ложна, или мы просто *не сумели* доказать, что она истинна. Заметим, что когда мы, доказывая теорему (19) по только что указанному пути, *предполагаем*, что посылка A истинна, мы вовсе *не утверждаем*, что она действительно истинна. Мы просто доказываем, что *если* она истинна, то заключение B тоже истинно. При этом на самом деле посылка A может быть ложной. Ну, что ж! Если посылка A ложна, теорема (19) тем более истинна, истинна тривиальным образом. Заметим еще, что если посылка A теоремы (19) ложна, то мы, доказывая теорему (19), не обязаны это замечать. Если мы, доказывая теорему (19) с ложной посылкой, выведем из предположения об истинности A истинность B, мы, разумеется, тоже докажем истинность теоремы (19), хотя, конечно, в рассматриваемом случае (посылка A ложна) более простым, более естественным, более изящным путем доказательства было бы доказательство ложности A. В заключение еще раз подчеркну, что указанный путь доказательства теорем вида (19) („предположим, что A истинно; докажем, что B истинно“) является, с одной стороны, главным и наиболее часто встречающимся, но, с другой стороны, не обязательным, не единственным путем доказательства.

Пусть теперь *условие* теоремы (19) является *конъюнкцией*, т. е. теорема имеет вид

$$C \& D \rightarrow B. \tag{20}$$

Предположение об истиности посылки $C \& D$ означает в этом случае, что C и D истинны. Итак, чтобы доказать теорему вида (20), нужно *) из посылок C и D вывести заключение B.

*) Слово „нужно“ здесь и дальше в этом параграфе означает, во-первых, „достаточно“ и, во-вторых, „рекомендуется“. Из вышесказанного следует, что как „необходимо“ его понимать здесь нельзя

Если *условие* теоремы (19) является *дизъюнкцией*, т. е. теорема имеет вид

$$C \vee D \to B, \tag{21}$$

то предположение об истинности посылки $C \vee D$ распадается на *два* *) случая: 1) C истинно; 2) D истинно [см. (17)]. Нужно рассмотреть отдельно два этих случая и в каждом из них доказать, что B истинно [4]).

Пусть теперь *заключение* теоремы (19) является *конъюнкцией*, т. е. теорема имеет вид

$$A \to C \,\&\, D. \tag{22}$$

В этом случае из предположения об истинности A нужно вывести истинность заключения $C \,\&\, D$, т. е. истинность C и истинность D [5]).

Пусть *заключение* теоремы (19) является *дизъюнкцией*, т. е. теорема имеет вид

$$A \to C \vee D. \tag{23}$$

Допустим, мы предположили, что A истинно, и хотим доказать истинность заключения $C \vee D$. Как доказать истинность дизъюнкции? Разумеется, можно прямо в лоб доказать истинность C или истинность D. Тем самым истинность дизъюнкции $C \vee D$ будет, конечно, доказана. Но этот путь часто является трудно проходимым. В самом деле, неизвестно, C или D истинно на самом деле. Поэтому неизвестно, истинность C или истинность D надо пытаться доказывать. Будешь биться над доказательством истинности C, а, может быть, на самом деле истинно не C, а D! Более удобным, чаще всего встречающимся путем доказательства дизъюнкции является тот путь, который указывается равносильностью (III) из четвертой группы. Дизъюнкция $C \vee D$ равносильна импликации $\neg C \to D$, а как надо доказывать импликацию, мы уже знаем. Надо предположить, что посылка $\neg C$ истинна, т. е. что C ложно, и вывести из этого предположения, что D истинно. Указанный путь является обычно на практике самым удобным, самым легким путем доказательства дизъюнкций **)[6]). Аналогично

*) Ср. со стр. 81—82,

**) Именно для этого мы и включили в список важнейших равиосильиостей (III) из четвертой группы.

доказываются „многочленные“ дизъюнкции. Поскольку, например,

$$
\begin{aligned}
A \vee B \vee C \vee D \equiv \\
&\equiv (A \vee B \vee C) \vee D \equiv \\
&\equiv \neg (A \vee B \vee C) \to D \equiv \\
&\equiv \neg A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C \to D,
\end{aligned}
$$

для доказательства теоремы вида $A \vee B \vee C \vee D$ нужно из предположения о ложности A, B и C вывести истинность D*).

Очень часто *заключение* теоремы (19) является *импликацией*, т. е. сама теорема имеет вид „двухступенчатой“ импликации:

$$A \to (C \to D). \tag{24}$$

Например, фраза „Пусть n — четное натуральное число; тогда: если $a<0$, то $\sqrt[n]{a^n} = -a$“ означает, очевидно, теорему „Если n — четное натуральное число, то из $a<0$ следует $\sqrt[n]{a^n} = -a$“ **), т. е. теорему вида (24). Для того чтобы доказать теорему (24), нужно из предположения об истинности A вывести истинность импликации $C \to D$. Но для доказательства импликации $C \to D$ нужно из предположения об истинности C вывести истинность D. Таким образом, для доказательства теоремы (24) нужно из предположения об истинности A и C получить истинность D. Предположение об истинности A и C равносильно предположению об истинности $A \,\&\, C$. Мы получаем, следовательно, что для доказательства теоремы (24) нужно, предположив истинность конъюнкции $A \,\&\, C$, вывести D, т. е. нужно доказать импликацию $A \,\&\, C \to D$. Проведенное рассуждение приводит к гипотезе

$$A \to (C \to D) \equiv A \,\&\, C \to D. \tag{25}$$

---

*) Ср. с доказательством теоремы о пяти возможиостях (§ 3 гл. II).

**) Фраза „Если n — четное натуральное число, то если $a<0$, то $\sqrt[n]{a^n} = -a$“ имеет тот же смысл, но стилистически совершенно неприемлема.

Легко проверить, что равносильность (25) действительно верна. Она часто является полезной и заслуживает запоминания.

Полезно уяснить разницу между доказательством теоремы (19) по закону контрапозиции и доказательством „от противного". Доказать теорему (19) по закону контрапозиции [(II) из четвертой группы] — это значит вместо теоремы (19) доказать равносильную ей теорему

$$\neg B \to \neg A,$$

т. е., предположив ложность B, доказать ложность A. Схемой доказательства „от противного" является либо равносильность

$$A \to B \equiv A \,\&\, \neg B \to C \,\&\, \neg C,$$

либо одна из равносильностей

$$A \to B \equiv A \,\&\, \neg B \to \neg A,$$
$$A \to B \equiv A \,\&\, \neg B \to B.$$

Доказать теорему (19) „от противного" — это значит вместо теоремы (19) доказать либо равносильную ей теорему

$$A \,\&\, \neg B \to C \,\&\, \neg C$$

[т. е., предположив истинность A и ложность B, получить какое-нибудь противоречие, два взаимно противоположных утверждения: C и $\neg C$], либо равносильную ей теорему

$$A \,\&\, \neg B \to \neg A$$

[т. е., предположив истинность A и ложность B, вывести из этих предположений, что A ложно*)], либо, наконец, равносильную ей теорему

$$A \,\&\, \neg B \to B,$$

[т. е., предположив истинность A и ложность B, вывести из этих предположений, что B истинно].

*) Именно по этой схеме мы провели в § 1 гл. I доказательство закона контрапозиции.

Задача. Найти какую-нибудь простую высказывательную форму с высказывательными переменными A и B и с логическими операторами $\neg$, &, $\vee$, равносильную форме

a) $A \rightarrow B$,

b) $\neg (A \rightleftarrows B)$.

§ 2. Высказывательная форма

Высказывательные формы, которые мы рассматривали в § 1, зависели только от высказывательных переменных. Высказывательные формы, встречающиеся не в специальных логико-математических исследованиях, а в самой математике, зависят обычно не от высказывательных, а от всяких иных (например, числовых) переменных. В общем случае высказывательная форма может, конечно, зависеть от переменных любого вида. Например, выражение

$$A \mathbin{\&} (x > 3)$$

является (естественно считать) двухместной высказывательной формой с высказывательной переменной A и числовой переменной x.

Вернемся к вопросу, упомянутому в § 2 гл. I: существуют ли не всюду определенные высказывательные формы? Мой ответ на этот вопрос будет такой. Я не буду требовать от понятия высказывательной формы, чтобы любая высказывательная форма была всюду определена, не буду, следовательно, утверждать, что не существует не всюду определенных высказывательных форм, оставляя открытой возможность рассматривать не всюду определенные (точнее, не обязательно всюду определенные) высказывательные формы *).

Однако, во-первых, я собираюсь в этой книге иметь дело только с всюду определенными высказывательными формами и объявляю поэтому, что под *высказывательной формой*, если противное не оговорено, понимается далее *всюду определенная* высказывательная форма. Во-вторых, те конкретные высказывательные формы, *не содержащие логических знаков* ($\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\rightleftarrows$, $\forall$, $\exists$), которые нам

*) Эта возможность реализуется, например, в книге В. А. Успенского [20].

будут далее встречаться, я буду превращать во всюду определенные высказывательные формы одним и тем же приемом: если при некоторых значениях переменных какая-то (разумная) часть рассматриваемой формы не определена, не имеет смысла, то всю высказывательную форму при этих значениях переменных мы будем считать *ложной*. Это не очень четко сформулированное правило *доопределения* высказывательной формы до всюду определенной будет понятным в каждом конкретном случае его применения. Важный класс таких форм мы рассмотрим в § 1 гл. VI.

Приведем пока два примера. Форма $\sqrt{x} > 3$ истинна при $x > 9$ и ложна при $0 \leqslant x \leqslant 9$. Наше правило доопределения означает, что при $x < 0$ мы эту форму также будем считать *ложной*. Поэтому форма $\neg [\sqrt{x} > 3]$ при $x < 0$ истинна. Форму $\sqrt{x} \leqslant 3$ мы также автоматически доопределяем до ложного высказывания при $x < 0$. Значит,

$$[\sqrt{x} \leqslant 3] \not\equiv \neg [\sqrt{x} > 3] .$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$[\sqrt{x} \leqslant 3] \equiv [\sqrt{x} < 3] \vee [\sqrt{x} = 3] .$$

Введенные нами в § 1 операции над высказываниями являются, очевидно, также операциями над высказывательными формами. Для любых высказывательных форм $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ без специальных пояснений ясен смысл форм $\neg\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \rightleftarrows \mathfrak{B}$ *).

Очевидно, кроме того, что рассмотренные в § 1 равносильности (и вообще любые равносильности высказывательных форм, зависящих только от высказывательных переменных) остаются верными, если в них вместо высказывательных переменных подставить произвольные высказывательные формы.

Рассмотрим вопрос о соотношении между равносильностью двух высказывательных форм $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и их эквиваленцией. Если сначала $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — высказывания, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

*) Здесь уже работает наше соглашение о том, что под *высказывательной формой*, если противное не оговорено, понимается *всюду определенная* высказывательная форма. Если бы формы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ были не обязательно всюду определенными, смысл выражений $\neg\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ и т. д. пришлось бы еще уточнять (см. п. 1 § 3 книги [20]).

и $\mathfrak{A} \rightleftarrows \mathfrak{B}$ — также высказывания, причем, как легко видеть, равносильные высказывания. Если же $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — высказывательные формы, то $\mathfrak{A} \rightleftarrows \mathfrak{B}$ — тоже высказывательная форма, но $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ — высказывание. Легко видеть, что *высказывание* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ *истинно* [т. е. высказывательные формы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ равносильны] *тогда и только тогда, когда высказывательная форма* $\mathfrak{A} \rightleftarrows \mathfrak{B}$ *истинна при любых значениях переменных* [или, как иногда говорят, всегда истинна (тождественно истинна)].

$$[\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}] \rightleftarrows [\mathfrak{A} \rightleftarrows \mathfrak{B} \text{ всегда истинна}]. \qquad (1)$$

Введем понятие, которое свяжет материал этой главы с гл. II—III. Рассмотрим сначала простейший случай. *Областью истинности* одноместной высказывательной формы $\mathfrak{A}(x)$ называется и через $\overline{\mathfrak{A}}$ (или $\overline{\mathfrak{A}(x)}$) обозначается множество тех значений переменной x, при которых форма $\mathfrak{A}$ истинна. Таким образом, если M — область значений переменной x, то

$$\overline{\mathfrak{A}} \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\{x \in M \mid \mathfrak{A}(x)\}. \qquad (2)$$

Иногда удобнее написать длиннее:

$$\overline{\mathfrak{A}} \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\{x \in M \mid \mathfrak{A}(x) \text{ истинно}\}.$$

Пусть теперь $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ — s-местная ($s \geqslant 2$) высказывательная форма, где $x_1, x_2, \ldots, x_s$ — переменные формы $\mathfrak{A}$, выписанные в *каком-нибудь* порядке. Пусть областью определения переменной x_1 будет множество M_1, областью определения переменной x_2 будет множество M_2 и т. д. Тогда *областью истинности* высказывательной формы $\mathfrak{A}$ называется и через $\overline{\mathfrak{A}}$ (или $\overline{\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_s)}$) обозначается множество тех кортежей $\langle a_1, a_2, \ldots, a_s\rangle \in M_1 \times \times M_2 \times \ldots \times M_s$, для которых $\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ истинно. Таким образом,

$$\overline{\mathfrak{A}} \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_s\rangle \in M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_s \mid \mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_s)\}. \qquad (3)$$

Заметим, что по нашему определению область истинности s-местной высказывательной формы при $s \geqslant 2$ не вполне определяется самой формой. Важен еще порядок переменных, который можно фиксировать по произволу. Так, если n — переменная с областью значений $\mathbf{N}$, а x — переменная с областью значений $\mathbf{D}$, то областью истинности высказывательной формы $\mathfrak{A} \underset{\mathrm{Df}}{=} [n! > x]$ можно считать по желанию как $\mathscr{E}\{\langle n, x\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{D} \mid n! > x\}$, так и $\mathscr{E}\{\langle x, n\rangle \in \mathbf{D} \times \mathbf{N} \mid n! > x\}$. В первом случае $\langle 3, 2\rangle \in \overline{\mathfrak{A}}$, но $\langle 2, 3\rangle \notin \overline{\mathfrak{A}}$. Во втором случае $\langle 2, 3\rangle \in \overline{\mathfrak{A}}$, но $\langle 3, 2\rangle \notin \overline{\mathfrak{A}}$. Эту „многозначность“ понятия области истинности s-местной высказывательной формы при $s \geqslant 2$ надо иметь в виду. Впрочем, условимся, что запись $\overline{\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_s)}$ означает область истинности формы $\mathfrak{A}$ относительно указанного этой записью порядка переменных. Так, для рассмотренного выше примера

$$\overline{\mathfrak{A}(n, x)} = \mathscr{E}\{\langle n, x\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{D} \mid n! > x\},$$
$$\overline{\mathfrak{A}(x, n)} = \mathscr{E}\{\langle x, n\rangle \in \mathbf{D} \times \mathbf{N} \mid n! > x\}.$$

Заметим еще, что предложения „$\langle a, b\rangle \in \overline{\mathfrak{A}(x, y)}$“ и „$\mathfrak{A}(a, b)$ истинно“ осмысленны, а предложения „$\langle a, b\rangle \in \mathfrak{A}(x, y)$“ и „$\overline{\mathfrak{A}(a, b)}$ истинно“ бессмысленны, не корректны.

С другой стороны (при соответствующем смысле букв M_1, M_2),

$$\langle a, b\rangle \in \overline{\mathfrak{A}(x, y)} \rightleftarrows [\langle a, b\rangle \in M_1 \times M_2] \,\&\, \mathfrak{A}(a, b). \qquad (4)$$

(мы написали $\mathfrak{A}(a, b)$ вместо „$\mathfrak{A}(a, b)$ истинно“).

Понятие области истинности позволяет связать операции над множествами с операциями над высказывательными формами. Так, легко видеть, что при $s \geqslant 1$

$$\overline{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \,\&\, \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_s)} = \overline{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)} \cap \overline{\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_s)}, \qquad (5)$$

$$\overline{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \vee \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_s)} = \overline{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)} \cup \overline{\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_s)} \qquad (6)$$

и, если $M_1, M_2, \ldots, M_s$ — области значений соответствующих переменных,

$$\overline{\neg\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)} = (M_1 \times \ldots \times M_s) \setminus \overline{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)}. \qquad (7)$$

В (5), (6) (и вообще в подобных случаях) подразумевается, конечно, что каждая из букв $x_1, x_2, \ldots, x_s$ является в обеих формах $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)$ и $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_s)$ одной и той же переменной и имеет, в частности, одну и ту же область значений.

Заметим в заключение, что выражение

$$\mathfrak{A}(x) \,\&\, \mathfrak{B}(y)$$

может зависеть не только от x и y, но и от $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Буквы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ тоже могут быть переменными.

ЗАДАЧИ

1. Выразить область истинности высказывательной формы $\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_s)$ через области истинности высказывательных форм $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)$ и $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_s)$, если

a) $\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_s) \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \to \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_s)$,

b) $\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_s) \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \rightleftarrows \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_s)$.

2. Нарисовать на координатной плоскости область истинности высказывательной формы $\mathfrak{C}(x, y)$ с числовыми переменными x, y, если

a) $\mathfrak{C}(x, y) \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} [y = x^2]$,

b) $\mathfrak{C}(x, y) \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} [2x + 3y - 1 > 0]$,

c) $\mathfrak{C}(x, y) \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} [\sin(x + y) = 0]$.

§ 3. Кванторы[1])

Рассмотрим две операции, применимые только к высказывательным формам, но не к высказываниям. Эти операции, так называемые операции *навешивания кванторов*, будучи примененными к высказывательной форме, приводят либо снова к высказывательной форме, либо к высказыванию.

Начнем с простейшего случая. Пусть $\mathfrak{A}(x)$ — *одноместная* высказывательная форма; область значений переменной x — множество M. Обозначим через

$$(\forall x \in M)\,\mathfrak{A}(x) \tag{1}$$

или, если область значений переменной x ясна из контекста, через

$$(\forall x)\,\mathfrak{A}(x) \tag{2}$$

следующее высказывание: „*для любого* значения переменной x высказывание, получающееся подстановкой этого значения в форму $\mathfrak{A}$ вместо x, истинно". Разумеется, высказывание, обозначенное выражениями (1) или (2), может быть для одной формы $\mathfrak{A}$ истинным, для другой — ложным. Высказывание, обозначенное выражениями (1), (2), часто читают короче: „для любого $x \in M$ $\mathfrak{A}(x)$ истинно" или „для любого x $\mathfrak{A}(x)$". Букву $\forall$ называют *квантором общности*, выражения $(\forall x \in M)$ и $(\forall x)$ — *квантором общности по переменной* x, переход от формы $\mathfrak{A}$ к высказыванию (1), (2) — *навешиванием* на форму $\mathfrak{A}$ *квантора общности* по переменной x *) [2]).

Обозначим через

$$(\exists x \in M)\,\mathfrak{A}(x) \tag{3}$$

или через

$$(\exists x)\,\mathfrak{A}(x) \tag{4}$$

следующее высказывание: „*существует* такое значение переменной x, что высказывание, получающееся подстановкой этого значения в форму $\mathfrak{A}$ вместо x, истинно". Это же высказывание часто читают короче: „существует такое $x \in M$, что $\mathfrak{A}(x)$ истинно" или „существует такое x, что $\mathfrak{A}(x)$". Буква $\exists$ называется *квантором существования*, выражения $(\exists x \in M)$ и $(\exists x)$ — *квантором существования по переменной* x, переход от формы $\mathfrak{A}$ к выска-

*) Буква $\forall$ является перевернутой первой буквой слов all (англ.), alle (нем.). В некоторых французских книгах в аналогичной роли используется буква T (tous).

зыванию (3), (4) — *навешиванием* на форму $\mathfrak{A}$ *квантора существования* по переменной x *) [3]).

В выражениях (1), (2), (3), (4) буква x является связанной переменной: *навешивание квантора связывает переменную.* От x эти выражения не зависят. В то же время эти выражения могут зависеть от $\mathfrak{A}$ и M. Если $\mathfrak{A}$ и M не фиксированы, то (1) — (4) являются не высказываниями, а высказывательными формами; если же $\mathfrak{A}$ и M фиксированы, обозначают какие-то конкретные высказывательную форму и множество, то (1) — (4) — высказывания **).

Пример 1) Пусть область значений переменной x — множество $\mathbf{D}$. Тогда $(\forall x)[x^2 \geqslant 0]$ и $(\exists x)[|x| \leqslant 0]$ — истинные высказывания, $(\forall x)[x^2 > 0]$ и $(\exists x)[x^2+1=0]$ — ложные высказывания.

Оговорим специально тот крайний, вырожденный, неинтересный случай, когда область значений переменной x есть пустое множество. Положим в этом случае для любой формы $\mathfrak{A}(x)$

$$(\forall x \in \varnothing)\, \mathfrak{A}(x) \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \boldsymbol{u}, \tag{5}$$

$$(\exists x \in \varnothing)\, \mathfrak{A}(x) \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \boldsymbol{л}. \tag{6}$$

Определение (6) безусловно покажется читателю естественным. Если же высказывание (1) прочесть в виде „для любого x: если $x \in M$, то $\mathfrak{A}(x)$", то будет видно, что определение (5) хорошо соответствует нашему соглашению о „ложности посылки" (§ 1 гл. 1).

Если $M \neq \varnothing$, то, очевидно, из истинности (1) вытекает истинность (3). При $M = \varnothing$ это, в силу (5), (6), не верно.

Квантор общности является обобщением, аналогом конъюнкции, а квантор существования — обобщением, аналогом дизъюнкции на произвольное, не обязательно конечное, множество. Это видно, например, из двух следующих утверждений.

*) Буква $\exists$ является перевернутой первой буквой слов exist (англ.), exister (франц.), existieren (нем.).

**) Ср. с последним абзацем § 2.

Пусть $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Тогда для любой формы $\mathfrak{A}(x)$

$$(\forall x \in M)\, \mathfrak{A}(x) \equiv \mathfrak{A}(a_1) \,\&\, \mathfrak{A}(a_2) \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}(a_n), \tag{7}$$

$$(\exists x \in M)\, \mathfrak{A}(x) \equiv \mathfrak{A}(a_1) \vee \mathfrak{A}(a_2) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(a_n). \tag{8}$$

Указанная аналогия подкрепляется следующими важными утверждениями, в которых область значений переменной M уже не обязательно конечна.

$$\neg (\forall x)\, \mathfrak{A}(x) \equiv (\exists x) \neg \mathfrak{A}(x), \tag{9}$$

$$\neg (\exists x)\, \mathfrak{A}(x) \equiv (\forall x) \neg \mathfrak{A}(x). \tag{10}$$

Утверждения (9), (10) являются аналогами законов де Моргана. Их естественно приписать к третьей группе равносильностей из § 1.

Докажем (9). Фиксируем произвольную форму $\mathfrak{A}(x)$. Пусть высказывание $\neg (\forall x)\, \mathfrak{A}(x)$ истинно. Тогда, по определению отрицания, $(\forall x)\, \mathfrak{A}(x)$ ложно. Следовательно, не для любого значения переменной x высказывание $\mathfrak{A}(x)$ истинно. Значит, существует такое значение переменной x, для которого $\mathfrak{A}(x)$ ложно. Обозначим *одно из таких* значений через a *). Итак, $a \in M$ и $\mathfrak{A}(a)$ ложно. Следовательно, $\neg \mathfrak{A}(a)$ истинно. Значит, существует такое x, что $\neg \mathfrak{A}(x)$ истинно, т. е. $(\exists x) \neg \mathfrak{A}(x)$ истинно. Пусть теперь высказывание $(\exists x) \neg \mathfrak{A}(x)$ истинно. Тогда, по определению квантора существования, существует такое значение переменной x, что $\neg \mathfrak{A}(x)$ истинно. Обозначим *одно из таких* значений через a *). Итак, $a \in M$ и $\neg \mathfrak{A}(a)$ истинно. Следовательно, $\mathfrak{A}(a)$ ложно. Но тогда, по определению квантора общности, ложно и $(\forall x)\, \mathfrak{A}(x)$, а значит, $\neg (\forall x)\, \mathfrak{A}(x)$ истинно. Равносильность (9) доказана. (10) доказывается аналогично.

Прежде чем переходить к общему случаю, рассмотрим еще один простой случай. Пусть $\mathfrak{A}(x, y)$ — *двухместная* высказывательная форма; область значений переменной

---

*) Полезно заметить, что употребление слова „это“ вместо слов „одно из таких“ в этой фразе неуместно, так как значений переменной, о которых идет речь, может быть много. Мы берем любое из них.

x — множество M, переменной y — множество L. В силу введенных выше обозначений выражения

$$(\forall x \in M)\,\mathfrak{A}(x,\ y), \qquad (\forall x)\,\mathfrak{A}(x,\ y), \tag{11}$$

$$(\forall y \in L)\,\mathfrak{A}(x,\ y), \qquad (\forall y)\,\mathfrak{A}(x,\ y), \tag{12}$$

$$(\exists x \in M)\,\mathfrak{A}(x,\ y), \qquad (\exists x)\,\mathfrak{A}(x,\ y), \tag{13}$$

$$(\exists y \in L)\,\mathfrak{A}(x,\ y), \qquad (\exists y)\,\mathfrak{A}(x,\ y) \tag{14}$$

являются *одноместными* высказывательными формами, зависящими, соответственно, от y, x, y и x. Поскольку (11) — (14) являются одноместными высказывательными формами, на каждую из них можно навесить каждый из двух кванторов. При этом получится восемь высказываний. Без указания областей значений переменных эти восемь высказываний выглядят так:

$$(\forall y)\,(\forall x)\,\mathfrak{A}(x,\ y) \tag{15}$$

(читается: „для любого y и для любого x $\mathfrak{A}(x,\ y)$“),

$$(\forall x)\,(\forall y)\,\mathfrak{A}(x,\ y) \tag{16}$$

(„для любого x и для любого y $\mathfrak{A}(x,\ y)$“),

$$(\exists y)\,(\exists x)\,\mathfrak{A}(x,\ y) \tag{17}$$

(„существует такое y и существует такое x, что $\mathfrak{A}(x,\ y)$“),

$$(\exists x)\,(\exists y)\,\mathfrak{A}(x,\ y) \tag{18}$$

(„существует такое x и существует такое y, что $\mathfrak{A}(x,\ y)$“),

$$(\forall y)\,(\exists x)\,\mathfrak{A}(x,\ y) \tag{19}$$

(„для любого y существует такое x, что $\mathfrak{A}(x,\ y)$“),

$$(\exists x)\,(\forall y)\,\mathfrak{A}(x,\ y) \tag{20}$$

(„существует такое x, что для любого y $\mathfrak{A}(x,\ y)$“),

$$(\forall x)\,(\exists y)\,\mathfrak{A}(x,\ y) \tag{21}$$

(„для любого x существует такое y, что $\mathfrak{A}(x,\ y)$“),

$$(\exists y)\,(\forall x)\,\mathfrak{A}(x,\ y) \tag{22}$$

(„существует такое y, что для любого x $\mathfrak{A}(x,\ y)$“).

Пример 2) Пусть область значений переменных x и y — множество $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\{z \in \mathbf{D} \mid z \geqslant 0\}$. Тогда выражения

$$(\forall x)[x \geqslant y] \qquad (\forall y)[x \geqslant y]$$
$$(\exists x)[x \geqslant y] \qquad (\exists y)[x \geqslant y]$$

являются одноместными высказывательными формами. Форма $(\forall x)[x \geqslant y]$ истинна при $y = 0$, так как для любого $a \in M$ имеем $a \geqslant 0$. При любом $y \neq 0$ форма $(\forall x)[x \geqslant y]$ ложна, так как если $a \in M$ и $a \neq 0$, то $\frac{a}{2} \in M$ и $\frac{a}{2} < a$. Форма $(\forall y)[x \geqslant y]$ ложна при любом значении переменной x, так как, если бы она была истинной при $x = a \in M$, это означало бы, что a — наибольшее действительное число. Форма $(\exists x)[x \geqslant y]$ истинна при любом y, хотя бы в силу того, что для $a \in M$ имеем $a \geqslant a$. По аналогичной причине истинна при всех x форма $(\exists y)[x \geqslant y]$. Высказывание $(\forall y)(\forall x)[x \geqslant y]$ ложно, так как не при всех y (см. выше) истинна форма $(\forall x)[x \geqslant y]$. Высказывание $(\forall x)(\forall y)[x \geqslant y]$ ложно по аналогичной причине. Высказывание $(\exists y)(\exists x)[x \geqslant y]$ истинно, так как при $y = 17$ (а также при любом другом y) форма $(\exists x)[x \geqslant y]$ истинна (см. выше). По аналогичной причине истинно высказывание $(\exists x)(\exists y)[x \geqslant y]$. Высказывание $(\exists y)(\forall x)[x \geqslant y]$ истинно (см. выше). Высказывание $(\forall x)(\exists y)[x \geqslant y]$ также истинно, так как форма $(\exists y)[x \geqslant y]$ истинна для любого x (см. выше). Высказывание $(\forall y)(\exists x)[x \geqslant y]$ истинно по аналогичной причине, но высказывание $(\exists x)(\forall y)[x \geqslant y]$ ложно, так как не существует такого x (см. выше), для которого была бы истинна форма $(\forall y)[x \geqslant y]$.

Правила, аналогичные правилам (9), (10), верны также для форм (11)—(14) и высказываний (15)—(22). Например,

$$\neg(\forall x)\mathfrak{A}(x, y) \equiv (\exists x)\neg\mathfrak{A}(x, y), \tag{23}$$
$$\neg(\exists y)\mathfrak{A}(x, y) \equiv (\forall y)\neg\mathfrak{A}(x, y), \tag{24}$$
$$\neg(\exists x)(\forall y)\mathfrak{A}(x, y) \equiv (\forall x)(\exists y)\neg\mathfrak{A}(x, y), \tag{25}$$
$$\neg(\forall y)(\exists x)\mathfrak{A}(x, y) \equiv (\exists y)(\forall x)\neg\mathfrak{A}(x, y). \tag{26}$$

Словами правило, выражаемое равносильностями (9), (10), (23) — (26) и всеми аналогичными им равносильностями, можно сформулировать так: *чтобы найти отрицание выражения, начинающегося с кванторов, надо каждый квантор заменить на двойственный* (т. е. квантор общности на квантор существования и наоборот) *и перенести знак отрицания за кванторы.*

Докажем равносильность (23). Фиксируем форму $\mathfrak{A}$ и возьмем произвольное значение переменной y, скажем, $b \in L$. Нам надо доказать, что

$$\neg (\forall x)\, \mathfrak{A}(x,\ b) \equiv (\exists x) \neg \mathfrak{A}(x,\ b). \tag{27}$$

Рассмотрим выражение $\neg (\forall x)\, \mathfrak{A}(x,\ b)$. Оно представляет собой отрицание результата навешивания квантора общности на одноместную форму $\mathfrak{A}(x,\ b)$. Следовательно, (27) вытекает из (9). Но (27), вследствие произвольности выбора значения переменной y, означает (23).

Докажем равносильность (25). Рассмотрим выражение $\neg (\exists x)(\forall y)\, \mathfrak{A}(x,\ y)$. Оно представляет собой отрицание результата навешивания квантора существования на одноместную форму (12). Следовательно, в силу (10),

$$\neg (\exists x)(\forall y)\, \mathfrak{A}(x,\ y) \equiv (\forall x) \neg (\forall y)\, \mathfrak{A}(x,\ y) \tag{28}$$

В силу (23) или, точнее, аналога (23),

$$\neg (\forall y)\, \mathfrak{A}(x,\ y) \equiv (\exists y) \neg \mathfrak{A}(x,\ y). \tag{29}$$

Заменяя в (28) левую часть равносильности (29) на правую, получаем (25).

Между высказываниями (15) — (22) имеются некоторые связи. Легко видеть, что

$$(\forall x)(\forall y)\, \mathfrak{A}(x,\ y) \equiv (\forall y)(\forall x)\, \mathfrak{A}(x,\ y), \tag{30}$$

$$(\exists x)(\exists y)\, \mathfrak{A}(x,\ y) \equiv (\exists y)(\exists x)\, \mathfrak{A}(x,\ y). \tag{31}$$

Словами: одноименные кванторы можно переставлять. „Разноименные“ кванторы можно переставлять только „в одну сторону“.

$$\text{Если } (\exists x)(\forall y)\, \mathfrak{A}(x,\ y) \equiv \boldsymbol{u}, \text{ то } (\forall y)(\exists x)\, \mathfrak{A}(x,\ y) \equiv \boldsymbol{u}. \tag{32}$$

$$\text{Если } (\exists y)(\forall x)\, \mathfrak{A}(x,\ y) \equiv \boldsymbol{u}, \text{ то } (\forall x)(\exists y)\, \mathfrak{A}(x,\ y) \equiv \boldsymbol{u}. \tag{33}$$

Одной из распространеннейших и грубейших ошибок студентов является применение правила перестановки „разноименных“ кванторов, выражаемого утверждениями (32), (33), в обратную сторону. Между тем утверждение

$$\text{если } (\forall y)(\exists x)\,\mathfrak{A}(x, y) \equiv \boldsymbol{u}, \text{ то } (\exists x)(\forall y)\,\mathfrak{A}(x, y) \equiv \boldsymbol{u} \qquad (34)$$

не верно. Например, $(\forall y)(\exists x)[x \geqslant y] \equiv \boldsymbol{u}$, однако $(\exists x)(\forall y)\ [x \geqslant y] \equiv \boldsymbol{л}$ (см. пример 2)[4]).

Утверждения (32), (33) почти очевидны. Докажем все-таки утверждение (32). Пусть для некоторой формы $\mathfrak{A}$ высказывание $(\exists x)(\forall y)\,\mathfrak{A}(x, y)$ истинно. Докажем, что тогда истинно и высказывание $(\forall y)(\exists x)\,\mathfrak{A}(x, y)$. Возьмем произвольное значение переменной y, скажем, b. Чтобы доказать истинность высказывания $(\forall y)(\exists x)\,\mathfrak{A}(x, y)$, нужно доказать истинность высказывания $(\exists x)\,\mathfrak{A}(x, b)$. По условию существует такое значение переменной x, при котором форма $(\forall y)\,\mathfrak{A}(x, y)$ истинна. Обозначим *одно из таких* значений через a. Итак, $a \in M$ и $(\forall y)\,\mathfrak{A}(a, y)$ истинно. *Именно это* значение a мы и возьмем для доказательства истинности высказывания $(\exists x)\,\mathfrak{A}(x, b)$. Докажем, что $\mathfrak{A}(a, b)$ истинно. Тем самым высказывание $(\exists x)\,\mathfrak{A}(x, b)$ будет доказано. Но $\mathfrak{A}(a, b)$ истинно в силу истинности высказывания $(\forall y)\,\mathfrak{A}(a, y)$ (см. выше) и определения квантора общности.

Пусть, наконец, $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)$ — s-местная высказывательная форма ($s \geqslant 2$); область значений переменной x_1 — множество M_1, область значений переменной x_2 — множество M_2 и т. д. В силу введенных выше обозначений для любого i, $1 \leqslant i \leqslant s$, выражения

$$(\forall x_i \in M_i)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s), \qquad (\forall x_i)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s), \qquad (35)$$

$$(\exists x_i \in M_i)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s), \qquad (\exists x_i)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \qquad (36)$$

являются $(s-1)$-местными высказывательными формами, зависящими от (свободных) переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s$. Буква x_i в выражениях (35), (36) является связанной переменной. *Навешивание квантора по* переменной x_i *связывает переменную* x_i.

По определению квантора общности высказывание

$$(\forall x_i)\,\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_s) \qquad (37)$$

истинно тогда и только тогда, когда *для любого* значения

$a_i \in M_i$ переменной x_i высказывание

$$\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_s) \tag{38}$$

истинно.

По определению квантора существования высказывание

$$(\exists x_i)\, \mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_s) \tag{39}$$

истинно тогда и только тогда, когда *существует* такое значение $a_i \in M_i$ переменной x_i, для которого высказывание (38) истинно.

Навешивая на каждую из $(s-1)$-местных высказывательных форм (35), (36) любой из кванторов по любой из свободных переменных, мы получим (при $s>2$) $(s-2)$-местные высказывательные формы или (при $s=2$) высказывания, и т. д. После того как навешено уже s кванторов, получаются высказывания.

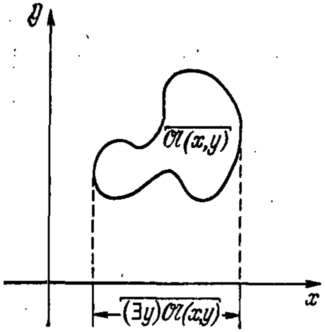


Рис. 17.

Подмеченные выше закономерности остаются верными и в общем случае.

(I) Отрицание выражения, начинающегося с кванторов, получается заменой каждого квантора на двойственный и перенесением знака отрицания за кванторы.

В общем виде это утверждение доказывается индукцией по числу кванторов. Базисом индукции являются равносильности (9), (10) и

$$\neg(\forall x_i)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \equiv (\exists x_i) \neg \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s), \tag{40}$$

$$\neg(\exists x_i)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \equiv (\forall x_i) \neg \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s). \tag{41}$$

Равносильности (40), (41) доказываются так же, как (23), (24).

(II) Одноименные кванторы можно переставлять

$$(\forall x_i)(\forall x_j)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \equiv (\forall x_j)(\forall x_i)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s), \tag{42}$$

$$(\exists x_i)(\exists x_j)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \equiv (\exists x_j)(\exists x_i)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s). \tag{43}$$

(III) Разноименные кванторы можно переставлять только в одну сторону:

$$\text{если } (\exists x_i)(\forall x_j)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \equiv u,$$
$$\text{то } (\forall x_j)(\exists x_i)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \equiv u. \tag{44}$$

Обратное, вообще говоря, неверно.

Заметим, что утверждение (44) можно выразить еще и так:

$$(\exists x_i)(\forall x_j)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \longrightarrow (\forall x_j)(\exists x_i)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \equiv u. \tag{45}$$

В § 2 мы видели (см. (5) — (7)), что операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания очень просто влияют на области истинности форм, к которым они применяются. Операция навешивания квантора существования также очень просто влияет на область истинности. А именно, легко видеть, что при естественной нумерации переменных в формах $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)$, $(\exists x_i)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)$ (см. § 2), т. е., если

$$\overline{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)} \subseteq M_1 \times \ldots \times M_{i-1} \times M_i \times M_{i+1} \times \ldots \times M_s,$$

$$\overline{(\exists x_i)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)} \subseteq M_1 \times \ldots \times M_{i-1} \times M_{i+1} \times \ldots \times M_s,$$

имеем равенство

$$\overline{(\exists x_i)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)} = \text{пр}_{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, s}\overline{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)}. \tag{46}$$

(Для $s = 2$, $i = 2$, $M_1 = \mathbf{D}$, $M_2 = \mathbf{D}$ см. рис. 17.) Докажем утверждение (46). Оно представляет собой равенство двух множеств и доказывается, как обычно, двумя „включениями“. Положим

$$A \underset{\text{Df}}{=} \overline{(\exists x_i)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)},$$

$$B \underset{\text{Df}}{=} \text{пр}_{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, s}\,\overline{\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)}.$$

Докажем, что $A \subseteq B$. Пусть $\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_s\rangle \in A$. По определению области истинности высказывание (39) истинно. По определению квантора существования существует такое значение переменной x_i, для которого форма

$$\mathfrak{A}(a_1, \ \ldots, \ a_{i-1}, \ x_i, \ a_{i+1}, \ \ldots, \ a_s) \tag{47}$$

истинна. Обозначим *одно из таких* значений через a_i. Итак, $a_i \in M_i$ и высказывание (38) истинно. Учитывая, что

$$\langle a_1, \ \ldots, \ a_{i-1}, \ a_i, \ a_{i+1}, \ \ldots, \ a_s \rangle \in M_1 \times \ldots \times M_{i-1} \times M_i \times \\ \times M_{i+1} \times \ldots \times M_s,$$

по определению области истинности

$$\langle a_1, \ \ldots, \ a_{i-1}, \ a_i, \ a_{i+1}, \ \ldots, \ a_s \rangle \in \overline{\mathfrak{A}(x_1, \ \ldots, \ x_s)} \tag{48}$$

и, следовательно, $\langle a_1, \ \ldots, \ a_{i-1}, \ a_{i+1}, \ \ldots, \ a_s \rangle \in B$. Пусть теперь, обратно, $\langle a_1, \ \ldots, \ a_{i-1}, \ a_{i+1}, \ \ldots, \ a_s \rangle \in B$. По определению проекции множества в $\overline{\mathfrak{A}(x_1, \ \ldots, \ x_s)}$ существует такой кортеж, проекцией которого является $\langle a_1, \ \ldots, \ a_{i-1}, a_{i+1}, \ \ldots, \ a_s \rangle$, т. е., другими словами, в M_i существует такое a_i, что выполняется (48). Из (48) следует истинность высказывания (38). Значит, существует такое значение переменной x_i, для которого форма (47) истинна, и, следовательно, истинно высказывание (39). Учитывая, что

$$\langle a_1, \ \ldots, \ a_{i-1}, \ a_{i+1}, \ \ldots, \ a_s \rangle \in M_1 \times \ldots \times M_{i-1} \times \\ \times M_{i+1} \times \ldots \times M_s,$$

получаем $\langle a_1, \ \ldots, \ a_{i-1}, \ a_{i+1}, \ \ldots, \ a_s \rangle \in A$.

Полезными в эвристическом плане могут оказаться две вытекающие из предыдущих рассмотрений „таблицы аналогий“ (см. табл. 1, 2).

Таблица 1

&	$\vee$
$\forall$	$\exists$

Таблица 2

&	$\vee$	$\neg$	$\exists$
$\cap$	$\cup$	$\setminus$	пр

Пусть $\mathfrak{A}(x)$ — одноместная высказывательная форма, множество M — область значений переменной x и $A \subset M$. Выражение

$$(\forall x \in A)\, \mathfrak{A}(x) \tag{49}$$

обозначает высказывание „для любого $a \in A$ высказывание $\mathfrak{A}(a)$ истинно", а выражение

$$(\exists x \in A)\, \mathfrak{A}(x) \tag{50}$$

— высказывание „существует такое $a \in A$, что высказывание $\mathfrak{A}(a)$ истинно". Кванторы $(\forall x \in A)$ и $(\exists x \in A)$ называются иногда *ограниченными кванторами*. Ограниченные кванторы связаны с обычными, так сказать, „неограниченными" кванторами двумя важными равносильностями:

$$(\forall x \in A)\, \mathfrak{A}(x) \equiv (\forall x \in M)\, [x \in A \to \mathfrak{A}(x)], \tag{51}$$

$$(\exists x \in A)\, \mathfrak{A}(x) \equiv (\exists x \in M)\, [x \in A \,\&\, \mathfrak{A}(x)]. \tag{52}$$

Доказательство равносильностей (51), (52) предоставляем читателю. Заметим только, что при $A = \varnothing$ эти равносильности верны в силу определений (5), (6).

Указанные выше свойства (I) — (III) операций навешивания „неограниченных" кванторов сохраняются, разумеется, и для ограниченных кванторов. Например,

$$\neg\, (\forall x \in A)\, (\exists y \in B)\, \mathfrak{A}(x, y, z) \equiv (\exists x \in A)\, (\forall y \in B) \neg\, \mathfrak{A}(x, y, z).$$

При использовании ограниченных кванторов часто употребляется более вольная система обозначений. Пусть, например, $\mathfrak{A}(x)$ — одноместная высказывательная форма, область значений переменной x — множество $\mathbf{D}$ и $A \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\{x \in \mathbf{D} \mid x > 0\}$. Тогда вместо $(\forall x \in A)\, \mathfrak{A}(x)$ и $(\exists x \in A)\, \mathfrak{A}(x)$ часто пишут, соответственно, $(\forall x > 0)\, \mathfrak{A}(x)$ и $(\exists x > 0)\, \mathfrak{A}(x)$. Если n — переменная с областью значений $\mathbf{N}$ и $k \in \mathbf{N}$, то выражения $(\forall n \geqslant 3)\, \mathfrak{A}(n)$, $(\forall n : 1 \leqslant n \leqslant k)\, \mathfrak{A}(n)$ означают, соответственно,

$$(\forall n \in \mathscr{E}\{x \in \mathbf{N} \mid x \geqslant 3\})\, \mathfrak{A}(n)$$

и

$$(\forall n \in \mathscr{E}\{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant k\})\, \mathfrak{A}(n).$$

В § 1 мы рассматривали схемы доказательства теорем различного логического строения. Продолжим эти рассмотрения. Если нужно *доказать* теорему вида

$$(\forall x \in M)\, \mathfrak{A}(x), \tag{53}$$

то, как правило, нужно, не задумываясь, брать произвольный элемент множества M, брать его в виде: „пусть a — произвольный элемент множества M“, переходить от теоремы (53) к высказыванию

$$\mathfrak{A}(a) \tag{54}$$

и вместо (53), используя уже специфику данной конкретной теоремы, специфику высказывательной формы $\mathfrak{A}$, доказывать (54). При переходе от (53) к (54) квантор элиминируется и логическая структура теоремы, которую надо доказать, упрощается.

Если же, наоборот, *дано*, находится в нашем распоряжении, является условием высказывание вида (53), то, хотя мы имеем право брать любой элемент $a \in M$ и утверждать, что истинно (54), лучше в этом случае не торопиться с переходом от (53) к (54), потому что выбор того или иного элемента a может существенно упростить, облегчить доказательство. В этом случае надо выбирать $a \in M$ в зависимости от специфики той теоремы, которую надо доказать.

Для квантора существования — наоборот. Если *дано*, является условием высказывание вида

$$(\exists x \in M)\, \mathfrak{A}(x), \tag{55}$$

то, как правило, можно, не задумываясь, обозначать как-нибудь, скажем, a, *один из таких* элементов множества M, подстановка которых в форму $\mathfrak{A}$ вместо переменной x превращает ее в истинное высказывание (такие элементы существуют по определению квантора существования в силу истинности высказывания (55)), переходить от условия (55) к высказыванию (54) и в дальнейшем доказательстве опираться на (54), а не на (55). При переходе от (55) к (54) квантор элиминируется, логическая структура условия упрощается, оно становится более удобным для использования.

Если же теорему вида (55) надо *доказать*, то надо, исходя из специфики данной конкретной теоремы, быть может, предварительно проведя какой-то анализ, эвристическую часть, предъявить какого-то кандидата $a \in M$ и попробовать доказать (54). Если (54) удастся доказать, тем самым теорема (55) будет доказана. Если (54) не удастся доказать, то отсюда еще не следует, что теорема (55) не верна.

Отсюда следует только, что одно из двух: либо теорема (55) не верна, либо мы выбрали плохого кандидата и надо искать какой-то другой элемент $b \in M$, для которого высказывание $\mathfrak{A}(b)$ будет истинным. Полезно заметить, что эвристическая часть (поиски кандидата a) не является частью доказательства. Формально говоря, она не обязательна. (По существу, без нее, конечно, не найдешь чаще всего нужного кандидата.) Можно взять „с потолка" элемент $a \in M$ и доказывать для этого a (54). Если это удастся, теорема (55) доказана. Объяснение, почему выбран тот или иной кандидат $a \in M$, *не является* составной частью доказательства.

Вторым важнейшим (после „равенств с множествами" — см. § 3 гл. II) типом задач являются задачи на доказательство равносильностей высказывательных форм и высказываний. [Простейший случай, когда высказывательные формы зависят только от высказывательных переменных, в счет не идет: равносильность двух таких форм всегда может быть доказана или опровергнута методом истинностных таблиц (см. § 1).] Выше мы доказали равносильности (9), (23), (25). Докажем для примера еще одну, несколько неожиданную равносильность

$$(\exists x)[\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x)] \equiv (\forall x)\,\mathfrak{A}(x) \to (\exists x)\,\mathfrak{B}(x). \tag{56}$$

Выражения в (56), равносильность которых надо доказать, могут зависеть только от $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. От x они не зависят. Буква x является связанной переменной. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — имена высказывательных форм, то эти выражения — высказывания. С другой стороны, каждую из этих букв можно считать переменной. Тогда эти выражения — высказывательные формы. Фиксируем две произвольные одноместные высказывательные формы $\mathfrak{A}(x)$, $\mathfrak{B}(x)$; обозначим область значений переменной x (в обеих формах она предполагается, разумеется, одинаковой) через M. Пусть высказывание

$$(\exists x)[\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x)] \tag{57}$$

истинно. Докажем, что тогда истинно высказывание

$$(\forall x)\,\mathfrak{A}(x) \to (\exists x)\,\mathfrak{B}(x). \tag{58}$$

Для доказательства истинности импликации (58) предположим, что истинна посылка импликации

$$(\forall x)\,\mathfrak{A}(x). \tag{59}$$

Докажем, что тогда истинно ее заключение

$$(\exists x)\,\mathfrak{B}(x). \tag{60}$$

Вследствие истинности высказывания (57) *существует* такой элемент множества M, подстановка которого вместо переменной x в форму $\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(x)$ превращает ее в истинное высказывание. Обозначим *один из таких* элементов через a. Итак, $a \in M$ и высказывание

$$\mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B}(a) \tag{61}$$

истинно. Докажем, что для этого a истинно

$$\mathfrak{B}(a). \tag{62}$$

Тем самым высказывание (60) будет доказано. В силу истинности высказывания (59) подстановка любого элемента множества M вместо переменной x в форму $\mathfrak{A}(x)$ превращает ее в истинное высказывание. В частности, истинно высказывание

$$\mathfrak{A}(a). \tag{63}$$

Из истинности высказываний (61) и (63) вытекает истинность высказывания (62). Пусть теперь истинно высказывание (58). Докажем, что тогда истинно высказывание (57). Поскольку высказывание (58) истинно, ложно $(\forall x)\,\mathfrak{A}(x)$ или истинно $(\exists x)\,\mathfrak{B}(x)$ (см. (18) из § 1). Рассмотрим два случая. Пусть сначала ложно $(\forall x)\,\mathfrak{A}(x)$. Тогда истинно $\neg(\forall x)\,\mathfrak{A}(x)$ или, в силу (9), $(\exists x)\neg\mathfrak{A}(x)$. Истинность $(\exists x)\neg\mathfrak{A}(x)$ влечет существование такого элемента множества M, подстановка которого вместо переменной x в форму $\neg\mathfrak{A}(x)$ превращает ее в истинное высказывание. Обозначим *один из таких* элементов через a. Итак, $a \in M$ и высказывание

$$\neg\mathfrak{A}(a) \tag{64}$$

истинно. Докажем, что для этого a истинно высказывание (61). Тем самым истинность высказывания (57) в этом случае будет доказана. Поскольку высказывание (64) истинно, высказывание (63) ложно, а тогда импликация (61) истинна тривиальным образом. Рассмотрим второй случай. Пусть истинно (60). Тогда существует такой элемент множества M, подстановка которого вместо переменной x в форму $\mathfrak{B}(x)$ превращает ее в истинное высказывание. Обозначим *один из таких* элементов через a. Итак, $a \in M$ и истинно высказывание (62). Докажем, что для этого a истинно (61). Тем самым истинность (57) во втором случае также будет доказана. Но истинность (61) вытекает из истинности (62) прямо по определению импликации.

Равносильность (56), помимо того общего, универсального метода рассуждений, которым мы ее доказали, можно доказать и „преобразованиями", если опираться на некоторые другие равносильности

$$\begin{aligned}(\exists x)\,[\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(x)] &\equiv (\exists x)\,[\neg\,\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}(x)] \equiv \\ &\equiv (\exists x)\,\neg\,\mathfrak{A}(x) \vee (\exists x)\,\mathfrak{B}(x) \equiv \\ &\equiv \neg\,(\forall x)\,\mathfrak{A}(x) \vee (\exists x)\,\mathfrak{B}(x) \equiv \\ &\equiv (\forall x)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow (\exists x)\,\mathfrak{B}(x).\end{aligned}$$

В этой выкладке мы, кроме тех равносильностей, которые указаны выше, опирались также на

$$A \rightarrow B \equiv \neg\, A \vee B, \tag{65}$$

$$(\exists x)\,[\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}(x)] \equiv (\exists x)\,\mathfrak{A}(x) \vee (\exists x)\,\mathfrak{B}(x). \tag{66}$$

В § 1 гл. I мы назвали взаимно обратными теоремами теоремы вида $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$, взаимно противоположными теоремами — теоремы вида $A \rightarrow B$, $\neg A \rightarrow \neg B$, где A и B — высказывания. Введем еще одно употребление этих терминов. Пусть $\mathfrak{A}(x)$, $\mathfrak{B}(x)$ — одноместные высказывательные формы. Образуем из них четыре теоремы:

$$(\forall x)\,[\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(x)], \tag{67}$$

$$(\forall x)\,[\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(x)], \tag{68}$$

$$(\forall x)\,[\neg\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow \neg\,\mathfrak{B}(x)], \tag{69}$$

$$(\forall x)\,[\neg\,\mathfrak{B}(x) \rightarrow \neg\,\mathfrak{A}(x)]. \tag{70}$$

Теоремы (67), (68) также называются *взаимно обратными* теоремами, теоремы (67), (69) — *взаимно противоположными* теоремами. Взаимно обратные теоремы (67), (68) (а также взаимно противоположные теоремы (67), (69)) не зависят друг от друга: они могут быть одновременно истинными, одновременно ложными *) и, наконец, одна из них может быть истинной, другая — ложной. Теоремы (67), (70) равносильны

$$(\forall x)[\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(x)] \equiv (\forall x)[\neg\mathfrak{B}(x) \rightarrow \neg\mathfrak{A}(x)]. \quad (71)$$

Равносильность (71) также называется *законом контрапозиции*.

Кванторы

$$(\forall x \in M), \qquad (\exists x \in M)$$

немного похожи на оператор

$$\mathscr{E}\{x \in M \mid \}.$$

И кванторы и этот оператор действуют на высказывательные формы:

$$(\forall x \in M)\,\mathfrak{A}(x), \qquad (\exists x \in M)\,\mathfrak{A}(x),$$
$$\mathscr{E}\{x \in M \mid \mathfrak{A}(x)\}.$$

И кванторы и оператор $\mathscr{E}$ связывают переменную [5]). Разница между кванторами $\forall$, $\exists$ и оператором $\mathscr{E}$ состоит в том, что результат навешивания кванторов на высказывательную форму есть высказывание (или высказывательная форма), а результат применения оператора $\mathscr{E}$ к высказывательной форме есть множество (или форма). В отличие от кванторов $\forall$, $\exists$ и оператора $\mathscr{E}$ операторы Σ, Π (§ 2 гл. I) действуют на числовые формы. Результатом применения операторов Σ, Π к числовой форме является число (или числовая форма). Подобно кванторам и оператору $\mathscr{E}$ операторы Σ, Π связывают переменную.

Сделаем два заключительных замечания. Одно замечание будет относиться к *написанию* математических выражений, к письменному математическому языку, другое — к *произношению* математических выражений, к устному математическому языку.

Примем одно соглашение, относящееся к написанию математических утверждений. Прежде всего заметим, что выражение, являющееся *высказыванием*, не может,

*) Ср. со стр. 34.

не должно содержать свободных переменных. (Связанные переменные, разумеется, могут быть.) Очень часто в математике приходится иметь дело с высказываниями, имеющими вид высказывательной формы, на которую навешены один или несколько кванторов общности.

Примеры: 3) Пусть x, y, z — переменные с областью значений $\mathbf{D}$. Тогда

$$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,[x<y \rightleftarrows x+z<y+z]. \qquad (72)$$

Выражение (72) является теоремой, причем верной теоремой.

4) Пусть x, y, z — переменные с той же областью значений. Множество M действительных чисел (т. е. подмножество множества $\mathbf{D}$) называется *промежутком*, если

$$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,[x\in M\,\&\,y\in M\,\&\,x<z<y \to z\in M]. \qquad (73)$$

Выражение (73) является высказыванием (началом фразы M как бы фиксируется), но не теоремой. Впрочем, я не настаиваю на четкости этого различения.

Условимся разрешать при написании высказывания, имеющего вид высказывательной формы, на которую навешены кванторы *общности*, эти ***кванторы общности*** (стоящие впереди) ***опускать***. Так, теорему (72) можно теперь написать короче

$$x<y \rightleftarrows x+z<y+z. \qquad (74)$$

Определение промежутка тоже можно написать короче. Множество $M \subseteq \mathbf{D}$ называется *промежутком*, если

$$x\in M\,\&\,y\in M\,\&\,x<z<y \to z\in M. \qquad (75)$$

Подчеркнем, что форму (74) можно считать теоремой (т. е. высказыванием) только потому, что под формой (74) мы подразумеваем, на основании нашего соглашения, результат навешивания на нее кванторов общности по всем ее свободным переменным (в силу свойства (II) или (42) порядок навешивания кванторов общности безразличен), т. е., например, высказывание (72).

Повторяю еще раз: когда в качестве высказывания подается высказывательная форма, то подразумевается результат навешивания на эту форму кванторов общности по всем ее свободным переменным *).

Между прочим, по существу введенным только что соглашением читатель пользуется уже давно. Еще со времен первого знакомства с теоремой

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \tag{76}$$

он бессознательно понимал, что под „теоремой" (76) и всеми подобными теоремами подразумеваются теорема

$$(\forall x)(\forall y)\,[(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$$

и аналогичные замыкания других „теорем".

Стоит еще раз предупредить, что принятое соглашение относится только к кванторам *общности* и вдобавок только к кванторам общности, стоящим *впереди* высказывания. Так, теорему

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)\,[x < y \rightarrow x < z < y] \tag{77}$$

можно, ввиду принятого соглашения, записать как

$$(\exists z)\,[x < y \rightarrow x < z < y],$$

но нельзя, конечно, записать в виде

$$x < y \rightarrow x < z < y. \tag{78}$$

Если форму (78) подать как теорему, то под ней надо подразумевать не теорему (77), а теорему

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\,[x < y \rightarrow x < z < y]. \tag{79}$$

Между прочим, если x, y, z — переменные с областью значений **D**, то теорема (77) верна (см., например, задачу 7 к § 1 раздела Б), а теорема (79) не верна.

Приведем еще один пример. Теорему

$$(\forall x)(\exists z)(\forall y)\,[x < y \rightarrow x < z < y] \tag{80}$$

можно, на основании принятого соглашения, записать как

$$(\exists z)(\forall y)\,[x < y \rightarrow x < z < y],$$

---

*) Высказывание, получающееся навешиванием на форму $\mathfrak{A}$ кванторов общности по всем ее свободным переменным, называется иногда *замыканием* формы $\mathfrak{A}$.

но нельзя, разумеется, записать в виде

$$(\exists z)\,[x < y \rightarrow x < z < y]. \tag{81}$$

Если форма (81) подается как теорема, то она обозначает не теорему (80), а теорему (77). Между прочим, если x, y, z — переменные с областью значений **D**, то теорема (80) не верна, а теорема (77) или, что все равно, теорема (81), как уже указывалось выше, верна.

Принятое соглашение позволяет немного добавить к рассмотренному в § 2 вопросу о соотношении между $\equiv$ и $\rightleftarrows$. Утверждение

$$\mathfrak{A}(x,\ y,\ z) \equiv \mathfrak{B}(x,\ y,\ z), \tag{82}$$

в силу сказанного в § 2, равносильно теореме

$$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,[\mathfrak{A}(x,\ y,\ z) \rightleftarrows \mathfrak{B}(x,\ y,\ z)]. \tag{83}$$

На основании принятого соглашения равносильные теоремы (82), (83) можно записать также в виде

$$\mathfrak{A}(x,\ y,\ z) \rightleftarrows \mathfrak{B}(x,\ y,\ z).$$

Итак, например, выражения

$$x < y \equiv x + z < y + z,$$

$$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,[x < y \rightleftarrows x + z < y + z]$$

и

$$x < y \rightleftarrows x + z < y + z \tag{84}$$

означают (*если выражение* (84) ***подается*** *в качестве теоремы*) одно и то же.

Второе замечание относится к *произношению* математических утверждений, содержащих выражения вида $(\forall x)\,\mathfrak{A}(x)$, $(\exists x)\,\mathfrak{A}(x)$. Это замечание вызвано тем печальным обстоятельством, что в устной речи знаки препинания не видны (или, если „видны“, обозначаются интонацией, то это не очень отчетливо при общении); указанное обстоятельство может приводить и, как показывает опыт, часто приводит к двусмысленности, или, хуже того, к подмене одного смысла другим, к логическим ошибкам.

Как было указано в начале параграфа, выражение $(\forall x)\,\mathfrak{A}(x)$ может читаться так: „для любого x $\mathfrak{A}(x)$“.

Если произносящий говорит (фраза (85), так сказать, относится к устной речи, поэтому мы опускаем в ней все знаки препинания):

$$\text{«Для любого } x\ \mathfrak{A}(x) \text{ истинно»,} \tag{85}$$

то не ясно, хочет ли он сказать, что

$$\text{«„Для любого } x\ \mathfrak{A}(x)\text{“ истинно»,} \tag{86}$$

т. е.

$$\text{«}(\forall x)\,\mathfrak{A}(x) \text{ истинно»,} \tag{87}$$

или что

$$\text{«}\mathfrak{A}(x) \text{ истинно для любого } x\text{».} \tag{88}$$

Правда, в данном случае оба смысла — (86) и (88) — фразы (85) равноправны: утверждения (86), (88) равносильны. Не так, однако, обстоит дело с фразой (во фразе (89) мы опускаем все знаки препинания)

$$\text{«Для любого } x\ \mathfrak{A}(x) \text{ ложно».} \tag{89}$$

Если произносящий говорит фразу (89), то не ясно, хочет ли он сказать, что

$$\text{«„Для любого } x\ \mathfrak{A}(x)\text{“ ложно»,} \tag{90}$$

т. е.

$$\text{«}(\forall x)\,\mathfrak{A}(x) \text{ ложно»,} \tag{91}$$

или что

$$\text{«}\mathfrak{A}(x) \text{ ложно для любого } x\text{».} \tag{92}$$

Два возможных смысла — (90) и (92) — фразы (89) уже, очевидно, не равносильны. (90) означает только, что не верно, что $\mathfrak{A}(x)$ истинно для любого x, т. е. что

$$\text{«Существует такое } x\text{, что } \mathfrak{A}(x) \text{ ложно»,} \tag{93}$$

— утверждение, вообще говоря, более слабое, чем (92).

Аналогично обстоит дело с выражением $(\exists x)\,\mathfrak{A}(x)$, одним из разрешенных чтений которого являются слова „существует такое x, что $\mathfrak{A}(x)$“. Фраза (в (94) опущены знаки препинания)

$$\text{«Существует такое } x \text{ что } \mathfrak{A}(x) \text{ истинно»} \tag{94}$$

может означать как

$$\text{«„Существует такое } x\text{, что } \mathfrak{A}(x)\text{“ истинно»,} \tag{95}$$

т. е.

$$«(\exists x)\,\mathfrak{A}(x) \text{ истинно»}, \tag{96}$$

так и

$$«\text{Существует такое } x, \text{ для которого } \mathfrak{A}(x) \text{ истинно»}. \tag{97}$$

Оба смысла — (95) и (97) — фразы (94) равносильны. Однако, фраза (в (98) опущены знаки препинания)

$$«\text{Существует такое } x \text{ что } \mathfrak{A}(x) \text{ ложно»}, \tag{98}$$

которая может означать как

$$«„\text{Существует такое } x, \text{ что } \mathfrak{A}(x)“ \text{ ложно»}, \tag{99}$$

т. е.

$$«(\exists x)\,\mathfrak{A}(x) \text{ ложно»}, \tag{100}$$

так и

$$«\text{Существует такое } x, \text{ для которого } \mathfrak{A}(x) \text{ ложно»}, \tag{101}$$

имеет два неравносильных смысла. (99), очевидно, означает, что не существует такого x, для которого $\mathfrak{A}(x)$ истинно, т. е. что

$$«\mathfrak{A}(x) \text{ ложно для любого } x», \tag{102}$$

— утверждение, вообще говоря, более сильное, чем второй смысл фразы (98) — утверждение (101).

Ввиду вышесказанного, рекомендуется избегать двусмысленных — при устном произношении — фраз типа (85), (89), (94), (98). Желая сказать (86) или (87), лучше, чтобы не сбивать себя и собеседника, *говорить* (во фразе (103) я опускаю знаки препинания):

$$«\text{Истинно что для любого } x\ \mathfrak{A}(x)». \tag{103}$$

Желая сказать (90) или (91), лучше *говорить* (во фразе (104) я опускаю знаки препинания):

$$«\text{Ложно что для любого } x\ \mathfrak{A}(x)». \tag{104}$$

Желая сказать (95) или (96), лучше *говорить* (во фразе (105) я опускаю знаки препинания):

$$«\text{Истинно что существует такое } x \text{ что } \mathfrak{A}(x)». \tag{105}$$

И наконец, желая сказать (99) или (100), лучше *говорить* (во фразе (106) опущены знаки препинания):

$$«\text{Ложно что существует такое } x \text{ что } \mathfrak{A}(x)». \tag{106}$$

ЗАДАЧИ

1. Выразить область истинности высказывательной формы $(\forall x_i)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)$ через область истинности высказывательной формы $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)$. Для $s = 2$, $i = 2$, $M_1 = M_2 = \mathbf{D}$ описать словами изображение на координатной плоскости полученного множества.

Таблица 3

$(\forall y)(\forall x)$	$(\forall x)(\forall y)$	$(\exists y)(\exists x)$	$(\exists x)(\exists y)$	$(\forall y)(\exists x)$	$(\exists x)(\forall y)$	$(\forall x)(\exists y)$	$(\exists y)(\forall x)$
и	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*
и	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*л*
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

2. Рассмотрим табл. 3, в верхней строке которой выписаны все восемь возможных двухкванторных приставок (см. (15)—(22)). Заполним строчки этой таблицы всеми возможными способами буквами *и* и *л*. Очевидно, строк (не считая „входной", верхней строчки) будет $\mathfrak{A}_2^8$, т. е. 256. Поставим себе задачу для каждой из 256 строк придумать такую двухместную высказывательную форму $\mathfrak{A}(x, y)$, чтобы истинностные значения восьми высказываний (15)—(22), полученных навешиванием на нашу форму восьми возможных двухкванторных приставок, совпадали с *соответствующими* истинностными значениями рассматриваемой строчки. Разумеется, эта задача невыполнима. Ввиду свойства (II) (см. стр. 154) для каждой строки, в первом и во втором (или третьем и четвертом) столбце которой стоят разные истинностные значения, искомой формы не существует. Заменим поэтому табл. 3 на табл. 4, в которой это свойство операции навешивания кванторов учтено. Задача состоит в том, чтобы для каждой из $\mathfrak{A}_2^6 = 64$ строк табл. 4 либо придумать пример двухместной высказывательной формы $\mathfrak{A}(x, y)$, соответствующей в вышеописанном смысле данной строчке, либо доказать, что такой формы не существ-

вует. Условимся дополнительно, что обе переменных придумываемой формы должны иметь областью значений **C**. Соображения, подобные тем, которые позволили нам перейти от табл. 3 к табл. 4, помогут найти еще много „пустых"

Таблица 4

$(\forall x)(\forall y)$ $(\forall y)(\forall x)$	$(\exists x)(\exists y)$ $(\exists y)(\exists x)$	$(\forall y)(\exists x)$	$(\exists x)(\forall y)$	$(\forall x)(\exists y)$	$(\exists y)(\forall x)$
и	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*
и	*и*	*и*	*и*	*и*	*л*
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

строк (т. е. строк, для которых искомой формы не существует). Для некоторого психологического облегчения поисков и размышлений укажу, что „не пустых" строк существует меньше двадцати.

3. Сколько различных k-кванторных приставок можно навесить на данную s-местную высказывательную форму $(1 \leqslant k \leqslant s)$? Равносильность многих возникающих при навешивании форм (или высказываний при $k = s$) в этой задаче следует игнорировать.

4. Доказать или опровергнуть, что

a) $(\forall x)[\mathfrak{A}(x) \,\&\, \mathfrak{B}(x)] \equiv (\forall x)\,\mathfrak{A}(x) \,\&\, (\forall x)\,\mathfrak{B}(x)$,

b) $(\forall x)[\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}(x)] \equiv (\forall x)\,\mathfrak{A}(x) \vee (\forall x)\,\mathfrak{B}(x)$,

c) $(\exists x)[\mathfrak{A}(x) \,\&\, \mathfrak{B}(x)] \equiv (\exists x)\,\mathfrak{A}(x) \,\&\, (\exists x)\,\mathfrak{B}(x)$,

d) $(\exists x)[\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}(x)] \equiv (\exists x)\,\mathfrak{A}(x) \vee (\exists x)\,\mathfrak{B}(x)$,

e) $(\forall x)[\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(x)] \equiv (\forall x)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow (\forall x)\,\mathfrak{B}(x)$,

f) $(\exists x)[\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(x)] \equiv (\exists x)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow (\exists x)\,\mathfrak{B}(x)$.

5. Пусть $\mathfrak{A}$ — высказывательная форма, не содержащая свободной переменной x. Доказать или опровергнуть,

что

a) $(\forall x)[\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}(x)] \equiv \mathfrak{A} \mathbin{\&} (\forall x)\mathfrak{B}(x)$,

b) $(\forall x)[\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x)] \equiv \mathfrak{A} \vee (\forall x)\mathfrak{B}(x)$,

c) $(\exists x)[\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}(x)] \equiv \mathfrak{A} \mathbin{\&} (\exists x)\mathfrak{B}(x)$,

d) $(\exists x)[\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x)] \equiv \mathfrak{A} \vee (\exists x)\mathfrak{B}(x)$,

e) $(\forall x)[\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(x)] \equiv \mathfrak{A} \to (\forall x)\mathfrak{B}(x)$,

f) $(\exists x)[\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(x)] \equiv \mathfrak{A} \to (\exists x)\mathfrak{B}(x)$,

g) $(\forall x)[\mathfrak{B}(x) \to \mathfrak{A}] \equiv (\forall x)\mathfrak{B}(x) \to \mathfrak{A}$,

h) $(\exists x)[\mathfrak{B}(x) \to \mathfrak{A}] \equiv (\exists x)\mathfrak{B}(x) \to \mathfrak{A}$.

6. Выразить при помощи наших обозначений высказывание

a) „Существует ровно одно $x \in M$ такое, что $\mathfrak{A}(x)$“. [Это высказывание обозначают иногда через $(\exists! x)\ \mathfrak{A}(x)$ или через $(\exists^1 x)\ \mathfrak{A}(x)$.]

b) „Существует бесконечно много таких $x \in M$, что $\mathfrak{A}(x)$“. [Это высказывание обозначают иногда через $(\exists^\infty x)\ \mathfrak{A}(x)$.]

ГЛАВА V

СООТВЕТСТВИЕ

§ 1. Соответствие *)

Слово „соответствие“ уже встречалось нам в словосочетании „взаимно-однозначное соответствие“ (§ 3 гл. III). Мы не дали пока строгого определения термина „взаимно-однозначное соответствие” (такое определение будет дано в § 2), ограничившись лишь интуитивным описанием ситуации, в которой говорят, что „*между множествами X и Y установлено* ***взаимно-однозначное соответствие***“. На упомянутое интуитивное описание можно взглянуть со следующей, несколько новой стороны: говорят, что между множествами X и Y установлено взаимно-однозначное соответствие, если указано такое подмножество G прямого произведения $X \times Y$, которое обладает некоторыми (фактически перечисленными в § 3 гл. III, я не буду сейчас напоминать или выделять их) свойствами. Таким образом, чтобы между множествами X и Y установить взаимно-однозначное соответствие, нужно выделить график $G \subseteq X \times Y$ с определенными свойствами. Взаимно-однозначное соответствие между множествами X и Y полностью характеризуется, во-первых, самими множествами X и Y и, во-вторых, графиком $G \subseteq X \times Y$. Что же такое само взаимно-однозначное соответствие? Что такое „соответствие“ вообще?

Соответствие — это тройка множеств **), первая компонента которой является подмножеством прямого произведения второй и третьей компонент. Еще раз, по-другому:

---

*) Перед началом чтения этого параграфа рекомендуется внимательно перечитать § 5 гл. III.

**) Т. е. тройка, каждая компонента которой есть множество.

тройка множеств $\langle G, X, Y\rangle$ называется *соответствием*, если $G \subseteq X \times Y$.

Соответствия мы будем в основном обозначать прописными греческими буквами.

Пусть

$$\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, X, Y\rangle \tag{1}$$

— произвольное соответствие. Из определения соответствия следует, что его первая компонента G есть график. График G, т. е. первая компонента соответствия Γ, называется *графиком соответствия*. Множество X, т. е. вторая компонента соответствия Γ, называется *областью отправления соответствия*. Множество Y, т. е. третья компонента соответствия Γ, называется *областью прибытия соответствия*. Соответствие Γ с областью отправления X и областью прибытия Y называется *соответствием* **между** *множествами X и Y*. Кроме трех основных множеств: графика, области отправления и области прибытия, еще два важных множества неразрывно связаны с каждым соответствием. Область определения графика G соответствия Γ, т. е. множество $\text{пр}_1 G$, называется *областью определения соответствия*. Область значений графика G соответствия Γ, т. е. множество $\text{пр}_2 G$, называется *областью значений соответствия*.

Если $\langle a, b\rangle \in G$, то мы будем говорить, что *элемент b соответствует элементу a в* (или *при*) *соответствии* Γ. Если $a \in \text{пр}_1 G$, то мы будем говорить, что *соответствие* Γ *определено на элементе a*.

Понятие соответствия определено у нас через (неопределяемые) понятия множества и кортежа. Поскольку понятие соответствия является у нас определяемым понятием, для него не нужно уславливаться особо, какие соответствия мы считаем одинаковыми, а какие — различными. Условие, о котором идет речь, вытекает автоматически из описания понятий множества (§ 1 гл. II) и кортежа (§ 1 гл. III). Два соответствия совпадают (равны) тогда и только тогда, когда равны их графики, области отправления и области прибытия.

Примеры: 1) Соответствие

$$\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle\{\langle a, \alpha\rangle, \langle a, \beta\rangle, \langle b, \alpha\rangle\}, \{a, b, c\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\rangle \tag{2}$$

очень удобно изобразить на рисунке (см. рис. 18). Мы часто будем пользоваться подобными рисунками либо для задания конкретных соответствий, либо для иллюстрации и пояснения (см. рис. 19; на нем изображено не какое-то конкретное, а „произвольное“ соответствие). В соответствии Г элемент α соответствует элементам a и b и элемент β соответствует элементу a, но (таков точный смысл введенной нами терминологии) сказать, что в соответствии Г элемент a соответствует элементу α, не верно. Областью определения соответствия Г является множество $\{a, b\}$, областью значений — множество $\{\alpha, \beta\}$. Соответствие Г определено на a и на b и не определено на c.

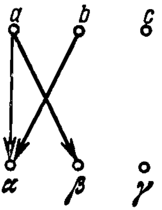


Рис. 18.

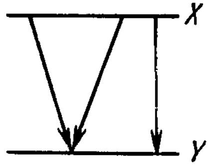


Рис. 19.

2) Соответствие Δ, заданное рис. 20, является *другим* соответствием между *теми же* множествами $\{a, b, c\}$ и $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

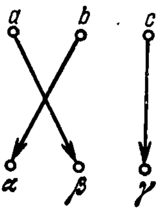


Рис. 20.

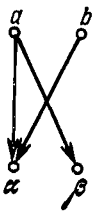


Рис. 21.

3) Соответствие Σ, заданное рис. 21, разумеется, не равно Г из примера 1. Всевозможные разговоры о том, что „по существу Σ совпадает с Г, так как элементы c и γ не участвуют в соответствии Г“, являются, после наших строгих определений, бессмысленными.

4) Для любых множеств X и Y тройки $\langle X\times Y, X, Y\rangle$ и $\langle\varnothing, X, Y\rangle$ являются соответствиями, причем соответствиями именно между X и Y. Это, так сказать, „крайние“ соответствия между X и Y.

5) Тройка

$$\langle\varnothing, \varnothing, \varnothing\rangle \tag{3}$$

является соответствием между $\varnothing$ и $\varnothing$. Очевидно, это — единственное соответствие между $\varnothing$ и $\varnothing$.

Очевидно (а кроме того, вытекает из задач 1 к § 5 гл. III и 2 к § 5 гл. III), что если $G\subseteq X\times Y$, то $G^{-1}\subseteq Y\times X$.

Следовательно, если тройка $\langle G, X, Y\rangle$ является соответствием, то тройка $\langle G^{-1}, Y, X\rangle$ тоже является соответствием. Это позволяет дать следующее определение. Соответствие Δ называется *инверсией соответствия* Γ, если график соответствия Δ является инверсией графика соответствия Γ, область отправления соответствия Δ равна области прибытия соответствия Γ и область прибытия соответствия Δ совпадает с областью отправления соответствия Γ [1]). Инверсия соответствия Γ обозначается через Γ^{-1}. Таким образом, для соответствия (1) инверсией является, по определению, соответствие

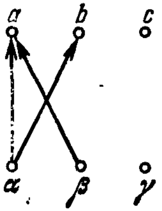


Рис. 22.

$$\Gamma^{-1} \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G^{-1}, Y, X\rangle. \tag{4}$$

Очевидно, область определения инверсии соответствия Γ равна области значений самого соответствия Γ, а область значений инверсии соответствия Γ равна области определения соответствия Γ (см. (7) и (8) из § 5 гл. III). Очевидно также, что элемент b тогда и только тогда соответствует элементу a в соответствии Γ^{-1}, когда элемент a соответствует элементу b в соответствии Γ. Инверсией инверсии соответствия Γ является снова соответствие Γ (см. (6) из § 5 гл. III). В символах

$$(\Gamma^{-1})^{-1} = \Gamma \tag{5}$$

$\Gamma^{-1} = \Gamma$ тогда и только тогда, когда график соответствия Γ симметричен, а область отправления соответствия Γ совпадает с его областью прибытия.

Примеры: 6) Если Γ — соответствие из примера 1 (см. рис. 18), то соответствие Γ^{-1} может быть задано рис. 22 (рис. 22 получается из рис. 18 „переворачиванием" стрелок.)

7) Если $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle X\times Y, X, Y\rangle$, то $\Gamma^{-1} = \langle Y\times X, Y, X\rangle$ (задача 2 к § 5 гл. III).

8) Если $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \varnothing, X, Y\rangle$, то $\Gamma^{-1} = \langle \varnothing, Y, X\rangle$.

9) $\langle \varnothing, \varnothing, \varnothing\rangle^{-1} = \langle \varnothing, \varnothing, \varnothing\rangle$.

Перейдем к операции композиции. Легко видеть, что если $G \subseteq X\times Y$, а $H \subseteq Z\times U$, то $G\circ H \subseteq X\times U$. Следовательно, если тройки $\langle G, X, Y\rangle$ и $\langle H, Z, U\rangle$ являются соответствиями, то тройка $\langle G\circ H,\ X,\ U\rangle$ тоже является соответствием. Это позволяет дать следующее определение. Соответствие Σ называется *композицией соответствий* Γ и Δ, если график соответствия Σ является композицией графиков соответствий Γ и Δ, область отправления соответствия Σ равна области отправления соответствия Γ и область прибытия соответствия Σ совпадает с областью прибытия соответствия Δ. Композицию соответствий Γ и Δ мы будем обозначать через $\Gamma\circ\Delta$ [2]). Таким образом, композицией соответствий (1) и

$$\Delta \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle H,\ Z,\ U\rangle \tag{6}$$

является, по определению, соответствие

$$\Gamma\circ\Delta \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G\circ H,\ X,\ U\rangle. \tag{7}$$

Элемент b тогда и только тогда соответствует элементу a в соответствии $\Gamma\circ\Delta$, когда существует такой „посредник" c, который соответствует элементу a в соответствии Γ и которому, в свою очередь, соответствует элемент b в соответствии Δ.

Из доказанного в § 5 гл. III вытекает, что для любых трех соответствий

$$(\Gamma\circ\Delta)\circ\Sigma = \Gamma\circ(\Delta\circ\Sigma). \tag{8}$$

Возьмем n произвольных соответствий ($n \geqslant 3$) $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ $\ldots, \Gamma_n$ и в выражении $\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\ldots\circ\Gamma_n$ фиксируем произвольную расстановку скобок, приводящую к последовательному попарному компонированию соответствий. Нетрудно доказать, что графиком полученного в результате соответствия Δ является композиция графиков соответствий $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ (см. § 5 гл. III), область отправления соответствия Δ равна области отправления соответствия Γ_1 и область прибытия соответствия Δ совпадает с областью прибытия соответствия Γ_n.

Из этих утверждений и доказанного в § 5 гл. III вытекает, что при любом $n \geqslant 3$ результаты двух произвольных расстановок скобок в выражении

$$\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\ldots\circ\Gamma_n \tag{9}$$

дают одно и то же соответствие. Таким образом, как и для графиков, можно определить композицию (9) произвольного (конечного) числа соответствий как результат последовательного попарного компонирования соответствий $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ *при любой расстановке* скобок.

Из (25) из § 5 гл. III вытекает, что

$$(\Gamma \circ \Delta)^{-1} = \Delta^{-1} \circ \Gamma^{-1}. \tag{10}$$

Из (26) из § 5 гл. III и сформулированных выше утверждений вытекает более общее утверждение:

$$(\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_n)^{-1} = \Gamma_n^{-1} \circ \ldots \circ \Gamma_2^{-1} \circ \Gamma_1^{-1}. \tag{11}$$

До сих пор в этом параграфе мы по существу пожинали плоды § 5 гл. III. Введем два новых понятия.

Пусть $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, \ X, \ Y \rangle$ — произвольное соответствие, A — произвольное множество. *Образом множества A при соответствии* (или *относительно соответствия*) Γ называется и через $\Gamma(A)$ обозначается множество тех элементов области прибытия соответствия Γ, каждый из которых соответствует в соответствии Γ какому-нибудь элементу множества A. Таким образом,

$$\Gamma(A) \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\{y \in Y \mid (\exists x \in A)\,[\langle x, \ y \rangle \in G]\}. \tag{12}$$

В частности,

$$\Gamma(\{a\}) = \mathscr{E}\{y \in Y \mid (\exists x \in \{a\})\,[\langle x, \ y \rangle \in G]\},$$

что, конечно, можно написать проще:

$$\Gamma(\{a\}) = \mathscr{E}\{y \in Y \mid \langle a, \ y \rangle \in G\}, \tag{13}$$

т. е. $\Gamma(\{a\})$ — это множество элементов, соответствующих элементу a в соответствии Γ, или, на „рисуночном" языке, множество концов стрелок, выходящих из a *). Легко видеть, что [3])

$$\Gamma(A) = \bigcup_{x \in A} \Gamma(\{x\}). \tag{14}$$

На „рисуночном" языке $\Gamma(A)$ — это множество концов стрелок, выходящих из элементов множества A. Каждое из следующих утверждений очевидно (и легко

---

*) Для произвольного соответствия Γ выражение $\Gamma(a)$, в отличие от $\Gamma(\{a\})$, у нас не имеет смысла (ср. с § 1 гл. VI).

доказывается):

$$A \subseteq B \rightarrow \Gamma(A) \subseteq \Gamma(B), \qquad (15)$$

$$\Gamma(A) = \Gamma(A \cap \text{пр}_1 G), \qquad (16)$$

$$\Gamma(A) = \varnothing \rightleftarrows A \cap \text{пр}_1 G = \varnothing, \qquad (17)$$

$$\Gamma(A) \subseteq \text{пр}_2 G, \qquad (18)$$

$$\Gamma(\text{пр}_1 G) = \text{пр}_2 G, \qquad (19)$$

$$\text{пр}_1 G \subseteq A \rightarrow \Gamma(A) = \text{пр}_2 G, \qquad (20)$$

$$\Gamma(\varnothing) = \varnothing. \qquad (21)$$

П р и м е р ы: 10) Если $M \underset{\text{Df}}{=} \{a, b, c, d, e, g\}$, $G \underset{\text{Df}}{=} \{\langle a, e\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, d\rangle, \langle e, c\rangle, \langle g, b\rangle, \langle a, d\rangle\}$, $\Gamma \underset{\text{Df}}{=} \langle G, M, M\rangle$ и $A \underset{\text{Df}}{=} \{a, b, d, g\}$, то $\Gamma(A) = \{e, d, b\}$.

11) Если $G \underset{\text{Df}}{=} \mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid y - 3x + 2 = 0\}$, $\Gamma \underset{\text{Df}}{=} \langle G, \mathbf{D}, \mathbf{D}\rangle$ и $A \underset{\text{Df}}{=} [2, 3)$, то $\Gamma(A) = [4, 7)$ (см. рис. 23).

Пример 11 и рис. 23 подсказывают нам гипотезу, что для любых соответствия $\Gamma \underset{\text{Df}}{=} \langle G, X, Y\rangle$ и множества A

$$\Gamma(A) = \text{пр}_2 [(A \times Y) \cap G]. \qquad (22)$$

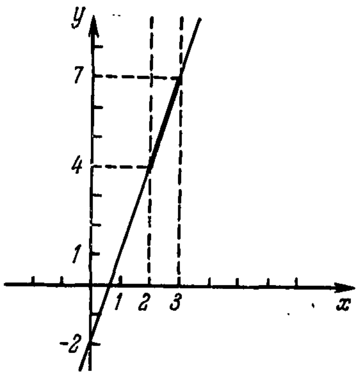


Рис. 23.

Равенство (22) действительно верно и легко доказывается. Оно выражает образ $\Gamma(A)$ множества A при соответствии Γ через график соответствия Γ. Равенство (22) может облегчить (и без него легкое) доказательство утверждений (15)—(21).

Если Γ, Δ — произвольные соответствия и A — произвольное множество, то

$$(\Gamma \circ \Delta)(A) = \Delta(\Gamma(A)). \qquad (23)$$

Равенство (23) вскрывает самую суть понятия „композиция соответствий“. Оно показывает, что „применить“

к множеству A композицию соответствий Γ и Λ — это значит последовательно (сначала Γ, потом Δ) „применить" эти соответствия. Композиция соответствий — это последовательное „применение" соответствий.

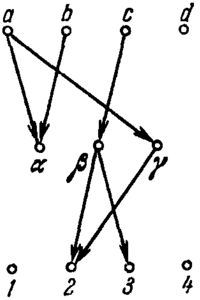


Рис. 24.

Примеры: 12) Пусть

$$\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle\{\langle a,\ \alpha\rangle,\ \langle a,\ \gamma\rangle,\ \langle b,\ \alpha\rangle,\ \langle c,\ \beta\rangle\},\ \{a,\ b,\ c,\ d\},\ \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}\rangle,$$

$$\Delta \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle\{\langle \beta,\ 2\rangle,\ \langle \beta,\ 3\rangle,\ \langle \gamma,\ 2\rangle\},\ \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\},\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}\rangle,$$

$$A \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a,\ b\}.$$

Тогда (см. рис. 24)

$$\Gamma\circ\Delta = \langle\{\langle a,\ 2\rangle,\ \langle c,\ 2\rangle,\ \langle c,\ 3\rangle\},\ \{a,\ b,\ c,\ d\},\ \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}\rangle,$$

$$\Gamma(A) = \{\alpha,\ \gamma\},\ \Delta(\Gamma(A)) = (\Gamma\circ\Delta)(A) = \{2\}.$$

13) Если Γ — соответствие между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}$ с графиком

$$\mathscr{E}\{\langle x,\ y\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid y = \sin x\},$$

а Δ — соответствие между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}$ с графиком

$$\mathscr{E}\{\langle x,\ y\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid y = \lg x\},$$

то композиция $\Gamma\circ\Delta$ будет иметь графиком множество

$$\mathscr{E}\{\langle x,\ y\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid y = \lg \sin x\}.$$

Утверждение (23) легко обобщается на любое число соответствий. Если $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ — произвольные соответствия ($n \geqslant 3$) и A — произвольное множество, то

$$(\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ \ldots \circ\Gamma_n)(A) = \Gamma_n(\ldots(\Gamma_2(\Gamma_1(A)))\ldots). \qquad (24)$$

Пусть $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G,\ X,\ Y\rangle$ — произвольное соответствие, A — произвольное множество. *Полным прообразом множества A при соответствии* (или *относительно соответствия*) Γ называется и через $\Gamma^{-1}(A)$ обозначается *) множество тех элементов области отправления соответствия Γ, каждому из которых соответствует в соответствии Γ

*) Возникающая коллизия (столкновение) обозначений полного прообраза множества A при соответствии Γ и образа множества A при соответствии Γ^{-1} через несколько строчек будет разрешена.

какой-нибудь элемент множества A. Таким образом,

$$\Gamma^{-1}(A) \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\{x \in X \mid (\exists y \in A)[\langle x, y\rangle \in G]\}. \qquad (25)$$

Если $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, X, Y\rangle$, то $\Gamma^{-1} = \langle G^{-1}, Y, X\rangle$. По определению образа образ множества A при соответствии Γ^{-1} равен $\mathscr{E}\{x \in X \mid (\exists y \in A)[\langle y, x\rangle \in G^{-1}]\}$ (см. (12)). Следовательно, полный прообраз множества A при соответствии Γ совпадает с образом множества A при соответствии Γ^{-1}. Это позволяет любое утверждение, относящееся к полному прообразу, свести к некоторому утверждению об образе и наоборот. Таким образом получаем, в частности, аналоги утверждений (13) — (24):

$$\Gamma^{-1}(\{a\}) = \mathscr{E}\{x \in X \mid \langle x, a\rangle \in G\}, \qquad (26)$$

$$\Gamma^{-1}(A) = \bigcup_{x \in A} \Gamma^{-1}(\{x\}), \qquad (27)$$

$$A \subseteq B \rightarrow \Gamma^{-1}(A) \subseteq \Gamma^{-1}(B), \qquad (28)$$

$$\Gamma^{-1}(A) = \Gamma^{-1}(A \cap \mathrm{пр}_2\, G), \qquad (29)$$

$$\Gamma^{-1}(A) = \varnothing \rightleftarrows A \cap \mathrm{пр}_2 G = \varnothing, \qquad (30)$$

$$\Gamma^{-1}(A) \subseteq \mathrm{пр}_1\, G, \qquad (31)$$

$$\Gamma^{-1}(\mathrm{пр}_2\, G) = \mathrm{пр}_1\, G, \qquad (32)$$

$$\mathrm{пр}_2\, G \subseteq A \rightarrow \Gamma^{-1}(A) = \mathrm{пр}_1\, G, \qquad (33)$$

$$\Gamma^{-1}(\varnothing) = \varnothing, \qquad (34)$$

$$\Gamma^{-1}(A) = \mathrm{пр}_1\, [(X \times A) \cap G], \qquad (35)$$

$$(\Gamma \circ \Delta)^{-1}(A) = \Gamma^{-1}(\Delta^{-1}(A)), \qquad (36)$$

$$(\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_n)^{-1}(A) = \Gamma_1^{-1}(\Gamma_2^{-1}(\ldots(\Gamma_n^{-1}(A))\ldots)). \qquad (37)$$

Примеры: 14) Если Γ и A — те же, что в примере 10, то $\Gamma^{-1}(A) = \{c, g, d, a\}$.

15) Если Γ и A — те же, что в примере 11, то $\Gamma^{-1}(A) = \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ (см. рис. 25; ср. с (35)).

Утверждения (26), (27) показывают, что $\Gamma^{-1}(\{a\})$ — это множество элементов, которым соответствует в соответствии Γ элемент a, или, на „рисуночном“ языке, множество начал стрелок, входящих в a; $\Gamma^{-1}(A)$ — это множество начал стрелок, проведенных к элементам множества A.

Равенство (35) выражает полный прообраз $\Gamma^{-1}(A)$ множества A при соответствии Γ через график соответствия Γ.

Введем еще два понятия. Пусть $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, X, Y\rangle$ — произвольное соответствие, A — произвольное множество. *Сужением соответствия* Γ *на множество* A называется и через Γ_A обозначается соответствие

$$\langle G \cap (A \times Y),\ X,\ Y\rangle. \qquad (38)$$

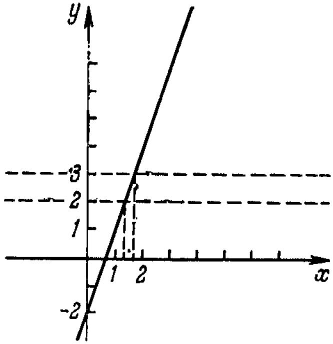


Рис. 25.

Таким образом, элемент b соответствует элементу a в соответствии Γ_A тогда и только тогда, когда $a \in A$ и элемент b соответствует элементу a в соответствии Γ. График сужения соответствия Γ на множество A является, по определению, множеством тех пар из графика соответствия Γ, первая компонента которых принадлежит A. Область отправления и область прибытия соответствия Γ_A совпадают, соответственно, с областью отправления и областью прибытия соответствия Γ [4]).

Примеры: 16) Если Γ — соответствие, заданное рис. 20, и $A \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, c\}$, то Γ_A задается рис. 26.

17) Если Γ — соответствие между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}$ с графиком $\mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid y = x^2\}$ и $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [2, 3]$, то Γ_A задается рис. 27.

Легко видеть, что область определения сужения соответствия Γ на множество A равна $A \cap \text{пр}_1 G$. Из (22) вытекает, что область значений сужения соответствия Γ на множество A равна образу множества A при соответствии Γ. Если $\text{пр}_1 G \subseteq A$, то $\Gamma_A = \Gamma$.

Двойственным, в некотором смысле, к понятию сужения является понятие продолжения. Соответствие $\Delta \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle H, Z, U\rangle$ называется *продолжением соответствия* $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, X, Y\rangle$, если $G \subseteq H$, $Z = X$, $U = Y$ [5]). Таким образом, если соответствие Δ является продолжением соответствия Γ и элемент b соответствует элементу a в соответствии Γ, то элемент b соответствует элементу a и в соответствии Δ.

Для любых соответствия Γ и множества A соответствие Γ является продолжением сужения Γ_A. Однако не

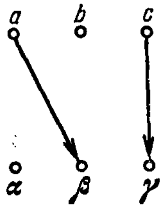


Рис. 26.

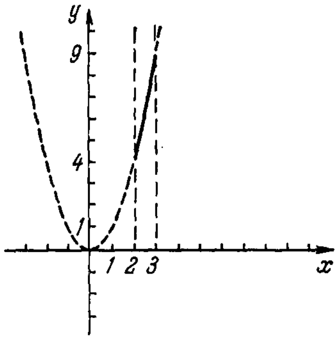


Рис. 27.

верно утверждать, что произвольное соответствие $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, X, Y\rangle$ равно сужению на $\text{пр}_1 G$ любого своего продолжения.

ЗАДАЧИ

1. Чему равно число соответствий между m-элементным множеством X и n-элементным множеством Y?

2. Доказать или опровергнуть, что для любого соответствия Γ и любых множеств A и B:

a) $\Gamma(A \cup B) = \Gamma(A) \cup \Gamma(B)$,

b) $\Gamma(A \cap B) = \Gamma(A) \cap \Gamma(B)$,

c) $\Gamma(A \setminus B) = \Gamma(A) \setminus \Gamma(B)$,

d) $\Gamma^{-1}(A \cup B) = \Gamma^{-1}(A) \cup \Gamma^{-1}(B)$,

e) $\Gamma^{-1}(A \cap B) = \Gamma^{-1}(A) \cap \Gamma^{-1}(B)$,

f) $\Gamma^{-1}(A \setminus B) = \Gamma^{-1}(A) \setminus \Gamma^{-1}(B)$.

3. Пусть Γ — соответствие между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}$ с графиком $\mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid y = x^2\}$. Найти $\Gamma(A)$ и $\Gamma^{-1}(A)$, если

a) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [2, 3]$, e) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [-2, 3]$,

b) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} (2, 3]$, f) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} (-2, 3]$,

c) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [-2, 2]$, g) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [-2, 3)$,

d) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} (-2, 2]$, h) $A \underset{\mathrm{Df}}{=} (-2, -1)$.

4. Найти $\Gamma(A)$ и $\Gamma^{-1}(A)$, если $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, b, c, d, e\}$,

$$G \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle e, b\rangle\},$$

$$\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, M, M\rangle, \quad A \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, c, e\}.$$

5. Доказать, что для произвольного соответствия Γ и для любого множества A

$$\Gamma_A(A) = \Gamma(A).$$

§ 2. Основные свойства соответствий

Соответствие $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, X, Y\rangle$ называется *функциональным соответствием*, или *функцией*, если его график G функционален *). Таким образом, соответствие Γ функционально тогда и только тогда, когда (область значений переменных x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 ясна из обозначений)

$$\neg (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists y_1)(\exists y_2)[\langle x_1, y_1\rangle \in G \,\&\, \langle x_2, y_2\rangle \in G \,\& \\ \& \, x_1 = x_2 \,\&\, y_1 \neq y_2]. \qquad (1)$$

Преобразуя высказывание (1) по правилам гл. IV (исполь-

---

*) Я надеюсь, что после прочтения гл. V, VI читателю станет ясно: предлагаемое здесь определение функции является уточнением (не единственно возможным — см. примечание [1]) к § 1 гл. VI) или заменой того понятия функции, с которым он познакомился в школе.

зуя, в частности, (65) из § 3), легко получить, что оно равносильно высказыванию

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)[\langle x_1, y_1\rangle \in G \mathbin{\&} \langle x_2, y_2\rangle \in G \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2] \tag{2}$$

или (контрапозиция) высказыванию

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)[\langle x_1, y_1\rangle \in G \mathbin{\&} \langle x_2, y_2\rangle \in G \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} y_1 \neq y_2 \rightarrow x_1 \neq x_2]. \tag{3}$$

Высказывания (1)—(3) можно заменить на равносильные, но более простые высказывания

$$\neg(\exists x)(\exists y_1)(\exists y_2)[\langle x, y_1\rangle \in G \mathbin{\&} \langle x, y_2\rangle \in G \mathbin{\&} y_1 \neq y_2], \tag{4}$$

$$(\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)[\langle x, y_1\rangle \in G \mathbin{\&} \langle x, y_2\rangle \in G \rightarrow y_1 = y_2]. \tag{5}$$

Соответствие $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, X, Y\rangle$ называется *инъективным*, если его график G инъективен. Таким образом, соответствие Γ инъективно тогда и только тогда, когда

$$\neg(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists y_1)(\exists y_2)[\langle x_1, y_1\rangle \in G \mathbin{\&} \langle x_2, y_2\rangle \in G \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} x_1 \neq x_2 \mathbin{\&} y_1 = y_2] \tag{6}$$

Высказывание (6) равносильно каждому из следующих высказываний (ср. с (1)—(5)):

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)[\langle x_1, y_1\rangle \in G \mathbin{\&} \langle x_2, y_2\rangle \in G \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} y_1 = y_2 \rightarrow x_1 = x_2], \tag{7}$$

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)[\langle x_1, y_1\rangle \in G \mathbin{\&} \langle x_2, y_2\rangle \in G \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} x_1 \neq x_2 \rightarrow y_1 \neq y_2], \tag{8}$$

$$\neg(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists y)[\langle x_1, y\rangle \in G \mathbin{\&} \langle x_2, y\rangle \in G \mathbin{\&} x_1 \neq x_2], \tag{9}$$

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y)[\langle x_1, y\rangle \in G \mathbin{\&} \langle x_2, y\rangle \in G \rightarrow x_1 = x_2]. \tag{10}$$

Соответствие $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, X, Y\rangle$ называется *всюду определенным*, если его область определения совпадает с его областью отправления, т. е. если

$$\text{пр}_1 G = X. \tag{11}$$

Легко видеть, что соответствие Γ всюду определено тогда и только тогда, когда

$$(\forall x)(\exists y)[\langle x, y\rangle \in G]. \qquad (12)$$

Соответствие $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, X, Y\rangle$ называется *сюръективным*, если его область значений совпадает с его областью прибытия, т. е. если

$$\text{пр}_2 G = Y. \qquad (13)$$

Соответствие Γ сюръективно тогда и только тогда, когда

$$(\forall y)(\exists x)[\langle x, y\rangle \in G]. \qquad (14)$$

Соответствие $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, X, Y\rangle$ называется *биективным соответствием*, или *биекцией* или *взаимно-однозначным соответствием*, если оно функционально, инъективно, всюду определено и сюръективно*).

Если среди соответствий между множествами X и Y существует взаимно-однозначное соответствие, то говорят, что *между множествами X и Y* ***можно установить*** *взаимно-однозначное соответствие*.

Для того чтобы доказать, что между заданными множествами X, Y можно установить взаимно-однозначное соответствие, нужно задать (или доказать, что существует) такой график $G \subseteq X \times Y$, чтобы тройка $\langle G, X, Y\rangle$ была биекцией. Если мы *каждому* элементу множества X поставим в соответствие *один* элемент множества Y (см. § 3 гл. III), мы получим некоторый график $G \subseteq X \times Y$, причем соответствие $\langle G, X, Y\rangle$ будет уже всюду определенным („каждому") и функциональным („один"). Если нам удастся затем доказать, что в построенном нами соответствии *разным* элементам множества X соответствуют *разные* элементы множества Y и *каждый* элемент множества Y соответствует хотя бы одному элементу множества X, будет доказано, что наше соответствие вдобавок инъективно („разным...разные") и сюръективно („каждый") и, следовательно, биективно. Таким образом, во-первых, интуитивное описание, сделанное в § 3 гл. III,

*) Термины „сюръекция" и „инъекция" мы резервируем для гл. VI, где они будут означать не то же самое, что „сюръективное соответствие", „инъективное соответствие".

находится в полном согласии со строгим определением взаимно-однозначного соответствия, сформулированным здесь, и, во-вторых, если соответствие между множествами X и Y строится нами по плану, указанному в § 3 гл. III („каждому элементу множества X ставится в соответствие один элемент множества Y"), то при доказательстве биективности построенного соответствия два из четырех свойств: всюду определенность и функциональность — можно уже не проверять. Они обеспечиваются автоматически, самим построением. Проверять надо только инъективность и сюръективность. Разумеется, если соответствие не строится нами, а дается нам извне, в готовом виде, то проверять надо все четыре свойства.

Введенные выше пять свойств мы будем называть *основными свойствами соответствий* *).

Из доказанного в § 5 гл. III следует, что для любого соответствия Γ

$$\Gamma^{-1} \text{— инъективное} \rightleftarrows \Gamma \text{— функция}, \tag{15}$$

$$\Gamma^{-1} \text{— функция} \rightleftarrows \Gamma \text{— инъективное}. \tag{16}$$

Очевидно также (см. § 1), что

$$\Gamma^{-1} \text{— сюръективное} \rightleftarrows \Gamma \text{— всюду определенное}, \tag{17}$$

$$\Gamma^{-1} \text{— всюду определенное} \rightleftarrows \Gamma \text{— сюръективное}. \tag{18}$$

Из (15) — (18) следует, что

$$\Gamma^{-1} \text{— биекция} \rightleftarrows \Gamma \text{— биекция}. \tag{19}$$

Таким образом, если между множествами X и Y можно установить взаимно-однозначное соответствие, то между множествами Y и X тоже можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Из доказанного в § 5 гл. III следует, что композиция функций есть функция и композиция инъективных соответствий инъективна.

Аналогичные утверждения для *произвольных* всюду определенных, сюръективных и биективных соответствий не верны. Например, если не пустые множества Y и Z не пересекаются и $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle Y^2, Y, Y \rangle$, $\Delta \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle Z^2, Z, Z \rangle$, то Γ и

*) См. сноску на стр. 125.

Δ всюду определены и сюръективны, а $\Gamma \circ \Delta = \langle \varnothing, Y, Z \rangle$ не всюду определено и не сюръективно.

Если, однако, область прибытия соответствия Γ совпадает с областью отправления соответствия Δ (важнейший для практики случай) и соответствия Γ, Δ всюду определены, то и их композиция $\Gamma \circ \Delta$ всюду определена. Аналогичное утверждение верно (при указанном выше *достаточном* условии) также для сюръективных и, следовательно, биективных соответствий.

Таким образом, если между множествами X и Y можно установить взаимно-однозначное соответствие и между множествами Y и Z можно установить взаимно-однозначное соответствие, то между множествами X и Z тоже можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Между множествами X и X, очевидно, всегда можно установить взаимно-однозначное соответствие. Примером такого соответствия является биекция $\langle \Delta_X, X, X \rangle$, в которой каждому элементу $a \in X$ соответствует a и только a.

Если X и Y — конечные множества, скажем, X — m-элементное, а Y — n-элементное множество, то между множествами X и Y тогда и только тогда можно установить взаимно-однозначное соответствие, когда $m = n$, причем при этом условии различных взаимно-однозначных соответствий между X и Y существует $P_n = n!$. Таким образом, вопрос о *возможности* установления взаимно-однозначного соответствия между двумя ***конечными*** множествами (и даже вопрос о *числе* таких соответствий) совершенно ясен. В следующем параграфе мы рассмотрим аналогичный вопрос для бесконечных множеств.

ЗАДАЧИ

1. Чему равно число нижеуказанных соответствий между m-элементным множеством X и n-элементным множеством Y:

a) функциональных?
b) инъективных?
c) всюду определенных?
d) сюръективных?

2. Найти необходимое и достаточное условие, которому должно удовлетворять соответствие Γ, чтобы для

любых множеств A и B:

$$\text{a)}\quad \Gamma(A\cap B)=\Gamma(A)\cap\Gamma(B),$$
$$\text{b)}\quad \Gamma(A\setminus B)=\Gamma(A)\setminus\Gamma(B),$$
$$\text{c)}\quad \Gamma^{-1}(A\cap B)=\Gamma^{-1}(A)\cap\Gamma^{-1}(B),$$
$$\text{d)}\quad \Gamma^{-1}(A\setminus B)=\Gamma^{-1}(A)\setminus\Gamma^{-1}(B).$$

3. Найти необходимое и достаточное условие, которому должно удовлетворять соответствие Γ, чтобы для любого подмножества A области отправления соответствия Γ

$$\text{a)}\quad A\subseteq\Gamma^{-1}(\Gamma(A)),$$
$$\text{b)}\quad \Gamma^{-1}(\Gamma(A))\subseteq A.$$

4. Найти необходимое и достаточное условие, которому должно удовлетворять соответствие Γ, чтобы для любого подмножества A области прибытия соответствия Γ

$$\text{a)}\quad A\subseteq\Gamma(\Gamma^{-1}(A)),$$
$$\text{b)}\quad \Gamma(\Gamma^{-1}(A))\subseteq A.$$

5. Найти необходимое и достаточное условие, которому должно удовлетворять *функциональное* соответствие Σ между данными множествами X и Y, чтобы

a) для любого множества U и для любых соответствий Γ, Δ между множеством U и множеством X

$$\Gamma\circ\Sigma=\Delta\circ\Sigma\rightarrow\Gamma=\Delta,$$

b) для любого множества Z и для любых соответствий Γ, Δ между множеством Y и множеством Z

$$\Sigma\circ\Gamma=\Sigma\circ\Delta\rightarrow\Gamma=\Delta.$$

6. Найти по возможности более слабые достаточные условия, которым должны удовлетворять соответствия Γ и Δ, чтобы соответствие $\Gamma\circ\Delta$ было

a) всюду определенным,

b) сюръективным,

c) биективным.

7. Доказать, что если композиция $\Gamma\circ\Delta$ соответствий Γ и Δ всюду определена, то и соответствие Γ всюду определено.

8. Доказать, что если композиция $\Gamma \circ \Delta$ соответствий Γ и Δ сюръективна, то и соответствие Δ сюръективно.

9. Доказать, что если композиция $\Gamma \circ \Delta$ *функциональных* соответствий Γ и Δ биективна, то соответствие Γ инъективно. Опровергнуть аналогичное утверждение для произвольных соответствий Γ, Δ.

10. Что можно сказать о соответствиях Γ и Δ, если их композиция $\Gamma \circ \Delta$ инъективна?

11. Доказать или опровергнуть, что сужение Γ_A функционального соответствия Γ на произвольное множество A функционально. Аналогичная задача для свойств инъективности, всюду определенности, сюръективности и биективности.

§ 3. Взаимно-однозначные соответствия между бесконечными множествами

Начнем с примеров.

Примеры: 1) Установим взаимно-однозначное соответствие между множеством $\mathbf{N}$ и множеством A отрицательных целых чисел. Поскольку область отправления ($\mathbf{N}$) и область прибытия (A) требуемого соответствия уже указаны, для построения искомого соответствия остается задать его график G. Если в G включить пары $\langle n, -n\rangle$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), тройка $\langle G, \mathbf{N}, A\rangle$ будет искомым соответствием.

2) При первом знакомстве возможность установления взаимно-однозначного соответствия между множеством $\mathbf{N}$ и множеством B положительных четных чисел, являющимся истинным подмножеством множества $\mathbf{N}$, обычно удивляет, кажется парадоксальной, противоречащей «известной аксиоме» „целое больше своей части“ и т. п. Однако множество пар вида $\langle n, 2n\rangle$ является графиком требуемого соответствия.

3) После предыдущего примера уже легко устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством $\mathbf{N}$ и множеством C положительных целых чисел, *кратных* некоторому фиксированному числу k ($\langle n, n\cdot k\rangle$), между множеством $\mathbf{N}$ и множеством *квадратов* натуральных чисел ($\langle n, n^2\rangle$) или, более общо, между множеством $\mathbf{N}$ и множеством k-х *степеней* натуральных чисел ($\langle n, n^k\rangle$).

4) Множество D простых чисел бесконечно*). Обозначим n-е в порядке возрастания простое число через p_n**). Таким образом, $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$, $p_5=11$ и т. д. Хотя у нас нет формулы, позволяющей по n вычислять p_n, или, по крайней мере, нет столь же простой, как в предыдущих примерах, формулы***), мы, тем не менее, можем

N	1	2	3	4	5	6	7	...
C	0	1	−1	2	−2	3	−3	...

Рис. 28.

установить взаимно-однозначное соответствие между множествами **N** и D. Если числу $n \in \mathbf{N}$ поставить в соответствие число p_n, построенное соответствие будет взаимно-однозначным соответствием между **N** и D, причем всюду определенность обсуждаемого соответствия вытекает из указанной выше бесконечности множества D.

5) После предыдущего примера становится очевидным, что, каково бы ни было *бесконечное* подмножество E множества **N**, между множествами **N** и E можно установить взаимно-однозначное соответствие — факт, покрывающий примеры 2—4.

6) После установления нескольких взаимно-однозначных соответствий между некоторым множеством и его истинным подмножеством взаимно-однозначное соответствие между множеством и его надмножеством, разумеется, уже не удивляет. Между множеством **N** и множеством **C** можно установить взаимно-однозначное соответствие. Требуемый график может быть составлен согласно рис. 28. Впрочем, в данном случае нетрудно

---

*) Докажите сами или прочтите на стр. 11—14 книги [18].

**) Если угодно, p_n можно определить индуктивно: $p_1=2$; p_{n+1} — наименьшее простое число в множестве $D \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. (Об индуктивных *определениях* можно прочитать в § 3 книги [4].)

***) Такой формулы нет не только «у нас», она вообще не известна, не открыта.

рисунок заменить „формулами“: $\langle 1, 0\rangle$, $\langle 2n, n\rangle$, $\langle 2n+1, -n\rangle$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

7) Несмотря на предыдущие примеры, тех читателей, которым еще не показалось, что между любыми двумя

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{-2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{-3}{1} & \ldots \\
\frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \ldots \\
\frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{-3}{3} & \ldots \\
\frac{0}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \ldots \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

Рис. 29.

бесконечными множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие, установление взаимно-однозначного соответствия между множествами $\mathbf{N}$ и $\mathbf{R}$ должно удивить. Однако такое соответствие установить действительно можно, и ввиду, во-первых, важности этого соответствия и, во-вторых, важности тех методов, которыми мы это соответствие установим, мы установим его несколькими способами.

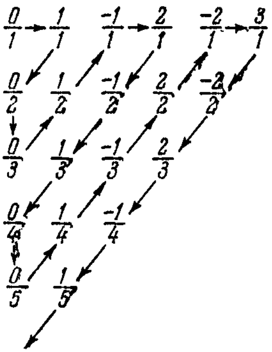


Рис. 30.

Рациональные числа — это числа вида $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа, причем $q \neq 0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $q > 0$.

Рассмотрим „бесконечную таблицу с двумя входами“, в первой строке которой расположены, например, в порядке возрастания абсолютных величин числителей, все рациональные числа со знаменателем $q=1$, во второй строке которой расположены в аналогичном порядке рациональные числа со знаменателем $q=2$, и т. д. (см. рис. 29). „Заметем“ эту таблицу *произвольным* „зигзагом“ (см. два примера таких „зигзагов“ на рис. 30, 31; на рис. 30 зигзаг „по диагоналям“, на рис 31 зигзаг „по квадратам“ *)). Пойдем теперь по этому зигзагу и поставим в соответствие числу $1 \in \mathbf{N}$ первое рациональное число, „заметенное“ рассматриваемым зигзагом, числу $2 \in \mathbf{N}$ — второе лежащее под зигзагом

$$\begin{tikzcd}
\frac{0}{1} \arrow[r] & \frac{1}{1} \arrow[d] & \frac{-1}{1} \arrow[r] & \frac{2}{1} \arrow[d] \\
\frac{0}{2} \arrow[d] & \frac{1}{2} \arrow[l] & \frac{-1}{2} \arrow[u] & \frac{2}{2} \arrow[d] \\
\frac{0}{3} \arrow[r] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{-1}{3} \arrow[u] & \frac{2}{3} \arrow[d] \\
\frac{0}{4} \arrow[d] & \frac{1}{4} \arrow[l] & \frac{-1}{4} \arrow[l] & \frac{2}{4} \arrow[l] \\
{} & & &
\end{tikzcd}$$

Рис. 31.

рациональное число, если оно не равно первому числу зигзага, и т. д. Очевидно, полученное соответствие будет искомым.

Назовем *высотой* рационального числа $\frac{p}{q}$ число $|p| + q$. Очевидно, рациональных чисел данной высоты конечное число. „Пересчитаем“ сначала все рациональные числа высоты 1 (чисел высоты 0 не существует); таких будет одно: $\frac{0}{1}$. Итак, числу 1 поставим в соответствие число $\frac{0}{1}$. Следующим по порядку натуральным числам поставим в соответствие рациональные числа высоты 2 (таких, как легко видеть, три числа), затем рациональные числа высоты 3 и т. д. Поскольку рациональных чисел каждой очередной высоты конечное число, мы будем последовательно заканчивать с каждой очередной высотой и пере-

*) Разумеется, зигзаг „сначала всю первую строчку, затем всю вторую строчку и т. д.“ не годится, так как невозможно пройти *всю* первую строчку, а *затем* перейти ко второй.

ходить к следующей. Легко видеть, что описанное соответствие — искомое.

Возможность установления взаимно-однозначного соответствия между $\mathbf{N}$ и $\mathbf{R}$ будет вытекать также из задачи 6.

8) Из примера 7 следует, что между множеством $\mathbf{N}$ и любым *бесконечным* подмножеством множества $\mathbf{R}$ тоже можно установить взаимно-однозначное соответствие (ср. пример 5).

9) Из теорем предыдущего параграфа следует, что не только между множеством $\mathbf{N}$ и каждым из остальных упомянутых в примерах 1—8 множеств можно установить взаимно-однозначное соответствие, но и между любыми двумя из этих множеств тоже можно установить такое соответствие.

10) В дополнение к введенным в задачах § 3 гл. II обозначениям введем еще четыре обозначения:

$$[a, +\infty) \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\{x \in \mathbf{D} \mid x \geqslant a\},$$

$$(a, +\infty) \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\{x \in \mathbf{D} \mid x > a\},$$

$$(-\infty, a] \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\{x \in \mathbf{D} \mid x \leqslant a\},$$

$$(-\infty, a) \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\{x \in \mathbf{D} \mid x < a\}.$$

Множества вида $[a, b]$ мы будем называть *сегментами*, множества вида (a, b) — *интервалами*, множества вида $[a, b)$, $(a, b]$ — *полусегментами* (или, естественно, *полуинтервалами*).

Между любыми двумя сегментами $[a, b]$, $[c, d]$ можно установить взаимно-однозначное соответствие (см. рис. 32 или рис. 33; соответствие, показанное на рис. 33, нетрудно задать формулой; для этого нужно написать уравнение прямой, проходящей через точки $\langle a, c\rangle$, $\langle b, d\rangle$; такой прямой будет прямая с уравнением $\frac{y-c}{d-c} = \frac{x-a}{b-a}$; следовательно, элемент y сегмента $[c, d]$, соответствующий — при соответствии, показанном на рис. 33, — произвольному $x \in [a, b]$, равен $\frac{x-a}{b-a}(d-c)+c$).

11) Разумеется, совершенно аналогично можно установить взаимно-однозначное соответствие между двумя

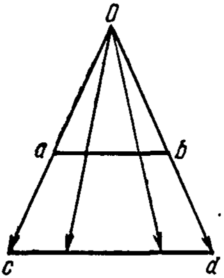


Рис. 32.

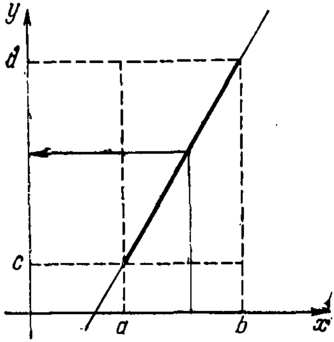


Рис. 33.

произвольными интервалами (a, b), (c, d), между двумя произвольными полусегментами вида $[a, b)$, $[c, d)$ или между двумя произвольными полусегментами вида $(a, b]$, $(c, d]$.

12) Нетрудно установить взаимно-однозначное соответствие между двумя произвольными „лучами"

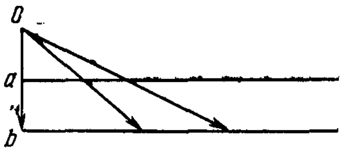


Рис. 34.

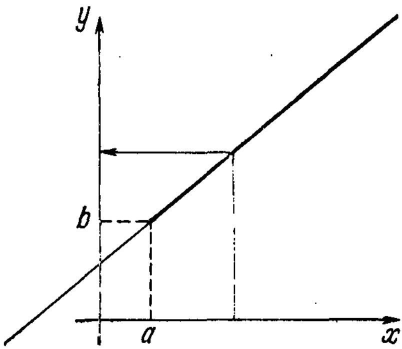


Рис. 35.

вида $[a, +\infty)$, $[b, +\infty)$ (см. рис. 34 или рис. 35), между двумя произвольными лучами вида $(a, +\infty)$, $(b, +\infty)$, между двумя произвольными лучами вида $(-\infty, a]$, $(-\infty, b]$ и, наконец, между двумя произвольными лучами вида $(-\infty, a)$, $(-\infty\ b)$.

13) Легко сообразить, как из соответствий примера 11 получить взаимно-однозначное соответствие между двумя

произвольными полусегментами вида $[a, b)$, $(c, d]$: надо взять произвольное взаимно-однозначное соответствие

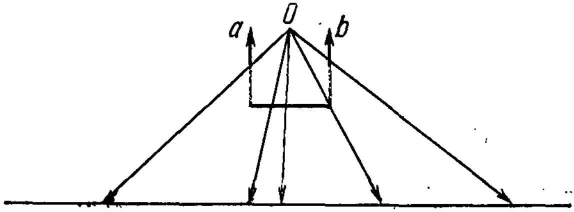


Рис. 36.

$\langle G, (a, b), (c, d)\rangle$ между интервалами (a, b), (c, d) и добавить к графику G пару $\langle a, d\rangle$; соответствие $\langle G \bigcup \{\langle a, d\rangle\}, [a, b), (c, d]\rangle$ будет искомым.

14) Очередной неожиданностью, неожиданностью „еще на один ранг выше" является возможность установления взаимно-однозначного соответствия между произвольным интервалом (a, b) и множеством **D**. Например, на рис. 36, на котором интервал (a, b) „изогнут" на три равные части, показан один из вариантов установления указанного соответствия. Взаимно-однозначное соответствие между интервалом $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и **D** может быть установлено при помощи формулы $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 37). Поскольку между интервалами $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и (a, b) тоже может быть установлено взаимно-однозначное соответствие, это дает еще один способ установления взаимно-однозначного соответствия между (a, b) и **D**.

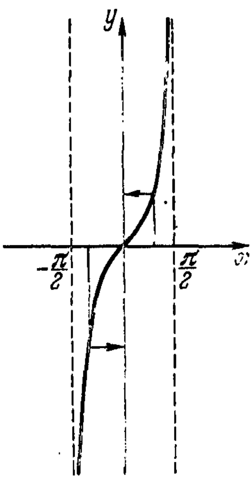


Рис. 37.

15) После примера 14 легко устанавливается взаимно-однозначное соответствие между произвольным интервалом (a, b) и произвольным лучом вида $(c, +\infty)$ или между произвольным интервалом (a, b) и произвольным лучом вида $(-\infty, c)$.

16) Несмотря на предыдущие чудеса, возможность установления взаимно-однозначного соответствия между интервалом (a, b) и сегментом $[a, b]$ все-таки поражает. Для простоты записи установим взаимно-однозначное соответствие между $(0, 1)$ и $[0, 1]$. Из существования такого соответствия, предыдущих примеров и теорем § 2 будет вытекать не только возможность установления взаимно-однозначного соответствия между (a, b) и $[a, b]$, но и возможность установления взаимно-однозначного соответствия между любым интервалом (a, b) и любым сегментом $[c, d]$.

Установим вышеуказанное соответствие двумя способами. Пусть $A \underset{Df}{=} (0, 1) \cap (\mathbf{D} \setminus \mathbf{R})$, $B \underset{Df}{=} (0, 1) \cap \mathbf{R}$, $C \underset{Df}{=} [0, 1] \cap (\mathbf{D} \setminus \mathbf{R})$, $D \underset{Df}{=} [0, 1] \cap \mathbf{R}$. Очевидно, $(0, 1) = A \cup B$ и $A \cap B = \varnothing$; $[0, 1] = C \cup D$ и $C \cap D = \varnothing$. Очевидно также, $A = C$. Следовательно, между A и C можно установить взаимно-однозначное соответствие. Пусть, например, $\langle G, A, C \rangle$ — такое соответствие. Множество B является бесконечным подмножеством множества $\mathbf{R}$. Следовательно, между $\mathbf{N}$ и B можно установить взаимно-однозначное соответствие (см. пример 8). По аналогичной причине можно установить взаимно-однозначное соответствие между $\mathbf{N}$ и D. Значит, можно установить взаимно-однозначное соответствие между B и D. Пусть $\langle H, B, D \rangle$ будет таким соответствием. Тогда, очевидно, $\langle G \cup H, (0, 1), [0, 1] \rangle$ — искомое соответствие.

Пусть $A \underset{Df}{=} \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots \right\}$, $B \underset{Df}{=} (0, 1) \setminus A$, $C \underset{Df}{=} A \cup \{0, 1\}$, т. е. $C = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots \right\}$, $D \underset{Df}{=} [0, 1] \setminus C$. Очевидно, $(0, 1) = A \cup B$ и $A \cap B = \varnothing$; $[0, 1] = C \cup D$ и $C \cap D = \varnothing$. Очевидно также, $B = D$. Следовательно, между B и D можно установить взаимно-однозначное соответствие. Пусть $\langle G, B, D \rangle$ — такое соответствие. Взаимно-однозначное соответствие между A и C можно установить либо на основании примера 8, либо, проще, непосредственно по рис. 38. Пусть $\langle H, A, C \rangle$ — такое соответствие. Тогда $\langle G \cup H, (0, 1), [0, 1] \rangle$ — искомое соответствие.

17) Теперь ясно, что между любыми двумя множествами, каждое из которых имеет один из видов $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$ или равно **D**, можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Перейдем, наконец, от примеров к теоретическим рассмотрениям. Все вышеприведенные примеры распадаются

A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	...
C	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

Рис. 38.

на две обособленные группы: с одной стороны, мы установили взаимно-однозначные соответствия между любыми двумя множествами из примеров 1—9 (**N**, **C**, **R** и др.), с другой стороны, мы установили взаимно-однозначные соответствия между любыми двумя множествами из примеров 10—17 ($(0, 1)$, $[0, 1]$, **D** и др.). Ни одного взаимно-однозначного соответствия между каким-нибудь множеством первой группы и каким-нибудь множеством второй группы мы не указали. (Впрочем, ясно, что если бы нам удалось установить взаимно-однозначное соответствие между *хотя бы одним* из множеств первой группы и *хотя бы одним* из множеств второй группы, то такое же соответствие можно было установить между *любым* из множеств первой группы и *любым* из множеств второй группы.) Случайно ли это? Между любыми ли двумя бесконечными множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие? Ответ на эти вопросы дает теорема Кантора *), первая (и единственная) теорема этой книги, которая заслуживает носить имя человека, доказавшего ее.

*) Г. Кантор — немецкий математик конца XIX века, создатель теории множеств.

Теорема Кантора. *Между множествами* $\mathbf{N}$ *и* $[0, 1]$ *нельзя установить взаимно-однозначного соответствия.*

Доказательство. Допустим противное. Допустим, что между множествами $\mathbf{N}$ и $[0, 1]$ можно установить взаимно-однозначное соответствие. Обозначим число из $[0, 1]$, соответствующее в этом предполагаемом соответствии числу $n \in \mathbf{N}$, через α_n. Пусть десятичное разложение числа α_n имеет вид

$$0,\ a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}a_4^{(n)}\ \ldots \tag{1}$$

Некоторые действительные числа имеют по два десятичных разложения $(0,3570000\ldots = 0,3569999\ldots)$. Для каждого α_n, которое имеет два десятичных разложения, кроме

$$\begin{array}{l}
1 \to \alpha_1 = 0,\ a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}a_4^{(1)}\ \ldots \\
2 \to \alpha_2 = 0,\ a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}a_4^{(2)}\ \ldots \\
3 \to \alpha_3 = 0,\ a_1^{(3)}a_2^{(3)}a_3^{(3)}a_4^{(3)}\ \ldots \\
4 \to \alpha_4 = 0,\ a_1^{(4)}a_2^{(4)}a_3^{(4)}a_4^{(4)}\ \ldots \\
\vdots
\end{array}$$

Рис. 39.

числа 0, фиксируем в качестве разложения (1) то разложение, которое оканчивается „девятками". В частности, если $\alpha_n = 1$, то разложение (1) имеет для него вид $0,99999\ldots$, т. е. для всех i $a_i^{(n)} = 9$. Для числа 0 в качестве разложения (1) мы, естественно, фиксируем разложение $0,00000\ldots$ При наших обозначениях предполагаемое соответствие можно изобразить в виде рис. 39.

Пусть b_1 — произвольная цифра, отличная от $a_1^{(1)}$, 0 и 9 (остается, как минимум, еще семь возможностей; если угодно, можно распорядиться более определенно, положив, скажем, $b_1 = 3$, если $a_1^{(1)} \neq 3$, и $b_1 = 4$, если $a_1^{(1)} = 3$), b_2 — произвольная цифра, отличная от $a_2^{(2)}$, 0 и 9, b_3 — произвольная цифра, отличная от $a_3^{(3)}$, 0 и 9, и т. д. Обозначим через β число с десятичным разложением

$$0,\ b_1b_2b_3b_4\ \ldots \tag{2}$$

Поскольку разложение (2) не заканчивается „нулями" и не заканчивается „девятками" (более того, в разложении (2) нет ни одного „нуля" и ни одной „девятки", но это уж нам не важно), число β имеет одно десятичное разложение, Поскольку $\beta \in [0, 1]$, оно должно совпадать с некоторым α_k. Но если $\beta = \alpha_k$ и β (а следовательно, и α_k) имеет одно десятичное разложение, каждая цифра (единственного) десятичного разложения числа β должна совпадать с соответствующей цифрой (единственного) десятичного разложения числа α_k. В частности, должно быть $b_k = a_k^{(k)}$, что противоречит выбору цифры b_k.

Метод, которым мы доказали теорему Кантора, получил название канторовского *диагонального метода*. Диагональный метод часто бывает полезен в доказательствах.

Множества A и B называются *равномощными*, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие. Равномощность множеств часто обозначается знаком $\sim$ („тильда"). Для любых множеств A, B, C

$$A \sim A, \tag{3}$$

$$A \sim B \to B \sim A, \tag{4}$$

$$A \sim B \,\&\, B \sim C \to A \sim C. \tag{5}$$

Два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое количество элементов.

Поэтому понятие равномощности является обобщением на бесконечные (или на произвольные) множества понятия равночисленности конечных множеств.

Множество A называется *счетным*, если A и $\mathbf{N}$ равномощны. Очевидно, любые два счетных множества равномощны. Примеры 1—9 дают много примеров счетных множеств. Подчеркнем особо, что множества $\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}$ счетны. Это полезно запомнить.

Бесконечное подмножество счетного множества счетно (см. пример 5). Легко видеть также, что *в любом бесконечном множестве имеется счетное подмножество*. Это показывает, что счетные множества являются, так сказать, „самыми маленькими по количеству" бесконечными множествами *).

Множество A называется *не более чем счетным*, если A конечно (в частности, пусто) или счетно. Множество A

*) Можно строго определить понятие „мощность множества A *меньше* мощности множества B" (см., например, § 5 гл. I книги [15]), после чего указанное утверждение приобретет вполне точный смысл, без всяких „так сказать".

называется *несчетным*, если оно бесконечно и не счетно. Из теоремы Кантора следует, что сегмент $[0, 1]$ несчетен. Очевидно, любое множество либо не более чем счетно, либо несчетно.

Деление множеств на не более чем счетные и несчетные имеет едва ли не такое же значение, как деление множеств на конечные и бесконечные. Не более чем счетные (или, точнее, счетные) множества во многих отношениях играют ту же роль, что конечные множества. Например, можно доказать, что *если M — бесконечное, а A — не более чем счетное множество, то*

$$M \cup A \sim M. \tag{6}$$

Отсюда следует, что *если M — несчетное, а A — не более чем счетное множество, то*

$$M \setminus A \sim M. \tag{7}$$

Среди несчетных множеств важнейшее значение имеют континуальные множества. Множество A называется *континуальным*, если A и $[0, 1]$ равномощны. Любые два континуальных множества, очевидно, равномощны. Примеры 10—17 дают много примеров континуальных множеств. Подчеркнем особо, что множество $\mathbf{D}$ континуально. Можно (хотя и труднее) доказать, что множество $\mathbf{K}$ также континуально. Из теоремы Кантора легко следует, что любое континуальное множество несчетно. Из несчетности множества $\mathbf{D}$, счетности множества $\mathbf{R}$ и утверждения (7) вытекает континуальность множества иррациональных чисел. Используя двоичные разложения, нетрудно доказать, что множество $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$ континуально.

У читателя, естественно, возникнет вопрос: существуют ли несчетные множества, не являющиеся континуальными? Такие множества существуют. Примерами таких множеств могут служить множество $\mathfrak{P}(\mathbf{D})$ и, равномощное ему, множество функций типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$ (см. § 1 гл. VI).

Для того чтобы сформулировать в обзорном порядке два утверждения, позволим себе оперировать с не определенными в этой книге понятиями „*мощность* множества“ и „мощность множества A *меньше* мощности множества B“.

Как доказал Кантор, мощность произвольного множества M меньше мощности множества $\mathfrak{P}(M)$. Отсюда следует, что различных мощностей существует бесконечно много. Как было указано выше, множества $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$ и $[0,1]$ равномощны. Следовательно, мощность множества $\mathbf{N}$ меньше мощности множества $[0, 1]$. До сих пор не известно, существуют ли множества, промежуточные по мощности между множеством $\mathbf{N}$ и множеством $[0, 1]$ *).

Читатель, желающий шире ознакомиться с вопросами, рассмотренными в этом параграфе, может прочитать о них в книге И. П. Натансона [15], гл. 1 или в книге П. С. Александрова [1], гл. 1.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что если $A \sim B$, $C \sim D$, $A \cap C = \varnothing$ и $B \cap D = \varnothing$, то $A \cup C \sim B \cup D$.

2. Доказать или опровергнуть, что если $A \subseteq B$, $C \subseteq D$, $A \sim C$ и $B \sim D$, то $B \setminus A \sim D \setminus C$.

3. Доказать, что соединение счетного множества и конечного множества счетно.

4. Доказать, что соединение конечного числа счетных множеств счетно.

5. Доказать, что соединение счетной системы конечных множеств счетно.

6. Доказать, что соединение счетной системы счетных множеств счетно.

7. Доказать, что прямое произведение не пустых не более чем счетных множеств, хотя бы одно из которых счетно, является счетным множеством.

8. Доказать, что если M — счетное множество и $s \in \mathbf{N}$, то M^s счетно.

9. Доказать, что если M — не пустое, не более чем счетное множество, то M^∞ счетно.

10. Доказать, что множество M тогда и только тогда бесконечно, когда оно имеет равномощное себе истинное подмножество. Эта теорема позволяет дать (принадлежащее немецкому математику конца XIX века Р. Дедекинду) *положительное* определение бесконечного множества (в от-

---

*) Предположение, что таких множеств не существует, называется „*гипотезой континуума*".

личие от *отрицательного* определения: множество бесконечно, если оно не конечно).

11. Доказать, что система конечных подмножеств множества $\mathbf{N}$ счетна.

12. Доказать, что любое бесконечное множество попарно непересекающихся интервалов $(a, b) \subset \mathbf{D}$ счетно.

13. Действительное число a называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами. Действительное число a называется *трансцендентным*, если оно не является алгебраическим. Доказать, что существуют трансцендентные числа.

ГЛАВА VI

ФУНКЦИЯ

§ 1. Функция

Функция — это функциональное соответствие, т. е. соответствие с функциональным графиком (§ 2 гл. V). Если элиминировать еще термин „соответствие", можно сказать, что *функция* — это такая тройка множеств, первая компонента которой является, во-первых, подмножеством прямого произведения второй и третьей компонент и, во-вторых, функциональным графиком (§ 5 гл. III)[1]. Итак, тройка множеств $\langle F, X, Y\rangle$ называется *функцией*, если 1) $F \subseteq X \times Y$ и 2) в F нет пар с одинаковыми первыми и различными вторыми компонентами.

Данный параграф по существу почти не будет содержать нового материала. В основном он является повторением § 1 гл. V и § 2 гл. V для важнейшего класса соответствий — функциональных соответствий (функций).

Функции мы будем в основном обозначать строчными латинскими буквами.

Из § 1 гл. V автоматически вытекает смысл терминов „*график функции*" (первая компонента функции), „*область отправления функции*", „*область прибытия функции*". „*область определения функции*", „*область значений функции*". Функция с областью отправления X и с областью прибытия Y называется *функцией типа* $X \to Y$ *). Тот факт, что функция f имеет областью отправления X и областью прибытия Y, выражают также словами „*Функция* f

*) Здесь употреблена та же буква, которой мы обозначали операцию импликации, но с операцией импликации обозначенное здесь понятие не имеет ничего общего.

*определена в *) X и принимает свои значения в *) Y*" или в символах: $X \xrightarrow{f} Y$, $f: X \to Y$.

Пусть

$$f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y \rangle \tag{1}$$

— произвольная функция. Если $\langle a, b \rangle \in F$, элемент b называется *значением функции f на* (или *в*) a; в этом случае говорят также, что *функция f переводит* (*преобразует, отображает*) элемент a в элемент b. Значение функции f на элементе a мы будем обозначать через $f(a)$ (очень часто в этом случае используют и другие обозначения: af, f_a; например, использованное в § 3 гл. V обозначение α_n как раз и является обозначением вида f_a — так называемое *индексное обозначение*). Если функция f определена на элементе a, т. е. $a \in \text{пр}_1 F$, то существует *единственный* (в силу функциональности графика F) элемент b такой, что $\langle a, b \rangle \in F$. Именно этот элемент b и является, очевидно, значением $f(a)$ функции f на a. Таким образом, выражение $f(a)$ определено для тех и только тех $a \in X$, на которых определена функция f, т. е. для $a \in \text{пр}_1 F$. Итак, еще раз: если f — имя функции $\langle F, X, Y \rangle$, а x — переменная с областью значений X, то $f(x)$ — форма, определенная для элементов области определения $\text{пр}_1 F$ и только для них. Форма $f(x)$ является всюду определенной тогда и только тогда, когда является всюду определенной функция f, т. е. когда $\text{пр}_1 F = X$. Однако, в согласии с нашими общими обозначениями (§ 2 гл. I), выражение $!f(x)$ всегда (т. е. для любой функции f) является *всюду определенной* высказывательной формой, истинной для элементов множества $\text{пр}_1 F$ и ложной для элементов множества $X \setminus \text{пр}_1 F$. Таким образом,

$$!f(x) \equiv x \in \text{пр}_1 F. \tag{2}$$

В соответствии со сказанным в § 2 гл. IV условимся *высказывательные* формы, содержащие выражения вида $f(x)$ и не содержащие логических знаков ($\neg$, $\&$, $\vee$, $\to$, $\rightleftarrows$, $\forall$, $\exists$), считать *ложными* при тех значениях переменных, при которых хотя бы одно из выражений вида $f(x)$, входящее в рассматриваемую форму, не определено. Таким

*) Существенно, что здесь предлог „в“, а не „на“ (см. ниже).

образом, в частности, если $f(a)$ не определено и $f(b)$ не определено, форма

$$f(x)=f(y)$$

при $x=a$, $y=b$ определена и ложна. Необходима одна оговорка. Выражения вида $f(x)\neq y$, $f(x)\neq f(y)$ и т. п. мы будем считать сокращением для, соответственно, $\neg[f(x)=y]$, $\neg[f(x)=f(y)]$ и т. п. Таким образом,

$$f(x)\neq f(y) \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \neg[f(x)=f(y)] \tag{3}$$

и т. п. Если, например, $!f(a)\equiv л$, $!f(b)\equiv л$, форма

$$f(x)\neq f(y)$$

при $x=a$, $y=b$ определена и истинна.

Приведем более специальный пример. Пусть f — функция типа $\mathbf{D}\longrightarrow\mathbf{D}$. Тогда не верно, что

$$\neg[f(x)\leqslant a]\equiv f(x)>a \tag{4}$$

(ср. § 2 гл. IV). Вместо (4) верно

$$\neg[f(x)\leqslant a]\equiv \neg\,!\,f(x)\vee[f(x)>a]. \tag{5}$$

Аналогично, не верно, что

$$\neg[f(x)>a]\equiv f(x)\leqslant a,$$

но верно

$$\neg[f(x)>a]\equiv \neg\,!f(x)\vee[f(x)\leqslant a].$$

Однако верно, что

$$f(x)\leqslant a\equiv[f(x)<a]\vee[f(x)=a]. \tag{6}$$

Разумеется, верно

$$\neg[f(x)\leqslant a]\equiv \neg[f(x)<a]\,\&\,\neg[f(x)=a], \tag{7}$$

но не

$$\neg[f(x)\leqslant a]\equiv[f(x)\geqslant a]\,\&\,[f(x)\neq a]. \tag{8}$$

Вместо (8) верно

$$\neg[f(x)\leqslant a]\equiv \neg\,!f(x)\vee\{[f(x)\geqslant a]\,\&\,[f(x)\neq a]\}.$$

Если x — переменная с областью значений X, то формы $f(\{x\})$ и $!f(x)$ всюду определены, а форма $f(x)$ не обязательно всюду определена. Если $a \in \text{пр}_1 F$, то

$$f(\{a\}) = \{f(a)\}. \tag{9}$$

Если же $a \in X \setminus \text{пр}_1 F$, то выражение $f(a)$ не определено, не имеет смысла, ничего не обозначает, $!f(a)$ — ложное высказывание и

$$f(\{a\}) = \varnothing. \tag{10}$$

Для любого $x \in X$ истинно высказывание

$$!f(x) \to \langle x, f(x) \rangle \in F. \tag{11}$$

Если $!f(a)$, то $\langle a, f(a) \rangle \in F$. Во многих доказательствах полезно следующее тривиальное утверждение:

$$f(x) = y \equiv \langle x, y \rangle \in F \tag{12}$$

(x, y — переменные с областями значений X, Y). Наряду с (12) верны также утверждения

$$\langle x, y \rangle \in F \equiv\, !f(x) \,\&\, f(x) = y, \tag{13}$$

$$\langle x, y \rangle \in F \equiv \langle x, y \rangle \in X \times Y \,\&\, !f(x) \,\&\, f(x) = y, \tag{14}$$

поскольку из $f(x) = y$ следует и $!f(x)$ и $\langle x, y \rangle \in X \times Y$.

Легко видеть, что если $f \underset{\text{Df}}{=} \langle F, X, Y \rangle$ — произвольная функция, то

$$F = \mathscr{E}\{\langle x, y \rangle \in X \times Y \mid f(x) = y\}. \tag{15}$$

В школьном изложении (15) является *определением* графика функции, у нас оно является тривиальной теоремой. Легко видеть также, что

$$\text{пр}_1 F = \mathscr{E}\{x \in X \mid\, !f(x)\}. \tag{16}$$

Область определения функции f есть множество тех $x \in X$, на которых f определена. Наконец,

$$\text{пр}_2 F = \mathscr{E}\{y \in Y \mid (\exists x \in X)\,[f(x) = y]\}. \tag{17}$$

Область значений функции f — это множество таких $y \in Y$, каждый из которых является значением функции f на некотором $x \in X$.

Наша терминология, начав с „другого конца“, с совершенно неожиданного, по сравнению со школьным, определения функции, пришла к привычным в обычном изложении утверждениям.

Функция $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ называется *нигде не определенной*, если $F = \varnothing$. В частности, соответствие $\langle\varnothing, \varnothing, \varnothing\rangle$ является функцией, причем нигде не определенной функцией. Условимся говорить, что функция $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ *определена на множестве* A, если $A \subseteq \mathrm{пр}_1 F$, т. е. если $(\forall x \in A)[!\, f(x)]$. В частности, по нашей терминологии любая функция f определена на $\varnothing$.

Функция $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ называется *тождественной*, если $Y = X$ и $F = \Delta_X$. Тождественную функцию $\langle\Delta_X, X, X\rangle$ мы часто будем обозначать через I_X *). Условимся говорить, что функция $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ *тождественна на множестве* A, если $\Delta_A \subseteq F$, т. е. если $(\forall x \in A)[f(x) = x]$. Если функция f тождественна на A, то она, разумеется, определена на A. Если $A \neq \varnothing$ и $X \cap Y = \varnothing$, то не существует функции типа $X \longrightarrow Y$, тождественной на A. Функция I_X тождественна на всей области отправления X. Очевидно, по нашей терминологии любая функция f тождественна на $\varnothing$.

Функция $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ называется *константной*, если существует такой элемент $b \in Y$, что $F = X \times \{b\}$. Условимся говорить, что функция $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ *константна на множестве* A, если $(\exists y \in Y)[A \times \{y\} \subseteq F]$, т. е. если $(\exists y \in Y)(\forall x \in A)[f(x) = y]$. Если функция f константна на A, то она, очевидно, определена на A. По нашей терминологии любая функция f *с непустой областью прибытия* константна на $\varnothing$. С другой стороны, функция типа $X \longrightarrow \varnothing$ не является константной ни на каком множестве A (см. (6) из § 3 гл. IV).

Функция $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ тогда и только тогда является всюду определенной, когда $(\forall x \in X)[!\, f(x)]$. Согласно введенной выше терминологии, всюду определенная функция

---

*) I — первая буква слов „identity“ (англ.), „identité“ (франц.), „Identität“ (нем.).

$f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ *определена* ***на*** X *). Всюду определенную функцию называют также *отображением* (очень важный, очень широко распространенный термин!)[2]), а всюду определенную функцию типа $X \rightarrow Y$ — *отображением множества X в***) *множество Y*. Тождественная функция I_X является, очевидно, отображением. Отображение I_X называют также *тождественным отображением множества X на себя.* Константная функция также, очевидно, является отображением (*константное отображение*). Если функция f является отображением, то значение $f(a)$ функции f на a называется также *образом элемента a при отображении f*. Образ элемента a при отображении f не следует путать с образом множества $\{a\}$ при отображении f (см. (9)).

Функция $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ тогда и только тогда сюръективна, когда $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)[f(x) = y]$. Сюръективную функцию мы будем также называть *сюръекцией****). Термины „*всюду определенная сюръекция*" и „*сюръективное отображение*" означают, очевидно, функцию, одновременно всюду определенную и сюръективную. Сюръективное отображение типа $X \rightarrow Y$ называют также *отображением множества X* ***на*** *Y*****). Тождественное отображение I_X является сюръекцией.

Функция $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ тогда и только тогда инъективна, когда

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \tag{18}$$

или, по контрапозиции,

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2. \tag{19}$$

---

*) См. сноску на стр. 203.

**) Существенно, что здесь предлог „в", а не „на" (см. ниже).

***) Ср. со сноской на стр. 184.

****) См. сноску**). Таким образом, в терминах „функция определена ***в*** X", „функция определена ***на*** X", „отображение множества X ***в*** Y", „отображение множества X ***на*** Y" предлоги „в" и „на" играют самостоятельную роль, имеют терминологическое значение. В аналогичных случаях в английском языке употребляют предлоги „into" и „onto", во французском — „dans" и „sur", в немецком — „in" и „auf".

(Кванторы общности, в соответствии с принятым в § 3 гл. IV соглашением, подразумеваются.) Инъективную функцию мы будем также называть *инъекцией* *)[3]). Термины „*всюду определенная инъекция*“ и „*инъективное отображение*“ означают, очевидно, функцию, одновременно всюду определенную и инъективную [4]). Тождественное отображение I_X и любая нигде не определенная функция являются инъекциями.

Функция $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y \rangle$ тогда и только тогда биективна, когда она всюду определена, сюръективна и инъективна. В качестве синонима к термину „биекция типа $X \longrightarrow Y$“ употребляют также термин „*взаимно-однозначное отображение множества X на множество Y*“. Таким образом, термины „биективное соответствие между множествами X и Y“, „взаимно-однозначное соответствие между множествами X и Y“, „биективная функция типа $X \longrightarrow Y$“, „биекция типа $X \longrightarrow Y$“ и „взаимно-однозначное отображение множества X на множество Y“ означают у нас одно и то же. Иногда, желая сказать, что f — биекция типа $X \longrightarrow Y$, говорят „*функция f* **устанавливает** *взаимно-однозначное соответствие между множествами X и Y*“, что при нашей терминологии несколько неприятно, поскольку у нас биекция f сама является взаимно-однозначным соответствием. Тождественное отображение I_X множества X на себя является биекцией.

Пусть $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y \rangle$ — произвольная функция. Инверсия $f^{-1} = \langle F^{-1}, Y, X \rangle$ соответствия f не обязана быть функцией. В § 2 гл. V мы, в качестве тривиального следствия одного из утверждений § 5 гл. III, получили, что для произвольного соответствия Γ

$$\Gamma^{-1} \text{ — функция} \rightleftarrows \Gamma \text{ — инъективное}$$

(см. (16) из § 2 гл. V). Отсюда автоматически следует простое, но важное Утверждение, которому мы ввиду его важности дадим особое название.

К р и т е р и й ф у н к ц и о н а л ь н о с т и и н в е р с и и. *Инверсия f^{-1} функции f тогда и только тогда является функцией, когда функция f инъективна.*

---

*) Ср. со сноской на стр. 184.

Этот критерий понадобится нам в следующем параграфе.

Если $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ — произвольная функция, то для любого множества A

$$f(A) = \mathscr{E}\{y \in Y \mid (\exists x \in A)[f(x) = y]\}, \tag{20}$$

$$f^{-1}(A) = \mathscr{E}\{x \in X \mid (\exists y \in A)[f(x) = y]\}. \tag{21}$$

Вместо (21) можно написать проще:

$$f^{-1}(A) = \mathscr{E}\{x \in X \mid f(x) \in A\}. \tag{22}$$

Для произвольного соответствия Γ у нас имеют смысл обозначения $\Gamma(A)$, $\Gamma(\{a\})$, $\Gamma^{-1}(A)$ и $\Gamma^{-1}(\{a\})$, но не имеют, вообще говоря, смысла обозначения $\Gamma(a)$, $\Gamma^{-1}(a)$. Для произвольного *функционального* соответствия f у нас, помимо выражений $f(A)$, $f(\{a\})$, $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(\{a\})$, может иметь также смысл обозначение $f(a)$, но не имеет, вообще говоря, смысла обозначение $f^{-1}(a)$. И наконец, для *инъективного* функционального соответствия f может иметь смысл также и обозначение $f^{-1}(a)$. А именно, если f — инъекция, то, в силу критерия, f^{-1} — функция, и следовательно, $f^{-1}(a)$ обозначает значение функции f^{-1} на элементе a. Разумеется, $f^{-1}(a)$ может быть определено или не определено. Если $!\, f^{-1}(a) \equiv \Lambda$, то $f^{-1}(a)$ также не имеет смысла.

Пусть $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ — произвольная функция и $b \in Y$. Элемент $a \in X$ называется *прообразом элемента b относительно* (или *при*) *функции* f, если $f(a) = b$. Из (22) следует, что

$$f^{-1}(\{b\}) = \mathscr{E}\{x \in X \mid f(x) = b\}. \tag{23}$$

Полный прообраз множества $\{b\}$ относительно функции f есть множество прообразов элемента b относительно f. Аналогичное утверждение верно и для произвольного множества. В силу (21), полный прообраз $f^{-1}(A)$ множества A относительно функции f есть множество прообразов элементов множества A относительно f.

Перейдем к операции композиции. Из § 1 гл. V мы знаем, что такое композиция двух, трех и вообще любого (конечного) числа функций. Как мы уже отмечали в § 2 гл. V, *композиция функций есть функция.*

Из доказанного в § 2 гл. V следует, что *композиция инъекций есть инъекция* и — при условии совпадения области прибытия первой компонируемой функции и области отправления второй компонируемой функции — *композиция отображений есть отображение, композиция сюръекций есть сюръекция* и *композиция биекций есть биекция.*

Пусть $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y \rangle$ и $g \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, Z, U \rangle$ — произвольные функции. Из (23) из § 1 гл. V следует, что для любого элемента $a \in X$ множества $(f \circ g)(\{a\})$ и $g(f(\{a\}))$ равны. Таким образом, если x — переменная с областью значений X, то равенство множеств

$$(f \circ g)(\{x\}) = g(f(\{x\})) \tag{24}$$

верно при любом значении переменной. Из (24), (9) и (10) легко следует

Теорема о значении композиции. *Для любых функций f и g*

$$(f \circ g)(x) \simeq g(f(x)) \tag{25}$$

(областью значений переменной x является область отправления функции f).

Приведем для тренировки еще одно, непосредственное (без (24))

Доказательство. Пусть $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y \rangle$, $g \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, Z, U \rangle$. Тогда $f \circ g = \langle F \circ G, X, U \rangle$. Пусть $a \in X$ и $!(f \circ g)(a)$. Положим $(f \circ g)(a) \underset{\mathrm{Df}}{=} b$. По (12) $\langle a, b \rangle \in F \circ G$. Следовательно, существует такое c, что

$$\langle a, c \rangle \in F, \tag{26}$$

$$\langle c, b \rangle \in G. \tag{27}$$

Из (26) и (12) $f(a) = c$. Из (27) и (12) $g(c) = b$. Значит, $g(f(a)) = g(c) = b$. Пусть, обратно, $a \in X$ и $!g(f(a))$. Положим $g(f(a)) \underset{\mathrm{Df}}{=} b$. Из $!g(f(a))$ следует $!f(a)$. Положим $f(a) \underset{\mathrm{Df}}{=} c$. Следовательно, $g(c) = b$. Отсюда и из (12) получаем (26) и (27). Из (26) и (27) $\langle a, b \rangle \in F \circ G$. По (12) $(f \circ g)(a) = b$.

Теорема о значении композиции верна для любого (конечного) числа функций:

$$(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n)(x) \simeq f_n(\ldots(f_2(f_1(x)))\ldots). \qquad (28)$$

Для доказательства биективности соответствий часто бывает полезной

Теорема о тождественных композициях. *Пусть f — функция типа $X \to Y$, g — функция типа $Y \to X$. Если обе композиции: $f \circ g$ и $g \circ f$ — являются тождественными функциями, то f — биекция, g — биекция и $g = f^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $f = \langle F, X, Y \rangle$, $g = \langle G, Y, X \rangle$. Тогда $f \circ g = \langle F \circ G,\ X,\ X \rangle$, $g \circ f = \langle G \circ F,\ Y,\ Y \rangle$. По условию $f \circ g = I_X$, $g \circ f = I_Y$. Следовательно,

$$F \circ G = \Delta_X, \qquad (29)$$

$$G \circ F = \Delta_Y. \qquad (30)$$

Поскольку $f \circ g$ — биекция, f — инъективное отображение и g — сюръекция (задачи 7—9 к § 2 гл. V). По аналогичной причине g — инъективное отображение и f — сюръекция. Значит, f и g — биекции. Рассмотрим теперь $f^{-1} = \langle F^{-1}, Y, X \rangle$. Нам надо доказать, что $g = f^{-1}$, т. е. что $G = F^{-1}$. Пусть $\langle a, b \rangle \in G$. Поскольку $b \in X$ и f всюду определена, $!f(b)$. Положим $f(b) \underset{\mathrm{Df}}{=} c$. По (12) $\langle b, c \rangle \in F$. Значит, $\langle a, c \rangle \in G \circ F$. Из (30) $c = a$. Следовательно, $\langle b, a \rangle \in F$ и $\langle a, b \rangle \in F^{-1}$. Пусть, обратно, $\langle a, b \rangle \in F^{-1}$. Тогда $\langle b, a \rangle \in F$. Поскольку $a \in Y$ и g всюду определена, $!g(a)$. Положим $g(a) \underset{\mathrm{Df}}{=} c$. По (12) $\langle a, c \rangle \in G$. Значит, $\langle b, c \rangle \in F \circ G$. Из (29) $c = b$. Следовательно, $\langle a, b \rangle \in G$. Теорема доказана.

В силу (5) из § 1 гл. V для произвольных функций (и даже для произвольных соответствий) f, g

$$g = f^{-1} \to g^{-1} = f. \qquad (31)$$

Поэтому, если f и g удовлетворяют условиям теоремы о тождественных композициях, то не только $g = f^{-1}$, но и $f = g^{-1}$.

Для понятий сужения-продолжения (§ 1 гл. V) нам остается добавить только, что сужение f_A любой функции f на любое множество A есть функция; для любой функции $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ и для любого множества A

$$(\forall x \in X)\,[!\, f_A(x) \longrightarrow x \in A \,\&\, !\, f(x) \,\&\, f_A(x) = f(x)], \tag{32}$$

$$(\forall x \in A)\,[!\, f_A(x) \rightleftarrows\, !\, f(x)]. \tag{33}$$

Если *функция* g является продолжением функции $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$, то

$$(\forall x \in X)\,[!\, f(x) \longrightarrow\, !\, g(x) \,\&\, g(x) = f(x)]. \tag{34}$$

Закончим параграф одним, более специальным вопросом — функциями типа $\mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}$.

Функции типа $\mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}$ чаще всего задаются при помощи *числовых форм*. Пусть $\mathfrak{A}(x)$ — одноместная числовая форма с числовой переменной x. Обозначим через

$$x \longrightarrow \mathfrak{A}(x) \tag{35}$$

функцию типа $\mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}$ с графиком $\mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid y = \mathfrak{A}(x)\}$*). В частности, если $\mathfrak{A}(a)$ не определено, то функция (35) не определена на a, так как для любого $b \in \mathbf{D}$ высказывание $b = \mathfrak{A}(a)$ ложно (§ 2 гл. IV). Таким образом, область определения функции (35) равна множеству допустимых (относительно $\mathfrak{A}(x)$) значений переменной x. Если $!\,\mathfrak{A}(a)$, то значение функции (35) на a равно $\mathfrak{A}(a)$. Очевидно, выражения (35) и

$$y \longrightarrow \mathfrak{A}(y)$$

задают одну и ту же функцию:

$$x \longrightarrow \mathfrak{A}(x) = y \longrightarrow \mathfrak{A}(y).$$

Впрочем, в нашей литературе вместо (35) чаще пишут

$$y = \mathfrak{A}(x) \tag{36}$$

или, вводя для функции (35) индивидуальное имя,

$$f(x) = \mathfrak{A}(x). \tag{37}$$

В (37) и особенно в (36) буква $=$ имеет специфический

---

*) Буква $\longrightarrow$ употребляется в (35) еще в одном смысле (см. сноску на стр. 202).

смысл *). Часто вместо (35) пишут еще проще:

$$\mathfrak{A}(x), \tag{38}$$

чего следует по возможности избегать, так как обозначение функции (35) выражением (38) находится в коллизии с обозначением значения функции (35) на x.

Буква x в равенстве (36) называется *независимой переменной* или *аргументом*. Буква y в равенстве (36) называется *зависимой переменной*. Разумеется, задавая функцию (35) равенством вида (36), можно как независимую, так и зависимую переменную обозначать любой буквой. Задаваемая функция от обозначения переменных, конечно, не зависит. Таким образом, равенства

$$z = \mathfrak{A}(x), \tag{39}$$

$$z = \mathfrak{A}(y), \tag{40}$$

$$x = \mathfrak{A}(y) \tag{41}$$

задают ту же функцию, что и (36). В равенстве (41) независимой переменной является буква y, зависимой — буква x. С другой стороны, *наиболее привычно* независимую переменную обозначать буквой x, зависимую переменную — буквой y.

Пусть A — множество. Тогда через

$$x \longrightarrow \mathfrak{A}(x) \qquad (x \in A) \tag{42}$$

и, соответственно,

$$y = \mathfrak{A}(x) \qquad (x \in A), \tag{43}$$

$$f(x) = \mathfrak{A}(x) \qquad (x \in A), \tag{44}$$

$$\mathfrak{A}(x) \qquad (x \in A) \tag{45}$$

обозначают сужение функции (35) на A.

Подобно заданию через числовые формы, можно задавать функции типа $\mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}$ при помощи *чисел*. Если $b \in \mathbf{D}$, то выражение

$$x \longrightarrow b \tag{46}$$

обозначает константную функцию $\langle \mathbf{D} \times \{b\}, \mathbf{D}, \mathbf{D} \rangle$. Аналогично выражениям (36) — (38), функцию (46) задают

*) См. § 3 гл. I.

также выражениями

$$y = b, \tag{47}$$

$$f(x) = b, \tag{48}$$

$$b. \tag{49}$$

Равенство (47) содержит зависимую переменную и не содержит независимой переменной. Равенство (48) отличается от равенства (47) тем, что, задавая функцию при помощи (48), мы одновременно вводим для нее имя f. Сужения функции (46) на A обозначаются, соответственно, через

$$x \to b\ (x \in A), \tag{50}$$

$$y = b\ (x \in A), \tag{51}$$

$$f(x) = b\ (x \in A), \tag{52}$$

$$b\ (x \in A). \tag{53}$$

Примеры: 1) Выражения

$$x \to x^2, \tag{54}$$

$$y = x^2,\ f(x) = x^2,\ x^2,\ y \to y^2,\ z = x^2,\ z = y^2,\ x = y^2,$$
$$g(x) = x^2,\ y^2$$

задают одну и ту же функцию типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$.

2) Выражения

$$x \to 3, \tag{55}$$

$$y = 3,\ f(x) = 3,\ 3,\ y \to 3,\ z = 3,\ x = 3,\ g(x) = 3$$

задают одну и ту же функцию типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$. Функция (55) константная. График этой функции изображен на рис. 40.

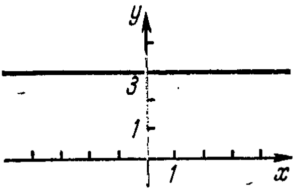


Рис. 40.

3) Выражения

$$x \to x^2\ (x \in [2,\ 3]), \tag{56}$$
$$x \to x^2\ (2 \leqslant x \leqslant 3),$$
$$f(x) = x^2\ (x \in [2,\ 3]),$$
$$y = x^2\ (2 \leqslant x \leqslant 3)$$

задают сужение функции (54) на $A \underset{\text{Df}}{=} [2,\ 3]$. График этой функции изображен на рис. 27.

4) Функция $y = \sqrt{-x^2 - 1}$ является нигде не определенной функцией типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$.

5) Функция $y=x$ — тождественная функция типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$. График этой функции изображен на рис. 41.

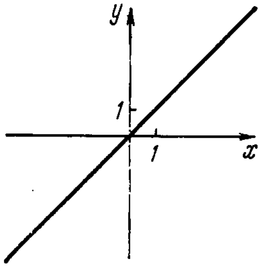


Рис. 41.

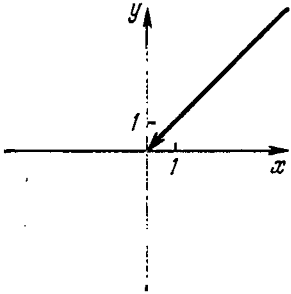


Рис. 42.

6) Функция $x \to 10^{\lg x}$ тождественна на $(0, +\infty)$, но не является тождественной функцией*). График этой функции изображен на рис. 42**).

7) Функция $f(x)=\frac{|x|}{x}$ константна на $(0, +\infty)$ и константна на $(-\infty, 0)$, но не является константной функцией. График функции f изображен на рис. 43.

8) Если f — функция типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$, то $f(x)$, $f(2x)$, $f(3x-5)$, $f(\sin x)$ — числовые формы. Поэтому выражения

$$x \to f(2x), \tag{57}$$

$$g(x)=f(3x-5),$$

$$y=f(\sin x)$$

задают функции типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$. Значение функции (57) на a равно (при условии $!\, f(2a)$) $f(2a)$. Соответственно $g(b)=f(3b-5)$, если $!\, f(3b-5)$, и т. д.

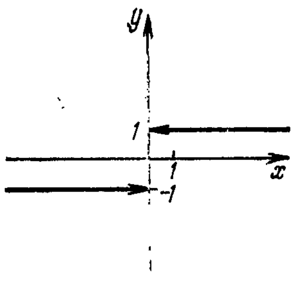


Рис. 43.

Иногда функции типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$ на разных участках области определения приходится задавать разными числовыми формами.

*) *Подразумевается*, что обозначения типа (35) — (38), (42) — (53), если не оговорено противное, задают функцию типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$.

**) Стрелочка на рис. 42 обозначает, что ее „конец“, т. е. точка $\langle 0, 0 \rangle$, не принадлежит графику.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — попарно не пересекающиеся подмножества множества $\mathbf{D}$ и $\mathfrak{A}_1(x), \ldots, \mathfrak{A}_n(x)$ — одноместные числовые формы с числовой переменной x. Тогда выражения

$$f(x) = \begin{cases} \mathfrak{A}_1(x) & x \in A_1 \\ \vdots & \\ \mathfrak{A}_n(x) & x \in A_n \end{cases} \tag{58}$$

$$y = \begin{cases} \mathfrak{A}_1(x) & x \in A_1 \\ \vdots & \\ \mathfrak{A}_n(x) & x \in A_n \end{cases} \tag{59}$$

$$x \to \begin{cases} \mathfrak{A}_1(x) & x \in A_1 \\ \vdots & \\ \mathfrak{A}_n(x) & x \in A_n \end{cases} \tag{60}$$

обозначают функцию типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$ с графиком $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$, где $F_i \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid x \in A_i \mathbin{\&} y = \mathfrak{A}_i(x)\}$.

Задание функции по схемам (58) — (60) называется *кусочным заданием*. Схемы (42) — (45) представляют собой кусочное задание при $n = 1$.

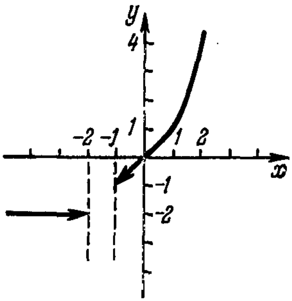


Рис. 44.

Пример 9) График функции

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x < -2 \\ x & -1 < x \leqslant 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

изображен на рис. 44. Функция f на $[-2, -1]$ не определена.

Пусть f и g — функции типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$. Согласно теореме о значении композиции, композиция $f \circ g$ функций f и g может быть задана формой $g(f(x))$. Таким образом, выражения

$$x \to g(f(x)), \tag{61}$$

$$y = g(f(x)), \tag{62}$$

$$h(x) = g(f(x)) \tag{63}$$

задают функцию $f \circ g$. Аналогично для большего количества функций. Например, выражения

$$x \to i(h(g(f(x)))), \tag{64}$$

$$y = i(h(g(f(x)))), \tag{65}$$

$$j(x) = i(h(g(f(x)))) \tag{66}$$

задают функцию $f \circ g \circ h \circ i$.

Примеры: 10) Функция

$$y = \lg \sin x^2$$

есть композиция $f \circ g \circ h$ функций $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \lg x$.

11) В тех же обозначениях функция

$$x \to \lg \sin^2 x$$

равна $g \circ f \circ h$, а функция

$$i(x) = \lg^2 \sin x$$

равна $g \circ h \circ f$.

Легко видеть, что указанный только что способ задания функций типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$ годится и для общего случая. Пусть x — переменная с областью значений X, $\mathfrak{A}(x)$ — одноместная форма, значениями которой являются элементы множества Y. Тогда выражения $x \to \mathfrak{A}(x)$, $y = \mathfrak{A}(x)$, $f(x) = \mathfrak{A}(x)$ обозначают функцию типа $X \to Y$ с графиком $\mathscr{E}\{\langle x, y\rangle \in X \times Y \mid y = \mathfrak{A}(x)\}$.

ЗАДАЧИ

1. Чему равно число нижеуказанных функций типа $X \to Y$, если X — m-элементное, а Y — n-элементное множество:

   a) отображений?
   b) инъекций?
   c)* сюръекций?

2. Доказать или опровергнуть, что для любой функции f и для любых множеств A и B:

   a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
   b) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$,
   c) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
   d) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

3. Доказать, что для любой функции f и для любых множеств A и B

$$A \cap B = \varnothing \to f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \varnothing.$$

4. Какому достаточному условию должна удовлетворять функция f, чтобы для любых множеств A и B

$$A \cap B = \varnothing \to f(A) \cap f(B) = \varnothing?$$

5. Каким необходимым условиям удовлетворяют функции f и g, если композиция $f \circ g$ всюду определена?

6. Найти необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять функция f, чтобы инверсия f^{-1} была:

a) сюръекцией, c) инъекцией,
b) отображением, d) биекцией.

7. Найти необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять функция f, чтобы композиция $f \circ f^{-1}$ была функцией.

8. Доказать, что для любой функции f композиция $f^{-1} \circ f$ является функцией.

9. Доказать, что функция f тогда и только тогда тождественна на A, когда график сужения f_A равен Δ_A.

10. Доказать, что функция f тогда и только тогда константна на A, когда существует такое b, что график сужения f_A равен $A \times \{b\}$.

11. Доказать, что если функция g является продолжением функции $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y \rangle$, то $f = g_{\text{пр}_1 F}$.

12. Пусть $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \sin x^2$, $i(x) = \sin^2 x$. Задать при помощи числовой формы (см. (37) и (66)) функции $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, $h \circ i$, $i \circ h$, $h \circ h$, $i \circ i$, $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ i$, $f \circ g \circ h \circ i$, $f \circ i \circ h \circ g$, $f \circ f \circ f \circ f \circ f$, $i \circ i \circ i \circ i \circ i$.

§ 2. Обратная функция

Прежде чем приступать к основному предмету настоящего параграфа — понятию обратной функции, рассмотрим некоторые свойства инверсии f^{-1}.

Пусть $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y \rangle$ — произвольная инъекция. Тогда, в силу критерия функциональности инверсии (§ 1),

$f^{-1} = \langle F^{-1}, Y, X\rangle$ — функция. Отметим три свойства функции f^{-1}.

Во-первых, из (15) из § 2 гл. V вытекает, что

$$f^{-1} \text{ — инъекция.} \tag{1}$$

Во-вторых, функция

$$f \circ f^{-1} \text{ тождественна на } \text{пр}_1 F. \tag{2}$$

В-третьих, функция

$$f^{-1} \circ f \text{ тождественна на } \text{пр}_2 F. \tag{3}$$

Докажем (2). Пусть $a \in \text{пр}_1 F$. Требуется доказать, что $(f \circ f^{-1})(a) = a$ или, в силу теоремы о значении композиции (§ 1), $f^{-1}(f(a)) = a$. Так как $a \in \text{пр}_1 F$, $!f(a)$ ((2) из § 1). Положим $f(a) \underset{\text{Df}}{=} b$. По (12) из § 1 $\langle a, b\rangle \in F$. Значит, $\langle b, a\rangle \in F^{-1}$. Следовательно, снова по (12) из § 1, $f^{-1}(b) = a$. Итак, $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$.

(3) можно доказать аналогично. Кроме того, поскольку $f^{-1} \circ f = f^{-1} \circ (f^{-1})^{-1}$ и $\text{пр}_2 F = \text{пр}_1 F^{-1}$, (3) следует прямо из (2).

Пусть $f \underset{\text{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ — произвольная функция. Обязательно ли существует такая функция g типа $Y \to X$, что функция

$$f \circ g \text{ тождественна на } \text{пр}_1 F. \tag{4}$$

Легко видеть, что *требуемая функция g существует тогда и только тогда, когда f — инъекция*. В самом деле. Если f — инъекция, то искомой функцией g может, в силу (2), служить функция f^{-1}. Обратно. Пусть функция g со свойством (4) существует. Доказывая от противного, предположим, что f — не инъекция. Тогда существуют такие $a \in X$ и $b \in X$, что $a \neq b$, но $f(a) = f(b)$. Поскольку $!f(a)$ и $!f(b)$, $a \in \text{пр}_1 F$ и $b \in \text{пр}_1 F$. В силу (4) должно быть $(f \circ g)(a) = g(f(a)) = a$ и $(f \circ g)(b) = g(f(b)) = b$. Но $f(a) = f(b)$ и $a \neq b$. Мы получили противоречие с функциональностью соответствия g.

Пусть снова $f \underset{\text{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ — произвольная функция. Обязательно ли существует такая функция g типа $Y \to X$, что функция

$$g \circ f \text{ тождественна на } \text{пр}_2 F. \qquad (5)$$

Оказывается, в отличие от задачи (4), *требуемая функция g существует всегда*, для любой функции f. В самом деле. По определению проекции множества $(\forall y \in \text{пр}_2 F)$ $(\exists x \in X)[\langle x, y\rangle \in F]$. Выберем для каждого элемента $b \in \text{пр}_2 F$ произвольным образом какое-нибудь $a \in X$ такое, что $\langle a, b\rangle \in F$, и множество пар $\langle b, a\rangle$, составленных для всех $b \in \text{пр}_2 F$, обозначим через G. Поскольку $F \subseteq X \times Y$, $G \subseteq Y \times X$. Следовательно, $g \underset{\text{Df}}{=} \langle G, Y, X\rangle$ — соответствие. Поскольку для каждого $b \in \text{пр}_2 F$ мы брали только по одному такому $a \in X$, что $\langle a, b\rangle \in F$, G — функциональный график и g — функция. Докажем, наконец, (5). Пусть $b \in \text{пр}_2 F$. Докажем, что $(g \circ f)(b) = f(g(b)) = b$. Так как $b \in \text{пр}_2 F$, существует такое $a \in X$, что $\langle a, b\rangle \in F$ и $\langle b, a\rangle \in G$. Из $\langle b, a\rangle \in G$ следует $g(b) = a$. Из $\langle a, b\rangle \in F$ следует $f(a) = b$. Значит, $f(g(b)) = f(a) = b$. (5) доказано. Для дальнейшего заметим, что область определения построенной нами функции g равна $\text{пр}_2 F$.

Пусть $f \underset{\text{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ — произвольная функция. Какую функцию g типа $Y \to X$ стоит называть обратной (для f) функцией? Прежде всего функция g должна быть в каком-то смысле обратной для f. В каком же именно смысле? Есть две возможности: (4) и (5). Желательно, чтобы обратная функция существовала для любой функции f. Поскольку функция g со свойством (4) существует только тогда, когда f — инъекция, а функция g со свойством (5) существует для любой f, из свойств (4), (5) приходится выбрать (5). Желательно, кроме того, чтобы обратная функция по возможности была единственной. Функция g со свойством (5) заведомо определена на $\text{пр}_2 F$. Свойство (5) не накладывает никаких ограничений на значения функции g вне $\text{пр}_2 F$. Чтобы уменьшить возможность существования различных обратных функций, потребуем, чтобы обратная функция была определена только на $\text{пр}_2 F$, т. е., чтобы ее область определения равнялась $\text{пр}_2 F$. После всех этих мотивировочных рассмотрений дадим, наконец, окончательное определение.

Пусть f — произвольная функция типа $X \to Y$. Функция g типа $Y \to X$ называется *обратной для функции* f, если, во-первых, ее область определения равна области значений функции f и, во-вторых, функция $g \circ f$ тождественна на области значений функции f. Итак, функция $g \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, Y, X\rangle$ является обратной для функции $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$, если выполняются два условия:

$$\text{пр}_1 G = \text{пр}_2 F, \tag{6}$$

$$g \circ f \text{ тождественна на } \text{пр}_2 F. \tag{7}$$

Прежде чем рассматривать вопросы о существовании и единственности обратной функции, отметим некоторые ее свойства.

Пусть функция $g \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, Y, X\rangle$ является обратной для функции $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$. Тогда

$$G \subseteq F^{-1} \tag{8}$$

и, следовательно,

$$\text{пр}_2 G \subseteq \text{пр}_1 F, \tag{9}$$

$$f \circ g \text{ тождественна на } \text{пр}_2 G, \tag{10}$$

$$g \text{ — инъекция.} \tag{11}$$

Докажем (8). Пусть $\langle a, b\rangle \in G$. Тогда $a \in \text{пр}_1 G$ и $g(a) = b$. В силу (6) $a \in \text{пр}_2 F$. По (7) $(g \circ f)(a) = a$. Но $(g \circ f)(a) = f(g(a)) = f(b)$. Значит, $f(b) = a$. Следовательно, $\langle b, a\rangle \in F$ и $\langle a, b\rangle \in F^{-1}$.

Докажем (10). Пусть $a \in \text{пр}_2 G$. По определению проекции множества существует такое b, что $\langle b, a\rangle \in G$. По (8) $\langle b, a\rangle \in F^{-1}$ и $\langle a, b\rangle \in F$. Из $\langle a, b\rangle \in F$ следует $f(a) = b$. Из $\langle b, a\rangle \in G$ вытекает $g(b) = a$. Следовательно, $(f \circ g)(a) = g(f(a)) = g(b) = a$.

Докажем (11). Доказывая от противного, допустим, что g не инъекция. Поскольку, по условию, g — функция, наше предположение означает, что график G функции g не инъективен, т. е. что существуют такие a, b и c, для которых $a \neq b$, $\langle a, c\rangle \in G$ и $\langle b, c\rangle \in G$. По (8) $\langle a, c\rangle \in F^{-1}$ и $\langle b, c\rangle \in F^{-1}$, т. е. $\langle c, a\rangle \in F$ и $\langle c, b\rangle \in F$. Мы получили противоречие с функциональностью графика F.

В математической практике „обратность" обратной функции чаще всего используется в виде следующих простых свойств:

$$g(y) = x \to f(x) = y, \tag{12}$$

$$f(x) = y \,\&\, x \in \text{пр}_2 G \to g(y) = x \tag{13}$$

(область значений переменных x и y ясна из обозначений). Докажем (12). Пусть $g(b) = a$. Тогда $\langle b, a\rangle \in G$. По (8) $\langle b, a\rangle \in F^{-1}$, т. е. $\langle a, b\rangle \in F$. Следовательио, $f(a) = b$.

Докажем (13). Пусть $f(a) = b$ и $a \in \text{пр}_2 G$. По (10) $(f \circ g)(a) = a$. С другой стороны, $(f \circ g)(a) = g(f(a)) = g(b)$. Следовательно, $g(b) = a$.

Свойства (12), (13) являются фактически переформулировкой, соответственно, свойств (7), (10).

Подчеркнем, что утверждение

$$f(x) = y \to g(y) = x \tag{14}$$

в общем случае не верно.

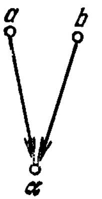


Рис. 45.

Пример 1) Пусть $X \underset{\text{Df}}{=} \{a, b\}$, $Y \underset{\text{Df}}{=} \{\alpha\}$. Пусть график функции f типа $X \to Y$ задается рис. 45, а график функции g типа $Y \to X$ — рис. 46. Тогда функция g является обратной для функции f и $f(a) = \alpha$, но не верно, что $g(\alpha) = a$.

Рис. 46.

Рассмотрим, наконец, вопросы существования и единственности обратной функции. Выше, доказывая, что для любой функции f существует функция g со свойством (5), мы доказали фактически, что *для любой функции f существует обратная функция*, так как построенная там функция имела областью определения $\text{пр}_2 F$, а (5) совпадает с (7).

С единственностью дело обстоит хуже. *Функция, обратная для функции f, единственна тогда и только тогда, когда f — инъекция.* Докажем это. Пусть $g_1 \underset{\text{Df}}{=} \langle G_1, Y, X\rangle$, $g_2 \underset{\text{Df}}{=} \langle G_2, Y, X\rangle$, $g_1 \neq g_2$ и функции g_1, g_2 — обратные для $f \underset{\text{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$. Так как $g_1 \neq g_2$, $G_1 \neq G_2$. Следовательно, существует такая пара $\langle a, b\rangle$, что

$$\langle a, b\rangle \in G_1 \,\&\, \langle a, b\rangle \notin G_2$$

или
$$\langle a, b\rangle \notin G_1 \& \langle a, b\rangle \in G_2.$$

Рассмотрим первый случай. Пусть
$$\langle a, b\rangle \in G_1, \tag{15}$$
$$\langle a, b\rangle \notin G_2. \tag{16}$$

Из (15) и (8) $\langle b, a\rangle \in F$. Следовательно, $a \in \text{пр}_2 F$. В силу (6) $a \in \text{пр}_1 G_2$. Значит, существует такое c, что
$$\langle a, c\rangle \in G_2. \tag{17}$$

Из (16) и (17) $b \neq c$. Из (17) и (8) $\langle c, a\rangle \in F$. Значит, f — не инъекция. Второй случай рассматривается аналогично. Обратно. Пусть $f \underset{\text{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ — не инъекция. Тогда существуют такие a, b, c, что $\langle b, a\rangle \in F$, $\langle c, a\rangle \in F$ и $b \neq c$. Пусть $g \underset{\text{Df}}{=} \langle G, Y, X\rangle$ — произвольная функция, обратная для функции f (мы уже доказали, что хотя бы одна обратная функция существует всегда). Поскольку $a \in \text{пр}_2 F$, $a \in \text{пр}_1 G$. По определению проекции множества существует такое d, что $\langle a, d\rangle \in G$. Рассмотрим два случая: $d = b$ и $d \neq b$. Если $d = b$, $\langle a, b\rangle \in G$, причем других пар, первая компонента которых равна a, в G нет. Положим
$$G_1 \underset{\text{Df}}{=} [G \setminus \{\langle a, b\rangle\}] \cup \{\langle a, c\rangle\}.$$

Из $b \neq c$ вытекает, что $G_1 \neq G$. Положим $g_1 \underset{\text{Df}}{=} \langle G_1, Y, X\rangle$. Тогда g_1 — функция, обратная для f, и $g_1 \neq g$. Если $d \neq b$, положим
$$G_2 \underset{\text{Df}}{=} [G \setminus \{\langle a, d\rangle\}] \cup \{\langle a, b\rangle\}.$$

Из $d \neq b$ вытекает, что $G_2 \neq G$. Положим $g_2 \underset{\text{Df}}{=} \langle G_2, Y, X\rangle$. Тогда g_2 — функция, обратная для f, и $g_2 \neq g$.

Если f — инъекция, то ее единственной обратной функцией является функция f^{-1} ((7) из § 5 гл. III и (3)).

Если функция f не инъективна, то у нее обязательно существует больше одной обратной функции, причем различные ее обратные функции отличаются областью значений. Не может существовать двух различных функций, обратных для f, с одной и той же областью значений.

Докажем это. Докажем, что *если две функции g_1, g_2 являются обратными для одной и той же функции f и имеют одинаковую область значений, то они совпадают*. Итак, пусть функции $g_1 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G_1, Y, X\rangle$ и $g_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G_2, Y, X\rangle$ являются обратными для функции $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$ и $\text{пр}_2 G_1 = \text{пр}_2 G_2$. Докажем, что $g_1 = g_2$. Для того чтобы это доказать, надо доказать, что $G_1 = G_2$. Пусть $\langle a, b\rangle \in G_1$. Тогда, с одной стороны, по (8) $\langle b, a\rangle \in F$, с другой стороны, $b \in \text{пр}_2 G_1$. По условию $\text{пр}_2 G_1 = \text{пр}_2 G_2$. Следовательно, $b \in \text{пр}_2 G_2$. Тогда существует такое c, что $\langle c, b\rangle \in G_2$. По (8) $\langle b, c\rangle \in F$. В силу функциональности графика F, $a = c$. Значит, $\langle a, b\rangle \in G_2$. Ввиду полной симметрии условий теоремы второе включение $G_2 \subseteq G_1$ доказывается абсолютно аналогично.

Таким образом, обратная функция полностью характеризуется своей областью значений.

Для того чтобы задать функцию g, обратную для функции $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$, достаточно задать такое подмножество A множества $\text{пр}_1 F$ (см. (9)), которое для каждого $b \in \text{пр}_2 F$ содержит один и только один прообраз $a \in \text{пр}_1 F$ относительно f. Заданием такого множества A обратная функция g вполне определяется, т. е. существует единственная функция g, обратная для f, с областью значений A. В самом деле. Пусть A — подмножество множества $\text{пр}_1 F$ с описанными свойствами. Обозначим через G множество пар $\langle b, a\rangle$, составленных для всех $b \in \text{пр}_2 F$. Положим $g \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, Y, X\rangle$. Легко видеть, что функция g является обратной для функции f и $\text{пр}_2 G = A$. Единственность обратной функции с областью значений A следует из доказанного выше.

Обычно, если f — не инъекция, функция g, обратная для функции f, задается, выбирается среди многих обратных для f функций, индивидуализируется именно заданием области значений $A \subseteq \text{пр}_1 F$. Если же f — инъекция, то, как указано выше, $g = f^{-1}$.

Теорема о графике обратной функции. *Если функция $g \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, Y, X\rangle$ является обратной для функ-*

ции $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, X, Y\rangle$, то 1) $G = H^{-1}$, *где* H — *график сужения* h *функции* f *на область значений* $\text{пр}_2 G$ *функции* g, *и* 2) $g = h^{-1}$.

Доказательство. Поскольку $h^{-1} = \langle H^{-1}, Y, X\rangle$, второе утверждение теоремы вытекает непосредственно из

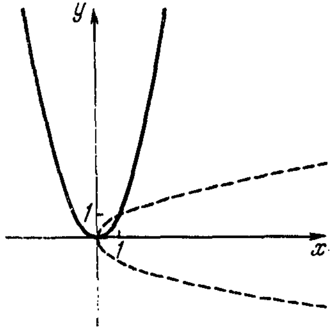


Рис. 47.

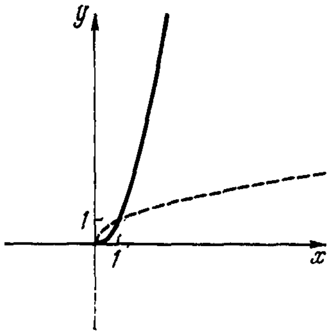


Рис. 48.

первого. Докажем первое утверждение. По определению сужения

$$H = F \cap (\text{пр}_2 G \times Y) \tag{18}$$

(см. (38) из § 1 гл. V). Из (18)

$$H^{-1} = F^{-1} \cap (Y \times \text{пр}_2 G) \tag{19}$$

(см. задачи 1, 2 к § 5 гл. III). Итак, в силу (19), нам надо доказать

$$G = F^{-1} \cap (Y \times \text{пр}_2 G). \tag{20}$$

Пусть $\langle a, b\rangle \in G$. По (8) $\langle a, b\rangle \in F^{-1}$. Поскольку $G \subseteq Y \times X$, $a \in Y$. Кроме того, $b \in \text{пр}_2 G$. Следовательно, $\langle a, b\rangle \in Y \times \text{пр}_2 G$ и $\langle a, b\rangle \in F^{-1} \cap (Y \times \text{пр}_2 G)$. Пусть, обратно, $\langle a, b\rangle \in F^{-1} \cap$ $\cap\, (Y \times \text{пр}_2 G)$. Тогда $\langle a, b\rangle \in F^{-1}$ и $\langle a, b\rangle \in Y \times \text{пр}_2 G$. Следовательно, $\langle b, a\rangle \in F$ и $b \in \text{пр}_2 G$. По определению проекции множества существует такое c, что $\langle c, b\rangle \in G$. Из (8) $\langle b, c\rangle \in F$. В силу функциональности графика F, $a = c$. Значит, $\langle a, b\rangle \in G$.

Примеры: 2) Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$ (рис. 47). График инверсии f^{-1} изображен пунктирной линией на рис. 47.

Соответствие f^{-1} не является функцией. Область значений функции f равна $[0, +\infty)$. Для любого $b > 0$ существует два прообраза относительно f: $\sqrt{b}$ и $-\sqrt{b}$. У числа 0 один прообраз — 0. Фиксируем обратную функцию g_1 с областью значений $[0, +\infty)$. График сужения h_1 функции f на $[0, +\infty)$ изображен сплошной линией на рис. 48. По теореме о графике обратной функции график функции g_1 является инверсией графика функции h_1 (см. пунктирную линию на рис. 48). Очевидно, $g_1(x) = \sqrt{x}$.

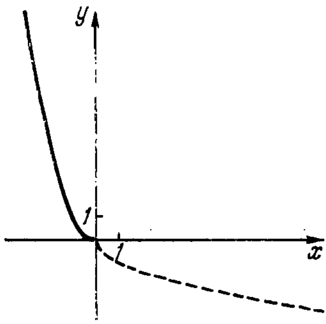


Рис. 49.

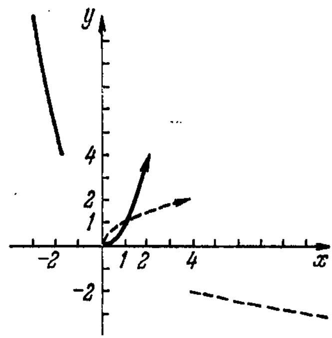


Рис. 50.

3) Фиксируем в качестве области значений функции g_2, обратной для той же функции f, множество $(-\infty, 0]$. График сужения h_2 функции f на $(-\infty, 0]$ изображен сплошной линией на рис. 49. График функции g_2 изображен пунктирной линией на рис. 49. Очевидно, $g_2(x) = -\sqrt{x}$.

4) Рассмотрим функцию g_3, обратную для той же функции f, с областью значений $A \underset{\mathrm{Df}}{=} [0, 2) \cup (-\infty, -2]$. График сужения h_3 функции f на A изображен сплошной, а график функции g_3 пунктирной линией на рис. 50. Очевидно,

$$g_3(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leqslant x < 4 \\ -\sqrt{x} & x \geqslant 4. \end{cases}$$

Функция g_3 задается кусочно. Разумеется, в качестве области значений A обратной функции g можно выбирать не любое подмножество области определения функции f, а лишь такое подмножество, которое содержит *один и только один* прообраз каждого значения функции f.

5) Функция g_4 с областью значений

$$[\mathscr{E}\{x \in \mathbf{D} \mid x \geqslant 0\} \cap \mathbf{R}] \cup$$
$$\cup [\mathscr{E}\{x \in \mathbf{D} \mid x < 0\} \cap (\mathbf{D} \setminus \mathbf{R})]$$

также является обратной для той же функции f. График ее изобразить невозможно.

6) Функция $f(x) = 2^x$ является инъекцией. Поэтому обратной для нее является только функция f^{-1} (сплошная и пунктирная линии на рис. 51). Очевидно, $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

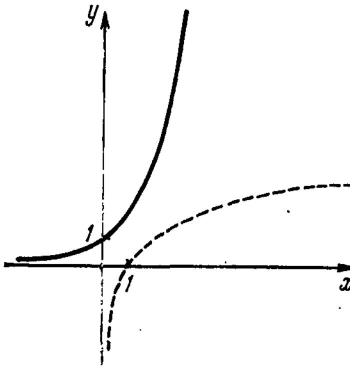


Рис. 51.

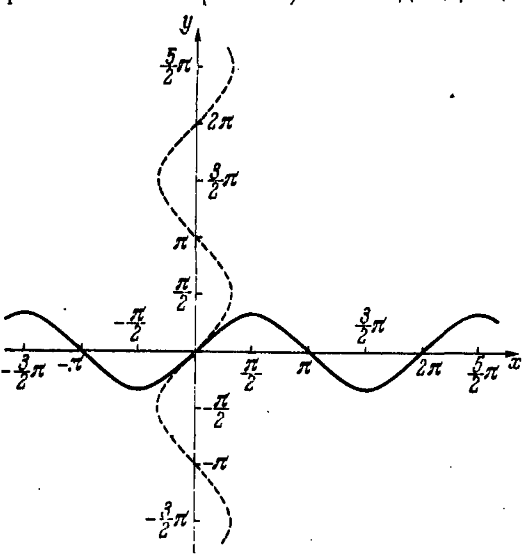


Рис. 52.

7) Функция $f(x) = \sin x$ (рис. 52) не инъективна. Соответствие f^{-1} не является функцией (пунктирная линия

на рис. 52) *). Область значений функции f равна $[-1, 1]$. Для любого $b \in [-1, 1]$ полный прообраз $f^{-1}(\{b\})$ является бесконечным множеством. Для $b \in [-1, 1]$ обозначим через $\arcsin b$ прообраз числа b относительно f, принадлежащий сегменту $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Поскольку для любого $b \in [-1, 1]$ на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *существует единственный* прообраз числа b относительно f, функция $g_1(x) = \arcsin x$ является функцией, обратной для f. Область значений функции g_1 равна $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. График сужения h_1 функции f на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ изображен сплошной линией на рис. 53. График функции g_1 изображен пунктирной линией на рис. 53. По (7)

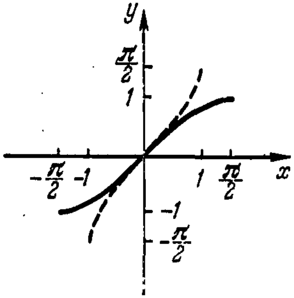


Рис. 53.

$$(\forall y \in [-1, 1])[\sin(\arcsin y) = y]. \tag{21}$$

По (10)

$$\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)[\arcsin(\sin x) = x]. \tag{22}$$

По (12)

$$\arcsin y = x \longrightarrow \sin x = y. \tag{23}$$

По (13)

$$\sin x = y \,\&\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \arcsin y = x. \tag{24}$$

Утверждение

$$\sin x = y \longrightarrow \arcsin y = x,$$

разумеется, не верно.

8) Если в качестве области значений функции g_2, обратной для функции f из примера 7, выбрать сегмент $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, график сужения h_2 функции f на $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$

*) Это соответствие обозначают через Arc sin.

будет изображаться сплошной, а график функции g_2 — пунктирной линией на рис. 54. Разумеется, опять

$$(\forall\, y \in [-1, 1])\, [\sin g_2(y) = y],$$

$$\left(\forall\, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]\right) [g_2(\sin x) = x],$$

$$g_2(y) = x \to \sin x = y,$$

$$\sin x = y \;\&\, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] \to g_2(y) = x.$$

Легко видеть, что $g_2(x) = \pi - \arcsin x$.

9) Если, наконец, в качестве области значений функции g_3, обратной для функции f из примера 7, выбрать

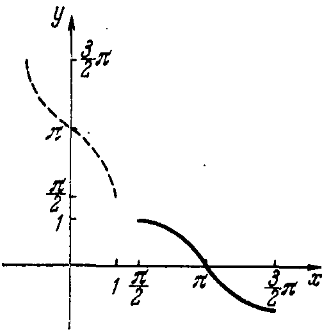


Рис. 54.

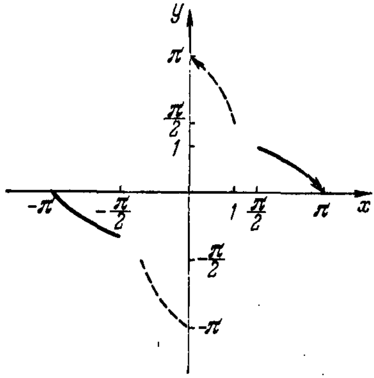


Рис. 55.

множество $A \underset{\mathrm{Df}}{=} \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, то график сужения h_3 функции f на A и график функции g_3 будут изображаться, соответственно, сплошной и пунктирной линией на рис. 55. Легко видеть, что

$$g_3(x) = \begin{cases} -\pi - \arcsin x, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \pi - \arcsin x, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

ЗАДАЧИ

1. Найти достаточное условие, которому должна удовлетворять функция f, чтобы *любая* ее обратная функция была:
   a) отображением,
   b) сюръекцией,
   c) биекцией.
2. Найти достаточное условие, которому должна удовлетворять функция f, чтобы среди ее обратных функций *существовала*:
   a) всюду определенная функция,
   b) сюръекция,
   c) биекция.
3. Какому необходимому условию удовлетворяет функция f, если *любая* ее обратная функция является:
   a) отображением,
   b) сюръекцией,
   c) биекцией?
4. Какому необходимому условию удовлетворяет функция f, если среди ее обратных функций *существует*:
   a) отображение,
   b) сюръекция,
   c) биекция?

§ 3. s-местная функция

Пусть s — целое число и $s \geqslant 2$. Функция f называется *s-местной* (в частности, двухместной, трехместной, четырехместной и т. д.), если ее область отправления состоит из кортежей длины s. s-местную функцию называют также *функцией от s аргументов*. Если f — s-местная функция, то вместо $f(\langle a_1, a_2, \ldots, a_s\rangle)$ пишут обычно $f(a_1, a_2, \ldots, a_s)$.

$$f(a_1, \ldots, a_s) \underset{\text{Df}}{=} f(\langle a_1, \ldots, a_s\rangle). \tag{1}$$

Для любого множества M произвольная функция типа $M^s \to Y$ является (при $s \geqslant 2$) примером s-местной функции. Функции типа $M^s \to Y$ называют иногда *s-местными функциями типа $M \to Y$*. Употребляя этот термин, следует помнить, что любая s-местная функция типа $M \to Y$ является (при $s \geqslant 2$) s-местной функцией, но не является функцией типа $M \to Y$.

Нульместная функция типа $M \to Y$ имеет либо вид $\langle\{\langle\Lambda, b\rangle\}, \{\Lambda\}, Y\rangle$, где $b \in Y$, либо вид $\langle\varnothing, \{\Lambda\}, Y\rangle$.

Как и функции типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$ (§ 1), s-местные функции типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$ можно задавать при помощи числовых форм или чисел. Пусть, например, $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)$ — s-местная числовая форма с числовыми переменными $x_1, \ldots, x_s$. Тогда выражение

$$\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \to \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \tag{2}$$

обозначает s-местную функцию типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$ с графиком

$$\mathscr{E}\{\langle\langle x_1, \ldots, x_s\rangle, y\rangle \in \mathbf{D}^s \times \mathbf{D} \mid y = \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s)\}.$$

Аналогичный смысл имеет выражение

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s). \tag{3}$$

Задавая ту же фуикцию (2), оно одновременно вводит для нее имя f. Выражение

$$y = \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_s) \tag{4}$$

тоже задает s-местную функцию типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$, однако чтобы эта функция была вполне определена, нужно еще фиксировать тем или иным способом (например, перенумеровав) порядок переменных в форме $\mathfrak{A}$.

П р и м е р 1) Выражения

$$\langle x, y, z\rangle \to \frac{x-y}{z} \tag{5}$$

и

$$f(x, y, z) = \frac{x-y}{z} \tag{6}$$

задают трехместную функцию типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$. Если в форме $\frac{x-y}{z}$ порядком переменных считать алфавитный порядок, то выражение

$$u = \frac{x-y}{z} \tag{7}$$

задает ту же функцию (5). Если же в этой форме порядком переменных считать обратный порядок $(z - y - x)$, то значение функции (7) на тройке $\langle 2, 3, 5\rangle$ будет уже равно $\frac{5-3}{2} = 1$, а не $\frac{2-3}{5} = -\frac{1}{5}$.

Пусть s — натуральное число. Отображение множества M^s в M называется *s-местной* (*алгебраической*) *операцией на* M. s-местная операция на M — это все равно, что всюду определенная s-местная функция типа $M \to M$. Одноместную операцию на M называют также *унарной* операцией, двухместную операцию — *бинарной*, трехместную — *тернарной* [1]).

Примеры: 2) Сложение и умножение являются двухместными операциями на каждом из множеств **N**, **C**, **R**, **D**, **K**. Разумеется, сложение на **N** и сложение на **C** являются *разными* операциями, так как сложение на **N** — это тройка вида $\langle G, \mathbf{N}^2, \mathbf{N}\rangle$, а сложение на **C** — это тройка вида $\langle H, \mathbf{C}^2, \mathbf{C}\rangle$. С другой стороны, $G \subset H$.

3) Вычитание является двухместной операцией на каждом из множеств **C**, **R**, **D**, **K**, но не является операцией на **N**, так как при $a < b$ разность $a - b$ в **N** не определена.

4) Деление *не* является операцией ни на одном из множеств **R**, **D**, **K** ввиду невозможности деления на 0, однако деление является двухместной операцией на каждом из множеств $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\mathbf{D} \setminus \{0\}$, $\mathbf{K} \setminus \{0\}$.

5) Для любого множества M соединение, пересечение и разность множеств можно считать двухместными операциями на $\mathfrak{P}(M)$, а операцию дополнения — одноместной операцией на $\mathfrak{P}(M)$.

6) Для любого множества M композицию графиков можно считать двухместной операцией на $\mathfrak{P}(M^2)$, а инверсию графика — одноместной операцией на $\mathfrak{P}(M^2)$.

ЗАДАЧИ

1. Чему равно число s-местных функций типа $M \to Y$, если M — m-элементное, а Y — n-элементное множество?

2. Чему равно число s-местных операций на m-элементном множестве M?

3. Выписать все s-местные операции на m-элементном множестве M ($s = 1, 2$; $m = 0, 1, 2$).

ГЛАВА VII

ОТНОШЕНИЕ

§ 1. Отношение

Слово „отношение“ встречается в математике, например, в контексте «отношение „меньше“ для действительных чисел» (см. § 1 раздела Б). Подобно тому, как мы это сделали в начале § 1 гл. V, на отношение „меньше“ для действительных чисел можно взглянуть со следующей, несколько новой стороны: определить отношение „меньше“ для действительных чисел — это значит выделить некоторый график $\Phi \subseteq \mathbf{D}^2$, в который войдут те и только те пары, компоненты которых находятся между собой в нужном нам отношении. Отношение „меньше“ для действительных чисел полностью характеризуется, во-первых, множеством $\mathbf{D}$ и, во-вторых, графиком $\Phi \subseteq \mathbf{D}^2$. Легко видеть, что аналогично можно истолковать слово „отношение“ для отношения подобия треугольников, для отношения параллельности прямых и т. п.*). Что же такое „отношение“? Что следует назвать „отношением“?

Отношение — это пара множеств, первая компонента которой является подмножеством квадрата второй компоненты [1]). Еще раз, по-другому: пара множеств $\langle \Phi, M \rangle$ называется *отношением*, если $\Phi \subseteq M^2$ **) [2]).

Пусть

$$\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle \tag{1}$$

---

*) Слово „отношение“ в термине „отношение чисел“ имеет, разумеется, совсем другой смысл.

**) Буква Ф — это прописная греческая буква „фи“ (см. приложение 3).

— произвольное отношение. Из определения отношения следует, что его первая компонента Φ есть график. График Φ, т. е. первая компонента отношения φ, называется *графиком отношения*. Множество M, т. е. вторая компонента отношения φ, называется *областью задания отношения*. Отношение φ с областью задания M называется *отношением* **на** *множестве* M. Про отношение φ на множестве M мы будем говорить также, что отношение φ *задано на* M [3]).

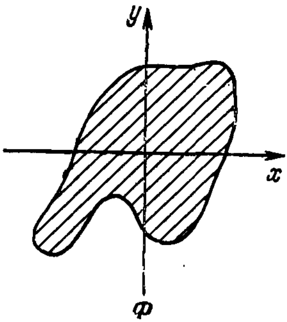


Рис. 56.

Если $\langle a, b\rangle \in \Phi$, то мы будем писать

$$a\varphi b \tag{2}$$

и будем говорить: „*элементы* a *и* b *находятся в отношении* φ“, или „*элемент* a *находится в отношении* φ *к элементу* b“, или „*пара* $\langle a, b\rangle$ *находится в отношении* φ“, или „*пара* $\langle a, b\rangle$ *удовлетворяет отношению* φ“, или, наконец, „*для пары* $\langle a, b\rangle$ *выполнено* (*выполняется*) *отношение* φ“.

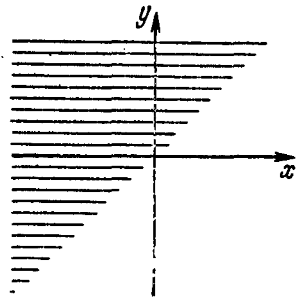


Рис. 57.

Если a и b — элементы множества M, $a\varphi b$ является (истинным или ложным) высказыванием. Если a или b является переменной с областью значений M, $a\varphi b$ является (одноместной или двухместной) высказывательной формой.

Отношения мы будем чаще всего обозначать строчными греческими буквами, графики отношений — прописными греческими буквами.

Примеры: 1) Пусть $\Phi \subseteq \mathbf{D}^2$ (рис. 56). Тогда $\langle \Phi, \mathbf{D}\rangle$ — отношение на $\mathbf{D}$. Любое подмножество Φ множества $\mathbf{D}^2$ является графиком некоторого отношения на $\mathbf{D}$.

2) Пусть $\Phi \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\,\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{D}^2 \mid x < y\}$. Отношение $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=}$ $\underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, \mathbf{D}\rangle$ и есть отношение „меньше“ на $\mathbf{D}$, упомянутое

в начале параграфа. График Φ этого отношения изображен на рис. 57.

3) Пусть $\Phi \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle\}$. Отношение $\varphi_1 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, \mathbf{N}\rangle$ есть отношение на $\mathbf{N}$. Для того же Φ отношение $\varphi_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, \{1, 2, 3\}\rangle$ есть отношение на $\{1, 2, 3\}$. Разумеется, $\varphi_1 \neq \varphi_2$. График Φ изображен на рис. 58. Любое подмножество Φ множества $\mathbf{N}^2$ является графиком некоторого отношения на $\mathbf{N}$. Мы будем иногда задавать отношения на $\mathbf{N}$ рисунками, изображая на координатной

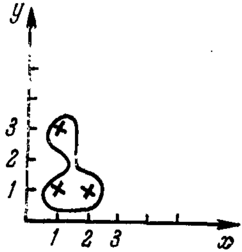


Рис. 58.

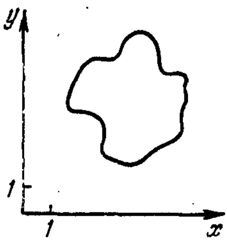


Рис. 59.

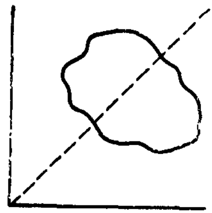


Рис. 60.

плоскости, вернее — в координатном угле, график определяемого отношения (рис. 59). При этом следует иметь в виду, что в задаваемый рисунком график отношения на $\mathbf{N}$ входят только „узлы целочисленной решетки“ (т. е. точки, обе координаты которых — целые числа), а не все точки плоскости, обведенные на рисунке линией.

Для иллюстрации вводимых понятий или с эвристическими целями мы будем часто отношения (вернее, их графики) на *произвольном* множестве M также изображать рисунками типа рис. 59 (см. рис. 60). При этом мы будем как бы предполагать, что на обоих лучах расположены элементы множества M, причем (слова, не имеющие никакого точного смысла) расположены они в одном и том же порядке. Поэтому диагональ Δ_M мы будем изображать биссектрисой (пунктирная линия на рис. 60), пары $\langle a, b\rangle$ и $\langle b, a\rangle$ будем изображать точками, симметричными относительно диагонали, и т. п. Повторяю: все эти рисунки будут иметь лишь иллюстрирующее или эвристическое значение, однако для этих целей они могут оказаться очень полезными. Впрочем, для *конечных* множеств M эти рисунки могут иметь и точный смысл.

Пример 4) Пусть $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{с, т, о, л\}$, график Φ задается рис. 61 и $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$. Тогда $x\varphi y$ истинно в том и только в том случае, когда в слове „стол“ буква x стоит левее, чем y.

Если $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, M, M \rangle$ — соответствие между множествами M и M, то, очевидно, $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, M \rangle$ — отношение на M. И обратно, если $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ — отношение на M, то $\Gamma \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M, M \rangle$ — соответствие между множествами M и M. Тем не менее мы, помимо понятия соответствия, ввели особо понятие отношения и будем его отдельно изучать, вводить специфическую терминологию, специальные обозначения и т. п. Такой подход не является, конечно, обязательным, но, как показывает математическая практика, он удобен и полезен. На совершенно неформальном, интуитивном языке разница между понятиями соответствия и отношения следующая: соответствие имеет направление *от* области отправления *к* области прибытия; если $\langle a, b \rangle \in G$, то *первой* компоненте пары a соответствует *вторая* компонента пары b; элементы a и b (психологически!) не равноправны (недаром на рисунках соответствия мы изображаем стрелками); отношения же характеризуют свойства пар из M^2; если $a\varphi b$, то элементы a и b при этом более или менее (психологически!) равноправны, просто пара $\langle a, b \rangle$ обладает свойством φ (недаром на рисунках отношения мы изображаем множествами, фигурами).

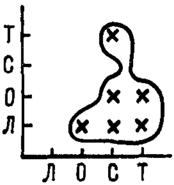


Рис. 61.

Важнейший способ задания отношений — задание при помощи высказывательных форм. Пусть $\mathfrak{A}$ — двухместная высказывательная форма с переменными x и y, область значений переменных x и y (одна и та же) — множество A и $M \subseteq A$. Условимся считать тогда, что фраза:

$$\text{Зададим на } M \text{ отношение } \varphi : x\varphi y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \mathfrak{A} \tag{3}$$

или, короче, выражение

$$x\varphi y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \mathfrak{A} \quad (x,\ y \in M) \tag{4}$$

определяют отношение $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ на множестве M с графиком $\Phi \underset{\mathrm{Df}}{=} \overline{\mathfrak{A}(x,\ y)} \cap M^2$. Очевидно, для так определенного отношения φ

$$x\varphi y \rightleftarrows \mathfrak{A}(x,\ y) \,\&\, x \in M \,\&\, y \in M. \tag{5}$$

Если $M = A$, разрешим вместо (4) писать

$$x\varphi y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \mathfrak{A}. \tag{6}$$

Примеры: 5) Пусть

$$x\varphi y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x < y. \tag{7}$$

Отношение φ, определенное выражением (7), есть отношение „меньше" на **D**, упомянутое в начале параграфа (см. также пример 2 и рис. 57).

6) Пусть

$$x\psi y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} y < x \tag{8}$$

или, что все равно (§ 1 раздела Б),

$$x\psi y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x > y.$$

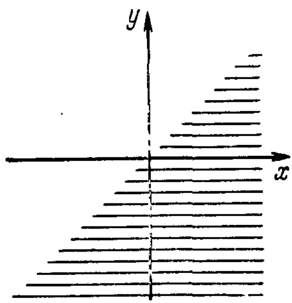


Рис. 62.

Тогда $5\psi 3$ истинно, а $5\varphi 3$ (пример 5) ложно. График отношения ψ изображен на рис. 62 (ср. с рис. 57).

7) Пусть f — функция типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$ и

$$x\varrho y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} y = f(x).$$

Тогда ϱ — отношение на **D**. График отношения ϱ совпадает с графиком функции f.

Если порядок переменных в форме $\mathfrak{A}$ фиксирован (например, алфавитный, или по первому вхождению, или указан специально), то отношение (3), (4) можно задавать и так:

$$\text{зададим на } M \text{ отношение } \mathfrak{A} \tag{9}$$

$$\mathfrak{A} \qquad (x,\ y \in M). \tag{10}$$

(При этом, правда, теряется имя φ задаваемого отношения.) Условимся, если противное не оговорено, порядком переменных считать алфавитный порядок.

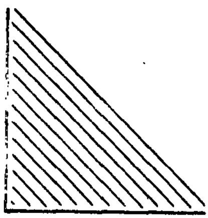


Рис. 63.

Примеры: 8) Отношение $x < y$ на $\mathbf{D}$ есть отношение φ из примера 5.

9) Отношение $x > y$ на $\mathbf{D}$ есть отношение ψ из примера 6.

10) График отношения $x \leqslant y$ на $\mathbf{D}$ получается соединением графика отношения $x < y$ (см. рис. 57) и диагонали $\Delta_{\mathbf{D}}$.

Если $\mathfrak{A}(x)$ — одноместная высказывательная форма, область значений переменной x — множество A и $M \subseteq A$, то под

$$x\varphi y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \mathfrak{A}(x) \qquad (x,\ y \in M) \tag{11}$$

понимается отношение на M с графиком $(\overline{\mathfrak{A}} \times A) \cap M^2$. Аналогично,

$$x\varphi y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \mathfrak{A}(y) \qquad (x,\ y \in M) \tag{12}$$

означает отношение на M с графиком $(A \times \overline{\mathfrak{A}}) \cap M^2$.

Отношение $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi,\ M \rangle$ называется *полным*, если $\Phi = M^2$, т. е. если $(\forall x \in M)(\forall y \in M)\,[x\varphi y]$ (рис. 63). Очевидно, отношение

$$(x = x)\,\&\,(y = y) \qquad (x,\ y \in M)$$

есть полное отношение на M. Впрочем, отношение $x = x\,(x,\ y \in M)$ также является полным отношением на M.

Отношение $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ называется *пустым*, если $\Phi = \varnothing$, т. е. если $\neg (\exists x \in M)(\exists y \in M)[x\varphi y]$. Очевидно, отношение

$$(x \neq x) \vee (y \neq y) \qquad (x, y \in M)$$

есть пустое отношение на M. Впрочем, отношение $x \neq x$ $(x, y \in M)$ также является пустым отношением на M.

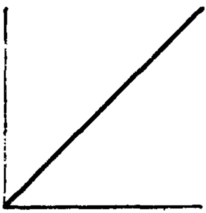


Рис. 64.

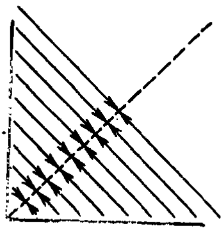


Рис. 65.

Пустое отношение $\langle \varnothing, M \rangle$ мы часто будем обозначать через O_M.

Отношение $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ называется *отношением равенства*, если $\Phi = \Delta_M$, т. е. если $(\forall x \in M)(\forall y \in M)[x\varphi y \rightleftarrows x = y]$ (рис. 64). Очевидно, отношение

$$x = y \qquad (x, y \in M)$$

есть отношение равенства на M. Отношение равенства $\langle \Delta_M, M \rangle$ мы часто будем обозначать через E_M *).

Отношение $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ называется *отношением неравенства*, если $\Phi = M^2 \setminus \Delta_M$, т. е. если

$$(\forall x \in M) \ (\forall y \in M) [x\varphi y \rightleftarrows x \neq y]$$

(рис. 65). Очевидно, отношение

$$x \neq y \qquad (x, y \in M)$$

есть отношение неравенства на M.

Пример 11) Пусть $\Phi \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$. Отношение $\varphi_1 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, \{1, 2, 3\} \rangle$ является отношением равенства.

*) E — первая буква слов „equal“ (англ.), „égal“ (франц.).

Отношение $\varphi_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, \mathbf{N} \rangle$, разумеется, ***не*** является отношением равенства. Если $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{1, 2, 3\}$, то $\varphi_1 = E_M$.

Перейдем к операциям над отношениями. Во-первых, на отношения естественно переносятся общие операции над множествами (§ 3 гл. II).

Пусть $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ и $\psi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Psi, M \rangle$ — произвольные отношения на (одном и том же) множестве M.

Соединением (*объединением*) отношений φ и ψ называется и через $\varphi \bigcup \psi$ обозначается отношение на множестве M, график которого равен соединению графиков отношений φ и ψ. Таким образом,

$$\varphi \bigcup \psi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi \bigcup \Psi, M \rangle. \tag{13}$$

Если известно, что φ и ψ — отношения на одном и том же множестве, то определение (13) можно записать и так:

$$\varphi \bigcup \psi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle (\mathrm{пр}_1 \varphi) \bigcup (\mathrm{пр}_1 \psi), \ \mathrm{пр}_2 \varphi \rangle. \tag{14}$$

Очевидно,

$$x (\varphi \bigcup \psi) y \rightleftarrows (x \varphi y) \bigvee (x \psi y). \tag{15}$$

Пересечением отношений φ и ψ называется и через $\varphi \bigcap \psi$ обозначается отношение на множестве M, график которого равен пересечению графиков отношений φ и ψ. Таким образом,

$$\varphi \bigcap \psi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi \bigcap \Psi, M \rangle. \tag{16}$$

Очевидно,

$$x (\varphi \bigcap \psi) y \rightleftarrows (x \varphi y) \,\&\, (x \psi y). \tag{17}$$

(Подобно тому, как это делалось в § 3 гл. II, для отношений на одном и том же множестве естественным образом можно определить $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \varphi_i$, $\bigcup\limits_{\varphi \in \mathfrak{M}} \varphi$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \varphi_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \varphi_i$, $\bigcap\limits_{\varphi \in \mathfrak{M}} \varphi$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \varphi_i$.)

Разностью отношений φ и ψ называется и через $\varphi \setminus \psi$ обозначается отношение на множестве M, график которого равен разности графиков отношений φ и ψ. Таким образом,

$$\varphi\setminus\psi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi\setminus\Psi,\ M\rangle. \tag{18}$$

Очевидио,

$$x(\varphi\setminus\psi)\,y \rightleftarrows (x\varphi y)\ \&\ \neg\,(x\psi y). \tag{19}$$

Для отношений большое значение имеет частный случай операции разности — операция дополнения. *Дополнением к отношению* $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle\Phi,\ M\rangle$ называется и через $\overline{\varphi}$ обозначается отношение на множестве M, график которого равен дополнению графика отношения φ до M^2. Таким образом,

$$\overline{\varphi} \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle M^2\setminus\Phi,\ M\rangle. \tag{20}$$

Очевидно,

$$x\overline{\varphi}y \rightleftarrows \neg\,(x\varphi y). \tag{21}$$

Если 0_M — полное отношение на множестве M, то для любого отношения φ на M

$$\overline{\varphi} = \theta_M\setminus\varphi. \tag{22}$$

С другой стороны, очевидно

$$\varphi\setminus\psi = \varphi\cap\overline{\psi}. \tag{23}$$

На отношения (на одном и том же множестве) автоматически переносятся все „тождества с множествами" (§ 3 гл. II). Например,

$$\varphi\cup\psi = \psi\cup\varphi, \tag{24}$$

$$\varphi\cap(\psi\cup\chi) = (\varphi\cap\psi)\cup(\varphi\cap\chi), \tag{25}$$

$$\overline{\varphi\cup\psi} = \overline{\varphi}\cap\overline{\psi}, \tag{26}$$

$$\overline{\varphi\cap\psi} = \overline{\varphi}\cup\overline{\psi}. \tag{27}$$

Во-вторых, на отношения столь же естественно переносятся операции над графиками (§ 5 гл. III).

Инверсией отношения $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle\Phi,\ M\rangle$ называется и через φ^{-1} обозначается отношение на множестве M, график которого есть инверсия графика отношения φ. Таким образом,

$$\varphi^{-1} \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi^{-1}, M \rangle. \tag{28}$$

Очевидно,

$$x\varphi^{-1}y \rightleftarrows y\varphi x. \tag{29}$$

Например, отношение $x > y$ на $\mathbf{D}$ является инверсией отношения $x < y$ на $\mathbf{D}$ (см. примеры 5, 6 и рис. 57, 62).

Композицией отношений $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ и $\psi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Psi, M \rangle$ называется и через $\varphi \circ \psi$ обозначается отношение на множестве M, график которого равен композиции графиков отношений φ и ψ. Таким образом,

$$\varphi \circ \psi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi \circ \Psi, M \rangle. \tag{30}$$

Очевидно,

$$x(\varphi \circ \psi)y \rightleftarrows (\exists z \in M)[(x\varphi z) \& (z\psi y)]. \tag{31}$$

На отношения (на одном и том же множестве) автоматически переносятся все „тождества с графиками" (§ 5 гл. III). Например,

$$(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi, \tag{32}$$

$$(\varphi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}, \tag{33}$$

$$(\varphi \circ \psi) \circ \chi = \varphi \circ (\psi \circ \chi). \tag{34}$$

На основании § 5 гл. III операция композиции отношений обобщается на любое (конечное) число отношений. Под композицией $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_n$ отношений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ на (одном и том же) множестве M понимается результат последовательного попарного компонирования отношений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *при любой расстановке скобок.* Отношение $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_n$ есть снова отношение на том же множестве M.

Подчеркнем еще раз, что все наши операции над отношениями применяются к отношениям с одной и той же областью задания и в результате применения операции снова получается отношение с той же областью задания.

Отметим, что для любого отношения φ на множестве M

$$\varphi \circ O_M = O_M \circ \varphi = O_M, \tag{35}$$

$$\varphi \circ E_M = E_M \circ \varphi = \varphi \tag{36}$$

(см. (12) из § 5 гл. III и (13) из § 5 гл. III).

Мы будем говорить, что отношение $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ *влечет* (или *имплицирует*) отношение $\psi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Psi, M \rangle$ и будем писать $\varphi \subseteq \psi$, если $\Phi \subseteq \Psi$. Термин „влечет" („имплицирует") объясняется тем, что

$$\varphi \subseteq \psi \rightleftarrows (\forall x \in M)(\forall y \in M)[x\varphi y \longrightarrow x\psi y]. \tag{37}$$

Очевидно,

$$\varphi = \psi \rightleftarrows (\varphi \subseteq \psi) \,\&\, (\psi \subseteq \varphi). \tag{38}$$

Введем, наконец, одну „операцию", меняющую область задания отношений. Пусть $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ — отношение на множестве M и $A \subseteq M$. *Сужением отношения* φ *на множество* A называется и через φ_A обозначается отношение

$$\langle \Phi \cap A^2, A \rangle. \tag{39}$$

Таким образом,

$$x\varphi_A y \rightleftarrows x\varphi y \,\&\, x \in A \,\&\, y \in A \tag{40}$$

(здесь по-прежнему x и y — переменные с областью значений M). Сужение φ_A отношения φ на множество A является отношением на множестве A.

Пример 12) В обозначениях примера 11 $\varphi_1 = (\varphi_2)_M$.

ЗАДАЧИ

1. Чему равно число отношений на n-элементном множестве?

2. Доказать или опровергнуть, что для любых отношений φ, ψ на множестве M:

a) $(\varphi \cup \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \cup \psi^{-1}$,

b) $(\varphi \cap \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \cap \psi^{-1}$,

c) $(\varphi \setminus \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \setminus \psi^{-1}$,

d) $(\overline{\varphi})^{-1} = (\overline{\varphi^{-1}})$,

e) $\varphi \subseteq \psi \rightarrow \varphi^{-1} \subseteq \psi^{-1}$.

3. Доказать или опровергнуть, что для любых отношений φ, ψ, χ на множестве M:

a) $(\varphi \cup \psi) \circ \chi = (\varphi \circ \chi) \cup (\psi \circ \chi)$,

b) $(\varphi \cap \psi) \circ \chi = (\varphi \circ \chi) \cap (\psi \circ \chi)$,

c) $(\varphi \setminus \psi) \circ \chi = (\varphi \circ \chi) \setminus (\psi \circ \chi)$,

d) $\varphi \subseteq \psi \rightarrow (\varphi \circ \chi) \subseteq (\psi \circ \chi)$.

4. Доказать или опровергнуть, что для любых отношений φ, ψ на множестве M и для любого подмножества A множества M:

a) $(\varphi \cup \psi)_A = \varphi_A \cup \psi_A$,

b) $(\varphi \cap \psi)_A = \varphi_A \cap \psi_A$,

c) $(\varphi \setminus \psi)_A = \varphi_A \setminus \psi_A$,

d) $(\overline{\varphi})_A = (\overline{\varphi_A})$,

e) $(\varphi^{-1})_A = (\varphi_A)^{-1}$,

f) $(\varphi \circ \psi)_A = \varphi_A \circ \psi_A$.

5. Пусть $x\varphi y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x < y \; (x, y \in \mathbf{N})$, $\psi = E_{\mathbf{N}}$. Найти

a) $\varphi \circ \psi$, b) $\psi \circ \varphi$, c) $\varphi \circ \overline{\psi}$, d) $\varphi \circ \varphi$, e) $\overline{\varphi} \circ \overline{\varphi}$, f) $\varphi^{-1} \circ \overline{\psi}$.

§ 2. Основные свойства отношений

Отношение $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ называется *рефлексивным*, если

$$(\forall x \in M)\,[x\varphi x]. \tag{1}$$

Очевидно, отношение $\langle \Phi, M \rangle$ рефлексивно тогда и только тогда, когда

$$\Delta_M \subseteq \Phi, \tag{2}$$

т. е. когда все точки диагонали принадлежат графику отношения (рис. 66).

Отношение $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ называется *антирефлексивным*[1]), если

$$(\forall x \in M) \neg\, [x\varphi x] \tag{3}$$

или

$$(\forall x \in M)\,[x\overline{\varphi} x]. \tag{4}$$

Очевидно, отношение $\langle \Phi, M \rangle$ антирефлексивно тогда и только тогда, когда

$$\Delta_M \cap \Phi = \varnothing, \tag{5}$$

т. е. когда ни одна точка диагонали не принадлежит графику отношения (рис. 67).

Отношение $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ называется *симметричным*, если

$$x\varphi y \to y\varphi x \tag{6}$$

(область значений переменных здесь и дальше, если не оговорено противное, — множество M; кванторы общности

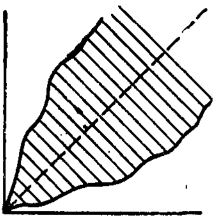


Рис. 66.

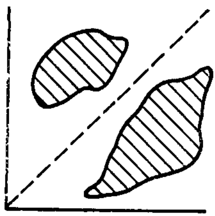


Рис. 67.

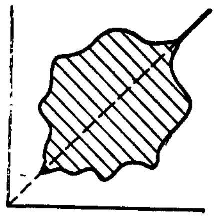


Рис. 68.

опущены в соответствии с соглашением из § 3 гл. IV; вместо (1) и (3) также можно было написать, соответственно, $x\varphi x$ и $\neg\,[x\varphi x]$). Очевидно, отношение $\langle \Phi, M \rangle$ симметрично тогда и только тогда, когда его график Φ симметричен (рис. 68) или (см. (9) из § 5 гл. III)

$$\Phi = \Phi^{-1}. \tag{7}$$

Для дальнейшего заметим, что определение (6) равносильно, как это ни странно на первый взгляд, определению

$$x \neq y \to (x\varphi y \to y\varphi x). \tag{8}$$

Отношение φ называется *антисимметричным*, если

$$x\varphi y \,\&\, x \neq y \to \neg\,(y\varphi x), \tag{9}$$

[2]) или

$$x\varphi y \,\&\, y\varphi x \to x = y. \tag{10}$$

Докажем, что определения (9) и (10) равносильны.

$$x\varphi y \mathbin{\&} x \neq y \to \neg(y\varphi x) \equiv x\varphi y \mathbin{\&} \neg(x = y) \to \neg(y\varphi x) \equiv$$
$$\equiv x\varphi y \to [\neg(x = y) \to \neg(y\varphi x)] \equiv$$
$$\equiv x\varphi y \to [\neg\neg(y\varphi x) \to \neg\neg(x = y)] \equiv$$
$$\equiv x\varphi y \to [y\varphi x \to x = y] \equiv$$
$$\equiv x\varphi y \mathbin{\&} y\varphi x \to x = y.$$

В этой выкладке, кроме закона контрапозиции и снятия двойного отрицания, мы дважды использовали (25) из § 1 гл. IV. Из (10), очевидно, следует, что отношение $\langle \Phi, M\rangle$ антисимметрично тогда и только тогда, когда (рис. 69)

$$\Phi \cap \Phi^{-1} \subseteq \Delta_M. \qquad (11)$$

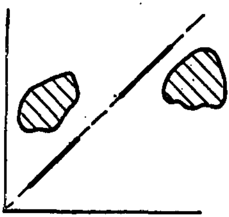


Рис. 69.

Используя (25) из § 1 гл. IV, легко получить, что определение (9) равносильно также определению

$$x \neq y \to [x\varphi y \to \neg(y\varphi x)] \qquad (12)$$

(сравните с (8)). Из (12) или контрапозицией к (10) получается еще одна форма определения

$$x \neq y \to \neg[x\varphi y \mathbin{\&} y\varphi x]. \qquad (13)$$

Отношение φ называется *связанным*, если

$$x \neq y \to [x\varphi y \vee y\varphi x]. \qquad (14)$$

Легко видеть, что отношение $\langle \Phi, M\rangle$ связанно тогда и только тогда, когда

$$M^2 \setminus \Delta_M \subseteq \Phi \cup \Phi^{-1}, \qquad (15)$$

т. е. когда для любой пары $\alpha \in M^2$ с разными компонентами либо $\alpha \in \Phi$, либо $\alpha^{-1} \in \Phi$ (см. рис. 70). Из сравнения определений (8) и (12), (13) и (14) вытекает, что свойства симметричности, антисимметричности и связанности — это родственные свойства, свойства „на одну тему“. Ниже мы увидим подтверждения этому неформальному утверждению.

Отношение φ называется *транзитивным*, если

$$x\varphi y \mathbin{\&} y\varphi z \to x\varphi z. \qquad (16)$$

Легко доказать, что отношение $\langle \Phi, M \rangle$ транзитивно тогда и только тогда, когда

$$\Phi \circ \Phi \subseteq \Phi. \tag{17}$$

Все предыдущие свойства отношений мы иллюстрировали на рисунках (рис. 66—70), дававших какой-то зрительный образ определяемому свойству. Для свойства транзитивности я не знаю столь же наглядной иллюстрации.

Введенные выше шесть свойств мы будем называть *основными свойствами отношений* *).

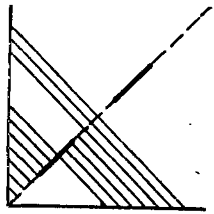


Рис. 70.

Каждое из основных свойств отношений мы определяли на „логическом языке" и на чистом теоретико-множественном языке, через график. Характеристика основных свойств отношений через график [(2), (5), (7), (11), (15), (17)] очень часто помогает в доказательствах, упрощает и сокращает их.

Примеры: 1) Полное отношение $\langle M^2, M \rangle$ на произвольном множестве M рефлексивно; не антирефлексивно, если $M \neq \varnothing$; симметрично; не антисимметрично, если M содержит больше одного элемента; связанно; транзитивно.

2) Пустое отношение $O_M = \langle \varnothing, M \rangle$ на произвольном множестве M не рефлексивно, если $M \neq \varnothing$; антирефлексивно; симметрично; антисимметрично; не связанно, если M содержит больше одного элемента; транзитивно.

3) Отношение равенства $E_M = \langle \Delta_M, M \rangle$ на произвольном множестве M рефлексивно; не антирефлексивно, если $M \neq \varnothing$; симметрично; антисимметрично; не связанно, если M содержит больше одного элемента; транзитивно.

4) Отношение неравенства $\langle M^2 \setminus \Delta_M, M \rangle$ на произвольном множестве M не рефлексивно, если $M \neq \varnothing$; антирефлексивно; симметрично; не антисимметрично, если M содержит больше одного элемента; связанно; не транзитивно, если M содержит больше одного элемента.

5) Пусть $\Phi \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$. Тогда отношение $\varphi_1 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, \{1, 2\} \rangle$ рефлексивно, а отношение $\varphi_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, \{1, 2, 3\} \rangle$ не рефлексивно.

*) См. сноску на стр. 125.

6) Если график отношения φ содержит одну пару, то отношение φ транзитивно.

7) Отношение $\langle\varnothing, \varnothing\rangle$ обладает каждым из шести основных свойств, причем это отношение является *единственным* отношением, обладающим всеми основными свойствами, поскольку, как легко доказать,

отношение $\langle\Phi, M\rangle$ *тогда и только тогда одновременно рефлексивно и антирефлексивно, когда* $\Phi=\varnothing$ *и* $M=\varnothing$.

Легко видеть также, что *отношение* $\langle\Phi, M\rangle$ *тогда и только тогда одновременно симметрично и антисимметрично, когда* $\Phi\subseteq\Delta_M$.

Из определений (8), (12) и (14) вытекает, что свойства симметричности, антисимметричности и связанности не зависят от элементов диагонали. Точный смысл этого утверждения состоит в следующих теоремках:

Если отношение $\langle\Phi, M\rangle$ *симметрично и* $A\subseteq\Delta_M$, *то отношения* $\langle\Phi\bigcup A, M\rangle$ *и* $\langle\Phi\setminus A, M\rangle$ *тоже симметричны.*

Если отношение $\langle\Phi, M\rangle$ *не симметрично и* $A\subseteq\Delta_M$, *то отношения* $\langle\Phi\bigcup A, M\rangle$ *и* $\langle\Phi\setminus A, M\rangle$ *тоже не симметричны.*

Аналогичные теоремки — для свойств антисимметричности и связанности.

Свойства рефлексивности и антирефлексивности, очевидно, наоборот — весьма зависят от элементов диагонали. Более того,

каково бы ни было отношение $\langle\Phi, M\rangle$, *отношение* $\langle\Phi\setminus\Delta_M, M\rangle$ *антирефлексивно;*

каково бы ни было отношение $\langle\Phi, M\rangle$, *отношение* $\langle\Phi\bigcup\Delta_M, M\rangle$ *рефлексивно.*

Эти два утверждения позволяют установить простое и естественное взаимно-однозначное соответствие между системой рефлексивных отношений на произвольном множестве M и системой антирефлексивных отношений на том же множестве. Соответствие, соотносящее произвольному рефлексивному отношению $\langle\Phi, M\rangle$ на множестве M отношение $\langle\Phi\setminus\Delta_M, M\rangle$ будет требуемой биекцией (график указанной биекции состоит из пар вида $\langle\langle\Phi, M\rangle, \langle\Phi\setminus\Delta_M, M\rangle\rangle$).

Перебирая свойство за свойством, легко проверить, что *если отношение* φ *обладает каким-то из основных свойств, то его инверсия* φ^{-1} *также обладает этим свойством.*

Докажем это, например, для свойства антирефлексивности. Пусть отношение $\varphi \underset{\text{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ антирефлексивно, т. е.

$$\Delta_M \cap \Phi = \varnothing. \tag{18}$$

Докажем, что отношение $\varphi^{-1} = \langle \Phi^{-1}, M \rangle$ тоже антирефлексивно, т. е. что

$$\Delta_M \cap \Phi^{-1} = \varnothing.$$

Из (18)

$$(\Delta_M \cap \Phi)^{-1} = \varnothing^{-1}.$$

Но $(\Delta_M \cap \Phi)^{-1} = (\Delta_M)^{-1} \cap \Phi^{-1} = \Delta_M \cap \Phi^{-1}$ (задача 1 из § 5 гл. III) и $\varnothing^{-1} = \varnothing$.

Дадим второе доказательство того же утверждения. Отношение $\varphi \underset{\text{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ антирефлексивно. Значит,

$$(\forall x \in M) \urcorner [x \varphi x]. \tag{19}$$

Докажем, что отношение φ^{-1} тоже антирефлексивно, т. е. что

$$(\forall x \in M) \urcorner [x \varphi^{-1} x]. \tag{20}$$

Возьмем произвольный элемент $a \in M$ и докажем

$$\urcorner [a \varphi^{-1} a]. \tag{21}$$

Тем самым утверждение (20) будет доказано. Допустим противное, допустим, что (21) не верно, т. е. что верно $\urcorner \urcorner [a \varphi^{-1} a] \equiv a \varphi^{-1} a$. Тогда по определению инверсии отношения (см. (29) из § 1) $a \varphi a$, что противоречит (19).

Оба этих метода доказательства утверждений, связанных с основными свойствами отношений, следует иметь в виду.

Опять-таки перебором свойств легко проверить, что *если отношение* $\varphi \underset{\text{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ *обладает каким-то из основных свойств и* $A \subseteq M$, *то и сужение* φ_A *отношения* φ *на множество* A *также обладает этим свойством.*

Докажем это, например, для свойства связанности и снова двумя вышеуказанными методами. Сначала — на „языке графиков“. Пусть отношение $\varphi \underset{\text{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ — связанное, т. е.

$$M^2 \setminus \Delta_M \subseteq \Phi \cup \Phi^{-1}, \tag{22}$$

и

$$A \subseteq M. \tag{23}$$

Докажем, что отношение $\varphi_A = \langle \Phi \cap A^2, A \rangle$ — тоже связанное, т. е. что

$$A^2 \setminus \Delta_A \subseteq (\Phi \cap A^2) \cup (\Phi \cap A^2)^{-1}. \tag{24}$$

Преобразуем сначала правую часть включения (24)

$$(\Phi \cap A^2) \cup (\Phi \cap A^2)^{-1} = (\Phi \cap A^2) \cup [\Phi^{-1} \cap (A^2)^{-1}] =$$
$$= (\Phi \cap A^2) \cup (\Phi^{-1} \cap A^2) = (\Phi \cup \Phi^{-1}) \cap A^2.$$

Для последнего шага мы использовали свойство (III′) из § 3 гл. II. Итак, нам из (22) и (23) надо вывести

$$A^2 \setminus \Delta_A \subseteq (\Phi \cup \Phi^{-1}) \cap A^2. \tag{25}$$

(25) очень легко доказать на „языке элементов", но можно также, используя результат задачи 9b из § 3 гл. II, закончить доказательство более изящно. Из (22) и упомянутой задачи

$$(M^2 \setminus \Delta_M) \cap (\Phi \cup \Phi^{-1}) = M^2 \setminus \Delta_M. \tag{26}$$

Из (23)

$$A^2 \setminus \Delta_A \subseteq M^2 \setminus \Delta_M. \tag{27}$$

Из (27) и упомянутой задачи

$$(A^2 \setminus \Delta_A) \cap (M^2 \setminus \Delta_M) = A^2 \setminus \Delta_A. \tag{28}$$

Поскольку $A^2 \setminus \Delta_A \subseteq A^2$,

$$(A^2 \setminus \Delta_A) \cap A^2 = A^2 \setminus \Delta_A. \tag{29}$$

И, наконец, еще раз используя упомянутую задачу, докажем вместо включения (25) равенство

$$(A^2 \setminus \Delta_A) \cap [(\Phi \cup \Phi^{-1}) \cap A^2] = A^2 \setminus \Delta_A. \tag{30}$$

Из (26), (28) и (29) равенство (30) получается непосредственно:

$$(A^2 \setminus \Delta_A) \cap [(\Phi \cup \Phi^{-1}) \cap A^2] = [(A^2 \setminus \Delta_A) \cap A^2] \cap (\Phi \cup \Phi^{-1}) =$$
$$= (A^2 \setminus \Delta_A) \cap (\Phi \cup \Phi^{-1}) =$$
$$= [(A^2 \setminus \Delta_A) \cap (M^2 \setminus \Delta_M)] \cap (\Phi \cup \Phi^{-1}) =$$
$$= (A^2 \setminus \Delta_A) \cap [(M^2 \setminus \Delta_M) \cap (\Phi \cup \Phi^{-1})] =$$
$$= (A^2 \setminus \Delta_A) \cap (M^2 \setminus \Delta_M) = A^2 \setminus \Delta_A. \tag{31}$$

Докажем теперь то же утверждение на „логическом языке“. Пусть снова отношение $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle\Phi, M\rangle$ связанно, т. е.

$$(\forall x \in M)\,(\forall y \in M)\,[x \neq y \longrightarrow x\varphi y \vee y\varphi x], \tag{32}$$

и

$$A \subseteq M. \tag{33}$$

Докажем, что тогда и отношение $\varphi_A = \langle\Phi \cap A^2, A\rangle$ тоже связанно, т. е. что

$$(\forall x \in A)\,(\forall y \in A)\,[x \neq y \longrightarrow x\varphi_A y \vee y\varphi_A x]. \tag{34}$$

Возьмем в множестве A два произвольных элемента: a и b — и докажем

$$a \neq b \longrightarrow a\varphi_A b \vee b\varphi_A a. \tag{35}$$

Этим утверждение (34) будет доказано. Допустим, что

$$a \neq b. \tag{36}$$

Докажем, что тогда

$$a\varphi_A b \vee b\varphi_A a. \tag{37}$$

Тем самым импликация (35) будет доказана. В силу (33), $a \in M$ и $b \in M$. Значит, на основании (32),

$$a \neq b \longrightarrow a\varphi b \vee b\varphi a. \tag{38}$$

Ввиду (36),

$$a\varphi b \vee b\varphi a. \tag{39}$$

Рассмотрим два случая: 1) $a\varphi b$; 2) $b\varphi a$. Допустим сначала, что

$$a\varphi b. \tag{40}$$

Поскольку $a \in A$ и $b \in A$, из (40) вытекает $a\varphi_A b$, а значит, и (37). Второй случай рассматривается аналогично.

ЗАДАЧИ

1. Чему равно число нижеуказанных отношений на n-элементном множестве:
   a) рефлексивных?
   b) антирефлексивных?
   c) симметричных?
   d) антисимметричных?
   e) связанных?

Таблица 1

Рефлексивное	Антирефлексивное	Симметричное	Антисимметричное	Связанное
+	+	+	+	+
+	+	+	+	—
+	+	+	—	+
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

2. Рассмотрим таблицу (см. табл. 1), в верхней строке которой выписаны пять основных свойств отношений (кроме транзитивности). Заполним строчки этой таблицы всеми возможными способами знаками + и —. Строк в таблице (не считая „входной“, верхней строчки) будет $\mathfrak{A}_2^5 = 32$. Требуется для каждой строчки придумать отношение, „анкета“ которого записана в данной строчке (т. е. отношение, обладающее или не обладающее тем или иным из пяти написанных сверху свойств в зависимости от того знак + или знак — стоит на пересечении рассматриваемой строчки и соответствующего столбца), или доказать, что такого отношения не существует. Для облегчения поисков укажу, что строк с примерами будет больше двадцати и меньше двадцати пяти.

Таблица 2

Рефлексивное	Симметричное	Транзитивное
+	+	+
+	+	—
+	—	+
.	.	.
.	.	.
.	.	.

3. Задача аналогична задаче 2, но решается применительно к табл. 2.

4. Пусть

$$x\varphi y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} |x-y| \geqslant 3 \qquad (x, y \in \mathbf{D}).$$

Составить „анкету“ отношения φ (т. е. указать, обладает или не обладает отношение φ каждым из шести основных свойств).

5. Составить анкету (см. задачу 4) отношения

$$x\varphi y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (\exists t \in \mathbf{N})\,[x - y = 7t] \qquad (x,\, y \in \mathbf{N})$$

6. Составить анкету отношения $\langle \Phi, M\rangle$, где

$$M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, b, c, d\},\ \Phi \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, d\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle\}.$$

7. Доказать, что если отношение $\langle \Phi, M\rangle$ транзитивно и рефлексивно, то $\Phi \circ \Phi = \Phi$.

8. Доказать, что если отношение φ транзитивно и антирефлексивно, то оно антисимметрично.

9. Что можно сказать об отношении $\overline{\varphi}$, если отношение φ:

a) рефлексивно?
b) антирефлексивно?
c) симметрично?
d) антисимметрично?
e) связанно?
f) транзитивно?

10. Доказать или опровергнуть, что соединение $\varphi \bigcup \psi$ рефлексивных отношений φ и ψ рефлексивно. Аналогичная задача — о каждом из пяти остальных основных свойств.

11. Задача аналогична задаче 10, но решается для операции пересечения.

12. Доказать, что если композиция $\varphi \circ \psi$ симметричных отношений φ и ψ симметрична, то $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

§ 3. Разбиение

Данный параграф по существу не относится к настоящей главе. В нем ничего не будет говориться об отношениях. Его вполне уместно было бы сделать последним параграфом главы II. Однако в следующем параграфе будет установлена тесная связь между разбиениями и некоторым специальным видом отношений.

С разбиениями мы фактически, не определяя точно этого понятия, уже имели дело в § 3 гл. III. Сейчас мы дадим понятию разбиения строгое определение.

Система $\mathfrak{M}$ множеств называется *разбиением множества* M, если она удовлетворяет четырем условиям:

1) $(\forall X \in \mathfrak{M})[X \subseteq M]$,
2) $(\forall X \in \mathfrak{M})[X \neq \varnothing]$,
3) $(\forall X \in \mathfrak{M})(\forall Y \in \mathfrak{M})[X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \varnothing]$,
4) $M \subseteq \bigcup\limits_{X \in \mathfrak{M}} X$.

Очевидно, из 1) и 4) в определении разбиения *) вытекает равенство

$$\bigcup_{X \in \mathfrak{M}} X = M.$$

Элементы произвольного разбиения $\mathfrak{M}$ мы будем называть *классами разбиения.*

Разбиение $\mathfrak{M}$ множества M называется *поэлементным*, если каждый класс разбиения $\mathfrak{M}$ является одноэлементным множеством. Разбиение $\mathfrak{M}$ множества M называется *целым*, если $\mathfrak{M} = \{M\}$ [1]). Целое разбиение множества M и поэлементное разбиение множества M мы будем называть *тривиальными разбиениями* множества M, остальные разбиения, если они существуют, — *нетривиальными разбиениями.*

Примеры: 1) Очевидно, пустое множество $\varnothing$ имеет единственное разбиение — пустую систему $\mathfrak{M}$ множеств (см. (2) из § 3 гл. II). Итак, система $\mathfrak{M} \underset{\mathrm{Df}}{=} \varnothing$ и только она является разбиением множества $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \varnothing$. Это разбиение тривиальным образом (см. (5) из § 3 гл. IV) является поэлементным, целым оно не является **).

2) Одноэлементное множество $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a\}$ тоже имеет единственное разбиение $\mathfrak{M} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{M\} = \{\{a\}\}$. Это разбиение является и целым и поэлементным.

---

*) Я пишу здесь и буду часто писать дальше „в определении разбиения", хотя точнее было бы говорить „в определении разбиения данного множества", так как у нас нет термина „разбиение", а есть термин „разбиение данного множества" (ср. со сноской на стр. 63). Впрочем, любая система $\mathfrak{M}$ множеств, удовлетворяющая условиям 2 и 3, является разбиением некоторого множества.

**) Не следует путать множества $\{\varnothing\}$ и $\varnothing$. Множество $\{\varnothing\}$, ввиду условия 2, не является разбиением никакого множества.

3) Двухэлементное множество $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, b\}$ имеет два разбиения: $\mathfrak{M}_1 \underset{\mathrm{Df}}{=} \{M\}$ — целое разбиение и $\mathfrak{M}_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\{a\}, \{b\}\}$ — поэлементное разбиение (рис. 71).

4) Трехэлементное множество $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, b, c\}$ имеет уже пять разбиений: тривиальные разбиения $\mathfrak{M}_1 \underset{\mathrm{Df}}{=} \{M\}$, $\mathfrak{M}_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ и три нетривиальных разбиения: $\mathfrak{M}_3 \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\mathfrak{M}_4 \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\{b\}, \{a, c\}\}$, $\mathfrak{M}_5 \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\{c\}, \{a, b\}\}$ (рис. 72).

5) Система курсов данного факультета является разбиением множества студентов факультета, если, разумеется, ни один студент не числится на двух курсах одновременно.

6) Система групп данного курса является разбиением множества студентов курса.

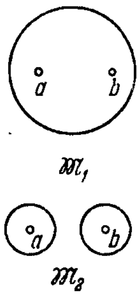


Рис. 71.

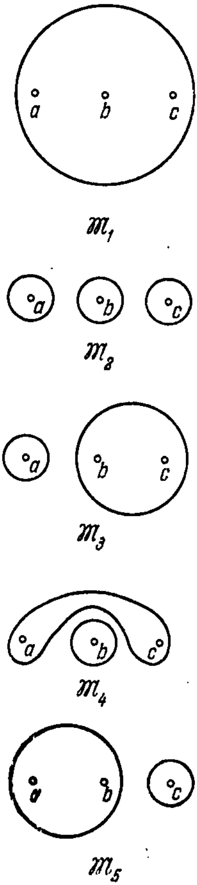


Рис 72

7) Система групп данного факультета является разбиением множества студентов факультета.

8) Пусть A_0 — множество четных натуральных чисел, A_1 — множество нечетных натуральных чисел. Тогда система $\{A_0, A_1\}$ является разбиением множества $\mathbf{N}$.

9) Пусть B_0 — множество натуральных чисел, делящихся на 3, B_1 — множество натуральных чисел, дающих при делении на 3 остаток 1, и B_2 — множество натуральных чисел, дающих при делении на 3 остаток 2. Тогда система $\{B_0, B_1, B_2\}$ является разбиением множества $\mathbf{N}$.

10) Пусть C_n — множество n-значных натуральных чисел ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Тогда система $\mathfrak{M} \underset{\mathrm{Df}}{=} \{C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots\}$ является разбиением множества $\mathbf{N}$.

11) Пусть $f : X \to Y$ — сюръективное отображение. Система $\mathfrak{M}$ полных прообразов $f^{-1}(\{y\})$, взятых для всех элементов множества Y, является разбиением множества X. Условие 1 следует из определения полного прообраза. Условие 2 — из сюръективности функции f. Условие 3 очевидно (см. также задачу 3 к § 1 гл. VI). Условие 4 вытекает из всюду определенности функции f. Это разбиение, *разбиение на классы прообразов относительно* f, имеет теоретическое значение, оно часто используется в алгебре.

Пусть система $\mathfrak{M}$ является разбиением множества M. В силу условия 3 соответствие h, соотносящее произвольному элементу a множества M тот класс разбиения $\mathfrak{M}$, которому этот элемент принадлежит, является функцией. В силу условий 2 и 4 функция h является сюръективным отображением. Отображение h множества M на $\mathfrak{M}$ называется *естественным отображением*.

Легко видеть, что *если h — естественное отображение множества M на $\mathfrak{M}$, то разбиение множества M на классы прообразов относительно h* (пример 11) *совпадает с* $\mathfrak{M}$.

Решая в § 3 гл. III комбинаторные задачи, мы часто строили разбиение множества M, число элементов которого надо было сосчитать, причем разбиение мы строили каждый раз фактически так: „Разобьем множество M на классы по следующему принципу: два элемента a и b множества M мы отнесем в один класс, если пара $\langle a, b\rangle$ обладает некоторым свойством, удовлетворяет некоторому отношению на M“. Но в каких случаях, для каких „принципов“, для каких свойств пар, для каких отношений на M мы можем быть уверены, что у нас действительно получается некоторое разбиение множества M? В § 3 гл. III мы не задавались подобным вопросом, апеллируя к интуиции читателя. Однако всегда ли, любой ли „принцип разбиения“, любое ли отношение на M приводят к некоторому разбиению множества M? Покажем на примерах, что это не так.

Примеры: 12) Фраза „Разобьем множество $\mathbf{D}^2$ точек координатной плоскости на классы по следующему принципу: две точки P и Q мы отнесем в один класс, если расстояние между точками P и Q меньше единицы" на самом деле не определяет никакого разбиения множества $\mathbf{D}^2$, так как расстояние между точками $P \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle 0, 0 \rangle$ и $Q \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \frac{3}{4}, 0 \rangle$ меньше единицы и, следовательно, точки P и Q полагается, по нашему „принципу разбиения", поместить в один класс; расстояние между точками Q и $R \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle 1\frac{1}{2}, 0 \rangle$ тоже меньше единицы и, следовательно, точки Q и R тоже полагается поместить в один класс; но расстояние между точками P и R равно единице и, следовательно, им не полагается быть в одном классе. Противоречие с условием 3.

13) Отношение

$$a\varphi b \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} a \text{ старше, чем } b$$

на множестве M людей Земли не определяет разбиения множества M, так как я нахожусь к своей дочери в отношении φ и, следовательно, должен быть с ней в одном классе разбиения, но она не находится, конечно, ко мне в отношении φ и, следовательно, не должна быть со мной в одном классе. Противоречие. Кроме того, я сам к себе не нахожусь в отношении φ и не должен быть с собой в одном классе. Еще большая нелепость.

Какие же „свойства пар", какие отношения на множестве M приводят к разбиениям множества M? Уточнение поставленного вопроса и ответ на него будут даны в следующем параграфе.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ — два разбиения одного и того же множества M. Доказать, что если $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$, то $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$.

2. Доказать, что два разбиения $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ множества M тогда и только тогда различны (не равны), когда существуют два таких элемента a и b множества M, которые при одном из разбиений $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ находятся в одном классе, а при другом из этих разбиений — в разных классах.

§ 4. Отношение эквивалентности

В § 2 мы изучали отношения, обладающие порознь каждым из основных свойств. Особенно интересны, однако, отношения, которые обладают теми или иными комбинациями основных свойств. В этом и в следующем параграфах мы изучим важнейшие из таких комбинаций.

Отношение φ называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если φ — отношение эквивалентности, то вместо $a\varphi b$ пишут также

$$a \underset{\varphi}{\sim} b \tag{1}$$

или

$$a \sim b \tag{2}$$

и говорят: *a и b эквивалентны* (*по отношению* φ) или *a эквивалентно b* (*по отношению* φ) [1]).

Из доказанного в § 2 вытекает, что *инверсия* φ^{-1} отношения эквивалентности φ и *сужение* φ_A отношения эквивалентности $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, \ M \rangle$ на любое подмножество A множества M также являются отношениями эквивалентности.

Примеры: 1) Полное отношение $\langle M^2, M \rangle$ на произвольном множестве M является отношением эквивалентности.

2) Пустое отношение O_M на множестве M является отношением эквивалентности только при $M = \varnothing$. Впрочем, в этом случае оно является также и полным отношением.

3) Отношение равенства E_M на произвольном множестве M является отношением эквивалентности. Очевидно, это „самое маленькое“ из отношений эквивалентности на множестве M в том смысле, что если φ является отношением эквивалентности на множестве M, то E_M влечет φ: $E_M \subseteq \varphi$ (см. § 1).

4) Отношение неравенства $\langle M^2 \setminus \Delta_M, M \rangle$ при непустом M не является отношением эквивалентности.

5) Отношение „быть на одном курсе“ на множестве студентов факультета является отношением эквивалентности*).

---

*) При выполнении оговорки, указанной в примере 5 из § 3.

6) Отношение „быть в одной группе“ на множестве студентов курса является отношением эквивалентности.

7) Отношение „быть в одной группе“ на множестве студентов факультета также является отношением эквивалентности.

8) Отношение „иметь одинаковый остаток при делении на 3“ на $\mathbf{N}$ — отношение эквивалентности.

9) Отношение „иметь одинаковое количество цифр“ на $\mathbf{N}$ — отношение эквивалентности.

10) Пусть $f: X \to Y$ — отображение. Отношение

$$x_1 \varphi x_2 \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} f(x_1) = f(x_2) \tag{3}$$

на X является отношением эквивалентности.

11) Отношение параллельности на множестве прямых на плоскости является отношением эквивалентности. Отношение перпендикулярности на том же множестве таковым не является.

12) Отношение подобия на множестве треугольников — отношение эквивалентности.

13) Отношение „иметь одинаковую фамилию“ на множестве людей Земли — отношение эквивалентности.

Я мог бы привести еще сколько угодно примеров. После того, как мы вскроем связь между отношениями эквивалентности и разбиениями, читатель сам сможет легко придумывать пример за примером.

Условимся говорить, что отношение φ на множестве M и разбиение $\mathfrak{M}$ множества M *сопряжены*, если для любых элементов x и y множества M $x\varphi y$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат к одному и тому же классу разбиения $\mathfrak{M}$, т. е. если

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)\{x\varphi y \rightleftarrows (\exists A \in \mathfrak{M})[x \in A \,\&\, y \in A]\}. \tag{4}$$

Когда φ и $\mathfrak{M}$ сопряжены, мы будем говорить также: *φ сопряжено с $\mathfrak{M}$* или *$\mathfrak{M}$ сопряжено с φ*.

Примеры: 14) Единственное существующее на пустом множестве отношение, отношение $\langle \varnothing, \varnothing \rangle$, и единственное существующее разбиение пустого множества (пример 1 из § 3), система $\varnothing$, в силу (5) из § 3 гл. IV, сопряжены.

15) Полное отношение $\langle M^2, M\rangle$ на произвольном (не пустом) множестве M и целое разбиение множества M сопряжены.

16) Отношение равенства E_M на произвольном множестве M и поэлементное разбиение множества M сопряжены.

17) Отношение „быть на одном курсе" на множестве студентов факультета (пример 5) и разбиение на курсы того же множества (пример 5 из § 3) сопряжены.

18) Отношение „быть в одной группе" на множестве студентов курса (пример 6) и разбиение на группы того же множества (пример 6 из § 3) сопряжены.

19) Отношение „быть в одной группе" на множестве студентов факультета (пример 7) и разбиение на группы того же множества (пример 7 из § 3) сопряжены.

20) Отношение „иметь одинаковый остаток при делении на 3" на множестве $\mathbf{N}$ (пример 8) и разбиение $\{B_0, B_1, B_2\}$ множества $\mathbf{N}$ из примера 9 из § 3 сопряжены.

21) Отношение „иметь одинаковое количество цифр" на $\mathbf{N}$ (пример 9) и разбиение $\{C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots\}$ множества $\mathbf{N}$ из примера 10 из § 3 сопряжены.

22) Пусть $f: X \to Y$ — сюръективное отображение. Отношение „быть прообразами одного и того же элемента из Y" на множестве X (пример 10) и разбиение на классы прообразов относительно f (пример 11 из § 3) сопряжены.

23) Отношение параллельности на множестве прямых на плоскости (пример 11) и разбиение того же множества на классы „прямых одинакового направления" сопряжены.

24) Отношение „иметь одинаковую фамилию" на множестве людей Земли (пример 13) и разбиение того же множества на классы однофамильцев сопряжены.

Естественно возникают вопросы: для любого ли отношения существует сопряженное с ним разбиение? может ли существовать несколько разбиений, сопряженных с данным отношением? Ответ на второй вопрос, на вопрос о единственности, дает

Теорема 1 (теорема о единственности разбиения, сопряженного с данным отношением). *Если два разбиения множества M сопряжены с одним и тем же отношением на множестве M, то они совпадают.* Другими словами: *разбиение, сопряженное с данным отношением, единственно.*

Доказательство. Пусть разбиения $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ множества M сопряжены с отношением φ на множестве M. Докажем, что $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$. $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — разбиения, т. е. системы множеств, множества множеств. Поэтому равенство $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$ можно доказать обычным, стандартным способом — доказав два включения. Можно, однако, использовав задачу 2 к § 3, доказать требуемое равенство проще. Допустим, что $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$. Тогда, в силу упомянутой задачи, существуют два таких элемента a и b множества M, которые при одном из разбиений $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ находятся в одном классе, а при другом из этих разбиений — в разных классах. Пусть a и b находятся в одном классе разбиения $\mathfrak{M}_1$ и в разных классах разбиения $\mathfrak{M}_2$ (второй случай рассматривается абсолютно аналогично). Поскольку a и b находятся в одном классе разбиения $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_1$ сопряжено с φ, $a\varphi b$. Поскольку $a\varphi b$ и φ сопряжено с $\mathfrak{M}_2$, a и b должны находиться в одном классе разбиения $\mathfrak{M}_2$, а они находятся в разных классах разбиения $\mathfrak{M}_2$. Противоречие.

Ответим на второй из поставленных выше вопросов: для любого ли отношения существует сопряженное с ним разбиение? Ответ на этот вопрос, отрицательный ответ, дает

Теорема 2 (теорема об отношении, сопряженном с некоторым разбиением). *Если отношение φ на множестве M сопряжено с каким-нибудь разбиением множества M, то φ — отношение эквивалентности.*

Доказательство. Пусть отношение φ на множестве M сопряжено с разбиением $\mathfrak{M}$ множества M. Докажем, что φ — отношение эквивалентности. Пусть $a \in M$. Из (4) (в качестве значения обеих переменных x и y берем a) вытекает

$$a\varphi a \rightleftarrows (\exists A \in \mathfrak{M})\,[a \in A \;\&\; a \in A]. \tag{5}$$

В силу условия 4 из определения разбиения существует такой класс разбиения $\mathfrak{M}$, которому принадлежит a. Следовательно, высказывание

$$(\exists A \in \mathfrak{M})\,[a \in A \,\&\, a \in A],$$

а значит, ввиду (5), и высказывание

$$a\varphi a$$

истинно. φ рефлексивно. Пусть теперь $a \in M$, $b \in M$ и $a\varphi b$. Из (4) (в качестве значения переменной x берем a, в качестве значения переменной y—b)

$$a\varphi b \rightleftarrows (\exists A \in \mathfrak{M})\,[a \in A \;\&\; b \in A]. \tag{6}$$

Из $a\varphi b$ и (6)

$$(\exists A \in \mathfrak{M})\,[a \in A \;\&\; b \in A]. \tag{7}$$

Но $a \in A \;\&\; b \in A \rightleftarrows b \in A \;\&\; a \in A$. Значит, из (7)

$$(\exists A \in \mathfrak{M})\,[b \in A \;\&\; a \in A]. \tag{8}$$

Из (4) (в качестве значения x берем на этот раз b, а в качестве значения y—a)

$$b\varphi a \rightleftarrows (\exists A \in \mathfrak{M})\,[b \in A \;\&\; a \in A]. \tag{9}$$

Из (8) и (9) вытекает $b\varphi a$. φ симметрично. Пусть, наконец, $a \in M$, $b \in M$, $c \in M$, $a\varphi b$ и $b\varphi c$. Из (4)

$$a\varphi b \rightleftarrows (\exists A \in \mathfrak{M})\,[a \in A \;\&\; b \in A], \tag{10}$$

$$b\varphi c \rightleftarrows (\exists A \in \mathfrak{M})\,[b \in A \;\&\; c \in A] \tag{11}$$

и

$$a\varphi c \rightleftarrows (\exists A \in \mathfrak{M})\,[a \in A \;\&\; c \in A]. \tag{12}$$

Из $a\varphi b$ и (10)

$$(\exists A \in \mathfrak{M})\,[a \in A \;\&\; b \in A]. \tag{13}$$

В силу (13) существует такой класс разбиения $\mathfrak{M}$, которому принадлежат и a и b. Обозначим один из таких классов через K. Итак, $K \in \mathfrak{M}$, $a \in K$ и $b \in K$. Из $b\varphi c$ и (11)

$$(\exists A \in \mathfrak{M})\,[b \in A \;\&\; c \in A]. \tag{14}$$

В силу (14) существует такой класс разбиения $\mathfrak{M}$, которому принадлежат и b и c. Обозначим один из таких классов через L. Итак, $L \in \mathfrak{M}$, $b \in L$ и $c \in L$. Из $b \in K$, $b \in L$ и условия 3 определения разбиения вытекает, что $K = L$. Следовательно, $a \in L$. Но и $c \in L$. Значит,

$$(\exists A \in \mathfrak{M})\,[a \in A \;\&\; c \in A]. \tag{15}$$

Из (12) и (15) $a\varphi c$. φ транзитивно.

Итак, разбиение, сопряженное с отношением φ, существует только в том случае, когда φ—отношение эквивалентности. Но для любого ли отношения эквивалентности существует сопряженное с ним разбиение? Ответ на этот вопрос, утвердительный ответ, дает

Теорема 3 (теорема о существовании разбиения, сопряженного с данным отношением эквивалентности). *Для любого отношения эквивалентности φ на множестве M существует сопряженное с ним разбиение множества M.*

Доказательство. Пусть $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ — отношение эквивалентности на множестве M. Докажем, что существует разбиение множества M, сопряженное с φ. Если $M = \varnothing$, то $\varphi = \langle \varnothing, \varnothing \rangle$. Искомым разбиением является в этом случае пустая система множеств, $\mathfrak{M} \underset{\mathrm{Df}}{=} \varnothing$ (см. пример 14). Предположим далее, что $M \neq \varnothing$ *). Для любого $a \in M$ положим

$$q(a) \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\{y \in M \mid a\varphi y\}. \qquad (16)$$

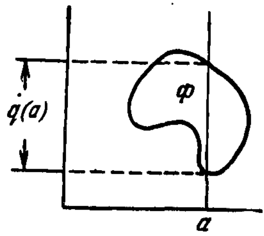


Рис. 73.

(Легко видеть, что

$$q(a) = \mathrm{пр}_2[(\{a\} \times M) \cap \Phi]$$

(рис. 73). Мы, однако, не будем этим пользоваться.) Обозначим через $\mathfrak{M}$ систему множеств $q(a)$ для всех $a \in M$ [2]). Докажем, что $\mathfrak{M}$ — искомое разбиение. Докажем сначала, что $\mathfrak{M}$ — разбиение. Из (16) вытекает, что $(\forall X \in \mathfrak{M})\,[X \subseteq M]$. Заметим, что для любого $a \in M$

$$a \in q(a), \qquad (17)$$

так как, в силу рефлексивности отношения φ, $a\varphi a$ (см. (16)). Следовательно, для любого $a \in M$, $q(a) \neq \varnothing$. Значит, $(\forall X \in \mathfrak{M})\,[X \neq \varnothing]$. Пусть теперь $B \in \mathfrak{M}$ и $C \in \mathfrak{M}$. Докажем по контрапозиции, что из $B \cap C \neq \varnothing$ следует $B = C$. Пусть $d \in B \cap C$, т. е. $d \in B$ и $d \in C$. Докажем, что $B \subseteq C$. Пусть $e \in B$. Докажем, что $e \in C$. Поскольку $B \in \mathfrak{M}$, существует такое $b \in M$, что $B = q(b)$. Аналогично, существует такое $c \in M$, что $C = q(c)$. Из $d \in C$, $C = q(c)$ и (16)

$$c\varphi d. \qquad (18)$$

Из $d \in B$, $B = q(b)$ и (16)

$$b\varphi d. \qquad (19)$$

*) На самом деле приведенное ниже построение искомого разбиения дает нужное разбиение и в случае $M = \varnothing$, так что можно было и не рассматривать отдельно этот случай.

Из $e \in B$, $B = q(b)$ и (16)

$$b\varphi e. \tag{20}$$

Из (19) и симметричности отношения φ

$$d\varphi b. \tag{21}$$

Из (18), (21) и транзитивности отношения φ

$$c\varphi b. \tag{22}$$

Из (22), (20) и транзитивности отношения φ

$$c\varphi e. \tag{23}$$

Из (23), $C = q(c)$ и (16)

$$e \in C.$$

Второе включение $C \subseteq B$ доказывается аналогично. Выполнение условия 4 в определении разбиения следует из (17). Итак, $\mathfrak{M}$ — разбиение. Докажем, наконец, что $\mathfrak{M}$ сопряжено с φ. Пусть $b \in M$ и $c \in M$. Докажем

$$b\varphi c \rightleftarrows (\exists A \in \mathfrak{M})\, [b \in A \,\&\, c \in A]. \tag{24}$$

Этим (4) будет доказано. Пусть сначала

$$b\varphi c. \tag{25}$$

Из (25) и (16) $c \in q(b)$. Из (17) $b \in q(b)$. Значит,

$$(\exists A \in \mathfrak{M})\, [b \in A \,\&\, c \in A]. \tag{26}$$

Пусть, наоборот, истинно (26). Тогда существует такой класс разбиения $\mathfrak{M}$, которому принадлежат и b и c. Обозначим один из таких классов через K. Итак, $K \in \mathfrak{M}$, $b \in K$ и $c \in K$. Но, в силу (17), $b \in q(b)$. Поскольку $\mathfrak{M}$ — разбиение, $K = q(b)$. Значит, $c \in q(b)$. Из (16) получаем (25). (24) доказано.

Итак, разбиение, сопряженное с данным отношением φ, существует тогда (теорема 3) и только тогда (теорема 2), когда φ — отношение эквивалентности, причем в этом случае сопряженное разбиение единственно (теорема 1).

Таким образом, мы получили ответ на поставленный в конце § 3 вопрос. Поскольку нужда в построении некоторого разбиения возникает в математике (да и не только в математике: любая классификация есть попытка построить некоторое разбиение) довольно часто, построенная выше теория имеет большое значение.

Легко доказать, что *для любого разбиения множества M существует единственное сопряженное с ним отношение* *на множестве* M, *причем*, в силу теоремы 2, *это отношение является отношением эквивалентности.*

Таким образом, соответствие, соотносящее произвольному отношению эквивалентности на множестве M сопряженное с ним разбиение множества M, является биекцией, взаимно-однозначным соответствием между системой отношений эквивалентности на множестве M и системой разбиений множества M.

Разбиение множества M, сопряженное с отношением φ на множестве M, называется также *фактормножеством множества* M *по отношению* φ и обозначается через M/φ. В силу вышесказанного, фактормножество M/φ множества M по отношению φ существует в том и только в том случае, когда φ — отношение эквивалентности на множестве M. Если φ — отношение эквивалентности на множестве M, то

$$x\varphi y \rightleftarrows (\exists A \in M/\varphi)\,[x \in A \,\&\, y \in A]. \tag{27}$$

ЗАДАЧИ

1. Пусть f — отображение множества M на множество L. Доказать, что существует такое отношение эквивалентности φ на множестве M, что множество L и фактормножество M/φ равномощны, причем биекцию $g: L \to M/\varphi$ можно выбрать так, что $f \circ g = t$, где t — естественное отображение (см. § 3) множества M на фактормножество M/φ (рис. 74).

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"'] & & L \arrow[dl, "g"] \\ & M/\varphi & \end{tikzcd}$$

Рис. 74

2. Доказать, что композиция $\varphi \circ \psi$ отношений эквивалентности φ и ψ на множестве M тогда и только тогда является отношением эквивалентности, когда $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

§ 5. Отношения порядка

Отношение φ называется *отношением нестрогого порядка* (или *нестрогим порядком*), если оно транзитивно, рефлексивно и антисимметрично. Отношение φ называется *отношением совершенного нестрогого порядка* (или *совершенным нестрогим порядком*), если оно связанно и является отношением нестрогого порядка. Отношение φ называется *отношением строгого порядка* (или *строгим порядком*), если оно транзитивно и антирефлексивно. В силу задачи 8 к § 2 любое отношение строгого порядка антисимметрично. Отношение φ называется *отношением совершенного строгого порядка* (или *совершенным строгим порядком*), если оно связанно и является отношением строгого порядка. Таким образом, прилагательное „совершенный“ означает добавление свойства связанности. Переход от нестрогого (совершенного нестрогого) порядка к строгому (совершенному строгому) порядку означает, ввиду сделанного выше замечания, замену свойства рефлексивности свойством антирефлексивности. Определения всех четырех видов отношений порядка (я пишу „четырех“, хотя любое отношение совершенного нестрогого порядка является отношением нестрогого порядка, а совершенный строгий порядок есть частный случай строгого порядка) сведены в таблице.

Порядки	Транзитивное	Рефлексивное	Антирефлексивное	Антисимметричное	Связанное
нестрогий	+	+		+	
совершенный нестрогий	+	+		+	+
строгий	+		+	(+)	
совершенный строгий	+		+	(+)	+

Если φ — отношение нестрогого (в частности, совершенного нестрогого) порядка, то вместо $a\varphi b$ пишут также

$$a \underset{\varphi}{\leqslant} b \tag{1}$$

или

$$a \leqslant b \tag{2}$$

и говорят: *a меньше или равно b*, или *a предшествует b*, или *a содержится в b*. Если φ — строгий (в частности, совершенный строгий) порядок, то вместо $a\varphi b$ пишут также

$$a \underset{\varphi}{<} b \tag{3}$$

или

$$a < b \tag{4}$$

и говорят: *а меньше b*, или *а строго предшествует b*, или *а строго содержится в b*. Мы, впрочем, не будем в этом параграфе пользоваться обозначениями (1) — (4) для произвольных отношений порядка; знаки $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ будут в этом параграфе связывать только действительные числа и будут иметь обычный смысл (§ 1 раздела Б или пример 5 из § 1 и пример 6 из § 1).

Из доказанного в § 2 вытекает, что *инверсия* φ^{-1} отношения нестрогого порядка φ и *сужение* φ_A отношения нестрогого порядка $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ на любое подмножество A множества M также являются отношениями нестрогого порядка. Аналогичные утверждения верны для совершенного нестрогого, строгого и совершенного строгого порядков.

Примеры: 1) Прежде всего, отношение

$$x\varphi_1 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x < y \qquad (x,\ y \in \mathbf{D})$$

есть совершенный строгий порядок (см. свойства 1—3 в § 1 раздела Б). Именно от этого конкретного отношения и был взят знак, обозначающий произвольные строгие порядки (см. (3) или (4)). Отношения

$$x\varphi_2 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x < y \qquad (x,\ y \in \mathbf{R}),$$

$$x\varphi_3 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x < y \qquad (x,\ y \in \mathbf{C}),$$

$$x\varphi_4 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x < y \qquad (x,\ y \in \mathbf{N})$$

также являются совершенными строгими порядками. Очевидно,

$$\varphi_2 = (\varphi_1)_{\mathbf{R}}, \quad \varphi_3 = (\varphi_1)_{\mathbf{C}} = (\varphi_2)_{\mathbf{C}}, \quad \varphi_4 = (\varphi_1)_{\mathbf{N}} = (\varphi_2)_{\mathbf{N}} = (\varphi_3)_{\mathbf{N}}.$$

2) Отношение

$$x\psi_1 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x \leqslant y \qquad (x,\ y \in \mathbf{D})$$

есть совершенный нестрогий порядок (см. свойства 1′—3′ в § 1 раздела Б). Именно от этого конкретного отношения и был взят знак, обозначающий произвольные нестрогие порядки (см. (1) или (2)). Отношения

$$x\psi_2 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x \leqslant y \qquad (x,\ y \in \mathbf{R}),$$

$$x\psi_3 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x \leqslant y \qquad (x,\ y \in \mathbf{C}),$$

$$x\psi_4 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x \leqslant y \qquad (x,\ y \in \mathbf{N})$$

также являются нестрогими порядками.

3) Для любого множества M отношение

$$X\mu Y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} X \subseteq Y \qquad (X,\ Y \in \mathfrak{P}(M))$$

является нестрогим порядком [см. в § 2 гл. II (6), (1) и (5)], причем, если M содержит больше одного элемента, этот нестрогий порядок не является совершенным (при $a \neq b$ не верно как $\{a\} \subseteq \{b\}$, так и $\{b\} \subseteq \{a\}$).

4) Для любого множества M отношение

$$X\nu Y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} X \subset Y \qquad (X,\ Y \in \mathfrak{P}(M))$$

является строгим порядком, причем, если M содержит больше одного элемента, этот строгий порядок не является совершенным.

5) На множестве соответствий между непустыми множествами X и Y отношение

$$\Gamma\mu_1\Delta \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \Delta \text{ — продолжение } \Gamma$$

является нестрогим порядком, причем, если X или Y содержит больше одного элемента, этот нестрогий порядок не является совершенным.

6) На множестве отношений на множестве M отношение $\varphi \subseteq \psi$ является нестрогим порядком, причем, если M содержит больше одного элемента, этот нестрогий порядок не является совершенным.

7) На множестве разбиений множества M отношение

$$\mathfrak{M}\mu_2\mathfrak{N} \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (\forall A \in \mathfrak{M})\,(\exists B \in \mathfrak{N})\,[A \subseteq B]$$

является нестрогим порядком, причем, если M содержит больше двух элементов, этот нестрогий порядок не является совершенным.

8) На множестве всюду определенных функций типа $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$ отношение

$$f \mu_3 g \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (\forall x \in \mathbf{D}) [f(x) \leqslant g(x)]$$

является нестрогим порядком, но не является совершенным нестрогим порядком.

9) Отношение

$$f \nu_3 g \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (\forall x \in \mathbf{D}) [f(x) \leqslant g(x)] \,\&\, (\exists x \in \mathbf{D}) [f(x) < g(x)]$$

на том же множестве (пример 8) является строгим порядком, но не является совершенным строгим порядком.

10) Отношение

$$f \nu_4 g \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (\forall x \in \mathbf{D}) [f(x) < g(x)]$$

на том же множестве (пример 8) является строгим (но не совершенным строгим) порядком.

11) Отношение

$$x \mu_5 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} y \text{ делится на } x \qquad (x,\ y \in \mathbf{N})$$

является нестрогим (но не совершенным нестрогим) порядком на $\mathbf{N}$.

12) Отношение на множестве точек координатной плоскости

$$P \nu_6 Q \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} P \text{ ближе к началу координат, чем } Q$$

является строгим (но не совершенным строгим) порядком.

13) Отношение

$$A \nu_7 B \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} A \text{ старше, чем } B$$

на множестве людей Земли является строгим (но не совершенным строгим) порядком.

14) Отношение равенства E_M на произвольном множестве M является нестрогим порядком, причем, если M содержит больше одного элемента, этот нестрогий порядок не является совершенным. Очевидно, отношение равенства E_M — „самый маленький“ нестрогий порядок на множестве

M в том смысле, что если φ является нестрогим порядком на M, то E_M влечет $\varphi : E_M \subseteq \varphi$ (ср. с примером 3 из § 4).

15) Пустое отношение O_M на произвольном множестве M является строгим порядком, причем, если M содержит больше одного элемента, этот строгий порядок не является совершенным. Очевидно, пустое отношение O_M — „самый маленький" строгий порядок на M. Отношение O_M влечет любой другой строгий порядок на M.

Между отношениями нестрогого порядка на множестве M и отношениями строгого порядка на том же множестве существует очень простая зависимость. Легко доказать, что

если $\langle \Phi, M \rangle$ *— нестрогий порядок на* M, *то* $\langle \Phi \setminus \Delta_M, M \rangle$ *— строгий порядок на* M;

если $\langle \Phi, M \rangle$ *— строгий порядок на* M, *то* $\langle \Phi \cup \Delta_M, M \rangle$ *— нестрогий порядок на* M.

Эти два утверждения позволяют установить простое и естественное взаимно-однозначное соответствие между системой нестрогих порядков на произвольном множестве M и системой строгих порядков на том же множестве. Соответствие, соотносящее произвольному нестрогому порядку $\langle \Phi, M \rangle$ на множестве M отношение $\langle \Phi \setminus \Delta_M, M \rangle$, будет требуемой биекцией. При изучении нестрогих и строгих порядков на множестве M указанной биекцией пользуются совершенно автоматически и свободно переходят от произвольного нестрогого порядка на M к соответствующему, в силу указанной биекции, строгому порядку на M, и обратно. Отношения ψ_1 и φ_1, ψ_2 и φ_2, ψ_3 и φ_3, ψ_4 и φ_4 (примеры 1, 2), μ и ν (примеры 3, 4), μ_3 и ν_3 (примеры 8, 9), E_M и O_M (примеры 14, 15) как раз и являются соответствующими друг другу нестрогим и строгим порядками.

Между отношениями совершенного нестрогого порядка на множестве M и отношениями совершенного строгого порядка на множестве M существует такая же простая зависимость, как между нестрогими и строгими порядками. Из предыдущих теорем вытекает, что

если $\langle \Phi, M \rangle$ *— совершенный нестрогий порядок на* M, *то* $\langle \Phi \setminus \Delta_M, M \rangle$ *— совершенный строгий порядок на* M;

если $\langle \Phi, M \rangle$ *— совершенный строгий порядок на* M, *то* $\langle \Phi \cup \Delta_M, M \rangle$ *— совершенный нестрогий порядок на* M.

Отсюда нетрудно получить, что соответствие, соотносящее произвольному совершенному нестрогому порядку

$\langle\Phi, M\rangle$ на множестве M отношение $\langle\Phi\setminus\Delta_M, M\rangle$, является биекцией между системой совершенных нестрогих порядков на M и системой совершенных строгих порядков на M. Эта биекция также используется обычно автоматически, без специальных оговорок; когда говорят о совершенном строгом порядке на M, соответствующем совершенному нестрогому порядку на M (или наоборот), подразумевают, что речь идет об указанной биекции. Отношения ψ_1 и φ_1, ψ_2 и φ_2, ψ_3 и φ_3, ψ_4 и φ_4 (примеры 1, 2) как раз и являются соответствующими друг другу совершенным нестрогим и совершенным строгим порядками.

Попробуем поставить следующий вопрос: почему выделенные выше четыре вида отношений мы назвали отношениями *порядка*? Ответить на этот вопрос трудно, так как речь идет о соотношении между точным математическим понятием и интуитивным понятием порядка. С точки зрения интуитивного понимания слова „порядок" каждая перестановка над (конечным) множеством M задает на этом множестве некоторый порядок. Поэтому некоторый ответ на поставленный выше вопрос дает следующая

Теорема (о зависимости между отношениями совершенного строгого порядка на конечном множестве и перестановками над тем же множеством). *Между множеством $\mathfrak{R}$ отношений совершенного строгого порядка на конечном множестве M и множеством $\mathfrak{P}$ перестановок над множеством M можно установить такое взаимно-однозначное соответствие $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, \mathfrak{R}, \mathfrak{P}\rangle$, что*

$$(\forall\, \varphi\in\mathfrak{R})\,(\forall\, x\in M)\,(\forall\, y\in M)$$

$$[x\varphi y \rightleftarrows \text{в } f(\varphi) \quad y \text{ стоит правее, чем } x]. \tag{5}$$

Докажем сначала лемму.

Лемма. *Если ψ — отношение совершенного строгого порядка на непустом конечном множестве A, то существует единственный элемент $q\in A$ такой, что* *)

$$\neg\,(\exists\, x\in A)\,[x\psi q]. \tag{6}$$

*) Элемент q, удовлетворяющий условию (6), естественно назвать *наименьшим* (по отношению ψ).

Доказательство. Докажем сначала *единственность*. Допустим, что искомых элементов существует два: q_1 и q_2. Итак,

$$\neg (\exists x \in A) [x\psi q_1], \tag{7}$$

$$\neg (\exists x \in A) [x\psi q_2], \tag{8}$$

$$q_1 \neq q_2. \tag{9}$$

Из (9) и связанности отношения ψ следует

$$(q_1\psi q_2) \vee (q_2\psi q_1).$$

Но $q_1\psi q_2$ противоречит (8), а $q_2\psi q_1$ противоречит (7).

Докажем теперь *существование* искомого элемента. Докажем, например, индукцией по числу элементов множества A. Если A — одноэлементное множество, $A = \{a\}$, то $\psi = \langle\varnothing, A\rangle$, так как пустое отношение — единственный совершенный строгий порядок на одноэлементном множестве. Единственный элемент множества A в этом случае, в силу антирефлексивности отношения ψ, обладает свойством (6) и, следовательно, является искомым. Допустим теперь, что для любого n-элементного множества ($n \geqslant 1$) элемент с требуемым свойством существует, и предположим, что ψ — совершенный строгий порядок на $(n+1)$-элементном множестве A. Возьмем произвольный элемент в множестве A. Обозначим его через a. Очевидно, либо $\neg (\exists x \in A) [x\psi a]$, либо $(\exists x \in A) [x\psi a]$. Если $\neg (\exists x \in A) [x\psi a]$, то a — искомый элемент. Допустим, что $(\exists x \in A) [x\psi a]$. Обозначим тогда какой-нибудь элемент множества A, который находится в отношении ψ к элементу a, через b. Итак,

$$b\psi a. \tag{10}$$

Пусть $B \underset{\mathrm{Df}}{=} A \setminus \{a\}$ и $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \psi_B$. Отношение φ, как сужение совершенного строгого порядка, само является совершенным строгим порядком. B — n-элементное множество, $n \geqslant 1$. Итак, φ — совершенный строгий порядок на непустом n-элементном множестве B. По предположению индукции существует такой элемент $c \in B$, что

$$\neg (\exists x \in B) [x\varphi c]. \tag{11}$$

$B \subseteq A$ и $c \in B$. Значит, $c \in A$. Докажем, что c — искомый элемент, т. е. что

$$\neg (\exists x \in A)[x\psi c].$$

Допустим противное. Допустим, что $d \in A$ и

$$d\psi c. \tag{12}$$

Либо $d = a$, либо $d \neq a$. Пусть сначала $d = a$. Тогда из (12)

$$a\psi c. \tag{13}$$

Из (10), (13) и транзитивности отношения ψ

$$b\psi c. \tag{14}$$

Из (10) и антирефлексивности отношения ψ

$$b \neq a.$$

Значит,

$$b \in B. \tag{15}$$

Кроме того,

$$c \in B. \tag{16}$$

Из (14), (15), (16) и определения сужения

$$b\varphi c. \tag{17}$$

(15) и (17) противоречат (11). Если же $d \neq a$, то

$$d \in B. \tag{18}$$

Из (12), (18), (16) и определения сужения

$$d\varphi c. \tag{19}$$

(18) и (19) противоречат (11). Лемма полностью доказана.

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. Построим требуемую биекцию f. Если $M = \varnothing$, то $\mathfrak{R} = \{\langle\varnothing, \varnothing\rangle\}$, $\mathfrak{P} = \{\Lambda\}$ и $f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle\{\langle\langle\varnothing, \varnothing\rangle, \Lambda\rangle\}, \{\langle\varnothing, \varnothing\rangle\}, \{\Lambda\}\rangle$ — искомая биекция. Пусть теперь $M \neq \varnothing$. Обозначим через n число элементов множества M. Возьмем произвольный элемент $\varphi \in \mathfrak{R}$. Таким образом, φ — совершенный строгий порядок на M. Построим кортеж $f(\varphi)$ над M. Поскольку φ — совершенный строгий порядок на непустом конечном множестве M, по лемме существует единственный элемент в множестве M, обладающий свойством (6). Обозначим этот элемент через a_1. Итак,

$$a_1 \in M \tag{20}$$

и

$$\neg (\exists x \in M) [x\varphi a_1]. \tag{21}$$

Этот элемент a_1 мы сделаем первой компонентой кортежа $f(\varphi)$. Если $n = 1$, $f(\varphi) \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle a_1 \rangle$ является перестановкой над M. Пусть $n > 1$. Допустим (построение индуктивное!), что мы уже выбрали k-ю компоненту a_k кортежа $f(\varphi)$:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{22}$$

причем $1 \leqslant k < n$. Положим $B_k \underset{\mathrm{Df}}{=} M \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$, $\varphi_k \underset{\mathrm{Df}}{=} \varphi_{B_k}$. Поскольку $k < n$, $B_k \neq \varnothing$. Отношение φ_k, как сужение совершенного строгого порядка, само является совершенным строгим порядком. Итак, φ_k — отношение совершенного строгого порядка на непустом конечном множестве B_k. По лемме существует единственный элемент в множестве B_k, обладающий свойством (6). Обозначим этот элемент через a_{k+1}. Итак,

$$a_{k+1} \in B_k \tag{23}$$

и

$$\neg (\exists x \in B_k) [x\varphi_k a_{k+1}]. \tag{24}$$

Этот элемент a_{k+1} мы сделаем $(k+1)$-й компонентой кортежа $f(\varphi)$:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \tag{25}$$

Выбрав n-ю компоненту a_n, закончим построение. Положим

$$f(\varphi) \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle. \tag{26}$$

$f(\varphi)$ — кортеж длины n над M. Легко видеть, что все компоненты кортежа $f(\varphi)$ различны. В самом деле. Пусть $l < m$. По построению $a_m \in B_{m-1}$ (см. (23)) и $B_{m-1} = M \setminus \{a_1, \ldots, a_{m-1}\}$. Следовательно, $a_m \notin \{a_1, \ldots, a_{m-1}\}$. Поскольку $l < m$, $a_l \in \{a_1, \ldots, a_{m-1}\}$. Значит, $a_l \neq a_m$. Итак, $f(\varphi)$ — перестановка над M, $f(\varphi) \in \mathfrak{P}$. Исходя из произвольного отношения совершенного строгого порядка

$\varphi \in \mathfrak{R}$ на M, мы построили некоторую перестановку $f(\varphi) \in \mathfrak{P}$ над M. Обозначим через F множество пар $\langle \varphi, f(\varphi) \rangle$ для всех $\varphi \in \mathfrak{R}$. Пусть

$$f \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle F, \mathfrak{R}, \mathfrak{P} \rangle. \tag{27}$$

Очевидно, f — функция. Докажем, что f — биекция. Для доказательства воспользуемся теоремой о тождественных композициях (§ 1 гл. VI). Построим вспомогательную функцию g типа $\mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{R}$. Возьмем произвольную перестановку

$$\alpha \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle \tag{28}$$

над M. Отношение $g(\alpha)$ на M определим так:

$$x g(\alpha) y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \text{в } \alpha \ y \text{ стоит правее, чем } x. \tag{29}$$

Очевидно, $g(\alpha)$ — совершенный строгий порядок на M, $g(\alpha) \in \mathfrak{R}$. Исходя из произвольной перестановки $\alpha \in \mathfrak{P}$ над M, мы построили некоторое отношение совершенного строгого порядка $g(\alpha) \in \mathfrak{R}$ на M. Обозначим через G множество пар $\langle \alpha, g(\alpha) \rangle$ для всех $\alpha \in \mathfrak{P}$. Пусть

$$g \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle G, \mathfrak{P}, \mathfrak{R} \rangle. \tag{30}$$

Итак, f — функция типа $\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{P}$, g — функция типа $\mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{R}$.

Докажем, что $f \circ g$ — тождественная функция, т. е. что

$$(\forall \varphi \in \mathfrak{R}) [g(f(\varphi)) = \varphi]. \tag{31}$$

Фиксируем произвольное отношение совершенного строгого порядка $\varphi \in \mathfrak{R}$. Пусть

$$f(\varphi) \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \tag{32}$$

и пусть

$$g(f(\varphi)) \underset{\mathrm{Df}}{=} \psi. \tag{33}$$

Нам надо доказать, что $\psi = \varphi$. ψ и φ — отношения на M. Следовательно, для того чтобы доказать $\psi = \varphi$, достаточно доказать (см. (38) из § 1 и (37) из § 1)

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M) [x \psi y \rightleftarrows x \varphi y]. \tag{34}$$

Возьмем два произвольных элемента c и d множества M. Докажем

$$c\psi d \rightleftarrows c\varphi d. \tag{35}$$

Пусть сначала

$$c\psi d. \tag{36}$$

Допустим, что

$$\neg (c\varphi d). \tag{37}$$

Из (36) и антирефлексивности отношения ψ вытекает

$$c \neq d. \tag{38}$$

Из связанности отношения φ, (38) и (37) следует

$$d\varphi c. \tag{39}$$

Из (36), (33) и (29) вытекает, что

$$\text{в } f(\varphi)\ d \text{ стоит правее, чем } c. \tag{40}$$

Покажем, что (39) и (40) противоречат способу построения перестановки $f(\varphi)$. Разберем два случая: $c = a_1$ (см. (32)) и $c = a_{k+1}$, где $1 \leqslant k < n$. Если $c = a_1$, (39) противоречит (21). Пусть теперь $c = a_{k+1}$ $(1 \leqslant k < n)$. Из (23)

$$c \in B_k. \tag{41}$$

Из (40) и определения множества B_k

$$d \in B_k. \tag{42}$$

Из (39), (42), (41) и определения сужения

$$d\varphi_k c \tag{43}$$

(42) и (43) противоречат (24). Пусть теперь

$$c\varphi d. \tag{44}$$

Допустим, что

$$\neg (c\psi d). \tag{45}$$

Из (44) и антирефлексивности отношения φ

$$c \neq d. \tag{46}$$

Из связанности отношения ψ, (46) и (45)

$$d\psi c. \tag{47}$$

Из (47), (33) и (29) вытекает, что

$$\text{в } f(\varphi)\ c \text{ стоит правее, чем } d. \tag{48}$$

Из (44) и (48) абсолютно так же, как из (39) и (40), получается противоречие. Равенство $\psi = \varphi$, а значит, и (31) доказано.

Докажем, что $g \circ f$ — тождественная функция, т. е. что

$$(\forall \alpha \in \mathfrak{P})\,[f(g(\alpha)) = \alpha]. \tag{49}$$

Фиксируем произвольную перестановку $\alpha \in \mathfrak{P}$. Пусть

$$\alpha \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle,$$

$$g(\alpha) \underset{\mathrm{Df}}{=} \varphi \tag{50}$$

и

$$f(\varphi) \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle.$$

Докажем, что $f(\varphi) = \alpha$. Допустим противное. Обозначим через l наименьшее число такое, что

$$a_l \neq b_l. \tag{51}$$

Пусть $a_l \underset{\mathrm{Df}}{=} c$, $b_l \underset{\mathrm{Df}}{=} d$. Из (51)

$$c \neq d.$$

Поскольку $(\forall i < l)\,[a_i = b_i]$, а $f(\varphi)$ — перестановка,

$$\text{в } \alpha\ c \text{ стоит правее, чем } d. \tag{52}$$

Из (52), (29) и (50)

$$d\varphi c. \tag{53}$$

Поскольку $(\forall i > l)\,[a_i = b_i]$, а α — перестановка,

$$\text{в } f(\varphi)\ d \text{ стоит правее, чем } c. \tag{54}$$

Из (53) и (54) абсолютно так же, как из (39) и (40), получается противоречие. (49) доказано.

Итак, условия теоремы о тождественных композициях выполнены. Следовательно, f — *биекция*, g — биекция и $g = f^{-1}$. Осталось доказать, что построенная нами биекция f удовлетворяет условию (5). Пусть $\varphi \in \mathfrak{R}$, $a \in M$ и $b \in M$.

Докажем

$$a\varphi b \rightleftarrows \text{в } f(\varphi) \ b \text{ стоит правее, чем } a. \qquad (55)$$

Пусть $f(\varphi) \underset{\mathrm{Df}}{=} \alpha$. Тогда $g(\alpha) = g(f(\varphi)) = \varphi$. Следовательно, (55) вытекает прямо из (29). Теорема полностью доказана.

Доказанная теорема показывает, что отношения *совершенного* строгого порядка на *конечном* множестве M — это, так сказать, все равно, что перестановки над множеством M; каждое отношение совершенного строгого порядка на M *задает* некоторую перестановку над M, т. е. некоторый порядок (в интуитивном смысле) на M; и обратно: каждая перестановка над M, т. е. каждый порядок (в интуитивном смысле) на M, *задает* некоторое отношение совершенного строгого порядка на M, отношение, фиксирующее порядок, заданный перестановкой (см. (5)). Разумеется, доказанная теорема переносится (с небольшим изменением свойства (5)) и на отношения совершенного *нестрогого* порядка.

Отношения *совершенного* строгого (или нестрогого) порядка на *бесконечных* множествах тоже задают, устанавливают некоторые порядки (в интуитивном смысле) на своих областях задания, однако выразить этот факт с помощью точного утверждения трудно, так как у нас нет аналога понятия перестановки для бесконечных множеств. Ограничимся примерами.

Примеры: 16) Отношение

$$x\varphi_1 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x < y \qquad (x,\ y \in \mathbf{D})$$

есть отношение совершенного строгого порядка на $\mathbf{D}$. Отношение $\varphi_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} \varphi_1^{-1}$ также является отношением совершенного строгого порядка на $\mathbf{D}$. Очевидно,

$$x\varphi_2 y \equiv y < x \equiv x > y.$$

Отношение φ_1 *изображается* обычной числовой осью (рис. 75). Отношение φ_2 можно изобразить „перевернутой" числовой осью (рис. 76). На рис. 76, *как и на рис.* 75, „меньше" совпадает с „левее".

17) Не следует думать, что φ_1 и φ_2 (пример 16) — единственные отношения совершенного строгого порядка на $\mathbf{D}$.

На **D** существует сколько угодно, бесконечное множество отношений совершенного строгого порядка. Рассмотрим, например, такой *порядок* (в интуитивном смысле) на **D**:

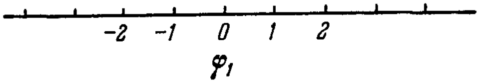


Рис. 75.

отрицательные и положительные числа сравниваются обычным образом (т. е. по отношению φ_1), а 0 „выкалывается“ и помещается правее (т. е. делается „больше“) всех остальных чисел (рис. 77). Этому интуитивному описанию и рисун-

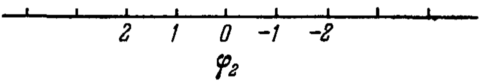


Рис. 76.

ку 77 соответствует следующее отношение совершенного строгого порядка на **D**:

$$x\varphi_3 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (x \neq 0 \;\&\; y \neq 0 \;\&\; x < y) \vee (x \neq 0 \;\&\; y = 0).$$

18) Рассмотрим такой порядок на **D**: все числа, абсолютная величина которых больше (в обычном смысле,

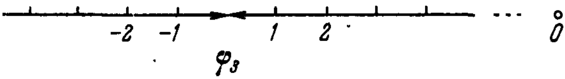


Рис. 77.

т. е. в смысле отношения φ_1 из примера 16), чем 1, и число 1 сравниваются обычным образом (т. е. по отношению φ_1); числа же полусегмента $[-1, 1)$ помещаются в обычном порядке (т. е. по φ_1) правее (т. е. делаются „больше“) всех остальных чисел (рис. 78). Точный смысл этого интуитивного описания и рисунка 78 в совершенном строгом порядке φ_4 на $\mathbf{D}$:

$$x\varphi_4 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (x \notin [-1, 1) \,\&\, y \notin [-1, 1) \,\&\, x < y) \vee$$
$$\vee (x \notin [-1, 1) \,\&\, y \in [-1, 1)) \vee$$
$$\vee (x \in [-1, 1) \,\&\, y \in [-1, 1) \,\&\, x < y).$$

19) Рассмотрим такой порядок на $\mathbf{D}$: все положительные числа сравниваются между собой обычным образом (т. е.

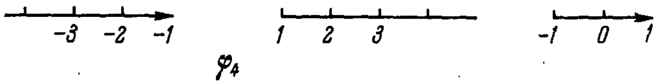


Рис. 78.

по φ_1 из примера 16) и все неположительные числа сравниваются между собой обычным образом (по φ_1), но все неположительные числа помещаются правее (т. е. делаются „больше") всех положительных (рис. 79). Точный смысл

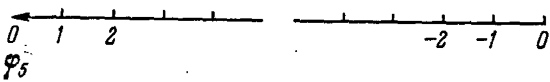


Рис. 79.

сказанного и рисунка 79 в совершенном строгом порядке φ_5 на $\mathbf{D}$:

$$x\varphi_5 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (x > 0 \,\&\, y > 0 \,\&\, x < y) \vee$$
$$\vee (x \leqslant 0 \,\&\, y \leqslant 0 \,\&\, x < y) \vee (x > 0 \,\&\, y \leqslant 0).$$

20) Пусть, наконец, отношение совершенного строгого порядка на $\mathbf{D}$ задается так:

$$x\varphi_6 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (x > 0 \,\&\, y > 0 \,\&\, x < y) \vee$$
$$\vee (x \leqslant 0 \,\&\, y \leqslant 0 \,\&\, x > y) \vee (x > 0 \,\&\, y \leqslant 0).$$

Порядок (в интуитивном смысле), заданный на $\mathbf{D}$ отношением φ_6, изображен на рис. 80 (ср. с φ_5 из примера 19 и рисунком 79).

Любому хорошему школьнику известно, что „комплексные числа нельзя сравнивать по величине". Однако, что это значит? Почему комплексные числа „нельзя сравнивать по величине“? В чем точный смысл этого утверждения? Означает ли оно, что на множестве **K** не существует отношений совершенного строгого порядка? Разумеется, нет. На множестве **K** (как, впрочем, и на любом бесконечном множестве) существует бесконечная система совершенных строгих порядков.

Примеры: 21) Пусть*)

$$x\psi_1 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} [\mathrm{Re}(x) < \mathrm{Re}(y)] \vee$$
$$\vee [\mathrm{Re}(x) = \mathrm{Re}(y) \,\&\, \mathrm{Im}(x) < \mathrm{Im}(y)] \quad (x, y \in \mathbf{K}).$$

Легко видеть, что ψ_1 — отношение совершенного строгого порядка на **K**. На интуитивном языке порядок, заданный

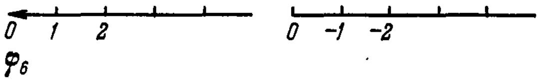


Рис. 80.

на **K** отношением ψ_1, может быть описан (с привлечением геометрической интерпретации комплексных чисел) так: чем „точка" правее, тем она „больше"; если же две точки расположены на одной вертикали [$\mathrm{Re}(x) = \mathrm{Re}(y)$], то „больше“ та, которая выше.

22) Пусть*)

$$x\psi_2 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (|x| < |y|) \vee$$
$$\vee (|x| = |y| \,\&\, x \neq 0 \,\&\, \arg x < \arg y) \quad (x, y \in \mathbf{K}).$$

ψ_2 — совершенный строгий порядок на **K**. Чем „точка" дальше от „начала координат“, тем она „больше“; из точек, находящихся на одинаковом расстоянии от начала координат, „больше“ та, чей „главный аргумент“ больше.

В чем же точный смысл утверждения, что „комплексные числа нельзя сравнивать по величине“? Он заключается в следующем: не существует такого отношения совершенного строгого порядка на **K**, которое бы обладало свой-

*) $\mathrm{Re}(a)$ — действительная часть комплексного числа a, $\mathrm{Im}(a)$ — коэффициент при мнимой части, $|a|$ — модуль, $\arg a$ — „главный“ аргумент ($0 \leqslant \arg a < 2\pi$).

ствами 4—6 из § 1 раздела Б (свойствами 1—3 из § 1 раздела Б обладает, разумеется, любое отношение совершенного строгого порядка). Более того, *не существует такого отношения совершенного строгого порядка на* **K**, *которое бы обладало свойствами* 4—5 *из* § 1 *раздела* Б.
Докажем это*).

Допустим, что φ — отношение совершенного строгого порядка на **K**, причем

$$x\varphi y \to (x+z)\,\varphi\,(y+z), \tag{I}$$

$$x\varphi y \,\&\, 0\varphi z \to (xz)\,\varphi\,(yz). \tag{II}$$

Прежде всего,

$$0\varphi x \,\&\, 0\varphi y \to 0\varphi\,(x+y) \tag{III}$$

(ср. со свойством 7 из § 1 раздела Б). В самом деле, пусть

$$0\varphi a \,\&\, 0\varphi b.$$

Из (I) и $0\varphi a$

$$(0+b)\,\varphi\,(a+b). \tag{56}$$

Но $0+b=b$. Следовательно, из (56)

$$b\varphi\,(a+b). \tag{57}$$

Из $0\varphi b$ и (57), в силу транзитивности отношения φ,

$$0\varphi\,(a+b).$$

(III) доказано. Далее,

$$x\varphi 0 \to 0\varphi\,(-x) \tag{IV}$$

(ср. со свойством 8 из § 1 раздела Б). В самом деле, пусть

$$a\varphi 0. \tag{58}$$

Из (I) и (58)

$$[a+(-a)]\,\varphi\,[0+(-a)]. \tag{59}$$

Но $a+(-a)=0$ и $0+(-a)=-a$. Следовательно, из (59)

$$0\varphi\,(-a).$$

(IV) доказано. Докажем, наконец, что

$$0\varphi x \to 0\varphi\,(x^2) \tag{V}$$

---

*) Излагаемое ниже доказательство было сообщено мне Г. В. Дорофеевым.

(ср. со свойством 5а в задаче 2 к § 1 раздела Б). Пусть

$$0\varphi a. \tag{60}$$

Из (60) и (II)

$$(0\cdot a)\,\varphi\,(a\cdot a)$$

$$0\varphi\,(a^2).$$

(V) доказано. Доказав вспомогательные утверждения (III) — (V), перейдем к получению противоречия.

$$i \neq 0.$$

В силу связанности отношения φ

$$0\varphi i \vee i\varphi 0.$$

Пусть сначала

$$0\varphi i. \tag{61}$$

Из (61) и (V)

$$0\varphi\,(i^2),$$

$$0\varphi\,(-1). \tag{62}$$

Из (62) и (V)

$$0\varphi\,[(-1)^2],$$

$$0\varphi 1. \tag{63}$$

Из (62), (63) и (III)

$$0\varphi\,[(-1)+1],$$

$$0\varphi 0.$$

Противоречие с антирефлексивностью отношения φ. Пусть теперь

$$i\varphi 0. \tag{64}$$

Из (64) и (IV)

$$0\varphi\,(-i). \tag{65}$$

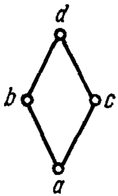
Из (65) и (V)

$$0\varphi\,[(-i)^2],$$

$$0\varphi\,(-1) \tag{66}$$

(66) совпадает с (62). Дальше доказательство повторяется.

Отношения строгого (или нестрогого) порядка, не являющиеся отношениями *совершенного* строгого (соответственно, нестрогого) порядка, разумеется, гораздо меньше соответствуют нашему интуитивному представлению о порядке. Например, к отношениям строгого порядка принадлежит даже пустое отношение O_M (пример 15): никакие два элемента не сравнимы по этому отношению, никакого порядка (в интуитивном смысле) это отношение не устанавливает. Тем не менее отношения строгого (и нестрогого) порядка, не являющиеся совершенными строгими (соответственно, нестрогими) порядками, все-таки задают, устанавливают некоторый порядок в обобщенном смысле*) (в крайнем, вырожденном случае — „никакой", „пустой" порядок) на своих областях задания. Добавим к примерам 3 — 15 еще несколько.



φ_1

Рис. 81.

Примеры: 23) Пусть $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a,\ b,\ c,\ d\}$,

$\Phi_1 \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle c, d\rangle\}$.

Отношение $\varphi_1 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi_1, M\rangle$ является отношением строгого порядка на M, но не является отношением совершенного строгого порядка на M. Порядок (в интуитивном смысле), заданный на M отношением φ_1, изображен на рис. 81. На рис. 81 „ниже" означает „меньше". Два элемента x и y соединены черточкой на рис. 81 в том и только в том случае, если $\{x\varphi y \,\&\, \neg\, (\exists z)\, [x\varphi z \,\&\, z\varphi y]\} \vee \{y\varphi x \,\&$
$\&\, \neg\, (\exists z)\, [y\varphi z \,\&\, z\varphi x]\}$.

24) Пусть

$$\Phi_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\langle a,\ b\rangle,\ \langle a,\ c\rangle,\ \langle a,\ d\rangle\}.$$

Отношение $\varphi_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi_2,\ M\rangle$ на том же M (пример 23) является строгим (но не совершенным строгим) порядком на M. Соответствующий порядок (в интуитивном смысле) изображен на рис. 82.

25) Пусть $\varphi_3 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \{\langle a,\ b\rangle\},\ \{a,\ b,\ c,\ d\}\rangle$. Отношение φ_3 — строгий (но не совершенный строгий) порядок на

---

*) Этот порядок обычно называют *„частичным порядком"*.

$M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, b, c, d\}$ (рис. 83). Если $A \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, b\}$, то $(\varphi_3)_A$ — совершенный строгий порядок на A (рис. 84). Отношение $(\varphi_3)_{\{a\}} = \langle \varnothing, \{a\} \rangle$ является совершенным строгим порядком на $\{a\}$.

26) Пусть, наконец, $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, b, c, d\}$, $\Phi_4 \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle\}$ и $\varphi_4 \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi_4, M \rangle$. Отношение φ_4 является

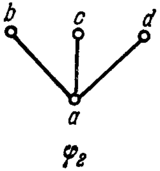


Рис. 82.

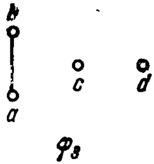


Рис. 83.

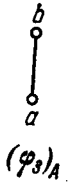


Рис. 84.

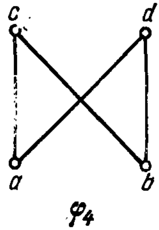


Рис. 85.

строгим (но не совершенным строгим) порядком на M (рис. 85).

Одним из важнейших способов образования отношений порядка является создание их из отношений квазипорядка.

Отношение φ называется *отношением квазипорядка* (или *квазипорядком*), если оно транзитивно и рефлексивно.

Из доказанного в § 2 вытекает, что *инверсия* φ^{-1} отношения квазипорядка φ и *сужение* φ_A отношения квазипорядка $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ на любое подмножество A множества M также являются отношениями квазипорядка.

Примеры: 27) Любое отношение эквивалентности на произвольном множестве M (в частности, отношение равенства E_M) является отношением квазипорядка.

28) Любое отношение нестрогого порядка на произвольном множестве M (в частности, отношение равенства E_M) является отношением квазипорядка.

29) Отношение

$$x\varphi_1 y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} y \text{ делится на } x \qquad (x, y \in \mathbf{C})$$

является квазипорядком на $\mathbf{C}$ *). В отличие от отношения делимости на $\mathbf{N}$ (пример 11), оно не антисимметрично $[3\varphi_1(-3) \,\&\, (-3)\varphi_1 3 \,\&\, 3 \neq -3]$ и поэтому не является отношением нестрогого порядка.

30) Отношение на множестве точек координатной плоскости

$$P\varphi_2 Q \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} P \text{ не дальше от начала координат, чем } Q,$$

является квазипорядком, но, в отличие от отношения из примера 12, не антисимметрично.

31) Отношение

$$A\varphi_3 B \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} A \text{ не старше, чем } B$$

на множестве людей Земли является квазипорядком, но, в отличие от отношения из примера 13, не антисимметрично.

32) Отношение

$$A\varphi_4 B \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} A \text{ не старше курсом, чем } B$$

на множестве студентов факультета является квазипорядком, но не является ни отношением эквивалентности, ни отношением нестрогого порядка.

Теорема (об отношении эквивалентности, индуцированном отношением квазипорядка). *Если φ — отношение квазипорядка на множестве M, то отношение φ^*:*

$$x\varphi^* y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x\varphi y \,\&\, y\varphi x \tag{67}$$

на множестве M является отношением эквивалентности, причем

$$(\forall A \in M/\varphi^*)\,(\forall B \in M/\varphi^*)\,\{(\exists x \in A)\,(\exists y \in B)\,[x\varphi y] \rightleftarrows (\forall x \in A)\,(\forall y \in B)\,[x\varphi y]\}. \tag{68}$$

---

*) Для целых чисел a и b

$$b \text{ делится на } a \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (\exists t \in \mathbf{C})\,[b = a \cdot t]$$

Поэтому, в частности, 0 делится на 0.

Доказательство. Если $M=\varnothing$, то $\varphi=\varphi^*=O_{\varnothing}$, $M/\varphi^*=\varnothing$, и теорема верна тривиальным образом (см., в частности, (5)* из § 3 гл. IV). Пусть $M\neq\varnothing$. Если $a\in M$, то, в силу рефлексивности отношения φ,

$$a\varphi a$$

$$a\varphi a \,\&\, a\varphi a$$

$$a\varphi^* a$$

φ^* рефлексивно. Пусть теперь $a\in M$, $b\in M$ и

$$a\varphi^* b.$$

Тогда из (67)

$$a\varphi b \,\&\, b\varphi a,$$

$$b\varphi a \,\&\, a\varphi b,$$

$$b\varphi^* a.$$

φ^* симметрично. Пусть, далее, $a\in M$, $b\in M$, $c\in M$ и

$$a\varphi^* b \,\&\, b\varphi^* c.$$

Из $a\varphi^* b$ и (67)

$$a\varphi b \,\&\, b\varphi a.$$

Из $b\varphi^* c$ и (67)

$$b\varphi c \,\&\, c\varphi b.$$

Из $a\varphi b$ и $b\varphi c$, в силу транзитивности отношения φ,

$$a\varphi c. \tag{69}$$

Из $c\varphi b$ и $b\varphi a$, опять в силу транзитивности φ,

$$c\varphi a. \tag{70}$$

Из (69), (70) и (67)

$$a\varphi^* c.$$

φ^* транзитивно. Докажем (68). Пусть $A\in M/\varphi^*$ и $B\in M/\varphi^*$. Нам надо доказать

$$(\exists x\in A)\,(\exists y\in B)\,[x\varphi y] \rightleftarrows (\forall x\in A)\,(\forall y\in B)\,[x\varphi y]. \tag{71}$$

Импликация

$$(\forall x\in A)\,(\forall y\in B)\,[x\varphi y] \longrightarrow (\exists x\in A)\,(\exists y\in B)\,[x\varphi y] \tag{72}$$

верна тривиальным образом, так как по определению разбиения $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$. Докажем „обратную импликацию":

$$(\exists x \in A)(\exists y \in B)[x\varphi y] \to (\forall x \in A)(\forall y \in B)[x\varphi y]. \quad (73)$$

Пусть

$$(\exists x \in A)(\exists y \in B)[x\varphi y]. \quad (74)$$

Обозначим какие-нибудь элементы из A и B, находящиеся в отношении φ (такие элементы существуют по (74)), через a_1 и b_1. Итак,

$$a_1 \in A, \quad (75)$$

$$b_1 \in B, \quad (76)$$

$$a_1 \varphi b_1. \quad (77)$$

Докажем

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)[x\varphi y]. \quad (78)$$

Тем самым (73) будет доказано. Возьмем два произвольных элемента a_2, b_2 соответственно, из A и B.

$$a_2 \in A, \quad (79)$$

$$b_2 \in B. \quad (80)$$

Докажем

$$a_2 \varphi b_2. \quad (81)$$

Из (79) и (75)

$$a_2 \varphi^* a_1. \quad (82)$$

Из (82) и (67)

$$a_2 \varphi a_1. \quad (83)$$

Из (76) и (80)

$$b_1 \varphi^* b_2. \quad (84)$$

Из (84) и (67)

$$b_1 \varphi b_2. \quad (85)$$

Из (83), (77) и (85), в силу транзитивности отношения φ, вытекает (81). (78), а с ним и (73) доказано. Из (72) и (73) следует (71). (68) доказано. Теорема полностью доказана.

Отношение φ^*, определенное равносильностью (67) из отношения квазипорядка φ, называется *отношением эквивалентности, индуцированным квазипорядком* φ.

Теорема (об отношении порядка, индуцированном отношением квазипорядка). *Если φ — отношение квазипорядка на множестве M, то отношение φ^{**}:*

$$A\varphi^{**}B \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (\exists x \in A)(\exists y \in B)[x\varphi y] \tag{86}$$

на фактормножестве M/φ^* является отношением нестрогого порядка.

В силу (68) определение (86) равносильно определению

$$A\varphi^{**}B \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (\forall x \in A)(\forall y \in B)[x\varphi y]. \tag{87}$$

Доказательство. Если $M = \varnothing$, то $\varphi = \varphi^* = O_\varnothing$, $M/\varphi^* = \varnothing$, $\varphi^{**} = O_\varnothing$ — теорема верна тривиальным образом. Пусть $M \neq \varnothing$. Фиксируем $A \in M/\varphi^*$. По определению разбиения $A \neq \varnothing$. Возьмем произвольный элемент

$$a \in A. \tag{88}$$

В силу рефлексивности отношения φ

$$a\varphi a. \tag{89}$$

Из (88), (89) и (86)

$$A\varphi^{**}A.$$

Итак, φ^{**} рефлексивно. Фиксируем теперь $A \in M/\varphi^*$, $B \in M/\varphi^*$, $C \in M/\varphi^*$ и пусть

$$A\varphi^{**}B, \tag{90}$$

$$B\varphi^{**}C. \tag{91}$$

Из (90) и (86)

$$(\exists x \in A)(\exists y \in B)[x\varphi y]. \tag{92}$$

Обозначим какие-нибудь элементы из A и B, находящиеся в отношении φ (такие элементы существуют в силу (92)), через a и b. Итак,

$$a \in A, \tag{93}$$

$$b \in B, \tag{94}$$

$$a\varphi b. \tag{95}$$

По определению разбиения $C \neq \varnothing$. Возьмем произвольный элемент

$$c \in C. \qquad (96)$$

Из (94), (96), (91) и (87)

$$b\varphi c. \qquad (97)$$

Из (95) и (97), в силу транзитивности отношения φ,

$$a\varphi c. \qquad (98)$$

Из (93), (96), (98) и (86)

$$A\varphi^{**}C.$$

Итак, φ^{**} транзитивно. Пусть, наконец, $A \in M/\varphi^*$, $B \in M/\varphi^*$,

$$A\varphi^{**}B \qquad (99)$$

и

$$B\varphi^{**}A. \qquad (100)$$

Докажем, что $A = B$. По определению разбиения $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$. Возьмем произвольные элементы:

$$a \in A, \qquad (101)$$

$$b \in B. \qquad (102)$$

Из (101), (102), (99) и (87)

$$a\varphi b. \qquad (103)$$

Из (102), (101), (100) и (87)

$$b\varphi a. \qquad (104)$$

Из (103), (104) и (67)

$$a\varphi^* b. \qquad (105)$$

Из (101) и (105)

$$b \in A. \qquad (106)$$

Из (102) и (106)

$$A \cap B \neq \varnothing.$$

Следовательно, по определению разбиения

$$A = B.$$

φ^{**} антисимметрично. Теорема доказана.

Отношение φ^{**}, определенное равносильностью (86) (или (87)) из отношения квазипорядка φ, называется *отношением* (нестрогого) *порядка, индуцированным квазипорядком* φ.

Замечание. *Отношение порядка φ^{**}, индуцированное отношением квазипорядка φ на множестве M, тогда и только тогда является связанным, когда связанно отношение* φ.

Пусть сначала φ связанно. Докажем, что тогда связанно и φ^{**}. Пусть $A \in M/\varphi^*$, $B \in M/\varphi^*$ и

$$A \neq B. \tag{107}$$

По определению разбиения $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$. Возьмем произвольные элементы

$$a \in A, \tag{108}$$

$$b \in B. \tag{109}$$

Из (107) и определения разбиения

$$A \cap B = \varnothing. \tag{110}$$

Из (108), (109) и (110)

$$a \neq b. \tag{111}$$

В силу связанности отношения φ, из (111)

$$a\varphi b \vee b\varphi a.$$

Если $a\varphi b$, то из (108), (109) и (86) $A\varphi^{**}B$. Если $b\varphi a$, то из (109), (108) и (86) $B\varphi^{**}A$.

Пусть теперь связанно φ^{**}. Докажем, что тогда связанно и φ. Пусть $a \in M$, $b \in M$ и

$$a \neq b.$$

Обозначим класс фактормножества M/φ^*, которому принадлежит a, через A, класс, которому принадлежит b, через B. Итак,

$$a \in A, \tag{112}$$

$$b \in B. \tag{113}$$

Рассмотрим два случая: $A = B$ и $A \neq B$. Если $A = B$, то из (112) и (113)

$$a\varphi^* b, \tag{114}$$

а тогда из (114) и (67)

$$a\varphi b.$$

Пусть теперь

$$A \neq B. \tag{115}$$

Из (115) и связанности отношения φ^{**}

$$(A\varphi^{**}B) \vee (B\varphi^{**}A).$$

Если $A\varphi^{**}B$, то из (112), (113) и (87)

$$a\varphi b.$$

Если же $B\varphi^{**}A$, то из (113), (112) и (87)

$$b\varphi a.$$

Примеры: 33) Если φ — отношение эквивалентности на M, то $\varphi^* = \varphi$, $M/\varphi^* = M/\varphi$ и φ^{**} — отношение равенства на M/φ.

34) Если φ — отношение нестрогого порядка на M, то $\varphi^* = E_M$, M/φ^* — поэлементное разбиение множества M и

$$\{x\}\,\varphi^{**}\,\{y\} \rightleftarrows x\varphi y.$$

35) Пусть φ_1 — квазипорядок на $\mathbf{C}$ из примера 29. Тогда

$$x\varphi_1^* y \rightleftarrows |x| = |y|,$$

$$M/\varphi_1^* = \{\{0\},\ \{1,\ -1\},\ \{2,\ -2\},\ \{3,\ -3\},\ \ldots\},$$

$$(\forall x \in \mathbf{N})\,[\{x,\ -x\}\,\varphi_1^{**}\,\{0\}],$$

$$(\forall x \in \mathbf{N})\,(\forall y \in \mathbf{N})\,[\{x,\ -x\}\,\varphi_1^{**}\,\{y,\ -y\} \rightleftarrows y \text{ делится на } x].$$

36) Пусть φ_2 — квазипорядок на координатной плоскости из примера 30. Тогда

$$P\varphi_2^* Q \rightleftarrows P \text{ и } Q \text{ равноудалены от начала;}$$

M/φ_2^* — разбиение на концентрические окружности с центром в начале; φ_2^{**} — порядок на M/φ_2^*, соответствующий величине радиуса этих окружностей.

37) Пусть φ_3 — квазипорядок на множестве людей Земли из примера 31. Тогда

$$A\varphi_3^* B \rightleftarrows A \text{ и } B \text{ — одного возраста;}$$

M/φ_3^* — разбиение людей по возрастам; φ_3^{**} — порядок на M/φ_3^*, соответствующий „старости“ возраста.

38) Пусть φ_4 — квазипорядок на множестве студентов факультета из примера 32. Тогда φ_4^* — отношение „быть однокурсниками“, M/φ_4^* — разбиение по курсам, φ_4^{**} соответствует естественному порядку курсов.

39) Пусть M — произвольное множество, L — некоторое множество кортежей над M. Определим на M отношение φ следующим образом: положим $x\varphi y$ в том и только в том случае, когда замена *в любом* кортеже из L *любой* компоненты, равной x, на y снова приводит к кортежу из L. Если, например, $L \underset{\mathrm{Df}}{=} \varnothing$, то φ — полное отношение (тривиальным образом). Если для некоторого $s \geqslant 2$ $L = M^s$, то φ — снова полное отношение. Если $L \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\langle a,\ b,\ c\rangle\}$ и $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi,\ M\rangle$, то $\Phi = \Delta_{\{a,\, b,\, c\}} \cup [(M \setminus \{a,\ b,\ c\}) \times M]$. Легко видеть, что при любых M и L отношение φ является квазипорядком на M. Оно называется *отношением квазипорядка, индуцированным множеством кортежей* L.

40) Применим конструкцию, указанную в предыдущем примере, для одного специально лингвистического построения *). Пусть M — множество слов русского языка **). Элементы множества M^∞ мы, естественно, будем называть *фразами*. Например, кортеж „эта юноша побежать“ является фразой. Возьмем в качестве подмножества L множество *грамматически правильных* фраз (***допустим***, что понятно, что это означает). Например, фразы „Я вчера клевал салфеткой“ и „Колеса светят широко“ принадлежат L, а фразы „Колеса светит широко“ и „Эта юноша молодая“ не принадлежат L ***). Рассмотрим

---

*) Далее следует фактически изложение части статьи Р. Л. Добрушина [6].

**) Прн практическом применении определение множества M должно быть уточнено; не ясно, например, включать ли в M собственные нмена, вульгаризмы, устаревшие слова н т. п., какие слова считать устаревшими и т. д. Заметим лишь, что слова „маму“, „маме“, „мамой“ и т. д. мы счнтаем различными.

***) Разумеется, приведенные примеры еще не определяют множества L. Задача реального выделения множества L (т. е. задача уточнення понятня „грамматической правильности“) является самой трудной частью практнческого применения развиваемой здесь теорни.

отношение квазипорядка φ, индуцированное на M этим множеством. Легко видеть, что

$$„папа“ \ \varphi \ „конь“, \tag{116}$$

так как замена в любой грамматически правильной фразе слова „папа“ на слово „конь“ не меняет грамматической правильности фразы. Аналогично, легко видеть, что

$$„конь“ \ \varphi \ „папа“, \tag{117}$$
$$„папа“ \ \varphi \ „стол“,$$
$$„конь“ \ \varphi \ „стол“,$$
$$„папу“ \ \varphi \ „коня“,$$
$$„стола“ \ \varphi \ „коня“.$$

В то же время

$$\neg\,[„стол“ \ \varphi \ „конь“], \tag{118}$$

так как если в грамматически правильной фразе „Я вижу стол“ слово „стол“ заменить на слово „конь“, получится грамматически неправильная фраза „Я вижу конь“. Аналогично, легко видеть, что

$$\neg\,[„стол“ \ \varphi \ „папа“], \tag{119}$$
$$\neg\,[„коня“ \ \varphi \ „папу“], \tag{120}$$
$$\neg\,[„коня“ \ \varphi \ „стола“]. \tag{121}$$

Слова, находящиеся в отношении φ^*, естественно называть *грамматическими синонимами*, так как замена в грамматически правильной фразе одного такого слова на другое не влияет на грамматическую правильность (на, так сказать, „грамматический смысл“) фразы. Из (116) и (117) следует

$$„папа“ \ \varphi^* \ „конь“.$$

Из (118)—(121) следует

$$\neg\,[„стол“ \ \varphi^* \ „конь“],$$
$$\neg\,[„папа“ \ \varphi^* \ „стол“],$$
$$\neg\,[„папу“ \ \varphi^* \ „коня“],$$
$$\neg\,[„стола“ \ \varphi^* \ „коня“].$$

Множество M конечно. Поэтому конечно и фактормножество M/φ^*. Представим себе фактормножество M/φ^* нарисованным на бумаге. Элементы фактормножества M/φ^* мы будем представлять себе кружками, в которых написаны слова, входящие в изображаемый класс. Если $A \in M/\varphi^*$, $B \in M/\varphi^*$ и $A \neq B$, то

$$A\varphi^{**}B \rightleftarrows (\forall x \in A)(\forall y \in B)[x\varphi y] \& (\exists x \in A)(\exists y \in B) \urcorner [y\varphi x].$$

Условимся изображать на бумаге класс A ниже класса B,

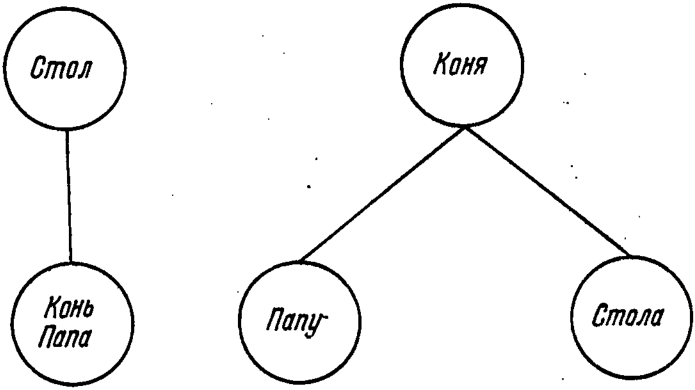


Рис. 86.

если $A\varphi^{**}B$ (и $A \neq B$). Условимся соединять черточкой такие два класса A и B, что

$$A \neq B \& A\varphi^{**}B \& \urcorner (\exists X)[X \neq A \& X \neq B \& A\varphi^{**}X \& X\varphi^{**}B].$$

Полученный рисунок называется *деревом грамматической синонимии* [1]). Кусочек дерева грамматической синонимии изображен на рис. 86. Разумеется, „законность" проведенных на рис. 86 черточек требует еще экспериментально-лингвистического обоснования.

ЗАДАЧИ

1. Доказать или опровергнуть, что

a) если φ — нестрогий порядок, то $\overline{\varphi}$ — строгий порядок;

b) если φ — строгий порядок, то $\overline{\varphi}$ — нестрогий порядок;

c) если φ — совершенный нестрогий порядок, то $\bar{\varphi}$ — совершенный строгий порядок;

d) если φ — совершенный строгий порядок, то $\bar{\varphi}$ — совершенный нестрогий порядок.

2. Перечислить отношения строгого порядка на $M \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a, b, c\}$.

3. Придумать такое отношение совершенного строгого порядка φ на **K**, которое обладает следующими двумя свойствами:

1) $(\forall x \in \mathbf{D}) (\forall y \in \mathbf{D}) [x < y \rightleftarrows x\varphi y]$;

2) $(\forall x \in \mathbf{K}) (\forall y \in \mathbf{K}) (\forall z \in \mathbf{K}) [x\varphi y \rightarrow (x+z)\, \varphi\, (y+z)]$.

4. Придумать такое отношение совершенного строгого порядка φ на **K**, которое обладает следующими двумя свойствами:

1) $(\forall x \in \mathbf{D}) (\forall y \in \mathbf{D}) [x < y \rightleftarrows x\varphi y]$;

2) $(\forall x \in \mathbf{K})(\forall y \in \mathbf{K}) (\forall z \in \mathbf{K}) [x\varphi y \,\&\, 0\varphi z \rightarrow (xz)\, \varphi\, (yz)]$.

5. Доказать или опровергнуть, что если ψ — отношение совершенного строгого порядка на непустом множестве A, то существует такой элемент $q \in A$, что

$$\neg\, (\exists x \in A) [x\psi q]. \qquad (122)$$

6. Доказать или опровергнуть, что если ψ — отношение совершенного строгого порядка на непустом множестве A, то не может существовать двух различных элементов множества A, обладающих свойством (122).

7. Доказать или опровергнуть, что если ψ — отношение строгого порядка на непустом конечном множестве A, то существует такой элемент $q \in A$, который обладает свойством (122).

8. Доказать или опровергнуть, что если ψ — отношение строгого порядка на непустом конечном множестве A, то не может существовать двух различных элементов множества A, обладающих свойством (122).

9. Доказать, что если φ — отношение квазипорядка на M, то отношение $\tilde{\varphi}$:

$$x\tilde{\varphi}y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} x\varphi y \,\&\, \neg\, (y\varphi x)$$

на множестве M является отношением строгого порядка.

10. Пусть $\mathfrak{F}$ — множество непустых конечных подмножеств множества $\mathbf{N}$. Определим на $\mathfrak{F}$ отношение φ: $A\varphi B$, если сумма элементов множества A не превосходит суммы элементов множества B.

a) Доказать, что φ — квазипорядок.

b) „Увидеть“, описать, найти φ^*, $\mathfrak{F}/\varphi^*$, φ^{**}.

c) Доказать, что элементы фактормножества $\mathfrak{F}/\varphi^*$ являются конечными множествами.

d) Получить отсюда, что $\mathfrak{F}$ — счетное множество (ср. с задачей 11 к § 3 гл. V).

11. Пусть M — произвольное множество. Определим на $\mathfrak{P}(M)$ отношение φ: $A\varphi B$, если существует инъективное отображение типа $A \to B$.

a) Доказать, что φ — квазипорядок.

b)* Доказать, что $A \sim B \rightleftarrows A\varphi^* B$ (*теорема Кантора — Бернштейна*).

12. Пусть

$$x\varphi y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} \sin x \leqslant \sin y \qquad (x,\ y \in \mathbf{D}).$$

a) Доказать, что φ — квазипорядок.

b) Найти φ^*, M/φ^*, φ^{**}.

13. Пусть

$$x\varphi y \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (x > 1) \to (y > 1) \qquad (x,\ y \in \mathbf{D}).$$

a) Доказать, что φ — квазипорядок.

b) Найти φ^*, M/φ^*, φ^{**}.

14. Пусть f — отображение множества X в Y, μ — отношение совершенного нестрогого порядка на множестве Y,

$$x_1\varphi x_2 \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} f(x_1)\,\mu f(x_2)\ (x_1,\ x_2 \in X).$$

a) Составить анкету (задача 4 к § 2) отношения φ.

b) Если φ — квазипорядок, найти φ^*, M/φ^*, φ^{**}.

c) Что нового можно сказать об анкете отношения φ, если к f добавлять те или иные основные свойства?

Б. НЕКОТОРЫЕ «ШКОЛЬНЫЕ» ТЕРМИНЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ *)

§ 1. Числовые неравенства

Для действительных чисел каким-то образом определяется отношение „меньше": $a < b$. Я не буду сейчас напоминать или уточнять определение этого отношения, тем более, что предварительно мне пришлось бы уточнить определение действительного числа, чего я сейчас не хочу делать. Что касается определения действительного числа, то мне достаточно в этой книге того, быть может, несколько расплывчатого представления об этом понятии, которое читатель вынес из средней школы. Про отношение „меньше" мне нужно, чтобы читатель знал следующее. Каким-то образом дается определение, из которого для любых двух действительных чисел a и b вытекает, находятся они или не находятся в отношении, описанном в определении. Если действительные числа a и b находятся в указанном отношении, то мы будем говорить, что *a меньше b*, и писать: $a < b$. Если $a < b$, то мы будем писать также $b > a$ и говорить „*b больше a*". Из упомянутого (но не сформулированного) определения вытекают шесть нижеуказанных свойств, которые мы будем называть *основными свойствами числовых неравенств*:

1) *Для любого a не верно, что $a < a$.*

2) *Для любых a и b : если $a \neq b$, то $a < b$ или $a > b$.*

3) *Для любых a, b и c: если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.*

4) *Для любых a, b и c: если $a < b$, то $a + c < b + c$.*

5) *Для любых a, b и c: если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$.*

6) *Для любого a существует такое натуральное число n, что $n > a$.*

---

*) Раздел Б написан так, чтобы его можно было читать сразу после гл. I раздела А. Поэтому в нем не используются, в частности, понятия и обозначения гл. II—IV раздела А.

Как написано выше, эти шесть утверждений вытекают из определения отношения „меньше“ *), все они могут быть доказаны. Мы, не желая в этой книжке давать определение понятия „меньше“, примем эти свойства без доказательства. Зато все остальные свойства числовых неравенств могут быть выведены из этих шести основных свойств уже без привлечения определения. Сейчас я приведу несколько примеров доказательства *производных свойств*, а пока замечу лишь, что всюду дальше *доказать* какое-нибудь свойство числовых неравенств **) означает *вывести из основных свойств*.

Прежде всего, $a < b$ и $a = b$ *не совместимы*, так как, заменив в неравенстве $a < b$ справа b на равное ему a, получаем противоречие со свойством 1.

Аналогично при помощи свойств 3, 1 доказывается, что *не совместимы* $a < b$ и $a > b$.

Таким образом, мы получаем усиление свойства 2: *Для любых a и b имеет место одно и* **только одно** *из трех: $a < b$ или $a = b$ или $a > b$.*

Докажем теперь аналог свойства 4.

7) *Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$* ***).

Пусть $a < b$ и $c < d$. По свойству 4 $a + c < b + c$ и $c + b < d + b$. Но $c + b = b + c$, $d + b = b + d$. Следовательно, $b + c < b + d$. По свойству 3 $a + c < b + d$.

Докажем, что *если $a < b$, то $-a > -b$.* В самом деле. Если $-a = -b$, то (умножаем равные числа, т. е. одно и то же число, на -1) $a = b$, что не совместимо по доказанному с $a < b$. Если же $-a < -b$, то из $a < b$ и $-a < -b$ при помощи свойства 7 (производного) получаем $0 < 0$. Противоречие со свойством 1.

Докажем аналог свойства 5.

8) *Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$.*

$a < b$. $c < 0$, значит, $-c > -0$, но $-0 = 0$, так что $-c > 0$. По свойству 5 $-ac < -bc$, откуда, в силу только что доказанного, $ac > bc$.

---

*) Для доказательства свойств 4 и 5 нужно, разумеется, привлечь также определения сложения и, соответственно, умножения действительных чисел.

**) Т. е. неравенств, связывающих числа. Неравенства, содержащие переменные, будут изучаться ниже (§ 6).

***) Слова „для любых“ здесь и в аналогичных случаях будем чаще всего подразумевать.

Аналогично могут быть доказаны (доказательства должен проделать читатель) и другие производные свойства:

9) *Если* $a < b$ *и* $c > d$, *то* $a - c < b - d$.

10) *Если* $a > b$, $b > 0$ *и* $c > d$, $d > 0$, *то* $ac > bd$.

11) *Если* $a > b$, $b > 0$ *и* n — *любое натуральное число, то* $a^n > b^n$.

12) *Если* $a > b$, $b > 0$, *то* $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Разумеется, список производных свойств можно продолжать неограниченно — ни о какой его полноте не может быть и речи. Здесь выписаны лишь некоторые, наиболее важные производные свойства. Если же читателю в дальнейшем понадобится еще какое-нибудь свойство числовых неравенств, ему предоставляется полное право, *доказав это свойство*, пользоваться им.

Условимся „составное“ утверждение вида „$a < b$ и $b < c$“ записывать более сжато: $a < b < c$. Разумеется, из только что принятого соглашения никак не вытекает запись утверждения „$a < b$ и $b > c$“ в виде $a < b > c$.

Очень полезным является следующее отношение. Условимся писать: $a \leqslant b$ и говорить, что *a меньше или равно b*, если $a < b$ или $a = b$. Таким образом, истинными являются утверждения: $3 \leqslant 3$, $3 \leqslant 5$, для любого x $\sin x \leqslant 1$, для любого x $\sin x \leqslant 2$ и ложными — утверждения: $3 \leqslant 2$ для любого x $\sin x \leqslant {}^1/_2$. Легко видеть, что утверждение $a \leqslant b$ равносильно утверждению: не верно, что $a > b$. Поэтому утверждение $a \leqslant b$ читается часто также: *a не больше b* или *a не превосходит b*. Эти синонимические чтения тем более приятны, что более распространенное в математике чтение „меньше или равно“ плохо совмещается с правилами русской грамматики. Это не заметно, когда знак $\leqslant$ стоит между словами, не имеющими падежных окончаний. Например, $a \leqslant b$ без труда читается как «„A“ меньше или равно „бэ“». Но, имея в виду, что $2 < 3$ читается как «„два“ меньше „трех“», а $2 = 3$ читается как «„два“ равно „трем“», не ясно, как надо читать $2 \leqslant 3$: «„два“ меньше или равно „трем“» или «„два“ меньше или равно „трех“».

Вышеуказанные (основные и производные) свойства отношения $<$ переносятся (с некоторыми изменениями) как на неравенства, содержащие только знак $\leqslant$, так и на неравенства, содержащие оба знака: $<$ и $\leqslant$.

1′) *Для любого* a : $a \leqslant a$.

2′) *Для любых* a *и* b : $a \leqslant b$ *или* $a > b$.

3′) *Для любых* a, b *и* c : *если* $a \leqslant b$ *и* $b \leqslant c$, *то* $a \leqslant c$.

4′) *Для любых* a, b *и* c : *если* $a \leqslant b$, *то* $a + c \leqslant b + c$.

5′) *Для любых* a, b *и* c : *если* $a \leqslant b$ *и* $c > 0$, *то* $ac \leqslant bc$.

Свойство 6 разумного и полезного аналога, по-видимому, не имеет. Аналоги остальных свойств пишутся естественным образом. Напишем примеры „смешанных“ свойств.

3″) *Если* $a \leqslant b$ *и* $b < c$, *то* $a < c$.

3‴) *Если* $a < b$ *и* $b \leqslant c$, *то* $a < c$.

Заметим, что наряду со свойством, например, 3″ верно также и более слабое свойство:

Если $a \leqslant b$ *и* $b < c$, *то* $a \leqslant c$.

Любое из этих свойств доказывается устранением, элиминацией, исходя из определения, символа $\leqslant$.

Докажем, например, свойство 5′. Пусть $a \leqslant b$ *и* $c > 0$. По определению отношения $\leqslant$, $a < b$ или $a = b$. Если $a < b$, то по свойству 5 $ac < bc$ и, следовательно, $ac \leqslant bc$. Если $a = b$, то $ac = bc$ и, значит, снова $ac \leqslant bc$.

Если $a \leqslant b$, то мы будем писать также $b \geqslant a$ и говорить: *b больше или равно a*. Утверждение вида „$a \leqslant b$ и $b \leqslant c$“ мы будем также записывать короче: $a \leqslant b \leqslant c$.

ЗАДАЧИ

1. Сформулировать и доказать какое-нибудь свойство о „делении числовых неравенств“, аналогичное свойству 10.

2. Из свойства 5 очевидным образом вытекает свойство

5а) *Если* $a > 0$ *и* $b > 0$, *то* $ab > 0$.

Вывести свойство 5 из свойств 4 и 5а. Следовательно, свойство 5а может заменить свойство 5 в списке основных свойств.

3. Доказать, что $1 > 0$. (При обычных определениях понятия „меньше“ неравенство $1 > 0$ верно прямо по определению. Как указано в тексте параграфа, *доказать* неравенство $1 > 0$ — это значит *вывести его из основных свойств*.)

4. Доказать, что если $a > 0$, то $\frac{1}{a} > 0$.

5. Доказать, что имеет место свойство

6а) *Для любого* $a > 0$ *и для любого* b *существует такое натуральное число* n, *что* $na > b$.

6. Доказать, что из свойств 1—5 и 6а вытекает свойство 6[1]).

7. Доказать, что если $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$.

§ 2. Абсолютная величина

Абсолютной величиной числа*) a называется само число a, если $a \geqslant 0$, и число $-a$, если $a < 0$.

$$|a| \underset{\mathrm{Df}}{=} \begin{cases} a & a \geqslant 0 \\ -a & a < 0. \end{cases}$$

Укажем наиболее важные свойства абсолютной величины:

1) $$|-a| = |a|,$$

2) $$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,$$

3) $$|a| - |b| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|,$$

4) $$|a| - |b| \leqslant |a-b| \leqslant |a| + |b|,$$

5) $$|ab| = |a| \cdot |b|,$$

6) $$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Любое из этих утверждений (как и вообще любое свойство абсолютной величины) может быть доказано „тупым" перебором, получающимся элиминацией знака абсолютной величины.

Докажем для примера, что $|a+b| \leqslant |a| + |b|$. Очевидно, каковы бы ни были a и b, имеет место один (и толь-

	a	b	$a+b$		a	b	$a+b$
1	$\geqslant 0$	$\geqslant 0$	$\geqslant 0$	5	<0	$\geqslant 0$	$\geqslant 0$
2	$\geqslant 0$	$\geqslant 0$	<0	6	<0	$\geqslant 0$	<0
3	$\geqslant 0$	<0	$\geqslant 0$	7	<0	<0	$\geqslant 0$
4	$\geqslant 0$	<0	<0	8	<0	<0	<0

*) Всюду далее, где не оговорено противное, под „числом" подразумевается „действительное число".

ко один) из восьми, указанных в таблице, случаев. В первом случае $|a+b|=a+b$, $|a|=a$, $|b|=b$ и, следовательно, $|a+b|\leqslant|a|+|b|$. Второй случай не возможен, так как из $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$ следует $a+b\geqslant 0$. В третьем случае $|a+b|=a+b$, $|a|=a$, $|b|=-b$. Но $b<0$ и, следовательно, $-b>0$. Отсюда $b\leqslant -b$ и $a+b\leqslant a-b$. Это и есть нужное неравенство, так как $a+b=|a+b|$, $a-b=a+(-b)=|a|+|b|$. В четвертом случае $|a|=a$, $|b|=-b$, $|a+b|=-(a+b)$. Нужное неравенство $-(a+b)\leqslant a+(-b)$, или $-a-b\leqslant a-b$, следует из того, что при $a\geqslant 0$ $-a\leqslant a$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Сказанное выше отнюдь не означает, что как доказанное неравенство, так и любое другое свойство абсолютной величины может быть доказано только перебором. Перебор хорош тем, что его можно включать всегда и сразу, почти не задумываясь. Поэтому он и назван выше „тупым“ перебором. Но, разумеется, в каждом индивидуальном случае может существовать доказательство, быстрее приводящее к цели.

Например, гораздо более изящным доказательством неравенства $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ является, очевидно, следующее доказательство. В силу свойства 2 абсолютной величины $a\leqslant|a|$ и $b\leqslant|b|$. Следовательно, $a+b\leqslant|a|+|b|$. В силу того же свойства $-|a|\leqslant a$ и $-|b|\leqslant b$. Следовательно, $-|a|-|b|\leqslant a+b$. Но $-|a|-|b|=-(|a|+|b|)$. Итак, $-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$. В силу результата задачи 3b (см. ниже) *) отсюда вытекает нужное неравенство.

Заметим еще, что из свойства 1 следует, что

$$|a-b|=|b-a|.$$

Из свойства 2 следует, что

$$a\leqslant|a| \quad \text{и} \quad -a\leqslant|a|.$$

Правая часть свойства 3 индукцией легко обобщается на любое число слагаемых

$$|a_1+a_2+\ldots+a_k|\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_k|.$$

---

*) Доказательство в задаче 3, по-видимому, тоже потребует перебора, но в этом переборе будет лишь два случая.

Из свойства 4 $|a|-|b| \leqslant |a-b|$ и $-(|a|-|b|) = |b|-|a| \leqslant |b-a| = |a-b|$. Но $||a|-|b||$ равно либо $|a|-|b|$, либо $-(|a|-|b|)$. Следовательно,

$$||a|-|b|| \leqslant |a-b|.$$

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что число $|a-b|$ равно расстоянию между точками с абсциссами a и b на числовой оси.

2. Доказать, что абсцисса середины отрезка числовой оси, концы которого имеют абсциссы a и b, равна $\frac{a+b}{2}$. (Указание. Воспользоваться понятиями и методами этого параграфа.)

3. Доказать, что a) $|a| < b \rightleftarrows -b < a < b$,

b) $|a| \leqslant b \rightleftarrows -b \leqslant a \leqslant b$.

§ 3. Корни. Показатели степени

Понятие показателя степени, как известно, последовательно обобщается.

Сначала оно определяется для $n=2, 3, 4, \ldots$ А именно, для любого действительного a и для $n=2, 3, 4, \ldots$ по определению

$$a^n \underset{\mathrm{Df}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \tag{1}$$

Затем специальным определением понятие показателя вводится для $n=1$. Для любого действительного a полагают

$$a^1 \underset{\mathrm{Df}}{=} a. \tag{2}$$

Таким образом, на этом этапе понятие показателя оказывается определенным для любого натурального n.

Еще одно определение вводится для $n=0$. Для любого a, отличного от 0, полагают

$$a^0 \underset{\mathrm{Df}}{=} 1. \tag{3}$$

Равенство (3) является определением и не нуждается ни в каком доказательстве. Можно было, разумеется, принять и любое другое определение, например, положить $a^0 = 3$. Причины, по которым принято именно определение (3), достаточно хорошо известны. Они излагаются, например, в школьном учебнике А. П. Киселева „Алгебра“, ч. II. Показатель степени $n = 0$ определен, таким образом, только для чисел, отличных от 0. Выражению 0^0 никакого числового значения не придается — оно считается лишенным смысла.

Следующий шаг — обобщение понятия показателя степени на отрицательные целые n. Для любого $a \neq 0$ и для любого отрицательного целого n положим

$$a^n \underset{\text{Df}}{=} \frac{1}{a^{-n}}. \tag{4}$$

Так как n — отрицательное целое число, то $-n$ — натуральное число, и выражение, стоящее в правой части равенства (4), в силу предшествующих определений уже имеет смысл.

На этом этапе понятие показателя степени оказывается определенным для любого целого n. Для любых *целых* показателей и для любых действительных чисел, отличных от 0 (впрочем, очень часто, когда показатели степени отличны от 0, то в качестве a и b можно в нижеуказанных основных свойствах брать и 0), имеют место следующие пять основных свойств степеней:

1) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

2) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

3) $$(a^m)^n = a^{mn},$$

4) $$(ab)^n = a^n \cdot b^n,$$

5) $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Для того чтобы понятие показателя обобщить на рациональные (не целые) числа, нужно предварительно ввести понятие корня. Введение понятия корня опирается на следующую теорему, которую мы примем без доказательства:

Теорема. *Для любого натурального числа n и для любого положительного a существует такое число b, что $b^n = a$.*

При помощи этой теоремы легко доказываются следующие утверждения:

1) *Для любого четного натурального числа n и для любого положительного a существуют ровно два таких числа, n-я степень которых равна a. Эти два числа равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

Следовательно, одно из них положительно, другое отрицательно.

2) *Для любого нечетного натурального числа n и для любого положительного a существует единственное* *) *число, n-я степень которого равна a.*

Это число, очевидно, положительно.

3) *Для любого нечетного натурального числа n и для любого отрицательного a существует единственное число, n-я степень которого равна a.*

Это число, очевидно, отрицательно.

4) *Для любого четного натурального числа n и для любого отрицательного a не существует такого* (действительного!) *числа, n-я степень которого равна a.*

5) *Для любого натурального числа n существует единственное число, n-я степень которого равна* 0.

Таким числом является сам 0.

Введем теперь термин. Пусть n — натуральное число. Назовем (действительное) число b *корнем n-й степени из a*, если $b^n = a$. Таким образом, из предыдущих теорем следует, что для четного n и положительного a существуют два таких числа, которые имеют право называться корнем n-й степени из a. Эти два числа равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Одно из них положительно, другое отрицательно. Например, корнями второй степени из 4 являются 2 и —2. Подчеркиваем, что по нашему определению число —2 тоже является корнем второй

---

*) Оборот „существует единственное" выражает, разумеется, два утверждения: одно — о „существовании", другое — о „единственности".

степени из 4. Далее, из предыдущих теорем следует, что не существует корня четной степени из отрицательного числа („не существует корня“ — это, конечно, сокращение вместо „не существует числа, являющегося корнем“). Существует единственное число, являющееся корнем нечетной степени из положительного числа. Это число положительно. Существует единственный (отрицательный) корень нечетной степени из отрицательного числа. Например, -2 является корнем третьей степени из -8. И, наконец, существует единственный корень n-й степени из 0, а именно сам 0.

Введем, наконец, символ. Через $\sqrt[n]{a}$ мы обозначим: 1) для четного n и положительного a то **положительное** число, которое в n-й степени равно a; 2) для нечетного n и любого $a \neq 0$ то **единственное** число, которое в n-й степени равно a; 3) для любого натурального n и $a=0$ также то **единственное** число, n-я степень которого равна a[1]). Таким образом, $\sqrt[n]{0}=0$; $\sqrt[3]{8}=2$; $\sqrt[3]{-8}=-2$; $\sqrt{4}=2$ (как обычно, мы вместо $\sqrt[2]{a}$ пишем $\sqrt{a}$). По точному смыслу введенной нами символики утверждение $\sqrt{4}=-2$ является *неверным*, хотя, как указано выше, -2 (наряду с 2) является (дальше идет термин, а не символ) корнем квадратным (второй степени) из 4 *). Подчеркиваю, что всюду дальше мы, естественно, будем (без всяких напоминаний и оговорок) употреблять символ $\sqrt[n]{a}$ именно в том смысле, в котором мы его ввели. В частности, при любом n и при любом неотрицательном a

$$\sqrt[n]{a} \geqslant 0,$$

причем $\sqrt[n]{a}=0$ тогда и только тогда, когда $a=0$.

Заметим еще, что при четном n и отрицательном a выражение $\sqrt[n]{a}$ у нас не имеет смысла.

Необходимо остановиться еще иа одном не очень приятном вопросе. Как называется символ $\sqrt[n]{a}$? Как его читать? Было бы целесообразно называть его каким-то словом, отличным от слова „корень“ (например, словом

*) Заметим, что мы не ввели и не собираемся вводить термина „арифметический корень“. Мне кажется, что понятие арифметического корня по меньшей мере совершенно не нужно.

„радикал"). К сожалению, символ $\sqrt[n]{a}$ часто также называют „корнем n-й степени из a". Однако тогда возникает некоторая коллизия (столкновение) двух смыслов слова „корень". Число -2 является корнем квадратным из 4. Символ $\sqrt{4}$ является (называется) корнем квадратным из 4. Однако утверждение $\sqrt{4}=-2$ не верно. В этом случае только контекст позволяет различить, в каком из двух смыслов употребляется слово „корень".

Перечислим основные свойства корней.

1) $$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Прежде всего, почему верно это равенство? Ну, разумеется, просто по определению корня. Это равенство (почти) является символической записью высказанного ранее словесного определения символа $\sqrt[n]{a}$. Оно совершенно аналогично по смыслу равенствам $a^{\log_a b} = b$, $\sin(\arcsin x) = x$ и т. п. Однако, для каких n и a верно свойство 1? Не для всех, конечно. Во-первых, показателем корня n у нас могут быть только натуральные числа. Только для таких n мы определяли символ $\sqrt[n]{a}$. Но даже, если n — допустимое, все равно не при всех a верно свойство 1. А именно, при четном n и отрицательном a мы считаем равенство $(\sqrt[n]{a})^n = a$ не верным, так как при таких n и a часть выражения, стоящего слева (а именно, символ $\sqrt[n]{a}$), а следовательно, и все выражение не имеет смысла*). Тот факт, что выражение $\sqrt[n]{a}$ не всегда имеет смысл, будет постоянно ограничивать условия, при которых верно то или иное свойство корней. Итак, свойство 1 имеет место, во-первых, при любом четном n и любом неотрицательном a и, во-вторых, при любом нечетном n и любом a. Короче: свойство 1 имеет место при любых n и a, для которых символ $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл.

2) $$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & n \text{ — нечетное,} \\ |a| & n \text{ — четное.} \end{cases}$$

*) В более общей ситуации этот вопрос рассматривается в § 2 гл. IV раздела А и в § 1 гл. VI раздела А.

Это свойство имеет место при любых натуральных n и любых a. В частности, $\sqrt{a^2}=|a|$, $\sqrt{2^2}=|2|=2$, $\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$.

При некоторых условиях справедливы следующие свойства:

3) $$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$$

4) $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

5) $$a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}.$$

6) $$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}.$$

7) $$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nk]{a}.$$

8) $$(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}.$$

9) Если $a<b$, то $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

Сформулировать условия, при которых верно то или иное свойство корней, я предоставляю читателю. Легко видеть, что для каждого из свойств 3—9 достаточно потребовать, чтобы a и b были положительными, однако это условие можно ослабить. Свойство 9 естественно отнести к „производным“ свойствам неравенств. Добавлю еще одно свойство.

Если n — нечетное, то

10) $$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}.$$

Все эти свойства корней доказываются аналогично: обращением к определению. Разумеется, при доказательстве некоторого свойства можно также использовать и уже доказанные свойства.

Докажем для примера, что если $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[k]{a}$ имеют смысл, то $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$ (свойство 6). Итак, пусть $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[k]{a}$ имеют смысл. Докажем сначала, что число $\sqrt[n]{a}$ является корнем степени nk из числа a^k. (Этим свойство 6 будет *почти* доказано.) По определению термина „корень“ для этого надо доказать, что $(\sqrt[n]{a})^{nk}=a^k$. В силу свойства 3 степеней $(\sqrt[n]{a})^{nk}=[(\sqrt[n]{a})^n]^k$. Так как $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл, $(\sqrt[n]{a})^n=a$. Следовательно, $(\sqrt[n]{a})^{nk}=a^k$. Для нечетного nk (и любого a^k) и для $a^k=0$ (и любого nk) равенство $(\sqrt[n]{a})^{nk}=a^k$, в силу определения символа $\sqrt[nk]{a^k}$, равносильно свойству 6. Пусть теперь nk — четное, $a^k>0$. Тогда для окончания доказательства свойства 6 надо к равенству $(\sqrt[n]{a})^{nk}=a^k$ прибавить еще доказательство того, что $\sqrt[n]{a}>0$. Ведь в рассматриваемом случае символ $\sqrt[nk]{a^k}$ обозначает по определению то *положительное* число (а не просто „то число“), (nk)-я степень которого равна a^k. Так как $a^k>0$, $a\neq 0$. Допустим, что $a<0$. Так как $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл, n — нечетное. Но nk — четное. Следовательно, k — четное. Мы получили противоречие с осмысленностью $\sqrt[k]{a}$. Значит, $a>0$. Но тогда $\sqrt[n]{a}>0$.

Разумеется, весь перечень условий, при которых верно каждое из свойств, запоминать в готовом виде не стоит. Нужно иаучиться вспоминать-соображать, когда потребуется то или иное из свойств, соответствующие условия. Единственное, что полезно, пожалуй, запомнить: при положительных подкоренных выражениях (достаточное, но не необходимое условие!) все эти свойства верны.

Прежде чем переходить к определению рационального показателя, напомним, что любое рациональное число представимо (по определению) в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа и $q\neq 0$. Любое рациональное число бесконечно многими способами представимо в виде $\frac{p}{q}$, однако для любого рационального числа среди всех его представлений вида $\frac{p}{q}$ существует единственное представление (назовем его *каноническим*), в котором p и q взаимно просты и $q>0$.

Укажем для примера несколько рациональных чисел и — в скобках — их каноническое представление:

$$2\left(\frac{2}{1}\right),\ 0\left(\frac{0}{1}\right),\ -2\left(\frac{-2}{1}\right),\ \frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}=\frac{-2}{-4}=\ldots\left(\frac{1}{2}\right),$$
$$-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}=-\frac{2}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{2}{-4}=\ldots\left(\frac{-1}{2}\right).$$

Пусть α — рациональное число, $\frac{p}{q}$ — его каноническое представление. Тогда для любого a, для которого $\sqrt[q]{a^p}$ имеет смысл, положим

$$a^{\alpha} \underset{\mathrm{Df}}{=} \sqrt[q]{a^p}. \tag{5}$$

Например, $2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $(-2)^{\frac{2}{4}}$ по нашему определению *не имеет смысла* (!), так как каноническим представлением числа $\frac{2}{4}$ является $\frac{1}{2}$, а $\sqrt{-2}$ не имеет смысла;

$$2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2};\ (-2)^{\frac{2}{6}} = (-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2};$$

$$2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4};\ (-2)^{\frac{4}{6}} = (-2)^{\frac{2}{3}} =$$
$$= \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4};\ 0^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{0} = 0;$$

$$(-2)^{-\frac{2}{6}} = (-2)^{-\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{-1}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^{-1}} =$$
$$= \sqrt[3]{\frac{1}{-2}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}};$$

$0^{-\frac{1}{5}}$ по нашему определению не имеет смысла, так как каноническим представлением числа $-\frac{1}{5}$ является $\frac{-1}{5}$, а 0^{-1} не имеет смысла. Итак, у нас для любых чисел p, q, r, s и для любого a

$$\textit{если } \frac{p}{q} = \frac{r}{s},\ \textit{то } a^{\frac{p}{q}} \simeq a^{\frac{r}{s}}, \tag{6}$$

$$\textit{если } p \textit{ и } q > 0 \textit{ взаимно просты, то } a^{\frac{p}{q}} \simeq \sqrt[q]{a^p}, \tag{7}$$

но для произвольных целых чисел p и q нельзя утверждать, что для любого a $a^{\frac{p}{q}} \simeq \sqrt[q]{a^p}$. Например, $(-2)^{\frac{2}{6}} = -\sqrt[3]{2} < 0$, а $\sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4} > 0$. Еще пример: $(-2)^{\frac{2}{4}}$ не имеет смысла, а $\sqrt[4]{(-2)^2} = \sqrt[4]{4}$. Впрочем, легко видеть, что для любых целых чисел p и $q > 0$

$$\textit{если } a \geqslant 0,\ \textit{то } a^{\frac{p}{q}} \simeq \sqrt[q]{a^p}. \tag{8}$$

Легко доказать также, что для любого $a \neq 0$ и для любого (пока) рационального α

$$a^{-\alpha} \simeq \frac{1}{a^{\alpha}}. \tag{9}$$

Например, $(-2)^{-\frac{2}{6}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ и $\frac{1}{(-2)^{\frac{2}{6}}} = \frac{1}{-\sqrt[3]{2}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $(-2)^{-\left(-\frac{2}{6}\right)} = (-2)^{\frac{2}{6}} = -\sqrt[3]{2}$ и $\frac{1}{(-2)^{-\frac{2}{6}}} = \frac{1}{-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = -\sqrt[3]{2}$. С другой стороны, $0^{-\left(-\frac{1}{5}\right)} = 0^{\frac{1}{5}} = 0$, но $0^{-\frac{1}{5}}$, а следовательно, и $\frac{1}{0^{-\frac{1}{5}}}$ не имеют смысла.

Для положительных a и b и, теперь уже, для любых *рациональных* показателей остаются верными основные свойства степеней 1) —5). Доказываются все они элиминацией „дробных“ показателей, переходом к корням и использованием указанных выше свойств корней. Для произвольных (быть может, неположительных) a и b свойства степеней 1) —5), вообще говоря (без дополнительных оговорок), не верны. Например, $(-2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2)^{\frac{1}{6}}$ не определено, а $(-2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = (-2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$; $\frac{(-2)^{\frac{1}{2}}}{(-2)^{\frac{1}{6}}}$ не определено, а $(-2)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = (-2)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{2}$; $\frac{(-2)^{\frac{5}{6}}}{(-2)^{\frac{1}{6}}}$ не определено, а $(-2)^{\frac{5}{6}-\frac{1}{6}} = (-2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$; $\left((-2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[12]{4}$, а $(-2)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}} = (-2)^{\frac{1}{6}}$ не определено; $\left((-2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt{-2}\right)^{\frac{2}{3}}$ не определено, а $(-2)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = (-2)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{2}$; $[(-2)\cdot(-3)]^{\frac{1}{2}} =$

$= 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$, а $(-2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-3)^{\frac{1}{2}}$ не определено; $\left(\frac{-2}{-3}\right)^{\frac{1}{2}} =$
$= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, а $\frac{(-2)^{\frac{1}{2}}}{(-3)^{\frac{1}{2}}}$ не определено.

Остается последний (для нас) этап: определение степени с иррациональным показателем. Мы не будем давать здесь этого определения *) и ограничимся тем представлением об этом понятии, которое читатель вынес из средней школы. Например, достаточно хорошее интуитивное представление об этом понятии дает учебник А. П. Киселева „Алгебра“, ч. II. Заметим лишь, что a^{α} определяется, во-первых, при положительном a и любом иррациональном α и, во-вторых, при $a = 0$ и *положительном* иррациональном α. Иррациональная степень отрицательного числа считается у нас не имеющей смысла.

Теперь, когда мы считаем, что в нашем распоряжении имеется понятие степени с произвольным действительным показателем, отметим, что для произвольных положительных a и b и для произвольных действительных показателей верны основные свойства степеней 1) — 5) и (9). Доказывать это утверждение, не дав определения иррационального показателя, разумеется, нельзя.

§ 4. Уравнения

Выражение вида $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — числовые формы или числа, называется *равенством* **). Очевидно, каждое равенство является высказывательной формой или высказыванием. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — числа (а не формы), мы будем равенство $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ называть *числовым равенством*.

Равенство $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ называется *квазитождеством*, если при любом наборе значений переменных, на котором обе

---

*) Невозможно дать удовлетворительное определение этого понятия без построения строгой теории действительного числа — задача кропотливая и громоздкая.

**) Впрочем, термин „равенство“ часто используют и в более общем смысле, не требуя, чтобы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ были именно *числовыми* формами.

части равенства определены, формы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ обозначают одно и то же число. Равенство $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ называется *тождеством*, если при любом наборе значений переменных либо обе части равенства не определены, либо обе определены и обозначают одно и то же число. Очевидно, любое тождество является квазитождеством. Примерами квазитождеств, не являющихся тождествами, могут служить, с одной стороны, широко используемые в школьной практике равенства $(x^m)^n=x^{mn}$, $\left(\frac{x}{y}\right)^r=\frac{x^r}{y^r}$, $(\sqrt[n]{a})^n=$ $=a$, $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$, $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1$,

$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$, $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,

$\sin(\arcsin x)=x$ или совсем простые равенства $\frac{x}{x}=1$, $\frac{x^2-a^2}{x-a}=x+a$, с другой стороны, — такие „дикие" равенства, как $\lg(x+1)=\sqrt{-x^2}$ (обе части равенства определены только при $x=0$, причем $\lg(0+1)=\sqrt{-0^2}$) или $\lg x=\lg(-x)$ (обе части равенства не определены одновременно ни при одном x; равенство является квазитождеством тривиальным образом)[1]). Примерами тождеств могут служить равенства $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, $|x-y|=$ $=|y-x|$, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$,

$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$,

$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$, $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)=x$, $3\times 4=2\times 6$, $5=5$.

Равенство $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$ является тождеством. Если равенство $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ является тождеством (квазитождеством; квазитождеством, но не тождеством); то и равенство $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$ является тождеством (квазитождеством; квазитождеством, но не тождеством). Если равенства $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$ являются тождествами, то равенство $\mathfrak{A}=\mathfrak{C}$ тоже является тождеством. Но может случиться так, что равенства $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$ являются квазитождествами, а равенство $\mathfrak{A}=\mathfrak{C}$ не является квазитождеством. Например, равенства $\lg(x+1)=\sqrt{-x^2}$ и $\sqrt{-x^2}=2^x-1$ являются квазитождествами (но не тождествами), а равенство $\lg(x+1)=2^x-1$ не является квазитождеством, так как, например, при $x=1$ обе части этого равенства определены, но не равны. Поэтому при тождественных преобразованиях, а также при решении уравнений квазитождества, не являющиеся тождествами, надо использовать осторожно.

Легко видеть, что *числовые формы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *равносильны тогда и только тогда, когда равенство* $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ *является тождеством.*

Перейдем к понятию уравнения. Начнем, для простоты, со случая одной переменной. Равенство $\mathfrak{A}(x)=\mathfrak{B}(x)$, содержащее (хотя бы с одной стороны) x, мы будем называть *уравнением* (*относительно* x или *с одним неизвестным*), **если требуется найти** такие значения переменной x, которые превращают данное равенство в верное числовое равенство*). Понимать это надо буквально так, как написано: равенство $\mathfrak{A}(x)=\mathfrak{B}(x)$ является или не является уравнением в зависимости от того, требуется или не требуется найти вышеуказанные значения переменной x. Если кто-нибудь (преподаватель, задачник, Вы сами, читатель) поставил задачу „найти такие значения переменной x, что ...", равенство $\mathfrak{A}(x)=\mathfrak{B}(x)$ является (пока Вы решаете поставленную задачу) уравнением, в противном случае — не является. Уравнение — это, так сказать, „вопросительное математическое предложение". Сказанное в полной мере относится, в частности, и к таким равенствам, как, например, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$, $\sin(\arcsin x)=1$, $\frac{x}{x}=1$, $\lg(x+1)=\sqrt{-x^2}$, $\lg x=\lg(-x)$, $\sin x=2$, $0\cdot\lg x=0$, $x^2+1=0$. Когда ставится задача „найти такие значения переменной x, что..." (короче: „найти такие x, что..."), каждое из этих равенств послушно становится уравнением. Искомые значения

---

*) То есть такое равенство, в котором *обе части определены* (имеют смысл) и обозначают одно и то же число.

переменной x называются *корнями* *), или *решениями*, уравнения. *Решением* уравнения называют также процесс нахождения корней (решений). Если равенство $\mathfrak{A}(x) = \mathfrak{B}(x)$ является (объявлено) уравнением, переменную x называют также *неизвестным*. Решим указанные выше уравнения (эту фразу надо, разумеется, понимать как „слиток" из двух фраз: объявим указанные выше равенства уравнениями; решим их).

Примеры: 1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Как известно, корнем этого уравнения является любое (действительное) число.

2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Любое число, не представимое в виде $\frac{\pi}{2} + k\pi$ с целым k, является корнем. Числа $\frac{\pi}{2} + k\pi$ не являются корнями.

3) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$. Если $1+\cos x_0 \neq 0$, т. е. $x_0 \neq \pi + 2k\pi$, то x_0 является решением уравнения, так как

$$\frac{\sin x_0}{1+\cos x_0} = \frac{2\sin\frac{x_0}{2}\cos\frac{x_0}{2}}{2\cos^2\frac{x_0}{2}} = \frac{\sin\frac{x_0}{2}}{\cos\frac{x_0}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x_0}{2}.$$

При $x = \pi + 2k\pi$ левая и правая части теряют смысл. Три только что рассмотренных, в качестве уравнений, равенства являются также тождествами.

4) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Любое число, не представимое в виде $\frac{\pi}{2}k$ с целым k, является корнем. При x, представимом в виде $\frac{\pi}{2}k$ с четным k, теряют смысл обе части уравнения. При x, представимом в виде $\frac{\pi}{2}k$ с нечетным k, правая часть теряет смысл, а левая определена.

5) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$. Ответ тот же, что и в предыдущем уравнении. При $x = \frac{\pi}{2}k$ левая часть теряет смысл.

---

*) Следует обратить внимание на возникающую омонимию. Термин „корень" имеет также те значения, которые мы придали ему в § 3.

6) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$. Ответ: $x \neq k\pi$. При $x=k\pi$ с четным k теряет смысл правая часть, левая определена. При $x=k\pi$ с нечетным k теряют смысл обе части.

7) $\sin(\arcsin x)=1$. Ответ: $-1 \leqslant x \leqslant 1$. При других x теряет смысл левая часть. Правая часть — всюду определенная форма.

8) $\frac{x}{x}=1$. Ответ: любое число, кроме 0. При $x=0$ теряет смысл левая часть.

9) $\lg(x+1)=\sqrt{-x^2}$. Ответ: $x=0$. Если $x>-1$ и $x\neq 0$, то левая часть определена, правая — не определена. Если $x \leqslant -1$, не определены обе части уравнения.

10) $\lg x=\lg(-x)$. Уравнение решений не имеет. Равенства, рассмотренные в примерах 4 — 10 в качестве уравнений, являются также квазитождествами, но не тождествами.

11) $\sin x=2$. Нет решений.

12) $0\cdot\lg x=0$. Ответ: $x>0$. При $x \leqslant 0$ левая часть теряет смысл.

13) $x^2+1=0$. Решений нет. Заметим, что если мы, решая это уравнение, будем областью значений переменной x считать комплексные, а не только действительные числа, то уравнение $x^2+1=0$ будет иметь два решения: i и $-i$.

Все только что рассмотренные уравнения мы решили, написав сразу ответ (и предоставив читателю, которому это потребуется, доказать правильность этого ответа). А как можно *находить* решения уравнения? Как можно проверять правильность предлагаемого ответа без непосредственной подстановки в уравнение?

Пусть мы имеем два уравнения (относительно x)

$$\mathfrak{A}_1(x)=\mathfrak{B}_1(x), \tag{1}$$

$$\mathfrak{A}_2(x)=\mathfrak{B}_2(x). \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *равносильным уравнению* (1), если каждый корень уравнения (2) является корнем уравнения (1) и, наоборот, каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2). Если уравнение (2) равносильно уравнению (1), то, очевидно, уравнение (1) равносильно уравнению (2); поэтому мы будем говорить просто о *равносильных уравнениях*. Каждое уравнение равносильно, очевидно, самому себе. Если уравнения (2) и (1) равносильны и уравнения (3)

$$\mathfrak{A}_3(x)=\mathfrak{B}_3(x) \qquad (3)$$

и (2) равносильны, то уравнения (3) и (1) также равносильны.

Идеальным путем решения уравнений является следующий путь. Допустим, нам надо решить уравнение (1). Мы заменяем его на какое-нибудь равносильное ему, но более простое уравнение (2). Затем уравнение (2) мы заменяем на какое-нибудь равносильное ему (а значит, и уравнению (1)), но более простое уравнение (3). И так действуем до тех пор, пока не дойдем до какого-нибудь совсем простого, равносильного предыдущим, уравнения, корни которого очевидны. Этот идеальный план не всегда можно или не всегда легко осуществить на практике. Введем еще одно понятие, облегчающее решение уравнений.

Уравнение (2) называется *выводным из уравнения* (1), если каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2). Уравнение (2) тогда и только тогда равносильно уравнению (1), когда как уравнение (2) является выводным из уравнения (1), так и уравнение (1) является выводным из уравнения (2). Каждое уравнение является выводным из самого себя. Если уравнение (2) является выводным из уравнения (1), а уравнение (3) является выводным из уравнения (2), то уравнение (3) является выводным из уравнения (1).

Примеры: 14) Уравнения $(x-1)^2=0$ и $x-1=0$ равносильны.

15) Уравнения $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ и $(x+1)^2=x^2+2x+1$ равносильны.

16) Уравнения $\lg x=\lg(-x)$ и $x^2+1=0$ равносильны.

17) Уравнение $x-1=0$ является выводным из уравнения $\lg x=\lg(-x)$.

18) Уравнение $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ является выводным из уравнения $x-1=0$, а следовательно, и из уравнения $\lg x=\lg(-x)$.

19) Уравнение $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ является выводным также и из уравнения $16x^6-13x^5+4x^4-10x^3+x^2-$

$-1=0$, о корнях которого я ничего не знаю (возможно, это последнее уравнение вовсе не имеет корней).

Вторым естественным путем решения уравнений является путь перехода к выводным уравнениям. Допустим, нам надо решить уравнение (1). Мы заменяем его на какое-нибудь более простое уравнение (2), являющееся выводным из уравнения (1). При этом мы можем приобрести лишние, „посторонние“ корни, но потерять ничего не можем. Затем уравнение (2) мы заменяем на какое-нибудь более простое уравнение (3), являющееся выводным из уравнения (2). При этом мы можем опять приобрести корни, но потерять опять-таки ничего не можем. Таким образом мы действуем до тех пор, пока не дойдем до какого-нибудь совсем простого, выводного из предыдущих, уравнения, корни которого очевидны. Затем надо, разумеется, все корни этого последнего уравнения проверить, т. е. посмотреть, удовлетворяют ли они уравнению (1). При решении уравнения этим путем надо, конечно, приобретать „не слишком много“ корней, иначе отделить проверкой искомые корни будет практически невозможно (см. выше пример 19).

Для того чтобы на самом деле „пройти“ по одному из двух указанных здесь путей, надо уметь контролировать, как те или иные преобразования влияют на корни уравнения: получаем ли мы равносильное уравнение, получаем ли мы выводное уравнение, не теряем ли мы корни. Рассмотрим некоторые простейшие, часто встречающиеся в школьной практике преобразования; исследуем, что происходит с корнями уравнения при этих преобразованиях.

Теорема 1. *Если* $\mathfrak{C}(x)$ — *всюду определенная числовая форма, то уравнение*

$$\mathfrak{A}(x)+\mathfrak{C}(x)=\mathfrak{B}(x)+\mathfrak{C}(x) \tag{4}$$

равносильно уравнению

$$\mathfrak{A}(x)=\mathfrak{B}(x). \tag{5}$$

Доказательство. Для того чтобы доказать, что уравнения (5) и (4) равносильны, надо доказать, что уравнение (4) является выводным из уравнения (5) и что уравнение (5) является выводным из уравнения (4). Доказательство, естественно, распадается на две части. Докажем, что уравнение (4) является выводным из уравнения (5). Пусть число a является корнем уравнения (5), т. е. справедливо *числовое равенство*

$$\mathfrak{A}(a)=\mathfrak{B}(a). \tag{6}$$

Так как $\mathfrak{C}(x)$ — всюду определенная числовая форма, $\mathfrak{C}(a)$ определено, является числом. Из (6), очевидно, следует, что

$$\mathfrak{A}(a)+\mathfrak{C}(a)=\mathfrak{B}(a)+\mathfrak{C}(a). \tag{7}$$

Следовательно, a является корнем уравнения (4). Мы доказали, что каждый корень уравнения (5) является корнем уравнения (4). Значит, уравнение (4) является выводным из уравнения (5).

Докажем теперь, что уравнение (5) является выводным из уравнения (4). Пусть число a является корнем уравнения (4), т. е. справедливо *числовое равенство* (7). $\mathfrak{C}(a)$ входит в это равенство и, следовательно, определено. Вычтем из обеих частей числового равенства (7) число $\mathfrak{C}(a)$. Получим, что справедливо (6). Следовательно, a является корнем уравнения (5). Мы доказали, таким образом, что уравнение (5) является выводным из уравнения (4). Значит, уравнения (4) и (5) равносильны.

Заметим, что всюду определенность формы $\mathfrak{C}$ является достаточным, но не необходимым условием для равносильности уравнений (4) и (5). Например, уравнения $x-3=5$ и $x-3+\frac{1}{x-2}=5+\frac{1}{x-2}$ равносильны. В то же время без этого условия теорема, конечно, не верна: уравнения $x-3=5$ и $x-3+\frac{1}{x-8}=5+\frac{1}{x-8}$ не равносильны.

Важным примером всюду определенной числовой формы является многочлен. Числовая форма называется *многочленом*, если она имеет вид $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, где n — натуральное число, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — действительные числа и $a_0\neq 0$ [2]). По нашему определению формы $(x+1)^2$, $2x+1+x^2$ и $0x^3+x^2+2x+1$ *не являются* многочленами, хотя все они, конечно, равносильны (как формы) многочлену x^2+2x+1 (точнее: $1x^2+2x+1$).

Теорема 2. *Если число $c \neq 0$, то уравнение*

$$c \cdot \mathfrak{A}(x) = c \cdot \mathfrak{B}(x) \tag{8}$$

равносильно уравнению (5).

Доказательство. Докажем сначала, что уравнение (8) является выводным из уравнения (5). Пусть a является корнем уравнения (5), т. е. справедливо (6). Из (6) следует, что

$$c \cdot \mathfrak{A}(a) = c \cdot \mathfrak{B}(a). \tag{9}$$

Следовательно, a является корнем уравнения (8). Итак, уравнение (8) является выводным из уравнения (5).

Докажем теперь, что (5) является выводным из (8). Пусть a является корнем уравнения (8), т. е. справедливо (9). Так как $c \neq 0$, из (9) следует (6). Следовательно, a является корнем уравнения (5). Уравнение (5) является выводным из (8). Уравнения (5) и (8) равносильны.

Теорема 3. *Если $\mathfrak{C}(x)$ — всюду определенная числовая форма, то уравнение*

$$\mathfrak{A}(x) \cdot \mathfrak{C}(x) = \mathfrak{B}(x) \cdot \mathfrak{C}(x) \tag{10}$$

является выводным из уравнения (5), *причем прибавиться* [к уравнению (10) по сравнению с уравнением (5)] *могут только корни уравнения*

$$\mathfrak{C}(x) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. (10) является выводным из (5). Это доказывается совершенно аналогично первой половине доказательства теоремы 1. Доказывать, что (5) является выводным из (10), я не собираюсь. Этого формулировка теоремы не утверждает, да это в общем случае и не верно. Докажем добавление „*причем. . .*“. Оно, очевидно, утверждает, что если a является корнем уравнения (10) и не является корнем уравнения (5), то a является корнем уравнения (11). Пусть a является корнем уравнения (10), т. е. справедливо числовое равенство

$$\mathfrak{A}(a) \cdot \mathfrak{C}(a) = \mathfrak{B}(a) \cdot \mathfrak{C}(a). \tag{12}$$

Пусть также a не является корнем уравнения (5), т. е. равенство (6) не верно. Докажем, что a является корнем уравнения (11). Допустим противное. В силу ли условия теоремы, в силу ли верности равенства (12), $\mathfrak{C}(a)$

определено. По предположению $\mathfrak{C}(a) \neq 0$. Тогда обе части равенства (12) можно разделить на $\mathfrak{C}(a)$, и мы получаем, что верно равенство (6). Противоречие.

Доказанное только что добавление позволяет проверять не все найденные корни, а только корни уравнения (11).

Теорема 4. *Если n — нечетное натуральное число, то уравнение*

$$[\mathfrak{A}(x)]^n = [\mathfrak{B}(x)]^n \tag{13}$$

равносильно уравнению (5).

Доказательство. Пусть a является корнем уравнения (5), т. е. выполняется числовое равенство (6). Тогда

$$[\mathfrak{A}(a)]^n = [\mathfrak{B}(a)]^n \tag{14}$$

и, следовательно, a является корнем уравнения (13). Итак, уравнение (13) — выводное из (5). При доказательстве „в эту сторону“ мы не пользовались нечетностью числа n. Докажем „в обратную сторону“. Пусть a является корнем уравнения (13), т. е. справедливо (14). Из (14) следует, что

$$\sqrt[n]{[\mathfrak{A}(a)]^n} = \sqrt[n]{[\mathfrak{B}(a)]^n}\,. \tag{15}$$

Так как n — нечетное, $\sqrt[n]{[\mathfrak{A}(a)]^n} = \mathfrak{A}(a)$ и $\sqrt[n]{[\mathfrak{B}(a)]^n} = \mathfrak{B}(a)$ (см. § 3). Значит, из (15) следует (6). Итак, (5) — выводное из (13). Уравнения (5) и (13) равносильны.

Теорема 5. *Если n — четное натуральное число, то уравнение* (13) *является выводным из уравнения* (5), *причем прибавиться могут только корни уравнения*

$$\mathfrak{A}(x) = -\mathfrak{B}(x). \tag{16}$$

Доказательство. То, что уравнение (13) является выводным из (5), мы фактически доказали при доказательстве предыдущей теоремы. Докажем добавление. Пусть a является корнем уравнения (13) и не является корнем уравнения (5). Докажем, что тогда a является корнем уравнения (16). Поскольку a является корнем уравнения (13), имеет место (14), а значит, и (15). Так как n — четное, из (15) следует

$$|\mathfrak{A}(a)| = |\mathfrak{B}(a)|. \tag{17}$$

Из (17), очевидно, вытекает, что $\mathfrak{A}(a)=\mathfrak{B}(a)$ или $\mathfrak{A}(a)=-\mathfrak{B}(a)$. Но равенство $\mathfrak{A}(a)=\mathfrak{B}(a)$ противоречит предположению, что a не является корнем уравнения (5). Следовательно,

$$\mathfrak{A}(a)=-\mathfrak{B}(a). \tag{18}$$

Из (18) вытекает, что a — корень уравнения (16).

Следствие. Если $\mathfrak{A}(x)$ и $\mathfrak{B}(x)$ *не принимают отрицательных значений, то уравнение* (13) *равносильно уравнению* (5).

Например, уравнение $\sqrt{\mathfrak{A}(x)}=c$ равносильно, если $c\geqslant 0$, уравнению $\mathfrak{A}(x)=c^2$.

Всевозможных преобразований, которые удобно проделывать при решении уравнений, существует, конечно, очень много, и я вовсе не собираюсь исследовать — в виде теорем — все эти преобразования. Одной из целей, которые я преследовал, доказывая теоремы 1—5, было — научить читателя методике подобных доказательств. В каждом конкретном случае, проделывая то или иное преобразование, читатель параллельно *должен* проводить исследование на „равносильность", не уставая переходить от уравнений к числовым равенствам (с которыми мы уже хорошо умеем обращаться) и обратно. Разумеется, при желании читатель может исследовать то или иное преобразование в общем виде и оформить результат исследования в виде теоремы. В качестве упражнения я предлагаю *закончить формулировку* указанной ниже теоремы 6 и доказать ее.

Теорема 6. *Уравнение* (5) *является выводным из уравнения*

$$\log_a[\mathfrak{A}(x)]=\log_a[\mathfrak{B}(x)],$$

причем прибавиться могут только...

Полезно заметить еще, что если равенство

$$\mathfrak{A}(x)=\mathfrak{C}(x) \tag{19}$$

является тождеством, т. е. $\mathfrak{A}(x)\simeq\mathfrak{C}(x)$, то уравнение (5) равносильно уравнению

$$\mathfrak{C}(x)=\mathfrak{B}(x). \tag{20}$$

Если же равенство (19) является только квазитождеством, то *в общем случае* нельзя утверждать ни что (20) — выводное из (5), ни что (5) — выводное из (20).

Пример. Равенство $\lg x = \lg(-x)$ является квазитождеством, но никакое из уравнений $\lg x = 3$, $\lg(-x) = 3$ не является выводным из другого.

Поэтому, применяя при решении уравнений квазитождества, не являющиеся тождествами, надо быть крайне осторожным.

Введем еще один термин. Мы будем говорить, что уравнение (5) *равносильно дизъюнкции уравнений*

$$\mathfrak{A}_1(x) = \mathfrak{B}_1(x),\ \mathfrak{A}_2(x) = \mathfrak{B}_2(x),\ \ldots,\ \mathfrak{A}_s(x) = \mathfrak{B}_s(x), \quad (21)$$

если, во-первых, каждый корень уравнения (5) является корнем одного из уравнений (21) и, во-вторых, каждый корень каждого из уравнений (21) является корнем уравнения (5). В полной мере мы оценим полезность этого (или, вернее, близкого) термина лишь в §§ 5, 6. Пока приведу лишь один пример. Заметим сначала, что если уравнение (5) равносильно дизъюнкции уравнений (21), то вместо того, чтобы решать уравнение (5), можно решить каждое из уравнений (21) и корни всех этих уравнений объединить. Это „объединение“ и будет, очевидно, составлять совокупность корней уравнения (5).

Пример. Уравнение $(x-a)(x-b) = 0$ равносильно дизъюнкции уравнений $x-a=0$ и $x-b=0$. Однако в общем случае уравнение

$$\mathfrak{A}(x) \cdot \mathfrak{B}(x) = 0 \quad (22)$$

не равносильно дизъюнкции уравнений

$$\mathfrak{A}(x) = 0,\ \mathfrak{B}(x) = 0. \quad (23)$$

Каждый из корней уравнения (22) является, конечно, корнем одного из уравнений (23), но у уравнения, скажем, $\mathfrak{A}(x) = 0$ могут быть такие корни, при которых $\mathfrak{B}(x)$ не определено. Эти корни не являются, конечно, корнями уравнения (22).

Нам осталось ввести аналогичную терминологию для нескольких переменных. Равенство $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, содержащее $x_1, x_2, \ldots, x_s$, мы будем называть *уравнением* (*относительно* $x_1, x_2, \ldots, x_s$ *или с* s *неизвестными*), **если требуется найти такие наборы** значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$, которые превращают данное равенство в верное числовое равенство. Искомые наборы значений переменных называются *решениями* уравнения (термин „корень" при $s > 1$ не употребляется). Разумеется, набор значений $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, $u = 4$ составляет *одно* решение уравнения $x + y = z + u$ с 4 неизвестными, а не четыре решения. Переменные в уравнении называют также *неизвестными*. Два уравнения (относительно одинаковых неизвестных) называются *равносильными*, если они имеют одинаковые решения. Одно уравнение называется *выводным* из другого уравнения, если каждое решение второго уравнения является также решением первого уравнения. Некоторое уравнение называется *равносильным дизъюнкции* некоторой совокупности других уравнений, если каждое решение первого уравнения является решением одного из „других" уравнений и каждое решение каждого из „других" уравнений является решением первого уравнения.

Уравнение с s неизвестными при $s > 1$, вообще говоря, имеет бесконечно много решений; однако оно может иметь также любое число решений (например, одно решение) или вовсе не иметь решений. Например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ имеет ровно одно решение ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$), а уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не имеет решений. В § 6 мы еще вернемся к уравнениям.

§ 5. Системы уравнений

Пусть мы имеем k равенств

$$\begin{gathered}
\mathfrak{A}_1(x_1, \ldots, x_s) = \mathfrak{B}_1(x_1, \ldots, x_s), \\
\mathfrak{A}_2(x_1, \ldots, x_s) = \mathfrak{B}_2(x_1, \ldots, x_s), \\
\vdots \\
\mathfrak{A}_k(x_1, \ldots, x_s) = \mathfrak{B}_k(x_1, \ldots, x_s).
\end{gathered}$$

($k > 1$), причем каждая из переменных $x_1, \ldots, x_s$ встречается хотя бы в одном из этих равенств и каждое из этих равенств содержит хотя бы одну из этих переменных; эти k равенств мы называем *системой* (*k уравнений с s неизвестными*), **если требуется найти** такие наборы значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$, которые одновременно превращают все данные равенства в верные числовые равенства. Искомые наборы значений переменных называются *решениями* системы (термин „корень" для систем не употребляется). Переменные в системе уравнений называют также *неизвестными*. Две системы (с одними и теми же неизвестными) называются *равносильными*, если они имеют одинаковые решения. Одна система называется *выводной* из другой системы, если каждое решение второй системы является также решением первой системы. Мы будем говорить, что некоторая система *равносильна дизъюнкции* некоторой совокупности других систем, если каждое решение первой системы является решением одной из „других" систем и каждое решение каждой из „других" систем является решением первой системы. В знак того, что некоторая совокупность равенств объявляется (является) системой уравнений, равенства этой совокупности объединяют фигурной скобкой.

Примеры: 1) Система $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=5 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ *трех* уравнений с двумя неизвестными равносильна системе $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ двух уравнений с двумя неизвестными.

2) Система $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=3 \end{cases}$ *двух* уравнений с двумя неизвестными имеет бесконечно много решений; на координатной плоскости точки, соответствующие ее решениям, образуют прямую. Хотя мы и не ввели соответствующего термина, понятно утверждение: рассматриваемая система равносильна уравнению $x+y=3$. Термин этот легко, конечно, определить.

3) Система $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=5 \end{cases}$ не имеет решений.

4) Система $\begin{cases} x+y=3 \\ z+u=5 \end{cases}$ является системой двух уравнений с четырьмя неизвестными. Она равносильна, очевидно, дизъюнкции уравнений $x+y=3$ и $z+u=5$ (опять

термин, формально не введенный).

5) Система $\begin{cases} (x+2)(x-3)=0 \\ (x+2)(x+4)=0 \end{cases}$ двух уравнений с одним неизвестным имеет одно решение: $x=-2$.

Решение систем также требует умения контролировать влияние преобразований на решения. Для систем мы сформулируем только три теоремы. Доказывать мы эти теоремы не будем, так как доказываются они абсолютно тем же методом (переходом от систем уравнений к числовым равенствам и обратно), но требуют (если доказывать для общего случая k систем с s неизвестными) громоздкой записи.

Теорема 1. *Если одно из уравнений системы заменить на равносильное ему уравнение, то полученная система будет равносильна исходной системе.*

Теорема 2 (о методе подстановки). *Система*

$$\begin{cases} x_1 = \mathfrak{C}(x_2, \ldots, x_s) \\ \mathfrak{A}_2(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \mathfrak{B}_2(x_1, x_2, \ldots, x_s) \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_k(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \mathfrak{B}_k(x_1, x_2, \ldots, x_s) \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 = \mathfrak{C}(x_2, \ldots, x_s) \\ \mathfrak{A}_2(\mathfrak{C}(x_2, \ldots, x_s), x_2, \ldots, x_s) = \mathfrak{B}_2(\mathfrak{C}(x_2, \ldots, x_s), x_2, \ldots, x_s) \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_k(\mathfrak{C}(x_2, \ldots, x_s), x_2, \ldots, x_s) = \mathfrak{B}_k(\mathfrak{C}(x_2, \ldots, x_s), x_2, \ldots, x_s). \end{cases}$$

Теорема 3 (о методе алгебраического сложения). *Если каждое из уравнений некоторой системы является линейной комбинацией уравнений другой системы* (т. е. получается сложением результатов умножения уравнений этой „другой“ системы на целые числа), *то первая система является выводной из этой „другой“ системы.*

Пример 6) Каждое из уравнений системы

$$\begin{cases} 5x + 5y = 4 \\ 15x + 15y = 12 \end{cases} \qquad (1)$$

является линейной комбинацией уравнений системы

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-y=2. \end{cases} \tag{2}$$

(А именно, первое уравнение системы (1) получается сложением результатов умножения уравнений системы (2) на 2 и 1, второе — соответственно, на 6 и 3.) Однако система (2) имеет одно решение: $x=\frac{7}{5}$, $y=-\frac{3}{5}$, а система (1) — бесконечно много $\left(\text{в том числе и } x=\frac{7}{5},\ y=-\frac{3}{5}\right)$.

Решим теперь для примера полностью одну „настоящую" систему.

Пример 7) Решим систему

$$\begin{cases} x+y=3z \\ x^2+y^2=5z \\ x^3+y^3=9z. \end{cases} \tag{3}$$

По дважды примененной теореме 1 система (3) равносильна системе

$$\begin{cases} x+y=3z \\ (x+y)^2-2xy=5z \\ (x+y)^3-3xy(x+y)=9z. \end{cases} \tag{4}$$

По теоремам 1 и 2 система (4) равносильна системе

$$\begin{cases} x+y=3z \\ 9z^2-2xy=5z \\ 27z^3-3xy\cdot 3z=9z \end{cases}$$

или системе

$$\begin{cases} x+y=3z \\ 9z^2-2xy=5z \\ 3z^3-xyz=z. \end{cases} \tag{5}$$

Решим вспомогательную систему

$$\begin{cases} 9z^2-2u=5z \\ 3z^3-uz=z. \end{cases} \tag{6}$$

Система (6) получается из второго и третьего уравнений системы (5), если в них xy заменить на u. Обычно эта замена подается в виде: „обозначим xy через u“. Система (6) по теореме 1 равносильна системе

$$\begin{cases} u = \frac{9}{2}z^2 - \frac{5}{2}z \\ 3z^3 - uz = z. \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) по теореме 2 равносильна системе

$$\begin{cases} u = \frac{9}{2}z^2 - \frac{5}{2}z \\ 3z^3 - \left(\frac{9}{2}z^2 - \frac{5}{2}z\right)z = z. \end{cases} \tag{8}$$

По теореме 1 система (8) равносильна системе

$$\begin{cases} u = \frac{9}{2}z^2 - \frac{5}{2}z \\ 3z^3 - 5z^2 + 2z = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Решим отдельно второе уравнение системы (9). Оно, очевидно, имеет 3 корня: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \frac{2}{3}$. Следовательно, система (9) равносильна дизъюнкции трех систем:

$$\begin{cases} u = \frac{9}{2}z^2 - \frac{5}{2}z \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \frac{9}{2}z^2 - \frac{5}{2}z \\ z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \frac{9}{2}z^2 - \frac{5}{2}z \\ z = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, система (9) имеет три решения: $u_1 = 0$, $z_1 = 0$; $u_2 = 2$, $z_2 = 1$; $u_3 = \frac{1}{3}$, $z_3 = \frac{2}{3}$. Равносильная ей система (6) имеет те же решения. Легко видеть, что тогда система (5) равносильна дизъюнкции трех систем:

$$\begin{cases} x + y = 3z \\ xy = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3z \\ xy = 2 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3z \\ xy = \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3}. \end{cases} \tag{10}$$

Докажем это. Допустим, числа x_0, y_0, z_0 образуют решение системы (5). Тогда справедливы три следующих числовых равенства:

$$x_0+y_0=3z_0, \tag{11}$$

$$9z_0^2-2x_0y_0=5z_0, \tag{12}$$

$$3z_0^3-x_0y_0z_0=z_0. \tag{13}$$

Обозначим через u_0 число x_0y_0. Тогда (12) и (13) можно переписать в виде

$$9z_0^2-2u_0=5z_0, \tag{14}$$

$$3z_0^3-u_0z_0=z_0. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что числа u_0, z_0 составляют решение системы (6). Но система (6) нами решена. Она имеет три вышеуказанных решения. Следовательно, либо $u_0=0$, $z_0=0$, либо $u_0=2$, $z_0=1$, либо $u_0=\frac{1}{3}$, $z_0=\frac{2}{3}$, т. е. либо $x_0y_0=0$ и $z_0=0$, либо $x_0y_0=2$, а $z_0=1$, либо, наконец, $x_0y_0=\frac{1}{3}$, $z_0=\frac{2}{3}$. Учитывая (11), заключаем, что в первом случае x_0, y_0, z_0 являются решением первой из систем (10), во втором — второй из систем (10), в третьем — третьей из систем (10). Обратно. Пусть x_0, y_0, z_0 являются решением первой из систем (10). Тогда

$$x_0+y_0=3z_0, \tag{16}$$

$$x_0y_0=0, \tag{17}$$

$$z_0=0. \tag{18}$$

Обозначим x_0y_0 через u_0. Тогда из (17) и (18) $u_0=0$, $z_0=0$. Но числа 0, 0 являются решением системы (6). Следовательно, верны (14) и (15). Но $u_0=x_0y_0$. Значит, верны (12) и (13). Из (16), (12) и (13) следует, что x_0, y_0, z_0 являются решением системы (5). Абсолютно аналогично рассматриваются случаи, когда x_0, y_0, z_0 являются решением второй или третьей из систем (10).

Итак, нам остается решить каждую из систем (10) и объединить полученные решения. Решим первую из систем (10)

$$\begin{cases} x+y=3z \\ xy=0 \\ z=0. \end{cases} \tag{19}$$

По теореме 2 система (19) равносильна системе

$$\begin{cases} x+y=3\cdot 0 \\ xy=0 \\ z=0. \end{cases}$$

или системе

$$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=0 \\ z=0. \end{cases}$$

Очевидно, вспомогательная система

$$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=0 \end{cases}$$

равносильна дизъюнкции систем

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=0 \\ y=0. \end{cases}$$

Следовательно, система (21) имеет одно решение: x $y=0$. А тогда и система (20) имеет одно решение: x_1 $y_1=0$, $z_1=0$.

Решим вторую из систем (10)

$$\begin{cases} x+y=3z \\ xy=2 \\ z=1. \end{cases}$$

По теоремам 2 и 1 система (22) равносильна стеме

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \\ z=1. \end{cases}$$

Решим вспомогательную систему

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2. \end{cases}$$

Система (24) по теоремам 1 и 2 равносильна системам

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ (3 - y)\, y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Вспомогательное уравнение $y^2 - 3y + 2 = 0$ имеет два корня: 1 и 2. Поэтому система (25) равносильна дизъюнкции двух систем

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 - y \\ y = 2. \end{cases}$$

Значит, система (25) и равносильная ей система (24) имеют два решения: $x_2 = 2$, $y_2 = 1$ и $x_3 = 1$, $y_3 = 2$. Очевидно, система (23) имеет в этом случае также два решения: $x_2 = 2$, $y_2 = 1$, $z_2 = 1$ и $x_3 = 1$, $y_3 = 2$, $z_3 = 1$.

Аналогично может быть решена третья из систем (10). Она также имеет два решения: $x_4 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y_4 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$, $z_4 = \frac{2}{3}$ и $x_5 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y_5 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$, $z_5 = \frac{2}{3}$.

Итак, окончательно система (3) имеет пять решений: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$, $z_2 = 1$; $x_3 = 1$, $y_3 = 2$, $z_3 = 1$; $x_4 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y_4 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$, $z_4 = \frac{2}{3}$ и $x_5 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y_5 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$, $z_5 = \frac{2}{3}$. Никакой проверки делать не надо, так как мы каждый раз переходили к равносильным системам.

§ 6. Неравенства с переменными

Выражения вида $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \geqslant \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — числовые формы или числа, мы естественно будем называть *неравенствами*. Очевидно, каждое неравенство является высказывательной формой или высказыванием. Неравенство, в котором $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — числа (а не формы), мы будем называть *числовым неравенством.*

В то время как в „теории равенств" есть три разных термина: равенство, тождество, уравнение (и даже есть еще „квазитождество"), в „теории неравенств" этим трем терминам соответствует один и тот же термин: неравенство.

Просто выражение вида $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, независимо от того, что о нем утверждается, зачем оно рассматривается, называется неравенством. Для неравенств $\mathfrak{A}(x) < \mathfrak{B}(x)$, верных „для всех x", обычно никакой специальный термин (аналог термина „тождество") не вводится. Говорят либо „имеет место (справедливо) неравенство $\mathfrak{A}(x) < \mathfrak{B}(x)$", либо, короче, „для всех x $\mathfrak{A}(x) < \mathfrak{B}(x)$", либо еще „неравенство $\mathfrak{A}(x) < \mathfrak{B}(x)$ выполняется тождественно".

Для неравенств, которые надо решить (т. е. найти значения переменных — *неизвестных*, — превращающие рассматриваемое неравенство в верное числовое неравенство), опять-таки никакого специального термина (аналога термина „уравнение") не существует. Говорят просто: решить неравенство $\mathfrak{A}(x) < \mathfrak{B}(x)$. Это и означает, что данное неравенство рассматривается как, так сказать, уравнение. Когда ставится задача решить неравенство, искомые значения неизвестных (или искомые наборы значений неизвестных, если число неизвестных больше одного) называются решениями неравенства (термин „корень" применительно к неравенствам не употребляется). Два неравенства называются *равносильными*, если они имеют одинаковые решения. Поскольку неравенства имеют обычно бесконечно много решений, термин „выводное неравенство" не вводится: если при решении какого-нибудь неравенства перейти к неравенству, имеющему посторонние решения, то проверкой выделить эти решения среди бесконечного числа решений, как правило, невозможно. При решении неравенства разумно проделывать лишь такие преобразования, которые приводят к равносильным неравенствам.

При решении неравенств полезны следующие теоремы:

Теорема 1. *Если $\mathfrak{C}(x)$ — всюду определенная числовая форма, то неравенство*

$$\mathfrak{A}(x) + \mathfrak{C}(x) < \mathfrak{B}(x) + \mathfrak{C}(x)$$

равносильно неравенству

$$\mathfrak{A}(x)<\mathfrak{B}(x). \qquad (1)$$

Теорема 2. *Если число $c>0$, то неравенство*

$$c\cdot\mathfrak{A}(x)<c\cdot\mathfrak{B}(x)$$

равносильно неравенству (1).

Теорема 3. *Если число $c<0$, то неравенство*

$$c\cdot\mathfrak{A}(x)>c\cdot\mathfrak{B}(x)$$

равносильно неравенству (1).

Подчеркну, что никакой теоремы об умножении обеих частей неравенства на *числовую форму* (а не на число) среди теорем 1—3 нет. Доказательство теорем 1—3 проводится совершенно аналогично доказательству теорем из § 4 и опирается, разумеется, на свойства числовых неравенств (§ 1). Я предоставляю его читателю.

Естественным образом могут быть определены понятия *системы* неравенств, *решения системы* неравенств, *равносильных систем* неравенств, *неравенства, равносильного дизъюнкции* данных неравенств или систем неравенств, и т. п. Остается, разумеется, верным аналог теоремы 1 предыдущего параграфа.

Приведем два примера решения неравенств.

Примеры: 1) Решим неравенство

$$|x-5|>3.$$

Это неравенство, очевидно, равносильно дизъюнкции двух систем:

$$\begin{cases} |x-5|>3 \\ x-5\geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} |x-5|>3 \\ x-5<0. \end{cases}$$

Первая из этих систем равносильна системе

$$\begin{cases} x-5>3 \\ x-5\geqslant 0 \end{cases}$$

и системе

$$\begin{cases} x>8 \\ x\geqslant 5. \end{cases}$$

Следовательно, ее решениями являются числа $x > 8$. Вторая система равносильна системе

$$\begin{cases} -(x-5) > 3 \\ x-5 < 0 \end{cases}$$

и системе

$$\begin{cases} x < 2 \\ x < 5. \end{cases}$$

Следовательно, ее решениями являются числа $x < 2$. Итак, окончательно $|x-5| > 3$ тогда и только тогда, когда $x < 2$ или $x > 8$ *).

2) Решим неравенство

$$\sqrt{(x+2)(x-5)} > 8-x. \tag{2}$$

Мне хочется возвести обе части неравенства (2) в квадрат. Но соответствующее свойство числовых неравенств (см. § 1) справедливо для положительных (точнее, неотрицательных) чисел. Поэтому я разбиваю решение на две части, на два „случая": $8-x \geqslant 0$ и $8-x < 0$. Это „разбиение на два случая" оформляется следующим образом. Неравенство (2) равносильно, очевидно, дизъюнкции систем

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)(x-5)} > 8-x \\ 8-x \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{(x+2)(x-5)} > 8-x \\ 8-x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Решим первую из систем (3)

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)(x-5)} > 8-x \\ 8-x \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) равносильна системе

$$\begin{cases} (x+2)(x-5) > (8-x)^2 \\ 8-x \geqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

Докажем это. Пусть сначала a является решением системы (4), т. е.

$$\sqrt{(a+2)(a-5)} > 8-a, \tag{6}$$

$$8-a \geqslant 0. \tag{7}$$

*) Неравенство $|x-5| > 3$ можно проще и изящнее решить при помощи утверждения, сформулированного в задаче 1 к § 2.

Из (6) н (7) следует (см. § 1), что

$$\left(\sqrt{(a+2)(a-5)}\right)^2 > (8-a)^2. \tag{8}$$

Поскольку выражение $\sqrt{(a+2)(a-5)}$ определено (из (6) или (8)), $\left(\sqrt{(a+2)(a-5)}\right)^2 = (a+2)(a-5)$. Следовательно, из (8) получаем, что

$$(a+2)(a-5) > (8-a)^2. \tag{9}$$

(9) и (7) показывают, что a является решением системы (5). Пусть теперь a является решением системы (5), т. е. имеют место (9) и (7). $(8-a)^2 \geqslant 0$. Из (9) следует, что $(a+2)(a-5) \geqslant 0$. [Это не описка. Из (9) следует, конечно, и более сильное неравенство $(a+2)(a-5) > 0$, но тем не менее сделанное утверждение тоже верно.] По свойствам корней (см. § 3) из (9) получаем, что

$$\sqrt{(a+2)(a-5)} > \sqrt{(8-a)^2}. \tag{10}$$

Из (7) вытекает, что $\sqrt{(8-a)^2} = 8-a$. Следовательно, (10) влечет (6); но (6) и (7) означают, что a является решением системы (4).

Неравенство $(x+2)(x-5) > (8-x)^2$ равносильно (по теоремам 1, 2) неравенству $x > 5\frac{9}{13}$. Неравенство $8-x \geqslant 0$ равносильно неравенству $x \leqslant 8$. Следовательно, система (5) равносильна системе

$$\begin{cases} x > 5\frac{9}{13} \\ x \leqslant 8. \end{cases}$$

Итак, решениями системы (4) являются числа $5\frac{9}{13} < x \leqslant 8$.

Решим вторую из систем (3)

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)(x-5)} > 8-x \\ 8-x < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Система (11) равносильна системе

$$\begin{cases} (x+2)(x-5) \geqslant 0 \\ 8-x < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Докажем это. Пусть a является решением системы (11), т. е.

$$\sqrt{(a+2)(a-5)} > 8-a, \tag{13}$$

$$8-a < 0. \tag{14}$$

Поскольку неравенство (13) верно, выражение $\sqrt{(a+2)(a-5)}$ определено. Следовательно,

$$(a+2)(a-5) \geqslant 0. \tag{15}$$

(15) и (14) означают, что a является решением системы (12). Пусть теперь a является решением системы (12), т. е. имеют место (15) и (14). В силу (15) $\sqrt{(a+2)(a-5)}$ определено. Но тогда по определению корня (§ 3)

$$\sqrt{(a+2)(a-5)} \geqslant 0. \tag{16}$$

Из (16) и (14) вытекает (13). (13) и (14) означают, что a является решением системы (11).

Неравенство $(x+2)(x-5) \geqslant 0$ равносильно дизъюнкции двух неравенств: $x \leqslant -2$ и $x \geqslant 5$. Поэтому система (12) равносильна дизъюнкции систем

$$\begin{cases} x \leqslant -2 \\ 8-x < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 5 \\ 8-x < 0 \end{cases}$$

или систем

$$\begin{cases} x \leqslant -2 \\ x > 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 5 \\ x > 8. \end{cases} \tag{17}$$

Первая из систем (17) не имеет решений. Решениями второй из систем (17) являются числа $x > 8$. Итак, решениями системы (11) являются числа $x > 8$.

Объединяя решения систем (4) и (11), окончательно получаем, что решениями неравенства (2) являются числа $x > 5\frac{9}{13}$.

Очень полезным инструментом при решении уравнений и систем уравнений является введенный в практику П. С. Моденовым и С. И. Новоселовым аппарат *смешанных систем*, т. е. систем, содержащих одновременно уравнения и неравенства. Ясно, разумеется, что надо понимать под *решениями* смешанной системы, *равносильными* смешанными системами и т. д.

Приведем два простых примера.

Примеры: 3) Решим уравнение

$$-x^2-x+4=|x+1|. \tag{18}$$

Для того чтобы избавиться от знака абсолютной величины, „рассмотрим два случая“: $x+1\geqslant 0$ и $x+1<0$. Формально: уравнение (18) равносильно дизъюнкции двух смешанных систем

$$\begin{cases} -x^2-x+4=|x+1| \\ x+1\geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^2-x+4=|x+1| \\ x+1<0. \end{cases} \tag{19}$$

Решим первую из систем (19)

$$\begin{cases} -x^2-x+4=|x+1| \\ x+1\geqslant 0. \end{cases} \tag{20}$$

Система (20) равносильна системе

$$\begin{cases} -x^2-x+4=x+1 \\ x+1\geqslant 0. \end{cases} \tag{21}$$

В самом деле. Если $-a^2-a+4=|a+1|$ и $a+1\geqslant 0$, то $|a+1|=a+1$ и $-a^2-a+4=a+1$. Если же, наоборот, $-a^2-a+4=a+1$ и $a+1\geqslant 0$; то, опять-таки, $a+1=|a+1|$ и $-a^2-a+4=|a+1|$.

Система (21) равносильна системе

$$\begin{cases} x^2+2x-3=0 \\ x\geqslant -1. \end{cases} \tag{22}$$

Уравнение $x^2+2x-3=0$ имеет два корня: -3 и 1. Поэтому система (22) равносильна дизъюнкции систем

$$\begin{cases} x=-3 \\ x\geqslant -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ x\geqslant -1. \end{cases} \tag{23}$$

Первая из систем (23) не имеет решений, вторая имеет одно решение: $x=1$. Итак, система (20) имеет одно решение: $x=1$.

Аналогично, решая вторую из систем (19), получаем, что она тоже имеет одно решение: $x=-\sqrt{5}$.

Окончательно, уравнение (18) имеет два решения: $x=1$, $x=-\sqrt{5}$.

4) Решим уравнение

$$2\sqrt{(x+5)(2x+8)} = 36 - 3x. \qquad (24)$$

„Хочется" возвести обе части уравнения (24) в квадрат:

$$\left(2\sqrt{(x+5)(2x+8)}\right)^2 = (36 - 3x)^2 \qquad (25)$$

и получить при этом равносильное уравнение. Но мы знаем, что, вообще говоря, при возведении обеих частей уравнения в квадрат получается лишь выводное уравнение. Мы знаем также, что уравнение (25) обязательно является выводным из уравнения (24), а уравнение (24) не обязано быть выводным из уравнения (25). Нельзя ли наложить какие-нибудь дополнительные условия на уравнение (24) так, чтобы оно тоже оказалось выводным из уравнения (25)? Для того чтобы найти эти „дополнительные условия", попробуем доказать неверное, быть может, утверждение. Попробуем доказать, что уравнение (24) является выводным из уравнения (25). Пусть a является корнем уравнения (25), т. е.

$$\left(2\sqrt{(a+5)(2a+8)}\right)^2 = (36 - 3a)^2. \qquad (26)$$

Нам надо доказать, что a является корнем уравнения (24), т. е. что

$$2\sqrt{(a+5)(2a+8)} = 36 - 3a. \qquad (27)$$

Из (26) вытекает, что

$$\sqrt{\left(2\sqrt{(a+5)(2a+8)}\right)^2} = \sqrt{(36-3a)^2}$$

или что

$$\left|2\sqrt{(a+5)(2a+8)}\right| = |36 - 3a|. \qquad (28)$$

Так как $2\sqrt{(a+5)(2a+8)} \geqslant 0$, (28) влечет

$$2\sqrt{(a+5)(2a+8)} = |36 - 3a|.$$

Чтобы доказать (27), нам надо иметь право $|36-3a|$ заменить на $36-3a$, а это можно, когда $36-3a \geqslant 0$.

Вот мы и нашли искомое „дополнительное условие“: $36-3x \geqslant 0$. Следовательно, решение уравнения (24) опять надо разбить на „два случая“: $36-3x \geqslant 0$ и $36-3x < 0$. Мы уже знаем, как может быть оформлено это „разбиение на два случая“.

Уравнение (24) равносильно дизъюнкции двух смешанных систем:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=36-3x \\ 36-3x \geqslant 0 \end{array}\right. \qquad\qquad (29)$$
$$\left\{\begin{array}{l} 2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=36-3x \\ 36-3x<0. \end{array}\right.$$

Заметим сразу, что вторая из систем (29) не имеет решений, так как из $2\sqrt{(a+5)(2a+8)}=36-3a$ и определения корня (§ 3) вытекает, что $36-3a \geqslant 0$. Следовательно, уравнение (24) равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} 2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=36-3x \\ 36-3x \geqslant 0. \end{array}\right. \qquad (30)$$

Ввиду проведенного выше предварительного исследования очевидно, что система (30) равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{l} (2\sqrt{(x+5)(2x+8)})^2=(36-3x)^2 \\ 36-3x \geqslant 0. \end{array}\right. \qquad (31)$$

Легко видеть, что система (31) равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{l} 4(x+5)(2x+8)=(36-3x)^2 \\ 36-3x \geqslant 0. \end{array}\right. \qquad (32)$$

Уравнение $4(x+5)(2x+8)=(36-3x)^2$ имеет два корня: $x=4$ и $x=284$. Неравенство $36-3x \geqslant 0$ равносильно неравенству $x \leqslant 12$. Следовательно, решением системы (32) является число 4. Итак, окончательно, уравнение (24) имеет один корень: $x=4$.

Разумеется, можно было не гнаться за равносильностью и без всяких смешанных систем перейти от уравнения (24) к выводному уравнению (25), а затем сделать проверку. Однако иногда идти по „дорожке равносильностей“ гораздо удобнее. Использование смешанных систем всегда дает возможность добиться этого.

§ 7. $n!$

Пусть n — целое число и $n \geqslant 2$. Обозначим через $n!$ (читается: «„эн“ факториал») произведение всех целых чисел от 1 до n. Таким образом, для $n \geqslant 2$

$$n! \underset{\mathrm{Df}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \tag{1}$$

Очевидно, для $n \geqslant 2$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1). \tag{2}$$

Определим выражение $n!$ для $n=1$. Желая выбрать такое определение, при котором бы и для $n=1$ сохранило верность *основное свойство факториала* (2), подставим формально в (2) $n=1$. Получим $2! = 1! \cdot 2$. Таким образом, чтобы (2) осталось верным и для $n=1$, надо положить $1! = \frac{2!}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Итак, специальным определением положим

$$1! \underset{\mathrm{Df}}{=} 1. \tag{3}$$

Аналогичная проверка показывает, что выражение $n!$ можно определить еще и для $n=0$ так, что (2) останется верным и для $n=0$ (для $n=-1$ этого уже сделать нельзя).

Еще одним специальным определением положим

$$0! \underset{\mathrm{Df}}{=} 1. \tag{4}$$

После определений (1), (3), (4) выражение $n!$ оказывается определенным для всех целых неотрицательных n. Для всех таких n имеет место равенство (2).

Любопытно заметить, что $n!$ можно было определить (индуктивно*)) и „с другого конца“, взяв в качестве определения (4) и (2). После этого из (4) и (2) получается (3) и методом математической индукции *доказывается* (1).

*) Об индуктивных *определениях* можно прочитать в § 3 книги [4].

§ 8. Метод математической индукции

Методом математической индукции доказываются утверждения вида

$$(\forall n)\,\mathfrak{A}(n), \tag{1}$$

$$(\forall n \geqslant a)\,\mathfrak{A}(n), \tag{2}$$

$$(\forall n : a \leqslant n \leqslant b)\,\mathfrak{A}(n). \tag{3}$$

Пусть n — переменная с областью значений **N**. Чтобы доказать утверждение (1), достаточно доказать два утверждения:

$$\mathfrak{A}(1), \tag{4}$$

$$(\forall n)\,[\mathfrak{A}(n) \to \mathfrak{A}(n+1)]. \tag{5}$$

Утверждение (4) называется *базисом индукции*. Утверждение (5) — *индукционным шагом*. Для доказательства утверждения (5), в соответствии с изложенным в § 3 гл. IV раздела А, берут произвольное натуральное число, обозначают его какой-нибудь буквой, скажем, k, и доказывают импликацию

$$\mathfrak{A}(k) \to \mathfrak{A}(k+1). \tag{6}$$

Как следует из определения квантора общности, доказав (6), мы получаем (5). Для доказательства импликации (6), в соответствии со сказанным в § 1 гл. IV раздела А, предполагают, что истинна посылка

$$\mathfrak{A}(k) \tag{7}$$

импликации (6), и выводят из этого предположения, что истинно ее заключение $\mathfrak{A}(k+1)$. Утверждение (7) называется *предположением индукции*.

Очевидно, что из утверждений (4) и (5) следует утверждение (1). В самом деле. Пусть l — произвольное натуральное число. Докажем, что истинно $\mathfrak{A}(l)$. Тем самым (1) будет доказано. Если $l=1$, то $\mathfrak{A}(l)$ совпадает с (4). Пусть теперь $l>1$. Применяя $l-1$ раз утверждение (5) для $n=1, 2, \ldots, l-1$ получим, что верны импликации

$$\mathfrak{A}(1) \to \mathfrak{A}(2), \tag{8}$$

$$\mathfrak{A}(2) \to \mathfrak{A}(3), \tag{9}$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{A}(l-1) \to \mathfrak{A}(l). \tag{10}$$

Из (4) и (8) следует истинность $\mathfrak{A}(2)$. Из $\mathfrak{A}(2)$ и (9) — истинность $\mathfrak{A}(3)$ и т. д. Через $l-1$ шагов рассуждения мы из $\mathfrak{A}(l-1)$ и (10) получим истинность $\mathfrak{A}(l)$.

Проведенное рассуждение апеллирует к нашему интуитивному представлению о натуральном ряде и никакой *аксиомы математической индукции* (или *принципа математической индукции*) не требует. Нужда в какой-то особой аксиоме математической индукции возникает лишь при исследованиях, относящихся к основаниям арифметики, или при построении арифметики в виде формальной системы *).

При доказательстве утверждения (2) базисом индукции является утверждение

$$\mathfrak{A}(a), \tag{11}$$

индукционным шагом — утверждение

$$(\forall n \geqslant a)\,[\mathfrak{A}(n) \to \mathfrak{A}(n+1)], \tag{12}$$

предположением индукции — утверждение

$$\mathfrak{A}(k), \tag{13}$$

где k — произвольное натуральное число $\geqslant a$.

При доказательстве утверждения (3) базисом индукции является утверждение

$$\mathfrak{A}(a), \tag{14}$$

индукционным шагом — утверждение

$$(\forall n : a \leqslant n < b)\,[\mathfrak{A}(n) \to \mathfrak{A}(n+1)], \tag{15}$$

предположением индукции — утверждение

$$\mathfrak{A}(k), \tag{16}$$

где k — произвольное натуральное число такое, что $a \leqslant k < b$. Только что описанная индукция называется иногда *индукцией по интервалу*. Именно индукцией по интервалу мы доказывали утверждение (16) из § 2 гл. II раздела А. Иногда утверждение (3) доказывается так называемой *индукцией спуска*. Индукцией спуска называется индукция, базисом которой является утверждение

$$\mathfrak{A}(b) \tag{17}$$

---

*) См. примечания [2]) и [3]) к § 2 гл. I раздела А.

и индукционным шагом — утверждение

$$(\forall n: a \leqslant n < b)\,[\mathfrak{A}(n+1) \to \mathfrak{A}(n)]. \tag{18}$$

Предположением индукции в этой форме индукции является утверждение

$$\mathfrak{A}(k+1), \tag{19}$$

где k — произвольное натуральное число такое, что $a \leqslant k < b$.

Иногда утверждение (1) удобно доказывать *возвратной индукцией*. Возвратная индукция — это индукция с тем же базисом (4), но с индукционным шагом

$$(\forall n)\,[(\forall m \leqslant n)\,\mathfrak{A}(m) \to \mathfrak{A}(n+1)]. \tag{20}$$

Предположением индукции является в этой форме индукции утверждение

$$(\forall m \leqslant k)\,\mathfrak{A}(m), \tag{21}$$

где k — произвольное натуральное число. Легко видеть, что из утверждений (4), (20) утверждение (1) следует так же легко.

Возвратная индукция, с соответственно измененным базисом и индукционным шагом, применяется и при доказательстве утверждений (2), (3). В § 5 гл. III раздела А мы для доказательства утверждения вида $(\forall n \geqslant 3)\,\mathfrak{A}(n)$ использовали возвратную индукцию.

Для доказательства утверждения (1) часто бывает необходимой *индукция с двойным базисом*, т. е. индукция с базисом

$$\mathfrak{A}(1)\,\&\,\mathfrak{A}(2) \tag{22}$$

и индукционным шагом

$$(\forall n)\,[\mathfrak{A}(n)\,\&\,\mathfrak{A}(n+1) \to \mathfrak{A}(n+2)]. \tag{23}$$

Иногда приходится применять *индукцию с тройным базисом*, *индукцию с четырехкратным базисом* и т. д. Разумеется, аналогичные формы индукции могут быть применены и для доказательства утверждений (2), (3).

Перечисленными не исчерпываются все применяемые формы доказательства по индукции. Например, для доказательства утверждений вида

$$(\forall m)\,(\forall n)\,\mathfrak{A}(m, n). \tag{24}$$

применяется иногда так называемая *индукция по двум переменным*.

Впрочем, довольно часто утверждение вида (24) удается доказать без индукции по двум переменным, довольно часто удается свести доказательство утверждения (24) к индукции по одной переменной. Делается это так. Фиксируем в качестве значения переменной m произвольное натуральное число, обозначим его какой-нибудь буквой, скажем, a, и докажем утверждение

$$(\forall n)\, \mathfrak{A}(a, n). \tag{25}$$

Из (25), очевидно, следует (24). Но (25) имеет вид (1), его можно уже доказывать обычной индукцией по одной переменной. При такой схеме доказательства переменная n называется *индукционной переменной*. Говорят также, что (24) доказывалось *индукцией по n при фиксированном m*. Иногда удобно, переставив одноименные кванторы, доказывать вместо (24)

$$(\forall n)\,(\forall m)\, \mathfrak{A}(m, n) \tag{26}$$

и, фиксировав n, проводить индукцию по m. Впрочем, обычно утверждения (24), (26) пишутся (см. наше соглашение в § 3 гл. IV раздела А) в виде

$$\mathfrak{A}(m, n). \tag{27}$$

Указанная только что схема доказательства утверждений вида (24) (индукция по одной переменной при фиксированном значении другой переменной) несколько раз уже использовалась (точнее: читателю предлагалось ее применить) в книге: (16) из § 2 гл. II раздела А, (4) из § 1 гл. III раздела А, (4) из § 3 гл. III раздела А. Любопытно сравнить два доказательства каждого из перечисленных только что утверждений: рекомендованное в книге доказательство индукцией по k при фиксированном n и доказательство индукцией по n при фиксированном k.

На всякий случай замечу, что не всегда принципиально возможная схема доказательства осуществима на практике.

ЗАДАЧИ

1. Сейчас я „докажу“, что все натуральные числа равны. Требуется найти ошибку в доказательстве.

Пусть A — переменная с областью значений $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$, n — переменная с областью значений $\mathbf{N}$. Обозначим через $\mathfrak{A}(A, n)$ следующую двухместную высказывательную форму: „Если множество A содержит n элементов, то в A нет двух неравных натуральных чисел“. Очевидно, утверждение

$$(\forall n)(\forall A)\,\mathfrak{A}(A, n) \tag{28}$$

равносильно указанному в начале утверждению.

Докажем утверждение (28) индукцией по n, причем индукцию мы будем применять в ее простейшей, наиболее привычной форме. Базисом индукции является утверждение

$$(\forall A)\,\mathfrak{A}(A, 1). \tag{29}$$

Докажем (29). Возьмем произвольное $M \subseteq \mathbf{N}$ и докажем

$$\mathfrak{A}(M, 1). \tag{30}$$

Тем самым утверждение (29) будет доказано. Но, на основании определения формы $\mathfrak{A}$, (30) утверждает: „Если множество M содержит 1 элемент, то в M нет двух неравных натуральных чисел“, что очевидно. Предположим теперь, в качестве предположения индукции, что $(\forall A)\,\mathfrak{A}(A, n)$ верно для некоторого натурального k, т. е. что верно

$$(\forall A)\,\mathfrak{A}(A, k), \tag{31}$$

и докажем, что верно

$$(\forall A)\,\mathfrak{A}(A, k+1). \tag{32}$$

Тем самым утверждение (28) будет доказано. Для доказательства (32) возьмем произвольное $M \subseteq \mathbf{N}$ и докажем

$$\mathfrak{A}(M, k+1). \tag{33}$$

Тем самым (32) будет доказано. На основании определения формы $\mathfrak{A}$, (33) есть утверждение: „Если множество M содержит $k+1$ элементов, то в M нет двух неравных натуральных чисел“. Чтобы доказать эту импликацию, предположим, что ее посылка истинна, т. е. что множество M содержит $k+1$ элементов. Перенумеруем как-нибудь элементы множества M. Пусть, скажем,

$$M = \{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}\}.$$

Докажем, что в множестве M нет двух неравных натуральных чисел. Тем самым доказательство будет закончено. Рассмотрим два вспомогательных множества:

$$K \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k\}, \quad L \underset{\mathrm{Df}}{=} \{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}\}.$$

Каждое из них получается выбрасыванием из множества M одного элемента и, следовательно, содержит k элементов. В силу предположения индукции (31)

$$\mathfrak{A}(K, k),$$

т. е. „если множество K содержит k элементов, то в K нет двух неравных натуральных чисел". Но множество K содержит как раз k элементов. Следовательно, в K нет двух неравных натуральных чисел. Итак,

$$a_1 = \ldots = a_{k-1} = a_k. \tag{34}$$

Используем еще раз предположение индукции (31). Возьмем теперь в качестве значения переменной A множество L. Тогда из (31)

$$\mathfrak{A}(L, k),$$

т. е. „если множество L содержит k элементов, то в L нет двух неравных натуральных чисел". Но множество L содержит как раз k элементов. Следовательно, в L нет двух неравных натуральных чисел. В частности,

$$a_{k-1} = a_{k+1}. \tag{35}$$

Из (34) и (35) следует, что в M нет двух неравных натуральных чисел. „Доказательство" закончено.

2. Сформулировать базис индукции и индукционный шаг для доказательства утверждения (24) индукцией по двум переменным. Критерием правильности решения может служить, например, *возможность доказать*, что из Вашего базиса индукции и индукционного шага *вытекает* (24). Замечу, что у поставленной задачи существуют различные решения.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ $\sum$ И $\prod$

Перечислим важнейшие свойства оператора $\sum$:

1) $$\sum_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i) = \sum_{i=a}^{b-1} \mathfrak{A}(i) + \mathfrak{A}(b) = \mathfrak{A}(a) + \sum_{i=a+1}^{b} \mathfrak{A}(i),$$

2) $$\sum_{i=a}^{b} [c \cdot \mathfrak{A}(i)] = c \cdot \sum_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i),$$

3) $$\sum_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i) + \sum_{i=a}^{b} \mathfrak{B}(i) = \sum_{i=a}^{b} [\mathfrak{A}(i) + \mathfrak{B}(i)].$$

Эти три свойства очевидны. Они являются, по существу, свойствами операции сложения (а ие оператора $\sum$), записаиными при помощи оператора $\sum$. Зато следующие два свойства являются именно свойствами оператора $\sum$. Без оператора $\sum$, на языке „многоточий· их нельзя даже записать.

4) $$\sum_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i) = \sum_{j=a}^{b} \mathfrak{A}(j).$$

5) $$\sum_{i=a}^{b} \mathfrak{A}(i) = \sum_{i=a+1}^{b+1} \mathfrak{A}(i-1) = \sum_{i=a-1}^{b-1} \mathfrak{A}(i+1).$$

Следующие два свойства относятся к так называемым „двойиым суммам". Если $\mathfrak{A}(i, j)$ — двухместная числовая форма, то $\sum_{j=a}^{b} \mathfrak{A}(i, j)$ — еще не число, а одноместная числовая форма, зависящая от i. Поэтому ее можно еще „просуммировать по i". $\sum_{i=c}^{d} \left(\sum_{j=a}^{b} \mathfrak{A}(i, j) \right)$ — уже число. Обычно вместо $\sum_{i=c}^{d} \left(\sum_{j=a}^{b} \mathfrak{A}(i, j) \right)$ пишут $\sum_{i=c}^{d} \sum_{j=a}^{b} \mathfrak{A}(i, j)$.

6) $$\sum_{i=c}^{d}\sum_{j=a}^{b}\mathfrak{A}(i, j)=\sum_{j=a}^{b}\sum_{i=c}^{d}\mathfrak{A}(i, j).$$

7) $$\sum_{i=c}^{d}\sum_{j=a}^{b}[\mathfrak{B}(i)\cdot\mathfrak{A}(i, j)]=\sum_{i=c}^{d}\left[\mathfrak{B}(i)\cdot\sum_{j=a}^{b}\mathfrak{A}(i, j)\right].$$

Из свойств 6, 7 следует

$$\sum_{i=c}^{d}\left\{\mathfrak{B}(i)\cdot\sum_{j=a}^{b}[\mathfrak{C}(j)\cdot\mathfrak{A}(i, j)]\right\}=\sum_{j=a}^{b}\left\{\mathfrak{C}(j)\cdot\sum_{i=c}^{d}[\mathfrak{B}(i)\cdot\mathfrak{A}(i, j)]\right\}.$$

Свойства оператора $\prod$ почти аналогичны свойствам оператора $\sum$:

1) $$\prod_{i=a}^{b}\mathfrak{A}(i)=\prod_{i=a}^{b-1}\mathfrak{A}(i)\cdot\mathfrak{A}(b)=\mathfrak{A}(a)\cdot\prod_{i=a+1}^{b}\mathfrak{A}(i).$$

Буквальный аналог свойства 2, конечно, не верен.

3) $$\prod_{i=a}^{b}\mathfrak{A}(i)\cdot\prod_{i=a}^{b}\mathfrak{B}(i)=\prod_{i=a}^{b}[\mathfrak{A}(i)\cdot\mathfrak{B}(i)]$$

3′) $$\frac{\prod\limits_{i=a}^{b}\mathfrak{A}(i)}{\prod\limits_{i=a}^{b}\mathfrak{B}(i)}=\prod_{i=a}^{b}\frac{\mathfrak{A}(i)}{\mathfrak{B}(i)}.$$

4) $$\prod_{i=a}^{b}\mathfrak{A}(i)=\prod_{j=a}^{b}\mathfrak{A}(j).$$

5) $$\prod_{i=a}^{b}\mathfrak{A}(i)=\prod_{i=a+1}^{b+1}\mathfrak{A}(i-1)=\prod_{i=a-1}^{b-1}\mathfrak{A}(i+1).$$

Обозначим $\prod\limits_{i=c}^{d}\left[\prod\limits_{j=a}^{b}\mathfrak{A}(i, j)\right]$ через $\prod\limits_{i=c}^{d}\prod\limits_{j=a}^{b}\mathfrak{A}(i, j)$.

6) $$\prod_{i=c}^{d}\prod_{j=a}^{b}\mathfrak{A}(i, j)=\prod_{j=a}^{b}\prod_{i=c}^{d}\mathfrak{A}(i, j).$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ БИНОМА НЬЮТОНА

Индукцией по n докажем, что при всех натуральных n и при всех действительных (или даже комплексных) a и b, отличных от 0,

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i. \tag{1}$$

При $n=1$ (1) превращается в

$$(a+b)^1=\sum_{i=0}^{1} C_1^i a^{1-i} b^i.$$

Но

$$(a+b)^1=a+b, \quad \sum_{i=0}^{1} C_1^i a^{1-i} b^i = C_1^0 a^{1-0} b^0 + C_1^1 a^{1-1} b^1 = a+b.$$

Допустим, что при некотором натуральном $n \geqslant 1$ верно
Докажем, что тогда верно

$$(a+b)^{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i a^{n+1-i} b^i.$$

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)\cdot(a+b)^n=(a+b)\cdot\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i =$$

$$=a\cdot\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i + b\cdot\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i =$$

$$=\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^{i+1} =$$

$$=\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=1}^{n+1} C_n^{i-1} a^{n+1-i} b^i =$$

$$=a^{n+1}+\sum_{i=1}^{n} C_n^i a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=1}^{n} C_n^{i-1} a^{n+1-i} b^i + b^n$$

$$=a^{n+1}+\sum_{i=1}^{n} [C_n^i + C_n^{i-1}]\, a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} =$$

$$=a^{n+1}+\sum_{i=1}^{n} C_{n+1}^i a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} =$$

$$=\sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i a^{n+1-i} b^i.$$

На втором шаге мы использовали предположение индукции
На предпоследнем шаге мы использовали результат задачи 7 к гл. II раздела А.

3. ГОТИЧЕСКИЙ И ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТЫ

Приведем *некоторые прописные* готические буквы:

$\mathfrak{A}$ — а	$\mathfrak{K}$ — ка
$\mathfrak{B}$ — бэ	$\mathfrak{M}$ — эм
$\mathfrak{C}$ — цэ	$\mathfrak{N}$ — эн
$\mathfrak{D}$ — дэ	$\mathfrak{P}$ — пэ
$\mathfrak{E}$ — э	$\mathfrak{R}$ — эр
$\mathfrak{F}$ — эф	$\mathfrak{S}$ — эс
$\mathfrak{G}$ — гэ (же)	$\mathfrak{T}$ — тэ
$\mathfrak{H}$ — ха (аш)	

Приведем *некоторые* (прописные и строчные) греческие буквы:

α — альфа	μ — мю
β — бета	ν — ню
Γ, γ — гамма	Ξ, ξ — кси
Δ, δ — дельта	Π, π — пи
ε — эпсилон	ϱ — ро
ζ — дзета	Σ, σ — сигма
η — эта	τ — тау
θ — тэта	Φ, φ — фи
ι — йота	χ — хи
$\varkappa$ — каппа	Ψ, ψ — пси
Λ, λ — лямбда	Ω, ω — омега

4. ПРОГРАММА

А. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИКИ

Гл. I. Введение в математический язык

§ 1. Логические союзы

Высказывание.

Логические союзы: „или“, „и“, „если-то“, „необходимо и достаточно“, „тогда и только тогда“, „необходимо“, „достаточио“, „тогда“, „только тогда“, „если“ (в определениях).

Термины: „условие“ („посылка“), „заключение“, „взаимно обратные теоремы“, „взаимио противоположные теоремы“, „необходимое условие“, „достаточиое условие“.

Закон контрапозиции.

§ 2. Переменная

Буква, алфавит, слово. Алфавит математического языка. Выражение. Переменная. Область значений (область определения) переменной. Числовая переменная.

Форма, константа. s-местная форма. Допустимые значения переменной (относительно данной формы). Всюду определенная форма, нигде не определенная форма.

Обозначения: $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_s)$, $!\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_s)$.

Термины: форма $\mathfrak{A}$ зависит (не зависит) от буквы x, форма $\mathfrak{A}$ определена при данных значениях переменных.

Равносильные формы и константы. Обозначения: $\mathfrak{A} \asymp \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \not\asymp \mathfrak{B}$.

Числовая форма. Обозначения: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$.

Истинностное значение. Равносильные высказывания. Высказывательная форма. Обозначения: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}$.

Связанная и свободная переменная.

§ 3. =

Различные смыслы буквы „=". $\underset{\mathrm{Df}}{=}$. $\underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$. Термин „имя".

Гл. II. Множество

§ 1. Множество

Термины: „множество" („система", „класс", „область", „семейство"), „принадлежит" („является элементом"). Обозначения: $\in$, $\notin$. Конечные и бесконечные множества. Способы задания множеств. Обозначение: $\mathscr{E}\{x \in M \mid \mathfrak{A}(x)\}$. Равные множества. Пустое множество. Одноэлементное множество.

§ 2. Подмножество

Подмножество (надмножество) данного множества. Обозначения: $\subseteq$, $\not\subseteq$. Несобственные (собственные) подмножества данного множества. Истинное подмножество данного множества. Обозначения: $\subset$, $\not\subset$.

Система множеств. Система $\mathfrak{P}(M)$ подмножеств множества M.

Число C_n^k k-элементных подмножеств n-элементного множества. Число всех подмножеств n-элементного множества.

§ 3. Операции над множествами

Соединение (объединение), пересечение двух, конечного числа, системы множеств. Термины: „не пересекаются" („пересекаются"), „в общем положении". Теорема о пяти возможностях.

Разность двух множеств. Дополнение.

Доказательство „равенств с множествами". Основные „тождества с множествами".

Гл. III. Кортеж

§ 1. Кортеж

Термины: „кортеж“, „компонента“ („координата“). Длина кортежа. Пара, тройка, четверка и т. д. Кортеж длины 1. Пустой кортеж. Равные кортежи.

Кортеж над данным множеством.

Число $\mathfrak{A}_n^k$ кортежей длины k над n-элементным множеством.

§ 2. Прямое произведение

Прямое произведение множеств. s-я степень M^s множества M. M^∞. Число элементов прямого произведения конечных множеств.

§ 3. Комбинаторика

Размещение. Перестановка над данным (конечным) множеством.

Число A_n^k размещений длины k над n-элементным множеством. Число P_n перестановок над n-элементным множеством.

Число $\mathfrak{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ кортежей, имеющих, в качестве компонент, n_1 раз — элемент a_1, n_2 раз — элемент $a_2, \ldots, n_r$ раз — элемент a_r. Число распределений $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i$ предметов по r ящикам вместимостью, соответственно, $n_1, n_2, \ldots, n_r$.

Решение комбинаторных задач.

§ 4. Проекция

Проекция кортежа. Проекция множества.

§ 5. График

График. Область определения графика. Область значений графика.

Инверсия пары. Инверсия графика. Симметричный график.

Композиция двух графиков. Композиция произвольного (конечного) числа графиков.

Функциональный графнк. Инъективный график. Влияние операций инверсии и композиции на свойства функциональности и инъективности.

Гл. IV. Алгебра логики

§ 1. Высказывание

Высказывательная переменная.

Операции над высказываниями: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция. Истинностные таблицы. Метод истинностных таблиц.

Одинаковые высказывания и равносильные высказывания.

Основные „равносильности с высказываниями". Законы де Моргана. Закон контрапозиции. Закон исключенного третьего.

Доказательство теорем различного логического строения. Доказательство „по контрапозиции" и доказательство „от противного".

§ 2. Высказывательная форма

Всюду определенные и не всюду определенные высказывательные формы. Доопределение высказывательной формы до всюду определенной.

Операции над высказывательными формами: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция. Сохранение „равносильностей с высказываниями". Равносильность и эквиваленция высказывательных форм.

Область истинности высказывательной формы. Зависимость области истинности от порядка переменных. Влияние логических операций на область истинности.

§ 3. Кванторы

Квантор общности. Квантор существования.

Свойства операций навешивания кванторов. Влияние операций навешивания кванторов на область истинности.

Ограниченные кванторы. Связь между ограниченными и „неограниченными" кванторами. Сохранение свойств для ограниченных кванторов.

Доказательство теорем различного логического строения.

Доказательство логических равносильностей.

Термин: „взаимно обратные" („взаимно противоположные") теоремы. Закон контрапозиции.

Опускание кванторов общности.

Чтение кванторных выражений.

Гл. V. Соответствие

§ 1. Соответствие

Соответствие. График соответствия. Область отправления соответствия. Область прибытия соответствия. Область определения соответствия. Область значений соответствия. Соответствие между множествами X и Y.

Термины. „элемент b соответствует элементу a в (при) соответствии Г", „соответствие Г определено на a".

Инверсия соответствия.

Композиция двух соответствий. Композиция произвольного (конечного) числа соответствий.

Образ множества при данном соответствии (относительно данного соответствия). Полный прообраз множества при данном соответствии (относительно данного соответствия). Выражение образа и полного прообраза через график. Образ множества при композиции соответствий.

Сужение соответствия на данное множество. Продолжение соответствия.

§ 2. Основные свойства соответствий

Функциональное соответствие (функция). Инъективное соответствие. Всюду определенное соответствие. Сюръективное соответствие. Биективное, или взаимно-однозначное, соответствие (биекция).

Влияние операций инверсии и композиции на основные свойства соответствий.

Число взаимно-однозначных соответствий между конечными множествами.

§ 3. Взаимно-однозначные соответствия между бесконечными множествами

Установление взаимно-однозначных соответствий между бесконечными множествами (в частности, между множеством N натуральных чисел и множеством R рациональных чисел; между интервалом (0,1) и сегментом [0,1]).

Теорема Кантора о несчетности сегмента [0,1].

Равномощные множества.

Счетное множество. Не более чем счетное множество. Несчетное множество. Континуальное множество.

Операции над не более чем счетными множествами.

Гл. VI. Функция

§ 1. Функция

Функция типа $X \to Y$.

Термин: „значение функции f на a". Обозначение: $f(a)$ [af, f_a]. Доопределение высказывательных форм, содержащих выражение „$f(x)$".

Нигде не определенная функция. Тождественная функция. Константная функция.

Термины: „функция f определена на A", „функция f тождественна на A", „функция f константна на A".

Отображение. Сюръекция. Инъекция. Взаимно-однозначное отображение множества X на множество Y.

Тождественное отображение I_X множества X на себя.

Критерий функциональности инверсии.

Прообраз элемента относительно (при) данной функции.

Композиция функций. Теорема о значении композиции. Теорема о тождественных композициях.

Задание функций формами или константами. Кусочное задание функций. Независимая переменная (аргумент), зависимая переменная.

Число отображений множества из m элементов в множество из n элементов.

§ 2. Обратная функция

Свойства функции f^{-1}.

Функция, обратная для данной функции. Свойства обратной функции. Существование и единственность обратной функции. Теорема о графике обратной функции.

§ 3. s-местная функция

s-местная функция (функция от s аргументов). s-местная функция типа $M \rightarrow Y$.

s-местная (алгебраическая) операция на данном множестве. Унарная, бинарная, тернарная операция.

Гл. VII. Отношение

§ 1. Отношение

Отношение. График отношения. Область задания отношения. Отношение на множестве M.

Термины: „элементы a и b находятся в отношении φ“, „элемент a находится в отношении φ к элементу b“, „пара $\langle a, b\rangle$ находится в отношении φ“, „пара $\langle a, b\rangle$ удовлетворяет отношению φ“, „для пары $\langle a, b\rangle$ выполнено (выполняется) отношение φ“. Обозначение: $a\varphi b$.

Задание отношений высказывательными формами.

Полное отношение. Пустое отношение. Отношение равенства. Отношение неравенства.

Операции над отношениями: соединение (объединение), пересечение, разность, дополнение, инверсия, композиция. Термин: „отношение φ влечет (имплицирует) отношение ψ“.

Сужение отношения на данное множество.

§ 2. Основные свойства отношений

Рефлексивное отношение. Антирефлексивное отношение. Симметричное отношение. Антисимметричное отношение. Связанное отношение. Транзитивное отношение.

Характеристика основных свойств отношений через график.

Зависимость между основными свойствами. Влияние операций над отношениями на основные свойства. Перенос основных свойств на инверсию и на сужение.

§ 3. Разбиение

Разбиение данного множества. Классы разбиения.

Поэлементное разбиение. Целое разбиение. Тривиальные (нетривиальные) разбиения.

Разбиение на классы прообразов относительно данного сюръективного отображения.

Естественное отображение множества на его разбиение.

§ 4. Отношеиие эквивалеитности

Отношение эквивалентности.

Термин: „a и b эквивалентны (по данному отношению)". Обозначення: $a \underset{\varphi}{\sim} b$, $a \sim b$.

Сопряженные отношение и разбиенне.

Теорема: о единственностн разбиения, сопряженного с данным отношением. Теорема об отношении, сопряженном с некоторым разбиением. Теорема о существовании разбиения, сопряженного с данным отношением эквивалентности.

Фактормножество M/φ множества M по отношению эквивалентности φ.

§ 5. Отношеиия порядка

Отношения порядка (нестрогого, совершенного нестрогого, строгого, совершенного строгого).

Зависимость между отношениями нестрогого (совершенного нестрогого) и строгого (совершенного строгого) порядка на данном множестве.

Инверсия отношения порядка. Сужение отношения порядка на данное подмножество области задания.

Теорема о зависимостн между отношениями совершенного строгого порядка на конечном множестве и перестановками над тем же множеством.

Несуществование на множестве **K** комплексных чисел отношения совершенного строгого порядка с заданными дополнительными свойствами.

Изображение отношений порядка на конечных множествах диаграммами.

Отношение квазипорядка. Теорема об отношенни эквивалентности, индуцироваином отношением квазипорядка. Теорема об отношении порядка, индуцированном отношением квазипорядка.

Отношение квазипорядка, индуцированное данным множеством кортежей. Дерево грамматнческой синонимии.

Б. НЕКОТОРЫЕ «ШКОЛЬНЫЕ» ТЕРМИНЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

§ 1. Числовые неравенства

$<$ и $\leqslant$. Основные и производные свойства числовых неравенств.

§ 2. Абсолютная величина

$|a|$. Свойства абсолютной величины.

§ 3. Корни. Показатели степени

$\sqrt[n]{a}$. Свойства корней. Различные виды показателей степени. Свойства степеней.

§ 4. Уравнения

Равенство. Числовое равенство. Квазитождество, тождество. Уравнение. Решение (корень) уравнения. Равносильные уравнения. Выводное уравнение. Уравнение, равносильное дизъюнкции уравнений.

Влияние простейших преобразований на решения уравнения.

§ 5. Системы уравнений

Система уравнений. Решение системы. Равносильные системы. Выводная система. Система, равносильная дизъюнкции систем.

Влияние простейших преобразований на решения системы.

§ 6. Неравенства с переменными

Три смысла термина „неравенство“. Числовое неравенство. Система неравенств. Смешанная система.

Решение неравенства, системы неравенств, смешанной системы. Равносильные неравенства, системы неравенств, смешанные системы. Неравенство, система неравенств, смешанная система, равносильные дизъюнкции неравенств, систем неравенств, смешанных систем.

Влияние простейших преобразований на решения неравенства, системы неравенств, смешанной системы.

§ 7. $n!$

§ 8. Метод математической индукции

Метод математической индукции. Базис индукции. Индукционный шаг. Предположение индукции. Индукционная переменная.

Различные формы метода математической индукции: индукция по интервалу, индукция спуска, возвратная индукция, индукция с k-кратным базисом, индукция по нескольким переменным.

ПРИМЕЧАНИЯ

§ 1 гл. I раздела А

[1]) Условная, несколько парадоксальная сущность соглашения об истинности утверждения „Если A, то B“ с ложной посылкой A хорошо подчеркивается также четверостишием, предложеныим (в 1961 году) студентом 1 курса Отделения теоретической и прикладной лингвистики филологического факультета МГУ В. В. Раскиным:

Если мы возьмем носилки
И на них положим дом,
Мы его перевернем,
В силу ложности посылки,
Тривиальным,
тривиальным,
тривиальным образом.

[2]) В отличие от терминов „теорема, обратная к данной теореме“ и „теорема, противоположная к данной теореме“, термин „прямая теорема“ кажется мне бессодержательным и не нужным.

§ 2 гл. I раздела А

[1]) Пользуюсь случаем заметить, что термин „переменная величина“ и вообще термин „величина“ в математике как таковой, в науке „математика“, в теоретической математике (в отличие от приложений математики, от прикладной математики, о которых разговор особый) представляется мне не удобным и совершенно не нужным.

[2]) Существуют и другие пути построения математики, например, конструктивистский (некоторое представление о нем можно получить из статьи А. А. Маркова [10] или введения к статье Н. А. Шанина [22]) или формалистский (см. введение к книге Н. Бурбаки [3] или статью Н. Бурбаки [2]), на которых это, вероятно, возможно.

[3]) Иногда, при формалистском построении математики (см. предыдущее примечание) или, у́же, при изучении отдельных математических теорий в виде формальных систем (невозможно бегло, в несколько слов, объяснить, что такое формальная система; желающие могут попробовать познакомиться с этим понятием по введению к книге А. Черча [21], где оно называется „логистическая система“) понятие переменной можно определить заранее, „раз навсегда“, независимо от конкретных рассматриваемых выражений.

[4]) В тех случаях, которые указаны в предыдущем примечании, терминология здесь другая. В этих случаях связанная переменная также является переменной, а свободная переменная означает уже не то же, что просто переменная.

§ 1 гл. II раздела А

[1]) Излагаемая здесь теория получила в математике название „наивной“ теории множеств. По-иному понятие множества трактуется при конструктивистском (там оно является *определяемым* понятием) и формалистском построении математики (см. примечание [2]) к § 2 гл. I).

[2]) В этом утверждении используется, в частности, так называемая *абстракция потенциальной осуществимости* (см. стр. 15 монографии А. А. Маркова [9]).

[3]) Пустое множество обозначают также символами Λ и 0.

[4]) В известном смысле через понятие множества можно определить предполагающееся здесь известным понятие натурального числа, а затем уж и все остальные главные числовые системы.

§ 2 гл. II раздела А

[1]) В иностранной литературе вместо C_n^k чаще пишут $\binom{n}{k}$.

§ 3 гл. II раздела А

[1]) Соединение множеств A и B называется также *суммой* множеств A и B и обозначается иногда через $A + B$.

[2]) Пересечение множеств A и B называется также *произведением* множеств A и B и обозначается также через $A \cdot B$ или AB.

[3]) Разность множеств A и B обозначается также через $A - B$.

§ 1 гл. III раздела А

[1]) Кроме того, в теории чисел через (a, b) часто обозначают наибольший общий делитель *целых* чисел a и b, а через $[a, b]$ — их наименьшее общее кратное.

[2]) Иногда в качестве неопределяемого берут только понятие пары, а *тройку* $\langle a, b, c\rangle$ *определяют* как пару $\langle a, \langle b, c\rangle\rangle$ (или пару $\langle\langle a, b\rangle, c\rangle$), *четверку определяют* через уже определенную тройку и т. д.

§ 2 гл. III раздела А

[1]) Прямое произведение множеств A и B называется также *декартовым произведением*. В книге В. А. Успенского [20] прямое произведение множеств A и B называется *внешним произведением* и обозначается через $[A, B]$.

§ 3 гл. III раздела А

[1]) Разумеется, обе эти формулировки: „подсчитать“, „выразить формулой“ являются не очень корректными. Что значит „подсчитать“? „Указать число“? Но ведь чаще всего в подобной задаче даны не конкретные числа, а буквенные обозначения. n^k — не совсем число. Это все-таки формула. Значит, „выразить формулой“? Но что такое „формула“? Почему n^k — формула, а $\mathfrak{A}_n^k$ — не формула? Или $\mathfrak{A}_n^k$ — тоже формула? Разумеется, на этот вопрос, не определив термина „формула“, ответить нельзя. И это определение и уточнение постановки комбинаторных задач вполне могут быть даны (причем не одним способом). Я не буду, однако, здесь этого делать, апеллируя к интуитивному пониманию, что значит „решить задачу“, в каждом конкретном случае.

[2]) Такие кортежи называют иногда „перестановками с повторениями“.

[3]) В него не входит, например, формула для так называемых „сочетаний с повторениями“.

§ 5 гл. III раздела А

[1]) Очень часто обозначают наоборот: $Q \circ P$.

§ 1 гл. IV раздела А

[1]) Эти операции часто называют операциями *алгебры логики*, операциями *алгебры высказываний* или операциями *исчисления высказываний*.

[2]) Введенные операции часто обозначают по-другому. Например, отрицание высказывания A часто обозначается $\overline{A}$, для обозначения операции конъюнкции часто используют знак $\wedge$, для импликации — знак $\supset$, для эквиваленции — знаки $\longleftrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\equiv$ (знак $\equiv$ у нас занят и имеет другой смысл).

[3]) Я считаю принципиальным, что по вопросу об „одинаковых высказываниях“, „различных высказываниях“ вовсе не обязательно становиться на *такую* точку зрения, из которой для любых двух высказываний A и B будет вытекать, одинаковы они или различны. Более того, вовсе не обязательно по обсуждаемому вопросу становиться на *какую-либо* точку зрения. Я считаю принципиально возможным снять обсуждаемый вопрос так, как это сделано в книге. Я не согласен, в частности, что по обсуждаемому вопросу „возможны две точки зрения“ ([20], стр. 54).

[4]) Это рассуждение показывает, что для доказательства теоремы (21) нужно, во-первых, из предложения об истинности C вывести истинность B, т. е. доказать, что импликация $C \rightarrow B$ истинна, и, во-вторых, из предположения об истинности D вывести истинность B, т. е. доказать, что импликация $D \rightarrow B$ истинна. Таким образом, для доказательства теоремы (21) нужно доказать две импликации: $C \rightarrow B$ и $D \rightarrow B$ или, что все равно, доказать

$(C \to B)$ & $(D \to B)$. Наше рассуждение приводит к гипотезе об истинности равносильности

$$C \vee D \to B \equiv (C \to B) \mathbin{\&} (D \to B).$$

Как легко проверить обычным табличным методом, наша гипотеза действительно верна: указаииая равносильность истиниа.

[5]) Это рассуждение показывает, что для доказательства теоремы (22) нужно, во-первых, из предположения об истинности A вывести истинность C, т. е. доказать импликацию $A \to C$, и, во-вторых, из предположення об истинности A вывести истинность D, т. е. доказать импликацию $A \to D$. Таким образом, для доказательства теоремы (22) нужио доказать две импликации: $A \to C$ и $A \to D$ или, что все равно, доказать $(A \to C)$ & $(A \to D)$. Наше рассуждение приводит к гипотезе об истиииости равносильиости

$$A \to C \mathbin{\&} D \equiv (A \to C) \mathbin{\&} (A \to D).$$

Методом истинностных таблиц гипотеза легко подтверждается.

[6]) Проведенное рассуждение показывает, что

$$A \to C \vee D \equiv A \mathbin{\&} \neg C \to D.$$

Легко видеть также, что

$$A \to C \vee D \equiv (A \to C) \vee (A \to D).$$

§ 3 гл. IV раздела А

[1]) Обычно содержание этого параграфа не относят к алгебре логики, однако в нем, как и в §§ 1, 2, даются некоторые рецепты для „механического" доказательства, доказательства „не думая", доказательства „вычислениями".

[2]) Очень часто вместо (2) пишут $(x)\, \mathfrak{A}(x)$.

[3]) Часто вместо (4) пишут $(Ex)\, \mathfrak{A}(x)$.

[4]) Правило перестановки „разноименных" кванторов, верное в одну и не верное в другую сторону, хорошо воплощено в двух стихотворениях, предложенных (в 1961 году) студенткой 2 курса Отделения теоретической и прикладной лингвистики филологического факультета МГУ А. А. Раскиной.

С одной стороны,

Если что-то существует,
Справедливое для всех,
То любой студент почует,
Коли в знаньях нет прорех,
Что для всех,
        для всех,
           для всех
Что-то явно существует.

С другой стороны,

— Для всех из иас, любой поймет,
Есть год, в который мы родились.
Так значит, существует год,
Когда мы все на свет явились.
Так зиачит, папа, ты и я
Друг другу сверстниками стали.
—Не лги, мой сын, менять нельзя
Свободио кванторы местами.

[5]) Иногда вместо $\mathscr{E}\,\{x \in M \mid \mathfrak{A}(x)\}$ пишут $(\mathsf{W}\, x \in M)\,\mathfrak{A}(x)$, чем сходство с кваиторами еще больше подчеркивается (W — перевернутая первая буква слова „множество“).

§ 1 гл. V раздела A

[1]) Иногда вместо термина „инверсия соответствия Г“ говорят „соответствие, обратное к соответствию Г“, однако этот термин неудобен ввиду термина „обратная функция“ (см. § 2 гл. VI).

[2]) Если композицию графиков G и H обозначают через $H \circ G$ (см. примечание [1]) к § 5 гл. III), то композицию соответствий Γ и Δ обозначают через $\Delta \circ \Gamma$.

[3]) В (14) (и ниже в (27)) мы используем обозначение, более общее, чем то, которое было определено в § 3 гл. II. Пусть $\mathfrak{M}$ — система миожеств, A — множество, x — переменная с областью значений A, $\mathfrak{A}(x)$ — форма, принимающая свои значения в $\mathfrak{M}$, y — переменная с областью значений $\bigcup\limits_{X \in \mathfrak{M}} X$. Тогда

$$\bigcup_{x \in A} \mathfrak{A}(x) \underset{\mathrm{Df}}{=} (\overline{\exists\, x \in A)\ [y \in \mathfrak{A}(x)]}, \qquad \bigcap_{x \in A} \mathfrak{A}(x) \underset{\mathrm{Df}}{=} (\overline{\forall\, x \in A)\ [y \in \mathfrak{A}(x)]}.$$

[4]) С иашим определеиием конкурируют иногда более удобные определения сужения, как соответствия $\langle G \cap (A \times Y),\ A,\ Y \rangle$ (это определение по существу совпадает с определением Бурбаки [3]) или как соответствия $\langle G \cap (A \times Y),\ A,\ \Gamma(A) \rangle$.

[5]) Коикурирующее определеиие: „еслн $G \subseteq H$, $X \subseteq Z$, $Y \subseteq U$“ (так у Бурбаки [3]).

§ 1 гл. VI раздела A

[1]) Иногда *функцией* называют просто фуикциональный график (см., например, [14] или [19]).

[2]) В книге [20] предложено фуикции (не обязательио всюду определенные) называть *частичными отображениями*, что не очеиь удобно, поскольку по законам русского словоупотребления желательно, чтобы всякое частичное отображеиие было отображеиием, а ие наоборот.

[3]) Употребляемые сииоиимы: *разнозначная функция*, *однолистная функция*.

[4]) В качестве синоиима к этим терминам употребляют также термин „*взаимно-однозначное отображение*“.

§ 3 гл. VI раздела А

[1]) Иногда определяют также *нульместную* (нульарную) *операцию на M*, понимая под ней не отображение множества M^0 в M, а просто элемент множества M.

§ 1 гл. VII раздела А

[1]) Итак, из „начальных понятий", перечисленных в предисловии, понятия множества и кортежа являются у нас неопределяемыми, понятия соответствия, функции и отношения — определяемыми. Заметим, что выделение из начальных понятий неопределяемых понятий является в некоторой степени произвольным. Например, как указано в § 1 гл. III, понятие кортежа можно определить через понятие множества.

[2]) Иногда вводят более общее понятие отношения, называя пару множеств $\langle \Phi, M \rangle$ *отношением*, если существует такое s, что $\Phi \subseteq M^s$. Отношение $\langle \Phi, M \rangle$ называют тогда *k-местным отношением*, если $\Phi \subseteq M^k$. В этой терминологии определенное нами отношение является *двухместным* (или *бинарным*) *отношением*.

[3]) Как и везде в этой книге, определяя термин „отношение", мы стоим на подчеркнуто объемной (экстенсиональной) точке зрения, характерной для современной теоретико-множественной математики; мы считаем, что отношение *полностью задается* своей областью задания и своим графиком (более того, у нас отношение *и есть* пара из графика и области задания). Иногда, однако, пробуют стоять на „содержательной" (интенсиональной) точке зрения, считая *разными*, например, отношения „иметь один и тот же остаток при делении на 2" и „давать при сложении четное число".

§ 2 гл. VII раздела А

[1]) Иногда говорят также „*иррефлексивным*"

[2]) Не следует путать свойства антисимметричности и асимметричности. Отношение $\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \Phi, M \rangle$ называется *асимметричным*, если

$$x\varphi y \to \neg\, (y\varphi x)$$

(ср. с (9)), т. е. если

$$\Phi \cap \Phi^{-1} = \varnothing$$

(ср. с (11)).

§ 3 гл. VII раздела А

[1]) Термины „поэлементное разбиение", „целое разбиение" предложены мне студентами. Они мне кажутся более удобными, чем употребляющиеся иногда термины „максимальное разбиение" и „минимальное разбиение" или „единичное разбиение" и „нуле-

вое разбиение“ и т. п., так как и целое разбиение и поэлементное разбиение — оба вправе называться как максимальным разбиением, так и минимальным разбиением; как единичным разбиением, так и нулевым разбиением и т. п., и поэтому трудно сообразить, трудно вспомнить, которое из двух „крайних“ разбиений мы назвали максимальным, которое — минимальным; которое — единичным, которое — нулевым и т. п. Предложенные в книге термины, очевидно, свободны от этого недостатка.

§ 4 гл. VII раздела А

[1]) Иногда вместо (1), (2) пишут

$$a \equiv b \pmod{\varphi}$$

(читается: *a эквивалентно b по модулю* φ) или

$$a \equiv b.$$

У нас, однако, знак $\equiv$ уже занят для обозначения равносильности высказывательных форм.

[2]) Точнее,

$$\mathfrak{M} \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathscr{E}\,\{X \in \mathfrak{P}(M) \mid (\exists a \in M)\,[X = q(a)]\}.$$

§ 5 гл. VII раздела А

[1]) В статье [6] это дерево называется *деревом грамматической омонимии.*

§ 1 раздела Б

[1]) Свойство 6 (или равносильное ему, при наличии свойств 1—5, свойство 6а) при аксиоматическом построении теории действительных чисел (см., например, статью [7]) называется *аксиомой Архимеда.*

§ 3 раздела Б

[1]) Все вышесказанное, начиная от теоремы, на которой основано понятие корня, *без всяких изменений* остается верным не только для натуральных n, но и для любого целого n, отличного от 0. Поэтому, *ничего не меняя*, понятие корня и символ $\sqrt[n]{a}$ мы могли бы определить для всех целых $n \neq 0$, а не только для натуральных n, как мы, следуя традиции, сделали. Впрочем, в определении понятия корня и символа $\sqrt[n]{a}$ для других n нет особой нужды. Определение степени с рациональным показателем, которое мы дадим ниже, этого не требует.

§ 4 раздела Б

[1]) По обычной школьной терминологии то, что мы назвали квазитождеством, называется тождеством. По этой терминологии даже равенство $\lg x = \lg(-x)$ является тождеством, что, конечно, неприятно. Даже по терминологии П. С. Моденова и С. И. Новоселова ([13], стр. 29—30) равенство $\lg x = \lg(-x)$, „удовлетворяется тождественно“. Поскольку каждое тождество является квазитождеством, возможно, лучше было бы то, что мы назвали квазитождествами, назвать *тождествами в широком смысле*, а *квазитождествами* называть тождества в широком смысле, не являющиеся тождествами.

[2]) К многочленам в математике обычно относят также и числа.

УПОМЯНУТАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. Бурбаки Н., Очерки по истории математики, стр. 245—259, М., ИЛ, 1963.
3. Бурбаки Н., Теория множеств, М., «Мир», 1965.
4. Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. I, М.—Л., Гостехиздат, 1947.
5. Депман И. Я., Метод математической индукции, Л., Учпедгиз, 1957.
6. Добрушин Р. Л., Опыт определения понятия элементарной грамматической категории, Математическое просвещение, вып. 6, стр. 52—60, М., Физматгиз, 1961.
7. Дубовицкий А. Я., Аксиоматическое построение действительных чисел (преподавание в педагогическом институте), Математическое просвещение, вып. 2, стр. 157—168, М., Гостехиздат, 1957.
8. Курант Р. и Роббинс Г., Что такое математика (элементарный очерк идей и методов), М.—Л., Гостехиздат, 1947.
9. Марков А. А., Теория алгорифмов, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XLII, М.— Л., АН СССР, 1954.
10. Марков А. А., О конструктивной математике, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LXVII, стр. 8—14, М.—Л., АН СССР, 1962.
11. Математическое просвещение, вып. 2, стр. 131—171, М., Гостехиздат, 1957.
12. Математическое просвещение, вып. 5, стр. 99—116, 229—240; М., Физматгиз, 1960.
13. Моденов П. С. и Новоселов С. И., Пособие по математике для поступающих в вузы, МГУ, 1963.
14. Monjallon A., Introduction aux Mathématiques Modernes, Paris, librairie Vuibert, 1960.
15. Натансон И. П., Теория фуикций вещественной переменной, М., Гостехиздат, 1957.
16. Пойа Д., Математика и Правдоподобные рассуждения, М., ИЛ, 1957.
17. Пойа Д., Как решать задачу, М., Учпедгиз, 1959.
18. Радемахер Г. и Теплиц О., Числа и фигуры. Опыты математического мышления, М., Физматгиз, 1962.

19. S t o l l R. R., Sets, Logic, and Axiomatic Theories, San Francisco and London, W. H. Freeman and Company, 1961.
20. У с п е н с к и й В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., Физматгиз, 1960.
21. Ч е р ч А., Введение в математическую логику, т. I, М., ИЛ, 1960.
22. Ш а н и н Н. А., Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LXVII, стр. 15—294; М.—Л., АН СССР, 1962.

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ