Г. Е. Шилов и Фан Дык Тинь

Интеграл мера и производная на линейных пространствах

Г. Е. ШИЛОВ и ФАН ДЫК ТИНЬ

ИНТЕГРАЛ, МЕРА И ПРОИЗВОДНАЯ
НА ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

517.2
Ш 59
УДК 517.5

АННОТАЦИЯ

Эту книгу следует рассматривать как вторую часть книги Г. Е. Шилова и Б. Л. Гуревича «Интеграл, мера и производная», впервые изданной в 1964 г. и ныне выходящей вторым изданием с подзаголовком «Общая часть». В книге рассматриваются проблемы теории меры и интегрирования на бесконечномерных пространствах, составляющие промежуточную область между математическим анализом и теорией вероятностей. Изучаются измеримые линейные и квадратичные функционалы, линейные измеримые преобразования, указываются формулы для вычисления некоторых классов интегралов.

Книга рассчитана на научных работников в области математики и физики, а также на студентов старших курсов и аспирантов университетов, пединститутов и втузов.

Георгий Евгеньевич Шилов и Фан Дык Тинь

ИНТЕГРАЛ, МЕРА И ПРОИЗВОДНАЯ
на линейных пространствах

М., 1967 г., 192 стр.

Редактор *М. М. Горячая*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская* Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в набор 20/XI 1966 г. Подписано к печати 7/III 1967 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 6. Условн. печ. л. 10,08. Уч.-изд. л. 9,23. Тираж 15 000 экз. Т-00542. Цена 55 коп. Заказ № 465.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.

$\frac{2-2-3}{97-67}$

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга излагает вопросы, относящиеся к теории интегрирования на бесконечномерных пространствах, начатой работами Даниэля и Винера во втором десятилетии нашего века. В настоящее время интегрирование на бесконечномерных пространствах становится активным средством математического анализа, имея непосредственное приложение в теории вероятностей, а также в теоретической физике и гидромеханике. Мера Винера на пространстве C непрерывных функций имеет прямую физическую интерпретацию: ее значение на множестве $E \subset C$ выражает вероятность пролета броуновской частицы по одной из возможных траекторий, составляющих множество E. Мера Винера является представителем класса так называемых гауссовых мер, которые характеризуются тем, что на каждом цилиндрическом множестве они задаются с помощью квадратичной экспоненты: например, в случае прямой гауссова мера промежутка $a < x \leqslant b$ дается формулой вида

$$\mu\{x\colon a < x \leqslant b\} = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_a^b e^{-\gamma x^2}\, dx$$

с произвольной постоянной $\gamma \geqslant 0$.

Простейшим (бесконечномерным) линейным пространством с гауссовой мерой является пространство Ω, состоящее из всех числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ с мерой брусов, выражающейся формулой

$$\omega\{x\colon a_1 < x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n < x_n \leqslant b_n\} = \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a_k}^{b_k} e^{-x_k^2}\, dx_k \right\}.$$

В теории вероятностей пространство Ω соответствует последовательности случайных величин с независимыми и одинаково нормально распределенными значениями. Но пространство Ω — не только простейшее пространство с гауссовой мерой, оно также и универсальное такое пространство. Именно, оказывается, что любое пространство X с гауссовой мерой (точнее, предмерой — см. § 2) μ при некоторых предположениях счетности может быть отображено линейно, взаимно однозначно и с сохранением мер брусов на часть пространства Ω; при этом предмера μ в пространстве X дополняется до (счетно-аддитивной) меры тогда и только тогда, когда образ X в Ω есть множество полной меры ω (или, более общим образом, множество внешней меры 1).

Тот случай, когда отображение $X \to \Omega$ происходит на множество полной меры в Ω, естественно выделять как наиболее правильный; назовем пространство X со счетноаддитивной гауссовой мерой μ в этом случае *нормальным.*

Полученный результат показывает, что *любые два нормальных пространства X и Y линейно метрически изоморфны*, иначе говоря, существует линейный оператор U, определенный на множестве полной меры в X и переводящий его взаимно однозначно в множество полной меры Y так, что каждое измеримое множество переходит в измеримое равной меры.

Так, пространство $\hat{L}_2(0, \pi)$ квадратично интегрируемых функций, ортогональных к 1, с мерой Винера w является нормальным; оно отображается линейно и взаимно однозначно на ту часть пространства Ω, которая выделяется неравенством

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{k^2} < \infty,$$

а это множество измеримо в Ω и имеет полную меру. Пространство $C_0(0, \pi)$ непрерывных функций $x(t)$, равных 0 при $t = 0$, с классической мерой Винера также является нормальным, хотя это не столь очевидно. По указанным причинам метрические закономерности в пространстве непрерывных функций с мерой Винера являются следствиями метрических закономерностей в пространстве Ω.

Но в пространстве Ω анализ метрических закономерностей может быть проведен простыми средствами типа элементарной геометрии гильбертова пространства, соединенной с общей теорией интеграла на абстрактных множествах. Последовательным проведением этой идеи мы и занимаемся на большей части книги.

Материал излагается в следующей последовательности.

В § 1 описывается общее построение интеграла на пространстве функций с заданной элементарной мерой. Мы используем схему Даниэля, предполагая известными читателю основные ее элементы (например, по книге Г. Е. Шилова и Б. Л. Гуревича «Интеграл, мера и производная (общая часть)», изд. 2, перераб., «Наука», 1967).

В § 2 рассматривается основная теорема об отображении линейного пространства с предмерой в пространство функций и об условиях расширения предмеры до меры. По ходу изложения строится пространство Ω всех числовых последовательностей с канонической гауссовой мерой.

В § 3 рассматриваются общие свойства меры на пространстве Ω.

В § 4 строится мера Винера, сначала в гильбертовом пространстве, затем в пространстве непрерывных функций.

В §§ 5 и 6 с помощью описания возможных сдвигов в пространстве Ω (переводящих меру ω в эквивалентную) указывается структура измеримых линейных функционалов в Ω.

Во вспомогательном § 7 приводится необходимый аппарат теории операторов в гильбертовом пространстве.

В §§ 8 и 10 описываются измеримые линейные преобразования в Ω.

В § 9 определяются и приводятся к каноническому виду квадратичные функционалы в Ω.

В §§ 11 и 12 в применении к пространству Винера мы получаем ряд предложений о свойствах интегралов Винера и приводим вычисление некоторых классов интегралов.

В Дополнении, написанном М. Г. Сонисом, описываются счетно-аддитивные гауссовы меры в произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве и устанавливаются условия их эквивалентности (либо сингулярности). Дополнение имеет непосредственное отношение к результатам §§ 3, 4.

Ссылки по ходу изложения на оригинальные работы, как правило, не делаются. В конце книги даны литературные указания и библиография. Ссылки на учебную литературу даются в подстрочных примечаниях.

Авторы приносят благодарность участникам семинара МГУ по теории меры и в особенности профессору С. В. Фомину за дружескую критику и ряд ценных советов.

Авторы

§ 1. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА — СТИЛТЬЕСА В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Схема Даниэля. Пусть на абстрактном множестве X задано семейство $H(X)$ вещественных функций $h(x)$, которые мы будем называть в дальнейшем *элементарными функциями*. Предполагается, что семейство H содержит функцию $h(x) \equiv 1$ и

а) вместе с любыми функциями $h(x)$, $k(x)$ содержит также функции $\alpha h(x) + \beta k(x)$ при любых вещественных α и β;

б) вместе с каждой функцией $h(x)$ содержит ее модуль $|h(x)|$.

В силу свойства а) совокупность H представляет собой линейное пространство. Следствием из свойства б) является тот факт, что вместе с функцией $h(x)$ в пространство H входят ее положительная часть $h^+(x) = \max(h(x), 0)$, ее отрицательная часть $h^-(x) = [-h(x)]^+$ и вместе с двумя функциями $h(x)$ и $k(x)$ — также $\max(h(x), k(x))$ и $\min(h(x), k(x))$.

Далее предполагается, что каждой элементарной функции $h(x)$ сопоставлено число Ih, называемое *элементарным интегралом* и удовлетворяющее условиям:

1) $I(\alpha h + \beta k) = \alpha Ih + \beta Ik$ для любых $h \in H$, $k \in H$ и любых вещественных α и β;

2) $Ih \geqslant 0$, если $h(x) \geqslant 0$;

3) если последовательность функций $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., убывая, стремится в каждой точке $x \in X$ к нулю (что обозначается символом $h_n(x) \searrow 0$), то $Ih_n \to 0$.

Оказывается, что при выполнении условий 1)—3) совокупность элементарных функций может быть расширена до некоторой совокупности L функций, определенных на том же множестве X, на которую может быть распространен и интеграл I, причем так, что L представляет собой линейное полное нормированное пространство с нормой $\|\varphi\|=I(|\varphi|)$. Это и есть построение интеграла Лебега по схеме Даниэля.

Отметим, что в этой конструкции существенную роль играют множества меры 0. Множество $Z\subset X$, по определению, есть *множество меры* 0, если при любом $\varepsilon>0$ существует последовательность элементарных функций $0\leqslant h_1(x)\leqslant h_2(x)\leqslant\ldots$ таких, что $Ih_n<\varepsilon$ и $\sup_n h_n(x)\geqslant 1$ при $x\in Z$. Строго говоря, элементами пространства L, т. е. *суммируемыми функциями*, являются не отдельные функции, а классы эквивалентных функций (функций, различающихся попарно лишь на множестве меры 0).

Функция $\varphi(x)$, определенная на множестве X с системой элементарных функций H и элементарным интегралом I, называется *измеримой*, если она почти всюду конечна и является пределом почти всюду сходящейся последовательности элементарных функций. Множество $E\subset X$ называется *измеримым*, если измерима его характеристическая функция $\chi_E(x)$ (равная 1 на E и 0 вне E), и *суммируемым*, если $\chi_E(x)$ суммируема; величина $I\chi_E$ называется *мерой* множества E и обозначается через μE.

Совокупность $\mathfrak{A}$ измеримых множеств $E\in X$ образует *лебеговское* σ-*кольцо*; это означает, что в $\mathfrak{A}$ можно производить операции конечного объединения, пересечения и дополнения («*кольцо*»), счетного объединения («σ-») и из $Z\in\mathfrak{A}$, $\mu Z=0$, $Z'\subset Z$ следует $Z'\in\mathfrak{A}$ («*лебеговское*»).

Измеримые функции образуют линейное пространство (с обычными операциями), замкнутое относительно сходимости почти всюду.

Мера μ счетно-аддитивна, т. е. из $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ следует, что E измеримо и $\mu E=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu E_n$, если все E_n измеримы и попарно не пересекаются.

Измеримая функция может быть определена иначе как функция $\varphi(x)$, для которой все лебеговские множества $\{x\colon\ \varphi(x)>c\}$ измеримы; интеграл от неотрицательной суммируемой функции $\varphi(x)$ может быть найден по формуле *)

$$I\varphi \equiv \int\limits_X \varphi\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{n}\,\mu\ \left\{x\colon \frac{m}{n} < \varphi(x) \leqslant \frac{m+1}{n}\right\}.$$

Отметим важный частный случай применения схемы Даниэля. Пусть задан в n-мерном пространстве R_n основной брус

$$P = \{x \in R_n\colon\ a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1,\ \ldots,\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}$$

и совокупность $\mathfrak{B}$ всех его подбрусов

$$B = \{x\colon\ \alpha_1 < x_1 \leqslant \beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n < x_n < \beta_n\}$$

(если $\alpha_j = a_j$, неравенство $\alpha_j < x_j$ заменяется на $a_j \leqslant x_j$). Поскольку уже объединение двух брусов B_1, $B_2 \subset P$, вообще говоря, не есть брус, совокупность $\mathfrak{B}$ не является кольцом. В пределах $\mathfrak{B}$ можно производить операцию пересечения; можно заметить также, что дополнение бруса B_0 до бруса $B \supset B_0$, хотя и не является само, вообще говоря, брусом, но может быть представлено как объединение $B_1 + \ldots + B_m$ брусов без общих точек. Система множеств $\mathfrak{B}$, обладающая такими свойствами, называется *полукольцом*; итак, совокупность всех подбрусов B основного бруса P образует полукольцо множеств.

Вещественная аддитивная функция брусов ωB называется *квазиобъемом*. Квазиобъем ωB, по определению, имеет *ограниченное изменение*, если ограничены фиксированной постоянной все суммы $\sum\limits_{j=1}^{m} |\omega B_j|$ по любому конечному набору непересекающихся брусов $B_1, \ldots, B_m \subset P$.

Квазиобъем ωB называется *непрерывным*, если для всякой последовательности брусов $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ с пустым пересечением имеем $\lim\limits_{m\to\infty} \omega B_m = 0$.

*) Детальное изложение схемы Даниэля с теорией измеримых функций и меры можно найти в книге Г. Е. Шилова и Б. Л. Гуревича «Интеграл, мера и производная (общая часть)», изд. 2, перераб., «Наука», 1967, которую будем дальше обозначать ИМП.

Имея квазиобъем ωB с ограниченным изменением (не обязательно непрерывный), для каждой функции $f(x)$, непрерывной в P, можно определить интеграл Римана — Стилтьеса по формуле

$$I_\omega f \equiv \int_P f(x)\, d\omega(x) = \lim \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\, \omega B_j,$$

где $P = B_1 + \ldots + B_m$, $\xi_j \in B_j$ и предельный переход, как обычно, производится при неограниченном измельчении разбиения.

Совокупность всех непрерывных функций с определенным на них интегралом Римана — Стилтьеса можно принять за совокупность элементарных функций схемы Даниэля с соответствующим элементарным интегралом. Процесс Даниэля, примененный к этим объектам, приводит к пространству $L_\omega(P)$ функций, *интегрируемых* на P *в смысле Лебега — Стилтьеса*, и к соответствующей совокупности $\mathfrak{A}$ (лебеговскому σ-кольцу) измеримых множеств с мерой, которую мы пока обозначим через μ_ω. В число измеримых множеств входят и все брусы $B \subset P$, причем, если квазиобъем ω был непрерывным, имеет место равенство $\mu_\omega B = \omega B$. Таким образом, мера μ_ω — теперь ее можно обозначать просто ω — на системе $\mathfrak{A}$ определяет расширение квазиобъема ω с полукольца брусов до счетно-аддитивной меры на лебеговском σ-кольце всех измеримых множеств.

2. Цилиндрические множества на бесконечномерном кубе. В качестве множества X мы рассмотрим теперь совокупность всех вещественных функций $x(t)$, определенных на произвольном множестве T и принимающих значения в промежутке $[0, 1]$:

$$X = \{x(t)\colon\ t \in T,\ 0 \leqslant x(t) \leqslant 1\}.$$

Если T — конечное множество, например, состоящее из n элементов, то X есть n-мерный куб. В общем случае множество X будем называть *T-мерным кубом.*

В n-мерном кубе можно пользоваться расстоянием между точками для определения предельного перехода и непрерывности функций. В T-мерном кубе уже нельзя, вообще говоря, ввести естественное расстояние. Но мы можем воспользоваться некоторой естественной топологией *). А именно, окрестность V точки $x_0(t) \in X$ задается произвольным натуральным числом n, произвольным набором n точек $t_1, \ldots, t_n$ из T и произвольным числом $\varepsilon > 0$ по следующему правилу:

$$V = \{x(t) \in X: \ |x(t_k) - x_0(t_k)| < \varepsilon, \ k = 1, \ldots, n\}.$$

При таком введении топологии множество X становится топологическим пространством, отделимым (хаусдорфовым) и компактным (бикомпактным), но, вообще говоря, не метризуемым.

Множество $C \subset X$ называется *цилиндрическим*, если существуют такое n и такие точки $t_1, \ldots, t_n$ из T, что

$$C = \{x(t) \in X: \ [x(t_1), \ \ldots, \ x(t_n)] \in E^n \subset X^n\}, \tag{1}$$

где E^n — некоторое заданное множество в n-мерном кубе

$$X^n = \{\xi \in R^n: \ 0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1, \ \ldots, \ 0 \leqslant \xi_n \leqslant 1\}.$$

Множество E^n называется *основанием* цилиндрического множества C.

В частности, цилиндрическое множество вида

$$B = \{x(t) \in X: \ \alpha_1 < x(t_1) \leqslant \beta_1, \ \ldots, \ \alpha_n < x(t_n) \leqslant \beta_n\} \tag{2}$$

(если $\alpha_j = 0$, неравенство $\alpha_j < x(t_j)$ заменяется неравенством $0 \leqslant x(t_j)$) называется *брусом*. В частности, брусом являются и все $X = \{x: \ 0 \leqslant x(t_1) \leqslant 1\}$. Все брусы $B \subset X$ образуют полукольцо множеств. Действительно, каждое конечное число брусов задается условиями, накладываемыми лишь на конечное число координат, например на n координат (т. е. точек пространства T), поэтому проверку свойств полукольца мы можем проводить, оставаясь в пределах n-мерного пространства, а там такая проверка элементарна.

По таким же причинам цилиндрические множества образуют кольцо множеств. В частности, дополнением цилин-

*) Основные топологические понятия и доказательства приводимых ниже теорем о топологических свойствах пространства T можно найти, например, в гл. 1 книги Л. Люмиса «Введение в абстрактный гармонический анализ», ИЛ, 1956.

дрического множества (1) до всего X является цилиндрическое множество

$$\{x(t) \in X\colon [x(t_1), \ldots, x(t_n)] \in X^n - E^n\}.$$

3. Квазиобъем. Вещественная аддитивная функция брусов $\omega(B)$ (или короче ωB) называется *квазиобъемом.*

Кроме аддитивности функции $\omega(B)$, будем предполагать выполненными следующие условия:

а) неотрицательность: $\omega B \geqslant 0$ при любом B;

б) непрерывность сверху в каждом n-мерном кубе: если $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ — последовательность брусов с пустым пересечением, определяемых одним и тем же фиксированным набором координат $t_1, \ldots, t_n$, то

$$\lim_{m\to\infty} \omega B_m = 0.$$

Подчеркнем, что значение функции ωB должно зависеть только от самого бруса B, а не от его представления в форме (2). Например, должно иметь место равенство

$$\omega\{x\colon \alpha_1 < x(t_1) \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n < x(t_n) \leqslant \beta_n\} = \\ = \omega\{x\colon \alpha_1 < x(t_1) \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n < x(t_n) \leqslant \beta_n, \\ 0 \leqslant x(t_{n+1}) \leqslant 1\}, \quad (3)$$

называемое обычно *условием согласования для квазиобъема* ω.

Имея квазиобъем ω на брусах множества X, мы при любом n и любых $t_1, \ldots, t_n$ можем построить некоторый квазиобъем $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$ на n-мерном кубе X^n по формуле

$$\omega^{t_1, \ldots, t_n}\{\xi \in X^n\colon \alpha_1 < \xi_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n < \xi_n \leqslant \beta_n\} = \\ = \omega\{x \in X\colon \alpha_1 < x(t_1) \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n < x(t_n) \leqslant \beta_n\}. \quad (4)$$

В частности, $\omega X = \omega^{t_1, \ldots, t_n} X^n$ при любых $t_1, \ldots, t_n$.

Условие согласования (3) связывает квазиобъемы $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$ и $\omega^{t_1, \ldots, t_{n+1}}$ следующим образом:

$$\omega^{t_1, \ldots, t_n}\{\xi \in X^n\colon \alpha_1 < \xi_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n < \xi_n \leqslant \beta_n\} = \\ = \omega^{t_1, \ldots, t_{n+1}}\{\xi \in X^{n+1}\colon \alpha_1 < \xi_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n < \xi_n \leqslant \beta_n, \\ 0 \leqslant \xi_{n+1} \leqslant 1\}. \quad (5)$$

Обратно, если при каждом n и при любых $t_1, \ldots, t_n$ на каждом n-мерном кубе X^n заданы некоторые квазиобъемы $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$, причем выполнено условие согласования (5), то формула (4), читаемая справа налево, определяет квазиобъем ω на множестве X.

Очевидно, что условия (а) — (б), будучи выполненными для квазиобъема ω, будут выполнены и для квазиобъемов $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$, и обратно, если условия (а) — (б) выполнены для всех квазиобъемов $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$, то они выполняются и для квазиобъема ω, определенного по формуле (4).

Замечание. Вообще говоря, не все точки бруса B являются его внутренними точками (по топологии X); это ставит преграды к пользованию методом выделения конечного покрытия. Однако, пользуясь условием непрерывности квазиобъема, *каждый брус B можно включить в брус $B' \supset B$ так, что каждая точка бруса B станет внутренней точкой бруса B', а квазиобъем бруса B' будет как угодно мало отличаться от квазиобъема бруса B.* Достаточно положить

$$B' = \{x(t) \in X\colon\ \alpha_1 < x(t_1) \leqslant \beta_1', \ \ldots, \ \alpha_n < x(t_n) \leqslant \beta_n'\},$$

где $\beta_j' > \beta_j$, если $\beta_j < 1$, и $\beta_j' = 1$, если $\beta_j = 1$, причем разность $\beta_j' - \beta_j$ достаточно мала. При этом

$$B \subset B' \subset B + \{x\colon\ \beta_1 < x(t_1) \leqslant \beta_1'\} + \ldots \\ \ldots + \{x\colon\ \beta_n < x(t_n) \leqslant \beta_n'\},$$

следовательно,

$$\omega B \leqslant \omega B' \leqslant \omega B + \omega\{x\colon\ \beta_1 < x(t_1) \leqslant \beta_1'\} + \ldots \\ \ldots + \omega\{x\colon\ \beta_n < x(t_n) \leqslant \beta_n'\},$$

а квазиобъем каждого из брусов $\{x\colon\ \beta_j < x(t_j) \leqslant \beta_j'\}$ стремится к нулю при $\beta_j' \searrow \beta_j$ в силу условия (б).

4. Элементарные функции. Теперь мы будем строить совокупность элементарных функций. Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на всем X, но зависящую фактически лишь от конечного числа координат $x(t_1), \ldots, x(t_n)$ (т. е. не изменяющую своего значения при произвольном изменении остальных координат $x(t)$). Такую функцию будем называть *цилиндрической*.

Поставим в соответствие цилиндрической функции $f(x)$ функцию $f^n(\xi)=f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, определенную в n-мерном кубе X^n по формуле

$$f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)=f[x(t_1), \ldots, x(t_n)]. \tag{6}$$

Это соответствие взаимно однозначно, иными словами, если задана какая-то функция $f^n(\xi)$ в кубе X^n, то при любых фиксированных $t_1, \ldots, t_n$ ей можно сопоставить цилиндрическую функцию $f(x)$, зависящую лишь от координат $x(t_1), \ldots, x(t_n)$ по той же формуле (6), читаемой справа налево. Будем называть $f(x)$ *расширением* функции $f^n(\xi)$ с X^n на X и, обратно, функцию $f^n(x)$ *проекцией* функции $f(x)$ с X на X^n.

Покажем, что функции $f(x)$ и $f^n(\xi)$ являются непрерывными одновременно, каждая на своей области определения.

Пусть $f^n(\xi)$ непрерывна в точке $\xi_0=(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$; покажем, что $f(x)$ непрерывна в любой точке $x_0=(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0, x_{n+1}^0, \ldots)$ с произвольными значениями $x_{n+1}^0, \ldots$ Для заданного $\varepsilon>0$ найдется в кубе X^n окрестность $|\xi_j-\xi_j^0|<\delta$, в которой выполнено неравенство $|f^n(\xi)-f^n(\xi_0)|<\varepsilon$. Неравенства

$$|\xi_j-\xi_j^0|<\delta, \qquad j=1, \ldots, n,$$

определяют окрестность точки $x_0=(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0, x_{n+1}^0, \ldots)$ в X, во всех точках которой $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$; таким образом, $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Обратно, если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0=$ $=(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0, x_{n+1}^0, \ldots)$, то $f^n(\xi)$ непрерывна в точке $\xi_0=(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$. Действительно, для заданного $\varepsilon>0$ можно найти такую окрестность

$$V_0=\{x\colon |\xi_1-\xi_1^0|<\delta, \ldots, |\xi_n-\xi_n^0|<\delta, \ldots, |x_p-x_p^0|<\delta\}$$

точки x_0, что $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ для всех $x\in V$; но это означает, что при выполнении неравенств $|\xi_1-\xi_1^0|<\delta, \ldots$

$\ldots, |\xi_n - \xi_n^0| < \delta$ справедливо соотношение

$$|f^n(\xi) - f^n(\xi_0)| < \varepsilon,$$

иначе говоря, функция $f^n(\xi)$ непрерывна в точке ξ_0.

Обозначим через H совокупность всех непрерывных функций на X, зависящих лишь от конечного числа координат. Очевидно, что совокупность H линейна и вместе с каждой функцией $f(x)$ содержит ее модуль $|f(x)|$. Таким образом, H удовлетворяет условиям п. 1, наложенным на совокупность элементарных функций.

5. Элементарный интеграл. Пространство суммируемых функций. Теорема Колмогорова. Определим теперь элементарный интеграл от функции $f(x)$ по квазиобъему ω как интеграл Римана — Стилтьеса

$$I_\omega f = \int\limits_{X^n} f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, \omega^{t_1, \ldots, t_n}(d\xi). \tag{7}$$

Условие согласования (3) позволяет записать интеграл (7) и в форме

$$I_\omega f = \int\limits_{X^n} f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, \omega^{t_1, \ldots, t_n}(d\xi) =$$
$$= \int\limits_{X^{n+1}} f^{n+1}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, \omega^{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}}(d\xi\, d\xi_{n+1}),$$

где t_{n+1} — любая из оставшихся точек множества T.

Очевидно, функционал $I_\omega f$ неотрицателен вместе с квазиобъемом ω.

Так как любые две функции $f(x)$ и $g(x)$ из H можно считать зависящими от одной и той же конечной совокупности координат $x(t_1), \ldots, x(t_n)$ (добавляя недостающие в качестве новых аргументов), то из свойства (4) легко получить и линейность функционала I_ω.

Очевидно также, что выполняется неравенство

$$|I_\omega f| \leqslant \max_{X^n} |f^n(\xi)|\, \omega^{t_1, \ldots, t_n}(X^n) = \max_X |f(x)|\, \omega(X).$$

Проверим, что функционал $I_\omega f$ непрерывен сверху. Если последовательность $f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant \ldots$ стремится к нулю всюду на X, то в силу компактности X и теоремы Дини эта последовательность сходится к нулю равномерно на X, так что

$$\max_X |f_m(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Но тогда и

$$|I_\omega f_m| \leqslant \max_X |f_m(x)| \, \omega X \to 0,$$

что и требуется.

Таким образом, выполнены все предпосылки схемы Даниэля. Применяя ее, мы получаем возможность построить на множестве X пространство $L_\omega \equiv L_\omega(X)$ ω-суммируемых функций $\varphi(x)$ и кольцо ω-суммируемых множеств.

При T конечном, $T = n$, как было указано в п. 1, квазиобъем ω, удовлетворяющий условиям а) и б), п. 3, может быть распространен с брусов на лебеговское σ-кольцо множеств — ω-суммируемых множеств — до счетно-аддитивной меры по формуле

$$\omega(E) = I_\omega \chi_E(x), \tag{8}$$

где $\chi_E(x)$ равна 1 на E и 0 вне E.

В общем случае при любом T та же формула (8), оставаясь справедливой для каждого цилиндрического ω-измеримого множества E, дает расширение квазиобъема ω до счетно-аддитивной меры на лебеговском σ-кольце ω-измеримых множеств на всем X.

Последний результат известен как *теорема Колмогорова*:

Теорема 1 (А. Н. Колмогоров, 1933). *Квазиобъем ω, заданный на брусах $B \subset X$ и такой, что все квазиобъемы $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$ непрерывны на своих конечномерных кубах X^n, может быть продолжен до счетно-аддитивной меры на некотором лебеговском σ-кольце подмножеств множества X.*

Теорема допускает очевидное обобщение и на случай незнакоположительного квазиобъема ω при дополнительном условии, что полное изменение каждого квазиобъема $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$ ограничено фиксированной постоянной, не зависящей от выбора числа n и точек $t_1, \ldots, t_n$.

6. Совокупность брусов как вполне достаточная система. Покажем, что совокупность всех брусов $B \subset X$ образует вполне достаточную систему *). Прежде всего каждая элементарная функция $f(x)$ является пределом последовательности ступенчатых функций

$$h_m(x) = \sum_{k=1}^{q(m)} c_k^m \chi_{B_k^m}(x),$$

поскольку каждая непрерывная функция $f^n(\xi)$ есть предел ступенчатых функций

$$h_m^n(\xi) = \sum_{k=1}^{q(m)} c_k^m \chi_{B_k^m}^n(\xi).$$

Отсюда следует, что брусы образуют достаточную систему.

Далее, пусть имеется некоторое множество $Z \subset X$ ω-меры 0. Для любого $\varepsilon > 0$ можно построить последовательность элементарных функций $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$ такую, что

$$I_\omega f_m < \varepsilon \quad \text{и} \quad \sup_m f_m(x) \geqslant 1 \quad \text{на } Z.$$

Рассмотрим множество $C_m = \left\{x\colon\ f_m(x) > \frac{1}{2}\right\}$. Это — цилиндрическое множество с основанием E_m^n в некотором X^n.

*) Полукольцо S подмножеств B_α называется *достаточной системой*, если совокупность линейных комбинаций характеристических функций $\chi_B(x)$ плотна в пространстве $L(X)$ по его метрике. Достаточная система называется *вполне достаточной*, если для каждого множества $Z \subset X$ меры 0 и любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $B_1, B_2, \ldots$ из S такая, что $\bigcup_n B_n \supset Z$ и $\sum_n \mu B_n < \varepsilon$. Для любого множества $E \subset X$ определяется внешняя мера $\mu^* E$ как точная нижняя грань мер счетных покрытий E множествами из вполне достаточной системы. Неравенство

$$\mu^* E + \mu^*(X - E) \leqslant \mu X$$

(при μX конечном) является критерием измеримости E. Если E измеримо, то

$$\mu^* E = \mu E.$$

См. ИМП, § 8.

Так как функция $f_m^n(\xi)$ непрерывна на X^n, то E_m^n — открытое множество и может быть представлено как счетное объединение брусов $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{km}^n$. Само C_m открыто в X и есть счетное объединение брусов $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{km}$, основания которых в X^n совпадают с брусами B_{km}^n. Так как $I_\omega f_m < \varepsilon$, то $\omega E_m < 2\varepsilon$. Объединение множеств $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ покрывает все Z. Тем самым Z покрывается счетным объединением брусов $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{km}$ с мерой

$$\omega \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{km} = \lim_{m \to \infty} \omega \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{km} = \lim_{m \to \infty} C_m \leqslant 2\varepsilon,$$

что и требуется.

7. Структура измеримых цилиндрических множеств. Далее мы будем рассматривать структуру ω-измеримых множеств в X и ω-измеримых функций $\varphi(x)$. Поскольку каждое ω-измеримое множество является и ω-суммируемым, каждая ограниченная ω-измеримая функция является и ω-суммируемой.

Теорема 2. *Цилиндрическое множество $C \subset X$ является ω-измеримым тогда и только тогда, когда его основание $E^n \subset X^n$ есть $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$-измеримое множество в X^n; при этом*

$$\omega C = \omega^{t_1, \ldots, t_n} E^n.$$

Доказательство. Пусть вначале $E^n \subset X^n$ имеет $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$-меру, равную 0. Это означает, что при любом $p = 1, 2, \ldots$ существует последовательность непрерывных на X^n функций $0 \leqslant f_{1p}^n(\xi) \leqslant f_{2p}^n(\xi) \leqslant \ldots$ такая, что

$$I_{\omega^{t_1, \ldots, t_n}} f_{mp}^n(\xi) \leqslant \frac{1}{p}$$

и

$$\lim_{m \to \infty} f_{mp}^n(\xi) \geqslant 1 \quad \text{на } E^n.$$

Функции $f_{mp}(x)$, рассматриваемые на всем X, также не убывают, интегралы $I_\omega f_{mp}(x)$ имеют те же значения $\left(\leqslant \frac{1}{p}\right)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} f_{mp}(x) \geqslant 1$ на множестве C. Отсюда следует, что C имеет ω-меру 0. Пусть далее $E^n \subset X^n$ — произвольное $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$-суммируемое множество. Тогда существует последовательность непрерывных функций $f^n_m(\xi)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, которая при $m \to \infty$ стремится к характеристической функции $\chi^n_{E^n}(\xi)$, за исключением, возможно, множества $Z^n \subset X^n$ $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$-меры 0. Соответствующая последовательность $f_m(x)$ при $m \to \infty$ стремится к функции $\chi_E(x)$ всюду, кроме, возможно, цилиндрического множества Z с основанием Z^n, т. е. всюду, кроме множества меры 0. Поэтому C ω-измеримо. Функции $f_m(x)$ можно, конечно, считать ограниченными. Тогда по теореме Лебега

$$\omega C = \lim_{m\to\infty} I_\omega f_m(x) = \lim_{m\to\infty} I_{\omega^{t_1, \ldots, t_n}} f^n_m(\xi) = \omega^{t_1, \ldots, t_n} E^n,$$

что и требуется.

Пусть, наоборот, известно, что цилиндрическое множество $C \subset X$ с основанием $C^n \subset X^n$ ω-измеримо на X. Покажем, что E^n $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$-измеримо в X^n. Достаточно показать, что внешняя мера $\omega^{*t_1, \ldots, t_n}$ множества E^n не превосходит ωC. Тогда аналогичное рассуждение, примененное к дополнительному к C цилиндрическому множеству с основанием $X^n - E^n$, покажет, что

$$\omega^{*t_1, \ldots, t_n}(X^n - E^n) \leqslant \omega(X - C),$$

но тогда

$$\omega^{*t_1, \ldots, t_n} E^n + \omega^{*t_1, \ldots, t_n}(X^n - E^n) \leqslant \omega C + \omega(X - C) = \omega X,$$

откуда и будет вытекать $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$-измеримость E^n в X^n.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку брусы, как мы видели, образуют вполне достаточную систему на X, можно построить счетное объединение брусов $\bigcup\limits_m B_m$, покрывающее множество C, причем $\sum\limits_m \omega B_m \leqslant \omega C + \varepsilon$.

Каждый брус B_m мы включим далее в брус B'_m так, чтобы точки бруса B_m были внутренними точками бруса B'_m и чтобы выполнялось неравенство (п. 3) $\sum_m \omega B'_m < \omega C + \varepsilon$.

Каждый из брусов B_m использует для своего определения конечное множество координат, в число которых мы всегда можем включить координаты $t_1, \ldots, t_n$, определяющие куб X^n. Поэтому для каждого бруса

$$B_m = \{x \in X\colon \ \alpha_1 < x(t_1) \leqslant \beta_1, \ \ldots, \ \alpha_n < x(t_n) \leqslant \beta_n, \ \ldots\}$$

естественно определяется проекция в куб X^n по правилу

$$B_m^n = \{\xi \in X^n\colon \ \alpha_1 < \xi_1 \leqslant \beta_1, \ \ldots, \ \alpha_n < \xi_n \leqslant \beta_n\}.$$

Фиксируем точку $\xi_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) \in E^n$ и рассмотрим все такие брусы B_m, проекции которых в X^n покрывают эту точку. Любая точка $x = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0, x_{n+1}, \ldots) \in C$ покрывается некоторым из брусов B_m и является внутренней для соответствующего бруса B'_m. Поскольку все такие точки образуют в X замкнутое множество — обозначим его $Q(\xi_0)$, — мы можем выделить из числа брусов B'_m конечную совокупность $B_1^0, \ldots, B_r^0$, покрывающую все множество $Q(\xi_0)$. Проекции этих брусов на X^n, вообще говоря, различны; их пересечение в X^n есть некоторый брус B^0, содержащий внутри себя точку ξ_0. Уменьшим этот брус до бруса $\underline{B}^0$ с тем, чтобы координаты его граничных листов стали рациональными числами, а точка ξ_0, как и ранее, была бы внутренней точкой. Затем соответственно уменьшим каждый из брусов $B_1^0, \ldots, B_r^0$ до брусов $\underline{B}_1^0, \ldots, \underline{B}_r^0$ так, чтобы их проекции в X совпали с брусом $\underline{B}^0$, не изменяя в то же время эти брусы по остальным координатам. Тогда объединение $\bigcup_{j=1}^r \underline{B}_j^0$ станет цилиндрическим множеством с основанием $\underline{B}^0$. Такую же процедуру мы произведем независимо с каждой точкой $\xi \in E^n$.

Цилиндрическое множество C тем самым окажется покрытым цилиндрическим множеством G (счетным объединением брусов), имеющим меру меньшую, чем мера исходной совокупности брусов B'_m, т. е. меньшую, чем $\omega C+\varepsilon$. Но в силу уже доказанного борелевское основание $G^n \subset X^n$ этого цилиндрического множества, составленное из брусов в X^n с рациональными координатами граничных листов, имеет ту же меру, что и само G, а так как $\omega G=\omega^{t_1, \ldots, t_n} G^n$, то

$$\omega^{* t_1, \ldots, t_n} E^n \leqslant \omega^{t_1, \ldots, t_n} G^n=\omega G \leqslant \omega C+\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, то

$$\omega^{* t_1, \ldots, t_n} E^n \leqslant \omega C+\varepsilon,$$

и теорема доказана.

8. Структура измеримых цилиндрических функций.

Теорема 3. *Функция $f(x)$, зависящая лишь от конечного числа координат $x(t_1), \ldots, x(t_n)$, тогда и только тогда ω-измерима, когда функция $f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$-измерима в X^n. При этом при любом c*

$$\omega\{x \in X:\ f(x)>c\}= \\ =\omega^{t_1, \ldots, t_n}\{\xi \in X^n:\ f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)>c\}. \quad (9)$$

В частности, функция $f(x)$ ω-суммируема тогда и только тогда, когда $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$-суммируема функция $f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и при этом

$$\int_X f(x)\,\omega(dx)=\int_{X^n} f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,\omega^{t_1, \ldots, t_n}(d\xi). \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ зависит только от координат $x(t_1), \ldots, x(t_n)$ и ω-измерима. Это значит, что все множества $\{x:\ f(x)>c\}$ ω-измеримы. Но эти множества являются цилиндрическими множествами с основаниями $E^n \subset X^n$. По теореме 2 E^n $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$-измеримо в X^n. Каждое основание имеет вид

$$E^n=\{\xi \in X^n:\ f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)>c\},$$

следовательно, функция $f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $\omega^{t_1, \ldots, t_n}$-измерима в X^n. Далее, по теореме 2 имеет место равенство (9). Одновременная суммируемость функций $f(x)$ и $f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и равенство (10) вытекают из того, что эти свойства выражаются через меры лебеговских множеств $\{x:\ f(x)>c\}$

и $\{\xi: f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n) > c\}$, которые, по доказанному, у функций $f(x)$ и $f^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ совпадают.

Обратное утверждение вытекает из тех же рассуждений, проведенных в обратном порядке.

9. Произвольные суммируемые функции. Рассмотрим, наконец, произвольную суммируемую функцию $f(x)$, зависящую, вообще говоря, от всех координат $x(t)$, $t \in T$.

Как всякая суммируемая функция, она является пределом последовательности элементарных функций $f_m(x)$ (в нашем случае непрерывных; можно также брать ступенчатые или еще какие-нибудь), сходящейся к $f(x)$ по метрике пространства $L(X)$

$$f(x) = \lim f_m(x).$$

Тогда

$$\int_X f(x)\,\omega(dx) = \lim_{m\to\infty} \int_X f_m(x)\,\omega(dx),$$

и, по доказанному, поскольку $f_m(x)$ зависит от аргументов $x(t_1), \ldots, x(t_n)$, $n = n(m)$, то

$$\int_X f_m(x)\omega(dx) = \int_{X^n} f_m(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,\omega^{t_1, \ldots, t_n}(d\xi).$$

Таким образом, интеграл от любой ω-суммируемой функции можно выразить в форме предела конечно-кратных интегралов.

Заметим в заключение, что ограничение области изменения каждой координаты $x(t)$ отрезком $[0, 1]$ не является существенным. Простой заменой переменного отрезок $[0, 1]$ можно превратить в любой отрезок $[a, b]$, даже, если угодно, в $[-\infty, \infty]$ (но с обязательным включением обоих концов для обеспечения компактности).

§ 2. РАСШИРЕНИЕ ПРЕДМЕРЫ ДО МЕРЫ

1. Цилиндрические множества в линейном пространстве. Мы рассматривали в § 1 тот случай, когда множество X с мерой μ является совокупностью всех (вещественных) функций на некотором множестве T. Теперь мы должны перейти к рассмотрению общего случая.

Разумеется, не всякое множество X может быть представлено как совокупность всех функций на каком-то множестве T. Но существуют разнообразные возможности *вложения* произвольного множества X в такое множество функций. Для этого достаточно, чтобы на самом X было «достаточно много» функций, которые были бы связаны с заданием меры и которые мы могли бы принять за «координаты» точки $x \in X$.

Итак, пусть T — некоторая совокупность вещественных функций, определенных на множестве X. Будем предполагать, что с помощью этих функций можно различить любые две точки x' и x'' из X, т. е. что для любых двух точек $x' \neq x$ имеется функция $t(x) \in T$ такая, что $t(x') \neq t(x'')$. Тогда сами эти функции $t(x)$ можно считать вещественными координатами, введенными на X. Само X может быть представлено как множество вещественных функций, заданных на T, именно, мы можем поставить в соответствие элементу $x \in X$ функцию $x(t)$, принимающую по определению в точке $t_0 \in T$ значение $t_0(x)$. Согласно нашему предположению отображение $x \to x(t)$ взаимно однозначно (хотя, может быть, отображает все X не на всю совокупность вещественных функций, определенных на множестве T).

Пусть заданы n функций $t_1(x), \ldots, t_n(x)$ из T и (борелевское) множество B в n-мерном вещественном пространстве R_n. Множество

$$C = C(t_1, \ldots, t_n, B) = \{x \in X\colon [t_1(x), \ldots, t_n(x)] \in B\} \quad (1)$$

называется *цилиндрическим множеством с образующими* $t_1, \ldots, t_n$ *и основанием* B.

Данное цилиндрическое множество C, вообще говоря, допускает различные представления в форме $C(t_1, \ldots, t_n, B)$ (с различными $n, t_1, \ldots, t_n$). Пусть, например, $t_1(x) = t_2(x) + t_3(x)$ и $C = C(t_1, [0, 1])$; тогда, очевидно, мы можем написать также $C = C(t_2, t_3, B)$, где B — полоса в плоскости ξ, η, выделяемая неравенствами $0 \leqslant \xi + \eta \leqslant 1$.

Само X есть цилиндрическое множество, например $X = C(t_1, R_1)$.

Совокупность всех цилиндрических множеств в X образует кольцо, иными словами, объединение цилиндрических множеств C_1 и C_2, их пересечение C_1C_2 и разность $C_1 - C_2$ (если $C_2 \subset C_1$) снова являются цилиндрическими множествами. Действительно, пусть

$$C_1 = C(t_1, \ldots, t_n, B_1 \subset R_n),$$
$$C_2 = C(t_1, \ldots, t'_m, B' \subset R_m);$$

можно записать также *)

$$C_1 = C(t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m, B_1 \times R_m),$$
$$C_2 = C(t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m, R_n \times B'),$$

и тогда, очевидно,

$$C_1 + C_2 = C(t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m, B_1 \times R_m + R_n \times B'),$$
$$C_1C_2 = C(t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m, B_1 \times R_m \cap R_n \times B'),$$

а если $C_2 \supset C_1$, то

$$C_2 - C_1 = C(t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m, R_n \times B' - B_1 \times R_m).$$

2. Определение предмеры и теорема о расширении предмеры до меры. Будем говорить, что на совокупности $\mathfrak{A}$ всех цилиндрических множеств на X задана *предмера* μ, если каждому множеству $C \in \mathfrak{A}$ поставлено в соответствие неотрицательное число μC так, что

а) μC зависит только от самого множества C, а не от его представления в форме (1);

б) на совокупности $\mathfrak{A}_t$ всех цилиндрических множеств C с фиксированным набором $t = (t_1, \ldots, t_n)$ функция μ счетно-аддитивная (подчеркнем, что не предполагается ее счетная аддитивность на всем $\mathfrak{A}$);

в) $\mu X = 1$.

Поставим вопрос, при каких условиях предмера μ может быть расширена до меры — счетно-аддитивной функции множеств, заданной на σ-кольце множеств, содержащем все цилиндрические множества.

Подобную задачу мы решали в § 1 для специального случая. Именно, множеством X там явился T-мерный куб

*) Как обычно, если $A \subset R_m$ и $B \subset R_n$, то $A \times B$ обозначает прямое произведение множеств A и B, естественно вкладывающееся в прямое произведение $R_m \times R_n$.

$\{0 \leqslant x(t) \leqslant 1\}$, $t \in T$, а в качестве функций $t(x)$ мы по существу брали координаты точки $x(t)$, так что $t_0(x) = x(t_0)$. Цилиндрическое множество $C \subset X$ определялось условием

$$C = \{x(t) \in X\colon\ [x(t_1), \ldots, x(t_n)] \in E^n \subset X^n\},$$

что совпадает с нашим определением в п. 1 настоящего параграфа. Наконец, расширяя данный квазиобъем ω при фиксированных $t_1, \ldots, t_n$ до счетно-аддитивной меры на X^n, мы получаем предмеру ω, определенную на всех цилиндрических множествах $C \subset X$. Эта предмера, как было показано в § 1, расширяется до счетно-аддитивной меры на всем X.

Вернемся теперь к общему случаю. Истолкуем функции $t(x)$ как *координаты* точки $x \in X$ и отобразим множество X в пространство $\hat{X}$ всех вещественных функций $x(t)$ на множестве T (принимающих, возможно, и значения $\pm\infty$).

Введем в пространстве $\hat{X}$ предмеру $\hat{\mu}$ по формулам

$$\hat{\mu}\{x \in \hat{X}\colon\ [x(t_1), \ldots, x(t_n)] \in B\} = \\ = \mu\{x \in X\colon\ [t_1(x), \ldots, t_n(x)] \in B\}.$$

Согласно теореме 1 § 1 предмера $\hat{\mu}$ дополняется до счетно-аддитивной лебеговской меры, определенной на некотором σ-кольце подмножеств множества $\hat{X}$. Теперь мы можем сформулировать условие, при котором предмера μ дополняется до меры на σ-кольце подмножеств множества X.

Теорема 1. *Предмера μ дополняется до меры в X тогда и только тогда, когда образ X при отображении $x \to x(t) \in \hat{X}$ заполняет в пространстве $\hat{X}$ множество внешней $\hat{\mu}$-меры* 1.

Для доказательства используем следующую лемму из общей теории меры:

Лемма. *Пусть X — множество с лебеговской мерой μ, причем $\mu X = 1$. Пусть $Y \subset X$ — множество с внешней мерой 1. Назовем подмножество $\mathscr{E} \subset Y$ квазиизмеримым, если $\mathscr{E}$ есть пересечение Y с некоторым μ-измеримым множеством $E \subset X$, и положим $\tilde{\mu}\mathscr{E} = \mu E$.*

Утверждается, что определение $\tilde{\mu}\mathscr{E}$ однозначно и функция $\tilde{\mu}\mathscr{E}$ есть лебеговская мера на квазиизмеримых подмножествах $\mathscr{E} \subset Y$.

Доказательство. Если $\mathscr{E}_1 = YE_1$ и $\mathscr{E}_2 = YE_2$, то

$$\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = Y(E_1 + E_2), \quad \mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 = YE_1E_2.$$

Если $\mathscr{E}_1 \subset \mathscr{E}_2$, то

$$\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1 = (E_2 - E_1E_2),$$

так что множества $\mathscr{E} = YE$ образуют кольцо множеств. Если $\mathscr{E}$ есть пересечение Y с μ-измеримым множеством E_1 и одновременно пересечение Y с μ-измеримым множеством E_2, то симметричная разность

$$E_1 \triangle E_2 \equiv (E_1 - E_1E_2) + (E_2 - E_1E_2)$$

вообще не пересекается с Y. Эта разность измерима; но если бы она имела положительную меру, то Y не могло бы иметь внешнюю меру 1.

Таким образом, $\mu(E_1 \triangle E_2) = 0$ и, следовательно,

$$\mu E_1 = \mu E_2.$$

Отсюда следует однозначность определения $\tilde{\mu}\mathscr{E}$.

Допустим, что два квазиизмеримых множества $\mathscr{E}_1 = YE_1$ и $\mathscr{E}_2 = YE_2$ не пересекаются. Множества E_1 и E_2 могут пересекаться, но только по множеству меры 0, поскольку их пересечение есть измеримое множество, не пересекающееся с Y. Отсюда следует, что

$$\tilde{\mu}(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2) = \tilde{\mu}[(E_1 + E_2)Y] = \mu(E_1 + E_2) = \\ = \mu E_1 + \mu E_2 = \tilde{\mu}\mathscr{E}_1 + \tilde{\mu}\mathscr{E}_2.$$

Если имеется последовательность непересекающихся множеств $\mathscr{E}_n = YE_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то, по доказанному, множества E_n могут иметь взаимные пересечения только нулевой меры. Поэтому

$$\tilde{\mu}(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots) = \tilde{\mu}[Y(E_1 + E_2 + \ldots)] = \\ = \mu(E_1 + E_2 + \ldots) = \mu E_1 + \mu E_2 + \ldots = \tilde{\mu}\mathscr{E}_1 + \tilde{\mu}\mathscr{E}_2 + \ldots$$

Таким образом, мера $\tilde{\mu}$ на множествах $\mathscr{E} = YE$ счетно-аддитивна. Наконец, если $\tilde{\mu}\mathscr{E} = 0$, то $\mathscr{E} = YE$, где $\mu E = 0$;

для любого $Z \subset \mathscr{E} \subset E$ мы имеем также $\mu Z = 0$, откуда и $\tilde{\mu} Z = 0$. Тем самым $\tilde{\mu}$ есть лебеговская мера, что и требовалось.

Переходим к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Допустим, что отображение $X \to \hat{X}$, осуществленное с помощью функций $x(t) \equiv t(x)$, есть отображение на множество $Y \subset \hat{X}$ внешней меры 1.

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{A}$ квазиизмеримых подмножеств $\mathscr{E} \subset Y$, снабженных лебеговской мерой $\tilde{\mu}$. Каждому множеству $\mathscr{E} \in \mathfrak{A}$ в силу взаимно однозначного соответствия $X \leftrightarrow Y$ отвечает некоторое множество в X, на которое мы можем перенести меру из Y. Мы получим некоторую систему множеств, содержащую, очевидно, все цилиндрические множества в X, снабженную счетно-аддитивной мерой $\tilde{\mu}$.

Таким образом, и на цилиндрических множествах исходная мера μ счетно-аддитивна.

Теперь докажем обратное утверждение. Как мы видели в § 1, п. 6, брусы

$$B = \{x \in \hat{X}: \alpha_1 < x(t_1) \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n < x(t_n) \leqslant \beta_n\} \quad (2)$$

образуют в пространстве $\hat{X}$ вполне достаточную систему. Как известно из общей теории интеграла и меры (ИМП, § 8), если E — любое измеримое множество, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество Q^{ε} — счетное объединение множеств вполне достаточной системы, такое, что $Q^{\varepsilon} \supset E$ и $\mu(Q^{\varepsilon} - E) < \varepsilon$.

Переходя к дополнениям, получаем, что найдется и множество Q_{ε} — счетное пересечение дополнений к множествам вполне достаточной системы такое, что $Q_{\varepsilon} \subset E$ и $\mu(E - Q_{\varepsilon}) < \varepsilon$.

Дополнения брусов (2) до $\hat{X}$ являются хотя и не брусами, но во всяком случае цилиндрическими множествами. Последний приведенный результат показывает, что в любом множестве $E \subset \hat{X}$ положительной меры $\hat{\mu} E$ можно найти множество Q, являющееся счетным пересечением цилиндрических множеств и также имеющее положительную меру.

Пусть теперь образ X при отображении $X \to \hat{X}$ с помощью функций $x(t)$ не пересекается в $\hat{X}$ с множеством E положительной меры. Так как система брусов в $\hat{X}$ вполне достаточна, то можно указать в E множество Q положительной меры, являющееся пересечением убывающей последовательности цилиндрических множеств $\hat{C}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Очевидно,

$$\hat{\mu}\hat{C}_n \geqslant \hat{\mu}Q > 0.$$

Рассмотрим прообразы множеств $\hat{C}_n$ в пространстве X: мы получим там убывающую последовательность множеств C_n, меры которых μC_n ограничены снизу положительной постоянной $\hat{\mu}Q$, имеющую пустое пересечение. Но это означает, что мера μ на цилиндрических множествах в X не счетно-аддитивна. Теорема 1 доказана.

3. Правильная предмера. Предмера μ называется *правильной*, если координатные функции $t_\alpha(x)$ можно выбрать так, что для любого борелевского множества $B \subset R_n$

$$\mu C(t_1, \ldots, t_n, B) = \int\limits_B \prod_{k=1}^{n} g(\xi_k)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n,$$

где $g(\xi)$ — фиксированная положительная функция, обладающая свойством

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, d\xi = 1. \tag{3}$$

В качестве примера рассмотрим совокупность X всех числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ с функциями $t_n(x) = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Определим для цилиндрического множества

$$C = \{x\colon (x_1, \ldots, x_n) \in B \subset R_n\}$$

предмеру μC по формуле

$$\mu C = \int\limits_B \prod_{k=1}^{n} g(\xi_k)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n,$$

где $g(\xi)$ — фиксированная положительная функция, обладающая свойством (3).

Множество $\hat{X}$ состоит в данном случае из всех последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, координаты которых принимают, возможно, и значения $\pm\infty$, с квазиобъемом

$$\hat{\mu}\{x\colon \alpha_1 < x_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n < x_n \leqslant \beta_n\} = \prod_{k=1}^{n} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} g(\xi_k)\,d\xi_k.$$

Этот квазиобъем продолжается (согласно теореме 1 § 1) до меры, которую также будем обозначать через $\hat{\mu}$, определенной на лебеговском σ-кольце подмножеств множества $\hat{X}$.

Покажем, что при этом множество Z всех точек, у которых хотя бы одна из координат равна $-\infty$ или ∞, имеет меру 0. В самом деле, Z есть объединение счетной совокупности множеств Z_n^+ и Z_n^-, где Z_n^+ (Z_n^-) есть совокупность тех точек $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, у которых $x_n = \infty$ $(-\infty)$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем число $p_n > 0$ такое, чтобы иметь

$$\int_{p_n}^{\infty} g(\xi)\,d\xi < \varepsilon, \qquad \int_{-\infty}^{-p_n} g(\xi)\,d\xi < \varepsilon.$$

Множество Z_n^+ покрывается брусом

$$B_n^+ = \{x\colon x_n > p_n\},$$

имеющим квазиобъем $\hat{\mu}B_n^+ < \varepsilon$. Аналогично Z_n^- покрывается брусом квазиобъема $< \varepsilon$:

$$B_n^- = \{x\colon x_n < -p_n\}.$$

Поэтому Z_n^+ и Z_n^- являются множествами меры 0. Отсюда и

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n^+ + \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n^-$$

также имеет меру 0, что и требовалось.

Если выбросить из совокупности $\widehat{X}$ все точки множества Z, то останется множество полной меры всюду конечных последовательностей, которое мы обозначили уже через X. Это множество представляет собою линейное пространство с обычными (покоординатными) линейными операциями. Величина $t_n(x) = x_n$ при каждом $n = 1, 2, \ldots$ есть линейный измеримый функционал на X.

4. Гауссова предмера. Предмера μ называется *гауссовой*, если координатные функции $t_\alpha(x)$ можно выбрать так, что каждому конечному набору $t = \{t_1(x), \ldots, t_n(x)\}$ будут отвечать положительная квадратичная форма $Q_t(\xi, \xi)$ в n-мерном вещественном пространстве R_n и постоянная $c(t)$ такие, что для любого борелевского множества $B \subset R_n$

$$\mu C(t_1, \ldots, t_n, B) = c(t) \int_B e^{-Q_t(\xi, \xi)} d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Счетно-аддитивная (на всем $\mathfrak{A}$) гауссова предмера называется *гауссовой мерой.*

В качестве примера рассмотрим совокупность Ω всех числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ с функциями $t_n(x) = x_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Определим для цилиндрического множества $C = \{x: (x_1, \ldots, x_n) \in B \subset R_n\}$ предмеру ωC по формуле

$$\omega C = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_B e^{-\sum_1^n \xi_k^2} d\xi_1 \ldots d\xi_n. \tag{4}$$

Предмера ω — правильная гауссова мера, которая согласно п. 3 распространяется до лебеговской счетно-аддитивной меры на σ-кольце подмножеств множества Ω.

Пусть теперь имеется любое множество X с гауссовой предмерой μ.

В дальнейшем будем предполагать, что существует счетный набор координатных функций $t_1(x), \ldots, t_n(x), \ldots$, разделяющий точки X.

Теорема 2. *Существует новая система координатных функций $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$, получающаяся из исходного набора $t_1(x), \ldots, t_n(x), \ldots$ треугольным* *линейным преобразованием*

$$
\begin{aligned}
e_1(x) &= \beta_{11}t_1(x),\\
e_2(x) &= \beta_{21}t_1(x)+\beta_{22}t_2(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
e_n(x) &= \beta_{n1}t_1(x)+\beta_{n2}t_2(x)+\ldots+\beta_{nn}t_n(x),
\end{aligned}
$$

для которой меры цилиндрических множеств записываются по формулам (4)

$$
\mu\{x\in X\colon (e_1(x),\ \ldots,\ e_n(x))\in B\} = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}}\int_B e^{-\sum_1^n \xi_k^2}\,d\xi_1\ldots d\xi_n.
$$

Доказательство. Положим $e_1(x)=\beta_{11}t_1(x)$, где β_{11} пока произвольно. Тогда для любого борелевского множества $B\subset R_1$

$$
\mu\{x\colon e_1(x)\in B\}=\mu\{x\colon \beta_{11}t_1(x)\in B\}= \mu\left\{x\colon t_1(x)\in\frac{1}{\beta_{11}}B\right\}=c(t_1)\int_{B/\beta_{11}} e^{-Q\xi^2}d\xi = \frac{c(t_1)}{\beta_{11}}\int_B e^{-\frac{1}{\beta_{11}^2}Q\eta^2}\,d\eta.
$$

Теперь положим $\beta_{11}=\sqrt{Q}$; мы получим для любого борелевского множества $B\subset R_1$

$$
\mu\{x\colon e_1(x)\in B\}=c(e_1)\int_B e^{-\eta^2}\,d\eta,
$$

где

$$
c(e_1)=\frac{c(t_1)}{\beta_{11}}.
$$

Так определяется постоянная β_{11}.

Предположим, что уже определены постоянные β_{11}, β_{21}, ..., β_{nn} так, что для любого борелевского множества

$B \subset R_n$ мы имеем

$$\mu\{x\colon [e_1(x), \ldots, e_n(x)] \in B\} = \\ = c(e_1, \ldots, e_n) \int\limits_B e^{-\xi_1^2 - \ldots - \xi_n^2}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Укажем, как определить постоянные $\beta_{n+1,1}, \ldots, \beta_{n+1,n+1}$ с тем, чтобы аналогичная формула была справедлива и для борелевских множеств в R_{n+1}.

Рассмотрим борелевское множество $\bar{B} \subset R_{n+1}$, являющееся произведением борелевского множества $B \subset R_n$ на прямую R_1.

По условию мы имеем

$$\mu C(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \bar{B}) = \\ = \mu\{x\colon [t_1(x), \ldots, t_n(x), t_{n+1}(x)] \in \bar{B}\} = \\ = c(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}) \int\limits_{\bar{B}} e^{-Q_{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}}(\bar{\xi}, \bar{\xi})}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n\, d\xi_{n+1}, \tag{5}$$

где $Q_{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}}$ — некоторая квадратичная форма переменных $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}) = (\xi, \xi_{n+1})$. Но то же самое цилиндрическое множество $C(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \bar{B})$ может быть записано и в форме $C(t_1, \ldots, t_n, B)$, поэтому, в силу определения гауссовой предмеры,

$$\mu C(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \bar{B}) = \mu C(t_1, \ldots, t_n, B) = \\ = c(t_1, \ldots, t_n) \int\limits_B e^{-Q_{t_1, \ldots, t_n}(\xi, \xi)}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n, \tag{6}$$

где $Q_{t_1, \ldots, t_n}$ — квадратичная форма от n переменных $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Равенство величин (5) и (6) позволит нам установить связь между формами $Q_{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}}$ и $Q_{t_1, \ldots, t_n}$. Интеграл по множеству $\bar{B}$, стоящий в (5), мы вычислим как повторный, вначале по координате ξ_{n+1} от $-\infty$ до ∞, затем по остальным координатам $\xi_1, \ldots, \xi_n$, пробегающим множество B.

Мы всегда можем записать

$$Q_{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}}(\bar{\xi}, \bar{\xi}) = P_n(\xi, \xi) + 2L(\xi)\,\xi_{n+1} + b\xi^2_{n+1},$$

где $P_n(\xi, \xi)$ — квадратичная форма от координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $L(\xi)$ — линейная форма от тех же координат и b — постоянная. Интегрируя, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Q_{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}}(\bar{\xi}, \bar{\xi})}\, d\xi_{n+1} =$$

$$= e^{-P_n(\xi, \xi)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2L(\xi)\,\xi_{n+1} - b\xi^2_{n+1}}\, d\xi_{n+1} =$$

$$= e^{-P_n(\xi, \xi) + \frac{1}{b} L^2(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{1}{\sqrt{b}} L(\xi) + \sqrt{b}\,\xi_{n+1}\right]^2} d\xi_{n+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{-P_n(\xi, \xi) + \frac{1}{b} L^2(\xi)}.$$

Таким образом,

$$c(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}) \sqrt{\frac{\pi}{b}} \int_B e^{-P_n(\xi, \xi) + \frac{1}{b} L^2(\xi)}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n =$$

$$= c(t_1, \ldots, t_n) \int_B e^{-Q_{t_1, \ldots, t_n}(\xi, \xi)}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Так как B можно взять произвольно, то

$$c(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}) \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{-P_n(\xi, \xi) + \frac{1}{b} L^2(\xi)} \equiv$$

$$\equiv c(t_1, \ldots, t_n)\, e^{-Q_{t_1, \ldots, t_n}(\xi, \xi)}.$$

Отсюда, полагая $\xi = 0$, получим

$$c(t_1, \ldots, t_{n+1}) \sqrt{\frac{\pi}{b}} = c(t_1, \ldots, t_n),$$

а затем, сокращая на коэффициент $c(t_1, \ldots, t_n)$ и логарифмируя, находим

$$-P_n(\xi, \xi) + \frac{1}{b} L^2(\xi) = Q_{t_1, \ldots, t_n}(\xi, \xi).$$

Таким образом,

$$Q_{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}}(\bar{\xi}, \bar{\xi}) = P_n(\xi, \xi) + 2L(\xi)\xi_{n+1} + b\xi_{n+1}^2 =$$

$$= Q_{t_1, \ldots, t_n}(\xi, \xi) + \frac{1}{b}L^2(\xi) + 2L(\xi)\xi_{n+1} + b\xi_{n+1}^2 =$$

$$= Q_{t_1, \ldots, t_n}(\xi, \xi) + \left[\frac{1}{\sqrt{b}}L(\xi) + \sqrt{b}\,\xi_{n+1}\right]^2.$$

Итак, квадратичная форма $Q_{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}}$ получается прибавлением к квадратичной форме $Q_{t_1, \ldots, t_n}$ квадрата линейной формы $\frac{1}{\sqrt{b}}L(\xi) + \sqrt{b}\,\xi_{n+1}$.

По предположению индукции при замене переменных $t_1, \ldots, t_n$ на $e_1, \ldots, e_n$ мы получаем

$$Q_{t_1, \ldots, t_n}(\xi, \xi) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2.$$

Пусть $L(\xi) = \sum_{1}^{n} a_k\xi_k$; положим

$$\eta_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{b}}L(\xi) + \sqrt{b}\,\xi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{k=1}^{n} a_k\xi_k + \sqrt{b}\,\xi_{n+1}. \quad (7)$$

Эта замена приводит к тому, что и форма $Q_{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}}$ приводится к сумме квадратов.

Равенство (7) позволяет определить функционал $e_{n+1}(x)$; действительно, мы имеем

$$e_{n+1}(x) = \eta_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{1}^{n} a_k t_k(x) + \sqrt{b}\,t_{n+1}(x),$$

и, следовательно, можно положить

$$e_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{1}^{n} a_k t_k + \sqrt{b}\,t_{n+1}.$$

Этим определяются постоянные $\beta_{n+1,1}, \ldots, \beta_{n+1,n+1}$. Таким образом, треугольная замена с преобразованием каждой из форм $Q_{t_1, \ldots, t_n}$ к сумме квадратов существует.

Поставим в соответствие каждому элементу $x \in X$ последовательность чисел $x_n = e_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Мы получим отображение X в пространстве Ω, линейное и взаимно однозначное. При этом для каждого n и борелевского множества $B \subset R_n$

$$\mu\{x\colon (x_1, \ldots, x_n) \in B\} = \\ = c(e_1, \ldots, e_n) \int_B e^{-\eta_1^2 - \ldots - \eta_n^2}\, d\eta_1 \ldots d\eta_n.$$

Постоянная $c(e_1, \ldots, e_n)$ может быть определена из условия (в) п. 2:

$$c(e_1, \ldots, e_n) \int_{R_n} e^{-\eta_1^2 - \ldots - \eta_n^2}\, d\eta_1 \ldots d\eta_n = 1.$$

Иными словами,

$$c(e_1, \ldots, e_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}}.$$

Таким образом, окончательно

$$\mu\{x \in X\colon (x_1, \ldots, x_n) \in B\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_B e^{-\eta_1^2 - \ldots - \eta_n^2}\, d\eta_1 \ldots d\eta_n = \\ = \omega\{x \in \Omega\colon (x_1, \ldots, x_n) \in B\}.$$

Тем самым теорема 2 доказана.

Применяя теорему 1, получаем следующую теорему:

Теорема 3. *Гауссова предмера* μ, *определенная на совокупности цилиндрических подмножеств множества* X, *дополняется до меры на* X *тогда и только тогда, когда образ* X *в пространстве* Ω *при отображении по формуле* $x \to (e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots)$ *заполняет в* Ω *множество внешней меры* 1.

Заметим в заключение, что не только всякая гауссова мера приводится к правильной, но и обратно — всякая правильная простым преобразованием координат приводится к гауссовой. Именно, имея функцию $g(\xi) > 0$ с условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, d\xi = 1,$$

мы можем произвести замену переменного $\xi = \xi(u)$ так, что множество $\{x\colon x < a\}$ перейдет в множество $\{y\colon y < b\}$ и при этом будет иметь место равенство

$$\mu\{x\colon x < a\} = \int_{-\infty}^{a} g(\xi)\,d\xi = \omega\{y\colon y < b\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-u^2}\,du;$$

для этого нужно положить $g(\xi)\,d\xi = e^{-u^2}\,du$ и проинтегрировать полученное уравнение. Однако, поскольку указанное преобразование нелинейно, оно, вообще говоря, нарушает линейную структуру пространства X, если таковая имеется.

§ 3. ПРОСТРАНСТВО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ Ω С КАНОНИЧЕСКОЙ МЕРОЙ

В этом параграфе детально изучается пространство Ω, приведенное в п. 3 § 2 в качестве примера и оказавшееся затем универсальным пространством с гауссовой мерой. Результаты пп. 1—4 используют в действительности только то предположение, что мера в Ω — правильная; существенное использование явного вида меры в Ω начинается с п. 5.

1. Аппроксимации суммируемых функций цилиндрическими и законы 0 или 1. Пространство Ω, как мы помним, состоит из всех вещественных последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ с мерой брусов

$$B = \{x\colon \alpha_1 < x_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n < x_n \leqslant \beta_n\},$$

определяемой по формуле

$$\omega B = \prod_{k=1}^{n} \left\{ \int_{\alpha_k}^{\beta_k} g(x_k)\,dx_k \right\}. \tag{1}$$

В частности,

$$\omega\Omega = \omega\{x\colon -\infty < x_1 < \infty\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1)\,dx_1 = 1.$$

Квазиобъем ω позволяет построить на множестве Ω по схеме Даниэля пространство $L(\Omega)$-суммируемых функций; при этом в качестве элементарных функций рассматриваются функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывные на каждом конечномерном пространстве X^n с присоединенными бесконечно удаленными точками по каждой из координат (§ 1, п. 4). При этом, в силу п. 8 § 1, цилиндрическая функция $f(x)$, зависящая только от аргументов $x_1, \ldots, x_n$, интегрируема по мере ω тогда и только тогда, когда соответствующая функция $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ интегрируема по квазиобъему $\omega(1)$ в n-мерном пространстве, иначе говоря, когда функция $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ измерима по Лебегу и существует интеграл

$$\int\limits_{R^n} f(\xi_1, \ldots, \xi_n) g(\xi_1), \ldots, g(\xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n, \qquad (2)$$

который и представляет собою интеграл от $f(x)$ по пространству Ω.

Если суммируемая функция $f(x)$ зависит от всех переменных $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ и задается последовательностью суммируемых функций $f_n(x) = f_n(x_1, \ldots, x_n)$, сходящейся к $f(x)$ по метрике пространства $L(\Omega)$, то

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\, d\omega = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_n(x)\, d\omega =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{R^n} f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) g(\xi_1) \ldots g(\xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n. \qquad (3)$$

При фиксированном n пространство Ω может быть представлено как декартово произведение двух пространств с мерой: пространства R_n с мерой

$$d\omega_n = \prod_{k=1}^{n} g(x_k)\, dx_k$$

и пространства Ω^n, образованного из точек $(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ с мерой брусов

$$B = \{x \in \Omega^n:\ a_{n+1} < x_{n+1} \leqslant b_{n+1}, \ldots, a_{n+p} < x_{n+p} \leqslant b_{n+p}\},$$

определяемой по формуле

$$\omega^n B = \prod_{k=n+1}^{n+p} \int\limits_{a_k}^{b_k} g(x_k)\, dx_k.$$

Применяя теорему Фубини, получаем: каждая суммируемая функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$ почти при всех значениях $(x_1, \ldots, x_n) \in R_n$ суммируема по пространству Ω^n; получающийся при этом интеграл

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{\Omega^n} f(x)\, d\omega^n$$

есть суммируемая функция от $(x_1, \ldots, x_n)$ и

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\, d\omega = \int\limits_{R_n} \left\{ \int\limits_{\Omega^n} f(x)\, d\omega^n \right\} d\omega_n.$$

Пользуясь этим фактом, мы можем для каждой суммируемой функции $f(x)$ явно указать последовательность цилиндрических суммируемых функций $f_n(x)$, сходящуюся к $f(x)$ по метрике $L(\Omega)$. А именно, мы положим

$$f_n(x) \equiv f_n(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{\Omega^n} f(x)\, d\omega^n. \tag{4}$$

Эта функция определена почти всюду на R_n, но может быть рассматриваема и на всем Ω, как цилиндрическая функция.

Теорема 1. *Если функция $f_n(x)$ определена по формуле* (4), *то*

$$\| f - f_n \|_{L(\Omega)} \to 0.$$

Доказательство. Заметим, что если $f(x) \geqslant 0$, то и $f_n(x) \geqslant 0$ и

$$\int\limits_{\Omega} f_n(x)\, d\omega = \int\limits_{R_n} f_n(x)\, d\omega_n =$$
$$= \int\limits_{R_n} \left\{ \int\limits_{\Omega^n} f(x)\, d\omega^n \right\} d\omega_n = \int\limits_{\Omega} f(x)\, d\omega,$$

так что в этом случае $\| f \|_{L(\Omega)} = \| f_n \|_{L(\Omega)}$. В общем случае, когда $f(x)$ принимает значения обоих знаков, мы положим

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

отсюда

$$f_n(x)=[f^+(x)]_n-[f^-(x)]_n,$$
$$|f_n(x)|\leqslant[f^+(x)]_n+[f^-(x)]_n,$$

$$\|f_n\|\leqslant\int\limits_\Omega [f^+(x)]_n\,d\omega+\int\limits_\Omega [f^-(x)]_n\,d\omega=$$
$$=\int\limits_\Omega f^+(x)\,d\omega+\int\limits_\Omega f^-(x)\,d\omega=\int\limits_\Omega |f(x)|\,d\omega=\|f\|,$$

так что всегда $\|f_n\|\leqslant\|f\|$.

Для заданного $\varepsilon>0$ найдем цилиндрическую функцию $u(x)=u(x_1, \ldots, x_n)$ такую, что $\|f-u\|<\frac{\varepsilon}{2}$. По доказанному, также

$$\|(f-u)_n\|=\|f_n-u_n\|\leqslant\|f-u\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Но так как $u(x)$ — цилиндрическая функция, то $u(x)=$ $=u_n(x)$. Поэтому мы имеем $\|f_n-u\|=\|f_n-u_n\|<\frac{\varepsilon}{2}$, отсюда

$$\|f_n-f\|\leqslant\|f_n-u\|+\|u-f\|<\varepsilon,$$

что нам и требовалось.

Следствие 1. *Если измеримая функция $f(x)$ не изменяется при произвольном изменении конечного числа координат, то $f(x)$ равна почти всюду постоянной.*

Можно считать, что измеримая функция $f(x)$ суммируема, заменив ее при необходимости на $\operatorname{arctg} f(x)$. Но если $f(x)$ суммируема, то существует цилиндрическая функция $f_n(x)\equiv f_n(x_1, \ldots, x_n)$, которая в данном случае не меняется при произвольном изменении каждой из своих координат и, следовательно, является почти всюду постоянной. Но тогда и

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

почти всюду постоянна, что и требуется.

Следствие 2. (Закон 0 или 1.) *Если в измеримое множество $E\subset\Omega$ вместе с каждой точкой x*

входят все точки y, отличающиеся от x лишь конечным числом координат, то или $\omega E = 1$, или $\omega E = 0$.

Действительно, характеристическая функция $\chi_E(x)$ множества E удовлетворяет условиям следствия 1 и потому почти всюду постоянна. Если $\chi_E(x)$ почти всюду равна 0, то $\omega E = 0$, если же $\chi_E(x)$ почти всюду равна 1, то $\omega E = 1$, что и требовалось.

2. Интеграл от произведения независимых функций. Все координаты $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ участвуют в определении интеграла (2) равноправным и независимым образом. Это имеет следствием, в частности, такое важное свойство интеграла:

Теорема 2. *Если цилиндрическая суммируемая функция $f(x)$ зависит только от координат $x_1, \ldots, x_n$, а суммируемая функция $u(x)$ зависит только от координат $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$, то $f(x)u(x)$ суммируема и*

$$\int_\Omega f(x)\,u(x)\,d\omega = \int_\Omega f(x)\,d\omega \cdot \int_\Omega u(x)\,d\omega.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $u(x)$ — также цилиндрическая функция, зависящая только от координат $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}$; тогда по теореме Фубини $f(x)u(x)$ суммируема на R_{n+p} и

$$\int_\Omega f(x)\,u(x)\,d\omega = \int_{R_{n+p}} f(\xi)\,u(\xi) \prod_{k=1}^{n+p} g_k(\xi_k)\,d\xi_k =$$

$$= \int_{R_n} f(\xi_1, \ldots, \xi_n) \prod_{k=1}^{n} g(\xi_k)\,d\xi_k \times$$

$$\times \int_{R_p} u(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+p}) \prod_{k=n+1}^{n+p} g(\xi_k)\,d\xi_k =$$

$$= \int_\Omega f(x)\,d\omega \int_\Omega u(x)\,d\omega,$$

что и утверждалось.

В общем случае мы имеем (в метрике $L(\Omega)$)

$$u(x) = \lim_{p\to\infty} u_p(x_{n+1}, \ldots, x_{n+p})$$

(это можно считать определением функции, зависящей только от $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$); переходя к пределу при $p \to \infty$ в формуле

$$\int_\Omega f(x)\, u_p(x)\, d\omega = \int_\Omega f(x)\, d\omega \int_\Omega u_p(x)\, d\omega,$$

получаем требуемое.

3. Аппроксимация многочленами. Как и обычно, пространство $L(\Omega)$ позволяет ввести лебеговское σ-кольцо $\mathfrak{A}$ ω-измеримых подмножеств $E \in \Omega$, причем лебеговская счетно-аддитивная мера ω является расширением на кольцо $\mathfrak{A}$ квазиобъема ωB, заданного на брусах.

Наличие меры ω в совокупности ω-измеримых функций позволяет определить на Ω также пространства $L_p (p \geqslant 1)$. Из них мы будем в основном иметь дело с пространством L_2 ω-измеримых функций, суммируемых в квадрате. Так как $\omega\Omega = 1$, то

$$L_2(\omega) \subset L_1(\omega).$$

Исходная совокупность элементарных функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ плотна и в пространстве $L_2(\Omega)$ по его метрике *).

Теорема 3. *Если $g(u) \leqslant Ce^{-a|u|}$ при некоторых a и C и всех u, то система всех степеней $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ $(n = 1, 2, \ldots, k_j = 0, 1, 2, \ldots)$ плотна в $L_2(\Omega)$ по метрике этого пространства. Иначе говоря, пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$, тогда для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдутся такое n и такой многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$, что*

$$\int_\Omega [f(x) - P(x_1, \ldots, x_n)]^2\, d\omega < \varepsilon.$$

Доказательство. Согласно доказанному существует такая функция $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n) \in H$, что

$$\|f - u\|^2_{L_2(\Omega)} \equiv \int_\Omega |f(x) - u(x)|^2\, d\omega < \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{5}$$

*) См. ИМП, гл. 6, § 9.

Функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$ можно рассматривать как обычную ограниченную функцию от n переменных в R_n. Мы имеем

$$u(x_1, \ldots, x_n)\sqrt{\prod_{k=1}^{n} g_k(x_k)} \in L_2(R_n),$$

где $L_2(R_n)$ обозначает совокупность всех функций на R_n, суммируемых в квадрате по обычной мере Лебега.

С другой стороны, известно *), что система функций

$$\sqrt{g(\xi)},\ \xi\sqrt{g(\xi)},\ \ldots,\ \xi^k\sqrt{g(\xi)},\ \ldots$$

плотна в $L_2(R_1)$; отсюда система всех функций

$$x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}\sqrt{\prod_{k=1}^{n} g(x_k)}$$

плотна в $L_2(R_n)$. Следовательно, найдется функция вида

$$P(x_1, \ldots, x_n)\sqrt{\prod_{k=1}^{n} g(x_k)},$$

где $P(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен от $x_1, \ldots, x_n$, так что

$$\int_{R_n} [u(x_1, \ldots, x_n) - P(x_1, \ldots, x_n)]^2 \prod_{k=1}^{n} g(x_k)\,dx_k < \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим $P(x_1, \ldots, x_n)$ как функцию на пространстве Ω. В силу (5) и (6) мы имеем

$$\|u - P\|^2_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} [u(x) - P(x)]^2\,d\omega < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

$$\|f - P\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|f - u\|_{L_2(\Omega)} + \|u - P\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требуется.

4. Предельные значения координат точек множества положительной меры. Наша ближайшая задача состоит в выделении в Ω множеств меры 0 и множеств полной меры.

---

*) Г. Е. Шилов, Математический анализ, Специальный курс, изд. 2, Физматгиз, 1961, стр. 374.

Так, всякое множество $Z \subset \Omega$, состоящее из точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, ограниченное, например, сверху так, что $x_n \leqslant C$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, имеет меру 0.

Действительно, множество Z при каждом $n = 1, 2, \ldots$ покрывается брусом

$$B = \{x:\ x_1 \leqslant C, \ldots, x_n \leqslant C\},$$

имеющим квазиобъем

$$\omega B = \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{C} g(x_k)\, dx_k = \theta^n,$$

где

$$\theta = \int_{-\infty}^{C} g(x)\, dx < 1.$$

Таким образом, $\omega Z \leqslant \theta^n$ при любом n; поэтому

$$\omega Z = 0.$$

Этот результат является частным случаем следующего:

Теорема 4. *Если некоторое множество элементов* $Z = \{(x_1, \ldots, x_n, \ldots)\}$ *таково, что в заданном числовом интервале* (α, β) *нет предельных точек последовательностей* x_n, *то*

$$\omega Z = 0.$$

Доказательство. Множество Z может быть представлено как подмножество счетного объединения множеств Z_n $(n = 1, 2, \ldots)$, где Z_n состоит из последовательностей, у которых каждая из координат $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ лежит вне интервала (α, β); поэтому достаточно показать, что $\omega Z_n = 0$.

Множество Z_n при любом $p > n$ покрывается цилиндрическим множеством

$$C_p^n = \{x:\ x_{n+1} \notin (\alpha, \beta), \ldots, x_{n+p} \notin (\alpha, \beta)\},$$

мера которого

$$\omega C_p^n = \left[\int_{\xi \notin (\alpha, \beta)} g(\xi)\, d\xi \right]^{p-n}$$

стремится к нулю при $p \to \infty$. Следовательно, $\omega Z_n = 0$, что и требовалось.

Таким образом, *предельные точки координат точек всякого множества $E \subset \Omega$ положительной меры заполняют всю числовую ось.*

5. Рост координат точек множества полной меры. Предыдущие рассмотрения были справедливы для пространства последовательностей с любой правильной мерой. Начиная с этого пункта, мы существенно используем специфику гауссовой меры ω.

Приведем для справок значения экспоненциальных интегралов и их оценки, которые далее понадобятся.

$$\text{(I)}\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = 1, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^4 e^{-u^2}\,du = \frac{3}{4}.$$

При $u > 1/\sqrt{2}$

$$\text{(II)}\qquad \frac{1}{4u} e^{-u^2} < \int_{u}^{\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi < \frac{1}{2u} e^{-u^2}.$$

Как следствие, при тех же u

$$\text{(III)}\quad 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}\,u} e^{-u^2} < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{u} e^{-\xi^2}\,d\xi < 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,u} e^{-u^2}.$$

Доказательство оценки (II): с одной стороны,

$$\int_{u}^{\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi < \int_{u}^{\infty} \frac{2\xi}{2u} e^{-\xi^2}\,d\xi = \frac{1}{2u} e^{-u^2}.$$

С другой стороны, касательная к кривой $y = e^{-\xi^2}$ в точке $\xi = u$ имеет угловой коэффициент $-2ue^{-u^2}$ и, если $u > \frac{1}{\sqrt{2}}$, проходит при $\xi > u$ ниже самой этой кривой, пересекая ось абсцисс на расстоянии

$$e^{-u^2} \frac{1}{2ue^{-u^2}} = \frac{1}{2u}$$

от точки $\xi = u$. Площадь треугольника, составленного касательной, ординатой и отрезком оси абсцисс, равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2u} e^{-u^2}$, отсюда

$$\int_u^\infty e^{-\xi^2} d\xi > \frac{1}{4u} e^{-u^2},$$

что и требовалось.

Обозначим через L_β множество точек $x \in \Omega$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x_n| \leqslant \sqrt{\ln n} + \beta$$

(для тех n, для которых выражение справа положительно).

Теорема 5. *Имеют место соотношения*

$$\omega L_\beta = 0 \quad \textit{при} \quad \beta \leqslant 0,$$
$$\omega L_\beta > 0 \quad \textit{при} \quad \beta > 0,$$
$$\lim_{\beta \to \infty} \omega L_\beta = 1.$$

Доказательство. Обозначим через k_β первый номер, для которого $\sqrt{\ln k} + \beta > 1/\sqrt{2}$. Оценим меру бруса

$$B_n = \{x\colon\ |x_{k_\beta}| \leqslant \sqrt{\ln k_\beta} + \beta,\ \ldots,\ |x_n| \leqslant \sqrt{\ln n} + \beta\}.$$

Согласно определению

$$\omega B_n = \prod_{k=k_\beta}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\ln k} - \beta}^{\sqrt{\ln k} + \beta} e^{-\xi_k^2} d\xi_k = \prod_{k=k_\beta}^{n} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\ln k} + \beta} e^{-\xi_k^2} d\xi_k.$$

Используя неравенство (III) для $u = \sqrt{\ln k} + \beta$, получаем при $k \geqslant k_\beta$

$$1 - \frac{e^{-2\beta\sqrt{\ln k} - \beta^2}}{\sqrt{\pi}\, k (\sqrt{\ln k} + \beta)} < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\ln k} + \beta} e^{-\xi^2} d\xi <$$
$$< 1 - \frac{e^{-2\beta\sqrt{\ln k} - \beta^2}}{2\sqrt{\pi}\, k (\sqrt{\ln k} + \beta)},$$

$$\prod_{k=k_\beta}^{n}\left(1-\frac{e^{-2\beta\sqrt{\ln k}-\beta^2}}{\sqrt{\pi}\,k(\sqrt{\ln k}+\beta)}\right)<\prod_{k=k_\beta}^{n}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{\ln k}+\beta}e^{-\xi_k^2}\,d\xi_k<$$
$$<\prod_{k=k_\beta}^{n}\left(1-\frac{e^{-2\beta\sqrt{\ln k}-\beta^2}}{2\sqrt{\pi}\,k(\sqrt{\ln k}+\beta)}\right).$$

С увеличением n средний член, уменьшаясь, стремится к мере множества L_β. Мы получаем неравенство

$$\prod_{k=k_\beta}^{\infty}\left(1-\frac{e^{2\beta\sqrt{\ln k}-\beta^2}}{\sqrt{\pi}\,k(\sqrt{\ln k}+\beta)}\right)\leqslant\prod_{k=k_\beta}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{\ln k}+\beta}e^{-\xi_k^2}\,d\xi_k\leqslant$$
$$\leqslant\prod_{k=k_\beta}^{\infty}\left(1-\frac{e^{-2\beta\sqrt{\ln k}-\beta^2}}{2\sqrt{\pi}\,k(\sqrt{\ln k}+\beta)}\right). \qquad (7)$$

Если $\beta\leqslant 0$, то ряд

$$s_\beta=\sum_{k=k_\beta}^{\infty}\frac{e^{-2\beta\sqrt{\ln k}}}{k(\sqrt{\ln k}+\beta)}\geqslant\sum_{k=k_\beta}^{\infty}\frac{1}{k(\sqrt{\ln k}+\beta)}$$

расходится и, следовательно, оба бесконечных произведения, справа и слева в (7), равны 0. Тем самым и $\omega L_\beta=0$ при $\beta\leqslant 0$. Если $\beta>0$, ряд s_β сходится, поскольку

$$e^{-2\beta\sqrt{\ln k}}\leqslant\frac{1}{[2\beta\sqrt{\ln k}]^2};$$
$$\frac{e^{-2\beta\sqrt{\ln k}}}{k(\sqrt{\ln k}+\beta)}\leqslant\frac{1}{[2\beta\sqrt{\ln k}]^2\,k(\sqrt{\ln k}+\beta)}.$$

В этом случае оба бесконечных произведения положительны и, следовательно, $\omega L_\beta>0$.

Наконец, при $\beta\to\infty$ мы имеем $k_\beta\to 1$, члены бесконечных произведений справа и слева монотонно стремятся к 1, и, следовательно, сами бесконечные произведения стремятся к 1. Поэтому

$$\lim_{\beta\to\infty}\omega L_{\beta,N}=1,$$

что и требовалось.

Следствие. *Совокупность E всех тех $x \in \Omega$, для которых*

$$\overline{\lim} \frac{|x_k|}{\sqrt{\ln k}} = 1, \tag{8}$$

имеет полную меру.

Действительно, E есть пересечение множеств E_m $(m = 1, 2, \ldots)$, где

$$E_m = \left\{ x\colon \overline{\lim} \frac{|x_k|}{\sqrt{\ln k}} \leqslant 1 + \frac{1}{m} \right\} - \left\{ x\colon \overline{\lim} \frac{|x_k|}{\sqrt{\ln k}} < 1 \right\}.$$

Очевидно, что каждое из E_m (с точностью до множества меры 0) содержит все множества L_β и поэтому имеет полную меру, а тогда и $\prod_m E_m$ как пересечение множеств полной меры также имеет полную меру.

6. Поверхности полной меры. Приведенное выше следствие показывает, что мера ω сосредоточена на некоторой своеобразной «поверхности» с уравнением (8). Мы укажем теперь широкое семейство «поверхностей» в Ω, обладающих аналогичным свойством.

Пусть дана функция $q(u)$, определенная при $-\infty < u < \infty$, удовлетворяющая следующим условиям: при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{u \to \pm\infty} q(u) e^{-\varepsilon u^2} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(u) e^{-u^2} du = a,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int q^2(u) e^{-u^2} du = b.$$

Теорема 6. *Почти для всех $x \in \Omega$*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n q(x_k) = a.$$

Доказательство. Обозначим $s_n(x) = \frac{1}{n} \sum_1^n q(x_k)$. Покажем, что последовательность функций $s_n(x)$ стремится в среднем квадратическом (т. е. по норме $L_2(\Omega)$) к функции, тождественно равной a.

Действительно,

$$\int\limits_{\Omega} [s_n(x) - a]^2 d\omega = \int\limits_{\Omega} s_n^2(x)\, d\omega - 2a \int\limits_{\Omega} s_n(x)\, d\omega + a^2 \int\limits_{\Omega} d\omega =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{1}^{n} \int\limits_{\Omega} q^2(x_k)\, d\omega + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq m)}}^{n} \sum_{m=1}^{n} \int\limits_{\Omega} q(x_k)\, q(x_m)\, d\omega -$$

$$- \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} q(x_k)\, d\omega + a^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} q^2(x_k)\, e^{-x_k^2}\, dx_k +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{n^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(x_k)\, e^{-x_k^2} \right]^2 -$$

$$- \frac{2a}{n} \cdot \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(x_k)\, e^{-x_k^2}\, dx_k + a^2 =$$

$$= \frac{b}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) a^2 - 2a^2 + a^2 = \frac{c}{n},$$

где $c = b - a^2$.

Мы можем как следствие написать неравенство

$$\omega \left\{ x:\ |s_n(x) - a| > \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right\} \leqslant \frac{c}{\sqrt[3]{n}}. \tag{9}$$

Возьмем теперь произвольную последовательность значений $n_1, n_2, \ldots$ так, чтобы ряд из чисел $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n_p}}$ сходился. Тогда мы будем иметь

$$\omega \bigcup_{p=q}^{\infty} \left\{ x:\ |s_{n_p}(x) - a| > \frac{1}{\sqrt[3]{n_p}} \right\} \leqslant c \sum_{p=q}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n_p}} \to 0$$

при $q \to \infty$. Отсюда

$$\omega \prod_{q=1}^{\infty} \bigcup_{p=q}^{\infty} \left\{ x:\ |s_{n_p}(x) - a| > \frac{1}{\sqrt[3]{n_p}} \right\} = 0,$$

и, следовательно, дополнительное множество

$$\bigcup_{q=1}^{\infty} \prod_{p=q}^{\infty} \left\{ x\colon |s_{n_p}(x) - a| \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n_p}} \right\}$$

имеет полную меру. Таким образом, почти каждая точка $x \in \Omega$ принадлежит всем множествам некоторого семейства

$$\left\{ x\colon |s_{n_p}(x) - a| \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n_p}} \right\}, \quad p = q,\ q+1,\ \ldots,$$

а это означает, что почти в каждой точке $x \in \Omega$

$$\lim_{p\to\infty} s_{n_p}(x) = a. \tag{10}$$

Подчеркнем, что множество полной меры, на котором выполняется соотношение (10), имеется для каждой последовательности n_p со сходящимся рядом $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n_p}}$. Построим такое множество для специальной последовательности $n_p = p^4$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$ и обозначим его через Q; $\omega Q = 1$.

Для любого n найдем такое p, чтобы иметь

$$n_p = p^4 < n \leqslant (p+1)^4 = n_{p+1}.$$

Мы имеем

$$s_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} q(x_k) = \frac{1}{n} \left[\sum_{1}^{n_p} q(x_k) + \sum_{n_p+1}^{n} q(x_k) \right] =$$

$$= \frac{1}{n_p} \sum_{1}^{n_p} q(x_k) \cdot \frac{n_p}{n} + \frac{1}{n} \sum_{n_p+1}^{n} q(x_k). \tag{11}$$

Поскольку

$$1 > \frac{n_p}{n} \geqslant \frac{n_p}{n_{p+1}} = \frac{p^4}{(p+1)^4} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{p}\right)^4} \to 1,$$

первое слагаемое в (11) стремится к a на множестве Q Второе слагаемое на множестве E полной меры, где

$|x_k| = O(\sqrt{\ln k})$ имеет оценку сверху

$$\frac{1}{p^4}[(p+1)^4 - p^4]\, q\left(x_{(p+1)^4}\right) \leqslant \frac{15}{p} q\left[C\sqrt{\ln(p+1)^4}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{15}{p} e^{\varepsilon C^2 \ln(p+1)^4} = \frac{15}{p}(p+1)^{4\varepsilon C^2}$$

и, следовательно, поскольку можно взять $\varepsilon < 1/4C^2$, стремится к 0 при $n \to \infty$.

Итак, почти всюду на Ω, именно, на пересечении Q и E

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} q(x_k) = a,$$

и теорема доказана.

7. Сдвиги и преобразования подобия. Полученный в п. 6 результат приводит к некоторым необычным свойствам меры ω; оказывается, что совокупность измеримых множеств не выдерживает ни преобразований сдвига, ни преобразований подобия.

Теорему п. 6 мы применим для функции $q(u) = u^2$, где (п. 4)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(u)\, e^{-u^2} du = \frac{1}{2}.$$

Положим

$$S_\gamma = \left\{ a\colon \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_k^2 = \gamma \right\}.$$

В силу п. 5 множество $S_{1/2}$ имеет полную меру и, следовательно, совокупность всех остальных S_γ имеет меру 0. Преобразование подобия $x \to \lambda x$ переводит поверхность S_γ в $\lambda S_\gamma = S_{\lambda^2\gamma}$. В частности, $\lambda S_{\frac{1}{2}} = S_{\frac{1}{2}\lambda^2}$. При $\lambda \neq \pm 1$ любое подмножество этой последней поверхности измеримо (и имеет меру 0), в то время как у поверхности $S_{1/2}$ имеются как измеримые, так и неизмеримые подмножества. Таким образом, умножение на $\lambda \neq \pm 1$ заведомо переводит некоторые измеримые множества в неизмеримые.

Камерон и Мартин [15] указали по этому поводу эффектную теорему, которая применительно к нашим рассмотрениям звучит следующим образом:

Теорема 7. *Для любой функции $f(\lambda)$, определенной на полуоси $0 < \lambda < \infty$ и принимающей значения между 0 и 1, можно указать такое измеримое множество $E \subset \Omega$, что*

$$\omega(\lambda E) = f(\lambda).$$

Для доказательства возьмем произвольную функцию $\alpha(\mu)$, определенную для $-\infty < \mu < \infty$, и положим

$$B_\mu = \{x\colon\ \alpha(\mu) < x_1 < \infty\},$$

так что

$$\omega B_\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha(\mu)}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\mu.$$

Мы имеем, очевидно,

$$\lambda B_\mu = B_{\lambda\alpha(\mu)}.$$

Положим

$$E = \bigcup_{-\infty < \mu < \infty} B_\mu S_\mu.$$

При этом

$$\lambda E = \bigcup_\mu \lambda B_\mu \cdot \lambda S_\mu = \bigcup_\mu B_{\lambda\alpha(\mu)} S_{\lambda^2\mu}.$$

При одном из значений μ, при таком, что $\lambda^2\mu = 1/2$, соответствующее слагаемое измеримо и имеет меру, равную мере бруса $B_{\lambda\alpha(\mu)}$. Объединение всех остальных слагаемых содержится в дополненнн множества $S_{1/2}$ и имеет меру 0. Таким образом, λE нзмеримо и

$$\omega(\lambda E) = \omega B_{\lambda\alpha\left(\frac{1}{2\lambda^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\lambda\alpha\left(\frac{1}{2\lambda^2}\right)}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Теперь остается подобрать функцию $\alpha(\mu)$ так, чтобы полученный интеграл давал заданную функцию $f(\lambda)$, что, очевидно, возможно.

Рассмотрим теперь в пространстве Ω операцию сдвига на вектор $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$. Если нас не интересуют сдвиги на векторы из множества меры 0, можно принять, что $y \in S_{1/2}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_1^\infty y_k^2 = \frac{1}{2}$. Множество E тех $x \in S_{1/2}$, которые после сдвига на y оказываются снова в $S_{1/2}$, измеримо (оно определяется двумя предельными соотношениями). Оценим его меру.

Если

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_k^2 \to \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} y_k^2 \to \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} (x_k + y_k)^2 \to \frac{1}{2},$$

то, следовательно,

$$\frac{2}{n}\sum_{1}^{n} x_k y_k \to -\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} (-x_k + y_k)^2 \to \frac{3}{2},$$

так что $-E$ заведомо не пересекается с E. Но $-E$ вместе с E измеримо и лежит в $S_{1/2}$; отсюда $\omega E \leqslant 1/2$. Сдвиг на y переводит множество $S_{1/2} - E$, имеющее меру $\geqslant 1/2$, во вне $S_{1/2}$ и, следовательно, в множество меры 0. Но тогда, как и выше, имеются неизмеримые множества, переходящие в измеримые. Итак, *в пространстве Ω может существовать лишь множество меры 0 тех y, сдвиг на которые переводит измеримые множества в измеримые.* В § 5 это множество будет указано в явной форме.

8. Признак Колмогорова — Хинчина. *Пусть дан ряд положительных чисел $a_1 + a_2 + \ldots$; обозначим через $E_{\langle a_n\rangle}$ совокупность всех точек $x \in \Omega$, для которых*

$$\sum_{1}^{\infty} a_n x_n^2 < \infty.$$

Тогда

$$\omega E_{\langle a_n\rangle} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{1}^{\infty} a_n < \infty, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{1}^{\infty} a_n = \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Введем функцию

$$f_\lambda(x)=e^{-\lambda\sum\limits_1^\infty a_n x_n^2},\qquad \lambda>0.$$

Эта функция положительна при $x\in E_{\langle a_n\rangle}$ и равна 0 при $x\notin E_{\langle a_n\rangle}$. Функция

$$f_{\lambda N}(x)=e^{-\lambda\sum\limits_1^N a_n x_n^2}$$

измерима; согласно теореме Беппо Леви интеграл от $f_\lambda(x)$ можно найти как предел при $N\to\infty$ интеграла от $f_{\lambda N}(x)$. Для функции $f_{\lambda N}(x)$ мы имеем

$$\int\limits_\Omega f_{\lambda N}(x)\,d\omega=\prod_{k=1}^N\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda a_n x_n^2-x_n^2}\,dx_n=$$

$$=\prod_{n=1}^N\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(1+\lambda a_n)x_n^2}\,dx_n=\prod_{n=1}^N\frac{1}{\sqrt{1+\lambda a_n}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\prod\limits_{n=1}^N(1+\lambda a_n)}}.$$

Мы имеем, далее,

$$\int\limits_\Omega f_\lambda(x)\,d\omega=\lim_{N\to\infty}\int\limits_\Omega f_{\lambda N}(x)\,d\omega=\frac{1}{\sqrt{\prod\limits_{n=1}^\infty(1+\lambda a_n)}}.$$

Если $\sum\limits_1^\infty a_n=\infty$, то $\prod\limits_1^\infty(1+\lambda a_n)=\infty$, следовательно,

$$\int\limits_\Omega f_\lambda(x)\,d\omega=0;$$

отсюда следует, что $\omega E_{\langle a_n\rangle}=0$. Если $\sum\limits_1^\infty a_n$ конечна, то и $\prod\limits_1^\infty(1+\lambda a_n)$ конечно и интеграл $\int\limits_\Omega f_\lambda(x)\,d\omega$ имеет конечное значение.

Устремим λ к 0; функция $f_\lambda(x)$ будет иметь предел, равный 1 на $E_{\langle a_n\rangle}$ и 0 вне $E_{\langle a_n\rangle}$, а интеграл от $f_\lambda(x)$ будет иметь пределом меру $E_{\langle a_n\rangle}$. Но очевидно, что в данном случае

$$\lim_{\lambda\to 0}\prod_1^\infty(1+\lambda a_n)=1,$$

откуда и $\omega E_{\langle a_n\rangle}=1$, что и требуется.

9. Условия сходимости ряда $\sum_{n=1}^\infty f_n x_n$. Пусть f_1, f_2, ... — числовая последовательность. Покажем, что *ряд*

$$[f,x]=\sum_1^\infty f_n x_n \tag{12}$$

сходится в среднем квадратическом на пространстве Ω *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_1^\infty f_n^2<\infty.$$

Мы имеем

$$\int_\Omega\left(\sum_{n+1}^{n+p} f_k x_k\right)^2 d\omega=$$

$$=\sum_{n+1}^{n+p} f_k^2\int_\Omega x_k^2\,d\omega+\sum_{\substack{n+1\\(k\neq m)}}^{n+p}\sum_{n+1}^{n+p} f_k f_m\int_\Omega x_k x_m\,d\omega=$$

$$=\sum_{n+1}^{n+p} f_k^2\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x_k^2 e^{-x_k^2}\,dx_k=\frac{1}{2}\sum_{n+1}^{n+p} f_k^2,$$

откуда и следует утверждение.

Полагая здесь $n=0$ и устремляя p в бесконечность, находим

$$\int_\Omega\left(\sum_1^\infty f_k x_k\right)^2 d\omega=\frac{1}{2}\sum_1^\infty f_k^2. \tag{13}$$

Равенство (13) показывает, что функционал $[f, x]$ в пространстве $L_2(\Omega)$ непрерывно зависит от вектора $f \in l_2$. Если последовательность векторов $f^1, f^2, \ldots$ стремится к 0 по норме пространства l_2, то последовательность функций $[f^n, x] \in L_2(\Omega)$ стремится к 0 по норме пространства $L_2(\Omega)$.

Кроме того, *если* $\sum_1^{\infty} f_n^2 < \infty$, *то ряд* (12) *сходится не только в среднем квадратичном, но и почти всюду.* Для доказательства установим вначале следующее

Неравенство Колмогорова. *При любом* $\varepsilon > 0$ *и любых* $f_1, \ldots, f_n$

$$\omega\left\{x \in \Omega: \sup_{m \leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m} f_k x_k\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{14}$$

Доказательство основано на простом преобразовании. Обозначая $s_m = \sum_1^m f_k x_k$ и имея при любом $m \leqslant n$

$$s_n^2 = s_m^2 + 2(s_n - s_m)s_m + (s_n - s_m)^2,$$

мы получаем

$$\frac{1}{2}\sum_1^n f_k^2 = \int_\Omega s_n^2(x)\,d\omega \geqslant \sum_{m=1}^{n}\int_{\Omega_m}\left[s_m^2 + 2(s_n - s_m)s_m\right]d\omega,$$

где $Q_1, \ldots, Q_n$ — любые непересекающиеся измеримые множества.

Допустим, что при данном x мы имеем

$$\max_{m \leqslant n}|s_m(x)| > \varepsilon.$$

Тогда найдется первый номер $\mu = \mu(x)$, для которого $|s_\mu(x)| > \varepsilon$. Положим

$$Q_m = \{x \in \Omega: \mu(x) = m\};$$

множества Q_m измеримы и не пересекаются. При этом

$$\int_{Q_m}(s_n - s_m)s_m\,d\omega = \int_\Omega (s_n - s_m)z_m\,d\omega, \tag{15}$$

где $z_m(x)$ равна $s_m(x)$ на Q_m и 0 вне Q_m. Так как первый множитель под знаком интеграла (15) зависит от $x_{m+1}, \ldots,$ а второй — от $x_1, \ldots, x_m$, то в силу теоремы 2

$$\int_\Omega (s_n - s_m)\, z_m\, d\omega = \int_\Omega (s_n - s_m)\, d\omega \cdot \int_\Omega z_m\, d\omega = 0,$$

так как $s_n - s_m$ есть линейная функция от $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Теперь мы получаем

$$\frac{1}{2}\sum_1^n f_k^2 \geqslant \sum_1^n \int_{Q_m} s_m^2\, d\omega \geqslant \sum_1^n \varepsilon^2 \omega Q_m =$$

$$= \varepsilon^2 \omega \left\{ x\colon \max_{m \leqslant n} \left| \sum_1^m f_k x_k \right| > \varepsilon \right\},$$

и неравенство (14) доказано.

Пусть теперь $\sum\limits_1^\infty f_k^2 = C < \infty$. В силу неравенства (14) при любых ε, m, p

$$\omega \left\{ x\colon \sup_{m < n \leqslant p} \left| \sum_{k=m+1}^n f_k x_k \right| > \varepsilon \right\} \leqslant \frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{m+1}^p f_k^2,$$

откуда, устремляя p в бесконечность, находим

$$\omega \left\{ x\colon \sup_{m < n} \left| \sum_{m+1}^n f_k x_k \right| > \varepsilon \right\} \leqslant \frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{m+1}^\infty f_k^2.$$

Обозначим через G_m множество, стоящее в скобках слева.

Положим $\bar{f}(x) = \overline{\lim}\, s_n(x)$, $\underline{f}(x) = \underline{\lim}\, s_n(x)$. Множество $Z = \{x\colon \bar{f}(x) - \underline{f}(x) > 2\varepsilon\}$ принадлежит множеству

$$\left\{ x\colon \sup_{n > m} |s_n(x) - s_m(x)| > \varepsilon \right\}$$

при некоторых достаточно больших m, т. е. входит в множества G_m с как угодно большими номерами. Так как меры множеств G_m стремятся к 0, то $\omega Z = 0$, т. е. почти всюду $\bar{f}(x) - \underline{f}(x) \leqslant 2\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то почти всюду $\bar{f}(x) = \underline{f}(x)$, что и требуется.

Замечание. Пусть функция $q(u)$ $(-\infty < u < \infty)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(u)\, e^{-u^2}\, du = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q^2(u)\, e^{-u^2}\, du = \frac{c}{2} < \infty.$$

Если $\sum_{1}^{\infty} f_n^2 < \infty$, *то почти всюду на* Ω *и в среднем квадратическом сходится ряд* $\sum_{1}^{\infty} f_n q(x_n)$.

Доказательство получается из предыдущего заменой величины x_k на $g(x_k)$ и постоянной $\frac{1}{2}$ на $\frac{c}{2}$.

10. Лебеговские множества функций $[f, x]$. Пусть ряд $\sum_{1}^{\infty} f_n^2$ сходится. Обозначим через $[f, x]$ сумму $\sum_{1}^{\infty} f_n x_n$ (конечную по доказанному почти всюду на Ω) и найдем меру ее лебеговского множества

$$E_c(f) \equiv \{x\colon [f, x] > c\}.$$

Лемма 1. *Пусть X — произвольное множество с лебеговской мерой μ и $L_2(X)$ — пространство квадратично интегрируемых функций $\varphi(x)$. Пусть $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $L_2(X)$. Тогда для любого c*

$$\mu\{x\colon \varphi(x) > c\} = \lim_{c_p \searrow c} \lim_{n\to\infty} \mu\{x\colon \varphi_n(x) \geqslant c_p\},$$

где c_p — некоторая последовательность, стремящаяся, убывая, к числу c.

Доказательство. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем номер n такой, чтобы иметь $\|\varphi_n - \varphi\|_2 < \varepsilon$. Тогда

$$\mu\{x\colon |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \sqrt{\varepsilon}\} \leqslant \varepsilon,$$

так как в противном случае было бы

$$\|\varphi_n - \varphi\|_2^2 = I(|\varphi_n - \varphi|^2) > \varepsilon^2.$$

Множество точек $\{x\colon |\varphi_n(x) - \varphi(x)| > \sqrt{\varepsilon}\}$ обозначим через $Z_{\sqrt{\varepsilon}}$. Предположим сначала, что $\mu\{x\colon \varphi(x) = c\} = 0$.

Тогда, очевидно,

$$\mu\left\{x:\ c-\sqrt{\varepsilon}\leqslant\varphi(x)\leqslant c+\sqrt{\varepsilon}\right\}=\delta(\varepsilon),$$

где $\delta(\varepsilon)$ стремится к 0 вместе с ε. Мы имеем:

$$\left\{x:\ \varphi(x)\geqslant c+\sqrt{\varepsilon}\right\}\subset Z_{\sqrt{\varepsilon}}+\left\{x:\ \varphi_n(x)\geqslant c\right\},$$

$$\left\{x:\ \varphi(x)< c-\sqrt{\varepsilon}\right\}\subset Z_{\sqrt{\varepsilon}}+\left\{x:\ \varphi_n(x)< c\right\},$$

$$\mu\left\{x:\ \varphi(x)\geqslant c+\sqrt{\varepsilon}\right\}\leqslant\varepsilon+\mu\left\{x:\ \varphi_n(x)\geqslant c\right\},$$

$$\mu\left\{x:\ \varphi(x)< c-\sqrt{\varepsilon}\right\}\leqslant\varepsilon+\mu\left\{x:\ \varphi_n(x)< c\right\},$$

$$\mu\left\{x:\ \varphi(x)\geqslant c+\sqrt{\varepsilon}\right\}-\varepsilon\leqslant\mu\left\{x:\ \varphi_n(x)\geqslant c\right\}=$$
$$=\mu X-\mu\left\{x:\ \varphi_n(x)<c\right\}\leqslant\mu X+\varepsilon-\mu\left\{x:\ \varphi(x)<c-\sqrt{\varepsilon}\right\}=$$
$$=\varepsilon+\mu\left\{x:\ \varphi(x)\geqslant c+\sqrt{\varepsilon}\right\}+$$
$$+\mu\left\{x:\ c-\sqrt{\varepsilon}\leqslant\varphi(x)\leqslant c+\sqrt{\varepsilon}\right\}=$$
$$=\varepsilon+\mu\left\{x:\ \varphi(x)\geqslant c+\sqrt{\varepsilon}\right\}+\delta(\varepsilon).$$

Устремляя ε к 0, получаем:

$$\mu\left\{x:\ \varphi(x)>c\right\}=\lim_{n\to\infty}\mu\left\{x:\ \varphi_n(x)\geqslant c\right\}.$$

В общем случае, когда $\mu\{x:\ \varphi(x)=c\}>0$, мы всегда можем найти последовательность $c_p\searrow c$, для которой $\mu\{x:\ \varphi(x)=c_p\}=0$. Мы имеем

$$\mu\left\{x:\ \varphi(x)>c\right\}=\lim_{c_p\searrow c}\mu\left\{x:\ \varphi(x)>c_p\right\}=$$
$$=\lim_{c_p\searrow c}\lim_{n\to\infty}\mu\left\{x:\ \varphi_n(x)>c_p\right\},$$

что и утверждалось.

Применяя лемму, получаем

$$\omega\left\{x:\ [f,\ x]>c\right\}=\lim_{c_p\searrow c}\lim_{n\to\infty}\omega\left\{x:\ [f^n,\ x]\geqslant c_p\right\},$$

где $f^n=\{f_1,\ \ldots,\ f_n,\ 0,\ \ldots\}\to f$, так что $[f^n,\ x]\to[f,\ x]$ в $L_2(\Omega)$.

Но меру множества $\{x\colon [f^n, c] > c_p\}$ легко сосчитать. Именно,

$$\omega\{x\colon [f^n, x] > c_p\} = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \underset{\sum\limits_1^n f_k \xi_k > c_p}{\int \ldots \int} e^{-\xi_1^2 - \ldots - \xi_n^2}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

В силу сферической симметрии подынтегральной функции мера полупространства $\sum\limits_1^n f_k x_k > c_p$ равна мере полупространства $\xi_1 > c_p \Big/ \sqrt{\sum\limits_1^n f_k^2}$ и, следовательно, равна

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{c_p \Big/ \sqrt{\sum\limits_1^n f_k^2}}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Поэтому

$$\omega\{x\colon [f, x] > c\} = \lim_{c_p \searrow c} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{c_p \Big/ \sqrt{\sum\limits_1^n f_k^2}}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{c \Big/ \sqrt{\sum\limits_1^\infty f_k^2}}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi. \tag{16}$$

Особенно простая формула получается для нормированного вектора f, так что $\sum\limits_1^\infty f_k^2 = 1$. Используя две аналогичные формулы, мы получаем, в частности, равенство

$$\omega\{x\colon a < [f, x] \leqslant b\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_a^b e^{-\xi^2}\, d\xi \quad \left(\sum_1^\infty f_k^2 = 1\right).$$

11. Совместные лебеговские множества системы функций $[f_k, x]$. Пусть теперь $f^1, \ldots, f^m$ — нормированные ортогональные векторы

$$f^k = (f_1^k, \ldots, f_n^k, \ldots), \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n^k f_n^j = \begin{cases} 1 & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{при } k \neq j. \end{cases}$$

Покажем, что

$$\omega\{x\colon a_k < [f^k, x] \leqslant b_k,\ k = 1, \ldots, m\} = \\ = \prod_1^m \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a_k}^{b_k} e^{-\xi_k^2}\, d\xi_k. \qquad (17)$$

Для доказательства используем следующую лемму:

Лемма 2. *Рассмотрим в условиях леммы* 1 m *последовательностей*

$$\varphi_n^1(x) \to \varphi^1(x), \ \ldots, \ \varphi_n^m(x) \to \varphi^m(x),$$

сходящихся к своим пределам по метрике пространства $L_2(X)$. *Тогда*

$$\mu\{x\colon \varphi^1(x) > c_1, \ldots, \varphi^m(x) > c_m\} = \\ = \lim_{c_j^p \searrow c_j} \lim_{n \to \infty} \mu\{x\colon \varphi_n^1(x) > c_1^p, \ldots, \varphi_n^m(x) > c_m^p\}.$$

Доказательство леммы 2 получается небольшим изменением доказательства леммы 1. Найдем для заданного $\varepsilon > 0$ номер n так, чтобы иметь

$$\|\varphi^k - \varphi_n^k\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

Тогда при любом k также

$$\mu\{x\colon |\varphi_n^k(x) - \varphi(x)| > \sqrt{\varepsilon}\} \leqslant \frac{\varepsilon}{m}. \qquad (18)$$

Объединение по $k = 1, 2, \ldots, m$ множеств точек, определенных фигурными скобками в (18), обозначим $Z_{\sqrt{\varepsilon}}$; очевидно, $\mu Z_{\sqrt{\varepsilon}} \leqslant \varepsilon$.

Предположим сначала, что при каждом k

$$\mu\{x\colon \varphi^k(x) = c_k\} = 0.$$

Тогда

$$\mu\{x\colon c_k-\sqrt{\varepsilon}\leqslant\varphi^k(x)\leqslant c_k+\sqrt{\varepsilon}\}=\delta_k(\varepsilon)\leqslant\delta(\xi),$$

где $\delta(\xi)$ не зависит от k и стремится к 0 с ε. Далее,

$$\{x\colon \varphi^1(x)\geqslant c_1+\sqrt{\varepsilon},\ \ldots,\ \varphi^m(x)\geqslant c_m+\sqrt{\varepsilon}\}\subset$$
$$\subset Z_{\sqrt{\varepsilon}}+\{x\colon \varphi_n^1(x)\geqslant c_1,\ \ldots,\ \varphi_n^m(x)\geqslant c_m\},$$
$$\{x\colon \varphi^1(x)< c_1-\sqrt{\varepsilon},\ \ldots,\ \varphi^m(x)< c_m-\sqrt{\varepsilon}\}\subset$$
$$\subset Z_{\sqrt{\varepsilon}}+\{x\colon \varphi_n^1(x)< c_1,\ \ldots,\ \varphi_n^m(x)< c_m\},$$

и выкладки леммы 1 проходят без изменений.

Также без затруднений осуществляется переход к возможному случаю

$$\mu\{x\colon \varphi^k(x)=c_k\}>0.$$

Применяя лемму, получаем

$$\omega\{x\colon [f^1,\ x]>c_1,\ \ldots,\ [f^m,\ x]>c_m\}=$$
$$=\lim_{c_k^p\searrow c_k}\ \lim_{n\to\infty}\omega\{x\colon [f^{1n},\ x]>c_1^p,\ \ldots,\ [f^{mn},\ x]>c_m^p\},$$

где f^{kn} получается заменой у вектора f^k всех его координат, начиная с $(n+1)$-й, на нули. Мера множества, стоящего под знаком предела, равна

$$\frac{1}{\sqrt{\pi^n}}\int\limits_{\substack{\sum_1^n f_j^{kn}\xi_j>c_j^p\\ k=1,\ \ldots,\ m,}} e^{-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2}\,d\xi_1\ldots d\xi_n.$$

Фигура, по которой производится интегрирование, есть m-гранный угол в n-мерном пространстве. Считая $n>m$, можно поворотом перевести эту фигуру в m-мерное пространство, определенное координатами $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_m$, без изменения значения интеграла. Грани угла при $n\to\infty$ станут во взаимно перпендикулярное положение; можно считать также, что они становятся перпендикулярными координатным осям.

Поэтому в пределе $(n \to \infty,\ c_k^p \searrow c_k)$ получим

$$\omega\{x\colon [f^1, x] > c_1, \ldots, [f^m, x] > c_m\} = \prod_1^m \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{c_k}^{\infty} e^{-\xi_k^2}\, d\xi_k.$$

Отсюда, очевидно, следует и искомая формула (17).

12. Еще один тип множеств полной меры. Полученный результат позволит нам указать еще один тип подмножеств Ω, несущих полную меру. Пусть имеется набор систем векторов пространства l_2:

$$\begin{array}{l} f^{11}; \\ f^{21},\ f^{22}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f^{n1},\ f^{n2},\ \ldots,\ f^{nn}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

причем векторы каждой строки взаимно ортогональны и нормированы, но ортогональность векторов в разных строках не предполагается.

Пусть, далее, $q(u)$ — функция, рассмотренная в п. 6. Рассмотрим вопрос о существовании предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} q([f^{nk}, x]).$$

Если положить

$$s_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} q([f^{nk}, x]),$$

то, как и в п. 6, получим

$$\int_\Omega [s_n(x) - a]^2\, d\omega = \frac{1}{n^2} \sum_1^n \int_\Omega q^2([f^{nk}, x])\, d\omega +$$
$$+ \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega g([f^{nj}, x])\, g([f^{nk}, x])\, d\omega -$$
$$- \frac{2a}{n} \sum_1^n \int_\Omega g([f^{nk}, x])\, d\omega + a^2.$$

Поскольку совместные лебеговские множества функций $[f^{nk}, x]$ такие же, как у соответствующих фуикций x_k $(k=1, \ldots, n)$, мы получаем тот же результат интегрирования, что и в п. 6:

$$\int_{\Omega} [s_n(x)-a]^2 = \frac{b-a^2}{n}.$$

Далее, как и в п. 6, мы получаем, что *для любой последовательности* $s_{n_p}(x)$, *где ряд* $\sum_p \frac{1}{\sqrt[3]{n_p}}$ *сходится, имеется множество полной меры, на котором*

$$\lim_{p\to\infty} s_{n_p}(x) = a. \tag{19}$$

Однако, поскольку соотношение $x_k = O(\sqrt{\ln k})$ уже не сохраняется при переходе к величинам $[f^{nk}, x]$ (где появляется иеучитываемая зависимость от n), мы не можем далее перейти от подпоследовательиости n_p к последовательности всех n, как это мы делалн в п. 6 для специальной последовательности $[f^{nk}, x] = x_k$.

§ 4. МЕРА ВИНЕРА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Абстрактиая мера Винера. Основная теорема § 1 может быть использована и для прямого построения гауссовых счетно-аддитивных мер в различных пространствах.

Пусть, например, H — гильбертово сепарабельное пространство и $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — какой-либо ортонормированный базис. Каждый вектор $z \in H$ может быть задан последовательностью чисел $z_n = (e_n, z)$ с $\sum_1^\infty z_n^2 < \infty$.

Фиксируем последовательность положительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и поставим в соответствие каждой точке $z \in H$ точку $x = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \ldots) \in \Omega$. Это отображение $H \to \Omega$

взаимно однозначно (мономорфизм), и мы можем заимствовать меру цилиндрических множеств в H из Ω по правилу

$$w\{z \in H:\ \alpha_1 < z_1 \leqslant \beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n < z_n \leqslant \beta_n\} =$$
$$= \omega\{x : \Omega:\ \alpha_1\lambda_1 < x_1 \leqslant \beta_1\lambda_1,\ \ldots,\ \alpha_n\lambda_n < x_n \leqslant \beta_n\lambda_n\}.$$

Полученная мера на H будет счетно-аддитивной, если образ H в Ω будет заполнять множество полной меры.

Этот образ есть множество всех тех $x \in \Omega$, для которых сходится ряд $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{\lambda_n^2} x_n^2 = \sum\limits_1^\infty z_n^2$. В силу признака Колмогорова—Хинчина, оно имеет полную меру при сходимости ряда $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{\lambda_n^2}$. Предполагая это условие выполненным, мы получаем возможность строить в пространстве H большое количество гауссовых мер. Каждая отдельная мера зависит от выбора базиса e_n и постоянных λ_n.

Мера в пространстве H, получающаяся при $\lambda_n \equiv n$, называется (*абстрактной*) *мерой Винера*.

Мера Винера всего пространства H равна 1, мера любого полупространства $z_n \geqslant 0$ равна 1/2. Мера не является инвариантной относительно сдвигов и вращений, даже относительно перестановок осей. Впрочем, имеется группа линейных преобразований, переводящих измеримые множества в измеримые; используя результаты §§ 8—9, эту группу можно выписать явно.

Пример. Найдем значение меры Винера для шара $|z| \leqslant R$. Соответствующей фигурой в Ω является «эллипсоид»

$$S(R) = \left\{x:\ \frac{x_1^2}{1^2} + \frac{x_2^2}{2^2} + \ldots \leqslant R^2\right\}.$$

Искомая величина, очевидно, может быть записана в виде

$$w\{z:\ |z| \leqslant R\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int\limits_{\frac{x_1^2}{1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{n^2} \leqslant R^2} \!\!\cdots\!\! \int e^{-\sum\limits_1^n x_k^2}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Положим

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int\limits_{\frac{x_1^2}{1^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{n^2}<R^2} e^{-\sum\limits_1^n x_k^2}\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{n!}{\sqrt{\pi^n}} \int\limits_{\sum\limits_1^n y_k^2 < R^2} \cdots \int \prod_{k=1}^n e^{-k^2 y_k^2}\, dy_k.$$

Пусть $\chi_R(\tau)$ есть характеристическая функция отрезка $|\tau| \leqslant R$. По формуле преобразования Фурье

$$\chi_R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\lambda R}}{i\lambda} e^{i\lambda\tau}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\lambda R^2}}{i\lambda} e^{i\lambda\tau^2} d\lambda,$$

поэтому

$$w_n = \frac{n!}{\sqrt{\pi^n}} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R_n} \cdots \int \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\lambda R^2}}{i\lambda} e^{i\lambda \sum\limits_1^n y_k^2}\, d\lambda \right] \times$$

$$\times \prod_{k=1}^n e^{-k^2 y_k^2}\, dy_k = \frac{n!}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\lambda R^2}}{i\lambda} \times$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(i\lambda - k^2) y_k^2}\, dy_k \right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\lambda R^2}}{i\lambda} \frac{1}{\sqrt{\prod\limits_1^n \left(1-\frac{i\lambda}{k^2}\right)}}\, d\lambda.$$

Но так как

$$\lim_{n\to\infty} \prod_1^n \left(1-\frac{i\lambda}{k^2}\right) = \frac{\sin \pi\sqrt{i\lambda}}{\pi\sqrt{i\lambda}},$$

и подынтегральная функция имеет интегрируемую мажоранту, мы приходим к окончательному результату:

$$w\{z: |z| \leqslant R\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\lambda R^2}}{i\lambda} \sqrt{\frac{\pi \sqrt{i\lambda}}{\sin \pi \sqrt{i\lambda}}}\, d\lambda.$$

2. Классическая мера Винера. Обозначим через $L_2(0, \pi)$ пространство вещественных квадратично интегрируемых функций $f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, с обычным скалярным произведением,

$$(f_1, f_2) = \int_0^{\pi} f_1(t) f_2(t)\, dt.$$

Как обычно, функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, для которых $(f_1 - f_2, f_1 - f_2) = 0$, отождествляются. Пусть, далее, $\widehat{L}_2(0, \pi)$ означает подпространство в $L_2(0, \pi)$, состоящее из всех функций $z(t)$, ортогональных к 1:

$$(z, 1) = \int_0^{\pi} z(t)\, dt = 0.$$

В пространстве $L_2(0, \pi)$ мы выделим полную ортонормальную систему из функций $e_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В пространстве $\widehat{L}_2(0, \pi)$ выделим полную ортонормальную систему из функций $g_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поставим в соответствие каждому элементу $z \in \widehat{L}_2$ последовательность чисел

$$x_n = -n(g_n, z) = -n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos nt\, z(t)\, dt. \qquad (1)$$

Мы получим, согласно доказанному в п. 1, отображение $\widehat{L}_2$ на множество полной меры в пространстве Ω. Обратное отображение дает возможность ввести в $\widehat{L}_2$ счетно-аддитивную лебеговскую меру, которую мы будем называть (классической) *мерой Винера* и обозначать через w.

В частности,

$$w\{z(t)\in\hat{L}_2\colon\ \alpha_1<x_1<\beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n<x_n\leqslant\beta_n\}=$$

$$=w\left\{z(t)\in\hat{L}_2\colon\ \alpha_1<-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi z(t)\cos t\,dt\leqslant\right.$$

$$\left.\leqslant\beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n<-n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi z(t)\cos nt\,dt\leqslant\beta_n\right\}=$$

$$=\prod_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}e^{-x_k^2}\,dx_k.$$

Если функция $z(t)$ дифференцируема, выражение x_n приводится к виду

$$x_n=-n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi z(t)\cos nt\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi\sin nt\,dz(t).$$

Обозначим последнее выражение через $[e_n,\ z]$; мы будем писать его и для любых функций из $\hat{L}_2$, понимая под ним величину x_n. Отметим, что для дифференцируемых функций числа x_n ограничены и, следовательно, *совокупность дифференцируемых функций в $\hat{L}_2$ составляет множество w-меры* 0.

Множество полной меры в $\hat{L}_2$ образуют, например, функции $z(t)$, у которых числа $|x_n|^2$ возрастают не быстрее $\sqrt{\ln n}$, или, что то же, те, у которых коэффициенты Фурье по косинусам имеют вид $O\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n}\right)$. (В частности, каждое из пространств $\hat{L}_p$, $p\geqslant 2$, образуют в $\hat{L}_2$ множество полной меры, а также и их пересечение; но мы в дальнейшем укажем более точно множество полной меры в $\hat{L}_2$.)

3. Определение значения в точке для множества функций полной меры. Фиксируем точку $t_1\in[0,\ \pi]$; мы определим сейчас для множества полной меры в $\hat{L}_2$ число

$z^*(t_1)$, которое будем называть условно «значением $z \in \hat{L}_2$ в точке t_1» (мы не связываем пока что величину $z^*(t_1)$ с числом $z(t_1)$, которое может существовать или не существовать). Именно, разложим $z(t)$ в ряд Фурье по функциям $g_n(t)$ (сходящийся по метрике $\hat{L}_2$)

$$z(t) = \sum_1^\infty (g_n, z)\, g_n(t) = -\sum_1^\infty \frac{x_n}{n} g_n(t) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_1^\infty \frac{x_n}{n} \cos nt$$

и положим в правой части $t = t_1$; ряд

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_1^\infty x_n \frac{\cos nt_1}{n},$$

в силу результатов § 3 п. 6, сходится в среднем и почти всюду на Ω, и следовательно, его сумма $x^*(t_1)$ определена почти для всех $z \in \hat{L}_2$.

Итак, выражение

$$z^*(t_1) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_1^\infty x_n \frac{\cos nt_1}{n}$$

определено для функций $z(t) \in \hat{L}_2$, образующих множество полной меры. Оно определено, в частности, для всех функций $z(t)$, непрерывных и удовлетворяющих условию Гельдера

$$|z(t') - z(t'')| \leqslant c\, |t' - t''|^\alpha, \qquad \alpha > 0,$$

поскольку для таких функций ряд Фурье сходится к значению $z(t)$ *). В этом случае выполняется даже и равенство $z^*(t_1) = z(t_1)$.

Пусть Q — счетное множество двоично рациональных точек

$$\frac{p\pi}{2^q} \qquad (q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ p = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^q);$$

---

*) Г. Е. Шилов, Математический анализ. Специальный курс, Физматгиз, 1961, стр. 336.

имеется множество P функций $z(t) \in \widehat{L}_2$ полной меры, для которого определены все значения $z^*\left(\frac{p\pi}{2^q}\right)$. В это множество, как мы уже заметили, входят все функции $z(t)$, удовлетворяющие условию Гельдера, причем для таких функций

$$z^*\left(\frac{p\pi}{2^q}\right) = z\left(\frac{p\pi}{2^q}\right).$$

С другой стороны, в это множество P заведомо входят и многие разрывные функции, даже при непрерывных значениях $z^*(t)$. Пусть, например, G есть открытое множество меры $\frac{\pi}{4}$, содержащее все точки $\frac{p\pi}{2^q}$, и $z_G(t)$ равна 0 на G и ± 1 на его дополнении, так что она принадлежит $\widehat{L}_2[0, \pi]$. Ряд Фурье функции $z_G(t)$ сходится к 0 в каждом составляющем интервале множества G, в частности во всех точках $\frac{p\pi}{2^q}$; таким образом, $z_G^*(t) \equiv 0$, хотя $z_G(t) \not\equiv 0$.

4. Интеграл Пэли — Винера — Зигмунда. В п. 2 было определено выражение

$$[e_n, z] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin nt \, dz(t)$$

для любой функции $z(t) \in \widehat{L}_2$ и

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Определим теперь выражение $[f, z]$ для любого элемента $f \in L_2$ и $z \in \widehat{L}_2$. Именно, мы имеем $f(t) = \sum_1^\infty f_k e_k(t)$, где $\sum_1^\infty f_k^2 < \infty$; положим, по определению,

$$[f, z] = \sum_1^\infty f_k [e_k, z] = \sum_1^\infty f_k x_k.$$

Как мы видели в § 3 п. 9, последний ряд сходится в среднем и почти всюду в пространстве $L_2(\Omega)$ и поэтому выражение $[f, z]$ есть суммируемая в квадрате функция на Ω; она определена на Ω почти всюду, а следовательно, и почти всюду и на $\widehat{L}_2$. Можно записать условно

$$[f, z]=\int_0^\pi f(t)\,dz(t);$$

последнее выражение называется *интегралом Пэли — Винера — Зигмунда.*

Пусть функция $z(t)$ абсолютно непрерывна и имеет квадратично интегрируемую производную $z'(t)$. Обозначим через z'_n коэффициенты Фурье функции $z'(t)$ по ортонормированной системе

$$e_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nt.$$

Мы имеем

$$z_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi z(t)\cos nt\,dt=$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{n}\int_0^\pi z'(t)\sin nt\,dt=-\frac{z'_n}{n}.$$

Отсюда получается естественная формула

$$\int_0^\pi f(t)\,dz(t)=\sum_1^\infty f_n x_n=-\sum_1^\infty f_n\frac{z_n}{n}=\sum_1^\infty f_n z'_n=$$

$$=\int_0^\pi f(t)\,z'(t)\,dt.$$

С другой стороны, пусть функция $f(t)$ абсолютно непрерывна, имеет квадратично интегрируемую производную $g(t)$ и обращается в нуль при $t=0$ и $t=\pi$. Из формулы

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi g(t)\cos nt\,dt$$

следует, что коэффициенты Фурье f_n функции $f(t)$ по системе $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nt$ и коэффициенты Фурье g_n функции $g(t)$ по системе $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nt$ связаны соотношением

$$f_n = \frac{1}{n} g_n.$$

Отсюда

$$[f, z] = \sum_1^\infty f_n x_n = \sum_1^\infty \frac{1}{n} g_n x_n = -\sum_1^\infty g_n z_n = \\ = -\int_0^\pi g(t) z(t)\, dt.$$

Таким образом, в указанных предположениях имеет место естественная формула

$$\int_0^\pi f(t)\, dz(t) = -\int_0^\pi f'(t)\, z(t)\, dt.$$

В общем случае, в силу результатов § 3, п. 9 $\left(\text{считая } \sum_1^\infty f_k^2 = 1\right)$, имеем

$$w\{z \in \hat{L}_2\colon\ \alpha < [f, z] \leqslant \beta\} = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Далее, если $f^1(t), \ldots, f^m(t)$ — ортонормированная система функций в $L_2(0, \pi)$, то по § 3, п. 10

$$w\{z \in \hat{L}_2\colon\ \alpha_1 < [f^1, z] \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n < [f^n, z] \leqslant \beta_n\} = \\ = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} e^{-\xi_k^2}\, d\xi_k.$$

Положим, в частности, $f(t)$ равной 0 вне некоторого промежутка (t_0, t_1) и равной $\frac{1}{\sqrt{t_1 - t_0}}$ в самом этом промежутке; очевидно, $\|f\|_{L_2} = 1$.

Мы имеем

$$f_k = (f, e_k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(t) \sin kt\, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t_1 - t_0}} \int_{t_0}^{t_1} \sin kt\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t_1 - t_0}} \frac{\cos kt_0 - \cos kt_1}{k}$$

и

$$[f, z] = \sum_1^\infty f_k x_k =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t_1 - t_0}} \left\{ \sum_1^\infty x_k \frac{\cos kt_0}{k} - \sum_1^\infty x_k \frac{\cos kt_1}{k} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t_1 - t_0}} [z^*(t_1) - z^*(t_0)];$$

последнее выражение справедливо во всяком случае для множества полной меры в $\hat{L}_2$.

По доказанному

$$w\left\{ z \in \hat{L}_2 \colon \alpha < \frac{z^*(t_1) - z^*(t_0)}{\sqrt{t_1 - t_0}} \leqslant \beta \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\xi^2}\, d\xi. \qquad (2)$$

Полагая $\alpha\sqrt{t_1 - t_0} = a$, $\beta\sqrt{t_1 - t_0} = b$, приводим (2) к виду

$$w\{ z \in \hat{L}_2 \colon a < z^*(t_1) - z^*(t_0) \leqslant b \} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a/\sqrt{t_1 - t_0}}^{b/\sqrt{t_1 - t_0}} e^{-\xi^2}\, d\xi. \qquad (3)$$

Если взять точки $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ и рассмотреть функцию $f_k(t)$, равную $\frac{1}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}$ в промежутке $t_{k-1} < t \leqslant t_k$

и 0 вне этого промежутка, то аналогично

$$w\{z\in\hat{L}_2\colon\ a_1 < z^*(t_1)-z^*(t_0)\leqslant$$
$$\leqslant b_1,\ \ldots,\ a_n < z^*(t_n)-z^*(t_{n-1})\leqslant b_n\} =$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a_k/\sqrt{t_k-t_{k-1}}}^{b_k/\sqrt{t_k-t_{k-1}}} e^{-\xi_k^2}\,d\xi_k =$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi(t_k-t_{k-1})}}\int\limits_{a_k}^{b_k} e^{-\frac{u_k^2}{t_k-t_{k-1}}}\,du_k. \qquad (4)$$

Более общим образом, если B — произвольное борелевское множество в R_n, то в силу счетной аддитивности меры w

$$w\{z\in\hat{L}_2\colon\ [z^*(t_1)-z^*(t_0),\ \ldots,\ z^*(t_n)-z^*(t_{n-1})]\in B\} =$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi^n(t_1-t_0)\ldots(t_n-t_{n-1})}}\times$$
$$\times\int\limits_{B}\ldots\int e^{-\frac{u_1^2}{t_1-t_0}-\ldots-\frac{u_n^2}{t_n-t_{n-1}}}\,du_1\ldots du_n. \qquad (5)$$

5. Отображение множества полной меры на множество функций с условием Гельдера. Теперь покажем, что существует множество полной меры таких элементов $z\in\hat{L}_2$, для которых соответствующие функции $z^*(t)$, определенные на множестве Q двоично рациональных точек $t=\frac{k\pi}{2^q}$, равномерно непрерывны и даже удовлетворяют некоторому условию Гельдера.

Пусть Z_{pq}^h — совокупность тех $z\in\hat{L}_2$, для которых

$$\left|z^*\left(\frac{p+1}{2^q}\pi\right)-z^*\left(\frac{p}{2^q}\pi\right)\right| > \frac{h\sqrt{\pi}}{A^q}.$$

Здесь A — фиксированная постоянная, величину которой мы ниже укажем точнее. Мера множества Z_{pq}^h, в силу (3), вычисляется по формуле

$$wZ_{pq}^h = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{|\xi| > \sqrt{2^q}\, h/A^q} e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sqrt{2^q}\, h/A^q}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Будем считать, что $1 < A < \sqrt{2}$, и обозначим отношение $\frac{\sqrt{2}}{A}$ через γ. Мы имеем

$$wZ_{pq}^h = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{h\gamma^q}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2h\gamma^q} e^{-h^2\gamma^{2q}}.$$

Мы можем положить $\gamma = 1 + \delta$, где $\delta > 0$; тогда $\gamma^{2q} \geqslant 1 + 2q\delta$ и, следовательно,

$$wZ_{pq}^h \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\, h\gamma^q} e^{-h^2(1+2q\delta)} = \frac{e^{-h^2}}{\sqrt{\pi}\, h} \left(\frac{e^{-2h^2\delta}}{\gamma} \right)^q.$$

Пусть, далее, Z^h есть объединение всех Z_{pq}^h по индексам p и q. Мы имеем

$$wZ^h \leqslant \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2^q-1} wZ_{pq}^h \leqslant \sum_{q=0}^{\infty} 2^q \frac{e^{-h^2}}{\sqrt{\pi}\, h} \left[\frac{e^{-2h^2\delta}}{\gamma} \right]^q =$$

$$= \frac{e^{-h^2}}{\sqrt{\pi}\, h} \sum_{q=0}^{\infty} \left[\frac{2e^{-2h^2\delta}}{\gamma} \right]^q. \tag{6}$$

Будем считать h настолько большим, что $\frac{2e^{-h^2\delta}}{\gamma} < \frac{1}{2}$. Тогда сумма справа в (6) не превосходит 1, и мы получаем

$$wZ^h \leqslant \frac{e^{-h^2}}{\sqrt{\pi}\, h}.$$

Для меры дополнительного множества $E^h = \widehat{L}_2 - Z^h$ получается оценка

$$wE^h \geqslant 1 - \frac{e^{-h^2}}{\sqrt{\pi}\, h}.$$

Таким образом, объединение всех E^h исчерпывает все $\widehat{L}_2$ с точностью до множества меры 0.

Так как

$$Z^h = \bigcup_{p,q} E^h_{pq},$$

$$E^h = \prod_{p,q} (\hat{L}_2 - Z^h_{pq}),$$

иначе говоря, с точностью до множества меры 0

$$E^h = \left\{ z \in \hat{L}_2 \colon \left| z^*\left(\frac{p+1}{2^q}\pi\right) - z^*\left(\frac{p}{2^q}\pi\right) \right| \leqslant \frac{h\sqrt{\pi}}{A^q} \right\} \tag{7}$$

при всех $q = 0, 1, 2, \ldots$ и всех $p = 0, 1, \ldots, 2^q - 1$.

Покажем, что для функций на E^h выполняется неравенство

$$| z^*(t'') - z^*(t') | \leqslant Bh\,| t'' - t' |^{\frac{1}{2} - \varepsilon}, \text{ где } B = 2\pi^{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{A}},$$

каковы бы ни были двоично рациональные точки t' и t''. Для этого найдем между точками t' и t'' двоично рациональную точку $t_0 = \frac{p\pi}{2^q}$ с наименьшим возможным знаменателем q; тогда точки t' и t'' можно будет представить в форме

$$t' = \frac{p\pi}{2^q} - \frac{\pi}{2^{q+k_1}} - \frac{\pi}{2^{q+k_2}} - \ldots,$$

$$t'' = \frac{p\pi}{2^q} + \frac{\pi}{2^{q+m_1}} + \frac{\pi}{2^{q+m_2}} + \ldots$$

с возможным пропуском некоторых слагаемых.

Применяя неравенство (6), получаем оценку

$$|z^*(t_0) - z^*(t')| \leqslant h\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{A^{q+k_1}} + \frac{1}{A^{q+k_2}} + \ldots\right) \leqslant \frac{h\sqrt{\pi}}{A^{q+k_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{A}},$$

$$|z^*(t_0) - z^*(t'')| \leqslant h\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{A^{q+m_1}} + \frac{1}{A^{q+m_2}} + \ldots\right) \leqslant \frac{h\sqrt{\pi}}{A^{q+m_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{A}},$$

откуда, считая для определенности $k_1 \leqslant m_1$,

$$|z^*(t') - z^*(t'')| \leqslant \frac{2h\sqrt{\pi}}{A^{q+k_1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{A}}.$$

Мы имеем, далее, $|t' - t''| \geqslant \frac{\pi}{2^{q+k_1}}$; так как $1 < A < \sqrt{2}$, то можно написать

$$A = 2^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \quad A^{q+k_1} = \left(2^{q+k_1}\right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \geqslant \frac{\pi^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{|t'-t''|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}},$$

$$|z^*(t') - z^*(t'')| \leqslant \frac{2h\pi^{\varepsilon}}{\pi^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \frac{1}{1-\frac{1}{A}} |t'-t''|^{\frac{1}{2}-\varepsilon},$$

что и утверждалось.

Таким образом, для функций $z(t) \in E^h$ соответствующие функции $z^*(t)$ на множестве двоично рациональных чисел равномерно непрерывны и, более того, удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2}-\varepsilon$ (причем ε можно считать произвольно малым). Так как объединение E всех E^h есть множество полной меры в $\hat{L}_2$, то мы можем заключить, что *почти всем* (по мере Винера) *функциям* $z(t) \in \hat{L}_2$ *отвечают функции* $z^*(t)$, *равномерно непрерывные на множестве двоично рациональных точек и удовлетворяющие условию Гельдера с показателем* $\frac{1}{2}-\varepsilon$.

6. Мера брусов с произвольными основаниями. Все функции $z^*(t)$ можно продолжить по непрерывности на весь отрезок $0 \leqslant t \leqslant \pi$, причем, очевидно, они останутся принадлежащими к тому же гельдерову классу. Тем самым каждому элементу $z(t)$ из некоторого множества E полной меры в $\hat{L}_2$ однозначным и линейным образом ставится в соответствие некоторая непрерывная функция $z^*(t)$, определенная уже при всех $t \in [0, \pi]$ и удовлетворяющая условию Гельдера с показателем $1/2-\varepsilon$. Покажем, что не только для двоично рациональных, но и для всех $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ из отрезка $[0, \pi]$ остается справедливой формула (4):

$$w\{z \in E:\ a_1 < z^*(t_1) - z^*(t_0) \leqslant b_1, \ldots$$
$$\ldots, a_n < z^*(t_n) - z^*(t_{n-1}) \leqslant b_n\} =$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a_k/\sqrt{t_k - t_{k-1}}}^{b_k/\sqrt{t_k - t_{k-1}}} e^{-\xi_k^2}\, d\xi_k.$$

Обозначим через $N \equiv N(t_0, \ldots, t_n;\ a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ множество в фигурных скобках, а его пересечение с множеством E^k — через N^h (при необходимости с той же системой аргументов). Очевидно, если $t_0, \ldots, t_n$ двоично рациональны, то N^h измеримо и

$$wN - wZ^h \leqslant wN^h \leqslant wN.$$

Для заданного h фиксируем $\delta > 0$ так, что $\delta^{1/2-\varepsilon}h < \frac{1}{h}$, и рассмотрим произвольную систему двоично рациональных точек $t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_n$ таких, что $|t_k - t'_k|$. В пределах множества E^h выполняется неравенство

$$|z^*(t_k) - z^*(t'_k)| \leqslant Bh\delta^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Поэтому

$$N_-^h \equiv N^h\Big(t'_0, \ldots, t'_n;\ a_1 + Bh\delta^{\frac{1}{2}-\varepsilon},\ b_1 - Bh\delta^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \ldots$$
$$\ldots, a_n + Bh\delta^{\frac{1}{2}-\varepsilon},\ b_n - Bh\delta^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\Big) \subset$$
$$\subset N^h(t_0, \ldots, t_n;\ a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \subset$$
$$\subset N_+^h \equiv N^h\Big(t'_0, \ldots, t'_n;\ a_1 - Bh\delta^{\frac{1}{2}-\varepsilon},$$
$$b_1 + Bh\delta^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \ldots, a_n - Bh\delta^{\frac{1}{2}-\varepsilon},\ b_n + Bh\delta^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\Big).$$

Таким образом, $N^h(t_0, \ldots, t_n;\ a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ заключено между двумя измеримыми множествами N_-^h и N_+^h, меры которых в свою очередь удовлетворяют неравенствам

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{(a_k+2Bh\delta^{1/2}-\varepsilon)/\sqrt{t_k-t_{k-1}}}^{(b_k-2Bh\delta^{1/2}-\varepsilon)/\sqrt{t_k-t_{k-1}}} e_k^{-\xi^2}\,d\xi_k-wZ^h\leqslant wN_-^h\leqslant wN_+^h\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{(a_k-2Bh\delta^{1/2}-\varepsilon)/\sqrt{t_k-t_{k-1}}}^{(b_k+2Bh\delta^{1/2}-\varepsilon)/\sqrt{t_k-t_{k-1}}} e^{-\xi_k^2}\,d\xi_k.$$

При $h\to\infty$ оба эти числа стремятся к общему пределу

$$\rho=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a_k/\sqrt{t_k-t_{k-1}}}^{b_k/\sqrt{t_k-t_{k-1}}} e^{-\xi_k^2}\,d\xi_k.$$

В то же время при увеличении h множество N^h расширяется и множество N оказывается объединением всех N^h. Мы имеем

$$\rho=\lim_{h\to\infty}wN_-^h\leqslant w_*N\leqslant w^*N\leqslant\lim_{h\to\infty}w^*N^h\leqslant\lim_{h\to\infty}wN_+^h=\rho.$$

Но тогда N измеримо и $wN=\rho$, что и требовалось.

7. Реализация меры Винера на функциях с условием Гельдера.

Теорема 1. *Почти все (по мере Винера) функции пространства* $\widehat{L}_2[0,\pi]$ *непрерывны и удовлетворяют условию Гельдера с показателем* $^1/_2-\varepsilon$ *).

Доказательство. Каждому элементу $z(t)$ из множества $N\subset\widehat{L}_2$ полной меры мы поставили в соответствие непрерывную функцию $z^*(t)$, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем $^1/_2-\varepsilon$. Для функции $z(t)$, которая сама удовлетворяет условию Гельдера, функция $z^*(t)$ совпадает с $z(t)$. Покажем, что почти для всех $z(t)\in\widehat{L}_2$ справедливо равенство $z^*(t)\equiv z(t)$. Очевидно, этим теорема и будет доказана.

*) Напомним, что функции, различающиеся лишь на множестве меры 0, отождествляются.

В п. 4 мы построили функционал

$$[f, z] = \int_0^\pi f(t)\, dz(t);$$

для каждой квадратично интегрируемой функции $f(t) \in L_2$ он определен на множестве полной меры в Ω формулой

$$[f, z] = \sum_1^\infty f_k x_k, \quad x_k = -k(g_k, z),$$

и представляет собою квадратично интегрируемую функцию от z. Как мы видели в п. 6 § 3, функционал $[f, x]$ в пространстве $L_2(\Omega)$ непрерывно зависит от вектора $f \in L_2(0, \pi)$: если $f^n \to f$ в $L_2(0, \pi)$, то $[f^n, z] \to [f, z]$ в $L_2(\Omega)$.

Возьмем в качестве f функцию $e_m(t) = \sqrt{2/\pi} \sin mt$, а в качестве $f^n = f^n(t)$ последовательность ступенчатых функций, равномерно стремящуюся к $e_m(t)$; например, если $0 \leqslant t_0 < t_1 \ldots < t_n = \pi$, то

$$f^n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mt_k h_k(t),$$

где $h_k(t)$ равна 1 при $t_k < t \leqslant t_{k+1}$ и 0 вне этого промежутка. Мы имеем для $z \in E$

$$[f^n, z] = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mt_k [h_k, z] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mt_k [z^*(t_{k+1}) - z^*(t_k)].$$

Используя преобразование Абеля *), запишем последнее

---

*) Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального интегрального исчисления, т. II, Гостехиздат, 1948, стр. 353.

выражение в форме

$$[f^n,\ z]=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(\sin mt_k-\sin mt_{k+1})\,z^*(t_k)=$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,m\cos m\bar{t}_k z^*(t_k)\,(t_{k+1}-t_k)$$

$$(t_k\leqslant \bar{t}_k\leqslant t_{k+1}).$$

Так как функция $z^*(t)$ непрерывна, то полученное выражение для каждого $z\in E$ имеет пределом при $n\to\infty$ величину

$$-m\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\cos mt\,z^*(t)\,dt=-m\left(z^*,\ g_m\right)=x_m^*;$$

через x_m^* мы обозначили, как обычно, m-ю координату вектора x^* в пространстве Ω.

Если взять достаточно редкую последовательность значений n, то функции $[f^n,\ z]$ будут сходиться к $[f,\ z]$ не только в среднем квадратическом, но и почти всюду. Отсюда следует, что почти для всех $z\in\hat{L}_2$

$$[f,\ z]=\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos mt,\ z\right]=x_m=-m\left(z^*,\ g_m\right)=x_m^*.$$

Но тогда функция $z(t)$ совпадает почти всюду на $[0,\ \pi]$ с $z^*(t)$, что и требуется.

Учитывая доказанную теорему, мы в дальнейшем будем рассматривать в качестве множества E со счетно-аддитивной мерой Винера уже только множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию Гельдера, и значок * писать более не будем.

8. Вторая классическая форма меры Винера; пространство $C_0(0,\ \pi)$. Обозначим через $C_0(0,\ \pi)$ линейное пространство всех непрерывных функций $\varphi(t)$ на отрезке $[0,\ \pi]$, удовлетворяющих условию $\varphi(0)=0$. Между пространством $C_0(0,\ \pi)$ и пространством $\hat{C}(0,\ \pi)$ всех непрерывных функций $z(t)$ на том же отрезке, ортогональных к 1, имеется очевидное взаимно однозначное соответствие:

$$z(t) \to \varphi(t) = z(t) - z(0),$$

$$\varphi(t) \to z(t) = \varphi(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(u)\, du.$$

Это соответствие сохраняет и линейные операции. Мера Винера w, построенная нами в пространстве $\widehat{C}(0, \pi)$, переносится при помощи этого соответствия в пространство $C_0(0, \pi)$, где она также будет счетно-аддитивной мерой, сосредоточенной на функциях, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $1/2 - \varepsilon$. Множество

$$\{z \in \widehat{C}(0, \pi): [z(t_1) - z(0), \ldots, z(t_n) - z(t_{n-1})] \in B \subset R_n\}$$

перейдет в множество

$$\{\varphi \in C_0(0, \pi): [\varphi(t_1), \varphi(t_2) - \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n) - \varphi(t_{n-1})] \in B \subset R_n\};$$

таким образом, по формуле (5) п. 4, мы будем иметь (сохраняя для $C_0(0, \pi)$ то же обозначение меры)

$$w\{\varphi \in C_0(0, \pi): [\varphi(t_1), \varphi(t_2) - \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n) - \varphi(t_{n-1})] \in B\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi^n t_1 (t_2 - t_1) \ldots (t_n - t_{n-1})}} \times$$

$$\times \int_B e^{-\frac{u_1^2}{t_1} - \frac{u_2^2}{t_2 - t_1} - \ldots - \frac{u_n^2}{t_n - t_{n-1}}}\, du_1 \ldots du_n.$$

Вычислим меру множества

$$S = \{\varphi \in C_0(0, \pi): a_1 < \varphi(t_1) \leqslant b_1, \ldots, a_n < \varphi(t_n) \leqslant b_n\}.$$

Введем обозначения

$$\varphi(t_1) = \xi, \quad \varphi(t_2) = \xi_2, \ldots, \varphi(t_n) = \xi_n,$$

$$u_1 = \varphi(t_1) = \xi_1, \quad u_2 = \varphi(t_2) - \varphi(t_1) =$$

$$= \xi_2 - \xi_1, \ldots, u_n = \varphi(t_n) - \varphi(t_{n-1}) = \xi_n - \xi_{n-1}.$$

Нас интересует величина

$$wS = \frac{1}{\sqrt{\pi^n t_1 (t_2 - t_1) \ldots (t_n - t_{n-1})}} \times$$

$$\times \int_{a_j < \xi_j < b_j} \ldots \int e^{-\frac{u_1^2}{t_1} - \ldots - \frac{u_n^2}{t_n}}\, du_1 \ldots du_n. \qquad (8)$$

Перейдем здесь от переменных u_j к переменным ξ_j. Так как якобиан $D\binom{u}{\xi}$ в данном случае есть 1, то

$$w\{\varphi \in C_0(0, \pi):\ a_1 < \varphi(t_1) \leqslant b_1, \ \ldots, \ a_n < \varphi(t_n) \leqslant b_n\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi^n t_1 (t_2 - t_1) \ldots (t_n - t_{n-1})}} \times$$
$$\times \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} e^{-\frac{\xi_1^2}{t_1} - \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{t_2 - t_1} - \ldots - \frac{(\xi_n - \xi_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}} d\xi_1 \ldots d\xi_n. \quad (9)$$

Выражение (9) есть *определение* меры Винера у самого Винера и его последователей на пространстве $C_0(0, \pi)$.

Каждому функционалу $\Phi(z)$, определенному и интегрируемому на пространстве $\widehat{C}(0, \pi)$, можно поставить в соответствие функционал $\Psi(\varphi)$, определенный на пространстве $C_0(0, \pi)$ так, что для соответствующих друг другу измеримых множеств E и F в пространствах $\widehat{C}(0, \pi)$ и $C_0(0, \pi)$ мы будем иметь всегда

$$\int_E \Phi(z)\, dw = \int_F \Psi(\varphi)\, dw.$$

Именно, при заданном $\Phi(z)$ полагаем

$$\Psi(\varphi) = \Phi(\varphi(t)) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(u)\, du,$$

при заданном $\Psi(\varphi)$ полагаем

$$\Phi(z) = \Psi(z(t) - z(0)).$$

Так, функционалу $\Phi(z) = z(0)$ на пространстве $\widehat{C}(0, \pi)$ соответствует следующий функционал на пространстве $C_0(0, \pi)$:

$$\Psi(\varphi) = \Phi\left\{\left[\varphi(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(u)\, du\right]\Bigg|_{t=0}\right\} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(u)\, du.$$

9. Примеры множеств полной меры в $C_0(0, \pi)$. Используя результат § 3, п. 12, мы можем построить в $\widehat{C}(0, \pi)$ некоторые множества типа «поверхностей», несущие полную меру. Этот результат гласил, что при наличии ортонормальных систем векторов пространства l_2

$$\begin{array}{l} f^{11}; \\ f^{21},\ f^{22}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f^{n1},\ f^{n2},\ \ldots,\ f^{nn}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

и функции $q(u)$, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{|u|\to\infty} q(u)\, e^{-\varepsilon u^2} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(u)\, e^{-u^2}\, du = a,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q^2(u)\, e^{-u^2}\, du = b < \infty,$$

последовательность функций в Ω

$$s_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} q([f^{nk}, x]),$$

$$n = n_1, \ldots, n_p, \ldots \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n_p}} < \infty,$$

сходится к постоянной a на множестве элементов x полной меры в Ω.

При заданном n мы разделим отрезок $[0, \pi]$ на n равных частей и положим $f^{nk}(t)$ равной $\sqrt{\frac{n}{\pi}}$ в промежутке $\left[\frac{k-1}{n}\pi, \frac{k}{n}\pi\right]$ и 0 вне этого промежутка ($k = 1, \ldots, n$). Как мы видели, в этом случае для соответствующей функции $z(t) \in \widehat{C}(0, \pi)$ числа

$${}_n s(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} q\left[\frac{z\left(\frac{k}{n}\pi\right) - z\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)}{\sqrt{\frac{\pi}{n}}}\right] \tag{10}$$

стремятся к числу a на множестве полной меры в $\widehat{C}(0, \pi)$. Выбирая, в частности, $q(u) = |u|$, получаем, что почти всюду в $\widehat{C}(0, \pi)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left| z\left(\frac{k}{n}\pi\right) - z\left(\frac{k-1}{n}\pi\right) \right| = 1. \qquad (11)$$

Мы видим, что почти все функции $z(t) \in \widehat{C}(0, \pi)$ имеют неограниченное изменение (причем, как легко видеть, не только на всем промежутке $[0, \pi]$, но и на любом частичном промежутке). Если же выбрать $q(u) = u^2$, то мы получим, что почти всюду в $\widehat{C}(0, \pi)$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left[z\left(\frac{k}{n}\pi\right) - z\left(\frac{k-1}{n}\pi\right) \right]^2 = \frac{\pi}{2}. \qquad (12)$$

Формулы (10)—(12) справедливы, как мы уже отмечали, в смысле предельного перехода по любой подпоследовательности $n = n_p$ с $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n_p}} < \infty$. Если положить $n_p = 2^p$, то последнее равенство перейдет в известную теорему Камерона и Мартина: на множестве функций $z(t)$ полной меры Винера

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left[z\left(\frac{k}{2^n}\pi\right) - z\left(\frac{k-1}{2^n}\pi\right) \right]^2 = \frac{\pi}{2}.$$

§ 5. СДВИГИ В ПРОСТРАНСТВЕ Ω

1. Формулировка основной теоремы. Доказательство необходимости. Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ — произвольный фиксированный элемент из Ω. Рассмотрим сдвиг T_y на элемент y:

$$T_y x = x + y \qquad (x \in \Omega).$$

Поставим вопрос, при каких y сдвиг T_y переводит ω-измеримые множества E в ω-измеримые $T_y E = E + y$ и в этом случае каково соотношение между мерой ωE и мерой $\omega(E+y) \equiv \omega_y E$.

Полный ответ дается следующей теоремой:

Теорема 1. *Сдвиг T_y переводит измеримые множества в Ω в измеримые тогда и только тогда, когда y принадлежит гильбертову подпространству*

$$l_2 = \left\{ x \in \Omega \colon \sum_1^\infty x_n^2 < \infty \right\}.$$

При выполнении этого условия меры ω и ω_y абсолютно непрерывны одна относительно другой, причем

$$\frac{d\omega_y}{d\omega} = e^{-\sum\limits_1^\infty \left(y_k^2 + 2x_k y_k\right)}.$$

Доказательство необходимости. Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots) \notin l_2$, т. е. $\sum\limits_1^\infty y_n^2 = \infty$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое измеримое множество E_ε, что

$$\omega E_\varepsilon < \varepsilon, \quad \omega_y E_\varepsilon > 1 - \varepsilon. \tag{1}$$

Действительно, возьмем n настолько большим, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{u > \frac{1}{2}\sqrt{\sum\limits_1^n y_k^2}} e^{-u^2}\, du < \varepsilon.$$

Покажем, что множество

$$E_\varepsilon = \left\{ x \in \Omega \colon x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n < -\frac{1}{2} \sum_1^n y_k^2 \right\}$$

есть искомое.

В самом деле, по формуле (16) п. 10 § 3

$$\omega E_\varepsilon = \int\limits_{E_\varepsilon} d\omega = \int\limits_{\left\{x:\ (x_1y_1+\ldots+x_ny_n)\Big/\sqrt{\sum_1^n y_k^2} < -\frac{1}{2}\sqrt{\sum_1^n y_k^2}\right\}} d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{u=-\infty}^{-\frac{1}{2}\sqrt{\sum_1^n y_k^2}} e^{-u^2}\,du < \varepsilon.$$

В то же время

$$E_\varepsilon + y = \left\{x:\ (x_1-y_1)\,y_1 + \ldots + (x_n-y_n)\,y_n < -\frac{1}{2}\sum_1^n y_k^2\right\} = \left\{x:\ x_1y_1 + \ldots + x_ny_n < \frac{1}{2}\sum_1^n y_k^2\right\},$$

отсюда

$$\omega_y E_\varepsilon = \omega(E_\varepsilon + y) = \int\limits_{E_\varepsilon + y} d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{1}{2}\sqrt{\sum_1^n y_k^2}}^{\infty} e^{-u^2}\,du > 1-\varepsilon.$$

Теперь для всякого $n = 1, 2, \ldots$ построим множество E_n такое, что

$$\omega E_n < \frac{1}{2^n}, \quad \omega_y E_n > 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Тогда легко видеть, что множество

$$E = \prod_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

обладает тем свойством, что

$$\omega E = 0, \quad \omega_y E = 1.$$

Значит, сдвиг T_y, где $y \notin l_2$, переводит множество E нулевой меры в множество $T_y E$ полной меры. Так как в пространстве Ω заведомо существуют неизмеримые множества, очевидно, что сдвиг $T_y(y \notin l_2)$ не сохраняет измеримости множеств.

2. Свойства функции $\exp\sum_1^\infty x_k y_k$. Прежде чем доказывать обратную теорему, рассмотрим одну специальную функцию. Мы видели в § 3, п. 6, что при $\sum_1^\infty y_k^2 < \infty$ ряд $\sum_1^\infty x_k y_k$ сходится почти всюду на Ω. Рассмотрим функцию

$$g(x) = e^{\sum_1^\infty x_k y_k} = \lim_{n\to\infty} e^{\sum_1^n x_k y_k}, \tag{2}$$

определенную почти всюду на Ω; покажем, что она суммируема в квадрате. Для этого проверим, что предел (2) имеет смысл и в среднем квадратичном. Действительно, при $m < n$

$$\int_\Omega \left(e^{\sum_1^n x_k y_k} - e^{\sum_1^m x_k y_k}\right)^2 d\omega = \int_\Omega e^{2\sum_1^m x_k y_k}\left(e^{\sum_{m+1}^n x_k y_k} - 1\right)^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi^m}} \int_{R_m} e^{2\sum_1^m x_k y_k} e^{-\sum_1^m x_k^2} dx_1 \ldots dx_m \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\pi^{n-m}}} \int_{R_{n-m}} \left(e^{\sum_{m+1}^n x_k y_k} - 1\right)^2 e^{-\sum_{m+1}^n x_k^2} dx_{m+1} \ldots dx_n =$$

$$= \prod_{k=1}^m \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{y_k^2} \int_{-\infty}^\infty e^{-(x_k - y_k)^2} dx_k \right\} \times$$

$$\times \left[\prod_{m+1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{y_k^2} \int_{-\infty}^\infty e^{-(x_k - y_k)^2} dx_k \right\} - \right.$$

$$-2\prod_{m+1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{y_k^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(x_k-\frac{y_k}{2}\right)^2}dx_k\right\}+$$

$$+\prod_{m+1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_k^2}\,dx_k\right\}\Bigg]=$$

$$=e^{\sum\limits_1^m y_k^2}\left[e^{\sum\limits_{m+1}^{n} y_k^2}-2e^{\frac{1}{4}\sum\limits_{m+1}^{n} y_k^2}+1\right]=$$

$$=e^{\sum\limits_1^m y_k^2}\varepsilon(m,\ n)\leqslant C\varepsilon(m,\ n),$$

где $\varepsilon(m,\ n)\to 0$ при m и n, стремящихся в бесконечность. Легко вычислить интеграл от функции $g^2(x)$ по брусу $B=\{x\colon\ a_k<x_k\leqslant b_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Именно,

$$\int_B g^2(x)\,d\omega=\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{a_k}^{b_k}e^{2x_ky_k-x_k^2}\,dx_k\right\}\times$$

$$\times\prod_{n+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2x_ky_k-x_k^2}\,dx_k\right\}=$$

$$=e^{\sum\limits_1^n y_k^2}\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{a_k}^{b_k}e^{-(x_k-y_k)^2}\,dx_k\right\}e^{\sum\limits_{n+1}^{\infty} y_k^2}=$$

$$=e^{\sum\limits_1^{\infty} y_k^2}\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{a_k}^{b_k}e^{-(x_k-y_k)^2}\,dx_k\right\}. \tag{3}$$

Очевидно, вместе с функцией $g^2(x)$ суммируема и функция $g^{-2}(x)$.

3. Доказательство достаточности. Переходим к доказательству достаточности условий теоремы 1. Возьмем брус

$$B=\{x\colon\ a_k<x_k\leqslant b_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$

и найдем меру сдвинутого бруса

$T_yB = \{x: a_1 + y_1 < x_1 \leqslant b_1 + y_1, \ldots, a_n + y_n < x_n \leqslant b_n + y_n\}.$

Мы имеем, в силу формулы (3):

$$\omega T_y B = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a_k}^{b_k} e^{-(\xi_k + y_k)^2} d\xi_k = e^{-\sum_1^\infty y_k^2} \int_B g^{-2}(x)\, d\omega. \quad (4)$$

Формула (4), справедливая для любого бруса, переносится по счетной аддитивности на все измеримые множества $E \subset \Omega$:

$$\omega T_y E = e^{-\sum_1^\infty y_k^2} \int_E g^{-2}(x)\, d\omega. \quad (5)$$

Это означает, что мера $\omega_y E = \omega T_y E$ абсолютно непрерывна относительно меры ωE и обратно, при этом производная меры ω_y относительно ω равна

$$\frac{d\omega_y}{d\omega} = e^{-\sum_1^\infty y_k^2} g^{-2}(x) = e^{-\sum_1^\infty \left(y_k^2 + 2x_k y_k\right)}.$$

Теорема доказана.

4. Измеримые и неизмеримые подпространства в Ω. Предположим, что измеримое множество E при сдвиге на любой элемент $y \in l_2$ переходит в себя. В частности, вместе с каждой точкой x в множество E входит и любая точка y, отличающаяся от x лишь конечным числом координат. Но тогда, в силу закона 0 или 1 (§ 3, п. 1), мера множества E есть или 0, или 1. Итак, *мера множества E, инвариантного относительно всех сдвигов на векторы $y \in l_2$, может иметь своим значением или число* 0, *или число* 1.

Теорема 2. *Пусть E — измеримое линейное подпространство в Ω. Если $\omega E > 0$, то $E \supset l_2$.*

Доказательство. Предположим, что $\omega E > 0$, но имеется элемент $x \in l_2(\Omega - E)$. Тогда $\lambda x \in l_2$, $\lambda x \notin E$ для всех λ. Обозначим

$$E_\lambda = E + \lambda x.$$

По теореме 1 о сдвиге $\omega E_\lambda > 0$. Так как E — линейное подпространство, то при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ E_1 не пересекается с E_2.

Итак, в пространстве Ω найдется семейство мощности континуума непересекающихся множеств положительной меры. Но это противоречит тому, что $\omega\Omega = 1$. Отсюда, если $\omega E > 0$, то $E \supset l_2$.

Теорема доказана.

Следствие. *Если E — измеримое линейное подпространство в Ω, то или $\omega E = 0$ или $\omega E = 1$.*

Доказательство. Пусть $\omega E > 0$. По теореме 2 $E \supset l_2$, отсюда E инвариантно относительно всех сдвигов на элементы из l_2. По теореме 2 $\omega E = 1$.

Примечание. Покажем, что существуют в Ω и неизмеримые подпространства.

Обозначим через L_0 подпространство финитных последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Пользуясь аксиомой выбора, можно построить в Ω дополнительное подпространство Y; подпространства L_0 и Y имеют единственный общий элемент 0 и в прямой сумме дают все Ω.

Построим далее расширяющуюся цепочку подпространств

$$Y \subset \{Y, e_1\} \subset \{Y, e_1, e_2\} \subset \ldots \subset \{Y, e_1, \ldots, e_n\} \subset \ldots,$$

каждое следующее получается из предыдущего присоединением очередного базисного вектора и образованием линейной оболочки. Очевидно, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Y, e_1, \ldots, e_n\} = \Omega.$$

Если подпространство $Y_n = \{Y, e_1, \ldots, e_n\}$ измеримо, то оно имеет меру 0; в противном случае, по теореме 2, оно содержало бы все l_2, что не имеет места, так как, например, $Y_n \not\ni e_{n+1}$. Если бы каждое из подпространств $Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots$ было измеримым, то их объединение было бы также измеримым и в силу счетной аддитивности меры ω мы имели бы

$$1 = \omega\Omega = \omega \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = \sup \omega Y_n = 0,$$

что невозможно. Отсюда следует, что среди подпространств Y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ имеются неизмеримые подпространства; более того, начиная с некоторого номера n, все пространства $Y_n, Y_{n+1}, \ldots$ неизмеримы.

5. Сдвиги в $\hat{L}_2(0, \pi)$ и $C_0(0, \pi)$. Для применения полученных результатов к пространству $C_0(0, \pi)$ с мерой Винера найдем сначала в $C_0(0, \pi)$ подпространство, соответствующее пространству $l_2 \subset \Omega$. Как мы помним из § 4, п. 7, отображение $C_0(0, \pi) \to \Omega$ производится по формуле

$$\varphi(t) \to z(t) = \varphi(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(u)\,du \in \hat{L}_2 \to (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \Omega,$$

где

$$x_n = -n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi z(t)\cos nt\,dt =$$

$$= -n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \varphi(t)\cos nt\,dt. \qquad (6)$$

Пусть сначала

$$\sum_1^\infty x_n^2 < \infty \quad \text{и} \quad y(t) = \sum_1^\infty x_n \sin nt \in L_2(0, \pi).$$

Первообразная от функции $y(t)$ имеет своими коэффициентами Фурье величины $\frac{x_n}{n}$, т. е. с точностью до множителя совпадает с $\varphi(t)$. Отсюда следует, что $\varphi(t)$ обладает квадратично интегрируемой производной.

Обратно, если $\varphi(t)$ обладает квадратично интегрируемой производной, то, производя в (6) интегрирование по частям, получаем

$$x_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \varphi'(t)\sin nt\,dt,$$

откуда видно, что $\sum_1^\infty x_n^2 < \infty$.

Итак, *подпространство в* $C_0(0, \pi)$, *соответствующее подпространству* $l_2 \subset \Omega$, *состоит из всех функций*, $\varphi(t) \in C_0(0, \pi)$, *обладающих квадратично интегрируемой производной*. В дальнейшем будем обозначать это подпространство через $L_2'(0, \pi)$.

Аналогично в пространстве $\hat{C}(0, \pi)$ подпространство, соответствующее подпространству $l_2 \subset \Omega$, состоит из абсолютно непрерывных функций $z(t) \in \hat{C}(0, \pi)$, производные которых квадратично интегрируемы. Это подпространство будем обозначать далее через $\hat{C}'(0, \pi)$. Каждая функция $\varphi(t) \in L_2'(0, \pi)$ отличается на постоянную от некоторой функции $z(t) \in \hat{C}'(0, \pi)$, и обратно.

Теперь рассмотрим сдвиг в пространстве Винера $C_0(0, \pi)$:

$$T_g\colon\ \varphi(t) \to \varphi(t) + g(t),$$

где $g(t) \in C_0(0, \pi)$ — фиксированная функция. При отображении пространства $C_0(0, \pi)$ на Ω мы получим сдвиг в Ω на элемент

$$y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots), \quad y_n = -n\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi g(t)\cos nt\, dt.$$

Теорема 1 превращается в следующую теорему:

Теорема 3. *Сдвиг в пространстве Винера $C_0(0, \pi)$ на функцию $g(t)$ сохраняет измеримые множества тогда и только тогда, когда $g(t)$ обладает квадратично суммируемой производной $g'(t)$ на* $[0, \pi]$.

В этом случае мера Винера w преобразуется в эквивалентную меру w_g по формуле

$$w_g E = w(E + g(t)) = \int_E G[x]\, dw,$$

причем

$$G[x] = \exp\left\{-2\int_0^\pi y'(t)\, dx(t) - \int_0^\pi [y'(t)]^2\, dt\right\},$$

где первый интеграл в правой части понимается в смысле Пэли—Винера—Зигмунда.

§ 6. СТРУКТУРА ИЗМЕРИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В Ω

1. Определение измеримого линейного функционала и теорема единственности. Пусть X — линейное пространство со счетно-аддитивной мерой μ. *Измеримым линейным функционалом* на X называется функционал $f(x)$, определенный (конечный) на линейном подпространстве $E \subset X$ полной меры, измеримый относительно меры μ и удовлетворяющий на E условию линейности $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

В качестве X возьмем пространство Ω с мерой ω. Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ с $\sum y_k^2 < \infty$. Положим

$$f(x) = \sum_1^\infty x_k y_k. \tag{1}$$

Как мы видели в § 3, п. 9, ряд (1) сходится на некотором множестве $E \subset \Omega$ полной меры. Очевидно, что область сходимости ряда (1) является линейным подпространством в Ω и функция $f(x)$ измерима. Таким образом, (1) есть пример линейного измеримого функционала на Ω. Мы покажем, что всякий линейный измеримый функционал на Ω имеет вид (1).

Заметим прежде всего, что всякий измеримый функционал $f(x)$ определен, в частности, на подпространстве l_2 точек $(x_1, x_2, \ldots)$ с $\sum\limits_1^\infty x_k^2 < \infty$, поскольку всякое измеримое подпространство положительной меры, согласно теореме 2 § 5, содержит подпространство l_2. Хотя подпространство l_2 само по себе имеет меру 0, тем не менее оказывается, что значения функционала $f(x)$ на l_2 однозначно определяют его значения всюду.

Теорема 1. *Пусть измеримый линейный функционал $f(x)$ обращается в нуль на «ортах» $e_1, \ldots$ $\ldots, e_n, \ldots,$* где $e_n = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$:

$$f(e_n) = 0, \qquad n = 1, 2 \ldots \tag{2}$$

Тогда $f(x) \equiv 0$ почти всюду на пространстве Ω.

Доказательство. Положим

$$E^+ = \{x \in \Omega : f(x) \geqslant 0\}, \quad E^- = \{x \in \Omega : f(x) \leqslant 0\}.$$

Очевидно, что E^+ и E^- — измеримые множества в Ω и

$$\omega E^+ = \omega E^-.$$

В силу (2) $f(y) = 0$ для любого $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)$. Отсюда

$$E^+ + y = E^+, \quad E^- + y = E^-,$$

т. е. E^+ и E^- инвариантны относительно всех сдвигов на элементы y.

По теореме 2 § 5 (п. 4) $\omega E^+ = 1$ или $\omega E^+ = 0$. Но равенство $\omega E^+ = 0$ невозможно, поскольку $\omega E^+ + \omega E^- \geqslant 1$. Значит, $\omega E^+ = \omega E^- = 1$, откуда

$$\omega\{x : f(x) = 0\} = \omega(E^+ E^-) = 1.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если измеримые линейные функционалы $f(x)$ и $g(x)$ совпадают на «ортах» $e_1, \ldots, e_n, \ldots$:*

$$f(e_n) = g(e_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то они совпадают почти всюду на пространстве Ω.

Полученное следствие допускает обращение: *если измеримые линейные функционалы $f(x)$, $g(x)$ совпадают на множестве положительной меры, то они совпадают и на ортах e_n и, следовательно, совпадают и почти всюду.*

Действительно, множество

$$G = \{x : f(x) = g(x)\}$$

есть измеримое линейное подпространство в Ω положительной меры; по теореме 2 § 5 оно содержит H и, в частности, содержит все e_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

2. Общий вид измеримого линейного функционала. Теперь докажем центральную теорему этого параграфа:

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — измеримый линейный функционал на пространстве Ω. Тогда*

а) $\sum\limits_1^\infty |f(e_n)|^2 < \infty$;

б) $f(x) = \sum\limits_1^\infty x_n f(e_n)$ *почти всюду на Ω;*

в) представление б) единственно.

Доказательство начнем с доказательства неравенства а). Для всякого элемента $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ из области определения функционала $f(x)$ положим

$$x^n = (0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots).$$

Тогда $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n + x^n$ и

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n) + f_n(x),$$

где $f_n(x) = f(x^n)$. Заметим, что $f_n(x)$ есть измеримый линейный функционал и $f(x)$; $f_n(x)$ имеют одинаковую область определения. Функции $e^{if(x)}$ и $e^{if_n(x)}$ измеримы и ограничены, следовательно, суммируемы с квадратом. Рассмотрим при заданном вещественном $u \neq 0$ выражение $\int\limits_\Omega e^{iuf(x)}\, d\omega$. Используя разложение (1), находим

$$\int\limits_\Omega e^{iuf(x)}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int\limits_{R_m} e^{iu\,[x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n)] - \sum\limits_1^n x_k^2}\, dx_1 \ldots dx_n \times$$

$$\times \int\limits_\Omega e^{iuf_n(x)}\, d\omega = e^{-\frac{u^2}{4} \sum\limits_1^n f^2(e_k)} \int\limits_\Omega e^{iuf_n(x)}\, d\omega,$$

откуда

$$\left| \int\limits_\Omega e^{iaf(x)}\, d\omega \right| \leqslant e^{-\frac{u^2}{4} \sum\limits_1^n f^2(e_k)}.$$

Если ряд $\sum\limits_1^\infty f^2(e_k)$ расходится, то при $n \to \infty$ получаем

$$\int\limits_\Omega e^{iuf(x)}\, d\omega = 0. \tag{3}$$

Положим $u \to 0$; тогда $e^{iuf(x)} \to 1$ и по теореме Лебега

$$\lim_{u \to 0} \int\limits_\Omega e^{iuf(x)}\, d\omega = 1,$$

что противоречит (3). Итак, $\sum\limits_1^\infty f^2(e_k) < \infty$.

Докажем, что из а) следуют б) и в).

Действительно, пусть имеет место неравенство а). Тогда

$$g(x)=\sum_{1}^{\infty} x_n f(e_n)$$

есть измеримый линейный функционал на Ω, причем $g(e_n)= =f(e_n)$. В силу следствия теоремы 1 $g(x)$ и $f(x)$ совпадают почти всюду на Ω, т. е.

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty} x_n f(e_n)$$

почти всюду на Ω.

Допустим, что $f(x)$ допускает два представления:

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty} a_n x_n=\sum_{1}^{\infty} b_n x_n \quad \left(\sum_{1}^{\infty} a_n^2<\infty, \ \sum_{1}^{\infty} b_n^2<\infty\right)$$

почти всюду на пространстве Ω. Тогда, в частности, $f(x)$ и $g(x)$ определены и совпадают на l_2. Отсюда

$$a_n=f(e_n)=g(e_n)=b_n \quad (n=1, 2, \ldots),$$

что и требуется.

3. Общий вид измеримого линейного функционала в $C_0(0, \pi)$ и $\widehat{L}_2(0, \pi)$. В применении к пространству $\widehat{L}_2(0, \pi)$ с мерой Винера получается следующая теорема:

Теорема 3. *Любой измеримый линейный функционал $F(x)$ на пространстве $\widehat{L}_2(0, \pi)$ имеет вид*

$$F(z)=\int_0^{\pi} f(t)\,dz(t), \tag{4}$$

где $f(t)\in L_2(0, \pi)$ и интеграл в правой части понимается в смысле Пэли — Винера — Зигмунда. Функция $f(t)$ определена однозначно (в смысле L_2) функционалом $F(z)$.

Пример. Рассмотрим линейный функционал на $\widehat{L}_2(0, \pi)$

$$F(z)=\int_0^{\pi} g(t)\,z(t)\,dt, \tag{5}$$

где $g(t)$ — суммируемая функция. Этот функционал определен на всех непрерывных функциях и, следовательно, на множестве полной меры в $\widehat{L}_2(0, \pi)$.

Если $g(t)$ — ступенчатая функция (или даже квадратично суммируемая), то функционал $F(z)$ представляется в форме $\sum\limits_1^\infty g_n z_n$, где $\sum\limits_1^\infty g_n^2 < \infty$, и потому измерим. В общем случае функция $g(t)$ может быть представлена как предел (в метрике $L_1(0, \pi)$) ступенчатых функций; отсюда следует, что функционал $F(z)$ есть предел (в смысле сходимости почти всюду) измеримых функционалов и потому также измерим.

Заметим, что к функции $g(t)$ можно добавить любую постоянную без изменения значений функционала $F(z)$ на $\widehat{L}_2(0, \pi)$. Поэтому можно с самого начала принять, что среднее от $g(t)$ равно нулю.

Мы утверждаем теперь, что функционал $F(z)$ может быть записан в канонической форме:

$$F(z) = \int_0^\pi f(t)\, dz(t), \tag{6}$$

где $f(t)$ есть первообразная от $g(t)$:

$$f(t) = -\int_0^t g(\tau)\, d\tau = \int_t^\pi g(\tau)\, d\tau.$$

Так как оба функционала (5) и (6) линейны и однородны, то их равенство достаточно проверить на подпространстве $L_2'(0, \pi)$ функций с квадратично интегрируемой производной. Но если $z(t) \in L_2'(0, \pi)$, то

$$\int_0^\pi f(t)\, dz(t) = \int_0^\pi f(t)\, z'(t)\, dt =$$
$$= f(t)\, z(t)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(t)\, z(t)\, dt = \int_0^\pi g(t)\, z(t)\, dt,$$

что и требуется.

Рассмотрим теперь пространство $C_0(0, \pi)$. Поскольку соответствующие друг другу функции $\varphi(t) \in C_0(0, \pi)$ и $z(t) \in \hat{C}(0, \pi)$ различаются на постоянную, они имеют одинаковые коэффициенты Фурье

$$z_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi z(t) \cos nt \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \varphi(t) \cos nt \, dt = \varphi_n$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

У функции $\varphi(t)$ имеется, кроме того, коэффициент

$$\varphi_0 = -\sum_1^\infty \varphi_n = -\sum_1^\infty z_n.$$

Мы положим по определению для $f(t) \in L_2(0, \pi)$

$$\int_0^\pi f(t) \, d\varphi(t) = \int_0^\pi f(t) \, dz(t) = -\sum_1^\infty f_n n \varphi_n; \tag{7}$$

из изложенного выше явствует, что *выражение* (7) *есть общий вид линейного измеримого функционала на пространстве* $C_0(0, \pi)$.

§ 7. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

В дальнейшем, при изучении измеримых линейных преобразований в Ω, нам понадобятся различные сведения из теории ограниченных линейных операторов в абстрактном гильбертовом пространстве H. Некоторые из этих сведений общеизвестны, некоторые менее известны. Мы приводим в этом параграфе соответствующие теоремы, иногда без доказательств.

1. Ограниченные операторы. Линейный оператор A, действующий из H в H, называется *ограниченным*, если выполняется неравенство

$$\sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \equiv \|A\| < \infty.$$

Ограниченный оператор *непрерывен*, т. е. из $x_n \to x$ следует $Ax_n \to Ax$. Оператору A при фиксированном ортогональном базисе $e_1, e_2, \ldots$ ставится в соответствие матрица $\tilde{A} = \|a_{km}\|$ по правилу

$$Ae_k = \sum_{m=1}^{\infty} a_{km} e_m \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, строки матрицы $\tilde{A}$ квадрируемы (т. е. квадраты элементов строки образуют сходящийся ряд). Если оператор ограничен, то для любого $x \in H$, $x = \sum_{1}^{\infty} x_k e_k$ имеем

$$(Ax, e_m) = \sum_{1}^{\infty} x_k (Ae_k, e_m) = \sum_{1}^{\infty} x_k a_{km}, \tag{1}$$

и из сходимости полученного ряда при любом x следует, что столбцы матрицы $\tilde{A}$ также квадрируемы.

Обратно, если линейный оператор A, определенный на всем пространстве, действует на любой вектор x хотя бы в одном ортонормальном базисе по формуле (1), то оператор A ограничен (теорема Хеллингера и Теплица *)).

Будем рассматривать в дальнейшем только линейные ограниченные операторы.

2. Обратимые операторы. Линейный оператор A называется *обратимым*, если существует оператор B такой, что $AB = BA = I$ (I — единичный оператор). Оператор B также ограничен (по теореме Банаха **)); он называется *обратным* к A и обозначается A^{-1}. Оператор B, удовлетворяющий соотношению $BA = I$, называется ***левым обратным к оператору*** A; аналогично оператор C, удовлетворяющий соотношению $AC = I$, называется ***правым обратным к оператору*** A. Из равенств

$$B = B(AC) = (BA)C = C$$

*) См., например, Н. И. Ахиезер и М. И. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, изд. 2, перераб. и дополн., «Наука», 1966, стр. 90.

**) Н. Данфорд и Дж. Шварц, Линейные операторы, т. I, ИЛ, 1962, стр. 69.

следует, что всякий левый обратный равен всякому правому, если они существуют. В частности, обратный оператор A^{-1}, если он существует, определен однозначно. Но возможны и случаи, когда оператор A имеет левые обратные и не имеет ни одного правого обратного, и наоборот.

Всякий оператор C, достаточно близкий к обратимому оператору A (по норме), является обратимым *).

Произведение двух обратимых операторов A_1 и A_2 есть обратимый оператор и

$$(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

3. Сопряженный оператор. Каждый линейный оператор A обладает сопряженным оператором A^*, определяемым из условия $(A^*x, y) = (x, Ay)$ для любых x и y из H. При этом

$$(A^*)^* = A; \ (AB)^* = B^*A^*; \ (A+B)^* = A^*+B^*;$$
$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1};$$

последнее в предположении обратимости оператора A или A^*. Матрицы операторов A и A^* в любом базисе транспонированы относительно друг друга.

Если $A^* = A$, то оператор A называется *симметричным*.

В частности, диагональный оператор D, т. е. оператор, заданный в некотором ортонормальном базисе диагональной матрицей

$$\tilde{D} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \cdot \end{Vmatrix}$$

с ограниченными λ_k (для обеспечения ограниченности оператора), является симметричным. Однако, в отличие от конечномерного случая, не всякий симметричный оператор может быть приведен к диагональному виду.

---

*) Н. Данфорд и Дж. Шварц, Линейные операторы, т. I, ИЛ, 1962, стр. 624.

Если A — произвольный оператор, то A^*A всегда симметричен.

Оператор U называется *ортогональным*, если $U^* = U^{-1}$. Ортогональный оператор не изменяет скалярного произведения любой пары векторов:

$$(Ux, Uy) = (U^*Ux, y) = (x, y).$$

В частности, он сохраняет длины векторов и углы между ними; он аналогичен оператору поворота в n-мерном пространстве.

Ортонормальный базис $e_1, e_2, \ldots$ переводится ортогональным оператором U снова в ортонормальный базис $f_1 = Ue_1, f_2 = Ue_2, \ldots$; если базис $e_1, e_2, \ldots$ полный, то и базис $f_1, f_2, \ldots$ полный. Если некоторый ограниченный оператор A имел в базисе $e_1, e_2, \ldots$ матрицу $\tilde{A}$, то в базисе $f_1, f_2, \ldots$ он будет иметь матрицу $U^{-1}\tilde{A}U$. Матрицы A и $U^{-1}AU$ будем называть *эквивалентными*.

Обратный оператор $U^{-1} = U^*$ ортогонален вместе с оператором U. Произведение ортогоиальных операторов есть снова ортогональный оператор; таким образом, ортогональные операторы образуют группу по умножению.

4. Корень из оператора. Оператор B называется *неотрицательным*, если $(Bx, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$. В частности, оператор $B = A^*A$ неотрицателен при любом A, так как $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) \geqslant 0$. Оператор B называется *положительным*, если

$$(Bx, x) \geqslant c > 0$$

для всех $\|x\| = 1$ и, следовательно,

$$(Bx, x) \geqslant c\|x\|^2$$

для всех x. Если оператор A обратим (существует A^{-1}), то $B = A^*A$ положителен, так как $x = A^{-1}Ax$, $\|x\| \leqslant \leqslant \|A^{-1}\| \|Ax\|$, и, следовательно,

$$(A^*Ax, x) = \|Ax\|^2 \geqslant \|A^{-1}\|^{-2} \|x\|^2.$$

Неотрицательный симметричный оператор B обладает «квадратным корнем» — таким симметричным неотрицательным оператором C, что $C^2=B$. Для диагонального оператора D, определенного в некотором ортонормальном базисе диагональной матрицей

$$\tilde{D}=\left\|\begin{matrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cdot\end{matrix}\right\|$$

с неотрицательными элементами λ_k, квадратный корень в том же базисе задается матрицей

$$C=\left\|\begin{matrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cdot\end{matrix}\right\|.$$

Вообще (симметричный неотрицательный) квадратный корень из оператора B определен однозначно; он обозначается через $B^{1/2}$.

Доказательство существования корня обычно проводится с помощью формулы спектрального разложения оператора (в комплексном расширении пространства H) *).

5. Мультипликативное представление обратимого оператора. Обратимый оператор A можно представить в форме $A=UB$, где U — ортогональный оператор, а B — симметричный и положительный оператор. Именно, можно положить

$$B=(A^*A)^{1/2},\quad U^{-1}=BA^{-1}.$$

Действительно, B определен, симметричен и положителен по п. 4; ортогональность U^{-1} (и, следовательно, U) вытекает из равенства

$$(U^{-1}x,\ U^{-1}y)=(BA^{-1}x,\ BA^{-1}y)=(A^{-1}x,\ B^2A^{-1}y)=$$
$$=(A^{-1}x,\ A^*AA^{-1}y)=(A^{-1}x,\ A^*y)=(AA^{-1}x,\ y)=(x,\ y).$$

---

*) Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954, стр. 298. Имеется и элементарное доказательство — там же, стр. 285.

6. Мультипликативное представление вполне непрерывного оператора. Оператор, переводящий единичный шар в компактное множество, называется *вполне непрерывным.*

Сумма двух вполне непрерывных операторов и произведение вполне непрерывного оператора на любой ограниченный оператор — вполне непрерывные операторы.

Всякий симметричный вполне непрерывный оператор B обладает каноническим базисом (полной ортогональной системой) из собственных векторов с действительными собственными значениями $Be_n = \lambda_n e_n$, причем $\lambda_n \to 0$ (теорема Гильберта *)).

Обратно, всякий оператор B, обладающий базисом из собственных векторов e_n $(n = 1, 2, \ldots)$ с собственными значениями $\lambda_n \to 0$ (вещественными), является симметричным вполне непрерывным оператором.

Рассмотрим вполне непрерывный, но не симметричный оператор B. Такой оператор может не иметь ни одного собственного вектора. Покажем, что существует представление $B = VT$, где T — симметричный вполне непрерывный оператор, V — *нерастягивающий* оператор, в том смысле, что $\|Vx\| \leqslant \|x\|$ для любого x. В рассматриваемом случае B^*B есть симметричный неотрицательный вполне непрерывный оператор. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — базис из собственных векторов оператора B^*B, так что $B^*Be_n = \lambda_n e_n$, $\lambda_n \geqslant 0$. Положим

$$Te_n = +\sqrt{\lambda_n}\, e_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $T^* = T$, $T^2 = B^*B$, так что оператор T снова можно назвать квадратным корнем из B^*B. Далее, для любого x

$$\|Bx\|^2 = (Bx, Bx) = (B^*Bx, x) = \\ = (T^2x, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2.$$

Все пространство H можно разложить в ортогональную сумму двух подпространств H' и H'', первое из которых порождается собственными векторами $e_1, e_2, \ldots$ с ненулевыми значениями λ_n, а второе — остальными собственными

*) Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954, стр. 252.

векторами. В первом подпространстве Tx и Bx обращаются в нуль только при $x=0$, на втором они тождественно равны 0. Определим оператор V формулами

$$V(Tx)=Bx \text{ на } H', \quad V(x)=0 \text{ на } H''.$$

На H' оператор V сохраняет норму любого вектора, на H'' он равен 0; отсюда вытекает, что V есть нерастягивающий оператор. Имеет место равенство (на H' и на H'', следовательно, и на всем H) $VT=B$, что и утверждалось.

Таким образом, любой вполне непрерывный оператор есть произведение неотрицательного диагонального оператора и нерастягивающего оператора.

7. Оператор Гильберта — Шмидта. Оператор S называется *оператором Гильберта — Шмидта*, если в некотором ортонормальном базисе $e_1, e_2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|Se_k\|^2\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(Se_k, e_n)^2<\infty.$$

В этом случае и для любого ортонормального базиса $f_1, f_2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|Sf_k\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(Sf_k, e_n)^2=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(f_k, S^*e_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|S^*e_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|Se_n\|^2.$$

Величина $\sqrt{\sum\limits_k\sum\limits_n(Se_k, e_n)^2}$, не зависящая от выбора базиса, обозначается через $\|S\|_2$.

Оператор Гильберта — Шмидта всегда вполне непрерывен. Если он к тому же симметричен, то по п. 6 он обладает базисом из собственных векторов $e_1, e_2, \ldots$ с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$; при этом $\sum\limits_1^{\infty}\lambda_n^2<\infty$. Сумма двух операторов Гильберта — Шмидта, а также произведение оператора Гильберта — Шмидта на любой ограниченный оператор есть снова оператор Гильберта — Шмидта *). Если S — оператор Гильберта — Шмидта, то S^* — также оператор Гильберта — Шмидта.

8. Ядерный оператор. Вполне непрерывный оператор N называется *ядерным*, если собственные значения симметричного неотрицательного оператора $(N^*N)^{1/2}$ образуют сходящийся ряд. Представление $N = UT$ (п. 6) показывает, что оператор N вместе с оператором T является оператором Гильберта — Шмидта; однако не всякий оператор Гильберта — Шмидта является ядерным. Если S — оператор Гильберта — Шмидта, то S^*S — ядерный оператор; действительно, если $e_1, e_2, \ldots$ — базис из собственных векторов оператора S^*S, то

$$\lambda_n = (S^*Se_n, e_n) = (Se_n, Se_n) = \\ = \left(\sum_k s_{nk}e_k, \sum_m s_{nm}e_m\right) = \sum_k s_{nk}^2,$$

$$\sum_1^\infty \lambda_n = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty s_{nk}^2 < \infty.$$

Отсюда следует, что оператор $T = (S^*S)^{1/2}$ является оператором Гильберта — Шмидта вместе с оператором S. Таким образом, согласно п. 6, всякий оператор Гильберта — Шмидта есть произведение диагонального оператора Гильберта — Шмидта и нерастягивающего оператора.

Если $A = \|a_{km}\|$ — матрица ядерного оператора в каком-нибудь ортонормальном базисе, то $\sum\limits_1^\infty |a_{kk}| < \infty$; при этом $\sum\limits_1^\infty a_{kk}$ не зависит от выбора базиса и равна, в частности, сумме собственных значений оператора $(A^*A)^{1/2}$.

Необходимое и достаточное условие ядерности матрицы $\|a_{km}\|$ состоит в том, что для любых ортонормальных

*) См. И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. «Обобщенные функции», вып. 4, Физматгиз, 1961, гл. I, § 2.

систем

$$\left.\begin{aligned} e_p &= (e_{p1}, e_{p2}, \ldots), \quad \sum_j e_{pj} e_{qj} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p \neq q, \\ 1 & \text{при} \quad p = q, \end{cases} \\ f_p &= (f_{p1}, f_{p2}, \ldots), \quad \sum_j f_{pj} f_{qj} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p \neq q, \\ 1 & \text{при} \quad p = q, \end{cases} \end{aligned}\right\}$$

$$p = 1, 2, \ldots,$$

величина $\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{km} e_{kp} f_{mp} \right|$ ограничена фиксированной постоянной, не зависящей от выбора систем e_p и f_p *).

В качестве примера рассмотрим матрицу $A = \| a_{km} \|$, элементы которой удовлетворяют неравенствам

$$| a_{km} | < C b_k c_m,$$

где $b_k \geqslant 0$, $c_m \geqslant 0$, $\sum_1^{\infty} b_k^2 < \infty$ и $\sum_1^{\infty} c_k^2 < \infty$. Мы имеем

$$\left| \sum_k \sum_m a_{km} e_{kp} f_{mp} \right| \leqslant C \sum_k \sum_m b_k c_m | e_{kp} f_{mp} | \leqslant$$

$$\leqslant C \left[\sum_k \sum_m b_k^2 f_{mp}^2 + \sum_k \sum_m c_m^2 e_{kp}^2 \right] =$$

$$= C \left[\sum_k b_k^2 \sum_m f_{mp}^2 + \sum_k e_{kp}^2 \sum_m c_m^2 \right] = C \left(\sum_k b_k^2 + \sum_m c_m^2 \right);$$

таким образом, матрица A, согласно приведенному выше критерию, ядерна.

9. Околоединичный оператор. Будем называть обратимый оператор вида $I + S$, где S — симметричный оператор Гильберта — Шмидта, *околоединичным*. Если $e_1, e_2, \ldots$ — канонический базис оператора A и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — соответствующие собственные значения, то оператор $I + S$ в этом же базисе имеет диагональную матрицу с диагональными элементами $1 + \lambda_1$, $1 + \lambda_2$, ...

---

*) См. И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, „Обобщенные функции“, вып. 4, Физматгиз, 1961, гл. 1, § 2.

Оператор $(I+S)^{-1}$ также является околоединичным; действительно, матрица оператора $(I+S)^{-1}$ в каноническом базисе оператора S диагональна с диагональными элементами

$$\frac{1}{1+\lambda_j}=1-\frac{\lambda_j}{1+\lambda_j}\equiv 1+\mu_j,$$

причем $\sum_j \mu_j^2$ конечна вместе с $\sum_j \lambda_j^2$, поэтому $(I+S)^{-1}$ есть снова околоединичный оператор. Если $(I+S)$ — положительный околоединичный оператор, то $(I+S)^{1/2}$ в каноническом базисе оператора S имеет матрицу диагонального вида с элементами $\sqrt{1+\lambda_j}=1+\nu_j$, причем $\sum \nu_j^2$ конечна вместе с $\sum \lambda_j^2$; поэтому $(I+S)^{1/2}$ в указанном случае также есть околоединичный оператор.

10. Оператор эквивалентности. *Оператором эквивалентности* называется произведение околоединичного оператора и ортогонального; это определение, очевидно, обобщает понятие ортогонального оператора. При этом безразлично, в каком порядке перемножаются указанные операторы, так как если $Q=U(I+S)$, то, определяя оператор S_1, из уравнения $Q=(I+S_1)U$ находим

$$S_1=USU^{-1},$$

так что S_1 есть снова симметричный оператор Гильберта — Шмидта. Таким образом, операторы эквивалентности образуют группу по умножению. Поэтому произведение оператора эквивалентности и ортогонального оператора (в любом порядке) есть снова оператор эквивалентности.

Обратный оператор к оператору эквивалентности является снова оператором эквивалентности, так как

$$[U(I+S)]^{-1}=(I+S)^{-1}U^{-1}$$

и, по доказанному, $(I+S)^{-1}$ есть околоединичный оператор.

Обратимый оператор $I+S$, где S — не симметричный оператор Гильберта — Шмидта, не является, вообще говоря, околоединичным оператором; но он всегда является оператором эквивалентности. Действительно, согласно п. 5

$$I+S=U[(I+S)(I+S^*)]^{1/2}=U(I+S_1)^{1/2},$$

где $S_1 = S + S^* + SS^*$ есть симметричный неотрицательный оператор Гильберта — Шмидта; так как при этом $I + S_1 > 0$, то $(I + S_1)^{1/2}$, как мы видели, есть околоединичный оператор.

Покажем, что произведение двух операторов эквивалентности $Q_1 = U_1(I + S_1)$ и $Q_2 = U_2(I + S_2)$ есть снова оператор эквивалентности.

Мы имеем

$$Q_1Q_2 = U_1(I + S_1)U_2(I + S_2) =$$
$$= U_1U_2(I + S_3)(I + S_2) = U_1U_2(I + S),$$

где $S = S_2 + S_3 + S_3S_2$ есть оператор Гильберта—Шмидта. По доказанному $I + S$ есть оператор эквивалентности

$$I + S = U_3(I + S_4),$$

где S_4 — симметричный оператор Гильберта — Шмидта; отсюда

$$Q_1Q_2 = U_1U_2U_3(I + S_4) = U(I + S_4)$$

есть снова оператор эквивалентности, что и требовалось.

11. Обратимый оператор как произведение диагонального оператора и оператора эквивалентности. Если симметричный оператор B не вполне непрерывен, то он может вовсе не иметь собственных векторов или иметь их недостаточное количество для образования ортогонального базиса. Однако имеется теорема фон Неймана, утверждающая, что для любого симметричного оператора B и любого $\varepsilon > 0$ можно найти симметричный оператор Гильберта — Шмидта S такой, что $\|S\|_2 < \varepsilon$ и оператор $S + B = D$ имеет уже полную ортогональную систему собственных векторов. Если при этом B — обратимый оператор, то его можно представить в форме произведения оператора D на некоторый оператор эквивалентности. Действительно, можно написать $B = D - S = (I - SD^{-1})D$, причем оператор SD^{-1} есть оператор Гильберта — Шмидта вместе с оператором S, а оператор D обратим при достаточно малом S (по норме) вследствие обратимости B.

Оператор $Q = I - SD^{-1}$ обратим и по п. 10 есть оператор эквивалентности.

Комбинируя полученный результат с результатом п. 5, получаем:

Всякий ограниченный обратимый оператор A может быть представлен в форме

$$A = QD,$$

где D — диагональный оператор, а Q — оператор эквивалентности.

Действительно, по п. 5 и по доказанному мы имеем

$$A = UB = UQD = Q_1 D,$$

где U — ортогональный оператор, а $Q_1 = UQ$ есть оператор эквивалентности.

12. **Доказательство теоремы фон Неймана.** Пусть задан симметричный оператор B и $\varepsilon > 0$; мы желаем построить такой симметричный оператор Гильберта — Шмидта S, что $\|S\|_2 < \varepsilon$ и $D = B - S$ есть диагональный оператор.

Мы используем следующее свойство оператора B (вытекающее из формулы спектрального разложения): для любого n пространство H допускает такое ортогональное разложение $H = H_1 + \ldots + H_n$ на инвариантные относительно оператора B подпространства, что для любого нормированного вектора $x \in H_k$ справедливо равенство

$$Bx = t_k x + \varepsilon_k(x),$$

где число t_k не зависит от специального выбора вектора x в подпространстве H_k, а $\|\varepsilon_k(x)\| < \frac{c}{n}$ (в качестве c можно взять, например, $\|B\|$).

Пусть $f_1, f_2, \ldots$ — счетное всюду плотное множество в пространстве H. Вектор f_1 можно разложить по подпространствам H_k:

$$f_1 = f_{11} + \ldots + f_{1n}, \quad f_{1k} \in H_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Пусть e_{1k} есть нуль-вектор, если $f_{1k} = 0$, или $e_{1k} = f_{1k}/\|f_{1k}\|$, если $f_{1k} \neq 0$. Изменяя при необходимости нумерацию, можно считать, что

$$\|e_{11}\| = \ldots = \|e_{1m}\| = 1, \quad \|e_{1,\,m+1}\| = \ldots = \|e_{1n}\| = 0.$$

Пусть R_1 есть конечномерное подпространство, порожденное векторами $e_{11}, \ldots, e_{1m}$. Дополним эти векторы произвольным образом до полного базиса в H. Матрица оператора B в этом базисе имеет вид

$$B=\begin{Vmatrix} t_1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \ \ldots & \varepsilon_{1m} \ \ldots \\ \varepsilon_{21} & t_2+\varepsilon_{22} & \varepsilon_{2m} \ \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varepsilon_{m1} & \varepsilon_{m2} & t_m+\varepsilon_{mm} \ \ldots \\ b_{m+1,1} & b_{m+1,2} & b_{m+1,m} \ \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{Vmatrix}.$$

Построим оператор S_1 с помощью матрицы в том же базисе, полученной из матрицы B следующими операциями: из k-го диагонального элемента вычитается t_k $(k=1, \ldots, m)$ и все элементы b_{kp} с $k>m$, $p>m$ заменяются нулями. Полученный оператор S_1 симметричен вместе с оператором B, а квадрат его нормы Гильберта — Шмидта не превосходит величины

$$2\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon_{kl}^2=2\sum_{k=1}^{m}|\varepsilon_k(e_k)|^2\leqslant 2m\cdot\frac{c^2}{n^2}\leqslant 2\frac{c^2}{n}.$$

Выбирая достаточно большое $n=n_1$, мы можем получить оценку $\|S_1\|_2\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

Оператор $B-S_1$ в подпространстве R_1 действует по формулам

$$(B-S_1)\,e_{1k}=t_k e_{1k} \qquad (k=1, \ldots, m=m(n_1)=m_1). \tag{2}$$

Таким образом, R_1 инвариантно относительно $B-S_1$. Но тогда и $H\setminus R_1$ (ортогональное дополнение к R_1) также инвариантно относительно $B-S_1$. Мы можем повторить в нем приведенную конструкцию, заменив оператор B на $B-S_1$, вектор f_1 на проекцию вектора f_2 в $H\setminus R_1$ и $\frac{\varepsilon}{2}$ на $\frac{\varepsilon}{4}$. Мы получим конечномерное подпространство $R_2\subset H\setminus R_1$ и симметричный оператор S_2, заданный в $H\setminus R_1$, имеющий норму Гильберта — Шмидта $\|S_2\|_2<\frac{\varepsilon}{4}$ и такой, что в R_2

$$(B-S_1-S_2)\,e_{2k}=t_{2k}e_{2k} \qquad (k=1, \ldots, m_2).$$

Полагая дополнительно S_2 равным 0 на R_1, мы распространим его на все пространство H, причем, очевидно, величина $\|S_2\|_2$ не изменится, а равенство (2) может быть записано в виде

$$(B-S_1-S_2)\,e_{1k}=t_{1k}e_{1k} \qquad (k=1, \ldots, m_1).$$

Заметим далее, что подпространство R_1+R_2 содержит и вектор f_1 и вектор f_2.

Продолжая таким образом неограниченно, мы построим систему взаимно ортогональных конечномерных подпространств

R_1R_2, замыкание линейной оболочки которых совпадет со всем H. Таким образом, построенные нами векторы e_{kp} $(k=1, \ldots, m_p,$ $p=1, 2, \ldots)$ образуют полный ортонормальный базис в H.

Далее мы получаем последовательность симметричных операторов $S_1, S_2, \ldots$ таких, что

$$\| S_p \|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2^p}.$$

Положим

$$S = \sum_{p=1}^{\infty} S_p;$$

оператор S вместе с операторами S_p есть оператор Гильберта — Шмидта и

$$\| S \|_2 \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \| S_p \|_2 \leqslant \varepsilon.$$

Далее, при всех $k=1, \ldots, m_p$, $p=1, 2, \ldots$

$$(B-S)\, e_{kp} = t_{kp} e_{kp},$$

т. е. оператор $D=B-S$ является диагональным оператором, что и требовалось.

§ 8. ИЗМЕРИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В Ω

Начиная с этого параграфа, мы рассматриваем линейные измеримые преобразования в пространстве Ω. *Слабо измеримое* преобразование A характеризуется тем, что составляющие вектора $y=Ax$ представляют собою линейные измеримые функционалы от x. При этом измеримое множество $E \subset \Omega$ может переводиться преобразованием A и в неизмеримое множество. Требуя, чтобы слабо измеримое преобразование переводило измеримое множество в измеримое и при этом обладало бы обратным преобразованием с такими же свойствами, мы выделяем наиболее интересный класс линейных преобразований, которые называем просто *измеримыми*. Среди них особую роль играют преобразования, не меняющие меру; они задаются ортогональными матрицами (§ 9). В § 10 линейные измеримые преобразования получают полное описание.

1. Слабо измеримое линейное преобразование. *Слабо измеримым линейным преобразованием* в пространстве Ω

называется преобразование

$$A\colon x=(x_1, \ldots, x_n, \ldots)\in\Omega\to y= \\ = Ax=(y_1, \ldots, y_n, \ldots)\in\Omega,$$

для которого:

а) область определения Ω_A преобразования A есть измеримое линейное подпространство в Ω с мерой 1;

б) A линейно на своей области определения Ω_A, т. е.

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay$$

для любых вещественных чисел α, β и любых x, y из Ω_A;

в) каждая координата y_m $(m=1, 2, \ldots)$ есть измеримый (вещественный линейный) функционал от x.

По теореме 2 § 6 мы имеем

$$y_m=\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}x_n, \qquad m=1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где a_{mn} — вещественные числа и

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}^2<\infty. \tag{2}$$

Следовательно, *каждому слабо измеримому линейному преобразованию A в пространстве Ω соответствует бесконечная матрица*

$$\tilde{A}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix} \tag{3}$$

с вещественными элементами, удовлетворяющими условию (2).

Обозначим через E_m $(m=1, 2, \ldots)$ измеримое линейное подпространство полной меры, на котором функционал $y_m(x)$ принимает конечные значения и

$$E_A=\prod_{m=1}^{\infty}E_m.$$

Очевидно, что

$$\omega E_A=1 \quad \text{и} \quad \Omega_A\subset E_A.$$

Если $\Omega_A \neq E_A$, то преобразование A можно распространить на все E_A, поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $\Omega_A = E_A$.

Поскольку каждое измеримое линейное подпространство положительной меры содержит гильбертово подпространство l_2, то всякий слабо измеримый оператор A определен на всем l_2.

При этом значения оператора A на l_2 определяют однозначно его значения на всей его области определения. Действительно, значение $A(x)$ определяется значениями каждой координаты $y_m = y_m(x)$, а значение этой координаты на всей ее области определения E_m однозначно определяется через ее значения на l_2 в силу следствия теоремы 1 п. 1 § 6.

Теперь обратно, пусть задана бесконечная матрица A (3) с вещественными элементами, удовлетворяющими условию (2). Тогда формулы (1) определяют слабо измеримое линейное преобразование

$$A\colon\ x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \to y(y_1, \ldots, y_n, \ldots)$$

в пространстве Ω с областью определения E_A.

Итак, существует взаимно однозначное соответствие (сохраняющее сложение и умножение на вещественное число) между слабо измеримыми линейными преобразованиями в пространстве Ω и бесконечными вещественными матрицами, удовлетворяющими условию (2).

2. Измеримое линейное преобразование. Введем теперь наше основное определение. Слабо измеримое линейное преобразование называется *измеримым*, если оно отображает пространство Ω на себя почти взаимно однозначно, причем функции измеримого множества E

$$\omega E \quad \text{и} \quad \omega_A(E) \equiv \omega(AE)$$

абсолютно непрерывны друг относительно друга.

Последнее означает, в частности, что из $\omega Z = 0$ следует

$$\omega(AZ) = \omega\left(A^{-1}Z\right) = 0$$

и из $\omega E = 1$ следует

$$\omega(AE) = \omega\left(A^{-1}E\right) = 1.$$

Заметим, что измеримое линейное преобразование в силу п. 1 всегда определено на гильбертовом подпространстве l_2.

Лемма 1. *Если A — измеримое линейное преобразование, то*

$$Al_2 \subset l_2, \quad A[(\Omega - l_2)\Omega_A] \subset \Omega - l_2. \tag{4}$$

Иначе говоря, если $x \in l_2$, то $Ax \in l_2$; если же $y \in \Omega$ лежит вне l_2 и Ay имеет смысл, то Ay лежит вне l_2.

Доказательство. Мы уже видели, что преобразование A определено на гильбертовом подпространстве l_2.

Пусть $y \in l_2$, но $Ay \notin l_2$. В силу теоремы 1 § 5, существует множество B такое, что

$$\omega B = 1, \quad \omega(B + Ay) = 0. \tag{5}$$

Так как A измеримо, то $\omega(A^{-1}B) = 1$, откуда, в силу той же теоремы 1 § 5,

$$\omega(A^{-1}B + y) = 1.$$

Далее $1 = \omega[A(A^{-1}B + y)] = \omega(B + Ay)$, что противоречит (5). Значит, если $y \in l_2$, то $Ay \in l_2$.

Теперь допустим, что $y \notin l_2$, Ay имеет смысл и $Ay \in l_2$. Возьмем множество C такое, что

$$\omega C = 1, \quad \omega(C + y) = 0.$$

Так как преобразование A измеримо, то

$$0 = \omega_A(C + y) = \omega(AC + Ay).$$

Но в то же время

$$\omega C = 1 = \omega(AC) = \omega(AC + Ay),$$

и мы получаем противоречие. Отсюда, если $y \notin l_2$, то $Ay \notin l_2$.

Лемма доказана.

Следствие. *Измеримое линейное преобразование отображает все гильбертово подпространство l_2 на все l_2.*

Доказательство. Очевидно, что область значений преобразования A есть измеримое линейное подпространство в Ω. По условию, $A\Omega$ имеет меру 1, поэтому по теореме 2 § 4 $A\Omega \supset l_2$. Но в силу леммы $Ay \notin l_2$ при $y \notin l_2$; мы видим, что

$$l_2 \subset A l_2. \tag{6}$$

Комбинируя (4) и (6), получим $Al_2 = l_2$.

Лемма 2. *Пусть A измеримо. Если $y \neq 0$ и Ay имеет смысл, то $Ay \neq 0$.*

Доказательство. Если $y \notin l_2$, то по лемме 1 $Ay \notin l_2$, т. е. $Ay \neq 0$. Поэтому нам остается доказать утверждение леммы для элементов $y \in l_2$.

Допустим, что $y \in l_2$, $y \neq 0$, но $Ay = 0$. Пусть

$$y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots).$$

Рассмотрим измеримое множество

$$B_\varepsilon = \left\{ x:\ 0 \leqslant \sum_1^\infty x_k y_k < \varepsilon \sum_1^\infty y_k^2 \right\}.$$

Очевидно, $\omega B_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Положим при целом $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$Q_{n\varepsilon} = B_\varepsilon + \varepsilon n y = \left\{ x:\ \varepsilon n \sum_1^\infty y_k^2 \leqslant \sum_1^\infty x_k y_k < \varepsilon (n+1) \sum_1^\infty y_k^2 \right\}.$$

Очевидно, что $Q_{n\varepsilon} \cap Q_{n\varepsilon}$ пусто при $n \neq m$ и

$$\bigcup_{-\infty}^{\infty} Q_{n\varepsilon} = \Omega$$

с точностью до множества меры 0. Отсюда с точностью до множества меры 0

$$\Omega = A\Omega = \bigcup_{-\infty}^{\infty} A\bar{Q}_{n\varepsilon}. \tag{7}$$

Но для всех $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$AQ_{n\varepsilon} = AB_\varepsilon + \varepsilon n A y = AB_\varepsilon$$

и равенство (7) обращается в

$$\Omega = \bigcup_{-\infty}^{\infty} AB_\varepsilon = AB_\varepsilon.$$

Таким образом, A переводит множество B_ε произвольно малой меры в множество полной меры, что невозможно. Следовательно, если $y \neq 0$, то $Ay \neq 0$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть A — измеримое линейное преобразование в Ω. Сужение A_{l_2} преобразования A на гильбертово подпространство l_2 является ограниченным оператором с ограниченным обратным $A_{l_2}^{-1}$.*

Доказательство. Ограниченность оператора A_{l_2} в гильбертовом пространстве l_2 следует из того, что этот оператор определен на всем l_2 и допускает матричное представление

$$(Ax)_n = \sum_{p=1}^{\infty} a_{np} x_p \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

(см. § 7, п. 1).

С другой стороны, по следствию из леммы 1 обратный оператор $A_{l_2}^{-1}$ определен на всем l_2, отсюда по теореме Банаха (§ 7, п. 2) оператор $A_{l_2}^{-1}$ ограничен.

Теорема доказана.

Теорема 1 дает нам необходимое условие для того, чтобы слабо измеримое линейное преобразование A было измеримым. Однако это условие далеко недостаточно. Например, слабо измеримое преобразование

$$A = \lambda I,$$

где I — единичное преобразование, как мы видели еще в § 3, не сохраняет измеримых множеств.

3. Лемма о произведении измеримых преобразований. Пусть A и B — два слабо измеримых линейных преобразования в пространстве Ω с матрицами соответственно

$$A = \| a_{mn} \|_1^{\infty}, \quad B = \| b_{pq} \|_1^{\infty},$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^2 < \infty \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Допустим, что преобразование A измеримо. Тогда произведение $C = AB$ определено на множестве полной меры. Если положить

$$z=(z_1, \ldots, z_n, \ldots)=Cx=BAx=BA(x_1, \ldots, x_n),$$

то

$$z_k=\sum_{m=1}^{\infty} b_{km}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n\right) \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

почти всюду на Ω конечны и, как пределы усеченных сумм, являются линейными измеримыми функционалами.

Лемма 3. *При наложении указанных условий на преобразования A и B мы имеем для всякого $k=1, 2, \ldots$*

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_{km}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_{km}a_{mn}\right)x_n$$

почти всюду на Ω.

Доказательство. Положим

$$f_k(x)=\sum_{m=1}^{\infty} b_{km}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n\right),$$

$$g_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_{km}a_{mn}\right)x_n. \tag{9}$$

Как мы заметили, $f_k(x)$ есть измеримый линейный функционал на пространстве Ω. С другой стороны, правая часть (9) определяет измеримый линейный функционал, так как по теореме 1 оператор A_{l_2} ограничен на гильбертовом пространстве l_2, и мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_{km}a_{mn}\right)^2 \leqslant \|A_{l_2}\|^2 \sum_{m=1}^{\infty} b_{km}^2 < \infty,$$

где $\|A_{l_2}\|$ — норма оператора A_{l_2} в l_2.

Функционалы $f_k(x)$ и $g_k(x)$ совпадают на «ортах» $e_1, e_2, \ldots$ Действительно,

$$f(e_p)=\sum_{m=1}^{\infty} b_{km}a_{mp}=g(e_p) \qquad (p=1, 2, \ldots).$$

В силу следствия теоремы 1 п. 1 § 6 $f(x)=g(x)$ почти всюду на Ω.

Лемма доказана.

Следствие. *При условиях леммы произведение $C = BA$ имеет матрицу*

$$C = \| c_{km} \|_1^\infty,$$

где $c_{kn} = \sum_{m=1}^{\infty} b_{km} a_{mn}$, $k, n = 1, 2, \ldots$

Иначе говоря, *произведению двух слабо измеримых линейных преобразований в* Ω, *первое из которых измеримо, соответствует обычное произведение их матриц.*

§ 9. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В Ω И ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

1. Ортогональные преобразования. Измеримое линейное преобразование U в пространстве Ω называется *ортогональным*, если оно задается вещественной ортогональной матрицей

$$U = \| u_{kn} \|_1^\infty,$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{kn} u_{mn} = \sum_{p=1}^{\infty} u_{pk} u_{pm} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k = m, \\ 0, & \text{если} \quad k \neq m. \end{cases}$$

Лемма 1. *Для всякого натурального* p

$$x_p = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mp} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} x_n \right)$$

почти всюду на пространстве Ω.

Доказательство. Прежде всего докажем, что повторный ряд

$$f_p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mp} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} x_n \right)$$

представляет измеримый линейный функционал на пространстве Ω. Действительно, в силу § 3, п. 9 определены линейные функционалы

$$g_m(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}x_n, \qquad m=1,\ 2,\ \ldots$$

Их совместные лебеговские множества такие же, как у функционалов $x_1,\ x_2,\ \ldots$ Поэтому ряд

$$f_p(x)=\sum_{m=1}^{\infty} u_{mp}f_m(x)$$

определяет измеримый линейный функционал на Ω.

Теперь положим $e_p(x)=x_p$. Тогда $e_p(x)$ и $f_p(x)$ совпадают на «ортах»:

$$f_p(0,\ \ldots,\ 0,\ \underset{m}{1},\ 0,\ \ldots)=\left\{\begin{matrix} 1 & \text{при} & m=p, \\ 0 & \text{при} & m\neq p \end{matrix}\right\}=$$

$$=e_p(0,\ \ldots,\ 0,\ \underset{m}{1},\ 0,\ \ldots);$$

отсюда по следствию п. 1 § 6 $f_p(x)=e_p(x)$ почти всюду на пространстве Ω.

Лемма доказана.

Теорема 1. *При ортогональном преобразовании*

$$U\colon\ x_k=\sum_{k=1}^{\infty} u_{mk}y_m, \qquad m=1,\ 2,\ \ldots$$

мера ω *преобразуется в равную меру* ω_U.

Иначе говоря, *мера* ω *инвариантна относительно ортогональных преобразований.*

Доказательство. Рассмотрим брус

$$B=\{x\in\Omega\colon\ a_1<x_1\leqslant b_1,\ \ldots,\ a_n<x_n\leqslant b_n\}.$$

Обозначим через UB образ бруса B при преобразовании U:

$$UB=\left\{y\in\Omega\colon\ a_k<\sum_{m=1}^{\infty} u_{mk}y_m\leqslant b_k, \qquad k=1,\ \ldots,\ n\right\}.$$

По формуле 16 п. 10 § 3

$$\omega(UB)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{a_k}^{b_k} e^{-v_k^2}\,dv_k=\omega B.$$

Значит, преобразование U не меняет меры брусов. Используя счетную аддитивность, мы видим, что мера любого измеримого множества инвариантна относительно ортогонального преобразования U.

2. Преобразование Гильберта — Шмидта. Укажем одно простое применение теоремы 1.

Теорема 2. *Преобразование Гильберта — Шмидта переводит почти все элементы* Ω *в гильбертово подпространство* l_2.

Доказательство. Согласно § 7, п. 6 матрица S Гильберта — Шмидта эквивалентна произведению диагональной матрицы Гильберта — Шмидта Λ $\left(\text{с диагональными элементами } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \sum_n \lambda_n^2 < \infty\right)$ и нерастягивающей матрицы V, т. е.

$$S = UV\Lambda U^{-1},$$

где U — ортогональная матрица. Ортогональная матрица U^{-1}, как мы знаем, переводит Ω в себя с точностью до множества меры 0. Диагональная матрица Λ переводит почти все Ω в l_2, так как из $y_n = \lambda_n x_n$ следует по признаку Колмогорова — Хинчина

$$\sum_1^\infty y_n^2 = \sum_1^\infty \lambda_n^2 x_n^2 < \infty$$

на множестве полной меры в Ω (§ 3, п. 8).

Нерастягивающая матрица V (и затем ортогональная матрица U), очевидно, переводит l_2 в l_2. Таким образом, мы имеем

$$S\Omega \subset l_2,$$

что и требовалось.

3. Измеримые функции и множества, инвариантные относительно ортогональных преобразований. В конечномерном пространстве R_n с гауссовой мерой

$$\omega\{x \in R_n\colon a_1 < x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n < x_n \leqslant b_n\} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a_k}^{b_k} e^{-\xi_k^2}\, d\xi_k$$

сферически симметричные функции $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \equiv \varphi\left(\sum_1^n x_k^2\right)$ инвариантны относительно ортогональных преобразований $\left(\text{поскольку последние сохраняют форму } \sum_1^n x_k^2\right)$. В частности, инвариантной является измеримая функция $\frac{1}{\left(\sum_1^n x_k^2\right)^{n-1}}$, играющая важную роль в теории потенциала. Всякое измеримое множество $E \subset R_n$, характеристическая функция которого сферически симметрична, также является инвариантным относительно ортогональных преобразований.

В пространстве Ω, где также ортогональные преобразования (и только они) сохраняют меру, естественно поставить вопрос о существовании измеримых функций и измеримых множеств, инвариантных относительно ортогональных преобразований. Однако для пространства Ω класс таких функций оказывается уже весьма узким.

Теорема 3. *Измеримая функция $f(x)$ на пространстве Ω, инвариантная относительно всех ортогональных преобразований (даже только относительно конечных перестановок осей), есть постоянная почти всюду. Измеримое множество $E \subset \Omega$, инвариантное относительно всех ортогональных преобразований (даже только относительно конечных перестановок осей), имеет меру* 0 *или* 1.

Доказательство. Без ограничения общности можно измеримую функцию $f(x)$ считать квадратично суммируемой (заменив ее в противном случае на $\operatorname{arctg} f(x)$) и имеющей норму 1 в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$\|f\|^2 = \int_\Omega f^2(x)\, d\omega = 1. \tag{1}$$

Обозначим через γ угол в пространстве $L_2(\Omega)$ между вектором f и вектором 1. Пусть, далее, последовательность полиномов $P_n(x) = P_n(x_1, \ldots, x_n)$ стремится в $L_2(\Omega)$ к функции f:

$$\|f(x) - P_n(x)\| \to 0. \tag{2}$$

Положим $Q_n(x) = P_n(x_{n+1}, \ldots, x_n)$; полином $Q_n(x)$ получен из $P_n(x)$ ортогональным преобразованием, переводящим первые n осей $x_1, \ldots, x_n$ соответственно в последующие n осей $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$. Так как по условию ортогональное преобразование не меняет функции $f(x)$ и, кроме того, не меняет интегралов, то также

$$\| f(x) - Q_n(x) \| \to 0. \tag{3}$$

Из (1), (2), (3) следует, что $(P_n, Q_n) \to (f, f) = 1$. С другой стороны, согласно § 3, п. 2

$$(P_n, Q_n) = \int P_n(x_1, \ldots, x_n) P_n(x_{n+1}, \ldots, x_{2n})\, d\omega =$$
$$= \int P_n(x_1, \ldots, x_n)\, d\omega \int P_n(x_{n+1}, \ldots, x_{2n})\, d\omega =$$
$$= \left[\int P_n(x) \cdot 1\, d\omega \right]^2 = (P_n, 1)^2.$$

Так как $P_n(x) \to f(x)$, то $(P_n, Q_n) = (P_n, 1)^2 \to (f, 1)^2 = \cos^2\gamma$. Мы видим, что $\cos^2\gamma = 1$, т. е. $\cos\gamma = \pm 1$, и функция $f(x)$ либо равна почти всюду 1, либо -1.

Вторая часть теоремы получается применением первой части к характеристической функции множества E.

4. Квадратичные функционалы. Пусть дана бесконечная симметричная матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix} \right\|.$$

Мы хотим определить на пространстве Ω квадратичную форму

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{km} x_k x_m. \tag{1}$$

Такая форма, разумеется, может быть определена не для всякой матрицы A. Например, если матрица A диагональна:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cdot \end{matrix} \right\|$$

и числа $a_m > 0$, то соответствующая форма $\sum\limits_1^\infty a_m x_m^2$ определена (как сумма ряда, сходящегося в среднем на Ω) лишь при выполнении условия $\sum\limits_1^\infty a_m < \infty$ (признак Колмогорова — Хинчина, п. 8 § 3).

Форму (1) мы определим как предел в средием квадратичном от усеченных форм

$$A_n(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{km} x_k x_m \tag{2}$$

в предположении, что этот предел существует.

Выведем теперь необходимые и достаточные условия для существования предела форм (2). При $n < p$ мы имеем

$$\int\limits_\Omega [A_p(x, x) - A_n(x, x)]^2 \, d\omega =$$
$$= \int\limits_\Omega \left[\sum_{k=1}^{p} \sum_{m=1}^{p} a_{km} x_k x_m - \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{km} x_k x_m \right]^2 d\omega =$$
$$= \int\limits_\Omega \left[\sum_{(k, m) \in N_{np}} a_{km} x_k x_m \right]^2 d\omega,$$

где N_{np} означает множество пар номеров (k, m), получающееся удалением квадрата $k \leqslant n$, $m \leqslant n$ из квадрата $k \leqslant p$, $n \leqslant p$.

Далее, получаем

$$\int\limits_\Omega [A_p(x, x) - A_n(x, x)]^2 \, d\omega =$$
$$= \int\limits_\Omega \left[\sum_{(k, m) \in N_{np}} \sum_{(r, s) \in N_{np}} a_{km} a_{rs} x_k x_m x_r x_s \right] d\omega.$$

После интегрирования обратятся в нуль почти все слагаемые, за исключением тех, индексы которых удовлетворяют условиям $k=m=r=s$; $k=m\neq r=s$; $k=r\neq m=s$; $k=s\neq m=r$. Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega}[A_p(x,\ x)-A_n(x,\ x)]^2\,d\omega=$$

$$=\sum_{(k,\ m)\in N_{np}}\ \sum_{(r,\ s)\in N_{np}} a_{km}a_{rs}\int\limits_{\Omega} x_n x_m x_r x_s\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=n+1}^{p} a_{kk}^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_k^4 e^{-u_k^2}\,du_k+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=n+1}^{p}\ \sum_{r=n+1}^{p} a_{kk}a_{rr}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_k^2 e^{-u_k^2}\,du_k\right]^2+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{(k,\ m)\in N_{np}} a_{km}^2\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_k^2 e^{-u_k^2}\,du_k\right]^2=$$

$$=\frac{3}{4}\sum_{k=n+1}^{p} a_{kk}^2+\frac{1}{4}\sum_{\substack{k=n+1\\ k\neq r}}^{p}\ \sum_{r=n+1}^{p} a_{kk}a_{rr}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{(k,\ m)\in N_{np}\\ k\neq m}} a_{km}^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=n+1}^{p} a_{kk}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{(k,\ m)\in N_{np}} a_{km}^2.$$

Отсюда следует, что необходимыми и достаточными условиями существования предела в среднем квадратичном у последовательности форм $A_n(x,\ x)$ при $n\to\infty$ являются:

а) сходимость ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} a_{kk}$;

б) сходимость двойного ряда $\sum\limits_{1}^{\infty}\sum\limits_{1}^{\infty} a_{km}^2$.

При этом, если положить $n=0$ и устремить p к ∞, мы получим

$$\int\limits_{\Omega} A^2(x,\ x)\,d\omega=\frac{1}{4}\left(\sum_{1}^{\infty} a_{kk}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty} a_{km}^2.$$

Если матрица A удовлетворяет даже только условию б), то форма $A(x, x)$ заведомо определена на гильбертовом подпространстве $l_2 \subset \Omega$; для $x \in l_2$ мы имеем просто

$$A(x, x) = \sum_1^\infty \sum_1^\infty a_{km} x_k x_m$$

в смысле обычной сходимости на каждом элементе $x \in l_2$.

Отметим, что условие б) инвариантно относительно перехода от матрицы A к эквивалентной $U^{-1}AU$ с помощью ортогональной матрицы U; в то же время условие а), вообще говоря, не выдерживает даже перестановок номеров координат. Поэтому для дальнейшего мы наложим на рассматриваемые матрицы дополнительное условие: именно, будем предполагать, что матрица A *ядерна.* Это означает, в частности, что ее собственные значения λ_1, λ_2, ... удовлетворяют условию

$$\sum_1^\infty |\lambda_n| < \infty$$

(см. § 7, п. 8); как было отмечено, величина $\sum_1^\infty \lambda_n$ является ортогональным инвариантом ядерной матрицы.

В качестве примера и рассмотрим ядерную матрицу A с элементами $a_{km} = a_k a_m$, где

$$\sum a_k^2 < \infty.$$

Мы имеем

$$\sum_k a_{kk} = \sum_k a_k^2 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_k \sum_m a_{km}^2 = \left(\sum_k a_k^2\right)^2 < \infty.$$

Поэтому форма

$$A(x, x) = \sum \sum a_k a_m x_k x_m$$

существует. При этом в силу § 3, п. 9 мы имеем

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty a_k a_m x_k x_m = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n a_k a_m x_k x_m =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^\infty a_k x_k\right)^2.$$

5. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Важным вопросом является вопрос о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Известно, что для симметрической матрицы Гильберта — Шмидта A всегда можно найти такую ортогональную матрицу

$$U = \| u_{km} \|,$$

что

$$\Lambda = U^{-1} A U$$

есть диагональная матрица; при этом, если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — ее диагональные элементы, то

$$\sum_1^\infty \lambda_k^2 < \infty.$$

Если, далее, матрица A ядерна, то и

$$\sum_1^\infty |\lambda_n| < \infty.$$

В пределах гильбертова пространства l_2 мы имеем

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty a_{km} x_k x_m = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \left(\sum_{m=1}^\infty u_{km} x_m \right)^2. \quad (3)$$

Теорема 4. *Для ядерной симметричной матрицы A равенство* (3) *имеет место почти всюду на пространстве Ω.*

Доказательство. Положим

$$g_m(x) = \sum_{p=1}^m \lambda_p \left(\sum_{k=1}^\infty u_{pk} x_k \right)^2, \qquad g(x) = \sum_{p=1}^\infty \lambda_p \left(\sum_{k=1}^\infty u_{pk} x_k \right)^2.$$

Ряд, определяющий функцию $g(x)$, сходится почти всюду по признаку Колмогорова — Хинчина, так как совместные лебеговские множества функционалов $\sum_{k=1}^\infty u_{pk} x_k$ таковы же по мере, как и у самих координатных функционалов x_p (§ 3, п. 11). В силу равенства

$$A = U \Lambda U^{-1}$$

мы имеем

$$a_{km} = \sum_{p=1}^\infty \lambda_p u_{pk} u_{pm};$$

отсюда

$$A_n(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{km} x_k x_m =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p u_{pk} u_{pm} \right) x_k x_m = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p \left(\sum_{k=1}^{n} u_{pk} x_k \right)^2.$$

Далее,

$$\| A_n(x, x) - g_m(x) \|_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \left\| \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p \left(\sum_{k=1}^{n} u_{pk} x_k \right)^2 - \sum_{p=1}^{m} \lambda_p \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{pk} x_k \right)^2 \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{p=1}^{m} \lambda_p \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{pk} x_k \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} u_{pk} x_k \right)^2 \right] \right\| +$$

$$+ \sum_{p=m+1}^{\infty} |\lambda_p| \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{pk} x_k \right)^2 \right\|.$$

При этом

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{pk} x_k \right)^2 \right\|^2 = \lim_{r \to \infty} \left\| \left(\sum_{k=1}^{r} u_{pk} x_k \right)^2 \right\|^2 =$$

$$= \lim_{r \to \infty} \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{r} u_{pk} x_k \right)^4 d\omega.$$

Но интеграл

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{r} u_{pk} x_k \right)^4 d\omega$$

с помощью r-мерного ортогонального преобразования с первой строкой

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{r} u_{pk}^2}} \sum_{k=1}^{r} u_{pk} x_k$$

приводится к виду

$$\left(\sum_{k=1}^{r} u_{pk}^2 \right)^2 \int_{\Omega} y_1^4 \, d\omega = \frac{3}{4} \left(\sum_{k=1}^{r} u_{pk}^2 \right)^2 \leqslant \frac{3}{4},$$

откуда следует оценка

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{pk} x_k \right)^2 \right\| \leqslant 1.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем m так, чтобы иметь

$$\sum_{p=m+1}^{\infty} |\lambda_p| < \varepsilon,$$

и далее $n = n(m)$ так, чтобы при $p = 1, \ldots, m$ иметь

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{pk} x_k \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} u_{pk} x_k \right)^2 \right\| < \varepsilon.$$

При этих значениях m и n

$$\| A_n(x, x) - g_m(x) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{m} |\lambda_p| \varepsilon + \sum_{p=m+1}^{\infty} |\lambda_p| \cdot 1 \leqslant \varepsilon \left(\sum_{p=m+1}^{\infty} |\lambda_p| + 1 \right),$$

откуда

$$A(x, x) = \lim_{n \to \infty} A_n(x, x) = \lim_{m \to \infty} g_m(x) = g(x),$$

что и утверждалось.

С л е д с т в и е. *Если две квадратичные формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ с ядерными матрицами A и B совпадают на гильбертовом подпространстве $l_2 \subset \Omega$, то они совпадают и почти всюду на Ω.*

Действительно, каждая из них почти всюду совпадает со своей канонической формой, а канонические формы у них одинаковы.

§ 10. ОБЩИЙ ВИД ИЗМЕРИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В Ω

1. Диагональные преобразования. Рассмотрим диагональное преобразование D в пространстве Ω, т. е. преобразование, задаваемое диагональной матрицей D. Если на (главной) диагонали матрицы D имеется элемент, равный нулю, то, очевидно, преобразование D переводит все пространство Ω в множество нулевой меры. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что все элементы на диагонали отличны от нуля. В силу инвариантности меры относительно ортогональных преобразований мы можем еще предполагать, что они положительны. Отсюда можно написать матрицу D в виде

$$D = \begin{Vmatrix} 1+\lambda_1 & & & & & \\ & 1+\lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1+\lambda_n & & \\ & & & & \ddots & \end{Vmatrix} = I + \Lambda,$$

где

$$\lambda_n > -1, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Теорема 1. *При условии* (1) *преобразование D является измеримым тогда и только тогда, когда*

$$\sum_1^\infty \lambda_n^2 < \infty, \tag{2}$$

т. е. Λ есть матрица Гильберта — Шмидта.

Доказательство теоремы 1 будет дано в пп. 3—4.

2. Лемма об одном бесконечном произведении.

Лемма 1. *Произведение*

$$G(x) = \prod_1^\infty \left[(1+\lambda_k) e^{-\left(2\lambda_k + \lambda_k^2\right) x_k^2}\right] \tag{3}$$

сходится почти всюду на Ω и принадлежит $L(\Omega)$, если

$$\sum_1^\infty \lambda_k^2 < \infty, \ \lambda_k > -1.$$

Действительно,

$$\prod_1^n (1+\lambda_k) e^{-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right) x_k^2} = \prod_1^n e^{\ln(1+\lambda_k) - \left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right) x_k^2} =$$

$$= e^{\sum\limits_1^n \left[\ln\left(1+\lambda_k\right) - \left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right) x_k^2\right]}.$$

и вопрос о сходимости произведения (2) сводится к сходимости почти всюду на Ω ряда из величин

$$\ln\left(1+\lambda_k\right)-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right)x_k^2. \tag{4}$$

Мы имеем $\ln(1+\lambda_k)=\lambda_k+\varepsilon_k$, где ряд из чисел $\varepsilon_k=O\left(\lambda_k^2\right)$ сходится. Кроме того, ряд $\sum\limits_k \lambda_k^2 x_k^2$ сходится почти всюду на Ω по признаку Колмогорова—Хинчина. Поэтому достаточно рассмотреть ряд из величин

$$\lambda_k-2\lambda_k x_k^2=\lambda_k\left(1-2x_k^2\right). \tag{5}$$

Положим $g(u)=1-2u^2$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{-u^2}\, du=0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g^2(u)\, e^{-u^2}\, du=C>0.$$

Поэтому, согласно § 3, п. 9 (замечание), ряд из величин (5) сходится почти всюду на Ω, вместе с ним сходятся почти всюду ряд из величин (4) и произведение (3).

Покажем, что функция $G(x)$ суммируема. Для этого заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\lambda_k)\, e^{-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right)x_k^2-x_k^2}\, dx_k=\frac{1+\lambda_k}{\sqrt{1+2\lambda_k+\lambda_k^2}}=1.$$

Поэтому

$$\int_{\Omega}\prod_{1}^{n}(1+\lambda_k)\, e^{-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right)x_k^2}\, d\omega=1.$$

Отсюда $G(x)$ суммируема как предел последовательности функций с ограниченными интегралами.

Но лемма Фату, которой мы здесь пользуемся, не дает возможности вычислить интеграл от функции $G(x)$ как предел интегралов от функций

$$G_n(x)=\prod_{1}^{n}(1+\lambda_k)\, e^{-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right)x_k^2}.$$

Чтобы иметь возможность осуществить этот предельный переход, мы докажем, что функция $G(x)$ есть предел функций $G_n(x)$ в среднем квадратическом. Для этого вычислим

$$\| G_{n+p}(x) - G_n(x) \|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left[\prod_1^{n+p} (1+\lambda_k)\, e^{-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right) x_k^2} - \prod_1^{n} (1+\lambda_k)\, e^{-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right) x_k^2} \right]^2 d\omega =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left[\prod_1^{n} (1+\lambda_k)\, e^{-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right) x_k^2} \right]^2 \times \left[\prod_{n+1}^{n+p} (1+\lambda_k)\, e^{-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right) x_k^2} - 1 \right]^2 d\omega =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left[\prod_1^{n} (1+\lambda_k)\, e^{-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right) x_k^2} \right]^2 d\omega \times \int\limits_{\Omega} \left[\prod_{n+1}^{n+p} (1+\lambda_k)\, e^{-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right) x_k^2} - 1 \right]^2 d\omega =$$

$$= \prod_1^{n} \frac{(1+\lambda_k)^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right) x_k^2 - x_k^2}\, dx_k \times \left[\prod_{n+1}^{n+p} \frac{(1+\lambda_k)^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right) x_k^2 - x_k^2}\, dx_k - 2 \prod_{n+1}^{n+p} \frac{1+\lambda_k}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right) x_k^2 - x_k^2}\, dx_k + 1 \right] =$$

$$= \prod_1^{n} \frac{(1+\lambda_k)^2}{\sqrt{1+2\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right)}} \left[\prod_{n+1}^{n+p} \frac{(1+\lambda_k)^2}{\sqrt{1+2\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right)}} - 1 \right].$$

Но

$$\frac{(1+\lambda_k)^2}{\sqrt{1+2\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right)}} = \left[1+2\lambda_k+O\left(\lambda_k^2\right)\right]\left[1-2\lambda_k+O\left(\lambda_k^2\right)\right] = 1+O\left(\lambda_k^2\right),$$

поэтому бесконечное произведение

$$\prod_{1}^{\infty} \frac{(1+\lambda_k)^2}{\sqrt{1+2\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right)}}$$

сходится, а конечное произведение

$$\prod_{n\neq 1}^{n+p} \frac{(1+\lambda_k)^2}{\sqrt{1+2\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right)}}$$

стремится к 1, когда $n\to\infty$, $p\to\infty$. Таким образом, $\| G_{n+p}(x)-G_n(x)\|^2\to 0$.

Отсюда

$$\int_{\Omega} G(x)\,d\omega=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} G_n(x)\,d\omega=1.$$

Для любого бруса

$$B=\{x\colon\ a_1<x_1\leqslant b_1,\ \ldots,\ a_m<x_m\leqslant b_m\}$$

$$\int_B G(x)\,d\omega=\lim_{n\to\infty}\int_B G_n(x)\,d\omega=$$

$$=\prod_{1}^{m}\frac{1+\lambda_k}{\sqrt{\pi}}\int_{a_k}^{b_k} e^{-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right)x_k^2-x_k^2}\,dx_k=$$

$$=\prod_{1}^{m}\frac{1+\lambda_k}{\sqrt{\pi}}\int_{a_k}^{b_k} e^{-\left(1+\lambda_k\right)^2x_k^2}\,dx_k.$$

3. Доказательство прямой части теоремы. Теперь переходим к доказательству теоремы. Рассмотрим сначала прямую часть. Возьмем брус

$$B=\{x\in\Omega\colon\ a_k<x_k\leqslant b_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}.$$

Его образ DB при преобразовании D является брусом вида

$$DB=\{x\in\Omega\colon\ (1+\lambda_k)\,a_k<x_k\leqslant(1+\lambda_k)\,b_k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n\},$$

следовательно,

$$\omega_D B = \omega DB = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a_k(1+\lambda_k)}^{b_k(1+\lambda_k)} e^{-\xi_k^2} d\xi_k =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1+\lambda_k}{\sqrt{\pi}} \int_{a_k}^{b_k} e^{-(1+\lambda_k)^2 \xi_k^2} d\xi_k. \tag{6}$$

Допустим сначала, что $\sum_{1}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$. В этом случае функция

$$G(x) = \prod_{1}^{\infty} (1+\lambda_k) e^{-\left(2\lambda_k + \lambda_k^2\right) x_k^2}, \tag{7}$$

согласно лемме, суммируема, и, учитывая (6), мы можем написать

$$\omega_D B = \int_B G(x)\, d\omega. \tag{8}$$

Таким образом, мера ω_D на брусах представляется интегралом от функции $G(x)$. Так как $G(x)$ суммируема, то в силу счетной аддитивности мер ω и ω_D равенство (8) можно распространить на все ω-измеримые множества; отсюда следует, что D измеримо.

При этом мы сразу получаем и выражение производной Радона — Никодима:

$$\frac{d\omega_D}{d\omega} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[(1+\lambda_k) e^{-\left(2\lambda_k + \lambda_k^2\right) x_k^2}\right]. \tag{9}$$

Если при этом

$$\sum_{1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$$

(т. е. матрица Λ ядерна), то бесконечное произведение $\prod_{1}^{\infty} (1+\lambda_k)$ абсолютно сходится и функционал

$$\sum_{1}^{\infty} \left(2\lambda_k + \lambda_k^2\right) x_k^2$$

существует почти всюду на пространстве Ω, отсюда (9) можно написать в виде

$$\frac{d\omega_D}{d\omega}=\left[\prod_1^\infty (1+\lambda_k)\right] e^{-\sum_1^\infty \left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right) x_k^2}. \tag{10}$$

4. Доказательство обратной части теоремы. Пусть, обратно, $\sum_1^\infty \lambda_k^2=\infty$. Покажем, что меры ω и ω_D не эквивалентны. Если ряд $\sum_1^\infty \lambda_k^2$ расходится, то бесконечное произведение

$$\prod_1^\infty \frac{2+2\lambda_k}{2+2\lambda_k+\lambda_k^2}$$

сходится (к нулю).

Для заданного $\varepsilon>0$ найдем n настолько большим, что

$$\prod_1^n \frac{2+2\lambda_k}{2+2\lambda_k+\lambda_k^2}<\varepsilon^2.$$

Рассмотрим цилиндрическое множество

$$C=\left\{x\in\Omega:\ -\sum_1^n x_k^2\leqslant \sum_1^n \left[\ln(1+\lambda_k)-(1+\lambda_k)^2 x_k^2\right]\right\}.$$

Тогда

$$\omega C=\frac{1}{\sqrt{\pi^n}}\int_{R_n} \chi_C(x)\, e^{-\sum_1^n x_k^2}\, dx_1\ldots dx_k\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi^n}}\int_{R_n} e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n x_k^2+\frac{1}{2}\sum_1^n\left[\ln(1+\lambda_k)-(1+\lambda_k)^2 x_k^2\right]}\, dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\prod_1^n\sqrt{\frac{1+\lambda_k}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x_k^2-\frac{(1+\lambda_k)^2}{2}x_k^2}\, dx_k=$$

$$=\prod_{k=1}^n\sqrt{\frac{2+2\lambda_k}{2+2\lambda_k+\lambda_k^2}}<\varepsilon.$$

С другой стороны,

$$DC = \left\{ x \in \Omega:\ -\sum_{1}^{n} \frac{x_k^2}{(1+\lambda_k)^2} \leqslant \sum_{1}^{n} \left[\ln(1+\lambda_k) - x_k^2\right] \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \Omega:\ -\sum_{1}^{n} \left[\frac{x_k^2}{(1+\lambda_k)^2} + \ln(1+\lambda_k) \right] \leqslant -\sum_{1}^{n} x_k^2 \right\};$$

отсюда

$$\Omega - DC = \left\{ x \in \Omega:\ -\sum_{1}^{n} x_k^2 < -\sum_{1}^{n} \left[\ln(1+\lambda_k) + \frac{x_k^2}{(1+\lambda_k)^2} \right] \right\},$$

$$\omega(\Omega - DC) = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{R_n} \chi_{\Omega - DC}(x)\, e^{-\sum_1^n x_n^2}\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{R_n} e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n x_n^2 - \frac{1}{2}\sum_1^n \left[\ln(1+\lambda_k) + \frac{x_k^2}{(1+\lambda_k)^2}\right]} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \prod_{1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi(1+\lambda_k)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[x_k^2 + \frac{x_k^2}{(1+\lambda_k)^2}\right]} dx_k =$$

$$= \prod_{1}^{n} \sqrt{\frac{2(1+\lambda_k)^2}{(1+\lambda_k)(2+2\lambda_k+\lambda_k^2)}} =$$

$$= \prod_{1}^{n} \sqrt{\frac{2+2\lambda_k}{2+2\lambda_k+\lambda_k^2}} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\omega_D C > 1 - \varepsilon.$$

Но если бы меры ω и ω_D были эквивалентны, то из $\omega E_n \to 0$ вытекало бы $\omega_D E_n \to 0$; поскольку в данном случае это не имеет места, меры не эквивалентны, и теорема доказана.

5. Выполнение условия Липшица. Теперь поставим следующий вопрос: при наложении каких условий на матрицу Λ выполняется условие Липшица

$$\alpha \leqslant \frac{\omega_D E}{\omega E} \leqslant \beta, \tag{11}$$

где α, β — некоторые положительные числа и E — произвольное измеримое множество положительной ω-меры?

Для решения этого вопроса рассмотрим отношение $\frac{\omega(DE)}{\omega E}$ на совокупности всех брусов. Установим несколько простых фактов.

1. *Если при некотором* $k=1, 2, \ldots$ *число* $\lambda_k > 0$, *то отношение* $\frac{\omega B}{\omega DB}$ *не ограничено сверху.*

Пусть, например, $\lambda_1 > 0$. Положим $B = \{x\colon 0 < a < < x_1 \leqslant b\}$. Тогда $DB = \{x\colon 0 < (1+\lambda_1)\, a < x_1 < < (1+\lambda_1)\, b\}$ и

$$\frac{\omega B}{\omega(DB)} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_a^b e^{-\xi^2}\, d\xi}{\dfrac{1+\lambda_1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_a^b e^{-(1+\lambda_1)^2 \xi^2}\, d\xi} >$$

$$> \frac{1}{1+\lambda_1} \frac{e^{-b^2}}{e^{-(1+\lambda_1)^2 a^2}} = \frac{1}{1+\lambda_1} e^{a^2 \left[(1+\lambda_1)^2 - \frac{b^2}{a^2}\right]}.$$

По заданному a определим b так, чтобы

$$\alpha \equiv (1+\lambda_1)^2 - \frac{b^2}{a^2} > 0.$$

Тогда при $a \to \infty$ будем иметь

$$\frac{\omega B}{\omega(DB)} > \frac{1}{1+\lambda_1} e^{a^2 \left[(1+\lambda_1)^2 - \frac{b^2}{a^2}\right]} = \frac{1}{1+\lambda_1} e^{\alpha a^2} \to \infty.$$

2. *Если все числа* $\lambda_k \geqslant 0$ *и* $\prod\limits_1^\infty (1+\lambda_k)$ *сходится, то отношение* $\frac{\omega(DB)}{\omega B}$ *ограничено сверху.*

Действительно, в этом случае $2\lambda_k + \lambda_k^2 \geqslant 0$ и

$$G(x) = \prod_1^\infty (1+\lambda_k) e^{-\left(2\lambda_k + \lambda_k^2\right) x_k^2} \leqslant \prod_1^\infty (1+\lambda_k),$$

откуда и следует требуемое.

3. *Если все числа* $\lambda_k \geqslant 0$ *и* $\prod\limits_1^\infty (1+\lambda_k)$ *расходится, то отношение* $\frac{\omega(DB)}{\omega B}$ *не ограничено сверху.*

Пусть задано $N > 0$; найдем n так, чтобы

$$\prod_1^n (1+\lambda_k) > 2N.$$

Положим

$$B = \{x\colon\ 0 < x_1 \leqslant b_1,\ \ldots,\ 0 < x_n \leqslant b_n\},$$

где числа b_k таковы, что

$$\prod_1^n e^{-\left(1+\lambda_k\right)^2 b_k^2} > \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$DB = \{x\colon\ 0 < x_1 \leqslant (1+\lambda_1) b_1,\ \ldots,\ 0 < x_n \leqslant (1+\lambda_n) b_n$$

и

$$\frac{\omega(DB)}{\omega B} = \prod_{k=1}^n \frac{\dfrac{1+\lambda_k}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{b_k} e^{-\left(1+\lambda_k\right)^2 \xi_k^2}\, d\xi_k}{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{b_k} e^{-\xi_k^2}\, d\xi_k} \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{k=1}^n (1+\lambda_k) e^{-\left(1+\lambda_k\right)^2 b_k^2} > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (1+\lambda_k) > N,$$

что и требуется.

4. *Если при некотором* $k = 1, 2, \ldots$ *число* $\lambda_k < 0$, *то отношение* $\frac{\omega(DB)}{\omega B}$ *не ограничено сверху.*

5. *Если все числа* $\lambda_k \leqslant 0$ $(\lambda_k > -1)$ *и* $\prod_1^\infty (1+\lambda_k)$ *сходится, то отношение* $\frac{\omega B}{\omega(DB)}$ *не ограничено сверху.*

6. *Если все числа* $\lambda_k \leqslant 0$ $(\lambda_k > -1)$ *и* $\prod_1^\infty (1+\lambda_k)$ *расходится, то отношение* $\frac{\omega B}{\omega(DB)}$ *не ограничено сверху.*

Утверждения 4—6 выводятся из соответствующих утверждений 1—3 заменой D на D^{-1} и $D^{-1}B$ на B.

Отсюда следует

Теорема 2. *Пусть меры* ω *и* ω_D *эквивалентны.*

а) *Если все* $\lambda_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$ *и* $\sum_1^\infty \lambda_k < \infty$, *то для любого измеримого множества* $E \subset \Omega$ *положительной меры*

$$\frac{\omega_D E}{\omega E} \leqslant \prod_{k=1}^{\infty} (1+\lambda_k);$$

б) *если все* $\lambda_k \leqslant 0$, $\lambda_k > -1$, $k = 1, 2, \ldots$ *и* $\sum_1^\infty |\lambda_k| < \infty$, *то для любого измеримого множества* $E \subset \Omega$ *положительной* ω-*меры*

$$\frac{\omega_D E}{\omega E} \geqslant \prod_{k=1}^{\infty} (1+\lambda_k);$$

в) *в остальных случаях отношения* $\frac{\omega_D E}{\omega E}$, $\frac{\omega E}{\omega_D E}$ *не ограничены, когда* E *пробегает совокупность всех измеримых множеств положительной* ω-*меры.*

В частности, мера ω_D *удовлетворяет двустороннему условию Липшица* (11) *тогда и только тогда, когда все* λ_k *равны* 0.

6. Общие измеримые линейные преобразования в Ω.

Теорема 3. *Для того чтобы слабо измеримое линейное преобразование* A *в пространстве* Ω *было* *измеримым, необходимо и достаточно, чтобы его матрица имела вид*

$$\tilde{A} = U(I+\Lambda)V, \qquad (12)$$

где Λ — диагональная матрица Гильберта — Шмидта, $I+\Lambda$ обратима и U, V — ортогональные матрицы.

Доказательство. Достаточность условия вытекает из результатов пп. 3—5. Докажем его необходимость. Пусть дано измеримое линейное преобразование A, и пусть $\tilde{A}$ — его матрица. В силу теоремы 1 п. 2 § 8 матрица $\tilde{A}$ определяет ограниченный линейный обратимый оператор A в гильбертовом подпространстве $l_2 \subset \Omega$. По п. 11 § 7 оператор A в пространстве l_2 допускает представление

$$A = QD, \qquad (13)$$

где Q — оператор эквивалентности, а D — положительный диагональный оператор (имеющий в некотором ортонормальном базисе $f_1, f_2, \ldots$ пространства l_2 диагональную матрицу $\tilde{D}$). В исходном базисе $e_1, e_2, \ldots$ матрица оператора A имеет вид

$$\tilde{A} = U\tilde{Q}\tilde{D}U^{-1}, \qquad (14)$$

где U — некоторая ортогональная матрица. Отсюда

$$\tilde{Q}^{-1}U^{-1}\tilde{A}U = D.$$

По доказанному в пп. 3—5 матрица слева определяет измеримое линейное преобразование. Поэтому и D определяет измеримое линейное преобразование. По теореме 2 D имеет вид $I+\Lambda$, где Λ — диагональная матрица Гильберта — Шмидта. Таким образом, оператор A представляется в форме произведения двух операторов эквивалентности и по п. 10 § 7 сам является оператором эквивалентности:

$$A = W(I+S),$$

где S — некоторый симметричный оператор Гильберта — Шмидта, а W — ортогональный оператор. Матрицу оператора S в исходном базисе можно записать в форме

$$\tilde{S} = V^{-1}\Lambda V,$$

где Λ — диагональная матрица Гильберта — Шмидта, а V — некоторая ортогональная матрица. Отсюда

$$\tilde{A} = WV^{-1}(I+\Lambda)V = U(I+\Lambda)V,$$

где U и V — ортогональные матрицы, и теорема доказана.

Естественно возникает вопрос: как по заданной матрице A узнать, представима ли она в форме (12)? Ответом служит

Теорема 4. *Матрица A представима в форме $U(I+\Lambda)V$ (где U, V — ортогональные матрицы, Λ — диагональная матрица Гильберта—Шмидта, а $I+\Lambda$ — обратимая) тогда и только тогда, когда A обратима и симметричная матрица*

$$S = A^*A - I$$

есть матрица Гильберта — Шмидта. При этом

$$I + \Lambda = (I+M)^{1/2},$$

где M — каноническая диагональная форма матрицы S, а V — ортогональная матрица, приводящая S к канонической форме M.

Доказательство. Если матрица A имеет указанный вид, то

$$A^*A = V^*(I+\Lambda)^2 V = V^*(I+M)V = I + V^*MV,$$

где M — диагональная матрица с диагональными элементами $\mu_k = 2\lambda_k + \lambda_k^2$, которые вместе с числами λ_k образуют квадратично суммируемую последовательность; следовательно, $S = V^*MS$ есть матрица Гильберта — Шмидта. Обратно, если матрица A обратима и $A^*A - I = S$ есть матрица Гильберта — Шмидта, то оператор

$$A = U(A^*A)^{1/2} = U(I+S)^{1/2}$$

есть оператор эквивалентности и его матрица в любом базисе по доказанному приводится к виду (12), что и требуется.

7. Производная Радона — Никодима $\frac{d\omega_A}{d\omega}$. Дадим выражение производной Радона — Никодима меры ω_A относительно меры ω, когда A — преобразование эквивалентности.

Пусть

$$A = U(I+\Lambda)V,$$

где U, V — ортогональные матрицы, и Λ — диагональная матрица Гильберта — Шмидта.

Мы имеем

$$\frac{d\omega_A}{d\omega} = \frac{d\omega_{U(I+\Lambda)V}}{d\omega_{(I+\Lambda)V}} \frac{d\omega_{(I+\Lambda)V}}{d\omega_V} \frac{d\omega_V}{d\omega} = \frac{d\omega_{(I+\Lambda)V}}{d\omega_V}$$

в силу инвариантности меры ω относительно ортогональных преобразований. Пусть, далее, λ_1, λ_2, ... — элементы на диагонали матрицы Λ. Так как по формуле (9) п. 3

$$\frac{d\omega_{I+\Lambda}}{d\omega} = \prod_1^\infty \left[(1+\lambda_k) e^{-\left(2\lambda_k+\lambda_k^2\right)x_k^2}\right] = \prod_1^\infty \left[\sqrt{1+\mu_k}\, e^{-\mu_k x_k^2}\right]^2,$$

мы получаем следующую теорему:

Теорема 5. *Пусть A — измеримое линейное преобразование в пространстве Ω, A — его матрица. Обозначим через $V = \|v_{km}\|$ ортогональную матрицу, приводящую матрицу $S = A^*A - I$ к диагональному виду, т. е.*

$$V^{-1}SV = M, \tag{15}$$

где M — диагональная матрица с элементами по диагонали μ_1, μ_2, ... Тогда

$$\frac{d\omega_A}{d\omega} = \prod_{k=1}^\infty \left[\sqrt{1+\mu_k}\, e^{-\mu_k\left(\sum_{m=1}^\infty v_{km}x_m\right)^2}\right]. \tag{16}$$

Если в выражении (15) M является ядерной матрицей, т. е. $\sum_1^\infty |\mu_k| < \infty$, то, пользуясь формулой (10), вместо (15) можно написать

$$\frac{d\omega_A}{d\omega} = \left[\prod_1^\infty \sqrt{1+\mu_k}\right] e^{-\sum_{k=1}^\infty \mu_k\left(\sum_{m=1}^\infty v_{km}x_m\right)^2}$$

или

$$\frac{d\omega_A}{d\omega} = \prod_1^\infty \sqrt{1+\mu_k}\, e^{-M(x,x)},$$

где $M(x, x)$ — квадратичная форма, построенная по матрице M.

Теорема 2 п. 6 обращается в следующую теорему:

Теорема 6. *При обозначениях теоремы* 4

а) *если матрица* M *ядерна и положительна, то для любого измеримого множества* $E \subset \Omega$ *положительной меры*

$$\frac{\omega_A E}{\omega E} \leqslant \prod_{1}^{\infty} \sqrt{1+\mu_k};$$

б) *если матрица* M *ядерна и неположительна (разумеется, по-прежнему* $\mu_k > -1$), *то для любого измеримого множества* E *положительной меры*

$$\frac{\omega_A E}{\omega E} \geqslant \prod_{1}^{\infty} \sqrt{1+\mu_k};$$

в) *в остальных случаях отношения* $\frac{\omega_A E}{\omega A}$, $\frac{\omega E}{\omega_A E}$ *не ограничены, когда* E *пробегает совокупность всех измеримых множеств положительной меры.*

Следствие. *Для того чтобы измеримое линейное преобразование* A *в пространстве* Ω *сохраняло меру* ω, *необходимо и достаточно, чтобы* A *было ортогональным преобразованием.*

Доказательство. а) Достаточность следует из теоремы 1 § 9.

б) Необходимость. Если преобразование A сохраняет меру ω, то выполнены условия Липшица сверху и снизу для мер ω_A и ω. По теореме 2 мы имеем $\Lambda = 0$, т. е. $A^*A = I$. Так как A имеет ограниченную обратную A^{-1}, то A есть ортогональная матрица, что и утверждалось.

§ 11. ИЗМЕРИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В $\hat{L}_2(0, \pi)$ И $C_0(0, \pi)$

В первых пунктах этого параграфа мы приведем некоторые факты из теории интегральных операторов в пространстве L_2, частично хорошо известные.

1. Аналитическое представление ортогонального оператора в $L_2(a, b)$. В соответствии с общим определением § 7, п. 3 линейный оператор U в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$ называется *ортогональным*, если он обратим и не меняет скалярного произведения двух любых векторов $x(t)$, $y(t)$ из $L_2(a, b)$. Спрашивается, каков аналитический вид ортогонального оператора?

Можно сразу заметить, что интегральный оператор Фредгольма

$$Ax(t) = \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, ds \tag{1}$$

с квадратично интегрируемым ядром $K(s, t)$

$$\int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, ds\, dt < \infty \tag{2}$$

не может быть ортогональным, так как он вполне непрерывен и, следовательно, не обратим. Если условие (2) заменить более слабым условием

$$\int_a^b K^2(s, t)\, ds < \infty \quad \text{почти при каждом} \quad t \in [a, b] \tag{3}$$

(необходимым для обеспечения существования оператора (1)), то оператор (1) все равно не может быть ортогональным. Действительно, если бы оператор (1) был ортогональным, то при каких-то функциях $u_1(t)$, $u_2(t)$, ... мы имели бы (полагая для определенности $a = 0$, $b = \pi$)

$$Au_n(t) = \int_0^\pi K(s, t)\, u_n(s)\, ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt \tag{4}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

При этом функции $u_n(t)$ вместе с функциями $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt$ образовывали бы ортогональную нормированную систему. Фиксируя значение t, при котором выполнено (3), мы получили бы, что числа $Au_n(t)$, которые, очевидно, являются коэффициентами Фурье функции $K(s, t)$ (как функции от s), стремятся к 0 при $n \to \infty$; но ни при каком t, отличном от 0 и π, правая часть в (4) не стремится к 0. Таким образом, оператор (1) с условием (3) также не может быть ортогональным.

Аналитическая форма общего ортогонального оператора в $L_2(a, b)$ дается следующей теоремой:

Теорема 1 (Бохнера). *Всякому ортогональному преобразованию U в пространстве $L_2(a, b)$ отвечают два ядра $K(s, t)$ и $L(s, t)$, квадратично интегрируемые по t,* такие, что

$$\int_a^b K^2(s, t)\,dt = \int_a^b L^2(s, t)\,dt = s - a, \tag{5}$$

$$\int_a^t K(s, \tau)\,d\tau \equiv \int_a^s L(t, \sigma)\,d\sigma; \tag{6}$$

при этом для любой функции $x(t) \in L_2(a, b)$

$$\left.\begin{aligned} Ux(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b L(t, \sigma)\,x(\sigma)\,d\sigma, \\ U^{-1}x(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b K(t, \tau)\,x(\tau)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Обратно, два ядра $K(s, t)$ и $L(s, t)$, удовлетворяющих условиям (5) *и* (6), *определяют по формулам* (7) *ортогональное преобразование в пространстве $L_2(a, b)$.*

Доказательство*). Пусть U — ортогональное преобразование в $L_2(a, b)$ и $e_s(t)$ — функция, равная 1 при $a \leqslant t \leqslant s$ и 0 при $s \leqslant t \leqslant b$. Положим

$$K(s, t) = Ue_s(t), \quad L(s, t) = U^{-1}e_s(t).$$

Тогда, записывая в обычной интегральной форме равенства

$$\|Ue_s\| = \|U^{-1}e_s\| = \|e_s\| \quad \text{и} \quad (Ue_s, e_r) = (e_s, U^{-1}e_r),$$

приходим к выполнению условий (5), (6). Далее, умножая равенство

$$Ue_s(t) = K(s, t)$$

на $x(t)$ и интегрируя, находим

$$(Ue_s, x) = (e_s, U^{-1}x) = \int_0^s U^{-1}x(\tau)\,d\tau = \int_a^b K(s, \tau)\,x(\tau)\,d\tau,$$

---

*) По книге: **Ф. Рисс и Секефальви-Надь**, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.

откуда дифференцированием получается вторая из формул (7) аналогично, используя равенство

$$U^{-1}e_s(t) = L(s, t),$$

получаем первую из этих формул.

Пусть, обратно, даны ядра K и L, удовлетворяющие условиям (5) и (6); покажем, что операторы U и U^{-1}, определяемые формулами (7), являются взаимно обратными ортогональными операторами в пространстве $L_2(a, b)$. Действительно, полагая в (7) $x(t) = e_r(t)$ и используя (6), получаем

$$Ue_r(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_a^r L(t, \sigma)\,d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int_a^t K(r, \tau)\,d\tau = K(r, t),$$

$$U^{-1}e_r(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_a^r K(t, \tau)\,d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int_a^t L(r, \sigma)\,d\sigma = L(r, t).$$

Поэтому с учетом (5) имеем

$$\|Ue_r\| = \|e_r\| = \|U^{-1}e_r\|.$$

Так как функции $e_r(t)$ порождают все пространство $L_2(a, b)$, то и для любого $x \in L_2(a, b)$ также

$$\|Ux\| = \|x\| = \|U^{-1}x\|,$$

что и требуется.

Пример. Пусть $a = 0$, $b = \pi$,

$$K(s, t) \equiv L(s, t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t < s, \\ 0, & \text{при } t > s. \end{cases}$$

Очевидно, условия (5), (6) здесь выполнены. Мы имеем

$$Ux(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\pi L(t, \sigma)\,x(\sigma)\,d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t x(\sigma)\,d\sigma = x(t),$$

так что оператор U является единичным оператором. В данном случае ядра $K(s, t)$ и $L(s, t)$ разрывны. Для произвольного ортогонального преобразования ядра $K(s, t)$ и $L(s, t)$ во всяком случае не могут быть абсолютно непрерывными по s (с квадратично интегрируемой производной); если бы это было иначе, мы могли бы перенести в формулах (7) знак $\frac{\partial}{\partial t}$ за знак интеграла и получить, например, для $U^{-1}x(t)$ формулу

$$U^{-1}x(t) = \int_a^b \frac{\partial K(t, \tau)}{\partial t}\,x(t)\,d\tau.$$

Таким образом, ортогональный оператор U был бы представлен в форме обычного интегрального оператора, что, как мы видели, невозможно.

2. Мультипликативное представление определителя Фредгольма для ядерного оператора. Рассмотрим интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, ds$$

с симметричным квадратично интегрируемым ядром (по обоим переменным) $K(s, t)$. Пусть $e_1(t), \ldots, e_n(t), \ldots$ — некоторая полная ортонормальная система в пространстве $L_2(a, b)$. Мы имеем в смысле сходимости в среднем

$$K(s, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} e_p(s)\, e_q(t), \tag{8}$$

где $k_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, e_p(s)\, e_q(t)\, ds\, dt = (Ae_p, e_q)$ суть элементы матрицы оператора A в базисе $e_1, e_2, \ldots$ Предположим, что оператор A — ядерный оператор. В этом случае ряд $\sum_p |k_{pp}|$ сходится, а ряд $\sum_{p=1}^{\infty} k_{pp} e_p^2(t)$ в силу теоремы Беппо Леви сходится почти всюду и представляет собой суммируемую функцию. Мы положим, по определению,

$$K(t, t) = \sum_{p=1}^{\infty} k_{pp} e_p^2(t),$$

так что имеет смысл выражение

$$K_1 \equiv \int_a^b K(t, t)\, dt = \sum_{p=1}^{\infty} k_{pp}.$$

Придадим теперь смысл выражению

$$K_n = \int_a^b \ldots \int_a^b K(t_1, t_{i_1})\, K(t_2, t_{i_2}) \ldots$$
$$\ldots K(t_n, t_{i_n})\, dt_1, \ldots, dt_n, \tag{9}$$

где $i_1, \ldots, i_n$ — некоторая перестановка номеров $1, \ldots, n$. Можно принять без ограничения общности, что перестановка эта неприводимая, и тогда интеграл (9) можно записать в форме

$$K_n = \int_a^b \ldots \int_a^b K(t_1, t_2) K(t_2, t_3) \ldots K(t_n, t_1)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Положим

$$K_2(t, s) = \int_a^b K(t, t_1) K(t_1, s)\, dt_1,$$

$$K_3(t, s) = \int_a^b K_2(t, t_2) K(t_2, s)\, dt_2,$$

ядро $K_n(t, s)$ отвечает оператору A^m и квадратично интегрируемо вместе с ядром $K(t, s)$. Выражение (9) можно теперь истолковать как

$$\int_a^b \int_a^b K_{n-1}(t, s) K(s, t)\, ds\, dt; \tag{10}$$

эта последняя величина существует как скалярное произведение двух квадратично интегрируемых функций.

Покажем далее, что справедливо равенство

$$\int_a^b \ldots \int_a^b K\left(t_1, t_{i_1}\right) K\left(t_2, t_{i_2}\right) \ldots K\left(t_n, t_{i_n}\right) dt_1 \ldots dt_n =$$
$$= \sum_{p_1, \ldots, p_n = 1}^{\infty} k_{p_1 p_{i_1}} \ldots k_{p_n p_{i_n}}, \tag{11}$$

получающееся формальной подстановкой в (9) рядов (8) и последующим почленным интегрированием. При $n = 1$ равенство это уже установлено. Для $n > 1$ мы заметим, что ядро $K_{n-1}(t, s)$ имеет коэффициенты Фурье

$$k_{pq}^{n-1} = \sum_{q_1, \ldots, q_{n-1} = 1}^{\infty} k_{pq_1} k_{q_1 q_2} \ldots k_{q_{n-1} q},$$

поэтому скалярное произведение (10) равно

$$\sum_{p,\, q_1, \ldots, q_{n-1},\, q=1}^{\infty} k_{pq_1} k_{q_1 q_2} \ldots k_{q_{n-1} q} k_{pq},$$

что и требуется.

Определителем Фредгольма ядра $K(s, t)$ называют функцию

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) \ldots K(t_1, t_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(t_n, t_1) \ldots K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n,$$

причем интегралы от членов определителей понимаются в указанном выше смысле. Переходя к выражениям (11), мы можем записать функцию $D(\lambda)$ в форме *)

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \sum_{p_1 \ldots p_n = 1}^{\infty} \begin{vmatrix} k_{p_1 p_1} & \ldots & k_{p_1 p_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{p_n p_1} & \ldots & k_{p_n p_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \sum_{p_1 < p_2 < \ldots < p_n} \begin{vmatrix} k_{p_1 p_1} & \ldots & k_{p_1 p_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{p_n p_1} & \ldots & k_{p_n p_n} \end{vmatrix}.$$

Предположим, что базис $e_1(t), \ldots, e_n(t), \ldots$ состоит из собственных функций ядра $K(s, t)$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — соответствующие собственные значения. Тогда мы имеем

$$k_{pq} = \int_a^b K(s, t)\, e_p(s)\, e_q(t)\, ds\, dt = \begin{cases} \lambda_p & \text{при} \quad p = q, \\ 0 & \text{при} \quad p \neq q. \end{cases}$$

*) Между прочим полученное выражение можно истолковать как разложение по степеням λ бесконечного определителя

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & -\lambda k_{13} & \ldots \\ -\lambda k_{21} & 1 - \lambda k_{22} & -\lambda k_{23} & \ldots \\ -\lambda k_{31} & -\lambda k_{32} & 1 - \lambda k_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Следовательно *),

$$D(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\sum_{p_1<p_2<\ldots<p_n}\begin{vmatrix}\lambda_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{p_n}\end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\sum_{p_1<\ldots<p_n}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\ldots\lambda_{p_n}=\prod_{p=1}^{\infty}(1-\lambda\lambda_p). \qquad (12)$$

3. Резольвента интегрального оператора. В этом пункте для простоты будем предполагать, что ядро $K(s, t)$ непрерывно. Рассмотрим функцию

$$D(s, t, \lambda)=K(s, t)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix}K(s, t) & K(s, t_1) & \ldots & K(s, t_n)\\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) & \ldots & K(t_1, t_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ K(t_n, t) & K(t_n, t_1) & \ldots & K(t_n, t_n)\end{vmatrix}dt_1\ldots dt_n.$$

Функция $D(s, t, \lambda)$, как и $D(\lambda)$, — целая функция от λ и притом непрерывная функция от s и t. Мероморфная функция

$$R(s, t, \lambda)=\frac{D(s, t, \lambda)}{D(\lambda)}$$

называется *резольвентой оператора* A (или ядра K). Согласно классической теории Фредгольма **) функция

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_0^{\pi}R(\sigma, t, \lambda)f(\sigma)\,d\sigma \qquad (13)$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_0^{\pi}K(s, t)\varphi(s)\,ds \qquad (14)$$

---

*) Без предположений ядерности мультипликативное представление определителя Фредгольма требует дополнительных экспоненциальных множителей, обеспечивающих сходимость произведения. См. Э. Гурса, Курс математического анализа, т. III, ч. 2, ГТТИ, 1934, стр. 96.

**) См., например, Э. Гурса, там же, гл. 2.

при всех не особых значениях λ (не обращающих в нуль функцию $D(\lambda)$). Резольвента $R(s, t, \lambda)$ сама удовлетворяет интегральному уравнению

$$R(s, t, \lambda) = K(s, t) + \lambda \int_0^\pi R(\sigma, t, \lambda) K(s, \sigma)\, d\sigma. \quad (15)$$

Для ядра $K(s, t)$ специального вида, именно удовлетворяющего условиям

$$K(t, 0) = K(t, s) \equiv K(t, t) \equiv K(u, t) \equiv K(0, t) \quad (16)$$

при $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$ и $a \leqslant u \leqslant t$, можно написать еще одно важное соотношение между функциями $D(\lambda)$ и $D(s, t, \lambda)$:

$$\int_a^b D(s, 0, \lambda)\, ds = \frac{1 - D(\lambda)}{\lambda} = \int_a^b D(0, t, \lambda)\, dt. \quad (17)$$

В самом деле, для числителя резольвенты мы имеем

$$D(s, 0, \lambda) = K(s, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(s, 0) & K(s, t_1) & \ldots \\ K(t_1, 0) & K(t_1, t_1) & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K(t_n, 0) & K(t_n, t_1) & \ldots \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= K(s, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \int_{t_n=a}^{b} \int_{t_{n-1}=a}^{t_n} \cdots \int_{t_1=a}^{t_2} \begin{vmatrix} K(s, 0) & K(s, t_1) & \ldots \\ K(t_1, 0) & K(t_1, t_1) & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K(t_n, 0) & K(t_n, t_1) & \ldots \end{vmatrix} \times dt_1 \ldots dt_n,$$

где в последнем интеграле предполагается, что $a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant b$. Далее,

$$\int_a^b D(s, 0, \lambda)\, ds = \int_a^b K(s, 0,)\, ds + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \int_{s=a}^{b} \int_{t_n=a}^{b} \int_{t_1=a}^{t_2} \begin{vmatrix} K(s, 0) & K(s, t_1) & \ldots \\ K(t_1, 0) & K(t_1, t_1) & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K(t_n, 0) & K(t_n, t_1) & \ldots \end{vmatrix} dt_1, \ldots dt_n\, ds =$$

$$= \int_a^b K(s, s)\, ds +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda)^n \int_{s=a}^{t_1} \int_{t_n=a}^{b} \ldots \int_{t_1=a}^{t_2} \begin{vmatrix} K(s, s) & K(s, t_1) & \ldots \\ K(t_1, s) & K(t_1, t_1) & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K(t_n, s) & K(t_n, t_1) & \ldots \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n\, ds,$$

поскольку для значений s в промежутке $t_1 \leqslant s \leqslant b$ подынтегральный определитель (с учетом (16)) обращается в нуль.

Сравнивая полученное разложение с разложением

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b K(s, s)\, ds + \ldots +$$

$$+ \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \ldots \end{vmatrix} dt_1\, dt_n + \ldots,$$

сразу видим, что

$$\frac{1 - D(\lambda)}{\lambda} = \int_a^b D(s, 0, \lambda)\, ds.$$

Второе из равенств (17) получается аналогично.

4. Слабо измеримые и измеримые линейные преобразования в пространстве $\widehat{L}_2(0, \pi)$. Результаты §§ 8—10 полностью имеют место для пространства $\widehat{L}_2(0, \pi)$, дающего изоморфное (с точностью до множества меры 0) представление пространства Ω. Общий вид слабо измеримого линейного преобразования A в пространстве $\widehat{L}_2(0, \pi)$ в базисе из функций $g_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt$ задается формулами

$$[Az(t)]_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k, \tag{18}$$

где матрица $\| a_{kn} \|$ есть матрица с квадрируемыми строками. Учитывая формулы, связывающие коэффициенты

Фурье вектора $z = z(t)$ в $\hat{L}_2(0, \pi)$ и координаты соответствующего вектора в Ω (§ 4, (1)), мы можем переписать формулу (18) в виде

$$n(Az(t))_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} k z_k,$$

где $(Az(t))_n = \left(Az(t), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt\right)$, или

$$(Az(t))_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} a_{nk} z_k,$$

или же, наконец,

$$Az(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} a_{nk} z_k g_n(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} a_{nk} (z, g_k) g_a(t). \tag{19}$$

Введем формально ядро

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{n} g_k(s) g_n(t). \tag{20}$$

Допустим, что функция $K(s, t)$ почти при каждом фиксированном t квадратично интегрируема по s. Тогда выражение (19) можно записать в форме интеграла Пэли — Винера — Зигмунда

$$Az(t) = \int_0^{\pi} K(s, t)\, dz(s). \tag{21}$$

Мы покажем, что и, действительно, *измеримое* линейное преобразование в пространстве $\hat{L}_2(0, \pi)$ записывается в форме (20) с квадратично интегрируемой по s функцией $K(s, t)$.

Вместо того чтобы обосновывать формальный путь (18)—(19)—(20)—(21), мы обратим внимание на то, что при фиксированном t функционал $Az(t)=\sum_{1}^{\infty}(Az, g_n)g_n(t)$ определен на множестве полной меры, измерим вместе с функционалами (Az, g_n) и, следовательно, допускает представление (21) согласно теореме 3 § 6.

Аналогично и измеримые преобразования в пространстве $C_0(0, \pi)$ допускают представление (21) с заменой $z(t)$ на $\varphi(t)$.

Но, вообще говоря, далеко не каждое ядро $K(s, t)$ в формуле (21) действительно дает измеримое линейное преобразование пространства $\widehat{L}_2(0, \pi)$ или $C_0(0, \pi)$. Для этого, в частности, нужно, чтобы результат преобразования (21) снова лежал в пространстве $\widehat{L}_2(0, \pi)$ (или $C_0(0, \pi)$). Отсюда видно, что условия на ядро $K(s, t)$ будут различными для пространства $\widehat{L}_2(0, \pi)$ и для пространства $C_0(0, \pi)$.

Заметим, что в случае измеримого линейного преобразования A мы знаем, что если $z(t)\in\widehat{L}_2'(L_2')$, то $Az(t)\in \in\widehat{L}_2'(L_2')$; отсюда для функций $z(t)\in\widehat{L}_2'(L_2')$ формула (18) обращается в формулу

$$Az(t)=\int_0^\pi K(s, t)\,z'(s)\,ds. \tag{22}$$

5. Ортогональное преобразование. Теперь пусть формула (21) с заменой $z(t)\in\widehat{L}_2$ на $\varphi(t)\in C_0$ определяет ортогональное преобразование $A=U$ в $C_0(0, \pi)$.

При сужении ортогонального преобразования U на гильбертово подпространство $L_2'\subset C_0(0, \pi)$ получается ортогональное преобразование U от производных от функций из этого подпространства, т. е. от функций $\varphi'(t)\in C_0(0, \pi)$.

С другой стороны, по теореме Бохнера (п. 1) всякому ортогональному преобразованию U в гильбертовом пространстве $L_2(0, \pi)$ соответствует однозначным образом функция $L(s, t)$, квадратично интегрируемая по t, такая, что если положить $y(t)=Ux(t)$, $x(t)\in L_2(0, \pi)$, то

$$\int_0^t y(\tau)\,d\tau=\int_0^\pi L(t, \sigma)\,x(\sigma)\,d\sigma. \tag{23}$$

В случае пространства C_0 в формуле (23) вместо $x(t)$ и $y(t)$ фигурирует $\varphi'(t)$ и $y'(t)$; отсюда имеем

$$y(t) = \int_0^t y'(\tau)\,d\tau = \int_0^\pi L(t, \sigma)\,\varphi'(\sigma)\,d\sigma. \tag{24}$$

Сравнивая формулы (22) и (24), которые справедливы для всех $\varphi(t) \in L_2'$, т. е. для всех $\varphi'(t) \in L_2(0, \pi)$, мы видим, что $K(s, t) \equiv L(s, t)$ почти всюду на квадрате $0 \leqslant s \leqslant \pi$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Отсюда следует

Теорема 2. *Всякое измеримое линейное преобразование в пространстве $C_0(0, \pi)$, сохраняющее винеровскую меру, задается формулой*

$$y(t) \equiv U\varphi(t) = \int_0^\pi U(s, t)\,d\varphi(s), \tag{25}$$

где $U(s, t)$ — функция Бохнера для $L_2(0, \pi)$, т. е. функция, определяющая ортогональное преобразование в гильбертовом пространстве $L_2(0, \pi)$ по формуле (23).

Обратно, всякая функция Бохнера $U(s, t)$ для $L_2(0, \pi)$ определяет по формуле (25) *измеримое линейное преобразование в пространстве $C_0(0, \pi)$, сохраняющее винеровскую меру.*

В пространстве $\widehat{L}_2(0, \pi)$ мы имеем аналогично

$$\int_0^t y'(\tau)\,d\tau = \int_0^\pi U(s, t)\,z'(s)\,ds, \tag{26}$$

но левая часть теперь уже не $y(t)$, а $y(t) - y(0)$. Для определения $y(0)$ мы можем написать условие

$$0 = \int_0^\pi y(t)\,dt = \pi y(0) + \int_0^\pi \int_0^t y'(\tau)\,d\tau\,dt,$$

откуда, учитывая (26), находим

$$y(0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^t y'(\tau)\,d\tau\,dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi U(s, t)\,z'(s)\,ds\,dt.$$

В итоге

$$y(t)=y(0)+\int_0^\pi U(s, t)\,z'(s)\,ds=$$

$$=\int_0^\pi\left[U(s, t)-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(s, \tau)\,d\tau\right]z'(s)\,ds,$$

и ядро $K(s, t)$ в формуле (26) оказывается в форме

$$K(s, t)=U(s, t)-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(s, \tau)\,d\tau,$$

где $U(s, t)$ — функция Бохнера.

6. Преобразование Гильберта — Шмидта. В п. 7 мы будем рассматривать в пространствах $\widehat{L}_2(0, \pi)$ и $C_0(0, \pi)$ околоединичное линейное преобразование $B=I+S$, где S — преобразование Гильберта — Шмидта. Сейчас мы рассмотрим только преобразование S.

Преобразование Гильберта — Шмидта в любом базисе записывается матрицей

$$S=\|s_{kn}\|,$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_{kn}^2<\infty$.

В этом случае ядро (20)

$$K(s, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{kn}}{n}\,g_k(s)\,g_n(t) \tag{27}$$

квадратично интегрируемо в области $0\leqslant s\leqslant\pi$, $0\leqslant t\leqslant\pi$ и, следовательно, квадратично интегрируемо по s почти при каждом t; более того, оно обладает квадратично интегрируемой производной по t

$$k(s, t)=\frac{\partial}{\partial t}K(s, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}s_{kn}g_k(s)\,g_n(t).$$

Как мы помним из § 9, п. 2, преобразование Гильберта — Шмидта переводит почти все Ω в гильбертово пространство H, которое в $C_0(0, \pi)$ и $\hat{L}_2(0, \pi)$ соответствует подпространству $L_2'(0, \pi)(\hat{L}_2(0, \pi))$ функций с квадратично интегрируемой производной.

Мы получаем теорему:

Теорема 3. *Пусть функция $K(s, t)$ определена на квадрате $0 \leqslant s \leqslant \pi$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$ и удовлетворяет следующему условию:*

$$K(s, t) = \int_0^t k(s, \tau)\, d\tau,$$

где

$$\int_0^\pi \int_0^\pi k^2(s, t)\, ds\, dt < \infty.$$

Тогда интеграл

$$y(t) = \int_0^\pi K(s, t)\, d\varphi(s) \tag{28}$$

представляет общее преобразование Гильберта — Шмидта на $C_0(0, \pi)$, оно отображает почти все функции $\varphi(t) \in C_0(0, \pi)$ в подпространство $L_2' \subset L_2(0, \pi)$.

Соответствующее измеримое линейное преобразование S в пространстве Ω задается матрицей $\|s_{mn}\|$, где

$$s_{mn} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi k(s, t) \sin ms \sin nt\, ds\, dt.$$

Вместо (28) мы можем еще написать равенство

$$y'(t) = \int_0^\pi k(s, t)\, d\varphi(s), \tag{29}$$

которое получается из (28) дифференцированием по t.

7. Околоединичное преобразование. Теперь мы можем рассмотреть околоединичное преобразование $I + S$, где S — преобразование Гильберта — Шмидта.

Для соответствующего преобразования в $C_0(0, \pi)$ мы получаем формулу

$$y(t) = \varphi(t) + \int_0^\pi K(s, t)\, d\varphi(s), \tag{30}$$

где $K(s, t)$ — ядро, построенное по формуле (28).

Если $\varphi(t) \in L_2'$, то интеграл справа превращается в обычный интеграл Лебега, а, дифференцируя по t, находим

$$y'(t) = \varphi'(t) + \int_0^\pi k(s, t)\, \varphi'(s)\, ds. \tag{31}$$

Это линейное преобразование $L_2(0, \pi)$ в $L_2(0, \pi)$, являющееся следствием преобразования (30). Обратимость преобразования (30) в $C_0(0, \pi)$ влечет обратимость преобразования (31) в $L_2(0, \pi)$, и обратно. Но *обратимость преобразования* (31) *означает, что интегральный оператор*

$$\int_0^\pi k(s, t)\, u(s)\, ds, \quad u(t) \in L_2(0, \pi)$$

не имеет собственного значения -1.

Отсюда следует

Теорема 4. *Пусть функция* $K(s, t)$ *определена на квадрате* $0 \leqslant {s \atop t} \leqslant \pi$ *и*

а) $$K(s, t) = \int_0^t k(s, \tau)\, d\tau,$$

где $\int_0^\pi \int_0^\pi k^2(s, t)\, ds\, dt < \infty$;

б) *интегральный оператор в* $L_2(0, \pi)$

$$\int_0^\pi k(s, t)\, u(s)\, ds$$

не имеет собственного значения -1.

Тогда формула

$$y(t) = \varphi(t) + \int_0^\pi K(s, t)\, d\varphi(s)$$

определяет общее околоединичное линейное преобразование в пространстве $C_0(0, \pi)$.

8. Общее измеримое преобразование. Переходим к рассмотрению общего измеримого преобразования в пространстве $C_0(0, \pi)$. На основании общей теории § 8 и результатов пп. 4—7 мы имеем следующую теорему:

Теорема 5. *Общее измеримое линейное преобразование A в пространстве $C_0(0, \pi)$ имеет вид*

$$A\colon\ \varphi(t) \to y(t) \equiv A\varphi(t) \equiv$$
$$\equiv \int_0^\pi U(s, t)\, d\left[\varphi(s) + \int_0^\pi K(s, \tau)\, d\varphi(\tau)\right], \quad (32)$$

где $U(s, t)$ — функция Бохнера для $L_2(0, \pi)$, и функция $K(s, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 4 п. 7.

Обратно, всякая пара функций Бохнера $U(s, t)$ и функция $K(s, t)$ с условиями а) *и* б) *определяют по формуле* (32) *измеримое линейное преобразование в пространстве $C_0(0, \pi)$.*

При этом мера w_A равна мере w_K, где K есть преобразование вида

$$\varphi(t) \to y(t) \equiv K\varphi(t) \equiv \varphi(t) + \int_0^\pi K(s, t)\, d\varphi(s).$$

Для пространства $\widehat{L}_2(0, \pi)$ в формулировку этой теоремы следует внести такое же изменение, какое мы внесли в формулировку теоремы 2 (п. 5), т. е. ядро $U(s, t)$ заменить на

$$U(s, t) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi U(s, t)\, d\tau.$$

9. Производная Радона — Никодима. Теперь найдем производную Радона — Никодима меры w_A относительно меры w. Заметим, что в нашем случае

$$A^*A = I + K + K^* + K^*K,$$

т. е. в качестве матрицы M в теореме 4 § 10 мы должны взять матрицу $M = K + K^* + K^*K$, которая соответствует функции

$$m(s, t) = k(s, t) + k(t, s) + \int_0^\pi k(u, t)\, k(u, s)\, du$$

из $L_2\left(0 \leqslant {s \atop t} \leqslant \pi\right)$. Пусть функция $m(s, t)$ обладает полной ортонормированной в $L_2(0, \pi)$ системой собственных функций $m_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, так что

$$\int_0^\pi m(s, t)\, m_k(s)\, ds = \mu_k m_k(t),$$

где

$$\sum_1^\infty \mu_k^2 < \infty. \tag{33}$$

Теорема 5 § 10 (п. 7) превращается в следующую теорему для пространства Винера:

Теорема 6. *При условиях теоремы* 5 *и в ее обозначениях*

$$\frac{dw_A}{dw} = \prod_{k=1}^\infty \sqrt{1 + \mu_k}\, e^{-\mu_k \left(\int_0^\pi m_k(t)\, d\varphi(t)\right)^2}. \tag{34}$$

Подчеркнем, что правая часть сходится на множестве полной w-меры в пространстве $C_0(0, \pi)$.

Наложим следующее дополнительное условие на функцию $k(s, t)$: пусть формула

$$v(t) = \int_0^\pi k(s, t)\, u(s)\, ds$$

определяет ядерный оператор в пространстве $L_2(0, \pi)$.

Тогда вместо (33) система собственных значений функции $m(s, t)$ удовлетворяет более сильному условию $\sum_1^\infty |\mu_k| < \infty$. В этом случае

$$\frac{dw_A}{dw} = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1+\mu_k}\, e^{-\sum_1^\infty \mu_k \left(\int_0^\pi m_k(t)\, d\varphi(t)\right)^2} =$$

$$= |D[k]| \exp\left\{-\int_0^\pi \int_0^\pi \left[k(s, t) + k(t, s) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^\pi k(u, t)\, k(u, s)\, du\right] d\varphi(t)\, d\varphi(s),\right.$$

где $D[k]$ означает определитель Фредгольма функции $k(s, t)$.

10. Линейный интегральный оператор как измеримый оператор в пространстве Винера. Рассмотрим ядро $a(s, t)$, квадратично нитегрируемое по координате s почти при каждом t:

$$\int_0^\pi a^2(s, t)\, ds < \infty. \tag{35}$$

Каждой функции $z(t) \in \widehat{L}_2(0, \pi)$ можно поставить в соответствие функцию

$$y(t) \equiv Az(t) \equiv \int_0^\pi a(s, t)\, z(s)\, ds, \tag{36}$$

определенную почти при всех t. Поставим вопрос, при каких ядрах $a(s, t)$ формула (36) определяет линейный измеримый оператор в $\widehat{L}_2(0, \pi)$ с мерой Винера.

Прежде всего можно принять, что ядро $a(s, t)$ имеет среднее по s, равное нулю. Поэтому для каждого t, при котором выполнено (35), выражение (36) есть измеримый линейный функционал в $\widehat{L}_2$ и по п. 3 § 6 представляется в виде

$$Az(t) = \int_0^\pi K(s, t)\, dz(s), \tag{37}$$

где

$$K(s, t) = -\int_0^s a(\sigma, t)\, d\sigma = \int_s^\pi a(\sigma, t)\, d\sigma \tag{38}$$

почти при каждом t есть абсолютно непрерывная функция от s с квадратично интегрируемой производной. Обратно, если оператор A задан формулой (37) с ядром (38), то согласно одному из результатов § 4, п. 4 имеем

$$Az(t) = \int_0^\pi a(s, t)\, z(s)\, ds.$$

Мы знаем, при каких условиях на $K(s, t)$ преобразование (37) является линейным измеримым преобразованием в $\widehat{L}_2$; отсюда получаются соответствующие условия и на $a(s, t)$.

Пусть, например, оператор (36) является оператором Гильберта — Шмидта. Согласно теореме 3 мы должны иметь

$$K(s, t) = -\int_0^s a(\sigma, t)\, d\sigma = \int_0^t k(s, \tau)\, d\tau,$$

где $\int_0^\pi \int_0^\pi k^2(s, t)\, ds\, dt < \infty$, т. е. функция от t $\int_0^s a(\sigma, t)\, d\sigma$ должна быть абсолютно непрерывной по t почти при каждом s и ее производная по t должна быть квадратично интегрируемой по s и t.

Далее заметим, что в силу абсолютной непрерывности $K(s, t)$ оператор (37), а вместе с ним и оператор (36) никогда не бывают ортогональными (поскольку ядро Бохнера не бывает абсолютно непрерывным). Было бы интересно выяснить, может ли оператор (36) быть околоединичным. Таковым во всяком случае может быть оператор

$$y(t) = z(t) + \int_0^\pi a(s, t)\, z(s)\, ds; \tag{39}$$

именно, условие на ядро $a(s, t)$, обеспечивающее тот факт, что оператор (36) является оператором Гильберта — Шмидта, будет одновременно условием околоединичности оператора (39).

§ 12. КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ $\widehat{L}_2(0, \pi)$

1. Интегральное представление квадратичного функционала. Пусть дана функция $A(s, t)$, определенная на квадрате $Q = \left\{ 0 \leqslant {s \atop t} \leqslant \pi \right\}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

а) $A(s, t) = A(t, s)$ почти всюду на Q;

б) $\int_0^\pi \int_0^\pi A^2(s, t)\, ds\, dt < \infty$;

в) $A(s, t)$ определяет ядерный интегральный оператор A в $L_2(0, \pi)$ по формуле

$$A\varphi(t) = \int_0^\pi A(s, t)\,\varphi(s)\,ds.$$

Положим

$$a_{km} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi\int_0^\pi A(s, t)\sin ks \sin mt\,ds\,dt,$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$A_n(s, t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^n a_{km}\sin ks \sin mt,$$

и рассмотрим квадратичные функционалы на $\widehat{L}_2(0, \pi)$

$$\int_0^\pi\int_0^\pi A_n(s, t)\,dz(s)\,dz(t) \equiv$$

$$\equiv \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^n a_{km}\int_0^\pi \sin ks\,dz(s)\int_0^\pi \sin mt\,dz(t).$$

В силу п. 4 § 9 последовательность квадратичных функционалов

$$\int_0^\pi\int_0^\pi A_n(s, t)\,dz(s)\,dz(t), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

сходится в среднем по мере Винера на $\widehat{L}_2(0, \pi)$ к некоторому квадратичному функционалу. Мы обозначим его так:

$$\int_0^\pi\int_0^\pi A(s, t)\,dz(s)\,dz(t).$$

В частности, если $z(t) \in \widehat{L}_2'(0, \pi)$, то

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \sin ks\,dz(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \sin ks\,z'(s)\,ds = z_k',$$

поэтому

$$\int_0^\pi \int_0^\pi A_n(s, t)\, dz(s)\, dz(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{km} z'_k z'_m,$$

что, в силу ограниченности оператора $A = \| a_{km} \|$, имеет пределом величину

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{km} z'_k z'_m = (Az', z') =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi A(s, t)\, z'(s)\, z'(t)\, ds\, dt.$$

В общем случае функция $A(s, t)$ обладает полной ортонормированной системой собственных функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., так что

$$\int_0^\pi A(s, t)\, \varphi_n(s)\, ds = \lambda_n \varphi_n(t), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где

$$\sum_1^\infty |\lambda_n| < \infty.$$

В силу основной теоремы § 9, п. 5 почти всюду на $\widehat{L}'_2(0, \pi)$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi A(s, t)\, dz(s)\, dz(t) = \sum_1^\infty \lambda_n \left\{ \int_0^\pi \varphi_n(t)\, dz(t) \right\}^2.$$

2. Примеры. 1. Рассмотрим функционал на пространстве $\widehat{L}_2(0, \pi)$

$$Q(z, z) = \int_0^\pi \int_0^\pi q(s, t)\, z(s)\, z(t)\, ds\, dt$$

с симметричным и квадратично суммируемым по обоим переменным ядром $q(s, t)$.

Пусть

$$q(s, t)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} q_{km}\cos ks\cos mt=\lim q_n(s, t) \qquad (1)$$

есть формальное разложение ядра $q(s, t)$ в двойной ряд Фурье.

Заметим, что функционал $Q(z, z)$ не меняется (на пространстве $\widehat{L}_2$), если вычесть из функции $q(s, t)$ любую суммируемую функцию, зависящую только от одной из координат s или t. Этим свойством можно воспользоваться, чтобы освободиться в разложении (1) от членов с коэффициентами q_{00}, q_{k0}, q_{0m} $(k, m=1, 2, \ldots)$, а именно, член q_{00} удаляется при вычитании из функции $q(s, t)$ ее среднего, члены $q_{k0}\cos ks$ — при вычитании суммируемой функции $\int\limits_0^{\pi} q(s, t)\,dt$ и члены $q_{0m}\cos mt$ — при вычитании суммируемой функции $\int\limits_0^{\pi} q(s, t)\,ds$. В итоге мы приходим к новой суммируемой функции $q(s, t)$, в разложении Фурье которой величины q_{00}, q_{k0}, q_{0m} $(k, m=1, 2, \ldots)$ равны 0.

Мы утверждаем теперь, что имеет место представление

$$Q(z, z)=\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} A(s, t)\,dz(s)\,dz(t),$$

где в качестве ядра $A(s, t)$ можно взять функцию

$$A(s, t)=\int\limits_s^{\pi}\int\limits_t^{\pi} q(\sigma, \tau)\,d\sigma\,d\tau. \qquad (2)$$

Для ядра $A(s, t)$, определенного формулой (2), мы имеем

$$a_{km}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left\{\int\limits_s^{\pi}\int\limits_t^{\pi} q(\sigma, \tau)\,d\sigma\,d\tau\right\}\sin ks\sin mt\,ds\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left\{\int\limits_0^{\sigma}\int\limits_0^{\tau}\sin ks\sin mt\,ds\,dt\right\}q(\sigma, \tau)\,d\sigma\,d\tau=$$

$$= \frac{2}{\pi k m} \int_0^\pi \int_0^\pi (1 - \cos k\sigma)(1 - \cos m\tau)\, q(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{km}(q_{00} - q_{0m} - q_{k0} + q_{km}) = \frac{q_{km}}{km} \qquad (k, m = 1, 2, \ldots).$$

Так как коэффициенты Фурье суммируемой функции $q(s, t)$ ограничены, то матрица $\| a_{km} \|$ ядерна согласно критерию, указанному в § 7, п. 8.

Рассмотрим теперь ядро

$$A_n(s, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{km} \sin ks \sin mt.$$

Согласно определению

$$\int_0^\pi \int_0^\pi A(s, t)\, dz(s)\, dz(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \int_0^\pi A_n(s, t)\, dz(s)\, dz(t) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{km} \int_0^\pi \sin ks\, dz(s) \int_0^\pi \sin mt\, dz(t) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{km} k \int_0^\pi z(s) \cos ks\, ds\, m \int_0^\pi z(t) \cos mt\, dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} (q_{00} - q_{0m} - q_{k0} + q_{km}) \cos ks \cos mt\, z(s)\, z(t)\, ds\, dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \int_0^\pi q_n(s, t)\, z(s)\, z(t)\, ds\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \int_0^\pi C_n q(s, t)\, z(s)\, z(t)\, ds\, dt =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi q(s, t)\, z(s)\, z(t)\, ds\, dt,$$

где $C_n q(s, t)$ есть $\frac{1}{n}[q_1(s, t) + \ldots + q_n(s, t)]$ — среднее арифметическое n первых сумм ряда Фурье функции $q(s, t)$, которое, как известно *), стремится при $n \to \infty$ к $q(s, t)$ по норме L_1.

Утверждение доказано.

2. Пусть дана суммируемая на $(0, \pi)$ функция $p(t)$; с ее помощью можно определить на пространстве $\hat{L}_2(0, \pi)$ функционал

$$B(z, z) = \int_0^\pi p(t)[z(t) - z(0)]^2\,dt. \tag{3}$$

Рассмотрим далее непрерывное ядро

$$P(s, t) = \int_{\max(s, t)}^{\pi} p(\tau)\,d\tau$$

и образуем квадратичную форму

$$Q(z, z) = \int_0^\pi \int_0^\pi P(s, t)\,dz(s)\,dz(t). \tag{4}$$

Покажем, что форма (4) определена почти всюду на $\hat{L}_2(0, \pi)$ и почти всюду совпадает с функционалом (3).

Рассмотрим вначале форму $B(z, z)$. Мы имеем в координатах z_k

$$B(z, z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi p(\tau)\left[\sum_1^\infty z_k(\cos k\tau - 1)\right]^2 d\tau =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \int_0^\pi p(\tau)\, z_k z_m (\cos k\tau - 1)(\cos m\tau - 1)\,d\tau =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty z_k z_m \int_0^\pi p(\tau)(\cos k\tau - 1)(\cos m\tau - 1)\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty a_{km} z_k z_m.$$

*) А. Зигмунд, «Тригонометрические ряды», т. II, «Наука» 1965, гл. XVII, 1.23, стр. 457.

где

$$|a_{km}| \leqslant \frac{2^3}{\pi} \int_0^\pi |p(\tau)|\, d\tau \leqslant C;$$

отсюда, в частности, следует ее ядерность в силу критерия § 7, п. 8.

Для дальнейшего используем следующую лемму:

Лемма 1. *Если* $p(t) \in L_1(0, \pi)$ *и при* $0 \leqslant s \leqslant \pi$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

$$P(s\ \ t) = \int_{\max(s,\, t)}^{\pi} p(\tau)\, d\tau = \begin{cases} \int_s^\pi p(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad s > t, \\ \int_t^\pi p(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad t > s, \end{cases}$$

то для любых функций $z_1(t) \in \widehat{L}_2'(0, \pi)$, $z_2(t) \in \widehat{L}_2'(0, \pi)$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi P(s,\, t)\, z_1'(s)\, z_2'(t)\, ds\, dt =$$

$$= \int_0^\pi p(\tau)\, [z_1(\tau) - z_1(0)]\, [z_2(\tau) - z_2(0)]\, d\tau.$$

Доказательство. Мы имеем

$$\int_0^\pi P(s,\, t)\, z_1'(s)\, ds =$$

$$= \int_{s=0}^{t} \int_{\tau=t}^{\pi} p(\tau)\, z_1'(s)\, d\tau\, ds + \int_{s=t}^{\pi} \int_{\tau=s}^{\pi} p(\tau)\, z_1'(s)\, d\tau\, ds =$$

$$= \int_{\tau=t}^{\pi} \int_{s=0}^{\tau} p(\tau)\, z_1'(s)\, d\tau\, ds; \qquad (5)$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi P(s, t)\, z_1'(s)\, z_2'(t)\, ds\, dt =$$

$$= \int_{t=0}^{\pi} \int_{\tau=t}^{\pi} \int_{s=0}^{\pi} p(\tau)\, z_1'(s)\, z_2'(t)\, d\tau\, ds\, dt =$$

$$= \int_{\tau=0}^{\pi} p(\tau) \left\{ \int_{s=0}^{\tau} z_1'(s)\, ds \int_{t=0}^{\tau} z_2'(t)\, dt \right\} d\tau =$$

$$= \int_0^\pi p(\tau)\, [z_1(\tau) - z_1(0)]\, [z_2(\tau) - z_2(0)]\, d\tau,$$

что и требовалось.

Рассмотрим теперь форму $Q(z, z)$. Для проверки корректности ее определения следует убедиться в ядерности матрицы, составленной из коэффициентов Фурье p_{km} от функции $P(s, t)$:

$$p_{km} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi P(s, t) \sin ks \sin mt\, ds\, dt.$$

Положим

$$z_1'(s) = -\sin ks, \quad z_2'(t) = -\sin mt;$$

тогда

$$z_1(s) = \frac{\cos ks}{k}, \quad z_2(t) = \frac{\cos mt}{m}$$

и, в силу леммы,

$$p_{km} = \frac{2}{\pi k m} \int_0^\pi p(\tau)\, [\cos k\tau - 1]\, [\sin m\tau - 1]\, d\tau = \frac{a_{km}}{km},$$

где

$$|a_{km}| \leqslant \frac{2^3}{\pi} \int_0^\pi |p(\tau)|\, d\tau = C,$$

откуда следует существование и ядерность формы $Q(z, z)$.

Одновременно получается равенство коэффициентов Фурье формы $B(z, z)$ и формы $Q(z, z)$. Поэтому обе формы равны, что и утверждалось.

Заметим, что приведенная выше лемма при подстановке $z_1(t) = z_2(t)$ сразу дает равенство $Q(z, z) = B(z, z)$ на подпространстве $L_2'(0, \pi)$; но заключать отсюда о равенстве $Q(z, z) = B(z, z)$ на Ω без проверки существования формы $Q(z, z)$ было бы преждевременным.

3. Интегрирование квадратичных экспонент. Пусть дана (ядерная) квадратичная форма на пространстве $\widehat{L}_2(0, \pi)$

$$B(z, z) = \int_0^\pi \int_0^\pi A(s, t)\, dz(s)\, dz(t) \equiv$$
$$\equiv \sum_1^\infty \lambda_n \left\{ \int_0^\pi g_n(t)\, dz(t) \right\}^2,$$

где $A(s, t)$ — симметричное ядро, $g_1(t), g_2(t), \ldots$ — полный набор его собственных функций и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательность собственных значений.

Поставим вопрос об *интеграле от квадратичной экспоненты*

$$I = \int_{\widehat{L}_2(0, \pi)} e^{\lambda B(z, z)}\, dw(z).$$

Производя ортогональное преобразование, приводим квадратичную форму в показателе к каноническому виду

$$I = \int_{\widehat{L}_2(0, \pi)} e^{\lambda \sum_1^\infty \lambda_n g_n^2(t)}\, dw = \int_\Omega e^{\lambda \sum_1^\infty \lambda_n u_n^2}\, d\omega =$$
$$= \prod_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{(\lambda\lambda_n - 1) u_n^2}\, du_n,$$

после чего при условии $\lambda\lambda_n - 1 < 0$ при каждом $n = 1, 2, \ldots$ получается значение интеграла

$$I = \frac{1}{\sqrt{\prod_1^\infty (1 - \lambda\lambda_n)}} = \frac{1}{\sqrt{D_A(\lambda)}},$$

где $D_A(\lambda)$ — определитель Фредгольма ядра $A(s, t)$ (§ 11, п. 2). Таким образом, интегрирование квадратичных экспонент связывается с вычислением определителей Фредгольма.

Пример. Найдем интеграл

$$I = \int\limits_{L_2(0,\pi)} e^{\lambda \int\limits_0^\pi p(t)[z(t)-z(0)]^2\,dt}\,dw,$$

где $p(t)$ — суммируемая функция.

Мы видели, что соответствующее ядро $A(s, t)$ имеет вид

$$A(s, t) = \int\limits_{\max(s,t)}^{\pi} p(\tau)\,d\tau.$$

В данном случае величину определителя Фредгольма можно связать с решением некоторой задачи Штурма — Лиувилля. А именно, рассмотрим уравнение

$$z''(t) + \lambda p(t)\,z(t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \tag{6}$$

с граничным условием

$$z'(\pi) = 0. \tag{7}$$

Утверждается, что для ядра $A(s, t)$ имеет место равенство

$$D(\lambda) = \frac{z(0)}{z(\pi)}.$$

Для доказательства, интегрируя уравнение (6) от t до π, получаем с учетом (7)

$$z'(t) = \lambda \int\limits_t^\pi p(\tau)\,z(\tau)\,d\tau =$$

$$= \lambda \int\limits_t^\pi p(\tau)\left[z(0) + \int\limits_0^\tau z'(s)\,ds\right]d\tau =$$

$$= \lambda z(0) \int\limits_t^\pi p(\tau)\,d\tau + \lambda \int\limits_{\tau=t}^{\pi} p(\tau)\,z'(s)\,ds\,d\tau.$$

Далее, используя равенство $A(0, t) = \int\limits_t^\pi p(\tau)\,d\tau$ и формулу (5), находим

$$z'(t) = \lambda z(0)\,A(0, t) + \lambda \int\limits_0^\pi A(s, t)\,z'(s)\,ds.$$

Можно считать, что $z(0) \neq 0$, полагая λ не особым значением. Разделив на $z(0)$, получаем

$$\frac{z'(t)}{z(0)} = \lambda A(0, t) + \lambda \int_0^\pi A(s, t) \frac{z'(s)}{z(0)} ds.$$

Таким образом, $\frac{z'(t)}{z(0)}$ есть решение интегрального уравнения Фредгольма с ядром $A(s, t)$ и свободным членом $\lambda A(0, t)$. Пусть $R(s, t, \lambda)$ есть резольвента ядра $A(s, t)$. Тогда согласно формуле (13) § 11 и в силу единственности решения интегрального уравнения при не особом λ

$$\frac{z'(t)}{z(0)} = \lambda A(0, t) + \lambda \int_0^\pi R(\sigma, t, \lambda) \lambda A(0, \sigma) ds.$$

Используя интегральное уравнение резольвенты (15) § 11, при $s = 0$ находим

$$\lambda \int_0^\pi R(\sigma, t, \lambda) A(0, \sigma) d\sigma = R(0, t, \lambda) - A(0, t),$$

откуда $\frac{z'(t)}{z'(0)} = \lambda R(0, t, \lambda)$ и, следовательно,

$$\frac{z(\pi) - z(0)}{z(0)} = \lambda \int_0^\pi R(0, t, \lambda) dt.$$

Для ядра $A(s, t)$ выполняются условия (16) § 11 и поэтому имеет место уравнение (17) § 11:

$$\int_0^\pi R(0, t, \lambda) dt = \frac{1 - D(\lambda)}{\lambda D(\lambda)}. \tag{8}$$

Применяя (8), находим

$$\frac{z(\pi)}{z(0)} - 1 = \frac{1 - D(\lambda)}{D(\lambda)},$$

откуда $D(\lambda) = \frac{z(0)}{z(\pi)}$.

Таким образом, при $\lambda < \frac{1}{\lambda_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\int\limits_{\widehat{L}_2(0, \pi)} e^{\lambda \int\limits_0^\pi p(t)\,[z(t) - z(0)]^2\,dt}\,dw = \frac{1}{\sqrt{D_A(\lambda)}} = \sqrt{\frac{z(\pi)}{z(0)}}.$$

В силу последнего замечания п. 8 § 4 это же значение имеет и следующий интеграл по пространству $C_0(0, \pi)$:

$$\int\limits_{C_0(0, \pi)} e^{\lambda \int\limits_0^\pi p(t)\,\varphi^2(t)\,dt}\,dw = \sqrt{\frac{z(\pi)}{z(0)}}.$$

ГАУССОВЫ МЕРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Г. СОНИС

В п. 1 § 4 в сепарабельном гильбертовом пространстве H была построена счетно-аддитивная гауссова мера (абстрактная мера Винера). Построение производилось путем переноса канонической гауссовой меры из пространства Ω с помощью некоторой диагональной матрицы перехода Λ. Мера, получающаяся в H, оказывалась счетно-аддитивной тогда и только тогда, когда сумма квадратов элементов матрицы Λ конечна.

В настоящем Дополнении (п. 3) мы рассматриваем отображение Ω в H с помощью произвольной матрицы A и выясняем, при каких условиях получающаяся в гильбертовом пространстве гауссова мера является счетно-аддитивной.

В п. 4 указано условие эквивалентности (либо сингулярности) гауссовых мер в H, определенных с помощью различных матриц.

В п. 1 § 4 использовался признак Колмогорова — Хинчина; для наших целей нам необходимо обобщение этого признака, которое мы устанавливаем в п. 1. В качестве следствия устанавливается общий вид измеримых билинейных функционалов в Ω, полученный ранее О. Г. Смоляновым [15].

1. Обобщение признака Колмогорова — Хинчина. Введем обозначение

$$\Omega_A = \{x \in \Omega:\ Ax \in l_2\},$$

где A — матрица слабо измеримого преобразования (см. п. 1 § 8), $l_2 = \left\{ x \in \Omega\colon \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \right\}$ — гильбертово подпространство в Ω;

$$C\Omega_A = \Omega \setminus \Omega_A = \{x \in \Omega\colon\ Ax \notin l_2\}.$$

Лемма 1. *Пусть A — матрица слабо измеримого преобразования, B — матрица ограниченного в l_2 оператора. Тогда существует множество Ω_0 полной ω-меры такое, что для всякого $x \in \Omega_0$*

$$(AB)\,x = A\,(Bx),$$

где сходимость двойных рядов, представляющих координаты вектора $(AB)\,x$, понимается как сходимость почти всюду, а сходимость рядов, представляющих координаты $A\,(Bx)$, понимается в смысле среднего квадратического.

Доказательство. Рассмотрим n-е члены последовательностей $(AB)\,x$ и $A\,(Bx)$:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{nl} b_{lk} \right) x_k,$$

$$g_n(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{nl} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_{lk} x_k \right), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Докажем, что линейные функционалы $f_n(x)$ и $g_n(x)$ измеримы. Тогда в силу того, что на ортах $e_m = (0,\ \ldots,\ 1,\ 0,\ \ldots)$

$$f_n(e_m) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{nl} b_{lm} = g_n(e_m),$$

функционалы $f_n(x)$ и $g_n(x)$ совпадут почти всюду (см. п. 1 § 6).

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{nl} b_{lk} \right)^2 = \|B^* a_n\|^2 < \infty,$$

где $a_n = (a_{n1},\ a_{n2},\ \ldots) \in l_2$, B^* — транспонированная матрица B, то $f_n(x)$ является измеримым линейным функционалом.

Докажем, что $g_n(x) \in L_2(\Omega)$. Тогда в силу конечности меры ω $g_n(x)$ будет суммируемой функцией, т. е. измеримым линейным функционалом. По признаку Коши достаточно доказать, что последовательность

$$g_n^{mp}(x) = \sum_{l=m+1}^{p} a_{nl} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_{lk} x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=m+1}^{p} a_{nl} b_{lk} \right) x_k$$

сходится к нулю в смысле среднего квадратического.

Последовательность $a_n^{mp} = (0, \ldots, 0, a_{n,m+1}, \ldots, a_{np}, 0, \ldots) \in l_2$ и $\lim\limits_{m,\,p \to \infty} \| a_n^{mp} \| = 0$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=m+1}^{p} a_{nl} b_{lk} \right)^2 = \| B^* a_n^{mp} \|^2 < \infty,$$

т. е. $g_n^{mp}(x)$ является измеримым линейным функционалом и (см. п. 9 § 3)

$$\int_{\Omega} [g_n^{mp}(x)]^2 d\omega = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=m+1}^{p} a_{nl} b_{lk} \right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \| B \|^2 \| a_n^{mp} \|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad m,\ p \to \infty,$$

что и требовалось.

Итак, для всякого $n = 1, 2, \ldots$ существует множество Ω_n полной меры, на котором совпадают n-е члены последовательностей $(AB)x$ и $A(Bx)$. Тогда на множестве $\Omega_0 = \bigcap\limits_n \Omega_n$ полной меры совпадают и сами последовательности.

Лемма 2. *Пусть A — матрица слабо измеримого преобразования, B — матрица измеримого преобразования. Множества Ω_A и Ω_{AB} измеримы одновременно и $\omega\Omega_A = \omega\Omega_{AB}$.*

Доказательство. Для дальнейших целей нам понадобится лишь случай, когда из того, что $\omega\Omega_A = 0$, следует, что $\omega\Omega_{AB} = 0$. Ограничимся доказательством леммы 2 в этом случае.

Так как B — матрица измеримого преобразования, то (см. п. 2 § 8) B является матрицей обратимого ограниченного в l_2 оператора, причем B^{-1} является в свою очередь матрицей измеримого преобразования (см. п. 6 § 10).

Рассмотрим множества

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega\colon\ (AB)\,x = A\,(Bx)\},$$
$$\Omega_2 = \{x \in \Omega\colon\ B(B^{-1}x) = x\}.$$

По лемме 1 $\omega\Omega_1 = \omega\Omega_2 = 1$. Так как $\omega\Omega_A = 0$, то $\omega(C\Omega_A \cap \Omega_2) = 1$, и в силу того, что B^{-1} — матрица измеримого преобразования, $\omega B^{-1}(C\Omega_A \cap \Omega_2) = 1$.

Рассмотрим множество

$$\Omega_0 = \Omega_1 \cap B^{-1}(C\Omega_A \cap \Omega_2).$$

$\omega\Omega_0 = 1$. Докажем, что $\Omega_0 \subset C\Omega_{AB}$. Пусть $x \in \Omega_0$. Тогда $x \in \Omega_1$, $Bx \in B[B^{-1}(C\Omega_A \cap \Omega_2)] \subset C\Omega_A$. $(AB)\,x = A\,(Bx) \notin l_2$, так как $Bx \in C\Omega_A$. Таким образом, $x \in C\Omega_{AB}$, и так как $\omega\Omega_0 = 1$, то $\omega C\Omega_A = 1$, т. е. $\omega\Omega_{AB} = 0$.

Лемма 3. *Пусть матрица* $A = B + C$, *причем* $\omega\Omega_B = 1$. *Тогда если множество* Ω_C *измеримо, то* Ω_A *также измеримо и* $\omega\Omega_A = \omega\Omega_C$.

Доказательство. Пусть $\omega\Omega_C = 1$; тогда

$$\omega\,(\Omega_C \cap \Omega_B) = 1,$$

и так как $\Omega_C \cap \Omega_B \subset \Omega_A$, то $\omega\Omega_A = 1$.

Пусть $\omega\Omega_C = 0$; Тогда

$$\Omega_A = \Omega_{B+C} = \{x \in \Omega\colon\ Bx \in l_2,\ Bx + Cx \in l_2\} \cup$$
$$\cup\,\{x \in \Omega\colon\ Bx \notin l_2,\ Ax \in l_2\} \subset \Omega_C \cup C\Omega_B.$$

Так как $\omega(\Omega_C \cup C\Omega_B) = 0$, то $\omega\Omega_A = 0$.

Замечание. Леммы 2 и 3 верны и в том случае, когда множества вида Ω_A заменены множествами вида $\{x \in \Omega\colon\ Ax \in \Omega^0\}$, где Ω^0 — произвольное линейное пространство в Ω.

Лемма 4. *Пусть* A *и* B — *матрицы ограниченных в* l_2 *операторов. Тогда, если* $\omega\Omega_{BA} = 0$, *то* $\omega\Omega_A = 0$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega\colon\ (BA)\,x = B\,(Ax)\}.$$

По лемме 1 $\omega\Omega_1 = 1$. Так как B — матрица ограниченного в l_2 оператора, то

$$C\Omega_{BA} \cap \Omega_1 \subset \{x \in \Omega\colon B(Ax) \notin l_2\} \subset C\Omega_A.$$

Так как $\omega(C\Omega_{BA} \cap \Omega_1) = 1$, то $\omega C\Omega_A = 1$, т. е. $\omega\Omega_A = 0$.

Следствие. *Пусть A — матрица ограниченного в l_2 оператора, U — ортогональная матрица. Тогда, если $\omega\Omega_A = 0$, то $\omega\Omega_{U^{-1}AU} = 0$.*

Это следует из лемм 2 и 3, если учесть, что ортогональная матрица является матрицей измеримого преобразования.

Теорема 1 (обобщение признака Колмогорова—Хинчина [16]): *Пусть A — матрица слабо измеримого преобразования. Подпространство Ω_A измеримо, причем его мера равна 1 тогда и только тогда, когда A является матрицей Гильберта — Шмидта.*

Доказательство. Установим сначала, что множество Ω_A измеримо. Обозначим через $[Ax]_k$ k-ую координату вектора Ax и рассмотрим функции

$$\Phi_n(x) = e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}[Ax]_k^2} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Очевидно, что $\Phi_n(x) = 0$ при $x \notin l_2$, $0 < \Phi_n(x) < 1$ при $x \in \Omega_A$ и $\int\limits_{\Omega} \Phi_n(x)\, d\omega < 1$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$.

При $n \to \infty$ неотрицательные суммируемые функции $\Phi_n(x)$, интегралы от которых ограничены в совокупности, стремятся к характеристической функции множества Ω_A, которая в силу леммы Фату является суммируемой. Таким образом, Ω_A измеримо, и поэтому (см. п. 4 § 5) $\omega\Omega_A$ равна 0 либо 1.

Заметим, что достаточность теоремы установлена в п. 2 § 9.

Перейдем к доказательству необходимости. В силу того, что Ω_A является линейным пространством полной меры, $\Omega_A \supset l_2$ (см. п. 4 § 5), т. е. $Al_2 \subset l_2$. Поэтому матрица A является матрицей ограниченного в l_2 оператора $\hat{A}$.

Предположим, что A не есть матрица Гильберта—Шмидта. Рассмотрим сначала случай, когда оператор $\hat{A}$ является симметрическим. Воспользуемся теоремой И. фон Неймана из п. 11 § 7, которую мы сформулируем в удобной для нас форме: *для всякого симметрического оператора* $\hat{A}$ (и любого $\varepsilon > 0$) *можно найти симметрический оператор Гильберта — Шмидта* $\hat{S}$ (с нормой Гильберта — Шмидта $\|\hat{S}\|_2 < \varepsilon$) *и оператор* $\hat{D}$, *представимый в некотором базисе в виде диагональной матрицы* D, *такие, что* $\hat{A} = \hat{S} + \hat{D}$.

Поэтому $A = U^{-1}(S + D)U$, где U — ортогональная матрица. Так как A не есть матрица Гильберта — Шмидта, то D также не является матрицей Гильберта — Шмидта и по признаку Колмогорова — Хинчина $\omega\Omega_D = 0$. Так как S есть матрица Гильберта — Шмидта, то по достаточности теоремы $\omega\Omega_S = 1$ и по лемме 3 $\omega\Omega_{S+D} = 0$. По следствию к лемме 4 $\omega\Omega_A = \omega\Omega_{U^{-1}(S+D)U} = 0$, что невозможно.

Если $\hat{A}$ — произвольный ограниченный оператор, то $\hat{A}^*\hat{A}$ является симметрическим и поэтому $\omega\Omega_{A^*A} = 0$. По лемме 4 $\omega\Omega_A = 0$, и мы снова получаем противоречие.

2. Общий вид измеримого билинейного функционала в Ω. В дальнейшем нам понадобятся некоторые известные определения и факты*). Рассмотрим декартово произведение $\Omega \times \Omega$ с мерой $\omega \times \omega$. Пусть $\mathscr{E} \subset \Omega \times \Omega$. x-сечением множества $\mathscr{E}$ называется множество $\{y \in \Omega\colon (x, y) \in \mathscr{E}\}$, y-сечением — множество $\{x \in \Omega\colon (x, y) \in \mathscr{E}\}$.

Пусть $f(x, y)$ — произвольная функция, заданная на $\mathscr{E}$. x-сечением функции $f(x, y)$ называется функция, определенная на x-сечении множества $\mathscr{E}$ равенством $f_x(y) = f(x, y)$. Аналогично определяется y-сечение $f^y(x) = f(x, y)$.

Множество $\mathscr{E} \subset \Omega \times \Omega$ имеет полную $(\omega \times \omega)$-меру тогда и только тогда, когда ω-почти все его x-сечения (либо y-сечения) имеют полную ω-меру.

Билинейный функционал $A(x, y)$ назовем *измеримым* билинейным функционалом, если он конечен на некотором

---

*) Все эти факты можно найти в § 1 гл. 2 книги ИМП.

линейном подпространстве $\mathscr{E} \subset \Omega \times \Omega$ полной $(\omega \times \omega)$-меры и измерим относительно этой меры.

Теорема 2 (О. Г. Смолянов [15]). *Всякий измеримый билинейный функционал $A(x, y)$ представим единственным образом в виде*

$$A(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \left[\sum_{m=1}^{\infty} A(e_m, e_k) x_m \right] = \\ = \lim_{K\to\infty} \lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{M} A(e_m, e_k) y_k x_m,$$

где $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ — орты в l_2, матрица $\| A(e_m, e_k) \|$ является матрицей Гильберта — Шмидта, а двойной предел существует на линейном подпространстве $\mathscr{E} \subset \Omega \times \Omega$ полной $(\omega \times \omega)$-меры.

Доказательство. Докажем сначала, что если матрица $A = \| a_{km} \|$ есть матрица Гильберта — Шмидта, то на множестве $\mathscr{E}$ полной $(\omega \times \omega)$-меры двойной ряд

$$A(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mk} x_m \right)$$

имеет конечную сумму и представляет собой измеримую на $\Omega \times \Omega$ функцию.

Действительно, так как A и вместе с ней транспонированная матрица A^* являются матрицами Гильберта — Шмидта, то по теореме 1 Дополнения $\omega\Omega_{A^*} = 1$. Таким образом, для почти всех $x_0 \in \Omega$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mk} x_m^0 \right)^2 < \infty.$$

Поэтому функционал $\sum_{k=1}^{\infty} y_k \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mk} x_m^0 \right)$ измерим (см. п. 3 § 6) и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mk} x_m^0 \right) < \infty$ для всякого y из некоторого множества $\Omega_1(x_0)$ полной ω-меры.

Рассмотрим множества $\mathscr{E}(x_0) = \{(x_0, y) \in \Omega \times \Omega \colon y \in \Omega_1(x_0)\}$ и их объединение $\mathscr{E} = \bigcup_{x_0 \in \Omega_{A^*}} \mathscr{E}(x_0)$. На этом множестве ряд $A(x, y)$ принимает конечные значения.

Так как x_0-сечение $\mathscr{E}$ при $x_0 \in \Omega_{A^*}$ есть $\Omega_1(x_0)$ и поэтому имеет полную ω-меру, то в силу того, что $\omega\Omega_{A^*} = 1$, множество $\mathscr{E}$ имеет полную $(\omega \times \omega)$-меру.

Функция $A(x, y)$ измерима на $\Omega \times \Omega$, так как она является пределом почти всюду в $\Omega \times \Omega$ сходящейся последовательности $(\omega \times \omega)$-измеримых функций $\sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{M} a_{mk} x_m y_k$.

Пусть теперь $A(x, y)$ — произвольный измеримый билинейный функционал, определенный на линейном пространстве $\mathscr{E}$ полной $(\omega \times \omega)$-меры. Так как почти все сечения $\mathscr{E}$ имеют полную меру, то существует множество $\Omega_0 \subset \Omega$ полной ω-меры, такое, что для всякого $x_0 \in \Omega_0$ сечение $A(x_0, y)$ есть измеримый линейный функционал на Ω. В силу теоремы об общем виде измеримого линейного функционала (см. п. 3 § 6)

$$A(x_0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A(x_0, e_k) y_k,$$

когда y принадлежит некоторому множеству $\Omega(x_0)$ полной ω-меры, и $\sum_{k=1}^{\infty} [A(x_0, e_k)]^2 < \infty$ $(x_0 \in \Omega_0)$.

Аналогично, существует линейное пространство $\Omega^0 \subset \Omega$ полной ω-меры, такое, что для всякого $y^0 \in \Omega^0$ сечение $A(x, y^0)$ есть измеримый линейный функционал.

Так как $\omega\Omega^0 = 1$, то $\Omega^0 \supset l_2$ и поэтому для всякого $k = 1, 2, \ldots$ e_k-сечение $A(x, e_k)$ является измеримым линейным функционалом. Отсюда следует, что для $k = 1, 2, \ldots$

$$A(x, e_k) = \sum_{m=1}^{\infty} A(e_m, e_k) x_m,$$

когда x принадлежит множеству Ω_k полной ω-меры.

Рассмотрим множества $\tilde{\Omega} = \Omega_0 \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k \right)$;

$$\mathscr{E}(\tilde{x}) = \{(\tilde{x}, y) \in \Omega \times \Omega : y \in \Omega(\tilde{x})\} \quad (\tilde{x} \in \tilde{\Omega});$$

$$\mathscr{E}_1 = \bigcup_{\tilde{x} \in \tilde{\Omega}} \mathscr{E}(\tilde{x}).$$

Очевидно, что $\omega\tilde{\Omega}=1$, $(\omega\times\omega)\mathscr{E}_1=1$ и для всякой пары $(x, y)\in\mathscr{E}_1$

$$A(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty} A(x, e_k)\,y_k=\sum_{k=1}^{\infty} y_k\left[\sum_{m=1}^{\infty} A(e_m, e_k)\,x_m\right].$$

Из этого представления очевидным образом следует единственность представления.

Осталось доказать, что матрица $A=\|A(e_m, e_k)\|$ является матрицей Гильберта — Шмидта. Для $\tilde{x}\in\tilde{\Omega}\subset\Omega_0$

$$\infty>\sum_{k=1}^{\infty}[A(\tilde{x}, e_k)]^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty} A(e_m, e_k)\,x_m\right]^2.$$

Таким образом, матрица $A=\|a_{km}\|$, где $a_{km}=A(e_m, e_k)$, переводит множество $\tilde{\Omega}$ полной ω-меры в l_2. По теореме 1 Дополнения матрица A является матрицей Гильберта — Шмидта, что требуется.

3. Линейные преобразования, порождающие счетно-аддитивные гауссовы меры в гильбертовом пространстве. Как в п. 1 § 4, воспользуемся основной теоремой § 1 для построения счетно-аддитивных гауссовых мер в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Напомним соответствующую схему.

В H выбирался произвольный ортонормированный базис $g_1, \ldots, g_n, \ldots$, с помощью которого каждому вектору $z\in H$ ставилась в соответствие последовательность чисел $z_n=(g_n, z)$, принадлежащая гильбертову подпространству l_2 пространства Ω. Затем фиксировалась последовательность положительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и строилось отображение $H\to\Omega$ так, что вектору $z\in H$ ставилась в соответствие точка $x=(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \ldots)\in\Omega$ (или, что то же, последовательности $(z_1, z_2, \ldots)\in l_2$ ставилась в соответствие точка $\Lambda z=(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \ldots)$ из Ω, где Λ — диагональная матрица с элементами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ на главной диагонали). Затем из Ω заимствовалась мера w цилиндрических множеств $\mathscr{E}_H=\{z\in H\colon \alpha_k<z_k\leqslant\beta_k,\ k=1, \ldots, n\}$

в H по правилу

$$w\mathscr{E}_H = \omega\Lambda\mathscr{E} = \omega_\Lambda\mathscr{E},$$

где $\mathscr{E} = \{x \in \Omega\colon \alpha_k < x_k \leqslant \beta_k,\ k = 1, \ldots, n\}$, $\Lambda\mathscr{E}$ — образ в Ω множества $\mathscr{E}_H$ при построенном выше отображении (иными словами, $\Lambda\mathscr{E}$ — это результат воздействия диагональной матрицы Λ на цилиндрическое множество $\mathscr{E} \subset \Omega$). Полученная мера являлась счетно-аддитивной, когда образ H в Ω заполнял множество полной ω-меры (т. е. $\omega\Lambda H = 1$).

Заметим, что для того чтобы получить всевозможные гауссовы меры в H, нужно заменить диагональную матрицу Λ произвольной матрицей A, которая, конечно, должна быть определена в l_2, т. е. должна являться матрицей слабо измеримого преобразования. Получившаяся мера в H будет счетно-аддитивной тогда и только тогда, когда образ H (т. е. AH) будет заполнять множество *внешней меры* 1 в Ω.

Из вышеизложенного следует, что *вместо того чтобы изучать гауссовы счетно-аддитивные меры в сепарабельном гильбертовом пространстве H, можно изучать меры в пространстве Ω, определенные на цилиндрических множествах $\mathscr{E} \subset \Omega$ по правилу*

$$\omega_A\mathscr{E} = \omega A\mathscr{E};$$

нужно только, чтобы AH заполняло в Ω множество внешней меры 1.

Поставим следующий вопрос: каковы должны быть матрицы A, отображающие гильбертово подпространство l_2 во множество *полной меры* в Ω?

Лемма. *Пусть A — матрица слабо измеримого преобразования. Если $\omega A l_2 = 1$, где $l_2 = \left\{x \in \Omega\colon \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\right\}$, то для всякой бесконечной матрицы C, столбцы которой представляют последовательности из l_2, существует матрица B со столбцами из l_2, такая, что $AB = C$, и в частности* (когда C является единичной матрицей I), *матрица A имеет правостороннюю обратную.*

Доказательство. Так как Al_2 — линейное подпространство полной меры, то (см. п. 4 § 5) $Al_2 \supset l_2$, т. е. для всякого $z \in l_2$ существует $v \in l_2$, такой, что $z = Av$. Взяв в качестве z столбцы матрицы C получим требуемое.

Теорема 3. *Пусть A — матрица слабо измеримого преобразования. Для того чтобы $\omega Al_2 = 1$, достаточно, а в случае, когда A является нижней треугольной матрицей, то и необходимо, чтобы матрица A имела правостороннюю обратную, являющуюся матрицей Гильберта — Шмидта.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $AB = I$, где B — матрица Гильберта — Шмидта. По теореме 2 Дополнения существует множество $\Omega_1 \subset \Omega$ полной ω-меры, такое, что $B\Omega_1 \subset l_2$. По лемме 1 Дополнения существует множество $\Omega_2 \subset \Omega$ полной ω-меры, такое, что для всякого $x \in \Omega_2$ $A(Bx) = (AB)x = x$, т. е. $A(B\Omega_2) = \Omega_2$. Рассмотрим множество $\Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2$; $\omega\Omega_0 = 1$; $B\Omega_0 \subset B\Omega_1 \subset l_2$. $A(B\Omega_0) = \Omega_0$, так как $\Omega_0 \subset \Omega_2$. $Al_2 \supset A(B\Omega_0) = \Omega_0$, и так как $\omega\Omega_0 = 1$, то $\omega Al_2 = 1$.

Необходимость. Пусть A — нижняя треугольная матрица и $\omega Al_2 = 1$. По предыдущей лемме матрица A имеет правостороннюю обратную B, которая в силу того, что A — треугольная матрица, будет единственной правосторонней и левосторонней обратной для A, т. е. $AB = BA = I$.

Для всякого $x \in l_2$ $B(Ax) = (BA)x = x$ (здесь не нужно заботиться о том, существуют ли компоненты вектора $B(Ax)$, так как во всех операциях участвуют только конечные суммы). Поэтому

$$B(Al_2) = l_2 \quad \text{и} \quad \Omega_B = \{x \in \Omega\colon\ Bx \in l_2\} \supset Al_2,$$

т. е. $\omega\Omega_B = 1$. По теореме 1 Дополнения B является матрицей Гильберта — Шмидта.

Замечание 1. В формулировке и доказательстве необходимого условия вместо нижних треугольных матриц можно рассматривать матрицу A, которая имеет правостороннюю обратную B, являющуюся и левосторонней, причем для каждого $x \in l_2$ последовательность $A(Bx)$ существует и совпадает с x.

Замечание 2. Существуют матрицы A, имеющие правостороннюю обратную B, являющуюся матрицей

Гильберта — Шмидта (и даже бесчисленное множество таких правосторонних), но не имеющие ни одной левосторонней обратной. Примером может служить матрица

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & & \\ & 0 & \lambda_2 & & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & 0 & & 0 & \lambda_n & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\lambda_n \neq 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$.

Матрица A не имеет ни одной левосторонней обратной, так как содержит столбец из нулей. Ее правосторонними обратными, являющимися матрицами Гильберта — Шмидта, будут матрицы вида

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \dots \\ \frac{1}{\lambda_1} & 0 & & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \frac{1}{\lambda_n} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

4. Эквивалентность (либо сингулярность) гауссовых мер в гильбертовом пространстве. Как обычно, назовем меры эквивалентными, если они обладают одной и той же совокупностью множеств меры 0.

Рассмотрим две матрицы A_1 и A_2, порождающие счетно-аддитивные гауссовы меры в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Матрицы A_1 и A_2 будем считать обратимыми и в дальнейшем будем считать также, что все векторы вида $A_1(A_2x)$, $A_1\left(A_2^{-1}x\right)$ и т. д. существуют и совпадают с векторами $(A_1A_2)x$, $\left(A_1A_2^{-1}\right)x$ и т. д.

Поставим следующий вопрос: когда меры, порожденные матрицами A_1 и A_2, являются эквивалентными, т. е. в соответствии с п. 3 Дополнения, когда меры ω_{A_1} и ω_{A_2} в Ω эквивалентны?

Эту задачу легко свести к рассмотрениям п. 6 § 10, воспользовавшись следующей леммой.

Лемма. *Эквивалентность мер ω_{A_1} и ω_{A_2} равносильна эквивалентности мер $\omega_{A_1A_2^{-1}}$ и ω.*

Доказательство. Пусть меры ω_{A_1} и ω_{A_2} эквивалентны и пусть $\omega_{A_1A_2^{-1}}\mathscr{E}=0$. Тогда $\omega_{A_1}A_2^{-1}\mathscr{E}=0$, и в силу эквивалентности мер ω_{A_1} и ω_{A_2} $\omega_{A_2}A_2^{-1}\mathscr{E}=0$, т. е. $\omega\mathscr{E}=0$. Совершенно аналогично могут быть рассмотрены остальные случаи.

Теперь воспользовавшись определением измеримого преобразования и теоремой 3 п. 6 § 10, получим следующий результат: *для того чтобы меры ω_{A_1} и ω_{A_2} были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A_1A_2^{-1}$ имела вид*

$$A_1A_2^{-1}=U(I+\Lambda)V, \tag{1}$$

где Λ — диагональная матрица Гильберта — Шмидта, $I+\Lambda$ обратима и U, V — ортогональные матрицы.

Замечание. *Если матрица $A_1A_2^{-1}$ представима в виде* (1), *где Λ не есть матрица Гильберта — Шмидта, т. е. меры ω_{A_1} и ω_{A_2} не эквивалентны, то они сингулярны.* Это означает, что существует множество $\mathscr{E}$ такое, что $\omega_{A_1}\mathscr{E}=1$, а $\omega_{A_2}\mathscr{E}=0$.

Для доказательства этого заметим, что *сингулярность мер ω_{A_1} и ω_{A_2} равносильна сингулярности мер $\omega_{A_1A_2^{-1}}$ и ω.* Действительно, если меры ω_{A_1} и ω_{A_2} сингулярны, то существует множество $\mathscr{C}$ такое, что $\omega_{A_1}\mathscr{C} = 1$, $\omega_{A_2}\mathscr{C} = 0$. Рассмотрим множество $\mathscr{C}_0 = A_2\mathscr{C}$.

$$\omega_{A_1 A_2^{-1}}\mathscr{C}_0 = \omega_{A_1}\mathscr{C} = 1; \quad \omega\mathscr{C}_0 = \omega_{A_2}\mathscr{C} = 0;$$

т. е. меры $\omega_{A_1 A_2^{-1}}$ и ω сингулярны. Аналогично рассматривается другой случай.

Заметим далее, что если Λ не есть матрица Гильберта — Шмидта, то меры $\omega_{I+\Lambda}$ и ω сингулярны. Действительно, в п. 4 § 10 доказано, что если Λ не есть матрица Гильберта — Шмидта, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует множество $C = C(\varepsilon)$, такое, что

$$\omega C(\varepsilon) < \varepsilon, \quad \omega_{I+\Lambda} C(\varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

Взяв в качестве ε последовательность $\frac{1}{2^n}$, рассмотрим множество $\widetilde{\mathscr{C}} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} C\left(\frac{1}{2^k}\right)$. Очевидно, что $\omega\widetilde{\mathscr{C}} = 0$, $\omega_{I+\Lambda}\widetilde{\mathscr{C}} = 1$.

Далее, если меры $\omega_{I+\Lambda}$ и ω сингулярны, то сингулярны меры $\omega_{(I+\Lambda)V}$ и ω_V, где V — унитарная матрица. В самом деле, рассмотрим множество $\mathscr{C}_1 = V^{-1}\widetilde{\mathscr{C}}$;

$$\omega\mathscr{C}_1 = \omega V^{-1}\widetilde{\mathscr{C}} = \omega\widetilde{\mathscr{C}} = 0,$$

так как мера ω сохраняется при ортогональных преобразованиях;

$$\omega_{(I+\Lambda)V}\mathscr{C}_1 = \omega_{I+\Lambda}\widetilde{\mathscr{C}} = 1.$$

Таким образом, сингулярны меры $\omega_{(I+\Lambda)V}$ и ω_V, т. е. равные им меры $\omega_{U(I+\Lambda)V}$ и ω.

ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

К § 1. Интегрирование на бесконечномерных пространствах рассматривал впервые Даниэль [25]. Далее следует отметить работы А. Н. Колмогорова [7], Йессена [30], Какутани [31].

К § 2. На линейных пространствах меры обычно вводятся в предположении наличия той или иной топологии — банаховской у А. Н. Колмогорова [8], локально выпуклой у Р. А. Минлоса [12], Ю. В. Прохорова [13] и В. В. Сазонова [14]. При некоторых предположениях относительно связи между мерой и топологией можно доказать возможность счетно-аддитивного продолжения меры [3, 12, 13, 14]. При наличии гауссовой меры в X' можно ввести гильбертову метрику с помощью скалярного произведения

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 u_2 e^{-Q_{f,g}(u_1, u_2)}\, du_1\, du_2;$$

тогда построение канонической системы линейных функционалов можно провести путем обычной ортонормализации счетной тотальной системы. Но гильбертова метрика в X' — не по существу, так как в гильбертовом пространстве мера, вообще говоря, не будет счетно-аддитивной. Для получения счетно-аддитивной меры нужно производить расширение гильбертова пространства; впервые это было указано Фридрихсом и Шапиро [27]. Свод различных методов расширения приведен Гроссом [29].

К § 3. Теоремы п. 1 об усреднениях были даны Йессеном [30]. Закон 0 или 1 принадлежит А. Н. Колмогорову [7]. Большинство предложений пп. 5—10 являются следствиями или частными случаями общих теорем теории вероятностей. Вариант теоремы п. 5 имеется у Б. В. Гнеденко [5]. Теорема п. 6 есть уточнение закона больших чисел Чебышева, данное А. Н. Колмогоровым [9], п. 9 — частный случай усиленного закона больших чисел А. Н. Колмогорова [10]. «Признак Колмогорова — Хинчина» п. 8 можно извлечь из [11]; теоремы Камерона и Мартина: о преобразовании подобия — из [23], о сдвиге — из [24].

К § 4. Формула (10) п. 8 служила определением меры Винера у самого Винера, построившего ее из теоретико-вероятностных соображений при анализе броуновского движения [36]. Винер доказал счетную аддитивность меры w на пространстве C_0, а также тот важный факт, что мера w сосредоточена на функциях, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $1/2 - \varepsilon$. Изложение теории Винера приведено также в главе IX книги [2] Пэли и Винера. Применяется еще и такой подход: отправляясь от формулы (10) п. 8, распространяют квазиобъем w по теореме Колмогорова (§ 1) на σ-кольцо подмножеств пространства $X(0, \pi)$ всех функций на отрезке $[0, \pi]$ и затем сужают ее на пространство $C_0(0, \pi)$, проверив предварительно, что оно имеет в $X(0, \pi)$ внешнюю меру 1 (см., например, [20]). Следует иметь в виду, что при этом $C_0(0, \pi)$ неизмеримо в $X(0, \pi)$. И. М. Ковальчик [6] составил содержательный обзор результатов многих авторов по теории и применениям интеграла Винера. Интеграл Пэли — Винера — Зигмунда [33] часто называется стохастическим интегралом. Теорема п. 7 принадлежит О. Г. Смолянову [15]. Теорема Камерона и Мартина о множестве непрерывных функций полной меры приводится в [23]; см. примеры у Ф. В. Широкова [21]. Вычисление меры шара (п. 1) произведено В. М. Адамяном.

К § 5. Теорема 1 может быть выведена также из теоремы Какутани об условиях эквивалентности двух мер на бесконечном произведении пространств с эквивалентными компонентами на каждом пространстве [31]. Для пространства C_0 достаточность условий $y'(t) \in L_2$ была доказана многими авторами [6], необходимость — Сигалом [34].

К § 6. На пространстве C_0 общий вид линейных измеримых функционалов был найден Грейвсом [28].

К § 7. Оператор эквивалентности в гильбертовом пространстве введен Фелдманом [26]. Подробное изложение теории ядерных операторов имеется в книге И. М. Гельфанда и Н. Я. Виленкина [3]; теорема Дж. фон Неймана — в [32].

К § 8. М. Г. Сонис [17] (см. Дополнение) дал более общую формулировку теоремы о произведении (п. 3), заменив измеримое преобразование на любое ограниченное преобразование в гильбертовом пространстве.

К § 9. А. М. Вершик [1] показал, что линейные преобразования пространства Ω, сохраняющие меру, определяются ортогональными преобразованиями в пространстве $L_2(\Omega)$. Теоремы о квадратичных функционалах — см. в [19]. Аксиоматическая теория полилинейных и степенных функционалов на пространстве Ω построена О. Г. Смоляновым [16].

К § 10. Сейдман [35] показал, что оператор вида $V(I+S)$, где V — ортогональный оператор, а S — оператор Гильберта — Шмидта, переводит меру в Ω в эквивалентную (но без обратной теоремы). Близкие формулировки, связывающие оператор эквивалентности с эквивалентностью мер, имеются у Сигала [34], но в иной обстановке. Описанные здесь результаты взяты из диссертации Фан Дык Тиня [18].

К § 11. Основные результаты (пп. 5—9) принадлежат Фан Дык Тиню [18]. Примеры линейных преобразований, переводящих меру Винера в пространстве C_0 в эквивалентную, рассматривались многими авторами [6]; в частности, линейное преобразование с интегралом Пэли — Винера — Зигмунда имеется у Вудворда [37].

К § 12. Последний пример п. 3 впервые рассматривался Камероном и Мартином [22]; позднее были предложены и иные способы вычисления, частично описанные в [4].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Вершик А. М., Общая теория гауссовых мер в линейных пространствах, Успехи матем. наук **19** (1964), № 1, 210—212.
2. Винер Н., Пэли Р., Преобразование Фурье в комплексной области, «Наука», 1964.
3. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа («Обобщенные функции», вып. 4), Физматгиз, 1961.
4. Гельфанд И. М., Яглом А. М., Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике, Успехи матем. наук **11** (1956), № 1, 77—114.
5. Гнеденко Б. В. Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aléatoire, Ann. Math. **44** (1943), 423—453.
6. Ковальчик И. М., Интеграл Винера, Успехи матем. наук **18** (1963), № 1, 97—134.
7. Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, 1936.
8. Колмогоров А. Н., La transformation de Laplace dans les espaces linéaires, C. R. Acad. Sci. **200** (1935), 1717—1718.
9. Колмогоров А. Н., Sur la loi des grands nombres, C. R. Acad. Sci. **185** (1927), 919—921.
10. Колмогоров А. Н., Sur la loi forte des grandes nombres, C. R. Acad. Sci. **191** (1930), 910—911.
11. Колмогоров А. Н., Хинчин А. Я., Über Konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufalle bestimmt werden, Мат. сб. **32** (1925), 668—677.
12. Минлос Р. А., Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры, Труды Моск. матем. об-ва **8** (1959), 497—518.
13. Прохоров Ю. В., The method of characteristic functionals, Proc. 4th Berkl. Symp. on Math. Statistics and Probability, 1960, **2** (1961), 403—419.
14. Сазонов В. В., Замечание о характеристических функционалах, Теория вероятностей и ее применения **3** (1958), 2, 201—205.
15. Смолянов О. Г., Об измеримости и неизмеримости подмножеств некоторых функциональных пространств с мерой, Вестник МГУ, 1966, серия 1, № 4, 72—85.
16. Смолянов О. Г., Об измеримых полилинейных и степенных функционалах в некоторых линейных пространствах с мерой, ДАН СССР (1966), **170**, 3, 38—41.
17. Сонис М. Г., О некоторых измеримых подпространствах пространства всех последовательностей с гауссовой мерой, Успехи матем. наук **21** (1966), 5, 277—279.
18. Фан Дык Тинь, Измеримые линейные функционалы и преобразования в линейном пространстве с гауссовой мерой, Успехи матем. наук **20** (1965), № 3, 244—247.
19. Фан Дык Тинь, Шилов Г. Е., Квадратичные функционалы в пространстве с гауссовой мерой, Успехи матем. наук **21** (1966), № 2, 226—229.

20. Шилов Г. Е., Интегрирование в бесконечномерных пространствах и интеграл Винера, Успехи матем. наук 18 (1963), № 2, 99—120.
21. Широков Ф. В., Пример броуновской траектории $x(t)$ с $\int_0^1 |dx(t)|^2 = \frac{1}{2}$. Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1964—1965 гг., секция математическая, МЭИ, Москва, 1965, 216—228.
22. Cameron R. H., Martin W. T., Evaluation of various Wiener integrals by use of certain Sturm-Liouville differential equations, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), № 2, 73—90.
23. Cameron R. H., Martin W. T., The behaviour of measure and measurability under change of scale in Wiener space, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), № 2, 130—137.
24. Cameron R. H., Martin W. T., Transformation of Wiener integral under translations, Ann. Math. 44 (1943), 423—453.
25. Daniel P., Integrals in an infinite numbers of dimensions, Ann. Math. (2), 20 (1918—19), 281—288.
26. Feldman, Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes, Pacific J. Math. 8 (1958), № 4, 699—708.
27. Friedrichs K. O., Shapiro H. N., Integration over Hilbert spaces and outer extensions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 43 (1957), № 4, 336—338.
28. Graves R. E., Additive functionals over a space of continuous functions, Ann. Math. 54 (1951), № 2, 275—285.
29. Gross L., Classical analysis on a Hilbert space, Proc. Conf. Theory and Applic. Analysis Function Space, Dedham, Mass. 1963, Cambridge Mass. Technol. Press 51—68 (1964).
30. Jessen B., The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions, Acta Math. 63 (1934), 249—323.
31. Kakutani S., Notes on infinite product measure space, I, Proc. Imper. Acad. Tokyo 19 (1943), 148—151.
32. Neumann J., von., Characterisierung des Spektrums eines Integraloperators, Actualités Sci. et Ind. 229 (1935).
33. Paley R. E. A. C., Wiener N., Zygmund A., Notes on random functions, Math. Zeitschrift 37 (1933), 647—668.
34. Segal I. E., Distributions in Hilbert spaces and canonical systems of operators, Trans. Math. Amer. Soc. 88 (1958), № 1, 12—41, 12—41.
35. Seidman T., Linear transformation of a functional integral II, Comm. Pure Appl. Math. 17 (1964), № 4, 493—508.
36. Wiener N., The average value of an analytic functional, Proc. Nat. Acad. Sci. 7 (1921), № 9, 253—260; The average value of an analytic functional and the Brownian movement, ibid. № 10, 294—298.
37. Woodward D. A., A general class of linear transformations of Wiener integral, Trans. Amer. Mat. Soc. 100 (1961), № 3, 459—480.