

Г. Е. ШИЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ВТОРОЙ СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия
для государственных университетов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

517.944 517, 4
517.2 (075)
III 59
УДК 517.0 (075.8)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
-----------------------	---

ЧАСТЬ I

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Глава I. Элементарная теория обобщенных функций	9
§ 1. Задача о расширении совокупности обычных функций	9
§ 2. Основные функции одного переменного	12
§ 3. Обобщенные функции одного переменного	15
1. Определенные и примеры обобщенных функций (15). 2. Обычные функции, как обобщенные (17). 3. Дальнейшие примеры сингулярных обобщенных функций (18). 4. Обобщенные функции в комплексном пространстве (20). Задачи (21).	
§ 4. Действия с обобщенными функциями одного переменного	23
1. Сложение и умножение на число и функцию (23). 2. Дифференцирование (23). 3. Примеры (24). Задачи (27).	
§ 5. Обыкновенные дифференциальные уравнения	28
1. Уравнение $y' = 0$ (28). 2. Система $y' = Ay$ (30). 3. Существование первообразной (31). 4. Система $y' - Ay = f$ (32). 5. Решения, равные нулю на полуоси (33). 6. Граничная задача (34). 7. Фундаментальная функция дифференциального оператора (36). Задачи (37).	
§ 6. Основные и обобщенные функции нескольких переменных	38
1. Определения (38). 2. Примеры (40). 3. Обобщенные функции в области (41). Задачи (42).	
§ 7. Действия с обобщенными функциями нескольких переменных	43
1. Определения (43). 2. Примеры (43): 1. Независимость высших производных от порядка дифференцирования (43). 2. Производные по С. Л. Соболеву (44). 3. Производные функции $\theta(x_1, \dots, x_n)$ (44). 4. Дифференцирование обобщенной функции $f(\omega, x)$ (44). 5. Функционал порядка сингулярности $\leq p$ (46). 6. Производные кусочно-непрерывной функции (46). 7. Истолкование формулы Грина (47). 8. Оператор Лапласа и сферически симметричные функции (47). 9. Фундаментальная функция оператора Δ^m (49). 3. Однозначность восстановления обобщенной функции по ее первым производным (51). 4. Обобщенная функция с непрерывными первыми производными (53). Задачи (56).	

Глава II. Специальные вопросы теории обобщенных функций . . .		59
§ 8.	Локальные свойства и носитель обобщенной функции	59
	1. Обобщенная функция, равная нулю в области (59). 2. Сохранение локальных свойств при дифференцировании (61). 3. Основная функция, равная 1 на заданном множестве и 0 вне его окрестности (62). 4. Разложение единицы (63). 5. Разложение основной функции (64). 6. Локальное равенство нулю обобщенной функции (64). Задачи (65).	
§ 9.	Предельный переход в пространстве обобщенных функций . . .	66
	1. Определение и простейшие свойства (66). 2. Дельта-образные последовательности (68). 3. Теорема о полноте пространства K' (69). 4. Обобщенные функции, непрерывно зависящие от параметра (72). 5. Дифференцируемые функции параметра (74). 6. Аналитические функции параметра (75). 7. Функции аргумента (ω, x) и их интегрирование по ω (76). Задачи (79).	
§ 10.	Структура обобщенных функций	79
	1. Формулировки результатов (79). 2. Лемма о порядке сингулярности обобщенной функции в ограниченной области (80). 3. Общий вид функционала в ограниченной области (81). 4. Общий вид финитного функционала в пространстве K (83). 5. Общий вид финитного функционала (84). 6. Общий вид функционала, сосредоточенного в одной точке (85). 7. Вопрос о гладкости результата интегрирования функции от (ω, x) (87). Задачи (89).	
§ 11.	Некоторые специальные обобщенные функции	92
	1. Обобщенная функция x^{λ}_{+} (92). 2. Обобщенная функция x^{λ}_{-} (94). 3. Обобщенные функции $ x ^{\lambda}$ и $ x ^{\lambda} \operatorname{sgn} x$ (94). 4. Действия с обобщенными функциями x^{λ}_{+} и прочими (96). 5. Обобщенная функция r^{λ} (98). 6. Разложение r^{λ} на плоские волны (100). Задачи (103).	
§ 12.	Свертка обобщенных функций	109
	1. Свертка обычных функций (109). 2. Определение свертки обобщенных функций (110). 3. Существование и основные свойства свертки функционала с основной функцией (112). 4. Свойства свертки обобщенных функций (114). 5. Выражение свертки обобщенных функций через свертки обычных функций (115). 6. Коммутативность свертки (118). 7. Носитель свертки (119). 8. Предел и производная свертки (120). 9. Обобщение на случай нескольких переменных (120). Задачи (122).	
§ 13.	Порядок сингулярности	123
	1. Порядок сингулярности $s(f)$ (123). 2. Порядок сингулярности $c(f)$ (124). 3. Теоремы о порядке сингулярности (125). 4. Величина $s(f)$ и свертка (126). 5. Связи между $s(f)$ и $c(f)$ (128). 6. Оценки $s(f)$ и $c(f)$ через $s(\Delta^m f)$ для финитных функционалов (130). 7. Оценки для произвольных функционалов в ограниченной области (132). Задачи (133).	
§ 14.	Преобразование Фурье обобщенных функций	134
	1. Преобразование Фурье обычной функции (134). 2. Пространство Z (136). 3. Функционалы на пространстве K и на пространстве Z (138). 4. Преобразование Фурье обобщенной функции (141). 5. Примеры (144). Задачи (146).	

- § 15. Преобразование Фурье обобщенных функций (продолжение) . 147
 1. Случай нескольких переменных (147). 2. Преобразование Фурье и повороты (149). 3. Преобразование Фурье финитного функционала (150). 4. Бесселевы функции (152). 5. Преобразование Фурье от $\delta(r-a)$ (153). 6. Преобразование Фурье и свертка (154). 7. Другие формы преобразования Фурье (156). Задачи (156).

ЧАСТЬ 2

ПРОБЛЕМЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

- Глава III. Фундаментальные функции дифференциальных операторов и локальные свойства решений 158
- § 16. Формула типа Пуассона 158
 1. Свойства совокупности решений уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ в K' (158). 2. Формула типа Пуассона (159). 3. Следствия, относящиеся к порядку сингулярности решения (162). 4. Формула типа Пуассона для гипоеллиптического оператора (163). 5. Классы Жеврея (164). Задачи (167).
- § 17. Существование фундаментальной функции 169
 1. Общие соображения (169). 2. Запись многочлена P в нормальной форме (170). 3. Лестница Хёрмандера (172). 4. Существование фундаментальной функции (173). 5. Возможность искривления лестницы (174). Задачи (175).
- § 18. Решение уравнения с правой частью 175
 1. Разложение по системе лестниц Хёрмандера (175). 2. Существование искомым лестниц (177). Задачи (179).
- § 19. Условие гипоеллиптичности по корням многочлена (необходимость) 180
 1. Диаграмма модулей дифференциального оператора (180). 2. Лемма о производных решения гипоеллиптического уравнения (182). 3. Характеристическое свойство поверхности нулей гипоеллиптического многочлена (183). 4. Лемма о производных решения γ -гипоеллиптического уравнения (185). 5. Характеристическое свойство поверхности нулей γ -гипоеллиптического уравнения (185) 6. Оценка нижней грани $B^q q^{q\beta} d^{-q}$ (186). Задачи (187).
- § 20. Условие гипоеллиптичности по корням многочлена (достаточность) 187
 1. Лемма о модуле многочлена (188). 2. Доказательство основной теоремы (189). 3. Условие γ -гипоеллиптичности (194). 4. Использование теоремы Зайденберга — Тарского (196). Задачи (198).
- § 21. Условия гипоеллиптичности по поведению многочлена в вещественной области 199
 1. Леммы Хёрмандера (199). 2. Эллиптические уравнения (202). Задачи (204).
- § 22. Метод Радо 205
 1. Общая схема метода (205). 2. Случай однородного эллиптического многочлена (207). 3. Случай однородного неэллиптического многочлена (208). 4. Расположение особенностей фундаментальной функции (211). Задачи (213).

Глава IV. Уравнения в полупространстве	214
§ 23. Корректные краевые задачи для систем уравнений	214
§ 24. Вспомогательные построения	219
1. Интерполяционный многочлен Ньютона (219). 2. Оценка нормы матрицы e^{tP} через характеристические числа матрицы P (222). 3. Обобщенные детерминанты Вандермонда (223). 4. Разделенные разности (227). 5. Двойные разделенные разности (228).	
§ 25. Обыкновенные уравнения и системы	230
1. Простейшая корректная задача для системы (230). 2. Простейшая корректная задача для одного уравнения (232). 3. Общая корректная задача для системы (238). 4. Другие условия на рост решения при $t \rightarrow \infty$ (239).	
§ 26. Уравнения в частных производных	239
1. Основная теорема для системы (239). 2. Основная теорема для одного уравнения (243). 3. Необходимость условий корректности (246). 4. Общая краевая задача (246). 5. Примеры (248). 6. Задачи с другими условиями на рост при $t \rightarrow \infty$ (250).	
§ 27. Фундаментальные решения регулярных краевых задач	250
1. Свертка в пространстве \mathcal{E} (250). 2. Свойства свертки (252). 3. Регулярные уравнения и системы (253). 4. Производные фундаментального решения (254). 5. Выражение решения с произвольными $u_0(0, x), \dots, u_{r-1}(0, x)$ через фундаментальное решение (257). 6. Фундаментальные решения классических краевых задач ($n=1$) (258). Задачи (260).	
§ 28. Формулы фундаментальных решений регулярных уравнений ($n=1$).	262
1. Выражение преобразования Фурье фундаментального решения однородного уравнения (262). 2. Случай гиперболического уравнения (265). 3. Случай регулярного уравнения (267). Задачи (271).	
§ 29. Фундаментальные решения регулярных уравнений ($n > 1$)	272
1. Общая схема и классические примеры (272). 2. Общее регулярное уравнение (278). 3. Однородное гиперболическое уравнение (281). 4. Регулярное однородное уравнение (284).	
§ 30. Уравнения со свободным членом	287
1. Общая схема и формулировка основной теоремы (287). 2. Система обыкновенных уравнений (291). 3. Обыкновенное уравнение порядка m (295). 4. Уравнение с частными производными (301).	
§ 31. Смешанные задачи	303
1. Общая схема и формулировка основной теоремы (303). 2. Примеры (307). 3. Пространства $H_+^{\beta, q}$ и $\mathcal{E}_+^{\beta, q}$ (311). 4. Доказательство необходимости для системы (313). 5. Доказательство необходимости для уравнения m -го порядка (316). 6. Доказательство достаточности (318).	
Краткие литературные указания	323
Алфавитный указатель	325

ПРЕДИСЛОВИЕ

Второй специальный курс математического анализа содержит основы теории обобщенных функций и ее применения к общей теории уравнений с частными производными. Под названием «Анализ-4» этот курс несколько раз был прочитан автором на механико-математическом факультете МГУ.

В первой части книги излагаются начала теории обобщенных функций. За основу принято определение Соболева — Шварца (обобщенные функции \equiv линейные непрерывные функционалы на пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций). Отбор фактов из теории обобщенных функций определялся в основном требованиями второй части. Общая теория уравнений с частными производными, которой посвящена вторая часть, насчитывает сейчас уже большое количество серьезных результатов. Мы выбрали для изложения в курсе два ее раздела: теорию фундаментальных функций (и связанную с ней теорию гипозэллиптичности Л. Хёрмандера) и вопросы корректных задач в полупространстве. Одним из существенных оснований для выбора именно этих разделов была возможность использования сравнительно элементарного аналитического аппарата.

Вторым важным основанием было то, что эти разделы не получили освещения в известной серии монографий «Обобщенные функции» (И. М. Гельфанд и др.). Но самым главным, разумеется, является тот факт, что на этих двух разделах весьма выпукло отразились идеи общей теории уравнений с частными производными, не представляющей специальных требований к типу и порядку уравнений и тем не менее позволяющей установить важные и глубокие закономерности.

Изложение, как и в первой книге, сопровождается рядом задач, куда вынесены также и некоторые интересные, но не лежащие непосредственно на пути вопросы теории (в частности, все, относящееся к пространству S' функций степенного роста и их производных).

От читателя требуется владение общим курсом математического анализа и некоторое, впрочем небольшое, знакомство с книгой «Математический анализ. Специальный курс» (2-е изд., Физматгиз, 1961), которая в ссылках обозначается «Анализ III».

ЧАСТЬ I

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Задача о расширении совокупности обычных функций

Проблемы математического анализа ставятся большей частью на языке классической теории функций, сформировавшемся в начале XIX века. Смотря по характеру задач, рассматриваются функции аналитические, дифференцируемые, непрерывные, интегрируемые (по Лебегу) и пр. Несмотря на огромное богатство возможностей, которые представились в связи с глубокой разработкой различных разделов теории функций, в наше время стало ясно, что классический аппарат во многих случаях недостаточен и требует определенного расширения.

Чтобы пояснить это соображение, условимся называть *обычной* функцией всякую функцию $y = f(x)$, определенную при $-\infty < x < \infty$, принимающую вещественные значения и интегрируемую (по Лебегу) в каждом конечном промежутке $a \leq x \leq b$. Так, например, всякая непрерывная функция, всякая ограниченная (измеримая) на каждом конечном промежутке принадлежит к числу обычных функций. Как принято, мы будем считать, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ есть одна и та же обычная функция, если почти всюду $f_1(x) = f_2(x)$.

Всю совокупность обычных функций мы обозначим через E . Обычные функции можно складывать и умножать на вещественные числа, так что они образуют линейное вещественное пространство.

В пределах пространства E можно выполнять также различные операции предельного перехода. Например, если последовательность обычных функций $f_1(x), \dots, f_\nu(x), \dots$ стремится почти всюду к некоторой функции $f(x)$ и при этом выполняется неравенство

$$|f_\nu(x)| \leq f_0(x),$$

где $f_0(x)$ — фиксированная обычная функция, то, согласно известной теореме Лебега, предельная функция $f(x)$ будет интегрируемой в каждом конечном промежутке, т. е. также обычной функцией.

С другой стороны, такую важную для анализа операцию, как дифференцирование, можно применять далеко не ко всем обычным функциям. Некоторые из обычных, даже непрерывных функций вообще не имеют производных, как известная функция Вейерштрасса *); у некоторых обычных функций производная хотя и имеется, но не представляет собою обычной функции (например, $y = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$). Иногда производная у обычной непрерывной функции имеется (почти всюду) и есть обычная функция, но она такова, что, интегрируя ее, мы не возвращаемся к исходной функции (например, для канторовой функции $y = C(x)$), так что эта производная не приносит пользы. Известно **, что абсолютно непрерывные функции (и только они) обладают такой обычной производной, что выполняется соотношение

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(\xi) d\xi.$$

(Функция Кантора $C(x)$ непрерывна, но не абсолютно непрерывна.) Наконец, из сходимости $f_v(x) \rightarrow f(x)$ далеко не всегда следует сходимость производных $f'_v(x) \rightarrow f'(x)$, даже если они существуют.

Имеется хорошо известный класс функций, в пределах которого не встречаются указанные нежелательные явления — а именно класс аналитических функций; но он слишком узок для приложений. Желательно было бы сохранить для использования хотя бы все обычные функции. Как это ни странно на первый взгляд, оказывается возможным не сузить, а расширить класс обычных функций с тем, чтобы устранить трудности с производными.

Мы расширим в этой главе совокупность E до некоторой новой совокупности, в пределах которой можно будет разумно определить операцию дифференцирования, причем так, что эта операция будет и непрерывной относительно предельного перехода.

Вначале отметим следующее. Пусть $\varphi(x)$ — ограниченная (измеримая) финитная функция; последнее значит, что $\varphi(x)$ обращается в нуль вне некоторого конечного промежутка $a \leq x \leq b$. Каждой обычной функции мы можем сопоставить число

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx.$$

*) Или аналогичная функция Ван-дер-Вардена; см. Анализ III, стр. 274 — 275.

***) Анализ III, гл. VI, §§ 2 и 3.

причем фактически интеграл распространяется лишь по промежутку $[a, b]$. Если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и имеет обычную производную $f'(x)$, то аналогично мы можем составить выражение

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx.$$

Предположим теперь, что $\varphi(x)$ также абсолютно непрерывна и имеет ограниченную производную $\varphi'(x)$. Тогда в последнем интеграле мы можем выполнить интегрирование по частям, которое приведет к равенству

$$(f', \varphi) = f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx.$$

Внеинтегральный член обращается в нуль, поскольку $\varphi(x)$ — финитная функция. Поэтому в рассматриваемом случае мы имеем

$$(f', \varphi) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -(f, \varphi').$$

Но если $f'(x)$ и не существует, выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \quad (1)$$

все равно имеет смысл для каждой финитной ограниченной функции $\varphi(x)$ с ограниченной производной $\varphi'(x)$. Таким образом, хотя у нас и нет функции $f'(x)$, как таковой, но если нам нужны только результаты интегрирования произведений $f'(x)$ с ограниченными финитными функциями, обладающими ограниченными производными, то такие результаты мы всегда можем найти, как если бы функция $f'(x)$ существовала: именно, следует взять интегралы (1) с обратным знаком.

Это наблюдение позволит нам подойти к надлежащему расширению понятия функции. Раньше мы требовали от функции наличия определенных значений в каждой (или почти в каждой) точке; теперь мы будем интересоваться лишь значениями интегралов от произведения данной функции с некоторыми «пробными» функциями; если для данной функции известны *только* такие интегралы, будем говорить, что у нас имеется *обобщенная функция*. Приведенное выше рассуждение показывает, что при должном выборе запаса пробных функций всякая обобщенная «функция» будет обладать и производной — также обобщенной «функцией».

Но как же можно определить интеграл от произведения обобщенной функции и пробной функции, не имея возможности дейст-

вовать с значениями функции в отдельных точках? Ответ простой: *в данном случае не следует определять интеграл конструктивно, а лишь аксиоматически*, как это описывается в следующем пункте. Пробные функции можно выбирать по-разному и получать тем самым различные классы обобщенных функций. Приведенные рассуждения показывают, что для обеспечения существования производной у каждой обобщенной функции производная (обычная) каждой пробной функции также должна быть пробной функцией; отсюда вытекает, что пробные функции нужно брать бесконечно дифференцируемыми. С другой стороны, если мы желаем, чтобы любая обычная функция $f(x)$, как угодно быстро растущая при $|x| \rightarrow \infty$, попала в число обобщенных, т. е. чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

существовал для любой обычной функции — необходимо считать, что пробная функция $\varphi(x)$ сама *финитна*.

После этих наводящих соображений мы можем начать систематическое изложение предмета.

§ 2. Основные функции одного переменного

Будем называть *пробной* или — что более укоренилось — *основной* функцией всякую вещественную функцию $\varphi(x)$, определенную при $-\infty < x < \infty$, непрерывную и имеющую производные (в обычном смысле) любого порядка, и, кроме того, финитную, т. е. обращаящуюся в нуль вне конечного промежутка.

В частности, если основная функция $\varphi(x)$ обращается в нуль вне промежутка $[a, b]$, то мы будем называть ее *сосредоточенной на промежутке* $[a, b]$, а сам промежуток $[a, b]$ будем называть *носителем* функции $\varphi(x)$ (обозначение $[a, b] = \text{supp } \varphi$).

Основные функции можно складывать друг с другом и умножать на вещественные числа, так что они образуют линейное пространство; мы обозначим всю совокупность основных функций через K .

В пространстве K определена также операция умножения основных функций $\varphi(x)$ на *произвольную* бесконечно дифференцируемую (любого роста на бесконечности) функцию $g(x)$, дистрибутивная со сложением.

Во многих вопросах бывает необходимо рассматривать в качестве пробных (основных) функций также и комплекснозначные функции вида $\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — определенные выше вещественные основные функции. В пространстве комплекснозначных основных функций (которые по-прежнему обозначаются через K) кроме указанных

операций возможно еще умножение на комплексные числа и на комплексные бесконечно дифференцируемые функции.

Введем в пространство K определение предельного перехода. Мы будем говорить, что последовательность $\varphi_1(x), \dots, \varphi_\nu(x), \dots$ основных функций *сходится в пространстве K к нулю*, если все эти функции обращаются в нуль вне одного и того же ограниченного промежутка $[a, b]$ и равномерно сходятся к нулю, так же как и их производные любого порядка.

Пример 1. Функция

$$\varphi(x; a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| \geq a \end{cases}$$

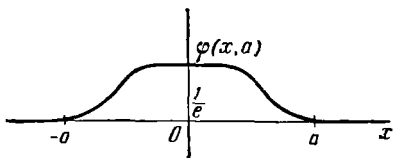


Рис. 1.

является основной (рис. 1). Последовательность $\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\nu} \varphi(x, a)$

стремится к нулю в пространстве K . Последовательность $\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\nu} \varphi\left(\frac{x}{\nu}, a\right)$ стремится к нулю равномерно на оси $-\infty < x < \infty$ вместе со всеми производными, но в пространстве K *не стремится к нулю*, поскольку нет общего ограниченного промежутка, вне которого все функции $\varphi_\nu(x)$ обращались бы в нуль.

Будем далее говорить, что последовательность основных функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_\nu(x), \dots$ *сходится в K к функции $\varphi(x)$* , если $\varphi(x)$ входит в K и разность $\varphi(x) - \varphi_\nu(x)$ стремится в K к нулю.

Операции сложения и умножения на число и бесконечно дифференцируемую функцию непрерывны относительно этой сходимости. Иными словами, *если $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ в K , $\psi_\nu \rightarrow \psi$ в K , то $\alpha\varphi_\nu + \beta\psi_\nu \rightarrow \alpha\varphi + \beta\psi$ в K при любых вещественных α и β , $g(x)\varphi_\nu(x) \rightarrow g(x)\varphi(x)$ в K при любой бесконечно дифференцируемой функции $g(x)$.*

З а м е ч а н и е. Пространство K *неметризуемо*; иными словами, в нем нельзя ввести понятие расстояния $\rho(\varphi, \psi)$ с обычными свойствами*) так, чтобы сходимость φ_ν к φ была бы равносильна выполнению соотношения $\rho(\varphi, \varphi_\nu) \rightarrow 0$.

Действительно, если в метрическом пространстве имеется система сходящихся последовательностей

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_\nu^{(1)}, \dots &\rightarrow \varphi^{(1)} \\ \dots &\dots \\ \varphi_1^{(m)}, \dots, \varphi_\nu^{(m)}, \dots &\rightarrow \varphi^{(m)} \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

*) См. Анализ III, гл. 2.

и предельные элементы $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(m)}, \dots$ сами сходятся к элементу φ , то всегда возможно, выбрав должным образом по одному элементу из каждой строки, получить последовательность,

$$\varphi_{\nu_1}^{(1)}, \dots, \varphi_{\nu_m}^{(m)}, \dots,$$

также сходящуюся к φ .

Но в пространстве K такая картина не имеет места. Пусть, например,

$$\varphi_{\nu}^{(m)} = \frac{1}{\nu} \varphi(x; m) \quad (\nu = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots),$$

где $\varphi(x; m)$ — функция из примера 1. При каждом фиксированном m последовательность $\varphi_{\nu}^{(m)}$ стремится в K к нулю, как в примере 1. Но никакая последовательность вида $\varphi_{\nu}^{(m)}$ не стремится к нулю в K , так как нет общего отрезка, вне которого все функции $\varphi_{\nu}^{(m)}$ обращаются в нуль.

Таким образом, сходимость в K не может быть задана никакой метрикой. Но она может быть задана некоторой топологией; см. задачу 7 к этому параграфу.

Задача 1. Показать, что пространство K полно относительно введенной сходимости. Полнота в данном случае означает следующее: если имеется последовательность основных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_{\nu}, \dots$, сосредоточенных в одном и том же отрезке $[a, b]$, и при каждом $q = 0, 1, 2, \dots$ последовательность производных $\varphi_{\nu}^{(q)}(x)$ равномерно сходится к некоторому пределу $\psi_q(x)$, то предельная функция $\psi_0(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_{\nu}(x)$ является основной,

$\varphi_q(x) = \psi_0^{(q)}(x)$ и последовательность $\varphi_{\nu}(x)$ сходится к $\psi_0(x)$ в пространстве K .

2. Дана последовательность $\varphi_{\nu}(x)$, $\nu = 1, 2, \dots$, основных функций, обращающихся в нуль вне фиксированного отрезка $[a, b]$. Показать, что при достаточно быстро стремящихся к 0 постоянных b_{ν} последовательность $b_{\nu} \varphi_{\nu}(x)$ будет сходиться в K к нулю, а ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \varphi_{\nu}(x)$ будет в K сходиться.

Указание. Последовательность b_{ν}^{-1} должна стремиться в ∞ быстрее, чем любая последовательность $m_{\nu p} = \max |\varphi_{\nu}^{(p)}(x)|$ (при каждом фиксированном $p = 0, 1, 2, \dots$).

3. Пусть имеется семейство основных функций $\{\varphi(x; t)\}$, сосредоточенных на фиксированном отрезке $[a, b]$ и непрерывно зависящих от параметра t , меняющегося в промежутке $[c, d]$. Непрерывная зависимость от t означает в данном случае следующее: если $t_{\nu} \rightarrow t$, то

$$\varphi(x; t_{\nu}) \rightarrow \varphi(x; t) \text{ в } K.$$

Показать, что семейство $\{\varphi(x; t)\}$ можно проинтегрировать по параметру t , причем интеграл, понимаемый как предел (в K) обычных интегральных сумм

$$\sum_{k=0}^m \varphi(x; t_k) \Delta t_k,$$

будет снова основной функцией, сосредоточенной на отрезке $[a, b]$.

Указание. Использовать задачу 1. Функция $\varphi(x; t)$ равномерно непрерывна по x и t , так же как и все ее производные по x .

4. Рассмотрим линейное пространство C_0 всех финитных непрерывных функций на оси $-\infty < x < \infty$. Введем в него топологию, задавая окрестность нуля любой всюду положительной непрерывной функцией $\gamma(x)$, как совокупность всех $\varphi \in C_0$, для которых

$$|\varphi(x)| \leq \gamma(x).$$

Показать, что сходимость, отвечающая этой топологии, следующая: последовательность $\varphi_\nu(x) \in C_0$ сходится в C_0 к нулю, если все $\varphi_\nu(x)$ обращаются в нуль вне одного и того же отрезка и при $\nu \rightarrow \infty$ равномерно стремятся к нулю.

Указание. Требуется доказать два факта: а) элементы φ_ν попадают в любую окрестность нуля, начиная с некоторого номера; б) если функции $\varphi_\nu(x)$ попадают в любую окрестность нуля, начиная с некоторого номера, то они сходятся к нулю в указанном смысле (от противного).

5. Показать, что топология в задаче 4 неметризуема.

Указание. См. замечание на стр. 13.

6. Рассмотреть в C_0 счетное множество A элементов вида

$$\frac{\varphi_0(x)}{m} + \frac{\varphi_m(x)}{k},$$

где $k = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots, \varphi_0(0) \neq 0, \varphi_m(x) = \varphi_0\left(\frac{x}{m}\right)$.

Показать, что $\varphi(x) \equiv 0$ принадлежит к замыканию множества A и тем не менее не является пределом ни одной сходящейся к 0 последовательности элементов из A (О. Г. Смолянов).

7. Зададим топологию в K следующим образом. Пусть дано любое m и взяты $m+1$ положительных непрерывных функций $\gamma_0(x), \dots, \gamma_m(x)$. Окрестность нуля состоит из всех основных функций $\varphi(x)$, для которых

$$|\varphi(x)| \leq \gamma_0(x), \dots, |\varphi^{(m)}(x)| \leq \gamma_m(x).$$

Показать, что сходимость в K отвечает этой топологии.

Указание. Сравнить с задачей 4.

§ 3. Обобщенные функции одного переменного

1. Каждой обычной функции $f(x)$ (§ 2) соответствует функционал на пространстве K

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Этот функционал линейен, т. е. для любых φ_1, φ_2 из K и любых вещественных α_1 и α_2

$$(f, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 (f, \varphi_1) + \alpha_2 (f, \varphi_2).$$

Кроме того, он непрерывен в следующем смысле: если последовательность основных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_\nu, \dots$ стремится к 0 в K , то

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (f, \varphi_\nu) = 0.$$

что вытекает из обычных свойств интеграла.

Таким образом, выражение (1) является линейным непрерывным функционалом на пространстве K .

Существуют и иные линейные непрерывные функционалы на пространстве K , не приводящиеся к виду (1).

Рассмотрим для примера функционал δ , который каждой основной функции $\varphi(x)$ ставит в соответствие число $\varphi(0)$. Очевидно, этот функционал линеен и непрерывен. С другой стороны, мы утверждаем, что ни один из функционалов вида (1) не может сопоставлять каждой функции $\varphi(x)$ число $\varphi(0)$. Действительно, предположим, что для некоторой обычной функции $f(x)$ и любой основной функции $\varphi(x)$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Пусть, в частности, $\varphi(x) = \varphi(x; a)$ (§ 2, пример 1). Тогда мы должны иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x; a) dx = \varphi(0; a) = \frac{1}{e}. \quad (2)$$

Но при $a \rightarrow 0$ интеграл слева стремится к 0, что противоречит равенству (2).

Мы будем называть *обобщенной функцией* любой линейный непрерывный функционал на пространстве K , т. е. функционал f , удовлетворяющий условиям

(1) $(f, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 (f, \varphi_1) + \alpha_2 (f, \varphi_2)$ для любых основных функций φ_1 и φ_2 и любых вещественных чисел α_1 и α_2 ;

(2) если $\varphi_\nu \rightarrow 0$ в K , то $(f, \varphi_\nu) \rightarrow 0$.

Если этот функционал представим в форме (1), будем называть его *регулярным* (или *регулярной функцией*), если же он не представим в форме (1) — *сингулярным* функционалом (или *сингулярной функцией*).

Только что рассмотренный функционал

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0)$$

сингулярен.

Каждой обычной функции соответствует по формуле (1) обобщенная функция. Например, обычной функции $f(x) \equiv C$ (постоянная) отвечает обобщенная функция, задаваемая формулой

$$(f, \varphi) \equiv (C, \varphi) \equiv C \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Естественно, что такую обобщенную функцию мы будем называть *постоянной* C . В частности, обобщенная функция *единица* дей-

ствуем по формуле

$$(1. \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx.$$

2. Две обобщенные функции f_1 и f_2 считаются *равными*, если значения соответствующих функционалов совпадают на каждой основной функции

$$(f_1, \varphi) \equiv (f_2, \varphi), \quad (1)$$

и *различными*, если есть хотя бы одна основная функция φ_0 , на которой эти значения различны:

$$(f_1, \varphi_0) \neq (f_2, \varphi_0).$$

Покажем, что *различным обычным функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответствуют и различные обобщенные функции*. Допустим, что две обычные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определяют по формуле (1) один и тот же функционал, т. е. что для любой $\varphi(x) \in K$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) \varphi(x) dx.$$

Положим $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$; функция $f(x)$ также обычная, и мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

для любой функции $\varphi(x) \in K$. Рассмотрим вначале только основные функции $\varphi(x)$, сосредоточенные на фиксированном отрезке $[a, b]$. Для любой такой функции также

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = 0. \quad (2)$$

Функция $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$ непрерывна; интегрируя (2) по частям, находим

$$\int_a^b F(x) \varphi'(x) dx = 0. \quad (3)$$

По известной лемме вариационного исчисления отсюда вытекает, что $F(x)$ постоянна*). Так как $F(a) = 0$, то $F(x) \equiv 0$; но отсюда

*) Анализ III, гл. III, § 3, стр. 104.

и $f(x)$, равная почти всюду производной от своего неопределенного интеграла, почти всюду на $[a, b]$ равна нулю.

Так как отрезок $[a, b]$ произволен, то $f(x)$ равна нулю почти всюду на всей оси $-\infty < x < \infty$. Таким образом, $f_1(x)$ почти всюду совпадает с $f_2(x)$, что и требовалось.

Приведем для полноты изложения доказательство упомянутой леммы в применении к нашему случаю. Некоторые связанные с ней соображения будут дальше использованы.

Допустим, что $F(x)$ не постоянна, и, например, имеются точки x_1 и x_2 , где $F(x_1) < F(x_2)$. Покажем, что существует основная функция $\varphi(x)$, для которой равенство (3) не выполняется. Возьмем произвольно число A между значениями $F(x_1)$ и $F(x_2)$. Так как $F(x)$ — непрерывная функция, то найдутся непересекающиеся интервалы $\Delta_1 \ni x_1$, $\Delta_2 \ni x_2$, обладающие тем свойством, что для любых $x' \in \Delta_1$, $x'' \in \Delta_2$

$$F(x') < A < F(x'').$$

В качестве функции $\varphi'(x)$ возьмем любую бесконечно дифференцируемую функцию, равную нулю вне Δ_1 и Δ_2 , положительную на интервале Δ_1 , отрицательную на интервале Δ_2 и такую, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) dx = \int_{\Delta_1} \varphi'(x) dx + \int_{\Delta_2} \varphi'(x) dx = 0.$$

Саму функцию $\varphi(x)$ определим, естественно, формулой

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi'(\xi) d\xi;$$

очевидно, что $\varphi(x)$ принадлежит K . Далее, мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - A] \varphi'(x) dx = \int_{\Delta_1} + \int_{\Delta_2} < 0,$$

поскольку оба слагаемых отрицательны. Но тогда и

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - A] \varphi'(x) dx + A \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) dx < 0,$$

так что при данной $\varphi'(x)$ равенство (3) заведомо не выполняется. Для дальнейшего заметим, что достаточно требовать выполнения равенства (3) не для всех $\varphi \in K$, а лишь для некоторого счетного множества, например, для каждой из счетного множества функций $\varphi(x)$, построенных по указанному правилу для каждой пары непересекающихся интервалов Δ_1, Δ_2 с рациональными концами

3. Итак, всю совокупность обычных функций можно рассматривать как часть совокупности обобщенных функций. Совокупность всех обобщенных функций мы обозначим через K' .

Приведем еще несколько примеров обобщенных функций, не сводящихся к обычным функциям.

1. *Сдвинутая дельта-функция* $\delta(x-a)$, которая ставит в соответствие каждой основной функции $\varphi(x)$ число $\varphi(a)$.

2. *Функционал* $\frac{1}{x}$. Функция $\frac{1}{x}$ не является обычной (она не является интегрируемой в окрестности начала координат). Тем не менее для любой основной функции можно образовать выражение

$$\left(\frac{1}{x}, \varphi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

где интеграл понимается как главное значение в смысле Коши, т. е. как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\}.$$

Если произвести в первом слагаемом замену переменного x на $-x$, то мы получим также

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x}, \varphi\right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx. \end{aligned}$$

где интеграл сходится уже абсолютно. Легко проверить, что полученный функционал линеен и непрерывен.

3. *Функционал порядка сингулярности* $\leq p$. Так называют функционал вида

$$(f, \varphi) = \sum_{k=0}^p \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) \varphi^{(k)}(x) dx = \sum_{k=0}^p (f_k(x), \varphi^{(k)}(x)), \quad (1)$$

где $f_0(x), \dots, f_p(x)$ — обычные функции.

В представлении (1), в отличие от (1) п. 1, функции $f_k(x)$ уже не определяются однозначно (см. задачу 5 к § 4). Говорят, что функционал f имеет порядок сингулярности ровно p , если он может быть записан в форме (1) с данным p и не может быть записан в такой форме с меньшим p . Обычные функции имеют порядок сингулярности 0.

Функционал δ имеет порядок сингулярности ≤ 1 , поскольку можно записать

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [-\theta(x)] \varphi'(x) dx,$$

где $\theta(x)$ — обычная функция, равная 1 при $x > 0$ и 0 при $x < 0$. При этом, как было показано, $\delta(x)$ не есть обычная функция, так что ее порядок сингулярности равен точно 1.

Функционал f , который ставит в соответствие основной функции $\varphi(x)$ число $\varphi(0) + \varphi'(1) + \dots + \varphi^{(k)}(k) + \dots$, не имеет конечного порядка сингулярности; мы будем говорить в таких случаях, что порядок сингулярности функционала f равен $+\infty$.

4. Остановимся на вопросе о функционалах в комплексном пространстве основных функций. Определение обобщенной функции как линейного непрерывного функционала остается здесь прежним; добавляется лишь возможность принимать такому функционалу и комплексные значения. При этом функционалы могут быть *первого рода*, т. е. при любом комплексном α удовлетворять условию

$$(f, \alpha\varphi) = \alpha(f, \varphi),$$

или *второго рода*:

$$(f, \alpha\varphi) = \bar{\alpha}(f, \varphi),$$

где $\bar{\alpha}$ есть комплексно-сопряженное к числу α .

Каждой обычной комплексной функции $f(x)$ можно поставить в соответствие четыре линейных функционала:

$$(f, \varphi)_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx; \quad (1)$$

$$(f, \varphi)_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \varphi(x) dx; \quad (2)$$

$$(f, \varphi)_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\varphi(x)} dx; \quad (3)$$

$$(f, \varphi)_4 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \overline{\varphi(x)} dx. \quad (4)$$

Первые два из них — функционалы первого рода, последние два — функционалы второго рода. Так как умножение функционала f на число α *всегда* определяется формулой

$$(\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi),$$

то в первом и третьем функционалах умножение на число α функции $f(x)$ переходит в умножение соответствующего функционала на это же число; во втором и четвертом умножение функции на число α отвечает умножению функционала на комплексно сопряженное число $\bar{\alpha}$. Таким образом, выбор того или иного из функционалов (1) — (4) связан с различными способами вложения совокупности обычных функций в пространство обобщенных функций.

Если $f(x)$ — обычная функция и $\bar{f}(x)$ ее комплексно сопряженная, то, как легко проверить, для любого $j=1, 2, 3, 4$ выполняется равенство

$$(\bar{f}, \varphi) = \overline{(f, \bar{\varphi})}.$$

Это дает нам право определить функционал \bar{f} , комплексно сопряженный к данному функционалу f , по формуле

$$(\bar{f}, \varphi) = \overline{(f, \bar{\varphi})}. \quad (5)$$

Очевидно, что функционал \bar{f} , определенный равенством (5), линеен и непрерывен. Далее, переход от f к \bar{f} для обычных функций $f(x)$ всегда отвечает переходу к комплексно сопряженной функции, независимо от того, каким из способов (1) — (4) совокупность обычных функций вложена в пространство обобщенных функций.

Теоремы, доказанные для функционалов какого-нибудь одного из типов (1) — (4), легко превращаются в теоремы для функционалов любого другого типа наложением или снятием знаков комплексного сопряжения. Пока, до § 14, мы для простоты в случае комплексного пространства будем иметь в виду функционалы типа (1).

Задача 1. Пусть основная функция $\varphi(x, t)$, зависящая от параметра t , $c \leq t \leq d$, непрерывна в K по t (§ 2, задача 3). Тогда, согласно задаче 3 § 2, существует основная функция

$$\varphi(x) = \int_c^d \varphi(x, t) dt. \quad (1)$$

Показать, что для любого $f \in K'$

$$(f, \varphi) = \left(f, \int_c^d \varphi(x, t) dt \right) = \int_c^d (f, \varphi(x, t)) dt.$$

Указание. Интеграл (1) есть предел своих интегральных сумм в смысле сходимости в пространстве K .

2. Показать, что функционал $\frac{1}{x}$ (п. 3, пример 2) сингулярен.

Указание. Допустив, что возможно представление $\left(\frac{1}{x}, \varphi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$, где $f(x)$ — обычная функция, и используя функции

$\varphi \in K$, сосредоточенные вне начала координат, показать, что $f(x)$ обязана при $x \neq 0$ совпадать с $\frac{1}{x}$.

3. Показать, что функционал $\frac{1}{x}$ имеет порядок сингулярности 1.

$$\text{Указание. } \left(\frac{1}{x}, \varphi\right) = - \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \cdot \varphi'(x) dx.$$

4. Задача о регуляризации. Пусть $f(x)$ — функция, локально интегрируемая всюду, кроме точки $x=0$, а в этой точке имеющая особенность не выше степенной, так что при некотором m и достаточно малых $|x|$

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^m}.$$

Показать, что существует функционал $f \in K'$, который на все основные функции, равные 0 в окрестности точки $x=0$, действует по формуле

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

Указание. Например,

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ \varphi(x) - \left[\varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots - \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(0) \right] h(x) \right\} dx,$$

где $h(x)$ равна 1 при $|x| \leq 1$ и 0 при $|x| > 1$.

5. Показать, что для функции $f(x)$, допускающей при любом $m=0, 1, 2, \dots$ оценку

$$|f(x)| > \frac{A_m}{|x|^m} \quad (0 < x < x_0). \quad (1)$$

задача 4 неразрешима (функция $f(x)$ «не допускает регуляризации в K' »).

Указание. Пусть $\varphi(x) = \varphi(x; a)$ из § 2; тогда функции $\varphi_\nu(x) = -\varepsilon_\nu \varphi\left(\nu\left(x - \frac{2}{\nu}\right)\right)$ при достаточно малых ε_ν стремятся к 0 в K ; пользуясь условием (1), числа ε_ν можно подобрать при этом так, что

$$(f, \varphi_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_\nu(x) dx \rightarrow \infty.$$

§ 4. Действия с обобщенными функциями одного переменного

1. В совокупности обычных функций определены различные операции (иногда частично — как дифференцирование). Мы ставим своей задачей перенести их на всю совокупность обобщенных функций.

Операции сложения и умножения на вещественные числа вводятся по формуле

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1 (f_1, \varphi) + \alpha_2 (f_2, \varphi).$$

Легко проверить, что определенный по этой формуле функционал $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ снова является линейным и непрерывным. Кроме того, если f_1 и f_2 — регулярные функционалы, соответствующие функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ есть также регулярный функционал, отвечающий функции $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$.

Можно, естественно, определить также произведение обобщенной функции f на любую бесконечно дифференцируемую функцию $\alpha(x)$. Действительно, если $f(x)$ — обычная функция, то и $\alpha(x)f(x)$ — обычная и

$$(\alpha(x)f(x), \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)f(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\alpha(x)\varphi(x)dx = (f, \alpha\varphi),$$

где $\alpha(x)\varphi(x)$ — опять основная функция. Если теперь f — любая обобщенная функция, то произведение $\alpha(x)f$ можно *определить* по формуле

$$(\alpha(x)f, \varphi) = (f, \alpha(x)\varphi).$$

Ясно, что функционал $\alpha(x)f$ линеен и непрерывен вместе с функционалом f .

Если $\alpha(x)$ не бесконечно дифференцируема, в классе K' нельзя разумно определить произведение функции $\alpha(x)$ на любую обобщенную функцию (см. задачу 3 к § 9).

2. Переходим к определению операции дифференцирования. В соответствии со сказанным в § 1 для любой обобщенной функции f мы полагаем, по определению,

$$(f', \varphi) = (f, -\varphi').$$

Поскольку $\varphi'(x)$ является основной функцией вместе с $\varphi(x)$, выражение справа определено. Полученный функционал, очевидно, линеен, а также и непрерывен: если $\varphi_\nu \rightarrow 0$ в K , то и $\varphi'_\nu \rightarrow 0$ в K , а следовательно, и

$$(f', \varphi_\nu) = (f, -\varphi'_\nu) \rightarrow 0.$$

Таким образом, *каждая обобщенная функция обладает производной* (которая также есть обобщенная функция). Поскольку процесс дифференцирования можно продолжать, *каждая обобщенная функция имеет производные любого порядка.*

При этом

$$(f'', \varphi) = (f', -\varphi') = (f, \varphi'').$$

аналогично при любом q ,

$$(f^{(q)}, \varphi) = (f, (-1)^q \varphi^{(q)}) = (-1)^q (f, \varphi^{(q)}). \quad (1)$$

Легко видеть, что производная обладает обычными линейными свойствами: если f_1 и f_2 — обобщенные функции, α_1 и α_2 — постоянные, то

$$\begin{aligned} ((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)', \varphi) &= (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, -\varphi') = \alpha_1 (f_1, -\varphi') + \alpha_2 (f_2, -\varphi') = \\ &= \alpha_1 (f_1', \varphi) + \alpha_2 (f_2', \varphi) = (\alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2', \varphi), \end{aligned}$$

откуда

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2'.$$

Далее, если $\alpha(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, то

$$\begin{aligned} ((\alpha(x) f)', \varphi) &= (\alpha f, -\varphi') = (f, -\alpha \varphi') = (f, -(\alpha \varphi)') + \\ &+ (f, \alpha' \varphi) = (f', \alpha \varphi) + (\alpha' f, \varphi) = (\alpha f' + \alpha' f, \varphi) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(\alpha f)' = \alpha f' + \alpha' f.$$

Если обычная функция $f(x)$ имеет обычную производную и восстанавливается по ней интегрированием (т. е. $f(x)$ абсолютно непрерывна на каждом конечном промежутке), то, как мы видели в § 1, производная от $f(x)$, как от обобщенной функции, совпадает с $f'(x)$. Обратно, если $f(x)$ обычная функция и ее производная f' в K' также есть обычная функция, $f' = f'(x)$, то $f'(x)$ есть производная от $f(x)$ и в обычном смысле (почти всюду и даже всюду, если $f'(x)$ непрерывна; см. § 5, п. 1). Но в общем случае производная от обычной функции $f(x)$ уже не есть обычная функция.

3. Рассмотрим несколько примеров, связанных с нахождением производной.

1. Найдем производную от обычной функции

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Согласно определению,

$$(\theta', \varphi) = (\theta, -\varphi') = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

откуда

$$\theta' = \delta.$$

Аналогично при любом a

$$\theta'(x - a) = \delta(x - a).$$

(Отметим, что производная от $\theta(x)$ в обычном смысле равна 0 при $x \neq 0$, а при $x = 0$ не существует.)

2. Функция $\theta(x)$ есть простейшая разрывная функция. Рассмотрим производную от кусочно абсолютно непрерывной функции $f(x)$

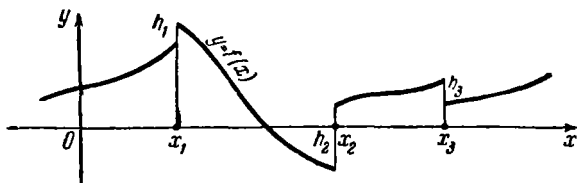


Рис. 2.

с кусочно непрерывной производной $f'(x)$, точками разрыва x_1, x_2, \dots и соответствующими скачками h_1, h_2, \dots (рис. 2). Введем функцию

$$f_1(x) = f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k).$$

Функция $f_1(x)$ абсолютно непрерывна и восстанавливается по своей производной $f'_1(x)$, совпадающей с $f'(x)$ всюду, кроме точек разрыва $f(x)$, где $f'(x)$ не существует. Поэтому $f'_1(x)$ есть производная и обобщенной функции f_1 в K' . С другой стороны, по доказанному в примере 1,

$$f'_1(x) = f' - \sum_k h_k \delta(x - x_k), \quad (1)$$

где f' — производная обобщенной функции $f(x)$. Из (1) получаем

$$f' = f'_1(x) + \sum_k h_k \delta(x - x_k), \quad (2)$$

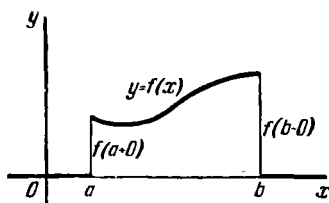


Рис. 3.

т. е. производная обобщенной функции $f(x)$ составляется из ее обычной производной и суммы дельта-функций в точках разрыва с соответствующими скачками в качестве коэффициентов.

В частности, если $f(x)$ отлична от нуля лишь в отрезке $[a, b]$ и абсолютно непрерывна внутри этого отрезка (рис. 3), то

$$f' = f'_1(x) + f(a+0)\delta(x-a) - f(b-0)\delta(x-b). \quad (3)$$

3. Найдем производную от обычной функции $y = \ln|x|$. Заметим, что производная в обычном смысле $y' = \frac{1}{x}$ не есть обычная функция. Применяя общее правило, находим

$$\begin{aligned} \langle (\ln|x|)', \varphi \rangle &= \langle \ln|x|, -\varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \cdot \varphi'(x) dx = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x| \varphi'(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln|x| \varphi'(x) dx \right\} = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \varepsilon \varphi(-\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \ln \varepsilon \varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \varepsilon [\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] - \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \left(\frac{1}{x}, \varphi \right), \end{aligned}$$

где $\frac{1}{x}$ — функционал, определенный в примере 2 § 3, п. 3.

4. Производная от обобщенной функции $\delta(x)$ есть функционал действующий по формуле

$$\langle \delta', \varphi \rangle = \langle \delta, -\varphi' \rangle = -\varphi'(0).$$

Аналогично при любом q

$$\langle \delta^{(q)}, \varphi \rangle = \langle \delta, (-1)^q \varphi^{(q)}(x) \rangle = (-1)^q \varphi^{(q)}(0). \quad (4)$$

5. Функционал порядка сингулярности $\leq p$ (§ 3, п. 3, пример 3):

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^p \langle f_k(x), \varphi^{(k)}(x) \rangle,$$

используя (1) п. 2, можно представить в форме

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^p (-1)^k \langle f_k^{(k)}, \varphi \rangle = \left(\sum_{k=0}^p (-1)^k f_k^{(k)}, \varphi \right).$$

т. е. в виде суммы производных порядка $\leq p$ от обычных функций; и обратно, всякая такая сумма, очевидно, есть функционал порядка сингулярности $\leq p$.

Задача и. 1. Найти производные от функций

$$а) y = x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad -1 < \lambda < 0;$$

$$б) y = \ln x_+ \begin{cases} \ln x & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Отв.

$$а) (y', \varphi) = \int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx;$$

$$б) (y', \varphi) = \int_0^\infty \frac{1}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] \theta(1-x) dx.$$

2. Доказать формулу

$$\alpha(x) \delta^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{j+k} C_k^j \alpha^{(k-j)}(0) \delta^{(j)}(x)$$

для любой бесконечно дифференцируемой функции $\alpha(x)$.

3. Найти q -ю производную от функции x_+^k ($k=0, 1, 2, \dots$).

Отв.

$$(x_+^k)^{(q)} = \begin{cases} k(k-1)\dots(k-q+1) x_+^{k-q} & \text{при } q \leq k, \\ k! \delta^{(q-k-1)}(x) & \text{при } q > k. \end{cases}$$

4. Что представляет собою производная от канторовой функции $C(x)$ (непрерывной на отрезке $[0, 1]$, возрастающей от 0 до 1 и принимающей постоянное значение в каждом смежном интервале к канторовому множеству)?

Отв.

$$(C'(x), \varphi) = \sum_j C_j [\delta(x - \alpha_j) - \delta(x - \beta_j)],$$

где C_j — значение функции $C(x)$ на смежном интервале (α_j, β_j) .

5. Если

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

для всякой основной функции $\varphi(x)$, то $f(x) \equiv 0$ (§ 3). Какие выводы относительно обычных функций $f_0(x), \dots, f_m(x)$ можно сделать, если известно, что для любой основной функции $\varphi(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_0(x) \varphi(x) + f_1(x) \varphi'(x) + \dots + f_m(x) \varphi^{(m)}(x)] dx = 0?$$

Отв. $f_k(x)$ имеет производные до порядка k ($k=0, 1, \dots, m$) и

$$f_0(x) - f_1'(x) + \dots + (-1)^m f_m^{(m)}(x) \equiv 0.$$

§ 5. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Операции, которые установлены для обобщенных функций — дифференцирование, умножение на функцию, сложение, — позволяют строить дифференциальные выражения вида

$$a_0(x) y^m + a_1(x) y^{m-1} + \dots + a_m(x) y - b(x),$$

где $a_0(x), \dots, a_m(x)$ — заданные бесконечно дифференцируемые функции, а y и $b(x)$ — обобщенные функции. Приравнивая такое выражение нулю, мы получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение m -го порядка относительно обобщенной функции y . Возникает вопрос о том, как описывается совокупность всех решений такого уравнения.

1. Рассмотрим сначала простейшее уравнение

$$y' = 0. \quad (1)$$

Покажем, что в классе всех обобщенных функций это уравнение имеет своим общим решением $y = C$ (постоянную).

Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = 0 \quad (2)$$

для любой основной функции φ . Но тем самым функционал y уже задан на совокупности K_0 тех основных функций, которые могут быть представлены как производные от других основных функций. Нам необходимо выяснить, какими способами функционал y может быть распространен с совокупности K_0 на всё основное пространство K .

Легко проверить, что основная функция $\varphi_0(x)$ может быть представлена как производная от некоторой основной функции тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 0. \quad (3)$$

Действительно, если $\varphi_0(x) = \varphi_1'(x)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = \varphi_1(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0;$$

с другой стороны, при выполнении условия (3) мы полагаем

$$\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_0(\xi) d\xi,$$

и остается только проверить, что $\varphi_1(x)$ есть основная функция; но это очевидно, поскольку $\varphi_1(x)$ вместе с $\varphi_0(x)$ бесконечно дифференцируема и, в силу условия (3), финитна.

Пусть теперь $\varphi_1(x)$ — фиксированная основная функция, обладающая свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) dx = 1.$$

Для любой основной функции $\varphi(x)$ можно написать равенство

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \varphi_0(x),$$

где функция $\varphi_0(x)$, очевидно, удовлетворяет условию (3). Отсюда видно, что если задать значение искомого функционала y на основной функции $\varphi_1(x)$, то значение его на любой функции φ будет определено однозначно:

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_1) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx. \quad (4)$$

Пусть, например, $(y, \varphi_1) = C_1$ — произвольное фиксированное число. Тогда равенство (4) дает

$$(y, \varphi) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} C_1 \varphi(x) dx,$$

т. е. обобщенная функция y есть постоянная C_1 , что и утверждалось.

Как следствие, мы получаем: *если для двух обобщенных функций f и φ мы имеем $f' = g'$, то f и g отличаются на постоянную.*

Пусть, например, относительно некоторого функционала f известно, что $\dot{f}' = f'(x)$ есть обычная функция; покажем, что тогда и f есть обычная функция, притом абсолютно непрерывная и ее производная (в обычном смысле) совпадает с $f'(x)$. В самом деле, построим неопределенный интеграл

$$g(x) = \int_0^x f'(\xi) d\xi.$$

Функция $g(x)$ определена везде и абсолютно непрерывна; ее производная в обычном смысле почти всюду совпадает с $f'(x)$, ее производная в K' также есть $f'(x)$. Отсюда $f = g(x) + C$, что и утверждалось.

2. Рассмотрим теперь произвольную однородную систему p уравнений с p неизвестными функциями *)

$$\left. \begin{aligned} y'_0 &= a_{00}(x) y_0 + \dots + a_{0, p-1}(x) y_{p-1}, \\ &\vdots \\ y'_{p-1} &= a_{p-1, 0}(x) y_0 + \dots + a_{p-1, p-1}(x) y_{p-1}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $a_{00}(x), \dots, a_{p-1, p-1}(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции. У этой системы имеется некоторое количество обычных (притом бесконечно дифференцируемых) решений; мы покажем, что она в пространстве K' не имеет иных решений, кроме обычных. Как известно, классические решения образуют p -мерное линейное пространство, базисом которого является любая система p линейно независимых решений. Записывая составляющие отдельных решений по столбцам, мы получаем матрицу базисной системы классических решений

$$U = \left\| \begin{array}{cccc} u_{00}(x) & \dots & u_{0, p-1}(x) & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{p-1, 0}(x) & \dots & u_{p-1, p-1}(x) & \end{array} \right\|.$$

Детерминант этой матрицы (детерминант Вронского) отличен от нуля. Если записать систему (1) в форме

$$y' = Ay, \quad (2)$$

где y есть p -мерный неизвестный вектор в пространстве K' , а $A = \|a_{jk}(x)\|$ — матрица коэффициентов, то любой из столбцов матрицы U , как вектор, будет ее решением; этот факт можно записать матричным равенством

$$U' = AU. \quad (3)$$

Положим $y = Uz$, где z — новый неизвестный вектор (в пространстве K'). Подставляя в (2) и используя (3), получим

$$U'z + Uz' = AUz = U'z,$$

откуда

$$Uz' = 0.$$

Умножая на U^{-1} , приходим к системе распавшихся уравнений

$$z' = 0.$$

По доказанному в п. 1, $z = \text{const}$, откуда $y = Uz$ есть вектор, являющийся линейной комбинацией векторов фундаментальной системы; тем самым y оказывается классическим решением

*) Целесообразность нумерации от 0 до $p-1$ (а не от 1 до p) станет ясной из дальнейшего.

3. Рассмотрим простейшее неоднородное уравнение

$$g' = f, \quad (1)$$

где f — данная обобщенная функция, а g — искомая.

Покажем, что уравнение (1) при любой правой части f имеет решение в классе обобщенных функций. Естественно называть это решение первообразной или неопределенным интегралом от обобщенной функции f .

Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$(g, -\varphi') = (g', \varphi) = (f, \varphi) = \left(f, \int_{-\infty}^x \varphi'(\xi) d\xi \right)$$

для любой основной функции φ . Но тем самым функционал g уже задан на любой основной функции φ_0 , являющейся производной от какой-либо другой основной функции φ , т. е. он задан на многообразии K_0 , рассмотренном в п. 1. Мы должны продолжить функционал g на все пространство K . Это можно осуществить, например, так: как и в п. 1, рассмотрим основную функцию φ_1 ,

для которой $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) dx = 1$, и с ее помощью представим любую основную функцию φ в форме

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx + \varphi_0(x),$$

где φ_0 принадлежит K_0 . Тем самым каждой основной функции φ мы сопоставили ее «проекцию» φ_0 на подпространство K_0 .

При этом если последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ стремится к 0 в K , то и последовательность их проекций $\varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots$ стремится к 0 в K , поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_v(x) dx = (1, \varphi_v) \rightarrow 0.$$

Полагаем теперь для функции $\varphi(x)$

$$(g_0, \varphi) = (g, \varphi_0) = \left(f, \int_{-\infty}^x \varphi_0(\xi) d\xi \right). \quad (2)$$

Легко проверить, что построенный функционал g_0 линеен и непрерывен. Общее решение уравнения (1) получается прибавлением к найденному частному решению общего решения однородного уравнения, т. е., согласно п. 1, произвольной константы.

5. Будем говорить, что обобщенная функция f равна нулю при $x < 0$, если для любой основной функции φ , равной 0 при $x \geq 0$ (и отличной от нуля, возможно, только при $x < 0$), мы имеем $(f, \varphi) = 0$. Этим свойством обладает любая обычная функция, равная 0 (в обычном смысле) при $x < 0$; далее, этим свойством обладает, например, $\delta(x)$, а также и ее производные.

Лемма. Если $f \in K'$ равна нулю при $x < 0$, то у нее имеется и притом единственная первообразная $g \in K'$, также равная нулю при $x < 0$.

Доказательство. Единственность первообразной, равной нулю при $x < 0$, вытекает из того, что две первообразные отличаются на постоянную; если постоянная равна 0 при $x < 0$, то она равна 0 и тождественно. В качестве искомой первообразной g_0 можно взять ту, которая определяется формулой (2) п. 3:

$$(g_0, \varphi) = (g, \varphi_0),$$

где

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) dx = 1$$

и $\varphi_1(x)$ равна 0 при $x > 0$. Если при этом $\varphi(x) = 0$ при $x > 0$, то и $\varphi_0(x) = 0$ при $x > 0$, а также и первообразная от $\varphi_0(x)$ равна 0 при $x > 0$; поэтому

$$(g_0, \varphi) = (g, \varphi_0) = \left(f, \int_{-\infty}^x \varphi_0(\xi) d\xi \right) = 0,$$

что и требуется.

Рассмотрим систему уравнений (в векторной записи)

$$y' - Ay = f, \quad (1)$$

где обобщенная вектор-функция f равна 0 при $x < 0$.

Покажем, что у этой системы имеется и притом единственное решение $y = y(x)$, равное 0 при $x < 0$.

Действительно, как и ранее, подстановка $y = Uz$ приводит систему (1) к виду

$$z' = U^{-1} f, \quad (2)$$

где $U^{-1} f$ также, очевидно, равна 0 при $x < 0$. Применяя лемму, находим у системы (2) решение z , все координаты которого равны нулю при $x < 0$. Отсюда и $y = Uz$ равно 0 при $x < 0$, что и утверждалось.

6. Для системы линейных уравнений первого порядка с обычными функциями $f_0(x), \dots, f_{p-1}(x)$,

$$\left. \begin{aligned} y_0' - a_{00}(x)y_0 - \dots - a_{0,p-1}(x)y_{p-1} &= f_0(x), \\ \dots &\dots \\ y_{p-1}' - a_{p-1,0}(x)y_0 - \dots - a_{p-1,p-1}(x)y_{p-1} &= f_{p-1}(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

решение $y(x) = \{y_0(x), \dots, y_{p-1}(x)\}$ однозначно определяется заданием начального вектора $y(0) = \{y_0(0), \dots, y_{p-1}(0)\}$. Возникает вопрос, как поставить соответствующую задачу в классе обобщенных вектор-функций $Y = \{Y_0, \dots, Y_{p-1}\}$, учитывая, что значения в отдельных точках для обобщенных функций не имеют смысла.

Если $f = \{f_0(x), \dots, f_{p-1}(x)\}$ есть обычная вектор-функция, то, по доказанному, всякое решение $y(x)$ есть также обычная вектор-функция. Обозначим через $Y(x)$ обобщенную вектор-функцию, равную 0 при $x < 0$ и искомому (обычному) решению $y(x)$ при $x > 0$, и через $Y_1(x)$ — обобщенную вектор-функцию, равную 0 при $x < 0$ и $y'(x)$ при $x > 0$. Систему (1) можно теперь записать в форме

$$Y_1 - AY = F, \quad (2)$$

где A есть матрица из коэффициентов a_{jk} ($j, k = 0, 1, \dots, p-1$), а F — обобщенная вектор-функция, равная 0 при $x < 0$ и $f(x)$ при $x > 0$.

Вектор-функция Y_1 не является, вообще говоря, производной вектор-функции Y в пространстве K' . Имеет место равенство, вытекающее из формулы (2) п. 3 § 4:

$$Y' = Y_1 + y(0)\delta(x). \quad (3)$$

Отсюда для вектор-функции Y в пространстве K' получается система уравнений

$$Y' - AY = F + y(0)\delta(x). \quad (4)$$

Общее решение системы (4) может быть получено из имеющегося частного решения Y добавлением общего решения однородной системы

$$Y' - AY = 0,$$

которое, по доказанному, является классическим. Решение Y выделяется однозначно из общего решения с помощью дополнительного условия

$$Y = 0 \quad \text{при} \quad x < 0. \quad (5)$$

Для обобщенной функции Y , как мы уже говорили, условие (5) означает следующее: для любой основной функции $\varphi(x)$, отличной

от нуля, возможно, только при $x < 0$, имеет место равенство $(Y, \varphi) = 0$.

Итак, мы приходим к следующему результату:

Пусть дана система уравнений

$$Y' - AY = F(x) + y(0)\delta(x),$$

где F — обобщенная вектор-функция, равная нулю при $x < 0$, $y(0)$ — заданный вектор.

У этой системы имеется решение $Y \in K'$, притом единственное, которое обращается в нуль при $x < 0$.

Если $F(x)$ — обычная вектор-функция, то это решение соответствует обычному решению $y(x)$ системы

$$y'(x) - Ay(x) = F(x) \quad (x \geq 0),$$

обращающемся в $y(0)$ при $x = 0$.

Сформулируем теперь соответствующий результат для уравнения p -го порядка

$$a_p y^p - a_{p-1} y^{(p-1)} - \dots - a_0 y = f(x). \quad (6)$$

Вводя новые неизвестные функции

$$y_0 = y, \quad y_1 = y', \quad \dots, \quad y_{p-1} = y^{(p-1)},$$

мы записываем уравнение (6) в форме системы

$$\left. \begin{array}{l} y_0' - y_1 = 0, \\ y_1' - y_2 = 0, \\ \dots \\ y_{p-1}' - \frac{a_0 y_1}{a_p} - \frac{a_1 y_2}{a_p} - \dots - \frac{a_{p-1} y_{p-1}}{a_p} = \frac{f(x)}{a_p} \end{array} \right\} \quad (7)$$

с матрицей A специального вида

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \frac{a_0}{a_p} & \frac{a_1}{a_p} & \frac{a_2}{a_p} & \dots & \frac{a_{p-1}}{a_p} \end{array} \right\|$$

и свободным членом $\left(0, 0, \dots, \frac{1}{a_p} f(x)\right)$.

В обобщенных функциях системе (7) отвечает система

$$\begin{aligned} Y_0' & - Y_1 & & = y_0(0) \delta(x), \\ Y_1' & & - Y_2 & = y_1(0) \delta(x), \\ & \dots & \dots & \dots \\ Y_{p-2}' & & & - Y_{p-1} = y_{p-2}(0) \delta(x), \\ Y_{p-1}' - \frac{a_0}{a_p} Y_0 - \frac{a_1}{a_p} Y_1 - \dots - \frac{a_{p-1}}{a_p} Y_{p-1} & & & = \frac{F(x)}{a_p} + y_{p-1}(0) \delta(x). \end{aligned}$$

Эта система в свою очередь эквивалентна уравнению p -го порядка, которое получается, когда исключают неизвестные функции Y_1, \dots, Y_{p-1} . Именно, мы имеем

$$\begin{aligned} Y_1 & = Y_0' - y_0(0) \delta(x), \\ Y_2 & = Y_1' - y_1(0) \delta(x) = Y_0'' - y_0(0) \delta'(x) - y_1(0) \delta(x), \\ & \dots \\ Y_{p-1} & = Y_0^{(p-1)} - y_0(0) \delta^{(p-2)}(x) - y_1(0) \delta^{(p-3)}(x) - \dots - y_{p-2}(0) \delta(x) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} Y_{p-1}' & = Y_0^{(p)} - Y_0(0) \delta^{(p-1)}(x) - y_1(0) \delta^{(p-2)}(x) - \dots - y_{p-2}(0) \delta'(x) = \\ & = \frac{a_0}{a_p} Y_0 + \frac{a_1}{a_p} (Y_0' - y_0(0) \delta(x)) + \dots \\ & \dots + \frac{a_{p-1}}{a_p} (Y_0^{(p-1)} - y_0(0) \delta^{(p-2)}(x) - \dots - y_{p-2}(0) \delta(x)) + \\ & \qquad \qquad \qquad + Y_{p-1}(0) \delta(x) + \frac{1}{a_p} F(x), \end{aligned}$$

или, что то же,

$$\sum_{k=0}^p a_k \left[Y^{(k)} - \sum_{j=0}^{k-1} y_j(0) \delta^{(k-1-j)}(x) \right] = F(x). \quad (8)$$

В силу доказанного, мы получаем следующее:

Теорема. У уравнения (8) имеется решение $Y \in K'$ и притом единственное, которое обращается в нуль при $x < 0$. Если $f(x)$ — обычная функция, то указанное решение соответствует обычному решению уравнения (6), определенному при $x \geq 0$ и при $x = 0$ удовлетворяющему условиям $y(0) = y_1(0), \dots, y^{(m-1)}(0) = y_m(0)$.

7. Пусть дан линейный дифференциальный оператор

$$P[y] \equiv \sum_{k=0}^p a_k y^{(k)}. \quad (1)$$

В некоторых вопросах существенную роль играет фундаментальная функция оператора P . По определению, фундаментальная функция $\mathcal{E}(x)$ есть решение уравнения

$$P[\mathcal{E}] \equiv \sum_{k=0}^p a_k \mathcal{E}^{(k)} = \delta(x). \quad (2)$$

Разумеется, уравнением (2) фундаментальная функция не определена однозначно, а лишь с точностью до слагаемого, являющегося решением однородного уравнения

$$\sum_{k=0}^p a_k y^{(k)}(x) = 0. \quad (3)$$

Можно определить фундаментальную функцию однозначно, если потребовать дополнительно, чтобы она обращалась в нуль при $x < 0$. Как видно из последней формулы п. 6, в этом случае фундаментальная функция $\mathcal{E}(x)$ соответствует обычной функции, равной 0 при $x < 0$ и равной тому решению уравнения (3) при $x > 0$, которое отвечает начальным значениям

$$y_0(0) = \dots = y_{p-2}(0) = 0, \quad y_{p-1}(0) = \frac{1}{a_p}.$$

Прибавляя к такой обычной функции любое решение уравнения (3) на всей оси, получаем описание всех фундаментальных функций оператора (1): *всякая фундаментальная функция $\mathcal{E}(x)$ есть обычное решение уравнения (3) при $x < 0$ и обычное решение уравнения (3) при $x > 0$, причем*

$$y_0(+0) = y_0(-0), \dots, y_{p-2}(+0) = \\ = y_{p-2}(-0), \quad y_{p-1}(+0) = y_{p-1}(-0) + \frac{1}{a_p}.$$

Задачи. 1. Для уравнения q -го порядка

$$x^k y^{(q)}(x) = 0$$

построить $k+q$ линейно независимых решений в пространстве K' .

Отв. При $q \geq k$ $y_1 = x^{q-1}$, $y_2 = x^{q-2}$, ..., $y_q = 1$, $y_{q+1} = x_+^{q-1}$, ..., $y_{q+k} = x_+^{q-k}$; при $q \leq k$ $y_1 = x^{q-1}$, ..., $y_q = 1$, $y_{q+1} = x_+^{q-1}$, ..., $y_{2q} = \theta(x)$, $y_{2q+1} = \delta(x)$, ..., $y_{q+k} = \delta^{(k+q-1)}(x)$.

2. Показать, что уравнение

$$-2x^3 y' = y \quad (1)$$

не имеет ненулевого решения в пространстве K' .

Указание. Классическое решение уравнения (1) есть Ce^{1/x^2} . Показать, что в пространстве K' на функцию $\varphi(x)$, равную 0 в окрестности точки $x=0$, решение должно было бы действовать по

формуле

$$(y, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} C e^{\frac{1}{x^2}} \varphi(x) dx.$$

Использовать задачу 5 к § 3.

3. Доказать, что уравнение

$$xy' = f$$

разрешимо при любой обобщенной функции $f \in K'$.

У к а з а н и е. Использовать метод п. 3. Основная функция $\psi(x)$ может быть представлена в форме $(x\varphi)'$, $\varphi \in K$, тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^0 \psi(x) dx = 0.$$

4. Сформулировать в обобщенных функциях аналог классической граничной задачи

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

для уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

Отв. $Y'' + y_a \delta(x-a) - y_b \delta'(x-b) + y'_a \delta(x-a) - y'_b \delta(x-b) + p(x)[Y' + y_a \delta(x-a) - y_b \delta(x-b)] + q(x)Y = F(x)$, где $F(x)$ равна 0 при $x \notin [a, b]$ и равна $f(x)$ при $x \in [a, b]$, а постоянные y'_a и y'_b определяются из условий $Y(x) = 0$ вне отрезка $[a, b]$.

§ 6. Основные и обобщенные функции нескольких переменных

1. Определения предыдущих параграфов переносятся на случай нескольких переменных без особых затруднений.

Обычные, основные и обобщенные функции будут определены в n -мерном вещественном пространстве R_n , состоящем из точек $x = (x_1, \dots, x_n)$. Обычная функция, по определению, есть функция, определенная почти везде в R_n и интегрируема (по Лебегу) в каждом ограниченном брус $B = \{x : a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n\}$.

Каждая основная функция бесконечно дифференцируема и обращается в нуль вне достаточно большого бруса.

Брус или вообще любое множество, вне которого основная функция $\varphi(x)$ равна нулю со всеми производными, называется носителем $\varphi(x)$ и обозначается через $\text{supp } \varphi$.

Линейное пространство всех основных функций в R_n обозначается через K (или $K(R_n)$), или K_n , когда есть необходимость указать число n). Последовательность $\varphi_\nu(x) \in K$, $\nu = 1, 2, \dots$ называется

сходящейся к 0 в K , если все функции $\varphi_\nu(x)$ обращаются в нуль вне одного и того же бруса и равномерно сходятся к 0, так же как и их производные любого порядка.

Обобщенной функцией называется любой линейный непрерывный функционал на пространстве K . Совокупность всех обобщенных функций обозначается через K' (или $K'(R_n)$, или K'_n). Каждая обычная функция $f(x)$ определяет функционал на K по формуле

$$(f(x), \varphi(x)) = \int_{R_n} f(x) \varphi(x) dx; \quad (1)$$

функционалы такого вида называются *регулярными*.

Как и в случае $n=1$, обычная функция $f(x)$ определяется по числам (f, φ) однозначно.

Достаточно показать, что из $(f, \varphi) = 0$ для любой $\varphi \in K$ вытекает, что $f(x)$ почти всюду равно нулю. Мы доказали это в § 3 для случая $n=1$, в общем случае докажем по индукции. В качестве основной функции $\varphi(x)$ возьмем произведение $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_{n-1}(x_2, \dots, x_{n-1})$, где φ_1 и φ_{n-1} — основные функции соответственно от одного и $n-1$ независимых переменных. По теореме Фубини

$$0 = \int_{R_1} \int_{R_{n-1}} f(x) \varphi(x) dx = \int_{R_{n-1}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) \varphi_1(x_1) dx_1 \right\} \times \\ \times \varphi_{n-1}(x_2, \dots, x_{n-1}) dx_2 \dots dx_{n-1},$$

причем внутренний интеграл представляет собою суммируемую функцию от x_2, \dots, x_n на $n-1$ -мерном бруске, в котором сосредоточена функция φ_{n-1} . Так как φ_{n-1} — произвольная основная функция, то, по предположению индукции,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) \varphi_1(x_1) dx_1 = 0 \quad (2)$$

на множестве Q полной меры значений x_2, \dots, x_n .

Далее, фиксируя точку $(x_2, \dots, x_n) \in Q$, следовало бы применить результат § 3, который и привел бы к выводу, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ равна нулю на множестве полной меры в R_n . Но положение осложнено тем, что множество Q в данном случае может зависеть и от самой функции $\varphi_1(x_1)$. Поэтому для завершения доказательства мы воспользуемся фактом, замеченным в § 3; в одномерном случае достаточно выполнения равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

на некотором счетном множестве функций $\varphi(x)$, чтобы сделать вывод о том, что $f(x) = 0$ почти везде. Мы и возьмем в (2) только это счетное

множество функций. Для каждой из них найдется множество $Q = Q(\varphi)$ полной меры, где выполняется равенство (2); для всех этих функций сразу равенство (2) будет выполняться на пересечении указанных множеств полной меры, которое также есть множество полной меры. А теперь в точках этого последнего множества можно уже пользоваться результатом § 3, который и приводит к выводу, что $f(x_1, \dots, x_n)$ почти всюду в R_n равна нулю.

Таким образом, совокупность обычных функций вложена в пространство K' взаимно однозначным образом.

2. Кроме регулярных функционалов существуют еще и сингулярные, которые не приводятся к виду (1).

Вот несколько примеров обобщенных функций в R_n , не сводящихся, вообще говоря, к обычным функциям:

1. *Дельта-функция* $\delta(x)$, действующая по формуле

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0),$$

или, более общим образом, *сдвинутая дельта-функция*, действующая по формуле

$$(\delta(x - a), \varphi(x)) = \varphi(a).$$

2. *Функционал порядка сингулярности* $\leq p$, по определению, имеет вид

$$(f, \varphi) = \sum_{|k| \leq p} \int_{R_n} f_k(x) D^k \varphi(x) dx, \quad (2)$$

где k — составной индекс: $k = (k_1, \dots, k_n)$, $D^k = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$,

все $f_k(x)$ — обычные функции и суммирование проходит по индексам k , для которых $|k| = k_1 + \dots + k_n \leq p$.

Говорят, что порядок сингулярности функционала f равен ровно p , если функционал f может быть записан в форме (2) с данным p и не может быть записан в такой форме с меньшим p .

Ниже будет показано, что функционал $\delta(x)$, как и в случае $n = 1$, имеет порядок сингулярности 1.

3. *Функционал, сосредоточенный на поверхности* L :

$$(f, \varphi) = \int_L f(x) \varphi(x) dl_x,$$

где dl_x — элемент поверхности L в точке x ; более общим функционалом такого вида является, например,

$$(f, \varphi) = \int_L \sum_{k=0}^m f_k(x) D^k \varphi(x) dl_x,$$

причем $f_k(x)$ — обычные функции на поверхности L .

4. Обобщенные функции от аргумента (ω, x) .

Пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ — точка единичной сферы Ω пространства R_n . Поставим в соответствие каждой основной функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ функцию

$$\Phi(\xi; \omega) = \int_{(\omega, x) = \xi} \varphi(x) dx.$$

Интеграл справа берется по гиперплоскости, ортогональной к вектору ω и находящейся на расстоянии (со знаком) ξ от начала координат.

Если совершить поворот осей $Ux = x'$, при котором вектор ω перейдет в первый базисный вектор $(1, 0, \dots, 0)$, то можно написать

$$\Phi(\xi; \omega) = \int_{x'_1 = \xi} \varphi_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) dx'_2 \dots dx'_n,$$

где $\varphi_1(x') = \varphi(x)$.

Очевидно, что функция $\Phi(\xi; \omega)$ финитна вместе с $\varphi(x)$ и бесконечно дифференцируема по ξ при каждом фиксированном ω . Таким образом, $\Phi(\xi; \omega)$ — основная функция (аргумента ξ). Каждой обобщенной функции $f \in K'_1$ мы можем теперь сопоставить функционал $f_\omega \in K'_n$, зависящий от параметра ω , по формуле

$$(f_\omega, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = (f, \Phi(\xi; \omega)). \quad (1)$$

В частности,

$$\begin{aligned} (\delta_\omega, \varphi) &= (\delta(\xi), \Phi(\xi; \omega)) = \int_{(\omega, x) = 0} \varphi(x) dx = \\ &= \int_{x'_1 = 0} \varphi_1(0, x'_2, \dots, x'_n) dx'_2 \dots dx'_n; \\ (\delta_\omega^{(q)}, \varphi) &= (\delta^{(q)}(\xi), \Phi(\xi; \omega)) = (-1)^q \left(\delta(\xi), \frac{\partial^q \Phi(\xi; \omega)}{\partial \xi^q} \right) = \\ &= (-1)^q \int_{x'_1 = 0} \frac{\partial^q \varphi_1(0, x'_2, \dots, x'_n)}{\partial x'_1{}^q} dx'_2 \dots dx'_n. \end{aligned}$$

Функционал f_ω мы будем обозначать также через $f((\omega, x))$.

3. Можно рассмотреть основные и обобщенные функции не во всем пространстве R_n , а в некоторой области $G \subset R_n$. Именно, пространство $K(G)$, по определению, образовано из всех основных функций $\varphi(x) \in K(R_n)$, которые сосредоточены *строго внутри* области G (т. е. так, что замыкание множества $\{x : \varphi(x) \neq 0\}$ лежит внутри G). Последовательность $\varphi_\nu(x) \in K(G)$ называется *сходящейся к нулю* в $K(G)$, если все функции $\varphi_\nu(x)$ сосредоточены в одном и том же

множестве, находящемся строго внутри G , и при $v \rightarrow \infty$ равномерно сходятся к нулю со всеми производными. Линейный непрерывный функционал на пространстве $K(G)$ называется *обобщенной функцией в области G* . Большая часть результатов этого и следующих параграфов непосредственно переносится на случай обобщенных функций в области.

Задачи. 1. Обычная функция $f(x)$ называется *сферически симметричной*, если $f(Ux) = f(x)$, где U — любой поворот пространства R_n . Дать определение обобщенной сферически симметричной функции.

Отв. $(f, \varphi(Ux)) = (f, \varphi(x))$ для любой $\varphi(x) \in K$.

2. Сферически симметричная обобщенная функция f однозначно определяется на всем K по своим значениям на сферически симметричных основных функциях.

Указание. Для любой $\varphi \in K$ сферического среднего $\varphi_{\text{ср}}(x)$ есть также функция из K , которая является пределом средних арифметических поворотов функции φ . Отсюда $(f, \varphi) = (f, \varphi_{\text{ср}})$.

3. Обычная функция $f(x)$ называется *однородной степени p* , если для любого положительного t имеет место равенство $f(tx) = t^p f(x)$. Дать определение обобщенной однородной функции степени p .

Отв. $(f, \varphi(tx)) = t^{-p-n} (f, \varphi(x))$ для любой $\varphi \in K$.

4. Показать, что дельта-функция $\delta(x)$ однородна, и найти степень однородности.

Отв. $p = -n$.

5. Показать, что функционал, сосредоточенный на поверхности (прим. 3), сингулярен.

Указание. Произвести построение, обобщающее доказательство сингулярности дельта-функции из § 3.

6. Задача о регуляризации. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция, локально интегрируемая всюду, кроме точки $x=0$, а в окрестности этой точки удовлетворяющая неравенству

$$|f(x)| \leq \frac{C}{r^m}.$$

Показать, что существует функционал $f \in K'$, который на все основные функции, равные 0 в окрестности точки $x=0$, действует по формуле

$$(f, \varphi) = \int_{R_n} f(x) \varphi(x) dx.$$

Указание. Например,

$$(f, \varphi) = \int_{R_n} f(x) \left\{ \varphi(x) - \left[\sum_{|k| \leq m} \frac{x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!} D^k \varphi(0) \right] h(x) \right\} dx,$$

где $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $h(x)$ равна 1 при $|x| \leq 1$ и 0 при $|x| > 1$.

7. Показать, что для функции $f(x)$, допускающей в некотором положительном телесном угле при любом $m = 0, 1, 2, \dots$ оценку

$$f(x) > \frac{A_m}{r^m} \quad (|x| = r < r_0).$$

задача 6 неразрешима (функция $f(x)$ «не допускает регуляризации» в K').

Указание. Обобщить конструкцию решения задачи 5 § 3.

§ 7. Действия с обобщенными функциями нескольких переменных

1. Мы можем здесь ограничиться простым перечислением этих действий, имея в виду, что все, сказанное в § 4 в применении к случаю $n = 1$, непосредственно переносится и на общий случай.

Итак, мы определяем следующие действия с обобщенными функциями:

1. Сложение и умножение на вещественные числа:

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1 (f_1, \varphi) + \alpha_2 (f_2, \varphi).$$

2. Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию $\alpha(x)$:

$$(\alpha(x) f, \varphi) = (f, \alpha(x) \varphi).$$

3. Дифференцирование (по любой из координат):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi \right) = - \left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right). \quad (1)$$

Если $f = f(x)$ есть обычная функция, абсолютно непрерывная по x_1 почти при всех x_2, \dots, x_n , с производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ в обычном смысле (обычной функцией от x_1, x_2, \dots, x_n), то производная по x_1 от функционала f в смысле обобщенных функций приводит к обычной производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}$.

Итерируя, получаем определение производной порядка $|k| = k_1 + \dots + k_n$:

$$\begin{aligned} (D^k f, \varphi) &\equiv \left(\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \varphi \right) = \\ &= (-1)^{|k|} \left(f, \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} \varphi}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right) \equiv (f, (-1)^{|k|} D^k \varphi). \end{aligned}$$

2. Далее приводятся несколько примеров на дифференцирование.

1. Для любой обобщенной функции f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j};$$

иначе говоря, порядок дифференцирования по различным переменным можно менять.

Для доказательства заметим, что аналогичное свойство в применении к основным функциям заведомо выполняется; поэтому

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, \varphi \right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}, \varphi \right),$$

что и требуется.

2. Производные в смысле С. Л. Соболева. Согласно С. Л. Соболеву, (обычная) функция $g(x_1, \dots, x_n)$ есть обобщенная производная вида $\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ от (обычной) функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в области G , если для любой (бесконечно) дифференцируемой функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, сосредоточенной строго внутри области G , имеет место равенство

$$(-1)^{|k|} \int_G g(x) \varphi(x) dx = \int_G f(x) D^k \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Покажем, что $g = D^k f$ в пространстве K' . Действительно, определение (1) можно записать в форме

$$(-1)^{|k|} (g, \varphi) = (f, D^k \varphi). \quad (2)$$

В то же время, согласно определению производной в K' , мы имеем

$$(D^k f, \varphi) = (-1)^k (f, D^k \varphi). \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), находим, что $g = D^k f$, что и требовалось.

Таким образом, наличие у функции f некоторой производной по Соболеву показывает, что эта производная функции f в K' приводится к обычной функции.

3. Пусть $\theta = \theta(x_1, \dots, x_n)$ означает функцию, равную 1, когда все координаты x_1, \dots, x_n положительны, и 0 в противном случае.

Найдем $\frac{\partial^n \theta}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^n \theta}{\partial x_1 \dots \partial x_n}, \varphi \right) &= (-1)^n \left(\theta, \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \right) = \\ &= (-1)^n \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \dots \partial x_n} dx_1 \dots dx_n = \varphi(0, \dots, 0) = (\delta, \varphi), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \delta(x).$$

4. Дифференцирование обобщенной функции $f(\omega, x)$ (§ 6, п. 2, пример 4). Покажем, что обычная формула дифференцирования

$$\frac{\partial f(\omega, x)}{\partial x_j} = \frac{df(\omega, x)}{d(\omega, x)} \cdot \omega_j \quad (1)$$

применима и к случаю, когда f есть обобщенная функция. Для этого выведем сначала формулу

$$\int_{(\omega, x) = \xi} \frac{d\varphi}{dx_j} dx = \omega_j \frac{d}{d\xi} \int_{(\omega, x) = \xi} \varphi(x) dx, \quad (2)$$

справедливую для любой основной функции $\varphi(x)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\xi} \left\{ \int_{(\omega, x)=\xi+\Delta\xi} \varphi(x) dx - \int_{(\omega, x)=\xi} \varphi(x) dx \right\} &= \\ &= \frac{1}{\Delta\xi} \int_{(\omega, x)=\xi} [\varphi(x + \omega \Delta\xi) - \varphi(x)] dx = \\ &= \int_{(\omega, x)=\xi} \frac{\varphi(x + \omega \Delta\xi) - \varphi(x)}{\Delta\xi} dx \rightarrow \int_{(\omega, x)=\xi} \sum \omega_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx = \int_{(\omega, x)=\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} dx. \end{aligned}$$

Разложим базисный вектор e_j на составляющие по вектору ω и по вектору θ , лежащему в плоскости $(\omega, x) = \xi$. При этом

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} (\omega, e_j) + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} (e_j, \theta) = \omega_j \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + (e_j, \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{(\omega, x)=\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx &= \omega_j \int_{(\omega, x)=\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} dx + (e_j, \theta) \int_{(\omega, x)=\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} dx = \\ &= \omega_j \int_{(\omega, x)=\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} dx = \omega_j \frac{d}{d\xi} \int_{(\omega, x)=\xi} \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

поскольку интеграл от $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$, очевидно, равен 0; итак, формула (2) доказана.

Переходим к выводу формулы (1).

Мы имеем в этом случае

$$(f((\omega, x)), \varphi(x)) = (f(\xi), \Phi(\xi; \omega)),$$

где $\Phi(\xi; \omega) = \int_{(\omega, x)=\xi} \varphi(x) dx$; отсюда, по основному правилу,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f((\omega, x)), \varphi(x) \right) &= - \left(f((\omega, x)), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \\ &= - \left(f(\xi), \int_{(\omega, x)=\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \right); \end{aligned}$$

с другой стороны,

$$(f'(\xi), \varphi(x)) = - \left(f(\xi), \frac{d}{d\xi} \int_{(x, \omega)=\xi} \varphi(x) dx \right),$$

и остается сослаться на формулу (2).

5. Функционал порядка сингулярности $\leq p$

$$(f, \varphi) = \sum_{|k| \leq p} \int_{R_n} f_k(x) D^k \varphi(x) dx$$

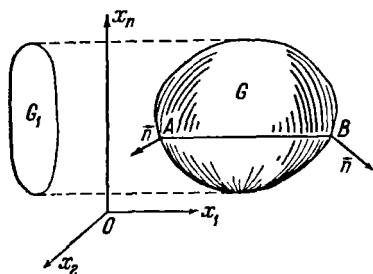
есть сумма производных порядка $\leq p$ от обычных функций:

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= \sum_{|k| \leq p} (f_k, D^k \varphi) = \\ &= \sum_{|k| \leq p} (-1)^{|k|} (D^k f_k, \varphi) = \\ &= \left(\sum_{|k| \leq p} (-1)^k D^k f_k, \varphi \right). \end{aligned}$$

Очевидно и обратное: обобщенная функция, равная сумме производных порядка $\leq p$ от обычных функций, имеет порядок сингулярности $\leq p$.

Пример 3 показывает, что $\delta(x)$ имеет порядок сингулярности $\leq n$. В действительности, как мы увидим ниже, порядок сингулярности $\delta(x)$ равен 1.

Рис. 4. G_1 — проекция G на плоскость (x_2, \dots, x_n) . \vec{n} — нормальный вектор.



6. Найдем производную по x_1 от обычной функции $f(x)$, непрерывной и имеющей непрерывные производные в замкнутой области G с кусочно гладкой границей Γ (рис. 4), а вне этой области равной 0. По формуле (1) п. 1

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right) &= - \left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = - \int_G f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_n = \\ &= - \int_{G_1} \left\{ \int_{A(x_2, \dots, x_n)}^{B(x_2, \dots, x_n)} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 \right\} dx_2 \dots dx_n = \\ &= - \int_{G_1} \left\{ f(B) \varphi(B) - f(A) \varphi(A) - \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi dx_1 \right\} dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_G \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi dx - \int_{\Gamma} f(\xi) \varphi(\xi) dl_{\xi} \cdot \cos(\widehat{\xi, n}). \end{aligned}$$

Мы видим, что искомая производная есть сумма двух функционалов, первый из которых есть обычная функция, равная $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ в G и 0 вне G , а второй — сингулярная функция, сосредоточенная на поверхности Γ . Это равенство является обобщением на n -мерный случай формулы (3) § 4, п. 3.

7. Классическая формула Грина (Δ — оператор Лапласа, G — ограниченная область, Γ — ее граница, $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали)

$$\int_G f(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_G \Delta f(x) \cdot \varphi(x) dx + \int_{\Gamma} \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n} \varphi \right) dl$$

с учетом равенства $(\Delta f, \varphi) = (f, \Delta \varphi)$ может быть истолкована следующим образом: пусть $f(x)$ есть обычная функция, имеющая в замкнутой области G непрерывные производные до второго порядка (в обычном смысле), а вне G равная нулю; в пространстве K' оператор Лапласа переводит ее в сумму двух функционалов, один из которых есть обычная функция, равная $\Delta f(x)$ (в обычном смысле) внутри G , и нулю вне G , второй — сингулярный функционал, сосредоточенный на границе Γ области G .

Если написать аналогичное равенство для функции $f(x)$, равной нулю внутри G , и сложить с предыдущим, мы получим

$$\begin{aligned} \int_{R_n} f(x) \Delta \varphi(x) dx &= \int_{R_n} \Delta f(x) \varphi(x) dx + \\ &+ \int_{\Gamma} \left[(f_i - f_e) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} (f_i - f_e) \varphi \right] dl, \end{aligned}$$

где f_i и f_e означают предельные значения функции $f(x)$ соответственно изнутри и снаружи области G ; таким образом, функционал Δf выражается через обычную функцию Δf и скачки f и $\frac{\partial f}{\partial n}$ на границе области G .

8. Оператор Лапласа и сферически симметричные функции.

Найдем классическое выражение оператора Лапласа для дважды дифференцируемой функции $f(r)$ (зависящей только от радиуса). Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} f(r) &= f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_j} = f'(r) \frac{x_j}{r}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(r) &= f''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + f'(r) \frac{r - \frac{x_j^2}{r}}{r^2} = \\ &= f''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + f'(r) \frac{r^2 - x_j^2}{r^3}; \\ \Delta f(r) &= \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = f''(r) + f'(r) \frac{n-1}{r}. \end{aligned} \tag{1}$$

Положим $f(r) = r^p$; тогда мы получим

$$\Delta r^p = p(p+n-2)r^{p-2}. \quad (2)$$

Таким образом, оператор Лапласа понижает степень r на две единицы. Все это вычисление остается справедливым и в смысле дифференцирования в пространстве K' , пока речь идет об обычных функциях. Так как функция r^p интегрируема в окрестности начала координат при $p > -n$, то формула (2) сохраняет смысл в K' при $p-2 > -n$, $p > 2-n$. Если же $p = 2-n$, то при $n > 2$ правая часть (2) теряет смысл в K' . Известно, что r^{2-n} — гармоническая функция вне начала координат, т. е. $\Delta r^{2-n} = 0$ при $x \neq 0$. Вычислим выражение Δr^{2-n} в пространстве K' , считая $n > 2$.

Согласно определению,

$$\left(\Delta \frac{1}{r^{n-2}} \cdot \varphi\right) = \left(\frac{1}{r^{n-2}} \cdot \Delta \varphi\right) = \int_{R_n} \frac{\Delta \varphi}{r^{n-2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R_n} \frac{\Delta \varphi}{r^{n-2}} dx.$$

К полученному интегралу применим формулу Грина (пример 7), беря в качестве области G шаровой слой $\varepsilon \leq r \leq a$, где a настолько велико, что вне шара $r \leq a$ функция $\varphi(x)$ тождественно равна нулю. Мы получим

$$\begin{aligned} \int_{r \geq \varepsilon} \frac{\Delta \varphi}{r^{n-2}} dx &= \int_{r \geq \varepsilon} \varphi \cdot \Delta \frac{1}{r^{n-2}} dx - \\ &\quad - \int_{r=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{1}{r^{n-2}} dl + \int_{r=\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{n-2}} dl, \end{aligned}$$

причем dl есть элемент сферы $r = \varepsilon$. Мы имеем, далее,

$$\int_{r \geq \varepsilon} \varphi \cdot \Delta \frac{1}{r^{n-2}} dx = 0,$$

так как $\frac{1}{r^{n-2}}$ вне шара $r < \varepsilon$ есть гармоническая функция;

$$\begin{aligned} \int_{r=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{1}{r^{n-2}} dl &= \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{r=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dl = O(\varepsilon), \\ \int_{r=\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{n-2}} dl &= -\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}} \int_{r=\varepsilon} \varphi dl = -(n-2)\Omega_n S_\varepsilon[\varphi], \end{aligned}$$

где Ω_n есть поверхность единичной сферы в R_n , а $S_\varepsilon[\varphi]$ — среднее значение функции $\varphi(x)$ на сфере радиуса ε . В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$

мы находим $S_\varepsilon[\varphi] \rightarrow \varphi(0)$, и следовательно,

$$\left(\Delta \frac{1}{r^{n-2}}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R_n} \frac{\Delta \varphi}{r^{n-2}} dx = -(n-2)\Omega_n \varphi(0) = \\ = -(n-2)\Omega_n \delta(x), \varphi(x).$$

Отсюда

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)\Omega_n \delta(x). \quad (3)$$

В частности, при $n=3$ мы имеем $\Omega_n = 4\pi$ и, следовательно,

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(x).$$

Замечание. Полученный результат, в частности, показывает, что порядок сингулярности обобщенной функции $\delta(x_1, \dots, x_n)$ равен 1 независимо от числа n . Действительно, функция $\frac{1}{r^{n-2}}$ и ее первые производные суть обычные функции и по доказанному

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r^{n-2}} \right) = -(n-2)\Omega_n \delta(x),$$

так что $\delta(x)$ есть сумма первых производных обычных функций.

9. Пусть дан линейный дифференциальный оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \equiv P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Обобщенная функция $\mathcal{E}(x)$, удовлетворяющая соотношению

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathcal{E}(x) = \delta(x),$$

называется *фундаментальной функцией оператора* $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Например, функция

$$-\frac{1}{(n-2)\Omega_n} \frac{1}{r^{n-2}}$$

является фундаментальной функцией для оператора Лапласа Δ при $n > 2$ (пример 8).

Вообще говоря, фундаментальная функция $\mathcal{E}(x)$ определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $u(x)$, являющегося решением уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0.$$

Найдем фундаментальную функцию $\mathcal{E}_n^{2m}(x)$ для итерированного оператора Лапласа Δ^m в n -мерном пространстве. Если известна функция $\mathcal{E}_n^{2(m-1)}$, то функцию \mathcal{E}_n^{2m} можно найти, решая уравнение

$$\Delta \mathcal{E}_n^{2m} = \mathcal{E}_n^{2(m-1)}. \quad (1)$$

Ввиду сферической симметрии оператора Лапласа естественно искать \mathcal{E}_n^{2m} в форме функции от $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$; при этом можно использовать формулу (1) из примера 8:

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r).$$

Решение уравнения

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = h(r) \quad (2)$$

можно получить в общем виде, сведя заменой $f'(r) = g(r)$ уравнение (2) к уравнению 1-го порядка. Решение имеет вид

$$f(r) = \int r^{1-n} \left\{ \int^r \rho^{n-1} h(\rho) d\rho \right\} dr.$$

Если $h(r) = r^\lambda$, $\lambda \neq -2$, $\lambda \neq -n$, то

$$f(r) = \frac{r^{\lambda+2}}{(\lambda+2)(\lambda+n)} \quad (3)$$

что следует и из формулы (2) примера 8). Если $h(r) = r^{-2}$, то

$$f(r) = \frac{1}{n-2} \ln r; \quad (4)$$

таким образом, в качестве фундаментальных функций у нас появятся и логарифмические. Рассмотрим еще случай $h(r) = r^\lambda \ln r$, $\lambda \neq -2$, $\lambda \neq -n$; при этом

$$\begin{aligned} f(r) &= \int r^{1-n} \left[\frac{r^{\lambda+n}}{\lambda+n} \ln r - \frac{r^{\lambda+n}}{(\lambda+n)^2} \right] dr = \\ &= \frac{r^{\lambda+2} \ln r}{(\lambda+2)(\lambda+n)} - \frac{r^{\lambda+2}}{(\lambda+2)(\lambda+n)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Формул (3) — (5) достаточно, чтобы найти искомые фундаментальные функции. Нам известна функция $\mathcal{E}_n^2 = c_n r^{2-n}$. Решая уравнения (1) при $m=2$ ($\lambda = 2-n$) и используя формулу (3), находим

$$\mathcal{E}_n^4 = c_n \frac{r^{4-n}}{2(4-n)} \quad (n \neq 2, n \neq 4).$$

Далее, аналогично

$$\mathcal{E}_n^6 = c_n \frac{r^{6-n}}{2 \cdot 4 (4-n) (6-n)} \quad (n \neq 2, n \neq 4, n \neq 6).$$

С каждым шагом показатель у r увеличивается на две единицы и соответствующие множители появляются в знаменателе. Если n нечетное, то показатель $2m - n$ никогда не становится равным -2 , поэтому при нечетном n для любого m справедлива формула

$$\mathcal{E}_n^{2m} = c_n \frac{r^{2m-n}}{2 \cdot 4 \dots (2m-2) (2m-n) \dots (4-n)} \equiv c_{n, 2m} r^{2m-n}. \quad (6)$$

Если n четное, то формула (6) справедлива лишь для небольших m , именно, для $2m \leq n - 2$. Если $2m \geq n$, то последовательные показатели $2 - n, 4 - n, \dots$ на некотором шаге дойдут до значения -2 , после чего, согласно формулам (4) и (5), появятся функции, связанные с логарифмами:

$$\mathcal{E}_n^{n-2} = c_{n, n-2} r^{-2},$$

$$\mathcal{E}_n^n = \frac{c_{n, n-2}}{n-2} \ln r,$$

$$\mathcal{E}_n^{2m} = \frac{c_{n, n-2}}{n-2} \frac{r^{2m-n} \ln r}{2 \dots (2m-n) \cdot n (n+2) \dots (2m-2)} \equiv b_{n, 2m} r^{2m-n} \ln r.$$

Слагаемые, содержащие степени r^2 до r^{2m-2} , здесь отброшены, так как оператор Лапласа Δ^m переводит их в нуль. Итак, при $n > 2$ мы получаем формулы

$$\mathcal{E}_n^{2m} = \begin{cases} c_{n, 2m} r^{2m-n}, & \text{если } n \text{ нечетно, или } n \text{ четно} \\ & \text{и больше чем } 2m; \\ b_{n, 2m} r^{2m-n} \ln r, & \text{если } n \text{ четно, } n \leq 2m. \end{cases} \quad (7)$$

При $n = 2$ легко проверить непосредственно, так же как и в примере 8, что $\mathcal{E}_2^2 = -2 \ln r$; таким образом, формула (7) сохраняется для $n = 2, m = 1$. Но тогда она сохраняется и для всех \mathcal{E}_2^{2m} , поскольку они выражаются указанным способом через \mathcal{E}_2^2 . Таким образом, формулы (7) справедливы и для $n = 2$.

3. Если $f \in K'$ есть постоянная, то, очевидно, $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ при любом $j = 1, \dots, n$. Покажем, что верно и обратное.

Теорема 1. Из условий $f \in K', \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ для всех $j, 1 \leq j \leq n$, вытекает, что f есть постоянная.

Предварительно докажем две простые леммы.

Лемма 1. *Всякая основная функция $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ может быть представлена как предел в пространстве K линейных комбинаций основных функций вида $\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)$, где $\varphi_j(x_j)$ — основная функция от одного переменного.*

Для доказательства, имея брус $B = \{x : |x_j| \leq a_j\}$, внутри которого сосредоточена функция $\varphi(x)$, найдем, пользуясь теоремой Вейерштрасса, при каждом $\nu = 1, 2, \dots$ многочлен $P_\nu(x_1, \dots, x_n)$, который в бресе $B' = \{x : |x_j| \leq 2a_j\}$ отличается от $\varphi(x)$ меньше чем на $\frac{1}{\nu}$ вместе с производными до порядка ν . Пусть, далее, $e(x_j)$ — основная функция, равная 1 при $|x_j| \leq a_j$ и 0 при $|x_j| \geq 2a_j$. Тогда при $\nu \rightarrow \infty$ функции $P_\nu(x) e(x_1) \dots e(x_n)$ стремятся к функции $\varphi(x)$ в пространстве K , что нам и требуется.

Лемма 2. *Если $\frac{\partial f}{\partial x_1} \equiv 0$, то для любой основной функции вида $\alpha(x_1) \beta(x_2, \dots, x_n)$*

$$(f, \alpha\beta) = (f, \alpha_1\beta) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x_1) dx_1,$$

где $\alpha_1(x_1)$ произвольно фиксированная основная функция

$$c \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1(x_1) dx_1 = 1.$$

Доказательство. Имея $\alpha_1(x_1)$, мы можем написать представление

$$\alpha(x_1) = \alpha_1(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x_1) dx_1 + \alpha_0(x_1),$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_0(x_1) dx_1 = 0$. Поэтому можно написать $\alpha_0(x_1) = \gamma'(x_1)$, где $\gamma(x_1)$ — новая основная функция (§ 5, п. 1).

Отсюда

$$(f, \alpha\beta) = \left(f, \left[\alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x_1) dx_1 + \gamma' \right] \beta \right) = (f, \alpha_1\beta) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x_1) dx_1 + \\ + (f, \gamma'\beta) = \left(f, \alpha_1\beta \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x_1) dx_1 \right),$$

поскольку

$$(f, \gamma'\beta) = \left(f, \frac{\partial}{\partial x_1} (\gamma\beta) \right) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \gamma\beta \right) = 0;$$

лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы 1. Рассмотрим основную функцию вида $\alpha(x_1)\beta(x_2)\dots\omega(x_n)$. Последовательно применяя лемму 2, находим

$$\begin{aligned}(f, \alpha\beta \dots \omega) &= (f, \alpha_1\beta \dots \omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x_1) dx_1 = \\ &= (f, \alpha_1\beta_1 \dots \omega) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x_1) dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \beta(x_2) dx_2 = \dots = \\ &= (f, \alpha_1\beta_1 \dots \omega_1) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \beta(x_2) dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x_n) dx_n = \\ &= \int_{R_n} C \alpha\beta \dots \omega dx_n\end{aligned}$$

где $C = (f, \alpha_1\beta_1 \dots \omega_1)$. Таким образом, на функциях вида $\alpha\beta \dots \omega$ функционал f сводится к постоянной C . Для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 1 и непрерывностью функционала f .

4. Теорема 2. *Обобщенная функция f , у которой все производные $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g_j$ — непрерывные функции, может быть представлена в виде*

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0) + \int_0^{x_1} g_1(\xi_1, 0, \dots, 0) d\xi_1 + \\ &+ \int_0^{x_2} g_2(x_1, \xi_2, 0, \dots, 0) d\xi_2 + \dots \\ &\dots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_n) d\xi_n \quad (1)\end{aligned}$$

и является сама непрерывной и дифференцируемой функцией с частными производными $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g_j$ в обычном смысле.

Заметим, что функции g_1, \dots, g_n сами не предполагаются дифференцируемыми в обычном смысле. Тем не менее, если рассмотреть

их производные в K' , мы будем иметь при любых l и k

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_k} = \frac{\partial g_k}{\partial x_j}, \quad (2)$$

в силу равенства смешанных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.

Для доказательства теоремы рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_0^{x_1} g_1(\xi_1, 0, \dots, 0) d\xi_1 + \dots \\ \dots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_n) d\xi_n.$$

Мы покажем, что выполняются условия

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = g_1, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = g_n,$$

откуда следует по теореме 1, что функции F и f различаются на постоянную:

$$f(x) = C + F(x). \quad (3)$$

Полагая здесь $x = 0$, находим $C = f(0)$ и (3) превращается в основную формулу (1).

Выполнение равенства $\frac{\partial F}{\partial x_n} = g_n$ очевидно. Докажем, что $\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} = g_{n-1}$. Для этого мы должны показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \left[\int_0^{x_{n-1}} g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, 0) d\xi_{n-1} + \right. \\ \left. + \int_0^{x_n} g_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) d\xi_n \right] = g_{n-1}(x_1, \dots, x_n),$$

или, что то же

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} - g_{n-1}(x) = -g_{n-1}(x_1, \dots, x'_{n-1}, 0), \quad (4)$$

где

$$f_n(x) = \int_0^{x_n} g_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) d\xi_n. \quad (5)$$

Дифференцировать интеграл (5) формально (под знаком интеграла) нельзя, так как функция g_n может не иметь обычной производной

по x_{n-1} . Проверим вначале, что выражение слева в (4) не зависит от x_n . Действительно, в силу условий (2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} - g_{n-1} \right) &= \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n \partial x_{n-1}} - \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_n} = \\ &= \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_{n-1} \partial x_n} - \frac{\partial g_n}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} - g_n \right) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

поскольку последняя скобка, очевидно, равна нулю.

Теперь вычислим левую часть (4). Возьмем основную функцию $\varphi(x)$ в форме $\alpha(x_1, \dots, x_{n-1}) \beta(x_n)$, где α и β — основные функции своих аргументов. Согласно лемме 2 п. 3, можно написать

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} - g_{n-1}, \alpha\beta \right) = C(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \beta(x_n) dx_n.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} - g_{n-1}, \alpha\beta \right) &= \left(f_n, -\frac{\partial \alpha}{\partial x_{n-1}} \beta \right) - (g_{n-1}, \alpha\beta) = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{R_{n-1}} \left[f_n(x) \frac{\partial \alpha}{\partial x_{n-1}} + g_{n-1}(x) \cdot \alpha \right] dx_1 \dots dx_{n-1} \right] \beta(x_n) dx_n, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$C(\alpha) = - \int_{R_{n-1}} \left[f_n(x) \frac{\partial \alpha}{\partial x_{n-1}} + g_{n-1}(x) \cdot \alpha \right] dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Так как $C(\alpha)$ не зависит от x_n , можно положить $x_n = 0$. Тогда $f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$, и мы получаем

$$C(\alpha) = - \int_{R_{n-1}} g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \alpha(x) dx_1 \dots dx_{n-1},$$

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} - g_{n-1}, \alpha\beta \right) = - \int_{R_n} g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \alpha\beta dx_1 \dots dx_n.$$

Поскольку α и β произвольны, мы получаем (4).

Совершенно аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{n-2}} \left[\int_0^{x_{n-2}} g_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-3}, \xi_{n-2}, 0, 0) d\xi_{n-2} + \right. \\ \left. + \int_0^{x_{n-1}} g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, 0) d\xi_{n-1} \right] = g_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0). \end{aligned} \quad (7)$$

Равенство (7) позволит вычислить $\frac{\partial F}{\partial x_{n-2}}$. Именно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_{n-2}} = \frac{\partial}{\partial x_{n-2}} & \left[\int_0^{x_{n-2}} g_{n-2}(x_1, \dots, \xi_{n-2}, 0, 0) d\xi_{n-2} + \right. \\ & \left. + \int_0^{x_{n-1}} g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, 0) d\xi_{n-1} + \right. \\ & \left. + \int_0^{x_n} g_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) d\xi_n \right] = g_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_{n-2}} \int_0^{x_n} g_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) d\xi_n = g_{n-2}(x) \end{aligned}$$

и т. д.; в результате равенства $\frac{\partial F}{\partial x_j} = g_j$ оказываются доказанными для любого j , что и требуется.

Итак, представление (1) для функции $f(x)$ получено. Из него видно, что $f(x)$ — непрерывная функция и $\frac{\partial f}{\partial x_n} = g_n$ в обычном смысле. Но так как выбор порядка осей произволен, то равенство (1) справедливо и при любой иной последовательности координатных осей; а тогда, выводя на последнее место j -ю координату, получаем, что и $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g_j$ в обычном смысле.

Задача н. 1. Найти Δr^λ , где $-n < \lambda < -n + 2$.

Отв. $(\Delta r^\lambda, \varphi) = 2\lambda(\lambda + n - 2) \Omega_n \int_0^\infty r^{\lambda-2} [S_r(\varphi) - \varphi(0)] dr$, где $S_r(\varphi)$

есть среднее от функции $\varphi(x)$ по сфере радиуса r с центром в начале координат.

2. Доказать, что уравнение $\frac{\partial f}{\partial x_1} = g$ разрешимо для любой обобщенной функции $g(x_1, \dots, x_n)$.

Указание. Функционал f определен однозначно на всякой функции $\varphi_0 \in K$, являющейся производной по x_1 от некоторой основной функции ψ . Для любой основной функции φ можно написать

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1 + \varphi_0(x_1, \dots, x_n),$$

где $\varphi_1(x_1)$ — фиксированная основная функция с интегралом 1. а на φ_0 функ-

ционал f известен по сказанному выше. Формула

$$(f_0, \varphi) = (g, \psi), \text{ где } \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \varphi_0.$$

дает одно из решений.

3. Доказать, что система уравнений $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g_j$ ($j = 1, \dots, n$) разрешима при любых функционалах g_j , удовлетворяющих условиям совместности

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_k} = \frac{\partial g_k}{\partial x_j}.$$

У к а з а н и е. Решение уравнения $\frac{\partial f}{\partial x_1} = g_1$ можно взять в форме $f_0 + f_{n-1}$, где f_{n-1} — любой функционал, не зависящий от x_1 . Второе уравнение $\frac{\partial f}{\partial x_2} = g_2$ теперь приводится к виду

$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} = g_2 - \frac{\partial f_0}{\partial x_2}.$$

При этом правая часть не зависит от x_1 , в силу условия совместности. Можно найти решение в форме

$$f_{n-1} = f_{n-1}^0 + f_{n-2},$$

где f_{n-2} — любой функционал, не зависящий от x_1 и x_2 , и т. д.

4. Доказать, что система уравнений в K'_3

$$\operatorname{div} W \equiv \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} = D(x_1, x_2, x_3),$$

$$\operatorname{rot} W \equiv \left\{ \frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}, \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right\} = \{R_1, R_2, R_3\} \equiv R$$

совместна, если $\operatorname{div} R \equiv 0$ и, например, D и R финитны.

5. Рассмотрим нелинейное уравнение с двумя переменными

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} = 0,$$

где $\Phi(u)$ — заданная дифференцируемая функция. Будем рассматривать те решения $u = u(x, t)$ этого уравнения в K' , которые представляют собою обычные кусочно непрерывные функции. Показать, что на линии разрыва решения выполняется соотношение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varphi(u^+) - \varphi(u^-)}{u^+ - u^-},$$

где u^+ и u^- — предельные значения функции u справа и слева от точки разрыва.

У к а з а н и е. Использовать выражение производной кусочно гладкой функции (пример 6).

6. Показать, что производная по x_j однородной обобщенной функции f степени p есть обобщенная однородная функция степени $p - 1$ (§ 6, задача 3).

7. Показать, что однородные обобщенные функции различной степени линейно независимы.

8. Найти фундаментальную функцию для оператора $\Delta + k^2$ (k — постоянная) в трехмерном пространстве.

Указание. Искомую функцию взять в форме $f(r)$, использовать выражение оператора Лапласа (1) из примера 8 и найти классические решения уравнения

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) + k^2 f(r) = 0.$$

Применяя метод примера 8, найти $\Delta f(r)$ в смысле обобщенных функций.

Отв. $g(x) = \frac{e^{ikr}}{r}$ или $\frac{e^{-ikr}}{r}$.

9. Будем говорить, что обобщенная функция $f \in K'$ стремится к 0 при $|x| \rightarrow \infty$, если для любой основной функции $\varphi(x)$

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} (f, \varphi(x+h)) = 0. \quad (1)$$

Очевидно, что если $f = f(x)$ есть обычная функция, стремящаяся к 0 на бесконечности в обычном смысле, то определение (1) выполняется. Определение (1) может выполняться и для обычной функции $f(x)$, не стремящейся к 0 на бесконечности в обычном смысле (пример: $f(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sin x^2}{x}$).

Показать, что если $f = f(x)$ есть многочлен и выполнено условие (1), то $f(x) \equiv 0$.

Указание. Если $f(x)$ есть многочлен, то выражение $(f, \varphi(x+h))$ есть многочлен от h .

Примечание. Теорема остается справедливой и в предположении что $f(x)$ есть целая аналитическая функция порядка роста < 1 .

ГЛАВА II

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

От первоначального знакомства с обобщенными функциями, которому мы посвятили главу I, мы должны перейти к более глубокому и систематическому изучению их свойств, с тем, чтобы иметь возможность активно применять обобщенные функции в проблемах анализа и дифференциальных уравнений.

В ближайших параграфах мы получим выражения обобщенных функций через производные от обычных функций. Мы введем и изучим две новые операции — свертку и преобразование Фурье. Весьма важную роль будут играть специальные обобщенные функции x_+^λ и другие.

§ 8. Локальные свойства и носитель обобщенной функции

1. Мы знаем, что для обобщенных функций нет смысла говорить о значениях в отдельных точках. Но высказыванию «обобщенная функция f равна нулю в области G » можно придать вполне четкий смысл: оно означает, что какую бы основную функцию, сосредоточенную строго внутри*) области G , мы ни взяли, всегда будет $(f, \varphi) = 0$. Так, $\delta(x_1, \dots, x_n)$ равна нулю вне начала координат, функционал, сосредоточенный на поверхности (§ 6, п. 2, пример 3), равен нулю вне этой поверхности и т. д. Если $f \equiv f(x)$ — обычная функция, то условие « f равна 0 в области G » означает, что в области G почти всюду функция $f(x)$ равна 0 в обычном смысле.

Далее, если $h(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная 0 в области G , то для любой обобщенной функции f произведение hf есть обобщенная функция, равная нулю в G , действительно, если $\varphi \in K$ сосредоточена строго внутри G , то

$$(hf, \varphi) = (f, h\varphi) = 0,$$

так как функция $h(x)\varphi(x)$ тождественно равна 0.

*) То есть так, что замыкание множества $\{x: \varphi(x) \neq 0\}$ лежит внутри области G .

Если обобщенная функция f равна нулю в области G , то дополнительное множество $R_n - G$ называется *носителем* f и обозначается $\text{supp } f$. Говорят также, что обобщенная функция f *сосредоточена на множестве* $R_n - G$. Так, у $\delta(x_1, \dots, x_n)$ носителем служит одна точка — начало координат; в этой точке и сосредоточена $\delta(x)$. Обобщенная функция с ограниченным носителем называется *финитной*.

Если основная функция $\varphi(x)$ обращается в 0 на носителе функционала f и в некоторой его окрестности, то $(f, \varphi) = 0$, поскольку в рассматриваемом случае φ сосредоточена строго внутри области, где f равен нулю. Отсюда следует, что произвольное изменение основной функции φ вне окрестности носителя обобщенной функции f не влияет на значение величины (f, φ) ; действительно, указанное изменение равносильно добавлению к основной функции φ другой основной функции ψ , равной нулю в окрестности носителя функционала f , поэтому $(f, \psi) = 0$, а следовательно, $(f, \varphi + \psi) = (f, \varphi)$.

Пользуясь последним обстоятельством, мы можем в некоторых случаях расширять область определения функционала f , включив в нее кроме основных любую функцию $\hat{\varphi}(x)$, совпадающую с какой-либо основной функцией $\varphi(x)$ в окрестности носителя f . Именно, можно положить

$$(f, \hat{\varphi}) = (f, \varphi).$$

Согласно сказанному выше, выражение справа не изменится, если функцию φ заменить на другую основную функцию φ_1 , также совпадающую с φ в окрестности носителя f ; поэтому выражение $(f, \hat{\varphi})$ определяется только функцией $\hat{\varphi}$.

Так, для финитного функционала f имеют точный смысл выражения $(f, 1)$, (f, x) , \dots , (f, ψ) , где $\psi(x)$ — *любая* бесконечно дифференцируемая функция (любого роста на бесконечности).

Если при этом имеется последовательность функций $\psi_\nu(x)$, которая в некоторой окрестности носителя функционала f равномерно стремится к 0 вместе со всеми производными, то независимо от поведения этой последовательности вне указанной окрестности мы будем иметь $(f, \psi_\nu) \rightarrow 0$.

Действительно, если умножить функцию ψ_ν на фиксированную функцию $h(x)$, равную 0 вне указанной окрестности носителя и 1 в некоторой меньшей окрестности носителя функционала f , то мы будем иметь $(f, \psi_\nu) = (f, h\psi_\nu)$, в то же время произведение $h\psi_\nu \rightarrow 0$ в K , откуда и $(f, h\psi_\nu) \rightarrow 0$.

Таким образом, финитный функционал обладает значительно более сильными свойствами непрерывности, чем произвольный функционал над K .

2. Если обобщенная функция f равна 0 в области G , то и любая ее производная $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ равна 0 в G . Действительно, если для всех основных функций φ , сосредоточенных строго внутри G , мы имеем

$$(f, \varphi) = 0,$$

то для этих же функций и

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) = 0.$$

Вернемся к примеру на вычисление $\Delta \frac{1}{r^{n-2}}$ (§ 7, п. 2, пример 8).

Вне начала координат функция $\frac{1}{r^{n-2}}$ бесконечно дифференцируема и в обычном смысле $\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = 0$; поэтому заранее можно сказать,

что обобщенная функция $\Delta \frac{1}{r^{n-2}}$ равна нулю вне начала координат (и, следовательно, сосредоточена в одной точке — самом начале координат). Напомним, что вычисление в примере 8 привело к результату $\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = c\delta(x)$.

Если обобщенная функция f сосредоточена на множестве E , то и все ее производные сосредоточены на этом же множестве.

Действительно, на дополнении к E обобщенная функция f равна 0; по доказанному и все производные от f также на дополнении к E равны 0.

Две обобщенные функции f и g , по определению, совпадают в области G , если разность $f - g$ равна нулю в G . В частности, обобщенная функция f регулярна в области G , если она совпадает в этой области с некоторой обычной функцией $g(x)$. Так, функция $\delta(x)$ регулярна (и равна 0) вне начала координат.

Как следствие получаем: если обобщенные функции f и g совпадают в области G , то их производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial g}{\partial x_k}$ также совпадают в этой области.

В частности, если в области G обобщенная функция f совпадает с постоянной, то $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ равна 0 в G ($k = 1, 2, \dots, n$). Обратно, если в (связной) области G все производные первого порядка обобщенной функции f равны 0, то f постоянна в этой области. Если область G есть брус $B \subset R_n$, то можно буквально повторить доказательство, приведенное в п. 3, § 7, заменив в нем пространство R_n на брус B . Любую же связную область можно получить как объединение сцепленной системы брусков.

Всякая обобщенная функция в пространстве R_n есть, разумеется, и обобщенная функция в любой области $G \subset R_n$. Обратное неверно: обобщенную функцию, заданную в области G , вообще говоря, нельзя продолжить на все пространство R_n . Имеет место некоторый более слабый факт: если дана обобщенная функция f в области G , то для любой подобласти G' , расположенной строго внутри G , можно указать обобщенную функцию $f_1 \in K'(R_n)$, которая совпадает с f на G' . Для этого следует взять основную функцию $a(x)$, сосредоточенную строго внутри G и равную 1 на G' , и положить $(f_1, \varphi) = (f, a\varphi)$.

3. В следующих пунктах мы рассмотрим некоторые дальнейшие существенные свойства основных функций. В частности, метод «разложения единицы» (п. 4) будет играть большую роль во многих дальнейших рассуждениях.

Лемма 1. *Для любого ограниченного замкнутого множества F и содержащей его области G существует основная функция h , равная 1 на F , нулю вне G и заключенная всюду между 0 и 1.*

Обозначим через V_δ δ -окрестность множества F , т. е. объединение открытых шаров радиуса δ с центрами в точках множества F . Число δ будем брать настолько малым, чтобы иметь $V_{2\delta} \subset G$.

Введем функцию

$$\psi(x; \delta) = \begin{cases} C_\delta e^{-\frac{\delta^2}{\delta^2 - r^2}} & \text{при } r = |x| < \delta, \\ 0 & \text{при } r = |x| > \delta, \end{cases} \quad (1)$$

где $C_\delta^{-1} = \int_{|x| \leq \delta} e^{-\frac{\delta^2}{\delta^2 - r^2}} dx$, так что $\int_{R_n} \psi(x; \delta) dx = 1$.

Мы утверждаем, что функция

$$h(x) = \int_{V_\delta} \psi(x - \xi; \delta) d\xi \quad (2)$$

удовлетворяет условию. Действительно, для всякого $x \in F$ интегрирование в (2) во всяком случае ведется по шару радиуса δ с центром в точке x и в результате дает 1. Для всякого x , не входящего в G , подынтегральная функция в (2) равна 0 на области V_δ и интеграл равен 0. В остальных точках, очевидно, значение функции $h(x)$ заключено между чистыми 0 и 1. Наконец, вместе с функцией $\psi(x; \delta)$ и функция $h(x)$ бесконечно дифференцируема, что и требуется.

Как следствие получаем: *если $f(x)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция, F — ограниченное замкнутое множество и G — содержащая его область, то существует основная функция $\varphi(x)$, совпадающая с $f(x)$ на множестве F и*

равная 0 вне G . Очевидно, можно положить $\varphi(x) = f(x)h(x)$, где $h(x)$ — построенная выше основная функция, равная 1 на F и 0 вне G .

4. Пусть имеется некоторое счетное покрытие n -мерного пространства R_n открытыми ограниченными областями U_1, \dots, U_m, \dots и локально конечное — в том смысле, что у каждой точки x имеется окрестность $W(x)$, которая покрывается лишь конечным числом множеств из совокупности $\{U_m\}$, а с остальными из этих множеств не пересекается; мы желаем построить бесконечно дифференцируемые функции $e_1(x), \dots, e_m(x), \dots$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

- а) $0 \leq e_m(x) \leq 1$ при любом $m = 1, 2, \dots$;
- б) $e_m(x) = 0$ вне области U_m ($m = 1, 2, \dots$);
- в) $e_1(x) + \dots + e_m(x) + \dots \equiv 1$. —

В последнем равенстве слева при каждом x в силу б) отлично от нуля лишь конечное число слагаемых. Совокупность функций $\{e_m(x)\}$ называется *разложением единицы*, точнее, *разложением единицы, соответствующим покрытию $\{U_m\}$* .

Вначале мы построим систему областей V_1, \dots, V_m, \dots , также образующую локально конечное покрытие пространства R_n , и такую, что замыкание \bar{V}_m области V_m содержится в области U_m ($m = 1, 2, \dots$). Для этого заметим, что дополнение к области $U_2 + \dots + U_m + \dots$ есть замкнутое множество F_1 , которое покрывается областью U_1 ; в качестве V_1 возьмем область, содержащую F_1 и содержащуюся с замыканием в U_1 .

Далее, пусть области V_1, \dots, V_{m-1} уже построены так, что $\bar{V}_k \subset U_k$ ($k = 1, \dots, m-1$) и $V_1, \dots, V_{m-1}, U_m, U_{m+1}, \dots$ есть локально конечное покрытие пространства R_n . Дополнение к области $V_1 + \dots + V_{m-1} + U_{m+1} + \dots$ есть замкнутое множество F_m , которое целиком покрывается областью U_m . В качестве V_m можно взять любую из открытых областей, содержащих F_m и содержащихся в U_m вместе со своим замыканием, и т. д.

Так как множество \bar{V}_m ограничено, то, в силу результата п. 3, существует бесконечно дифференцируемая функция $h_m(x)$, всюду заключенная между 0 и 1, равная 1 в \bar{V}_m и 0 вне U_m . Положим

$$h(x) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(x). \quad (1)$$

Эта функция существует при всех x и заведомо не меньше 1. Поскольку в окрестности $W(x)$ точки x в сумме (1) отлично от нуля лишь конечное число слагаемых, $h(x)$ бесконечно дифференцируема.

Теперь остается положить

$$e_m(x) = \frac{h_m(x)}{h(x)} \quad (m = 1, 2, \dots);$$

очевидно, что функции $e_m(x)$ удовлетворяют поставленным требованиям.

Б. Лемма 2. Пусть имеется произвольная система областей G_1, G_2, \dots ; всякую основную функцию $\varphi(x)$, сосредоточенную строго внутри объединения $G = \bigcup_v G_v$, можно представить в форме конечной суммы основных функций

$$\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_p, \quad (1)$$

причем φ_k сосредоточена строго внутри области G_k ($k = 1, \dots, p$).

Прежде всего мы сразу можем ограничиться случаем, когда система областей G_1, G_2, \dots конечна; действительно, в общем случае замыкание множества $\Phi = \{x : \varphi(x) \neq 0\}$ есть ограниченное множество, покрытое объединением областей G_1, G_2, \dots ; но из этого покрытия всегда можно выбрать конечное и затем все остальные области отбросить.

Итак, мы можем предполагать, что область G есть объединение конечной системы областей G_1, \dots, G_p .

Вместе с областью V , дополнительной к замыканию множества Φ , эта система образует покрытие пространства R_n . Область Φ и области G_1, \dots, G_p , если они неограниченные, можно заменить (счетным) объединением ограниченных областей, образующих в совокупности локально конечное покрытие пространства R_n (п. 4). Рассмотрим разложение единицы $\{e_m(x)\}$, отвечающее построенным областям. Для функции $\varphi(x)$ можно написать разложение

$$\varphi = \varphi e_1 + \varphi e_2 + \dots = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

Сумма в правой части конечна, поскольку лишь конечное число областей покрытия пересекается с носителем функции φ . В частности, слагаемые, отвечающие частям области Φ , отсутствуют, так как на них функция φ равна нулю. Объединяя слагаемые, отвечающие частям областей G_1, \dots, G_p , получим искомое разложение.

Заметим, что если имеется последовательность основных функций φ_v , стремящаяся к нулю в пространстве K , то каждая из составляющих в разложении (1) функции φ_v — если оно получено по указанному правилу — также стремится к 0 в пространстве K .

6. Теорема. Если обобщенная функция f равна нулю в каждой из областей $G_1, G_2, \dots, G_v, \dots$, то она равна нулю и в их объединении $G = \bigcup_v G_v$.

Для доказательства, используя лемму п. 5, для заданной основной функции φ , сосредоточенной в области G , построим разложение

$$\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_p,$$

где основная функция φ_k сосредоточена строго внутри области G_k . Применяя к этому разложению функционал f и используя условие $f = 0$ в G_k , получаем

$$(f, \varphi) = (f, \varphi_1) + \dots + (f, \varphi_p) = 0,$$

что и требуется.

Как следствие получаем: *обобщенная функция, равная нулю в некоторой окрестности каждой точки пространства R_n , есть нулевая обобщенная функция, т. е. $(f, \varphi) = 0$ для любой $\varphi \in K$.*

Задачи. 1. Дано, что обобщенная функция f в окрестности $U(x_0)$ каждой точки x_0 удовлетворяет условию $g(x)f = 0$, где $g(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, отличная от нуля (зависящая от окрестности $U(x_0)$). Доказать, что $f = 0$.

Указание. Функция $\frac{1}{g(x)}$ также бесконечно дифференцируема в окрестности $U(x_0)$.

2. Условие задачи 1 выполнено всюду, кроме точек некоторого замкнутого множества Φ . Показать, что обобщенная функция f сосредоточена на множестве Φ .

Указание. Использовать теорему 1.

3. Построить основную функцию $\varphi(x)$, сосредоточенную в шаре $|x| \leq a$ и такую, что 1 представляется в виде ряда сдвигов функции $\varphi(x)$:

$$1 \equiv \sum_{v=0}^{\infty} \varphi(x + \xi_v). \quad (1)$$

Указание. Достаточно рассмотреть случай $n = 1$, поскольку в общем случае можно перемножить равенства (1), написанные для каждой из координат. Для $n = 1$ можно взять любую бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(x)$, равную 1 при $0 \leq x \leq \frac{a}{3}$, 0 при $x > \frac{2a}{3}$ и доопределить ее при $x < 0$ по формуле $\varphi(-x) = 1 - \varphi(-x + a)$.

4. Дана функция $f(x)$, определенная и локально интегрируемая при $x \neq 0$, и в окрестности начала координат имеющая особенность не выше степенной:

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^m} \quad (|x| \leq a).$$

Показать, что существует обобщенная функция $f \in K'_n$, совпадающая с $f(x)$ при $x \neq 0$.

Указание. См. задачу 6 к § 6.

§ 9. Предельный переход в пространстве обобщенных функций

1. Последовательность обобщенных функций f_1, \dots, f_ν, \dots называется *сходящейся в K' к обобщенной функции f* , если для любой основной функции φ

$$(f, \varphi) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (f_\nu, \varphi).$$

Из самого определения видно, что функционал f последовательностью f_ν определен однозначно.

Аналогично ряд из обобщенных функций $g_1 + \dots + g_\nu + \dots$ называется *сходящимся к обобщенной функции f* , если частичные суммы этого ряда

$$f_1 = g_1, \dots, f_\nu = g_1 + \dots + g_\nu, \dots$$

сходятся к обобщенной функции f .

Например, если $f_1 = f_1(x), \dots, f_\nu = f_\nu(x), \dots$ — обычные функции, сходящиеся почти всюду к функции $f(x)$ и обладающие обычной (т. е. локально интегрируемой) мажорантой $F(x)$, так что

$$|f_\nu(x)| \leq F(x), \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

то f_ν сходятся к f и в смысле обобщенных функций. Более общим образом, если $f_\nu(x)$ сходятся к $f(x)$ по метрике, связанной с интегралом, так что

$$\int_B |f_\nu(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$$

для каждого ограниченного бруса B , то также f_ν сходятся к f в K' . Действительно, в этом случае

$$(f, \varphi) - (f_\nu, \varphi) = (f - f_\nu, \varphi) = \int_B (f - f_\nu) \varphi dx,$$

где B тот брус, вне которого $\varphi(x)$ обращается в нуль; отсюда

$$|(f, \varphi) - (f_\nu, \varphi)| \leq \max |\varphi(x)| \cdot \int_B |f(x) - f_\nu(x)| dx \rightarrow 0.$$

Всякая обобщенная функция f есть сумма ряда финитных обобщенных функций. Действительно, возьмем произвольное локально конечное покрытие пространства R_n (§ 8, п. 4) и соответствующее разложение единицы $\{e_m(x)\}$. Умножая ряд основных функций

$$1 \equiv e_1(x) + \dots + e_m(x) + \dots$$

на функционал f , получим его разложение

$$f = e_1 f + \dots + e_m f + \dots = f_1 + \dots + f_m + \dots \quad (1)$$

в ряд по финитным обобщенным функциям. Очевидно, что ряд (1) является сходящимся, так как для любой основной функции в разложении

$$(f, \varphi) = (f_1, \varphi) + \dots + (f_m, \varphi) + \dots$$

лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

Операция предельного перехода линейна, т. е. если $f_\nu \rightarrow f$ в K' , $g_\nu \rightarrow g$ в K' , α и β — вещественные числа, то

$$\alpha f_\nu + \beta g_\nu \rightarrow \alpha f + \beta g \text{ в } K'.$$

Аналогично если $\alpha(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, то из $f_\nu \rightarrow f$ следует $\alpha(x) f_\nu \rightarrow \alpha(x) f$. Действительно, для любой $\varphi \in K$

$$(\alpha(x) f_\nu, \varphi) = (f_\nu, \alpha\varphi) \rightarrow (f, \alpha\varphi) = (\alpha(x) f, \varphi).$$

В комплексном пространстве из $f_\nu \rightarrow f$ следует $\bar{f}_\nu \rightarrow \bar{f}$, поскольку

$$(\bar{f}_\nu, \varphi) = \overline{(f_\nu, \bar{\varphi})} \rightarrow \overline{(f, \bar{\varphi})} = (\bar{f}, \varphi).$$

Несколько менее привычно то обстоятельство, что из сходимости f_ν к f всегда следует сходимость $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k}$ к $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. В классическом анализе, как мы знаем, подобные факты требуют дополнительных предположений. Для обобщенных функций доказательство проводится просто:

$$\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k}, \varphi \right) = \left(f_\nu, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \rightarrow \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi \right).$$

Пример 1. Функции $f_\nu(x) = \frac{1}{\nu} \sin \nu x$ ($-\infty < x < \infty$) при $\nu \rightarrow \infty$ равномерно сходятся к 0 и, следовательно, сходятся к 0 в пространстве K' . Их производные $f'_\nu(x) = \cos \nu x$ не сходятся к нулю в обычном смысле, но как обобщенные функции, они при $\nu \rightarrow \infty$ стремятся к нулю в силу соотношения

$$(\cos \nu x, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \nu x \cdot \varphi(x) dx = -\frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \nu x \cdot \varphi(x) dx \rightarrow 0.$$

Дальнейшие производные этой последовательности

$$f''_\nu = -\nu \sin \nu x, \quad f'''_\nu = -\nu^2 \cos \nu x, \dots$$

также сходятся к нулю в пространстве K' .

2. Последовательность обычных функций $f_\nu(x)$, сходящаяся в K' к сингулярной функции $\delta(x)$, называется *дельта-образной* последовательностью. Такие последовательности часто встречаются в задачах, связанных с дифференциальными уравнениями. Мы приводим ниже некоторые общие условия, достаточные, чтобы данная последовательность $f_\nu(x)$ была дельта-образной.

Лемма. Если для любого бруса B_0 числа

$$\left| \int_B f_\nu(x) dx \right|, \quad B \subset B_0,$$

ограничены постоянной, не зависящей от B и ν (а только от B_0), и

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_B f_\nu(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если начало координат находится вне} \\ & \text{бруса } B, \\ 1, & \text{если начало координат находится вну-} \\ & \text{три бруса } B, \end{cases}$$

то

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = \delta(x) \text{ в } K'.$$

Для доказательства рассмотрим последовательность первообразных функций

$$F_\nu(x) = \int_{-1}^{x_1} \dots \int_{-1}^{x_n} f_\nu(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Эта последовательность равномерно ограничена в каждом ограниченном бруссе; далее, если хотя бы одно из чисел x_1, \dots, x_n меньше 0, она стремится к 0, а если все x_k положительны — она стремится к 1. Отсюда следует, что

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(x) = \theta(x_1, \dots, x_n) \text{ в } K'.$$

Дифференцируя это предельное соотношение, находим (ср. § 7, п. 2, пример 3)

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^n F_\nu(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \frac{\partial^n \theta(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \delta(x) \text{ (в } K'),$$

что и требовалось.

Заметим, что дельта-образная последовательность не обязана состоять из знакоположительных функций (см. задачу 1).

Пример 2. Пусть $n=1$ и

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

(см. рис. 5). Мы имеем

$$\int_a^b f_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{b}{\varepsilon} - \operatorname{arctg} \frac{a}{\varepsilon} \right],$$

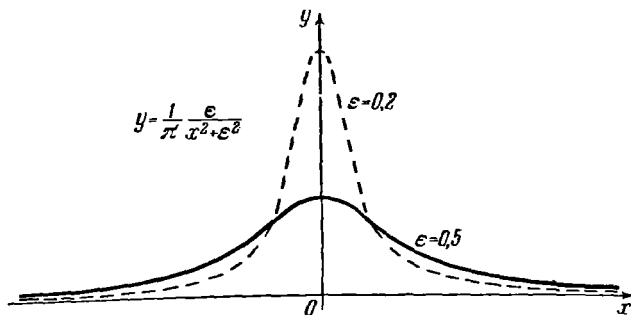


Рис. 5.

откуда легко следует выполнение условий леммы. Применяя ее, получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \delta(x).$$

Пример 3. Пусть $n=1$, $c > 0$ и

$$f_t(x) = \frac{1}{c\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/c^2 t} \quad (t \rightarrow +0).$$

Здесь при замене $\frac{x}{c\sqrt{t}} = y$ мы получим

$$\int_a^b f_t(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a/c\sqrt{t}}^{b/c\sqrt{t}} e^{-y^2} dy.$$

Если a и b разных знаков, полученный интеграл имеет пределом 1; если же a и b одного и того же знака, то этот интеграл стремится к нулю. Применяя лемму, получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t(x) = \delta(x).$$

3. Весьма важным является свойство полноты пространства K' относительно введенной в нем сходимости:

Теорема. Пусть имеется последовательность линейных непрерывных функционалов f_1, f_2, \dots в пространстве K' такая, что для каждой $\varphi \in K$ последовательность чисел (f_ν, φ) является сходящейся при $\nu \rightarrow \infty$. Тогда функционал на K , определяемый равенством

$$(f, \varphi) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (f_\nu, \varphi),$$

также является линейным и непрерывным.

Доказательство основано на важной лемме, имеющей и самостоятельные применения:

Лемма. Если последовательность функционалов $f_\nu \in K'$ ($\nu = 1, 2, \dots$) такова, что для каждой $\varphi \in K$ существует предел (f, φ) числовой последовательности (f_ν, φ) , то для всякой сходящейся в K последовательности основных функций $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ существует также предел при $\nu \rightarrow \infty$ числовой последовательности (f_ν, φ_ν) , который равен (f, φ) .

Предполагая лемму доказанной, покажем, как доказывается теорема о полноте пространства K' .

Линейность предельного функционала $f = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu$ доказывается просто:

$$\begin{aligned} (f, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (f_\nu, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} [\alpha_1 (f_\nu, \varphi_1) + \alpha_2 (f_\nu, \varphi_2)] = \\ &= \alpha_1 \lim_{\nu \rightarrow \infty} (f_\nu, \varphi_1) + \alpha_2 \lim_{\nu \rightarrow \infty} (f_\nu, \varphi_2) = \alpha_1 (f, \varphi_1) + \alpha_2 (f, \varphi_2). \end{aligned}$$

Докажем его непрерывность. Пусть $\varphi_\nu \rightarrow 0$ в K ; нам нужно доказать, что $(f, \varphi_\nu) \rightarrow 0$. В предположении противного и перейдя при необходимости к подпоследовательности, мы можем принять, что для всех $\nu = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$|(f, \varphi_\nu)| > 2a,$$

где $a > 0$ — некоторая постоянная. Так как $(f, \varphi_\nu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (f_\mu, \varphi_\nu)$, то для каждого $\nu = 1, 2, \dots$ найдется номер $\mu = \mu(\nu)$ такой, что $(f_\mu, \varphi_\nu) > a$. Снова, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\mu(\nu) \equiv \nu$. Таким образом, в рассматриваемом случае $|(f_\nu, \varphi_\nu)| > a$, $\nu = 1, 2, \dots$. С другой стороны, по лемме существует предел $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (f_\nu, \varphi_\nu) = (f, 0) = 0$. Получившееся противоречие показывает, что функционал f в действительности непрерывен, что и требовалось.

Остается доказать лемму. Без ограничения общности можно считать $\varphi(x) \equiv 0$; в противном случае мы заменим φ_ν на $\varphi_\nu - \varphi$. Мы должны доказать, что $(f_\nu, \varphi_\nu) \rightarrow 0$.

Допустим противное. Тогда, перейдя, если нужно, к подпоследовательности, можем считать, что $|(f_{\nu}, \varphi_{\nu})| \geq C > 0$. Сходимость последовательности φ_{ν} к нулю в пространстве K означает, что все функции $\varphi_{\nu}(x)$ равны 0 вне ограниченной области и стремятся к нулю равномерно в R_n , так же как и их производные любого порядка. Еще раз перейдя к подпоследовательности, можем полагать, что

$$|D^k \varphi_{\nu}(x)| \leq \frac{1}{4^{\nu}} \quad (|k| \leq \nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Положим $\psi_{\nu} = 2^{\nu} \varphi_{\nu}$; для функций ψ_{ν} будем иметь неравенства

$$|D^k \psi_{\nu}(x)| \leq \frac{1}{2^{\nu}} \quad (|k| \leq \nu = 0, 1, 2, \dots),$$

которые показывают, что функции ψ_{ν} также стремятся к 0 в K ; более того, любой ряд вида

$$\sum_{(k)} \psi_{\nu_k}(x)$$

является в K сходящимся. В то же время числа $|(f_{\nu}, \psi_{\nu})| = 2^{\nu} |(f_{\nu}, \varphi_{\nu})| \geq 2^{\nu} C$ и тем самым стремятся в бесконечность.

Теперь будем строить некоторую подпоследовательность f_{ν_k} и некоторую подпоследовательность ψ_{ν_k} следующим образом.

Выберем сначала f_{ν_1} и ψ_{ν_1} так, чтобы иметь $|(f_{\nu_1}, \psi_{\nu_1})| > 1$. Пусть f_{ν_j}, ψ_{ν_j} ($j = 1, 2, \dots, k-1$) построены. Возьмем в качестве ψ_{ν_k} элемент последовательности ψ_{ν} с настолько большим номером, что

$$|(f_{\nu_j}, \psi_{\nu_k})| < \frac{1}{2^{k-j}} \quad (j = 1, \dots, k-1), \quad (1)$$

и затем найдем f_{ν_k} так, чтобы иметь

$$|(f_{\nu_k}, \psi_{\nu_k})| > \sum_{j=1}^{k-1} |(f_{\nu_k}, \psi_{\nu_j})| + k. \quad (2)$$

Первое возможно, потому что функции ψ_{ν} стремятся к нулю в пространстве K , и следовательно, для любой обобщенной функции f_0 мы имеем $(f_0, \psi_{\nu}) \rightarrow 0$. Второе возможно потому, что $|(f_{\nu}, \psi_{\nu})| \rightarrow \infty$, $(f_{\nu}, \psi_{\nu_j}) \rightarrow (f, \psi_{\nu_j})$, $j \leq k-1$.

Таким образом, построение ψ_{ν_k} и f_{ν_k} можно продолжить неограниченно. Положим далее

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{\nu_k}.$$

По построению, ряд в правой части сходится в пространстве K и, следовательно, его сумма ψ есть элемент K . Далее

$$(f_{v_k}, \psi) = \sum_{j=1}^{k-1} (f_{v_k}, \psi_{v_j}) + (f_{v_k}, \psi_{v_k}) + \sum_{j=k+1}^{\infty} (f_{v_k}, \psi_{v_j}).$$

Но в силу (2) и того, что

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} (f_{v_k}, \psi_{v_j}) < \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-k}} = 1,$$

получаем

$$|(f_{v_k}, \psi)| > k - 1,$$

т. е. при $k \rightarrow \infty$ также $|(f_{v_k}, \psi)| \rightarrow \infty$. Но это противоречит соотношению $\lim_{v \rightarrow \infty} (f_v, \psi) = (f, \psi)$. Лемма доказана *).

4. Пусть каждому значению вещественного или комплексного параметра λ , пробегающего некоторую область Λ , поставлена в соответствие обобщенная функция f_λ . В соответствии с определением, данным в п. 1, обобщенная функция f называется *пределом f_λ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$* , если при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ числовая функция (f_λ, φ) стремится к (f, φ) при любом φ . Функция f_λ называется *непрерывной по λ* в области Λ , если при любом $\lambda_0 \in \Lambda$ имеет место соотношение $f_{\lambda_0} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda$.

Рассмотрим важный вопрос о *доопределении обобщенной функции f_λ по непрерывности по параметру λ* . Представим себе, что обобщенная функция f_λ определена и непрерывна на множестве Λ , имеющем предельную точку λ_0 , в которой обобщенная функция f_λ заранее не задана. Спрашивается, возможно ли доопределить обобщенную функцию f_λ в точке λ_0 так, чтобы получилась обобщенная функция, непрерывная на множестве $\Lambda + \lambda_0$.

Очевидно, что необходимым условием для возможности такого доопределения является возможность доопределения по непрерывности всех числовых функций (f_λ, φ) в точке λ_0 . Это условие является и достаточным; действительно, если для любой основной функции φ и любой последовательности $\lambda_v \rightarrow \lambda_0$, $\lambda_v \in \Lambda$, существует предел последовательности чисел (f_{λ_v}, φ) , то, согласно теореме о полноте пространства обобщенных функций существует обобщенная функция $f = f_{\lambda_0}$, которая является пределом последовательности f_{λ_v} .

*) Это доказательство принадлежит М. Л. Бродскому.

Обычным путем доказываем, что эта обобщенная функция не зависит от выбора последовательности $\lambda_\nu \rightarrow \lambda_0$.

Заметим, далее, что производные (по x_k) обобщенной функции f_λ , непрерывно зависящей от параметра λ , также непрерывно зависят от параметра λ . Действительно, как мы видели в п. 1, из $f_{\lambda_\nu} \rightarrow f_{\lambda_0}$ следует

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f_{\lambda_\nu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} f_{\lambda_0}.$$

Непрерывные по параметру обобщенные функции f_λ можно интегрировать по этому параметру. Пусть, например, функционал f_λ непрерывен по λ на спрямляемой кривой Γ . Составим интегральную сумму

$$s_m = \sum_{j=1}^m f_{\lambda'_j} \cdot \Delta\lambda_j,$$

взяв разбиение кривой Γ на m частей точками деления $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ и выбрав произвольно точки λ'_j на интервалах $(\lambda_{j-1}, \lambda_j)$. При $\max |\Delta\lambda_j| \rightarrow 0$, в силу непрерывности выражения (f_λ, φ) , для любой основной функции φ существует предел выражений

$$(s_m, \varphi) = \sum_{j=1}^m (f_{\lambda'_j}, \varphi) \Delta\lambda_j,$$

не зависящий от способа разбиения Γ и выбора промежуточных точек λ'_j , равный интегралу от функции (f_λ, φ) . Этот предел определяет линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций; он называется *интегралом от обобщенной функции f_λ* по кривой Γ и обозначается обычным образом

$$\int_{\Gamma} f_\lambda d\lambda \quad \text{или} \quad \int_{\Gamma} f_\lambda(x) d\lambda.$$

В силу непрерывности операции дифференцирования, мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\Gamma} f_\lambda d\lambda = \int_{\Gamma} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k} d\lambda,$$

так что интегрирование обобщенной функции по параметру λ всегда перестановочно с дифференцированием ее по координатам.

Разумеется, интегрировать можно не только по кривой, но и по области любого числа измерений.

Б. Обобщенная функция g называется *производной* от обобщенной функции f_λ по параметру λ при $\lambda = \lambda_0$, если

$$g = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}.$$

Для существования производной $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}$ при $\lambda = \lambda_0$ необходимо и достаточно, чтобы все числовые функции (f_λ, φ) были дифференцируемы по λ при $\lambda = \lambda_0$. Необходимость этого условия очевидна; проверим его достаточность. По условию, для каждой φ и любой последовательности $\lambda_\nu \rightarrow \lambda_0$ существует предел отношения

$$\frac{(f_{\lambda_\nu}, \varphi) - (f_{\lambda_0}, \varphi)}{\lambda_\nu - \lambda_0} = \left(\frac{f_{\lambda_\nu} - f_{\lambda_0}}{\lambda_\nu - \lambda_0}, \varphi \right).$$

Но тогда, как было указано выше, обобщенная функция $\frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$, определенная при $\lambda \neq \lambda_0$, может быть доопределена по непрерывности и при $\lambda = \lambda_0$; иными словами, существует обобщенная функция, являющаяся пределом отношения $\frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, что и утверждается.

Если f_λ имеет производную по λ при любом $\lambda \in \Lambda$, то функция f_λ называется *дифференцируемой по λ* в области Λ .

Аналогично определяются высшие производные по параметру и многократная дифференцируемость функций.

Легко проверить, что если функция f_λ дифференцируема по λ в области Λ , то и все производные f_λ по x дифференцируемы по λ и имеет место формула

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f_\lambda \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda \right). \quad (1)$$

Действительно, для любой основной функции φ числовая функция

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k} f_\lambda, \varphi \right) = \left(f_\lambda, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)$$

дифференцируема по λ и имеет производную

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(f_\lambda, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}, \varphi \right).$$

Это означает, что функционал $\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}$ имеет производную по λ и справедлива формула (1), что и утверждается.

6. Если λ — комплексный параметр, пробегающий открытую область Λ , то дифференцируемая в области Λ обобщенная функция f_λ называется *аналитической функцией от λ* . В этом случае все числовые функции (f_λ, φ) являются обычными аналитическими функциями от λ в области Λ . И обратно, если для обобщенной функции f_λ все числовые функции (f_λ, φ) являются аналитическими функциями от λ в области Λ , то и f_λ есть аналитическая функция от λ . В этом случае в каждой точке λ области Λ существуют все производные $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial \lambda^2}, \dots$ и в окрестности точки $\lambda_0 \in \Lambda$ имеет место разложение в ряд Тейлора

$$f_\lambda = f_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^2} + \dots \quad (1)$$

Действительно, обобщенная функция $\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}$ существует, так как, по условию, при $\lambda = \lambda_0$ существуют производные по λ у всех числовых функций (f_λ, φ) ; по такой же причине существуют и все высшие производные $\frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^2}, \dots$. Далее, для каждой основной функции φ справедливо разложение Тейлора обычной аналитической функции (f_λ, φ) :

$$\begin{aligned} (f_\lambda, \varphi) &= (f_{\lambda_0}, \varphi) + (\lambda - \lambda_0) \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} (f_\lambda, \varphi) \right|_{\lambda=\lambda_0} + \dots = \\ &= (f_{\lambda_0}, \varphi) + (\lambda - \lambda_0) \left(\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}, \varphi \right) + \dots = \\ &= \left(f_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda} + \dots, \varphi \right), \end{aligned}$$

откуда следует справедливость разложения (1).

Две аналитические функции f_λ и g_λ , определенные в области Λ и совпадающие на множестве значений λ , имеющем предельную точку внутри Λ , совпадают при всех значениях $\lambda \in \Lambda$. Действительно, для любой основной функции φ выражения (f_λ, φ) и (g_λ, φ) совпадают в области Λ , в силу классической теоремы единственности для аналитических функций.

На этом свойстве основан важный метод аналитического продолжения функционала f_λ по параметру λ . Допустим, что функционал f_λ аналитичен в области Λ . Предположим, далее, что все числовые функции (f_λ, φ) допускают аналитическое продолжение в более широкую область Λ_1 . Тогда мы можем утверждать, что

числа (f_λ, φ) при любом $\lambda \in \Lambda_1$ также задают линейный непрерывный функционал на пространстве K . Действительно, аналитическое продолжение в любую точку области Λ_1 , как известно, всегда может быть осуществлено при помощи конечного числа переразложений в ряд Тейлора. Но каждый ряд Тейлора

$$(f_\lambda, \varphi) = (f_{\lambda_0}, \varphi) + (\lambda - \lambda_0) \left(\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}, \varphi \right) + \dots$$

поскольку он сходится при любой основной функции φ и поскольку радиус его круга сходимости определяется конфигурацией областей Λ и Λ_1 , не зависит от φ , имеет своей суммой в круге сходимости снова линейный непрерывный функционал, что нам и требуется.

Очевидно, что производные (по x) аналитической обобщенной функции f_λ суть также аналитические обобщенные функции от λ .

Если функционал $f_{t,\lambda}$ зависит непрерывно от параметра t в ограниченной замкнутой области T и аналитически от параметра λ (при любом t) в области Λ , то интеграл

$$\int_T f_{t,\lambda} dt = g_\lambda$$

остается аналитически зависящим от параметра λ в области Λ . Действительно, для любой основной функции φ интеграл

$$\int_T (f_{t,\lambda}, \varphi) dt$$

от аналитической функции $(f_{t,\lambda}, \varphi)$ представляет снова аналитическую функцию от λ^* в области Λ .

Если $f_{t,\lambda}$ при каждом t аналитически продолжается из области Λ в область Λ_1 , то и результат интегрирования g_λ аналитически продолжается в ту же область; при этом аналитическое продолжение интеграла (функции g_λ) совпадает с интегралом от аналитического продолжения (т. е. от функции f_λ), в силу единственности аналитического продолжения.

7. Рассмотрим обобщенную функцию от аргумента (ω, x) (§ 6, п. 2, пример 4). Напомним ее построение. Если ω — фиксированный единичный вектор, мы можем каждой основной функции

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, п. 70, 1951, стр. 257.

$\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ поставить в соответствие функцию

$$\Phi(\xi; \omega) = \int_{(\omega, x) = \xi} \varphi(x) dx,$$

которая является основной функцией аргумента ξ , $-\infty < \xi < \infty$.

Любой обобщенной функции $f(\xi) \in K'_1$ можно сопоставить функционал $f_\omega \in K'_n$, действующий по формуле

$$(f_\omega, \varphi) = (f(\xi), \Phi(\xi; \omega)).$$

Мы будем здесь изучать функционал f_ω в зависимости от параметра ω , пробегающего всю единичную сферу Ω . Функция $\Phi(\xi; \omega)$ может быть рассмотрена как основная функция, зависящая от параметра ω .

Эта функция сосредоточена на фиксированном отрезке оси ξ (не зависящем от ω) и, как интеграл от $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ по сечению $(\omega, x) = \xi$, зависит от ω непрерывным и бесконечно дифференцируемым образом (в силу равномерной непрерывности $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и каждой из ее производных).

Поэтому и функционал f_ω на пространстве K_n непрерывным и бесконечно дифференцируемым образом зависит от параметра ω . В частности, он может быть проинтегрирован по параметру ω , пробегающему сферу Ω .

Приведем вычисление соответствующего интеграла для обычной функции $f(\xi)$. Обозначим через $\Omega_n(\rho)$ и $S_n(\rho)$ поверхность сферы и объем шара радиуса ρ в пространстве R_n . Между этими величинами имеется очевидная связь

$$\Omega_n(\rho) = \frac{dS_n(\rho)}{d\rho}.$$

Обозначим для краткости $\Omega_n(1) = \Omega_n$, $S_n(1) = S_n$. По соображениям размерности $\Omega_n(\rho) = \rho^{n-1}\Omega_n(1) = \rho^{n-1}\Omega_n$, $S_n(\rho) = \rho^n S_n(1) = \rho^n S_n$; поэтому

$$\Omega_n = n\rho^{n-1}S_n(\rho) \Big|_{\rho=1} = nS_n.$$

В дальнейшем мы найдем выражения Ω_n и S_n в явном виде. Мы желаем вычислить интеграл

$$\int_{\Omega_n} f((x, \omega)) d\omega. \quad (1)$$

Вместо интеграла (1) будем вычислять интеграл по шару $S_n(\rho)$ радиуса ρ :

$$\int_{S_n(\rho)} f((x, y)) dy.$$

Функция $f((x, y))$ как функция аргумента y постоянна на плоскостях, ортогональных к вектору x . Если такая плоскость проходит на расстоянии $h \leq \rho$ от начала координат, то площадь ее сечения шаром $S_n(\rho)$ равна

$$S_{n-1} \cdot (\rho^2 - h^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Поэтому

$$\int_{S_n(\rho)} f((x, y)) dy = S_{n-1} \int_{-\rho}^{\rho} f(rh) (\rho^2 - h^2)^{\frac{n-1}{2}} dh \quad (r = |x|).$$

Чтобы получить интеграл по сфере Ω_n , мы должны полученное выражение продифференцировать по ρ и затем положить $\rho = 1$. Мы получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} f((\omega, x)) d\omega &= S_{n-1} (n-1) \int_{-1}^1 f(rh) (1-h^2)^{\frac{n-3}{2}} dh = \\ &= \frac{\Omega_{n-1}}{r^{n-2}} \int_{-r}^r f(\xi) (r^2 - \xi^2)^{\frac{n-3}{2}} d\xi. \quad (2) \end{aligned}$$

В частности, если положить $f(\xi) \equiv 1$, интеграл (1) дает поверхность Ω_n единичной сферы в R_n , и мы получим

$$\Omega_n = \Omega_{n-1} \int_{-1}^1 (1-h^2)^{\frac{n-3}{2}} dh = \Omega_{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Из этой формулы можно легко получить выражения чисел Ω_n при любом n .

Обозначим $\Omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = A_n$; из формулы (1) мы имеем

$$A_n = \sqrt{\pi} A_{n-1}$$

и так как $A_2 = 2\pi$, то при любом $n > 1$

$$A_n = 2\pi (\sqrt{\pi})^{n-2} = 2\pi^{\frac{n}{2}}.$$

Отсюда

$$\Omega_n = 2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad S_n = \frac{2}{n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

З а д а ч и. 1. Доказать, что при $v \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin vx}{x} \rightarrow \delta(x) \text{ в } K'_1.$$

2. Построить последовательность обычных функций $g_v(x)$, сходящуюся (в K') к обобщенной функции $\delta^{(k)}(x)$.

У к а з а н и е. Положить $g_v(x) = f_v^{(k)}(x)$, где $f_v(x) \rightarrow \delta(x)$ (в K') — последовательность бесконечно дифференцируемых функций.

3. Умножение на функцию $\beta(x)$, не являющуюся бесконечно дифференцируемой, не может быть «разумно» определено во всем K' . «Разумно» означает следующее: умножение на $\beta(x)$ для обычных функций должно совпадать с обычным умножением, а для обобщенных должно во всяком случае быть непрерывной операцией на K' , т. е. такой, что из $f_v \rightarrow f$ в K' следует $\beta f_v \rightarrow \beta f$.

У к а з а н и е. Пусть k -я производная функции $\beta(x)$ имеет разрыв при $x=0$. Построить последовательность $f_v(x) \rightarrow \delta^{(k)}(x)$ и так, чтобы выражения $(\beta(x) f_v(x), \varphi(x))$ для некоторых φ не имели предела.

4. Если ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \delta^{(m)}(x)$$

сходится в пространстве K'_1 , то все коэффициенты a_m , начиная с некоторого номера, равны 0.

У к а з а н и е. Использовать основную функцию $\varphi(x)$, для которой $|\varphi^{(m)}(0)| > |a_m^{-1}|$.

5. Если $\varphi_\lambda(x)$ — основная функция, дифференцируемая по параметру λ в пространстве K , и f_λ — обобщенная функция, дифференцируемая по параметру λ в K' , то $(f_\lambda, \varphi_\lambda)$ есть дифференцируемая функция параметра λ и

$$\frac{d}{d\lambda} (f_\lambda, \varphi_\lambda) = \left(\frac{df_\lambda}{d\lambda}, \varphi_\lambda \right) + \left(f_\lambda, \frac{d\varphi_\lambda}{d\lambda} \right).$$

У к а з а н и е. Использовать лемму п. 3.

§ 10. Структура обобщенных функций

1. Пусть имеется последовательность обычных функций $f_1(x), \dots, \dots, f_v(x), \dots$ такая, что в любом бруске $B = \{x : \alpha_j \leq x_j \leq \beta_j, j = 1, \dots, n\}$, начиная с некоторого номера $v = v(B)$, все они равны нулю. Мы утверждаем, что ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} P_v(D) f_v(x) \quad (1)$$

(с любыми дифференциальными операторами $P_v(D)$) сходится в пространстве K' . Действительно, для любой основной функции $\varphi(x)$ ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} (P_v(D) f_v(x), \varphi(x)) = \sum_{v=1}^{\infty} (f_v(x), P_v(-D) \varphi(x)) \quad (2)$$

содержит лишь конечное число слагаемых (поскольку $\varphi(x)$ сосредоточена в некотором бруске B). Поэтому сумма (2) определена для любой основной функции φ . Легко проверить, что эта сумма определяет линейный непрерывный функционал на пространстве K .

Мы покажем в этом параграфе, что *любая обобщенная функция на пространстве K имеет вид (1)*. Если мы возьмем лишь конечное число обычных и притом финитных функций $f_1(x), \dots, f_p(x)$, то сумма

$$\sum_{\nu=1}^p P_{\nu}(D) f_{\nu}(x), \quad (3)$$

очевидно, является финитной обобщенной функцией; мы покажем, что в форме (3) может быть представлена любая финитная обобщенная функция. Наконец, мы получим общую форму функционала $f \in K'$, сосредоточенного в одной точке; если эта точка есть начало координат, то f имеет вид

$$f = \sum_{|k| \leq p} a_k D^k \delta(x), \quad D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}. \quad (4)$$

2. Все эти результаты основаны на следующем свойстве обобщенных функций:

Лемма 1. Для каждой обобщенной функции f и каждой ограниченной области G существует число $N = N(f, G)$ такое, что для любой основной функции φ , сосредоточенной в области G , имеет место неравенство

$$|(f, \varphi)| \leq C \sum_{|k| \leq N} \max_{x \in G} |D^k \varphi(x)| \quad (5)$$

с постоянной $C = C(f, G)$.

Доказательство. Допустим, что для некоторой обобщенной функции f и области G требуемого числа N не существует; это значит, что для любого $N = 1, 2, \dots$ найдется основная функция $\varphi = \varphi_N(x)$, сосредоточенная в G , такая, что

$$|(f, \varphi_N)| \geq N \sum_{|k| \leq N} \max_{x \in G} |D^k \varphi_N(x)|. \quad (6)$$

Заменяя функцию $\varphi_N(x)$ любым ее кратным $\psi_N = C_N \varphi_N$, мы не нарушим неравенства (6), т. е. при любых C_N

$$|(f, \psi_N)| \geq N \sum_{|k| \leq N} \max_{x \in G} |D^k \psi_N(x)|. \quad (7)$$

Выберем C_N так, чтобы иметь

$$\sum_{|k| \leq N} \max_{x \in G} |D^k \psi_N(x)| = \frac{1}{N} \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Последовательность функций $\psi_1(x), \dots, \psi_N(x), \dots$ стремится к 0 в пространстве K , поскольку все они сосредоточены в ограниченной области G и равномерно стремятся к 0 при $N \rightarrow \infty$, так же как и их производные любого фиксированного порядка. Так как функционал f непрерывен, то мы должны иметь $(f, \psi_N) \rightarrow 0$; с другой стороны, из (7) следует, что $|(f, \psi_N)| \geq 1$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения.

Неравенство (5) можно продолжить следующим образом (во всяком случае для области G достаточно простой конфигурации):

$$|(f, \varphi)| \leq C \sum_{|k| \leq N} \max_{x \in G} |D^k \varphi(x)| \leq C_1 \sqrt{\sum_{|k| \leq N+n} \int_G |D^k \varphi(x)|^2 dx}. \quad (8)$$

Действительно, при любом $x \in G$, по неравенству Коши-Буняковского, мы имеем

$$|D^k \varphi(x)| = \left| \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_n}^{x_n} \frac{\partial^n D^k \varphi(\xi)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} d\xi \right| \leq \\ \leq C_1 \sqrt{\int_G \left| \frac{\partial^n D^k \varphi(\xi)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \right|^2 d\xi} \leq C_1 \sqrt{\sum_{|k| \leq N+n} \int_G |D^k \varphi(x)|^2 dx}.$$

причем (a_1, \dots, a_n) — точка (возможно, вне области G), где функция $\varphi(x)$ равна 0 со всеми производными.

3. Рассмотрим гильбертово пространство \mathcal{H}_m , состоящее из основных функций, сосредоточенных в области G , со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_m = \sum_{|k| \leq m} \int_G D^k \varphi(x) D^k \psi(x) dx$$

и, следовательно, с нормой

$$\|\varphi\|_m^2 = \sum_{|k| \leq m} \int_G |D^k \varphi(x)|^2 dx.$$

Как следует из (8), функционал f ограничен по норме пространства \mathcal{H}_m при $m = N + n$ и поэтому может быть продолжен, как ограниченный функционал на пополнение пространства \mathcal{H}_m .

Построим пополнение $\overline{\mathcal{H}}_m$ пространства \mathcal{H}_m . Если $\varphi_1, \dots, \varphi_\nu, \dots$ — фундаментальная последовательность в \mathcal{H}_m , то

$$\begin{aligned} \|\varphi_\nu - \varphi_\mu\|_m^2 &= \sum_{|k| \leq m} \int_G |D^k(\varphi_\nu(x) - \varphi_\mu(x))|^2 dx \geq \\ &\geq \int_G |D^k \varphi_\nu(x) - D^k \varphi_\mu(x)|^2 dx \end{aligned}$$

при любом фиксированном k , $|k| \leq m$. Это означает, что каждая из последовательностей $D^k \varphi_\nu(x)$ фундаментальна в смысле сходимости обычного пространства квадратично интегрируемых функций $L_2(G)$ и, следовательно, имеет пределом некоторую функцию $\varphi^{[k]}(x) \in L_2(G)$; индекс $[k]$ указывает на происхождение функции $\varphi^{[k]}(x)$ из k -х производных функций $\varphi_\nu(x)$ и не означает, вообще говоря, что $\varphi^{[k]}(x)$ есть k -я производная от функции $\varphi(x)$. Итак, каждому элементу пространства $\overline{\mathcal{H}}_m$ отвечает система функций $\{\varphi^{[k]}(x)\}$, $|k| \leq m$, квадратично интегрируемых в области G , при этом, в силу непрерывности скалярного произведения,

$$((\varphi^{[k]}(x)), (\psi^{[k]}(x)))_m = \sum_{|k| \leq m} \int_G \varphi^{[k]}(x) \psi^{[k]}(x) dx.$$

Применим теперь теорему об общем виде линейного непрерывного функционала в полном гильбертовом пространстве; эта теорема, как известно, утверждает*), что всякий такой функционал есть скалярное произведение с фиксированным элементом пространства. В частности, и нашему функционалу f отвечает некоторая система квадратично интегрируемых функций $\{f^{[k]}(x)\}$, $|k| \leq m$, такая, что для любого элемента $\{\varphi^{[k]}(x)\} \in \overline{\mathcal{H}}$

$$(f, \varphi) = \sum_{|k| \leq m} \int_G f^{[k]}(x) \varphi^{[k]}(x) dx.$$

В частности, если $\varphi(x)$ есть исходная бесконечно дифференцируемая функция, мы получаем

$$(f, \varphi) = \sum_{|k| \leq m} \int_G f_k(x) D^k \varphi(x) = \sum_{|k| \leq m} (f_k(x), D^k \varphi(x)),$$

где $f_k(x) = f^{[k]}(x)$ есть обычные (даже квадратично интегрируемые) функции в области G . Итак, мы получили теорему:

Теорема 1. Для всякой обобщенной функции f и ограниченной области G можно указать такое m и такие обычные

*) См. Анализ III, гл. V, § 2, п. 9.

функции $f_k(x)$ ($|k| \leq m$), что для любой основной функции $\varphi(x)$, сосредоточенной в области G , имеет место равенство

$$(f, \varphi) = \sum_{|k| \leq m} (f_k(x), D^k \varphi(x)).$$

Используя определение производной, эту же формулу можно записать в форме

$$(f, \varphi) = \left(\sum_{|k| \leq m} (-1)^{|k|} D^k f_k, \varphi \right)$$

или

$$f = \sum_{|k| \leq m} D^k g_k,$$

где $g_k = (-1)^{|k|} f_k$ снова обычные функции. Итак, в ограниченной области G каждая обобщенная функция действует, как конечная сумма производных от обычных функций, сосредоточенных в области G .

Заметим, что функции g_k можно считать ограниченными в G , непрерывными и даже имеющими любое заданное число непрерывных производных, поскольку этого можно добиться, заменяя их первообразными некоторого порядка.

Вспоминая определение порядка сингулярности (§ 6, пример 2), мы можем сформулировать этот результат так: *всякая обобщенная функция в ограниченной области G имеет конечный порядок сингулярности.*

4. Выясним теперь, как действует обобщенная функция f на любую основную функцию $\varphi(x) \in K$. Для этого рассмотрим локально конечное покрытие пространства R_n счетной системой ограниченных областей G_1, \dots, G_p, \dots . По теореме 1 для области G_p можно указать число $m = m(p)$ и систему обычных функций $f_{p1}, \dots, f_{p, m(p)}$, сосредоточенных в G_p , такую, что для каждой основной функции $\varphi(x)$, сосредоточенной строго внутри G_p , имеет место представление

$$(f, \varphi) = \sum_{|k| \leq m(p)} (f_{pk}, D^k \varphi).$$

Далее, в силу результата п. 4 § 9, существует разложение единицы

$$1 \equiv e_1(x) + \dots + e_p(x) + \dots$$

на бесконечно дифференцируемые слагаемые, причем $e_p(x)$ равна нулю вне G_p . Для произвольной основной функции $\varphi(x)$ мы имеем

$\varphi = e_1\varphi + \dots + e_p\varphi + \dots$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= \sum_p (f, e_p\varphi) = \sum_p \sum_{|k| \leq m(p)} (f_{pk}, D^k e_p\varphi) = \\ &= \sum_p \sum_{|k| \leq m(p)} \left(f_{pk}, \sum_{|j| \leq m(p)} C_k^j D^{k-j} e_p \cdot D^j \varphi \right) = \\ &= \sum_p \sum_{|k| \leq m(p)} \left(\sum_{|j| \leq m(p)} C_k^j D^{k-j} e_p \cdot f_{pk}, D^j \varphi \right) = \\ &= \sum_p \sum_{|k| \leq m(p)} \left(\sum_{|j| \leq m(p)} (-D)^j C_k^j [D^{k-j} e_p \cdot f_{pk}], \varphi \right) = \\ &= \sum_p \sum_{|j| \leq m(p)} (D^j g_{jp}, \varphi), \quad (9) \end{aligned}$$

где $g_{jp} = (-1)^j \sum_{|k| \leq m(p)} C_k^j [D^{k-j} e_p \cdot f_{pk}]$ снова есть обычная функция, сосредоточенная в области G_p . Носители функций g_{jp} при возрастающем p удаляются от начала координат, поэтому в сумме

$$g_j(x) = \sum_p g_{jp}(x)$$

(при фиксированном j по тем индексам p , для которых $|j| \leq m(p)$) при всяком x лишь конечное число слагаемых может быть отличным от нуля. Поэтому и сама сумма $g_j(x)$ существует при всяком x . С увеличением $|j|$ носитель функции $g_j(x)$ все дальше уходит от начала координат. Изменив порядок суммирования в (9), приводим эту формулу к виду

$$(f, \varphi) = \sum_j (D^j g_j(x), \varphi(x)),$$

откуда

$$f = \sum_j D^j g_j(x). \quad (10)$$

Ряд (10) бесконечный, но в каждой конечной области отлично от нуля лишь конечное число слагаемых.

Формула (10) дает общий вид функционала на пространстве K ; иными словами, любая обобщенная функция приводится к виду (10). С другой стороны, и обратно, как мы заметили в начале этого параграфа, при любых обычных функциях $g_j(x)$, носители которых удаляются неограниченно от начала координат, ряд (10) сходится и определяет некоторую обобщенную функцию.

Б. Рассмотрим теперь случай финитной обобщенной функции f . В этом случае области $G_1, G_2, \dots, G_p, \dots$ мы можем взять так, чтобы в каждой из них, начиная с G_2 , функционал f был нулевым. Поэтому все функции f_{pk} при $p \geq 2$ можно взять равными нулю, и сумма (9) приводится к виду

$$(f, \varphi) = \sum_{|j| \leq m(1)} (D^j g_{j1}, \varphi).$$

Таким образом, имеет место представление

$$f = \sum_{|j| \leq m} D^j g_j(x), \quad m = m(1), \quad (11)$$

где $g_j(x)$ — обычные функции, равные 0 вне области G_1 . Так как область G_1 можно взять как угодно тесно облегающей носитель функционала f , то к формуле (11) мы можем сделать существенное дополнение: функции $g_j(x)$ всегда можно выбрать так, чтобы их носители содержались в произвольно малой окрестности носителя функционала f .

Как следствие, получаем: *финитный функционал имеет конечный порядок сингулярности во всем пространстве.*

Если носитель функционала f есть замкнутая ограниченная область G_0 , то в представлении (11) можно взять функции $g_j(x)$, сосредоточенные даже в самой области G_0 (не в ее окрестности). Этот результат, опирающийся на теорему о продолжении гладких функций, приводится в задаче 2.

6. Рассмотрим, наконец, функционал f , сосредоточенный в одной точке — для определенности, в начале координат 0. Любой брус B , содержащий внутри себя точку 0, является носителем функционала f . Фиксируем произвольно такой брус B и найдем представление функционала f в форме (11)

$$(f, \varphi) = \sum_{|j| \leq m} (g_j(x), D^j \varphi), \quad (12)$$

где $g_j(x)$ — обычные функции, сосредоточенные в брус B .

Покажем, что функционал f равен нулю на каждой основной функции $\varphi(x)$, равной нулю вместе с производными до порядка m в точке 0. Достаточно убедиться, что существует последовательность основных функций $\varphi_\nu(x)$, равных $\varphi(x)$ (каждая в некоторой окрестности точки 0) и сходящаяся к 0 равномерно в брус B вместе с производными до порядка m . Действительно, если такая последовательность $\varphi_\nu(x)$ построена, то, во-первых, мы имеем $(f, \varphi) = (f, \varphi_\nu)$ для каждого ν — поскольку функционал f сосредоточен в точке 0 — и, во-вторых, в силу формулы (12),

$$(f, \varphi_\nu) = \sum_{|j| \leq m} \int_B g_j(x) \cdot D^j \varphi_\nu(x) dx \rightarrow 0,$$

откуда $(f, \varphi) = 0$, что и требуется.

Пусть теперь φ — произвольная основная функция. Ее можно представить в форме

$$\varphi(x) = \sum_{|j| \leq m} D^j \varphi(0) \frac{x^j}{j!} + h_{m+1}(x), \quad (13)$$

где $h_{m+1}(x)$ обращается в нуль в начале координат вместе с производными до порядка m . Слагаемые справа не являются основными функциями, поэтому умножим равенство (13) на фиксированную основную функцию $e(x)$, равную 1 в окрестности точки 0; мы получим

$$\varphi(x)e(x) = \sum_{|j| \leq m} D^j \varphi(0) \cdot \frac{x^j e(x)}{j!} + h_{m+1}(x)e(x), \quad (14)$$

что дает разложение функции φe уже на основные функции. Применим функционал f к обеим частям равенства (14). Так как $\varphi(x)$ совпадает с $\varphi(x)e(x)$ в окрестности точки 0, то $(f, \varphi e) = (f, \varphi)$, и мы получаем

$$(f, \varphi) = (f, \varphi e) = \sum_{|j| \leq m} D^j \varphi(0) \left(f, \frac{x^j e(x)}{j!} \right) + (f, h_{m+1}e).$$

Обозначим $a_j = (-1)^j \left(f, \frac{x^j e(x)}{j!} \right)$. Далее, мы имеем $D^j \varphi(0) = ((-1)^j D^j \delta, \varphi)$; наконец, поскольку основная функция $h_{m+1}e$ обращается в нуль в начале координат со всеми производными до порядка m , мы имеем $(f, h_{m+1}e) = 0$. В итоге для любой основной функции φ

$$(f, \varphi) = \sum_{|j| \leq m} (a_j D^j \delta, \varphi)$$

и, следовательно,

$$f = \sum_{|j| \leq m} a_j D^j \delta. \quad (15)$$

В форме (15) записывается любая обобщенная функция, сосредоточенная в начале координат. Обобщенная функция, сосредоточенная в любой другой точке x_0 , естественно, имеет вид

$$f = \sum_{|j| \leq m} a_j D^j \delta(x - x_0).$$

Нам осталось для всякой функции $\varphi(x) \in K$, равной 0 вместе с производными до порядка m при $x=0$, построить последовательность основных функций $\varphi_\nu(x)$, равных $\varphi(x)$ в окрестности точки 0 и сходящихся к 0 равномерно в бруске B вместе с производными до порядка m . Для этого рассмотрим фиксированную основную функцию $h(x)$, равную 1 в некоторой шаровой окрестности точки 0, положим, радиуса ρ , и равную 0 вне некоторой большей шаровой окрестности, положим, радиуса 2ρ .

Мы утверждаем, что последовательность функций

$$\varphi_\nu(x) = \varphi(x) h(\nu x) \quad (\nu = 1, 2, \dots) \quad (16)$$

удовлетворяет требуемому условию.

Во-первых, функции $\varphi_\nu(x)$, определенные формулой (5), действительно обращаются в $\varphi(x)$ каждая в некоторой окрестности точки 0.

Оценим, далее, производные функций $\varphi_\nu(x)$. По формуле Лейбница

$$D^k \varphi_\nu(x) = \sum_{|j| \leq k} C_k^j D^{k-j} \varphi(x) \cdot D^j h(\nu x).$$

Обозначим через M постоянную, превосходящую все значения $|D^k h(x)|$, $|k| \leq m$. Очевидно, $|D^j h(\nu x)| \leq \nu^j M$. Производные функции $\varphi(x)$ мы должны оценить лишь при $|x| \leq \frac{2\rho}{\nu}$, поскольку вне этого шара функция $h(\nu x)$ равна 0. В указанной окрестности мы имеем $\max |D^m \varphi(x)| = o(1)$ (бесконечно малая величина вместе с $\frac{1}{\nu}$). Интегрируя это соотношение, получим $\max |D^{m-1} \varphi| = o\left(\frac{1}{\nu}\right)$, ..., $\max |D^{m-j} \varphi| = o\left(\frac{1}{\nu^j}\right)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \max_B |D^k \varphi_\nu(x)| &\leq \sum_{|j| \leq k} C_k^j \max |D^{k-j} \varphi(x)| \cdot \max |D^j h(\nu x)| \leq \\ &\leq C \cdot o\left(\frac{1}{\nu^j}\right) \cdot \nu^j M = o(1), \end{aligned}$$

т. е. стремится к 0 при $\nu \rightarrow \infty$, чем доказательство и завершается.

7. В качестве примера применения предыдущих теорем рассмотрим интеграл по единичной сфере Ω в n -мерном пространстве

$$\int_{\Omega} f(\omega, x) d\omega, \quad (1)$$

где $f(\xi)$ — обобщенная функция одномерного аргумента ξ (§ 9, п. 7).

Нас интересует здесь вопрос о гладкости функции (1), как функции от x . Более общим образом, поставим вопрос о гладкости интеграла

$$\int_{\Omega} f(\omega, x) g(\omega) d\omega, \quad (2)$$

где $g(\omega)$ — бесконечно дифференцируемая функция на сфере Ω .

Если $f(\xi)$ сама бесконечно дифференцируема при всех ξ , то, очевидно, интеграл (2) есть бесконечно дифференцируемая функция от x .

Рассмотрим случай, когда $f(\xi)$ — обычная функция, бесконечно дифференцируемая лишь при $\xi \neq 0$; покажем, что (2) есть бесконечно дифференцируемая функция при $x \neq 0$.

Выберем на сфере систему координат (зависящую от x) так, чтобы первой из них была величина $\xi = (\omega, x)$; совокупность остальных обозначим через ω' . При этом $d\omega = J(\xi, \omega', x) d\xi d\omega'$, где якобиан $J(\xi, \omega', x)$ есть бесконечно дифференцируемая функция от ξ , ω' и x при условии, что $x \neq 0$, $\xi \neq |x|$. Можно считать без ограничения общности, что функция $f(\xi)$ равна нулю в окрестности точек $\xi = \pm|x|$, поскольку в противном случае мы всегда можем написать $f(\xi) = f_0(\xi) + f_1(\xi)$, где $f_0(\xi)$ удовлетворяет требуемому условию, а $f_1(\xi)$ всюду бесконечно дифференцируема.

Интегрирование в (2) будем вести вначале по координатам ω' . Положим

$$\int J(\xi, \omega', x) g(\omega) d\omega' = G(\xi, x);$$

функция $G(\xi, x)$ также бесконечно дифференцируема по ξ и x при $x \neq 0$, $\xi \neq \pm|x|$. Далее, мы имеем

$$\int_{\Omega} f((\omega, x)) g(\omega) d\omega = \int_{-|x|}^{|x|} f(\xi) G(\xi, x) d\xi, \quad (3)$$

и так как $f(\xi)$ в окрестности точек $\pm|x|$ равна 0, интеграл (3) бесконечно дифференцируем по x при $x \neq 0$, что и утверждалось.

Пусть, наконец, $f(\xi)$ есть обобщенная функция, совпадающая при $\xi \neq 0$ с обычной бесконечно дифференцируемой функцией. Функцию $f(\xi)$ можно считать финитной (отделив при необходимости некоторое бесконечно дифференцируемое слагаемое). Тогда, в силу теоремы п. 5, ее можно записать в форме

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^m f_k^{(k)}(\xi),$$

где $f_k(\xi)$ — некоторые обычные функции. Заменяя их некоторыми их первообразными, можно получить представление $f(\xi)$ в форме

$$f(\xi) = \frac{d^{2m}}{d\xi^{2m}} F(\xi),$$

где $F(\xi)$ снова обычная функция. При $\xi \neq 0$ функция $F(\xi)$ есть решение обыкновенного дифференциального уравнения с обычной функцией в правой части и по § 5, п. 4 является классическим

решением этого уравнения, в частности, является бесконечно дифференцируемой функцией вместе с $f(\xi)$. По доказанному,

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} F(\omega, x) g(\omega) d\omega$$

есть бесконечно дифференцируемая функция от x при $x \neq 0$. Далее, в силу § 9, п. 4 и § 7, п. 2.4 мы имеем

$$\begin{aligned} \Delta^m \Phi(x) &= \int_{\Omega} \frac{d^{2m}}{d\xi^{2m}} F(\xi) g(\omega) d\omega = \\ &= \int_{\Omega} f(\xi) (\Sigma \omega_j^2)^m g(\omega) d\omega = \int_{\Omega} f(\omega, x) g(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

поэтому (2) является бесконечно дифференцируемой функцией при $x \neq 0$ вместе с $\Phi(x)$, что и требовалось.

В частности, такие выражения, как

$$\int_{\Omega} \delta^{(m)}(\omega, x) d\omega,$$

представляют собою бесконечно дифференцируемые функции от x при $x \neq 0$; ниже, в § 11 мы укажем их значения.

Задачи. 1. Функционал f , сосредоточенный на замкнутом ограниченном множестве F , обращается в нуль на всякой основной функции $\varphi(x)$, равной нулю на F вместе со всеми производными.

Указание. Обобщить конструкцию п. 6, причем вместо функции $h(vx)$ рассмотреть $e(x) * h(vx) = \int h(v\xi) e(x - \xi) d\xi$, где $e(x)$ равна 1 в некоторой окрестности множества F и нулю вне некоторой большей окрестности.

2. Согласно одной теореме Уитни*), всякая функция $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ с непрерывными производными до порядка m на замкнутой ограниченной области \bar{G} (на самом деле у Уитни несколько более общий класс множеств) может быть продолжена на все R_n с выполнением неравенств

$$\max_{R_n} |D^k \varphi(x)| \leq C_m(G) \cdot \max_{x \in G} |D^k \varphi(x)| \quad (|k| \leq m).$$

Пользуясь этой теоремой, показать, что функционал f , сосредоточенный в \bar{G} , допускает представление

$$f = \sum_{|j| \leq m} D^j f_j(x),$$

где $f_j(x)$ — обычные функции, сосредоточенные в \bar{G} .

Указание. Соответственно обобщить конструкцию пп. 2—3.

*) Доказательство можно найти в статье Л. Хёрмандера, О делении обобщенных функций на полиномы, Сборник «Математика», № 5 (1959), стр. 117—130.

3. Дано, что функция $f(x)$ при $x \neq 0$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению $P(D)f(x) = 0$ и в окрестности точки $x = 0$ имеет особенность не выше степенной:

$$|f(x)| \leq \frac{c}{|x|^p}.$$

Пусть, далее, $g(x)$ — фундаментальная функция оператора $P(D)$ (§ 7, п. 2, пример 9). Показать, что существует представление (при $x \neq 0$)

$$f(x) = R(D)g(x) + f_0(x),$$

где $P(D)f_0(x) = 0$ всюду, $R(D)$ — некоторый новый дифференциальный оператор.

У к а з а н и е. Существует обобщенная функция f , совпадающая с $f(x)$ при $x \neq 0$ (задача 4 к § 8). Выражение $P(D)f$ равно нулю вне начала координат и по п. 6 имеет вид $R(D)\delta(x)$. Рассмотрим $P(D)\{f - R(D)g(x)\}$.

4. Обозначим через S' совокупность всех обобщенных функций $f \in K'$, представимых в форме конечных сумм

$$f = \sum_{|j| < m} D^j f_j(x),$$

где $f_j(x)$ — обычные функции не более чем степенного роста при $|x| \rightarrow \infty$. Показать, что функционал $f \in S'$ можно доопределить на функциях $\varphi(x)$, бесконечно дифференцируемых и удовлетворяющих условиям

$$\|\varphi\|_{kq}^2 \equiv \int_{R_n} |x^k D^q \varphi(x)|^2 dx < \infty \quad (|k|, |q| = 0, 1, 2, \dots)$$

(пространство S), причем величина (f, φ) будет непрерывной на S в следующем смысле: если $\|\varphi_\nu\|_{kq} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ и любых фиксированных k и q , то $(f, \varphi_\nu) \rightarrow 0$.

У к а з а н и е. Положить

$$(f, \varphi) = \sum_{|j| < m} (-1)^j \int_{R_n} f_j(x) D^j \varphi(x) dx. \quad (1)$$

5. Показать, что обобщенная однородная функция $f \in K'$ любой степени λ (§ 6, задача 3) принадлежит пространству S' .

У к а з а н и е. Если f действует на основную функцию φ , сосредоточенную в области $1 < |x| < 4$, как m -я производная обычной функции $f(x)$, ограниченной числом M , то на основную функцию ψ_p , сосредоточенную в области $2^p < |x| < 2^{p+2}$, она действует, как m -я производная функции, ограниченной числом $2^{p(\lambda+m)}M$. Любая основная функция $\varphi(x)$ представляется в форме суммы ряда функций вида ψ_p .

6. Показать, что формула (1) (задача 4) с обычными функциями $f_j(x)$, возрастающими при $|x| \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени $|x|$, дает общий вид линейного непрерывного функционала f на пространстве S .

У к а з а н и е. Показать, что существуют k и q , для которых функционал f непрерывен по норме $\|\varphi\|_{kq}$. Далее, повторить применительно к данному случаю рассуждения п. 3.

7. Известно, что обобщенная функция $f \in K'$ для любой основной функции $\varphi(x)$, сосредоточенной в области $|x| \leq 1$, удовлетворяет неравенству

$$(f, \varphi(x+h)) \leq C \| \varphi \|_m (1+|h|)^p,$$

где C , p и m — постоянные, а $\| \varphi \|_m$ имеет тот же смысл, что и в п. 3.

Показать, что f продолжается с пространства K на пространство S , как непрерывный линейный функционал.

Указание. Рассмотрим функцию $\psi(x) \in K$, сосредоточенную в шаре $|x| \leq 1$ и такую, что ее сдвиги в сумме дают 1 (§ 8, задача 3):

$$1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi(x+h_{\nu}).$$

Любую функцию $\varphi \in S$ можно представить в форме

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(x) \psi(x+h_{\nu}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu}(x+h_{\nu}),$$

где $\varphi_{\nu}(x) = \varphi(x-h_{\nu}) \psi(x)$ сосредоточена в шаре $|x| \leq 1$. Показать, что $\| \varphi_{\nu} \|_m$ при $\nu \rightarrow \infty$ стремится к 0 быстрее любой отрицательной степени $|h_{\nu}|$. Положить

$$(f, \varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (f, \varphi_{\nu}(x+h_{\nu})).$$

8. Будем говорить, что обобщенная функция $f \in K'$ имеет при $|x| \rightarrow \infty$ рост не выше степенного, если функция от h

$$(f, \varphi(x+h)) \tag{1}$$

растет при $|h| \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени $|h|$, какова бы ни была основная функция $\varphi \in K$. Показать, что в таком случае $f \in S'$.

Указание. Вначале показать, что для функций φ с фиксированным носителем те степени $|h|$, которыми оценивается рост функции (1), ограничены. Для этого, предполагая противное и пользуясь тем, что указанные степени не меняются при умножении φ на константу, построить основную функцию φ вида $\sum_{\nu} \lambda_{\nu} \varphi_{\nu}(x)$ (см. § 2, задача 2), для которой функция (1)

растет быстрее любой степени h . Далее, имея неравенство

$$(f, \varphi(x+h)) \leq C_{\varphi} (1+|h|)^q$$

с фиксированным q , показать, что в качестве C_{φ} можно взять $C \| \varphi \|_m$ с некоторым фиксированным m (тот же прием!). Тем самым задача сводится к задаче 7 (В. П. Паламонов).

9. Обозначим через D_m линейное пространство финитных функций $\varphi(x)$, имеющих непрерывные производные до порядка m . Сходимость в D_m определяется по правилу: $\varphi_{\nu}(x) \rightarrow 0$ в D_m , если все $\varphi_{\nu}(x)$ обращаются в нуль вне одного и того же ограниченного множества и последовательность $\varphi_{\nu}(x)$ стремится к 0 равномерно вместе с производными до порядка m . Показать, что D_m содержит K в качестве всюду плотного множества.

Указание. Использовать идею § 8, п. 3.

10. Показать, что всякий линейный непрерывный функционал $f \in K'$ с порядком сингулярности $s(f) \leq m$ может быть распространён с K на

все D_m , как линейный непрерывный функционал; если же $s(f) \geq m + 1$, то такое распространение, вообще говоря, невозможно.

Указание. Использовать определение функционала с $s(f) \leq m$. Функционал $\frac{1}{x}$, имеющий порядок сингулярности 1 (§ 3, задача 3), не может быть распространен с K на D_0 (пространство финитных непрерывных функций).

11. Найти общий вид линейного непрерывного функционала на D_m .

Указание. При $m = 0$ из теоремы Рисса (Анализ III, гл. VI, § 7) получить представление

$$(f, \varphi) = \int_{R_n} \varphi d\mu,$$

где μ — мера Стильтеса с (локально) ограниченным измерением.

В общем случае пространство D_m изоморфно пространству производных m -го порядка функций $\varphi \in D_m$, являющемуся замкнутым подпространством в прямой сумме пространств D_0 . Использовать теорему Хана-Банаха о продолжении линейного функционала (Анализ III, Дополнение).

$$\text{Отв.} \quad (f, \varphi) = \sum_{|k| \leq m} \int_{R_n} \frac{\partial^m \varphi(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} d\mu_k(x),$$

где $\mu_k(x)$ меры Стильтеса с (локально) ограниченным изменением.

§ 11. Некоторые специальные обобщенные функции

В различных приложениях играют роль конкретные обобщенные функции x_+^λ , x_-^λ , r^λ и связанные с ними. Мы рассмотрим их свойства в этом параграфе.

1. Рассмотрим функцию x_+^λ , равную x^λ при $x > 0$ и 0 при $x < 0$. Мы хотим построить и изучить отвечающую ей обобщенную функцию. При $\operatorname{Re} \lambda > -1$ эта функция определяет регулярный функционал

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Числовая функция (1), очевидно, аналитична по λ ; она имеет производную по λ , равную

$$\int_0^\infty x^\lambda \ln x \varphi(x) dx.$$

Это означает (ср. § 8, п. 6), что функционал x_+^λ аналитичен по λ при $\operatorname{Re} \lambda > -1$. Мы желаем продолжить его аналитически во всю

плоскость переменного λ . Правую часть формулы (1) перепишем в виде

$$\int_0^1 x^\lambda [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1}. \quad (2)$$

Первое слагаемое определено для $\operatorname{Re} \lambda > -2$, второе — для любых λ , третье — для $\lambda \neq -1$. Следовательно, функционал (1) аналитически продолжается на область $\operatorname{Re} \lambda > -2$, $\lambda \neq -1$.

Аналогичным способом строится продолжение функционала x_+^λ на область $\operatorname{Re} \lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \dots, -n$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx = \\ = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx + \\ + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)! (\lambda+k)}. \end{aligned} \quad (3)$$

И здесь правая часть дает регуляризованное значение интеграла, стоящего слева. Тем самым обобщенная функция x_+^λ определяется для всех $\lambda \neq -1, -2, \dots$

В полосе $-n-1 < \operatorname{Re} \lambda < -n$ формула (3) может быть преобразована к более простому виду:

$$\begin{aligned} (x_+^\lambda, \varphi) = \\ = \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx, \end{aligned} \quad (4)$$

в силу того, что в этом случае при $1 \leq k \leq n$

$$\int_1^\infty x^{\lambda+k-1} dx = -\frac{1}{\lambda+k}. \quad (5)$$

Формула (3) показывает, что (x_+^λ, φ) , как функция от λ , имеет полюсы 1-го порядка в точках $\lambda = -1, -2, -3, \dots$, причем ее вычет в точке $\lambda = -k$ равен $\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}$. Так как $\varphi^{(k-1)}(0) = (-1)^{k-1} (\delta^{(k-1)}(x), \varphi(x))$, то, следовательно, сам функционал x_+^λ имеет при $\lambda = -k$ полюс 1-го порядка с вычетом $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta^{(k-1)}(x)$.

2. Рассмотрим теперь функцию x_-^λ , равную $|x|^\lambda$ при $x < 0$ и 0 при $x > 0$. Для $\operatorname{Re} \lambda > -1$ эта функция определяет регулярный функционал

$$(x_-^\lambda, \varphi) = \int_{-\infty}^0 |x|^\lambda \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Этот функционал можно продолжить в полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda \leq -1$ таким же образом, как x_+^λ . При этом проще всего, заменив x на $-x$, представить (x_-^λ, φ) в виде

$$(x_-^\lambda, \varphi(x)) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x) dx = (x_+^\lambda, \varphi(-x)).$$

Это позволяет немедленно перенести все результаты, полученные для функционала x_+^λ , на функционал x_-^λ , заменив в соответствующих формулах функцию $\varphi(x)$ на $\varphi(-x)$. При этом фигурирующие в формулах выражения $\varphi^{(j)}(0)$ заменяются на $(-1)^j \varphi^{(j)}(0)$.

В частности, мы видим, что обобщенная функция x_-^λ , так же как и x_+^λ , существует и аналитична во всей плоскости λ , за исключением точек $\lambda = -1, -2, \dots$; в точке $\lambda = -k$ обобщенная функция x_-^λ имеет простой полюс с вычетом $\frac{\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$.

Величину (x_-^λ, φ) в полосе $-n-1 < \operatorname{Re} \lambda < -n$ можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} (x_-^\lambda, \varphi(x)) &= (x_+^\lambda, \varphi(-x)) = \\ &= \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \dots - \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx. \quad (2) \end{aligned}$$

3. Обобщенная функция f называется *четной*, если

$$(f(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi(-x)),$$

и *нечетной*, если

$$(f(x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(-x)).$$

Из выведенных в пп. 1—2 обобщенных функций составим следующие четную и нечетную комбинации:

$$|x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda, \quad (1)$$

$$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = x_+^\lambda - x_-^\lambda. \quad (2)$$

Изучим особенности обобщенных функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Так как обобщенная функция x_+^λ имеет при $\lambda = -k$ полюс с вычетом $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta^{(k-1)}(x)$, а функция x_-^λ — полюс с вычетом $\frac{1}{(k-1)!} \delta^{(k-1)}(x)$, то обобщенная функция $|x|^\lambda$ имеет полюсы только при $\lambda = -1, -3, -5, \dots, -2m-1, \dots$. Вычет $|x|^\lambda$ при $\lambda = -2m-1$ равен $\frac{2}{(2m)!} \delta^{(2m)}(x)$. В точках $\lambda = -2m$ ($m = 1, 2, \dots$) обобщенная функция $|x|^\lambda$ определена; при этих λ мы, естественно, будем вместо $|x|^{-2m}$ писать x^{-2m} .

Аналогично обобщенная функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ имеет полюсы в точках $\lambda = -2, -4, \dots, -2m, \dots$ с вычетом при $\lambda = -2m$, равным $-\frac{2}{(2m-1)!} \delta^{(2m-1)}(x)$. При $\lambda = -2m-1$ ($m = 0, 1, \dots$) обобщенная функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ определена, и мы вместо $|x|^{-2m-1} \operatorname{sgn} x$ будем писать x^{-2m-1} . Таким образом, обобщенные функции x^{-n} определены у нас для всех $n = 1, 2, \dots$

Дадим непосредственные определения обобщенных функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Для этого воспользуемся формулами (4) п. 1 и (2) п. 2; в полосе $-n-1 < \operatorname{Re} \lambda < -n$

$$\begin{aligned} (x_+^\lambda, \varphi) &= \\ &= \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx, \\ (x_-^\lambda, \varphi) &= \\ &= \int_0^\infty x^\lambda \left[\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \dots - \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right] dx. \end{aligned}$$

Заменяя здесь n на $2m$, складывая и вычитая, находим

$$\begin{aligned} (|x|^\lambda, \varphi) &= \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!} \varphi''(0) + \dots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} \varphi^{(2m-2)}(0) \right] \right\} dx; \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi) &= \int_0^\infty x^\lambda \left\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!} \varphi'''(0) + \dots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(0) \right] \right\} dx. \quad (4) \end{aligned}$$

Первое разложение сходится при $-2m - 1 < \operatorname{Re} \lambda < -2m - 1$, второе при $-2m - 2 < \operatorname{Re} \lambda < -2m$. В частности,

$$(x^{-2m}, \varphi) = \int_0^{\infty} x^{-2m} \left\{ \varphi(x) + \varphi(-x) - 2 \left[\varphi(0) + \frac{x^2}{2!} \varphi''(0) + \dots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} \varphi^{(2m-2)}(0) \right] \right\} dx, \quad (5)$$

$$(x^{-2m-1}, \varphi) = \int_0^{\infty} x^{-2m-1} \left\{ \varphi(x) - \varphi(-x) - 2 \left[x\varphi'(0) + \frac{x^3}{3!} \varphi'''(0) + \dots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \varphi^{(2m-1)}(0) \right] \right\} dx. \quad (6)$$

Например,

$$(x^{-2}, \varphi) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx, \quad (7)$$

$$(x^{-1}, \varphi) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx; \quad (8)$$

последнее выражение совпадает с главным значением по Коши интеграла от $\frac{\varphi(x)}{x}$ (см. § 3, п. 3, пример 2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\}.$$

4. а) Умножение на функцию. Проверим справедливость формулы (m — натуральное число)

$$x^m \cdot x_+^\lambda = x_+^{m+\lambda} \quad (\lambda \neq -1, -2, \dots) \quad (1)$$

Формула требует доказательства, так как правая и левая части имеют независимые определения. Доказательство простое: правая и левая части аналитичны по λ и совпадают при $\operatorname{Re} \lambda > -1$, следовательно, совпадают в их полной области аналитичности, т. е. во всяком случае при всех $\lambda \neq -1, -2, \dots$. Но правая часть аналитична также и при $\lambda = -1, \dots, -m$, поэтому в этих точках и левая часть сохраняет аналитичность; в частности, мы имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow -k} x^m x_+^\lambda = x_+^{m-k} \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Таким образом, формула (1) справедлива и при $\lambda = -1, \dots, -m$, если левую часть понимать как соответствующий предел. Аналогично

$$x^m x_-^\lambda = x_-^{m+\lambda} \cdot (-1)^m \quad (\lambda \neq -m-1, -m-2, \dots), \quad (2)$$

$$x^m |x|^\lambda = |x|^{m+\lambda} (\operatorname{sgn} x)^m \quad (\lambda \neq -m-1, -m-2, \dots), \quad (3)$$

$$x^m |x|^\lambda \operatorname{sgn} x = |x|^{m+\lambda} (\operatorname{sgn} x)^{m+1} \quad (\lambda \neq -m-1, -m-2, \dots). \quad (4)$$

В частности, при любых натуральных k и m

$$x^k \cdot x^{-m} = x^{k-m}. \quad (5)$$

Наконец, если $f(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция, имеющая при $x=0$ корень кратности m , так что $f(x) = x^m g(x)$, $g(0) \neq 0$, мы можем написать

$$\begin{aligned} f(x) x_+^\lambda &= g(x) x^m x_+^\lambda = g(x) x_+^{m+\lambda}, \\ f(x) \cdot x^{-k} &= g(x) \cdot x^{m-k}. \end{aligned} \quad (6)$$

б) Дифференцирование. При $\operatorname{Re} \lambda > 0$ мы имеем очевидное равенство $\frac{dx_+^\lambda}{dx} = \lambda x_+^{\lambda-1}$, т. е. $(x_+^\lambda, \varphi'(x)) = -(\lambda x_+^{\lambda-1}, \varphi(x))$. Так как обе части последнего равенства аналитически продолжаются в плоскость (с выколотыми точками $0, -1, \dots$) то, в силу свойства единственности, равенство будет справедливо и во всей плоскости. Таким образом,

$$\frac{dx_+^\lambda}{dx} = \lambda x_+^{\lambda-1} \quad (\lambda \neq 0, -1, -2, \dots). \quad (1)$$

Аналогично

$$\frac{dx_-^\lambda}{dx} = -\lambda x_-^{\lambda-1} \quad (\lambda \neq 0, -1, -2). \quad (2)$$

Если $\lambda = 0$, то $x_+^\lambda = \theta(x)$, $x_-^\lambda = \theta(-x)$ и дифференцирование проходит по уже известным формулам (§ 4, п. 3)

$$\theta'(x) = \delta(x), \quad \theta'(-x) = -\delta(x).$$

Далее,

$$\frac{d}{dx} |x|^\lambda = \frac{d}{dx} (x_+^\lambda + x_-^\lambda) = \lambda x_+^{\lambda-1} - \lambda x_-^{\lambda-1} = \lambda |x|^{\lambda-1} \operatorname{sgn} x, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} |x|^\lambda \operatorname{sgn} x &= \frac{d}{dx} (x_+^\lambda - x_-^\lambda) = \lambda x_+^{\lambda-1} + \lambda x_-^{\lambda-1} = \lambda |x|^{\lambda-1} \\ & \quad (\lambda \neq 0, -1, \dots). \end{aligned} \quad (4)$$

Правая и левая части равенства (3) допускают аналитическое продолжение на четные отрицательные значения λ , правая и левая части равенства (4) — на нечетные отрицательные λ .

В частности, при $\lambda = -n$ получаем

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1} \quad (n \neq 0). \quad (5)$$

Обращая формулы (1)—(5), получаем выражения неопределенных интегралов от наших обобщенных функций. В частности, при любом $m \neq 1$ из (5) мы получаем

$$\int x^{-m} dx = \frac{x^{-m+1}}{-m+1} + C. \quad (6)$$

Если $m = 1$, то формула (6) не позволит найти соответствующую первообразную. Но мы знаем (§ 4, п. 3), что соответствующей первообразной служит $\ln|x|$:

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + C. \quad (7)$$

5. Полагая $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, рассмотрим функционал r^λ , действующий по формуле

$$(r^\lambda, \varphi) = \int_{R_n} r^\lambda \varphi(x) dx, \quad (1)$$

которая имеет смысл при $\operatorname{Re} \lambda > -n$. В силу возможности формального дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (r^\lambda, \varphi) = \int_{R_n} r^\lambda \ln r \varphi(x) dx$$

функционал r^λ представляет собой аналитическую функцию от λ в области $\operatorname{Re} \lambda > -n$. Для $\operatorname{Re} \lambda \leq -n$ функция r^λ локально неинтегрируема; мы определим функционал r^λ методом аналитического продолжения.

Переходя в интеграле (1) к сферическим координатам, приводим его к виду

$$(r^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty r^\lambda \left\{ \int_{\Omega_n(r)} \varphi(x) d\Omega_n(r) \right\} dr,$$

где $d\Omega_n(r)$ — элемент сферы радиуса r . Внутренний интеграл можно представить в форме

$$\int_{\Omega_n(r)} \varphi(x) d\Omega_n(r) = \Omega_n r^{n-1} S_r[\varphi],$$

где Ω_n означает поверхность единичной сферы в n -мерном пространстве, а $S_r[\varphi]$ есть среднее из значений функции $\varphi(x)$ на сфере радиуса r . Итак, мы приходим к формуле

$$(r^\lambda, \varphi) = \Omega_n \int_0^\infty r^{\lambda+n-1} S_r[\varphi] dr. \quad (2)$$

Установим некоторые свойства функции $S_r[\varphi]$. Мы утверждаем, что функция $S_r[\varphi]$ (определенная при $r \geq 0$) *финитна, бесконечно дифференцируема и все ее производные нечетного порядка обращаются в нуль при $r = 0$.*

При достаточно большом r функция $\varphi(x)$ обращается в нуль; поэтому и ее среднее $S_r[\varphi]$ обращается в нуль; таким образом, $S_r[\varphi]$ — финитная функция.

Очевидно также, что $S_r[\varphi]$ бесконечно дифференцируема при $r > 0$.

Чтобы убедиться в наличии всех производных у функции $S_r[\varphi]$ и при $r = 0$, разложим функцию $\varphi(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом R_{2m+1} порядка r^{2m+1} . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \Omega_n S_r[\varphi] = \int_{\Omega_n(r)} & \left[\varphi(0) + \sum \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_j} x_j + \frac{1}{2!} \sum \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3!} \sum \frac{\partial^3 \varphi(0)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} x_i x_j x_k + \dots + R_{2m+1} \right] d\Omega_n(r). \end{aligned}$$

Ясно, что каждое слагаемое подынтегральной суммы (кроме остаточного члена), содержащее нечетное число множителей x_j , после интегрирования обращается в нуль. Слагаемые подынтегральной суммы, содержащие четное число, скажем $2k$, множителей x_j , после интегрирования и суммирования дадут член вида $a_k r^{2k}$. Итак, мы получаем

$$S_r[\varphi] = \varphi(0) + a_1 r^2 + a_2 r^4 + \dots + a_m r^{2m} + 0(r^{2m+1}). \quad (3)$$

Это выражение показывает, что при $r = 0$ функция $S_r[\varphi]$ имеет производные до порядка $2m$, причем нечетные производные равны нулю. Так как m можно взять произвольным, то $S_r[\varphi]$ бесконечно дифференцируема при $r = 0$ и все ее нечетные производные при $r = 0$ обращаются в нуль.

Отсюда следует, что функцию $S_r[\varphi]$ можно рассматривать как четную основную функцию переменного r . Интеграл (2) в таком случае можно понимать как результат применения функционала $\Omega_n \xi_+^\mu$ ($\mu = \lambda + n - 1$) к основной функции $S_\xi[\varphi]$. Но мы хорошо знаем, что функция ξ_+^μ , аналитическая при $\operatorname{Re} \mu > -1$ (т. е. $\operatorname{Re} \lambda > -n$),

допускает аналитическое продолжение на всю плоскость μ с исключенными точками $\mu = -1, -2, \dots$ ($\lambda = -n, -n+1, \dots$), в которых она имеет полюсы 1-го порядка; при этом вычет в полюсе $\mu = -m$ ($\lambda = -n - m + 1$) равен

$$\frac{1}{(m-1)!} \left((-1)^{m-1} \delta^{(m-1)}(\xi), S_{\xi}[\varphi] \right) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} S_{\xi}[\varphi] \Big|_{\xi=0}.$$

Но так как нечетные производные функции $S_{\xi}[\varphi]$ обращаются в нуль при $\xi=0$, то полюсов, отвечающих четным значениям m , на самом деле нет. Остается серия полюсов, отвечающих значениям $m = 1, 3, 5, \dots$ или, что то же, $\lambda = -n, -n-2, -n-4, \dots$

Заметим, что вычет функции $r^{\lambda} S_r[\varphi]$ при $\lambda = -n - 2k$ ($k = 0, 1, \dots$), как вытекает из вышесказанного, равен

$$\Omega_n \frac{(\delta^{(2k)}(\xi), S_{\xi}[\varphi])}{(2k)!} = \frac{\Omega_n}{(2k)!} \frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}} S_{\xi}[\varphi] \Big|_{\xi=0}. \quad (4)$$

В частности, в точке $\lambda = -n$ функция ($r^{\lambda}, S_r[\varphi]$) имеет полюс 1-го порядка с вычетом $\Omega_n S_0[\varphi] = \Omega_n \varphi(0)$. Это означает, что обобщенная функция r^{λ} при $\lambda = -n$ имеет полюс 1-го порядка с вычетом $\Omega_n \delta(x)$.

6. Пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ — точка единичной сферы Ω в пространстве R_n . Обозначим $(\omega, x) = \omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Omega} |(\omega, x)|^{\lambda} d\omega.$$

Интеграл существует, как собственный, при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ (и, как несобственный, при $\operatorname{Re} \lambda > -1$). Он представляет собою некоторую функцию от $x = (x_1, \dots, x_n)$, которую мы пока обозначим $F(x, \lambda)$. Эта функция от x сферически симметрична: если h означает некоторый поворот в пространстве R_n , то

$$F(hx, \lambda) = \int_{\Omega} |(\omega, hx)|^{\lambda} d\omega = \int_{\Omega} |(h'\omega, x)|^{\lambda} d\omega = \int_{\Omega} |(\omega', x)|^{\lambda} d\omega',$$

где $\omega' = h'\omega$, и $h' = h^{-1}$ означает поворот, обратный к повороту h .

Таким образом, $F(x, \lambda)$ есть функция от $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ и λ . Обозначим ее теперь $F(r, \lambda)$. Заменяя x на αx , где α — положительное число, мы находим

$$F(\alpha r, \lambda) = \int_{\Omega} |(\omega, \alpha x)|^{\lambda} d\omega = \alpha^{\lambda} \int_{\Omega} |(\omega, x)|^{\lambda} d\omega = \alpha^{\lambda} F(r, \lambda).$$

Полагая здесь $r = 1$, получаем

$$F(\alpha, \lambda) = \alpha^\lambda F(1, \lambda) = C(\lambda) \alpha^\lambda.$$

Таким образом, $F(r, \lambda)$ пропорционально r^λ . Остается найти коэффициент $C(\lambda)$. Мы имеем $C(\lambda) = F(e, \lambda)$, где e — любой единичный вектор. Положим $e = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Мы получим тогда

$$C(\lambda) = \int_{\Omega} |\omega_n|^\lambda d\omega = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\lambda \theta_{n-1} \sin^{n-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1} \Omega_{n-1},$$

где θ_{n-1} — угол между e и ω , Ω_{n-1} — поверхность единичной сферы в $n-1$ -мерном пространстве. В результате

$$C(\lambda) = 2\Omega_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\lambda \theta_{n-1} \sin^{n-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1} = 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}, \quad (1)$$

поскольку по формуле (3) п. 7 § 10 и по классической формуле для В-функции *)

$$\Omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p \theta \cos^q \theta d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right).$$

Запишем полученную формулу в следующем виде:

$$\int_{\Omega} \frac{|\omega, x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} d\omega = c_n \frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}, \quad c_n = 2\pi^{\frac{n-1}{2}}. \quad (2)$$

Рассматривая правую и левую части как функционалы на пространстве K , мы будем строить аналитическое продолжение их во всю плоскость λ .

Функция r^λ , как мы знаем, имеет аналитическое продолжение во всю плоскость λ с простыми полюсами в точках $-n, -n-2, -n-4, \dots$. Известно, что гамма-функция $\Gamma(z)$ имеет простые полюсы в точках $0, -1, -2, \dots$; следовательно, $\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)$ имеет простые полюсы при $\lambda = -n, -n-2, -n-4, \dots$. Мы видим, что числитель и знаменатель отношения $\frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}$ имеют простые

*) См., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, 1962, стр. 769.

полюсы в одних и тех же точках; следовательно, само *это отношение есть целая аналитическая функция от λ* . Найдем, в частности, его значение при $\lambda = -n$. Оно равно отношению вычетов числителя и знаменателя; вычет числителя, как мы знаем, равен $\Omega_n \delta(x)$, вычет знаменателя мы легко получим из функционального уравнения для гамма-функции

$$\Gamma(\zeta + 1) = \zeta \Gamma(\zeta). \quad (3)$$

Именно, полагая $\zeta = \frac{\lambda + n}{2}$, найдем

$$\Gamma\left(\frac{\lambda + n}{2}\right) = \frac{2}{\lambda + n} \Gamma\left(\frac{\lambda + n + 2}{2}\right);$$

при $\lambda \rightarrow -n$

$$\Gamma\left(\frac{\lambda + n}{2}\right) = \frac{2}{\lambda + n} \Gamma(1) + 0(1),$$

и следовательно, вычет $\Gamma\left(\frac{\lambda + n}{2}\right)$ при $\lambda = -n$ равен $2\Gamma(1) = 2$.

В итоге

$$\frac{r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda + n}{2}\right)} \Bigg|_{\lambda = -n} = \frac{\Omega_n}{2} \delta(x). \quad (4)$$

Рассмотрим теперь аналитическое продолжение левой части в формуле (2). Аналитическое продолжение функционала $|\xi|^\lambda$ имеет простые полюсы $\lambda = -1, -3, \dots$. Но эти же простые полюсы имеет и $\Gamma\left(\frac{\lambda + 1}{2}\right)$. Найдем значение

$$\frac{|\xi|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda + 1}{2}\right)} \Bigg|_{\lambda = -2m - 1}.$$

Вычет функции $|\xi|^\lambda$ при $\lambda = -2m - 1$ равен $2 \frac{\delta^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}$ (п. 3). Вычет

функции $\Gamma\left(\frac{\lambda + 1}{2}\right)$ в этой же точке найдем из функционального уравнения (3), именно,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{\lambda + 1}{2}\right) &= \frac{2}{\lambda + 1} \Gamma\left(\frac{\lambda + 3}{2}\right) = \frac{2}{\lambda + 1} \frac{2}{\lambda + 3} \Gamma\left(\frac{\lambda + 5}{2}\right) = \dots \\ &\dots = \frac{2^m \Gamma\left(\frac{\lambda + 2m + 3}{2}\right)}{(\lambda + 1) \dots (\lambda + 2m + 1)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\text{Выч}_{\lambda=-2m-1} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) = \frac{2(-1)^m}{m!}.$$

В итоге

$$\left. \frac{|\xi|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \right|_{\lambda=-2m-1} = (-1)^m \frac{m!}{(2m)!} \delta^{(2m)}(\xi).$$

При $\lambda = -2m$ числитель и знаменатель не имеют особенностей. В результате, в зависимости от четности или нечетности n , мы получаем равенство

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\Omega} \delta^{(n-1)}((\omega, x)) d\omega & (n \text{ нечетное}), \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} (n-1)!}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} (\omega, x)^{-n} d\omega & (n \text{ четное}). \end{cases} \quad (5)$$

Эти равенства называются «формулами разложения дельта-функции на плоские волны». В применении к основной функции φ они дают решение «задачи Радона»: восстановить значение функции $\varphi(x)$ при $x=0$, зная ее интегралы по гиперплоскостям $(\omega, x) = \xi$.

Задачи. 1. Каноническая регуляризация. Каждой функции $g(x) = \frac{f(x)}{P(x)}$, где $f(x)$ бесконечно дифференцируема, а $P(x)$ — многочлен,

поставить в соответствие функционал $g \in K'_1$ так, чтобы

- а) сумме функций $g_1(x) + g_2(x)$ соответствовала сумма функционалов g_1 и g_2 ;
- б) произведению функции $g(x)$ на бесконечно дифференцируемую функцию $\alpha(x)$ отвечало произведение $\alpha(x) \cdot g$ в K' ;
- в) производной (в обычном смысле) $g'(x)$ отвечала производная g' в K' ;
- г) функции $g(x) = f(x)$ (т. е. при $P(x) \equiv 1$) отвечал функционал

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx;$$

д) четной функции $g(x)$ отвечал четный функционал g , нечетной — нечетный функционал.

Указание. Функция $g(x)$ единственным образом представляется в виде

$$g(x) = \sum_{k,j} \frac{A_{jk}}{(x-x_j)^k} + h(x),$$

где $h(x)$ бесконечно дифференцируема, A_{jk} — постоянные; поставить в соответствие функции $g(x)$ функционал $g = \sum_{j,k} A_{jk} (x-x_j)^{-k} + h$.

2. Показать, что условиями а) — д) каноническая регуляризация определена однозначно.

Указание. Пусть функция $\frac{1}{x}$ отвечает функционал g ; тогда функции $x \cdot \frac{1}{x} \equiv 1$ отвечает функционал $xg = 1$; отсюда $g = \frac{1}{x} + g_0$, где g_0 сосредоточен в точке $x = 0$. Используя теорему п. 6 в § 10, показать, что $g_0 = C\delta(x)$. Так как g должен быть нечетным функционалом, $C = 0$. Для дальнейшей проверки использовать в).

3. Показать, что функция $\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)}$ ($\text{Re } \lambda > -1$) продолжается во всю плоскость переменного λ , как целая аналитическая функция, и найти ее значения при $\lambda = -1, -2, \dots$

Отв.

$$\left. \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)} \right|_{\lambda = -n} = \delta^{(n-1)}(x) \quad (n = -1, -2, \dots).$$

4. Доказать формулу

$$\frac{d}{dx} \frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)} = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}.$$

Указание. Проверить при $\text{Re } \lambda > 0$ и использовать аналитическое продолжение.

5. Введем обобщенные функции x_+^{-n} и x_-^{-n} по формулам

$$(x_+^{-n}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-n} \left[\varphi(x) - \varphi(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \theta(1-x) \right] dx,$$

$$(x_-^{-n}, \varphi) = \int_0^\infty x^{-n} \left[\varphi(-x) - \varphi(0) - \dots \dots - (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \theta(1-x) \right] dx,$$

где $\theta(1-x)$ равна 0 при $x > 1$ и 1 при $x < 1$.

Показать, что функция x_+^{-n} сосредоточена на полуоси $x \geq 0$ и на любом отрезке $[a, b]$, $0 < a < b$, совпадает с обычной функцией $\frac{1}{x^n}$; функция x_-^{-n} сосредоточена на полуоси $x \leq 0$ и на любом отрезке $[c, d]$, $c < d < 0$, совпадает с обычной функцией $\frac{1}{x^n}$. Далее, проверить формулы

$$\begin{aligned} x_+^{-2m} + x_-^{-2m} &= x^{-2m}, \\ x_+^{-2m-1} - x_-^{-2m-1} &= x^{-2m-1}, \\ x \cdot x_+^{-n} &= x_+^{-n+1}, \\ x \cdot x_-^{-n} &= -x_-^{-n+1}, \\ (x_+^{-n})' &= -nx_+^{-n-1} + \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(x), \\ (x_-^{-n})' &= nx_-^{-n-1} - \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(x). \end{aligned}$$

6. Показать, что функции x_+^λ и x_-^λ — однородные функции степени λ (при любом $\lambda \neq -1, -2, \dots$).

Указание. Обе части равенства $(x_+^\lambda, \varphi(t, x)) = t^{-\lambda-1}(x_+^\lambda, \varphi(x))$ аналитически продолжаются по λ из области $\operatorname{Re} \lambda > -1$ на всю плоскость λ за вычетом особых точек $\lambda = -1, -2, \dots$

7. Показать, что любая обобщенная однородная функция $f \in K_1'$ степени λ удовлетворяет уравнению

$$xf' = \lambda f.$$

Указание. Соотношение $(f, \varphi(tx)) = t^{-\lambda-1}(f, \varphi(x))$ продифференцировать по t и затем положить $t = 1$.

8. Показать, что $k + m$ линейно независимых решений уравнения

$$x^k y^{(m)}(x) = 0,$$

указанных в задаче 1 § 5, образуют полную систему линейно независимых решений.

Указание. При $x > 0$ решение $y(x)$ есть некоторый полином $P(x_+)$, при $x < 0$ решение есть некоторый полином $Q(x_-)$; разность $y - P(x_+) - Q(x_-)$ сосредоточена в точке 0 и согласно п. 6 представляется в форме

$\sum_{j=0}^p a_j \delta^{(j)}(x)$; подставить $y = P(x_+) + Q(x_-) + \sum_{j=0}^p a_j \delta^{(j)}(x)$ в уравнение

и найти условия на коэффициенты.

9. Показать, что общее решение уравнения $xy' = \lambda y$ имеет вид

$$C_1 x_+^\lambda + C_2 x_-^\lambda \quad \text{при } \lambda \neq -1, -2, \dots$$

$$C_1 x^{-n} + C_2 \delta^{(n-1)}(x) \quad \text{при } \lambda = -n.$$

Указание. Решение $y(x)$ при $x > 0$ совпадает с Cx_+^λ , при $x < 0$ с $C_2 x_-^\lambda$ (при $\lambda = -n$ последние выражения не являются решениями, но это неважно). Разность $y - Cx_+^\lambda - C_2 x_-^\lambda$ сосредоточена в точке $x = 0$ и в силу

§ 10 имеет вид $\sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)}(x)$. Отсюда $y = C_1 x_+^\lambda + C_2 x_-^\lambda + \sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)}(x)$. Под-

ставить в уравнение и найти условия на коэффициенты.

Замечание. Решение задачи 9 дает описание всех однородных обобщенных функций в K_1' (см. задачу 7).

10. Найти интеграл

$$I(x) = \int_{\Omega} f(\omega, x) d\omega.$$

если

- а) $f(\xi) = \delta^{(k)}(\xi)$;
 б) $f(\xi) = \xi^{-k}$;
 в) $f(\xi) = |\xi|^\lambda \ln |\xi|$.

Указание. Использовать формулу (2) п. 6; в случае в) дифференцировать по λ .

Отв.

$$\begin{aligned}
 \text{а) } I(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ нечетном,} \\ Cr^{-k-1} & \text{при } k+1 < n, k \text{ четном, и при} \\ & k = n, n+2, \dots \text{ если } n \text{ четно,} \\ C\Delta^{\frac{k-n-1}{2}} \delta(x) & \text{при } k+1 \geq n, k \text{ четном, } n \text{ нечетном;} \end{cases} \\
 \text{б) } I(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ четном,} \\ Cr^{-k} & \text{при } k < n, k \text{ нечетном и} \\ & k = n+1, n+3, \dots \text{ если } n \text{ четно,} \\ C\Delta^{\frac{k-n}{2}} \delta(x) & \text{при } k \geq n, k \text{ нечетном, } n \text{ нечетном;} \end{cases} \\
 \text{в) } I(x) &= C_1 r^\lambda \ln r + C_2 r^\lambda.
 \end{aligned}$$

11. Показать, что сферически симметрическая однородная функция $f \in K'_n$ степени λ есть Cr^λ ($\lambda \neq -n, -n-2, \dots$).

Указание. Пусть сначала $\text{Re } \lambda > -n$. Функционалу $f \in K'_n$ поставим в соответствие функционал $g \in K'_1$ следующим образом. Пусть $\varphi(\xi) \in K_1$ — четная функция; тогда $\varphi(r)$ принадлежит K_n . Положим $(g, \varphi(\xi)) = (f, \varphi(r))$. Для нечетных $\varphi \in K_1$ положим $(g, \varphi) = 0$. Функционал g является четным однородным функционалом степени $n - \lambda - 1$ и (по задачам 7 и 9) имеет вид $C|x|^{n+\lambda-1}$. Таким образом, для сферически симметричной функции $\varphi(r)$

$$(f, \varphi(r)) = C \int_0^\infty r^{n+\lambda-1} \varphi(r) dr = C_1 \int_{R_n} r^\lambda \varphi(r) dx.$$

По задаче 2 § 6 $(f, \varphi) = C_1(r^\lambda, \varphi)$ для любой $\varphi \in K_n$. Если $\text{Re } \lambda \leq -n$, то при некотором целом m будет $\text{Re } \lambda + 2m > -n$; поэтому $r^{2m} f = Cr^{2m+\lambda}$. Отсюда при $x \neq 0$ f совпадает с Cr^λ . Если $\lambda \neq -n, -n-2, \dots$ то функционал $f - Cr^\lambda$ сосредоточен в 0 и есть линейная комбинация δ -функции и ее производных; по задачам 6 и 7 § 7 $f - Cr^\lambda = 0$.

Примечание. Для $\lambda = -n, -n-2, \dots$ см. § 15, задачу 4.

12. Пусть $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ — однородная функция степени 1. Рассмотрим функцию $f^\lambda(x)$, как аналитическую функцию от λ . Она определяет функционал на пространстве K_n при $\text{Re } \lambda > -n$; построить ее аналитическое продолжение в область $\text{Re } \lambda > -n-1$ и найти вычет при $\lambda = -n$.

Указание. Пусть S — единичный шар и Ω — единичная сфера пространства R_n ; тогда при $\text{Re } \lambda > -n$

$$(f^\lambda, \varphi) = \int_S f^\lambda(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \int_{R_n - S} f^\lambda(x) \varphi(x) dx + \varphi(0) \int_S f^\lambda(x) dx$$

Так как $f^\lambda(x)$ — однородная функция степени λ , то

$$\lambda f^\lambda(x) = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f^\lambda(x)}{\partial x_k}$$

и

$$\int_S f^\lambda(x) dx = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \int_S x_k \frac{\partial f^\lambda(x)}{\partial x_k} dx = \\ = \frac{1}{\lambda} \left\{ \int_S \sum_{k=1}^n \frac{\partial [x_k f^\lambda(x)]}{\partial x_k} dx - \sum_{k=1}^n \int_S f^\lambda(x) dx \right\}.$$

Отсюда по теореме Гаусса — Остроградского

$$\left(1 + \frac{n}{\lambda}\right) \int_S f^\lambda(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_S \sum \frac{\partial [x_k f^\lambda(x)]}{\partial x_k} dx = \frac{1}{\lambda} \int_\Omega f^\lambda(x) d\omega.$$

Таким образом,

$$(f^\lambda, \varphi) = \int_S f^\lambda(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \int_{R_n - S} f^\lambda(x) \varphi(x) dx + \\ + \frac{\varphi(0)}{n + \lambda} \int_\Omega f^\lambda(x) dx$$

где все члены допускают аналитическое продолжение в область $\text{Re } \lambda > -n-1$.

Вычет функционала f^λ при $\lambda = -n$ равен $\int_\Omega f^{-n}(x) d\omega \cdot \delta(x)$.

13. Пусть $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ — однородная функция степени $-n+1$. Она локально интегрируема и определяет функционал f по формуле

$$(f, \varphi) = \int_{R_n} f(x) \varphi(x) dx.$$

Показать, что производные функционала f можно определить по формулам

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi\right) = \int_{|x| \leq 1} \frac{\partial f}{\partial x_k} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \varphi(x) dx + \\ + \varphi(0) \int_{|x|=1} f(x) x_k d\omega.$$

Указание. В формуле

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi\right) = - \left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) = - \int_{R_n} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx = - \int_{|x| \leq 1} f \frac{\partial [\varphi(x) - \varphi(0)]}{\partial x_k} dx = \\ = - \int_{|x| \geq 1} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx = - \int_{|x| \leq 1} \frac{\partial}{\partial x_k} \{f(x) [\varphi(x) - \varphi(0)]\} dx + \\ + \int_{|x| \leq 1} \frac{\partial f}{\partial x_k} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx - \int_{|x| \geq 1} \frac{\partial (f\varphi)}{\partial x_k} dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{\partial f}{\partial x_k} \varphi dx$$

интегралы типа дивергенции преобразовать по формуле Гаусса — Остроградского.

14. Проверить формулу $\Delta \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) = c_n \delta(x)$ прямым дифференцированием.

У к а з а н и е. Первые производные вычислять непосредственно, вторые — с использованием задачи 13.

15. Показать, что однородная функция $f(x)$ степени $-n$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (x_k f(x)) = c \delta(x),$$

и найти c .

У к а з а н и е. Использовать задачу 13.

Отв.

$$c = \int_{|x|=1} f(x) d\omega.$$

16. Возможно ли сопоставить каждой функции $g(x) = \frac{f(x)}{r^m}$ функционал $g \in K'_n$ так, чтобы выполнялись условия

- 1) $a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) \rightarrow a_1 g_1 + a_2 g_2$ (a_1 и a_2 — числа);
- 2) $a(x) g(x) \rightarrow a(x) g$ ($a(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция);
- 3) $\frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} g$ (в K'_n);
- 4) если $g(x)$ — обычная функция, то $(g, \varphi) = \int_{R_n} g(x) \varphi(x) dx$?

Отв. Нет; например, для $g(x) = \frac{1}{r^n}$ мы должны были бы иметь согласно формуле Эйлера

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_k} (x_k g) = \sum x_n \frac{\partial g}{\partial x_k} + n g(x) = 0,$$

в то время как по задаче 15 мы имеем

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_k} (x_k g) = \int_{|x|=1} g(\xi) d\xi \cdot \delta(x) \neq 0. \quad (\text{В. В. Грушин}).$$

При $n > 2$ тот же вывод получается непосредственно из равенства $\Delta(r^{2-n}) = c_n \delta(x)$.

П р и м е ч а н и е. Результат задачи 16 показывает, что для нескольких переменных каноническая регуляризация (см. задачу 1) на совокупности функций вида $\frac{f(x)}{r^m}$ невозможна.

§ 12. Свертка обобщенных функций

1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — обычные функции переменного x , $-\infty < x < \infty$. Образует выражение

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \overline{g(x - \xi)} d\xi, \quad (1)$$

которое называется *сверткой* функций $f(x)$ и $g(x)$.

Этот интеграл не всегда существует. Известно, например, что если $f \in L_1(-\infty, \infty)$, $g \in L_1(-\infty, \infty)$, то $f * g$ существует почти всюду на $(-\infty, \infty)$ и также есть функция из $L_1(-\infty, \infty)$ (*). Мы здесь рассмотрим другой случай существования свертки; именно, предположим, что одна из функций $f(x)$, $g(x)$ финитна.

Пусть, например, финитна $f(x)$, так что она обращается в 0 вне отрезка $[a, b]$. Покажем, что $f * g$ существует почти для всех x и представляет собою обычную функцию. Для доказательства возьмем любой промежуток $[c, d]$ и рассмотрим двойной интеграл

$$\int_c^d \int_a^b |f(\xi)| |g(x - \xi)| d\xi dx. \quad (2)$$

По теореме Фубини его можно вычислять в любом порядке. Сначала рассмотрим

$$\int_a^b |f(\xi)| \left\{ \int_c^d |g(x - \xi)| dx \right\} d\xi. \quad (3)$$

В фигурных скобках стоит ограниченная при $a \leq \xi \leq b$ функция

$$\int_c^d |g(x - \xi)| dx = \int_{c-\xi}^{d-\xi} |g(x)| dx = G(d - \xi) - G(c - \xi),$$

где G — первообразная от $|g(x)|$. Это доказывает существование интеграла (3), а с ним и (2). Меняя порядок интегрирования, получаем существование почти всюду интеграла

$$\int_a^b |f(\xi) g(x - \xi)| d\xi. \quad (4)$$

*) Анализ III, гл. VII, § 3.

а с ним и интеграла (1); кроме того, функция (4) суммируема по x в промежутке $c \leq x \leq d$, а вместе с тем суммируема в этом промежутке и функция (1).

Итак, в рассматриваемом случае (f финитна) функция $f * g$ суммируема в любом конечном промежутке и является, следовательно, обычной функцией.

Пусть теперь $g(x)$ — финитная функция, сосредоточенная, например, в отрезке $[c, d]$. Тогда интеграл (1) также в действительности берется в конечных пределах

$$f * g = \int_{x-d}^{x-c} f(\xi) g(x - \xi) d\xi. \quad (5)$$

По доказанному, существует свертка

$$g * f = \int_c^d g(\eta) f(x - \eta) d\eta. \quad (6)$$

Сделаем в этом интеграле замену переменного $x - \eta = \xi$; мы получим

$$g * f = \int_{x-d}^{x-c} g(x - \xi) f(\xi) d\xi = \int_{x-d}^{x-c} f(\xi) g(x - \xi) d\xi = f * g.$$

что доказывает существование интеграла (5) и его совпадение с интегралом (6).

Итак, свертка $f * g$ существует и представляет собою обычную функцию, если хотя бы одна из функций f, g финитна.

Найдем еще носитель свертки $f * g$ по известным носителям функций f и g . Если $(f * g)(x) \neq 0$, то это означает, что множества $\text{supp } f(\xi)$ и $\text{supp } g(x - \xi) = x - \text{supp } g(\xi)$ пересекаются, например в точке ξ_0 ; так как $\xi_0 \in x - \text{supp } g$, то $x \in \xi_0 + \text{supp } g \subset \text{supp } f + \text{supp } g$ (арифметическая сумма*). Итак,

$$\text{supp } (f * g) \subset \text{supp } f + \text{supp } g.$$

2. Мы будем переносить теперь определение свертки на обобщенные функции. Чтобы найти нужное правило, применим формулу (1) к основной функции $\varphi(x)$ и, не заботясь о существовании

*) Арифметическая сумма (разность) множеств A и B состоит из всех точек ξ вида $\alpha + \beta$ (соответственно $\alpha - \beta$), где $\alpha \in A, \beta \in B$.

интегралов, переменим порядок интегрирования:

$$\begin{aligned}
 (f * g, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi \right\} \varphi(x) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \xi) \varphi(x) dx \right\} d\xi = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \varphi(x + \xi) dx \right\} d\xi. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Равенство (7) делает естественными следующие определения*).

Определение 1. Для любой обобщенной функции $f \in K'$ функция от ξ

$$g * \varphi = (g(x), \varphi(x + \xi)) \quad (8)$$

называется *сверткой обобщенной функции g и основной функции φ* .

Определение 2. Для любых обобщенных функций f и g функционал $f * g$, действующий по формуле

$$(f * g, \varphi) = (f(\xi), (g * \varphi)(\xi)), \quad (9)$$

называется *сверткой функционалов f и g* .

Разумеется, свертка существует не всегда, как и для обычных функций. Во всяком случае, учитывая вышеприведенные рассуждения, мы видим, что если f и g — обычные функции и одна из них финитна, определение 2 приводит к обычной свертке функций f и g .

Далее, пусть, например, f — произвольный функционал, $g = \delta(x)$; тогда для любой основной функции φ

$$\begin{aligned}
 g * \varphi &= (\delta(x), \varphi(x + \xi)) = \varphi(\xi), \\
 (f * g, \varphi) &= (f(\xi), \varphi(\xi)),
 \end{aligned}$$

т. е. $f * \delta = f$. Аналогично для произвольного g

$$(\delta * g, \varphi) = (\delta(\xi), (g(x), \varphi(x + \xi))) = (g(x), \varphi(x)),$$

*) Точнее, делает естественными для случая вещественных функций. В случае комплексных функций эти определения соответствуют только функционалам первого из четырех типов, указанных в § 3, п. 4.

Определения для остальных трех типов следующие:

$$\begin{aligned}
 (g * \varphi) &= (g, \varphi(x + \xi))_1 = (\bar{g}, \varphi(x + \xi))_2 = (g, \overline{\varphi(x + \xi)})_3 = (\bar{g}, \overline{\varphi(x + \xi)})_4; \\
 (f * g, \varphi) &= (f, g * \varphi)_1 = (\bar{f}, g * \varphi)_2 = (f, \overline{g * \varphi})_3 = (\bar{f}, \overline{g * \varphi})_4.
 \end{aligned}$$

т. е. $\delta * g = g'$. Таким образом, свертка с дельта-функцией всегда существует, и функционал δ при свертке играет такую же роль, как единица при умножении. Если $g = \delta'(x)$, то

$$g * \varphi = (\delta', \varphi(x + \xi)) = -\varphi'(\xi),$$

$$(f * g, \varphi) = (f(\xi), -\varphi'(\xi)) = (f'(\xi), \varphi(\xi)),$$

т. е. $f * \delta' = f'$. Аналогично и $\delta' * g = g'$, так что результат свертки любого функционала с δ' есть его производная.

3. Далее мы будем рассматривать свертку функционалов f и g в общем случае.

Естественно ожидать, что свертка двух обобщенных функций будет существовать, если одна из этих обобщенных функций финитна.

Мы рассмотрим в этом пункте свертку функционала g и основной функции φ . Поскольку $\varphi(x + \xi)$ есть также основная функция, выражение $\psi(\xi) = (g(x), \varphi(x + \xi))$ определено при каждом ξ .

Легко проверить, что функция $\psi(\xi) = (g(x), \varphi(x + \xi))$ непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков. Действительно, если $\xi_v \rightarrow \xi_0$, то функции $\varphi(x + \xi_v)$ стремятся к $\varphi(x + \xi_0)$ равномерно по x вместе со всеми производными и остаются сосредоточенными в одном и том же фиксированном промежутке; таким образом, $\varphi(x + \xi_v) \rightarrow \varphi(x + \xi)$ в K , и так как функционал f непрерывен, то

$$\psi(\xi_v) = (g(x), \varphi(x + \xi_v)) \rightarrow (g(x), \varphi(x + \xi_0)) = \psi(\xi_0).$$

Это доказывает непрерывность $\psi(\xi)$. Далее, отношение

$$\frac{\varphi(x + \xi_v) - \varphi(x + \xi_0)}{\xi_v - \xi_0}$$

при $\xi_v \rightarrow \xi_0$ имеет пределом $\varphi'(x + \xi_0)$ равномерно по x вместе со всеми производными; поэтому

$$\frac{\psi(\xi_v) - \psi(\xi_0)}{\xi_v - \xi_0} = \left(g, \frac{\varphi(x + \xi_v) - \varphi(x + \xi_0)}{\xi_v - \xi_0} \right) \rightarrow (g, \varphi'(x + \xi)),$$

так что $\psi(\xi)$ имеет производную, причем

$$\psi'(\xi) = (g(x), \varphi'(x + \xi)) = g * \varphi'.$$

Так как, с другой стороны,

$$(g(x), \varphi'(x + \xi)) = -(g'(x), \varphi(x + \xi)) = -g' * \varphi,$$

то мы получаем цепь равенств

$$(g * \varphi)' = g * \varphi' = -g' * \varphi. \quad (10)$$

Повторяя процесс, мы видим, что функция $\psi(\xi)$ имеет производные всех порядков, причем имеет место равенство

$$(g * \varphi)^{(q)} = g * \varphi^{(q)} = (-1)^q g^{(q)} * \varphi.$$

В общем случае функция $\psi(\xi)$ не финитна и потому не есть основная функция. Отметим один важный случай, когда $\psi(\xi)$ финитна: это будет иметь место, если финитна обобщенная функция $g(x)$. Мы можем даже описать в этом случае носитель функции $\psi(\xi)$. Пусть, например, $g(x)$ сосредоточена на промежутке Δ_g оси x , а основная функция $\varphi(x)$ — на промежутке Δ_φ той же оси. Тогда функция $\varphi(x + \xi)$ будет сосредоточена на промежутке $\Delta_\varphi - \xi$. Чтобы свертка $\psi = g * \varphi$ была отлична от нуля, нужно, чтобы промежутки Δ_g и $\Delta_\varphi - \xi$ пересекались. Пусть имеется общая точка $\eta \in \Delta_g \cap (\Delta_\varphi - \xi)$; так как $\eta \in \Delta_\varphi - \xi$, то $\eta + \xi \in \Delta_\varphi$, $\xi \in \Delta_\varphi - \eta$, а так как $\eta \in \Delta_g$, то ξ принадлежит к арифметической разности $\Delta_\varphi - \Delta_g$.

Таким образом, имеет место включение

$$\text{supp}(g * \varphi) \subset \text{supp} \varphi - \text{supp} g.$$

Но очевидно, что эта разность располагается в некотором ограниченном промежутке Δ ; вне этого промежутка $\psi(\xi)$ равна 0 и, следовательно, она финитна.

Теперь покажем, что свертка с финитной обобщенной функцией g есть линейная и непрерывная операция в пространстве K . Иными словами, если $\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2$, то $g * \varphi = \alpha_1 (g * \varphi_1) + \alpha_2 (g * \varphi_2)$, и если $\varphi_\nu \rightarrow 0$ в K , то $g * \varphi_\nu \rightarrow 0$ в K . Первое утверждение очевидно:

$$\begin{aligned} g * \varphi &= (g(x), \varphi(x + \xi)) = (g, \alpha_1 \varphi_1(x + \xi) + \alpha_2 \varphi_2(x + \xi)) = \\ &= \alpha_1 (g(x), \varphi_1(x + \xi)) + \alpha_2 (g(x), \varphi_2(x + \xi)) = \alpha_1 g * \varphi_1 + \alpha_2 g * \varphi_2. \end{aligned}$$

Проверим второе утверждение.

Пусть дана последовательность φ_ν , стремящаяся к 0 в пространстве K . По условию, функции $\varphi_\nu(x)$ все сосредоточены в фиксированном промежутке Δ ; но тогда и функции $g * \varphi_\nu$ сосредоточены, по доказанному, в фиксированном промежутке $\Delta - \Delta_g$. Покажем, далее, что функции $(g * \varphi_\nu)(\xi)$ равномерно стремятся к 0. Нам дано, что функции $\varphi_\nu(x)$ равномерно стремятся к нулю в промежутке Δ , так же как и их производные любого порядка. Допустим, что $\psi_\nu(\xi) = (g * \varphi_\nu)(\xi)$ не стремятся равномерно к нулю; это означает, что для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность точек ξ_ν такая, что

$$|(g * \varphi_\nu)(\xi_\nu)| = |(g(x), \varphi_\nu(x + \xi_\nu))| > \varepsilon. \quad (11)$$

Точки ξ_ν образуют ограниченную последовательность $(\in \Delta - \Delta_g)$, которую можно предполагать сходящейся к некоторому ξ_0 . Но тогда функции $\varphi_\nu(x + \xi_\nu)$ вместе с функциями $\varphi_\nu(x)$ стремятся к 0 в пространстве K ; отсюда

$$(g(x), \varphi_\nu(x + \xi_\nu)) \rightarrow 0,$$

что противоречит (11). Итак, $\psi_\nu(\xi) = (g * \varphi_\nu)(\xi)$ равномерно стремятся к 0. Аналогично $\psi'_\nu(\xi) = g * \varphi'_\nu$, $\psi''_\nu(\xi) = g * \varphi''_\nu$, ... равномерно стремятся к нулю; таким образом, $\psi_\nu(\xi) \rightarrow 0$ в K , что и требовалось.

4. Продолжая считать g финитным функционалом, рассмотрим свертку $f * g$, согласно определению 2. Так как $(g * \varphi)(\xi)$ есть основная функция вместе с φ , то выражение

$$(f * g, \varphi) = (f(\xi), (g * \varphi)(\xi))$$

определено. Очевидно, оно представляет собою линейный функционал от φ , так как для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ и любых вещественных α_1 и α_2 , по доказанному,

$$\begin{aligned} (f * g, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) &= (f, g * (\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2)) = (f, \alpha_1 g * \varphi_1 + \alpha_2 g * \varphi_2) = \\ &= \alpha_1 (f * g, \varphi_1) + \alpha_2 (f * g, \varphi_2). \end{aligned}$$

Далее, этот функционал непрерывен: если $\varphi_\nu \rightarrow 0$ в K , то, по доказанному, также и $g * \varphi_\nu \rightarrow 0$ в K , откуда, в силу непрерывности функционала f , также $(f * g, \varphi_\nu) = (f, g * \varphi_\nu) \rightarrow 0$.

Итак, *если g — финитный функционал, свертка $f * g$ является линейным и непрерывным функционалом в пространстве K .*

Рассмотрим случай, когда g — любой функционал, а f — финитный. В этом случае $(g * \varphi)(\xi)$ не есть основная функция, хотя она и [бесконечно дифференцируема. Ясно, что операция $g * \varphi$ остается линейной. Она также остается непрерывной в следующем смысле: *если $\varphi_\nu \rightarrow 0$ в K , то $g * \varphi_\nu = \psi_\nu$ равномерно стремится к 0 на любом промежутке Δ вместе со всеми производными.* Для доказательства заметим, что значение функции $\psi(\xi) = (g(x), \varphi(x + \xi))$ при данном ξ для своего определения не требует полной информации о функционале $g(x)$; требуется знать этот функционал только в промежутке, где сосредоточена функция $\varphi(x + \xi)$, т. е. на носителе функции $\varphi(x)$, сдвинутом влево на величину ξ . В частности, значения функции $\psi_\nu(\xi)$ определяются свойствами функционала g только на множестве $\Delta_{\varphi_\nu} - \xi$, где Δ_{φ_ν} — тот промежуток, на котором сосредоточена функция φ_ν . Поэтому значения функций $\psi_\nu(\xi)$ на проме-

жутке Δ определяются свойствами функционала g на арифметической разности $\Delta_\nu - \Delta \subset \bar{\Delta} - \Delta$, где $\bar{\Delta}$ — тот промежуток, на котором сосредоточены все функции φ_ν . Умножая $g(x)$ на основную функцию $e(x)$, равную 1 на $\bar{\Delta} - \Delta$, мы не изменим на промежутке Δ ни одной из функций $\psi_\nu(\xi)$; в то же время функционал eg уже финитный. Применяя предыдущую теорему, получаем требуемое.

Теперь применим к выражению $g * \varphi$ функционал f . Выражение $(f, g * \varphi)$ имеет смысл, поскольку функционал f финитный. Это выражение определяет *линейный и непрерывный функционал на пространстве K* . Линейность его вытекает из линейности свертки $g * \varphi$. Для доказательства непрерывности предположим, что $\varphi_\nu \rightarrow 0$ в K : тогда $g * \varphi_\nu$ стремится равномерно к 0 вместе со всеми производными на любом промежутке оси, в частности в окрестности носителя функционала f ; а тогда, как мы знаем, и $(f, g * \varphi_\nu) \rightarrow 0$.

Б. Итак, у нас имеется корректное определение свертки $f * g$ в двух случаях: когда финитный функционал стоит на первом месте и когда финитный функционал стоит на втором месте.

В этом пункте мы построим явное выражение свертки $f * g$ через свертки обычных функций; из этого выражения будет, в частности, следовать равенство $f * g = g * f$, где, например, f — финитный функционал. Как мы знаем, произвольный функционал g можно записать в форме

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(k)}(x),$$

где $g_k(x)$ — обычные функции, носители которых удаляются от начала координат с возрастанием k . Отсюда

$$\begin{aligned} (g * \varphi)(\xi) &= (g(x), \varphi(x + \xi)) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(k)}(x), \varphi(x + \xi) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (g_k(x), (-1)^k \varphi^{(k)}(x + \xi)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{a-\xi}^{b-\xi} g_k(x) \varphi^{(k)}(x + \xi) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_a^b g_k(x - \xi) \varphi^{(k)}(x) dx, \quad (12) \end{aligned}$$

где $[a, b]$ — отрезок, на котором сосредоточена функция $\varphi(x)$. В сумме в действительности лишь конечное (зависящее от ξ) число

слагаемых, поскольку при каждом ξ функции $g_k(x - \xi)$ на отрезке $[a, b]$ становятся равными нулю, начиная с некоторого номера.

Из предпоследнего из выражений (12) видно, что производные бесконечно дифференцируемой функции $(g * \varphi)(\xi)$ при любом m имеют вид

$$\begin{aligned} (g * \varphi)^{(m)}(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{a-\xi}^{b-\xi} g_k(x) \varphi^{(k+m)}(x + \xi) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_a^b g_k(x - \xi) \varphi^{(k+m)}(x) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим теперь свертку $f * g$, предполагая, что функционал $f(\xi)$ финитен. Такой функционал, как мы знаем, имеет вид

$$f(\xi) = \sum_{m=0}^p f_m^{(m)}(\xi),$$

где $f_m(\xi)$ — обычные и притом финитные функции, сосредоточенные, например, на отрезке $[c, d]$. Мы получим

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= (f, g * \varphi) = \left(\sum_{m=0}^p f_m^{(m)}(\xi), (g * \varphi)(\xi) \right) = \\ &= \sum_{m=0}^p (-1)^m (f_m(\xi), (g * \varphi)^{(m)}(\xi)) = \\ &= \sum_{m=0}^p (-1)^m \int_c^d f_m(\xi) (g * \varphi)^{(m)}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Применяя формулу (12), находим далее

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \\ &= \sum_{m=0}^p (-1)^m \int_c^d f_m(\xi) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_a^b g_k(x - \xi) \varphi^{(k+m)}(x) dx \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Число слагаемых в сумме по k теперь можно считать фиксированным, например N , поскольку величина ξ меняется в ограниченных преде-

лах. Поэтому можно изменить порядок суммирования и интегрирования и получить формулу

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \sum_{m=0}^p \sum_{k=0}^N (-1)^{k+m} \int_c^d f_m(\xi) \left\{ \int_a^b g_k(x - \xi) \varphi^{(k+m)}(x) dx \right\} d\xi = \\ &= \sum_{m=0}^p \sum_{k=0}^N (-1)^{k+m} \int_a^b \left\{ \int_c^d f_m(\xi) g_k(x - \xi) d\xi \right\} \varphi^{(k+m)}(x) dx = \\ &= \sum_{m=0}^p \sum_{k=0}^N (-1)^{k+m} (f_m * g_k)(x), \varphi^{(k+m)}(x), \end{aligned}$$

где $f_m * g_k$ — свертка обычных функций. Эту же формулу можно записать в форме

$$(f * g, \varphi) = \left(\sum_{m=0}^p \sum_{k=0}^N (f_m * g_k)^{(k+m)}, \varphi \right),$$

или даже

$$(f * g, \varphi) = \left(\sum_{m=0}^p \sum_{k=0}^{\infty} (f_m * g_k)^{(k+m)}, \varphi \right),$$

поскольку, по построению, слагаемые в сумме по k , начиная с $N+1$ -го, переводят данную функцию $\varphi(x)$ в 0. Таким образом, искомая формула, выражающая функционал $f * g$ через обычные функции, имеет вид

$$f * g = \sum_{m=0}^p \sum_{k=0}^{\infty} (f_m * g_k)^{(k+m)}. \quad (14)$$

К аналогичному выражению функционала $f * g$ мы придем, если будем считать f произвольным, а g финитным функционалом. В этом случае в формуле (12) будет с самого начала конечное число, положим p , слагаемых, и функция $g * \varphi$ станет не только бесконечно дифференцируемой, но и финитной, сосредоточенной например, на отрезке $[c, d]$. Зато функционал f будет представлен уже в форме бесконечной суммы

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(k)}(x),$$

причем носители обычных функций $f_k(x)$ удаляются от начала координат с возрастанием k . Поэтому в применении к финитной функции

$g * \varphi$ используется только конечное число, положим, N слагаемых:

$$\begin{aligned}
 (f * g, \varphi) &= (f, g * \varphi) = \left(\sum_{k=0}^N f_k^{(k)}(\xi), (g * \varphi)(\xi) \right) = \\
 &= \sum_{k=0}^N (-1)^k (f_k(\xi), (g * \varphi)^{(k)}(\xi)) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \int_c^d f_k(\xi) (g * \varphi)^{(k)}(\xi) d\xi = \\
 &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \int_c^d f_k(\xi) \left\{ \sum_{m=0}^p (-1)^m \int_a^b g_m(x - \xi) \varphi^{(k+m)}(x) dx \right\} d\xi = \\
 &= \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^p (-1)^{k+m} \int_a^b \left\{ \int_c^d f_k(\xi) g_m(x - \xi) d\xi \right\} \varphi^{(k+m)}(x) dx = \\
 &= \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^p (-1)^{k+m} ((f_k * g_m)(x), \varphi^{(k+m)}(x)) = \\
 &= \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^p ((f_k * g_m)^{(k+m)}(x), \varphi(x)).
 \end{aligned}$$

Отсюда, по тем же соображениям, что и выше,

$$(f * g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^p (f_k * g_m)^{(k+m)}(x). \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) можно было бы положить в основание теории свертки. Разумеется, на этом пути необходимо было бы доказать независимость сумм (14) и (15) от выбора обычных функций f_k и g_m , участвующих в представлении функционалов f и g .

6. Из формул (14) и (15) вытекает для общего случая коммутативность свертки обобщенных функций

$$f * g = g * f. \quad (16)$$

Равенство (16) имеет следующий смысл. Свертка обобщенных функций, строго говоря, определялась нами различным образом, смотря по тому, на первом или втором месте стоит финитный функционал. Пусть, например, финитен функционал f ; тогда $f * g$ и $g * f$ имеют различные определения. Формула (16) утверждает, что результат в обоих случаях один и тот же. Действительно, в силу формул (14)

и (15), мы имеем: если $f = \sum_{m=0}^p f_m^{(m)}(x)$, $g = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(k)}(x)$, то

$$\left. \begin{aligned} f * g &= \sum_{m=0}^p \sum_{k=0}^{\infty} (f_m * g_k)^{(k+m)}, \\ g * f &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^p (g_k * f_m)^{(k+m)}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Но для обычных функций f_m и g_k , как мы видели, свертка коммутативна:

$$f_m * g_k = g_k * f_m.$$

Поэтому, меняя порядок суммирования (что возможно, так как в применении к каждой основной функции $\varphi(x)$ в выражениях (17) остается лишь конечное число ненулевых слагаемых), мы получаем (16), что и требуется.

7. Выясним, где сосредоточен функционал $f * g$. Пусть $(f * g, \varphi) = (f, g * \varphi) \neq 0$; отсюда следует, что имеется общая точка ξ у носителя функционала f и функции $g * \varphi$:

$$\xi \in \text{supp } f, \quad \xi \in \text{supp } (g * \varphi) \subset \text{supp } \varphi - \text{supp } g.$$

Положим $\xi = \eta - \zeta$, где $\eta \in \text{supp } \varphi$, $\zeta \in \text{supp } g$. Отсюда $\eta = \xi + \zeta \in \text{supp } f + \text{supp } g$. Иначе говоря, если основная функция φ сосредоточена вне множества $\text{supp } f + \text{supp } g$, мы будем иметь $(f * g, \varphi) = 0$. Отсюда следует, что

$$\text{supp } (f * g) \subset \text{supp } f + \text{supp } g.$$

Последняя формула бесполезна, если носитель функционала g занимает всю ось. Но если мы интересуемся функционалом $f * g$ не всюду, а лишь в ограниченной области G , то нам не потребуются полная информация о функционале g ; нам достаточно будет знать его в окрестности множества $G - \text{supp } f$. Действительно, рассмотрим основную функцию $e(x)$, равную 1 на множестве $G - \text{supp } f$ и 0 вне некоторой окрестности V этого множества. Функционал eg требует для своего определения знания функционала g только на области V . Для любой основной функции φ , сосредоточенной внутри области G , мы имеем

$$(f * (1 - e)g, \varphi) = ((1 - e)g, f * \varphi) = 0,$$

так как $\text{supp } (f * \varphi) \in G - \text{supp } f$, а $(1 - e)g$ сосредоточена на дополнительном множестве. Следовательно, для указанных φ

$$(f * g, \varphi) = (f * eg, \varphi).$$

что и доказывает наше утверждение.

8. В этом пункте рассматриваются операции предельного перехода и дифференцирования для свертки.

Теорема 1. (Теорема о непрерывности свертки). *Если $f_\nu \rightarrow f$ в пространстве K' , то*

$$f_\nu * g \rightarrow f * g$$

в следующих случаях:

(а) функционал g финитен;

(б) функционалы f_ν финитны и, более того, сосредоточены в одном и том же промежутке $[a, b]$.

Доказательство. Для любой основной функции

$$(f_\nu * g, \varphi) = (f_\nu, g * \varphi) \rightarrow (f, g * \varphi) = (f * g, \varphi),$$

поскольку: а) $g * \varphi$ есть основная функция вместе с φ .

б) $g * \varphi$ можно заменить на основную функцию, не изменяя ее на отрезке $[a, b]$, где сосредоточены все функционалы f_ν . Отсюда $f_\nu * g \rightarrow f * g$, что и требуется.

В силу равенства (16) аналогичная теорема справедлива для случая, когда зависит от ν второй аргумент свертки.

Теорема 2. (Теорема о дифференцировании свертки). *Если один из функционалов f, g финитен, то*

$$(f * g)' = f' * g = f * g'.$$

Доказательство. Согласно определению производной и свертки

$$((f * g)', \varphi) = -(f * g, \varphi') = -(f, g * \varphi');$$

$$(f' * g, \varphi) = (f', g * \varphi) = -(f, (g * \varphi)');$$

$$(f * g', \varphi) = (f, g' * \varphi),$$

последние три выражения имеют смысл, если один из функционалов f, g финитен, и совпадают в силу формулы (10).

9. Определение и основные свойства свертки переносятся на случай обобщенных функций нескольких переменных без труда.

Если $f(x_1, \dots, x_n) = f(x)$ и $g(x_1, \dots, x_n) = g(x)$ — обычные функции, то их сверткой $(f * g)(x)$ называется функция

$$(f * g)(x) = \int_{R_n} f(\xi_1, \dots, \xi_n) g(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Функция $(f * g)(x)$ существует почти при каждом $x \in R_n$, и есть снова обычная функция, если хотя бы одна из функций $f(x), g(x)$ финитна; в этом случае свертка коммутативна:

$$f * g = g * f.$$

Пусть f и g — две обобщенные функции. Выражение

$$(g * \varphi)(\xi) = (g(x), \varphi(x + \xi))$$

есть бесконечно дифференцируемая функция от ξ , называемая *сверткой обобщенной функции g и основной функции φ* . Функционал $f * g$, действующий по формуле

$$(f * g, \varphi) = (f(\xi), (g * \varphi)(\xi)),$$

называется *сверткой функционалов f и g* . Он определен на K_n и непрерывен, если хотя бы один из функционалов f, g финитен.

В частности, для любых f и g

$$\delta * g = g, \quad f * \delta = f.$$

Если $f = \sum_{|m| \leq p} D^m f_m(x)$, $g = \sum_k D^k g_k(x)$ есть представление функционалов f и g через обычные функции (f финитен, $f_m(x)$ сосредоточены в фиксированном бруске, носители $g_k(x)$ удаляются от начала координат с возрастанием $|k|$), то

$$(f * g)(x) = \sum_{|m| \leq p} \sum_k D^{m+k} (f_m * g_k)(x) \quad (18)$$

есть представление свертки $f * g$ через обычные функции. Используя равенства типа (18), как и в п. 6, получаем, что свертка коммутативна, т. е.

$$f * g = g * f.$$

Функция $g * \varphi$ сосредоточена на множестве

$$\text{supp } \varphi - \text{supp } g,$$

функционал $f * g$ сосредоточен на множестве

$$\text{supp } f + \text{supp } g.$$

Свойства функционала $f * g$ в области G определяются при финитном f свойствами g в произвольно малой окрестности множества $G - \text{supp } f$.

Имеет место теорема о непрерывности свертки: *предельное соотношение $f_\nu * g \rightarrow f * g$ в K' имеет место в случаях:*

- а) функционалы $f_\nu \rightarrow f$ в K' , функционал g финитен;
- б) функционалы $f_\nu \rightarrow f$ в K' и их носители сосредоточены в одном и том же ограниченном бруске.

Имеет место формула дифференцирования свертки:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_j} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Задача 1. Пусть f_1 и f_2 — финитные функционалы, g — произвольный функционал; показать, что $f_1 * (f_2 * g) = (f_1 * f_2) * g$ (ассоциативность свертки).

Указание. Исследовать выражение свертки через обычные функции (п. 5).

2. Показать, что «функционал типа меры»

$$(\mu, \varphi) = \int \varphi(x) d\mu(x),$$

где $\mu(x)$ — мера Стильеса, имеет порядок сингулярности ≤ 1 .

Указание. Можно считать, что μ финитна. Функция $g * \mu$ (g — фундаментальная функция оператора Лапласа) есть обычная функция с обычными производными первого порядка (теорема Фубини). Использовать равенство $\Delta(g * \mu) = \Delta g * \mu = \mu$.

3. Показать, что всякий линейный непрерывный функционал на пространстве D_m^n финитных функций $\varphi(x)$ с непрерывными производными до порядка m (§ 10, задача 9), если его рассматривать только на функциях $\varphi(x) \in K$, представляет собою обобщенную функцию порядка сингулярности $\leq m+1$ (но, вообще говоря, не $\leq m$).

Указание. Использовать задачу 2 и задачу 11 к § 10. Функционал $\delta(x) \in D_0$ и имеет порядок сингулярности 1.

4. Известно, что свертка функционала $g \in K'$ и любой основной функции $\varphi(x)$ есть основная функция. Доказать, что g — финитный функционал.

Указание. (Е. А. Горин). Пусть g не финитен. Существует функция $\varphi_1 \in K$, сосредоточенная в шаре $|x| \leq 1$, для которой при некотором x_1 $(g * \varphi_1)(x_1) \neq 0$. По условию, $g * \varphi_1$ сосредоточена в некотором шаре $|x| \leq r_1$; найдем функцию $\varphi_2 \in K$, сосредоточенную в шаре $|x| \leq 1$ так, чтобы при некотором x_2 , $|x_2| > r_1 + 1$, иметь $(g * \varphi_2)(x_2) \neq 0$. Определим функцию $\psi_2 \in K$ в форме $\psi_2 = \varphi_2 - \lambda \varphi_1$ так, чтобы иметь $(g * \psi_2)(x_1) = (g * \varphi_2)(x_1) - \lambda (g * \varphi_1)(x_1) = 0$. Продолжая так далее, найдем последовательность основных функций $\psi_\nu(x)$, сосредоточенных в шаре $|x| \leq 1$, и последовательность точек $x_\nu \rightarrow \infty$, для которых $(g * \psi_\nu)(x_\nu)$ отлична от 0

лишь при $\nu = \mu$. Положим $\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x)$; при достаточно малых c_k $\psi(x)$ —

основная функция и $g * \psi$ не финитна.

5. Показать, что определение и основные свойства свертки переносятся на случай функционалов f и g , сосредоточенных на полуоси $x \geq 0$, причем результат оказывается также сосредоточенным на этой полуоси.

6. (Продолжение). Свертка функции $f(x)$, сосредоточенной на полуоси $x \geq 0$, с функцией $\frac{x_+^{n-1}}{(n-1)!}$ равносильна n -кратному интегрированию функции $f(x)$ в силу формулы Дирихле

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n &= \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(\xi) (x-\xi)^{n-1} d\xi = f * \frac{x_+^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Естественно назвать поэтому выражение

$$I_{\lambda} f = f * \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$$

λ -кратным неопределенным интегралом от f . Это определение действует для любого функционала f , сосредоточенного на полуоси $x \geq 0$, и для любого комплексного λ , поскольку обобщенная функция $\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ определена при всех λ (§ 11, задача 3). Показать, что выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} I_{\lambda}(I_{\mu} f) &= I_{\lambda+\mu} f, \\ I_0 f &= f, \\ I_{-k} f &= f^{(k)}. \end{aligned}$$

У к а з а н и е. Использовать соотношение

$$\int_0^x \xi^{\lambda-1} (x-\xi)^{\mu-1} d\xi = \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} x^{\lambda+\mu-1}.$$

7. (Продолженне). Показать, что интегральное уравнение Абеля

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\alpha}} \quad (1)$$

с известной (дифференцируемой) функцией $g(x)$ имеет решение

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{g'(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}.$$

У к а з а н и е. Записать уравнение (1) в форме $g = I_{1-\alpha} f$ и использовать задачу 6.

§ 13. Порядок сингулярности

1. Порядок сингулярности обобщенной функции уже неоднократно рассматривался нами в примерах. Мы уточним здесь его определение и проанализируем более подробно.

Мы говорим, что *обобщенная функция f имеет в области G порядок сингулярности $\leq p$* (и пишем $s(f) \leq p$ или при необходимости $s_G(f) \leq p$), если f допускает в этой области G представление

$$f = \sum_{|k| \leq p} D^k f_k(x), \quad (1)$$

где $f_k(x)$ — обычные функции.

Если при этом представление в форме

$$f = \sum_{|k| \leq p-1} D^k g_k(x)$$

с обычными функциями $g_k(x)$ невозможно, мы говорим, что *обобщенная функция f имеет порядок сингулярности в области G ровно p* ($s(f) = p$ или $s_G(f) = p$). Из результатов § 10 следует, что каждая обобщенная функция f в ограниченной области G имеет конечный порядок сингулярности, а финитная обобщенная функция имеет конечный порядок сингулярности и во всем пространстве R_n .

По самому смыслу число p не отрицательно. Обобщенная функция f , для которой $s(f) = 0$, есть обычная функция. Распространим теперь понятие порядка сингулярности и на отрицательные значения p . Именно, пусть $p < 0$ и $q = -p > 0$, мы говорим, что *обобщенная функция f в области G имеет порядок сингулярности $\leq p$* , если f и все ее производные (в K') до порядка q внутри области G суть обычные функции; далее, *f имеет порядок сингулярности в области G ровно p* , если среди производных функции f порядка $q+1$ имеются функционалы, не сводящиеся в области G к обычным функциям.

Обобщенная функция f имеет в области G порядок сингулярности равный $-\infty$, если ее производные (в K') любого порядка внутри области G суть обычные функции.

Подчеркнем, что речь идет здесь о производных в пространстве K' ; вообще говоря, функция порядка сингулярности $p < 0$ не обязана быть дифференцируемой в обычном смысле и даже может не быть непрерывной. Только при достаточно большом $|p|$ можно утверждать, что такая функция непрерывна (см. п. 6).

2. Определенный выше порядок сингулярности $s(f)$ связывал функционал f с обычными (локально суммируемыми) функциями. Вместе с тем естественно ввести понятие порядка сингулярности и по отношению к непрерывным функциям. Будем говорить, что *обобщенная функция f в области G имеет порядок c -сингулярности $\leq p$* , и писать $s(f) \leq p$ или $s_G(f) \leq p$, если внутри этой области справедливо представление

$$f = \sum_{|k| \leq p} D^k f_k(x), \quad (2)$$

где $f_k(x)$ — непрерывные функции. При этом порядок c -сингулярности функции f равен ровно p , ($s(f) = p$ или $s_G(f) = p$), если представление

$$f = \sum_{|k| \leq p-1} D^k g_k(x)$$

с непрерывными функциями $g_k(x)$ в области G невозможно.

Распространим и это определение на отрицательные значения p . Именно, если $p < 0$ и $q = -p > 0$, мы говорим, что функция $f = f(x)$ имеет порядок c -сингулярности $\leq p$ в области G , если $f(x)$ внутри области G непрерывна и имеет непрерывные производные до порядка q ; и при этом он равен ровно p , если среди производных функции $f(x)$ порядка $q + 1$ имеются функционалы, не приводящиеся в области G к непрерывным функциям.

Очевидно, $c(f) \geq s(f)$. Неравенство $c(f) \leq 0$ во всяком случае означает, что $f(x)$ — обычная непрерывная функция. Равенство $c(f) = -\infty$ означает, что в области G функция непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков.

Заметим, что наличие непрерывных производных в смысле пространства K' обеспечивает уже тот факт, что эти производные существуют и в обычном смысле (§ 7, п. 4).

3. Приведем несколько простых теорем, связанных с порядком сингулярности $s(f)$ или $c(f)$. Все участвующие ниже обобщенные функции рассматриваются в фиксированной области G .

1. При однократном дифференцировании порядок сингулярности может увеличиться не более чем на 1; более общим образом, если $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ есть дифференциальный оператор порядка m , то

$$s\left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\right) \leq s(f) + m, \quad c\left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\right) \leq c(f) + m. \quad (3)$$

Достаточно доказать первое утверждение. Если $f = \sum_{|k| < p} D^k f_k(x)$, где $f_k(x)$ — обычные (непрерывные) функции, то $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{|k| < p} \frac{\partial}{\partial x_j} D^k f_k(x)$, т. е. получается из обычных (непрерывных) функций путем дифференцирования до порядка $p + 1$; это и требуется.

2. $s(f + g) \leq \max[s(f), s(g)]$ для любых обобщенных функций f и g .

Действительно, пусть для определенности $\max[s(f), s(g)] = s(f) = p \geq 0$. Мы можем написать

$$f = \sum_{|k| < p} D^k f_k(x), \quad g = \sum_{|k| < p} D^k g_k(x),$$

дописывая вместо недостающих функций $g_k(x)$ нули. Но тогда

$$f + g = \sum_{|k| < p} D^k [f_k(x) + g_k(x)],$$

т. е. $s(f + g) \leq p$.

что и требуется. Если же $\max[s(f), s(g)] = s(f) = p = -q < 0$, то это означает, что и $y f$ и $y g$ производные до порядка q суть обычные функции; но тогда и $y f + g$ производные до порядка q суть обычные функции, что и требуется.

Аналогично

$$c(f + g) \leq \max\{c(f), c(g)\}.$$

3. Если обобщенная функция f имеет вид

$$f = f_0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}, \quad (4)$$

где функционалы f_0, f_1, \dots, f_n имеют порядок сингулярности (в любом смысле) $\leq m$, то f , очевидно, имеет порядок сингулярности (в том же смысле) $\leq m + 1$. Обратно, если f имеет порядок сингулярности $\leq m + 1$, где $m \geq 0$, то его можно представить в форме (4), где функционалы f_0, \dots, f_n имеют порядок сингулярности $\leq m$. Это представление получается непосредственно из формулы (1) выделением первых производных из операторов D^k .

4. Произведение функционала f , имеющего порядок сингулярности (в любом смысле) $\leq p$ на бесконечно дифференцируемую функцию $\alpha(x)$, имеет также порядок сингулярности (в том же смысле) $\leq p$. Это утверждение очевидно для $p \leq 0$; для $p > 0$ будем рассуждать по индукции. Предположим, что утверждение верно для всех функционалов порядка сингулярности $\leq p$. Представим данный функционал порядка сингулярности $\leq p + 1$ в форме (4), где f_0, f_1, \dots, f_n — функционалы порядка сингулярности $\leq p$. Тогда мы будем иметь

$$\alpha f = \alpha f_0 + \sum_{j=1}^n \alpha \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = \alpha f_0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\alpha f_j)}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} f_j,$$

откуда, используя предположение индукции, находим, что функционал αf имеет порядок сингулярности $\leq p + 1$, что и требуется.

4. Существенные соотношения между порядками сингулярности получаются при свертке обобщенных функций. Пусть вначале обобщенные функции f и g рассматриваются во всем пространстве R_n и одна из них финитна. Тогда

$$s(f * g) \leq s(f) + s(g). \quad (5)$$

Действительно, если $s(f) = l \geq 0$, $s(g) = m \geq 0$ и, для определенности, функционал g финитен, то

$$f = \sum_{|j| \leq l} D^j f_j(x), \quad g = \sum_{|k| \leq m} D^k g_k(x)$$

с обычными функциями $f_j(x)$ и обычными финитными функциями $g_k(x)$; отсюда

$$f * g = \sum_{|j| < l} \sum_{|k| < m} D^{j+k} [f_j(x) * g_k(x)],$$

где $f_j(x), g_k(x)$ — снова обычные функции. Таким образом, $f * g$ имеет порядок сингулярности $\leq l + m$. Предположим теперь, что $l \geq 0, m < 0$, так что функционал g имеет обычные производные до порядка $|m|$. Тогда, если $l + m \geq 0$,

$$f * g = \sum_{|j| < l} D^j f_j(x) * g(x) = \sum_{|j| < l+m} D^j f_j(x) * g(x) + \\ + \sum_{l+m < |j| < l} D^{j+m} [f_j(x) * D^{-m} g(x)],$$

где $f_j(x) * D^{-m} g(x)$ — снова обычные функции. Таким образом, $s(f * g) \leq l + m$ и в этом случае. Если же $l + m < 0$, то

$$f * g = \sum_{|j| < l} D^j f_j(x) * g(x) = \sum_{|j| < l} f_j(x) * D^j g(x)$$

имеет обычные производные до порядка $-m - l$ и, следовательно, также имеет порядок сингулярности $\leq m + l$.

Наконец, если числа l и m оба отрицательны, функция $f(x)$ имеет обычные производные до порядка $|l|$, функция $g(x)$ имеет обычные производные до порядка $|m|$. Тогда к свертке $f * g$ можно применять дифференцирование D^{l+l+m} по правилу

$$D^{l+l+m} [f * g] = D^{l+l} f * D^{l+m} g;$$

результат представляет собою обычную функцию, и следовательно, снова $s(f * g) \leq |l| + |m|$.

В частности, свертка функции $f(x)$, у которой $s(f) = -\infty$ (функция с обычными производными любого порядка), и любого функционала $g(x)$ конечного порядка сингулярности (в случае, если она имеет смысл, т. е. f или g финитен) имеет снова порядок сингулярности $s(f) = -\infty$.

Посмотрим, что можно сказать о порядке сингулярности функционала $f * g$ в ограниченной области G . Поскольку здесь не требуется полной информации о функционалах f и g , результат (5) возможно иногда улучшить. А именно, как мы знаем из § 12, п. 7, если функционал f финитен, поведение свертки $f * g$ в области G определяется свойствами функционала g только в окрестности множества $G - \text{supp } f$; иначе говоря, в области G имеет место представление

$$(f * g, \varphi) = (f * e_g, \varphi),$$

где $e(x)$ — основная функция, равная 1 на множестве $G = \text{supp } f$ и 0 вне некоторой окрестности V этого множества. По доказанному

$$s_G(f * g) \leq s(f) + s(eg) = s(f) + s_V(g), \quad (6)$$

что и представляет собой нужную формулу.

Б. Выясним теперь, в какой мере сохраняется при свертке непрерывность и дифференцируемость функции.

Рассмотрим вначале свертку обычных функций

$$f(x) * g(x) = \int_{R_n} f(\xi) g(x - \xi) d\xi,$$

причем одна из них, как и всегда, финитна. Предположим, что $g(x)$ непрерывна; покажем, что и $f(x) * g(x)$ также непрерывна. Если финитна функция $f(x)$, например сосредоточена в шаре $|x| \leq r$, то мы можем написать оценку

$$\begin{aligned} |(f * g)(x_0) - (f * g)(x_1)| &\leq \int_{|\xi| \leq r} |f(\xi)| |g(x_0 - \xi) - g(x_1 - \xi)| d\xi \leq \\ &\leq \max_{|\xi| \leq r} |g(x_0 - \xi) - g(x_1 - \xi)| \int_{|\xi| \leq r} |f(\xi)| d\xi, \end{aligned}$$

откуда следует непрерывность функции $(f * g)(x)$ в точке x_0 . Если финитна функция $g(x)$ и сосредоточена, например, в шаре $|x| \leq r$, то аналогично

$$\begin{aligned} |(f * g)(x_0) - (f * g)(x_1)| &\leq \int_{|\xi| \leq r} |g(\xi)| |f(x_0 - \xi) - f(x_1 - \xi)| d\xi \leq \\ &\leq \max_{|\xi| \leq r} |g(\xi)| \int_{|\xi| \leq r} |f(x_0 - \xi) - f(x_1 - \xi)| d\xi \rightarrow 0 \text{ при } x_1 \rightarrow x_0, \end{aligned}$$

в силу интегральной непрерывности обычной функции $f(x)$ *).

По теореме о дифференцировании свертки мы имеем

$$D^{k+m}(f * g) = D^k f * D^m g;$$

поэтому если функция g не только непрерывна, но и имеет непрерывные производные до порядка, например, q , а f имеет обычные производные до порядка p , то свертка имеет непрерывные производные до порядка $p + q$.

*) См. Анализ III, стр. 364. Очевидно, в последнем случае достаточно требовать лишь ограниченности финитной функции $g(x)$.

Полученный результат с помощью понятия порядка сингулярности можно сформулировать так: *если $s(f) \leq 0$, $c(g) \leq 0$, то*

$$c(f * g) \leq s(f) + c(g). \quad (7)$$

В действительности *неравенство (7) имеет место при любых $s(f)$ и $c(g)$* , а не только при неположительных.

Действительно, пусть, например, функционал f финитен, так что

$$f = \sum_{|j| \leq p} D^j f_j(x), \quad s(f) = p \geq 0,$$

где $f_j(x)$ — обычные финитные функции; пусть, далее,

$$g = \sum_{|k| \leq m} D^k g_k(x), \quad c(g) = m \geq 0,$$

где $g_k(x)$ — непрерывные функции. Тогда

$$f * g = \sum_{|j| \leq p} \sum_{|k| \leq m} D^{j+k} [f_j(x) * g_k(x)], \quad (8)$$

где $f_j * g_k$, по доказанному, непрерывны. Отсюда $c(f * g) \leq p + m$. Для случая $c(g) < 0$ вместо равенства (8) мы напишем

$$f * g = \sum_{|j| \leq p} D^j [f_j * g],$$

откуда, по доказанному,

$$c(f * g) \leq p + c(f_j * g) \leq p + c(g).$$

Если $s(f) < 0$, а $c(g) = m \geq 0$, то вместо (8) мы напишем

$$f * g = \sum_{|k| \leq m} f * D^k g_k(x) = \sum_{|k| \leq m} D^k [f * g_k]$$

и, следовательно,

$$c(f * g) \leq m + s(f).$$

Во всех случаях неравенство (7) оказывается справедливым.

*Следствие 1. Свертка $f * g$ — бесконечно дифференцируемая функция (в обычном смысле), если хотя бы один из функционалов f , g есть бесконечно дифференцируемая функция.*

Доказательство. Будем предполагать, что f — финитный функционал. Если $g = g(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, то по формуле (7)

$$c(f * g) \leq s(f) + c(g) = -\infty,$$

поскольку $s(f) < \infty$, $c(g) = -\infty$. Если $f = f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, то формула (7) непосредственно не работает*); представляя $g(x)$ в виде предела финитных функционалов g_v

*) Поскольку возможен случай $c(g) = +\infty$.

с носителями, удаляющимися от начала координат, мы получим

$$f * g = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (f * g_\nu), \quad c(f * g_\nu) \leq s(f) + c(g_\nu) = -\infty,$$

и так как в любой ограниченной области функции $f * g_\nu$, начиная с некоторого номера, перестают изменяться, отсюда следует, что $f * g$ есть бесконечно дифференцируемая функция всюду.

Следствие 2. *Всякая обобщенная функция f может быть представлена как предел (в K') последовательности обычных функций $f_1(x), f_2(x), \dots$, притом бесконечно дифференцируемых и финитных.*

Доказательство. Пусть h_1, h_2, \dots — дельта-образная последовательность бесконечно дифференцируемых функций, сосредоточенных в шаре $|x| \leq 1$ (§ 9, п. 2). Образует функции $g_\nu = h_\nu * f$; так как $h_\nu \rightarrow \delta$ (в K'), то, в силу теоремы о непрерывности свертки (§ 12, п. 8), мы имеем $g_\nu = h_\nu * f \rightarrow \delta * f = f$. В силу следствия 1, функции $g_\nu(x)$ бесконечно дифференцируемы. Пусть, далее, $e_\nu(x)$ — основная функция, равная 1 в шаре $|x| \leq \nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$). Положим $f_\nu = e_\nu g_\nu$; функция $f_\nu(x)$ также бесконечно дифференцируема и финитна. Наконец, для любой основной функции $\varphi(x)$ мы имеем $\varphi = e_\nu \varphi$, начиная с достаточно большого ν ; поэтому

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (f_\nu, \varphi) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (e_\nu g_\nu, \varphi) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (g_\nu, e_\nu \varphi) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (g_\nu, \varphi) = (f, \varphi).$$

т. е. $f_\nu \rightarrow f$ в K' , что и утверждалось.

Замечание. Если в условиях следствия 2 функционал f финитен и сосредоточен *внутри* ограниченной области G , то и функции $f_\nu(x)$ можно взять сосредоточенными в той же области. Действительно, пусть найдены какие-то функции g_1, g_2, \dots , сходящиеся к функционалу f . Умножая их на основную функцию $e(x)$, равную 1 на множестве $\text{supp } f$ и 0 вне G , мы получим последовательность $e g_1, e g_2, \dots$, также сходящуюся к f ; в то же время функции $e g_1, e g_2, \dots$ сосредоточены в области G , что и требовалось.

6. Для дальнейшего напомним один результат из § 7 (п. 2, пример 9). У уравнения

$$\Delta^m \mathcal{E}_n^{2m} = \delta(x) \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right)$$

мы нашли следующие решения:

$$\mathcal{E}_n^{2m}(x) = \begin{cases} a_{n, 2m} r^{2m-n} & \text{при } n \text{ нечетном или } n \text{ четном и } 2m < n; \\ b_{n, 2m} r^{2m-n} \ln r & \text{при } n \text{ четном и } 2m \geq n. \end{cases}$$

Очевидно, функция $\mathcal{E}_n^{2m}(x)$ — обычная функция, имеющая обычные производные до порядка $2m - 1$, так что

$$s(\mathcal{E}_n^{2m}) = 1 - 2m. \quad (9)$$

Покажем, что

$$c(\mathcal{E}_n^{2m}) = 1 - 2m + n. \quad (10)$$

Если $2m > n$, то $\mathcal{E}_n^{2m}(x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные до порядка $2m - n - 1$, так что в этом случае $c(\mathcal{E}_n^{2m}) = 1 - 2m + n$. Если $2m = n$, то $\mathcal{E}_n^{2m} = a \ln r$ и уже не непрерывна при $x = 0$; но она является суммой первых производных от непрерывных функций (поскольку $\ln r = a\Delta(r^2 \ln r) = c \sum \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} r^2 \ln r \right)$, а функции $\frac{\partial}{\partial x_k} r^2 \ln r$ непрерывны); поэтому $c(\mathcal{E}_n^{2m}) = 1 = n - 2m + 1$. Наконец, при $2m < n$ функция $\mathcal{E}_n^{2m} = cr^{2m-n}$ может быть записана в виде

$$a_1 \Delta^{\frac{n-2m+1}{2}} r \quad \text{при } n \text{ нечетном,}$$

$$a_2 \Delta^{\frac{n-2m}{2}} r^2 \ln r \quad \text{при } n \text{ четном.}$$

Во всех случаях мы также получаем

$$c(r^{2m-n}) = 1 - 2m + n.$$

Дальнейшие теоремы имеют целью получение оценки порядка сингулярности функционала через порядок сингулярности его производных.

Теорема 1. Если f — финитный функционал, то при любом m

$$s(f) \leq s(\Delta^m f) - 2m + 1, \quad (11)$$

$$c(f) \leq c(\Delta^m f) - 2m + 1 + n. \quad (12)$$

Действительно, применяя оценки (5) и (7) к равенству

$$\mathcal{E}_n^{2m} * \Delta^m f = \Delta^m \mathcal{E}_n^{2m} * f = \delta * f = f,$$

мы получаем

$$s(f) \leq s(\mathcal{E}_n^{2m}) + s(\Delta^m f), \quad c(f) \leq c(\mathcal{E}_n^{2m}) + c(\Delta^m f);$$

используя (9) и (10), приходим к требуемым неравенствам (11) — (12).

Следствие 1. Для любого финитного функционала f

$$c(f) \leq s(f) + n + 1. \quad (13)$$

Этот результат получается из оценки (12) при замене $s(\Delta^m f)$ на не меньшую величину $s(f) + 2m$.

Следствие 2. Если $s(f) = -\infty$, то и $c(f) = -\infty$; иными словами, если все производные функционала f — обычные функции, то все они и непрерывны, и являются обычными производными.

7. Далее мы получим аналогичные оценки для произвольных (не финитных) функционалов, рассматривая их в ограниченной области G . Как мы знаем, в ограниченной области G всякий функционал f имеет конечный порядок сингулярности $s(f)$. Пусть $G' \subset G$ — область, содержащаяся в G вместе со своим замыканием, и $e(x)$ — основная функция, сосредоточенная строго внутри G и равная 1 на G' . Тогда функционал ef финитен и, по доказанному,

$$c(ef) \leq s(ef) + n + 1.$$

В области G' мы имеем $ef = f$; поэтому в G'

$$c(f) \leq s(f) + n + 1.$$

Таким образом, следствия 1 и 2 сохраняются и для произвольного функционала f в любой области G' , содержащейся строго внутри G .

Что касается неравенств (11) — (12), то они, конечно, остаются справедливыми для функционала ef , но сами по себе уже не представляют большого интереса, поскольку $\Delta^m(ef)$ выражается не только через производные порядка $2m$ от функционала f , но и через промежуточные производные и саму функцию f . Все же и этот результат полезен; сформулируем его в виде леммы:

Лемма 1. Если $s(D^j f) \leq k$ при всех $|j| \leq 2m$, то

$$s(f) \leq k - 2m + 1.$$

В самом деле, согласно неравенству (11),

$$s(ef) \leq s(\Delta^m ef) - 2m + 1 \leq k - 2m + 1.$$

Так как для любой основной функции $\varphi(x)$, сосредоточенной строго внутри области G , при некоторой $e(x)$ справедливо равенство $(f, \varphi) = (ef, \varphi)$, то и сам функционал f имеет в области G порядок сингулярности $\leq k - 2m + 1$, что и требуется.

Чтобы выразить $s(f)$ только через величины $s(D^{2m} f)$, воспользуемся следующей леммой:

Лемма 2. Если все производные 1-го порядка функционала f в ограниченной области G имеют порядок сингулярности $s(f) \leq k$, то и сам функционал f в этой области имеет порядок сингулярности $s(f) \leq k$.

Доказательство. Во всяком случае, в области G порядок сингулярности функционала f конечен, и мы можем написать для некоторого m

$$s(f) \leq k + 2m - 1.$$

Далее, по условию, $s(Df) \leq k$; отсюда $s(D^2f) \leq k + 1, \dots, s(D^{2m}f) \leq k + 2m - 1$. Мы видим, что порядок сингулярности f и его производных до порядка $2m$ не превосходит $k + 2m - 1$. По лемме 1, $s(f) \leq k$, что и требуется.

Теорема 2. Если в ограниченной области G все производные порядка $2m$ функционала f имеют порядок сингулярности $s(D^{2m}f) \leq k$, то

$$s(f) \leq k - 2m + 1.$$

Доказательство. Последовательно применяя лемму 2, найдем $s(D^{2m-1}f) \leq k, \dots, s(D^j f) \leq k$ при всех $|j|$ от $2m$ до 0 ; остается сослаться на лемму 1.

Задачи. 1. Если $c\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \leq 0$ ($k = 1, \dots, n$), то $s(f) \leq -1$.

Указание. См. теорему 2 § 7. п. 4.

2. Если $c\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \leq -m$ ($k = 1, \dots, n$), то $s(f) \leq -m - 1$.

Указание. Проанализировать структуру решения задачи 1.

Примечание. Существует функция $f(x_1, x_2)$, у которой $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ и

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ непрерывны, а $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = g(x_1, x_2)$ не непрерывна (в одной точке обращается в бесконечность*). Мы имеем

$$c\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right) = c\left(\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right) = 1, \quad c\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right) = c\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) = 1,$$

в то время как $s(g) > 0$; таким образом, для отрицательных значений m утверждение задачи 2 уже не справедливо.

3. Если $s\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = 0$ ($k = 1, \dots, n$), то $s(f) \leq -1$.

Указание. См. лемму 2 п. 7 и определение $s(f)$.

4. Если $s\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \leq -m$ ($k = 1, \dots, n$), то $s(f) \leq -m - 1$.

Указание. То же, что и для задачи 3.

Примечание. Можно построить функцию $f(x_1, x_2)$, у которой $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$

и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ локально суммируемы, а $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = g(x_1, x_2)$ не является локально

*) Б. С. Митягин. О второй смешанной производной. ДАН СССР, т. 123, № 4, (1958), стр. 606—608.

суммируемой*). Тот же прием, что в примечании к задаче 2, показывает, что для отрицательных значений m утверждение задачи 4 уже не справедливо.

5. Можно ли представить обычную функцию f в форме

$$f = f_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_k},$$

где $s(f_0) \leq -1, \dots, s(f_n) \leq -1$? (Иначе говоря, справедливо ли утверждение п. 3 для случая $m = -1$?)

Ответ неизвестен.

6. Можно ли представить непрерывную функцию f в форме

$$f = f_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_k},$$

где $c(f_0) \leq -1, \dots, c(f_n) \leq -1$?

Ответ неизвестен.

§ 14. Преобразование Фурье обобщенных функций

1. Пусть $\varphi(x)$ ($-\infty < x < \infty$) некоторая комплекснозначная основная функция. Построим ее преобразование Фурье

$$\psi(\sigma) \equiv F[\varphi(x)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx. \quad (1)$$

Поскольку $\varphi(x)$ — финитная функция, интеграл (1) распространен на конечную область, например $-a \leq x \leq a$; поэтому функция $\psi(\sigma)$ может быть определена и для комплексных значений $s = \sigma + i\tau$:

$$\psi(\sigma + i\tau) = \int_{-a}^a \varphi(x) e^{isx} dx = \int_{-a}^a \varphi(x) e^{i\sigma x} e^{-\tau x} dx. \quad (2)$$

Так как интеграл (2) допускает дифференцирование по комплексному параметру $s = \sigma + i\tau$, то $\psi(\sigma + i\tau)$ — целая аналитическая функция. Дифференцирование функции $\varphi(x)$ приводит к умножению $\psi(s)$ на $-is$; действительно,

$$\int_{-a}^a \varphi'(x) e^{ixs} dx = \varphi(x) e^{ixs} \Big|_{-a}^a - \int_{-a}^a is\varphi(x) e^{ixs} dx = -is\psi(s).$$

*) D. Ornstein, A non-inequality for differential operators in the L_1 -norm. Arch. Ration. Mech. and Analysis, т. 11, № 1, (1962) стр. 40—49.

Продолжая дифференцирование, получим, далее, для любого $q = 0, 1, 2, \dots$

$$F[\varphi^{(q)}(x)] = (-ts)^q F[\varphi(x)] \quad (3)$$

и вообще

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right] = P(-ts)F[\varphi(x)], \quad (4)$$

где P — любой многочлен с постоянными коэффициентами. Вместе с тем мы получаем оценку

$$|s|^q |\psi(s)| = \left| \int_{-a}^a \varphi^{(q)}(x) e^{txs} dx \right| \leq C_q e^{a|\tau|}.$$

Таким образом, преобразование Фурье $\psi(s)$ каждой основной функции $\varphi(x)$, обращающейся в нуль при $|x| \geq a$, есть целая аналитическая функция переменного $s = \sigma + i\tau$, удовлетворяющая при каждом $q = 0, 1, 2, \dots$ неравенству

$$|s^q \psi(s)| \leq C_q e^{a|\tau|}. \quad (5)$$

Мы утверждаем, что верно и обратное: всякая целая функция $\psi(s)$, удовлетворяющая при каждом q неравенству (5), есть преобразование Фурье некоторой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$, обращающейся в нуль при $|x| \geq a$.

Функцию $\varphi(x)$ мы, естественно, определим формулой обратного преобразования Фурье

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma. \quad (6)$$

Поскольку функция $\psi(\sigma)$, как видно из неравенства (5) при $\tau = 0$, убывает при $|\sigma| \rightarrow \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|\sigma|$, то интеграл (6) сходится абсолютно и равномерно по x . При формальном дифференцировании под знаком интеграла он останется абсолютно и равномерно сходящимся. Поэтому функция $\varphi(x)$ обладает первой производной, а также и всеми последующими, при этом

$$\varphi^{(q)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\sigma)^q \psi(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Чтобы убедиться в финитности функции $\varphi(x)$, заметим вначале, что в ее выражении интегрирование по вещественной оси можно заменить интегрированием по любой параллельной прямой

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma + i\tau) e^{-i(\sigma + i\tau)x} d\sigma. \quad (7)$$

Действительно, по теореме Коши интеграл от аналитической функции $\psi(s)$, $s = \sigma + i\tau$, по прямоугольнику $[-A; A; A + i\tau; -A + i\tau]$ равен нулю; в силу оценки (5), интеграл по вертикальным отрезкам $[A; A + i\tau]$ и $[-A + i\tau; -A]$ стремится к 0 при $A \rightarrow \infty$, откуда и вытекает (7). Далее, можно написать

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{\tau x} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma + i\tau) e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Пусть $|x| > a$, зададим некоторое число $t > 0$ и найдем τ из условия $x\tau = -t|x|$. Используя неравенство (5) при $q=0$ и $q=2$, находим

$$|\psi(s)| \leq e^{a|\tau|} \min \left\{ C_0, \frac{C_2}{|s|^2} \right\} \leq C \frac{e^{a|\tau|}}{1+|s|^2} \leq C \frac{e^{a|\tau|}}{1+\sigma^2};$$

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{\tau x} \int_{-\infty}^{\infty} C \frac{e^{a|\tau|}}{1+\sigma^2} d\sigma = C' e^{-t|x|+at} = C' e^{t(a-|x|)}.$$

Так как C' не зависит от t , то, устремляя t к ∞ , находим, что $\varphi(x) = 0$. Таким образом, при $|x| > a$ функция $\varphi(x)$ обращается в нуль. Итак, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем высказанным условиям. В силу известной теоремы об интеграле Фурье *), ее преобразование Фурье совпадает с функцией $\psi(\sigma)$, что и требовалось.

2. Изучение преобразований Фурье функций из пространства K , начатое в предыдущем пункте, естественно приводит к следующему определению. Введем *пространство* Z всех целых функций $\psi(s)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|s|^q |\psi(s)| \leq C_q e^{a|\tau|} \quad (q = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

(где постоянные a и C_q зависят от функции ψ), с очевидным определением основных линейных операций — сложения и умножения на число.

Как показано в п. 1, *преобразование Фурье устанавливает между пространствами K и Z взаимно однозначное соответствие*. Очевидно, что это соответствие сохраняет указанные линейные операции и является тем самым изоморфизмом.

В пространстве Z допустимо также умножение на некоторые функции $G(s)$, дистрибутивное со сложением. Функциями $G(s)$, на которые можно производить умножение в пределах класса Z , являются, например, целые аналитические функции, удовлетворяющие оценке

$$|G(s)| \leq C(1+|s|)^m e^{b|\tau|} \quad (2)$$

(и никакие другие; см. задачу 5 к § 15).

*) См. Анализ III, гл. VII, § 2.

Особую роль в пространстве Z играет операция *инволюции*, переводящая функцию $\psi(s)$ в $\psi^*(s) \equiv \overline{\psi(\bar{s})}$.

Кроме того, можно переносить в пространство Z линейные операции из пространства K , пользуясь установленным изоморфизмом.

Каждой линейной операции, определенной в пространстве K , отвечает некоторая «двойственная» линейная операция, определенная в пространстве Z . Так, например, операции дифференцирования в пространстве K соответствует, в силу формулы (3) п. 1, операция умножения на $-is$ в пространстве Z . С другой стороны, формула

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} ix e^{isx} \varphi(x) dx$$

показывает, что операции умножения на ix в пространстве K соответствует операция дифференцирования в пространстве Z ; повторяя эту операцию, приходим к формуле, справедливой при любом $q = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{d^q}{ds^q} F[\varphi] = F[(ix)^q \varphi(x)]. \quad (3)$$

Из существования правой части следует существование левой; поэтому в пространстве Z функции $\psi(s)$ можно неограниченно дифференцировать, не выходя за пределы этого пространства. Можно написать и несколько более общую формулу:

$$P\left(\frac{d}{ds}\right) F[\varphi] = F[P(ix) \varphi(x)], \quad (4)$$

где P — любой многочлен с постоянными коэффициентами.

Операции отражения $\varphi(x) \rightarrow \varphi(-x)$ в пространстве K отвечает операция отражения $\psi(s) \rightarrow \psi(-s)$ в пространстве Z , поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-x) e^{isx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-isx} dx.$$

Операции сдвига $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x-h)$ в пространстве K отвечает операция умножения на e^{ish} в пространстве Z ; действительно,

$$\begin{aligned} F[\varphi(x-h)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \varphi(x-h) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(y+h)} \varphi(y) dy = e^{ish} F[\varphi(x)]. \end{aligned}$$

Обратно, операции умножения на e^{ixh} (при любом, может быть и комплексном, h) в пространстве K отвечает операция сдвига в пространстве Z :

$$F[e^{ixh}\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} e^{ihx} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s+h)x} \varphi(x) dx = \psi(s+h).$$

В частности, мы видим, что в пределах пространства Z функции $\psi(s)$ допускают всевозможные (вещественные и комплексные) сдвиги.

Можно перенести в пространство Z и операцию предельного перехода, считая, что функции $\psi_\nu(s)$ стремятся к нулю, если их образы $\varphi_\nu(x)$ стремятся к нулю в смысле, установленном для пространства K . Впрочем, эту сходимост в Z можно описать и внутренним образом. Именно, последовательность $\psi_\nu(s)$ стремится к нулю в Z , если, во-первых, выполняются неравенства

$$|s^q \psi_\nu(s)| \leq C_q e^{a|s|}$$

с постоянными C_q и a , не зависящими от ν , и если, во-вторых, эти функции стремятся к нулю равномерно на каждом интервале оси (см. задачу 1).

Все приведенные выше операции — сложение, умножение на число и на функцию, инволюция, сдвиг, производная — непрерывны в пространстве Z относительно указанной сходимости.

Отметим, что разложение в ряд Тейлора

$$\sum_{q=0}^{\infty} \psi^{(q)}(s) \frac{h^q}{q!} = \psi(s+h)$$

с любым фиксированным (комплексным) h имеет место в смысле указанной сходимости; это следует из справедливости двойственной формулы

$$\sum_{q=0}^{\infty} (ix)^q \frac{h^q}{q!} \varphi(x) = e^{ixh} \varphi(x)$$

в смысле сходимости в пространстве K .

3. Вернемся на момент к функционалам на (комплексном) пространстве K .

Обычной комплексной функции $f(x)$ мы будем сопоставлять функционал $f \in K'$ по следующему правилу:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \varphi(x) dx.$$

Этот выбор правила сопоставления объясняется тем, что в теории преобразования Фурье существенную роль играет равенство Парсеваля, которое имеет следующую форму:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\sigma)} \psi(\sigma) d\sigma,$$

где $g(\sigma)$ и $\psi(\sigma)$ соответственно преобразования Фурье функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ (в предположении, например, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ квадратично интегрируемы*).

На пространстве Z , как и на пространстве K , также можно строить линейные непрерывные функционалы — обобщенные функции.

Всякая (комплексная) функция $g(\sigma)$, определенная при $-\infty < \sigma < \infty$, локально интегрируемая и, кроме того, возрастающая на бесконечности не быстрее некоторой степени $|\sigma|$, определяет функционал на Z по формуле **)

$$(g, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\sigma)} \psi(\sigma) d\sigma. \quad (1)$$

Функционалы типа (1) будем называть *регулярными*, остальные — *сингулярными*. К числу сингулярных принадлежит дельта-функция

$$(\delta(s), \psi(s)) = \psi(0),$$

а также ее (даже комплексные) сдвиги

$$(\delta(s - s_0), \psi(s)) = \psi(s_0).$$

Совокупность всех обобщенных функций на пространстве Z обозначается через Z' . С обобщенными функциями на пространстве Z можно производить операции, аналогичные операциям, введенным нами для обобщенных функций на пространстве K . Ясно, что определения линейных операций — сложения и умножения на число, а также предельного перехода не содержат ничего нового.

В частности, предельный переход в Z' определяется условием: $g_\nu \rightarrow g$ в Z' , если для любой основной функции $\psi \in Z$

$$(g_\nu, \psi) \rightarrow (g, \psi).$$

Умножение на функцию $G(s)$, формально определяемое равенством

$$(G(s)g, \psi) = (g, G^*(s)\psi), \quad (2)$$

*) См. Анализ III, гл. VII, § 6.

**) И здесь можно, конечно, сопоставить функции $g(\sigma)$ функционал по любой из четырех формул, аналогичных формулам (1) — (4) § 3, п. 4.

где $G^*(s)$ означает $\overline{G(s)}$, допустимо для целой функции, удовлетворяющей неравенству (2) п. 2.

Умножение на такую функцию $G(s)$ дистрибутивно со сложением, а также и непрерывно в том смысле, что из $g_\nu(s) \rightarrow g(s)$ в Z' следует $G(s)g_\nu(s) \rightarrow G(s)g(s)$ в Z' . Действительно,

$$(Gg_\nu, \psi) = (g_\nu, G^*\psi) \rightarrow (g, G^*\psi) = (Gg, \psi). \quad (3)$$

Производная функционала $g \in Z'$ определяется формулой

$$(g', \psi(s)) = -(g, \psi'(s)).$$

Как и в пространстве K' , дифференцирование непрерывно относительно сходимости Z' : если $g_\nu \rightarrow g$ в Z' , то для любой $\psi \in Z$

$$(g'_\nu, \psi) = -(g_\nu, \psi') \rightarrow -(g, \psi') = (g', \psi)$$

и, следовательно, $g'_\nu \rightarrow g'$ в Z' .

Так же как и в пространстве K' , обобщенные функции $g \in Z'$ допускают неограниченное дифференцирование.

Но, в отличие от функционалов $f \in K'$, обобщенные функции $g \in Z'$ не только бесконечно дифференцируемы, но и *аналитичны*; это означает, что для каждой $g \in Z'$

$$\sum_{q=0}^{\infty} g^{(q)}(s) \frac{h^q}{q!} = g(s+h), \quad (4)$$

где ряд слева сходится в смысле сходимости в пространстве Z' , а $g(s+h)$ — сдвиг обобщенной функции $g(s)$ на число h , определенный формулой

$$(g(s+h), \psi(s)) = (g(s), \psi(s-h)).$$

Действительно, для любой $\psi(s) \in Z$

$$\left(g^{(q)}(s) \frac{h^q}{q!}, \psi(s) \right) = \left(g(s), \frac{(-h)^q}{q!} \psi^{(q)}(s) \right),$$

а ряд $\sum \frac{(-h)^q}{q!} \psi^{(q)}(s)$ сходится в смысле сходимости в Z , как мы уже отмечали, к функции $\psi(s-h)$, таким образом,

$$\left(\sum g^{(q)}(s) \frac{h^q}{q!}, \psi(s) \right) = (g(s), \psi(s-h)) = (g(s+h), \psi(s)),$$

что и требовалось.

Отметим, в частности, разложение

$$\delta(s+h) = \sum_{q=0}^{\infty} \delta^{(q)}(s) \frac{h^q}{q!}, \quad (5)$$

справедливое при любом (комплексном) h .

4. Поскольку между пространствами K и Z существует взаимно однозначное соответствие с сохранением линейных операций и сходимости, аналогичное соответствие можно установить и между линейными непрерывными функционалами на этих пространствах. Мы установим это соответствие так, чтобы на функционалах, отвечающих абсолютно интегрируемым функциям, оно переходило бы в соответствие между функцией и ее классическим преобразованием Фурье.

Пусть $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция и $g(\sigma)$ — ее преобразование Фурье. Тогда для любой основной функции $\varphi(x)$ и ее преобразования Фурье $\psi(\sigma)$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \varphi(x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{ix\sigma} dx \right\} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\sigma)} \psi(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

которое называют обычно *равенством Парсеваля*. Равенство Парсеваля показывает, что $g(\sigma)$ как обобщенная функция действует на основную функцию ψ по формуле

$$(g, \psi) = 2\pi (f, \varphi). \quad (1)$$

В этой форме оно может служить определением обобщенной функции g на пространстве Z при любой заданной обобщенной функции f на пространстве K . Будем называть функционал g , *определенный* равенством (1), *преобразованием Фурье функционала f* и обозначать его символом $F[f]$.

Подчеркнем, что функционал $F[f]$ действует уже не в пространстве K , а в двойственном пространстве Z .

Оператор Фурье $F[f]$, переводящий пространство K' в пространство Z' , является линейным непрерывным оператором. Действительно,

для любых комплексных a_1 и a_2 и любых $f_1, f_2 \in K'$

$$\begin{aligned} (F[a_1 f_1 + a_2 f_2], F[\varphi]) &= 2\pi(a_1 f_1 + a_2 f_2, \varphi) = \\ &= 2\pi a_1 (f_1, \varphi) + 2\pi a_2 (f_2, \varphi) = a_1 (F[f_1], F[\varphi]) + a_2 (F[f_2], F[\varphi]) = \\ &= (a_1 F[f_1] + a_2 F[f_2], F[\varphi]); \end{aligned}$$

далее, если $f_\nu \rightarrow f$ в K' , то

$$(F[f_\nu], F[\varphi]) = 2\pi(f_\nu, \varphi) \rightarrow 2\pi(f, \varphi) = (F[f], F[\varphi]).$$

Для преобразования Фурье обобщенных функций сохраняются формулы дифференцирования обычных преобразований Фурье

$$P\left(\frac{d}{ds}\right) F[f] = F[P(ix)f], \quad (2)$$

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)f\right] = P(-ts)F[f], \quad (3)$$

так что, в частности, умножению на ix в пространстве K' соответствует дифференцирование в пространстве Z' и дифференцированию в пространстве K' отвечает умножение на $-ts$ в пространстве Z' .

Для доказательства достаточно рассмотреть случай $P\left(\frac{d}{dx}\right) \equiv \frac{d}{dx}$.

Мы имеем в этом случае

$$\begin{aligned} (F[ixf], F[\varphi]) &= 2\pi(ixf, \varphi) = 2\pi(f, -ix\varphi) = \\ &= (F[f], F[-ix\varphi]) = \left(F[f], -\frac{d}{ds}F[\varphi]\right) = \left(\frac{d}{ds}F[f], F[\varphi]\right), \end{aligned}$$

что дает формулу (2); аналогично устанавливается (3).

Обратный оператор F^{-1} определен на пространстве Z' и переводит функционал g в функционал f по той же формуле (1) (читаемой справа налево), так что

$$\left. \begin{aligned} F^{-1}[F[f]] &= f, \quad F[F^{-1}[g]] = g, \\ (F^{-1}[g], \varphi) &= \frac{1}{2\pi}(g, F[\varphi]). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Отметим два простых и часто используемых правила.

1. Преобразование Фурье от $f(-x)$. Пусть имеется функционал $f(x) \in K'$; функционал $f(-x)$ определяется равенством

$$(f(-x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(-x)). \quad (5)$$

Пусть $F[f(x)] = g(\sigma)$, $F[f(-x)] = g_1(\sigma)$; мы имеем, согласно п. 2,

$$\begin{aligned} (g_1(\sigma), \psi(\sigma)) &= 2\pi(f(-x), \varphi(x)) = 2\pi(f(x), \varphi(-x)) = \\ &= (g(\sigma), \psi(-\sigma)) = (g(-\sigma), \psi(\sigma)). \end{aligned}$$

Отсюда $g_1(\sigma) \equiv g(-\sigma)$; иными словами, отражению относительно начала координат на оси x отвечает отражение относительно начала координат на оси σ .

Как следствие, получаем: *четная* обобщенная функция ($f(-x) \equiv f(x)$) имеет *четное* преобразование Фурье, *нечетная* обобщенная функция ($f(-x) \equiv -f(x)$) имеет *нечетное* преобразование Фурье.

2. Двойное преобразование Фурье. Если $\varphi(x)$ — основная функция, то, как мы знаем,

$$F^{-1}F[\varphi] = \varphi(x).$$

Но можно к функции $\psi = F(\varphi)$ применить еще раз прямое преобразование Фурье; мы получим

$$F(\psi) = FF(\varphi) = 2\pi\varphi(-x),$$

поскольку операция F^{-1} отличается от операции F коэффициентом $\frac{1}{2\pi}$ и знаком при независимом переменном.

Определим теперь двойное преобразование Фурье от функционала $f \in K'$ (и прямое преобразование Фурье от функционала $Ff = g \in Z'$) по формуле (аналогичной формуле (1))

$$(FFf, FF\varphi) \equiv (F(g), F(\psi)) = 2\pi(g, \psi).$$

Установим связь между функционалами f и FFf . Подставляя в полученное выражение $g = F[f]$, $\psi = F[\varphi]$, получаем

$$(FF[f], FF[\varphi]) = 2\pi(F[f], F[\varphi]) = (2\pi)^2(f, \varphi(x)).$$

Но слева вместо $FF[\varphi]$ можно подставить $2\pi\varphi(-x)$. Сокращая на 2π и заменяя x на $-x$, мы получаем

$$(FF[f], \varphi(x)) = (2\pi f, \varphi(-x)),$$

т. е.

$$FF[f] = 2\pi f(-x).$$

Аналогично

$$F^{-1}F^{-1}[g(\sigma)] = \frac{1}{2\pi}g(-\sigma).$$

Например, пусть известно, что прямое преобразование Фурье функции $f(x)$ есть функция $g(\sigma)$; $g(\sigma) = F[f(x)]$. Найдем обратное преобразование Фурье от $f(x)$. Мы имеем

$$F^{-1}[f(x)] = F^{-1}[F^{-1}[g]] = \frac{1}{2\pi}g(-\sigma). \quad (6)$$

Аналогично если известно, что $g(\sigma) = F^{-1}[f(x)]$, то

$$F[f(x)] = FF[g(\sigma)] = 2\pi g(-\sigma). \quad (7)$$

5. Примеры. 1. Найдем $F[\delta]$. Согласно определению,

$$(F[\delta], F[\varphi]) = 2\pi(\delta, \varphi) = 2\pi\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) d\sigma = (1, \psi).$$

откуда

$$F[\delta] = 1, \quad F^{-1}[1] = \delta. \quad (1)$$

2. Аналогично найдем $F[1]$:

$$\begin{aligned} (F[1], F[\varphi]) &= 2\pi(1, \varphi) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ix0} dx = 2\pi\varphi(0) = 2\pi(\delta, \psi), \end{aligned}$$

откуда

$$F[1] = 2\pi\delta, \quad F^{-1}[\delta] = \frac{1}{2\pi}. \quad (2)$$

Этот же результат получается и непосредственно из (1) применением формулы двойного преобразования Фурье (5).

3. Преобразование Фурье от многочлена. Используя формулы (2) — (3) п. 1, находим

$$F[P(x)] = F[P(x) \cdot 1] = 2\pi P\left(-i \frac{d}{ds}\right) \delta(s). \quad (3)$$

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right) \delta(x)\right] = P(-is) F[\delta] = P(-is) \cdot 1 = P(-is). \quad (4)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} F[\delta^{(2m)}(x)] &= (-1)^m s^{2m}, \\ F[\delta^{(2m+1)}(x)] &= (-1)^m i s^{2m+1}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

4. Преобразование Фурье от $\frac{1}{x^m}$. Обозначим $F\left[\frac{1}{x}\right] = g(\sigma)$; так как $\frac{1}{x}$ — нечетная обобщенная функция, то и $g(\sigma)$ — нечетная обобщенная функция. Из равенства

$$x \cdot \frac{1}{x} \equiv 1$$

следует, согласно (2) и (3),

$$F\left[x \cdot \frac{1}{x}\right] = -i \frac{d}{d\sigma} F\left[\frac{1}{x}\right] = F[1] = 2\pi\delta(\sigma).$$

Отсюда

$$g(\sigma) = F\left[\frac{1}{x}\right] = 2\pi i [\theta(\sigma) + C].$$

Так как $g(\sigma)$ — нечетная функция, то $C = -\frac{1}{2}$ и, следовательно,

$$g(\sigma) = \pi i \operatorname{sgn} \sigma.$$

Далее, мы имеем

$$\frac{1}{x^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \frac{1}{x}.$$

Отсюда

$$F\left[\frac{1}{x^m}\right] = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} (-i\sigma)^{m-1} F\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{i^{m-1}\pi}{(m-1)!} \sigma^{m-1} \operatorname{sgn} \sigma.$$

5. Преобразование Фурье от показательной функции e^{bx} . Воспользуемся тем, что ряд

$$e^{bx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k x^k}{k!}$$

сходится в смысле сходимости в пространстве K' ; это позволит вычислить $F[e^{bx}]$ путем почленного применения оператора F к этому ряду. Мы получим (см. формулу (5) п. 3)

$$F[e^{bx}] = \sum_{k=0}^{\infty} F\left[\frac{b^k x^k}{k!}\right] = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} \left(-i \frac{d}{ds}\right) \delta(s) = 2\pi\delta(s - ib). \quad (6)$$

Формула (6) позволяет легко получить преобразования Фурье часто встречающихся функций $\sin bx$, $\cos bx$, $\operatorname{sh} bx$, $\operatorname{ch} bx$:

$$F[\sin bx] = F\left[\frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}\right] = -i\pi [\delta(s + b) - \delta(s - b)],$$

$$F[\cos bx] = F\left[\frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}\right] = \pi [\delta(s + b) + \delta(s - b)],$$

$$F[\operatorname{sh} bx] = F\left[\frac{e^{bx} - e^{-bx}}{2}\right] = \pi [\delta(s - ib) - \delta(s + ib)],$$

$$F[\operatorname{ch} bx] = F\left[\frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2}\right] = \pi [\delta(s - ib) + \delta(s + ib)].$$

6. Преобразование Фурье от сдвинутой дельта-функции. Найдем $F[\delta(x-h)]$. Согласно определению,

$$\begin{aligned} (F[\delta(x-h)], F[\varphi]) &= 2\pi(\delta(x-h), \varphi(x)) = 2\pi\varphi(h) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{-i\sigma h} d\sigma = (e^{i\sigma h}, \psi), \end{aligned}$$

откуда

$$F[\delta(x-h)] = e^{i\sigma h}.$$

Далее, легко получаются формулы

$$\begin{aligned} F\left[\frac{\delta(x-h) + \delta(x+h)}{2}\right] &= \frac{e^{i\sigma h} + e^{-i\sigma h}}{2} = \cos h\sigma, \\ F\left[\frac{\delta(x-h) - \delta(x+h)}{2i}\right] &= \frac{e^{i\sigma h} - e^{-i\sigma h}}{2i} = \sin h\sigma. \end{aligned}$$

Задачи. 1. Последовательности функций $\varphi_\nu(x) \in K$, стремящейся к 0 в K , отвечает последовательность функций $\psi_\nu(\sigma) = F[\varphi_\nu(x)]$, обладающая следующими свойствами:

$$|s^q \psi_\nu(s)| \leq C_q e^{a|t|} \quad (a \text{ и } C_q \text{ не зависят от } \nu).$$

$\psi_\nu(\sigma) \rightarrow 0$ равномерно на каждом интервале оси σ и обратно.

Указание. Прямое утверждение следует из определения преобразования Фурье. Для доказательства обратного проверить, что все функции $\varphi_\nu(x)$ обращаются в нуль вне интервала $|x| < a$ и производные их ограничены фиксированными постоянными; далее применить принцип компактности.

2. Найти преобразование Фурье обобщенной функции x_+^λ (§ 11).

Указание. При $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$

$$\int_0^{\infty} x^\lambda e^{i\sigma x} dx = \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_0^{\infty} x^\lambda e^{i(\sigma + i\tau)x} dx;$$

в последнем интеграле произвести замену $i\sigma x = \xi$, воспользоваться формулой Коши и определением Γ -функции. Далее использовать аналитическое продолжение по λ .

$$\begin{aligned} \text{Отв. } F[x_+^\lambda] &= i e^{i\lambda \frac{\pi}{2}} \Gamma(\lambda + 1) \lim_{\tau \rightarrow +0} (\sigma + i\tau)^{-\lambda-1} = \\ &= i \Gamma(\lambda + 1) \left[e^{i\lambda \frac{\pi}{2}} \sigma_+^{-\lambda-1} + e^{-i\lambda \frac{\pi}{2}} \sigma_-^{-\lambda-1} \right]. \end{aligned}$$

Примечание. Функционал $\lim_{\tau \rightarrow +0} (\sigma + i\tau)^\lambda$ обозначают еще через $(\sigma + i0)^\lambda$.

3. Пусть $f_\lambda(x) = 2^{-\lambda/2} \frac{|x|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$. Показать, что

$$F[f_\lambda(x)] = \sqrt{2\pi} f_{-\lambda-1}(\sigma).$$

4. Найти преобразование Фурье функции $\text{In } x_+$.

У к а з а н и е. Результат задачи 2 продифференцировать по λ и положить $\lambda = 0$.

Отв. $F[\text{In } x_+] = i \left\{ \left(F'(1) + i \frac{\pi}{2} \right) (\sigma + i0)^{-1} - (\sigma + i0)^{-1} \text{In}(\sigma + i0) \right\}$,

где $\text{In}(\sigma + i0) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \text{In}(\sigma + i\tau)$.

§ 15. Преобразование Фурье обобщенных функций (продолжение)

1. Наши построения могут быть почти без изменений перенесены на случай n независимых переменных. Преобразование Фурье основной функции $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} \psi(\sigma) &= \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_n) e^{i(x_1\sigma_1 + \dots + x_n\sigma_n)} dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

или, короче,

$$\psi(\sigma) = \int_{R_n} \varphi(x) e^{i(x, \sigma)} dx, \quad (1)$$

где через (x, σ) обозначена величина $x_1\sigma_1 + \dots + x_n\sigma_n$. Вследствие финитности функции $\varphi(x)$ функция ψ может быть распространена и на комплексные значения аргумента $s = (s_1, \dots, s_n) = (\sigma_1 + i\tau_1, \dots, \sigma_n + i\tau_n)$;

$$\psi(s) = \int_{R_n} \varphi(x) e^{i(x, s)} dx. \quad (2)$$

Полученная функция $\psi(s)$, определенная теперь в n -мерном комплексном пространстве C_n , непрерывна и аналитична по каждому из аргументов s_1, \dots, s_n . Если функция $\varphi(x)$ обращается в нуль при $|x_k| > a_k$ ($k = 1, \dots, n$), то ее преобразование Фурье $\psi(s)$ допускает оценку

$$\left| s_1^{q_1} \dots s_n^{q_n} \psi(\sigma_1 + i\tau_1, \dots, \sigma_n + i\tau_n) \right| \leq C_q e^{a_1|\tau_1| + \dots + a_n|\tau_n|}. \quad (3)$$

Обратно, всякая целая функция $\psi(s_1, \dots, s_n)$, удовлетворяющая неравенству (3), является преобразованием Фурье основной функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, обращающейся в нуль при $|x_k| > a_k$ ($k = 1, \dots, n$), именно,

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x_1\sigma_1 + \dots + x_n\sigma_n)} d\sigma_1 \dots d\sigma_n.$$

Эта функция бесконечно дифференцируема по всем аргументам. Для доказательства ее финитности, например, по x_1 следует по переменному σ_1 выйти в комплексную плоскость и далее провести рассуждение с теоремой Коши, как и в случае одного переменного.

Имеют место формулы, аналогичные формулам (4) п. 1 и (3) п. 2:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_n}\right) F[\varphi] = F[P(ix_1, \dots, ix_n)\varphi(x)], \quad (4)$$

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi(x)\right] = P(-is_1, \dots, -is_n)F[\varphi], \quad (5)$$

где $P(\cdot)$ — любой многочлен с постоянными коэффициентами.

Пространство всех целых функций $\psi(s)$, удовлетворяющих неравенствам вида (3), в котором естественным образом определены линейные операции — сложение и умножение на число, по-прежнему, будем обозначать через Z (или Z_n). Преобразование Фурье устанавливает между пространствами K_n и Z_n взаимно однозначное соответствие с сохранением линейных операций. Предельный переход в пространстве Z_n определяется следующим образом: последовательность $\psi_\nu(s)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) называется *сходящейся к нулю*, если последовательность соответствующих основных функций $\varphi_\nu(x)$ стремится к нулю в пространстве K_n . Внутренним образом эта сходимост описывается так: выполняются неравенства

$$|s^q \psi_\nu(s)| \leq C_q e^{a_1|\tau_1| + \dots + a_n|\tau_n|}$$

с постоянными C_q и a_j , не зависящими от ν , и функции $\psi_\nu(s)$ стремятся равномерно к нулю на каждом ограниченном множестве вещественного пространства R_n .

Преобразование Фурье функционала f , действующего на пространстве K_n , определяется как функционал g на пространстве Z_n , действующий по формуле

$$(g, \psi) = (2\pi)^n (f, \varphi), \quad (6)$$

где $\psi = F[\varphi]$ есть преобразование Фурье функции $\varphi(x)$. Функционал g линеен и непрерывен, он обозначается через $F[f]$. Результаты § 14 переносятся на этот случай без особых изменений. Формулы (2) — (3) п. 1 приобретают следующий вид: если P — многочлен от n переменных с постоянными коэффициентами, то

$$P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_n}\right) F[f] = F[P(ix_1, \dots, ix_n)f], \quad (7)$$

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)f\right] = P(-is_1, \dots, -is_n)F[f]. \quad (8)$$

Обратный оператор F^{-1} действует в пространстве Z'_n и переводит его в пространство K'_n по формуле

$$(F^{-1}g, \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} (g, F[\varphi]). \quad (9)$$

Если $f(x)$ — функция, обладающая преобразованием Фурье в классическом смысле, то функционал $F[f]$ есть регулярный функционал, соответствующий преобразованию Фурье функции $f(x)$.

Из сингулярных функционалов простейшим является дельта-функция: для нее имеют место формулы

$$F[\delta(x)] = 1, \quad F[1] = (2\pi)^n \delta(s), \quad (10)$$

аналогичные формулам (1) — (2) п. 5 § 14.

Формула преобразования Фурье от многочлена получается комбинированием формул (2) и (5)

$$\begin{aligned} F[P(x_1, \dots, x_n)] &= F[P(x_1, \dots, x_n) \cdot 1] = \\ &= (2\pi)^n P\left(-i \frac{\partial}{\partial s_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial s_n}\right) \delta(s). \end{aligned} \quad (11)$$

2. Отметим формулу преобразования Фурье поворота обобщенной функции. Пусть $Ux = y$ есть некоторый поворот в пространстве R_n (ортогональное преобразование с определителем 1). Каждая основная функция $\varphi(x)$ в результате поворота переходит в основную функцию $\varphi(Ux)$. Преобразование Фурье $\psi_U(\sigma)$ поворота основной функции вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \psi_U(\sigma) &= \int_{R_n} \varphi(Ux) e^{i(x, \sigma)} dx = \int_{R_n} \varphi(y) e^{i(U^{-1}y, \sigma)} dy = \\ &= \int_{R_n} \varphi(y) e^{i(y, U\sigma)} dy = \psi(U\sigma) \end{aligned} \quad (1)$$

и оказывается равным соответствующему повороту преобразования Фурье исходной функции.

Пусть $f(x)$ — обычная функция и $f(Ux)$ — ее поворот; функционал, отвечающий функции $f(Ux)$, может быть записан в форме

$$\begin{aligned} (f(Ux), \varphi(x)) &= \int_{R_n} \overline{f(Ux)} \varphi(x) dx = \\ &= \int_{R_n} \overline{f(y)} \varphi(U^{-1}y) dy = (f(x), \varphi(U^{-1}x)). \end{aligned}$$

Это дает основание *определить* поворот любой обобщенной функции f по формуле

$$(f(Ux), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(U^{-1}x)). \quad (2)$$

Найдем формулу преобразования Фурье поворота обобщенной функции $f(Ux)$. Пусть $F[\varphi(x)] = \psi(\sigma)$, $F[f(x)] = g(\sigma)$; мы имеем

$$\begin{aligned} (F[f(Ux)], \psi(\sigma)) &= (2\pi)^n (f(Ux), \varphi(x)) = (2\pi)^n (f(x), \varphi(U^{-1}x)) = \\ &= (F[f(x)], F[\varphi(U^{-1}x)]) = (g(\sigma), \psi(U^{-1}\sigma)) = (g(U\sigma), \psi(\sigma)). \end{aligned}$$

Мы получаем формулу

$$F[f(Ux)] = g(U\sigma), \quad (3)$$

которая показывает, что преобразование Фурье от поворота обобщенной функции есть поворот преобразования Фурье от самой обобщенной функции. Как следствие, получаем: *преобразование Фурье сферически симметричной обобщенной функции $(f(Ux) \equiv f(x))$ при любом U есть сферически симметричная обобщенная функция.*

3. Преобразование Фурье финитного функционала. Пусть сначала финитный функционал f отвечает обычной функции $f(x)$, сосредоточенной в брусе $B = \{x : |x_j| \leq a_j\}$. Тогда обычное преобразование Фурье функции $f(x)$

$$g(\sigma) = \int_B f(x) e^{i(\sigma, x)} dx \quad (1)$$

может быть аналитически продолжено в комплексное пространство $s = \sigma + i\tau = (\sigma_1 + i\tau_1, \dots, \sigma_n + i\tau_n)$ по формуле

$$g(s) = \int_B f(x) e^{i(s, x)} dx.$$

Функция $g(s)$ допускает оценку

$$|g(s)| \leq \int_B |f(x)| e^{-(\tau, x)} dx \leq e^{\sum a_j |\tau_j|} \int_B |f(x)| dx = C e^{\sum a_j |\tau_j|}. \quad (2)$$

Таким образом, $g(s)$ есть целая функция не выше чем первого порядка роста. Кроме того, при вещественных $s = \sigma$ функция $g(\sigma)$ ограничена (и даже стремится к 0 при $|\sigma| \rightarrow \infty$), в силу общих свойств преобразования Фурье суммируемой функции.

Если f — произвольный финитный функционал, то мы можем представить его в форме

$$f = \sum_{|k| \leq m} D^k f_k(x),$$

где $f_k(x)$ — обычные функции, сосредоточенные на некотором брусе $B_\varepsilon = \{x : |x_1| \leq a_1 + \varepsilon, \dots, |x_n| \leq a_n + \varepsilon\}$.

По доказанному,

$$g = F[f] = \sum_{|k| \leq m} (-is)^k g_k(s),$$

где $g_k(s)$ есть преобразование Фурье функции $f_k(x)$. Таким образом, $g(s) = F[f]$ есть также целая функция первого порядка роста, но уже, вообще говоря, со степенным ростом в вещественной области:

$$\left. \begin{aligned} |g(s)| &\leq C(1+|s|)^m e^{\Sigma(a_j+\varepsilon)|\tau_j|}, \\ |g(\sigma)| &\leq C(1+|\sigma|)^m. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Степенной порядок роста функции $g(\sigma)$ определяется, очевидно, порядком сингулярности функционала f .

Оценка (3) в некоторых случаях, при специальных предположениях относительно расположения носителя функционала f , может быть уточнена. Например, предположим, что носитель функционала f и функций $f_k(x)$ лежит в пределах октанта $\{x : x_1 \geq a_1 > 0, \dots, x_n \geq a_n > 0\}$. Тогда при $\tau_1 > 0, \dots, \tau_n > 0$

мы имеем

$$e^{-(\tau, x)} \leq e^{-(\tau_1 a_1 + \dots + \tau_n a_n)}$$

и, следовательно, при указанных τ

$$|g(s)| \leq C(1+|s|)^m e^{-\Sigma \tau_j a_j}, \quad (4)$$

т. е. при $\tau_j > 0$, функция $g(s)$ в действительности экспоненциально убывает.

Равенство (1) можно записать в форме

$$g(s) = \overline{(f(x), e^{i(s, x)})} \quad (5)$$

(разумеется, поскольку функция $e^{i(s, x)}$ не финитна, правую часть равенства (5) нужно понимать в этом случае так, как было указано в п. I § 8).

Оказывается, что равенство (5) имеет место не только для обычной финитной функции $f(x)$, но и для произвольного финитного функционала f .

Действительно, поскольку финитный функционал есть сумма производных от финитных функций, достаточно показать, что равенство (5), если оно справедливо для некоторого финитного функционала f , остается справедливым и для любой его производной.

$\frac{\partial f}{\partial f_j}$. Последнее следует из равенств

$$F \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \right] = -ts_j F[f] = -ts_j (\bar{f}, e^{t(s, x)}) = (\bar{f}, -ts_j e^{t(s, x)}) = \\ = (\bar{f}, -\frac{\partial}{\partial x_j} e^{t(s, x)}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, e^{t(s, x)} \right),$$

чем утверждение и доказано.

4. В многомерных задачах, особенно связанных со сферической симметрией, часто встречаются бesselовы функции. Приведем необходимые нам определения и формулы.

Бesselова функция $J_p(z)$ может быть определена равенством*)

$$J_p(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^p \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \sin^{2p} \theta d\theta. \quad (1)$$

При p , равном половине нечетного числа, этот интеграл может быть выражен через элементарные функции. В частности,

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad (2)$$

.....

$$J_{m+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^m z^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{z}. \quad (3)$$

Последняя формула допускает следующее обращение:

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m \left[z^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(z) \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z. \quad (4)$$

Для иллюстрации рассмотрим преобразование Фурье от обычной интегрируемой сферически симметричной функции $f(r)$:

$$F[f(r)] = \int_{R_n} f(r) e^{i(x, \sigma)} dx.$$

Преобразуем интеграл к сферическим координатам, направляя полярную ось по вектору σ . Если $|\sigma| = \rho$, $|x| = r$ и θ — угол между векторами x и σ , мы получаем

$$F[f(r)] = \Omega_{n-1} \int_0^\infty \left[\int_0^\pi e^{ir\rho \cos \theta} \sin^{n-2} \theta d\theta \right] f(r) r^{n-1} dr,$$

*) См., например, Э. Т. Уиттекер и Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. 2, гл. 17, Физматгиз, 1963.

где $\Omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ есть поверхность единичной сферы в $n-1$ -мерном пространстве. Поэтому, в силу (1),

$$\begin{aligned} F[f(r)] &= \Omega_{n-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \int_0^{\infty} \left(\frac{r\rho}{2}\right)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(r\rho) r^{n-1} f(r) dr = \\ &= 2\pi^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{1-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} r^{\frac{n}{2}} f(r) J_{\frac{n}{2}-1}(r\rho) dr. \end{aligned} \quad (5)$$

Для многих конкретных функций $f(r)$ интегралы вида (5) вычислены. Например, при $f(r) = e^{-tr}$ известна формула*)

$$\int_0^{\infty} e^{-tr} r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(r\rho) dr = \frac{2^{\frac{n}{2}} t\rho^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} (t^2 + \rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Таким образом, преобразование Фурье от функции e^{-tr} имеет вид

$$\begin{aligned} F[e^{-tr}] &= 2\pi^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{1-\frac{n}{2}} \frac{2^{\frac{n}{2}} t\rho^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} (t^2 + \rho^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \\ &= 2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{t}{(t^2 + \rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Б. Найдем преобразование Фурье от финитного функционала $\delta(r-a)$, действующего по формуле

$$(\delta(r-a), \varphi(x)) = \int_{|x|=a} \varphi(x) dx,$$

т. е. приводящего в соответствие основной функции $\varphi(x)$ ее интеграл по сфере радиуса a с центром в начале координат.

По доказанному в п. 3

$$F[\delta(r-a)] = (\delta(r-a), e^{i(x,\sigma)}) = \int_{|x|=a} e^{i(x,\sigma)} dx.$$

*) См., например, С. Б о х н е р, Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, 1962, стр. 266.

Переходя к сферическим координатам ($r = |x| = a$, $\rho = |\sigma|$, θ — угол между векторами x и σ), находим

$$\begin{aligned} F[\delta(r-a)] &= \int_{\Omega_n} e^{i a \rho \cos \theta} a^{n-1} \sin^{n-2} \theta d\theta d\omega_{n-1} = \\ &= a^{n-1} \Omega_{n-1} \int_0^\pi e^{i a \rho \cos \theta} \sin^{n-2} \theta d\theta, \end{aligned}$$

где $d\omega_{n-1}$ — элемент поверхности сферы в $n-1$ -мерном подпространстве, ортогональном к вектору ρ .

Полученный интеграл выражается через бesselеву функцию

$$\begin{aligned} F[\delta(r-a)] &= a^{n-1} \Omega_{n-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{a\rho}{2}\right)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n-1}{2}}(a\rho) = \\ &= \left(\frac{2\pi a}{\rho}\right)^{\frac{n}{2}} \rho J_{\frac{n-1}{2}}(a\rho). \quad (7) \end{aligned}$$

При n нечетном, $n = 2m + 3$, $m \geq 0$, бesselева функция выражается через элементарные (3), и мы получаем

$$\begin{aligned} F[\delta(r-a)] &= \left(\frac{2\pi a}{\rho}\right)^{\frac{n}{2}} \rho \cdot (-1)^m (a\rho)^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{z} \Big|_{z=a\rho} = \\ &= (-1)^m (2\pi)^{\frac{n}{2}} a^{n-1} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{z} \Big|_{z=a\rho}. \end{aligned}$$

В частности, при $n = 3$, $m = 0$

$$F[\delta(r-a)] = 4\pi a \frac{\sin a\rho}{\rho}. \quad (8)$$

6. Найдем преобразование Фурье от свертки $f = f_0 * f_1$, где, для определенности, f_0 есть финитный функционал. Пусть g , g_0 , g_1 суть соответствующие преобразования Фурье. В частности, $g_0 = g_0(s)$ есть целая функция первого (экспоненциального) порядка роста со степенным ростом при вещественных $s = \sigma$. Вначале рассмотрим случай, когда оба функционала f_0 и f_1 финитны и являются обычными функциями. Тогда и свертка

$$f_0 * f_1 = \int_{R_n} f_0(\xi) f_1(x - \xi) d\xi$$

есть обычная финитная функция, и ее преобразование Фурье вычисляется по классической формуле

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_{R_n} e^{i(x, s)} \left[\int_{R_n} f_0(\xi) f_1(x - \xi) d\xi \right] dx = \\ &= \int_{R_n} \int_{R_n} e^{i(x, s)} f_0(\xi) f_1(x - \xi) d\xi dx = \\ &= \int_{R_n} e^{i(\xi, s)} f_0(\xi) d\xi \cdot \int_{R_n} e^{i(x - \xi, s)} f_1(x - \xi) dx = g_0(s) \cdot g_1(s). \end{aligned}$$

Таким образом, свертка функций $f_0(x)$ и $f_1(x)$ после преобразования Фурье переходит в произведение образов Фурье этих функций.

Пусть теперь f_0 и f_1 — произвольные финитные функционалы. Тогда

$$\begin{aligned} f_0 &= \sum_{|j| \leq m} D^j f_{0j}(x), \quad f_1 = \sum_{|k| \leq p} D^k f_{1k}(x), \quad g_0(s) = \sum_{|j| \leq m} (-is)^j g_{0j}(s), \\ g_1(s) &= \sum_{|k| \leq p} (-is)^k g_{1k}(s), \end{aligned}$$

где $f_{0j}(x)$ и $f_{1k}(x)$ — обычные финитные функции, $g_{0j}(s)$ и $g_{1k}(s)$ — соответствующие преобразования Фурье. Поэтому

$$\begin{aligned} F[f_0 * f_1] &= F \left[\sum_{|j| \leq m} \sum_{|k| \leq p} D^{j+k} (f_{0j}(x) * f_{1k}(x)) \right] = \\ &= \sum_{|j| \leq m} \sum_{|k| \leq p} (-is)^{j+k} g_{0j}(s) g_{1k}(s) = g_0(s) g_1(s). \end{aligned}$$

Наконец, пусть f_0 — финитный, а f_1 — произвольный функционал. Мы знаем, что функционал f_1 может быть представлен как предел (в K') финитных функционалов:

$$f_1 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu.$$

По теореме о непрерывности свертки

$$f_0 * f_1 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (f_0 * f_\nu).$$

Пусть $g_\nu(s)$ — преобразование Фурье функционала f_ν и g_1 — преобразование Фурье функционала f_1 . Тогда, в силу непрерывности оператора Фурье,

$$g_1 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu(s) \quad (\text{в } Z')$$

и далее

$$F[f_0 * f_1] = \lim_{\nu \rightarrow \infty} F[f_0 * f_\nu] = \lim_{\nu \rightarrow \infty} g_0(s) \cdot g_\nu(s) = \\ = g_0(s) \lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu(s) = g_0(s) g_1(s),$$

что и требовалось.

7. Определение преобразования Фурье обобщенных функций отвечало тому случаю, когда обычной функции $f(x)$ сопоставляется функционал над K по формуле

$$(f, \varphi) = \int \overline{f(x)} \varphi(x) dx$$

и аналогично, обычной функции $g(\sigma)$ сопоставляется функционал над Z по формуле

$$(g, \psi) = \int \overline{g(\sigma)} \psi(\sigma) d\sigma.$$

Но легко можно написать определения преобразований Фурье и в остальных случаях сопоставления $f(x) \rightarrow f$ (§ 3, п. 4). Имея в виду имеющееся определение и равенство Парсеваля, мы можем написать следующие определения:

$$(\bar{g}, \psi)_1 = (2\pi)^n (\bar{f}, \varphi)_1,$$

$$(g, \psi)_2 = (2\pi)^n (f, \varphi)_2, \quad (\text{принятое нами определение}),$$

$$(\bar{g}, \bar{\psi})_3 = (2\pi)^n (\bar{f}, \bar{\varphi})_3,$$

$$(g, \bar{\psi})_4 = (2\pi)^n (f, \bar{\varphi})_4.$$

Задачи. 1. Функционалы вида $f = \sum_{|k| \leq m} D^k f_k(x)$, где $f_k(x)$ — обыч-

ная функция не более чем степенного роста при $|x| \rightarrow \infty$ (пространство S'_n , см. § 10, задачу 5), определены и в пространстве K_n и в пространстве Z_n . Показать, что пространство S'_n при преобразовании Фурье переходит в себя самого.

Указание. $f_k(x) = (1+r^2)^p f_{0k}(x)$, где $f_{0k}(x) \in L_2(R_n)$.

2. Показать, что преобразование Фурье обобщенной функции, однородной степени p (§ 6, задача 4) есть однородная обобщенная функция степени $-n-p$.

3. Показать, что преобразование Фурье функции r^λ ($\lambda \neq -n, -n-2, \dots$) равно $C_\lambda \rho^{-\lambda-n}$, и найти C_λ .

Указание. r^λ есть сферически симметричная однородная функция степени λ . Использовать задачи 1, 2 и задачу 1 к § 11. Для вычисления C_λ применить функционал r^λ к функции $e^{-r^2} \in S$.

$$\text{Отв. } \frac{F[r^\lambda]}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} = 2^{\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\rho^{-\lambda-n}}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}.$$

4. Показать, что обобщенная однородная сферически симметричная функция $f \in K'_n$ степени $-n - 2k$ имеет вид $c \Delta^k \delta(x)$.

Указание. Преобразование Фурье функции f есть обобщенная однородная сферически симметричная функция степени $2k$. Использовать задачу 10 к § 11.

5. Пусть умножение на функцию $g(s)$ есть непрерывная операция в пространстве Z_n . Показать, что $g(s)$ есть преобразование Фурье функционала $f \in K'_n$, для которого определена и непрерывна операция свертки $(f * \varphi)(x) = (f(\xi), \varphi(x + \xi))$.

Указание. Положить $f = F^{-1}[g]$ и использовать формулу $F[\varphi(x + \xi)] = e^{-ix\sigma} F[\varphi(\xi)]$.

Примечание. В силу результата задачи 4 к § 12, функционал f финитен и, следовательно, функция $g(s)$ — целая функция первого порядка и не выше чем степенного роста при вещественных σ .

6. Обозначим через A_m совокупность целых аналитических функций $\psi(s)$, для которых выполнены неравенства

$$|s^k \psi(\sigma + i\tau)| \leq C e^{b|\tau|}, \quad |k| \leq m.$$

Пусть, далее, C_m есть пространство финитных функций $\varphi(x)$ с непрерывными производными до порядка m . Показать, что

$$F[C_m] \subset A_m, \quad F^{-1}[A_m] \subset C_{m-n-1} \quad (m \geq n+1).$$

ПРОБЛЕМЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ГЛАВА III

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ И ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

§ 16. Формула типа Пуассона

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение в K'_n

$$P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u \equiv \sum_{|k| \leq p} a_k D^k u \equiv \sum_{k_1 + \dots + k_n \leq p} a_{k_1 \dots k_n} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = 0 \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами a_k . Если $n = 1$, то, как мы видели в § 5, все решения этого уравнения суть обычные функции — классические решения уравнения. Не так, вообще говоря, обстоит дело при $n > 1$; здесь среди решений могут появиться и обобщенные функции, не сводящиеся к обычным. Например, при $n = 2$ уравнение $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ имеет в числе своих решений сингулярную функцию $\delta(x_2)$, определяемую формулой

$$(\delta(x_2), \varphi(x_1, x_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, 0) dx_1.$$

Обозначим через $L(P)$ всю совокупность решений уравнения (1) в пространстве K'_n . Так как P — линейный оператор, то $L(P)$ является подпространством в пространстве K' . Укажем несколько более или менее очевидных свойств подпространства $L(P)$.

1. $L(P)$ замкнуто в K'_n .

Действительно, если $Pu_\nu = 0$ и $u_\nu \rightarrow u$, то, в силу непрерывности оператора P на пространстве K'_n , и $Pu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} Pu_\nu = 0$.

2. Если $u \in L(P)$ и f — финитный функционал, то $f * u \in L(P)$. Действительно, если $Pu = 0$, то и

$$P(f * u) = f * Pu = 0.$$

В частности, из $u \in L(P)$ следует $\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_j} * u \in L(P)$ и при любом векторе $h \in R_n$ также $u(x+h) = \delta(x+h) * u \in L(P)$.

3. Каждое решение $u \in L(P)$ есть предел (в K') обычных, притом даже бесконечно дифференцируемых решений — именно, решений вида $f_\nu(x) * u$, где $f_\nu(x)$ — дельта-образная последовательность (§ 9, п. 2) финитных бесконечно дифференцируемых функций.

4. Каждое решение $u \in L(P)$ конечного порядка сингулярности есть конечная сумма производных от обычных решений, имеющих непрерывные производные до заданного порядка. Действительно, для дельта-функции всегда можно написать представление

$$\delta(x) = \sum_{|k| \leq p} D^k \omega_k(x),$$

где $\omega_k(x)$ обращаются в нуль при $|x| \geq \varepsilon$ и имеют непрерывные производные до заданного порядка q^*). Поэтому любое решение $u \in L(P)$ представляется в виде

$$u = u * \delta = \sum_{|k| \leq p} D^k (u * \omega_k).$$

Если порядок s -сингулярности обобщенной функции u равен m , то порядок s -сингулярности свертки $u * \omega_k$ не превосходит $m - q$ (§ 13, п. 4) и при достаточно большом q меньше любого наперед заданного числа, что и требуется.

Вообще говоря, среди решений могут существовать и решения бесконечного порядка сингулярности (например, $u(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\partial^q \delta(x_2 - q)}{\partial x_2^q}$ для уравнения $\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0$).

2. Для изучения свойств решений уравнения большое значение имеет фундаментальная функция оператора P . Напомним, что фундаментальной функцией называется (обобщенная) функция $\mathcal{E}(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathcal{E}(x) = \delta(x).$$

* Мы имеем, например, $\delta = \Delta^q \mathcal{E}_n^{2q}(x)$, где \mathcal{E}_n^{2q} имеют непрерывные производные до порядка $2q - n + 1$ (§ 13, п. 6). Далее, если $e(x)$ равна 1 при $|x| < \varepsilon$ и нулю при $|x| > 2\varepsilon$, мы имеем $\Delta^q (e \mathcal{E}_n^{2q}) = \delta + e_0(x)$, где $e_0(x)$ отлична от нуля только при $\varepsilon < |x| < 2\varepsilon$ и бесконечно дифференцируема; отсюда $\delta = \Delta^q (e \mathcal{E}_n^{2q}) - e_0(x)$, т. е. получается $2q$ -кратным дифференцированием из функций с непрерывными производными до порядка $2q - n + 1$.

Так, для оператора Лапласа Δ в пространстве $R_n (n > 2)$ функция

$$\mathcal{E}_n^2(x) = \frac{-1}{(n-2)\Omega_n} r^{2-n} \quad (2)$$

является фундаментальной (§ 7, п. 2, пример 8). В дальнейшем (§ 17) мы покажем, что фундаментальная функция имеется у всякого оператора $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Как известно, с помощью фундаментальной функции (2) можно построить интегральное представление любого решения уравнения $\Delta u = 0$ внутри области G через его значения на границе области G (формула Пуассона *).

Оказывается, что аналогичное интегральное представление для решений любого уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ можно получить, используя соответствующую фундаментальную функцию. Приведем это построение.

По определению, обобщенная функция $u(x)$, заданная в области $G \subset R_n$ (см. § 6, п. 3), является в этой области решением уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$, если для любой основной функции $\varphi(x)$, сосредоточенной в области G , имеет место равенство **)

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \varphi\right) \equiv \left(u, \bar{P}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi\right) = 0.$$

Мы указывали в § 8, п. 2, что обобщенную функцию u , заданную в области G , можно продолжить на все пространство R_n так, что она сохранится неизменной в заданной внутренней области $V \subset G$. Таким образом, решение u в области G можно считать обобщенной функцией, определенной на всем пространстве K_n и являющейся решением уравнения (1) в области $V \subset G$. Заметим, что при этом в случае ограниченной области G функционал u можно считать финитным, сосредоточенным в области G , умножив его в случае необходимости на бесконечно дифференцируемую функцию $\beta(x)$, равную 0 вне области G и 1 в области V . Пусть $\mathcal{E}(x)$ — фундаментальная функция уравнения (1). Пусть, далее, $\alpha(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вне некоторой окрестности U начала координат пространства R_n и равная 1 внутри некоторой меньшей окрестности начала координат.

Обозначим через W область, обладающую тем свойством, что арифметическая разность $W - U$ содержится в V . При достаточно малых размерах U область W заведомо не пуста.

*) См., например, Курант, Гильберт, Методы математической физики, т. 2, Гостехиздат, 1951, гл. 4, § 2, п. 1.

***) Напомним, что если $P(\xi) = \sum_k a_k \xi^k$, то $\bar{P}(\xi) = \sum_k \bar{a}_k \xi^k$, причем \bar{a}_k есть число, комплексно сопряженное с числом a_k .

Лемма. В области W имеет место равенство

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[(1-\alpha)\mathcal{E}] * u(x) = u(x). \quad (3)$$

Доказательство. Пусть основная функция $\varphi(x)$ сосредоточена в области W ; тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\alpha\mathcal{E}) * u, \varphi\right) &= \left(\alpha\mathcal{E} * P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \varphi\right) = \\ &= \left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \alpha\mathcal{E} * \varphi\right) = \left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \psi\right), \end{aligned}$$

где $\psi = \alpha\mathcal{E} * \varphi$ есть бесконечно дифференцируемая функция, сосредоточенная в области $W - U \subset V$ (§ 12, п. 3); так как в области V функционал $u(x)$ есть решение уравнения (1), то результат равен нулю. Поэтому для указанных функций $\varphi(x)$

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[(1-\alpha)\mathcal{E}] * u = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathcal{E} * u - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\alpha\mathcal{E}) * u = \delta * u = u,$$

что и требовалось.

Формула (3) и является искомым аналогом интегральной формулы Пуассона. В самом деле, посмотрим, какие значения $u(x)$ в левой части участвуют при построении $u(x)$ в правой части в области $W_0 \subset W$ (рис. 6). Функционал $f = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[(1-\alpha)\mathcal{E}]$ сосредоточен в области, где $\alpha(x)$ отлична от 0 и от 1, т. е. в области $\dot{U} \subset U$, примыкающей к границе области U . По доказанному в § 12, чтобы получить $u(x)$ в области W_0 , нужно иметь $u(x)$ в левой части (2) в области $W_0 - \dot{U}$. Эту область можно представить себе так: перенести начало координат в любую точку области W_0 и заметить результат переноса области $-\dot{U}$, а далее рассмотреть объединение всех этих результатов, когда образ начала пробегает всю область W_0 . Если область W_0 достаточно мала, а \dot{U} отстоит от начала координат достаточно далеко, то $W_0 - \dot{U}$ будет областью, не пересекающейся с W_0 , обходящей W_0 со всех сторон, и в то же время остающейся в пределах области V , где $u(x)$ есть еще решение уравнения (1). Таким образом, значение функции $u(x)$ в области W_0 можно выразить через ее значения около границы области V (Поскольку форма области U в нашей власти, можно подойти к границе V сколь угодно близко.)

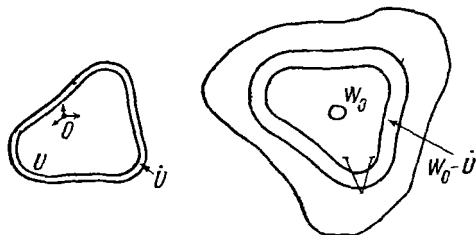


Рис. 6.

В частности, получается следующая теорема о единственности:

Теорема 1. *Если два решения уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ совпадают вблизи границы области V , то они совпадают всюду в области V . Если решение уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ обращается в нуль вблизи границы области V , то оно равно нулю тождественно в области V .*

3. Применяя к формуле (3) неравенство (7) § 13, п. 5, получаем следующее соотношение между порядками сингулярности:

$$c_{w_0}(u) \leq s \left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(1-\alpha)\mathcal{E} \right] + c_{w_0-\dot{v}}(u). \quad (4)$$

Если порядок многочлена $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ есть m , то, далее, мы имеем

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(1-\alpha)\mathcal{E} &= [1-\alpha(x)]P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathcal{E}(x) + \\ &+ \sum_{|q| \leq m-1} \alpha_q(x) D^q \mathcal{E}(x) = \sum_{|q| \leq m-1} \alpha_q(x) D^q \mathcal{E}(x), \end{aligned}$$

где $\alpha_q(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции. Отсюда

$$c_{w_0}(u) \leq m-1 + s_{\dot{v}}(\mathcal{E}) + c_{w_0-\dot{v}}(u). \quad (5)$$

Следствие 1. *Если решение $u(x)$ вблизи границы области V есть бесконечно дифференцируемая функция, то оно является бесконечно дифференцируемой функцией и в любой внутренней точке области V .*

Следствие 2. *Если оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ обладает фундаментальной функцией $\mathcal{E}(x)$, которая вне начала координат бесконечно дифференцируема, то всякое решение уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$, в любой области V , предполагаемое заранее лишь обобщенной функцией, есть обычная бесконечно дифференцируемая функция.*

Оба следствия вытекают из формулы (5): условие первого следствия означает, что $c_{w_0-\dot{v}}(u) = -\infty$, условие второго — что $s_{\dot{v}}(\mathcal{E}) = -\infty$.

Следствие 3. *Если оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ обладает фундаментальной функцией $\mathcal{E}(x)$, которая вне начала координат бесконечно дифференцируема, то всякая фундаментальная функция $\mathcal{E}_1(x)$ этого оператора также бесконечно дифференцируема вне начала координат.*

Действительно, вне начала координат $\mathcal{E}_1(x)$ есть решение уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathcal{E}_1(x) = 0$ и остается применить следствие 2.

Операторы $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, для которых все решения уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ — бесконечно дифференцируемые функции, называются *гипоэллиптическими*. У гипоэллиптического оператора всякая фундаментальная функция бесконечно дифференцируема вне начала координат. Оператор Лапласа и его степени — гипоэллиптические операторы.

З а м е ч а н и е. Уравнение $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$, все решения которого имеют в области V порядок сингулярности, не превосходящий фиксированного числа q , является в действительности также гипоэллиптическим.

Действительно, любая производная $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$ и т. д. от решения (в смысле обобщенных функций) уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$, как мы знаем (п.1), есть также решение этого уравнения. Если все решения уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ в области V имеют порядок сингулярности $\leq q$, то, в силу теоремы 1 § 13, п.6, каждое решение имеет порядок сингулярности $\leq q - 2m + 1$ при любом m , т. е. является обычной бесконечно дифференцируемой функцией.

4. В случае гипоэллиптического уравнения (т. е. уравнения с гипоэллиптическим оператором $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$) формулу (3) можно преобразовать к виду обычных формул типа Пуассона, дающих выражение некоторой функции внутри области через граничные значения этой функции и ее производных. С этой целью заметим, что равенство (3) в рассматриваемом случае есть равенство с обычными функциями и может быть записано в форме интеграла

$$\begin{aligned} u(x) &= P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[(1-\alpha)\mathcal{E}] * u(x) = (1-\alpha)\mathcal{E} * P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = \\ &= \int_{R_n} (1-\alpha)\mathcal{E}(\xi) P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x-\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

Напомним, что это равенство справедливо в области W , обладающей тем свойством, что результат арифметической разности области W и области U , в которой сосредоточена функция $\alpha(\xi)$, лежит в пределах области V , в которой $u(x)$ есть решение уравнения (1).

Перейдем в этой формуле к пределу, устремляя функцию $\alpha(\xi)$ к характеристической функции области U . Мы получим в пределе

$$u(x) = \int_{R_n-U} \mathcal{E}(\xi) P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x-\xi) d\xi = \int_{R_n-U} \mathcal{E}(\xi) P\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}\right)u(x-\xi) d\xi. \quad (7)$$

Как мы уже выяснили, функцию $u(x)$ можно считать бесконечно дифференцируемой вне области V и обращающейся в нуль вне области $G \supset V$; но $u(x)$, вообще говоря, уже не будет вне V решением уравнения (1). Произведем в равенстве (7) интегрирование по частям, постепенно перебрасывая все производные с множителя $u(x - \xi)$ на $\mathcal{S}(\xi)$; так как в $R_n - U$ мы имеем $P\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\mathcal{S}(\xi) = 0$, то останутся лишь граничные члены

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Gamma} \sum_k P_k \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \mathcal{S}(\xi) \cdot Q_k \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} \right) u(x - \xi) d\xi = \\ &= \sum_k \int_{\Gamma} c_k(\xi) Q_k \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} \right) u(x - \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (8)$$

где P_k и Q_k — многочлены степени $< m$, $c_k(\xi) = P_k \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \mathcal{S}(\xi)$ и Γ — граница области U .

Эту же формулу можно записать в форме

$$u(x) = \int_{x-\Gamma} \sum_k c_k(x - \eta) Q \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) u(\eta) d\eta.$$

Так как область U можно изменять вместе с x в большой мере произвольно, то, фиксируя произвольно точку x_0 , можно заменить границу $x - \Gamma$ на $x_0 - \Gamma$ по крайней мере для небольших значений разности $x - x_0$. Мы получаем формулу

$$u(x) = \int_{x_0-\Gamma} \sum_k c_k(x - \eta) Q_k \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) u(\eta) d\eta. \quad (9)$$

Формула (9), в частности, показывает, что решение гипоеллиптического уравнения порядка m однозначно определяется внутри области по заданным значениям этого решения и его производных до порядка $m - 1$ на границе области.

Для производных от функции $u(x)$ мы получаем выражения вида

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) = \int_{x_0-\Gamma} \sum_k R \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) c_k(x - \eta) Q_k \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) u(\eta) d\eta. \quad (10)$$

Эта формула позволит оценить и рост производных функции $u(x)$ через рост производных фундаментального решения $\mathcal{S}(x)$.

Б. Описание роста производных функции можно удобно произвести с помощью понятия класса Жеврея.

Определение класса Жеврея дадим сначала для функций одного переменного.

Фиксируем число $\beta \geq 0$; по определению, функция $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) принадлежит классу Жеврея G_β (или, точнее, $G_\beta[a, b]$), если она имеет на отрезке $[a, b]$ производные всех порядков и выполняются неравенства

$$|f^{(q)}(x)| \leq C B^q q^{\beta q} \quad (q = 0, 1, 2, \dots)$$

с постоянными C и B (зависящими, возможно, от функции f).

Если $\beta \leq 1$, функция $f(x)$ — аналитическая функция; действительно, если разность $f(x+h) - f(x)$ разложить по формуле Тейлора, мы получим равенство

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{1}{2} h^2 f''(x) - \dots - \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x) = R_m,$$

где

$$|R_m| = \frac{|h|^m}{m!} |f^{(m)}(x + \theta h)| \leq \frac{c |h|^m}{m!} B^m m^{m\beta} \leq C \frac{(|h| B m)^m}{m!}.$$

Величины $d_m = C \frac{(|h| B m)^m}{m!}$ стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$ и $|h| B e < 1$, поскольку

$$\frac{d_{m+1}}{d_m} = |h| B \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < |h| B e.$$

Таким образом, при $|h| < \frac{1}{B e}$ величина R_m стремится к нулю и, следовательно, $f(x+h)$ есть сумма своего ряда Тейлора, т. е. она является аналитической функцией в каждой точке отрезка $[a, b]$.

Обратно, если $f(x)$ — аналитическая функция на отрезке $[a, b]$, она может быть продолжена аналитически в область V , содержащую этот отрезок внутри себя. Можно написать формулу Коши

$$f^{(q)}(x) = \frac{q!}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - x)^{q+1}},$$

где замкнутый контур L проходит в области V на положительном расстоянии ρ от точек отрезка $[a, b]$. Оценка по модулю дает

$$|f^{(q)}(x)| \leq q! \frac{1}{\rho^q} \max_L |f(\zeta)| = C \left(\frac{1}{\rho}\right)^q q^q,$$

т. е. $f \in G_1[a, b]$, что и требовалось.

При $\beta > 1$ класс G_β содержит и неаналитические функции; так, функция $e^{-1} x^{-\beta}$ принадлежит классу $G_{1+\frac{1}{\beta}}$ (см. задачу 3).

В случае n переменных x_1, \dots, x_n определение класса Жеврея G_β следующее:

Классом Жеврея $G_\beta = G_\beta(V)$ ($\beta \geq 0$) называется совокупность всех функций $u(x_1, \dots, x_n) = u(x)$, определенных в замкнутой области V , непрерывных и имеющих производные всех порядков, которые удовлетворяют неравенствам

$$\left| \frac{\partial^{q_1 + \dots + q_n} u(x)}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}} \right| \leq C B_1^{q_1} \dots B_n^{q_n} q_1^{\beta} \dots q_n^{\beta} \quad (q_1, \dots, q_n = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Класс G_1 состоит из аналитических функций (по каждому из переменных x_1, \dots, x_n).

Очевидно, что в пределах класса G_β можно производить сложение функций и умножение на числа. Покажем, что можно производить также и дифференцирование. Пусть $u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ и $u \in G_\beta$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{q_1 + \dots + q_n} u_1(x)}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}} \right| &= \left| \frac{\partial^{q_1 + 1 + \dots + q_n} u(x)}{\partial x_1^{q_1 + 1} \dots \partial x_n^{q_n}} \right| \leq \\ &\leq C B_1^{q_1 + 1} \dots B_n^{q_n} (q_1 + 1)^{(q_1 + 1)\beta} \dots q_n^{\beta} = \\ &= C B_1^{q_1} \dots B_n^{q_n} q_1^{\beta} \dots q_n^{\beta} \cdot B_1 \frac{(q_1 + 1)^{(q_1 + 1)\beta}}{q_1^{\beta}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Последний множитель оценивается следующим образом:

$$\frac{(q_1 + 1)^{(q_1 + 1)\beta}}{q_1^{\beta}} = \left(1 + \frac{1}{q_1}\right)^{q_1 \beta} (q_1 + 1)^{\beta} \leq e^{\beta} C_1 2^{q_1}.$$

Итак, мы получаем для левой части (2) оценку (1) с измененными C и B_1 .

Предположим, что фундаментальная функция $\mathcal{L}(x)$ оператора $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ принадлежит классу G_β в любой ограниченной области, не содержащей начала координат (ни внутри, ни на границе). Мы можем тогда утверждать, что и любое решение уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0$$

принадлежит классу G_β в любой ограниченной области. Для этого используем формулу (9) п. 4

$$u(x) = \int_{x_0 - \Gamma}^x \sum_k c_k(x - \eta) Q_k\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right) u(\eta) d\eta.$$

Здесь функции $c_k(x)$ суть некоторые производные от фундаментальной функции $\mathcal{E}(x)$, взятые в области, не содержащей начала координат, и тем самым вместе с функцией $\mathcal{E}(x)$ принадлежащие классу G_β . Поэтому для $D^q u = \frac{\partial^{q_1 + \dots + q_n} u}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}}$ мы получаем оценки

$$\begin{aligned} |D^q u(x)| &\leq \int_{x_0 - \Gamma} \sum_k |D^q c_k(x - \eta)| |Q_k \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) u(\eta)| d\eta \leq \\ &\leq \sum_k \max_{\eta \in x_0 - \Gamma} |D^q c_k(x - \eta)| \int_{x_0 - \Gamma} |Q_k \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) u(\eta)| d\eta \leq \\ &\leq C \sum_k \max_{\eta \in x_0 - \Gamma} |D^q c_k(x - \eta)|, \end{aligned}$$

откуда следует, что вместе с $\mathcal{E}(x)$ также и функция $u(x)$ входит в класс G_β .

Справедливо, конечно, и обратное: если в любой ограниченной области все решения уравнения

$$P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) = 0 \quad (3)$$

принадлежат классу G_β , то и фундаментальная функция $\mathcal{E}(x)$ принадлежит классу G_β в любой ограниченной области, не содержащей начала координат (ни внутри, ни на границе); действительно, фундаментальная функция в любой такой области является решением уравнения (3).

Так, при любом $m = 1, 2, \dots$ все решения итерированного уравнения Лапласа -

$$\Delta^m u = 0$$

суть аналитические функции (принадлежат классу G_1), поскольку таковым является фундаментальная функция оператора Δ^m (§ 7, п. 2, пример 9) вне начала координат.

В дальнейшем уравнение $P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$ (а также оператор $P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ и многочлен P) будем называть β -гипоэллиптическим, если все решения уравнения $P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$ локально принадлежат классу Жеврея G_β .

Задачи. 1. Если оператор $P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ порядка m обладает фундаментальной функцией $g(x)$, которая всюду вне начала координат имеет обычные производные до порядка m (т. е. $s(\mathcal{E}) \leq -m$), то оператор P — гипоэллиптический.

Указание. Неравенство (4) п. 3 в данном случае дает

$$c_W(u) \leq c_{W-\dot{U}}(u) - 1. \quad (6)$$

Таким образом, порядок сингулярности решения u в области W меньше чем у границы. Итерируя неравенство (6), получить, что в любой внутренней области порядок сингулярности решения u меньше любого целого числа, т. е. равен $-\infty$.

Примечание. Более сильный результат дается в задаче 5 к § 20.

2. Дано, что всякое решение уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ в области V , имеющее обычные производные до порядка N (N фиксировано), является бесконечно дифференцируемым. Показать, что оператор P гипозэллиптичен.

Указание. Использовать свойство (4) п. 1.

3. Дано, что всякое решение уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ в области V , имеющее порядок сингулярности $s(u) \leq p$, имеет порядок сингулярности $s(u) \leq p - 1$ (p фиксировано). Доказать, что оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ гипозэллиптичен.

Указание. Все производные от решения $u(x)$ имеют вместе с ним порядок сингулярности $\leq p$. Использовать теорему 1 § 13, п. 6 и задачу 2.

4. Показать, что функция $f(x) = e^{-1|x|^{-p}}$ ($p > 0$) принадлежит классу Жеврея $G_{1+\frac{1}{p}}$.

Указание. Функция $f(z) = e^{-\frac{1}{z^p}}$ аналитична при $z = x + iy \neq 0$. По формуле Коши написать выражение $f^{(q)}(x)$ через значения $f(\zeta)$ на окружности с центром в точке x , касающейся прямых $y = \pm \frac{x}{p}$, произвести оценку по модулю и найти максимум по всем x .

5. Известно, что многочлен $P(\sigma) \equiv P(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

а) не имеет вещественных нулей,

б) имеет единственный вещественный нуль при $\sigma = 0$,

в) имеет ограниченное множество вещественных нулей.

Показать, что всякое решение уравнения $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0$, имеющее при $|x| \rightarrow \infty$ рост не выше степенного (более общим образом, принадлежащее S' , см. задачу 4 к § 10):

в случае а) есть тождественный нуль,

в случае б) есть многочлен от x ,

в случае в) есть целая аналитическая функция от $z = x + iy$ не выше первого порядка роста.

Указание. По задаче 1 к § 15 преобразование Фурье $v(\alpha)$ решения $u(x)$ принадлежит S' (и, следовательно, K'). Найти его носитель (см. задачу 2 к § 8). Использовать теорему п. 6 § 10 (для случая б) и теорему п. 3 § 15 (для случая в)).

6. Показать, что всякое дифференцируемое решение уравнения $(\Delta + k^2)u = 0$ ($n = 3$), удовлетворяющее «условиям Зоммерфельда»,

$$u(x) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty,$$

есть тождественный нуль.

Указание. Условием Зоммерфельда удовлетворяет, в частности фундаментальная функция $\mathcal{Z}(x) = \frac{e^{ikr}}{r}$ оператора $\Delta + k^2$ (§ 7, задача 8). Пусть, далее, $\mathcal{Z}_R(x) = \mathcal{Z}(x)$ при $|x| \leq R$ и 0 при $|x| > R$. Тогда по формуле Грина (§ 7, п. 2, пример 7)

$$0 = (\mathcal{Z}_R (\Delta + k^2) u) = ((\Delta + k^2) \mathcal{Z}_R, u) = (\delta, u) + \int_{|x|=R} \left[\mathcal{Z}_R \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial \mathcal{Z}_R}{\partial r} u \right] dx,$$

откуда

$$\begin{aligned} u(0) &= \int_{|x|=R} \left[\frac{\partial \mathcal{Z}_R}{\partial r} u - \mathcal{Z}_R \frac{\partial u}{\partial r} \right] dx = \\ &= \int_{|x|=R} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \mathcal{Z}_R \cdot u - \mathcal{Z}_R \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) u \right] dx = \int_{|x|=R} o\left(\frac{1}{R^2}\right) dx = o(1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

и, следовательно, $u(0) = 0$. Так как за начало может быть взята любая точка, то $u(x) \equiv 0$.

§ 17. Существование фундаментальной функции

1. В этом параграфе мы докажем, что уравнение

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathcal{E}(x) = \delta(x) \quad (1)$$

разрешимо в пространстве K' , каков бы ни был многочлен $P \neq 0$. В целях упрощения дальнейших выкладок мы будем писать уравнение (1) в форме

$$\bar{P}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \mathcal{E}(x) = \delta(x) *). \quad (2)$$

Произведя формально преобразование Фурье, получим из (2) уравнение в функционалах на пространстве Z

$$\bar{P}(s) E(s) = 1. \quad (3)$$

Если мы докажем существование линейного непрерывного функционала $E(s)$ в пространстве Z' , удовлетворяющего уравнению (3), то, произведя обратное преобразование Фурье, мы получим одновременно и существование решения уравнения (2) в пространстве K' .

Уравнение (3) означает, что для любой функции $\psi(s) \in Z$

$$(\bar{P}(s) E(s), \psi(s)) = (1, \psi(s)) = \int_{R_n} \psi(\sigma) d\sigma.$$

Если бы многочлен $P(s)$ не имел корней при вещественных значениях $s = \sigma$ и при этом был ограничен снизу по модулю положи-

*) По определению, $\sum_k a_k D^k = \sum_k \bar{a}_k D^k$.

тельной постоянной, то можно было бы положить

$$(E(s), \psi(s)) = \int_{R_n} \frac{\psi(\sigma) d\sigma}{P(\sigma)}. \quad (4)$$

Действительно, в этом случае формула (4) определяет линейный непрерывный функционал на Z и

$$(\bar{P}(s)E(s), \psi(s)) = (E(s), P(s)\psi(s)) = \int_{R_n} \frac{P(\sigma)\psi(\sigma) d\sigma}{P(\sigma)} = \int_{R_n} \psi(\sigma) d\sigma,$$

что и требуется. В общем случае выражение (4) не годится, так как оно даже не определено для всех функций $\psi(s) \in Z$.

В случае $n = 1$ можно положить

$$(E(s), \psi(s)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\sigma + i\tau)}{P(\sigma + i\tau)} d\tau;$$

интегрирование ведется по любой прямой, параллельной вещественной оси и не проходящей через корни многочлена $P(s)$. Мы имеем здесь также

$$\begin{aligned} (\bar{P}(s)E(s), \psi(s)) &= (E(s), P(s)\psi(s)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\sigma + i\tau)\psi(\sigma + i\tau)}{P(\sigma + i\tau)} d\sigma = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma + i\tau) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) d\sigma; \end{aligned}$$

последний переход может быть осуществлен с помощью теоремы Коши, используя быстрое убывание функции $\psi(\sigma + i\tau)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Таким образом, выход в комплексную область позволяет при $n = 1$ решить задачу. Естественно, что на таком пути мы будем ее решать и в общем случае любого n . Оказывается, что и при любом n достаточно выходить в комплексную область только по одной координате.

2. Вначале мы покажем, что, совершив, если нужно, некоторый поворот осей, данный многочлен $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ степени m всегда можно записать в *нормальной форме*

$$a_0 \left(i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^m + \sum_{k=0}^{m-1} P_k \left(i\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, i\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \left(i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k, \quad (5)$$

где $a_0 \neq 0$ — постоянная.

Если по формуле $x' = Ux$ совершается поворот осей (матрица $U = U^{-1}$) в пространстве R_n , где заданы функции $\varphi(x)$, то в про-

странстве, где заданы их преобразования Фурье, совершается аналогичный поворот $\sigma' = U\sigma$ (§ 15, п. 2).

Поэтому достаточно найти такой поворот в пространстве R_n , после которого заданный многочлен $P(\sigma)$ степени m примет вид

$$P(\sigma) = a_0 \sigma_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma_2, \dots, \sigma_n) \sigma_1^k, \quad a_0 \neq 0. \quad (6)$$

Если $P(\sigma)$ не имеет с самого начала вида (6), то мы произведем линейное преобразование

$$\sigma_j = \sum_{k=1}^n c_{jk} \xi_k$$

с неопределенной пока действительной матрицей $C = \|c_{jk}\|$. Многочлен $P(\sigma)$ перейдет при этом в некоторый новый многочлен m -й степени относительно ξ_1, \dots, ξ_n . Коэффициент при ξ_1^m получается при рассмотрении старших членов многочлена P , именно, если

$$P_0(\sigma) = \sum_r a_r \sigma_1^{q_{1r}} \dots \sigma_n^{q_{nr}}, \quad q_{1r} + \dots + q_{nr} = m$$

есть группа старших членов многочлена $P(\sigma)$, то коэффициент при ξ_1^m будет иметь вид

$$P_0(c_1) = \sum_r a_r c_{11}^{q_{1r}} \dots c_{n1}^{q_{nr}}.$$

Как видим, он выражается только через элементы первого столбца матрицы C . В качестве чисел c_{11}, \dots, c_{n1} мы можем взять теперь любую нормированную ($\sum c_{j1}^2 = 1$) систему чисел, обеспечивающую отличное от нуля значение $P_0(c_1)$; иными словами, любую точку единичной сферы вещественного пространства, не лежащую на конусе $P_0(\sigma) = 0$. Остальные столбцы матрицы C можно выбрать произвольно с тем, чтобы они были ортогональны и нормированы, как требуется для матрицы поворота.

Таким образом, для записи многочлена P в форме (6) достаточно (и необходимо), чтобы первая ось системы координат $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ не была направлена по конусу $P_0(\sigma) = 0$. Этот конус мы назовем *характеристическим конусом* многочлена P .

После того как многочлен $P(\sigma)$ записан в форме (6), аналогичный вид

$$P(s) = a_0 s_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(s_2, \dots, s_n) s_1^k$$

принимает и многочлен $P(s)$ во всем комплексном пространстве C_n .

Имея в виду полученный результат и тот факт, что функционал δ инвариантен относительно поворотов, мы можем в дальнейшем ограничиться рассмотрением многочленов в нормальной форме.

3. Рассмотрим пространство $n+1$ (вещественных) измерений, определяемых вещественными составляющими $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ и мнимой составляющей τ_1 . В этом пространстве мы построим разрывное многообразие H , которое будем называть «лестницей Хёрмандера». Для этого разобьем $(n-1)$ -мерное вещественное пространство

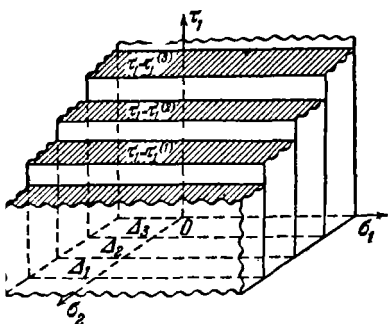


Рис. 7.

$\sigma_2, \dots, \sigma_n$ на локально конечное (т. е. конечное в каждом шаре) множество частей $\Delta_1, \dots, \Delta_j, \dots$ $(n-2)$ -мерными гиперплоскостями, параллельными координатным гиперплоскостям, и части Δ_j сопоставим некоторое значение $\tau_1 = \tau_1^{(j)}$. Лестницей Хёрмандера будем называть множество всех точек $(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1)$, где $-\infty < \sigma_1 < \infty$, и если $\sigma_2, \dots, \sigma_n \in \Delta_j$, то $\tau_1 = \tau_1^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots$).

На рис. 7 показана лестница для случая координат $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1$. Ниже мы докажем, что для данного многочлена $P(s)$ всегда можно построить лестницу H , на которой $|P(s)| \geq C > 0$ и все $|\tau_1^{(j)}|$ ограничены одной и той же постоянной C_0 . Имея такую лестницу, положим

$$(E(s), \psi(s)) = \int_H \frac{\psi(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)}{P(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)} d\sigma_1 \dots d\sigma_n. \quad (7)$$

Этот интеграл существует вследствие того, что знаменатель по модулю превосходит C , а функция $\psi(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, как основная в пространстве Z , равномерно по τ_1 (для $|\tau_1| \leq C_0$) стремится к нулю быстрее любой степени $\frac{1}{|\sigma|}$, когда $|\sigma| \rightarrow \infty$, и, следовательно, интегрируема. Очевидно также, что функционал (7) непрерывен в пространстве Z .

Покажем, что этот функционал переходит в 1 при умножении на $\bar{P}(s)$. Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} (\bar{P}(s)E(s), \psi(s)) &= (E(s), P(s)\psi(s)) = \\ &= \int_H \psi(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) d\sigma_1 \dots d\sigma_n = \\ &= \sum_j \int \dots \int_{(\sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \Delta_j} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma_1 + i\tau_1^{(j)}, \sigma_2, \dots, \sigma_n) d\sigma_1 \right] d\sigma_2 \dots d\sigma_n. \end{aligned}$$

В силу формулы Коши внутренний интеграл, который вычисляется по прямой в плоскости $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1$, параллельной вещественной оси

и проходящей на расстоянии $|\tau_1^{(j)}|$ от нее, можно заменить, не изменяя его величины, интегралом по самой вещественной оси. При этом мы получаем

$$\begin{aligned} (\bar{P}(s)E(s), \psi(s)) &= \\ &= \sum_j \int_{\Delta_j} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) d\sigma_1 \dots d\sigma_n = \int_{R_n} \psi(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\bar{P}(s)E(s) = 1,$$

что и требовалось.

4. Покажем наконец, что лестница, на которой $|P(s)| \geq C > 0$, существует для всякого многочлена в нормальной форме.

Рассмотрим многочлен

$$P(s) = as_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(s_2, \dots, s_n) s_1^k, \quad a \neq 0$$

при произвольно фиксированных значениях $s_2 = \sigma_2, \dots, s_n = \sigma_n$. На s_1 -плоскости он имеет не более чем m корней $s_1^{(1)}, \dots, s_1^{(m)}$ и допускает разложение

$$P(s) = a(s - s_1^{(1)})(s - s_1^{(2)}) \dots (s - s_1^{(m)}). \quad (8)$$

В полосе $|\tau_1| \leq m + 1$ ширины $2m + 2$ всегда можно провести прямую $\tau_1 = \text{const}$, которая отстоит более чем на 1 от всех корней многочлена; из разложения (8) видно, что на этой прямой заведомо

$$|P(s)| > |a|.$$

Так как корни многочлена с постоянным старшим коэффициентом непрерывно зависят от остальных коэффициентов, то для достаточно малой окрестности точки $(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$ соответствующие корни $s_1^{(1)}, \dots, s_1^{(m)}$ будут помещаться на s_1 -плоскости в как угодно малых кружках около их первоначальных положений. Поэтому вдоль найденной прямой $\tau_1 = \text{const}$ будет сохраняться неравенство

$$|P(s)| > a$$

и в некоторой окрестности взятой точки $(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Итак, каждой точке в пространстве $(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$ мы можем сопоставить некоторую ее окрестность по указанному правилу. Можно считать, что эти окрестности ограничены гиперплоскостями, параллельными координатным. Применяя лемму Гейне — Бореля, можно из всего покрытия пространства $(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$ такими окрестностями выбрать локально конечное покрытие $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \dots, \bar{\Delta}_j, \dots$; заменяя, далее,

каждое $\bar{\Delta}_j$ на $\Delta_j = \bar{\Delta}_j - \Delta_1 - \dots - \Delta_{j-1}$, получим непересекающиеся участки, которые и определяют вместе с соответствующими значениями $\tau_1^{(j)}$ искомую лестницу.

Таким образом, доказано в общем случае существование функционала $E(s)$ в пространстве Z' , удовлетворяющего уравнению

$$\overline{P(s)} E(s) = 1;$$

тем самым доказано и существование решения у уравнения

$$\bar{P} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{E}(x) = \delta(x),$$

что и требовалось.

Б. Наше построение допускает значительный произвол в выборе лестницы Хёрмандера, которым можно пользоваться для уточнения различных сведений о свойствах решений.

При фиксированных $\sigma_2, \dots, \sigma_n$ соответствующее сечение лестницы представляло собою прямую в плоскости s_1 , параллельную вещественной оси. Можно строить лестницу и с помощью кривых сечений, но не слишком быстро удаляющихся от вещественной оси. Например, можно взять сечение L в форме *)

$$\tau_1 = (a_1 \ln^+ |\sigma_1| - a_2)^+ \quad (a_1 > 0). \quad (1)$$

В полосе $|a_2| \leq m + 1$ заведомо найдется кривая вида (1), на которой всюду $|P(s)| \geq C > 0$. Покажем, что существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)}{P(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)} d\sigma_1, \quad (\sigma_1, \tau_1) \in L.$$

Действительно, мы имеем при любом k и больших $|\sigma_1|$ на L и под L

$$|s_1^k \psi(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)| \leq C_k e^{b|\tau_1|} \leq C_k e^{b[a_1 \ln^+ |\sigma_1| + |a_2|]} \leq C'_k |\sigma_1|^{ba_1};$$

и если взять $k > ba_1 + 1$, интеграл будет сходиться.

Далее, интеграл по вертикальному отрезку

$$\int_0^{a_1 \ln^+ |\sigma_1| - a_2} \psi(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) d\tau_1$$

стремится к 0 с возрастанием $|\sigma_1|$, поскольку из неравенства (1) вытекает оценка

$$\left| \int_0^{a_1 \ln^+ |\sigma_1| - a_2} \psi(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) d\tau_1 \right| \leq (a_1 \ln^+ |\sigma_1| + |a_2|) \cdot C'_k |\sigma_1|^{ba_1 - k}.$$

*) Как обычно, $f^+(x) = \max \{f(x), 0\}$.

Поэтому, в силу теоремы Коши,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) ds_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) d\sigma_1.$$

Отсюда следует, что функционал $E(s)$, действующий по формуле

$$(E(s), \psi(s)) = \int_{R_n} \frac{\psi(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)}{\bar{P}(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)} ds_1 \dots d\sigma_n, \quad (\sigma_1, \tau_1) \in L,$$

при умножении на $\bar{P}(s)$ переходит в 1; таким образом, и при интегрировании по искривленной лестнице мы получаем некоторую фундаментальную функцию. Кроме того, можно производить аналогичные выходы в комплексную область также и по другим переменным, в том числе и по нескольким сразу.

Задачи. 1. Показать, что порядок сингулярности фундаментальной функции любого дифференциального оператора порядка m не менее чем $1 - m$.

Указание. Использовать § 13, п. 3.

2. Показать, что фундаментальная функция $\mathcal{Z}(x)$, построенная в п. 3, имеет порядок сингулярности не выше $n + 2$.

Указание. Функционал $E(s)$ может быть продолжен с сохранением непрерывности на пространство A_{n+1} (§ 15, задача 6), следовательно, функционал $\mathcal{Z}(x)$ — на пространство C_{n+1} (поскольку $C_{n+1} \subset F^{-1}(A_{n+1})$). Использовать задачу 3 к § 12.

3. Показать, что фундаментальная функция $\mathcal{Z}(x)$, построенная в п. 5 с помощью лестницы Хёрмандера, находящейся в области $|\tau| \leq a_1 |\rho| + a_2$, имеет в области $|x| \leq b$ порядок сингулярности не более $n + ba_1 + 4$.

Указание. В доказательстве используется интегрируемость не только самой функции $\psi(s)$, но и ее произведения на некоторую степень s .

§ 18. Решение уравнения с правой частью

1. В этом параграфе мы покажем, что уравнение

$$\bar{P}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = f \quad (1)$$

имеет решение в пространстве K' при любой правой части $f \in K'$. Если f — финитный функционал, то имеется решение

$$u = \mathcal{E}(x) * f, \quad (2)$$

где $\mathcal{E}(x)$ — фундаментальная функция оператора $P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$. В общем случае формула (2) не действует, поскольку свертка двух нефинитных функционалов не определена.

Заметим, что в силу результата п. 2 § 17 мы можем ограничиться рассмотрением многочлена в нормальной форме.

Если произвести преобразование Фурье, задача о решении уравнения (1) перейдет в задачу о решении уравнения

$$\bar{P}(s)v(s) = g \quad (3)$$

в пространстве Z' . Здесь $g(s)$ — преобразование Фурье функционала f — некоторый функционал на пространстве Z . Финитному f отвечает тот случай, когда $g(s)$ есть целая функция 1-го экспоненциального порядка роста в комплексной области и степенного роста в вещественной области. Формуле (2) соответствует решение уравнения (3), имеющее вид (3),

$$v(s) = E(s) \cdot g(s), \quad (4)$$

где $E(s)$ — функционал, определенный формулой

$$(E, \psi) = \int_H \frac{\psi(s) ds}{P(s)}, \quad (5)$$

причем H — подходящая лестница Хёрмандера.

При этом мы имеем

$$(v, \psi) = (gE, \psi) = (E, g^* \psi) = \int_H \frac{\overline{g(\bar{s})} \psi(s) ds}{P(s)}. \quad (6)$$

Для перехода к решению общего уравнения (1) мы заметим следующее. Допустим, что функционал f представлен в форме сходящегося (в K') ряда финитных функционалов

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k. \quad (7)$$

Соответственно мы имеем

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(s),$$

где $g_k(s)$ — целые функции указанного вида. Положим, далее,

$$v_k(s) = g_k(s) E_k,$$

где E_k — фундаментальная функция, определяемая по лестнице Хёрмандера с номером k :

$$(E_k, \psi) = \int_{H_k} \frac{\psi(s) ds}{P(s)}, \quad (8)$$

так что

$$(v_k, \psi) = \int_{H_k} \frac{g_k^*(s) \psi(s)}{P(s)} ds, \quad g_k^*(s) = \overline{g_k(\bar{s})}.$$

Если мы смогли при этом выбрать E_k (т. е. выбрать лестницы H_k) так, что ряд

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(s) \quad (9)$$

сходится в Z' , то мы можем утверждать, что функционал v есть решение уравнения (3). Действительно, умножая (9) на $\overline{P(s)}$, находим

$$\overline{P(s)}v = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P(s)}v_k = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(s) = g,$$

что и требуется. Таким образом, задача сводится к подбору разложения (7) и фундаментальных функций (8) с тем, чтобы была обеспечена сходимость ряда (9). В свою очередь для сходимости ряда (9) в пространстве Z' достаточно, чтобы при каждом $\psi \in Z$ абсолютно сходился числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (v_k, \psi).$$

2. Переходим к реализации этого плана. Прежде всего мы разобьем функционал f в сумму (7) так, чтобы слагаемое f_0 было сосредоточено в некотором шаре с центром в точке 0, а носители всех остальных финитных функционалов f_k уместались бы после некоторого поворота в пределах октанта $O_k = \{x : x_j \leq -a_k\}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), причем числа $a_k > 0$ стремятся в бесконечность вместе с k . Считая, что $k > 0$ и что носитель функционала f_k лежит в указанном октанте, будем строить лестницу в пределах полосы

$$|\tau_j - \alpha_k \ln^+ |\sigma_j|| \leq m + 1,$$

где $\alpha_k > 0$ — постоянные, которые мы укажем ниже.

Теперь оценим слагаемое

$$(v_k, \psi) = \int_{H_k} \frac{g_k^*(s) \psi(s)}{P(s)} ds.$$

Как преобразование Фурье финитного функционала, сосредоточенного в октанте $x_j \leq -a_k$, функция $g_k(s)$ при $\tau_j < 0$ допускает оценку (§ 15, п. 3)

$$|g_k(s)| \leq M_k (1 + |s|)^{p_k} e^{-a_k \sum \tau_j}.$$

Соответственно аналогичную оценку имеет функция $g_k^*(s) = \overline{g_k(\bar{s})}$ при $\tau_j > 0$:

$$|g_k^*(s)| \leq M_k (1 + |s|)^{p_k} e^{-a_k \sum \tau_j}.$$

Функция $\psi(s)$, как мы знаем, удовлетворяет неравенству

$$|\psi(s)| \leq C e^{b|\tau|} \leq C_1 e^{b \sum \tau_j} \quad (\tau_j \geq 0).$$

Многочлен $P(s)$ на лестнице Хёрмандера ограничен снизу постоянной $|a|$. В итоге мы получаем

$$|(v_k, \psi)| \leq \frac{C_1}{a} \int_H M_k (1 + |s|)^{p_k} e^{(b-a_k)\Sigma \tau_j} |ds| \leq \\ \leq C_2 M_k \int_{R_n} \prod_{j=1}^n (1 + |\sigma_j|)^{p_k} (1 + |\sigma_j|)^{a_k(b-a_k)} d\sigma_1 \dots d\sigma_n.$$

Положим $\alpha_k = p_k + k^{\frac{2}{n}} M_k^{\frac{1}{n}} + 1$. При любом фиксированном $b > 0$ мы имеем

$$1 + p_k + k^{\frac{2}{n}} M_k^{\frac{1}{n}} + \alpha_k (b - a_k) \leq \alpha_k (1 + b - a_k) \leq 0$$

при достаточно больших k ; отсюда при указанных k

$$p_k + \alpha_k (b - a_k) \leq -k^{\frac{2}{n}} M_k^{\frac{1}{n}} - 1$$

и, следовательно,

$$|(v_k, \psi)| \leq C_2 M_k \prod_{j=1}^n \int_0^\infty (1 + \sigma_j)^{-k^{\frac{2}{n}} M_k^{\frac{1}{n}} - 1} d\sigma_j \leq C_2 M_k \left(\frac{1}{k^{\frac{2}{n}} M_k^{\frac{1}{n}}} \right)^n = \frac{C_2}{k^2}.$$

Пусть теперь носитель функционала f_k попадает в октант O_k только после некоторого поворота U_k , т. е.

$$\text{supp}(f_k(U_k x)) \subset O_k.$$

Положим $f_k(U_k x) = \hat{f}_k(x)$; по доказанному, для многочлена $P(U_k s)$ существует лестница Хёрмандера H_k , для которой при любой $\psi \in Z$

$$\int_{H_k} \frac{\hat{g}_k^*(s) \psi(U_k s) ds}{P(U_k s)} \leq \frac{C_2}{k^2}.$$

Здесь $\hat{g}_k^*(s)$ есть преобразование Фурье функционала $\hat{f}_k(x)$ и по формуле (3) § 15, п. 2

$$\hat{g}_k^*(s) = F[f_k(U_k x)] = g_k(U_k s).$$

Заменяя в интеграле по H_k переменное $U_k s$ на s' , получим интеграл по лестнице $U_k^{-1} H_k$, причем для достаточно большого k

$$\int_{U_k^{-1} H_k} \frac{g_k^*(s') \psi(s')}{P(s')} ds' \leq \frac{C_2}{k^2}.$$

Итак, для любого $k > 0$ мы указали лестницу (H_k или $U_k^{-1}H_k$), на которой при любой $\psi \in Z$ для достаточно большого $k > 0$ выполняется неравенство

$$|(v_k, \psi)| \leq \frac{C_2}{k^2}$$

с постоянной C_2 , зависящей от функции ψ , но не зависящей от номера k . Тем самым обеспечена абсолютная сходимость ряда из (v_k, ψ) .

Таким образом, существование решения уравнения (1) при любой правой части $f \in K'$ доказано.

Задачи. 1. Доказать, что два решения уравнения $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f$, совпадающие при $|x| \geq R$ (для некоторого R), совпадают всюду.

Указание. Использовать теорему единственности п. 2, § 16.

2. Если многочлен $P(\sigma)$ не имеет вещественных нулей, то уравнение $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f$ может иметь лишь единственное решение степенного роста на бесконечности (более общим образом, принадлежащее S' , см. задачу 5 к § 16).

3. Если многочлен $P(\sigma)$ имеет единственный вещественный нуль при $\sigma = 0$, то уравнение $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f$ может иметь лишь единственное решение, стремящееся к 0 на бесконечности (см. задачу 9 к § 7 и задачу 5 к § 16).

4. Показать, что уравнение $\Delta u + k^2u = f$ ($n=3$) может иметь лишь единственное решение в форме дифференцируемой функции, для которой при $|x| \rightarrow \infty$

$$u(x) = O(1), \quad \frac{du}{dr} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

(условия Зоммерфельда).

Указание. Использовать задачу 6 к § 16.

5. Показать, что уравнение $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f(x)$, где $f(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция, всегда обладает по крайней мере одним бесконечно дифференцируемым решением.

Указание. См. п. 1.

6. (Продолжение.) Если *всякое* решение уравнения $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f(x)$ с финитной бесконечно дифференцируемой функцией $f(x)$ само бесконечно дифференцируемо, то $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — гипозэллиптический оператор.

Указание. Использовать связь общего и частного решений.

7. Если P — гипозэллиптический оператор, $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая (не обязательно финитная) функция, то *всякое* решение уравнения

$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f(x)$ — есть бесконечно дифференцируемая функция.

Указание. Использовать разложение единицы (§ 8, п. 4).

§ 19. Условие гипоеллиптичности по корням многочлена (необходимость)

1. Уравнение

$$P\left(t \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0 \quad (1)$$

имеет решения вида $e^{-t(x, s)} = e^{-t(x_1 s_1 + \dots + x_n s_n)}$ с некоторыми комплексными s_1, \dots, s_n . Выведем условия, которым должен удовлетворять комплексный вектор $s = (s_1, \dots, s_n) \in C_n$, чтобы функция $e^{-t(x, s)}$ была решением уравнения (1). Мы имеем

$$t \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-t(x, s)} = s_j e^{-t(x, s)}, \quad P\left(t \frac{\partial}{\partial x}\right) e^{-t(x, s)} = P(s) e^{-t(x, s)}, \quad (2)$$

и чтобы последнее выражение обратилось в нуль, необходимо и достаточно, чтобы s было корнем уравнения $P(s) = 0$.

Геометрическое место всех точек s , удовлетворяющих уравнению $P(s) = 0$, при $n > 1$ представляет собою гиперповерхность в n -мерном комплексном ($2n$ -мерном вещественном) пространстве, имеющую (вещественную) размерность $2n - 2$ (одно комплексное уравнение равносильно двум вещественным).

Разумеется, наглядное представление о поверхности в n -мерном пространстве затруднительно. Мы построим диаграмму модулей — некоторый геометрический образ на плоскости, который поможет судить об устройстве поверхности $P(s) = 0$ в целом с интересующей нас точки зрения.

Определение. *Диаграммой модулей* поверхности $P(s) = 0$ называется геометрическое место D всех точек на плоскости ξ, ρ ,

$$\text{где } \xi = |\sigma| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}, \quad \rho = |\tau| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \tau_j^2} \text{ и } P(\sigma + i\tau) = 0.$$

При $n = 1$ диаграмма модулей сводится к конечному числу точек. Для иллюстрации различных возможностей, которые могут представиться при $n > 1$, рассмотрим два примера. Пусть $n = 2$ и $P(s) = s_1^2 - s_2^2$. Условие $P(s) = 0$ приводит к равенствам $\sigma_1 = \pm \sigma_2$, $\tau_1 = \pm \tau_2$; отсюда $\xi = |\sigma| = \sqrt{2} |\sigma_1|$, $\rho = |\tau| = \sqrt{2} |\tau_1|$, и так как σ_1 и τ_1 независимы (s_1 можно взять произвольно и определить по нему s_2), множество точек $(\xi, \rho) \in D$ покрывает всю первую четверть в плоскости (ξ, ρ) .

Пусть снова $n = 2$ и $P(s) = s_1^2 + s_2^2$. В этом случае условие $P(s) = 0$ приводит к равенствам $\sigma_1 = \pm \tau_2$, $\tau_1 = \pm \sigma_2$, отсюда $\xi = |\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \tau_1^2} = |s_1|$, $\rho = |\tau| = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \tau_1^2} = |s_1|$ и, следовательно, диаграмма модулей есть биссектриса $\rho = \xi$ первой четверти в плоскости (ξ, ρ) .

В общем случае диаграмма модулей будет интересна нам только со следующей точки зрения: может ли точка $(\xi, \rho) \in D$ при $\xi \rightarrow \infty$ приближаться к оси ξ , или же эта точка обязана удаляться от оси ξ , и если это так, то по какому закону; иначе говоря, какой функцией вида $\rho = \rho(\xi)$ ограничено множество D снизу.

С этой точки зрения рассмотрим произвольный многочлен $P(s_1, s_2)$ с двумя аргументами s_1 и s_2 .

Приведа его, если необходимо, к нормальному виду путем вещественного поворота (§ 17, п. 2), можно считать, что уравнение $P(s) = 0$ имеет следующую форму:

$$P(s_1, s_2) \equiv a_0 s_1^m + \sum_{k=1}^m a_k s_1^{m-k} s_2^k + \sum_{j < m} a_{jk} s_1^{j-k} s_2^k = 0 \quad (3)$$

с явно выделенной главной частью.

Рассмотрим вначале случай $P(0, s_2) \equiv 0$, когда s_1 присутствует фактически в каждом члене (3). В этом случае любая точка $\sigma = (0, \sigma_2)$ и $\tau = (0, \tau_2)$ лежит на поверхности нулей, и диаграмма модулей D покрывает всю первую четверть плоскости (ξ, ρ) . Пусть теперь $P(0, s_2) \not\equiv 0$. В этом случае в окрестности бесконечно удаленной точки s_2 все корни уравнения (3) могут быть представлены в форме

$$s_1 = A s_2^\gamma E, \quad A \neq 0, \quad (4)$$

где γ — вещественное число, E имеет пределом (при $|s_2| \rightarrow \infty$) единицу*).

Возьмем $s_2 = \sigma_2$ вещественным и положительным; мы получим корень $s_1 = (\sigma_1, \tau_1)$, для которого при достаточно больших $|\sigma_2|$

$$|\tau| = |\tau_1| \leq |\sigma_1| \leq 2 |A| |\sigma_2|^\gamma \leq 2 |A| |\sigma|^\gamma.$$

Таким образом, диаграмма модулей содержит кривую, на которой

$$\rho \leq C \xi^\gamma.$$

Для вычисления показателя γ подставим выражение (4) в (3); мы получим тождество

$$a_0 A^m s_2^{m\gamma} + \sum_{k=1}^m a_k A^{m-k} s_2^{k+\gamma(m-k)} + \sum_{j < m} a_{jk} A^{j-k} s_2^{k+\gamma(j-k)} \equiv 0.$$

Среди показателей у s_2 в этом тождестве старший должен присутствовать по крайней мере дважды; иначе, разделив на s_2 в старшей степени и заставив s_2 неограниченно возрастать, мы получили бы, что $A = 0$. Диаграмма показателей $n(\gamma)$, как функций от γ , имеет вид, показанный на рис. 8. Значения γ , при которых имеются два

*) См., например, Н. Г. Чеботарев, Теория алгебраических функций, Гостехиздат, гл. 6, 1948.

равных старших показателя, являются абсциссами угловых точек ломаной $\mu(\gamma) = \max n(\gamma)$.

Поскольку $a_0 \neq 0$, на диаграмме показателей заведомо присутствует прямая $n(\gamma) = m\gamma$. Кроме того, поскольку $P(0, s_2) \neq 0$, имеется в (3) слагаемое вида $b_p s_2^p$, $p \leq m$; таким образом, в составе диаграммы показателей также имеется горизонтальная прямая $n(\gamma) = p$.

Пересечением двух указанных прямых является точка с абсциссой $\gamma = \frac{p}{m} \leq 1$. Следовательно, *наименьший показатель γ в уравнении (4) не превосходит 1*, и есть корень уравнения (3), представляемый при $|s_2| \rightarrow \infty$ выражением

$$s_1 = A s_2^\gamma E, \quad A \neq 0, \quad \gamma \leq 1.$$

Возьмем $s_2 = \sigma_2$ вещественным и положительным; мы получим корень $s_1 = (\sigma_1, \tau_1)$, для которого при достаточно больших $|\sigma_2|$

$$|\tau| = |\tau_1| \leq |s_1| \leq 2|A||\sigma_2|^\gamma \leq 2|A||\sigma|^\gamma.$$

Итак, диаграмма модулей во всяком случае содержит кривую вида $\rho = C \xi^\gamma E$, где $\gamma \leq 1$, $E \rightarrow 1$.

Отметим один случай, когда можно заведомо утверждать, что диаграмма показателей содержит такую кривую с $\gamma < 1$. Это

будет иметь место, если в уравнении (3) отсутствует член $a_m s_2^m$ (т. е. $a_m = 0$); при этом, наверно, $p < m$ и $\gamma = \frac{p}{m} < 1$.

2. Напомним, что дифференциальный оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ называется *гипоэллиптическим*, если все решения уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Гипоэллиптические операторы, как оказывается, могут быть полностью охарактеризованы в терминах, связанных с диаграммой модулей. А именно, диаграмма модулей гипоэллиптического оператора с возрастанием ξ удаляется от оси ξ ; более точные формулировки будут даны ниже.

Установим вначале лемму о производных от решения гипоэллиптического уравнения — лемму, имеющую большое самостоятельное значение.

Лемма 1. *Если решения $u_\nu(x)$ гипоэллиптического уравнения равномерно ограничены в области V , то их частные*

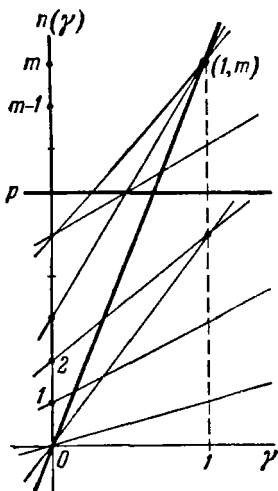


Рис. 8.

производные $\frac{\partial u_\nu(x)}{\partial x_j}$ равномерно ограничены в любой под-области W , содержащейся в области V вместе со своим замыканием.

Доказательство. Из формулы (3) п. 2 § 16 следует, что в области W для любого решения $u(x)$ имеет место соотношение

$$u(x) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) [(1-\alpha)\mathcal{E}] * u(x) = A(x) * u(x) = \int_G A(x-\xi) u(\xi) d\xi, \quad (1)$$

где $A(x) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) [(1-\alpha)\mathcal{E}]$ — бесконечно дифференцируемая функция; интегрирование ведется по ограниченной области $G \supset V$, вне которой функция $u(x)$ обращается в нуль. Равенство (1) можно продифференцировать по x_j , и мы получим

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \int_G \frac{\partial A(x-\xi)}{\partial x_j} u(\xi) d\xi,$$

откуда

$$\max_{x \in W} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right| \leq C \max_{x \in G} |u(x)|, \quad (2)$$

где

$$C = \int_G \left| \frac{\partial A(x-\xi)}{\partial x_j} \right| d\xi.$$

Без ограничения общности можно заменить в (2) $\max_{x \in G} |u(x)|$ на $\max_{x \in V} |u(x)|$. Действительно, $u(x)$ в области G получалась у нас в результате умножения некоторого решения уравнения (1) в области G на бесконечно дифференцируемую функцию $\beta(x)$, равную 1 в области V и 0 вне области G . Выбирая функцию $\beta(x)$ достаточно быстро спадающей от значения 1 к 0, мы при любом $\varepsilon > 0$ можем получить для произведения неравенство

$$\max_{x \in G} |u(x)| \leq \max_{x \in V} |u(x)| + \varepsilon;$$

так как G не зависит от ε , то в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы получим из неравенства (2)

$$\max_{x \in W} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right| \leq C \max_{x \in V} |u(x)|, \quad (3)$$

что и доказывает лемму.

3. Теперь мы можем получить характерное свойство поверхности нулей гипоэллиптического оператора $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и ее диаграммы модулей.

Предположим, что $P\left(l \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — гипозэллиптический оператор. Многочлен $P(s)$ будем называть в этом случае гипозэллиптическим многочленом. Пусть $W \subset V$ — два шара с общим центром в начале координат; неравенство (3) п. 2 применим к решению $u(x) = e^{-l(x, s)}$, $P(s) = 0$. Обозначим через r радиус шара W и через R радиус шара V . Пусть, далее, $s_j = \sigma_j + i\tau_j$ — разложение s_j на вещественную и мнимую части. Тогда можно записать, что

$$\begin{aligned} \max_{x \in V} |u(x)| &= \max_{|x| < R} |e^{-l(x, s)}| = \max_{|x| < R} |e^{-l[x_1(\sigma_1 + i\tau_1) + \dots + x_n(\sigma_n + i\tau_n)]}| = \\ &= \max_{|x| < R} e^{x_1\tau_1 + \dots + x_n\tau_n} = e^{R|\tau|}, \end{aligned}$$

где $|\tau| = \sqrt{\sum \tau_j^2}$. Далее,

$$\max_{x \in W} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| = |s_j| \max_{|x| < r} |e^{-l(x, s)}| = |s_j| e^{r|\tau|}.$$

Таким образом, при любом j имеет место неравенство

$$|s_j| e^{r|\tau|} \leq C e^{(R-r)|\tau|} \quad \text{или} \quad |s_j| \leq C e^{(R-r)|\tau|}.$$

Возводя в квадрат и суммируя по индексу j , получим $|s| \leq C_1 e^{(R-r)|\tau|}$, отсюда и $|\sigma| \leq C_1 e^{(R-r)|\tau|}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} |\tau| &\geq \frac{1}{R-r} (\ln |\sigma| - \ln C_1) = \\ &= A \ln |\sigma| - B, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A = \frac{1}{R-r}$, $B = \frac{\ln C_1}{R-r}$. Мы получаем весьма важный вывод: на поверхности $P(s) = 0$ выполняется неравенство (1). Иначе говоря, если по этой поверхности удаляться в бесконечность так, что вещественная составляющая σ точки $s = \sigma + i\tau$ будет неограниченно увеличиваться (по модулю), то и мнимая составляющая τ будет неограниченно увеличиваться по

модулю и притом быстрее, чем $A \ln |\sigma|$. Заметим, что R и r можно взять как угодно близкими и, следовательно, коэффициент A в неравенстве (2) может быть как угодно большим.

Так как $\bar{P}(s)$ по модулю совпадает с $P(\bar{s})$, то тем же свойством обладает и поверхность $\bar{P}(s) = 0$ корней гипозэллиптического многочлена $\bar{P}(s)$.

Диаграмма модулей поверхности $P(s) = 0$ располагается, таким образом, при любом A выше некоторой кривой $\rho = A \ln \xi - B$ (рис. 9).

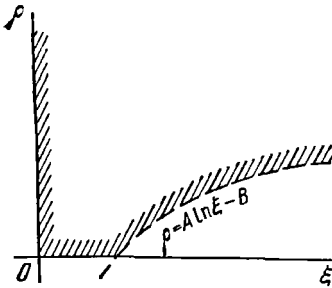


Рис. 9. Область, где располагается диаграмма модулей гипозэллиптического оператора.

4. Предположим теперь, что оператор $P\left(t \frac{\partial}{\partial x}\right)$ не только гипоеллиптичен, но и β -гипоеллиптичен, т. е. все решения уравнения $P\left(t \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ принадлежат локально к классу Жеврея G_β (§ 16, п. 5), так что выполняются неравенства $|D^q u(x)| \leq CB^q q^{q\beta}$. В этом случае можно высказать более сильное утверждение о скорости удаления диаграммы модулей от вещественной оси:

Теорема. Если $P(\sigma)$ есть β -гипоеллиптический многочлен, то его диаграмма модулей располагается выше некоторой кривой вида $\rho = b\xi^{1/\beta} - C$.

Для доказательства используем следующее усиление леммы 1:

Лемма 2. Для производных от решений β -гипоеллиптического уравнения в области V справедлива оценка

$$\max_{x \in W} |D^q u(x)| \leq CB^q q^{q\beta} \max_{x \in V} |u(x)|$$

в любой подобласти W , содержащейся в области V вместе со своим замыканием.

Доказательство. В силу формулы (10) § 16, п. 4, при любом $x \in W$

$$|D^q u(x)| \leq \sum_k \int_{\Gamma} D^q c_k(x - \eta) d\eta \cdot \max_{\Gamma} \left| Q_k \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) u(\eta) \right|,$$

где Γ — граница области W .

По доказанному выше, функция $c_k(x)$ вместе с фундаментальной функцией $\mathcal{E}(x)$ принадлежит классу G_β и, следовательно,

$$\int_{\Gamma} |D^q c_k(x - \eta)| d\eta = \int_{\Gamma} |D^q c_k(\xi)| d\xi \leq CB^q q^{q\beta}.$$

С другой стороны, в силу результатов п. 2.

$$\max_W \left| Q_k \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) u(\eta) \right| \leq C_1 \max_V |u(\eta)|.$$

В результате мы получаем в области W оценку

$$\max_W |D^q u(x)| \leq C_2 B^q q^{q\beta} \max_V |u(x)|, \tag{1}$$

что и требовалось.

5. Пусть снова $W \subset V$ — два шара с общим центром в начале координат.

В качестве решения $u(x)$ рассмотрим функцию $e^{-t(x, s)}$, где $P(s) = 0$. Как обычно, положим $s = \sigma + t\tau$. Тогда

$$\max_{|x| < R} |u(x)| = e^{R|\tau|}, \quad \max_{|x| < r} |D^q u(x)| = |s_1^{q_1} \dots s_n^{q_n}| e^{r|\tau|},$$

и следовательно, из (1) п. 4 следует

$$|s_1^{q_1} \dots s_n^{q_n}| e^{r|\tau|} \leq C B_1^{q_1} \dots B_n^{q_n} q_1^{\beta} \dots q_n^{\beta} e^{R|\tau|}.$$

Отсюда, далее, следует, что

$$e^{(r-R)|\tau|} \leq C \frac{B_1^{q_1} \dots B_n^{q_n}}{|s_1|^{q_1} \dots |s_n|^{q_n}} q_1^{\beta} \dots q_n^{\beta}.$$

Переходя к нижней грани по всем q_1, \dots, q_n , получаем (см. ниже п. 6):

$$e^{(r-R)|\tau|} \leq C_1 e^{\sum b_j |s_j|^{1/\beta}}, \quad (1)$$

или, иными словами,

$$|\tau| \geq \sum b_j |s_j|^{1/\beta} - C_2 \geq b |s|^{1/\beta} - C_2 \geq b |\sigma|^{1/\beta} - C_2,$$

что и требовалось.

6. Нам остается показать, что при любых $B > 0$ и $d > 0$

$$\inf_q \frac{B^q q^{q\beta}}{d^q} \leq C e^{-bd^{1/\beta}} \quad (q = 0, 1, 2, \dots).$$

Считая временно q непрерывно меняющимся переменным, найдем минимум функции $a^q q^{q\beta} = f(q)$ обычными средствами дифференциального исчисления. Логарифмируя, дифференцируя и приравнявая результат нулю, получаем

$$[\ln f(q_0)]' = \frac{f'(q_0)}{f(q_0)} = \ln a + \beta \ln q_0 + \beta = 0, \quad (1)$$

где q_0 — значение q , на котором реализуется искомый минимум. Из уравнения (1) находим $q_0 = \frac{1}{ea^{1/\beta}}$ и, следовательно,

$$\min_q \ln f(q) = -\frac{\beta}{ea^{1/\beta}}, \quad \min_q f(q) = e^{-\frac{\beta}{ea^{1/\beta}}}.$$

Так как в действительности q меняется только по натуральным числам, то $\min f(q)$ на самом деле несколько выше найденного. Мы имеем

$$[\ln f(q)]'' = \frac{|\beta|}{q}.$$

Поэтому в целой точке q_1 , ближайшей справа к точке q_0 ,

$$\ln f(q_1) \leq \ln f(q_0) + \frac{(q_1 - q_0)^2}{2} [\ln f(\bar{q})]'' \leq \ln f(q_0) + \frac{\beta}{2q_0},$$

где $q_0 \leq \bar{q} \leq q_1$.

Поэтому

$$\min_q \ln f(q) \leq \ln f(q_1) \leq \ln f(q_0) + \frac{\beta}{2q_0} = -\frac{\beta}{ea^{1/\beta}} + \frac{\beta e}{2a^{1/\beta}},$$

откуда

$$\min_q f(q) \leq e^{\frac{\beta e a^{1/\beta}}{2}} \cdot e^{-\frac{\beta}{e a^{1/\beta}}}$$

Первый множитель при $a \leq 1$ ограничен величиной $e^{\frac{\beta e}{2}}$. Если же $a > 1$, то

$$\min_q a^q q^{\beta} \leq 1 \leq e^{\frac{\beta}{e}} \cdot e^{-\frac{\beta}{e a^{1/\beta}}}$$

Итак, при любых a , $0 < a < \infty$,

$$\min_q a^q q^{\beta} \leq C e^{-\frac{\beta}{e a^{1/\beta}}},$$

что и требовалось.

Задачи. 1. Показать, что нижняя граница диаграммы модулей многочлена $P(s_1, s_2) = a_0 s_1^m + \sum_{k=1}^m a_k s_1^{m-k} s_2^k + \sum_{j < k} a_j s_1^{j-k} s_2^k$ содержит кривую

$\rho = C \xi^\gamma$ с $\gamma < 0$ тогда и только тогда, когда $P(s_1, s_2)$ содержит член вида $s_1^j s_2^k$, где k превосходит степень многочлена $P(0, s_2)$, $b \neq 0$.

Указание. Рассмотреть диаграмму показателей (п. 1).

2. Показать, что нижняя граница диаграммы модулей (в классе монотонных кривых $\rho = f(\xi)$), есть кривая $\rho = 0$ тогда и только тогда, когда уравнение $P(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ определяет кривую, уходящую в бесконечность.

3. Если диаграмма модулей многочлена $P(s) = P(s_1, \dots, s_n)$ целиком расположена в области $\rho \geq \xi t(\xi)$, где $t(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$, то $n = 1$ (т. е. P есть многочлен от одной переменной и имеет лишь конечное число нулей)

§ 20. Условие гипозэллиптичности по корням многочлена (достаточность)

В § 19 было показано, что координаты диаграммы модулей гипозэллиптического многочлена $P(s)$ удовлетворяют неравенству вида

$$|\tau| \geq A \ln |\sigma| - A_1 \tag{1}$$

при любом $A > 0$. Если же многочлен $P(s)$ не только гипозэллиптический, но и β -гипозэллиптический, т. е. для любых решений уравнения

$$P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

рост производных ограничен условием

$$|D^q u(x)| \leq C B^q q^{\beta},$$

то координаты диаграммы модулей удовлетворяют более сильному неравенству

$$|\tau| \geq A_2 |\sigma|^{1/\beta} - A_3. \tag{2}$$

Мы покажем здесь, что неравенства (1) и (2) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями гипозэллиптичности, соответственно β -гипозэллиптичности, многочлена P .

1. Установим сначала следующую лемму:

Лемма 1. Если диаграмма модулей поверхности $P(s) = 0$ вся лежит в области $\rho \geq f(\xi)$, где $f(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$, а $f'(\xi)$ остается ограниченной, то в области $\rho \leq \frac{1}{2} f(\xi)$ при достаточно больших ξ имеет место неравенство

$$|P(s)| \geq R$$

с произвольно заданной постоянной R .

Доказательство. Мы уже знаем, что многочлен $P(s)$ всегда можно считать заданным в нормальной форме

$$P(s) = a_0 s_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(s_2, \dots, s_n) s_1^k, \quad a_0 \neq 0.$$

Пусть $\lambda_j = \lambda_j(s_2, \dots, s_n)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) — корни (по s_1) многочлена $P(s)$. Пусть, далее, $\lambda_j = \xi_j + i\eta_j$ — разложение корня λ_j на вещественную и мнимую составляющие. Тогда, по условию, при любом $j = 1, \dots, m$

$$\sqrt{\eta_j^2 + \tau_2^2 + \dots + \tau_n^2} \geq f(\sqrt{\xi_j^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}).$$

Рассмотрим значение многочлена $P(s)$ в области $|\tau| < \frac{1}{2} f(\xi)$, т. е. там, где

$$\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \dots + \tau_n^2} \leq \frac{1}{2} f(\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}).$$

Мы имеем

$$|P(s)| = \left| a_0 \prod_{j=1}^m (s_1 - \lambda_j) \right| = |a_0| \prod_{j=1}^m \sqrt{(\sigma_1 - \xi_j)^2 + (\tau_1 - \eta_j)^2}.$$

Мы покажем, что при достаточно больших $|\sigma|$ каждый из m множителей в правой части превосходит положительную постоянную. Обозначим для краткости $\tau_1 = t$, $\tau_2^2 + \dots + \tau_n^2 = q^2$, $\sigma_1 = \theta$, $\sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 = p^2$; $\eta_j = \eta$, $\xi_j = \xi$; мы должны из соотношений

$$\sqrt{t^2 + q^2} \leq \frac{1}{2} f(\sqrt{\theta^2 + p^2}), \quad \sqrt{\eta^2 + q^2} \geq f(\sqrt{\xi^2 + p^2}) \quad (3)$$

при заданной постоянной $C \geq 0$ получить, что при достаточно больших $|\sigma|$, каковы бы ни были p и q ,

$$\sqrt{(\theta - \xi)^2 + (t - \eta)^2} \geq C. \quad (4)$$

Если $|\theta - \xi| \geq C$, — ясно, что неравенство (4) выполняется; поэтому достаточно ограничиться случаем $|\theta - \xi| \leq C$. Тогда и

$$|\sqrt{\theta^2 + p^2} - \sqrt{\xi^2 + p^2}| \leq C, \\ |f(\sqrt{\xi^2 + p^2}) - f(\sqrt{\theta^2 + p^2})| \leq C \max f'(u) \leq BC.$$

Теперь из неравенств (3) видно, что $\eta > t$, когда $|\sigma|$ достаточно велико. Так как $\sigma^2 = \theta^2 + p^2 \rightarrow \infty$, то $f(\sqrt{\theta^2 + p^2}) \rightarrow \infty$ и $f(\sqrt{\xi^2 + p^2}) \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\sqrt{(\theta - \xi)^2 + (t - \eta)^2} \geq \eta - t \geq \sqrt{\eta^2 + q^2} - \sqrt{t^2 + q^2} \geq \\ \geq f(\sqrt{\xi^2 + p^2}) - \frac{1}{2} f(\sqrt{\theta^2 + p^2}) = \\ = \frac{1}{2} f(\sqrt{\xi^2 + p^2}) + \frac{1}{2} [f(\sqrt{\xi^2 + p^2}) - f(\sqrt{\theta^2 + p^2})] \geq \\ \geq \frac{1}{2} f(\sqrt{\xi^2 + p^2}) - \frac{1}{2} BC \rightarrow \infty,$$

что даже больше, чем утверждалось.

2. Переходим теперь к доказательству основной теоремы:

Теорема 1. Если многообразию $N(P) = \{s : P(s) = 0\}$ лежит в области

$$|\tau| \geq C \ln |\sigma| - C_1 \quad (1)$$

при любом C , то фундаментальная функция $\mathcal{E}(x)$ оператора $\bar{P}\left(t \frac{\partial}{\partial x}\right)$ есть обычная бесконечно дифференцируемая функция вне начала координат.

Доказательство. Пусть основная функция $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ сосредоточена в некоторой малой области G , не содержащей начала координат. Мы покажем, что тогда выражение $(\mathcal{E}(x), \varphi(x))$ можно записать в виде интеграла по области G от произведения $\varphi(x)$ с некоторой бесконечно дифференцируемой функцией.

Как мы уже знаем, оператор $P\left(t \frac{\partial}{\partial x}\right)$ можно считать заданным в нормальной форме*), так что

$$P(s) = a_0 s_1^m + \sum_{k=0}^m P_k(s_2, \dots, s_m) s_1^k.$$

*) Заметим, что, используя теорему п. 2, § 21, можно показать, что гипозэллиптический многочлен имеет нормальную форму относительно любого переменного.

Как мы видели в § 2, преобразование Фурье фундаментальной функции есть функционал E в пространстве Z , действующий по формуле

$$(E, \psi) = \int_H \frac{\psi(s) ds}{P(s)}, \quad (2)$$

где H — подходящая лестница Хёрмандера. Для простоты рассмотрим случай $n = 2$, тогда лестница Хёрмандера есть многообразие, определяемое условиями

$$s_1 = \sigma_1 + i\tau_1, \quad -\infty < \sigma_1 < \infty, \quad \tau_1 = l(\sigma_2) \text{ — кусочно постоянная функция от } \sigma_2,$$

$$s_2 = \sigma_2, \quad -\infty < \sigma_2 < \infty.$$

Теперь используем неравенство (1); оно поможет нам улучшить поверхность интегрирования в формуле (2).

В силу леммы 1, в плоскости (σ_1, σ_2) при достаточно большом $|\sigma| > a$ (зависящем только от постоянных C и C_1 в неравенстве (1)) выполняется неравенство

$$|P(\sigma)| \geq 1.$$

Поэтому все ступеньки лестницы Хёрмандера, проекции которых на плоскость (σ_1, σ_2) оказываются целиком вне круга $|\sigma| \leq a$, можно опустить на эту плоскость — т. е., можно считать, что кусочно-постоянная функция $l(\sigma_2)$ равна нулю при $|\sigma_2| \geq a$. Таким образом, на лестнице останется лишь конечное число ступенек, проекции которых пересекаются с кругом $|\sigma| \leq a$.

Рассмотрим любую из этих ступенек. Интегрирование по координате σ_1 в пределах этой ступеньки производится по прямой $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1$, $\tau_1 = \text{const}$. Но вне отрезка $|\sigma_1| \leq a$ можно заменить участки этой прямой на вертикальные отрезки и участки оси σ_1 . Таким образом, мы сводим всю лестницу Хёрмандера в данном случае к фигуре, поднимающейся над плоскостью (σ_1, σ_2) лишь в пределах квадрата $|\sigma_1| \leq a$, $|\sigma_2| \leq a$, а вне него совпадающей с самой плоскостью (σ_1, σ_2) .

Интеграл (2) мы разобьем теперь на две части: интеграл по части, соответствующей квадрату $Q_1 = \{\sigma : |\sigma_1| \leq a, |\sigma_2| \leq a\}$ с присоединенной к нему совокупностью указанных вертикальных отрезков, и по внешности \hat{Q} этого квадрата. Рассмотрим вначале интеграл, отвечающий квадрату Q_1 :

$$(E_1, \psi) = \int_{Q_1} \frac{\psi(s) ds}{P(s)}.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned}
 (E_1, \psi) &= \int_{\hat{Q}_1} \frac{1}{P(s)} \left\{ \int_{R_n} \varphi(x) e^{l(x, s)} dx \right\} ds = \\
 &= \int_{R_n} \left\{ \int_{\hat{Q}_1} \frac{e^{l(x, s)}}{P(s)} ds \right\} \varphi(x) dx = \int_{R_n} \mathcal{E}_1(x) \varphi(x) dx, \quad (3)
 \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{E}_1(x) = \int_{\hat{Q}_1} \frac{e^{l(x, s)}}{P(s)} ds \quad (4)$$

есть, очевидно, бесконечно дифференцируемая (и даже аналитическая) функция от x при всех x .

Для второго слагаемого

$$(\hat{E}, \psi) = \int_{\hat{Q}} \frac{\psi(\sigma)}{P(\sigma)} d\sigma$$

такое преобразование (с переменной порядка интегрирования) не может быть проведено, так как область интегрирования уже не ограничена и интеграл, аналогичный (4), не сходится. Мы приведем это слагаемое к виду (3) с заменой плоских участков лестницы H на искривленные.

Будем изучать вначале фундаментальную функцию $\mathcal{E}(x)$ в окрестности V точки (x_1, x_2) , $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, находящейся на положительном расстоянии d от обеих координатных осей, так что функция $\varphi(x)$, к которой применяется $\mathcal{E}(x)$, сосредоточена в окрестности V . Разобьем область интегрирования \hat{Q} на 8 частей Q_2, \dots, Q_9 , как показано на рис. 10. Соответственно напомним

$$(\hat{E}, \psi) = (E_2, \psi) + \dots + (E_9, \psi).$$

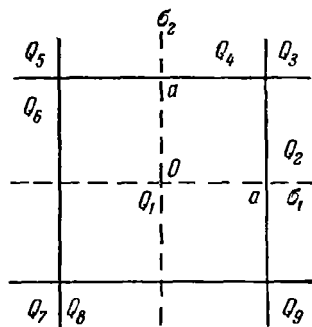


Рис. 10.

Мы будем в соответствующих интегралах производить вначале некоторую деформацию области интегрирования.

Рассмотрим функционал

$$(E_2, \psi) = \int_{Q_2} \frac{\psi(\sigma) d\sigma}{P(\sigma)}.$$

В области интегрирования Q_2 координата σ_2 остается ограниченной, координата σ_1 изменяется от положительного значения a до $+\infty$.

Перейдем при фиксированном σ_2 в плоскости s_1 от интеграла по полупрямой $a \leq \sigma_1 < \infty$, $\tau_1 = 0$ к интегралу по линии $a \leq \sigma_1 < \infty$, $2\tau_1 = C \ln^+ \sigma_1 - C_1$, дополненной соответствующим отрезком на прямой $\sigma_1 = a$ (рис. 11). Покажем, что интеграл по исходной полупрямой равен интегралу по этому контуру. Для этого достаточно показать, что интеграл по вертикальному отрезку AA_1 (A на оси σ_1 , A_1 на указанной линии) стремится к нулю, когда этот отрезок неограниченно удаляется вправо. Но, в силу леммы п. 1, величина $\frac{1}{P(s)}$ остается на этом отрезке ограниченной; поэтому, используя

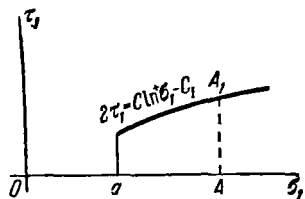


Рис. 11.

неравенство (3) п. 1, § 15, находим

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{A_1} \frac{\psi(s_1, \sigma_2) ds_1}{P(s_1, \sigma_2)} \right| &\ll \\ &\leq C_0 \max_{s_1 \in AA_1} |\psi(s_1, \sigma_2)| \overline{AA_1} \ll \\ &\leq C_k \frac{e^{b\tau_1} \ln \sigma_1}{\sigma_1^k} = C_k \sigma_1^{\frac{bC}{2} - k} \ln \sigma_1, \end{aligned}$$

что при достаточно большом k стремится к нулю.

Так как полученная оценка равномерна по всем σ_2 , то двойной интеграл

$$\int_{H_2} \frac{\psi(s) ds}{P(s)},$$

взятый по области H_2 , определяемой условиями

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 + i\tau_1, & 2\tau_1 &= C \ln^+ \sigma_1 - C_1, & a < \sigma_1 < \infty, \\ s_2 &= \sigma_2, & |\sigma_2| &\leq a, \end{aligned}$$

равен исходному двойному интегралу

$$\int_{Q_2} \frac{\psi(\sigma) d\sigma}{P(\sigma)} = (E_2, \psi).$$

Далее, мы имеем

$$(E_2, \psi) = \int_{H_2} \frac{1}{P(s)} \left\{ \int_V e^{t(x,s)} \varphi(x) dx \right\} ds.$$

Если произвести формальную переменную интегрирования по s и по x , мы получим

$$(E_2, \psi) = \int_V \varphi(x) \left\{ \int_{H_2} \frac{e^{t(x,s)}}{P(s)} ds \right\} dx. \quad (3')$$

Для оправдания этой замены достаточно показать, что интеграл

$$\int_{H_2} \frac{e^{l(x, s)}}{P(s)} ds \tag{4}$$

сходится абсолютно и равномерно по x . Но мы имеем здесь, в силу положительности τ_1 на H_2 ,

$$|e^{l(x, s)}| = e^{-(x, \tau)} = e^{-x_1 \tau_1} \leq e^{-d\tau_1} = B e^{-dA \ln^+ \sigma_1} = B \sigma_1^{-dA},$$

$$|ds| = |ds_1| |ds_2| \leq B_1 d\sigma_1 d\sigma_2 \quad \left(A = \frac{C}{2} \right),$$

и в соединении с ограниченностью $\frac{1}{|P(s)|}$ это приводит к абсолютной и равномерной сходимости интеграла (4). Из равенства (3) следует, что

$$\mathcal{E}_2(x) = \int_{H_2} \frac{e^{l(x, s)}}{P(s)} ds.$$

Формально дифференцируя $\mathcal{E}_2(x)$ по x_1 и x_2 , будем получать под знаком интеграла добавочные множители s_1 и s_2 . Очевидно, что сходимость интеграла не будет нарушаться при добавлении множителей s_2 в любом числе и множителей s_1 в таком числе, чтобы выражение

$$|s_1^k \sigma_1^{-dA}| \leq C' \sigma_1^k \sigma_1^{-dA}$$

оставалось интегрируемым. Но по условию A можно брать как угодно большим. Поэтому функция $\mathcal{E}_2(x)$ (не зависящая от специального выбора A) может быть продифференцирована любое число раз и по x_1 . Таким образом, $\mathcal{E}_2(x)$ — также бесконечно дифференцируемая функция.

Аналогичное рассуждение проводится для случая областей Q_4 , Q_6 и Q_8 . Рассмотрим теперь случай области типа Q_3 , где $a \leq \sigma_1 < \infty$, $a \leq \sigma_2 < \infty$. Здесь мы произведем последовательный переход от первоначальной области интегрирования Q_3 к области H_3 , определяемой условиями

$$a \leq \sigma_1 < \infty, \quad 2\tau_1 = C \ln^+ \sigma_1 - C_1, \quad a \leq \sigma_2 < \infty, \quad \tau_2 = 0,$$

и затем к области \hat{H}_3 , определяемой условиями

$$a \leq \sigma_1 < \infty, \quad 2\tau_1 = C \ln^+ \sigma_1 - C_1,$$

$$a \leq \sigma_2 < \infty, \quad 2\tau_2 = C \ln^+ \sigma_2 - C_1.$$

Двойной интеграл

$$\int_{\hat{H}_3} \frac{\psi(s)}{P(s)} ds$$

равен двойному интегралу

$$\int_{Q_1} \frac{\psi(s)}{P(s)} ds$$

по тем же причинам, что и выше. Затем, заменяя $\psi(s)$ на ее выражение через функцию $\varphi(x)$, мы приходим к выражению

$$\mathcal{E}_3(x) = \int_{\hat{H}_3} \frac{e^{l(x,s)}}{P(s)} ds$$

с оценкой на \hat{H}_3 :

$$|e^{l(x,s)}| \leq C_0 \sigma_1^{-dA} \sigma_2^{-dA} \quad \left(A = \frac{C}{2}\right).$$

Эта оценка обеспечивает возможность неограниченного дифференцирования $\mathcal{E}_3(x)$ по x_1 и x_2 . Аналогичное построение производится для областей Q_5 , Q_7 и Q_9 .

Таким образом, при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ функция $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_9$ оказывается бесконечно дифференцируемой. Отметим, что эта бесконечная дифференцируемость имеет место в смысле пространства K' ; но из рассмотрений § 13 вытекает, что будет иметь место и бесконечная дифференцируемость в обычном смысле.

Рассмотрим теперь произвольную точку (x_1, x_2) . Если $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, то некоторым поворотом (сводящимся к изменению знаков у каких-то осей) можно перевести эти точки в положение, где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. При этом повороте, разумеется, изменится многочлен $P(s)$. Но так как в неравенстве (1) фигурируют только модули координат σ_j и τ_j , то неравенство (1) сохранится и для преобразованного многочлена $P(s)$. Так как размеры областей Q_1, \dots, Q_9 зависят только от постоянных C и C_1 , то эти области не изменятся и не изменится последующее рассуждение; оно основано только на предположении, что $|P(s)| > R$, а не на явном выражении этого многочлена.

Если одна из координат x_1 , x_2 равна нулю, то малым поворотом можно ее сделать положительной и далее провести предыдущее построение. При этом поворот не должен быть большим, чтобы многочлен не потерял нормального вида.

В случае нескольких (более 2) переменных все рассуждения проходят аналогично, с очевидными техническими осложнениями за счет увеличения числа переменных.

Таким образом, теорему 1 можно считать полностью доказанной.

3. Теорема 2. Если многообразие $N(P) = \{s : P(s) = 0\}$ лежит в области

$$|\tau| \geq C_2 |\sigma|^{1/d} - C_3,$$

то фундаментальная функция $\mathcal{E}(x)$ многочлена $P(s)$ принадлежит (вне любой окрестности начала координат) к классу Жеврея G_β :

$$|D^q \mathcal{E}(x)| \leq CB^q q^{\alpha\beta}.$$

Доказательство. Считая $x_j > 0$ и используя метод доказательства предыдущей теоремы, мы представим выражение $\mathcal{E}(x)$ в виде суммы конечного числа (9 для $n = 2$) интегралов вида

$$\mathcal{E}_j(x) = \int_{H_j} \frac{e^{i(x, s)}}{P(s)} ds, \tag{1}$$

взятых по участкам лестницы Хёрмандера, деформированных следующим образом: если одна из координат, например σ_1 , изменяется в проекции Q_j участка H_j от a до $+\infty$, то горизонтальный участок пути интегрирования в плоскости s_1 заменяется на криволинейный

$$a \leq \sigma_1 < \infty, \quad \tau_1 = A \ln \sigma_1 - A_1.$$

Рассмотрим для определенности участок H_2 . Продеформируем еще раз контур, заменив его на кривую

$$a \leq \sigma_1 < \infty, \quad 2\tau_1 = C_2 \sigma_1^{1/\beta} - C_3.$$

Покажем, что интегралы (1) будут существовать и на новом контуре и будут иметь прежние значения. Достаточно проверить, что интегралы по вертикальным участкам

$$\frac{1}{2} (A_2 \sigma_1^{1/\beta} - A_3) \int_{A \ln \sigma_1 - A_1} \frac{e^{i(x, s)}}{P(s)} ds_1$$

стремятся к 0 при $\sigma_1 \rightarrow \infty$. Но мы имеем, как и ранее, $|P(s)| \geq 1$, а

$$\begin{aligned} e^{ix_1 s_1} &= e^{ix_1(\sigma_1 + i\tau_1)} = e^{ix_1 \sigma_1} e^{-x_1 \tau_1}, \\ |e^{ix_1 s_1}| &= e^{-x_1 \tau_1} \leq C e^{-A \tau_1 \ln \sigma_1} = C \sigma_1^{-A \tau_1}, \\ \left| \frac{1}{2} (A_2 \sigma_1^{1/\beta} - A_3) \int_{A \ln \sigma_1 - A_1} \frac{e^{i(x, s)} ds_1}{P(s)} \right| &\leq C \sigma_1^{1/\beta} \cdot \sigma_1^{-A \tau_1}, \end{aligned}$$

и так как A можно взять сколь угодно большим, полученное выражение стремится к 0 при $\sigma_1 \rightarrow \infty$.

Далее, на самом контуре мы имеем

$$|e^{ix_1 s_1}| \leq C e^{-\frac{A_2}{2} d \sigma_1^{1/\beta}},$$

откуда для производной $\frac{\partial^{q_1 q_2}(x)}{\partial x^{q_1}}$ мы получаем оценку

$$\left| \frac{\partial^{q_1 q_2}(x)}{\partial x^{q_1}} \right| \leq C \int_a^\infty \sigma_1^{q_1} e^{-a_1 \sigma_1^{1/\beta}} d\sigma_1 \leq C \int_0^\infty \sigma_1^{q_1} e^{-a_1 \sigma_1^{1/\beta}} d\sigma_1.$$

Интеграл легко вычисляется с помощью гамма-функции подстановкой $a_1 \sigma_1^{1/\beta} = \xi_1$, и мы получаем

$$\left| \frac{\partial^{q_1 q_2}(x)}{\partial x^{q_1}} \right| \leq C \Gamma(q_1 \beta + \beta) \leq C B_1^{q_1} q_1^{q_1 \beta}.$$

Оценки по различным переменным независимы друг от друга, поэтому в результате мы получаем для любого $j = 1, \dots, 9$

$$\left| D^{q_j} \mathcal{G}_j(x) \right| \leq C B_1^{q_1} \dots B_n^{q_n} q_1^{q_1 \beta} \dots q_n^{q_n \beta},$$

что и утверждалось.

4. Мы сформулируем теперь одну алгебраическую лемму, которая позволит сразу упростить и связать воедино полученные нами условия.

Лемма 2. Если диаграмма модулей многочлена $P(s)$ лежит над некоторой кривой $\rho = f(\xi)$, где $f(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$, то существует такой положительный показатель γ и коэффициент C , что эта диаграмма при достаточно больших ξ лежит и над кривой $\rho = C\xi^\gamma$.

Применяя эту лемму к дифференциальному оператору $P\left(\iota \frac{\partial}{\partial x}\right)$, получаем теорему.

Теорема 3. Уравнение $P\left(\iota \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ является гипозеллиптическим тогда и только тогда, когда из $P(\sigma + i\tau) = 0$, $|\sigma| \rightarrow \infty$, следует $|\tau| \rightarrow \infty$. При этом условию на поверхности нулей многочлена $P(s)$ для достаточно больших $|\sigma|$ имеет место и соотношение $|\tau| \geq C|\sigma|^\gamma$, откуда следует, что все решения гипозеллиптического уравнения принадлежат к некоторому классу Жеврея.

Таким образом, всякое гипозеллиптическое уравнение является β -гипозеллиптическим при некотором $\beta > 0$.

Доказательство леммы 2 не просто. Оно основано на применении алгебраического «принципа исключения», который в последнее время получил различные применения в вопросах анализа.

Пусть имеется некоторое количество вещественных многочленов P_1, \dots, P_k от аргументов двух типов: основных аргументов x_1, \dots, x_n и параметров q_1, \dots, q_m . Рассмотрим вопрос, при каких веществен-

ных значениях параметров разрешима относительно x_1, \dots, x_n система уравнений

$$P_j(x_1, \dots, x_n, q_1, \dots, q_m) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (1)$$

Имеет место следующая теорема (Зайденберга — Тарского): *Существует конечная совокупность вещественных многочленов $Q_\alpha^{(i)}(q_1, \dots, q_m)$ ($i = 1, 2, \dots, M$; $\alpha = 1, 2, \dots, \alpha_i$), обладающая тем свойством, что система (1) разрешима относительно x_1, \dots, x_n тогда и только тогда, когда удовлетворяется хотя бы одна из M систем неравенств*

$$Q_\alpha^{(i)}(q_1, \dots, q_m) \geq 0 \quad (\alpha = 1, \dots, \alpha_i)$$

при некотором фиксированном i^* .

Применим теорему Зайденберга — Тарского к рассматриваемому случаю. Мы имеем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \xi^2 - \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 &= 0, \\ \rho^2 - \sum_{j=1}^n \tau_j^2 &= 0, \\ P(\sigma + i\tau) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Последнее уравнение, комплексное, можно заменить парой вещественных уравнений с $2n$ вещественными аргументами σ_j и τ_j .

Примем в этих уравнениях σ_j и τ_j за основные переменные, а ξ и ρ за параметры. В силу теоремы Зайденберга — Тарского, существует конечная система многочленов от параметров $Q_\alpha^{(i)}(\xi, \rho)$ такая, что система (2) разрешима относительно σ_j и τ_j , тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одна из M систем неравенств

$$Q_\alpha^{(i)}(\xi, \rho) \geq 0, \quad \alpha = 1, \dots, \alpha_i.$$

Обозначим через $Q_\alpha^{(i)}$ область в первой четверти плоскости (ξ, ρ) , где выполняется неравенство $Q_\alpha^{(i)}(\xi, \rho) \geq 0$. Результат теоремы Зайденберга — Тарского можно сформулировать так: чтобы система (2) была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы точка (ξ, ρ) принадлежала к множеству

$$Q = \bigcup_{i=1}^M \prod_{\alpha=1}^{\alpha_i} Q_\alpha^{(i)}.$$

* Доказательство теоремы Зайденберга — Тарского см., например, в статье Е. А. Горина, Асимптотические свойства многочленов и алгебраических функций, УМН, № 2, 1961.

По условию, диаграмма модулей многочлена $P(s)$ лежит над некоторой кривой вида

$$\rho = f(\xi), \quad f(\xi) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (3)$$

С другой стороны, как известно из теории алгебраических кривых *) контур каждой области $Q_\alpha^{(t)}$ имеет уравнение

$$\rho = A_\alpha^{(t)} \xi^{r_\alpha^{(t)}} E(\xi), \quad A_\alpha^{(t)} \geq 0,$$

где $E(\xi)$ — функция, имеющая при $\xi \rightarrow \infty$ пределом 1. Поэтому и область Q ограничена такими кривыми. Но так как она лежит над кривой (3), то она ограничена снизу некоторой кривой вида

$$\rho = A \xi^\gamma E, \quad A > 0, \quad \gamma > 0, \quad E \rightarrow 1. \quad (4)$$

Следовательно, если P — гипозэллиптический оператор, его диаграмма модулей располагается не только выше логарифмической кривой (1) п. 1, но и выше некоторой степенной кривой (4).

Точная верхняя грань значений γ , для которых диаграмма модулей поверхности $P(s) = 0$ лежит выше кривой (4), называется *показателем гипозэллиптичности* многочлена P . Существует формула для его вычисления (см. задачу 6 к § 21).

Задача 1. Доказать, что произведение многочленов

$$P(s) = P_1(s) \dots P_r(s)$$

является гипозэллиптическим многочленом тогда и только тогда, когда гипозэллиптивен каждый множитель $P_j(s)$, $j = 1, \dots, r$.

Указание. Поверхность нулей многочлена P есть объединение поверхностей нулей многочленов $P_j(s)$.

2. Известно, что оператор $P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$ обладает фундаментальной функцией, которая вне шара $U = \{x: |x| \leq R\}$, R фиксировано, бесконечно дифференцируема. Доказать, что P гипозэллиптивен.

Указание. Лемма 1 § 19, п. 2, имеет место для оператора P в применении к такой подобласти $W \subset V$, для которой $W - U \subset V$. Отсюда для точек поверхности $P(s) = 0$ вывести неравенство

$$|\tau| > A |\pi| |\sigma| - A_1$$

с некоторым фиксированным A . Использовать теорему 3.

3. Известно, что всякое решение уравнения $P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$ в любой области V является бесконечно дифференцируемым в области $W \subset V$ такой, что $W - U \subset V$, где $U = \{x: |x| \leq R\}$, R фиксировано. Доказать, что P — гипозэллиптический оператор.

*) См., например, Г. Е. Шилов, Особые точки алгебраических кривых на плоскости, УМН, № 5, 1950, 180—192.

Указание. Применяя условие к фундаментальной функции $\mathcal{E}(x)$ оператора $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$, показать, что она бесконечно дифференцируема вне некоторого шара с центром в начале координат. Использовать задачу 2.

4. Известно, что фундаментальная функция оператора бесконечно дифференцируема в окрестности некоторой замкнутой поверхности, внутри которой лежит начало координат. Показать, что P гипоеллиптичен.

Указание. Используя формулу типа Пуассона (§ 1), показать, что выполняется условие задачи 3.

5. Если фундаментальная функция оператора $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ порядка m имеет вне начала координат обычные производные до порядка $m-1$ включительно, то оператор P гипоеллиптичен (В. В. Грушин).

Указание. Формула (3) § 16, п. 2 для решения u во всем пространстве имеет место также во всем пространстве. Положить $u(x) = e^{-t(x, s_0)}$, где $P(s_0) = 0$, применить преобразование Фурье и из полученного равенства

$$\delta(s - s_0) = g(s) \delta(s - s_0)$$

вывести, что $g(s_0) = 1$; далее, используя свойства преобразования Фурье финитной суммируемой функции, показать, что поверхность $P(s) = 0$ при $|s| \rightarrow \infty$ удаляется от вещественной гиперплоскости.

Примечание. Существуют негипоеллиптические операторы $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ порядка m с фундаментальной функцией, имеющей вне начала координат обычные производные до порядка $m-2$ (например, для уравнения струны, см. § 27, п. 6, 2 и задачу 3 к нему).

6. Показать, что для многочлена $P(\sigma)$, имеющего лишь ограниченное множество вещественных нулей, справедлива оценка

$$|P(\sigma)| \geq C |\sigma|^\nu$$

при достаточно большом $|\sigma|$ и некоторых $C > 0$ и ν (ν может быть и отрицательным).

Указание. Применить к «диаграмме модулей» из точек $\xi = |\sigma|$, $\rho = |P(\sigma)|$ теорему Зайденберга — Тарского и рассуждения п. 4.

7. Показать, что оператор $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ обладает фундаментальной функцией $\mathcal{E}(x) \in S'$, если $P(\sigma)$ не имеет вещественных нулей.

Указание. В силу результата задачи 6 деление $\frac{\Psi(\sigma)}{P(\sigma)}$ возможно в пространстве S .

Примечание. В действительности *любой* оператор $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ обладает фундаментальной функцией $\mathcal{E}(x) \in S'$, но доказательство этого не элементарно *).

§ 21. Условия гипоеллиптичности по поведению многочлена в вещественной области

1. Условия гипоеллиптичности, выведенные в §§ 19—20, формулируются в терминах, связанных с многообразием комплексных

*) См. L. Hörmander, On the division of distribution by polynomials, Arkiv Mat. 3, № 6 (1958), 555—568; русский перевод в сборнике «Математика», № 5 (1959).

корней многочлена $P(s)$, и поэтому их использование в конкретных случаях затруднительно. Мы выведем в этом параграфе условия гипоеллиптичности, использующие поведение самого многочлена $P(s)$ в действительной области.

Лемма 1. *Если для любого $c > 0$ существует такое $A > 0$, что в области $|\tau| < c$, $|\sigma| > A$ нет корней у многочлена $P(s)$, то для любого вещественного вектора θ*

$$\frac{P(\sigma + \theta)}{P(\sigma)} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad |\sigma| \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Можно предположить, что $\theta = (1, 0, \dots, 0)$. Если $|\sigma| > A + c$ и λ — любая точка поверхности $P(s) = 0$, то $|\sigma - \lambda| > c$. Запишем многочлен $P(\sigma)$ в виде

$$P(\sigma) = P_0(\sigma_2, \dots, \sigma_n) \prod_{j=1}^k (\sigma_1 - \lambda_j(\sigma_2, \dots, \sigma_n)).$$

Отсюда

$$\frac{P(\sigma + \theta)}{P(\sigma)} = \prod_{j=1}^k \frac{\sigma_1 + 1 - \lambda_j}{\sigma_1 - \lambda_j} = \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{\sigma_1 - \lambda_j} \right) = 1 + R,$$

где

$$|R| < \frac{k}{c} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{c^2} + \dots + \frac{1}{c^k} \leq \frac{k}{c} \left(1 + \frac{1}{c} \right)^{k-1}.$$

Очевидно, что при достаточно большом c эта величина становится как угодно малой, чем наша лемма и доказана.

Лемма 2. *Если при любом вещественном векторе θ мы имеем*

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \frac{P(\sigma + \theta)}{P(\sigma)} = 1,$$

то для любого оператора $D^q = \frac{\partial^{q_1 + \dots + q_n}}{\partial \sigma_1^{q_1} \dots \partial \sigma_n^{q_n}} c$ $|q| = \sum q_j > 0$

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \frac{D^q P(\sigma)}{P(\sigma)} = 0.$$

Доказательство. По формуле Тейлора, при $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$

$$P(\sigma + \theta) = P(\sigma) + \sum_{|q| > 0} \frac{D^q P(\sigma)}{q!} \theta^q,$$

причем сумма в правой части конечна. Далее,

$$\frac{P(\sigma + \theta)}{P(\sigma)} = 1 + \sum_{|q| > 0} \frac{D^q P(\sigma)}{P(\sigma)} \frac{\theta^q}{q!}$$

и, по предположению, при $|\sigma| \rightarrow \infty$

$$\sum_{|q| > 0} \frac{D^q P(\sigma)}{P(\sigma)} \frac{\theta^q}{q!} \rightarrow 0.$$

Так как одночлены $\frac{\theta^q}{q!}$ как функции от $\theta_1, \dots, \theta_n$, линейно независимы, то $\frac{D^q P(\sigma)}{P(\sigma)} \rightarrow 0$ при каждом $q \neq 0$ и $|\sigma| \rightarrow \infty$, что и требуется.

Следствие. При выполнении условий леммы 2

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} |P(\sigma)| = +\infty.$$

Действительно, среди производных многочлена $P(\sigma)$ имеется постоянная, отличная от нуля; так как при любом $q \neq 0$, по доказанному, $\frac{D^q P(\sigma)}{P(\sigma)} \rightarrow 0$, то и $\frac{1}{P(\sigma)} \rightarrow 0$, откуда $|P(\sigma)| \rightarrow \infty$.

Лемма 3. Если при любом $q \neq 0$

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \frac{D^q P(\sigma)}{P(\sigma)} = 0,$$

то соотношение

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \frac{P(\sigma + \theta)}{P(\sigma)} = 1$$

осуществляется равномерно по всем $|\theta| < c$ (допускаются и комплексные θ).

Доказательство. Мы имеем

$$P(\sigma + \theta) = P(\sigma) + \sum_{|q| > 0} D^q P(\sigma) \frac{\theta^q}{q!};$$

таким образом,

$$\frac{P(\sigma + \theta)}{P(\sigma)} = 1 + \sum_{|q| > 0} \frac{D^q P(\sigma)}{P(\sigma)} \frac{\theta^q}{q!},$$

откуда и следует утверждение леммы.

Следствие. Если при любом $q \neq 0$

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \frac{D^q P(\sigma)}{P(\sigma)} = 0,$$

то для любого $c > 0$ можно найти такое $A > 0$, что в области $|\tau| < c$, $|\sigma| > A$ многочлен $P(s)$ не имеет корней.

Действительно, пусть для некоторого $c > 0$ имеется последовательность $\lambda_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ корней многочлена $P(s)$, удовлетворяющих условию $|\tau_\nu| < c$, $|\sigma_\nu| \rightarrow \infty$. Шары радиуса c с центрами в точках

$\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ пересекают вещественное подпространство R_π по некоторым вещественным шарам. Многочлен $P(s)$, отличный от тождественного нуля, в каждом из этих шаров имеет точку σ'_ν , где $P(\sigma'_\nu) \neq 0$. Очевидно, $\lambda_\nu = \sigma'_\nu + \theta_\nu$, где $|\theta_\nu| < \epsilon$. Мы имеем, далее,

$$\frac{P(\sigma'_\nu + \theta_\nu)}{P(\sigma'_\nu)} = \frac{P(\lambda_\nu)}{P(\sigma'_\nu)} = 0,$$

что противоречит доказанному соотношению

$$\frac{P(\sigma + \theta)}{P(\sigma)} \rightarrow 1.$$

Леммы 1, 2, 3 приводят к следующей теореме, дающей необходимые и достаточные условия гипозеллиптичности многочлена $P(s)$.

Теорема. *Многочлен $P(s)$ гипозеллиптичен тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух (эквивалентных) условий:*

- 1) $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \frac{P(\sigma + \theta)}{P(\sigma)} \rightarrow 1$ при любом векторе θ ;
- 2) $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \frac{D^q P(\sigma)}{P(\sigma)} = 0$ при $q \neq 0$.

Заметим при этом, что второе условие можно еще ослабить, ограничившись рассмотрением только первых производных многочлена $P(\sigma)$:

Лемма. *Если $\frac{D^1 P(\sigma)}{P(\sigma)} \rightarrow 0$ (D^1 — символ любой из производных $\frac{\partial}{\partial \sigma_j}$), то многочлен $P(s)$ гипозеллиптичен.*

Доказательство. По формуле Лагранжа

$$\ln \frac{P(\sigma + \theta)}{P(\sigma)} = \ln P(\sigma + \theta) - \ln P(\sigma) = \frac{\sum \theta_j \frac{\partial P(\sigma + t\theta)}{\partial \sigma_j}}{P(\sigma + t\theta)}, \quad 0 < t < 1,$$

полагая $|\sigma| \rightarrow \infty$ (θ фиксировано), получаем, что $\ln \frac{P(\sigma + \theta)}{P(\sigma)} \rightarrow 0$, $\frac{P(\sigma + \theta)}{P(\sigma)} \rightarrow 1$, что и требовалось.

2. Многочлен $P(s)$ мы назвали эллиптическим, если все решения уравнения $P\left(t \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ — локально аналитические функции. Мы дадим здесь описание всех эллиптических многочленов по их коэффициентам.

Заметим, что локально аналитические функции — это функции жевреевского класса G_1 (§ 16, п. 5). Применяя результаты §§ 19—20, получаем: *необходимым и достаточным условием эллиптичности многочлена $P(s)$ является выполнение неравенства*

$$|\tau| \geq C|\sigma| - C_1 \quad (1)$$

для всех точек $s = \sigma + i\tau$ нулевого многообразия $N(P)$ многочлена $P(s)$. Мы выведем отсюда следующее явное определение:

Теорема. *Многочлен $P(s)$ эллиптивен тогда и только тогда, когда главная его часть $P_0(s)$ (совокупность всех членов максимальной степени) имеет единственный вещественный корень в точке $s=0$.*

Доказательство. Пусть $P_0(\sigma)$ имеет единственный нуль при $\sigma=0$. Покажем, что существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех комплексных корней многочлена $P(s)$ при достаточно больших $|\sigma|$ выполняется неравенство

$$|\tau| \geq C|\sigma|.$$

Действительно, предполагая противное, мы для каждого $\nu = 1, 2, \dots$ найдем такой корень $s_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$, что $|\tau_\nu| < \frac{1}{\nu}|\sigma_\nu|$, причем $|\sigma_\nu| \rightarrow \infty$. Далее, положим $P(s) = P_0(s) + P_1(s)$, где $P_0(s)$ — главная часть многочлена $P(s)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} 0 &= P(\sigma_\nu + i\tau_\nu) = P_0(\sigma_\nu + i\tau_\nu) + P_1(\sigma_\nu + i\tau_\nu) = \\ &= P_0(\sigma_\nu) + \sum_{0 < |k| < m} D^k P_0(\sigma_\nu) \frac{(i\tau_\nu)^k}{k!} + \sum_{|k| < m-1} D^k P_1(\sigma_\nu) \frac{(i\tau_\nu)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Так как $P_0(s)$ — однородный многочлен степени m , не обращающийся в нуль при вещественных $s = \sigma \neq 0$, то

$$|P_0(\sigma_\nu)| \geq A|\sigma_\nu|^m,$$

где $A > 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} |D^k P_0(\sigma_\nu)| &\leq A_k |\sigma_\nu|^{m-|k|}, \\ |D^k P_1(\sigma_\nu)| &\leq B_k |\sigma_\nu|^{m-1-|k|}. \end{aligned}$$

В результате мы получаем, что

$$\begin{aligned} |P(\sigma_\nu + i\tau_\nu)| &\geq A|\sigma_\nu|^m - \sum_{0 < |k| < m} A_k |\sigma_\nu|^{m-|k|} \frac{1}{\nu^{|k|}} |\sigma_\nu|^{|k|} - \\ &- \sum_{|k| < m} B_k |\sigma_\nu|^{m-1-|k|} |\sigma_\nu|^{|k|} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad |\sigma| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что противоречит предположению $P(\sigma_\nu + i\tau_\nu) = 0$.

Итак, если $P_0(\sigma)$ имеет единственный корень $\sigma = 0$, то многочлен $P(s)$ эллиптичен.

Предположим теперь, что $P_0(\sigma)$ имеет вещественный корень $\sigma \neq 0$. Так как P_0 однороден, то множество его корней состоит из прямых линий, проходящих через начало координат. Можно предположить, что корнем многочлена $P_0(\sigma)$ является точка

$$(1, 0, \dots, 0)$$

и что точка

$$(0, 1, \dots, 0)$$

не является его корнем. Рассмотрим тогда многочлен $Q(s_1, s_2) \equiv \equiv P(s_1, s_2, 0, \dots, 0)$. Запишем его в форме

$$Q(s_1, s_2) = \sum_{k=0}^m a_k s_1^{m-k} s_2^k + \sum_{k < j < m} a_{kj} s_1^{j-k} s_2^k = Q_0(s_1, s_2) + Q_1(s_1, s_2).$$

При этом

$$Q_0(1, 0) = a_0 = 0,$$

$$Q_0(0, 1) = a_m \neq 0.$$

Но в таком случае, как мы видели еще в § 19, п. 1, нижний контур границы диаграммы модулей многочлена Q (а следовательно, и многочлена P) имеет уравнение $\rho = A\xi^\nu E$, $\nu < 1$, так что многочлен P заведомо неэллиптический.

Задачи. 1. Построить негипоэллиптический многочлен $P(s_1, s_2)$, для которого

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} |P(\sigma_1, \sigma_2)| = \infty. \quad (1)$$

Указание. Поверхность нулей многочлена $P(s_1, s_2)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ не должна иметь пересечений с вещественной плоскостью, но и не должна удаляться от нее. Для выполнения (1) можно еще умножить на многочлен, заведомо гипоэллиптический.

Отв. Например, $P(s_1, s_2) = (s_2 - i)(s_2 - is_1) = (s_2^2 - s_1) - is_2(1 + s_1)$.

2. Построить негипоэллиптический многочлен $P(s_1, s_2)$, для которого

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} |P(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma_2 + i\tau_2)| = \infty$$

равномерно при $|\tau_1| \leq C$, $|\tau_2| \leq C$ (C фиксировано).

Указание. Использовать конструкцию задачи 1.

Отв. Например, $P(s_1, s_2) = (s_2 - 2Ci)(s_2 - is_1)$.

3. Доказать, что уравнение первого порядка по t с одной пространственной координатой x

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q\left(t \frac{\partial}{\partial x}\right) u$$

гипоэллиплично тогда и только тогда, когда в разложении многочлена $Q(\sigma) = Q_1(\sigma) + iQ_2(\sigma)$ на вещественную и мнимую части степень многочлена Q_2 не выше степени многочлена Q_1 .

У к а з а н и е. Применить лемму 4. Ее условия приводятся к виду

$$(1) \frac{1}{(\lambda - Q_2(\sigma))^2 + Q_1^2(\sigma)} \rightarrow 0, \quad (2) \frac{[Q_1'(\sigma)]^2 + [Q_2'(\sigma)]^2}{(\lambda - Q_2(\sigma))^2 + Q_1^2(\sigma)} \rightarrow 0.$$

Если $Q_2(\sigma)$ имеет ббльшую степень, чем $Q_1(\sigma)$, то на линии $\lambda = Q_2(\sigma)$ не выполняется (2). Если степень $Q_1(\sigma)$ равна $m \geq 1$ и степень $Q_2(\sigma)$ не превосходит m , то числитель в (2) имеет степень $\leq 2(m-1)$, знаменатель имеет степень (по σ) $\geq 2m$.

4. Доказать, что уравнение любого порядка по t с одной пространственной переменной

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} P_k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u}{\partial t^k}$$

гипоэллиптично тогда и только тогда, когда все старшие коэффициенты A_j разложения на бесконечности

$$\lambda_j = A_j \sigma^j E$$

любого корня уравнения

$$\lambda^m - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma) \lambda^k = 0 \quad (1)$$

не являются чисто мнимыми числами.

У к а з а н и е. Уравнение (1) разложить на множители

$$\prod_{j=1}^m (\lambda - \lambda_j(\sigma))^k = 0$$

и воспользоваться методом задачи 3 и задачи 1 к § 20.

5. Уточнить для β -гипоэллиптического многочлена $P(\sigma)$ теорему п. 1 следующим образом:

$$1) 1 - \frac{P(\sigma + \theta)}{P(\sigma)} = O(|\sigma|^{-1/\beta}),$$

$$2) \frac{D^q P(\sigma)}{P(\sigma)} = O(|\sigma|^{-1/\beta}).$$

У к а з а н и е. Соответственно уточнить рассуждения в леммах 1, 2, 3.

6. Получить формулу для показателя гипоэллиптичности (В. П. Паламо-мов)

$$\beta = - \overline{\lim}_{|\sigma| \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln \frac{|\text{grad } P(\sigma)|}{|P(\sigma)|}}{\ln |\sigma|} \right\}.$$

У к а з а н и е. Использовать задачу 5.

§ 22. Метод Радона

1. Мы желаем теперь ознакомиться со структурой фундаментальной функции для негипоэллиптического оператора $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Можно заранее сказать, что у таких фундаментальных функций имеются

особенности (в смысле потери бесконечной дифференцируемости) как угодно далеко от начала координат (§ 20, задача 4). Кроме того, можно показать, что для любой области G существует решение уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ с особенностью именно в этой области; добавляя к фундаментальной функции, допустим, бесконечно дифференцируемой, такое решение, мы получим новое фундаментальное решение, уже с особенностью в G . Таким образом, возможности для построения «плохих» фундаментальных функций весьма велики; нас будет интересовать вопрос о существовании фундаментальной функции $\mathcal{E}(x)$ с минимальным множеством особенностей. Мы покажем, что для однородного многочлена $P(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ с достаточно гладкой поверхностью нулей всегда есть фундаментальная функция оператора $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ с особенностями, сосредоточенными в некотором конусе размерности $\leq n - 1$.

Средством для получения подобных результатов будет служить метод представления фундаментальных функций, называемый *методом Радона*.

Пусть дан линейный дифференциальный оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ порядка m с постоянными коэффициентами.

Мы хотим решить уравнение

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\mathcal{E}(x_1, \dots, x_n) = \delta(x_1, \dots, x_n). \quad (1)$$

Представим дельта-функцию в правой части в виде сферического интеграла (§ 11, п. 6)

$$\delta(x) = \int_{\Omega} f((\omega, x)) d\omega,$$

где

$$f(\xi) = \begin{cases} a_n \delta^{(n-1)}(\xi) & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ b_n \xi^{-n} & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Далее, вместо уравнения (1) рассмотрим уравнение с параметром ω :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\mathcal{E}_{\omega}(x_1, \dots, x_n) = f((\omega, x)). \quad (2)$$

Естественно искать его решение в форме обобщенной функции $\mathcal{E}_{\omega}(\xi)$, зависящей только от аргумента $(\omega, x) = \xi$ (см. § 6, п. 2, пример 4). При этом заметим, что для функций $f((\omega, x))$ справедлива обычная формула дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \omega_j \frac{d}{d\xi}$$

(§ 7, п. 2, пример 4); таким образом, уравнение (2) для функции $\mathcal{E}_\omega(\xi)$ приобретает форму

$$P\left(\omega_1 \frac{d}{d\xi}, \dots, \omega_n \frac{d}{d\xi}\right) \mathcal{E}_\omega(\xi) = f(\xi). \quad (3)$$

Уравнение (3) есть уже обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром ω . Допустим, что мы нашли его решение $\mathcal{E}_\omega(\xi)$, непрерывно зависящее от параметра ω . Тогда можно утверждать, что интеграл

$$\mathcal{E}(x) = \int_{\Omega} \mathcal{E}_\omega(\xi) d\omega \quad (4)$$

дает решение поставленной задачи. Действительно, поскольку в обобщенных функциях дифференцирование есть непрерывная операция, мы имеем

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathcal{E}(x) &= \int_{\Omega} P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathcal{E}_\omega(\xi) d\omega = \\ &= \int_{\Omega} P\left(\omega_1 \frac{d}{d\xi}, \dots, \omega_n \frac{d}{d\xi}\right) \mathcal{E}_\omega(\xi) d\omega = \int_{\Omega} f(\xi) d\omega = \delta(\xi), \end{aligned}$$

что и требуется.

Итак, дело сводится к нахождению решения уравнения (3), непрерывно зависящего от параметра ω .

Пусть $P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ есть главная часть многочлена $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, т. е. совокупность всех его членов размерности ровно m . Мы имеем $P = P_0 + P_1$, где P_1 — младшие члены, далее,

$$\begin{aligned} P\left(\omega_1 \frac{d}{d\xi}, \dots, \omega_n \frac{d}{d\xi}\right) &= P_0\left(\omega_1 \frac{d}{d\xi}, \dots, \omega_n \frac{d}{d\xi}\right) + \\ &+ P_1\left(\omega_1 \frac{d}{d\xi}, \dots, \omega_n \frac{d}{d\xi}\right) = P_0(\omega) \frac{d^m}{d\xi^m} + P_1\left(\omega_1 \frac{d}{d\xi}, \dots, \omega_n \frac{d}{d\xi}\right). \end{aligned}$$

Мы видим, что коэффициентом при старшей производной по ξ служит $P_0(\omega)$. Если уравнение (1) эллиптическое, то $P_0(\omega)$ не обращается в нуль (§ 21, п. 2). В этом случае нетрудно найти решение $\mathcal{E}_\omega(\xi)$, непрерывно зависящее от параметра ω , используя методы § 5 (п. 3 и далее). В общем случае положение более сложное; мы отложим его рассмотрение до пункта 3.

2. Сейчас мы рассмотрим случай *однородного* эллиптического многочлена P степени m . В этом случае многочлен P_1 отсутствует, и уравнение (3) приводится к виду

$$P_0(\omega) \frac{d^m \mathcal{E}_\omega(\xi)}{d\xi^m} = f(\xi), \quad P_0(\omega) \neq 0. \quad (5)$$

Разберем два случая: четного и нечетного n . Если n нечетно, то $f(\xi) = a_n \delta^{(n-1)}(\xi)$ и уравнение (5) легко интегрируется в явном виде:

$$\mathcal{E}_\omega(\xi) = \begin{cases} \frac{a_n}{P_0(\omega)} \delta^{(n-1-m)}(\xi), & \text{если } m \leq n-1, \\ \frac{a_{n,m}}{P_0(\omega)} \xi_+^{m-n}, & \text{если } m \geq n. \end{cases}$$

При n четном мы имеем $f(\xi) = b_n \xi^{-n}$ и соответственно

$$\mathcal{E}_\omega(\xi) = \begin{cases} \frac{b_{nm}}{P_0(\omega)} \xi^{-n+m} & \text{при } m \leq n-1, \\ \frac{b_{nm}}{P_0(\omega)} \xi^{m-n} \ln |\xi| & \text{при } m \geq n. \end{cases}$$

Очевидно, что найденные решения непрерывно зависят от ω . Поэтому, в силу формулы (4), мы можем написать

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} a_n \int_{\Omega} \frac{\delta^{(n-1-m)}(\xi)}{P_0(\omega)} d\omega & \text{при } n \text{ нечетном, } m \leq n-1, \\ a_{nm} \int_{\Omega} \frac{\xi_+^{m-n}}{P_0(\omega)} d\omega & \text{при } n \text{ нечетном, } m \geq n, \\ b_{nm} \int_{\Omega} \frac{\xi^{-n+m}}{P_0(\omega)} d\omega & \text{при } n \text{ четном, } m \leq n-1, \\ b_{nm} \int_{\Omega} \frac{\xi^{m-n} \ln |\xi|}{P_0(\omega)} d\omega & \text{при } n \text{ четном, } m \geq n. \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что полученные функции $\mathcal{E}(x)$ бесконечно дифференцируемы по x при $x \neq 0$; это, помимо общих соображений о свойствах эллиптических уравнений, следует из рассуждений § 10, п. 7.

3. Рассмотрим случай неэллиптического, но однородного многочлена $P \equiv P_0$. В этом случае выражение $P_0(\omega)$ обращается в 0 в некоторых точках сферы Ω . Мы предположим, далее, что в тех точках ω_0 , где $P_0(\omega) = 0$, хотя бы одна из производных многочлена P уже не обращается в нуль. В таком случае в окрестности точки ω_0 уравнение $P_0(\omega_1, \dots, \omega_n) = 0$ может быть разрешено относительно соответствующей координаты. Поэтому в окрестности точки ω_0 можно перейти к новой системе координат, одной из которых будет сама величина $P_0(\omega)$.

В качестве искомой фундаментальной функции мы снова рассмотрим интеграл вида (6) п. 2, т. е.

$$\int_{\Omega} \frac{F(\xi) d\omega}{P_0(\omega)},$$

причем условимся понимать его в смысле Коши:

$$I(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|P_0(\omega)| > \varepsilon} \frac{F(\xi) d\omega}{P_0(\omega)} = \lim I_\varepsilon(x). \quad (1)$$

Покажем прежде всего, что этот предел существует (в K').

Напомним некоторые сведения об интеграле в смысле Коши для обычных функций. Пусть имеется интеграл вида

$$\int_{\Omega} \frac{g(\omega) d\omega}{P_0(\omega)},$$

где $g(\omega)$ — бесконечно дифференцируемая функция, а $P_0(\omega)$ удовлетворяет указанным выше условиям.

Покажем, что выражение

$$\int_{|P_0(\omega)| > \varepsilon} \frac{g(\omega) d\omega}{P_0(\omega)} \quad (2)$$

имеет предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. Введем в области $|P_0(\omega)| \leq \varepsilon_0$ координаты $\theta = P_0(\omega)$ и ω' ; тогда можно написать $g(\omega) d\omega = G(\theta, \omega') d\theta d\omega'$, где $G(\theta, \omega')$ — бесконечно дифференцируемая функция.

В частности, мы можем написать

$$G(\theta, \omega') = G(0, \omega') + \theta G_1(\theta, \omega'),$$

где $G_1(\theta, \omega')$ — ограниченная непрерывная функция. Далее,

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon < |\theta| < \varepsilon_0} \frac{G(0, \omega') d\theta}{\theta} &= G(0, \omega') \int_{\varepsilon < |\theta| < \varepsilon_0} \frac{d\theta}{\theta} = 0, \\ \int_{\varepsilon < |\theta| < \varepsilon_0} \frac{\theta G_1(\theta, \omega') d\theta}{\theta} &= \int_{\varepsilon < |\theta| < \varepsilon_0} G_1(\theta, \omega') d\theta \rightarrow \int_{|\theta| < \varepsilon_0} G_1(\theta, \omega') d\theta, \end{aligned}$$

откуда следует, что существует предел

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |P_0(\omega)| < \varepsilon_0} \frac{g(\omega) d\omega}{P_0(\omega)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega'} \int_{\varepsilon < |\theta| < \varepsilon_0} \frac{G(\theta, \omega') d\theta}{\theta} d\omega' = \\ &= \int_{\omega'} \int_{|\theta| < \varepsilon_0} \frac{G(\theta, \omega') - G(0, \omega')}{\theta} d\theta d\omega'. \end{aligned}$$

который в сумме с интегралом по области $|P_0(\omega)| \geq \varepsilon_0$ и является искомым интегралом в смысле Коши.

Применяя $I_\varepsilon(x)$ (1) к основной функции $\varphi(x)$, получаем

$$(I_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \int_{|P_0| \geq \varepsilon} (f(\xi), \varphi(x)) \frac{d\omega}{P_0(\omega)}.$$

Функция от ω , стоящая в числителе

$$(f(\xi), \varphi(x)) = (f((\omega, x)), \varphi(x)),$$

как мы видели в § 10, п. 7, бесконечно дифференцируема по ω . По сказанному выше, существует

$$(I(x), \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|P_0| \geq \varepsilon} \frac{(f(\xi), \varphi) d\omega}{P_0(\omega)}.$$

Предел (1), в силу общей теоремы о пределе непрерывных функционалов, есть снова непрерывный функционал, что нам и требуется.

Покажем, что функционал

$$\mathcal{E}(x) = \int_{\Omega} \frac{f(\xi) d\omega}{P_0(\omega)},$$

определенный, как выше, есть решение уравнения

$$P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathcal{E}(x) = \delta(x).$$

Действительно, мы имеем

$$P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathcal{E}(x) = \int_{\Omega} \frac{P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(\xi) d\omega}{P_0(\omega)},$$

$$P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(\xi) = P_0\left(\omega_1 \frac{d}{d\xi}, \dots, \omega_n \frac{d}{d\xi}\right) f(\xi) = P_0(\omega) \frac{d^m f}{d\xi^m},$$

откуда, по определению функционала $f(\xi)$,

$$P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathcal{E}(x) = \int_{\Omega} \frac{d^m f}{d\xi^m} d\omega = \delta(x).$$

Итак, функционал

$$\mathcal{E}(x) = \int_{\Omega} \frac{f(\xi) d\omega}{P_0(\omega)}$$

есть искомое фундаментальное решение.

4. Покажем далее, что $\mathcal{E}(x)$ есть бесконечно дифференцируемая функция от x всюду, кроме некоторого конуса размерности $< n$.

Именно, будем считать направление x *особым*, если экватор $(\omega, x) = 0$ касается (на сфере $|\omega| = 1$) в некоторой точке поверхности $P_0(\omega) = 0$, и *обычным*, если экватор $(\omega, x) = 0$ или вовсе не имеет общих точек с этой поверхностью, или каждая их общая точка является точкой пересечения с различными касательными плоскостями (размерности, естественно, $n - 2$).

Особые направления образуют конус, который можно построить следующим образом. Возьмем любую точку ω_0 на поверхности $P_0(\omega) = 0$ и в этой точке проведем касательный большой круг к этой кривой; если уравнение этого круга есть $(\omega, x_0) = 0$, то x_0 — особое направление. Очевидно, что размерность конуса особых направлений равна размерности конуса, определяемой кривой $P_0(\omega) = 0$, и тем самым меньше размерности всего пространства.

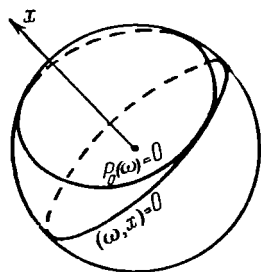


Рис. 12. Особое направление.

Покажем, что *вне конуса особых направлений функция $\mathcal{E}(x)$ бесконечно дифференцируема.*

Рассмотрим вначале интеграл в смысле Коши

$$F(x) = \int_{\Omega} \frac{f((\omega, x)) g(\omega)}{P_0(\omega)} d\omega,$$

где $f(\xi)$ — бесконечно дифференцируемая функция при всех $\xi \neq 0$ и обычная функция для всех ξ . Мы можем написать разложение $g(\omega) = g_1(\omega) + g_2(\omega) + g_3(\omega)$, где g_1, g_2, g_3 — бесконечно дифференцируемые функции такие, что

$$g_1(\omega) = 0 \quad \text{при} \quad |P_0(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$g_2(\omega) = 0 \quad \text{при} \quad |P_0(\omega)| \geq \varepsilon \quad \text{или} \quad |(\omega, x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$g_3(\omega) = 0 \quad \text{при} \quad |P_0(\omega)| \geq \varepsilon, \quad \text{или} \quad |(\omega, x)| > \varepsilon.$$

При этом

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x),$$

где

$$F_1(x) = \int_{|P_0| > \frac{\varepsilon}{2}} \frac{f((\omega, x)) g_1(\omega)}{P_0(\omega)} d\omega,$$

$$F_2(x) = \int_{\substack{|P_0| \leq \varepsilon \\ |\xi| > \varepsilon/2}} \int \frac{f((\omega, x)) g_2(\omega)}{P_0(\omega)} d\omega,$$

$$F_3(x) = \int_{\substack{|P_0| \leq \varepsilon \\ |\xi| \leq \varepsilon}} \int \frac{f((\omega, x)) g_3(\omega)}{P_0(\omega)} d\omega.$$

Функция $F_1(x)$ бесконечно дифференцируема при $x \neq 0$ в силу результатов § 10, п. 7.

Далее, в интеграле Коши

$$F_2(x) = \int_{|\xi| > \varepsilon/2} \int_{|P_0| \leq \varepsilon} \frac{f((\omega, x)) g_2(\omega)}{P_0(\omega)} d\omega$$

введем новые координаты, одной из которых будет $\theta = P_0(\omega)$; совокупность остальных обозначим через ω' . Тогда $f((\omega, x)) g_2(\omega) d\omega$ можно записать в форме $g(\theta, \omega', x) d\theta d\omega'$, где $g(\theta, \omega', x)$ — бесконечно дифференцируемая функция от всех своих аргументов. По определению интеграла Коши,

$$F_2(x) = \int_{\omega' \mid |\theta| \leq \varepsilon} \int \frac{g(\theta, \omega', x) - g(0, \omega', x)}{\theta} d\theta d\omega' =$$

$$= \int_{\omega' \mid |\theta| \leq \varepsilon} \int g_1(\theta, \omega', x) d\omega' d\theta,$$

причем $g_1(\theta, \omega', x)$ снова является бесконечно дифференцируемой функцией от своих аргументов. Но тогда и $F_2(x)$ бесконечно дифференцируема, что и требуется.

Остается рассмотреть интеграл

$$F_3(x) = \int_{|P_0| \leq \varepsilon} \int_{|\xi| \leq \varepsilon} \frac{f((\omega, x)) g_3(\omega)}{P_0(\omega)} d\omega.$$

Покажем, что $F_3(x)$ бесконечно дифференцируема при неособых x . Фиксируем неособый вектор $x \neq 0$. Используя предположение о том, что x — не особый вектор, введем в области $|P_0(\omega)| < \varepsilon$, $|\xi| \leq \varepsilon$ систему координат, одной из которых является $\xi = (\omega, x)$, другой $\theta = P_0(\omega)$, совокупность остальных обозначим через ω' . Здесь мы имеем

$$\frac{f((\omega, x)) g_3(\omega) d\omega}{P_0(\omega)} = f(\xi) \frac{G(\xi, \omega', \theta; x)}{\theta} d\theta d\omega' d\xi,$$

где $G(\xi, \omega', \theta; x)$ — бесконечно дифференцируемая функция своих аргументов. Согласно определению интеграла Коши,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{f(\omega, x) g_3(x)}{P_0(\omega)} d\omega &= \\ &= \int_{\omega'} \int_{|\xi| < \varepsilon} \int_{|\theta| < \varepsilon} f(\xi) \frac{G(\xi, \omega', \theta; x) - G(\xi, \omega', 0; x)}{\theta} d\theta d\omega' d\xi. \end{aligned}$$

Интегрируя по θ и ω' , получаем функцию

$$K(x, \xi) = \int_{|\theta| < \varepsilon} \int_{\omega'} \frac{G(\xi, \omega', \theta; x) - G(\xi, \omega', 0; x)}{\theta} d\omega' d\theta,$$

которая снова является бесконечно дифференцируемой функцией от ξ и x , обращающейся в нуль при $|\xi| \geq \varepsilon$. В итоге мы имеем

$$\int_{\Omega} \frac{f(\omega, x) g_3(\omega)}{P_0(\omega)} d\omega = \int_{|\xi| < \varepsilon} f(\xi) K(x, \xi) d\xi = (f(\xi), K(x, \xi)) \quad (1)$$

и, следовательно, $\mathcal{E}(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией от x . Далее, применяя тот же прием, что и в п. 7 § 10, мы получаем, что выражение (1) есть бесконечно дифференцируемая функция от x (при $x \neq 0$) и в том случае, когда $f(\xi)$ есть не просто обычная функция, а интересующий нас функционал. Тем самым теорема о бесконечной дифференцируемости фундаментальной функции $\mathcal{E}(x)$ вне конуса особых направлений доказана полностью.

Задачи. 1. Получить по методу Радона фундаментальную функцию итерированного оператора Лапласа Δ^m (§ 7, п. 2, пример 9).

Указание. $P_0(\omega) \equiv 1$; использовать задачу 10 к § 11.

2. Получить по методу Радона фундаментальную функцию оператора $\Delta + k^2$ (§ 7, задача 8) ($n=3$).

Указание. Интеграл по Ω от функции $e^{ik(\omega, x)}$ можно вычислить разложением в ряд, с использованием формул § 11, п. 6.

3. Если $P(\sigma)$ — однородный многочлен степени m с гладкой поверхностью нулей (как в п. 4), то решение $u(x)$ уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0$, бесконечно дифференцируемое в окрестности пересечения конуса особых направлений с произвольно фиксированной замкнутой поверхностью, содержащей начало координат внутри себя, является бесконечно дифференцируемым и в окрестности начала координат.

Указание. Использовать формулу типа Пуассона из § 16.

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

§ 23. Корректные краевые задачи для систем уравнений

Мы будем рассматривать дифференциальные уравнения с выделенной координатой, обозначаемой через t и меняющейся (как правило) на полуоси $0 \leq t < \infty$. В математической физике имеется ряд классических задач, приводящих к уравнениям такого типа. Обычно рассматривают уравнения, разрешенные относительно старшей производной по t :

$$\frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k}, \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad (1)$$

где $p_k \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right)$ — некоторые многочлены от $t \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, t \frac{\partial}{\partial x_n}$ максимальной степени, например, p . К уравнению (1) присоединяют *начальные условия*, накладываемые, как правило, на функции $u(0, x), \frac{\partial u(0, x)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u(0, x)}{\partial t^{m-1}}$. В некоторых случаях указывается желательное поведение решения $u(t, x)$ при $t \rightarrow \infty$. Все эти данные образуют *краевую задачу* для уравнения (1). Кроме того, указывается класс функций от x (может быть, обобщенных), которому должно принадлежать решение $u(t, x)$ при каждом фиксированном t .

Краевая задача считается *корректно поставленной в некотором классе R* , если при любой допустимой системе краевых данных она имеет решение в этом классе, единственное в нем и непрерывно зависящее от системы краевых данных; последнее условие требует, чтобы класс R обладал некоторой топологией с тем, чтобы оператор, переводящий допустимую начальную функцию $u(x)$ в решение $u(t, x)$, был непрерывным в R .

Приведем несколько классических примеров корректных краевых задач с одним пространственным переменным.

1. Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$$

является корректной *задача Коши*: найти решение при заданной функции $u(0, x)$. В качестве класса R можно взять, например, класс ограниченных функций.

2. Для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$$

корректной является также *задача Коши*, которая в данном случае требует задания $u(0, x)$ и $\frac{\partial u(0, x)}{\partial t}$. В качестве класса R можно взять все обобщенные функции.

3. Для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$$

является корректной *задача Дирихле* (задана $u(0, x)$) с дополнительным условием $u(t, x) = O(t^h)$ при $t \rightarrow \infty$. В качестве класса R можно при этом взять совокупность \mathcal{H} квадратично интегрируемых функций (по x) и их производных любого порядка (в K').

Мы укажем корректные краевые задачи для любого уравнения вида (1). При этом для всех уравнений (1) можно взять один и тот же класс R (хотя в различных случаях его можно и расширять) — именно, совокупность \mathcal{H} всех квадратично интегрируемых функций $f(x) \equiv f(x_1, \dots, x_n)$, определенных в n -мерном вещественном евклидовом пространстве $R_n = R_n(x)$, и их производных любого порядка (в K'). Впрочем, как мы увидим ниже, окончательный результат можно сформулировать и в классических терминах, без обобщенных функций; решение соответствующей краевой задачи будет обычной функцией, если потребовать от начальных функций некоторой дополнительной гладкости.

Двойственным к пространству \mathcal{H} в смысле преобразования Фурье является пространство H , состоящее из всех квадратично интегрируемых функций $g(\sigma) = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, определенных в n -мерном вещественном евклидовом пространстве $R_n = R_n(\sigma)$, и их произведений на любые многочлены. В частности, пространство H содержит все функции $g(\sigma)$ не более чем степенного роста при $|\sigma| \rightarrow \infty$, поскольку всякая такая функция, будучи разделена на некоторый многочлен достаточно большой степени, например вида

$$(1 + \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)^q \quad \text{или} \quad (1 + i\sigma_1)^m \dots (1 + i\sigma_n)^m,$$

становится квадратично интегрируемой. Очевидно также, что в пространстве H допустимо умножение на всякую функцию, локально ограниченную и не более чем степенного роста при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Рост функций $g(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ тесно связан с порядком сингулярности соответствующих функций $f(x)$. Умножение $g(\sigma)$ на многочлен равносильно дифференцированию соответствующего порядка функции $f(x) = F^{-1}[g]$; отсюда, например, можно получить полезную формулу для порядка сингулярности

$$s[F^{-1}P_m(\sigma)g(\sigma)] \leq m + s[F^{-1}[g(\sigma)]] = m + s(f),$$

где $P_m(\sigma)$ — многочлен степени m . Если при этом $g(\sigma) \in L_2$, то и $f(x) \in L_2$, так что $s(f) \leq 0$. Поэтому если функция $g_0(\sigma)$ после деления на многочлен $P_m(\sigma)$ степени m становится квадратично интегрируемой, то порядок сингулярности соответствующей функции $f_0(x)$ не превосходит m .

Пространство \mathcal{H} не замкнуто в K' , поэтому в нем более естественна иная сходимость, относительно которой \mathcal{H} полно. Удобнее рассмотреть пространство H . Это пространство можно представить в форме объединения

$$H = \bigcup_{q=0}^{\infty} H^{(q)},$$

где $H^{(q)}$ есть гильбертово пространство с метрикой

$$(g_1(\sigma), g_2(\sigma))_q = \int_{R_n} \frac{\overline{g_1(\sigma)} g_2(\sigma) d\sigma}{(1 + |\sigma|^2)^q}.$$

Будем говорить, что последовательность $g_\nu(\sigma) \in H$ сходится в H к нулю, если при некотором (следовательно, и при всех достаточно больших) q для элементов $g_\nu(\sigma)$ определена норма

$$(g_\nu, g_\nu)_q = \|g_\nu\|_q^2$$

и $\|g_\nu\|_q \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$. В соответствии с этим последовательность $f_\nu(x) \in \mathcal{H}$ сходится в \mathcal{H} к нулю, если существует такое q , что $f_\nu = (1 - \Delta)^q \hat{f}_\nu$, $\hat{f}_\nu \in L_2$ и $\hat{f}_\nu(\sigma)$ сходится к нулю в L_2 .

Линейный оператор B , действующий в H (или \mathcal{H}), называется непрерывным, если из $g_\nu(\sigma) \rightarrow 0$ в H ($f_\nu(x) \rightarrow 0$ в \mathcal{H}) следует $Bg_\nu \rightarrow 0$ в H ($Bf_\nu \rightarrow 0$ в \mathcal{H}). Так, например, умножение на функцию $G(\sigma)$, удовлетворяющую неравенству

$$|G(\sigma)| \leq C(1 + |\sigma|^2)^m,$$

есть непрерывный оператор в H ; действительно, пусть при $q \geq q_0$ мы имеем

$$\|g_v(\sigma)\|_q^2 = \int \frac{|g_v(\sigma)|^2 d\sigma}{(1+|\sigma|^2)^q} \rightarrow 0;$$

тогда при $q \geq q_0 + m$

$$\|G(\sigma) g_v(\sigma)\|_q^2 \leq C \int \frac{(1+|\sigma|^2)^m |g_v(\sigma)|^2}{(1+|\sigma|^2)^q} d\sigma = C \int \frac{|g_v(\sigma)|^2 d\sigma}{(1+|\sigma|^2)^{q-m}} \rightarrow 0,$$

что и требуется.

Последовательность $g_v(\sigma) \in H$ ограничена в H , если все $g_v(\sigma)$ принадлежат к одному и тому же H^q и ограничены по его норме.

Последовательность $g_v(\sigma)$ *возрастает в H не быстрее некоторой (числовой) функции $\pi(v)$* , если последовательность $\frac{1}{\pi(v)} g_v(\sigma)$ ограничена в H .

Аналогичные определения естественно формулируются для случая семейства $g_t(\sigma)$ с непрерывно меняющимся параметром t . С помощью обратного преобразования Фурье эти определения переносятся и в пространство \mathcal{H} .

Рассмотрим теперь уравнение (1), считая, что решения его разыскиваются в классе функций $u(t, x)$, которые при каждом $t \geq 0$ принадлежат классу \mathcal{H} , так же как и все производные $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}, \dots$

$\dots, \frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m}$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим алгебраическое уравнение, получающееся из (1) заменой $\frac{\partial}{\partial t}$ на λ и $i \frac{\partial}{\partial x}$ на σ :

$$\lambda^m = \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma) \lambda^k.$$

Это уравнение имеет (с учетом кратностей) m корней $\lambda_0(\sigma), \dots$

$\dots, \lambda_{m-1}(\sigma)$. Нумерацию их при каждом σ мы устанавливаем с тем чтобы иметь

$$\operatorname{Re} \lambda_0(\sigma) \leq \operatorname{Re} \lambda_1(\sigma) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_{m-1}(\sigma).$$

Обозначим через A_j множество точек $\sigma \in R_n$, для которых

$$\operatorname{Re} \lambda_0(\sigma) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_{j-1}(\sigma) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m);$$

очевидно, $A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_{m-1}$. Все эти множества будем рассматривать с точностью до множеств меры 0. Следующая основная теорема указывает корректную задачу для уравнения (1):

Основная теорема. Пусть на каждом из множеств A_j задана функция $v_j(\sigma)$, продолжаемая на все пространство $R_n(\sigma)$ до функции из пространства H (будем писать $v_j(\sigma) \in \in H(A_j)$). Утверждается, что уравнение (1) имеет решение $u(t, x)$, у которого преобразование Фурье функции $\frac{\partial^{j-1}u(0, x)}{\partial t^{j-1}}$ совпадает на множестве A_{j-1} с функцией $v_{j-1}(\sigma)$ ($j=1, 2, \dots, m$). Это решение $u(t, x)$ при каждом $t \geq 0$ принадлежит пространству \mathcal{H} и при $t \rightarrow \infty$ возрастает в H не быстрее некоторой степени t вместе со всеми производными по t до порядка $m-1$. Оно единственно в классе всех решений уравнения (1), принадлежащих \mathcal{H} , возрастающих в H при $t \rightarrow \infty$ вместе с производными по t до порядка $m-1$ не быстрее степени t и удовлетворяющих тем же начальным условиям, кроме того, оно непрерывно зависит в топологии \mathcal{H} от заданных функций $v_j(\sigma)$, если эти функции меняются непрерывно в топологии пространства H .

Доказательство этой теоремы будет дано в § 26. Здесь мы приведем несколько примеров ее применения к конкретным уравнениям.

1. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Здесь $\lambda_0 = -\sigma^2$; множество $A_0 = \{\sigma: -\sigma^2 \leq 0\}$ совпадает со всей осью σ . Корректная задача состоит в задании $v_0(\sigma) = F[u(0, x)]$ при всех σ ; но задать $v_0(\sigma)$ при всех σ в силу единственности преобразования Фурье все равно, что задать функцию $u(0, x)$. Итак, корректная задача состоит в задании функции $u(0, x)$.

2. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

здесь $\lambda^2 = -\sigma^2$, $\lambda_{0,1} = \pm |\sigma|$, множества $A_0 = \{\sigma: \operatorname{Re} \lambda_0(\sigma) \leq 0\}$ и $A_1 = \{\sigma: \operatorname{Re} \lambda_1(\sigma) \leq 0\}$ оба совпадают со всей осью σ . Корректная краевая задача состоит в задании $v_0(\sigma) = F[u(0, x)]$ и $v_1(\sigma) = F\left[\frac{\partial u(0, x)}{\partial t}\right]$ при всех σ , что равносильно заданию самих $u(0, x)$ и $\frac{\partial u(0, x)}{\partial t}$.

3. Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Здесь $\lambda^2 = \sigma^2$, $\lambda_{0,1} = \pm |\sigma|$. Множество $A_0 = \{\sigma: -|\sigma| \leq 0\}$ совпадает со всей осью σ , множество $A_1 = \{\sigma: |\sigma| \leq 0\}$ состоит из одной точки, иными словами, эквивалентно пустому множеству. Следует

вадать $v_0(\sigma) = F[u(0, x)]$ при всех σ , что равносильно заданию самой $u(0, x)$; получаем задачу Дирихле.

Рассмотрим два неклассических уравнения.

4. Обратное уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Здесь $\lambda_0 = \sigma^2$ и $A_0 = (0)$. В классе всех решений $u(t, x) \in \mathcal{H}$ имеется единственное, возрастающее в \mathcal{H} не быстрее степени t , именно, $u(t, x) \equiv 0$.

5. Ультрагиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$$

Здесь

$$\lambda_{0,1} = \pm \sqrt{-\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_3^2};$$

при этом $\operatorname{Re} \lambda_0(\sigma)$ неположительна всюду, а $\operatorname{Re} \lambda_1(\sigma)$ неположительна в области $A_1 = \{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \geq \sigma_3^2\}$. Корректная задача состоит в задании $v_0(\sigma)$ всюду, т. е. в задании $u(0, x) \in \mathcal{H}$, и $v_1(\sigma)$ на области A_1 , т. е. в задании значений

$$\int_{R_3} \int \int \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} e^{i(x, \sigma)} dx_1 dx_2 dx_3$$

при $\sigma \in A_1$.

Задача 1. Указать корректные краевые задачи для уравнений

$$\text{а) } \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}; \quad \text{б) } \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}; \quad \text{в) } \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k^2 u.$$

Отв. Следует задавать: а) $u(0, x)$, $\frac{\partial u(0, x)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u(0, x)}{\partial t^2}$; б) $u(0, x)$,

$\frac{\partial u(0, x)}{\partial t}$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} u(0, x) e^{i x \sigma} dx$ на множестве $A_0 = \{\sigma \mid |\sigma| \leq k\}$.

§ 24. Вспомогательные построения

Для доказательства основной теоремы нам понадобятся некоторые сведения и оценки из теории интерполирования.

1. Пусть имеется функция $f(\lambda)$, аналитическая в выпуклой области G и $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$ — различные фиксированные точки в этой области. Построим многочлен $R(\lambda)$, принимающий в точках $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$ соответственно те же значения, что и функция $f(\lambda)$, т. е. числа $f_0 = f(\lambda_0), \dots, f_{m-1} = f(\lambda_{m-1})$. Такой многочлен можно построить по формуле Ньютона

$$R(\lambda) = b_0 + b_1(\lambda - \lambda_0) + b_2(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) + \dots + b_{m-1}(\lambda - \lambda_0) \dots (\lambda - \lambda_{m-2}), \quad (1)$$

где m неизвестных коэффициентов b_0, \dots, b_{m-1} должны быть определены из m условий $R(\lambda_0) = f_0, \dots, R(\lambda_{m-1}) = f_{m-1}$. Подставляя в (1) вместо λ поочередно значения $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$, приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= b_0, \\ f_1 &= b_0 + b_1(\lambda_1 - \lambda_0), \\ f_2 &= b_0 + b_1(\lambda_2 - \lambda_0) + b_2(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1), \\ &\dots \\ f_{m-1} &= b_0 + b_1(\lambda_{m-1} - \lambda_0) + b_2(\lambda_{m-1} - \lambda_0)(\lambda_{m-1} - \lambda_1) + \dots \\ &\quad \dots + b_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_0) \dots (\lambda_{m-1} - \lambda_{m-2}). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Эти уравнения позволяют последовательно получить значения b_0, \dots, b_{m-1} . Для построения простых и симметричных формул введем обозначения

$$\begin{aligned} [f_j] &= f_j, \\ [f_{0k}] &= \frac{[f_k] - [f_0]}{\lambda_k - \lambda_0}, \\ [f_{01l}] &= \frac{[f_{0l}] - [f_{01}]}{\lambda_l - \lambda_1}, \\ &\dots \\ [f_{01 \dots k p}] &= \frac{[f_{0 \dots k-1, p}] - [f_{0 \dots k-1, k}]}{\lambda_p - \lambda_k}. \end{aligned}$$

Первое из уравнений (2) дает $b_0 = f_0 = [f_0]$. Второе дает $b_1 = \frac{f_1 - b_0}{\lambda_1 - \lambda_0} = \frac{[f_1] - [f_0]}{\lambda_1 - \lambda_0} = [f_{01}]$. Проверим, что при любом $k = 0, 1, \dots, m-1$ мы будем иметь $b_k = [f_{01 \dots k}]$. Допустим, что это справедливо при $j < k$. Тогда из $k+1$ -го уравнения (2) мы находим

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{[f_k] - [f_0] - [f_{01}](\lambda_k - \lambda_0) - \dots - [f_{01 \dots k-1}](\lambda_k - \lambda_0) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})}{(\lambda_k - \lambda_0)(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})} = \\ &= \frac{[f_k] - [f_0]}{(\lambda_k - \lambda_0) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})} - \frac{[f_{01}]}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})} - \dots - \frac{[f_{01 \dots k-1}]}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} = \\ &= \frac{[f_{0k}] - [f_{01}]}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})} - \dots - \frac{[f_{01 \dots k-1}]}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} = \\ &= \frac{[f_{01k}] - [f_{012}]}{(\lambda_k - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})} - \dots - \frac{[f_{01 \dots k-1}]}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} = \dots = [f_{01 \dots k}]. \end{aligned}$$

Итак, многочлен Ньютона имеет вид

$$R(\lambda) = [f_0] + [f_{01}](\lambda - \lambda_0) + [f_{012}](\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) + \dots \\ \dots + [f_{01 \dots m-1}](\lambda - \lambda_0) \dots (\lambda - \lambda_{m-2}).$$

Можно дать для коэффициентов b_k выражения через производные функции $f(\lambda)$. Для этого рассмотрим числа

$$\left. \begin{aligned} u_j &= f(\lambda_j), \\ u_{0k} &= \int_0^1 f'[\lambda_0 + t_k(\lambda_k - \lambda_0)] dt_k, \\ u_{011} &= \int_0^1 \int_0^{t_k} [\lambda_0 + t_1(\lambda_1 - \lambda_0) + t_1(\lambda_1 - \lambda_1)] dt_1 dt_k, \\ &\dots \\ u_{01 \dots k p} &= \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_k} f^{(k+1)}[\lambda_0 + t_1(\lambda_1 - \lambda_0) + t_2(\lambda_2 - \lambda_1) + \dots \\ &\quad \dots + t_k(\lambda_k - \lambda_{k-1}) + t_p(\lambda_p - \lambda_k)] dt_1 \dots dt_k dt_p. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Чтобы установить связь между числами $u_{01 \dots k p}$, произведем в выражении $u_{01 \dots k p}$ интегрирование по переменному t_p . Мы получим

$$\begin{aligned} u_{01 \dots k p} &= \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_k} f^{(k)}[\lambda_0 + t_1(\lambda_1 - \lambda_0) + \dots \\ &\quad \dots + t_k(\lambda_k - \lambda_{k-1}) + t_p(\lambda_p - \lambda_k)] \Big|_{t_p=0}^{t_k} dt_1 \dots dt_k = \\ &= \frac{1}{\lambda_p - \lambda_k} \left\{ \int_0^1 \dots \int_0^{t_{k-1}} f^{(k)}[\lambda_0 + t_1(\lambda_1 - \lambda_0) + \dots \right. \\ &\quad \dots + t_k(\lambda_p - \lambda_k)] dt_1 \dots dt_k - \int_0^1 \dots \int_0^{t_{k-1}} f^{(k)}[\lambda_0 + t_1(\lambda_1 - \lambda_0) + \dots \\ &\quad \dots + t_k(\lambda_k - \lambda_{k-1})] dt_1 \dots dt_k \left. \right\} = \frac{u_{01 \dots k-1, p} - u_{01 \dots k-1, k}}{\lambda_p - \lambda_k}. \quad (4) \end{aligned}$$

Так как $u_0 = f_0 = [f_0]$, то, применяя формулу (4) для u_{01}, u_{02}, \dots получаем $u_{01} = [f_{01}], \dots, u_{01 \dots m-1} = [f_{01 \dots m-1}]$.

Мы видим, что коэффициенты полинома Ньютона могут быть вычислены и по формулам (3), а именно,

$$b_k = [f_{01 \dots k}] = u_{01 \dots k} = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} f^{(k)} [\lambda_0 + t_1(\lambda_1 - \lambda_0) + \dots + t_k(\lambda_k - \lambda_{k-1})] dt_1 \dots dt_k. \quad (5)$$

Отсюда мы получим удобную оценку этих коэффициентов. Аргумент функции $f^{(k)}$ в формуле (5) можно записать в форме

$$\lambda = \lambda_0(1 - t_1) + \lambda_1(t_1 - t_2) + \dots + \lambda_{k-1}(t_{k-1} - t_k) + \lambda_k t_k; \quad (6)$$

сумма коэффициентов при $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ здесь равна

$$(1 - t_1) + (t_1 - t_2) + \dots + (t_{k-1} - t_k) + t_k = 1,$$

поэтому число λ из (6), как центр тяжести неотрицательных масс $1 - t_1, t_1 - t_2, \dots, t_{k-1} - t_k, t_k$, расположенных в точках $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k$, лежит в пределах наименьшего выпуклого многоугольника Q_k , содержащего точки $\lambda_0, \dots, \lambda_k$. Положим

$$M_k = \max_{\lambda \in Q_k} |f^{(k)}(\lambda)|.$$

Оценивая интеграл (5) по модулю, получаем

$$|b_k| = |u_{01 \dots k}| \leq \frac{M_k}{k!}. \quad (7)$$

2. Пусть имеется матрица m -го порядка $P = \|p_{jk}\|$. Мы желаем получить оценку нормы матрицы e^{tP} при $t \geq 0$.

Обозначим характеристические корни матрицы P , т. е. корни уравнения $\det \|P - \lambda I\| = 0$ через $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$. Как известно, в случае, если $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$ различны, матрица e^{tP} может быть представлена в виде $R(P)$, где $R(\lambda)$ (любой) многочлен $R(\lambda)$, для которого

$$R(\lambda_0) = e^{t\lambda_0}, \dots, R(\lambda_{m-1}) = e^{t\lambda_{m-1}}.$$

Многочлен $R(\lambda)$ можно взять в форме Ньютона (п. 1)

$$R(\lambda) = b_0 + b_1(\lambda - \lambda_0) + b_2(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) + \dots + b_{m-1}(\lambda - \lambda_0) \dots (\lambda - \lambda_{m-2}),$$

причем

$$|b_k| \leq \frac{1}{k!} \max_{\lambda \in Q_k} \left| \frac{d^k e^{t\lambda}}{d\lambda^k} \right| = \max_{\lambda \in Q_k} \frac{t^k}{k!} e^{t \operatorname{Re} \lambda}. \quad (1)$$

Обозначим $\Lambda_k = \max \{ \operatorname{Re} \lambda_0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_k \}$; тогда оценку (7) п. 1 можно записать в форме

$$|b_k| \leq \frac{t^k}{k!} e^{t \Lambda_k} \leq \frac{t^k}{k!} e^{t \Lambda_{m-1}}.$$

Далее,

$$e^{tP} = R(P) = b_0 I + b_1 (P - \lambda_1 I) + \dots + b_{m-1} (P - \lambda_0 I) \dots \dots (P - \lambda_{m-2} I),$$

откуда для нормы матрицы e^{tP} получаем оценку

$$\|e^{tP}\| \leq e^{t \Lambda_{m-1}} \left(1 + t \|P - \lambda_0 I\| + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \|P - \lambda_0 I\| \dots \dots \|P - \lambda_{m-2} I\| \right).$$

Поскольку каждое λ_j есть собственное значение оператора P , получаемое на некотором собственном векторе e_j , мы имеем $|\lambda_j| = \|Pe_j\| \leq \sup_{\|e\|=1} \|Pe\| = \|P\|$ и, следовательно,

$$\|P - \lambda_j I\| \leq 2\|P\|.$$

Таким образом,

$$\|e^{tP}\| \leq e^{t \Lambda_{m-1}} \left(1 + 2t\|P\| + \dots + \frac{(2t)^{m-1}}{(m-1)!} \|P\|^{m-1} \right). \quad (2)$$

Полученная оценка справедлива для всех операторов P с различными собственными значениями. Так как любой оператор P с произвольными собственными значениями, возможно, кратными, есть предел (по норме) операторов с различными собственными значениями, оценка (2) справедлива и для любого оператора P .

3. Пусть имеются m аналитических функций $f^0(\lambda), \dots, f^{m-1}(\lambda)$ и m комплексных чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$; обобщенным детерминантом Ван-дер-Монда называется детерминант

$$W \{f^k(\lambda_j)\} = \begin{vmatrix} f^0(\lambda_0) & f^0(\lambda_1) & \dots & f^0(\lambda_{m-1}) \\ f^1(\lambda_0) & f^1(\lambda_1) & \dots & f^1(\lambda_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{m-1}(\lambda_0) & f^{m-1}(\lambda_1) & \dots & f^{m-1}(\lambda_{m-1}) \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Преобразуем его следующим образом. Вычтем из j -го столбца ($j > 0$) нулевой столбец и разделим на $\lambda_j - \lambda_0$; мы получим

$$W \{f^k(\lambda_j)\} = \begin{vmatrix} [f_0^0] & [f_{01}^0] & \dots & [f_{0, m-1}^0] \\ [f_0^1] & [f_{01}^1] & \dots & [f_{0, m-1}^1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [f_0^{m-1}] & [f_{01}^{m-1}] & \dots & [f_{0, m-1}^{m-1}] \end{vmatrix} (\lambda_1 - \lambda_0) \dots (\lambda_{m-1} - \lambda_0).$$

Далее, вычтем из k -го столбца ($k > 1$) первый и разделим на $\lambda_k - \lambda_1$; получим

$$W \{f^k(\lambda_j)\} = \begin{vmatrix} [f_0^0] & [f_{01}^0] & [f_{012}^0] & \dots & [f_{01, m-1}^0] \\ [f_0^1] & [f_{01}^1] & [f_{012}^1] & \dots & [f_{01, m-1}^1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [f_0^{m-1}] & [f_{01}^{m-1}] & [f_{012}^{m-1}] & \dots & [f_{01, m-1}^{m-1}] \end{vmatrix} (\lambda_1 - \lambda_0) \dots \\ \dots (\lambda_{m-1} - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1) \dots (\lambda_{m-1} - \lambda_1).$$

Продолжая таким образом далее, получаем

$$W \{f^k(\lambda_j)\} = \prod_{0 \leq j < k \leq m-1} (\lambda_k - \lambda_j) \begin{vmatrix} [f_0^0] & [f_{01}^0] & \dots & [f_{01, \dots, m-1}^0] \\ [f_0^1] & [f_{01}^1] & \dots & [f_{01, \dots, m-1}^1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [f_0^{m-1}] & [f_{01}^{m-1}] & \dots & [f_{01, \dots, m-1}^{m-1}] \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Положим, в частности, $f^0 = 1$, $f^1 = \lambda$, \dots , $f^{m-1} = \lambda^{m-1}$; тогда $(f^k)^{(k)} = k!$, $(f^k)^{(k+1)} = 0$ и по формуле (5) п. 1

$$[f_{01, \dots, j}^k] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{j-1}} f^{k(j)} [\lambda_0 + t_1(\lambda_1 - \lambda_0) + \dots \\ \dots + t_j(\lambda_j - \lambda_{j-1})] dt_1 \dots dt_j = \begin{cases} 0 & \text{при } j > k, \\ 1 & \text{при } j = k, \end{cases}$$

а при $j < k$ эта величина есть однородный многочлен степени $k - j$ от $\lambda_0, \dots, \lambda_j$. Мы получаем здесь значение детерминанта Ван-дер-Монда

$$W \{\lambda_j^k\} = \prod_{0 \leq j < k < m} (\lambda_k - \lambda_j) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < k < m} (\lambda_k - \lambda_j).$$

Если же f^0, f^1, \dots, f^{m-1} суть произвольные многочлены от λ , то мы получим

$$W \{f^k(\lambda_j)\} = \prod_{j < k} (\lambda_k - \lambda_j) \begin{vmatrix} [f_0^0] & [f_{01}^0] & \dots & [f_{01, \dots, m-1}^0] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [f_0^{m-1}] & [f_{01}^{m-1}] & \dots & [f_{01, \dots, m-1}^{m-1}] \end{vmatrix} = \\ = \prod_{j < k} (\lambda_k - \lambda_j) \cdot R(\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}), \quad (3)$$

где $R(\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1})$ — многочлен от своих аргументов.

Дальнейшее преобразование формулы (2) получим если запишем ее в форме

$$\frac{W \{f^k(\lambda_j)\}}{\prod_{j < k} (\lambda_k - \lambda_j)} = \begin{vmatrix} [f_0^0] & [f_{01}^0] & \cdots & [f_{01 \dots m-1}^0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [f_0^{m-1}] & [f_{01}^{m-1}] & \cdots & [f_{01 \dots m-1}^{m-1}] \end{vmatrix} \quad (4)$$

и попробуем перейти к пределу при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_0, \dots, \lambda_{m-1} \rightarrow \lambda_0$. Из формулы (5) п. 1 следует, что

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \rightarrow \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_k \rightarrow \lambda_0}} [f_{01 \dots k}] = f^{(k)}(\lambda_0) \cdot \frac{1}{k!}.$$

Таким образом, существует предел правой части равенства (4); отсюда следует, что имеется предел и у левой части и он имеет значение

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \rightarrow \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_{m-1} \rightarrow \lambda_0}} \frac{W \{f^k(\lambda_j)\}}{\prod_{j < k} (\lambda_k - \lambda_j)} = \begin{vmatrix} f^0(\lambda_0) & \frac{1}{1!} f^{0'}(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(m-1)!} f^{0(m-1)}(\lambda_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{m-1}(\lambda_0) & \frac{1}{1!} f^{m-1'}(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(m-1)!} f^{m-1(m-1)}(\lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Преобразование детерминанта (1) можно производить и несколько более сложным образом, фиксируя в (1) несколько групп столбцов, например, с номерами от 0 до $k-1$; от k до $l-1$; ..., от p до $m-1$ и производя вычитание и деление только в пределах каждой группы. Мы получим аналогично

$$\frac{W \{f^k(\lambda_j)\}}{\prod_{0 \leq i < j < k} (\lambda_j - \lambda_i) \prod_{k \leq i_k < j_k < l} (\lambda_{j_k} - \lambda_{i_k}) \cdots \prod_{p \leq i_p < j_p < m} (\lambda_{j_p} - \lambda_{i_p})} = \begin{vmatrix} [f_0^0] & \cdots & [f_{01 \dots k-1}^0] & [f_k^0] & \cdots & [f_{k \ k+1 \dots l-1}^0] & \cdots & [f_p^0] & \cdots & [f_{p \ p+1 \dots m-1}^0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [f_0^{m-1}] & \cdots & [f_{01 \dots k-1}^{m-1}] & [f_k^{m-1}] & \cdots & [f_{k \ k+1 \dots l-1}^{m-1}] & \cdots & [f_p^{m-1}] & \cdots & [f_{p \ p+1 \dots m-1}^{m-1}] \end{vmatrix}$$

Если здесь перейти к пределу при условии, что $\lambda_j \rightarrow \lambda_0$,

$\lambda_{j_k} \rightarrow \lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{j_p} \rightarrow \lambda_{p_1}$, мы получим

$$\lim \frac{W\{f^k(\lambda_j)\}}{\prod_{0 \leq i < j < k} (\lambda_j - \lambda_i) \prod_{k \leq i < j_k < l} (\lambda_{j_k} - \lambda_{i_k}) \dots \prod_{p \leq i_p < j_p < m} (\lambda_{j_p} - \lambda_{i_p})} =$$

$$f^0(\lambda_0) \frac{1}{1!} f^{0'}(\lambda_0) \dots \frac{1}{(k-1)!} f^{0'(k-1)}(\lambda_0) \dots f^0(\lambda_p) f^{0'}(\lambda_p) \dots \frac{1}{(m-p)!} f^{0'(m-p)}(\lambda_p)$$

$$\dots$$

$$f^{m-1}(\lambda_0) \frac{1}{1!} f^{m-1'}(\lambda_0) \dots \frac{1}{(k-1)!} f^{m-1'(k-1)}(\lambda_0) \dots f^{m-1}(\lambda_p) \dots \frac{1}{(m-p)!} f^{m-1'(m-p)}(\lambda_p)$$

В случае детерминанта Ван-дер-Монда мы получаем формулу

$$\lim \frac{\prod_{0 \leq i < j < m} (\lambda_j - \lambda_i)}{\prod_{0 \leq i < j < k} (\lambda_j - \lambda_i) \prod_{k \leq i_k < j_k < l} (\lambda_{j_k} - \lambda_{i_k}) \dots \prod_{p \leq i_p < j_p < m} (\lambda_{j_p} - \lambda_{i_p})} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & \lambda_p & 1 & 0 & \dots \\ \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1 & \dots & \lambda_k^2 & 2\lambda_k & 1 & \dots & \lambda_p^2 & 2\lambda_p & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^{m-1} (m-1)! \lambda_0^{m-2} \binom{2}{m-1} \lambda_0^{m-3} \dots \lambda_p^{m-1} (m-1)! \lambda_p^{m-2} \binom{2}{m-p} \lambda_p^{m-3} \dots \end{vmatrix}.$$

В частности, если числа $\lambda_0, \lambda_k, \dots, \lambda_p$ различны, детерминант справа отличен от нуля, поскольку в левой части после сокращения остаются в числителе только разности вида $\lambda_j - \lambda_i$, где λ_i и λ_j принадлежат к различным из выделенных групп; каждая такая разность имеет пределом разность первых элементов соответствующих групп, т. е. величину, отличную от нуля. Матрица

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & \lambda_p & 1 & 0 & \dots \\ \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1 & \dots & \lambda_p^2 & 2\lambda_p & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^{m-1} (m-1)! \lambda_0^{m-2} \binom{2}{m-1} \lambda_0^{m-3} \dots \lambda_p^{m-1} (m-1)! \lambda_p^{m-2} \binom{2}{m-p} \lambda_p^{m-3} \dots \end{array} \right\| \quad (5)$$

называется обобщенной матрицей Ван-дер-Монда; она играет важную роль в дальнейшем. Заметим, что не только ее детерминант отличен от нуля, но и любой минор, построенный на первых s строках и s столбцах, также отличен от нуля, поскольку он имеет такую же структуру, как и весь детерминант.

4. Мы приведем еще одно выражение для коэффициентов b_0, \dots, b_{m-1} интерполяционного многочлена Ньютона, которое будет использовано в дальнейшем (§ 30). Из уравнений (2) п. 1 видно, что коэффициент b_k линейно выражается через f_0, \dots, f_k . Мы утверждаем, что на самом деле имеет место следующее равенство:

$$b_k = \sum_{j=0}^k \frac{f_j}{\prod_{i=0}^k (\lambda_j - \lambda_i)}, \quad (1)$$

где штрих у знака произведения означает, что множитель с $i=j$ отсутствует. Для доказательства положим

$$c_0 = b_0 = f_0, \quad c_{0, \dots, k, l} = \sum_{j=0, 1, \dots, k, l} \frac{f_j}{\prod_{i=0, 1, \dots, k, l} (\lambda_j - \lambda_i)} \quad (2)$$

и покажем, что величины справа в (2) удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и величины $[f_0, 1, \dots, k, l]$:

$$c_{0, \dots, k, l} = \frac{c_{0, \dots, k-1, l} - c_{0, \dots, k-1, k}}{\lambda_l - \lambda_k}; \quad (3)$$

а так как

$$c_0 = b_0 = f_0 = [f_0],$$

то равенство $c_{0 \dots k} = [f_{0 \dots k}] = b_k$ окажется справедливым вместе с (3). Итак, докажем (3). Мы имеем

$$\begin{aligned} & \frac{c_{0, \dots, k-1, l} - c_{0, \dots, k-1, k}}{\lambda_l - \lambda_k} = \\ & = \frac{\sum_{j=0, \dots, k-1, l} \frac{f_j}{\prod_{i=0, \dots, k-1, l} (\lambda_j - \lambda_i)} - \sum_{j=0, \dots, k-1, k} \frac{f_j}{\prod_{i=0, \dots, k-1, k} (\lambda_j - \lambda_i)}}{\lambda_l - \lambda_k} = \\ & = \frac{\sum_{j=0, \dots, k-1} \frac{f_j}{\prod_{i=0, \dots, k-1} (\lambda_j - \lambda_i)} \left(\frac{1}{\lambda_j - \lambda_l} - \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \right) +}{\lambda_l - \lambda_k} \\ & \quad + \frac{f_l}{\prod_{i=0, \dots, k-1, l} (\lambda_l - \lambda_i)} - \frac{f_k}{\prod_{i=0, \dots, k-1, k} (\lambda_k - \lambda_i)} \\ & = \sum_{j=0, \dots, k-1} \frac{f_j}{\prod_{i=0, \dots, k-1} (\lambda_j - \lambda_i)} \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_l)(\lambda_j - \lambda_k)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{f_l}{\prod'_{i=0, \dots, k-1, l} (\lambda_l - \lambda_j)} \frac{1}{(\lambda_l - \lambda_k)} - \frac{f_k}{\prod'_{i=0, \dots, k-1, k} (\lambda_k - \lambda_i)} \frac{1}{\lambda_l - \lambda_k} = \\
 & = \sum_{j=0, \dots, k-1, k, l} \frac{f_j}{\prod'_{i=0, \dots, k-1, k, l} (\lambda_j - \lambda_i)} = c_{0, \dots, k, l}
 \end{aligned}$$

что и требовалось.

Выражение

$$F(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}) = \sum_{j=0, \dots, r-1} \frac{F(\lambda_j)}{\prod'_{j=0, \dots, r-1} (\lambda_j - \lambda_i)}$$

называется *разделенной разностью* для функции $F(\lambda)$ в точках $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$. При $r=0$ разделенная разность совпадает с самим значением $F(\lambda_0)$. При $r > 0$ для разделенной разности справедлива формула (3) п. 1

$$\begin{aligned}
 F(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}) = & \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{r-2}} F^{(r-1)} [\lambda_0 + t_1(\lambda_1 - \lambda_0) + \dots \\
 & \dots + t_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_{r-2})] dt_1 \dots dt_{r-1}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

из которой вытекает оценка (7) п. 1:

$$|F(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1})| = \frac{1}{(r-1)!} \max_{\lambda \in Q_{r-1}} |F^{(r-1)}(\lambda)|. \quad (5)$$

5. Нам понадобится в дальнейшем оценка двойной разделенной разности вида

$$\begin{aligned}
 & F(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}; \lambda_r, \dots, \lambda_{m-1}) \equiv \\
 & \equiv \sum_{j=0, \dots, r-1} \frac{1}{\prod'_{i=0, \dots, r-1} (\lambda_j - \lambda_i)} \sum_{s=j, r, \dots, m-1} \frac{F(\lambda_j, \lambda_s)}{\prod'_{k=j, r, \dots, m-1} (\lambda_s - \lambda_k)}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Здесь функция $F(\lambda, \zeta)$ аналитична по переменному ζ в выпуклом многоугольнике, натянутом на точки $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$, и по переменному λ в выпуклом многоугольнике, натянутом на точки $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$. Выражение (6) может быть получено, как разделенная разность от функции $F(\lambda, \zeta)$, при фиксированном первом аргументе λ по второму аргументу в точках $\lambda, \lambda_r, \dots, \lambda_{m-1}$:

$$\Phi(\lambda) \equiv \Phi(\lambda; \lambda, \lambda_r, \dots, \lambda_{m-1}), \quad (7)$$

от которой взята еще раз разделенная разность в точках $\lambda = \lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$. По формуле (5) п. 1,

$$F(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}; \lambda_r, \dots, \lambda_{m-1}) = \\ = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{r-2}} \Phi^{(r-1)} [\lambda_0 + t_1(\lambda_1 - \lambda_0) + \dots \\ \dots + t_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_{r-2})] dt_1 \dots dt_{r-1}. \quad (8)$$

Вычислим $\Phi^{(r-1)}(\lambda)$, используя еще раз формулу (5) п. 1:

$$\Phi(\lambda) = \int_0^1 \int_0^{t_r} \dots \int_0^{t_{m-2}} \frac{\partial^{m-r}}{\partial \xi^{m-r}} F[\lambda; \lambda + t_r(\lambda_r - \lambda) + \dots \\ \dots + t_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_{m-2})] dt_r \dots dt_{m-1}. \quad (9)$$

Дифференцируя равенство полным образом по λ , получим

$$\Phi^{(r-1)}(\lambda) = \int_0^1 \int_0^{t_r} \dots \int_0^{t_{m-2}} \frac{\partial^{m-r}}{\partial \xi^{m-r}} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} + (1 - t_r) \frac{\partial}{\partial \xi} \right]^{r-1} \times \\ \times F[\lambda; \lambda + t_r(\lambda_r - \lambda) + \dots + t_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_{m-2})] dt_r \dots dt_{m-1}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8), находим

$$F(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}; \lambda_r, \dots, \lambda_{m-1}) = \\ = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{r-2}} \int_0^1 \int_0^{t_r} \dots \int_0^{t_{m-2}} \frac{\partial^{m-r}}{\partial \xi^{m-r}} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} + (1 - t_r) \frac{\partial}{\partial \xi} \right]^{r-1} \times \\ \times F[\bar{\lambda}; \bar{\lambda} + t_r(\lambda_r - \bar{\lambda}) + \dots + t_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_{m-2})] dt_1 \dots dt_{m-1}, \quad (11)$$

где $\bar{\lambda} = \lambda_0 + t_1(\lambda_1 - \lambda_0) + \dots + t_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_{r-2})$ лежит в выпуклом многоугольнике, натянутом на $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$. Из (11) следует оценка

$$|F(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}; \lambda_r, \dots, \lambda_{m-1})| \leq C \max \left| \frac{\partial^{m-1} F(\lambda, \xi)}{\partial \lambda^k \partial \xi^{m-1-k}} \right|, \quad (12)$$

где максимум берется по всем $k \leq m-1$ и по всем точкам многоугольника, натянутого на точки $\xi = \bar{\lambda}, \lambda_r, \dots, \lambda_{m-1}$, причем $\bar{\lambda}$ — любая точка многоугольника, натянутого на точки $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$, $C \leq 2^{r-1}$.

Теорема 1. Вектор $v(0)$ определяет корректную задачу для системы (1) тогда и только тогда, когда он принадлежит подпространству Q^- .

Доказательство. Решение системы (1) с начальным вектором $v(0)$, можно записать в форме

$$v(t) = e^{tP}v(0).$$

Пусть $v(0)$ принадлежит подпространству Q^- . Так как Q^- инвариантно относительно оператора P , то оно инвариантно и относительно оператора e^{tP} . Мы можем, таким образом, ограничиться подпространством Q^- , в котором лежит решение $v(t)$ при всех $t \geq 0$. Матрица оператора P , приведенная в подпространстве Q^- к жордановой форме, квазидиагональна и по диагонали ее находятся блоки вида

$$\left\| \begin{array}{cccc} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{array} \right\|. \quad (3)$$

Как известно, зная жорданову форму матрицы P , можно в том же базисе сразу написать матрицу оператора $f(P)$, где $f(\lambda)$ — достаточно гладкая функция. Именно*), $f(P)$ также квазидиагональна и состоит из таких же блоков, как и матрица P , но каждый блок (3) заменен на блок

$$\left\| \begin{array}{cccc} f(\lambda_j) & f'(\lambda_j) & \frac{1}{2!} f''(\lambda_j) & \dots & \dots \\ 0 & f(\lambda_j) & f'(\lambda_j) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & f(\lambda_j) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_j) \end{array} \right\|.$$

В данном случае $f(\lambda) = e^{t\lambda}$ и соответствующий блок имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} e^{t\lambda_j} & te^{t\lambda_j} & \frac{t^2}{2} e^{t\lambda_j} & \dots & \dots \\ 0 & e^{t\lambda_j} & te^{t\lambda_j} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & e^{t\lambda_j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_j} \end{array} \right\|.$$

*) См., например, Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, гл. 5, § 2, 1953, стр. 86—87.

Заметим, что числа $e^{t\lambda_j}$ по модулю не превосходят 1, поскольку в подпространстве Q^- мы имеем $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$.

Мы видим, что каждый из базисных векторов e_0, \dots, e_{r-1} подпространства Q^- под воздействием оператора e^{tP} переходит в вектор вида

$$e^{tP}e_k = \sum_{j=0}^k c_{jk} t^j e^{t\lambda_{kj}} \cdot e_j,$$

где c_{jk} — фиксированные постоянные, среди которых заведомо имеется отличное от нуля (равное 1) число c_{kk} .

Отсюда для любого вектора $v(0) = \sum_{k=0}^r \xi_k e_k \in Q^-$ мы получаем

$$v(t) = e^{tP}v(0) = \sum_k \xi_k e^{tP}e_k = \sum_k \sum_j c_{jk} t^j e^{t\lambda_{kj}} e_j$$

и, следовательно,

$$\|v(t)\| \leq C(1+t)^{m-1}.$$

Итак, если $v(0) \in Q^-$, задача корректна. Пусть теперь $v(0)$ имеет ненулевую составляющую в подпространстве Q^+ . Иными словами,

$v(0) = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k e_k$, причем среди чисел ξ_r, \dots, ξ_{m-1} есть отличные от нуля. Пусть ξ_p — последняя отличная от нуля координата вектора $v(0)$. Как видно из предыдущего, вектор e_p переводится оператором e^{tP} в вектор вида

$$\sum_{j=0}^p c_{jp} t^j e^{t\lambda_{jp}} e_j, \quad c_{pp} \neq 0,$$

причем на этот раз $\operatorname{Re} \lambda_p > 0$. Предыдущие векторы e_s , $s < p$, переводятся оператором e^{tP} в аналогичные выражения, где, однако, фигурируют слагаемые, не содержащие векторы e_p . Таким образом, вектор $e^{tP}v(0)$ имеет p -ю составляющую

$$t^j e^{t\lambda_{jp}} e_p,$$

которая с возрастанием t экспоненциально возрастает. Отсюда следует, что и норма самого вектора $e^{tP}v(0)$ экспоненциально возрастает, т. е. задача некорректна. Теорема доказана.

2. Рассмотрим теперь одно уравнение порядка m :

$$\frac{d^m v(t)}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \frac{d^k v(t)}{dt^k} \quad (1)$$

с комплексными коэффициентами p_0, \dots, p_{m-1} . Здесь решение $v(t)$

определяется однозначно заданием значений $v(0), \dots, v^{(m-1)}(0)$. Задача называется корректной, если начальные данные таковы, что им отвечает единственное решение $v(t)$, которое возрастает при $t \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени от t , так же как и его производные $v'(t), \dots, v^{(m-1)}(t)$. Для решения вопроса об описании корректных задач построим систему первого порядка, эквивалентную уравнению (1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_0(t)}{dt} &= && v_1, \\ \frac{dv_1(t)}{dt} &= && v_2, \\ \dots & && \dots \\ \frac{dv_{m-2}(t)}{dt} &= && v_{m-1}, \\ \frac{dv_{m-1}(t)}{dt} &= &p_0v_0 + p_1v_1 + p_2v_2 + \dots + p_{m-1}v_{m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Эта система получается при вводе неизвестных функций $v_0(t) = v(t)$, $v_1(t) = v'(t)$, ..., $v_{m-1}(t) = v^{(m-1)}(t)$. Системе (2) отвечает матрица P специального вида

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{m-1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Чтобы применить к данному случаю общую схему п. 1, найдем собственные векторы и собственные значения оператора P в m -мерном пространстве Q . На вектор $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})$ оператор P действует по формулам

$$\begin{aligned} (P\xi)_0 &= \xi_1, \\ (P\xi)_1 &= \xi_2, \\ \dots & \dots \\ (P\xi)_{m-2} &= \xi_{m-1}, \\ (P\xi)_{m-1} &= p_0\xi_0 + p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + \dots + p_{m-1}\xi_{m-1}. \end{aligned}$$

Если вектор ξ собственный, отвечающий собственному значению λ , то мы имеем $P\xi = \lambda\xi$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda\xi_0, \\ \xi_2 &= \lambda\xi_1, \\ \dots & \dots \\ \xi_{m-1} &= \lambda\xi_{m-2}, \\ p_0\xi_0 + p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + \dots + p_{m-1}\xi_{m-1} &= \lambda\xi_{m-1}. \end{aligned}$$

Положим $\xi_0 = 1$ и тогда последовательно найдем

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = \lambda, \quad \xi_2 = \lambda^2, \quad \dots, \quad \xi_{m-1} = \lambda^{m-1};$$

$$\lambda^m = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \lambda^k.$$

Таким образом, характеристические корни матрицы P суть корни уравнения

$$\lambda^m = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \lambda^k, \quad (4)$$

а собственный вектор с собственным значением λ коллинеарен вектору

$$(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{m-1})$$

и тем самым определен однозначно с точностью до коллинеарности; (поэтому в случае, когда λ — кратный корень, появляются только присоединенные векторы).

Пусть, как и ранее, число r означает число собственных значений оператора P (с учетом кратностей), действительные части которых неположительны. Следующая теорема дает условия корректности начальной задачи для уравнения (1):

Теорема 2. *Произвольное задание чисел $v(0), \dots, v^{(r-1)}(0)$ определяет корректную задачу для уравнения (1).*

Для доказательства, имея в виду использование теоремы 1, мы должны прежде всего найти базис подпространства Q^- . Если все собственные значения $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$ простые, базисная матрица имеет вид

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \dots 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots \lambda_{r-1} \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \dots \lambda_{r-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^{m-1} & \lambda_1^{m-1} & \dots \lambda_{r-1}^{m-1} \end{array} \right\|.$$

Если среди собственных значений $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$ имеются кратные, базисная матрица будет иметь более сложный вид. Допустим, что число λ_0 имеет кратность k . Тогда, как видно из жордановой формы матрицы P , базисные векторы e_0, \dots, e_{k-1} связаны соотношениями

$$\left. \begin{array}{l} P e_0 = \lambda_0 e_0, \\ P e_1 = e_0 + \lambda_0 e_1, \\ \dots \\ P e_{k-1} = e_{k-2} - \lambda_0 e_{k-1}. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Векторы e_1, \dots, e_{k-1} не определяются уравнениями (5) однозначно; но всякая система векторов e_1, \dots, e_{k-1} , удовлетворяющая уравнениям (5), может быть принята за базисную в соответствующем инвариантном подпространстве оператора P (определяемом как совокупность решений уравнения $(P - \lambda_0 I)^k \xi = 0$). Мы и построим сейчас одну такую систему. Именно, рассмотрим первые k столбцов матрицы (5) § 24, п. 3:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^{m-1} & (m-1)\lambda_0^{m-2} & \binom{2}{m-1}\lambda_0^{m-3} & \dots & \binom{m-k-1}{m-1}\lambda_0^{m-k} \end{array} \right\|. \quad (6)$$

Они определяют k векторов в пространстве Q . Обозначим их через e_0, e_1, \dots, e_{k-1} и проверим, что для них выполняются равенства (5).

Как мы знаем, матрица (6) является пределом матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccc} [f_0^0] & [f_{01}^0] & \dots & [f_{01 \dots k-1}^0] \\ [f_0^1] & [f_{01}^1] & \dots & [f_{01 \dots k-1}^1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [f_0^{m-1}] & [f_{01}^{m-1}] & \dots & [f_{01 \dots k-1}^{m-1}] \end{array} \right\|, \quad (7)$$

где $f^0 \equiv 1, f^1 \equiv \lambda, \dots, f^{m-1} \equiv \lambda^{m-1}$. Точнее, матрица (6) получается из матрицы (7) при условии, что $\lambda_1 \rightarrow \lambda_0, \dots, \lambda_{k-1} \rightarrow \lambda_0$ и числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ различны. Обозначим через $f_{01 \dots js}$ вектор с компонентами $[f_{01 \dots js}^0], \dots, [f_{01 \dots js}^{m-1}]$. Мы имеем $Pf_j = \lambda_j f_j$ ($j=0, 1, \dots, k-1$). Далее,

$$Pf_{0s} = P \frac{f_s - f_0}{\lambda_s - \lambda_0} = \frac{Pf_s - Pf_0}{\lambda_s - \lambda_0} = \frac{\lambda_s f_s - \lambda_0 f_0}{\lambda_s - \lambda_0} = f_0 + \lambda_s f_{0s}.$$

Покажем, что справедлива формула

$$Pf_{01 \dots js} = f_{01 \dots j} + \lambda_s f_{01 \dots js} \quad (s > j).$$

Допустим, что справедлива формула с меньшим числом индексов

$$Pf_{01 \dots j-1, s} = f_{01 \dots j-1} + \lambda_s f_{01 \dots j-1, s}, \quad s > j-1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 P f_{01 \dots j s} &= P \frac{f_{01 \dots j-1 s} - f_{01 \dots j-1, j}}{\lambda_s - \lambda_j} = \frac{P f_{01 \dots j-1, s} - P f_{01 \dots j-1, j}}{\lambda_s - \lambda_j} = \\
 &= \frac{f_{01 \dots j-1} + \lambda_s f_{01 \dots j-1 s} - f_{01 \dots j-1} - \lambda_j f_{01 \dots j-1, j}}{\lambda_s - \lambda_j} = \\
 &= \frac{\lambda_s f_{01 \dots j-1, s} - \lambda_j f_{01 \dots j-1, j}}{\lambda_s - \lambda_j} = f_{01 \dots j-1, j} + \lambda_s f_{01 \dots j-1, j s}
 \end{aligned}$$

В частности, мы имеем

$$P f_{01 \dots j-1, j} = f_{01 \dots j-1} + \lambda_j f_{01 \dots j-1, j} \quad (j = 1, 2, \dots, k-1).$$

Переходя в этой формуле к пределу при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_0, \dots, \lambda_k \rightarrow \lambda_0$, получаем

$$P e_j = e_{j-1} + \lambda_0 e_j \quad (j = 1, 2, \dots, k-1),$$

что и требовалось.

Итак, базисная матрица подпространства Q^- в общем случае имеет вид обобщенной матрицы Ван-дер-Монда:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^{m-1} & (m-1)\lambda_0^{m-2} & \binom{2}{m-1}\lambda_0^{m-3} & \dots & \binom{m-k-1}{m-1}\lambda_0^{m-k} & \dots \end{vmatrix}.$$

Теперь докажем лемму:

Лемма. Если оператор P задается матрицей вида (3), то, каковы бы ни были числа ξ_0, \dots, ξ_{r-1} , всегда можно — и притом единственным образом — найти числа ξ_r, \dots, ξ_{m-1} так, что вектор $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{m-1})$ будет лежать в подпространстве Q^- .

Доказательство. Мы должны доказать совместность системы

$$\xi = E c, \quad (8)$$

где $c = (c_0, \dots, c_{r-1})$ — неизвестный вектор. Первые r уравнений этой системы имеют определитель, построенный на первых r строках матрицы E . Согласно сказанному в конце § 24, п. 3, он отличен от нуля. Поскольку числа ξ_0, \dots, ξ_{r-1} известны, величины c_0, \dots, c_{r-1} однозначно определяются. Из следующих $m - r$ уравнений системы (8) после этого однозначно определяются и ξ_r, \dots, ξ_{m-1} , что и требуется.

Для дальнейшего выведем формулы, выражающие ξ_r, \dots, ξ_{m-1} через ξ_0, \dots, ξ_{r-1} . Если корни $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$ различны, то для любого $s \geq r$ мы имеем

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r-1} & \lambda_0^{r-1} & \lambda_1^{r-1} & \dots & \lambda_{r-1}^{r-1} \\ \xi_s & \lambda_0^s & \lambda_1^s & \dots & \lambda_{r-1}^s \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку ранг расширенной матрицы системы (8) остается равным r . Разлагая определитель слева по первому столбцу, получаем

$$\xi_s = \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \xi_j \frac{W\{f_j^k\}}{W\{\lambda_j^k\}},$$

где $\{f^0, f^1, \dots, f^{r-1}\} \equiv \{1, \lambda, \dots, \lambda^{j-1}, \lambda^s, \lambda^{j+1}, \dots, \lambda^{r-1}\}$. Коэффициент при ξ_j , как показано в § 24, п. 3, есть однородный многочлен от $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$ степени $s - j$. В итоге мы получаем: величины ξ_s ($s \geq r$) выражаются через ξ_0, \dots, ξ_{r-1} по формулам

$$\xi_s = \sum_{j=0}^{r-1} \xi_j R_{js}(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}), \quad (9)$$

где

$$R_{js}(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}) = (-1)^j \frac{W\{f_j^k\}}{W\{\lambda_j^k\}} \quad (10)$$

— однородный многочлен от $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$ степени $s - j$.

Покажем, что эта же формула сохраняется и для случая кратных корней.

Вынесем в числителе и знаменателе отношения (10) выражение $\prod_{0 \leq i < j < k} (\lambda_j - \lambda_i) \dots \prod_{p \leq p < j_p < m} (\lambda_{j_p} - \lambda_{i_p})$ и сократим; многочлен R_{js} не изменится. Далее, в правой части совершим предельный переход $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} \rightarrow \lambda_0$ и т. д.; в результате числители и знаменатели обратятся в нужные нам миноры, дающие коэффициенты в разложении ξ_s по ξ_0, \dots, ξ_{r-1} ; левая же часть будет просто значением полинома R_{sj} при $\lambda_0 = \dots = \lambda_{k-1}$, $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{l-1}$ и т. д. Таким образом, формула (9) остается справедливой и для кратных корней.

3. Вернемся к системе (1) п. 1

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_0(t)}{dt} &= p_{00}v_0(t) + \dots + p_{0, m-1}v_{m-1}(t), \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dv_{m-1}(t)}{dt} &= p_{m-1, 0}v_0(t) + \dots + p_{m-1, m-1}v_{m-1}(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и поставим следующую, более общую начальную задачу.

Имеется система уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{00}\xi_0 + a_{01}\xi_1 + \dots + a_{0, m-1}\xi_{m-1} &= b_0, \\ \dots \dots \dots \\ a_{q0}\xi_0 + a_{q1}\xi_1 + \dots + a_{q, m-1}\xi_{m-1} &= b_q. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Спрашивается, какова должна быть матрица $A = \|a_{jk}\|$, чтобы при любых числах b_0, \dots, b_q существовал и притом единственный вектор $v(0)$, обеспечивающий корректную начальную задачу для системы (1) с координатами $v_0 = \xi_0, \dots, v_{m-1} = \xi_{m-1}$, удовлетворяющими системе (2). На этот вопрос теперь легко ответить.

Обозначим часть жордановой матрицы оператора P , образованную столбцами, соответствующими базисным векторам e_0, \dots, e_{r-1} подпространства Q^- , через E ; эта матрица имеет r столбцов и m строк. Условие того, что некоторый вектор ξ лежит в подпространстве Q^- или, что то же, является линейной комбинацией векторов e_0, \dots, e_{r-1} , можно записать в форме

$$\xi = Ec, \quad (3)$$

где c — вектор с координатами c_0, c_1, \dots, c_{r-1} , определяемый по ξ единственным образом. С другой стороны, систему (2) можно записать в форме

$$A\xi = b. \quad (4)$$

Если матрица A удовлетворяет поставленному условию, т. е. для любого b имеется единственный вектор ξ , удовлетворяющий соотношениям (3) и (4), то, как следствие, мы получаем однозначную разрешимость для любого b системы уравнений

$$AEC = b. \quad (5)$$

Матрица AE имеет, очевидно, $q+1$ строк и r столбцов. Из однозначной разрешимости системы (5) следует, что $q = r - 1$ и квадратная матрица AE обратима, так что

$$\det AE \neq 0. \quad (6)$$

Покажем, что условие (6) является не только необходимым, но и достаточным условием существования единственности искомого вектора

$\xi = v(0)$. Действительно, если условие (6) выполнено, то по заданному b однозначно определяется

$$c = (AE)^{-1}b, \quad (7)$$

а по c и вектор

$$\xi = Ec = E(AE)^{-1}b \in Q^-; \quad (8)$$

из (8) следует, что $A\xi = b$, т. е. что система (2) удовлетворена. Единственность вектора ξ следует из (8) и единственности c . Итак, мы получим теорему:

Теорема 3. Система уравнений (2) определяет при любом векторе b корректную задачу для системы (1) тогда и только тогда, когда выполнено условие (6).

4. Условие $v(t) = O(t^h)$, фигурировавшее во всех результатах этого параграфа, можно заменить другим условием роста:

$$v(t) = O(t^h e^{\alpha t}), \quad (1)$$

где α — фиксированная вещественная постоянная.

Все результаты этого параграфа переносятся на случай (1) в той же общей формулировке, с той разницей, что число r должно быть определено не из соотношения (2) п. 1, а из соотношения

$$\operatorname{Re} \lambda_{r-1} \leq \alpha < \operatorname{Re} \lambda_r. \quad (2)$$

Доказательства в этом случае проходят точно по такому же пути, как раньше. Но можно и непосредственно привести случай (1) к предыдущему, а именно, ввести новую неизвестную (вектор)-функцию $v_\alpha(t) = v(t) \cdot e^{-\alpha t}$. Для этой функции, как легко проверить, соответствующая система, полученная из (1) п. 1, будет иметь характеристические корни $\lambda_0 - \alpha, \dots, \lambda_{m-1} - \alpha$. Для применения результатов пп. 1—3 существенны будут условия $\operatorname{Re} \lambda_j - \alpha \leq 0$, которые обеспечат для $v_\alpha(t)$ рост не выше $O(t^h)$; но это и означает, что условия $\operatorname{Re} \lambda_j \leq \alpha$ обеспечат для $v(t)$ рост не выше $O(t^h e^{\alpha t})$.

§ 26. Уравнения в частных производных

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_j(t, x)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{m-1} p_{jk} \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) u_k(t, x) \quad (j=0, 1, \dots, m-1), \quad (1)$$

где p_{jk} — многочлен от $t \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, t \frac{\partial}{\partial x_n}$ максимальной степени p . Можно записать систему (1) в векторной форме

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = P \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x), \quad (2)$$

где $u(t, x) \rightarrow$ вектор-функция с компонентами $u_0(t, x), \dots, u_{m-1}(t, x)$, $P\left(t \frac{\partial}{\partial x}\right) = \|p_{jk}\left(t \frac{\partial}{\partial x}\right)\| - m \times m$ -матрица.

Вектор-функция $u(t, x)$ предполагается принадлежащей при каждом $t \geq 0$ к пространству \mathcal{H} (это означает, что каждая составляющая $u_j(t, x)$ входит в \mathcal{H}).

Дифференцирование по t понимается как дифференцирование по параметру и в смысле топологии \mathcal{H} .

К системе (1) (или (2)) предполагается присоединенным некоторое начальное условие, налагаемое на вектор-функцию $u(0, x)$, и условие роста при $t \rightarrow \infty$

$$u(t, x) = O(t^h).$$

Задача называется корректной, если существует и единственно решение системы (1), удовлетворяющее всем поставленным условиям, непрерывно зависящее от допустимой начальной вектор-функции $u(0, x)$ (в смысле сходимости в \mathcal{H}).

Мы укажем сейчас некоторую корректную задачу для уравнения (1). Для этого совершим преобразование Фурье по координатам x .

Двойственная система в пространстве H имеет вид

$$\frac{dv_j(t, \sigma)}{dt} = \sum_{k=0}^{m-1} p_{jk}(\sigma) v_k(t, \sigma) \quad (j=0, 1, \dots, m-1). \quad (3)$$

Система (3) есть система обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром σ . При каждом фиксированном σ система (3) есть система уравнений с постоянными коэффициентами, и мы можем использовать для решения вопроса о корректной задаче результаты § 25, п. 1. В соответствии с этими результатами мы должны рассмотреть m -мерное пространство Q , состоящее из векторов $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{m-1})$, в котором действует оператор $P = P(\sigma)$ по формулам

$$\begin{aligned} (P(\sigma) \xi)_0 &= p_{00}(\sigma) \xi_0 + \dots + p_{0, m-1}(\sigma) \xi_{m-1}, \\ &\dots \dots \dots \\ (P(\sigma) \xi)_{m-1} &= p_{m-1, 0}(\sigma) \xi_0 + \dots + p_{m-1, m-1}(\sigma) \xi_{m-1}. \end{aligned}$$

Мы должны разложить пространство Q в прямую сумму подпространств $Q^-(\sigma)$ и $Q^+(\sigma)$, инвариантных относительно оператора $P(\sigma)$, причем $Q^-(\sigma)$ порождается собственными и присоединенными векторами, отвечающими собственным значениям $\lambda(\sigma)$ оператора $P(\sigma)$ с $\text{Re } \lambda(\sigma) \leq 0$, а $Q^+(\sigma)$ — собственными и присоединенными векторами этого оператора, отвечающими собственным значениям с $\text{Re } \lambda(\sigma) > 0$. Размерность $r = r(\sigma)$ подпространства $Q^-(\sigma)$ также зависит от σ . При

фиксированном σ корректная задача для системы (3) состоит в условии $v(0, \sigma) \in Q^-(\sigma)$. Оказывается, что выполнение аналогичного условия при всех σ (с точностью до множества меры 0) образует корректную задачу для системы (3) в пространстве H и тем самым и корректную задачу для системы (1) в пространстве \mathcal{H} :

Теорема 1. *Если преобразование Фурье $v_0(\sigma)$ вектор-функции $u_0(x) \in \mathcal{H}$ почти при каждом σ принадлежит соответствующему подпространству $Q^-(\sigma)$, то система (2) имеет единственное решение $u(t, x)$, принадлежащее пространству \mathcal{H} при каждом $t \geq 0$ и обращающееся в $u_0(x)$ при $t=0$. Это решение возрастает в \mathcal{H} при $t \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени t . Если же $v_0(\sigma)$ не удовлетворяет поставленному условию (т. е. на множестве положительной меры имеет ненулевую составляющую в $Q^+(\sigma)$), то решение системы (2) при начальной вектор-функции $u_0(x)$ если и существует в \mathcal{H} , то во всяком случае возрастает в \mathcal{H} при $t \rightarrow \infty$ быстрее любой степени t .*

Доказательство. Начнем с построения искомого решения. Решение системы (3) с начальным вектором $v_0(\sigma)$ имеет вид

$$v(t, \sigma) = e^{tP(\sigma)} v_0(\sigma).$$

Так как $v_0(\sigma) \in Q^-(\sigma)$, то, по доказанному в § 25, п. 1, вектор $v(t, \sigma)$ при фиксированном σ возрастает при $t \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени t . Мы должны показать, что $v(t, \sigma)$, как элемент пространства H , возрастает в H не быстрее степени t . Метод § 25, п. 1, пригодный для фиксированного σ , содержит в оценке постоянные, зависимость которых от σ трудно обозрима. Поэтому для оценки нормы матрицы $e^{tP(\sigma)}$ мы используем неравенство (2) § 24, п. 2, в котором зависимость постоянных от σ легко учитывается. В данном случае это неравенство имеет вид

$$\|e^{tP(\sigma)}\| \leq e^{t\Lambda(\sigma)} \left[1 + 2t\|P(\sigma)\| + \dots + \frac{(2t)^{m-1}}{(m-1)!} \|P(\sigma)\|^{m-1} \right],$$

где $\Lambda(\sigma) = \max \operatorname{Re} \lambda_j(\sigma)$, причем корни $\lambda_j(\sigma)$, естественно, следует рассматривать лишь для инвариантного подпространства $Q^-(\sigma)$, которому принадлежит вектор $v(0, \sigma)$. Таким образом, можно считать $\Lambda(\sigma) \leq 0$, $e^{t\Lambda(\sigma)} \leq 1$. Далее, как известно*), квадрат нормы любой матрицы в ортогональном базисе не превосходит суммы квадратов ее элементов; поэтому

$$\|P(\sigma)\|^2 \leq \sum \sum |p_{jk}(\sigma)|^2 \leq C^2 (1 + \sigma^2)^p,$$

*) См. Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств, § 53, п. 4, стр. 149, Физматгиз, М., 1956.

откуда

$$\|P(\sigma)\| \leq C(1 + |\sigma|)^p.$$

Окончательно

$$\|e^{tP(\sigma)}\| \leq 1 + 2tC(1 + |\sigma|)^p + \dots + \frac{(2tC)^{m-1}}{(m-1)!} (1 + |\sigma|)^p (m-1). \quad (4)$$

При достаточно большом t можно ограничиться старшим членом

$$\|e^{tP(\sigma)}\| \leq C_1 t^{m-1} (1 + |\sigma|)^p (m-1). \quad (5)$$

Оценки (4) — (5) являются одновременно оценками для каждого элемента матрицы $e^{tP(\sigma)}$. По условию, каждая компонента вектора $v(0, \sigma)$ принадлежит пространству H . Компоненты вектора $v(t, \sigma)$ получаются как суммы произведений элементов матрицы $e^{tP(\sigma)}$ и компонент вектора $v(0, \sigma)$; поэтому

$$\|v(t, \sigma)\| \leq C_2 t^{m-1} (1 + |\sigma|)^p (m-1) \|v(0, \sigma)\|. \quad (6)$$

Но в пространстве H допустимо умножение на функции степенного роста, поэтому $v(t, \sigma) \in H$ при каждом фиксированном t . Далее, оценка (6) показывает, что $\frac{1}{t^{m-1}} \|v(t, \sigma)\|$ ограничено в H , поэтому в H

$$v(t, \sigma) = O(t^{m-1}),$$

а следовательно, в $\mathcal{S}\mathcal{H}$

$$u(t, x) = O(t^{m-1}).$$

Единственность найденного решения $v(t, \sigma)$ вытекает из единственности решения при каждом σ ; непрерывная зависимость $v(t, \sigma)$ от $v(0, \sigma)$ — следовательно, и $u(t, x)$ от $u(0, x)$ — видна из оценки (6).

Замечание. В соответствии с замечанием 1 в § 1, п. 4 имеют место следующие оценки для порядка сингулярности:

$$s(v(t, \sigma)) \leq p(m-1) + s(v(0, \sigma)),$$

$$s(u(t, x)) \leq p(m-1) + s(u(0, x)).$$

Поэтому, если $u(0, x)$ — достаточно гладкая функция, так что $s(u(0, x)) \leq -p(m-1)$, решение $u(t, x)$ является также обычной функцией, если же $s(u(0, x)) > -p(m-1)$, то решение $u(t, x)$, вообще говоря, уже не есть обычная функция. Фактически убедиться в этом можно на примере волнового уравнения (§ 29, п. 1, пример 3).

Переходим к доказательству необходимости условия. Предположим, что вектор-функция $u_0(\sigma)$ на множестве G положительной меры имеет ненулевую составляющую $v_0^+(\sigma)$ в подпространстве $Q^+(\sigma)$. Можно

считать, что на этом множестве G положительной меры мы имеем при некотором k

$$\operatorname{Re} \lambda_k(\sigma) > c > 0.$$

По доказанному в § 25, п. 1, при данном σ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-ct} \|v(t, \sigma)\|_{\sigma} = \infty. \quad (7)$$

В силу теоремы Егорова, предельное соотношение (7) имеет место равномерно на множестве $G_0 \subset G$ положительной меры. Но тогда и в любом пространстве $H^{(q)}$ с $q > \frac{n}{2}$ при достаточно большом t

$$\|v(t, \sigma)\|_q^2 = \int_{R_n} \frac{\|v(t, \sigma)\|_{\sigma}^2 d\sigma}{(1 + \sigma^2)^q} \geq \int_{G_0} \frac{e^{2ct} d\sigma}{(1 + \sigma^2)^q} = e^{2ct} \cdot C_q,$$

так что соответствующее решение $u(t, x) \in \mathcal{H}$, если и существует, то при $t \rightarrow \infty$ возрастает в \mathcal{H} быстрее экспоненты. Теорема доказана.

2. Рассмотрим теперь одно уравнение

$$\frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k}. \quad (1)$$

Считая, что решение $u(t, x)$ вместе с производными $\frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k}$ ($k=0, 1, \dots, m$) принадлежит пространству \mathcal{H} , произведем преобразование Фурье; мы получим обыкновенное уравнение

$$\frac{d^m v(t, \sigma)}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma) \frac{d^k v(t, \sigma)}{dt^k} \quad (2)$$

с параметром σ . При каждом фиксированном σ уравнение (2) есть уравнение с постоянными коэффициентами и для построения корректной задачи мы можем использовать результаты § 25, п. 2. А именно, пусть $r = r(\sigma)$ — число корней уравнения

$$\lambda^m(\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma) \lambda^k(\sigma),$$

имеющих при данном σ неположительную вещественную часть; тогда корректная задача (опять-таки при данном σ) состоит в указании величин $v(0, \sigma)$, $\frac{dv(0, \sigma)}{dt}$, \dots , $\frac{d^{r-1}v(0, \sigma)}{dt^{r-1}}$.

Оказывается, что аналогичное условие при всех σ (с точностью до множества меры 0) образует корректную задачу для уравнения (2) в пространстве H — и следовательно, корректную задачу для уравнения (1). (Заметим, что при этом само число r задаваемых начальных условий зависит от точки σ .) Этот факт и составляет утверждение основной теоремы из § 1. Напомним ее формулировку:

Теорема 2. Пусть G_r есть множество точек $\sigma \in R_n$, в которых ровно r величин из числа $\operatorname{Re} \lambda_0(\sigma), \dots, \operatorname{Re} \lambda_{m-1}(\sigma)$ не положительны. Пусть на каждом множестве G_r заданы функции $v_0(\sigma), \dots, v_{r-1}(\sigma)$, продолжаемые на все $R_n(\sigma)$ (например, тождественным нулем) до функции из пространства H . Утверждается, что уравнение (4) имеет решение $u(t, x)$, у которого преобразование Фурье функции $\frac{\partial^{k-1} u(0, x)}{\partial t^{k-1}}$ совпадает на каждом множестве G_r с функцией $v_{k-1}(\sigma)$ ($k = 1, \dots, r$). Это решение $u(t, x)$ при каждом $t \geq 0$ принадлежит пространству \mathcal{H} и при $t \rightarrow \infty$ возрастает в \mathcal{H} не быстрее некоторой степени t вместе со всеми производными по t до порядка $m-1$. Оно единственно в классе всех решений уравнения (4), принадлежащих \mathcal{H} , возрастающих в \mathcal{H} при $t \rightarrow \infty$ вместе с производными по t до порядка $m-1$ не быстрее степени t ; кроме того, оно непрерывно зависит в топологии \mathcal{H} от заданных функций $v_k(\sigma)$, если эти функции меняются непрерывно в топологии соответствующих пространств $H(G_r)$.

Доказательство. Уравнение (2) эквивалентно системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_0(t, \sigma)}{dt} &= & v_1(t, \sigma), \\ \frac{dv_1(t, \sigma)}{dt} &= & v_2(t, \sigma), \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dv_{m-2}(t, \sigma)}{dt} &= & v_{m-1}(t, \sigma), \\ \frac{dv_{m-1}(t, \sigma)}{dt} &= p_0(\sigma) v_0(t, \sigma) + p_1(\sigma) v_1(t, \sigma) + \dots \\ & \dots + p_{m-1}(\sigma) v_{m-1}(t, \sigma). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В силу теоремы 1 (п. 1), начальный вектор

$$v_0(\sigma) = (v_0(0, \sigma), \dots, v_{m-1}(0, \sigma))$$

тогда и только тогда определяет корректную задачу для системы (3), когда он принадлежит почти при каждом σ к соответствующему пространству $Q^-(\sigma)$.

Пусть нам заданы функции $v_j(0, \sigma)$, каждая на своем множестве G_j ($j=0, 1, \dots, m-1$), продолжаемые (тождественным нулем) до функций из пространства H . По доказанному в § 25, п. 2, в каждой точке $\sigma \in G_r$ величины $v_0(\sigma), \dots, v_{r-1}(\sigma)$ можно дополнить величинами $v_r(\sigma), \dots, v_{m-1}(\sigma)$ так, что полученный вектор $v(\sigma) = (v_0(\sigma), \dots, v_m(\sigma))$ лежит в подпространстве $Q^-(\sigma)$. Покажем, что этот вектор $v(\sigma)$, рассматриваемый как функция от σ , принадлежит пространству H . В силу формулы (9) § 25, п. 2, величина v однозначно определяется по формуле

$$v_s(\sigma) = \sum_{j=0}^{r-1} v_j(\sigma) R_{js}(\lambda_0(\sigma), \dots, \lambda_{r-1}(\sigma)),$$

где R_{js} — фиксированный однородный многочлен от $\lambda_0(\sigma), \dots, \lambda_{r-1}(\sigma)$ степени $s-j$. Для всех характеристических корней $\lambda_j(\sigma)$ имеет место оценка (ср. § 24, п. 2)

$$|\lambda_j(\sigma)| \leq \|P(\sigma)\| \leq C(1 + |\sigma|)^p. \quad (4)$$

Поэтому

$$|R_{js}(\lambda_0(\sigma), \dots, \lambda_{r-1}(\sigma))| \leq C_1(1 + |\sigma|)^{p(s-j)} \leq C_1(1 + |\sigma|)^{p(m-1)}.$$

Так как в пространстве H допустимо умножение на функции степенного роста, мы видим, что функции $v_s(\sigma)$ вместе с функциями $v_j(\sigma)$ ($j=0, 1, \dots, r-1$) принадлежат пространству H . Так как по построению вектор $v(\sigma) \in Q^-(\sigma)$, то, в силу теоремы 1, решение $v(t, \sigma)$ принадлежит H и удовлетворяет оценке $v(t, \sigma) = O(t^{m-1})$.

Единственность решения следует из единственности вектора $v(0, \sigma)$ по данным $v_0(0, \sigma), \dots, v_{r-1}(0, \sigma)$, непрерывная зависимость от функций $v_0(0, \sigma), \dots, v_{r-1}(0, \sigma)$ — из непрерывной зависимости от этих функций последующих функций $v_s(0, \sigma)$ и теоремы 1. Теорема доказана.

Как следует из замечания к теореме 1, можно сделать определенные выводы о существовании решения и в классических терминах.

Именно, можно утверждать, что если начальные функции $\frac{\partial^k u(0, x)}{\partial t^k}$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и при этом являются обычными функциями, имеющими квадратично интегрируемые производные до некоторого фиксированного порядка q , то решение $u(t, x)$ будет обычной функцией. Число q определяется степенью по σ многочленов в правой части равенства (4), т. е. величиной $(m-1)p$ с добавкой еще $(m-1)p$, как было указано в замечании в теореме 1, таким образом $q = 2(m-1)p$. Конечно, эта оценка необходимого числа производных еще завышена.

3. Следующая теорема показывает, что приведенные в теореме 2 условия являются необходимыми и достаточными для корректной постановки задачи с заданными значениями преобразований Фурье начальных функций

$$u(0, x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t}, \quad \dots \quad \frac{\partial^{m-1} u(0, x)}{\partial t^{m-1}}$$

на какой-либо системе вложенных друг в друга множеств n -мерного пространства $R_n(\sigma)$.

Теорема 3. Если преобразования Фурье $v_{j-1}(\sigma)$ функций $\frac{\partial^{j-1} u(0, x)}{\partial t^{j-1}}$ ($j=1, \dots, m$) заданы на множествах $G'_j, G'_0 \supset G'_1 \supset \dots \supset G'_{m-1}$, не совпадающих с соответствующими множествами G_j (с точностью до множеств меры 0), то задача становится некорректной. Точнее, если хотя бы для одного $j=j_0$ мера разности $G'_j - G_j G'_j$ положительна, то решение, вообще говоря, не существует; если все G'_j содержатся в соответствующих G_j и хотя бы для одного j разность $G_j - G'_j$ имеет положительную меру, то решение не единственно.

Доказательство. Рассмотрим первый случай: мера разности $G'_j - G_j G'_j$ положительна. Пусть $\sigma \in G'_j - G_j G'_j$. Поскольку σ не входит в G_j , подпространство $Q^-(\sigma)$ имеет при данном σ размерность $< j$, поэтому можно задать числа $v_0(\sigma), \dots, v_{j-1}(\sigma)$ так, чтобы ни при каких значениях $v_j(\sigma), \dots, v_{m-1}(\sigma)$ вектор $v(\sigma) = (v_0(\sigma), \dots, v_{m-1}(\sigma))$ не попадал в $Q^-(\sigma)$. Это построение можно провести для всех $\sigma \in G'_j - G_j G'_j$ и притом так, чтобы функции $v_i(\sigma)$ ($0 \leq i < j$) были, например, финитными непрерывными функциями. В силу теоремы 1, решение задачи с соответствующими начальными данными, если и существует, то возрастает в \mathcal{H} быстрее любой степени t (может быть, и не сама функция $u(t, x)$, а некоторая из ее производных по t до порядка $m-1$), так что задача некорректна.

Во втором случае, когда все G'_j содержатся в соответствующих G_j и для некоторого j разность $G_j - G'_j$ имеет положительную меру, мы можем на этой разности задавать произвольно $v_{j-1}(\sigma)$ и за счет этого получать различные решения задачи. Тем самым теорема полностью доказана.

4. Рассмотрим для системы

$$\frac{\partial u_j(t, x)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{m-1} p_{jk} \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) u_k(t, x) \quad (j=0, 1, \dots, m-1) \quad (1)$$

более общую краевую задачу.

Имеется система уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{00}(\sigma)v_0(\sigma) + \dots + a_{0, m-1}(\sigma)v_{m-1}(\sigma) &= b_0(\sigma), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ a_{q0}(\sigma)v_0(\sigma) + \dots + a_{q, m-1}(\sigma)v_{m-1}(\sigma) &= b_q(\sigma). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Спрашивается, какова должна быть матрица $A(\sigma) = \|a_{jk}(\sigma)\|$, чтобы при любом векторе $b(\sigma) = (b_0(\sigma), \dots, b_q(\sigma))$ (с некоторыми ограничениями на характер его зависимости от σ , о которых будет сказано ниже) существовало и было бы единственным решением $u(t, x)$ системы (1), обращающееся при $t=0$ в вектор $u(0, x)$, который имеет своим преобразованием Фурье вектор $v(\sigma) = (v_0(\sigma), \dots, v_{m-1}(\sigma))$, удовлетворяющий системе (2).

При фиксированном σ эта задача переходит в задачу п. 3 § 25, и мы можем использовать соответствующий результат. Именно, пусть $E = E(\sigma)$ — матрица из m строк и r столбцов, представляющая базис подпространства $Q^-(\sigma)$; тогда при фиксированном σ мы должны иметь $q = r(\sigma) - 1$, и квадратная матрица r -го порядка $A(\sigma)E(\sigma)$ должна иметь обратную матрицу. Если это условие выполнено, то искомым вектор $v(0, \sigma)$ определяется равенством

$$v(0, \sigma) = E(AE)^{-1}b(\sigma).$$

Вектор $v(0, \sigma)$ принадлежит в каждой точке подпространству $Q^-(\sigma)$. Чтобы он определял корректную задачу для системы (2), нужно потребовать еще, чтобы он входил в H . Итак, мы получаем дополнительное достаточное условие на $b(\sigma)$:

$$E(AE)^{-1}b(\sigma) \in H.$$

Это и есть то дополнительное ограничение, которое нужно наложить на вектор $b(\sigma)$ для обеспечения корректности задачи.

Мы доказали достаточность условий следующей теоремы:

Теорема 4. Система (1) имеет единственное решение $u(t, x)$, принадлежащее пространству \mathcal{H} при каждом $t \geq 0$, удовлетворяющее при $t=0$, после преобразования Фурье, условиям (2), возрастающее при $t \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени t тогда и только тогда, когда матрица $(AE)^{-1}$ существует на каждом множестве G_r , почти при каждом σ и $E(AE)^{-1}b$ принадлежит $\mathcal{H}(G_r)$.

Для доказательства необходимости этих условий будем рассуждать следующим образом.

Пусть матрица AE вырождена на множестве положительной меры. Мы сможем найти решение уравнения

$$AEb(\sigma) = 0$$

ненулевое и ограниченное на множестве положительной меры. Вектор-функция $v(\sigma) = Eb(\sigma)$ в каждой точке принадлежит пространству

$Q^-(\sigma)$, а на всей оси принадлежит пространству H ; таким образом, по доказанному, имеется решение $v(t, \sigma)$ системы (1), принадлежащее пространству H при каждом $t \geq 0$ и возрастающее в H не быстрее некоторой степени t . При $t=0$ выполняется условие

$$Av(\sigma, 0) = Av(\sigma) = 0.$$

Таким образом, если матрица AE вырождена на множестве положительной меры, то решение задачи (1)—(2) если и существует в H , то заведомо не единственное; следовательно, задача (1)—(2) не является корректной.

Если r постоянно (не зависит от σ), то условия (2) можно переформулировать в терминах функций $u_j(0, x)$. Предположим дополнительно, что функции $a_{jk}(\sigma)$ суть многочлены от σ , и пусть $(B_0(x), \dots, B_{r-1}(x))$ —вектор, преобразование Фурье которого совпадает с вектором $(b_0(\sigma), \dots, b_{r-1}(\sigma))$. Применяя к (2) обратное преобразование Фурье, получаем

$$\left. \begin{aligned} a_{00} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_0(0, x) + \dots + a_{0, m-1} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_{m-1}(0, x) &= B_0(x), \\ \dots & \\ a_{r-1, 0} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_0(0, x) + \dots + a_{r-1, m-1} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_{m-1}(0, x) &= B_{r-1}(x). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Условия подобного типа называются условиями «с косыми производными».

5. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\Delta u$. Как мы уже знаем, здесь $m=2$, $\lambda_{01}(\sigma) = \pm |\sigma|$, так что $r=1$, $G_0 = R_n$, $G_1 = (0)$; матрица E имеет один столбец из двух элементов

$$E = \left\| \begin{matrix} 1 \\ -|\sigma| \end{matrix} \right\|.$$

Рассмотрим «вторую краевую задачу»: $\frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x)$, или, после преобразования Фурье, $\frac{dv}{dt} = v_1(\sigma)$. Соответствующая матрица A имеет вид

$$A = \|0 \ 1\|.$$

Мы имеем

$$AE = \| -|\sigma| \|.$$

так что $(AE)^{-1}$ существует почти при всех σ . Далее,

$$E(AE)^{-1}v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -|\sigma| \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1(\sigma) \\ -|\sigma| \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{v_1(\sigma)}{|\sigma|} \\ v_1(\sigma) \end{vmatrix}.$$

Функция $v_1(\sigma)$, по условию, принадлежит пространству H ; чтобы задача была корректно разрешимой, нужно предположить, что также $\frac{v_1(\sigma)}{\sigma} \in H$. Если предположить дополнительно, что $v_1(\sigma)$ непрерывна в окрестности нуля и $n \leq 2$, то мы должны будем вывести, что $v_1(0) = 0$ (иначе $\frac{v_1}{|\sigma|}$ не будет входить в H); это означает, что

$$\int_{R_n} u_1(x) dx = 0.$$

Итак, при $n \leq 2$, если заданная функция $u_1(x) = \frac{\partial u(0, x)}{\partial t}$ интегрируема, то ее интеграл по всем x должен быть равен нулю. Это — классический критерий корректности второй краевой задачи*).

2. Для того же уравнения рассмотрим начальную задачу «с косою производной»

$$\frac{\partial^2 u(0, x)}{\partial t \partial X} = U(x), \quad \text{где} \quad \frac{\partial}{\partial X} = \sum_{j=1}^n \gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

После преобразования Фурье получаем

$$il \frac{\partial v}{\partial t} = V(\sigma), \quad l = \sum_{j=1}^n \gamma_j \sigma_j,$$

так что

$$A = \|0 \quad -il\|, \quad AE = \|il \quad |\sigma|\|,$$

$$(AE)^{-1} = \left\| -i \frac{1}{l|\sigma|} \right\|, \quad E(AE)^{-1}V(\sigma) = \begin{vmatrix} -iV \\ \frac{iV}{l(\sigma)|\sigma|} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, данная задача корректна при условии, что $\frac{V(\sigma)}{l(\sigma)|\sigma|} \in H$. Это означает, в частности, что $V(\sigma)$ обращается в нуль при $l = (\gamma, \sigma) = 0$; для функции $U(x)$ мы получаем необходимое условие

$$\int_{R_n} U(x) e^{i(x, \sigma)} dx = 0 \quad \text{при} \quad (\gamma, \sigma) = 0.$$

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, гл. IV, § 2, п. 202, стр. 608, Гостехиздат, М., 1953.

6. Условие $u(t, x) = O(t^h)$ в \mathcal{H} можно заменить другим условием

$$u(t, x) = O(t^h e^{\alpha t}) \text{ в } \mathcal{H} \quad (1)$$

с фиксированным вещественным α . Все результаты этого параграфа переносятся на случай (1) в той же общей формулировке, с той разницей, что число r должно быть определено не из соотношения $\operatorname{Re} \lambda_{r-1}(\sigma) \leq 0 < \operatorname{Re} \lambda_r(\sigma)$, а из соотношения

$$\operatorname{Re} \lambda_{r-1}(\sigma) \leq \alpha < \operatorname{Re} \lambda_r(\sigma).$$

Для доказательства достаточно воспользоваться заменой

$$u_\alpha(t, x) = e^{-\alpha t} u(t, x)$$

и соображениями, высказанными в п. 4 § 25.

В связи с этим рассмотрим класс систем уравнений, называемых *корректными по Петровскому*. Так называются системы вида (1), для которых вещественные части всех характеристических корней ограничены при всех σ :

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\sigma) \leq C.$$

В силу теоремы 1 п. 1, для системы, корректной по Петровскому, *задача Коши*

$$u(0, x) = \{u_0(0, x), \dots, u_{m-1}(0, x)\}$$

обладает решением $u(t, x)$, которое принадлежит при каждом $t \geq 0$ пространству \mathcal{H} , возрастает в \mathcal{H} при $t \rightarrow \infty$ не быстрее $t^h e^{\alpha t}$ и единственно в классе всех вектор-функций $u(t, x)$, принадлежащих к \mathcal{H} при каждом $t \geq 0$, удовлетворяющих тому же условию роста при $t \rightarrow \infty$, а при $t=0$ обращающихся в вектор-функцию $u(0, x)$.

§ 27. Фундаментальные решения регулярных краевых задач

1. Мы знаем, что в пространстве H операция умножения на любую функцию $V(\sigma)$, локально ограниченную и не выше степенного роста на бесконечности, определена и непрерывна. Найдем двойственную операцию в пространстве \mathcal{H} . Если $G(x)$ есть обратное преобразование Фурье функции $V(\sigma)$, то искомую операцию естественно называть сверткой с функционалом $G(x)$. Отметим, что эта свертка есть нечто новое по сравнению с той сверткой, которую мы рассматривали в § 12, поскольку ни функционал $G(x)$, ни обобщенная функция $f \in \mathcal{H}$, к которым применяется операция свертки, не являются финитными.

Функцию $V(\sigma)$ можно представить как результат умножения некоторой ограниченной интегрируемой функции $V_0(\sigma)$ на некоторую,

например q -ю, степень многочлена $1 + |\sigma|^2$. Соответственно обратное преобразование Фурье $G(x)$ функции $V(\sigma)$ можно представить в виде

$$G(x) = (1 - \Delta)^q G_0(x),$$

где $G_0(x)$ — некоторая непрерывная функция, стремящаяся к 0 при $|x| \rightarrow \infty$. Далее, любая функция $g(\sigma) \in H$ есть результат умножения некоторого многочлена $Q(\sigma)$ на квадратично интегрируемую функцию $g_0(\sigma)$, а соответствующая обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'$ есть результат применения оператора $Q\left(t \frac{\partial}{\partial x}\right)$ к квадратично интегрируемой функции $f_0(x) = F^{-1}[g_0(\sigma)]$. Мы имеем

$$\begin{aligned} F^{-1}[V(\sigma)g(\sigma)] &= F^{-1}[(1 + \sigma^2)^q Q(\sigma)V_0(\sigma)g_0(\sigma)] = \\ &= (1 - \Delta)^q Q\left(t \frac{\partial}{\partial x}\right) F^{-1}[V_0(\sigma)g_0(\sigma)]. \end{aligned}$$

Таким образом, дело приводится к определению $F^{-1}[V_0(\sigma)g_0(\sigma)]$. Этой операции, которую мы уже назвали сверткой $G_0(x) = F^{-1}[V_0(\sigma)]$ и $f_0(x) = F^{-1}[g_0(\sigma)]$, мы должны дать явное определение. Свертка в обычном смысле

$$\int_{R_n} G_0(x - \xi) f_0(\xi) d\xi$$

в данном случае, вообще говоря, не существует. Но мы утверждаем, что она существует в среднем квадратическом, т. е. как предел по метрике $L_2(R_n)$ выражений

$$[G_0 * f_0]_N(x) = \int_{|\xi| \leq N} G_0(x - \xi) f_0(\xi) d\xi. \quad (1)$$

Так как $G_0(x)$ ограничена, а $f_0(x)$ на отрезке $[-N, N]$ интегрируема, то последнее выражение имеет смысл. Оно представляет собой обычную свертку функции $G_0(x)$ с финитной квадратично интегрируемой функцией $f_0^N(x)$, равной $f_0(x)$ при $|x| \leq N$ и 0 при $|x| > N$.

Обозначим через $g_0^N(\sigma)$ преобразование Фурье функции $f_0^N(x)$. Поскольку при $N \rightarrow \infty$ последовательность $f_0^N(x)$ сходится к $f_0(x)$ по метрике $L_2(R_n)$, функции $g_0^N(\sigma)$ также в метрике $L_2(R_n)$ сходятся к $g_0(\sigma)$. Так как $V_0(\sigma)$ ограничена, то $V_0(\sigma)g_0^N(\sigma)$ сходятся к $V_0(\sigma)g_0(\sigma)$

в метрике $L_2(R_n)$. Отсюда следует, что функции $[G_0 * f_0]_N(x) = F^{-1}[V_0(\sigma)g_0^N(\sigma)]$ сходятся в метрике $L_2(R_n)$ к $F^{-1}[V_0(\sigma)g_0(\sigma)]$;

итак,

$$\begin{aligned} F^{-1}[V_0(\sigma) g_0(\sigma)] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \{F^{-1}[V_0] * F^{-1}[g_0^N]\} = \lim_{N \rightarrow \infty} G_0(x) * f_0^N(x) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|\xi| \leq N} G_0(x - \xi) f_0(\xi) d\xi \end{aligned}$$

в смысле сходимости в среднем.

Итак, для любого функционала $G(x)$, являющегося обратным преобразованием Фурье функции $V(\sigma)$, локально ограниченной и не выше степенного роста при $|\sigma| \rightarrow \infty$, определена операция свертки $G(x) * f(x)$ с любым функционалом $f \in \mathcal{H}$ по правилу

$$G(x) * f(x) = (1 - \Delta)^q Q \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq N} G_0(x - \xi) f_0(\xi) d\xi,$$

где $(1 - \Delta)^q G_0(x) = G(x)$ и $Q \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) f_0(x) = f(x)$. Эта операция однозначна (т. е. не зависит от выбора G_0 и f_0) и непрерывна в пространстве \mathcal{H} .

В дальнейшем обобщенные функции $G(x)$ указанного вида будем называть *свертывателями* в \mathcal{H} . Заметим еще, что для любых двух свертывателей G_1 и G_2 свертка $G_1 * G_2$ есть снова свертыватель в \mathcal{H} , причем для любой $f \in \mathcal{H}$ справедливо равенство $G_1 * (G_2 * f) = (G_1 * G_2) * f$.

Последние два утверждения являются эквивалентом соответствующих свойств функций от σ .

2. Покажем, что справедлива формула дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (G * f) = \frac{\partial G}{\partial x_j} * f = G * \frac{\partial f}{\partial x_j}. \quad (1)$$

В самом деле, цепь равенств (1) эквивалентна цепи равенств

$$i\sigma_j (V(\sigma) g(\sigma)) = (i\sigma_j V(\sigma)) g(\sigma) = V(\sigma) (i\sigma_j g(\sigma)),$$

очевидно, справедливой.

Свертка $G * f$, как мы уже говорили, непрерывная операция в \mathcal{H} , т. е. из $f_\nu \rightarrow f$ в \mathcal{H} следует $G * f_\nu \rightarrow G * f$ в \mathcal{H} . Укажем теперь условие сходимости $G_\nu \rightarrow G$, из которого следует, что $G_\nu * f \rightarrow G * f$. (В § 12 аналогичным условием служила равномерная финитность функционалов G_ν .) Будем говорить, что последовательность свертывателей $G_\nu(x)$ *правильно сходится* к свертывателю $G(x)$, если соответствующие преобразования Фурье $V_\nu(\sigma)$ имеют равномерно ограниченный рост, т. е. справедлива оценка

$$|V_\nu(\sigma)| \leq C(1 + \sigma^2)^q,$$

где C и q не зависят от ν , и, кроме того, функции $V_\nu(\sigma)$ равномерно

сходятся к $V(\sigma)$ на каждом бруске пространства R_n . Покажем, что если $G_\nu(x)$ правильно сходятся к $G(x)$, то $G_\nu * f$ сходится к $G * f$ в пространстве \mathcal{H} .

Достаточно проверить, что $V_\nu(\sigma) g(\sigma) \rightarrow V(\sigma) g(\sigma)$ в пространстве H . Мы имеем $V_\nu(\sigma) = (1 + \sigma^2)^q v_\nu(\sigma)$, $V(\sigma) = (1 + \sigma^2)^q v(\sigma)$, $g(\sigma) = Q(\sigma) g_0(\sigma)$, где $g_0(\sigma) \in L_2(R_n)$, а $v_\nu(\sigma)$ ограничены постоянной C и сходятся к $v(\sigma)$ равномерно в каждом бруске.

Отсюда $g_0(\sigma) v_\nu(\sigma) \rightarrow g_0(\sigma) v(\sigma)$ в пространстве L_2 ; а тогда $V_\nu(\sigma) g(\sigma) = (1 + \sigma^2)^q Q(\sigma) g_0(\sigma) v_\nu(\sigma) \rightarrow (1 + \sigma^2)^q Q(\sigma) g_0(\sigma) v(\sigma) = V(\sigma) g(\sigma)$ в H , что и требуется.

Аналогично можно определить правильную сходимость в случае, когда v есть непрерывно изменяющийся параметр, например $v = t \geq 0$; в этом случае также из правильной сходимости $G(t) \rightarrow G$ следует сходимость $G(t) * f \rightarrow G * f$ при любом $f \in \mathcal{H}$.

Функция $G(t)$ называется *правильно дифференцируемой*, если $\frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ правильно сходится к некоторой функции $G'(t)$, называемой производной от G по t . В этом случае мы имеем точно таким же образом

$$\frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t} * f \rightarrow G'(t) * f \text{ в } \mathcal{H}; \text{ или } \frac{d}{dt}(G(t) * f) = G'(t) * f.$$

3. Уравнения и системы, рассмотренные в § 26, будем называть *регулярными*, если число r тех из характеристических корней $\lambda_0(\sigma), \dots, \lambda_{m-1}(\sigma)$, вещественные части которых неположительны (или ограничены сверху), остается постоянным почти при всех σ . Для регулярных уравнений корректные задачи могут быть указаны в терминах задания начальных функций $u_0(0, x), \dots, u_{r-1}(0, x)$. К числу регулярных уравнений относятся классические уравнения — уравнения теплопроводности, волновое, уравнение Лапласа — и некоторые другие, как, например,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (m = 4, r = 3),$$

или

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (m = 4, r = 2).$$

Регулярное уравнение (система) с $r = m$ называется *корректным по Петровскому* (§ 26, п. 6); для таких уравнений корректная задача есть *задача Коши*, в которой указываются m начальных функций $u_0(0, x), \dots, u_{m-1}(0, x)$. Корректные краевые задачи для регулярных уравнений называются также регулярными краевыми задачами, а соответствующее число r — показателем регулярности.

Рассмотрим регулярное уравнение

$$\frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} \quad (1)$$

с показателем регулярности r . Регулярная краевая задача, как мы знаем, состоит в задании r начальных функций

$$\left. \begin{aligned} u(0, x) &= u_0(x), \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial^{r-1} u(0, x)}{\partial t^{r-1}} &= u_{r-1}(x). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Специальное решение $G(t, x)$, удовлетворяющее условиям

$$\left. \begin{aligned} G(0, x) &= 0, \\ \frac{\partial G(0, x)}{\partial t} &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial^{r-2} G(0, x)}{\partial t^{r-2}} &= 0, \\ \frac{\partial^{r-1} G(0, x)}{\partial t^{r-1}} &= \delta(x), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

называется *фундаментальным решением*, или *функцией Грина* данной краевой задачи. Оно не только принадлежит пространству \mathcal{H} , но и является свертывателем в \mathcal{H} ; и, как мы ниже увидим, зная фундаментальное решение $G(t, x)$, мы сможем написать и решение общей краевой задачи (2).

4. Вычислим значения последующих производных функций $G(t, x)$ при $t=0$. Обозначим через $V(t, \sigma)$ преобразование Фурье функции $G(t, x)$. Функция $V(t, \sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^m V(t, \sigma)}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma) \frac{d^k V(t, \sigma)}{dt^k} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} V(0, \sigma) &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d^{r-2} V(0, \sigma)}{dt^{r-2}} &= 0, \\ \frac{d^{r-1} V(0, \sigma)}{dt^{r-1}} &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Она называется *разрешающей функцией* для уравнения (1). Согласно общему построению §§ 25—26, последующие компоненты $v_s(\sigma)$ ($s \geq r$) начального вектора $v_0(\sigma)$ корректной задачи выражаются через предыдущие $v_j(\sigma)$ ($j < r$) по формулам

$$v_s(\sigma) = \sum_{j=0}^{r-1} v_j(\sigma) R_{js}(\lambda_0(\sigma), \dots, \lambda_{r-1}(\sigma)).$$

В нашем случае мы соответственно получаем

$$\frac{d^s V(0, \sigma)}{dt^s} = R_{r-1, s}(\lambda_0(\sigma), \dots, \lambda_{r-1}(\sigma)).$$

Как многочлен от характеристических корней, эта функция локально ограничена и имеет на бесконечности рост не выше степенного. Далее, в силу самого уравнения (1) п. 3 и его производных

$$\begin{aligned} \frac{d^m V(0, \sigma)}{dt^m} &= \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma) \frac{d^k V(0, \sigma)}{dt^k}, \\ \frac{d^{m+1} V(0, \sigma)}{dt^{m+1}} &= \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma) \frac{d^{k+1} V(0, \sigma)}{dt^{k+1}}, \end{aligned}$$

и так далее; мы видим, что производные функции $V(t, \sigma)$ по t любого порядка обращаются при $t=0$ в функции, локально ограниченные, и не выше чем степенного роста при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Покажем, что функция $G(t, x)$ и ее производные по t — правильно дифференцируемые свертыватели. Мы имеем (в векторной записи)

$$W(t, \sigma) = e^{tP(\sigma)} W(0, \sigma).$$

$$\text{Вектор-функция } W(0, \sigma) = \left\{ V(0, \sigma), \frac{dV(0, \sigma)}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}V(0, \sigma)}{dt^{m-1}} \right\}$$

имеет фиксированный (не выше, чем степенной) рост по σ ; а по доказанному в § 26, п. 1

$$\|e^{tP(\sigma)}\| \leq 1 + 2Ct(1 + |\sigma|)^p + \dots + \frac{(2Ct)^{m-1}}{(m-1)!} (1 + |\sigma|)^{p(m-1)},$$

откуда следует, что составляющие вектора $W(t, \sigma)$ при ограниченном t допускают равномерную степенную оценку по σ . Поэтому $G(t, x)$ — свертыватель при любом фиксированном t . Очевидно, что на каждом бруске пространства R_n функция $W(t, \sigma)$ непрерывно зависит от t ; точнее, из $t_v \rightarrow t_0$ следует равномерная сходимость $W(t_v, \sigma)$ к $W(t_0, \sigma)$. Учитывая равномерную степенную оценку $W(t, \sigma)$ по σ , мы видим, что при

$t_v \rightarrow t_0$ имеет место правильная сходимость $V(t_v, \sigma)$ к $V(t_0, \sigma)$ и $G(t_v, x)$ к $G(t_0, x)$.

Для проверки правильной дифференцируемости функции $V(t, \sigma)$ при $t=0$ рассмотрим матрицу-функцию

$$\frac{1}{\tau} [e^{\tau P(\sigma)} - I],$$

имеющую при $\tau \rightarrow 0$ предел (в обычном смысле) $\frac{dW(0, \sigma)}{dt} = P(\sigma)W(0, \sigma)$.

Чтобы показать правильную сходимость этой матрицы-функции к $\frac{dW(0, \sigma)}{dt}$, мы должны проверить наличие у нее степенной оценки по t , равномерной по σ . Заменим $\frac{1}{\tau} [e^{\tau P(\sigma)} - I]$ соответствующим интерполяционным многочленом. Согласно § 24, п. 1, для коэффициентов интерполяционного многочлена

$$R(\lambda) = b_0 + b_1(\lambda - \lambda_0) + \dots + b_{m-1}(\lambda - \lambda_0) \dots (\lambda - \lambda_{m-2})$$

функции $f(\lambda)$ справедливы оценки

$$|b_k| \leq \frac{1}{k!} \max_{\lambda \in Q} |f^{(k)}(\lambda)|,$$

где Q_k — наименьший выпуклый многоугольник, содержащий точки $\lambda_0, \dots, \lambda_k$. В данном случае

$$f(\lambda) = \frac{e^{t\lambda} - 1}{\lambda} = \int_0^t e^{\tau\lambda} d\tau;$$

поэтому для любого многоугольника Q

$$\max_{\lambda \in Q} |f(\lambda)| \leq \int_0^t \max_{\lambda \in Q} |e^{\tau\lambda}| d\tau \leq te^{t\Lambda},$$

$$\max_{\lambda \in Q} |f^{(k)}(\lambda)| \leq \max_{\lambda \in Q} t^{k-1} |e^{t\lambda}| = t^{k-1} e^{t\Lambda},$$

где $\Lambda = \max_{\lambda \in Q} \operatorname{Re} \lambda$. Отсюда, как и в § 24, получаем

$$\begin{aligned} \|R(P)\| &\leq |b_0| + 2|b_1|\|P\| + \dots + |b_{m-1}| \frac{(2\|P\|)^{m-1}}{(m-1)!} \leq \\ &\leq e^{t\Lambda} \left(t + 2\|P\| + t \frac{(2\|P\|)^2}{2!} + \dots + t^{m-r} \frac{(2\|P\|)^{m-1}}{(m-1)!} \right), \quad (2) \end{aligned}$$

где $\Lambda = \max(\operatorname{Re} \lambda_0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_{m-1})$. Если оператор P действует в подпространстве $Q^-(\sigma)$, то $e^{t\Lambda} \leq 1$ и (2) дает искомую оценку. Далее, производная по t от $e^{tP(\sigma)}$ при любом t есть предел при $\tau \rightarrow 0$

выражения $e^{tP(\sigma)} \frac{e^{\tau P(\sigma)} - 1}{\tau}$; очевидно, что здесь также имеет место правильная сходимость. Наконец, производная порядка k по t от $e^{tP(\sigma)}$ имеет вид $[P(\sigma)]^k e^{tP(\sigma)}$ и вместе с $e^{tP(\sigma)}$ правильно дифференцируема по t .

Таким образом, все обобщенные функции $\frac{\partial^k G(t, x)}{\partial t^k}$ при $k \geq r$ являются свертывателями в H , непрерывными и правильно дифференцируемыми.

5. Покажем теперь, как с помощью фундаментального решения $G(t, x)$ найти решение общей задачи (2) п. 3. Мы определим искомого решение $u(t, x)$ формулой

$$u(t, x) = G(t, x) * f_0(x) + \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} * f_1(x) + \dots \\ \dots + \frac{\partial^{r-1} G(t, x)}{\partial t^{r-1}} * f_{r-1}(x), \quad (1)$$

где $f_0(x), \dots, f_{r-1}(x)$ — некоторые, пока неизвестные функции из \mathcal{H} .

Покажем, прежде всего, что при любом выборе f_0, \dots, f_{r-1} функция $u(t, x)$ (1) удовлетворяет уравнению (1) п. 3. Достаточно показать, что каждое слагаемое в (4) удовлетворяет этому уравнению.

Мы имеем в силу свойств свертки

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} \left[\frac{\partial^j G}{\partial t^j} * f_j \right] = \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left[\frac{\partial^m G}{\partial t^m} \right] * f_j = \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left[\sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k G}{\partial t^k} \right] * f_j = \\ = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{\partial^j G}{\partial t^j} * f_j \right),$$

так что для $\frac{\partial^j G}{\partial t^j} * f_j$ уравнение (1) п. 3 удовлетворено. Далее, дифференцируя (1) и подставляя $t=0$, приходим к системе уравнений относительно неизвестных функций

$$u(0, x) = f_{r-1}(x), \\ \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = f_{r-2}(x) + \frac{\partial^r G(0, x)}{\partial t^r} * f_{r-1}(x), \\ \dots \\ \frac{\partial^{r-2} u(0, x)}{\partial t^{r-2}} = f_1(x) + \frac{\partial^r G(0, x)}{\partial t^r} * f_2(x) + \dots + \frac{\partial^{2r-3} G(0, x)}{\partial t^{2r-3}} * f_{r-1}(x), \\ \frac{\partial^{r-1} u(0, x)}{\partial t^{r-1}} = f_0(x) + \frac{\partial^r G(0, x)}{\partial t^r} * f_1(x) + \dots + \frac{\partial^{2r-2} G(0, x)}{\partial t^{2r-2}} * f_{r-1}(x),$$

из которых последовательно могут быть найдены $f_{r-1}(x)$, $f_{r-2}(x)$, ...
 $\dots f_0(x)$.

6. Для примера найдем фундаментальные решения для трех классических корректных задач математической физики при $n=1$ и выпишем соответствующие решения с заданными начальными функциями.

1. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ с заданной } u(0, x).$$

После преобразования Фурье имеем

$$\frac{dv}{dt} = -\sigma^2 v \text{ с заданной } v(0, \sigma).$$

Разрешающая функция $V(t, \sigma)$ имеет вид

$$V(t, \sigma) = e^{-t\sigma^2};$$

совершая обратное преобразование Фурье*), находим фундаментальное решение

$$G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Для решения $u(t, x)$ с начальной функцией $u(0, x) \in \mathcal{H}$ получаем формулу

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u(0, x),$$

которая в случае, когда $u(0, x)$ — обычная функция, приводится к виду классического интеграла Пуассона

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} u(0, \xi) d\xi.$$

2. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ с заданными } u_0(x) = u(0, x) \text{ и } u_1(x) = \frac{\partial u(0, x)}{\partial t}.$$

После преобразования Фурье получим

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -\sigma^2 v \text{ с заданными } v_0(\sigma) = v(0, \sigma) \text{ и } v_1(\sigma) = \frac{dv(0, \sigma)}{dt}.$$

*) См. Анализ III, гл. 7, п. 3.

Разрешающая функция $V(t, \sigma)$ имеет вид

$$V(t, \sigma) = \frac{\sin t\sigma}{\sigma}.$$

Так как $V(t, \sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma V(t, \sigma) = \sin t\sigma,$$

то $G(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$-t \frac{\partial}{\partial x} G(t, x) = \frac{\delta(x-t) - \delta(x+t)}{2i}.$$

Итак, $G(t, x)$ есть первообразная от функции $\frac{1}{2} [\delta(x+t) - \delta(x-t)]$, т. е. с точностью до постоянного слагаемого функция $\frac{1}{2} [\theta(x+t) - \theta(x-t)]$. Эта последняя функция равна $\frac{1}{2}$ при $-t < x < t$ и 0 в остальных точках. Но постоянные не входят в пространство \mathcal{H} , поэтому можно прямо написать

$$G(t, x) = \frac{1}{2} [\theta(x+t) - \theta(x-t)].$$

Решение, отвечающее заданным начальным условиям, строим в форме

$$u(t, x) = G(t, x) * f_0(x) + \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} * f_1(x).$$

При этом, очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} &= \frac{1}{2} [\delta(x+t) + \delta(x-t)], \\ \frac{\partial^2 G(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} [\delta'(x+t) - \delta'(x-t)], \quad \frac{\partial^2 G(0, x)}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}$$

Функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f_1(x), \\ u_1(x) &= f_0(x) + \frac{\partial^2 G(0, x)}{\partial t^2} * f_1(x) = f_0(x); \end{aligned}$$

таким образом,

$$u(t, x) = G(t, x) * u_1(x) + \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} * u_0(x).$$

Если $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — обычные функции, мы получаем классическую формулу Даламбера

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)].$$

3. Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ при заданной } u_0(x) = u(0, x).$$

После преобразования Фурье находим

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \sigma^2 v \text{ при заданной } v_0(\sigma) = v(0, \sigma). \quad (1)$$

Из общего решения уравнения (1)

$$v(t, \sigma) = C_1 e^{-t|\sigma|} + C_2 e^{t|\sigma|}$$

мы должны оставить только первое слагаемое, поскольку у нас есть условие $v(t, \sigma) = 0$ (t^h). Учитывая начальное условие, находим разрешающую функцию

$$V(t, \sigma) = e^{-t|\sigma|}.$$

Совершая обратное преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t|\sigma|} e^{-i\sigma x} d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{t\sigma - i\sigma x} d\sigma + \int_0^{\infty} e^{-t\sigma} e^{-i\sigma x} d\sigma \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{t - ix} + \frac{1}{t + ix} \right\} = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}. \quad (2) \end{aligned}$$

Решение $u(t, x)$ уравнения Лапласа с начальной функцией $u_0(x) \in \mathcal{H}$ получается по формуле

$$u(t, x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2} * u_0(x),$$

которая в случае обычной функции $u_0(x)$ переходит в классическую формулу Пуассона

$$u(t, x) = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi) d\xi}{t^2 + (x - \xi)^2}.$$

Задачи. 1. Пусть $f(t, x) = f(t, x_1, \dots, x_n)$ есть обобщенная функция в пространстве K'_n , непрерывно зависящая от t , как от параметра. Пусть $\varphi(t, x) = \varphi(t, x_1, \dots, x_n)$ — основная функция в пространстве $n+1$ переменных t, x_1, \dots, x_n . Положим

$$(f(t, x), \varphi(t, x)) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t, x), \varphi(t, x))_x dt, \quad (1)$$

где $(\cdot)_x$ означает применение функционала f к основной функции φ по координатам x при фиксированном t . Показать, что равенство (1) определяет обобщенную функцию в пространстве K'_{n+1} .

2. Дано фундаментальное решение задачи Коши $G(t, x)$ для уравнения

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Построим с помощью $G(t, x)$ обобщенную функцию $\xi(t, x)$ в пространстве K'_{n+1} , как указано в задаче 1. Показать, что эта обобщенная функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \xi(t, x)}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \xi(t, x) = \delta(t, x),$$

т. е. является фундаментальной функцией оператора $\frac{\partial}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Указание. Подлежит доказательству равенство

$$\begin{aligned} \left(\left[\frac{\partial}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \right] \xi(t, x), \varphi(t, x) \right)_{x, t} &= \\ &= \int_0^{\infty} \left(\left[\frac{\partial}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \right] G(t, x), \varphi(t, x) \right)_x dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left(G(t, x), \left[\frac{\partial}{\partial t} - \bar{P}\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) \right] \varphi(t, x) \right)_x dt = \varphi(0, 0). \end{aligned}$$

Использовать соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(G(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_x dt &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (G, \varphi)_x dt - \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial G}{\partial t}, \varphi \right)_x dt = \\ &= (G(0, x), \varphi(0, x)) - \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial G}{\partial t}, \varphi \right)_x dt = \varphi(0, 0) - \int_0^{\infty} \left(P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) G, \varphi \right)_x dt. \end{aligned}$$

3. Дано фундаментальное решение задачи Коши $G(t, x)$ для уравнения

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} P_k\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0.$$

Показать, что обобщенная функция $\xi(t, x) \in K'_{n+1}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^m \xi}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} P_k\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \xi = \delta(t, x), \quad (1)$$

т. е. является фундаментальной функцией оператора $\frac{\partial^m}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} P_k\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Указание. Записать уравнение (1) в виде системы первого порядка и повторить для вектор-функций рассуждение задачи 2.

4. Найти фундаментальное решение итерированного уравнения теплопроводности ($n = 1$)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^m u = 0.$$

$$\text{Отв. } V(t, \sigma) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-t\sigma^2}, \quad G(t, x) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

5. Найти фундаментальное решение итерированного уравнения Лапласа ($n = 1$)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^m u = 0.$$

$$\text{Отв. } V(t, \sigma) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-t|\sigma|}, \quad G(t, x) = \frac{1}{\pi} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \frac{t}{t^2 + x^2}.$$

6. Найти фундаментальное решение уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega \frac{\partial}{\partial x}\right)^m = 0 \quad (\omega \text{ вещественно}).$$

$$\text{Отв. } V(t, \sigma) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{i\omega\sigma t}, \quad G(t, x) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \delta(x - \omega t).$$

§ 28. Формулы фундаментальных решений регулярных уравнений ($n = 1$)

Удобные и обозримые формулы фундаментальных решений можно получить для регулярных дифференциальных операторов, однородных по всем аргументам. Мы рассмотрим в этом параграфе случай одного пространственного переменного.

1. Дано уравнение

$$\frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)^{m-k} \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k}. \quad (1)$$

Совершая преобразование Фурье по x , получаем уравнение

$$\frac{d^m v(t, \sigma)}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \sigma^{m-k} \frac{d^k v(t, \sigma)}{dt^k}. \quad (2)$$

Уравнение характеристических корней имеет вид

$$\lambda^m(\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \sigma^{m-k} \lambda^k(\sigma). \quad (3)$$

Полагая $\lambda(\sigma) = \mu(\sigma)\sigma$ и сокращая на σ^m , получаем

$$\mu^m(\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mu^k(\sigma), \quad (4)$$

откуда видно, что $\mu(\sigma)$ в действительности не зависит от σ . Будем предполагать, что корни $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}$ уравнения (4) все различны. Тогда общее решение уравнения (2) можно записать в форме

$$v(t, \sigma) = \sum_{j=0}^{m-1} G_j(\sigma) e^{t\mu_j \sigma}. \quad (5)$$

Нумерацию корней μ_j установим, как обычно, в порядке возрастания вещественных частей:

$$\operatorname{Re} \mu_0 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \mu_{p-1} \leq \operatorname{Re} \mu_p = \dots$$

$$\dots = \operatorname{Re} \mu_{r-1} = 0 < \operatorname{Re} \mu_r \leq \dots \leq \operatorname{Re} \mu_{m-1}.$$

Здесь явно выделена группа корней с нулевой вещественной частью. В решении (5), растущем при $t \rightarrow \infty$ не быстрее степени t , при $\sigma > 0$ должны быть равны нулю постоянные C_r, \dots, C_{m-1} , а при $\sigma < 0$ — постоянные C_0, \dots, C_{p-1} . Пространство $Q^-(\sigma)$ при $\sigma > 0$ имеет размерность r , а при $\sigma < 0$ — размерность $p - 1$. Таким образом, условие регулярности уравнения (1) можно записать в форме

$$m - p = r.$$

Отметим два важных частных случая:

1) $r = m, p = 0$, иначе говоря,

$$\operatorname{Re} \mu_0 = \dots = \operatorname{Re} \mu_{m-1} = 0$$

(гиперболическое уравнение). К этому типу относится уравнение струны, для которого уравнение (4) имеет вид

$$\mu^2 = -1, \quad \mu_{0,1} = \pm i;$$

2) $r = p, m = 2p$ (эллиптическое уравнение). К этому типу относится уравнение Лапласа, где

$$\mu^2 = +1, \quad \mu_{0,1} = \pm 1.$$

В частности, $B_j(\sigma) = B_j$ и $A_s(\sigma) = A_s$ не зависят в действительности от σ . Решения этих систем имеют вид

$$B_j = \frac{W[\mu_0, \dots, \mu_{j-1}, \mu_{j+1}, \dots, \mu_{r-1}]}{W[\mu_0, \dots, \mu_{r-1}]},$$

$$A_s = \frac{W[\mu_p, \dots, \mu_{s-1}, \mu_{s+1}, \dots, \mu_{m-1}]}{W[\mu_p, \dots, \mu_{m-1}]},$$

где $W[\dots]$ означает детерминант Ван-дер-Монда от своих аргументов.

В итоге мы получаем

$$V(t, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^{r-1}} \sum_{j=0}^{r-1} B_j e^{\mu_j \sigma t} & (\sigma > 0), \\ \frac{1}{\sigma^{r-1}} \sum_{s=p}^{m-1} A_s e^{\mu_s \sigma t} & (\sigma < 0). \end{cases} \quad (11)$$

$$(12)$$

где B_j и A_s суть решения систем (9) и (10).

2. В случае гиперболического уравнения формулы (11) — (12) п. 1 приводятся к одной формуле

$$V(t, \sigma) = \frac{1}{\sigma^{m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} B_j e^{\mu_j \sigma t}. \quad (1)$$

Поскольку числитель и знаменатель имеют здесь при $\sigma = 0$ нуль одинакового порядка, отношение (1) не имеет особенности при $\sigma = 0$. Функция $V(t, \sigma)$ допускает аналитическое продолжение в плоскость комплексного переменного $s = \sigma + it$ в виде целой аналитической функции

$$V(t, s) = \frac{1}{s^{m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} B_j e^{\mu_j s t}. \quad (2)$$

Эта функция при больших $|s|$ допускает оценку

$$|V(t, s)| \leq C e^{tM|s|}, \quad M = \max|\mu_j|,$$

т. е. является функцией первого порядка роста с типом $\leq M$, квадратично интегрируемой при $m > 1$. В силу теоремы Палея — Винера *) функция $G(t, x)$ — обратное преобразование Фурье функции $V(t, \sigma)$, есть финитная квадратично интегрируемая функция, сосредоточенная на отрезке $[-tM, tM]$. Отсюда, при любой финитной (обобщенной)

*) Анализ III, гл. VII, § 6, п. 3.

начальной функции $u_0(x)$, сосредоточенной, например, на отрезке $[a, b]$, мы получим, что соответствующее решение

$$u(t, x) = G(t, x) * u_0(x)$$

сосредоточено на отрезке $[a - tM, b + tM]$; таким образом, носитель решения $u(t, x)$ с течением времени расширяется со скоростью M .

Случай $m = 1$ легко рассмотреть отдельно. Исходное уравнение (1) п. 1 в этом случае есть уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ib \frac{\partial u}{\partial x};$$

преобразованное уравнение (2) имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = b\sigma v, \quad (3)$$

а уравнение (3) п. 1 сводится к равенству

$$\mu = b.$$

Так как, по условию, $\operatorname{Re} \mu = \operatorname{Re} b = 0$, положим $ib = a$, число a уже вещественно. Таким образом, исходное уравнение (1) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x}$$

с вещественным a .

Решение $V(t, \sigma)$ уравнения (10) с начальным условием $V(0, \sigma) = 1$, очевидно, следующее:

$$V(t, \sigma) = e^{-ia\sigma t}.$$

Функция Грина $G(t, x)$ — обратное преобразование Фурье функции $V(t, \sigma)$, согласно § 14, п. 5, имеет вид

$$G(t, x) = \delta(x + at);$$

решение с любой начальной функцией $u_0(x)$ — вид

$$u(t, x) = G(t, x) * u_0(x) = u_0(x + at).$$

Найдем теперь явный вид обратного преобразования Фурье функции $V(t, \sigma)$ при $m > 1$. Функция $V(t, \sigma)$ есть произведение обобщенной

функции $\frac{1}{\sigma^{m-1}} \in Z' \subset K'$ на бесконечно дифференцируемую функцию $\sum_{j=0}^{m-1} B_j e^{\mu_j \sigma t}$ (ср. § 11, п. 4а, (6)). В силу теоремы о свертке, мы имеем

$$F^{-1} \left[\frac{1}{\sigma^{m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} B_j e^{\mu_j \sigma t} \right] = F^{-1} \left[\frac{1}{\sigma^{m-1}} \right] * F^{-1} \left[\sum_{j=0}^{m-1} B_j e^{\mu_j \sigma t} \right]$$

Мы знаем (§ 14, п. 5, пример 4), что

$$F \left[\frac{1}{x^{m-1}} \right] = \frac{i^{m-2} \pi}{(m-2)!} \sigma^{m-2} \operatorname{sgn} \sigma;$$

в силу правила (6) п. 4 того же параграфа, мы получим

$$F^{-1} \left[\frac{1}{\sigma^{m-1}} \right] = (-1)^{m-1} \frac{i^{m-2}}{2(m-2)!} x^{m-2} \operatorname{sgn} x = C_m x^{m-2} \operatorname{sgn} x.$$

Обратное преобразование Фурье от $\sum_{j=0}^{m-1} B_j e^{\mu_j \sigma t}$ равно

$$\sum_{j=0}^{m-1} B_j \delta(x - \omega_j t), \quad \text{где } i\mu_j = \omega_j.$$

В итоге

$$\begin{aligned} u(t, x) &= C_m \sum_{j=0}^{m-1} B_j \delta(x - \omega_j t) * x^{m-2} \operatorname{sgn} x = \\ &= C_m \sum_{j=0}^{m-1} B_j [x - \omega_j t]^{m-2} \operatorname{sgn} [x - \omega_j t]. \end{aligned} \quad (4)$$

Каждое из слагаемых представляет собою сдвиг на $\omega_j t$ функции $x^{m-2} \operatorname{sgn} x$, непрерывной и имеющей непрерывные производные до порядка $m-3$ (при $m > 2$); производная порядка $m-2$ у этой функции кусочно постоянна (равна $(m-2)! \operatorname{sgn} x$); производная порядка $m-1$ есть дельта-функция. Отсюда следует, что и вся функция $G(t, x)$ непрерывна и обладает непрерывными производными до порядка $m-3$ (при $m > 2$), производная порядка $m-2$ кусочно постоянна, производная порядка $m-1$ есть линейная комбинация дельта-функций. При $x < \omega_0 t$ все $\operatorname{sgn}(x - \omega_j t)$ равны -1 ; раскрывая скобки и используя уравнения (9) п. 1, видим, что $G(t, x) = 0$. Аналогично $G(t, x) = 0$ при $x > \omega_{m-1} t$. Между точками $\omega_j t$ и $\omega_{j+1} t$ функция $G(t, x)$ есть многочлен степени $m-2$ от x .

3. Рассмотрим теперь общий случай регулярного уравнения.

Разрешающая функция $V(t, \sigma)$ задается формулами (11) — (12) п. 1:

$$V(t, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^{r-1}} \sum_{j=0}^{r-1} B_j e^{\mu_j \sigma t} & (\sigma > 0), \\ \frac{1}{\sigma^{r-1}} \sum_{s=p}^{m-1} A_s e^{\mu_s \sigma t} & (\sigma < 0), \end{cases}$$

где B_j и A_s суть решения систем (9) и (10) п. 1.

Функция $V(t, \sigma)$, очевидно, бесконечно дифференцируема (и даже аналитична) вне начала координат.

Поведение функции $V(t, \sigma)$ в окрестности (правой) точки $\sigma = 0$ мы выясним, разлагая числитель в ряд по степеням σ :

$$\sum_{j=0}^{r-1} B_j e^{\mu_j \sigma t} = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} B_j \frac{(\mu_j \sigma t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \sigma^k}{k!} \sum_{j=0}^{r-1} B_j \mu_j^k. \quad (1)$$

Из формул (9) п. 1 следует, что при $\sigma > 0$ справедливо разложение

$$V(t, \sigma) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + \sigma \frac{t^r}{r!} \sum_{j=0}^{r-1} B_j \mu_j^r + \sigma^2 \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{j=0}^{r-1} B_j \mu_j^{r+1} + \dots \quad (2)$$

Аналогично в левой окрестности точки $\sigma = 0$

$$V(t, \sigma) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + \sigma \frac{t^r}{r!} \sum_{s=p}^{m-1} A_s \mu_s^r + \\ + \sigma^2 \frac{t^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{s=p}^{m-1} A_s \mu_s^{r+1} + \dots \quad (3)$$

Мы видим, что функция $V(t, \sigma)$ непрерывна при $\sigma = 0$ ($t > 0$) и, если $r \neq m$, вообще говоря, имеет разрывную первую производную.

Поэтому функция $G(t, x)$, вообще говоря, не есть финитная функция; начальное возбуждение $u_0(x)$ мгновенно передается на всю ось x , так что если $u_0(x)$ и финитна, решение $u(t, x)$ отлично от нуля при всех x .

Вычислим функцию $G(t, x)$. Обратное преобразование Фурье от функции $V(t, \sigma)$, умноженное на 2π , есть сумма двух сходящихся интегралов:

$$2\pi G(t, x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma^{r-1}} \sum_{j=0}^{r-1} B_j e^{\mu_j \sigma t - i \sigma x} d\sigma + \\ + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma^{r-1}} \sum_{s=p}^{m-1} A_s e^{\mu_s \sigma t - i \sigma x} d\sigma.$$

Заменяя во втором интеграле $-\sigma$ на σ , получаем

$$2\pi G(t, x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma^{r-1}} \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} B_j e^{\mu_j \sigma t - i \sigma x} + (-1)^{r-1} \sum_{s=p}^{m-1} A_s e^{-\mu_s \sigma t + i \sigma x} \right\} d\sigma. \quad (4)$$

Мы видим, что дело сводится к вычислению интеграла вида

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\xi^{r-1}} \sum_{j=0}^{r-1} C_j e^{-a_j \xi} d\xi, \quad \operatorname{Re} a_j \geq 0,$$

где коэффициенты C_j обеспечивают наличие у числителя при $\xi = 0$ нуля порядка $r - 1$. Такой интеграл при $r > 1$ можно вычислить следующим приемом. Рассмотрим интеграл с параметром λ :

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} \xi^{\lambda} \sum_{j=0}^{r-1} C_j e^{-a_j \xi} d\xi, \quad \operatorname{Re} a_j \geq 0.$$

Этот интеграл является сходящимся при $-r < \operatorname{Re} \lambda < 0$ (а в случае, если все $\operatorname{Re} a_k > 0$, на всей полуоси $-r < \operatorname{Re} \lambda < \infty$) и аналитически зависит от параметра λ . Если $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$, он может быть вычислен путем почленного интегрирования

$$I(\lambda) = \sum_{j=0}^{r-1} C_j \int_0^{\infty} \xi^{\lambda} e^{-a_j \xi} d\xi.$$

Интеграл под знаком суммы с помощью подстановки $a_j \xi = z$ приводится к виду

$$\frac{1}{a_j^{\lambda+1}} \int_{L_j} z^{\lambda} e^{-z} dz, \quad (5)$$

где L_j — луч $z = a_j \xi$, $0 \leq \xi < \infty$, идущий в правой полуплоскости. По лемме Жордана, интеграл

$$\int_{C_R} z^{\lambda} e^{-z} dz, \quad (6)$$

взятый по любой дуге на окружности радиуса R в правой полуплоскости, стремится к 0 при $R \rightarrow \infty$. Поэтому интеграл по лучу L_j равен интегралу по положительной полуоси; а этот последний равен $\Gamma(\lambda + 1)$. В итоге при $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$

$$I(\lambda) = \sum_{j=0}^{r-1} C_j \int_0^{\infty} \xi^{\lambda} e^{-a_j \xi} d\xi = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{C_j}{a_j^{\lambda+1}} \int_{L_j} z^{\lambda} e^{-z} dz = \sum_{j=0}^{r-1} C_j \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{a_j^{\lambda+1}}.$$

Правая часть аналитически продолжается в область $\operatorname{Re} \lambda > -r$ и мы можем найти ее значение при $\lambda = -r + 1$. Мы имеем

$$\Gamma(\lambda + 1) = \frac{\Gamma(\lambda + 2)}{\lambda + 1} = \dots = \frac{\Gamma(\lambda + r)}{(\lambda + 1) \dots (\lambda + r - 1)};$$

$$\sum_{j=0}^{r-1} C_j a_j^{-\lambda+1} = (\lambda + r - 1) \frac{d}{d\lambda} \sum_{j=0}^{r-1} C_j a_j^{-\lambda+1} \Big|_{\lambda = -r+1} + o(\lambda + r - 1) =$$

$$= -(\lambda + r - 1) \sum_{j=0}^{r-1} C_j a_j^{-\lambda+1} \ln a_j + o(\lambda + r - 1).$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\xi^{r-1}} \sum_{j=0}^{r-1} C_j e^{-a_j \xi} d\xi =$$

$$= - \lim_{\lambda \rightarrow 1-r} \frac{\Gamma(\lambda + r)}{(\lambda + 1) \dots (\lambda + r - 2)} \sum_{j=0}^{r-1} C_j a_j^{-\lambda+1} \ln a_j =$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}}{(r-2)!} \sum_{j=0}^{r-1} C_j a_j^{r-2} \ln a_j.$$

Применяя полученную формулу, выписываем значение интеграла (4) для $r > 1$

$$G(t, x) = \frac{(-1)^{r-1}}{2\pi(r-2)!} \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} B_j (-\mu_j t + ix)^{r-2} \ln(-\mu_j t + ix) + \right. \\ \left. + (-1)^{r-1} \sum_{s=p}^{m-1} A_s (\mu_s t - ix)^{r-2} \ln(\mu_s t - ix) \right\}. \quad (7)$$

Если a_j — комплексные, то $\ln a_j = \ln |a_j| + i \arg a_j$ имеет значение в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq \frac{\pi}{2}$, поскольку $\arg a_j$, по условию, заключен в пределах $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Поскольку в первой сумме $\operatorname{Re} \mu_j \leq 0$, величина под знаком логарифма — в правой полуплоскости; во второй сумме $\operatorname{Re} \mu_j \geq 0$ и величина под знаком логарифма также в правой полуплоскости.

Случай $r = 1$ мы должны рассмотреть особо. Поскольку $p \leq r$, мы должны иметь $p = 0$ или $p = 1$; так как $m = p + r$, то в первом случае $m = 1$, во втором $m = 2$. Если $m = 1$, $p = 0$, то мы имеем дело с гиперболическим уравнением первого порядка, разобранным выше. Если $p = 1$, $m = 2$, то речь идет об эллиптическом уравнении 2-го порядка.

Интеграл (4) преобразуется к виду

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [e^{\mu_1 \sigma t - i \sigma x} + e^{-\mu_2 \sigma t + i \sigma x}] d\sigma$$

и вычисляется непосредственно:

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{ix - \mu_1 t} + \frac{1}{\mu_2 t - ix} \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{(\mu_2 - \mu_1) t}{(ix - \mu_1 t)(\mu_2 t - ix)}. \quad (8)$$

В простейшем случае оператора Лапласа мы имеем $\mu_{12} = \pm 1$, и формула приводится к виду (2) § 27, п. 6, 3.

Задачи. 1. Получить формулу фундаментального решения однородного гиперболического уравнения из общей формулы (7) п. 3.

Указание. Если использовать принятое в тексте определение логарифма и A вещественно, то $\ln iA - \ln(-iA) = \pi \operatorname{sgn} A$.

2. Найти фундаментальное решение для уравнений

$$a) \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad б) \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Омв.

$$a) G(t, x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ t \ln \sqrt{x^2 + t^2} - x \operatorname{arctg} \frac{x}{t} - \frac{1}{2} (t+x) \ln |t+x| - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (t-x) \ln |t-x| + \frac{1}{8} [|t+x| + |t-x|] \right\} \text{ (С. А. Тимошкина),}$$

$$б) G(t, x) = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left[\operatorname{arctg} \left(1 - \frac{x\sqrt{2}}{t} \right) + \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{x\sqrt{2}}{t} \right) \right]$$

(В. И. Авербух).

3. Построить фундаментальное решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^m u(t, x) = 0.$$

Указание. Для вычисления $V(t, \sigma)$ использовать преобразование Лапласа по t и обратное преобразование находить с помощью контурного интеграла и вычетов *).

$$\text{Омв. } G(t, x) = \frac{(-1)^{m-1}}{4^m (m-1)!} \left\{ \operatorname{sgn}(x-t) \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(2t)^j (x-t)^{2m-2-j}}{(m-1-j)! j!} + \right. \\ \left. + (-1)^m \operatorname{sgn}(x+t) \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-2t)^j (x+t)^{2m-2-j}}{(m-1-j)! j!} \right\} \text{ (В. Е. Кондрашов).}$$

4. Написать выражение фундаментального решения для однородного гиперболического уравнения в случае кратных корней.

$$\text{Омв. } G(t, x) = \sum_{k=1}^l \sum_{j=0}^{r_k-1} \frac{t^j b_{kj}}{j!} \frac{(x + \omega_k t)^{r_k-2-j} \operatorname{sgn}(x + \omega_k t)}{2^j t^{r_k-1-j} (r_k-2-j)!},$$

*) См. Анализ III, гл. VII, § 4.

где r_k — кратность корня $\mu_k = i\omega_k$, а коэффициенты b_{kj} удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{k=1}^{r_k} \sum_{j=0}^{\min(r_k-1, s)} b_{kj} \mu_k^{s-j} \binom{j}{s} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq s \leq r_k - 2, \\ 1, & \text{если } s = r_k - 1 \end{cases}$$

(В. Е. Кондрашов).

5. Написать выражение фундаментального решения для регулярного однородного уравнения в случае кратных корней.

$$\begin{aligned} \text{Отв. } G(t, x) = & \frac{(-1)^{r-1}}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^l \sum_{j=0}^{r_k-1} \frac{(-1)^j t^j b_{kj}}{j! (r_k - 2 - j)!} (-\mu_j t + ix)^{r-2-j} \times \right. \\ & \times [\ln(-\mu_j t + ix) + \alpha_j] + \sum_{k=1}^l \sum_{j=0}^{r_k-1} \frac{t^j b_{kj}}{j! (r_k - 2 - j)!} (\mu_j t - ix)^{r-2-j} \times \\ & \left. \times [\ln(\mu_j t - ix) + \alpha_j] \right\}, \end{aligned}$$

где $\alpha_j = \sum_{n=1}^{r_k-2-j} \frac{1}{n}$, а r_k и b_{kj} те же, что в задаче 4 (В. Е. Кондрашов).

§ 29. Фундаментальные решения регулярных уравнений ($n > 1$)

1. Рассмотрим уравнение с несколькими пространственными переменными

$$\frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k}, \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad (1)$$

После преобразования Фурье оно переходит в уравнение

$$\frac{d^m v(t, \sigma)}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma) \frac{d^k v(t, \sigma)}{dt^k}, \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n). \quad (2)$$

Если уравнение (1) регулярно, то среди корней алгебраического уравнения

$$\lambda^m(\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma) \lambda^k(\sigma) \quad (3)$$

ровно r имеют (почти) при каждом σ неотрицательную вещественную часть. Если все они простые, то искомую разрешающую функцию мы должны строить в виде

$$V(t, \sigma) = \sum_{j=0}^{r-1} C_j e^{t\lambda_j(\sigma)}, \quad (4)$$

где коэффициенты $C_j = C_j(\sigma)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} C_0 + \dots + C_{r-1} &= 0, \\ \lambda_0^{r-2} C_0 + \dots + \lambda_{r-1}^{r-2} C_{r-1} &= 0, \\ \lambda_0^{r-1} C_0 + \dots + \lambda_{r-1}^{r-1} C_{r-1} &= 1. \end{aligned}$$

Найдя C_0, \dots, C_{r-1} и подставив их в (4), мы должны совершить обратное преобразование Фурье. Эта процедура технически не всегда выполнима, и в общем случае мы пойдем несколько иным путем. Но в простых случаях этот путь приводит к цели, и мы рассмотрим несколько классических примеров для иллюстрации.

1. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \Delta u \quad \left(\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right).$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$\frac{dv(t, \sigma)}{dt} = -\rho^2 v \quad \left(\rho^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \right)$$

с разрешающей функцией

$$V(t, \sigma) = e^{-t\rho^2} = \prod_{j=1}^n e^{-t\sigma_j^2}.$$

Так как разрешающая функция есть произведение n множителей, зависящих каждый только от одной координаты, мы можем произвести обратное преобразование Фурье по каждой координате в отдельности и перемножить результаты. Поскольку (§ 27, п. 6, пример 1)

$$F^{-1} [e^{-t\sigma_j^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x_j^2}{4t}},$$

функция Грина уравнения (1) имеет вид

$$G(t, x) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x_j^2}{4t}} = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad |x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

2. Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = -\Delta u.$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 v(t, \sigma)}{dt^2} = \rho^2 v$$

с разрешающей функцией

$$V(t, \sigma) = e^{-t\rho}.$$

Функция Грина дается обратным преобразованием Фурье

$$G(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R_n} e^{-t\rho} e^{-i(x, \sigma)} d\sigma.$$

По формуле (6) § 15, п. 4 мы имеем

$$G(t, x) = \frac{\Omega_{n-1}}{\pi^n} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{t}{(t^2 + \rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

3. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \Delta u.$$

Преобразованное уравнение

$$\frac{d^2 v(t, \sigma)}{dt^2} = -\rho^2 v$$

имеет разрешающую функцию

$$V(t, \sigma) = \frac{\sin t\rho}{\rho}.$$

Мы должны вычислить обратное преобразование Фурье от этой функции.

Вспомянув формулу (8) § 15, п. 5, мы сразу можем написать ответ в случае $n = 3$:

$$G(t, x) = \frac{\delta(r-t)}{4\pi t}.$$

Это означает, что при заданных начальных функциях

$$u_0(x) = u(0, x) = 0, \quad u_1(x) = \frac{\partial u(0, x)}{\partial t}$$

решение $u(t, x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} u(t, x) &= G(t, x) * u_1(x) = \frac{\delta(r-t)}{4\pi t} * u_1(x) = \\ &= \frac{1}{4\pi t} \int_{|\xi-x|=t} u_1(\xi) d\xi = t S_t[u_1(x)], \end{aligned}$$

где $S_t[u_1(x)]$ означает среднее от начальной функции $u_1(x)$ по сфере радиуса t с центром в точке x .

Рассмотрим общий случай. Здесь по формуле (7) § 15, п. 5 мы имеем

$$F[\delta(r-t)] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}} \rho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(t\rho). \quad (1)$$

Используем формулу (4) § 15, п. 4:

$$\left(\frac{d}{z dz}\right)^m \left[z^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(z) \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z. \quad (2)$$

Заменим в формуле (1) $t\rho$ на z , $\frac{n}{2}-1$ на $m+\frac{1}{2}$ (т. е. n на $2m+3$, таким образом, дальнейшая выкладка идет при нечетном $n \geq 3$); мы получим

$$\frac{\rho^{n-2}}{t} F[\delta(r-t)] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} z^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(z).$$

Теперь применим (2); мы придём к формуле

$$\left(\frac{d}{z dz}\right)^m \frac{\rho^{n-2}}{t} F[\delta(t-r)] = 2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \sin t\rho.$$

В подстановке $z = t\rho$ безразлично, какую из величин справа считать постоянной, какую зависящей от z ; для удобства дальнейших выкладок при дифференцировании по z будем считать постоянным ρ . Тогда $dz = \rho dt$, $z dz = t\rho^2 dt$ и

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{z dz}\right)^m \frac{\rho^{n-2}}{t} F[\delta(r-t)] &= \frac{1}{\rho^{2m}} \left(\frac{d}{t dt}\right)^m \frac{\rho^{n-2}}{t} F[\delta(r-t)] = \\ &= \rho F\left[\left(\frac{d}{t dt}\right)^m \frac{\delta(r-t)}{t}\right] = 2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \sin t\rho. \end{aligned}$$

Отсюда

$$G(t, x) = F^{-1}\left[\frac{\sin t\rho}{\rho}\right] = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}} \left(\frac{d}{t dt}\right)^m \frac{\delta(r-t)}{t}. \quad (3)$$

Для решения задачи Коши с заданной начальной функцией $u_1(x) = \frac{\partial u(0, x)}{\partial t}$ мы получаем формулу

$$\begin{aligned} u(t, x) = G(t, x) * u_1(x) &= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}} \left(\frac{d}{t dt}\right)^m \frac{\delta(r-t)}{t} * u_1(x) = \\ &= \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)!} \left(\frac{d}{t dt}\right)^m t^{n-2} S_t[u_1(x)], \end{aligned}$$

где $S_t[u_1]$, как и выше, означает среднее от функции $u_1(x)$ по сфере $|\xi - x| = t$.

Заметим, что решение $u(t, x)$ волнового уравнения, поскольку оно выражается путем m -кратного дифференцирования начальной функции, имеет, вообще говоря, на $m = \frac{n-3}{2}$ больший порядок сингулярности, чем сама начальная функция.

Формула (3) показывает, что в каждый данный момент времени решение $u(t, x)$ в точке x определяется лишь значениями $u_1(x)$ в непосредственной окрестности сферы радиуса t с центром в точке x . Подчеркнем, что этот результат получен нами для нечетного n ; в действительности при n четном он не имеет места, и решение $u(t, x)$ при четном n зависит от значений $u_1(x)$ в целом шаре радиуса t .

Применяя несколько иной прием вычисления обратного преобразования Фурье, можно получить формулу, справедливую при любом n , четном или нечетном, хотя и не столь прозрачную. Заметим, что классическая формула обратного преобразования Фурье для функции

$$V(t, \sigma) = \frac{\sin t\rho}{\rho}$$

не может быть использована вследствие расходимости получающегося интеграла. Но если взять некоторую первообразную по t от функции $V(t, \rho)$, именно функцию

$$W(t, \sigma) = \frac{\cos t\rho}{\rho^{n-1}} \left(\text{или } \frac{\sin t\rho}{\rho^{n-1}} \right),$$

являющуюся первообразной от $V(t, \sigma)$ порядка $n-2$, то соответствующий обратный интеграл Фурье

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R_n} \frac{\cos t\rho}{\rho^{n-1}} e^{-l(\sigma, x)} d\sigma$$

будет уже сходящимся, если произвести вначале интегрирование по сфере радиуса ρ , а затем по ρ от 0 до ∞ . Действительно, последний интеграл в пределах от 0 до N имеет вид

$$I_N = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^N \frac{\cos t\rho}{\rho^{n-1}} \left[\int_{\Omega} e^{-l(\omega, x)\rho} d\omega \right] \rho^{n-1} d\rho.$$

Согласно формуле (2) § 9, п. 7, мы имеем

$$\int_{\Omega} e^{-l(\omega, x)\rho} d\omega = \frac{c_n}{r^{n-2}} \int_{-r}^r e^{-l\rho\xi} (r^2 - \xi^2)^{\frac{n-3}{2}} d\xi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 I_N &= \frac{c_n}{(2\pi)^n r^{n-2}} \int_0^N \cos t\rho \left[\int_{-r}^r e^{-i\rho\xi} (r^2 - \xi^2)^{\frac{n-3}{2}} d\xi \right] d\rho = \\
 &= \frac{c_n}{(2\pi)^n r^{n-2}} \int_{-r}^r (r^2 - \xi^2)^{\frac{n-3}{2}} \left[\int_0^N \cos t\rho \cdot (\cos \rho\xi - t \sin \rho\xi) d\rho \right] d\xi = \\
 &= \frac{c'_n}{r^{n-2}} \int_{-r}^r (r^2 - \xi^2)^{\frac{n-3}{2}} \left[\frac{\sin N(t+\xi)}{t+\xi} + \frac{\sin N(t-\xi)}{t-\xi} \right] d\xi + \\
 &+ \frac{ic'_n}{r^{n-2}} \int_{-r}^r (r^2 - \xi^2)^{\frac{n-3}{2}} \left[\frac{1 - \cos N(\xi+t)}{\xi+t} + \frac{1 - \cos N(\xi-t)}{\xi-t} \right] d\xi;
 \end{aligned}$$

второе слагаемое при $N \rightarrow \infty$ стремится к 0, а первое, в силу теоремы об обращении интеграла Фурье, имеет при $N \rightarrow \infty$ предел, равный

$$\frac{c}{r^{n-2}} \begin{cases} (r^2 - t^2)^{\frac{n-3}{2}} & \text{при } t < r, \\ 0 & \text{при } t > r. \end{cases}$$

Аналогичный результат получается при замене $\cos t\rho$ на $\sin t\rho$. Отсюда

$$G(t, x) = F^{-1} \left[\frac{\sin t\rho}{\rho} \right] = c \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \begin{cases} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{t^2}{r^2} \right)^{\frac{n-3}{2}} & (t < r), \\ 0 & (t > r). \end{cases} \quad (4)$$

Для решения $u(t, x)$ задачи Коши с заданными функциями $u(0, x) = 0$, $\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = u_1(x)$ получаем формулу

$$u(t, x) = G(t, x) * u_1(x) = c \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_{r>t} \left(1 - \frac{t^2}{r^2} \right)^{\frac{n-3}{2}} S_r[u_1] \cdot r^{n-1} dr$$

или, что то же,

$$u(t, x) = c \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t (r^2 - t^2)^{\frac{n-3}{2}} r S_r[u_1] dr.$$

При $u_1(x) \equiv 1$ мы должны иметь $u(t, x) \equiv t$; отсюда находим $c = \frac{1}{(n-2)!}$. Итак, искомая формула имеет вид

$$u(t, x) = \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t (r^2 - t^2)^{\frac{n-3}{2}} r S_r[u_1] dr.$$

2. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u}{\partial t^k}, \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad (1)$$

Предположим, что это уравнение регулярно, т. е. алгебраическое уравнение

$$\lambda^m(\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma) \lambda^k(\sigma) \quad (2)$$

имеет почти при всех σ одно и то же фиксированное число r корней с неположительной вещественной частью.

Фундаментальное решение $G(t, x)$ удовлетворяет условиям

$$G(0, x) = \dots = \frac{\partial^{r-2} G(0, x)}{\partial t^{r-2}} = 0, \quad \frac{\partial^{r-1} G(0, x)}{\partial t^{r-1}} = \delta(x).$$

Обозначим через $G_p(t, x)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$G_p(0, x) = \dots = \frac{\partial^{r-2} G_p(0, x)}{\partial t^{r-2}} = 0, \quad \frac{\partial^{r-1} G_p(0, x)}{\partial t^{r-1}} = \xi_n^{2p}(x), \quad (3)$$

где $\xi_n^{2p}(x)$ — фундаментальная функция оператора Δ^p (§ 7, п. 2, пример 9):

$$\xi_n^{2p}(x) = \begin{cases} c_{pn} r^{2p-n}, & \text{если } n \text{ нечетно или } n \text{ четно и } > 2p; \\ c_{pn} r^{2p-n} \ln r, & \text{если } n \text{ четно и } \leq 2p. \end{cases}$$

Поскольку

$$\Delta^p \xi_n^{2p}(x) = \delta(x),$$

мы можем получить интересующее нас фундаментальное решение $G(t, x)$ по формуле

$$G(t, x) = \Delta^p G_p(t, x). \quad (4)$$

В некоторых случаях при достаточно большом p оказывается более легким построить обобщенное фундаментальное решение $G_p(t, x)$, а затем уже получить $G(t, x)$ по формуле (4).

Используем формулу разложения r^λ на плоские волны (§ 11, п. 6)

$$r^\lambda = \frac{1}{2\pi \frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_{\Omega} |(\omega, x)|^\lambda d\omega$$

и ее производную по λ :

$$r^\lambda \ln r = \frac{1}{2\pi} \frac{n-1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \int_{\Omega} |(\omega, x)|^\lambda \ln |(\omega, x)| d\omega + \\ + c_n(\lambda) \int_{\Omega} |(\omega, x)|^\lambda d\omega.$$

При значении $\lambda = 2p - n$ эти формулы дают разложение на плоские волны функции $\mathcal{E}_n^{2p}(x)$:

$$\mathcal{E}_n^{2p}(x) = \begin{cases} c_{np} \int_{\Omega} |(\omega, x)|^{2p-n} d\omega & \text{при } n \text{ нечетном или } \\ & n > 2p, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} d_{np} \int_{\Omega} |(\omega, x)|^{2p-n} \ln |(\omega, x)| d\omega & \text{при } n \text{ четном,} \\ & n \leq 2p. \end{cases} \quad (6)$$

В первом случае при $n > 2p$ выражение $|(\omega, x)|^{2p-n}$ означает $\delta^{(n-2p-1)}((\omega, x))$ или $((\omega, x))^{-2p+n}$, смотря по нечетности или четности n .

Слагаемое $c_n(\lambda) \int_{\Omega} |(\omega, x)|^{2p-n} d\omega$ во втором случае (n четно, $n \leq 2p$) отброшено, так как оператором Δ^p оно переводится в нуль. Формулы (5), (6) запишем в единой форме

$$\mathcal{E}_n^{2p}(x) = a_{np} \int_{\Omega} \mathcal{E}_{2p-n}((\omega, x)) d\omega, \quad (7)$$

где $\mathcal{E}_{2p-n}(\xi)$ есть четная обобщенная функция аргумента ξ , определяемая по формуле

$$\mathcal{E}_k(\xi) = \begin{cases} |\xi|^k, & \text{если } k > 0 \text{ нечетно или } k < 0 \text{ четно,} \\ \delta^{-k-1}(\xi), & \text{если } k < 0 \text{ нечетно,} \\ |\xi|^k \ln |\xi|, & \text{если } k \geq 0 \text{ четно.} \end{cases}$$

Нам понадобятся и первообразные \mathcal{E}_{kq} q -го порядка от $\mathcal{E}_k(\xi)$; они имеют вид

$$\mathcal{E}_{kq}(\xi) = \begin{cases} a_{kq} \xi^{k+q}, & \text{если } k \text{ четно, } k+q < 0, \\ b_{kq} \delta^{-k-1+q}(\xi), & \text{если } k \text{ нечетно, } k+q < 0, \\ c_{kq} \xi^{k+q} \operatorname{sgn} \xi, & \text{если } k \text{ нечетно, } k+q \geq 0, \\ d_{kq} \xi^{k+q} \ln |\xi|, & \text{если } k \text{ четно, } k+q \geq 0. \end{cases}$$

Имея в виду формулу (7), мы вместо задачи (1)—(3) будем (при фиксированном ω) искать решение $u_p(\omega, t, x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\left. \begin{aligned} u_p(\omega, 0, x) = \dots = \frac{\partial^{r-2} u_p(\omega, 0, x)}{\partial t^{r-2}} = 0, \\ \frac{\partial^{r-1} u_p(\omega, 0, x)}{\partial t^{r-1}} = \mathcal{E}_{2p-n}(\omega, x). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Допустим, что найдено решение $u_p(\omega, t, x)$ этой задачи, зависящее непрерывно (в K') от ω и m раз дифференцируемым образом от t . Мы утверждаем, что функция

$$G_p(t, x) = a_{np} \int_{\Omega} u_p(\omega, t, x) d\omega$$

является решением поставленной задачи. Действительно, поскольку в обобщенных функциях дифференцирование и предельный переход перестановочны, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m G_p(t, x)}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k G_p(t, x)}{\partial t^k} &= \\ = a_{np} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^m u(\omega, t, x)}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u(\omega, t, x)}{\partial t^k} \right] d\omega &= 0, \\ G_p(0, x) = \dots = \frac{\partial^{r-2} G_p(0, x)}{\partial t^{r-2}} &= 0, \\ \frac{\partial^{r-1} G_p(0, x)}{\partial t^{r-1}} &= a_{np} \int_{\Omega} \frac{\partial^{r-1} u(\omega, 0, x)}{\partial t^{r-1}} d\omega = \\ &= a_{np} \int_{\Omega} \mathcal{E}_{2p-n}(\omega, x) d\omega = \mathcal{E}_n^{2p}(x), \end{aligned}$$

что и требуется.

Таким образом, отыскание фундаментального решения сводится к решению задачи (1) при условиях (8). Решение этой задачи будем разыскивать в форме

$$u_p(\omega, t, x) \equiv U_{\omega}(t, \omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n) \equiv U_{\omega}(t, \xi), \quad \xi = (\omega, x). \quad (9)$$

Поскольку для функции вида (9)

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} = \omega_j \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (10)$$

подставляя в (1), мы найдем

$$\frac{\partial^m U_\omega(t, \xi)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(i\omega_1 \frac{\partial}{\partial \xi}, \dots, i\omega_n \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^k U_\omega(t, \xi)}{\partial t^k}. \quad (11)$$

Это уравнение уже с одним пространственным переменным ξ (и параметрами ω). Требуется найти его решение при условиях

$$U_\omega(0, \xi) = \dots = \frac{\partial^{r-2} U_\omega(0, \xi)}{\partial t^{r-2}} = 0, \quad \frac{\partial^{r-1} U_\omega(0, \xi)}{\partial t^{r-1}} = \mathcal{E}_{2p-n}(\xi). \quad (12)$$

Покажем, что уравнение (11) почти при всех ω регулярно с показателем r . Мы должны для этого составить уравнение

$$\lambda^m = \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\omega_1 \alpha, \dots, \omega_n \alpha) \lambda^k \quad (13)$$

и найти число его корней с неположительной вещественной частью. Но уравнение (13) получается из уравнения (2) при замене $\sigma_1 = \omega_1 \alpha, \dots, \sigma_n = \omega_n \alpha$, т. е. при параметрах σ , описывающих некоторую прямую в пространстве R_n . Так как уравнение (1) регулярно с показателем r , то почти при всех значениях ω и уравнение (11) регулярно с тем же значением r . Следовательно, почти при всех ω может быть однозначно решена и задача (11)—(12). Если ее решение зависит от ω непрерывно, то, как мы видели выше, интегрированием по ω мы получим решение и интересующей нас задачи.

3. Рассмотрим случай однородного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{k_0+k_1+\dots+k_n=m} a_{k_1, \dots, k_n} t^{k_1+\dots+k_n} \frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}. \quad (1)$$

Соответствующее алгебраическое уравнение имеет вид

$$\lambda^m = \sum_{k_0+k_1+\dots+k_n=m} a_{k_1, \dots, k_n} \omega_1^{k_1} \dots \omega_n^{k_n} \lambda^{k_0}. \quad (2)$$

Его корни $\lambda_0(\sigma), \dots, \lambda_{m-1}(\sigma)$ суть однородные функции 1-го порядка по σ . Если фиксировать луч, определяемый единичным вектором $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, то на этом луче $\sigma_j = \rho \omega_j$, $\lambda_k(\sigma) = \mu_k(\omega) \rho$, числа μ_k и ω связаны уравнением

$$\mu_k^m(\omega) + \sum_{k_0+\dots+k_n=m} a_{k_1, \dots, k_n} \mu_k^{k_0} \omega_1^{k_1} \dots \omega_n^{k_n} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) называется гиперболическим, если все числа $\mu_k(\omega)$ чисто мнимы, и строго гиперболическим, если при этом все они различны. В этом случае фундаментальное решение задачи Коши для

уравнения (1) имеет вид (§ 28, п. 2, (4))

$$G_{\omega}(t, \xi) = C \sum_{j=0}^{m-1} B_j [\xi - b_j(\omega)t]^{m-2} \operatorname{sgn} [\xi - b_j(\omega)t], \quad i b_j(\omega) = \mu_j(\omega).$$

Искомое решение задачи Коши (11)—(12) п. 2 можно записать в форме

$$U_{\omega}(t, \xi) = C \sum_{j=0}^{m-1} B_j [\xi - b_j(\omega)t]^{m-2} \operatorname{sgn} [\xi - b_j(\omega)t] * \mathcal{E}_{2p-n}(\xi). \quad (4)$$

Для упрощения свертки заметим, что

$$\frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} [\xi - b_j(\omega)t]^{m-2} \operatorname{sgn} [\xi - b_j(\omega)t] = (m-2)! \delta(\xi - b_j(\omega)t).$$

С другой стороны, если использовать первообразные от функции $\mathcal{E}_{2p-n}(\xi)$, можно написать, что

$$\mathcal{E}_{2p-n}(\xi) = \frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} \mathcal{E}_{2p-n, m-1}(\xi).$$

Перебрасывая $\frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}}$ со второго множителя свертки (4) на первый, приходим к формуле

$$\begin{aligned} U_{\omega}(t, \xi) &= C \sum_{j=0}^{m-1} B_j \delta[\xi - b_j(\omega)t] * \mathcal{E}_{2p-n, m-1}(\xi) = \\ &= C \sum_{j=0}^{m-1} B_j \mathcal{E}_{2p-n, m-1}[\xi - b_j(\omega)t]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} G(t, x) &= c_{pn} \Delta^p \int_{\Omega} U_p(t(\omega, x)) d\omega = \\ &= c_{pn} \Delta^p \int_{\Omega} \sum_{j=0}^{m-1} B_j \mathcal{E}_{2p-n, m-1}[(\omega, x) - b_j(\omega)t] d\omega. \quad (5) \end{aligned}$$

Оператор Δ может быть выражен здесь через оператор $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ в силу равенств

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f((\omega, x) - b_j t) = b_j^2 f''((\omega, x) - b_j t),$$

$$\begin{aligned} \Delta f((\omega, x) - b_j t) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f((\omega, x) - b_j t) = \\ &= \sum_{k=1}^n f''((\omega, x) - b_j t) \omega_k^2 = f''((\omega, x) - b_j t), \end{aligned}$$

справедливых для любой (даже обобщенной) функции $f(\xi)$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta^p \int_{\Omega} \sum_{j=0}^{m-1} B_j \mathcal{E}_{2p-n, m-1}((\omega, x) - b_j(\omega)t) d\omega &= \\ &= \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} \int_{\Omega} \sum_{j=0}^{m-1} B_j b_j^{-2p} \mathcal{E}_{2p-n, m-1}((\omega, x) - b_j t) d\omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Если уравнение (1) сферически симметрично, т. е. дифференцирование по x входит только в форме операторов Лапласа, то корни $b_j(\omega)$ на самом деле не зависят от ω . Мы можем тогда использовать формулу (2) § 9, п. 7, которая дает выражение интегралов по сфере от функций аргумента (ω, x) ; согласно этой формуле,

$$\begin{aligned} G(t, x) &= c \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^{m-1} B_j b_j^{-2p} \mathcal{E}_{2p-n, m-1}(rh - b_j t) (1 - h^2)^{\frac{n-3}{2}} dh = \\ &= c \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} \frac{1}{r^{n-2}} \int_{-r}^r (r^2 - \xi^2)^{\frac{n-3}{2}} \sum_{j=0}^{m-1} B_j b_j^{-2p} \mathcal{E}_{2p-n, m-1}(\xi - b_j t) d\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

Число p пока еще произвольно; мы можем выбрать его так, чтобы функция $\mathcal{E}_{2p-n, m-1}(\xi - b_j t)$ получила наиболее простой вид.

Пусть, например, речь идет об обычном волновом уравнении

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u.$$

Здесь

$$m = 2, \lambda^2 = -\sigma^2, \lambda_{0,1} = \pm i|\sigma|, \mu_{0,1} = \pm i, b_{0,1} = \pm 1, B_{0,1} = \pm \frac{1}{2}.$$

Если $n > 1$ нечетно, мы положим $2p = n - 1$ и получим

$$G(t, x) = c \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \frac{1}{r^{n-2}} \int_{-r}^r (r^2 - \xi^2)^{\frac{n-3}{2}} \chi_{[-t, t]}(\xi) d\xi,$$

где $\chi_{[-t, t]}(\xi)$ равна 1 при $|\xi| \leq t$ и 0 при $|\xi| > t$. Таким образом,

$$G(t, x) = c \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \frac{1}{r^{n-2}} \begin{cases} \int_{-t}^t (r^2 - \xi^2)^{\frac{n-3}{2}} d\xi & \text{при } r > t, \\ \int_{-r}^r (r^2 - \xi^2)^{\frac{n-3}{2}} d\xi & \text{при } r < t. \end{cases}$$

Произведя однократное дифференцирование, приходим к формуле

$$G(t, x) = c \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \frac{1}{r^{n-2}} \begin{cases} (r^2 - t^2)^{\frac{n-3}{2}} & \text{при } r > t, \\ 0 & \text{при } r < t, \end{cases}$$

совпадающей с формулой (4) п. 1.

В общем случае в формуле фундаментального решения однородного гиперболического уравнения

$$G(t, x) = c \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} \int_{\Omega} \sum_{j=0}^{m-1} B_j b_j^{-2p} \mathcal{E}_{2p-n, m-1}((\omega, x) - b_j(\omega)t) d\omega \quad (8)$$

можно совершить переход от интегрирования по сфере к интегрированию по поверхности

$$H(\sigma) \equiv 1 + \sum_{j=0}^{m-1} p_j(\sigma) = 0.$$

Соответствующая формула (один из вариантов формулы Херглота — Петровского) имеет вид

$$G(t, x) = c \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} \int_{H=0} \frac{\mathcal{E}_{2p-n, m-1}((\xi, x) - t) dH(\xi)}{\text{grad } H(\xi) \text{ sgn }(\xi) \text{ grad } H(\xi)}, \quad (9)$$

где $dH(\xi)$ — элемент поверхности $H=0$ в точке ξ . Переход от (8) к (9) проведен в ряде книг *).

4. Переходим к общему случаю, когда однородное уравнение

$$\frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m} = \sum_{k_0 + \dots + k_n = m} a_{k_1 \dots k_n} t^{k_1 + \dots + k_n} \frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \quad (1)$$

регулярно. Это означает, что корни соответствующего алгебраического уравнения

$$\mu^m = \sum_{k_0 + \dots + k_n = m} a_{k_1 \dots k_n} \mu^{k_0} \omega_1^{k_1} \dots \omega_n^{k_n}$$

удовлетворяют неравенствам

$$\text{Re } \mu_0 \leq \dots \leq \text{Re } \mu_{q-1} < \text{Re } \mu_q = \dots$$

$$\dots = \text{Re } \mu_{r-1} = 0 < \text{Re } \mu_r \leq \dots \leq \text{Re } \mu_{m-1},$$

*) Ф. Йон, Плоские волны и сферические средние, ИЛ, 1958; И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1958 и 1959.

где q, r не зависят от ω и $q + r = m$. В качестве начальных функций можно задавать $u(0, x), \dots, \frac{\partial^{r-1} u(0, x)}{\partial t^{r-1}}$. Будем, кроме того, считать, что числа μ_1, \dots, μ_m различны. В этом случае решение уравнения (11) с начальными условиями (12) п. 1 принимает вид

$$U_\omega(t, \xi) = C \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} B_j (-\mu_j t - i\xi)^{r-2} \ln(-\mu_j t + i\xi) + \right. \\ \left. + (-1)^{r-1} \sum_{s=q}^{m-1} A_s (\mu_s t - i\xi)^{r-2} \ln(\mu_s t - i\xi) \right\} * \mathcal{E}_{2p-n}(\xi). \quad (2)$$

Заметим, что при $2p < n$ функция \mathcal{E}_{2p-n} есть свертыватель в пространстве \mathcal{S} (равно как и $G_m(t, \xi)$) и поэтому свертка (2) определена.

Желая использовать тот же прием, который мы применили для гиперболического уравнения, будем дифференцировать функцию $G(t, \xi)$. Пользуясь формулой Лейбница, легко получить следующие формулы многократного дифференцирования:

$$(z^\lambda \ln z)^{(l)} = \begin{cases} z^{\lambda-l} [a_{\lambda l} \ln z + b_{\lambda l}] & (l \leq \lambda), \\ b_{\lambda l} z^{\lambda-l} & (l > \lambda). \end{cases}$$

Поэтому мы можем написать

$$U_\omega(t, \xi) = c_r \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} B_j (-\mu_j t + i\xi)^{r-2-l} [a_{r-2, l} \ln(-\mu_j t + i\xi) + b_{r-2, l}] + \right. \\ \left. + (-1)^{r-1} \sum_{s=q}^{m-1} A_s (\mu_s t - i\xi)^{r-2-l} \times \right. \\ \left. \times [a_{r-2, l} \ln(\mu_s t - i\xi) + b_{r-2, l}] \right\} * \mathcal{E}_{2p-n, l}(\xi). \quad (3)$$

причем постоянные $a_{r-2, l}$ обращаются в 0 при $l > r - 2$.

Числа p и l подчиним условию $2p + l = n - 1$.

При n нечетном мы будем иметь $\mathcal{E}_{2p-n, l}(\xi) = b\delta(\xi)$, при n четном $\mathcal{E}_{2p-n, l}(\xi) = a\xi^{-1}$. Следовательно, при n нечетном

$$U_\omega(t, \xi) = \\ = bc_r \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} B_j (-\mu_j t + i\xi)^{2p+r-n-1} [a_{r-2, l} \ln(-\mu_j t + i\xi) + b_{r-2, l}] + \right. \\ \left. + (-1)^{r-1} \sum_{s=q}^{m-1} A_s (\mu_s t - i\xi)^{2p+r-n-1} [a_{r-2, l} \ln(\mu_s t - i\xi) + b_{r-2, l}] \right\}. \quad (4)$$

Отсюда

$$G(t, x) = c\Delta^p \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} B_j (-\mu_j t + l(\omega, x))^{2p+r-n-1} \times \right. \\ \times [a_{r-2, l} \ln(-\mu_j t + l(\omega, x)) + b_{r-2, l}] + \\ \left. + (-1)^{r-1} \sum_{s=q}^{m-1} A_s (\mu_s t - l(\omega, x))^{2p+r-n-1} \times \right. \\ \left. \times [a_{r-2, l} \ln(\mu_s t - l(\omega, x)) + b_{r-2, l}] \right\} d\omega, \quad (5)$$

причем $a_{r-2, l} = 0$, если $l > r - 2$.

При n четном мы должны произвести свертку с $a\xi^{-1}$. Свертку любой обобщенной функции $f(\xi)$ с $a\xi^{-1}$ можно осуществить, например, так: найти преобразование Фурье $g(\sigma)$ функций $f(\xi)$, умножить его на -

$$F(a\xi^{-1}) = a\pi \operatorname{sgn} \xi$$

и применить к результату обратное преобразование Фурье

$$f(\xi) * \xi^{-1} = F^{-1}[g(\sigma) \cdot \pi a \operatorname{sgn} \sigma].$$

В нашем случае

$$g(\sigma) = V(\omega, t, \sigma) = (i\sigma)^l \begin{cases} \frac{1}{\sigma^{r-1}} \sum_{j=0}^{r-1} B_j e^{\mu_j \sigma t} & \text{при } \sigma > 0, \\ \frac{1}{\sigma^{r-1}} \sum_{s=q}^{m-1} A_s e^{\mu_s \sigma t} & \text{при } \sigma < 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$a\pi g(\sigma) \operatorname{sgn} \sigma = a\pi (i\sigma)^l \begin{cases} \frac{1}{\sigma^{r-1}} \sum_{j=0}^{r-1} B_j e^{\mu_j \sigma t} & \text{при } \sigma > 0, \\ -\frac{1}{\sigma^{r-1}} \sum_{s=q}^{m-1} A_s e^{\mu_s \sigma t} & \text{при } \sigma < 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 U_{\omega}(t, \xi) &= \\
 &= C\pi \left(\frac{d}{d\xi}\right)^l \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma^{r-1}} \sum_{j=0}^{r-1} B_j e^{\mu_j \sigma t - i \sigma \xi} d\sigma - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma^{r-1}} \sum_{s=q}^{m-1} A_s e^{\mu_s \sigma t - i \sigma \xi} d\sigma \right\} = \\
 &= a C_r \pi \left(\frac{d}{d\xi}\right)^l \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} B_j (i\xi - \mu_j t)^{r-2} \ln(i\xi - \mu_j t) + \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^r \sum_{s=q}^{m-1} A_s (\mu_s t - i\xi)^{r-2} \ln(\mu_s t - i\xi) \right\} = \\
 &= a\pi C_r \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} B_j (-\mu_j t + i\xi)^{2p+r-n-1} [a_{r-2, l} \ln(-\mu_j t + i\xi) + b_{r-2, l}] + \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^r \sum_{s=q}^{m-1} A_s (\mu_s t - i\xi)^{2p+r-n-1} [a_{r-2, l} \ln(\mu_s t - i\xi) + b_{r-2, l}] \right\}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Наконец, искомое фундаментальное решение $G(t, x)$ получает вид

$$\begin{aligned}
 G(t, x) &= C\Delta^p \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} B_j (-\mu_j t + i(\omega, x))^{2p+r-n-1} \times \right. \\
 &\quad \times [a_{r-2, l} \ln(-\mu_j t + i(\omega, x)) + b_{r-2, l}] + \\
 &\quad \left. + (-1)^r \sum_{s=q}^{m-1} A_s (\mu_s t - i(\omega, x))^{2p+r-n-1} \times \right. \\
 &\quad \left. \times [a_{r-2, l} \ln(\mu_s t - i(\omega, x)) + b_{r-2, l}] \right\} d\omega. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Здесь также постоянные $a_{r-2, l}$ обращаются в нуль при $l > r - 2$. Показатель p остается еще произвольным (при условии $2p < n$) и может быть использован для дальнейшего упрощения формул (5) — (7) в различных возможных частных случаях.

§ 30. Уравнения со свободным членом

1. Мы рассмотрим здесь вопрос о существовании и форме корректных краевых задач для уравнений со свободным членом

$$\frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} = f(t, x). \quad (1)$$

Как и раньше, наша задача — выяснить, какие начальные условия определяют для уравнения (1) корректную начальную задачу, т. е. задачу, решение которой $u(t, x)$ принадлежит при каждом $t \geq 0$ пространству \mathcal{H} , при $t \rightarrow \infty$ возрастает в \mathcal{H} не быстрее степени t , единственно в этом классе и непрерывно зависит от начальных условий и функции $f(t, x)$. Естественно, будем предполагать, что функция $f(t, x)$ сама удовлетворяет условиям, поставленным для решения, т. е. принадлежит при каждом $t \geq 0$ пространству \mathcal{H} и возрастает в нем при $t \rightarrow \infty$ не быстрее степени t ; более точное условие будет сформулировано ниже.

Переходя от (1) к преобразованию Фурье по x , получаем уравнение вида

$$\frac{d^m v(t, \sigma)}{dt^m} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma) \frac{d^k v(t, \sigma)}{dt^k} = g(t, \sigma), \quad (2)$$

где свободный член $g(t, \sigma)$ принадлежит пространству H при каждом $t \geq 0$, а при $t \rightarrow \infty$ возрастает в H не быстрее некоторой степени t .

Чтобы проиллюстрировать возникающие здесь возможности, отвлечемся от параметра σ , т. е. рассмотрим случай обыкновенного уравнения и притом для простоты первого порядка:

$$\frac{dv(t)}{dt} - av(t) = g(t), \quad |g(t)| \leq C(1+t)^h. \quad (3)$$

Решение этого уравнения при начальном условии $v(0) = v_0$ имеет вид

$$v(t) = e^{at} v_0 + \int_0^t e^{a(t-\theta)} g(\theta) d\theta = e^{at} \left[v_0 + \int_0^t e^{-a\theta} g(\theta) d\theta \right]. \quad (4)$$

Пусть вначале $a \leq 0$; покажем, что решение $v(t)$ при $t \rightarrow \infty$ и любом v_0 возрастает не быстрее степени t . Действительно, в этом случае

$$|v(t)| \leq |v_0| + \int_0^t |g(\theta)| d\theta \leq |v_0| + Ct(1+t)^h,$$

что и утверждалось.

Рассмотрим случай $a > 0$. Тогда интеграл

$$I(g) = \int_0^{\infty} e^{-a\theta} g(\theta) d\theta$$

имеет конечное значение, и мы можем записать решение (4) в форме

$$v(t) = e^{at} [v_0 + I(g)] - \int_t^{\infty} e^{a(t-\theta)} g(\theta) d\theta. \quad (5)$$

Второе слагаемое имеет рост не выше степенного, поскольку

$$\int_t^{\infty} e^{a(t-\theta)} g(\theta) d\theta = \int_0^{\infty} e^{-a\theta} g(\theta+t) d\theta, \quad (6)$$

и следовательно,

$$\left| \int_t^{\infty} e^{a(t-\theta)} g(\theta) d\theta \right| \leq C \int_0^{\infty} e^{-a\theta} (1+\theta+t)^h d\theta = O(t^h).$$

Если $v_0 + I(g) \neq 0$, то, очевидно, $v(t)$ возрастает экспоненциально при $t \rightarrow \infty$; поэтому равенство $v_0 + I(g) = 0$ является необходимым и достаточным условием существования решения степенного роста по t .

Таким образом, при $a > 0$ мы не можем наложить никаких добавочных условий на v_0 , поскольку эта величина однозначно определяется по $I(g)$.

Уравнение типа (3), с параметром σ , получается после преобразования Фурье уравнения (1), имеющего первый порядок по t :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - p\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) = f(t, x).$$

Роль коэффициента a играет многочлен $p(\sigma)$. Мы получаем здесь следующий результат: в точках σ , где $p(\sigma) \leq 0$, функция $v_0(\sigma)$ может быть взята произвольно, в тех точках, где $p(\sigma) > 0$, она не может быть задана произвольно, а напротив, целиком определяется условием

$$v_0(\sigma) + \int_0^{\infty} e^{-p(\sigma)\theta} g(\theta, \sigma) d\theta = 0. \quad (7)$$

Решение $v(t, \sigma)$ при каждом фиксированном σ имеет вид (4), (6):

$$v(t, \sigma) = \begin{cases} e^{tp(\sigma)} v_0(\sigma) + \int_0^t e^{(t-\theta)p(\sigma)} g(\theta, \sigma) d\theta & \text{при } p(\sigma) \leq 0; \quad (8) \\ - \int_0^{\infty} e^{-\theta p(\sigma)} g(t+\theta, \sigma) d\theta & \text{при } p(\sigma) > 0. \quad (9) \end{cases}$$

Выражение $v(t, \sigma)$ при $p(\sigma) \leq 0$ определяет функцию, принадлежащую H и возрастающую в H не быстрее степени t вместе с $g(t, \sigma)$; действительно, если

$$|g(t, \sigma)| \leq C(1+t)^h(1+\sigma^2)^q \psi(\sigma), \quad \psi(\sigma) \in L_2,$$

то при $p(\sigma) \leq 0$

$$|v(t, \sigma)| \leq |v_0(\sigma)| + C \int_0^t |g(\theta, \sigma)| d\theta \leq \\ \leq |v_0(\sigma)| + C(1 + \sigma^2)^q (1 + t)^h |\psi(\sigma)|.$$

При $p(\sigma) > 0$ аналогичное утверждение требует дополнительных предположений на $g(t, \sigma)$. Можно, например, потребовать, чтобы функция $g(t, \sigma)$ достаточно быстро убывала в H при $t \rightarrow \infty$, так, чтобы выполнялась оценка

$$|g(t, \sigma)| \leq C(1 + t)^h (1 + \sigma^2)^q \psi(\sigma) \quad \text{с } h < -1.$$

В этом случае при $p(\sigma) > 0$

$$|v(t, \sigma)| \leq C(1 + \sigma^2)^q |\psi(\sigma)| \int_0^\infty (1 + t + \theta)^h d\theta = \\ = C_1(1 + \sigma^2)^q |\psi(\sigma)| (1 + t)^{h+1}.$$

Более слабым условием является просто предположение, что интеграл (9) при каждом $t \geq 0$ принадлежит H и возрастает в H не быстрее степени t .

Для общего уравнения (1) мы докажем следующую теорему:

Теорема. Пусть $\lambda_0(\sigma), \dots, \lambda_{m-1}(\sigma)$ — корни уравнения

$$\lambda^m(\sigma) - \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma) \lambda^k(\sigma) = 0$$

и множество G_r образовано из всех тех точек $\sigma \in R_n$, где ровно r из корней $\lambda_j(\sigma)$ имеют неположительную вещественную часть ($r = 0, 1, \dots, m-1$).

Пусть, далее, функция $f(t, x)$ принадлежит \mathcal{H} при каждом $t \geq 0$ и возрастает в \mathcal{H} не быстрее некоторой степени t и, кроме того, на множестве G_r каждый из интегралов

$$\int_0^\infty e^{-\theta \lambda_r(\sigma)} \theta^k |g(\theta + t, \sigma)| d\theta \quad (k = 0, 1, \dots, m-2) \quad (10)$$

принадлежит пространству H и возрастает в H не быстрее некоторой степени t .

Тогда для уравнения (1) является корректной следующей начальной задачей: при $t=0$ задано (и принадлежит пространству $H(G_{k-1})$) преобразование Фурье $v_{k-1}(\sigma)$ функции $\frac{\partial^{k-1} u(0, x)}{\partial t^{k-1}}$ почти всюду на множестве G_r ($k = 1, 2, \dots, r; r = 0, \dots, m-1$).

Доказательство будем проводить в предположении, что корни $\lambda_0(\sigma), \dots, \lambda_{m-1}(\sigma)$ все различны почти всюду.

2. Рассмотрим линейную неоднородную систему обыкновенных уравнений (m уравнений, m неизвестных функций $v_0(t), \dots, v_{m-1}(t)$) с постоянными коэффициентами, имеющую в векторной форме вид

$$\frac{dv(t)}{dt} - Pv(t) = g(t), \quad (1)$$

где

$$|g(t)| \leq C(1+t)^h. \quad (2)$$

Решение системы (1) с начальным вектором $v(0) = v_0$ можно записать в форме, аналогичной (4) п. 1:

$$v(t) = e^{Pt}v(0) + \int_0^t e^{(t-\theta)P}g(\theta)d\theta = e^{Pt} \left[v(0) + \int_0^t e^{-\theta P}g(\theta)d\theta \right]. \quad (3)$$

Предположим, что линейный оператор, заданный матрицей P , имеет r характеристических корней с неположительной вещественной частью и $m-r$ характеристических корней с положительной вещественной частью. Пространство Q , в котором действует оператор P , разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств Q^- и Q^+ , первое из которых порождается собственными (и присоединенными) векторами, соответствующими собственным значениям первой группы, а второе — собственными (и присоединенными) векторами, соответствующими собственным значениям второй группы. Соответственно разлагаются и векторы $v(t)$, v_0 и $g(t)$:

$$v(t) = v^-(t) + v^+(t), \quad v_0 = v_0^- + v_0^+, \quad g(t) = g^-(t) + g^+(t).$$

Так как операторы P и e^{tP} инвариантны в подпространствах Q^- и Q^+ , то

$$v^-(t) = e^{tP}v_0^- + \int_0^t e^{(t-\theta)P}g^-(\theta)d\theta, \quad (4)$$

$$v^+(t) = e^{tP}v_0^+ + \int_0^t e^{(t-\theta)P}g^+(\theta)d\theta. \quad (5)$$

Мы утверждаем, что вектор-функция $v^-(t)$ возрастает в Q^- не быстрее степени t . Для доказательства применим неравенство (2) § 24, п. 2:

$$\|e^{tP}\| \leq e^{t\Lambda} \left(1 + 2t\|P\| + \dots + \frac{(2t)^{m-1}}{(m-1)!} \|P\|^{m-1} \right), \quad (6)$$

где Λ есть максимальная из вещественных частей собственных значений оператора P . Обозначим собственные значения оператора P в подпространстве Q^- через $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$; можно написать

$$\operatorname{Re} \lambda_0 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_{r-1} \leq 0.$$

Поэтому, в силу неравенства (6), в подпространстве Q^-

$$\|e^{tP}\| \leq C(1+t)^{m-1}. \quad (7)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|v^-(t)\| &\leq \|e^{tP}\| \|v_0^-\| + \int_0^t \|e^{(t-\theta)P}\| \cdot \|g^-(\theta)\| d\theta \leq \\ &\leq C_1 \|e^{tP}\| \|v_0^-\| + C_1 \int_0^t \|e^{(t-\theta)P}\| \|g^-(\theta)\| d\theta \leq \\ &\leq C_2 (1+t)^{m-1} + C_3 \int_0^t (1+t-\theta)^{m-1} (1+\theta)^h d\theta = O(t^{m+1+h}), \end{aligned}$$

что и утверждалось.

Выражение функции $v^+(t)$ запишем в виде

$$v^+(t) = e^{tP} \left\{ v_0^+ + \int_0^t e^{-\theta P} g^+(\theta) d\theta \right\} \quad (8)$$

и покажем, что интеграл

$$I = \int_0^\infty e^{-\theta P} g^+(\theta) d\theta \quad (9)$$

является сходящимся. Обозначим собственные значения оператора P в пространстве Q^+ через $\lambda_r, \dots, \lambda_{m-1}$ и предположим, что

$$\operatorname{Re} \lambda_r \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_{m-1};$$

по условию, $\operatorname{Re} \lambda_r > 0$. Собственные значения оператора $-P$ в этом же подпространстве суть $-\lambda_r, \dots, -\lambda_{m-1}$ и при этом

$$\operatorname{Re}(-\lambda_{m-1}) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(-\lambda_r) < 0.$$

Поэтому, в силу неравенства (6) и оценки (2), мы имеем

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{-\theta P} g^+(\theta) d\theta \right\| &\leq \int_0^\infty \|e^{-\theta P}\| \|g^+(\theta)\| d\theta \leq \\ &\leq C \int_0^\infty (1+\theta)^{m-1} e^{-\theta \operatorname{Re} \lambda_r} (1+\theta)^h d\theta < \infty. \end{aligned}$$

Очевидно, что вектор I принадлежит к подпространству Q^+ . Внося его выражение в формулу (8), мы получим

$$v^+(t) = e^{tP} [v_0 + I] - \int_t^\infty e^{(t-\theta)P} g^+(\theta) d\theta.$$

В силу неравенства (6) и оценки (2), последний интеграл имеет в Q норму

$$\begin{aligned} \left\| \int_t^\infty e^{(t-\theta)P} g^+(\theta) d\theta \right\| &= \left\| \int_0^\infty e^{-\theta P} g^+(\theta + t) d\theta \right\| \leq \\ &\leq C \int_0^\infty e^{-\theta \operatorname{Re} \lambda_r} (1 + \theta)^{m-1} (1 + \theta + t)^h d\theta = O(t^h) \end{aligned}$$

и, следовательно, возрастает в Q не быстрее степени t .

В то же время выражение

$$e^{tP} [v_0^+ + I]$$

заведомо возрастает экспоненциально, если $v_0^+ + I \neq 0$; достаточно заметить, что на каждый базисный вектор e_s оператора P в подпространстве Q^+ оператор e^{tP} действует, как множитель $e^{t\lambda_s}$.

Отсюда следует, что необходимым условием существования решения системы (1), возрастающего в Q не быстрее степени t , является выполнение соотношения

$$v_0^+ + I = v_0^+ + \int_0^\infty e^{-\theta P} g^+(\theta) d\theta = 0. \quad (10)$$

При выполнении условия (10) система (1) имеет решение

$$\begin{aligned} v(t) = v^-(t) + v^+(t) = \\ = e^{tP} \left\{ v_0^- + \int_0^t e^{-\theta P} g^-(\theta) d\theta - \int_t^\infty e^{-\theta P} g^+(\theta) d\theta \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

возрастающее в Q при $t \rightarrow \infty$, как мы видели, не быстрее степени t .

Таким образом, условие (10) является не только необходимым, но и достаточным для существования решения $v(t)$, которое возрастает в Q при $t \rightarrow \infty$ не быстрее степени t .

В частности, решение $v(t)$ однозначно определяется по составляющей v_0^- начального вектора v_0 , которую можно взять произвольно (в Q^-); составляющая v_0^+ определяется из (10) по $g(\theta)$.

Пусть система (1) получена из одного уравнения m -го порядка

$$\frac{d^m v(t)}{dt^m} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k \frac{d^k v(t)}{dt^k} = g(t)$$

обычной заменой $v(t) = v_0(t)$, $\frac{dv}{dt} = v_1(t)$, ..., $\frac{d^{m-1}v(t)}{dt^{m-1}} = v_{m-1}(t)$.

В этом случае можно утверждать, что искомое решение, возрастающее при $t \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени t , определяется однозначно по (произвольно заданным) значениям $v(0)$, ..., $\frac{d^{r-1}v(0)}{dt^{r-1}}$.

Действительно, пусть $v_0 = v_0^- + v_0^+$ и $v_0^+ = (\xi_0, \dots, \xi_{r-1}, \dots, \xi_{m-1})$.

Если заданы числа $v(0) = \eta_0, \dots, \frac{d^{r-1}v(0)}{dt^{r-1}} = \eta_{r-1}$, то для вектора $v_0^- = v_0 - v_0^+$ оказываются известными первые r составляющих $\eta_0 - \xi_0, \dots, \eta_{r-1} - \xi_r$; а тогда, по доказанному в § 25, п. 2, этот вектор v_0^- определяется и притом единственным образом.

В случае, когда система (1) получена преобразованием Фурье из системы с частными производными

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - P\left(t \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) = f(t, x), \quad (12)$$

она содержит вектор σ в качестве параметра (в матрице P и свободном члене $g = g(t, \sigma)$). Условие (10) принимает теперь вид

$$v_0^+(\sigma) + I(\sigma) \equiv v_0^+(\sigma) + \int_0^\infty e^{-tP(\sigma)} g^+(\theta, \sigma) d\theta = 0. \quad (13)$$

Оно является по-прежнему необходимым и достаточным условием корректной разрешимости системы (1) в каждой точке σ .

Рассматриваемое при всех σ , соотношение (13) также является необходимым для существования решения $v(t, \sigma)$ системы (12), возрастающего при каждом σ не быстрее степени t . Но получаемое при этом решение (11), как функция от σ , а priori не обязано принадлежать пространству H . Мы покажем в дальнейшем, что для системы (12), соответствующей одному уравнению

$$\frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^{m-1}} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(t \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} = f(t, x), \quad (14)$$

выполнение равенства (13) почти всюду по σ является необходимым и достаточным условием корректной разрешимости задачи с начальным вектором $v_0(\sigma)$.

3. Для доказательства этого факта нам понадобится более тщательно проанализировать решение обыкновенной системы (1) в случае, отвечающем одному уравнению, и, в частности, выписать выражение решения $v(t)$ через начальные данные v_0, \dots, v_{r-1} .

Итак, рассмотрим снова одно уравнение порядка m :

$$\frac{d^m v(t)}{dt^m} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k \frac{d^k v(t)}{dt^k} = g(t). \quad (1)$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} - v_1 &= 0, \\ \frac{dv_1}{dt} - v_2 &= 0, \\ \dots & \\ \frac{dv_{m-1}}{dt} - p_0 v_0 - p_1 v_1 - p_2 v_2 - \dots - p_{m-1} v_{m-1} &= g(t). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Оператор P имеет матрицу

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{m-1} \end{vmatrix}$$

с собственными векторами

$$e_j = (1, \lambda_j, \lambda_j^2, \dots, \lambda_j^{m-1}) \quad (j = 0, 1, \dots, m-1)$$

(см. § 25, п. 2), где $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$ — корни уравнения

$$\lambda^m - \sum_{k=0}^{m-1} p_k \lambda^k = 0.$$

Как мы уже знаем, решение $v(t)$ может быть однозначно выражено только через числа $v_0 = v(0), \dots, v_{r-1} = \frac{d^{r-1}v(0)}{dt^{r-1}}$. Найдем явное выражение $v(t)$ через v_0, \dots, v_{r-1} . Для простоты будем предполагать, что корни $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$ различны.

Любой вектор $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{m-1}) \in Q$ можно разложить по базисным векторам e_0, e_1, \dots, e_{m-1} :

$$\xi = \xi^0 e_0 + \xi^1 e_1 + \dots + \xi^{m-1} e_{m-1}. \quad (3)$$

В координатной форме равенство (3) имеет вид системы:

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \xi^0 & + \xi^1 & + \dots + \xi^{m-1} \\ \xi_1 &= \xi^0 \lambda_0 & + \xi^1 \lambda_1 & + \dots + \xi^{m-1} \lambda_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{m-1} &= \xi^0 \lambda_0^{m-1} & + \xi^1 \lambda_1^{m-1} & + \dots + \xi^{m-1} \lambda_{m-1}^{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Разрешая эту систему относительно неизвестных ξ^j , находим

$$\xi^j = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 1 & \dots & \xi_0 & \dots & 1 \\ \lambda_0 & \dots & \xi_1 & \dots & \lambda_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^{m-1} & \dots & \xi_{m-1} & \dots & \lambda_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} = \\ = \frac{(-1)^j}{W} [W_{j0} \xi_0 - W_{j1} \xi_1 + \dots + (-1)^{m-1} W_{j, m-1} \xi_{m-1}]. \quad (5)$$

Здесь W есть детерминант Ван-дер-Монда от величин $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$, а W_{jk} — его минор, полученный вычеркиванием j -го столбца и k -й строки ($j, k = 0, 1, \dots, m-1$). В частности, для вектора

$$V_0 = (v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) = \sum_{j=0}^{m-1} v^j e_j$$

мы имеем

$$v^j = \frac{(-1)^j}{W} [W_{j0} v_0 - W_{j1} v_1 + \dots + (-1)^{m-1} W_{j, m-1} v_{m-1}]. \quad (6)$$

Аналогично для вектора

$$G(t) = (0, 0, \dots, g(t) = \sum_{j=0}^{m-1} g^j(t) e_j$$

получаем

$$g^j(t) = \frac{(-1)^{j+m-1}}{W} W_{j, m-1} g(t). \quad (7)$$

Проектируя равенство (7) п. 2 на векторы e_r, \dots, e_{m-1} и учитывая, что оператор e^{tP} переводит вектор e_s в $e^{t\lambda_s} e_s$, мы можем записать условие (10) п. 2 в эквивалентной форме:

$$v^s + \int_0^\infty e^{-\theta \lambda_s} g^s(\theta) d\theta = 0 \quad (s = r, \dots, m-1). \quad (8)$$

Подставляя в (8) выражения (6) и (7), получаем после сокращений

$$\frac{W_{s_0}}{W_{s, m-1}} v_0 - \frac{W_{s_1}}{W_{s, m-1}} v_1 + \dots + (-1)^{m-1} \frac{W_{s, m-1}}{W_{s, m-1}} v_{m-1} + (-1)^{m-1} \int_0^{\infty} e^{-\theta \lambda_s} g(\theta) d\theta = 0. \tag{9}$$

Условие (9) можно считать эквивалентным выражением (в исходной координатной форме) основного условия (11) п. 2 корректной разрешимости рассматриваемой задачи.

Положим

$$A_j = \int_0^t e^{-\theta \lambda_j} g(\theta) d\theta, \quad B_j = \int_t^{\infty} e^{-\theta \lambda_j} g(\theta) d\theta, \tag{10}$$

$$C_j = \int_0^{\infty} e^{-\theta \lambda_j} g(\theta) d\theta = A_j + B_j.$$

Формула (8), эквивалентная равенству (9), определяет величины v^r, \dots, v^{m-1} через величины C_r, \dots, C_{m-1} :

$$v^s = - \int_0^{\infty} e^{-\theta \lambda_s} g^s(\theta) d\theta = \frac{(-1)^{s+m}}{W} W_{s, m-1} \cdot C_s \quad (s \geq r). \tag{11}$$

Найдем величины v^0, \dots, v^{r-1} , для чего используем первые r уравнений системы (4) для $\xi = V_0$:

$$v_0 = v^0 + v^1 + \dots + v^{m-1},$$

$$v_1 = v^0 \lambda_0 + v^1 \lambda_1 + \dots + v^{m-1} \lambda_{m-1},$$

.

$$v_{r-1} = v^0 \lambda_0^{r-1} + v^1 \lambda_1^{r-1} + \dots + v^{m-1} \lambda_{m-1}^{r-1}.$$

Будем считать для простоты $v_0 = v_1 = \dots = v_{r-1} = 0$. Перенесем неизвестные в левую часть, а известные — в правую

$$v^0 + v^1 + \dots + v^{r-1} = - \sum_{s \geq r} v^s,$$

$$v^0 \lambda_0 + v^1 \lambda_1 + \dots + v^{r-1} \lambda_{r-1} = - \sum_{s \geq r} v^s \lambda_s,$$

.

$$v^0 \lambda_0^{r-1} + v^1 \lambda_1^{r-1} + \dots + v^{r-1} \lambda_{r-1}^{r-1} = - \sum_{s \geq r} v^s \lambda_s^{r-1}.$$

Разрешая систему по правилу Крамера, получаем

$$v^j = - \frac{1}{W_r} W_{r(s, j)} v^s,$$

где W_r — детерминант Ван-дер-Монда от величин $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$, а $W_{r(s,j)}$ получается из W_r заменой столбца из величин $1, \lambda_j, \dots, \lambda_j^{r-1}$ на столбец из величин $1, \lambda_s, \dots, \lambda_s^{r-1}$; таким образом, $W_{r(s,j)}$ есть детерминант Ван-дер-Монда от величин $\lambda_0, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_s, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{r-1}$. Подставляя в последнее равенство известные значения (11) величин v^r, \dots, v^{m-1} , находим:

$$v^j = \sum_{s \geq r} (-1)^{s+m-1} \frac{W_{s,m-1}}{W} \frac{W_{r(s,j)}}{W_r} C_s. \quad (12)$$

Преобразуем коэффициент при C_s . По формулам для определителей Ван-дер-Монда

$$\frac{W_{s,m-1}}{W} \cdot \frac{W_{r(s,j)}}{W_r} = \frac{\prod_{j < k}^{m-2} (\lambda_k - \lambda_j) \cdot \prod_{l < l}^{r-1} (\lambda_l - \lambda_l)}{\prod_{j < k}^{m-1} (\lambda_k - \lambda_j) \cdot \prod_{l < l}^{r-1} (\lambda_l - \lambda_l)}.$$

В числителе правой части в первом произведении не участвует λ_s , а во втором произведении λ_j заменено на λ_s . Производя сокращения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{W_{s,m-1}}{W} \cdot \frac{W_{r(s,j)}}{W_r} &= \frac{1}{(\lambda_s - \lambda_l) \dots (\lambda_s - \lambda_{s-1}) (\lambda_{s+1} - \lambda_s) \dots (\lambda_{m-1} - \lambda_s)} \times \\ &\times \frac{(\lambda_s - \lambda_l) \dots (\lambda_s - \lambda_{j-1}) (\lambda_{j+1} - \lambda_s) \dots (\lambda_{r-1} - \lambda_s)}{(\lambda_j - \lambda_l) \dots (\lambda_j - \lambda_{j-1}) (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \dots (\lambda_{r-1} - \lambda_j)} = \\ &= \frac{(-1)^{m-s-1}}{\prod_{k=r}^{m-1} (\lambda_s - \lambda_k) \prod_{l=1}^{r-1} (\lambda_j - \lambda_l) (\lambda_s - \lambda_j)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$v^j = \sum_{s=r}^{m-1} \frac{C_s}{\prod_{k=1}^{m-1} (\lambda_s - \lambda_k) \prod_{l=1}^{r-1} (\lambda_j - \lambda_l) (\lambda_s - \lambda_j)}. \quad (13)$$

Вернемся к формуле (11) п. 2, дающей решение нашей задачи при выполнении условия (10). Ее можно записать в форме

$$\begin{aligned} V(t) &= \sum_{j=0}^{m-1} v^j(t) e_j = \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} \left[v^j + \int_0^t e^{-\theta j} j g^j(\theta) d\theta \right] e^{t \lambda_j} e_j - \sum_{s=r}^{m-1} \left[\int_0^\infty e^{-\theta \lambda_s} g^s(\theta) d\theta \right] e^{t \lambda_s} e_s. \quad (14) \end{aligned}$$

Нас интересует основная компонента решения

$$\begin{aligned}
 v(t) &= v_0(t) = \sum_{j=0}^{r-1} v^j(t) = \\
 &= \sum_{j=0}^{r-1} \left[v^j + \int_0^t e^{-\theta \lambda_j} g^j(\theta) d\theta \right] e^{t \lambda_j} - \sum_{s=r}^{m-1} \left[\int_t^\infty e^{-\theta \lambda_s} g^s(\theta) d\theta \right] e^{t \lambda_s}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Подставляя сюда найденные значения v^j (13) и известные g^j , g^s (7), находим

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \sum_{j=0}^{r-1} e^{t \lambda_j} \left[\sum_{s=r}^{m-1} \frac{C_s}{\prod_{k=r}^{m-1} (\lambda_s - \lambda_k) \prod_{i=1}^{r-1} (\lambda_j - \lambda_s) (\lambda_s - \lambda_i)} + \right. \\
 &+ (-1)^{j+m-1} \frac{W_{j, m-1} A_j}{W} \left. \right] - \sum_{s=r}^{m-1} (-1)^{s+m-1} \frac{e^{t \lambda_s} W_{s, m-1} B_s}{W} = \\
 &= \sum_{j=0}^{r-1} e^{t \lambda_j} \left[\sum_{s=r}^{m-1} \frac{A_s}{\prod_{k=r}^{m-1} (\lambda_s - \lambda_k) \prod_{i=1}^{r-1} (\lambda_s - \lambda_i) (\lambda_s - \lambda_j)} + \right. \\
 &+ (-1)^{j+m-1} \frac{W_{j, m-1} A_j}{W} \left. \right] + \\
 &+ \sum_{s=r}^{m-1} B_s \left[\sum_{j=0}^{r-1} \frac{e^{t \lambda_j}}{\prod_{k=r}^{m-1} (\lambda_s - \lambda_k) \prod_{i=1}^{r-1} (\lambda_s - \lambda_i) (\lambda_s - \lambda_j)} + (-1)^{s+m} \frac{W_{s, m-1} e^{t \lambda_s}}{W} \right] = \\
 &= \int_0^t \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} e^{t \lambda_j} \left[\sum_{s=r}^{m-1} \frac{e^{-\theta \lambda_s}}{\prod_{k=r}^{m-1} (\lambda_s - \lambda_k) \prod_{i=1}^{r-1} (\lambda_j - \lambda_i) (\lambda_s - \lambda_j)} + \right. \right. \\
 &+ (-1)^{j+m-1} \frac{W_{j, m-1} e^{-\theta \lambda_j}}{W} \left. \left. \right] \right\} g(\theta) d\theta + \\
 &+ \int_t^\infty \left\{ \sum_{s=r}^{m-1} e^{-\theta \lambda_s} \left[\sum_{j=0}^{r-1} \frac{e^{t \lambda_j}}{\prod_{k=r}^{m-1} (\lambda_s - \lambda_k) \prod_{i=1}^{r-1} (\lambda_j - \lambda_i) (\lambda_s - \lambda_j)} + \right. \right. \\
 &+ (-1)^{s+m} \frac{W_{s, m-1} e^{t \lambda_s}}{W} \left. \left. \right] \right\} g(\theta) d\theta. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Фигурная скобка в первом интеграле приводится к виду

$$\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{\prod_{i=0}^{r-1} (\lambda_j - \lambda_i)} \left[\sum_{s=r}^{m-1} \frac{e^{t\lambda_j - \theta\lambda_s}}{\prod_{k=r}^{m-1} (\lambda_s - \lambda_k) (\lambda_s - \lambda_j)} + \frac{e^{t\lambda_j - \theta\lambda_j}}{\prod_{k=r}^{m-1} (\lambda_j - \lambda_k)} \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{\prod_{i=0}^{r-1} (\lambda_j - \lambda_i)} \sum_{s=j, r, \dots, m-1} \frac{e^{t\lambda_j - \theta\lambda_s}}{\prod_{k=j, r, \dots, m-1} (\lambda_s - \lambda_k)}. \quad (17)$$

Аналогично вторая фигурная скобка в (16) преобразуется к виду

$$\sum_{s=r}^{m-1} \frac{1}{\prod_{k=r}^{m-1} (\lambda_s - \lambda_k)} \left[\sum_{j=0}^{r-1} \frac{e^{t\lambda_j - \theta\lambda_s}}{\prod_{i=1}^{r-1} (\lambda_j - \lambda_i) (\lambda_s - \lambda_j)} - \frac{e^{t\lambda_s - \theta\lambda_s}}{\prod_{i=1}^{r-1} (\lambda_s - \lambda_i)} \right] =$$

$$= - \sum_{s=r}^{m-1} \frac{1}{\prod_{k=r}^{m-1} (\lambda_s - \lambda_k)} \sum_{j=0, \dots, r-1, s} \frac{e^{t\lambda_j - \theta\lambda_s}}{\prod_{i=0, \dots, r-1, s} (\lambda_j - \lambda_i)}. \quad (18)$$

Выражение (17) есть двойная разделенная разность (см. § 24, п. 5) вида $F(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}; \lambda_r, \dots, \lambda_{m-1})$ для функции $F(z, \zeta) = e^{tz - \theta\zeta}$. Поэтому, в силу оценки (12) п. 5 § 24, мы получаем

$$|F(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}; \lambda_r, \dots, \lambda_{m-1})| \leq Ct^{m-1} |e^{tz_0 - \theta\zeta_0}|, \quad (19)$$

где z_0 — некоторая точка многоугольника, натянутого на точки $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$, а ζ_0 — некоторая точка многоугольника, натянутого на точки $\lambda_0, \lambda_r, \dots, \lambda_{m-1}$. Так как при этом все $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ ($j \leq r-1$), то $\operatorname{Re} z_0 \leq 0$, а так как $\operatorname{Re} \lambda_s \geq 0$ при $s \geq r$, то $\operatorname{Re} \zeta_0 \geq \operatorname{Re} z_0$. Поэтому мы можем написать при $0 \leq \theta \leq t$

$$\operatorname{Re}(tz_0 - \theta\zeta_0) = t \operatorname{Re} z_0 - \theta \operatorname{Re} \zeta_0 = (t - \theta) \operatorname{Re} z_0 + \theta (\operatorname{Re} z_0 - \operatorname{Re} \zeta_0) \leq 0.$$

Окончательно для рассматриваемой двойной разделенной разности (17) мы получаем оценку

$$\left| \sum_{j=1}^r \frac{1}{\prod_{k=1}^r (\lambda_j - \lambda_k)} \sum_{s=j, r, \dots, m-1} \frac{e^{tz_j - \theta z_s}}{\prod_{i=j, r, \dots, m-1} (\lambda_s - \lambda_i)} \right| \leq Ct^{m-1}. \quad (20)$$

Выражение (18) есть двойная разделенная разность вида

$$F(\lambda_r, \dots, \lambda_{m-1}; \lambda_0, \dots, \lambda_{r-1})$$

для функции $F(z, \zeta) = e^{t\zeta - \theta z}$.

Поэтому, в силу той же оценки (12) п. 5 § 24,

$$|F(\lambda_r, \dots, \lambda_{m-1}; \lambda_0, \dots, \lambda_{r-1})| \leq C\theta^{m-1} |e^{t\zeta_0 - \theta z_0}|, \quad (21)$$

где z_0 — некоторая точка выпуклого многоугольника, натянутого на точки $\lambda_r, \dots, \lambda_{m-1}$, а ζ_0 — некоторая точка выпуклого многоугольника, натянутого на точки $z_0, \lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$.

Поскольку $\operatorname{Re} \lambda_s > 0$ при $s \geq r$, мы имеем $\operatorname{Re} z_0 \geq \operatorname{Re} \lambda_r$, а так как $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ при $j < r$, то $\operatorname{Re} \zeta_0 \leq \operatorname{Re} z_0$. Поэтому при $0 \leq t \leq \theta$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(t\zeta_0 - \theta z_0) &= t \operatorname{Re} \zeta_0 - \theta \operatorname{Re} z_0 = \\ &= (t - \theta) \operatorname{Re} z_0 + t (\operatorname{Re} \zeta_0 - \operatorname{Re} z_0) \leq (t - \theta) \operatorname{Re} \lambda_r. \end{aligned}$$

Таким образом, вторая фигурная скобка в (16) по модулю не превосходит

$$C\theta^{m-1} e^{(t-\theta) \operatorname{Re} \lambda_r}.$$

В результате мы получаем неравенство

$$\begin{aligned} |v(t)| &\leq Ct^{m-1} \int_0^t |g(\theta)| d\theta + C \int_t^\infty \theta^{m-1} e^{(t-\theta) \operatorname{Re} \lambda_r} |g(\theta)| d\theta = \\ &= Ct^{m-1} \int_0^t |g(\theta)| d\theta + C \int_t^\infty (\theta + t)^{m-1} e^{-\theta \operatorname{Re} \lambda_r} |g(\theta + t)| d\theta \quad (22) \end{aligned}$$

с постоянными, зависящими только от r и m .

4. Теперь мы можем рассмотреть и уравнение

$$\frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} = f(t, x). \quad (1)$$

Для решения $v(t, \sigma)$ двойственного уравнения

$$\frac{d^m v(t, \sigma)}{dt^m} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma) \frac{d^k v(t, \sigma)}{dt^k} = g(t, \sigma) \quad (2)$$

с условиями

$$v(0, \sigma) = \dots = \frac{d^{r-1} v(0, \sigma)}{dt^{r-1}} = 0$$

мы можем написать оценку (22) п. 3, введя параметр σ :

$$\begin{aligned} |v(t, \sigma)| &\leq Ct^{m-1} \int_0^t |g(\theta, \sigma)| d\theta + \\ &+ C \int_t^\infty (\theta + t)^{m-1} e^{-\theta \operatorname{Re} \lambda_r(\sigma)} |g(\theta + t, \sigma)| d\theta. \quad (3) \end{aligned}$$

Тот факт, что $g(t, \sigma)$ принадлежит H и возрастает в H не быстрее некоторой степени t , можно записать неравенством

$$|g(t, \sigma)| \leq c_0(t+1)^h(1+\sigma^2)^q \psi(\sigma), \quad \psi(\sigma) \in L_2. \quad (4)$$

Вставляя (4) в (3), получаем

$$|v(t, \sigma)| \leq c_1 t^{m-1} (1+\sigma^2)^q \psi(\sigma) (1+t)^{h+1} + \\ + \sum_{k=0}^{m-1} C_k t^k \int_0^\infty \theta^k e^{-\theta \operatorname{Re} \lambda_r(\sigma)} |g(\theta+t, \sigma)| d\theta.$$

В силу условия (10) п. 1, результат представляет собою функцию, принадлежащую при каждом $t \geq 0$ пространству H и возрастающую в H при $t \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени t , что и требовалось.

Рассмотрим теперь общий случай, когда начальные функции $v_0(\sigma), \dots, v_{r-1}(\sigma)$ — произвольные функции, принадлежащие пространству H .

По доказанному в § 26, п. 2, существует решение $w(t, \sigma)$ уравнения

$$\frac{d^m w(t, \sigma)}{dt^m} - \sum_{k=0}^{m-1} p_k(\sigma) \frac{d^k w(t, \sigma)}{dt^k} = 0,$$

принадлежащее при каждом $t \geq 0$ пространству H , возрастающее в H не быстрее степени t и удовлетворяющее начальным условиям

$$w(0, \sigma) = v_0(\sigma), \dots, \frac{d^{r-1} w(0, \sigma)}{dt^{r-1}} = v_{r-1}(\sigma).$$

Обозначим через $V(t, \sigma)$ решение уравнения (1), построенное нами выше и удовлетворяющее начальным условиям

$$V_0(0, \sigma) = \dots = V_{r-1}(0, \sigma) = 0.$$

Функция

$$v(t, \sigma) = V(t, \sigma) + w(t, \sigma)$$

есть снова решение уравнения (1), принадлежащее при каждом $t \geq 0$ пространству H и возрастающее в H не быстрее степени t . Оно удовлетворяет начальным условиям

$$v(0, \sigma) = v_0(\sigma), \dots, \frac{d^{r-1} v(0, \sigma)}{dt^{r-1}} = v_{r-1}(\sigma).$$

Таким образом, искомое решение существует, и наша теорема доказана полностью.

Замечание. Как и в § 26, п. 5, условие задачи может быть видоизменено: можно разыскивать решения в классе функций $u(t, x) \in \mathcal{H}$, растущих при $t \rightarrow \infty$ не быстрее экспоненциально-

степенной функции вида $t^h e^{at}$ с фиксированным a . Доказанная нами теорема полностью сохраняется и для этого случая, с той разницей, что число $r = r(\sigma)$ нужно будет определять из условия

$$\operatorname{Re} \lambda_0(\sigma) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_{r-1}(\sigma) \leq a < \operatorname{Re} \lambda_r(\sigma) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_{m-1}(\sigma).$$

Рассмотрим, например, уравнение (1), корректное по Петровскому в обычном смысле; это означает, что вещественные части всех характеристических корней при всех σ остаются ограниченными некоторой фиксированной постоянной a . В силу нашей теоремы, задача Коши для этого уравнения корректна при любых начальных функциях $u_0(x), \dots, u_{m-1}(x)$ в том смысле, что решение существует в пространстве \mathcal{H} , возрастает в \mathcal{H} при $t \rightarrow \infty$ не быстрее $t^h e^{at}$, является в этом классе единственным решением и непрерывно зависит от начальных функций.

§ 31. Смешанные задачи

1. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые корректные смешанные задачи в области $t \geq 0, x \geq 0$ для уравнения вида

$$\frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k}. \quad (1)$$

Задача, корректность которой мы будем выяснять, состоит в расширении на обобщенные функции следующей классической задачи. Требуется найти решение уравнения (1) при заданных граничных функциях

$$\omega_0(t) = u(t, 0), \quad \omega_1(t) = \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x}, \quad \dots, \quad \omega_{p-1}(t) = \frac{\partial^{p-1} u(t, 0)}{\partial x^{p-1}} \quad (2)$$

и заданных начальных функциях

$$u_0(x) = u(0, x), \quad u_1(x) = \frac{\partial u(0, x)}{\partial t}, \quad \dots, \quad u_{r-1}(x) = \frac{\partial^{r-1} u(0, x)}{\partial t^{r-1}}. \quad (3)$$

Число первых p есть порядок уравнения (1) по $\frac{\partial}{\partial x}$, число последних r будет указано ниже.

Граничные задачи для обыкновенных уравнений с обобщенными функциями мы рассматривали в гл. 1, § 5, п. 6. Напомним результат. Обыкновенному уравнению (в обычных функциях)

$$\sum_{j=0}^p a_j y^{(j)}(x) = f(x) \quad (x \geq 0) \quad (4)$$

с граничными условиями

$$y(0) = y_0, \quad \dots, \quad y^{(p-1)}(0) = y_{p-1} \quad (5)$$

ставится в соответствие уравнение в обобщенных функциях

$$\sum_{j=0}^p a_j [y^j(x) - \sum_{i=0}^{j-1} y_i \delta^{(j-1-i)}(x)] = F(x), \quad (6)$$

где $F(x)$ равна $f(x)$ при $x > 0$ и 0 при $x < 0$.

Всякое решение уравнения (4) с условиями (5), рассматриваемое как обобщенная функция, равная 0 при $x < 0$, есть решение уравнения (6). Обратное, всякое решение уравнения (6), равное 0 при $x < 0$, есть обычная функция, являющаяся при $x > 0$ решением уравнения (4) и удовлетворяющая условиям (5).

В случае уравнения (1), содержащего, кроме того, производные по t , будем поступать аналогичным образом. Перепишем уравнение (1) в форме

$$\frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(t \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \sum_{j=0}^p Q_j \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial x^j} \quad (7)$$

и затем каждую из производных по x в обычном смысле заменим на производную по x в смысле пространства K' с исправляющим слагаемым, составленным из δ -функций и их производных аналогично (6).

В результате мы получаем уравнение

$$\frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^m} = \sum_{j=0}^p Q_j \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial^j u(t, x)}{\partial x^j} - \sum_{i=0}^{j-1} \omega_i(t) \delta^{(j-1-i)}(x) \right]. \quad (8)$$

Решение этого уравнения, равное 0 при $x < 0$, мы и будем называть решением задачи (1) — (2).

В случае обыкновенного уравнения с обычной функцией мы установили, что всякое решение уравнения (6) есть в действительности обычная функция (с тем или иным скачком при $x = 0$). Уравнение в частных производных (8), вообще говоря, имеет решения и более сложной природы. Тем не менее переход от (1) — (2) к (8) остается естественным в том смысле, что если решение $u(t, x)$ уравнения (8), равное нулю при $x < 0$, есть обычная функция и при $x \geq 0$ имеющая достаточное число непрерывных производных, то $u(t, x)$ является и решением задачи (1) — (2) в обычном смысле, и обратно.

Доказательство проведем для более общего случая: вместо уравнения (1) рассмотрим систему уравнений 1-го порядка по x :

$$A \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u(t, x) = B \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, \quad (9)$$

а вместо уравнения (8) — систему вида

$$A \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u(t, x) = B \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - u(t, 0) \delta(x) \right]. \quad (10)$$

В качестве $u(t, x)$ возьмем обобщенную вектор-функцию, равную 0 при $x < 0$ и решению $u(t, x)$ системы (9) при $x > 0$. Обозначим через $u_1(t, x)$ обобщенную вектор-функцию, равную 0 при $x < 0$ и $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$ при $x > 0$. Уравнение (9) можно записать в таком виде:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u(t, x) = B\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u_1(t, x). \quad (11)$$

Функция $u_1(t, x)$ не есть производная (в K') функции $u(t, x)$; так же как и в § 5 гл. 1, имеет место равенство

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = u_1(t, x) + u(t, 0)\delta(x). \quad (12)$$

Подставляя $u_1(t, x)$ из (12) в (11), получаем (10), что и требуется. Рассуждая в обратном порядке, получим обратное утверждение.

Теперь уточним предположения относительно природы решения $u(t, x)$.

Искомая функция $u(t, x)$ предполагается при каждом $t \geq 0$ принадлежащей к пространству \mathcal{H}_+^β всех функций $u(x)$, которые, будучи умножены на $e^{-\beta x}$, квадратично интегрируемы при $x \geq 0$, а также всех производных таких функций (в пространстве K'). Число β зависит от уравнения (1) и будет указано ниже. Через H_+^β обозначим совокупность всех преобразований Фурье функций пространства \mathcal{H}_+^β . В п. 3 будет показано, что класс H_+^β состоит из (обычных) функций $v(s)$, аналитических в полуплоскости $\text{Im } s > \beta$ и после деления на некоторую степень s интегрируемых в квадрате по каждой прямой $\text{Im } s = \tau$, причем интегралы

$$\|v(s)\|_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|v(s)|^2}{|s|^{2q}} d\sigma$$

равномерно (для данной $v(s)$) ограничены по τ . Заметим, что этот класс обладает важным свойством монотонности; если $v_0(s) \in H_+^\beta$ и $|v_1(s)| \leq C|v_0(s)|$, причем $v_1(s)$ — аналитическая функция, то также $v_1(s) \in H_+^\beta$. Поэтому в классе H_+^β допустимо умножение на аналитические функции степенного роста при $|s| \rightarrow \infty$.

Как было сказано, искомое решение $u(t, x)$ должно быть элементом пространства \mathcal{H}_+^β , зависящим от t , как от параметра.

При $t=0$ обобщенная функция $u(t, x)$ и ее производные по t до порядка $r-1$ должны обращаться в заданные обобщенные же функции $u_0(x), \dots, u_{r-1}(x)$.

Укажем теперь допустимое поведение обобщенных функций $u(t, x)$ при $t \rightarrow \infty$. Мы будем предполагать, что $u(t, x)$ имеет в простран-

стве \mathcal{H}_+^β рост не выше степенного, т. е. что при некоторых q и h выполняется неравенство

$$\|u(t, x)\|_{\beta, q}^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|v(t, s)|^2}{|s|^{2q}} ds \leq Ct^h. \quad (13)$$

Число β и число r , характеризующее количество начальных условий, определяются из следующих соображений. Рассмотрим уравнение

$$\lambda^m = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(s) \lambda^k, \quad (14)$$

получающееся из уравнения (1) заменой $\frac{\partial}{\partial t}$ на λ , а $i \frac{\partial}{\partial x}$ на s . При каждом комплексном s уравнение (14) имеет m комплексных корней $\lambda_0(s), \dots, \lambda_{m-1}(s)$. Эти корни — аналитические функции от s , за исключением конечного числа особых точек (точек ветвления алгебраической функции, определяемой уравнением (14)). Мы будем эти корни рассматривать в полуплоскости $\text{Im } s > \beta$, где β выбрано так, чтобы все особые точки корней лежали в полуплоскости $\text{Im } s < \beta$. Будем предполагать также, что среди корней $\lambda_0(s), \dots, \lambda_{m-1}(s)$ нет тождественно совпадающих, тогда β можно выбрать так, чтобы в полуплоскости $\text{Im } s > \beta$ все корни были бы всюду различны между собой. Тем самым в указанной области функции $\lambda_0(s), \dots, \lambda_{m-1}(s)$ являются однозначными аналитическими функциями. Разобьем все эти корни на две группы по следующему правилу, в первую группу входят корни $\lambda_0(s), \dots, \lambda_{r-1}(s)$, у которых всюду в полуплоскости $\text{Im } s \geq \beta$ вещественная часть остается неположительной, во вторую группу $\lambda_r(s), \dots, \lambda_{m-1}(s)$ входят те корни, которые хотя бы в одной точке полуплоскости $\text{Im } s > \beta$ имеют положительную вещественную часть. Этим определено число r .

Мы предположим далее, что функции

$$\omega_0(t) = u(t, 0), \quad \omega_1(t) = \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x}, \quad \dots, \quad \omega_{p-1}(t) = \frac{\partial^{p-1} u(t, 0)}{\partial x^{p-1}}$$

непрерывны, дифференцируемы по t $m-1$ раз (т. е. столько раз, сколько требуется формулой (8)), и возрастают при $t \rightarrow \infty$ вместе с соответствующими производными не быстрее, чем Ct^h с некоторым h . Составим функцию

$$g(t, s) = \sum_{j=0}^p Q_j \left(-\frac{\partial}{\partial t} \right) [\omega_{j-1}(t) - ts\omega_{j-2}(t) + \dots + (-ts)^{j-1} \omega_0(t)]. \quad (15)$$

В силу указанных условий на функции $w_j(t)$, при каждом s таком, что $\text{Im } s > \beta$, существуют интегралы

$$\Phi_{k,q}(t, s) = \int_0^{\infty} e^{-\theta \lambda_q(s)} \theta^k |g(s, \theta + t)| d\theta \quad (k \geq m-2), \quad (16)$$

где $\text{Re } \lambda_q(s) > 0$. Мы будем предполагать, что всякая аналитическая функция $v(t, s)$, удовлетворяющая при $\text{Im } s > \beta$ неравенству (хотя бы для одного q и одного k)

$$|v(t, s)| \leq \Phi_{k,q}(t, s), \quad (17)$$

принадлежит к классу H_+^{β} и возрастает в нем не быстрее степени t . Это условие, в конечном счете, есть условие на функции $w_0(t), \dots, w_{p-1}(t)$; оно выполняется, например, если предположить, что существуют все интегралы

$$\int_0^{\infty} \theta^k |w_j^{(l)}(\theta)| d\theta \quad (k \leq m-2, l \leq m-1). \quad (18)$$

Будет доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть дано уравнение (1) с условиями (2) — (3), причем числа β и r определены, как выше, и заданные функции $w_0(t), \dots, w_{p-1}(t)$ удовлетворяют указанным выше условиям. Для существования (и единственности) решения задачи (1) — (2) — (3) в классе \mathcal{H}_+^{β} необходимо и достаточно, чтобы функции

$$G_v(s) = \int_0^{\infty} e^{-\theta \lambda_q(s)} g(\theta, s) d\theta \quad (q = r, \dots, m-1), \quad (19)$$

определенные первоначально в области $\text{Re } \lambda_q(s) > 0, \text{Im } s > \beta$, допускали аналитическое продолжение на всю полуплоскость $\text{Im } s > \beta$ до функций из класса H_+^{β} .

2. Рассмотрим вначале несколько примеров.

а) Предположим, что все характеристические корни $\lambda_0(s), \dots, \lambda_{m-1}(s)$ имеют в полуплоскости $\text{Im } s > \beta$ неположительную вещественную часть. Тогда $r = m$ и корректная задача состоит в задании всех функций $u_0(x), \dots, u_{m-1}(x), w_0(t), \dots, w_{p-1}(t)$. Простейшим примером, в котором реализуется указанная возможность, служит уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

с общим решением $u = f(t - x)$, линии уровня которого — прямые, параллельные главной биссектрисе. Очевидно, что при произвольном задании функций $u(0, x)$ и $w(t, 0)$ получается корректная задача. В свете нашей теории имеем $\lambda = is$, и область $\operatorname{Re} \lambda < 0$ совпадает с полуплоскостью $\operatorname{Im} s > 0$, так что $\lambda = is$ относится к первой группе корней. Поэтому в корректной задаче фигурируют $u_0(x) = u(0, x)$ и $w_0(t) = u(t, 0)$.

Несколько более общий случай — однородное уравнение

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{\partial^m u(t, x)}{\partial t^k \partial x^{m-k}} = 0, \quad (2)$$

у которого все корни уравнения

$$\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k = 0 \quad (3)$$

вещественны и неотрицательны. Наконец в левой части уравнения вида (2) можно добавить произвольную группу младших членов.

б) Предположим, что характеристические корни $\lambda_0(s), \dots, \lambda_{r-1}(s)$ имеют в полуплоскости $\operatorname{Im} s > \beta$ неположительную вещественную часть, а остальные корни $\lambda_r(s), \dots, \lambda_{m-1}(s)$ всюду в этой полуплоскости имеют положительную вещественную часть. Тогда условие аналитической продолжимости интегралов (19) в условии теоремы отпадает, и корректная задача состоит в задании функций $u_0(x), \dots, u_{r-1}(x), w_0(t), \dots, w_{m-1}(t)$. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

с общим решением $u = f(t + x)$, линии уровня которого параллельны побочной биссектрисе. Очевидно, что для задания решения достаточно иметь только $w_0(t)$. В свете нашей теории имеем $\lambda = -is$, область $\operatorname{Re} \lambda < 0$ совпадает с полуплоскостью $\operatorname{Im} s < 0$, так что $\lambda = -is$ относится ко второй группе корней. Поэтому в корректной задаче фигурирует только $w_0(t)$.

Вторым примером является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Характеристические корни удовлетворяют уравнению $\lambda^2 = -s^2$, $\lambda_{1,2} = \pm is$. Один из этих корней в полуплоскости $\operatorname{Im} s > 0$ имеет отрицательную вещественную часть, другой — положительную. В силу нашей общей теории корректная задача состоит в задании функций $w_0(t), w_1(t)$ и $u_0(x)$; это — классическая смешанная задача для волнового уравнения.

Вообще, если каждый из корней $\lambda_j(s)$ сохраняет знак в полуплоскости $\text{Im } s \geq \beta$, уравнение (1) называется корректным по Петровскому относительно $\frac{\partial}{\partial x}$. Алгебраическая функция $\lambda = \lambda(s)$ отображает полуплоскость $\text{Im } s \geq \beta$ одними своими листами в полуплоскость $\text{Re } \lambda \geq 0$, другими — в полуплоскость $\text{Re } \lambda \leq 0$; но это означает, что обратная функция $s = s(\lambda)$ всеми своими ветвями отображает прямую $\text{Re } \lambda = 0$ в полуплоскость $\text{Im } s \leq \beta$. Заменяя в уравнении (1) $\frac{\partial}{\partial x}$ на $\frac{\partial}{\partial t'}$, а $\frac{\partial}{\partial t}$ на $\frac{\partial}{\partial x'}$ и соответственно s на $-i\lambda'$, λ на is' , мы получаем условие корректности в более привычной форме (ср. § 26): функция $\lambda' = \lambda'(s')$ при $\text{Im } s' = 0$ принимает значения, вещественные части которых $\text{Re } \lambda'(s')$ ограничены сверху (числом β). Уравнения этого типа рассматривались С. Л. Соболевым. К ним относятся, в частности, параболические и гиперболические уравнения, например, однородное уравнение вида (2), у которого все корни уравнения (3) вещественны.

в) Несколько более сложный характер имеют примеры, в которых вещественные части корней $\lambda_1(s), \dots, \lambda_{m-1}(s)$ не сохраняют знака в полуплоскости $\text{Im } s \geq \beta$. Сюда относится обобщенное уравнение Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a i \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{Im } a = 0.$$

Очевидно, решением этого уравнения при $a = 1$ является функция $u(t, x)$, аналитическая по аргументу $t + ix$. Задавать можно $w_0(t)$ уже далеко не произвольно, а так, чтобы $w_0(t)$ аналитически продолжалась в четверть плоскости $t \geq 0, x \geq 0$. В свете нашей теории имеем $\lambda = s$, область $\text{Re } \lambda > 0$ есть полуплоскость $\text{Re } s > 0$. Корректная задача получается при задании функции $w_0(t)$, удовлетворяющей условию: интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-ts} w_0(t) dt$$

с полуплоскости $\text{Re } s > 0$, где он определен а priori, аналитически продолжается в область $\text{Im } s > 0$ до функции класса \mathcal{H}_+^{β} .

При $a = -1$ получается уравнение антианалитических функций

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -i \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Корректная задача состоит, в задании функции $w_0(t)$, для которой интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{ts} w_0(t) dt$$

аналитически продолжается с полуплоскости $\operatorname{Re} s < 0$, где он определен а priori, в область $\operatorname{Im} s > 0$ до функции класса H_+^B .

Рассмотрим, далее, уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Характеристические корни удовлетворяют уравнению $\lambda^2 = s^2$, $\lambda = \pm s$. Корректная задача: заданы $\omega_0(t)$ и $\omega_1(t)$, причем должны быть удовлетворены следующие условия: интегралы

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ts} [\omega_1(t) - ts\omega_0(t)] dt, \\ \int_0^{\infty} e^{ts} [\omega_1(t) - ts\omega_0(t)] dt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

должны аналитически продолжаться со своей области определения ($\operatorname{Re} s > 0$ в первом случае и $\operatorname{Re} s < 0$ во втором) в полуплоскость $\operatorname{Im} s > 0$ до функций пространства H_+^0 . Поскольку

$$\left. \begin{aligned} s \int_0^{\infty} e^{-ts} \omega_0(t) dt &= \int_0^{\infty} e^{-ts} \omega_0'(t) dt - \omega_0(0), \\ s \int_0^{\infty} e^{ts} \omega_0(t) dt &= - \int_0^{\infty} e^{ts} \omega_0'(t) dt + \omega_0(0), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

мы можем переписать интегралы (4) в форме

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ts} [\omega_1(t) - i\omega_0'(t)] dt + i\omega_0(0), \\ \int_0^{\infty} e^{ts} [\omega_1(t) + i\omega_0'(t)] dt - i\omega_0(0) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и в свете предыдущего примера высказать условие корректности в следующей любопытной форме: функция $\omega_1(t) - i\omega_0'(t)$ должна продолжаться в область $t > 0$, $x > 0$, как аналитическая функция, а функция $\omega_1(t) + i\omega_0'(t)$ должна продолжаться в эту же область, как антианалитическая функция.

Аналогично для любого однородного уравнения

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{\partial^m u}{\partial t^{m-k} \partial x^k} = 0$$

с характеристическими корнями $\lambda_j = \mu_j s$, где μ_j — не чисто мнимые числа, мы получаем следующее условие корректности: интегралы

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{\mu_k s \theta} g(s, \theta) d\theta = \\ & = \int_0^{\infty} e^{\mu_k s \theta} \sum_{j=1}^m a_j \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) [\omega_{j-1}(\theta) - t s \omega_{j-2}(\theta) + \dots - (-ts)^{j-1} \omega_0(\theta)] d\theta \end{aligned} \quad (7)$$

должны аналитически продолжаться со своей области определения ($\operatorname{Re} \mu_k s < 0$) в полуплоскость $\operatorname{Im} s > 0$ до функций пространства H_+^0 . Интеграл (7) можно переписать в форме

$$\int_0^{\infty} e^{\mu_k s \theta} \sum_{j=0}^m a_j \frac{\partial^{m-j}}{\partial \theta^{m-j}} \left[\omega_{j-1}(\theta) - \dots - \frac{1}{\mu_k^{j-1}} \omega_0^{(j-1)}(\theta) \right] d\theta + C$$

и высказать условие корректности следующим образом: функция

$$\sum_{j=0}^m a_j \frac{\partial^{m-j}}{\partial \theta^{m-j}} \left[\omega_{j-1}(\theta) - \dots - \frac{1}{\mu_k^{j-1}} \omega_0^{(j-1)}(\theta) \right]$$

должна продолжаться с полюси $t > 0$ в четверть плоскости $t > 0$, $x > 0$, как μ_k -аналитическая функция, т. е. как решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + i \mu_k \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

3. Обозначим через $\mathcal{H}_+^{\beta, 0}$ пространство всех (комплексных) функций $u(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\infty} |u(x)|^2 e^{-2\beta x} dx < \infty. \quad (1)$$

Каждая функция $u(x) \in \mathcal{H}_+^{\beta, 0}$ обладает преобразованием Фурье

$$v(s) = \int_0^{\infty} u(x) e^{i x s} dx, \quad (2)$$

существующим в смысле среднего квадратичного при всех комплексных $s = \sigma + i\tau$ с $\tau \geq \beta$; при этом, по теореме Планшереля,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(\sigma + i\tau)|^2 d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 e^{-2\tau x} dx. \quad (3)$$

Получающиеся функции $v(s)$ допускают следующее внутреннее описание: *это те функции, аналитические при $\tau \geq \beta$, для которых*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(\sigma + i\tau)|^2 d\sigma$$

существует при каждом τ и остается ограниченным во всей области $\beta \leq \tau < \infty$ (лемма Пэли и Винера). Необходимость этого условия следует из равенства (3), поскольку

$$\int_0^{\infty} |u(x)|^2 e^{-2\tau x} dx \leq \int_0^{\infty} |u(x)|^2 e^{-2\beta x} dx.$$

Для доказательства достаточности рассмотрим интеграл

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\sigma + i\tau) e^{-i(\sigma + i\tau)x} d\sigma,$$

представляющий собою обратное преобразование Фурье функции $v(\sigma + i\tau) e^{\tau x}$. Мы имеем

$$u(x) e^{-\tau x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\sigma + i\tau) e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

и по теореме Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 e^{-2\tau x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |v(\sigma + i\tau)|^2 d\sigma. \quad (4)$$

Мы утверждаем, что $u(x) = 0$ почти всюду при $x < 0$. Действительно если $u(x) \neq 0$ при $x < 0$ на множестве положительной меры, мы получим, что при $\tau \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^0 |u(x)|^2 e^{-2\tau x} dx \rightarrow \infty,$$

что невозможно, поскольку правая часть равенства (4) по условию ограничена. Итак, $u(x) = 0$ при $x < 0$ и имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} |u(x)|^2 e^{-2\tau x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |v(\sigma + i\tau)|^2 d\sigma \leq C$$

при всех $\tau \geq \beta$; устремляя τ к β , получаем

$$\int_0^{\infty} |u(x)|^2 e^{-2\beta x} dx \leq C.$$

Таким образом, $u(x)$ входит в класс $\mathcal{H}_+^{\beta, 0}$. Исходная функция $v(s)$ является преобразованием Фурье $u(x)$, в силу теоремы единственности. Итак, лемма Пэли и Винера доказана.

Через $\mathcal{H}_+^{\beta, q}$ мы обозначим совокупность тех (обобщенных) функций $u(x)$, которые получаются применением к функциям из $\mathcal{H}_+^{\beta, 0}$ дифференциальных операций порядка $\leq q$:

$$u(x) = \sum_{k=0}^q \frac{d^k u_k(x)}{dx^k}, \quad u_k(x) \in \mathcal{H}_+^{\beta, 0}.$$

Поскольку дифференцирование обобщенных функций переходит после преобразования Фурье в умножение на $-is$, класс $H_+^{\beta, q}$ преобразований Фурье функций $u(x) \in \mathcal{H}_+^{\beta, q}$ состоит из функций $v(s)$, получающихся из функций класса $H_+^{\beta, 0}$ умножением на многочлены степени $\leq q$.

Очевидно, что в класс $H_+^{\beta} = \bigcup_{q=0}^{\infty} H_+^{\beta, q}$ входит любая аналитическая при $\text{Im } s > \beta$ функция $v(s)$, возрастающая при $|s| \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени s , поскольку при делении такой функции на достаточно большую степень s мы получим результат, заведомо принадлежащий классу $H_+^{\beta, 0}$. Далее, ясно, что класс H_+^{β} обладает указанным в п. 1 свойством монотонности: если $v_0(s) \in H_+^{\beta}$ и аналитическая функция $v_1(s)$ по модулю не превосходит $|v_0(s)|$, то также $v_1(s) \in H_+^{\beta}$. Отсюда следует, что в классе H_+^{β} допустимо умножение на аналитические функции, возрастающие при $|s| \rightarrow \infty$ не быстрее степени s .

4. В этом и следующем пунктах будет дано доказательство необходимости условий теоремы 1. Здесь будет удобнее рассмотреть вместо одного уравнения (1 п. 1) систему уравнений 1-го порядка по t , в векторной записи имеющую вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial t} = P \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{u}(x, t), \quad (x, t) \geq 0, \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{u}(x, t)$ — m -компонентная вектор-функция, $P \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ — квадратная $m \times m$ -матрица, элементы которой — многочлены от оператора $i \frac{\partial}{\partial x}$ наибольшей степени p .

К уравнению (1) добавляется начальное (векторное) условие

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \quad (2)$$

и граничные (векторные) условия

$$\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{w}_0(t), \dots, \frac{\partial^{p-1} \mathbf{u}(0, t)}{\partial x^{p-1}} = \mathbf{w}_{p-1}(t). \quad (3)$$

Для перехода к обобщенным функциям, как в п. 1, используем формулы (7) — (8) п. 1, где, однако, вместо скалярных выражений будем понимать соответствующие m -компонентные векторные выражения. Запишем систему (1) в форме

$$\frac{d\mathbf{u}(x, t)}{dt} = \sum_{k=0}^p a_k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)^k \mathbf{u}(x, t), \quad (4)$$

где a_k — числовые матрицы. Тогда, по формулам (8) п. 1, в обобщенных вектор-функциях система (4) перейдет в систему:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^p a_k \left[\left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)^k \mathbf{u}(x, t) - \mathbf{w}_{k-1}(t) \delta(x) - \dots \right. \\ \left. \dots - \mathbf{w}_0(t) \delta^{(k-1)}(x) \right].$$

Будем считать, что все рассматриваемые обобщенные функции, как и выше, принадлежат к пространству \mathcal{H}_+^B . После преобразования Фурье мы будем иметь

$$\frac{dv(s, t)}{dt} = P(s) \mathbf{v}(s, t) + \mathbf{g}(s, t), \quad (5)$$

где вектор-функция $\mathbf{g}(s, t)$ определяется формулой

$$\mathbf{g}(s, t) = \sum_{k=0}^p [a_k \mathbf{w}_{k-1}(t) - t s \mathbf{w}_{k-2}(t) + \dots + (-is)^{k-1} \mathbf{w}_0(t)], \quad (6)$$

а составляющие вектор-функции $\mathbf{v}(s, t)$ входят в пространство H_+^B . Начальное условие (2) после применения преобразования Фурье переходит в начальное условие

$$\mathbf{v}(s, 0) = \mathbf{v}_0(s).$$

При данном s решение задачи (5) — (6) имеет вид

$$\mathbf{v}(s, t) = e^{tP(s)} \mathbf{v}_0(s) + \int_0^t e^{(t-\theta)P(s)} \mathbf{g}(s, \theta) d\theta. \quad (7)$$

Векторы $v(s, t)$, $v_0(s)$, $g(s, t)$ при данном s определены в m -мерном комплексном пространстве $R = R_s$, в которое мы введем обычным образом эвклидову метрику, так что для вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$

$$|\xi|_s^2 = \sum_{j=1}^m |\xi_j|^2.$$

При данном s линейный оператор в пространстве R_s , заданный матрицей $P(s)$, имеет некоторое число $\rho = \rho(s)$ характеристических корней с неположительной вещественной частью ($0 \leq \rho \leq m$) и $m - \rho$ корней с положительной вещественной частью.

Соответственно, пространство R_s можно разложить в прямую сумму инвариантных подпространств относительно оператора $P(s)$, которые мы обозначим R_s^+ и R_s^- . Векторы $v(s, t)$, $v_0(s)$, $g(s, t)$ разлагаются на составляющие

$$\begin{aligned} v(s, t) &= v^-(s, t) + v^+(s, t) & v_0(s) &= v_0^-(s) + v_0^+(s), \\ g(s, t) &= g^-(s, t) + g^+(s, t). \end{aligned}$$

Так как операторы $P(s)$ и $e^{tP(s)}$ инвариантны в подпространствах R_s^- и R_s^+ , то мы имеем

$$\begin{aligned} v^-(s, t) &= e^{tP(s)} v_0^-(s) + \int_0^t e^{(t-\theta)P(s)} g^-(s, \theta) d\theta, \\ v^+(s, t) &= e^{tP(s)} v_0^+(s) + \int_0^t e^{(t-\theta)P(s)} g^+(s, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Как и в § 30, легко проверить, что вектор-функция $v^-(s, t)$ возрастает в R_s^- не быстрее некоторой степени t .

Выражение функции $v^+(s, t)$ мы запишем так:

$$v^+(s, t) = e^{tP(s)} \left\{ v_0^+(s) + \int_0^t e^{-\theta P(s)} g^+(s, \theta) d\theta \right\}. \quad (8)$$

Как и в § 30, проверяется, что интеграл

$$I(s) = \int_0^{\infty} e^{-\theta P(s)} g^+(s, \theta) d\theta$$

является сходящимся.

Очевидно, что он принадлежит подпространству R_s^+ . Введя его выражение в (8), мы получим

$$v^+(s, t) = e^{tP(s)} [v_0^+(s) + I(s)] - \int_t^{\infty} e^{(t-\theta)P(s)} g^+(s, \theta) d\theta.$$

Как и в § 30, легко убедиться, что последний интеграл возрастает в R_s не быстрее некоторой степени t . В то же время выражение $e^{tP(s)} [v_0^+(s) + I(s)]$ заведомо возрастает экспоненциально, если $v_0^+(s) + I(s) \neq 0$.

Отсюда следует, что *необходимым условием существования решения задачи (5) — (6), возрастающего при данном s не быстрее степени t , является выполнение соотношения:*

$$v_0^+(s) + I(s) \equiv v_0^+(s) + \int_0^\infty e^{-\theta P(s)} g^+(s, \theta) d\theta = 0. \quad (9)$$

5. Рассмотрим вид условия (9) п. 4 в интересующем нас случае одного уравнения

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u}{\partial t^k}. \quad (1)$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= && u_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} &= && u_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial t} &= P_0 \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_0 + P_1 \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_1 + \dots + P_{m-1} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_{m-1}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

которая после преобразования Фурье переходит в систему

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} &= && v_1, \\ \frac{dv_1}{dt} &= && v_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dv_{m-1}}{dt} &= P_0(s) v_0 + P_1(s) v_1 + \dots + P_{m-1}(s) v_{m-1} + g(s, t). \end{aligned}$$

Оператор $P(s)$ соответствует матрице

$$P(s) = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_0(s) & P_1(s) & \dots & P_{m-1}(s) \end{array} \right\|.$$

Его собственные векторы имеют вид (§ 25, п. 2)

$$e_j(s) = (1, \lambda_j, \dots, \lambda_j^{m-1}), \quad (j=0, 1, \dots, m-1),$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$ — корни уравнения

$$\lambda^m - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(s) \lambda^k = 0.$$

Любой вектор $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{m-1})$ можно разложить по базисным векторам e_0, e_1, \dots, e_{m-1} :

$$\xi = \xi^0 e_0 + \dots + \xi^{m-1} e_{m-1}.$$

В координатной форме это равенство принимает вид системы

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \xi^0 & + \xi^1 & + \dots + \xi^{m-1}, \\ \xi_1 &= \xi^0 \lambda_0 & + \xi^1 \lambda_1 & + \dots + \xi^{m-1} \lambda_{m-1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ \xi_{m-1} &= \xi^0 \lambda_0^{m-1} & + \xi^1 \lambda_1^{m-1} & + \dots + \xi^{m-1} \lambda_{m-1}^{m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Разрешая эту систему относительно неизвестных ξ^j , мы находим

$$\begin{aligned} \xi_j &= \frac{1}{W(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \xi_0 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_0 & \dots & \lambda_{j-1} & \xi_1 & \lambda_{j+1} & \dots & \lambda_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^{m-1} & \dots & \lambda_{j-1}^{m-1} & \xi_{m-1} & \lambda_{j+1}^{m-1} & \dots & \lambda_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{(-1)^j}{W(\lambda)} [\xi_0 W_{j0} - \xi_j W_{j1} + \dots + (-1)^{m-1} \xi_{m-1} W_{j, m-1}]. \end{aligned}$$

Здесь $W(\lambda)$ есть детерминант Вандермонда от величин $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$, а W_{jk} — его минор, полученный вычеркиванием k -го столбца и k -ой строки ($j, k = 0, 1, \dots, m-1$).

В частности, для вектора $v_0(s) = (v_0(s), \dots, v_{m-1}(s)) = \sum_{j=0}^{m-1} v^j e_j$ мы имеем

$$\begin{aligned} v^j(s) &= \frac{(-1)^j}{W(\lambda)} [v_0(s) W_{j0} - v_1(s) W_{j1} + \dots \\ &\dots + (-1)^{m-1} v_{m-1}(s) W_{j, m-1}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично, для вектора $g(s, t) = (0, 0, \dots, g(s, t)) = \sum_{j=0}^{m-1} g^j(s, t) e_j$ мы имеем

$$g^j(s, t) = \frac{(-1)^{j+m-1}}{W(\lambda)} W^{j, m-1} g(s, t). \quad (5)$$

Проектируя равенство (9) п. 4 на векторы e_r, \dots, e_{m-1} и вспоминая, что оператор $e^{tP(s)}$ переводит вектор e_j в $e^{t\lambda_j(s)}e_j$, мы можем записать равенство (9) п. 4 в форме

$$v^\nu(s) + \int_0^\infty e^{-\theta\lambda_\nu(s)} g^\nu(s, \theta) d\theta = 0 \quad (\nu = r, \dots, m-1). \quad (6)$$

Подставляя в (6) выражения (4) и (5) и сокращая на $(-1)^\nu$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{W_{\nu,0}}{W_{\nu,m-1}} v_0(s) - \frac{W_{\nu,1}}{W_{\nu,m-1}} v_1(s) + \dots + (-1)^{m-1} \frac{W_{\nu,m-1}}{W_{\nu,m-1}} v_{m-1}(s) = \\ = (-1)^m \int_0^\infty e^{-\theta\lambda_\nu(s)} g(s, \theta) d\theta \quad (\nu = r, \dots, m-1). \end{aligned} \quad (7)$$

Это и есть интересующее нас соотношение. Коэффициенты $\frac{W_{\nu,0}}{W_{\nu,m-1}}, \dots$

$\dots, \frac{W_{\nu,m-1}}{W_{\nu,m-1}} = 1$ представляют собою многочлены от величин

$\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$, степени не выше $m-1$. Сами корни — аналитические функции от s в полуплоскости $\text{Im } s > \beta$, растущие при $|s| \rightarrow \infty$ не быстрее $|s|^p$. Функции $v_0(s), \dots, v_{m-1}(s)$ по условию, принадлежат классу H_+^β . Поэтому левая часть равенства (7) является аналитической функцией от s при $\text{Im } s > \beta$, также принадлежащей классу H_+^β .

Каждая из величин

$$(-1)^m \int_0^\infty e^{-\theta\lambda_\nu(s)} g(s, \theta) d\theta = G_\nu(s) \quad (\nu = r, \dots, m-1), \quad (8)$$

как функция от s определена а priori только в области, где $\text{Re } \lambda_\nu(s) > 0$, $\text{Im } s > \beta$ и аналитична в этой области. Мы видим, что *необходимым условием разрешимости задачи (1)—(2)—(3) п. 1 является условие аналитической продолжимости функции $G_\nu(s)$ с той области, где она определена формулой (8), т. е. в области $\text{Re } \lambda_\nu(s) > 0$, $\text{Im } s > \beta$, на всю полуплоскость $\text{Im } s > \beta$, причем полученная функция должна принадлежать классу H_+^β .* Необходимость условия теоремы 1, таким образом, доказана.

6. Переходим теперь к доказательству достаточности.

Пусть для уравнения (1) и граничных условий (2) п. 1 построена функция $g(s, t)$ по формуле (15) п. 1, и пусть известно, что все функции

$$G_\nu(s) = (-1)^m \int_0^\infty e^{-\theta\lambda_\nu(s)} g(s, \theta) d\theta \quad (\nu = r, \dots, m-1)$$

аналитически продолжаются в полуплоскость $\text{Im } s > \beta$ до функций класса H_+^β . Покажем, что задача (1)—(2)—(3) п. 1 обладает решением, удовлетворяющим поставленным условиям.

Вначале убедимся, что уравнения (7) п. 5, написанные в форме

$$Q_{v_0}v_0 - Q_{v_1}v_1 + \dots + (-1)^{m-1}Q_{v, m-1} = G_v(s) \quad (v = r, \dots, m-1) \quad (1)$$

($Q_{v,k} = W_{v,k}/W_{v, m-1}$), позволяющие однозначно определить в каждой точке s значения $v_r(s), \dots, v_{m-1}(s)$ через $v_0(s), \dots, v_{r-1}(s)$ и $G_v(s)$. Прежде всего формула (6) п. 5 определяет величины $v^r(s), \dots, v^{m-1}(s)$ через $G(\lambda_r), \dots, G(\lambda_{m-1})$:

$$v^v(s) = - \int_0^\infty e^{-\theta \lambda_v(s)} g^v(s, \theta) d\theta = \frac{(-1)^{v+m}}{W(\lambda)} W_{\lambda, m-1} G_v(s).$$

Так как алгебраическая функция $Q_{v, m-1}(s)$ имеет при $|s| \rightarrow \infty$ рост не выше степенного, то $v^v(s) \in H_+^\beta$ вместе с $G_v(s)$.

Найдем величины v^0, \dots, v^{r-1} . Для этого используем первые r уравнений системы (3) п. 5 для $\xi = v_0^r$

$$\begin{aligned} v_0 &= v^0 & + v^1 & + \dots + v^{m-1} \\ v_1 &= v^0 \lambda_0 & + v^1 \lambda_1 & + \dots + v^{m-1} \lambda_{m-1} \\ &\dots & & \\ &\dots & & \\ v_{r-1} &= v^0 \lambda_0^{r-1} & + v^1 \lambda_1^{r-1} & + \dots + v^{m-1} \lambda_{m-1}^{r-1}. \end{aligned}$$

Так как определитель этой системы при $\text{Im } s > \beta$ отличен от нуля, то величины v^0, \dots, v^{r-1} определяются однозначно через v_0, \dots, v_{r-1} и v^r, \dots, v^{m-1} , т. е. в конечном счете, через v_0, \dots, v_{r-1} и $G(\lambda_r), \dots, G(\lambda_{m-1})$. Указанный определитель есть алгебраическая функция от s ; его обратная величина возрастает при $|s| \rightarrow \infty$ не быстрее степени s и, следовательно, функции v^0, \dots, v^{r-1} принадлежат к H_+^β вместе с v_0, \dots, v_{r-1} . Искомые функции v_r, \dots, v_{m-1} определяются через величины $v_0, \dots, v_{r-1}, G_r(s), \dots, G_{m-1}(s)$ по последним $m-r$ уравнениям системы 3 п. 5, причем снова ясно, что результаты принадлежат пространству H_+^β .

Решение задачи, как мы знаем, при каждом s однозначно определяется через $v_0(s), \dots, v_{m-1}(s)$ и $g(s, t)$ по формуле (7) п. 4:

$$v(s, t) = e^{tP(s)} \left[v_0(s) + \int_0^t e^{-\theta P(s)} g(s, \theta) d\theta \right] \quad (2)$$

или с учетом (9) п. 4

$$v(s, t) = e^{tP(s)} \left[v_0^-(s) + \int_0^t e^{-\theta P(s)} g^-(s, \theta) d\theta \right] - \int_t^\infty e^{(t-\theta)P(s)} g^+(s, \theta) d\theta. \quad (3)$$

Формула (2) показывает, что $v(s, t)$ при каждом t и каждом s в полуплоскости $\text{Im } s > \beta$ есть аналитическая функция. Нужно показать, что она принадлежит к классу H_+^β и возрастает в нем не быстрее Ct^h . Мы воспользуемся при этом формулой (3) и основным результатом § 30. Там было показано следующее: если имеется уравнение

$$\frac{d^m v}{dt^m} - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(\sigma) \frac{d^k v}{dt^k} = g(\sigma, t) \quad (4)$$

и на области значений σ , где вещественные части величин $\lambda_0(\sigma), \dots, \lambda_{m-1}(\sigma)$ сохраняют знаки (так что, например, $\text{Re } \lambda_j(\sigma) \leq 0$ при $j \leq r-1$ и $\text{Re } \lambda_\nu(\sigma) > 0$ при $\nu \geq r$) заданы квадратично интегрируемые после деления на некоторую степень $|\sigma| + 1$ начальные функции $v_0(\sigma) = v(\sigma, 0)$, $v_1(\sigma) = \frac{dv(\sigma, 0)}{dt}$, \dots , $v_{m-1}(\sigma) = \frac{d^{m-1}v(\sigma, 0)}{dt^{m-1}}$, удовлетворяющие соотношениям

$$Q_{v_0} v_0 - Q_{v_1} v_1 + \dots + (-1)^{m-1} Q_{v_{m-1}} v_{m-1} = (-1)^m \int_0^\infty e^{-\theta \lambda_\nu(\sigma)} g(\sigma, \theta) d\theta,$$

то существует решение $v(\sigma, t)$, удовлетворяющие поставленным начальным условиям и неравенству:

$$|v(t, s)| \leq Ct^{m-2} \int_0^t |g(\theta, s)| d\theta + C \int_t^\infty (\theta + t)^{m-1} e^{-\theta \text{Re } \lambda_r(s)} |g(\theta + t, s)| d\theta + C(1+t)^m (1+|s|)^m (p-1) \sum_{k=0}^{r-1} |v_k(s)|, \quad (5)$$

где $\lambda_r(s)$ — корень с наименьшей положительной вещественной частью.

Поскольку вся полуплоскость $\text{Im } s > \beta$ может быть представлена, как конечное объединение областей, где вещественные части харак-

теристических корней не меняют знака, оценка вида (5) справедлива во всей полуплоскости $\text{Im } s > \beta$. Но в таком случае эта оценка, по условию, приводит к тому, что $v(t, s)$ принадлежит к пространству H_+^{β} и возрастает в нем не быстрее степени t , что и требовалось.

Замечание 1. Так же как в § 26, условие задачи может быть видоизменено: можно разыскивать решения в классе функций $u(t, x) \in H_+^{\beta}$, растущих при $t \rightarrow \infty$ не быстрее степени t , а экспоненциально-степенной функции вида $t^h e^{at}$ с фиксированным показателем a . При этом в определении числа r в условии теоремы нужно будет ввести изменение; в полуплоскости $\text{Im } s > \beta$ корни $\lambda_0(s), \dots, \lambda_{r-1}(s)$ должны иметь всюду вещественную часть, не превосходящую a . В частности, это выполнено для уравнений, корректных по Петровскому относительно $\frac{\partial}{\partial x}$ в обычном смысле, т. е. таких, у которых $\text{Im } s_j(\lambda)$ остается при $\text{Re } \lambda = 0$ ограниченной некоторой постоянной. Обозначая эту постоянную через a , мы получаем, как и выше в примере б) п. 2, что в полуплоскости $\text{Im } s > 0$ величины $\text{Re } \lambda_0(s), \dots, \text{Re } \lambda_{r-1}(s)$ не превосходят a . Таким образом, результаты примера б) п. 2 распространяются с указанным изменением на этот общий случай.

Замечание 2. Результаты, полученные для четверти плоскости, могут быть применены для определения корректных задач в четверти пространства: $t \geq 0, x_1 \geq 0, -\infty < x_2 < \infty, \dots, -\infty < x_n < \infty$, для уравнений вида

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(t \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, t \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \frac{\partial^k u}{\partial t^k}. \quad (6)$$

Это уравнение путем преобразования Фурье по x_2, \dots, x_n приводится к виду (1) с параметрами $\sigma_2, \dots, \sigma_n$. Начальные функции $u(0, x_1, \dots, x_n), \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}(0, x_1, \dots, x_n)$ переходят при этом в функции

$$\tilde{u}(0, x_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \dots, \frac{\partial^{m-1} \tilde{u}(0, x_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)}{\partial t^{m-1}}.$$

Пусть, например, уравнение (6) вполне корректно по Петровскому относительно $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Это означает, что корни уравнения

$$\lambda^m = \sum_{k=0}^{m-1} p_k(s_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \lambda^k \quad (7)$$

при любых фиксированных $\sigma_2, \dots, \sigma_n$ в некоторой полуплоскости $\text{Im } s_1 > \beta$ имеют всюду либо неположительную, либо положительную

вещественную часть, причем число r корней с неположительной вещественной частью не зависит от $\sigma_2, \dots, \sigma_n$. Тогда корректная задача состоит в задании функций

$$u(t, 0, x_2, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial^{p-1} u(t, 0, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{p-1}},$$

$$u(0, x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial^{r-1} u(0, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial t^{r-1}},$$

удовлетворяющих условиям, аналогичным приведенным в примерах п. 2.

Условие полной корректности по Петровскому относительно $\frac{\partial}{\partial x_1}$ имеет эквивалентную более привычную формулировку: если $\operatorname{Re} \lambda = 0$, то все корни $s_1 = s_1(\lambda_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ имеют неположительную вещественную часть. Как и в замечании 1, могут быть рассмотрены и уравнения, корректные по Петровскому, это означает, что при $\operatorname{Re} \lambda = 0$ вещественные части корней $s_1(\lambda_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ ограничены фиксированной постоянной α , и тогда рост искомых функций по t в корректных задачах ограничивается экспоненциально-степенной функцией вида $t^h e^{\alpha t}$.

КРАТКИЕ ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Хотя предпосылки для формирования теории обобщенных функций складывались и в недрах классической математики, все же явно вводить и использовать соответствующие понятия первыми стали физики [1]. Строгое математическое оформление идея обобщенной функции как функционала получила впервые в работах С. Л. Соболева [2]. Систематическое построение теории с многочисленными убедительными примерами было произведено Л. Шварцем [3]. Весьма быстро после появления книг Шварца идеи обобщенных функций распространились на большую часть анализа, где они прояснили многие старые факты и позволили установить новые общие закономерности. В серии книг И. М. Гельфанда и других авторов под общим названием «Обобщенные функции» [4—8] теория обобщенных функций получила дальнейшее развитие, которое кроме определенного вклада в классические области анализа включило в сферу своего действия новые области — общую теорию меры в топологических линейных пространствах, теорию представлений классических групп, теорию случайных процессов.

С развитием теории обобщенных функций стало возможным построение общей теории уравнений с частными производными, не налагающей каких-либо условий на тип и порядок уравнения. Хотя роль фундаментальных решений в классических задачах была известна во всяком случае еще в прошлом веке, только теория обобщенных функций дала возможность четко определить само понятие фундаментальной функции (фундаментального решения) дифференциального оператора и поставить вопрос об ее существовании. Для произвольного линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами существование фундаментальной функции было доказано впервые Б. Мальгранжем [9]. Класс гипозэллиптических уравнений был описан впервые Л. Хёрмандером [10]. Первое общее исследование фундаментальных функций для негипозэллиптических операторов было проведено В. А. Боровиковым [11]. Метод Радона для построения фундаментальных решений эллиптических и гиперболических уравнений систематически применял Ф. Йон [12]. Общая постановка проблемы об описании корректных граничных задач в полупространстве и ее решение даны в работах Г. В. Дикополова, В. П. Паламодова, Г. Е. Шилова [13—16].

Мы описали в этой книге лишь весьма небольшую часть из всего многообразия идей, проблем, результатов, относящихся к общей теории уравнений с частными производными. Читатели, желающие получить более полную информацию о современном состоянии этой области, могут обратиться к обзорному докладу М. И. Вишика и Г. Е. Шилова на IV Всесоюзном математическом съезде [17], где приведена и обширная библиография. Отметим также две новые содержательные монографии — Л. Хёрмандера [18] и Ф. Трева [19].

[1] П. А. Дирак. Принципы квантовой механики (перевод с четвертого английского издания), Физматгиз, 1960.

[2] С. Л. Соболев, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, Математический сборник, № 1 (43) (1936), 39—72.

[3] L. Schwartz, Théorie des distributions, I, II, Paris, 1950—1951.

[4] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, 2-е изд., Физматгиз, 1959.

[5] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Пространства основных и обобщенных функций, Физматгиз, 1958.

[6] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1958.

[7] И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, Физматгиз, 1961.

[8] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, М. И. Граев, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, Физматгиз, 1962.

[9] B. Malgrange, Équations aux dérivées partielles à coefficients constants, I. Solution élémentaire, C. R. Acad. Sci., 237, № 25 (1953), 1620—1622.

[10] L. Hörmander, On the theory of general partial differential operators, Acta Mathematica, 94 (1955), 161—248. (Русский перевод: Л. Хёрмандер, К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. ИЛ, 1959.)

[11] В. А. Боровиков, Фундаментальные решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, Труды Московского Математического общества, т. 8 (1959), 199—258.

[12] Ф. Йон, Плоские волны и сферические средние, ИЛ, 1958.

[13] Г. В. Дикополов и Г. Е. Шилов, О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, ИАН, сер. мат., т. 24 (1960), 369—380.

[14] В. П. Паламодов, О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, ИАН, сер. мат., т. 24 (1960), 381—386.

[15] Г. В. Дикополов и Г. Е. Шилов, О корректных краевых задачах в полупространстве для уравнений в частных производных с правой частью, Сибирский матем. журнал, т. 2, № 1 (1960), 45—61.

[16] Г. Е. Шилов, О граничных задачах в четверти плоскости для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, Сибирский матем. журнал, т. 2, № 1 (1961), 144—160.

[17] М. И. Вишики и Г. Е. Шилов, Общая теория уравнений с частными производными и некоторые проблемы теории краевых задач, Труды IV Всесоюзного математического съезда, Ленинград (1961), т. I, Изд-во АН СССР, Ленинград (1963), стр. 55—85.

[18] L. Hörmander, Linear differential operators, 1964. (Русский перевод: Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы, «Мир», 1965.)

[19] F. Trèves, Lectures on the theory of partial differential equations, 1963. (Русский перевод: Ф. Трев, Лекции по теории дифференциальных уравнений в частных производных, «Мир», 1965.)

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абеля интегральное уравнение 123
Авербух В. И. 271
Антианалитические функции 309
- Бесселевы функции 152
Бродский М. Л. 72
- Гиперболическое уравнение 263
Гипоэллиптический оператор 163
Гипоэллиптическое уравнение 163
Горин Е. А. 122, 197
Граничная задача 34
Грушин В. В. 108, 199
 δ -образная последовательность 68
 δ -функция 16, 40
—, ее преобразование Фурье 144, 149
— — разложение на плоские волны 103
— сдвинутая 19, 40
— —, ее преобразование Фурье 146
- Детерминант Ван-дер-Монда 224
— — обобщенный 223
Диаграмма модулей 180
Дифференцирование обобщенных функций 23, 43
- Задача Дирихле 215
— Коши 215
— —, ее фундаментальное решение 254
— — для системы, корректной по Петровскому 250
— — для уравнения, корректного по Петровскому 303
— Радона 103
- Интегральное уравнение Абеля 123
Интерполяционный многочлен Ньютона 219, 227
- Каноническая регуляризация 103, 108
Класс Жеврея 164, 166
- Кондрашов В. Е. 271, 272
Краевая задача 214
— — корректная 214
- Лемма Пэли и Винера 312
Лестница Хёрмандера 172
Локально конечное покрытие 63
- Матрица Ван-дер-Монда обобщенная 226
Метод Радона 206
Митягин Б. С. 133
- Неопределенный интеграл обобщенной функции 31
— — — порядка λ 123
Носитель 12, 38, 60
- Обобщенная производная по С. Л. Соболеву 44
— функция 16, 39
— —, аналитическая по параметру 73
— —, — — —, ее аналитическое продолжение 75
— —, — — —, ее разложение в ряд Тейлора 75
— — в комплексном пространстве 20
— — в области 42
— —, дифференцируемая по параметру 74
— —, единица 16
— —, —, ее преобразование Фурье 143, 149
— —, ее интеграл по параметру 73
— —, ее неопределенный интеграл 31
— —, ее первообразная 31
— —, ее поворот 149
— —, ее преобразование Фурье 141, 147
— —, ее производная по параметру 74
— —, имеющая рост не выше степенного 91

- Обобщенная функция, непрерывная по параметру 72
 — — нечетная 94
 — — однородная 42
 — —, ее преобразование Фурье 156
 — — от аргумента (ω, x) 41
 — — —, ее интеграл по ω 77, 87
 — — постоянная 16
 — —, равная нулю в области 59
 — — — при $x < 0$ 33
 — —, сосредоточенная на множестве 60
 — — — — поверхности 40
 — —, стремящаяся к нулю на бесконечности 58
 — — сферически симметричная 42
 — — типа меры 122
 — — финитная 60
 — —, ее преобразование Фурье 150
 — — четная 94
 — — $\delta(x)$ 16, 40
 — —, ее порядок сингулярности 20, 49
 — —, ее преобразование Фурье 144, 149
 — — $\theta(x)$ 24, 44
 — — $\frac{1}{x}$ 19
 — —, ее преобразование Фурье 144
 — — x_+^λ 92
 — —, ее преобразование Фурье 146
 — — x_-^λ 94
 — — $|x|^\lambda$ 94
 — —, ее преобразование Фурье 146
 — — $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ 94
 — — $\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)}$ 104
 — — x^{-m} 95
 — —, ее преобразование Фурье 144
 — — x_+^{-n} 104
 — — x_-^{-n} 104
 — — $(\sigma + i0)^\lambda$ 146
 — — r^λ 98
 — —, ее преобразование Фурье 156
 — — —, ее разложение на плоские волны 103
 — — $\delta(r - a)$ 153
- Обобщенные функции, их дифференцирование 23, 43
 — —, их свертка 111, 121, 280
 — —, —, ее преобразование Фурье 154
 — —, их сложение 23, 43
 — —, их сходимость 66
 — —, их умножение 79
 Обычная функция 9, 38
 — — однородная 42
 — — сферически симметричная 42
 Объем шара 78
 Оператор β -гипоэллиптический 167
 — гипоэллиптический 163
 — Лапласа 47
 — — итерированный 50
 — —, его фундаментальная функция 50
 — эллиптический 202
 — — однородный 207
- Паламонов В. П. 91, 271, 323
 Первообразная обобщенной функции 31
 Петровский И. Г. 250, 284, 303, 321, 322
 Поворот обобщенной функции 149
 Показатель гипоэллиптичности 198, 205
 — регулярности 253
 Поверхность шара 78
 Порядок сингулярности 19, 40
 — — $c(f)$ 124
 — — $s(f)$ 123
 Правильная дифференцируемость 253
 — сходимость 252
 Предел последовательности обобщенных функций 72
 Преобразование Фурье обобщенной функции 141, 147
 — — — двойное 143
 — — — основной функции 134, 147
 Пробная функция 12
 Производная обобщенной функции 23
 Пространство A_n 157
 — S_m 157
 — D_m 91
 — \mathcal{S} 215
 — —, свертыватели в нем 252
 — — H 215
 — \mathcal{S}_+^β 305
 — H_+^β 305
 — $\mathcal{S}_+^{\beta, q}$ 313
 — $H_+^{\beta, q}$ 313

- Пространство $\mathcal{S}_+^{\beta, 0}$ 311
 — $H_+^{\beta, 0}$ 313
 — K 12, 38
 — —, его неметризуемость 13
 — —, его полнота 14
 — —, сходимость в нем 13, 39
 — —, топология в нем 15
 — K_n 38
 — $K(G)$ 41
 — K' 18
 — K'_n 39
 — —, его полнота 69
 — S 90
 — S' 90
 — —, его преобразование Фурье 156
 — Z 136
 — Z' 139
 — Z_n 148
 — Z_n 148
 Равенство обобщенных функций 16, 39
 Разделенная разность 228
 — — двойная 228
 Разложение дельта-функции на плоские волны 103
 — единицы 63
 — функции r^λ на плоские волны 101
 Разрешающая функция 255
 Регуляризация 22, 42
 — каноническая 103, 108
 Регулярная краевая задача 253
 — — —, ее фундаментальное решение 254
 — функция 16, 39
 Регулярное уравнение 253
 — —, его разрешающая функция 267
 — —, его функция Грина 270, 287
 Свертка обобщенных функций 111, 121, 250
 — — —, ее преобразование Фурье 154
 — — —, сосредоточенных на полуоси 122
 Свертка обычных функций 66
 — основной и обобщенной функций 111
 Сингулярная обобщенная функция 16, 40
 Сложение обобщенных функций 43
 Смолянов О. Г. 15
 Соболев С. Л. 44, 309
 Сходимость обобщенных функций 66
 Теорема Зайденберга — Тарского 197
 — Уитни 89
 Тимошкина С. А. 271
 Ультрагиперболическое уравнение 219
 Уравнение β -гипоэллиптическое 167
 — волновое 215, 218, 258, 274, 308
 —, вполне корректное по Петровскому 321
 — гиперболическое 263
 — гипоэллиптическое 163
 —, корректное по Петровскому 250
 — Лапласа 215, 218, 248, 260, 273, 310
 — регулярное 253
 — теплопроводности 215, 218, 258, 273
 — — обратное 218
 — ультрагиперболическое 219
 — эллиптическое 263
 Финитная обобщенная функция 60
 — — —, ее преобразование Фурье 150
 — функция 10
 Формула Грина 47
 — Херглота — Петровского 284
 Фундаментальная функция 37, 49
 — —, ее существование 169
 — — оператора Лапласа 49
 — — — итерированного 50
 — — — $\Delta + k^2$ 57
 Функции Бесселя 152
 Функция Грина 254
 — обобщенная 16, 39
 — обычная 9, 38
 — основная 12, 38
 — пробная 12
 — регулярная 16, 39
 — сингулярная 16, 40
 — финитная 10
 — фундаментальная 37, 49
 Характеристический конус 171
 Эллиптический оператор 202
 — — однородный 207

Георгий Евгеньевич Шишов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Второй специальный курс

М., 1965 г., 328 стр. с илл.

Редактор *Е. А. Горин*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова*

Корректор *З. В. Автонева*

Сдано в набор 9/VI 1965 г. Подписано к печати 24/IX 1965 г. Бумага 60×90^{1/16}. Физ. печ. л. 20,5. Условн. печ. л. 20,5. Уч.-изд. л. 19,78. Тираж 25 000 экз. Т-10784. Цена книги 69 коп. Заказ № 1569.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома
Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати.
Измайловский проспект, 29.